

**Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков**

**УПРАВЛЕНИЕ  
ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ  
ПРИ ВНЕШНИХ  
ВОЗМУЩЕНИЯХ**

**Техника линейных  
матричных неравенств**



**URSS**

**МОСКВА**

**Поляк Борис Теодорович,  
Хлебников Михаил Владимирович,  
Щербаков Павел Сергеевич**

**Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника  
линейных матричных неравенств. — М.: ЛЕНАНД, 2014. — 560 с.**

Книга посвящена современным направлениям в теории управления. Основное внимание в ней уделяется проблеме подавления ограниченных внешних возмущений. Эта проблема на сегодняшний день довольно слабо представлена в существующей литературе, хотя является весьма важной с точки зрения приложений. Для изучения материала данной монографии не обязательны знания «классической» теории автоматического управления, однако, знакомство с основами этой теории будет весьма полезно для понимания особенностей новых подходов.

Книга предназначена для студентов, желающих углубить свои знания, аспирантов, а также специалистов по теории управления.

ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 35. Зак. №

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография». Филиал «Чеховский печатный двор».  
142300, Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.

**ISBN 978–5–9710–0793–7**

© ЛЕНАНД, 2013

14230 ID 179326



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	7
Введение . . . . .	9
Список обозначений . . . . .	18
<b>1. Линейные системы управления . . . . .</b>	<b>24</b>
1.1. Описание линейных систем . . . . .	24
1.1.1. Пространство состояний . . . . .	25
1.1.2. Нормы сигналов и операторов . . . . .	32
1.2. Устойчивость . . . . .	38
1.2.1. Матричное уравнение Ляпунова и его свойства . . . . .	38
1.2.2. Устойчивость линейных непрерывных систем . . . . .	53
1.2.3. Устойчивость линейных дискретных систем . . . . .	61
1.3. Виды управления . . . . .	69
1.3.1. Программное управление. Управляемость . . . . .	70
1.3.2. Наблюдаемость . . . . .	78
1.3.3. Управление в форме обратной связи . . . . .	81
1.4. Стабилизация . . . . .	83
1.4.1. Обратная связь по состоянию. Размещение полюсов . . . . .	83
1.4.2. Обратная связь по выходу. Наблюдатель Льюенбергера . . . . .	91
1.5. Множества достижимости для устойчивых систем . . . . .	95
1.5.1. Множество достижимости линейной системы . . . . .	96
1.5.2. $L_2$ -ограниченные возмущения . . . . .	99
1.5.3. $L_\infty$ -ограниченные возмущения . . . . .	102
1.6. Системы с неопределенностью . . . . .	107
1.6.1. Основные типы неопределенности . . . . .	108
1.6.2. Робастная устойчивость . . . . .	116

<b>2. Линейные матричные неравенства в задачах управления . . . . .</b>	<b>122</b>
2.1. Основные понятия и свойства . . . . .	122
2.2. Некоторые технические средства и типичные задачи . .	134
2.2.1. Лемма Шура и следствия из нее . . . . .	134
2.2.2. Матричное описание эллипсоидов . . . . .	141
2.2.3. $S$ -процедура и следствия из нее . . . . .	150
2.2.4. Лемма Питерсена и ее обобщения . . . . .	153
2.3. Робастная квадратичная устойчивость . . . . .	165
2.3.1. Параметрическая неопределенность . . . . .	166
2.3.2. Структурированная неопределенность . . . . .	169
2.3.3. Дробно-линейная неопределенность . . . . .	172
2.4. Квадратичная стабилизация . . . . .	174
2.4.1. Квадратичная стабилизация . . . . .	174
2.4.2. Робастная квадратичная стабилизация . . . . .	184
2.5. Оптимальное управление . . . . .	191
2.5.1. Линейно-квадратичный регулятор . . . . .	191
2.5.2. $H_\infty$ -оптимизация . . . . .	197
2.6. Робастное управление . . . . .	204
2.6.1. Робастный линейно-квадратичный регулятор . . .	204
2.6.2. $H_\infty$ -оптимизация: робастный вариант . . . . .	207
<b>3. Системы с ограниченными внешними возмущениями. Метод инвариантных эллипсоидов . .</b>	<b>211</b>
3.1. Задача анализа . . . . .	212
3.1.1. Непрерывный случай . . . . .	212
3.1.2. Дискретный случай . . . . .	236
3.1.3. Робастные постановки . . . . .	251
3.2. Фильтрация внешних возмущений . . . . .	262
3.2.1. Задача фильтрации . . . . .	263
3.2.2. Фильтрация при наличии неопределенностей . . .	272
<b>4. Подавление ограниченных внешних возмущений . . .</b>	<b>288</b>
4.1. Влияние внешних возмущений . . . . .	288
4.2. Управление по состоянию . . . . .	292
4.2.1. Непрерывный случай . . . . .	292
4.2.2. Дискретный случай . . . . .	314
4.3. Управление по выходу . . . . .	322
4.3.1. Управление по выходу с помощью наблюдателя .	322
4.3.2. Линейный динамический регулятор . . . . .	335

<b>5. Робастное подавление внешних возмущений . . . . .</b>	<b>354</b>
5.1. Управление по состоянию . . . . .	354
5.1.1. Непрерывный случай . . . . .	354
5.1.2. Дискретный случай . . . . .	362
5.2. Нехрупкий регулятор . . . . .	372
5.2.1. Непрерывный случай . . . . .	372
5.2.2. Дискретный случай . . . . .	384
5.2.3. Робастная постановка . . . . .	388
5.3. Линейный динамический регулятор . . . . .	396
5.3.1. Непрерывный случай . . . . .	396
5.3.2. Дискретный случай . . . . .	402
<b>6. Разные задачи . . . . .</b>	<b>407</b>
6.1. Нелинейные системы с ограниченными возмущениями . . . . .	407
6.1.1. Непрерывный случай . . . . .	408
6.1.2. Дискретный случай . . . . .	416
6.2. Нестационарные линейные системы . . . . .	422
6.2.1. Непрерывный случай . . . . .	423
6.2.2. Дискретный случай . . . . .	430
6.3. Оценка времени установления . . . . .	438
6.3.1. Непрерывный случай . . . . .	438
6.3.2. Дискретный случай . . . . .	444
6.4. Положительные линейные системы . . . . .	448
6.4.1. Условия положительности и устойчивости . . . . .	449
6.4.2. Внешние возмущения . . . . .	454
6.4.3. Стабилизация . . . . .	458
6.4.4. Робастность . . . . .	458
<b>7. Вычислительные методы и практические задачи . . . . .</b>	<b>460</b>
7.1. Программные пакеты и вычислительные средства . . . . .	460
7.2. Итерационный метод . . . . .	463
7.2.1. Непрерывный случай . . . . .	464
7.2.2. Дискретный случай . . . . .	473
7.3. Некоторые практические задачи . . . . .	480
7.3.1. Подавление колебаний вертикального сооружения . . . . .	480
7.3.2. Управление гироскопом . . . . .	487
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>492</b>

---

<b>Приложение</b> . . . . .	<b>493</b>
А. Элементарные свойства матриц . . . . .	493
Б. Нормы матриц . . . . .	496
В. Матричные разложения . . . . .	500
Г. Функции от матриц . . . . .	505
Д. Две теоремы об управляемости . . . . .	513
Е. Разное . . . . .	515
<b>Библиографический комментарий</b> . . . . .	<b>518</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>528</b>
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	<b>546</b>

# Предисловие

В 2002 году была опубликована книга Б. Т. Поляка и П. С. Щербакова “Робастная устойчивость и управление”, в которой предпринята попытка изложить основные достижения линейной теории управления, полученные с 80-х годов прошлого века. В ней сделан упор на проблемы робастности, то есть управления в условиях неопределенности. За минувшее с тех пор время взгляд на некоторые вопросы, в ней освещенные, несколько изменился, пришло новое понимание важности тех или иных разделов теории управления и методов решения задач, появились или приобрели всеобщее распространение более совершенные и удобные пакеты программ для решения соответствующих задач оптимизации.

В эти же годы авторами настоящей монографии получен ряд результатов по применению линейных матричных неравенств и техники инвариантных эллипсоидов к управлению линейными системами в присутствии внешних возмущений и системных неопределенностей. На наш взгляд это направление, будучи недостаточно освещенным (прежде всего, в отечественной литературе) представляет несомненный интерес. Настоящая книга и концентрируется на этих вопросах, излагаемых в гораздо более систематической и детальной форме, чем в монографии “Робастная устойчивость и управление”, не являясь ни ее продолжением, ни переработанной версией, а самостоятельным трудом.

Таким образом, данная работа стоит на трех тесно связанных друг с другом китах: квадратичных функциях Ляпунова, линейных матричных неравенствах и инвариантных эллипсоидах. При этом основное внимание уделяется проблеме ограниченных внешних возмущений; эта проблема является и весьма важной с точки зрения приложений, и слабо представленной в литературе. В то же время, в книге опущены разделы, относящиеся к полиномам, частотным методам,  $\ell_1$ -оптимизации, сверхустойчивости, рандомизации, некоторым классическим под-

ходам. Отметим также, что авторы практически полностью остаются в рамках линейной теории — и рассматриваемые системы, и виды обратной связи предполагаются линейными. Конечно, это очень серьезное ограничение; оно вызвано как особенностями используемого аппарата, так и научными интересами авторов монографии.

Авторы благодарны Институту проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, в котором они работают в течение многих лет, за предоставленную возможность заниматься теоретическими исследованиями. Славные научные традиции Института служили для нас образцами для подражания. Авторы также признательны Лаборатории предсказательного моделирования МФТИ за плодотворное сотрудничество и финансовую поддержку издания книги.



# Введение

Начнем с нескольких слов о развитии и тенденциях теории управления.

В основном это молодая наука, находящаяся в процессе интенсивного развития. При этом существенно меняются взгляды на предмет и основные проблемы данной дисциплины, равно как и используемый математический аппарат.

В XIX веке главным объектом исследования были автоматические регуляторы производственных процессов, такие как регулятор Уатта для паровой машины. Было введено важнейшее понятие устойчивости регулируемого процесса и получены первые критерии устойчивости линейных систем, выражаемые в терминах характеристического полинома (Максвелл, Раус, Вышнеградский, Гурвиц, Стодола). В работах А. М. Ляпунова были получены первые результаты по устойчивости нелинейных систем, опирающиеся на фундаментальную идею введения функции Ляпунова.

В 30-е годы XX века, с появлением телефонии и радиосвязи, основным аппаратом теории становятся частотные методы и соответствующие частотные критерии устойчивости (Найквиста, Михайлова). Эти методы в 40-е–50-е годы распространяются на импульсные и дискретные системы (Цыпкин, Джури) — такие системы приобретают особую роль в связи с появлением цифровой вычислительной техники, — а также на некоторые классы нелинейных систем (теория абсолютной устойчивости — Лурье, Айзерман, Попов).

Однако в конце 50-х годов происходит очередное обновление в теории управления. В связи с развитием ракет и космонавтики возникает совершенно новый аппарат описания систем управления — описание в пространстве состояний. Иначе говоря, движение системы подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению (вообще говоря, нелинейному), в правой части которого стоит функция, которая может выбираться проектировщиком (управление). Более того, возник-

ла фундаментальная идея оптимальности — выбор управления должен оптимизировать некоторый показатель качества. В такой постановке задача управления имеет много общего с классическими задачами вариационного исчисления. В дело исследования систем управления включились математики; результатом явилась разработка “принципа максимума Понтрягина” — необходимого условия оптимальности управляемой системы. Работы специалистов по управлению (Калман, Беллман, Летов) помогли инженерам осознать важность и продуктивность созданной теории оптимального управления.

В то же время постепенно выяснилось, что такая теория адекватно описывает лишь сравнительно узкий круг практических задач, таких как управление космическим полетом или наведение ракет. В остальных ситуациях имеется масса факторов, препятствующих применению красивой математической теории оптимального управления. Во-первых, в каждой задаче имеется неизбежная неопределенность, связанная либо с наличием внешних возмущений, либо с невозможностью точно определить параметры модели. Во-вторых, в теории оптимального управления решение ищется в виде функции от времени (программное управление). Ясно, что необходимость строить стратегию управления заранее является крайне нежелательной. Для инженера гораздо более естественно выбирать управление в форме обратной связи, как функцию от выхода системы в текущий момент (задача синтеза).

Подобное критическое отношение вызвало ревизию теории управления в 70-е годы. В инженерной практике происходит возврат к классическим способам регулирования с помощью простых регуляторов (типа ПИД) и к простым методам их настройки. В теории восстанавливается интерес к частотным методам; они обобщаются на случай многомерных систем (Розенброк). Однако подлинная революция произошла в 80-е годы. Возникла так называемая  $H_\infty$ -теория (Зеймс, Френсис, Дойл, Гловер); она позволила объединить частотные методы и методы пространства состояний и по-новому ставить оптимизационные задачи. Эта же постановка позволила рассматривать задачи с неопределенностью (робастное управление); именно, задачи, в которых частотная характеристика объекта имеет неопределенность, ограниченную в  $H_\infty$ -норме. Появились и другие постановки задач робастного управления, в которых неопределенность может быть задана иначе — либо как параметрическая, либо как ограниченная в матричной норме при описании в пространстве состояний. При этом были найдены многие красивые решения отдельных задач, например, задача

о робастной устойчивости интервального полинома допускает очень простое решение (теорема Харитоновна). Был создан математический аппарат, позволяющий единообразно исследовать различные виды неопределенностей —  $\mu$ -анализ (Дойл).

Помимо  $H_\infty$ -теории и робастности, новое решение получил ряд других разделов теории управления. Так, задача о подавлении ограниченных внешних возмущений привела к появлению так называемой  $l_1$ -оптимизации (Барабанов–Граничин, Пирсон–Далех). Новый математический аппарат, оказавшийся чрезвычайно удобным, связан с так называемыми линейными матричными неравенствами. Эти неравенства возникли еще в 60-е годы в ряде задач управления (Якубович, Виллемс); позже выяснилось (Бойд), что они представляют собой очень общий метод анализа и синтеза линейных систем. Наличие эффективных программ решения линейных матричных неравенств (Нестеров–Немировский) сделало этот аппарат весьма эффективным с вычислительной точки зрения.

Как видит читатель, за последние годы теория управления претерпела очень большие изменения. К сожалению, они слабо отражены в отечественной учебной литературе. Большинство монографий на русском языке в основном дает представление о положении в теории управления к началу 80-х годов. Вышедшие за последние годы учебники [9, 14, 76, 82] затрагивают, как правило, лишь отдельные стороны современной теории. Некоторую информацию можно извлечь из статей и обзоров на русском языке, однако все это дает лишь мозаичную картину предмета. В книге Б. Т. Поляка и П. С. Щербакова “Робастная устойчивость и управление” [89] изложено большое количество материала о современных разделах теории управления, но в ней основной темой была робастность в линейных системах.

В настоящей книге мы главным образом остановимся на анализе и синтезе систем управления при наличии возмущений.

Задача о влиянии внешних возмущений является одной из основных в теории управления и рассматривается в различных ее разделах. В линейно-квадратичной оптимизации, поставленной Р. Калманом и А. М. Летовым, рассматриваются задачи со случайными гауссовскими помехами (так называемая *линейно-квадратичная гауссовская задача*,  $LQG$ ). Проблема  $H_\infty$ -оптимизации связана либо с гармоническими внешними возмущениями, либо со случайными гауссовскими, либо с возмущениями из класса  $L_2$  (то есть, по существу, убывающими с течением времени). Однако во многих практических случаях внешние возмущения являются просто ограниченными; какая-либо дополнитель-

ная информация о них отсутствует.

Проблемой подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений стали интересоваться еще в середине прошлого века. В 40-е годы прошлого века так называемой *проблемой о накоплении возмущений* занимался Б. В. Булгаков [28, 34, 42]. Однако основное внимание тогда уделялось проблеме анализа — каково максимальное отклонение, вызываемое произвольными ограниченными внешними возмущениями, что, по сути, являлось задачей программного оптимального управления, поскольку внешние возмущения рассматривались как управление. Лишь значительно позже появляются работы по компенсации ограниченных возмущений (см. [101]), в которых, впрочем, не предлагались методы синтеза оптимальных регуляторов.

Отметим еще, что ранее чаще употреблялся термин *управление при постоянно действующих возмущениях* или *возмущенное движение*. Термин *подавление внешних возмущений* (заимствованный из западной литературы оборот *rejection of external perturbations*) появился позже.

Впервые задача об оптимальном подавлении неслучайных ограниченных возмущений была сформулирована в работе Е. Д. Якубович [126] и для некоторых частных случаев решена в [18, 126, 220]. Полное решение было построено в работах А. Е. Барабанова и О. Н. Граничина [19] и позже — М. Далеха и Дж. Пирсона [150]. Впоследствии эта теория получила название  *$\ell_1$ -оптимизации*. Однако методы  $\ell_1$ -оптимизации имеют ряд существенных недостатков: ее применение к задаче синтеза оптимального управления часто приводит к регуляторам очень высокого порядка; отметим и асимптотический характер получающихся оценок. Наряду с  $\ell_1$ -оптимальным управлением хорошо известны также *методы динамического программирования* для подобных задач [137, 156, 164].

Приведенные выше результаты относятся к дискретным системам; их обобщение на непрерывный случай (так называемая  *$L_1$ -оптимизация*) вызывает дополнительные сложности. Заметим, что ограниченные возмущения также изучаются в работах, посвященных исследованию собственно множеств достижимости; отметим здесь работы Л. С. Гноенского [34], Д. Бертсекаса и И. Родеса [137], А. М. Формальского [106], а также в теории дифференциальных игр [32, 60, 134]. Специальные методы борьбы с внешними возмущениями предложены в теории систем переменной структуры.

Управление на скользящих режимах для решения этой проблемы изучается в работах С. В. Емельянова [39, 40], С. К. Коровина [54],

В. И. Уткина [103], В. А. Уткина и др. В целом подавление неслучайных ограниченных возмущений традиционно считается трудной задачей в теории управления [89].

Существует иной подход к данной проблематике, основанный на методе *инвариантных множеств*. Инвариантные множества довольно широко используются в различных задачах гарантированного оценивания, фильтрации и минимаксного управления в динамических системах при наличии неопределенностей. Принципиальными в этом направлении можно считать работы Ф. Швеппе [212], Д. Бертсекаса [137, 138], А. Б. Куржанского [64] и Ф. Л. Черноусько [119], см. также [63]. Отметим, что инвариантные множества во многих случаях оказываются удобными аппроксимациями областей достижимости динамических систем, что позволяет их широко использовать в задачах анализа, однако, концепция инвариантности активно применяется и в других разделах теории систем и автоматического управления (см. обзорную статью Ф. Бланкини [140] и недавнюю монографию Ф. Бланкини и С. Миани [141]).

Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяются эллипсоиды из-за их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова. Ввиду этого, в рамках эллипсоидального описания, в качестве технического средства может быть использован мощный аппарат линейных матричных неравенств (*Linear Matrix Inequalities, LMI*) и полуопределенного программирования (*Semidefinite Programming, SDP*) [135]. Первой работой, в которой систематически изложена техника LMI, является книга С. Бойда с соавторами [146], а первой монографией на русском языке, посвященной этому вопросу, является книга Д. В. Баландина и М. М. Когана [16], см. также [89, 90].

Необходимо упомянуть, что техника LMI, очень популярная в последнее время, ранее уже использовалась в целях подавления возмущений [16, 127, 142, 146]. Однако в большинстве работ не рассматривались задачи подавления  $L_\infty$ -ограниченных возмущений; например, в [16, гл. 8] техника LMI применялась для подавления возмущений, ограниченных в  $L_2$ -норме. В статье Дж. Абедора с соавторами [127] решаются задачи анализа и синтеза при ограниченных внешних возмущениях, но в ней рассматривается лишь непрерывный случай; кроме того, в [127] не используется явно техника LMI. Отметим, что в западной литературе рассматриваемый круг вопросов называется *peak-to-peak gain minimization*. Это означает, что целью является уменьшение максимального (*пикового*) значения выхода при ограниченных максимальных значениях возмущений (речь идет о системах с одним входом –

одним выходом; эллипсоидальная техника обобщает этот подход на многомерный случай). Отметим, что одними из первых публикаций, связанных с peak-to-peak gain minimization, являются работы С. Бойда [130, 145].

В книге рассматриваются результаты, позволяющие переформулировать проблему подавления ограниченных внешних возмущений в терминах инвариантных эллипсоидов на основе систематического использования техники LMI. Применение этой концепции позволяет свести синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Такой подход приводит к простым оптимальным регуляторам; он имеет большой потенциал и возможности для обобщений, в равной мере распространим как на непрерывный, так и на дискретный вариант задачи.

Для решения полученных задач разработаны мощные оптимизационные процедуры, в частности, основанные на так называемом методе внутренней точки [80, 147, 194]. Эти процедуры эффективно реализованы в различных программных средах, в том числе в системе MATLAB, широко применяемой в научных и инженерных приложениях [122]. Именно эта система служит вычислительным средством решения всех формулируемых в книге задач. При этом нами используются работающие в среде MATLAB свободно распространяемые специализированные программные пакеты YALMIP [186], SeDuMi [214], а также пакет svx [166], разработанный под руководством С. Бойда.

Рассматриваемый подход не свободен и от недостатков — ему присущ определенный консерватизм, обусловленный тем, что достижимые множества не являются эллипсоидами.

Ниже мы ограничиваемся случаем линейных стационарных систем, для которого предлагаемая техника особенно проста и наглядна. Однако идеология инвариантных эллипсоидов может быть применена и в более общих ситуациях, см. по этому поводу [45, 59, 62, 140, 141, 146, 202].

Книга построена следующим образом. В Главе 1 описываются основные способы задания линейных систем; наиболее важным является описание с помощью систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (описание в пространстве состояний). Общий современный подход описывает систему как линейный оператор, преобразующий входные сигналы в выходные. При этом в пространстве сигналов могут вводиться различные нормы, индуцирующие соответствующие нормы в пространстве операторов. Рассмотрены также дискретные системы, в которых вместо дифференциальных уравнений фигурируют разностные. Обсуждаются способы задания

управления в линейных системах. В некоторых случаях можно выбирать управление как функцию от времени (программное управление). Однако такой способ непригоден при наличии неопределенности в объекте или во внешних сигналах, поэтому традиционно в инженерной практике используется управление в форме обратной связи. Это может быть либо управление по состоянию (когда вектор состояний доступен), либо управление по выходу (если текущая информация о системе дается ее выходом). Здесь же вводятся такие важнейшие термины теории управления как управляемость и наблюдаемость.

Далее исследуется ключевое понятие устойчивости систем управления. Для многомерных систем критерии устойчивости формулируются с помощью собственных значений матрицы состояний. Другой подход к устойчивости связан с введением квадратичной функции Ляпунова; она может быть построена путем решения уравнения Ляпунова. Для устойчивых систем представляет интерес по возможности более точное описание множества достижимости, то есть всех состояний, в которые может быть переведена система с помощью ограниченных в той или иной норме управлений. Исследуются основные задачи управления линейными объектами. Простейшая из них — стабилизация, то есть обеспечение устойчивости замкнутой системы с помощью обратной связи. Наконец, описываются различные виды неопределенности и формулируется фундаментальное понятие робастной устойчивости.

Основная техника исследования линейных задач управления, используемая в книге, связана с уже упоминавшимися выше линейными матричными неравенствами. Их роль в теории управления стала ясна после появления книги С. Бойда с соавторами [146], а вычислительные средства для их решения появились после создания метода внутренних точек Нестерова и Немировского. Линейным матричным неравенствам посвящена Глава 2. Здесь приведены основные понятия и инструментарий (лемма Шура, матричное описание эллипсоидов,  $S$ -процедура, лемма Питерсена) и показано, как основные задачи (квадратичная устойчивость, квадратичная стабилизация, робастная стабилизация) могут быть записаны в терминах линейных матричных неравенств.

Следующая Глава 3 посвящена задачам с ограниченными внешними возмущениями, а именно их анализу и задачам фильтрации. Показано, как базовое понятие инвариантного эллипсоида позволяет записывать эти задачи на языке линейных матричных неравенств.

Наиболее важная задача синтеза линейной обратной связи для подавления внешних возмущений рассматривается в Главе 4. Она заключается в выборе регулятора (в форме линейной обратной связи

по состоянию или по выходу), который, во-первых, обеспечивает устойчивость замкнутой системы, а во-вторых, гарантирует некоторое максимально возможное подавление внешних возмущений. В Главе 5 рассматриваются разнообразные робастные версии соответствующих задач.

Глава 6 носит название “Разные задачи”. Здесь прежде всего делается попытка обобщить некоторые из полученных результатов на нелинейный случай. Разумеется, это может рассматриваться лишь как набросок теории; серьезное изучение тематики нелинейных задач — гораздо более сложная и открытая задача. Другое обобщение в этой главе относится к мультипликативным возмущениям. Рассмотрена также представляющая интерес для инженеров задача о времени установления. Довольно любопытный и актуальный класс позитивных систем (то есть систем, у которых все решения остаются неотрицательными) позволяет внести существенные упрощения в технику анализа и синтеза. Здесь вместо линейных матричных неравенств возникают линейные алгебраические неравенства, а вместо квадратичных функций Ляпунова — кусочно-линейные.

Наконец, некоторые практические задачи рассмотрены в Главе 7. Следует сказать, что тестовые примеры сопровождают изложение по всему тексту книги, однако они имеют малую размерность и носят учебный характер. Задачи в данной главе имеют инженерное происхождение и показывают возможности используемых методов. Здесь же обсуждается вычислительная сторона методов решения задач с LMI и имеющиеся программные пакеты для их реализации.

Заключительная часть книги состоит из приложения, содержащего требуемые математические сведения из нескольких областей математики. Большинство из них относится к линейной алгебре.

Список литературы в книге не претендует на полноту. Мы включили в него основные западные учебники по современной теории управления; журнальные работы, сыгравшие важную роль в становлении этой теории. Литературу на русском языке мы пытались представить более подробно. Наряду с несколькими учебниками прошлых лет даны достаточно детальные ссылки на журнальную литературу, имеющую отношение к тематике книги.

В заключение — несколько слов о возможном читателе книги. Книга не является учебником (в ней мало примеров, нет упражнений, не все затронутые вопросы изложены достаточно подробно). В то же время нам кажется, что на основе книги могут читаться курсы для студентов по современной теории управления. Основными же читателя-



ми нам представляются студенты, желающие углубить свои знания, аспиранты и специалисты по теории управления. В принципе, знание “классической” теории автоматического управления не требуется для чтения, однако, такое знакомство будет весьма полезно для понимания особенностей новых подходов к теории.

## Список обозначений

$\mathbb{R}$  множество вещественных чисел;  
 $\mathbb{C}$  множество комплексных чисел;  
 $\mathbb{R}^n$  пространство  $n$ -мерных вектор-столбцов с вещественными элементами:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R};$$

$\mathbb{C}^n$  пространство  $n$ -мерных вектор-столбцов с комплексными элементами;  
 $\mathbb{R}^{n \times m}$  пространство матриц размера  $n \times m$  с вещественными элементами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R};$$

$\mathbb{C}^{n \times m}$  пространство матриц размера  $n \times m$  с комплексными элементами;

$\mathbb{S}^{n \times n}$  пространство симметрических матриц размера  $n \times n$  с вещественными элементами;

$\doteq$  равно по определению;

$\text{sign } x$  знак вещественного числа  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (\text{если не оговорено особо});$$

$ x $	абсолютная величина вещественного числа $x \in \mathbb{R}$ :
	$ x  = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases}$
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$	вещественная и мнимая части комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ : если
	$z = x + jy, \quad j \doteq \sqrt{-1},$
	то
	$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y;$
$z^*$	комплексное сопряжение числа $z \in \mathbb{C}$ : если
	$z = x + jy,$
	то
	$z^* \doteq x - jy;$
$ z , \arg z$	модуль и аргумент комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ : если
	$z = \rho e^{j\varphi}, \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$
	то
	$ z  \doteq \rho, \quad \arg z \doteq \varphi$
$x^\top$	(если $z = x + jy$ , то $ z  = \sqrt{x^2 + y^2}$ ); транспонирование вектора $x \in \mathbb{R}^n$ :
	$x^\top = (x_1 \quad \cdots \quad x_n);$
$x^*$	комплексное сопряжение и транспонирование вектора $x \in \mathbb{C}^n$ :
	$x^* = (x_1^* \quad \cdots \quad x_n^*);$
$(x, y)$	скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ или $x, y \in \mathbb{C}^n$ :
	$(x, y) = \sum_i x_i^* y_i;$
$ x $	норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{C}^n$ , в частности:

$l_p$ -норма:

$$|x|_p \doteq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

в том числе, при  $p = 1$

$$|x|_1 \doteq \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

при  $p = 2$

$$|x|_2 \doteq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{евклидова норма}),$$

при  $p = \infty$

$$|x|_\infty \doteq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(по умолчанию под  $|x|$  понимается евклидова норма вектора);

$\|\cdot\|$

норма функции (сигнала); если не указана явно, подразумевается любая норма или 2-норма; наиболее употребительна  $L_p(a, b)$ -норма:

$$\|w\|_p \doteq \left( \int_a^b |w(t)|_p^p dt \right)^{1/p};$$

мы, как правило, подразумеваем  $a = 0$ ,  $b = \infty$ ; в частности,

при  $p = 2$

$$\|w\|_2 \doteq \left( \int_0^\infty |w(t)|_2^2 dt \right)^{1/2}, \quad (L_2\text{-норма})$$

при  $p = \infty$

$$\|w\|_\infty \doteq \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t < \infty} |w(t)|, \quad (L_\infty\text{-норма})$$

при  $p = 1$

$$\|w\|_1 \doteq \int_0^{\infty} |w(t)| dt; \quad (L_1\text{-норма})$$

$(a_{ij})$  матрица с элементами  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;  
 $\text{diag}\{a_1 \cdots a_n\}$  диагональная матрица с элементами  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  
 $I$  единичная матрица (соответствующей размерности);  
 $0$  нулевая матрица (соответствующей размерности);  
 $A^\top$  транспонирование матрицы: если

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

то

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{m \times n};$$

$A^*$  комплексное сопряжение и транспонирование матрицы: если

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m},$$

то

$$A^* = (a_{ji}^*) \in \mathbb{C}^{m \times n};$$

$\text{rank } A$  ранг матрицы  $A$ ;  
 $\text{tr } A$  след матрицы: если

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

то

$$\text{tr } A \doteq \sum_{i=1}^n a_{ii};$$

$\det A$  определитель матрицы  $A$ ;  
 $\lambda_i(A)$   $i$ -е собственное значение матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  
 $i = 1, \dots, n$ ;  
 $\rho(A)$  спектральный радиус матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :

$$\rho(A) \doteq \max_i |\lambda_i|;$$

$\sigma_i(A)$   $i$ -е сингулярное число матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ :

$$\sigma_i(A) \doteq \lambda_i^{1/2}(A^*A), \quad i = 1, \dots, m;$$

$\langle A, B \rangle$  скалярное произведение в пространстве матриц;  
для  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} A^* B,$$

в частности, для  $A, B \in \mathbb{S}^{n \times n}$

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB;$$

$\|A\|$  норма матрицы; если не указана явно, подразумевается любая норма или индуцированная норма; в частности, для матриц  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  или  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ :  
спектральная норма (2-норма):

$$\|A\|_2 \doteq \max_{|x| \leq 1} |Ax| = \max_i \lambda_i^{1/2}(A^* A) = \max_i \sigma_i(A),$$

строчная норма (1-норма):

$$\|A\|_1 \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|,$$

столбцовая норма ( $\infty$ -норма):

$$\|A\|_\infty \doteq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

фробениусова норма:

$$\|A\|_F \doteq \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

(по умолчанию под  $\|A\|$  понимается спектральная норма матрицы);  
 $A \succ 0$  ( $\succcurlyeq 0$ ) матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  симметрична и положительно (неотрицательно) определена;  
 $A \prec 0$  ( $\preccurlyeq 0$ ) матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  симметрична и отрицательно (неположительно) определена;  
 $x > 0$  ( $\geq 0$ ) вектор  $x \in \mathbb{R}^n$  положительный (неотрицательный):

$$x_i > 0 \quad (x_i \geq 0) \quad \forall i = 1, \dots, n;$$

---

$x < 0$ ( $\leq 0$ )	вектор $x \in \mathbb{R}^n$ отрицательный (неположительный): $x_i < 0 \quad (x_i \leq 0) \quad \forall i = 1, \dots, n;$
$A > 0$ ( $\geq 0$ )	матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ положительная (неотрицательная): $a_{ij} > 0 \quad (a_{ij} \geq 0) \quad \forall i, j = 1, \dots, n;$
$A < 0$ ( $\leq 0$ )	матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ отрицательная (неположительная): $a_{ij} < 0 \quad (a_{ij} \leq 0) \quad \forall i, j = 1, \dots, n;$
*	соответствующий блок в симметрической блочной матрице
$\deg p(s)$	степень полинома $p(s)$ ;
▼	конец замечания или примера;
■	конец доказательства.

# Глава 1

## Линейные системы управления

В этой главе вводится основной объект исследования книги — линейные стационарные системы, задаваемые описанием в пространстве состояний. Изучаются такие принципиальные свойства как устойчивость, управляемость, наблюдаемость. Большой раздел посвящен исследованию устойчивости, для чего вводится аппарат квадратичных функций Ляпунова и подробно изучаются свойства соответствующих им матричных уравнений и неравенств Ляпунова.

Далее обсуждаются способы построения стабилизирующих регуляторов; основное внимание уделяется управлению в форме обратной связи. В заключительных разделах определяются множества достижимости для устойчивых систем с неизвестными входами (внешними возмущениями) и приводится их описание, а также рассматривается другой тип неопределенности, присутствующей в системе — неопределенность ее коэффициентов, которая приводит к понятию робастности.

### 1.1. Описание линейных систем

Существуют различные способы задания линейных систем управления: через описание в пространстве состояний, с помощью входо-выходных соотношений (описание во временной области), с помощью передаточных функций (описание в частотной области), операторный подход и др. В этом разделе введем три наиболее употребляемых способа, уделяя основное внимание языку пространства состояний, которым будем почти исключительно пользоваться в дальнейшем из-



ложении, исследуя параллельно как непрерывные, так и дискретные системы.

### 1.1.1. Пространство состояний

*Линейная непрерывная система управления* описывается векторным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\dot{x} = Ax + Bu + D_1 w, \quad (1.1.1)$$

где  $t$  — (непрерывное) время,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор *состояния* (*фазового состояния*) системы,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  — *управление* (*управляющее воздействие*),  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  — *внешнее возмущение* или *шум*. И управление, и возмущение будем называть *входами* системы.

Обычно на практике само состояние системы неизвестно, а известен ее линейный *выход*  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ :

$$y = Cx + D_2 w, \quad (1.1.2)$$

который также может быть подвержен воздействию внешних возмущений. Хотя природа возмущений в состоянии и выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы  $D_1$  и  $D_2$  “вырезают” из вектора  $w$  разные “куски”.<sup>1</sup>

Система управления, в которой матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$  являются постоянными, называется *стационарной*. Если же эти матрицы изменяются во времени, соответствующая система называется *нестационарной*. В дальнейшем будут рассматриваться только стационарные системы управления.

В случае, когда матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  заданы, система управления является *полностью определенной*; если же эти матрицы известны не полностью, говорят о *системах с неопределенностью*. Управление при наличии неопределенности называется *робастным*.

Уравнение (1.1.1) будем называть *уравнением состояния* системы управления, а уравнение (1.1.2) — *уравнением выхода*. Пространство  $\mathbb{R}^n$  естественно называть *пространством состояний*, а  $\mathbb{R}^p$  — *пространством управлений*.

Форма записи системы управления в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + D_1 w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

<sup>1</sup>С этой целью можно положить  $D_1 D_2^\top = 0$ , однако, получаемые в дальнейшем результаты не предполагают выполнения этого условия.

называется *описанием в пространстве состояний*. При этом матрицу  $A$  будем называть *матрицей состояния* системы, а  $C$  — *матрицей выхода*.

Помимо наблюдаемого выхода, иногда у системы управления имеются и дополнительные выходы (регулируемый и т. п.). При этом будем обозначать через  $y$  *наблюдаемый выход*, а через  $z$  — *регулируемый*.

Относительно характера внешних возмущений  $w(t)$  могут делаться самые разнообразные предположения — они могут отсутствовать или быть полностью известными; могут быть произвольными детерминированными, ограниченными в некоторой норме или же случайными. Более подробно некоторые часто употребляемые классы внешних возмущений будут описаны ниже.

Целью управления является выбор такого управления  $u = u(t)$  (или  $u = u(x)$ ), которое придает системе управления (1.1.3) требуемые свойства (например, устойчивость, оптимальность по некоторому показателю качества и т. п.). Более четко соответствующие постановки задач управления также будут сформулированы ниже.

Систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

в которой отсутствует управление, будем называть *разомкнутой*. Если в (1.1.3) управление  $u$  уже выбрано в форме  $u(t)$  (т. н. *программное управление*), то получаем уравнение в форме (1.1.4), но с иным внешним возмущением, равным  $Bu(t) + D_1 w$ . Если же управление выбрано в виде  $u = Kx$  (т. н. *линейная обратная связь по состоянию*, см. ниже), то также получаем уравнение в форме (1.1.4), но с иной матрицей состояния, равной  $A + BK$ ; при этом говорят о *замкнутой системе*.

Вернемся к разомкнутой системе (1.1.4). Решение ее уравнения состояния может быть записано в явном виде:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} D_1 w(\tau) d\tau, \quad (1.1.5)$$

где  $x_0$  — *начальное условие*, то есть значение  $x(t)$  в начальный момент  $t = 0$ , а  $e^A$  — *матричная экспонента* (см. Приложение Г). Таким образом, зная  $x_0$  и  $w(t)$ , можно найти состояние системы  $x(t)$  для всех моментов времени  $t$ .

Обратим внимание на структуру решения (1.1.5). Оно состоит из двух независимых друг от друга слагаемых: одно определяется толь-

ко начальными условиями, другое — лишь внешними возмущениями; поэтому их поведение можно анализировать отдельно друг от друга.

Остановимся теперь на простом, но важном специальном классе систем, имеющих скалярный вход и скалярный выход. Будем называть их *одномерными*, в отличие от общего *многомерного* случая (раньше использовался термин “односвязные” и “многосвязные” системы). На Западе общепотребительны термины SISO (Single-Input Single-Output) и MIMO (Multiple-Input Multiple-Output), то есть системы с одним входом — одним выходом и с многими входами — многими выходами соответственно.

В инженерных приложениях часто используется иной способ описания систем — не в пространстве состояний, а в виде дифференциального уравнения высокого порядка, связывающего вход  $u(t)$  с выходом  $y(t)$  напрямую, без использования понятия состояния. При этом говорят о *входо-выходном описании систем во временной области*. Так, уравнения, описывающие поведение механических систем, содержат смещения, скорости и ускорения взаимодействующих тел.

На примере одномерных систем покажем, как можно осуществить переход от описания в пространстве состояний к входо-выходному описанию и обратно; это, в частности будет полезно для понимания иллюстративных примеров, приводимых в книге.

Рассмотрим одномерную систему в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= c^\top x, \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b, c \in \mathbb{R}^n$ .

Будем  $n$  раз последовательно дифференцировать уравнение выхода в (1.1.6), подставляя в него выражение для  $\dot{x}$  из уравнения состояния. В результате получим

$$\begin{aligned} y &= c^\top x, \\ \dot{y} &= c^\top Ax + c^\top bu, \\ \ddot{y} &= c^\top A^2x + c^\top Abu + c^\top b\dot{u}, \\ &\vdots \\ y^{(k)} &= c^\top A^kx + c^\top A^{k-1}bu + \dots + c^\top bu^{(k-1)}, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= c^\top A^nx + c^\top A^{n-1}bu + \dots + c^\top A^{n-k}bu^{(k-1)} + \dots + c^\top bu^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Сложим уравнения, предварительно умножив первое на  $a_0$ , второе на  $a_1$ , и т. д., последнее — на единицу, где  $a_i$  — коэффициенты характеристического полинома матрицы  $A$ . По *теореме Кэли-Гамильтона* (см. Теорему А.1 из Приложения А), матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, поэтому члены с  $x$  в правой части исчезнут; в результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка относительно входного и выходного сигналов, то есть к эквивалентной записи на языке вхо-выходных соотношений:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + \beta_1\dot{u} + \beta_0u,$$

где

$$\beta_k = c^\top (A^{n-k-1} + a_{n-1}A^{n-k-2} + \dots + a_{k+2}A + a_{k+1}I)b, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Обратно, пусть теперь доступно описание системы в форме одного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = \\ = \beta_m u^{(m)} + \dots + \beta_1\dot{u} + \beta_0u, \quad n \geq m. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Тогда, действуя в “обратном порядке”, это уравнение можно привести к эквивалентной записи в пространстве состояний. Например, пусть в уравнение (1.1.7) входит лишь входной сигнал, но не его производные:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = u. \quad (1.1.8)$$

Вводя новые переменные  $x_i$  (“состояния”) по правилам

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y}, \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

с учетом (1.1.8) получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= c^\top x. \end{aligned}$$

Таким образом, получена *реализация системы* (1.1.8) в пространстве состояний с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.9)$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система с матрицами вида (1.1.9) (и вектором  $c$  произвольного вида) является так называемой *канонической управляемой формой* записи системы в пространстве состояний (при этом говорят, что матрица  $A$  приведена к *фробениусовой форме*, см. Приложение В). Оказывается, при естественном предположении об *управляемости* системы (см. ниже в разделе 1.3.1) линейными заменами переменных ее можно привести к такому виду (см. Лемму В.7 из Приложения В).

Заметим, что транспонированную к  $A$  матрицу в линейной алгебре принято называть *сопровождающей матрицей* полинома

$$p(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n,$$

поскольку ее *характеристический полином* есть  $p(s)$ .

Процедура `comran` в среде МАТЛАВ дает иной способ записи матрицы во фробениусовой форме — с коэффициентами полинома  $p(s)$  в верхней строке и единицами на первой поддиагонали.

Наряду с непрерывными системами (1.1.3) будем рассматривать *дискретные системы*, описываемые не дифференциальными, а *разностными уравнениями*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k. \end{aligned}$$

Здесь индекс  $k$  играет роль времени (так называемое *дискретное время*), а смысл всех остальных векторов и матриц тот же. Дискретные системы могут возникать как при дискретной аппроксимации непрерывных систем, так и в других случаях:  $k$  может быть номером итерации в итерационном процессе или время может быть дискретным в процессах, связанных с цифровым управлением.

Разомкнутая дискретная система приобретет вид

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k,\end{aligned}$$

а ее решение с начальным условием  $x_0$  также может быть записано в явной форме:

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} D_1 w_i. \quad (1.1.10)$$

Для полноты картины коротко остановимся еще на одном способе описания линейных систем — с помощью передаточных функций.

Пусть имеется описание непрерывной системы в пространстве состояний; проведем некоторые формальные преобразования уравнений. Введем *оператор дифференцирования по времени*:

$$s \doteq \frac{d}{dt},$$

который на гладкие функции  $x(t)$  действует по правилу

$$sx(t) = \dot{x}(t).$$

Будем относиться к  $s$  как к комплексной переменной и рассматривать различные функции от нее; им нетрудно придать содержательный смысл. Например, если

$$p(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_k s^k,$$

то

$$p(s)x(t) = a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + \dots + a_k x^{(k)}(t).$$

Тогда, подставляя  $s = d/dt$  в (1.1.3) (при  $x(0) = 0$ ) и формально разрешая первое уравнение относительно  $x$ , получим

$$x = (sI - A)^{-1}(Bu + D_1 w).$$

Окончательно, получаем следующее выражение для выхода:

$$y = C(sI - A)^{-1}Bu + (C(sI - A)^{-1}D_1 + D_2)w. \quad (1.1.11)$$

Матричная функция

$$G_{yu}(s) \doteq C(sI - A)^{-1}B$$

комплексного переменного  $s$  называется *передаточной функцией от управления и к выходу  $y$* , а аналогичная функция

$$G_{yw}(s) \doteq C(sI - A)^{-1}D_1 + D_2$$

называется *передаточной функцией от возмущения  $w$  к выходу  $y$* .

Таким образом, элементы  $g_{ki}$  матриц  $G_{yu}(s)$  и  $G_{yw}(s)$  являются дробно-рациональными функциями комплексной переменной  $s$ . Поскольку матричная функция  $(sI - A)^{-1}$  определена при всех  $s \in \mathbb{C}$ , не являющихся собственными значениями матрицы  $A$ , то функции  $G_{yu}(s)$  и  $G_{yw}(s)$  аналитичны на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа точек (называемых *полюсами передаточных функций*).

Возвращаясь к соотношению (1.1.11), отметим, что выход системы можно записать как функцию от управления и внешних входов на языке передаточных функций:

$$y = G_{yu}(s)u + G_{yw}(s)w. \quad (1.1.12)$$

Строгое обоснование перехода от записи (1.1.3) системы в пространстве состояний к форме (1.1.12) может быть сделано с помощью преобразования Лапласа. Разумеется, описание системы в форме (1.1.12) может быть исходным; возможен обратный переход к записи (1.1.3), при этом говорят, что получена реализация системы в пространстве состояний.

Однако не будем глубже вдаваться в детали, поскольку в данной книге в качестве основного языка описания систем принято пространство состояний. Упомянем лишь одно свойство передаточных функций, поясняющее удобство такого аппарата. Оказывается, что если на  $i$ -й вход разомкнутой системы с устойчивой<sup>2</sup> матрицей  $A$  поступает гармонический сигнал частоты  $\omega$ , то при  $t \rightarrow \infty$  на  $k$ -м выходе также будет наблюдаться гармонический сигнал той же частоты, амплитуда

<sup>2</sup>Понятие устойчивости матриц и систем будет введено чуть ниже, в разделе 1.2.1.

которого изменена в  $|g_{ki}(j\omega)|$  раз (то есть  $|g_{ki}(j\omega)|$  имеет смысл *коэффициента усиления* входного гармонического сигнала), а фаза изменяется на  $\arg g_{ki}(j\omega)$ . Поэтому описание систем с помощью передаточных функций называют *описанием в частотной области*.

Другой взгляд на природу передаточной функции будет рассмотрен в разделе 2.5.2, где приведен альтернативный способ решения так называемой *задачи  $H_\infty$ -оптимизации*.

### 1.1.2. Нормы сигналов и операторов

Теперь посмотрим на внешнее возмущение в системе (1.1.3) (или же (1.1.4)) с другой точки зрения — как на сигнал, подаваемый на вход системы. Рассмотрим основные функциональные пространства сигналов и соответствующие нормы. Будем считать, что все сигналы определены при  $0 \leq t < \infty$ .

1)  $L_2$  — *пространство интегрируемых с квадратом функций*. Оно состоит из измеримых функций  $w(t)$ , заданных на  $0 \leq t < \infty$  и имеющих ограниченную 2-норму:

$$\|w\|_2 \doteq \left( \int_0^\infty |w(t)|_2^2 dt \right)^{1/2} < \infty, \quad (1.1.13)$$

где  $|w(t)|_2$  — евклидова норма вектора  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ .

Во многих физических приложениях  $\|w\|_2^2$  означает энергию сигнала, поэтому  $L_2$  называется *пространством сигналов ограниченной энергии*. Из конечности интеграла в (1.1.13) следует, что функции  $w \in L_2$ , по-существу, убывают с течением времени.

**Пример 1.1.1.** Нетрудно видеть, что функция  $w(t) \equiv 1$  не принадлежит классу  $L_2$ , так же как и функция  $w(t) = \sin \omega t$  при любом  $\omega \neq 0$ . ▼

2)  $L_\infty$  — *пространство существенно ограниченных функций*. В него входят измеримые функции  $w(t)$  с ограниченной  $\infty$ -нормой:

$$\|w\|_\infty \doteq \sup_{0 \leq t < \infty} |w(t)| < \infty,$$

где  $|\cdot|$  — какая-нибудь векторная норма в  $\mathbb{R}^m$  (как правило,  $\infty$ - или 2-норма). Заметим, что более правильно было бы писать

$$\|w\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t < \infty} |w(t)|,$$



где  $\text{ess sup}$  — *существенная верхняя грань функции*, получающаяся при пренебрежении множествами нулевой меры. Мы, однако, будем считать, что функция  $w(t)$  уже изменена на множестве нулевой меры так, что величина  $\sup_{0 \leq t < \infty} |w(t)|$  оказалась минимальной. Например, вместо

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 1, \\ 1, & t = 1, \end{cases}$$

будем рассматривать эквивалентную ей функцию  $w(t) \equiv 0$ . Нетрудно видеть, что для обеих функций  $\|w\|_\infty = 0$ .

Обычно величина  $\|w\|_\infty$  измеряет интенсивность сигнала, так что  $L_\infty$  называется *пространством сигналов ограниченной интенсивности*.

#### Пример 1.1.2. Функции

$$w(t) \equiv 1 \quad \text{и} \quad w(t) = \sin \omega t$$

принадлежат классу  $L_\infty$ , однако функция

$$w(t) = \begin{cases} t^{-\alpha}, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

при  $0 < \alpha < 1/2$  принадлежит классу  $L_2$ , так как

$$\|w\|_2 = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}},$$

но не принадлежит классу  $L_\infty$ , поскольку не ограничена в нуле. ▼

3)  $L_1$  — *пространство абсолютно интегрируемых функций*, содержащее измеримые функции с ограниченной 1-нормой:

$$\|w\|_1 \doteq \int_0^\infty |w(t)| dt < \infty,$$

где  $|w(t)|$  — некоторая норма вектора  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  (как правило, 1-норма).

#### Пример 1.1.3. Функция

$$w(t) = \begin{cases} t^{-\alpha}, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

при  $1/2 \leq \alpha < 1$  принадлежит классу  $L_1$ , так как

$$\|w\|_1 = \frac{1}{(1-\alpha)},$$

но не принадлежит ни классу  $L_2$  (поскольку интеграл  $\int_0^\infty t^{-2\alpha} dt$  расходится в нуле), ни классу  $L_\infty$ . ▼

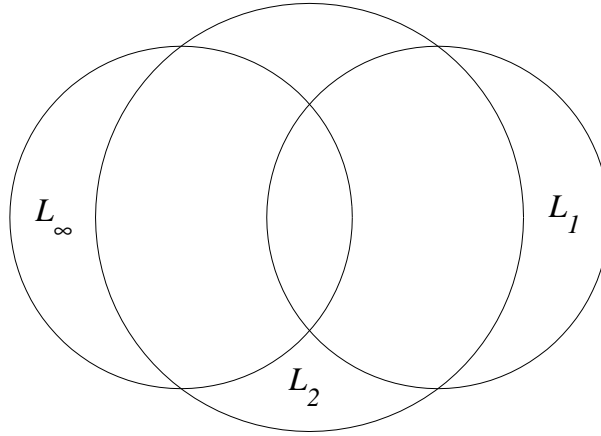


Рис. 1.1.1. Пространства  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_\infty$ .

Условно соотношение между рассмотренными пространствами можно изобразить в виде диаграммы на Рис. 1.1.1. В частности, из ограниченности функции в  $L_1$ -норме и  $L_\infty$ -норме следует ограниченность в  $L_2$ -норме. Действительно,

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty |w(t)|^2 dt \leq \|w\|_\infty \int_0^\infty |w(t)| dt = \|w\|_\infty \|w\|_1.$$

Аналогичные пространства и нормы вводятся для дискретного случая; при этом рассматриваются не вектор-функции  $w(t)$ , а последовательности векторов  $\{w_k\}$ .

1)  $l_2$  — пространство суммируемых с квадратом последовательностей. Оно состоит из последовательностей  $\{w_k\}$ , имеющих ограниченную 2-норму:

$$\|w\|_2 \doteq \left( \sum_{k=0}^{\infty} |w_k|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

2)  $l_\infty$  — пространство существенно ограниченных последовательностей, состоящее из последовательностей  $\{w_k\}$  с ограниченной  $\infty$ -нормой:

$$\|w\|_\infty \doteq \sup_{0 \leq k < \infty} |w_k| < \infty.$$

3)  $l_1$  — пространство абсолютно суммируемых последовательностей. Оно состоит из последовательностей  $\{w_k\}$ , имеющих ограниченную 1-норму:

$$\|w\|_1 \doteq \sum_{k=0}^{\infty} |w_k| < \infty.$$

**Пример 1.1.4.** Если

$$w_k \equiv 1 \quad \text{или} \quad w_k = \text{sign}(-1)^k,$$

то  $\{w_k\} \in l_\infty$ , но  $\{w_k\} \notin l_2$ ,  $\{w_k\} \notin l_1$ .

Если же

$$w_k = (k+1)^{-\alpha},$$

то  $\{w_k\} \in l_\infty$  при любом  $\alpha > 0$ , тогда как  $\{w_k\} \in l_2$  при  $\alpha > 1/2$  и  $\{w_k\} \in l_1$  при  $\alpha > 1$ . ▼

Наибольшее внимание в книге и, прежде всего, в ее основных главах 3 и 4, уделяется изучению свойств систем с существенно ограниченными входными сигналами (то есть принадлежащими пространствам  $L_\infty$  и  $l_\infty$ ). Такого рода предположения о сигналах естественны при описании процессов, протекающих во многих реальных системах, когда о природе и свойствах внешних возмущений неизвестно ничего, кроме ограниченности в каждый момент времени.

### Нормы операторов. Коэффициенты усиления

Введенные выше нормированные пространства сигналов позволяют использовать еще один язык описания систем — *операторный*. Рассмотрим запись непрерывной системы в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw, & x(0) &= 0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

с внешним входом  $w \in L_p$  и выходом  $y \in L_q$ . Тогда сигнал на выходе линейно зависит от сигнала на входе:

$$y = \mathcal{L}w,$$

где  $\mathcal{L}$  — линейный оператор, который переводит функции из  $L_p$  в функции из  $L_q$ ; будем рассматривать  $p, q = 1, 2$  или  $\infty$ . В данном случае, в соответствии с формулой (1.1.5), этот оператор является линейным интегральным оператором и имеет явное выражение

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B w(\tau) d\tau.$$

По аналогии с индуцированными нормами для матриц (см. Приложение Б) введем  $(p, q)$ -индуцированную норму оператора  $\mathcal{L}$ :

$$\|\mathcal{L}\|_{p,q} \doteq \sup_{\|w\|_p \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}w\|_q}{\|w\|_p} = \sup_{\|w\|_p \leq 1} \|\mathcal{L}w\|_q.$$

Аналогичным образом операторная норма вводится для дискретного времени.

Норма оператора является мерой того, насколько он “усиливает” входные сигналы, измеряемые в соответствующей норме, поэтому будем пользоваться термином *коэффициент усиления* (англоязычный аналог — *gain*) и иногда использовать обозначение  $\mathfrak{G}_{p,q}$ .

Оказывается, для различных классов входных и выходных сигналов коэффициент усиления системы имеет прозрачный физический смысл,<sup>1</sup> и многие задачи теории управления могут быть сведены к его вычислению или оптимизации. Например, обычно желательно выбирать управление так, чтобы коэффициент усиления был по возможности мал; это означает, что выход системы будет мал при любых *возмущениях*, ограниченных в соответствующей норме.

Напомним, что в конце раздела 1.1.1 было введено понятие передаточной функции, которая для системы (1.1.14) имеет вид

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Выражение

$$\|G(s)\|_\infty \doteq \sup_\omega \|C(j\omega I - A)^{-1}B\|_2,$$

где  $\|M\|_2$  — *спектральная норма* фиксированной матрицы  $M$  с комплексными элементами, определяет так называемую  $H_\infty$ -норму передаточной функции  $G(s)$ ; для устойчивой системы эта величина конечна. Можно показать, что величина  $\|G(s)\|_\infty$  равна коэффициенту

<sup>1</sup>В конце раздела 1.1.1 отмечалось, что элементы передаточной функции системы могут интерпретироваться как “коэффициенты усиления” *гармонического сигнала*.

усиления  $\mathfrak{g}_{2,2}$ ; иными словами, она показывает, во сколько раз может измениться *энергия* сигнала при прохождении через систему.

Построение систем, оптимальных по критерию  $H_\infty$ -нормы, составляет предмет  *$H_\infty$ -оптимизации* — большого раздела теории управления, и способы вычисления  $H_\infty$ -нормы при описании систем с помощью передаточных функций хорошо известны. В разделе 2.5.2 приведем еще один эффективный способ ее вычисления при описании в пространстве состояний; при этом будет существенно использоваться техника линейных матричных неравенств.

Далее, коэффициент  $\mathfrak{g}_{2,\infty}$  соответствует входным сигналам из  $L_2$  и выходным сигналам, измеряемым в норме  $L_\infty$ ; методы его вычисления также хорошо разработаны. По определению,  $L_\infty$ -норма выходного сигнала  $y(t)$  равна радиусу минимального шара  $\mathcal{B}$  в евклидовой норме, которому принадлежит  $y(t)$  при всех  $t \geq 0$  и всех входных сигналах  $\|w(t)\|_2 \leq 1$ . В следующем разделе, введя понятие *достижимого множества*, будет дана более точная характеристика выходного сигнала системы в виде *эллипсоида*, содержащегося в  $\mathcal{B}$ .

Наибольший интерес представляет случай, когда входной сигнал в системе (1.1.14) рассматривается из пространства  $L_\infty$ , и нужно получить оценку на  $L_\infty$ -норму выхода. При

$$C = I$$

выход системы совпадает с ее состоянием и для устойчивой системы имеем

$$\sup_{t \geq 0} |x(t)| < \infty;$$

здесь принята евклидова векторная норма  $|\cdot|$ . В западной литературе эту величину называют “*peak-to-peak gain*” — коэффициент усиления  $\mathfrak{g}_{\infty,\infty}$  от возмущений, ограниченных единицей в норме  $L_\infty$ , к состоянию системы, также измеряемому в норме  $L_\infty$ . Как и в предыдущих случаях, коэффициент  $\mathfrak{g}_{\infty,\infty}$  может вычисляться в терминах передаточной функции (он оказывается равным  $L_1$ -норме *весовой функции* системы).

Аналогично, можно пытаться дать точную характеристику выходного сигнала, основанную на построении достижимого множества. Однако, как будет показано в разделе 1.5, описание достижимого множества в этой ситуации наталкиваются на серьезные трудности; поэтому ниже, в Главе 3, будет объяснено, как строить эффективные оценки этих множеств, привлекая понятие *инвариантного эллипсоида*. Такие построения лежат в основе всех последующих результатов книги.

## 1.2. Устойчивость

В этом разделе исследуется важнейшее понятие теории управления — устойчивость. Для нелинейных нестационарных систем имеется множество определений устойчивости: устойчивость точки равновесия и устойчивость движения; устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость; устойчивость “в малом” и “в большом”; устойчивость по начальным условиям и по возмущению.

Для линейных стационарных систем картина намного проще и будем говорить просто об устойчивости, понимая под этим стремление к нулю траекторий системы без внешних возмущений, то есть *асимптотическую устойчивость*. Точные определения будут даны ниже.

Прежде чем формулировать утверждения, касающиеся устойчивости систем, в первом разделе обсудим матричное уравнение Ляпунова, его свойства и связь с устойчивостью матрицы.

### 1.2.1. Матричное уравнение Ляпунова и его свойства

#### Устойчивость матриц. Оценка матричной экспоненты

Введем понятие *устойчивости матрицы*.

**Определение 1.2.1.** Матрица  $A$  называется *устойчивой по Гурвицу* (*гурвицевой*), если все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для гурвицевой матрицы  $A$  величина

$$\sigma = \sigma(A) \doteq -\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A) > 0$$

называется ее *степенью устойчивости*; это минимальное из расстояний от собственных значений матрицы до мнимой оси.

В среде MATLAB вектор  $d$  собственных значений матрицы  $A$  находится с помощью процедуры `eig`.

Следующий технический результат будем неоднократно использоваться в дальнейшем.

**Лемма 1.2.1 (Оценка матричной экспоненты).** *Если матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  гурвицева, то для любого  $0 < \nu < \sigma$  существует число*

$C = C(A, \nu)$  такое, что

$$\|e^{At}\| \leq C e^{-\nu t}. \quad (1.2.1)$$

**Доказательство.** Пусть матрица  $A$  диагонализируема, например, все ее собственные значения различны (см. Лемму В.1 из Приложения В). Тогда существует такая невырожденная матрица  $T$ , что

$$A = T^{-1}\Lambda T, \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n\}.$$

Сделаем в системе

$$\dot{x} = Ax$$

замену переменной  $x = T^{-1}y$ ; в результате придем к системе

$$\dot{y} = \underbrace{TA T^{-1}}_{\Lambda} y$$

с решением  $y(t) = e^{\Lambda t} y_0$ .

При этом

$$x(t) = T^{-1}y(t) = T^{-1}e^{\Lambda t} y_0 = T^{-1}e^{\Lambda t} T x_0,$$

но, с другой стороны,  $x(t) = e^{At} x_0$ . Таким образом,

$$e^{At} = T^{-1}e^{\Lambda t} T.$$

Тогда

$$\|e^{At}\| = \|T^{-1}e^{\Lambda t} T\| \leq \|T^{-1}\| \|e^{\Lambda t}\| \|T\| = \|T\| \|T^{-1}\| e^{-\sigma t},$$

что и доказывает оценку (1.2.1) с  $\nu = \sigma$  и константой

$$C = \|T\| \|T^{-1}\|.$$

В общем случае, согласно Лемме В.3 из Приложения В, матрица  $A$  приводится преобразованием подобия не к диагональной, а к *блочной жордановой форме*:

$$A = T^{-1}JT, \quad J = \text{diag}\{J_1 \quad \dots \quad J_m\},$$

Для жорданового блока

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

размерности  $l \times l$  имеем

$$e^{J_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому, если  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\sigma < 0$ , то найдется полином  $r(t)$  некоторой фиксированной степени, такой что

$$\|e^{J_i t}\| \leq r(t) e^{-\sigma t} \leq C e^{-\nu t}$$

для любого  $0 < \nu < \sigma$ ; здесь

$$C = \max_{0 \leq t < \infty} r(t) e^{-(\sigma-\nu)t} < \infty.$$

С учетом  $\|e^{Jt}\| = \max_i \|e^{J_i t}\|$ , приходим к требуемой оценке. ■

В среде МАТЛАВ матричная экспонента вычисляется с помощью процедуры `expm`, а именно, матрица  $e^{At}$  находится как `expm(A * t)`.

Матричные и векторные нормы в среде МАТЛАВ вычисляются с помощью процедуры `norm`; так, `norm(A, 2)` или `norm(A)` дает 2-норму матрицы  $A$ , а `norm(A, 1)`, `norm(A, Inf)` и `norm(A, 'fro')` есть соответственно, 1-норма,  $\infty$ -норма и фробениусова норма матрицы  $A$ .

Понятие устойчивости для матриц можно ввести иным образом.

**Определение 1.2.2.** Матрица  $A$  называется *устойчивой по Шуру* (*шуровской*), если все ее собственные значения по абсолютной величине меньше единицы:

$$|\lambda_i(A)| < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$



Если матрица  $A$  устойчива по Шуру, величина

$$\sigma = \sigma(A) \doteq 1 - \max_i |\lambda_i(A)| > 0$$

называется ее *степенью устойчивости*; это минимальное из расстояний от собственных значений матрицы до единичной окружности на комплексной плоскости.

Величина

$$\rho(A) \doteq \max_i |\lambda_i(A)|$$

называется *спектральным радиусом* матрицы  $A$ , так что устойчивость по Шуру означает, что  $\rho(A) < 1$ , а степень устойчивости матрицы равна  $\sigma(A) = 1 - \rho(A)$ .

В дальнейшем выяснится, что Определения 1.2.1 и 1.2.2 устойчивой матрицы относятся к системам непрерывного и дискретного времени, поэтому устойчивость по Шуру иногда называют *дискретной устойчивостью*, в отличие от *непрерывной устойчивости* в гурвицевом случае. Будем говорить просто об *устойчивости*, когда из контекста ясно, о дискретной или непрерывной устойчивости идет речь.

Сформулируем следующий дискретный аналог Леммы 1.2.1.

**Лемма 1.2.2.** Пусть матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  шуровская. Тогда для любого  $\rho(A) < q < 1$  существует  $C = C(A, q)$ , такое что

$$\|A^k\| \leq Cq^k. \quad (1.2.2)$$

**Доказательство.** Доказательство совершенно аналогично непрерывному случаю: если матрица  $A$  диагонализуема, то существует невырожденная матрица  $T$  такая, что

$$A = T^{-1}\Lambda T, \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n\}.$$

Тогда

$$\|A^k\| = \|T^{-1}\Lambda^k T\| \leq \|T^{-1}\| \|\Lambda^k\| \|T\| = \|T^{-1}\| \|T\| \rho^k,$$

и, таким образом, оценка (1.2.2) справедлива при

$$q = \rho, \quad C = \|T\| \|T^{-1}\|$$

(ср. с непрерывной устойчивостью).

В общем случае, матрица приводится преобразованием подобия к блочной жордановой форме. При этом для одного жорданового блока  $J_i$  размерности  $l \times l$  имеем

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \dots & C_k^{l-1} \lambda_i^{k-l+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i^k \end{pmatrix} = \lambda_i^k \begin{pmatrix} 1 & C_k^1 \lambda_i^{-1} & \dots & C_k^{l-1} \lambda_i^{-l+1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{-1} \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$C_k^m = \begin{cases} \frac{k!}{m!(k-m)!}, & m \leq k, \\ 0, & m > k. \end{cases}$$

Поэтому если  $|\lambda_i| \leq \rho < 1$ , то найдется функция  $r(k)$ , растущая не быстрее показательной, такая что

$$\|J_i^k\| \leq r(k)\rho^k \leq Cq^k$$

для любого  $\rho < q < 1$ ; здесь

$$C = \max_k r(k) \left(\frac{\rho}{q}\right)^k < \infty.$$

С учетом  $\|e^{Jt}\| = \max_i \|e^{J_i t}\|$ , получаем требуемую оценку. ■

Перейдем к основной части раздела.

### Уравнение Ляпунова: гурвицева устойчивость

**Определение 1.2.3.** Пусть  $A, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Матричное уравнение

$$AP + PA^\top = -R, \quad R = R^\top, \quad (1.2.3)$$

называется *уравнением Ляпунова* относительно матрицы  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Как будет показано далее, матричные уравнения и неравенства Ляпунова составляют основу принятого в книге подхода к решению задач анализа и синтеза систем с возмущениями. Ниже покажем связь устойчивости системы с наличием у нее так называемой квадратичной функции Ляпунова, построение которой как раз и приводит к возникновению уравнения (неравенства) Ляпунова. Поэтому дальше в этом параграфе будут изучены свойства решений уравнений и неравенств Ляпунова для устойчивой матрицы  $A$ .

**Лемма 1.2.3 (Уравнение Ляпунова).** *Если для всех собственных значений  $\lambda_i$  матрицы  $A$  выполнено условие*

$$\operatorname{Re}(\lambda_i + \lambda_j) \neq 0, \quad (1.2.4)$$

*то существует единственное решение  $P = P^\top$  уравнения Ляпунова (1.2.3).*

*При этом, если  $R \succ 0$  или  $R = BB^\top$  и матрица*

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

*имеет ранг  $n$ , то уравнение Ляпунова (1.2.3) имеет положительно определенное решение*

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} R e^{A^\top t} dt \succ 0 \quad (1.2.5)$$

*тогда и только тогда, когда матрица  $A$  гурвицева.*

*Наконец, если матрица  $A$  гурвицева и  $R \succ 0$ , то и  $P \succ 0$ .*

Требование полноты ранга матрицы  $U$  играет фундаментальную роль при анализе и синтезе управления в линейных системах. Оно присутствует в формулировках основных утверждений этого раздела; подробно и конструктивно это требование будет изучено в разделе 1.3.1.

**Доказательство.** Как известно, если квадратные матрицы  $A$  и  $B$  не имеют одинаковых собственных значений, то матричное уравнение  $AX = XB$  имеет только нулевое решение; при этом, очевидно, матричное уравнение  $AX - XB = C$  имеет единственное решение. Таким образом, при выполнении условий (1.2.4) уравнение Ляпунова (1.2.3) будет иметь единственное (симметрическое) решение.

Пусть матрица  $A$  гурвицева. Тогда выполнено условие (1.2.4) и, по доказанному, уравнение Ляпунова имеет единственное решение.

В силу гурвицевости матрицы  $A$  интеграл в (1.2.5) сходится. При этом он определяет симметрическую матрицу  $P = P^\top$ , удовлетворяющую уравнению Ляпунова (1.2.3):

$$\begin{aligned} AP + PA^\top &= \int_0^\infty (Ae^{At} R e^{A^\top t} + e^{At} R e^{A^\top t} A^\top) dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{At} R e^{A^\top t}) dt = e^{At} R e^{A^\top t} \Big|_0^\infty = -R. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $P \succ 0$  при  $R \succ 0$ . Если же  $R = BB^\top$  и ранг матрицы  $U$  равен  $n$ , то согласно Теореме Д.1 из Приложения Д имеем

$$\int_0^\infty e^{At} BB^\top e^{A^\top t} dt \succ 0.$$

Покажем обратное. Пусть  $P \succ 0$  — решение уравнения Ляпунова (1.2.3). Предположим, что матрица  $A$  не является гурвицевой; тогда найдется ее собственное значение  $\lambda$ , вообще говоря, комплексное, такое что  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Пусть  $v \in \mathbb{C}^n$  — левый собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda$ , то есть

$$v^* A = \lambda v^*.$$

При  $R \succ 0$  имеем

$$v^* R v > 0.$$

Если же  $R = BB^\top$ , а  $\operatorname{rank} U = n$ , то по Теореме Д.1 из Приложения Д имеем  $v^* B \neq 0$ , откуда вновь

$$v^* R v = v^* B B^\top v = |v^* B|^2 > 0.$$

С другой стороны

$$v^* R v = -v^* (AP + PA^\top) v = - \underbrace{(\lambda + \lambda^*)}_{\geq 0} v^* P v \leq 0.$$

Придя к противоречию, убеждаемся в гурвицевости матрицы  $A$ .  
Заключительное утверждение леммы очевидно. ■

В среде МАТЛАВ решение матричного уравнения Ляпунова (1.2.3) находится с помощью процедуры `lyap`:

$$P = \text{lyap}(A, R)$$

Часто будет также рассматриваться уравнение Ляпунова вида

$$A^T Q + QA = -R, \quad R = R^T.$$

Поскольку операция транспонирования сохраняет гурвицевость матрицы, Лемма 1.2.3 (с соответствующими изменениями) сохраняет свою силу.

Из Леммы 1.2.3 вытекают почти очевидные, но важные следствия.

**Следствие 1.2.1.** *Если матрица  $A$  гурвицева, то матричное неравенство*

$$AP + PA^T \prec 0 \tag{1.2.6}$$

*разрешимо, причем все его решения положительно определены.*

*Если неравенство (1.2.6) имеет положительно определенное решение, то матрица  $A$  гурвицева.*

*Если матрица  $A$  гурвицева, матричное неравенство*

$$AP + PA^T \preceq 0 \tag{1.2.7}$$

*разрешимо и все его решения неотрицательно определены.*

**Доказательство.** Заметим, что любое решение матричного неравенства (1.2.6) является решением соответствующего уравнения (1.2.3) при некоторой  $R = R^T \succ 0$ . Пусть матрица  $A$  гурвицева; тогда по Лемме 1.2.3 уравнение

$$AP + PA^T = -R$$

имеет решение  $P \succ 0$  при любой матрице  $R = R^T \succ 0$ . Матрица  $P$ , очевидно, удовлетворяет матричному неравенству (1.2.6).

Пусть  $P \succ 0$  является решением неравенства (1.2.6). Это означает, что

$$AP + PA^T = -R$$

при некоторой  $R = R^T \succ 0$ . Таким образом, матрица  $P \succ 0$  удовлетворяет уравнению Ляпунова с отрицательно определенной правой частью; по Лемме 1.2.3, матрица  $A$  гурвицева.

Наконец, что любое решение матричного неравенства (1.2.7) является решением соответствующего матричного уравнения при некоторой  $R = R^\top \succ 0$ . Пусть матрица  $P$  удовлетворяет неравенству (1.2.7), тогда

$$AP + PA^\top = -R, \quad R \succ 0.$$

По Лемме 1.2.3, с учетом гурвицевости матрицы  $A$ , имеем  $P \succ 0$ . ■

**Следствие 1.2.2.** *Решение матричного неравенства*

$$A^\top Q + QA \prec 0, \tag{1.2.8}$$

*положительно определено тогда и только тогда, когда матрица  $A$  гурвицева.*

*Если матрица  $A$  гурвицева, то решение матричного неравенства*

$$A^\top Q + QA \preceq 0, \tag{1.2.9}$$

*является неотрицательно определенным.*

Матричное неравенство (1.2.8) будем называть *двойственным* к матричному неравенству (1.2.6), а неравенство (1.2.9) — двойственным к матричному неравенству (1.2.7). Эти двойственные неравенства эквивалентны в том смысле, что если (1.2.7) выполнено с некоторой  $P \succ 0$ , то (1.2.9) выполнено с  $Q = P^{-1}$  и наоборот.

**Лемма 1.2.4.** *Пусть матрица  $P = P^\top$  является решением уравнения Ляпунова (1.2.3) с гурвицевой матрицей  $A$  со степенью устойчивости  $\sigma(A) = \sigma$ . Тогда справедлива оценка*

$$\sigma \geq \frac{\lambda_{\min}(R)}{2\lambda_{\max}(P)}. \tag{1.2.10}$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda$  — собственное значение матрицы  $A$  с максимальной вещественной частью, так что  $\sigma(A) = \operatorname{Re} \lambda$ . Пусть  $v$  — левый собственный вектор, соответствующий этому собственному значению:

$$v^* A = \lambda v^*.$$

Тогда, с одной стороны,

$$v^*(AP + PA^\top)v = (\lambda + \lambda^*)v^*Pv = -2\sigma(A)v^*Pv,$$

а с другой

$$v^*(AP + PA^\top)v = -v^*Rv.$$

Таким образом,

$$\sigma(A) = \frac{v^* R v}{2v^* P v},$$

откуда и вытекает оценка (1.2.10). ■

**Определение 1.2.4.** Матричное неравенство

$$AP + PA^\top \preceq -R, \quad R = R^\top, \quad (1.2.11)$$

называется *неравенством Ляпунова* относительно матрицы  $P$ .

**Лемма 1.2.5 (неравенство Ляпунова).** Пусть  $A$  — гурвицева матрица. Если  $R \succ 0$  или  $R = BB^\top$  и матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ , то неравенство Ляпунова (1.2.11) разрешимо, причем для любого его решения  $P$  справедлива оценка

$$P \succcurlyeq P_-,$$

где  $P_- \succ 0$  — решение соответствующего уравнения Ляпунова.

**Доказательство.** Неравенство (1.2.11) разрешимо, поскольку в силу Леммы 1.2.3 существует решение соответствующего уравнения Ляпунова. Далее, имеем

$$AP + PA^\top \preceq -R = AP_- + P_-A^\top,$$

или

$$A(P - P_-) + (P - P_-)A^\top \preceq 0,$$

откуда, по Следствию 1.2.1, в силу гурвицевости матрицы  $A$ ,

$$P - P_- \succcurlyeq 0. \quad \blacksquare$$

Таким образом, среди всех решений неравенства Ляпунова минимальным (по отношению порядка  $\preceq$ ) является то, которое доставляет решение соответствующему уравнению Ляпунова. Принимая во внимание Свойство 12 знакоопределенных матриц из Приложения А, получаем следующий результат, который позволяет находить решение матричных уравнений через решение соответствующих неравенств.

**Следствие 1.2.3.** Пусть матрица  $A$  гурвицева, матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ , и пусть  $C$  — матрица максимального строчного ранга. Тогда решение задачи

$$\operatorname{tr} CPC^T \rightarrow \min$$

при ограничении

$$AP + PA^T + BB^T \preceq 0$$

достигается на решении уравнения Ляпунова

$$AP + PA^T + BB^T = 0.$$

### Уравнение Ляпунова: шуровская устойчивость

Перейдем к дискретному случаю.

**Определение 1.2.5.** Пусть  $A, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Матричное уравнение

$$APA^T - P = -R, \quad R = R^T, \quad (1.2.12)$$

называется *дискретным уравнением Ляпунова* относительно матрицы  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Следующая лемма является дискретным аналогом Леммы 1.2.3.

**Лемма 1.2.6 (Дискретное уравнение Ляпунова).** Пусть для всех собственных значений  $\lambda_i$  матрицы  $A$  выполнено условие

$$\lambda_i \lambda_j \neq 1. \quad (1.2.13)$$

Тогда существует единственное решение  $P = P^T$  дискретного уравнения Ляпунова (1.2.12).

При этом, если  $R \succ 0$  или  $R = BB^T$  и матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ , то дискретное уравнение Ляпунова (1.2.12) имеет положительно определенное решение

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k R (A^T)^k \succ 0 \quad (1.2.14)$$

тогда и только тогда, когда  $A$  — шуровская матрица.

Наконец, если матрица  $A$  шуровская и  $R \succ 0$ , то и  $P \succ 0$ .



**Доказательство.** Аналогично непрерывному случаю, легко убедиться в том, что если квадратные матрицы  $A$  и  $B$  не имеют взаимно обратных собственных значений, то матричное уравнение  $AXB = X$  имеет только нулевое решение; при этом, очевидно, матричное уравнение  $AXB - X = C$  имеет единственное решение. Таким образом, при выполнении условий (1.2.13) уравнение Ляпунова (1.2.12) будет иметь единственное (симметрическое) решение.

Пусть матрица  $A$  шуровская. Тогда выполнено условие (1.2.13) и, по доказанному, дискретное уравнение Ляпунова имеет единственное решение.

При этом, в силу устойчивости матрицы  $A$ , ряд в (1.2.14) сходится и определяет симметрическую матрицу  $P = P^\top$ , удовлетворяющую уравнению Ляпунова (1.2.12):

$$\begin{aligned} APA^\top - P &= A \sum_{k=0}^{\infty} A^k R (A^\top)^k A^\top - \sum_{k=0}^{\infty} A^k R (A^\top)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} R (A^\top)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} A^k R (A^\top)^k = -R. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $P \succ 0$  при  $R \succ 0$ . Если же  $R = BB^\top$  и  $\text{rank } U = n$ , то согласно Теореме Д.2 из Приложения Д, грамиан управляемости

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k BB^\top (A^\top)^k \succ 0.$$

Покажем обратное. Пусть  $P \succ 0$  — решение уравнения Ляпунова (1.2.12). Предположим, что матрица  $A$  не является шуровской; тогда найдется ее собственное значение  $\lambda$ , такое что  $|\lambda| \geq 1$ , и пусть  $v$  — соответствующий ему левый собственный вектор:

$$v^* A = \lambda v^*.$$

Тогда при  $R \succ 0$  имеем

$$v^* R v > 0.$$

Если же  $R = BB^\top$ , а  $\text{rank } U = n$ , то по Теореме Д.2 из Приложения Д имеем  $v^* B \neq 0$ , откуда вновь

$$v^* R v = v^* B B^\top v = |v^* B|^2 > 0.$$

С другой стороны,

$$v^* R v = -v^* (APA^\top - P)v = -\underbrace{(\lambda\lambda^* - 1)}_{\geq 0} v^* P v \leq 0.$$

Полученное противоречие доказывает дискретную устойчивость матрицы  $A$ .

Заключительное утверждение леммы очевидно. ■

В среде MATLAB решение дискретного матричного уравнения Ляпунова (1.2.12) находится с помощью процедуры `dlyap`:

$$P = \text{dlyap}(A, R)$$

С другой стороны, уравнение (1.2.12) представимо в виде

$$P = APA^T + R$$

и, в предположениях Леммы 1.2.6, для нахождения его решения можно воспользоваться простым итерационным методом

$$P_{k+1} = AP_kA^T + R,$$

который сходится со скоростью геометрической прогрессии при любом начальном приближении.

Отметим важные следствия из Леммы 1.2.6, которые доказываются точно так же, как и их непрерывные аналоги.

**Следствие 1.2.4.** *Если матрица  $A$  шуровская, то матричное неравенство*

$$APA^T - P \prec 0, \quad (1.2.15)$$

*разрешимо, причем все его решения положительно определены.*

*Если неравенство (1.2.15) имеет положительно определенное решение, то матрица  $A$  шуровская.*

*Если матрица  $A$  шуровская, матричное неравенство*

$$APA^T - P \preceq 0 \quad (1.2.16)$$

*разрешимо и все его решения неотрицательно определены.*

**Следствие 1.2.5.** *Решение матричного неравенства*

$$A^TQA - Q \prec 0, \quad (1.2.17)$$

*положительно определено тогда и только тогда, когда матрица  $A$  шуровская.*

*Если матрица  $A$  шуровская, то решение матричного неравенства*

$$A^TQA - Q \preceq 0, \quad (1.2.18)$$

*является неотрицательно определенным.*

Матричное неравенство (1.2.17) будем называть *двойственным* к матричному неравенству (1.2.15), а неравенство (1.2.18) — двойственным к матричному неравенству (1.2.16). Эквивалентность этих двойственных неравенств будет обсуждена в разделе 2.2.1.

Также в дальнейшем будет рассматриваться дискретное уравнение Ляпунова вида

$$A^\top Q A - Q = -R, \quad R = R^\top.$$

Поскольку операция транспонирования сохраняет дискретную устойчивость матрицы, то Лемма 1.2.6 (с соответствующими изменениями) сохраняет свою силу.

Следующая лемма является дискретным аналогом Леммы 1.2.4.

**Лемма 1.2.7.** Пусть матрица  $P = P^\top$  является решением уравнения Ляпунова (1.2.3) с шуровской матрицей  $A$  спектрального радиуса  $\rho(A) = \rho < 1$ . Тогда справедлива оценка

$$\rho \leq \sqrt{1 - \frac{\lambda_{\min}(R)}{\lambda_{\max}(P)}}. \quad (1.2.19)$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda$  — наибольшее по модулю собственное значение матрицы  $A$ , так что  $\rho(A) = |\lambda|$ , и пусть  $v$  — соответствующий ему левый собственный вектор:

$$v^* A = \lambda v^*.$$

Тогда, с одной стороны,

$$v^*(A P A^\top - P)v = (\lambda \lambda^* - 1)v^* P v = (\rho^2(A) - 1)v^* P v,$$

а с другой

$$v^*(A P A^\top - P)v = -v^* R v.$$

Таким образом,

$$\rho(A) = \sqrt{1 - \frac{v^* R v}{v^* P v}},$$

откуда и вытекает оценка (1.2.19). ■

**Определение 1.2.6.** Матричное неравенство

$$A P A^\top - P \preceq -R, \quad R = R^\top, \quad (1.2.20)$$

называется *дискретным неравенством Ляпунова* относительно матрицы  $P$ .

**Лемма 1.2.8 (дискретное неравенство Ляпунова).** Пусть  $A$  шуровская матрица. Если  $R \succ 0$  или  $R = BB^\top$  и матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ , то неравенство Ляпунова (1.2.20) разрешимо, причем для любого его решения  $P$  справедлива оценка

$$P \succcurlyeq P_-,$$

где  $P_- \succ 0$  — решение соответствующего уравнения Ляпунова (то есть  $P_-$  — минимальное решение неравенства (1.2.20)).

**Доказательство.** Неравенство (1.2.20) разрешимо, поскольку в силу Леммы 1.2.6 существует решение соответствующего уравнения Ляпунова. Далее, имеем

$$APA^\top - P \preccurlyeq -R = AP_-A^\top - P_-,$$

или

$$A(P - P_-)A^\top - (P - P_-) \preccurlyeq 0,$$

откуда, по Следствию 1.2.4, в силу дискретной устойчивости матрицы  $A$ ,

$$P - P_- \succcurlyeq 0. \quad \blacksquare$$

Использование Свойства 12 знакоопределенных матриц из Приложения А, приводит к дискретному аналогу Следствия 1.2.3.

**Следствие 1.2.6.** Пусть матрица  $A$  шуровская, матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ , и пусть  $C$  — матрица максимального строчного ранга. Тогда решение задачи

$$\operatorname{tr} CPC^\top \rightarrow \min$$

при ограничении

$$APA^\top - P + BB^\top \preccurlyeq 0$$

достигается на решении дискретного уравнения Ляпунова

$$APA^\top - P + BB^\top = 0.$$

В следующих двух параграфах полученные результаты используются для анализа устойчивости линейных непрерывных и дискретных систем.

### 1.2.2. Устойчивость линейных непрерывных систем

Начнем с определений.

**Определение 1.2.7.** Линейная непрерывная стационарная система

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.2.21)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , называется *устойчивой*, если для любого начального состояния  $x(0) = x_0$  выполнено условие

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Введем важнейшее средство исследования устойчивости, называемое *вторым (прямым) методом Ляпунова* или *методом функций Ляпунова*.

**Определение 1.2.8.** Непрерывная скалярная функция

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется *функцией Ляпунова* для системы (1.2.21), если она обладает следующими свойствами:

- 1)  $V(x) \geq 0$  для всех  $x$ , причем  $V(x) = 0$  лишь для  $x = 0$ ;
- 2)  $\dot{V}(x(t)) \doteq \frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$ , где  $x(t)$  — ненулевое решение системы (1.2.21).

Отметим, что второе свойство заключается в убывании функции Ляпунова на решениях системы; иными словами, ее производная, вычисленная в силу системы, отрицательна.

Метод функций Ляпунова состоит в построении функции с указанными свойствами, что позволяет сделать вывод об устойчивости системы.

**Замечание 1.2.1.** Отметим, что Определение 1.2.8 годится также и для нестационарных и нелинейных систем вида  $\dot{x} = f(t, x)$ , однако, если для произвольной системы общего метода построения функций Ляпунова не существует, то для случая линейной стационарной системы функцию Ляпунова можно всегда выбрать в виде квадратичной формы. ▼

### Квадратичная функция Ляпунова

Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^T Q x, \quad Q \succ 0, \quad (1.2.22)$$

и найдем условия, при которых она будет функцией Ляпунова для системы (1.2.21).

В силу положительной определенности матрицы  $Q$  имеем  $V(x) > 0$  для всех  $x \neq 0$ , так что первое свойство из Определения 1.2.8 выполнено.

Вычислим непосредственным образом производную функции  $V(x)$  на траекториях системы (1.2.21):

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} = x^T A^T Q x + x^T Q A x = x^T (A^T Q + Q A) x.$$

Следовательно, второе свойство из Определения 1.2.8 эквивалентно выполнению

$$x^T (A^T Q + Q A) x < 0 \quad \text{при всех } x \neq 0,$$

то есть выполнению матричного неравенства Ляпунова

$$A^T Q + Q A \prec 0. \quad (1.2.23)$$

**Определение 1.2.9.** Функцию вида (1.2.22)–(1.2.23) будем называть *квадратичной функцией Ляпунова* для системы (1.2.21).

В следующей теореме устанавливается критерий устойчивости для линейной системы.

**Теорема 1.2.1.** Система (1.2.21) устойчива тогда и только тогда, когда устойчива ее матрица  $A$ . При этом для всякого  $0 < \nu < \sigma$ , где  $\sigma = \sigma(A)$  — степень устойчивости матрицы  $A$ , существует число  $C = C(A, \nu)$  такое, что

$$|x(t)| \leq C |x_0| e^{-\nu t}. \quad (1.2.24)$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть матрица  $A$  неустойчива, то есть найдется ее собственное значение  $\lambda$  такое, что

$$\operatorname{Re} \lambda \geq 0.$$

Если  $\lambda$  вещественно, возьмем  $x_0 = r$ , где  $r$  — нормированный вещественный собственный вектор, отвечающий  $\lambda$ :

$$A r = \lambda r, \quad |r| = 1.$$

Тогда решение системы (1.2.21) с таким начальным условием имеет вид  $x(t) = e^{\lambda t} r$ . Поэтому, если  $\lambda > 0$ , то  $|x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ , а если  $\lambda = 0$ , то  $x(t) = \text{const} \neq 0$ . Следовательно, система (1.2.21) не является устойчивой.

Пусть теперь  $\lambda$  — комплексное число:

$$\lambda = u + jv, \quad u \geq 0,$$

а  $r = g + jh$  — нормированный собственный вектор, отвечающий  $\lambda$ , то есть  $Ar = \lambda r$ ,  $|r| = 1$ . Тогда

$$A(g + jh) = (u + jv)(g + jh),$$

откуда

$$Ag = ug - vh, \quad Ah = vg + uh.$$

Возьмем

$$x_0 = \alpha_0 g + \beta_0 h, \quad \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} A(\alpha g + \beta h) &= \alpha Ag + \beta Ah = \\ &= \alpha(ug - vh) + \beta(vg + uh) = (\alpha u + \beta v)g + (-\alpha v + \beta u)h, \end{aligned}$$

вектор  $x(t)$  будет оставаться в двумерном подпространстве, натянутом на вектора  $g$  и  $h$ :

$$x(t) = \alpha(t)g + \beta(t)h,$$

где  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha u + \beta v, & \alpha(0) &= \alpha_0, \\ \dot{\beta} &= -\alpha v + \beta u, & \beta(0) &= \beta_0. \end{aligned}$$

Обозначая  $\rho(t) = \alpha^2(t) + \beta^2(t)$ , отсюда легко получаем, что

$$\dot{\rho} = 2u\rho, \quad \rho(0) = \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0.$$

При этом, если  $u > 0$ , то  $\rho(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ , а если  $u = 0$ , то  $\rho(t) = \text{const} \neq 0$ . Следовательно,  $|x(t)| \not\rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, и в этом случае система (1.2.21) не является устойчивой.

*Достаточность.* Рассмотрим уравнение Ляпунова

$$A^\top Q + QA = -R \tag{1.2.25}$$

с гурвицевой матрицей  $A$  и некоторой  $R \succ 0$ . Согласно Лемме 1.2.3, уравнение (1.2.25) имеет единственное положительно определенное решение  $Q \succ 0$ .

Из Определения 1.2.9 видим, что функция

$$V(x) = x^\top Qx$$

является функцией Ляпунова для рассматриваемой системы, и ее производная в силу системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = x^\top (A^\top Q + QA)x = -x^\top Rx < 0.$$

Далее, пусть  $M = \lambda_{\max}(Q) > 0$  и  $\ell = \lambda_{\min}(R) > 0$ . Тогда

$$\dot{V}(x) \leq -\ell x^\top x \leq -\frac{\ell}{M} x^\top Qx = -\frac{\ell}{M} V,$$

и, таким образом, для функции  $v(t) = V(x(t)) \geq 0$  имеем:

$$\dot{v} \leq -\frac{\ell}{M} v, \quad v(0) = x_0^\top Qx_0,$$

откуда

$$v(t) \leq v(0) e^{-\frac{\ell}{M}t}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 = x^\top(t)x(t) &\leq \frac{1}{m} x^\top(t)Qx(t) = \\ &= \frac{1}{m} v(t) \leq \frac{v(0)}{m} e^{-\frac{\ell}{M}t} \leq \frac{M|x_0|^2}{m} e^{-\frac{1}{M}t}, \end{aligned}$$

где  $m = \lambda_{\min}(Q) > 0$ . Таким образом,

$$|x(t)| \leq C|x_0| e^{-\nu t},$$

где

$$C = \sqrt{\frac{M}{m}},$$

а

$$\nu = \frac{\ell}{2M} \leq \sigma. \quad \blacksquare$$

В результате получена экспоненциальная оценка типа (1.2.24) для решений уравнения (1.2.21). При этом показатель экспоненты  $\nu$  не связан напрямую с величиной  $\sigma$ , а выражается через максимальные и минимальные собственные значения матриц  $Q$  и  $R$  в уравнении Ляпунова.



**Замечание 1.2.2.** Вспомним, что в Лемме 1.2.3 установлено, что для устойчивой матрицы  $A$  уравнение Ляпунова

$$AP + PA^\top = -R, \quad R \succ 0,$$

имеет положительно определенное решение  $P$ ; иными словами, устойчивая система  $\dot{x} = Ax$  с *необходимостью* обладает квадратичной функцией Ляпунова  $V(x) = x^\top P^{-1}x$ . С учетом доказательства *достаточности*, приведенного в Теореме 1.2.1, заключаем, что непрерывная система устойчива тогда и только тогда, когда у нее имеется квадратичная функция Ляпунова. ▼

**Замечание 1.2.3.** Оказывается, что величине  $\nu$ , характеризующей скорость убывания функции Ляпунова, можно придать наибольшее значение, если в качестве  $R$  взять единичную матрицу. ▼

Используя полученные результаты, теперь можно оценить решения системы при наличии  $L_\infty$ -ограниченных внешних возмущений:

$$\dot{x} = Ax + w, \quad (1.2.26)$$

где

$$|w(t)| \leq \gamma \quad \forall t \geq 0. \quad (1.2.27)$$

Без потери общности будем полагать  $\gamma = 1$ , что может быть достигнуто соответствующей нормировкой вектора состояния системы.

**Теорема 1.2.2.** *Для того, чтобы решение  $x(t)$  системы (1.2.26) было ограниченным для всех ограниченных внешних возмущений вида (1.2.27), необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  была устойчива.*

**Доказательство. Необходимость.** Покажем, что система (1.2.26) с неустойчивой матрицей  $A$  имеет неограниченное решение.

В силу Теоремы 1.2.1, если матрица  $A$  неустойчива, найдется ее собственное значение  $\lambda$  такое, что

$$\operatorname{Re} \lambda \geq 0.$$

Если  $\lambda$  вещественно, положим  $w(t) \equiv r$ , где  $r$  — нормированный вещественный собственный вектор, отвечающий  $\lambda$ :

$$Ar = \lambda r, \quad |r| = 1.$$

При  $x_0 = r$  решение системы (1.2.26) будет иметь вид

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} r + \int_0^t e^{A(t-\tau)} r d\tau = \\ &= e^{\lambda t} r + r \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} d\tau = \left( e^{\lambda t} + \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right) r \end{aligned}$$

для  $\lambda \neq 0$ , поэтому

$$|x(t)| = e^{\lambda t} + \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

Если же  $\lambda = 0$ , то

$$x(t) = r + r \int_0^t d\tau = (1 + t)r$$

и вновь

$$|x(t)| = t + 1 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

Пусть теперь собственное значение  $\lambda$  комплексно:

$$\lambda = u + jv, \quad u \geq 0,$$

а  $r = g + jh$  — отвечающий ему собственный вектор, нормированный следующим образом:

$$Ar = \lambda r, \quad |g| + |h| = 1.$$

Возьмем  $x_0 = \alpha_0 g + \beta_0 h$ . Тогда уравнение движения вектора  $x(t)$  на двумерной плоскости, порожденной векторами  $g$  и  $h$ , принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha u + \beta v + \varphi, & \alpha(0) &= \alpha_0, \\ \dot{\beta} &= -\alpha v + \beta u + \psi, & \beta(0) &= \beta_0, \end{aligned}$$

где (см. доказательство необходимости в Теореме 1.2.1)

$$x(t) = \alpha(t)g + \beta(t)h,$$

а внешнее возмущение выбрано в виде  $w(t) = \varphi(t)g + \psi(t)h$ .

Обозначая  $\rho(t) = \alpha^2(t) + \beta^2(t)$ , имеем

$$\dot{\rho} = 2u\rho + \varphi\alpha(t) + \psi\beta(t).$$

Выберем

$$\varphi(t) = \text{sign } \alpha(t),$$

$$\psi(t) = \text{sign } \beta(t),$$

полагая  $\text{sign } 0 = 1$ ; в силу нормировки вектора  $r$ , внешнее возмущение удовлетворяет ограничению (1.2.27). Тогда

$$\dot{\rho} = 2u\rho + |\alpha(t)| + |\beta(t)|, \quad \rho(0) = \alpha_0^2 + \beta_0^2.$$

Поскольку  $\alpha(t), \beta(t) \not\equiv 0$ , то  $\dot{\rho} > 0$  и  $\rho \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ . Следовательно, при выбранном внешнем возмущении

$$|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty,$$

то есть и в этом случае система (1.2.26) имеет неограниченное решение.

*Достаточность.* Для общности рассуждений будем рассматривать систему несколько более общего вида, чем (1.2.26), а именно:

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad (1.2.28)$$

и покажем, что устойчивость матрицы  $A$  достаточна для ограниченности всех ее решений.

Пусть как и ранее  $V(x) = x^\top Qx$ , где  $Q \succ 0$  — решение уравнения Ляпунова

$$A^\top Q + QA = -R, \quad R \succ 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{d}{dt} V(x(t)) = (Ax + Dw)^\top Qx + x^\top Q(Ax + Dw) = \\ &= x^\top (A^\top Q + QA)x + w^\top D^\top Qx + x^\top QDw = \\ &= -x^\top Rx - \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma}} Q^{1/2} Dw - \sqrt{\gamma} Q^{1/2} x \right)^\top \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma}} Q^{1/2} Dw - \sqrt{\gamma} Q^{1/2} x \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} w^\top D^\top QDw + \gamma x^\top Qx \leq -\frac{\ell}{M} V + \frac{1}{\gamma} w^\top D^\top QDw + \gamma V, \end{aligned}$$

где  $M = \lambda_{\max}(Q) > 0$ ,  $\ell = \lambda_{\min}(R)$ , а  $\gamma > 0$  произвольно (в левой части последнего неравенства использован стандартный прием дополнения до полного квадрата). Таким образом,

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{\ell}{M} - \gamma\right)V + \frac{1}{\gamma}\|D^\top QD\|,$$

поскольку  $w^\top D^\top QDw \leq \|D^\top QD\|$  при  $|w| \leq 1$ .

Пусть  $0 < \gamma < \frac{\ell}{M}$ , тогда при

$$\alpha = \frac{\ell}{M} - \gamma > 0, \quad \beta = \frac{1}{\gamma}\|D^\top QD\|,$$

для функции  $v(t) = V(x(t))$  имеем

$$\dot{v}(t) \leq -\alpha v(t) + \beta.$$

Интегрируя это неравенство с учетом  $v(t) \geq 0$ , находим

$$v(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha},$$

откуда

$$v(t) \leq \max\left\{\frac{\beta}{\alpha}, v_0\right\},$$

где  $v_0 = x_0^\top Qx_0$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 = x^\top(t)x(t) &\leq \frac{1}{m}x^\top(t)Qx(t) = \frac{1}{m}v(t) \leq \\ &\leq \frac{1}{m}\max\left\{\frac{\beta}{\alpha}, x_0^\top Qx_0\right\} \leq \frac{1}{m}\max\left\{\frac{\beta}{\alpha}, M|x_0|^2\right\}, \end{aligned}$$

где  $m = \lambda_{\min}(Q)$ , что и гарантирует ограниченность решений системы (1.2.28).  $\blacksquare$

Итак, гурвицевость матрицы  $A$  необходима и достаточна для того, чтобы решение невозмущенной системы стремилось к нулю при любом начальном приближении и чтобы решение возмущенной системы оставалось ограниченным для ограниченных возмущений. Первое свойство иногда называется *устойчивостью по начальному приближению*, второе — *устойчивостью по входу*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>В западной литературе устойчивые по входу системы называются BIBO (Bounded-Input, Bounded-Output, то есть *ограниченный вход–ограниченный выход*).

Итак, вновь выяснилось, что для линейных стационарных систем все определения устойчивости эквивалентны. В дальнейшем не будем делать различий между устойчивостью системы и устойчивостью ее матрицы состояния  $A$ ; соответственно, величину  $\sigma = \sigma(A) > 0$  естественно также называть *степеню устойчивости системы* (1.2.21) или системы (1.2.26).

Еще раз подчеркнем эквивалентность устойчивости линейной стационарной системы существованию у нее квадратичной функции Ляпунова; на этом будут основываться построения в основной части книги.

### 1.2.3. Устойчивость линейных дискретных систем

Обратимся к дискретному случаю. В простейшем случае уравнение состояния невозмущенной открытой линейной системы имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (1.2.29)$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Будем называть систему (1.2.29) (*дискретно устойчивой*), если

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

для любого начального  $x_0$ .

Как и в непрерывном случае, функции Ляпунова являются эффективным средством исследования устойчивости.

**Определение 1.2.10.** Непрерывная скалярная функция

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется *функцией Ляпунова* для системы (1.2.29), если она обладает следующими свойствами:

- 1)  $V(x) \geq 0$  для всех  $x$ , причем  $V(x) = 0$  лишь для  $x = 0$ ;
- 2)  $V(x_{k+1}) < V(x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $x_k \neq 0$  — решение системы (1.2.29).

Для линейной дискретной системы квадратичная функция Ляпунова вводится аналогично непрерывному случаю. Рассмотрим функцию

$$V(x) = x^T Q x, \quad Q \succ 0; \quad (1.2.30)$$

для нее первое свойство выполнено очевидным образом. Чтобы удовлетворить второму свойству, вычислим значения  $V(x)$  на траекториях

системы (1.2.29):

$$V(x_{k+1}) = x_{k+1}^\top Q x_{k+1} = x_k^\top A^\top Q A x_k.$$

Следовательно, свойство 2) эквивалентно выполнению

$$x^\top (A^\top Q A - Q) x < 0 \quad \text{при всех } x \neq 0,$$

то есть выполнению дискретного матричного неравенства Ляпунова

$$A^\top Q A - Q \prec 0. \quad (1.2.31)$$

Таким образом, приходим к определению

**Определение 1.2.11.** Функция вида (1.2.30)–(1.2.31) называется *квадратичной функцией Ляпунова* для системы (1.2.29).

**Теорема 1.2.3.** Для устойчивости дискретной системы (1.2.29) необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  была шуровской, то есть  $\rho = \rho(A) < 1$ .

При этом для любого  $q$ ,  $\rho < q < 1$ , существует такая константа  $C = C(A, q)$ , что

$$|x_k| \leq C |x_0| q^k.$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть матрица  $A$  не является шуровской; тогда найдется ее собственное значение  $\lambda$  такое, что  $|\lambda| \geq 1$ .

Если  $\lambda$  вещественно, возьмем  $x_0 = r$ , где  $r$  — нормированный собственный вектор, отвечающий  $\lambda$ :

$$Ar = \lambda r, \quad |r| = 1.$$

Тогда, согласно (1.1.10), решение системы (1.2.32) с таким начальным условием имеет вид

$$x_k = \lambda^k r.$$

Поэтому, если  $|\lambda| > 1$ , то  $|x_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ , а при  $|\lambda| = 1$  имеем  $|x_k| \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно, система (1.2.29) не является устойчивой.

Пусть теперь  $\lambda$  — комплексное число:  $\lambda = u + jv$ , а  $r = g + jh$  — нормированный собственный вектор, отвечающий  $\lambda$ .

Тогда имеем

$$A(g + jh) = (u + jv)(g + jh),$$

откуда

$$Ag = ug - vh, \quad Ah = vg + uh.$$

Возьмем

$$x_0 = \alpha_0 g + \beta_0 h, \quad \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0;$$

тогда вектор  $x_k$  будет оставаться в двумерном подпространстве, натянутом на вектора  $g$  и  $h$ :

$$x_k = \alpha_k g + \beta_k h,$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  удовлетворяют разностным уравнениям

$$\alpha_{k+1} = u\alpha_k + v\beta_k,$$

$$\beta_{k+1} = -v\alpha_k + u\beta_k,$$

с начальными условиями  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  соответственно.

Обозначая  $\rho_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2$ , получаем

$$\rho_{k+1} = |\lambda|^2 \rho_k, \quad \rho_0 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0,$$

поэтому, если  $|\lambda| > 1$ , то  $\rho_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ , а если  $|\lambda| = 1$ , то  $\rho_k = \text{const}$ . Следовательно,  $|x_k| \not\rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то есть и в этом случае система (1.2.29) не является устойчивой.

*Достаточность.* Согласно Лемме 1.2.6, при шуровской матрице  $A$  дискретное уравнение Ляпунова

$$A^\top Q A - Q = -R$$

с некоторой матрицей  $R \succ 0$  имеет положительно определенное решение  $Q \succ 0$ , так что согласно Определению 1.2.10 функция

$$V(x) = x^\top Q x$$

является квадратичной функцией Ляпунова для системы (1.2.29). Положив  $v_k = V(x_k)$ , получим

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= x_{k+1}^\top Q x_{k+1} = x_k^\top A^\top Q A x_k = \\ &= x_k^\top (Q - R) x_k = x_k^\top Q x_k - x_k^\top R x_k \leq v_k - \frac{\ell}{M} v_k, \end{aligned}$$

где  $M = \lambda_{\max}(Q) > 0$  и  $\ell = \lambda_{\min}(R) > 0$ , откуда

$$v_{k+1} - v_k \leq -\frac{\ell}{M} v_k < 0.$$

Далее, имеем

$$v_k \leq v_0 \left(1 - \frac{\ell}{M}\right)^k, \quad v_0 = x_0^\top Q x_0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |x_k|^2 = x_k^\top x_k &\leq \frac{1}{m} x_k^\top Q x_k = \frac{1}{m} v_k \leq \\ &\leq \frac{v_0}{m} \left(1 - \frac{\ell}{M}\right)^k \leq \frac{M}{m} |x_0|^2 \left(1 - \frac{\ell}{M}\right)^k, \end{aligned}$$

где  $m = \lambda_{\min}(Q) > 0$ .

Итак,

$$|x_k| \leq C |x_0| q^k,$$

где

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}}, \\ \rho \leq q &= \sqrt{1 - \frac{\ell}{M}} < 1, \end{aligned}$$

то есть последовательность  $|x_k|$  убывает со скоростью геометрической прогрессии. ■

Разумеется, Замечание 1.2.2 справедливо и в дискретном случае.

Как и в непрерывном случае, величину  $\sigma(A) = 1 - \rho(A) > 0$  будем называть *степенью устойчивости дискретной системы* (1.2.21).

Аналогично непрерывному случаю, величина  $q$  оказывается минимальной при выборе  $R = I$ .

Теперь оценим поведение решений дискретной системы при наличии  $l_\infty$ -ограниченных внешних возмущений:

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k, \quad (1.2.32)$$

где

$$|w_k| \leq \gamma \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (1.2.33)$$

Без потери общности будем полагать  $\gamma = 1$ , что может быть достигнуто соответствующей нормировкой вектора состояния  $x_k$ .

**Теорема 1.2.4.** *Для того, чтобы решение  $x_k$  системы (1.2.32) было ограниченным для всех ограниченных внешних возмущений вида (1.2.33), необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  была шуровской.*



**Доказательство. Необходимость.** Как и в непрерывном случае, покажем, что у системы (1.2.32) с неустойчивой матрицей  $A$  существует неограниченное решение.

Предположим, что матрица  $A$  не является шуровской; тогда найдется ее собственное значение  $\lambda$  такое, что  $|\lambda| \geq 1$ .

Пусть  $\lambda$  вещественно, а  $r$  — нормированный собственный вектор, отвечающий  $\lambda$ :

$$Ar = \lambda r, \quad |r| = 1.$$

Выберем в качестве начального условия  $x_0 = r$ ; при этом, согласно (1.1.10), решение системы (1.2.32) будет иметь вид

$$x_k = A^k r + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} w_k.$$

При  $w_k \equiv r$  получаем

$$x_k = A^k r + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} r = \lambda^k r + r \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} = (1 + \lambda + \dots + \lambda^k) r,$$

поэтому при  $|\lambda| > 1$  имеем

$$|x_k| = \left| \frac{\lambda^{k+1} - 1}{\lambda - 1} \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty,$$

а при  $\lambda = 1$ , очевидно,  $|x_k| = k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ .

Если же  $\lambda = -1$ , положив  $w_k = (-1)^k r$  при том же начальном условии, получаем

$$x_k = A^k r + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} (-1)^i r = (-1)^k r + r \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i-1} = (-1)^{k+1} (k-1) r,$$

и вновь  $|x_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ . Следовательно, система (1.2.32) имеет неограниченное решение.

Пусть теперь  $\lambda$  — комплексное число:  $\lambda = u + jv$ , а  $r = g + jh$  — соответствующий собственный вектор, нормированный следующим образом:

$$Ar = \lambda r, \quad |g| + |h| = 1;$$

при этом

$$Ag = ug - vh, \quad Ah = vg + uh.$$

Возьмем  $x_0 = \alpha_0 g + \beta_0 h$  и выберем внешнее возмущение в виде

$$w_k = \varphi_k g + \psi_k h,$$

тогда вектор  $x_k$  будет оставаться в двумерном подпространстве, натянутом на вектора  $g$  и  $h$ :

$$x_k = \alpha_k g + \beta_k h,$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  удовлетворяют разностным уравнениям

$$\alpha_{k+1} = u\alpha_k + v\beta_k + \varphi_k,$$

$$\beta_{k+1} = -v\alpha_k + u\beta_k + \psi_k,$$

с начальными условиями  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  соответственно.

Обозначая  $\rho_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2$ , получаем, что

$$\rho_{k+1} = |\lambda|^2 \rho_k + \varphi_k^2 + 2\varphi_k(u\alpha_k + v\beta_k) + \psi_k^2 + 2\psi_k(-v\alpha_k + u\beta_k).$$

Положим

$$\varphi_k = \text{sign}(u\alpha_k + v\beta_k),$$

$$\psi_k = \text{sign}(-v\alpha_k + u\beta_k),$$

где  $\text{sign } 0 = 1$ ; при этом, в силу нормировки вектора  $r$ , внешнее возмущение будет удовлетворять условию (1.2.33). Тогда

$$\rho_{k+1} = |\lambda|^2 \rho_k + 2(1 + |u\alpha_k + v\beta_k| + |-v\alpha_k + u\beta_k|),$$

поэтому  $\rho_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ .

Следовательно, при выбранном внешнем возмущении

$$|x_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty,$$

то есть и в этом случае система (1.2.32) имеет неограниченное решение.

*Достаточность.* Вновь для общности рассуждений будем рассматривать систему более общего вида, чем (1.2.32), а именно

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad (1.2.34)$$

и покажем, что дискретная устойчивость матрицы  $A$  достаточна для ограниченности решений такой системы.

Пусть как и ранее  $V(x) = x^\top Qx$ , где  $Q \succ 0$  — решение уравнения Ляпунова

$$A^\top QA - Q = -R, \quad R \succ 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}) &= x_{k+1}^\top Qx_{k+1} = (Ax_k + Dw_k)^\top Q(Ax_k + Dw_k) = \\ &= x_k^\top A^\top QAx_k + w_k^\top D^\top QAx_k + x_k^\top A^\top QDw_k + w_k^\top D^\top QDw_k = \\ &= x_k^\top A^\top QAx_k - \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma}} Q^{1/2} Dw_k - \sqrt{\gamma} Q^{1/2} Ax_k \right)^\top \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma}} Q^{1/2} Dw_k - \sqrt{\gamma} Q^{1/2} Ax_k \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} w_k^\top D^\top QDw_k + \gamma x_k^\top A^\top QAx_k + w_k^\top D^\top QDw_k \leq \\ &\leq (1 + \gamma) x_k^\top (Q - R) x_k + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) w_k^\top D^\top QDw_k \leq \\ &\leq (1 + \gamma) V(x_k) - (1 + \gamma) \frac{\ell}{M} V(x_k) + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) w_k^\top D^\top QDw_k, \end{aligned}$$

где  $M = \lambda_{\max}(Q) > 0$ ,  $\ell = \lambda_{\min}(R)$ , а  $\gamma > 0$  произвольно. Таким образом,

$$V(x_{k+1}) \leq (1 + \gamma) \left(1 - \frac{\ell}{M}\right) V(x_k) + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \|D^\top QD\|,$$

поскольку  $w_k^\top D^\top QDw_k \leq \|D^\top QD\|$  при  $|w_k| \leq 1$ .

Пусть  $0 < \gamma < \ell/(M - \ell)$ , тогда при

$$\alpha = (1 + \gamma) \left(1 - \frac{\ell}{M}\right) < 1, \quad \beta = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \|D^\top QD\|,$$

для функции  $v_k = V(x_k)$  имеем

$$v_{k+1} \leq \alpha v_k + \beta.$$

Отсюда, с учетом  $v_0 = x_0^\top Qx_0 \geq 0$ , имеем

$$v_k \leq \alpha^k v_0 + \frac{\beta}{1 - \alpha} \leq v_0 + \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

поэтому

$$|x_k|^2 \leq \frac{1}{m} x_k^\top Qx_k = \frac{1}{m} v_k \leq \frac{1}{m} \left(v_0 + \frac{\beta}{1 - \alpha}\right) \leq \frac{1}{m} (M|x_0|^2 + \frac{\beta}{1 - \alpha}),$$

где  $m = \lambda_{\min}(Q)$ . Таким образом, все решения системы (1.2.34) ограничены. ■

**Замечание 1.2.4.** В заключение раздела поясним связь между гурвицевой и шуровской устойчивостью.

Пусть задана непрерывная система

$$\dot{x} = Ax + Du, \quad x(0) = x_0, \quad (1.2.35)$$

решение которой

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Du(\tau) d\tau.$$

Введем постоянный шаг дискретизации  $\delta > 0$  и рассмотрим

$$x(t + \delta) = e^{A(t+\delta)} x_0 + \int_0^{t+\delta} e^{A(t+\delta-\tau)} Du(\tau) d\tau.$$

Путем непосредственных преобразований в правой части получаем

$$x(t + \delta) = e^{A\delta} \left( \underbrace{e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Du(\tau) d\tau}_{x(t)} \right) + \int_t^{t+\delta} e^{A(t+\delta-\tau)} Du(\tau) d\tau.$$

Положим

$$u(\tau) \equiv u_k, \quad \tau \in [t, t + \delta),$$

тогда второй интеграл в правой части полученного соотношения запишется как

$$\int_t^{t+\delta} e^{A(t+\delta-\tau)} Du(\tau) d\tau = \int_t^{t+\delta} e^{A(t+\delta-\tau)} d\tau Du_k = \int_0^\delta e^{A\tau} d\tau Du_k.$$

Обозначив

$$x_k \doteq x(t), \quad x_{k+1} \doteq x(t + \delta),$$

$$A_s \doteq e^{A\delta}, \quad D_s \doteq \int_0^{\delta} e^{A\tau} d\tau D,$$

получим дискретный аналог системы (1.2.35):

$$x_{k+1} = A_s x_k + D_s u_k.$$

Далее, если  $\lambda_i = u_i + jv_i$  — собственные значения матрицы  $A$ , то  $e^{\lambda_i} = e^{u_i + jv_i}$  — собственные значения матрицы  $A_s$  (см. Приложение Г). Поэтому, если матрица  $A$  гурвицева, то есть  $u_i < 0$ , то

$$|e^{u_i + jv_i}| = |e^{u_i}| < 1.$$

Таким образом, гурвицевость непрерывной системы отвечает шуровской устойчивости ее дискретного аналога.

Заметим также, что если  $A$  гурвицева, то беря явно интеграл в правой части выражения для  $D_s$ , имеем

$$D_s = A^{-1}(e^{A\delta} - I)D$$

(здесь использовано свойство обратимости гурвицевой матрицы). ▼

Необходимо также отметить, что на практике при переходе к дискретному времени как правило используется следующая разностная аппроксимация дифференциального уравнения:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\delta} = Ax_k,$$

где  $\delta$  — интервал дискретизации. Видим, что соответствующая дискретная модель, описываемая уравнением

$$x_{k+1} = (I + \delta A)x_k,$$

может оказаться неустойчивой, если  $\delta$  велико. Однако этот (стандартный) прием далее использоваться не будет.

### 1.3. Виды управления

Предыдущие разделы были посвящены описанию открытых систем, в которых управление либо отсутствует, либо уже выбрано. В настоящем разделе обсуждаются два способа задания управления в замкнутых системах: программное управление (и связанное с ним понятие управляемости вместе с двойственным ему понятием наблюдаемости) и управление в форме обратной связи.

### 1.3.1. Программное управление. Управляемость

Вернемся к линейной системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + D_1 w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ , внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  и обсудим способ выбора управления как функции от времени, то есть в виде  $u = u(t)$ . Такой способ выбора называется *программным управлением*; на первый взгляд он представляется наиболее естественным.

Здесь, прежде всего, следует уточнить, в каком классе ищутся функции  $u(t)$  и какие на них накладываются ограничения. Так, управления обычно предполагаются либо гладкими, либо непрерывными, либо произвольными измеримыми функциями времени. Чаще всего задача ставится именно в последней формулировке, то есть допускаются и разрывные управления. Однако нередко оказывается, что для некоторых задач оптимальное управление достигается на дифференцируемых функциях от времени. Кроме того, на класс управлений обычно накладываются дополнительные условия типа ограниченности управлений. Типичным является условие

$$u(t) \in \mathcal{U} \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $\mathcal{U}$  — заданное замкнутое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^p$ .

Другим типом ограничений являются интегральные, например,

$$J(u) \doteq \int_0^T |u(t)|_2^2 dt \leq c^2, \quad (1.3.2)$$

где  $T$  — заданная длительность процесса управления (то есть управления предполагаются  $L_2$ -ограниченными на отрезке  $[0, T]$ ). Функционал (1.3.2) называется *функционалом энергии*.

После выбора программного управления и подстановки его в систему (1.3.1) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых фигурируют лишь внешние воздействия. Например, уравнение состояния приобретает вид

$$\dot{x} = Ax + \underbrace{Bu(t) + D_1 w(t)}_{w_1(t)},$$

и если величины  $x(0) = x_0$  и  $w(t)$  известны, то  $x(t)$  может быть определено по формуле

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} w_1(\tau) d\tau$$

для всех значений  $t \geq 0$ .

Разумеется, программное управление может применяться и в дискретных системах (управление  $u_k$  выбирается заранее как функция от  $k$ ); никаких принципиально новых моментов при этом не возникает.

Используем программное управление для анализа важного понятия *управляемости*.

**Определение 1.3.1.** Система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.3.3)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ , называется *управляемой*, если для любого начального  $x(0)$  и любого  $0 < T < \infty$  найдется ограниченное кусочно-непрерывное управление  $u(t)$  на отрезке  $[0, T]$  такое, что решение системы (1.3.3) обращается в нуль в момент  $T$ .

Иначе говоря, в управляемой системе начальное отклонение может быть устранено за (любое) конечное время. Очевидно, что изменив направление времени, получим, что управляемая система может быть переведена из  $x(0) = 0$  в любую заданную точку  $x(T)$ ; это свойство иногда называют *достижимостью*.

**Замечание 1.3.1.** Важно отметить, что из свойств решений линейных дифференциальных уравнений вытекает, что управляемость системы эквивалентна выполнению следующего свойства: для любых точек  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  и любого момента времени  $T > 0$  найдется ограниченное кусочно-непрерывное управление  $u(t)$ , переводящее систему из  $x(0) = x_0$  в  $x(T) = x_1$ . Часто в литературе такие системы называют *вполне управляемыми*. ▼

Трудность задачи проверки управляемости состоит в том, что обычно количество управляющих воздействий (размерность  $p$  пространства управлений) меньше количества управляемых величин (размерности  $n$  пространства состояний), однако она разрешается следующим образом.

**Определение 1.3.2.** Пара матриц  $(A, B)$  называется *невыврожденной* (*управляемой*), если ранг матрицы

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

равен  $n$ . Матрица  $U$  называется *матрицей управляемости*.

В среде МАТЛАВ ранг матрицы находится с помощью процедуры `rank`, а матрица управляемости находится с помощью процедуры `strb`.

Заметим, что матрица  $U$  составлена из  $n$  блоков, каждый из которых — матрица размера  $n \times p$ , то есть  $U \in \mathbb{R}^{n \times np}$ .

В частности, для системы управления с одним входом

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , матрица управляемости будет квадратной ( $n$ -го порядка) со столбцами

$$b, Ab, \dots, A^{n-1}b.$$

Таким образом, пара  $(A, b)$  будет управляемой, если эти векторы линейно независимы. В этом случае систему можно с помощью преобразования подобия привести к так называемой *канонической управляемой форме* (см. Лемму В.7 из Приложения В).

Следующая теорема дает конструктивное необходимое и достаточное условие управляемости; иные часто используемые критерии управляемости приведены в Приложении Д, см. Теорему Д.1.

**Теорема 1.3.1.** Система (1.3.3) управляема тогда и только тогда, когда пара  $(A, B)$  невырождена.

Свойство управляемости системы — естественное требование; оно означает, что имеются достаточные возможности воздействия на систему. Кроме того, видим, что для пары матриц “общего положения” свойство невырожденности выполняется. Поэтому предположение управляемости не сужает класса рассматриваемых систем; то же относится и к родственному понятию наблюдаемости, см. ниже в разделе 1.3.2.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\text{rank } U < n$ . Тогда найдется вектор  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$  такой, что

$$v^\top B = v^\top AB = \dots = v^\top A^{n-1}B = 0.$$



По теореме Кэли-Гамильтона матрица  $A$  удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0I = 0, \quad (1.3.4)$$

откуда

$$v^\top A^n B = -a_{n-1}v^\top A^{n-1}B - \dots - a_0v^\top B = 0.$$

Аналогично, умножая равенство (1.3.4) слева на  $v^\top A^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и справа на  $B$ , получим

$$v^\top A^k B = 0$$

для всех  $k \geq n + 1$ , откуда

$$v^\top e^{-A\tau} B = v^\top \left( I - A\tau + \frac{1}{2!}A^2\tau^2 - \dots \right) B \equiv 0.$$

С другой стороны, согласно (1.1.5), решение системы (1.3.3) имеет вид

$$x(T) = e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau = e^{AT} \left( x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right),$$

поэтому для  $x(T) = 0$  имеем

$$0 = x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

или, после домножения слева на  $v^\top$ ,

$$0 = v^\top x_0 + \int_0^T \underbrace{v^\top e^{-A\tau} B}_{=0} u(\tau) d\tau = v^\top x_0$$

для любого управления  $u(\tau)$ . Однако равенство  $v^\top x_0 = 0$  не может выполняться при любых  $x_0$  (например, при  $x_0 = v$ ).

*Достаточность.* Укажем конкретный вид управления, которое переводит систему (1.3.3) из  $x(0) = x_0$  в  $x(T) = 0$ . Именно, возьмем

$$\hat{u}(t) \doteq B^\top e^{A^\top(T-t)} v,$$

где вектор  $v$  подлежит выбору из условий

$$x(T) = 0, \quad x(0) = x_0,$$

то есть

$$\begin{aligned} 0 &= e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B \hat{u}(\tau) v d\tau = \\ &= e^{AT} x_0 + \left( \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^\top e^{A^\top(T-\tau)} d\tau \right) v. \end{aligned}$$

Покажем, что матрица

$$W_c(T) \doteq \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^\top e^{A^\top(T-\tau)} d\tau = \int_0^T e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau, \quad (1.3.5)$$

называемая *грамианом управляемости*, невырождена.

Прежде всего,

$$d^\top W_c(T) d = \int_0^T |d^\top e^{A\tau} B|^2 d\tau$$

для любого  $d \in \mathbb{R}^n$ , то есть эта матрица неотрицательно определена. Если  $d^\top W_c(T) d = 0$  для некоторого  $d \neq 0$ , то

$$\varphi(\tau) = d^\top e^{A\tau} B \equiv 0 \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Но тогда и все производные функции  $\varphi$  равны нулю, в частности,

$$\varphi^{(k)}(0) = d^\top A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Следовательно,  $d^\top U = 0$ , что противоречит условию  $\text{rank } U = n$ .

Таким образом,  $W_c(T) \succ 0$ , поэтому уравнение

$$e^{AT} x_0 + W_c(T) v = 0$$

имеет решение

$$v = -W_c^{-1}(T) e^{AT} x_0$$

при любом  $x_0$ . Тем самым, найдено управление

$$\hat{u}(t) = -B^\top e^{A^\top(T-t)} W_c^{-1}(T) e^{AT} x_0, \quad (1.3.6)$$

которое переводит систему (1.3.3) из состояния  $x(0) = x_0$  в состояние  $x(T) = 0$ . ■

Заметим, что в среде МАТЛАВ грамиан управляемости для бесконечного  $T$  находится с помощью процедуры `gram`. С другой стороны, как следует из Леммы 1.2.3, он является решением уравнения Ляпунова

$$AW + WA^\top = -BB^\top$$

и потому может быть найден как

$$W = \text{lyap}(A, B * B')$$

В случае, когда  $\text{rank } U = q < n$ , рассмотрим подпространство  $\mathbb{R}^q$ , натянутое на столбцы матрицы управляемости. Нетрудно видеть, что на этом подпространстве система (1.3.3) обладает свойством управляемости, то есть для любого начального  $x(0) \in \mathbb{R}^q$  и любого  $0 < T < \infty$  найдется ограниченное кусочно-непрерывное управление  $u(t)$  на отрезке  $[0, T]$  такое, что решение системы (1.3.3) обращается в нуль в момент  $T$ . Назовем  $\mathbb{R}^q$  *управляемым подпространством* рассматриваемой системы; в нем Замечание 1.3.1 сохраняет свою силу.

Сделаем еще несколько замечаний. Если известно, что  $\text{rank } B = r$ , то условие управляемости можно уточнить:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-r}B \end{pmatrix} = n.$$

Далее, выше не просто доказано, что найдется управление, которое переводит систему из произвольного начального состояния в начало координат, но и явно указана одна такая функция:  $u = \hat{u}(t)$ . Более того, предложенное управление оказалось гладкой функцией, в то время как в определении управляемости требуется лишь кусочная непрерывность.

Важно отметить, что указанное управление  $\hat{u}(t)$  к тому же является оптимальным по критерию энергии (1.3.2) среди всех кусочно-непрерывных управлений, которые переводят систему из заданного начального состояния в нуль (*управление с минимальной энергией*). Это означает, что если  $u(t)$  — любое другое допустимое управление, то  $J(\hat{u}) \leq J(u)$ .

Действительно, вычитая друг из друга решения системы при  $u(t)$  и при  $\hat{u}(t)$ , получим

$$\int_0^T e^{A(T-t)} B(u(t) - \hat{u}(t)) dt = 0,$$

откуда, после домножения на  $W_c^{-1}(T) e^{AT} x_0$ ,

$$\begin{aligned}
0 &= \left( \int_0^T e^{A(T-t)} B(u(t) - \hat{u}(t)) dt, W_c^{-1}(T) e^{AT} x_0 \right) = \\
&= \int_0^T (u(t) - \hat{u}(t))^\top B^\top e^{A^\top(T-t)} W_c^{-1}(T) e^{AT} x_0 dt = \\
&= - \int_0^T (u(t) - \hat{u}(t))^\top \hat{u}(t) dt.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
J(u) &= \int_0^T |u(t)|^2 dt = \int_0^T |u(t) - \hat{u}(t) + \hat{u}(t)|^2 dt = \\
&= \int_0^T (|u(t) - \hat{u}(t)|^2 + |\hat{u}(t)|^2 + 2(u(t) - \hat{u}(t))^\top \hat{u}(t)) dt = \\
&= \int_0^T |u(t) - \hat{u}(t)|^2 dt + \int_0^T |\hat{u}(t)|^2 dt \geq \int_0^T |\hat{u}(t)|^2 dt = J(\hat{u}).
\end{aligned}$$

Пользуясь формулами (1.3.6) и (1.3.5), нетрудно посчитать и само значение функционала энергии  $J(\hat{u})$ :

$$J(\hat{u}) = x_0^\top \left( \int_0^T e^{-A\tau} B B^\top e^{-A^\top \tau} d\tau \right)^{-1} x_0,$$

откуда видно, что чем меньше время  $T$  процесса, тем бóльшие управления приходится применять, так что ограничение (1.3.2) может нарушиться.

Для произвольных точек  $x(0) = x_0$  и  $x(T) = x_1$  управление, переводящее систему из  $x_0$  в  $x_1$  и минимизирующее функционал энергии (1.3.2), имеет вид

$$u(t) = -B^\top e^{A^\top(T-t)} W_c^{-1}(T)(e^{AT} x_0 - x_1);$$

в частности, при  $x_1 = 0$  приходим к  $\hat{u}(t)$ , а при  $x_0 = 0$  получаем

$$\tilde{u}(t) = B^\top e^{A^\top(T-t)} W_c^{-1}(T)x_1$$

— управление минимальной энергии, переводящее систему из начала координат в заданное состояние  $x_1$ .

Еще одно важное свойство управляемых систем будет сформулировано ниже, в Теореме 1.4.1.

Введем теперь понятие управляемости для дискретных систем.

**Определение 1.3.3.** Дискретную систему управления

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1.3.7)$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^p$ , будем называть *управляемой*, если для любого  $x_0$  и некоторого  $k > 0$  найдутся такие ограниченные управления  $u_0, \dots, u_{k-1}$ , которые переводят систему в начало координат:  $x_k = 0$ .

Согласно (1.1.10), решение системы (1.3.7) представимо в виде

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i,$$

поэтому условию управляемости можно придать следующую форму: для всякого  $a \in \mathbb{R}^n$  найдется число  $k > 0$  и векторы  $u_0, \dots, u_{k-1}$ , такие что

$$\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i = a. \quad (1.3.8)$$

Отсюда вытекает критерий управляемости для дискретных систем.

**Теорема 1.3.2.** Система (1.3.7) управляема тогда и только тогда, когда пара  $(A, B)$  невырождена.

**Доказательство.** Действительно, взяв  $k = n$ , перепишем уравнение (1.3.8) в виде

$$U u = a,$$

где

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B) \in \mathbb{R}^{n \times pn},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pn}.$$

Остается заметить, что уравнение имеет решение при любом  $a$  тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $U$  равен  $n$ . ■

**Замечание 1.3.2.** В отличие от непрерывных систем дискретное время не может выбираться произвольно — требуется конечное число шагов, чтобы “накопить” ранг матрицы  $U$ . Если ранг матрицы  $B$  больше единицы, то систему можно привести в начало координат за число шагов, меньшее  $n$ ; в частности, если матрица  $B$  квадратная невырожденная, то можно достичь цели всего за один шаг. ▼

Подход с точки зрения программного управления допустим в случае, когда внешние возмущения отсутствуют ( $w \equiv 0$ ), матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  известны и задан критерий оптимальности типа (1.3.2). В этом случае можно найти оптимальное управление  $u = \hat{u}(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Однако в более общих ситуациях — при наличии внешних возмущений или неопределенности в описании системы — применение программного управления может привести к резкому ухудшению качества процесса либо к полной катастрофе.<sup>1</sup>

Это же относится и к подавляющему большинству иных ситуаций, связанных с управлением производственными процессами, транспортом, системами связи, финансами и т. д. Лишь в очень небольшом числе случаев (расчет оптимального режима космического полета или модели, в которых  $t$  не играет роль времени, например, расчет оптимальной трассы дороги) решение в виде программного управления  $u = u(t)$  является удовлетворительным. В связи с этим, в данной книге почти не затрагиваются вопросы программного управления. Ниже будут рассмотрены иные подходы к выбору управления.

### 1.3.2. Наблюдаемость

Дальше будет показано, как управление может эффективно строиться исходя из текущего состояния системы. Однако состояние не всегда доступно наблюдению; часто в нашем распоряжении имеются лишь измерения выходной переменной. В этом разделе обсудим принципиальную возможность восстановления состояния по выходу. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Система (1.3.9) называется *ненаблюдаемой*, если разным траекториям могут отвечать одинаковые выходы, то есть найдутся такие  $x_0 \neq x'_0$ ,

<sup>1</sup>Представим себе, например, процесс управления самолетом, рассчитанный заранее, до начала полета, и не предусматривающий использования текущей информации о скорости ветра, высоте и т. п. Вряд ли кому-нибудь придет в голову управлять самолетом подобным образом.

что для соответствующих траекторий  $x, x'$  и выходов  $y, y'$  будет  $y \equiv y'$ . В противном случае система называется *наблюдаемой*.

Мы покажем, что если система наблюдаема, то можно точно восстановить значение  $x(t)$  по значениям

$$y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t),$$

то есть достаточно знать значения выхода и  $n - 1$  его последовательных производных в тот момент времени, когда производится оценка состояния.

**Определение 1.3.4.** Пару матриц  $(A, C)$  будем называть *наблюдаемой*, если ранг матрицы

$$V = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{ln \times n}$$

равен  $n$ . Матрица  $V$  называется *матрицей наблюдаемости*.

В среде МАТЛАВ матрица управляемости находится с помощью процедуры `obsv`.

В следующей теореме устанавливается необходимое и достаточное условие наблюдаемости.

**Теорема 1.3.3.** Система (1.3.9) наблюдаема тогда и только тогда, когда пара  $(A, C)$  наблюдаема.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\text{rank } V < n$ . Тогда найдется вектор  $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ , такой, что

$$Cv = CAv = \dots = CA^{n-1}v = 0.$$

Как и при доказательстве необходимости в Теореме 1.3.1 об управляемости, отсюда следует, что

$$CA^k v = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

и, следовательно,  $C e^{A\tau} v \equiv 0$ . Поэтому при  $x(0) = v$  имеем

$$y(t) = Cx(t) = C e^{At} v \equiv 0.$$

С другой стороны, при  $x(0) = 0$  также имеем  $y(t) \equiv 0$ . Таким образом, разным начальным условиям отвечают одинаковые выходы, поэтому система ненаблюдаема.

*Достаточность.* Поскольку выход  $y(t)$  порожден системой (1.3.9), имеем

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t), \\ \dot{y}(t) &= CAx(t), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= CA^{n-1}x(t), \end{aligned}$$

то есть

$$Vx = Y,$$

где

$$x = x(t), \quad Y = \begin{pmatrix} y(t) & \dot{y}(t) & \dots & y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{nl}.$$

Полученная линейная система имеет единственное решение, поскольку  $\text{rank } V = n$ . ■

**Замечание 1.3.3.** Матрица

$$V^\top \doteq (C^\top \quad A^\top C^\top \quad \dots \quad (A^\top)^{n-1} C^\top)$$

является матрицей управляемости для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^\top x + C^\top u, \\ y &= B^\top x, \end{aligned}$$

которая называется *двойственной* к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

поскольку управляемость одной из них эквивалентна наблюдаемости другой. ▼

Способ оценивания состояния, вытекающий из приведенного выше доказательства Теоремы 1.3.3, неудовлетворителен — он требует вычисления  $n - 1$  последовательных производных от выхода. Меньшим числом производных обойтись нельзя, если выход скалярный; конечно, если размерность  $l$  выхода больше, то число требуемых производных



можно уменьшить. Например, если матрица  $C$  квадратная невырожденная, то можно взять

$$x(t) = C^{-1}y(t).$$

В разделе 1.4.2 будет рассмотрен иной подход к оцениванию состояния системы, не требующий вычисления производных.

### 1.3.3. Управление в форме обратной связи

Выше, в разделе 1.3.1, в качестве управлений рассматривались заранее выбранные функции от времени; такое управление было названо *программным*. Другой подход к построению управления связан с идеей *обратной связи*, в рамках которого управление не выбирается заранее, а корректируется в каждый текущий момент на основании информации о состоянии (или о выходе) системы.

Выбор управления в форме функции от состояния и момента времени называется *синтезом управления по состоянию*:

$$u = u(x, t). \quad (1.3.10)$$

Функция  $u(x, t)$  может быть нелинейной по  $x$ ; существуют различные подходы (например, *динамическое программирование*), позволяющие решать соответствующие задачи синтеза в некоторых постановках. Однако после выбора управления в форме (1.3.10) уравнение состояния становится нелинейным и нестационарным. Поэтому в данной книге мы преимущественно будем рассматривать управление в форме статической линейной обратной связи.

Начнем с рассмотрения *статической линейной обратной связи по состоянию*:

$$u = Kx, \quad (1.3.11)$$

где матрица  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , называемая *матрицей регулятора* (или *матрицей усиления*), не зависит от  $t$ . Оказывается, что в некоторых задачах управление такого типа обеспечивает наилучшее значение критерия оптимальности в классе любых управлений, то есть переход к нелинейным нестационарным обратным связям не улучшает критерий качества.

Подставив управление (1.3.11) в уравнение состояния (1.1.3), приходим к замкнутой системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + D_1w, \\ y &= Cx + D_2w. \end{aligned}$$

Таким образом, после замыкания системы линейной обратной связью по состоянию (1.3.11) мы вновь получили линейное уравнение состояния — с матрицей состояния

$$A_c = A + BK,$$

которая называется *матрицей замкнутой системы*. В дальнейшем покажем, что за счет выбора матрицы усиления  $K$  можно улучшить свойства системы, прежде всего, стабилизировать ее (то есть сделать устойчивой), а также оптимизировать те или иные показатели качества.

Управления вида (1.3.11) называются *линейными (статическими) регуляторами*. Большинство используемых на практике регуляторов являются именно линейными; они легко реализуются технически.

Отметим, что возможности статических линейных регуляторов в некоторых отношениях ограничены. Так, регулятор в системе без возмущений  $\dot{x} = Ax + Bu$  не может устранить начальное отклонение за конечное время, то есть не может перевести систему из состояния  $x_0 \neq 0$  в начало координат за конечное время  $T$ . Действительно, из уравнения замкнутой системы  $\dot{x} = A_c x$  и условия  $x(T) = 0$  очевидно следует, что  $x(t) \equiv 0$ .

В дискретных системах линейная обратная связь имеет вид

$$u_k = Kx_k,$$

поэтому уравнения замкнутой системы приобретают вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_c x_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \end{aligned}$$

где  $A_c = A + BK$ . Таким образом, матрица состояния  $A_c$  замкнутой дискретной системы вычисляется по той же формуле, что и в непрерывном случае.

Как отмечалось выше, состояние системы не всегда доступно измерению; часто единственная информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Попытка построить регулятор в форме *статической линейной обратной связи по выходу*

$$u = Ky,$$

где  $K \in \mathbb{R}^{p \times l}$ , как правило, бывает неудовлетворительной; обычно с помощью управлений такого вида систему даже не удается сделать устойчивой.

**Пример 1.3.1.** Рассмотрим *одномерную систему управления*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

то есть  $u, y \in \mathbb{R}$ . В этом случае  $K = k \in \mathbb{R}$  и матрица замкнутой системы имеет вид

$$A + BKC = A + kBC.$$

Нетрудно построить пример неустойчивой матрицы  $A$  и матриц  $B$  и  $C$  таких, что матрица  $A + kBC$  неустойчива при всех значениях скалярного параметра  $k$ . Иными словами, имеется слишком мало возможностей воздействия на систему.

Действительно, рассмотрим следующую систему в канонической форме:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 0 \ 1).$$

Матрица  $A$  имеет фробениусову форму и неустойчива, поскольку коэффициенты ее характеристического полинома (они определяются ее последней строкой) имеют разные знаки, так что необходимое условие устойчивости полинома нарушено. Получаемая матрица замкнутой системы

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

неустойчива при любом  $k \in \mathbb{R}$  по той же причине. ▼

Эффективные способы построения управления по выходу системы будут обсуждены позже.

## 1.4. Стабилизация

### 1.4.1. Обратная связь по состоянию.

#### Размещение полюсов

Выше было рассмотрено важнейшее понятие устойчивости линейных систем. Если открытая система неустойчива, можно попытаться добиться устойчивости замкнутой системы путем введения обратной связи.

Во многих случаях с помощью обратной связи можно не только стабилизировать систему, но добиться любого заданного размещения полюсов замкнутой системы. Иначе говоря, можно получить любой желаемый характеристический полином замкнутой системы. Приведем основной результат такого типа для систем со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.4.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

Будем искать управление в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = k^\top x, \quad k \in \mathbb{R}^n;$$

тогда матрица замкнутой системы примет вид

$$A_c = A + bk^\top. \quad (1.4.2)$$

Пусть  $\Lambda$  — произвольный набор из  $n$  чисел  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , удовлетворяющий условию: если  $\lambda_i \in \Lambda$ , то и  $\lambda_i^* \in \Lambda$ . Тогда полином

$$p(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$$

имеет вещественные коэффициенты. Верно и обратное — множество корней любого полинома с вещественными коэффициентами удовлетворяет указанному условию.

**Теорема 1.4.1.** *Пусть пара  $(A, b)$  управляема. Тогда существует такое  $k \in \mathbb{R}^n$ , что у матрицы  $A_c$  вида (1.4.2) собственные значения совпадают с наперед заданным набором  $\Lambda$ .*

**Доказательство.** Согласно Лемме В.7 из Приложения В, управляемую систему со скалярным управлением можно привести к канонической форме путем невырожденного преобразования переменных, то есть найдется невырожденная матрица

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{n-1}b & \dots & Ab & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

такая, что при линейном преобразовании

$$\tilde{x} \doteq Tx$$

система (1.4.1) приобретает вид

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u,$$

где

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.3)$$

Если искать управление в форме

$$u = \tilde{k}^\top \tilde{x}, \quad \tilde{k} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_0 \\ \tilde{k}_1 \\ \vdots \\ \tilde{k}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

матрица замкнутой системы будет иметь вид

$$\tilde{A}_c = \tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 + \tilde{k}_0 & -a_1 + \tilde{k}_1 & \cdots & -a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1} \end{pmatrix}$$

и ее характеристический полином имеет вид

$$s^n + (a_{n-1} - \tilde{k}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_0 - \tilde{k}_0).$$

Выбирая

$$\tilde{k}_i = a_i - p_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

получаем, что его коэффициенты совпадают с коэффициентами полинома  $p(s)$ , то есть собственные значения матрицы  $\tilde{A}_c$  совпадают с набором  $\Lambda$ .

Наконец, взяв  $k = T^{-1}\tilde{k}$ , имеем

$$\tilde{A}_c = \tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^\top = TAT^{-1} + Tb k^\top T^{-1} = T(A + bk^\top)T^{-1} = TA_c T^{-1},$$

то есть матрицы  $\tilde{A}_c$  и  $A_c$  подобны, поэтому их собственные значения совпадают. ■

**Следствие 1.4.1.** *В предположениях Теоремы 1.4.1 замкнутую систему можно сделать устойчивой с любым расположением полюсов в левой полуплоскости.*

В аналитической форме выражение для искомого регулятора  $k$  дается следующей формулой (так называемой *формулой Аккермана*):

$$k = -e^T U^{-1} p,$$

где  $U$  — матрица управляемости системы (1.4.1), а  $p$  — вектор коэффициентов желаемого характеристического полинома замкнутой системы, а

$$e = (0 \ 0 \ \dots \ 1)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Практическая применимость этой формулы ограничена скалярными системами невысокого порядка.

В среде МАТЛАВ нахождение регулятора в соответствии с формулой Аккермана реализовано с помощью процедуры `acker`.

Теорема 1.4.1 справедлива и для систем с многими управлениями; приведем (без доказательства) соответствующий результат.

**Теорема 1.4.2.** *Пусть пара  $(A, B)$  управляема, тогда матрица  $A_c = A + BK$  замкнутой системы*

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.4.4}$$

*за счет выбора обратной связи по состоянию  $u = Kx$  может приобрести любое расположение собственных значений; в частности, замкнутая система может быть сделана устойчивой.*

Заметим, что утверждение Теорем 1.4.1 и 1.4.2 справедливо и в обратную сторону: если выбором матрицы регулятора  $K$  можно добиться любого расположения собственных значений матрицы  $A + BK$ , то пара  $(A, B)$  управляема.

В среде МАТЛАВ нахождение регулятора для системы (1.4.4) со многими управлениями, обеспечивающего заданное расположение корней замкнутой системы, реализовано с помощью процедуры `place`.

В связи с задачей о расположении полюсов введем еще одно понятие. Говорят, что система *стабилизируема*, если с помощью статической линейной обратной связи по состоянию она может быть сделана устойчивой, то есть собственные значения матрицы замкнутой системы могут быть расположены слева от мнимой оси.

Ясно, что стабилизируемость предъявляет к системе более слабые требования, чем устойчивость. В самом деле, пусть нужно добиться лишь устойчивости системы, а не заданного расположения ее собственных значений в левой полуплоскости. Тогда управляемости не требуется — достаточно управлять системой лишь в ее *неустойчивом подпространстве*. Соответствующий результат представлен следующей леммой (ср. с Теоремой Д.1 из Приложения Д).

**Лемма 1.4.1.** *Система управления*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

*стабилизируема тогда и только тогда, когда матрица Хаутуса*

$$(A - \lambda_i I \quad B)$$

*имеет ранг  $n$  для всех неустойчивых собственных значений  $\lambda_i$  матрицы  $A$ .*

Таким образом, управляемость влечет стабилизируемость, но не наоборот. Отвлекаясь от излишних деталей, везде в дальнейшем будем предполагать, что система управляема, тем более, что это требование неограничительно.

Совершенно аналогично эти теоремы формулируются (и доказываются) для дискретного случая. При этом вместо непрерывной системы (1.4.4) рассматривается дискретная система управления

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k.$$

Некоторый новый эффект, которого можно здесь добиться, связан с тем, что у матрицы  $A_c = A + BK$  все собственные значения можно сделать нулевыми, то есть ее характеристический полином будет иметь вид  $z^n = 0$ . В силу теоремы Кэли-Гамильтона тогда  $A_c^n = 0$ . Иными словами, можно добиться конечной продолжительности процесса.

**Теорема 1.4.3.** *Пусть пара  $(A, B)$  управляема. Тогда существует такая обратная связь  $u = Kx$ , что для замкнутой системы*

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k$$

*будет  $x_n = 0$  при любом  $x_0$ .*

### Эффект всплеска

Может показаться, что приведенные выше теоремы решают не только задачу стабилизации, но и все разумные задачи теории управления. Например, если в непрерывной управляемой системе необходимо как можно быстрее устранить начальное отклонение, то в соответствии с Теоремой 1.4.2 можно было бы так выбрать стабилизирующую обратную связь  $u = Kx$ , чтобы сдвинуть собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $A_c = A + BK$  далеко влево:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\sigma < 0. \quad (1.4.5)$$

Действительно, тогда для решения замкнутой системы

$$\dot{x} = A_c x, \quad x(0) = x_0,$$

по Лемме 1.2.1 имеем

$$|x(t)| = |e^{A_c t} x_0| \leq \|e^{A_c t}\| |x_0| \leq C e^{-\nu t} |x_0|, \quad C = C(A_c, \nu),$$

для любого  $0 < \nu < \sigma$ .

Выбирая большие  $\nu$ , на первый взгляд, за счет экспоненциального члена  $e^{-\nu t}$  можно получить сколь угодно малые значения  $|x(t)|$  для всех  $t \geq T$ , где  $T > 0$  сколь угодно мало. Однако “за все приходится платить”; не является исключением и данная ситуация. Во-первых, матрица усиления  $K$ , для которой собственные значения матрицы  $A_c$  удовлетворяют условию (1.4.5), может оказаться очень большой. Поэтому и управление  $u = Kx$  может принимать очень большие значения, в то время как в практических задачах обычно есть ограничения на величину управления.

Вторая неприятность связана с константой  $C$  в приведенной выше оценке. Оказывается, с ростом  $\sigma$  эта величина возрастает; это проявляется в том, что значения  $x(t)$  на начальном интервале не убывают, а возрастают, и притом весьма значительно. Количественное описание этого *эффекта всплеска* дается следующим результатом.

**Теорема 1.4.4.** Пусть  $x(t)$  — решение замкнутой системы

$$\dot{x} = (A + bk^\top)x, \quad x(0) = x_0,$$

для которой  $\operatorname{Re} \lambda_i(A + bk^\top) \leq -\sigma < 0$ .

Тогда существует константа  $C$ , зависящая от матрицы  $A$  и вектора  $b$  (но не зависящая от  $\sigma$ ) такая, что справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq 1/\sigma} \max_{|x_0|=1} |x(t)| \geq C\sigma^{n-1}.$$



Иначе говоря, если собственные значения матрицы  $A_c$  замкнутой системы сильно сдвинуты влево, то заведомо найдется такое начальное значение  $x_0$ ,  $|x_0| = 1$ , для которого решение замкнутой системы принимает значения, большие, чем  $C\sigma^{n-1}$ ; последняя величина тем больше, чем больше  $\sigma$  и  $n$ . Более того, с ростом  $\sigma$  этот всплеск проявляется на все меньшем временном интервале  $0 \leq t \leq 1/\sigma$ .

**Пример 1.4.1.** Приведем простой пример, показывающий, сколь велик может быть нежелательный эффект всплеска. Пусть  $n = 10$ , а система записана в канонической форме (1.4.3) с  $a_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 10$ . Потребуем, чтобы у характеристического полинома  $p(s)$  замкнутой системы все корни были равны  $-2$ .

Иными словами,

$$p(s) = (s + 2)^{10}$$

и коэффициенты матрицы регулятора  $k_i$  должны выбираться равными коэффициентам этого полинома:  $k_i = C_{10}^{i-1} 2^{11-i}$ ; при этом наибольший из них равен  $k_4 = C_{10}^3 2^7 = 15360$ .

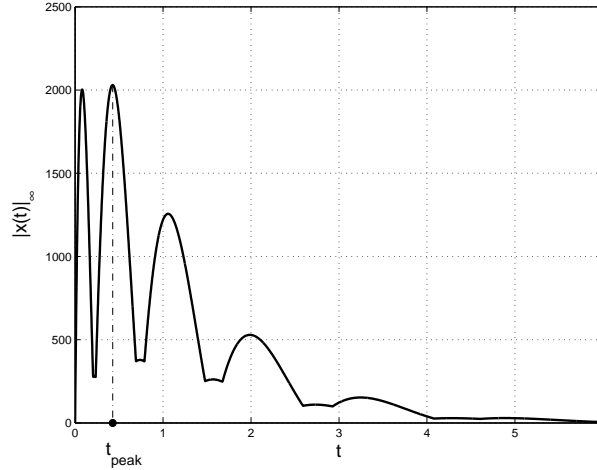


Рис. 1.4.1. Эффект всплеска из Примера 1.4.1.

Таким образом, коэффициенты усиления в цепи обратной связи превышают  $1,5 \cdot 10^4$ . Более того, например, при

$$x_0 = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)^\top$$

норма решения замкнутой системы достигает значения  $|x(t)|_\infty \approx 2030$  при  $t = t_{\text{peak}} \approx 0,4275$ , то есть возрастает более чем в 2000 раз прежде, чем начать убывать (это не противоречит устойчивости системы —  $x(t)$  действительно стремится к нулю при больших  $t$ , см. Рис. 1.4.1). ▼

Таким образом, влияние плохих начальных условий на поведение невозмущенной системы проявляется в виде всплеска. Этот эффект имеет ту же природу, что и хорошо известное в теории управления перерегулирование, то есть всплескообразная реакция устойчивой системы на единичное входное воздействие  $u(t) \equiv 1$  при нулевых начальных условиях.

В самом деле, соответствующее решение системы со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = 0,$$

имеет вид

$$x(t) = -A^{-1}b + e^{At} A^{-1}b. \quad (1.4.6)$$

при этом

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \bar{x},$$

где  $\bar{x} = -A^{-1}b$  его установившееся значение.

*Перерегулированием* называют величину

$$\eta \doteq \frac{\max_{t \geq 0} |x(t)| - |\bar{x}|}{|\bar{x}|} = \frac{\max_{t \geq 0} |x(t)|}{|\bar{x}|} - 1,$$

которая характеризует максимальное отклонение траектории возмущенной системы от установившегося значения<sup>1</sup>.

Выберем теперь (в соответствии с Теоремой 1.4.4) начальное условие  $x_0$ :  $|x_0| = 1$  для невозмущенной системы таким образом, чтобы вызвать большой всплеск ее траектории  $x(t) = e^{At} x_0$ . Тогда, положив в (1.4.6)  $b = Ax_0$ , получаем  $\bar{x} = -x_0$  и

$$\eta = \max_{t \geq 0} |e^{At} x_0| - 1,$$

то есть перерегулирование в системе (1.4.6) велико.

<sup>1</sup>Иногда под перерегулированием понимается величина  $\eta \cdot 100\%$ , измеряемая в процентах превышения установившегося режима.

### 1.4.2. Обратная связь по выходу. Наблюдатель Люенбергера

Вернемся к обсуждавшейся выше стабилизации с помощью обратной связи по выходу; мы видели, что в общем случае статический регулятор в этих условиях синтезировать не удастся. Сейчас покажем, каким образом, имея информацию о выходе системы и предполагая наличие у нее свойства наблюдаемости, можно эффективно оценивать вектор состояния и использовать эту оценку для построения стабилизирующего управления.

Рассмотрим наблюдаемую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax, \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{1.4.7}$$

Линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}),$$

в которое входит рассогласование выхода  $y$  системы (1.4.7) и его прогноза  $\hat{y} = C\hat{x}$  при некоторой постоянной матрице  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ , называется *наблюдателем Люенбергера*.

Заметим, что *невязка*

$$e(t) \doteq x(t) - \hat{x}(t)$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC)e.\tag{1.4.8}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.4.2.** *Если пара  $(A, C)$  наблюдаема, выбором матрицы  $L$  система*

$$\dot{x} = (A - LC)x$$

*может приобрести любое расположение полюсов (в частности, система может быть сделана устойчивой).*

**Доказательство.** В соответствии с Замечанием 1.3.3, наблюдаемость пары  $(A, C)$  эквивалентна управляемости пары  $(A^\top, C^\top)$ . Следовательно, согласно Теореме 1.4.2, система

$$\dot{x} = (A^\top + C^\top K)x$$

может приобрести любое расположение полюсов.

Поскольку транспонирование матрицы не меняет ее собственные значения, выбором  $K$  собственные значения матрицы

$$(A^\top + C^\top K)^\top = A + K^\top C$$

также можно расположить произвольным образом. Полагая  $L = -K^\top$ , завершаем доказательство леммы. ■

Таким образом, поскольку пара  $(A, C)$  наблюдаема, матрицу  $L$  можно выбрать так, чтобы система (1.4.8) стала устойчивой. В этом случае

$$e(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

при любом начальном рассогласовании  $e(0)$ . Следовательно,

$$\hat{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x(t),$$

то есть вектор  $\hat{x}$  будет являться *оценкой состояния* рассматриваемой системы.

Воспользуемся наблюдателем Люенбергера для построения стабилизирующей обратной связи по выходу. Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

с неизвестным фазовым состоянием  $x$  и доступным выходом  $y$ . Будем предполагать, что пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Будем искать управление в виде *линейной динамической обратной связи*

$$u = K\hat{x}, \tag{1.4.10}$$

где наблюдатель  $\hat{x}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}). \tag{1.4.11}$$

Фактически, вместо неизвестного состояния  $x$  берется его оценка  $\hat{x}$  по наблюдаемому выходу системы.

Замыкая уравнения (1.4.9) и (1.4.11) обратной связью (1.4.10), получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x}, \\ \dot{\hat{x}} &= (A + BK - LC)\hat{x} + LCx. \end{aligned}$$

Введя в рассмотрение невязку  $e = x - \hat{x}$ , полученные соотношения перепишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x - BKe, \\ \dot{e} &= (A - LC)e.\end{aligned}$$

Таким образом, приходим к системе

$$\dot{z} = A_c z \tag{1.4.12}$$

относительно вектора

$$z = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Далее, блочная матрица

$$A_c = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix}$$

системы (1.4.12) имеет те же собственные значения, что и стоящие на ее диагонали матрицы  $A + BK$  и  $A - LC$ . Согласно Теореме 1.4.2 и Лемме 1.4.2, собственные значения этих матриц могут быть выбраны произвольно.

Таким образом, приходим к следующему результату.

**Теорема 1.4.5.** *Пусть система*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Cx\end{aligned}$$

*управляема и наблюдаема. Тогда ее можно стабилизировать с помощью динамической обратной связи по выходу*

$$u = K\hat{x}$$

*с использованием наблюдателя*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}).$$

Для дискретных систем наблюдатель Люенбергера строится совершенно аналогично; в разделах 3.2.1 и 4.3.1 будет показано, как соответствующая техника работает в задачах фильтрации и синтеза управления по выходу для систем с возмущениями.

Итак, для управляемых систем всегда можно добиться стабилизации в виде статической обратной связи по состоянию, а для управляемых и наблюдаемых систем — с помощью динамической обратной связи по выходу с использованием наблюдателя.

### Линейный динамический регулятор

Существуют способы построения динамической обратной связи по выходу, не предполагающие построения наблюдателя.

Рассмотрим линейную систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

где все величины имеют тот же смысл, что и выше, но при этом в уравнение для выхода введено управление. В дальнейшем покажем, что такая форма записи естественна, когда накладываются неявные ограничения на величину управляющего воздействия.

Идея, лежащая в основе линейного динамического регулятора, заключается в том, что в качестве управления принимается выход некоторой линейной динамической системы, на вход которой подается выход  $y$  системы (1.4.13). Таким образом, *динамический регулятор по выходу* описывается следующими линейными уравнениями, подобными уравнениям объекта:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, & x_r(0) &= 0, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned}$$

где  $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$  — состояние регулятора,  $A_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{n_r \times l}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{p \times n_r}$ ,  $D_r \in \mathbb{R}^{p \times l}$  — матричные параметры регулятора. Здесь  $n_r$  — *порядок регулятора*; как правило, принимается  $n_r \leq n$  (*регулятор пониженного порядка*), а если  $n_r = n$ , то говорим о *регуляторе полного порядка*.

Задача состоит в том, чтобы, включив регулятор в цепь обратной связи как схематично показано на Рис. 1.4.2, найти значения матричных параметров  $A_r$ ,  $B_r$ ,  $C_r$ ,  $D_r$ , при которых замкнутая система будет устойчива.

Решение такой задачи заведомо существует, если система (1.4.13) управляема и наблюдаема.

Понятно, что регуляторы такого вида представляют более широкий класс по сравнению с теми, что рассматривались выше (например, при  $n_r = 0$  имеем статический регулятор по выходу, при  $C = I$  получаем динамический регулятор по полному вектору состояния и т.д.), поэтому и возможности их гораздо шире. Так, с помощью динамического регулятора можно получать более точные оценки в задачах оптимального управления, добиваться лучшего качества переходного процесса.

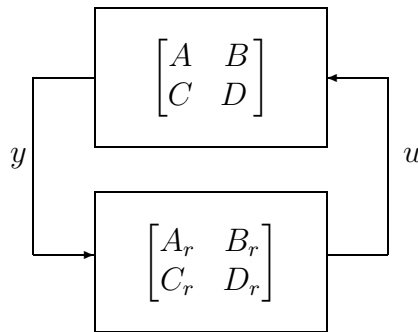


Рис. 1.4.2. Схема линейного динамического регулятора по выходу в цепи обратной связи.

Регуляторы такого вида будут рассматриваться в разделе 4.3.2 применительно к системам более общего вида, уравнения состояния которых содержат неконтролируемое внешнее возмущение, и помимо *наблюдаемого выхода*  $y$  присутствует *регулируемый выход*  $z$  (возможно, также подверженный внешним возмущениям).

## 1.5. Множества достижимости для устойчивых систем

Заметим, что задачу описания множества

$$\{x(T): \dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0, \quad \|w\| \leq 1\}$$

можно интерпретировать двояко. Оно представляет собой либо совокупность всех состояний системы, достижимых к моменту  $T$  из начала координат с помощью ограниченных *управлений*  $w$ , либо неопределенность в состоянии системы с нулевыми начальными условиями, накопившуюся к моменту  $T$  под воздействием неизвестных, но ограниченных в какой-то норме *возмущений*  $w$ .

Мы видели, что устойчивые системы являются устойчивыми по входу (ВВО-устойчивыми), то есть их состояния (и выходы) ограничены при ограниченных входах. В этом параграфе будет дано явное описание достижимого множества (то есть всего множества возможных состояний системы) для входов, ограниченных в различных нормах, и убедимся в том, что точное описание может наталкиваться на серьезные трудности.

### 1.5.1. Множество достижимости линейной системы

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0, \quad (1.5.1)$$

с вектором состояний  $x \in \mathbb{R}^n$  и внешним возмущением  $w \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в какой-нибудь норме:

$$\|w\| \leq 1$$

(например, принадлежащим одному из классов, рассмотренных в разделе 1.1.2); будем называть такие возмущения *допустимыми*.

Заметим, что условие  $x(0) = 0$  не является ограничительным, поскольку в силу (1.1.5) решение  $x(t)$  уравнения (1.5.1) представимо в виде

$$x(t) = e^{At} x(0) + x_0(t),$$

где  $x_0(t)$  — решение (1.5.1) при нулевых начальных условиях. Однако далее будут рассматриваться лишь нулевые начальные условия, так как в противном случае описание приводимой ниже конструкции может оказаться сложнее.

**Определение 1.5.1.** Множество

$$\mathcal{R}(T) \doteq \{x(T) \in \mathbb{R}^n: \dot{x} = Ax + Dw, \quad \|w\| \leq 1\}$$

будем называть *множеством достижимости в момент  $T \geq 0$* , а множество

$$\mathcal{R} \doteq \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{R}(T)$$

просто *множеством достижимости системы (1.5.1)*.

Таким образом, множество  $\mathcal{R}(T)$  — это совокупность концов траекторий системы, рассматриваемой на  $[0, T]$ , с нулевыми начальными условиями при воздействии допустимых возмущений, а достижимое множество  $\mathcal{R}$  — это совокупность всех точек фазового пространства, в которые система может попасть из нуля при воздействии допустимых возмущений при всех  $T > 0$ .

Можно было бы определить *множество достижимости к моменту  $T \geq 0$* :

$$\overline{\mathcal{R}}(T) \doteq \{x(t) \in \mathbb{R}^n: \dot{x} = Ax + Dw, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|w\| \leq 1\},$$



однако в этом нет необходимости, поскольку  $\overline{\mathcal{R}}(T) = \mathcal{R}(T)$ .

Действительно, ясно, что  $\mathcal{R}(T) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(T)$ ; покажем, что имеется и обратное включение. Для некоторого допустимого возмущения  $w(t)$  и некоторого  $0 \leq T_1 < T$  рассмотрим точку  $x^* = x(T_1, w(t))$  из  $\overline{\mathcal{R}}(T)$ . Выписывая в явном виде решение системы (1.5.1), нетрудно убедиться, что допустимое возмущение

$$\overline{w}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < T - T_1, \\ w(t - (T - T_1)) & \text{при } T - T_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

приводит систему в точку  $x^*$  в момент времени  $T$ , то есть  $x^* \in \mathcal{R}(T)$ .

Имеют место следующие свойства множества достижимости; некоторые из них вытекают непосредственно из его определения.

1. Множество  $\mathcal{R}(T)$  замкнуто и ограничено.
2. Множество  $\mathcal{R}(T)$  выпукло.

Действительно, если точки  $x_1, x_2 \in \mathcal{R}(T)$  соответствуют некоторым допустимым  $w_1, w_2$ , то точка  $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  достижима при допустимом  $w_\alpha = \alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2$ .

3. Множество  $\mathcal{R}(T)$  центрально-симметрично: если точка  $x$  достигнута с помощью допустимого  $w$ , то  $-w$  соответствует точке  $-x$ .

4. Множество  $\mathcal{R}(T)$  монотонно по вложенности, то есть

$$\mathcal{R}(T_1) \subset \mathcal{R}(T_2) \quad \text{для } T_1 < T_2 < \infty.$$

5. Из свойств устойчивых систем (BIBO) следует, что множество  $\mathcal{R}$  ограничено тогда и только тогда, когда матрица  $A$  устойчива. Как и  $\mathcal{R}(T)$ , множество  $\mathcal{R}$  замкнуто, выпукло и центрально-симметрично.

6. Множество  $\mathcal{R}$  инвариантно: если  $x(0) \in \mathcal{R}$ , то  $x(t) \in \mathcal{R}$  при всех  $t > 0$ .

Действительно, поскольку точка  $x(0) \in \mathcal{R}$ , то она достижима из нуля при некотором допустимом  $w(t)$  в некоторый момент  $T$ , поэтому она может быть взята в качестве начальной для любого допустимого возмущения, определенного на  $[T, \infty)$ .

7. Множество  $\mathcal{R}$  минимально по включению среди всех инвариантных множеств.

8. При устойчивой матрице  $A$  множество  $\mathcal{R}$  обладает свойством *глобальной притягиваемости*.

В самом деле, по определению

$$\mathcal{R}(t) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n : x = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Dw(\tau) d\tau \right\},$$

причем для устойчивой матрицы  $A$  при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $e^{At} x_0 \rightarrow 0$ , а второе слагаемое образует множество достижимости  $\mathcal{R}$ . Таким образом, любая траектория системы, исходящая из точки вне достижимого множества  $\mathcal{R}$ , либо входит в него (и остается внутри вследствие инвариантности), либо стремится к точке на границе. Иными словами, для любой начальной точки  $x_0$  предельное множество  $\mathcal{R}(\infty)$  совпадает с достижимым множеством  $\mathcal{R}$ .

Обратимся теперь к дискретному времени и рассмотрим систему с нулевыми начальными условиями:

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0, \quad (1.5.2)$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_k \in \mathbb{R}^m$ . Ее решение записывается как

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Dw_i.$$

Пусть внешнее возмущение  $w_k$  ограничено в какой-либо норме, например, из тех, что вводились выше. Определение множества достижимости совершенно аналогично непрерывному случаю.

**Определение 1.5.2.** Множество

$$\mathcal{R}_k \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Dw_i \text{ при } \|w\| \leq 1 \right\}$$

будем называть *множеством достижимости системы (1.5.2) в момент времени  $k$* , а множество

$$\mathcal{R} \doteq \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{R}_k$$

просто *множеством достижимости*.

Достижимые множества для систем дискретного времени обладают теми же свойствами, что и в непрерывном случае. Единственное отличие — при  $k < n$  множества  $\mathcal{R}_k$  оказываются вырожденными, имеющими меньшую размерность. Если пара  $(A, D)$  управляема, то при  $k \geq n$  множества  $\mathcal{R}_k$  имеют полную размерность (см. Замечание 1.3.2).

Достижимые множества весьма полно характеризуют поведение системы, и многие задачи управления в конечном счете сводятся к построению таких множеств. Однако в некоторых постановках задач

их точное описание чрезвычайно сложно, поэтому в дальнейшем будем аппроксимировать их множествами простой структуры (а именно, эллипсоидами), обладающими всеми приведенными выше свойствами (кроме свойства минимальности). Принципиальными среди этих свойств являются инвариантность и притягиваемость, определяющие природу достижимых множеств.

В следующих параграфах этого раздела будут даны явные описания множеств достижимости для ограниченных возмущений из классов, освещенных в разделе 1.1.2.

### 1.5.2. $L_2$ -ограниченные возмущения

**Теорема 1.5.1.** Пусть внешние возмущения в системе (1.5.1) ограничены в  $L_2$ -норме:

$$\|w\|_2^2 = \int_0^{\infty} w^\top(t)w(t) dt \leq 1.$$

Если пара  $(A, D)$  управляема, множество  $\mathcal{R}(T)$  является эллипсоидом<sup>1</sup>

$$\mathcal{R}(T) = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top W_c^{-1}(T)x \leq 1\}$$

с матрицей

$$W_c(T) = \int_0^T e^{A\tau} D D^\top e^{A^\top \tau} d\tau \succ 0.$$

Если к тому же матрица  $A$  устойчива, множество  $\mathcal{R}$  является эллипсоидом

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top W^{-1}x \leq 1\}$$

где

$$W = \int_0^{\infty} e^{A\tau} D D^\top e^{A^\top \tau} d\tau \succ 0, \quad (1.5.3)$$

то есть матрица  $W$  является решением уравнения Ляпунова

$$AW + WA^\top = -DD^\top.$$

<sup>1</sup>Более полно и аккуратно способы описания эллипсоидов будут даны ниже, в разделе 2.2.2.

**Доказательство.** Поскольку функцию  $w(t)$  можно трактовать и как *управление*, доказательство легко получить, опираясь на результаты раздела 1.3.1. Действительно, там было показано, что  $W_c(T) \succ 0$  и что управление

$$w(t) = D^\top e^{A^\top(T-t)} W_c^{-1}(T)a \quad (1.5.4)$$

переводит точку  $x(0) = 0$  в точку  $x(T) = a$ . Если при этом  $a \in \mathcal{R}(T)$ , то, доопределив  $w(t)$  на всей полуоси:  $w(t) = 0$  при  $t > T$ , получим

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_2^2 &= \int_0^\infty w^\top(t)w(t) dt = \\ &= \int_0^T (a^\top W_c^{-1}(T) e^{A(T-t)} D D^\top e^{A^\top(T-t)} W_c^{-1}(T)a) dt = \\ &= a^\top W_c^{-1}(T)a \leq 1, \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

то есть такое управление является допустимым.

С другой стороны, в том же разделе 1.3.1 было показано, что управление (1.5.4) минимизирует критерий  $\int_0^T w^\top(t)w(t) dt$ . Отсюда и из (1.5.5) следует, что если  $a \notin \mathcal{R}(T)$ , то есть  $a^\top W_c^{-1}(T)a > 1$ , то не существует управления такого, что  $\int_0^T w^\top(t)w(t) dt \leq 1$ , и переводящего  $x(0) = 0$  в  $x(T) = a$ .

Наконец, если матрица  $A$  устойчива, то

$$W_c(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} W \succ 0,$$

где матрица  $W$  определяется формулой (1.5.3). ■

Таким образом, достижимое множество для устойчивых систем с ограниченными в  $L_2$  внешними возмущениями имеет очень простой вид — оно является эллипсоидом (*эллипсоидом достижимости*). Очевидно, что если нас интересует выходная величина  $y = Cx$ , то достижимое множество выходов

$$\mathcal{Y} \doteq \{y(t), \quad 0 \leq t < \infty\}$$

также является эллипсоидом (см. Лемму 2.2.4):

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^l: \quad y^\top (CWC^\top)^{-1}y \leq 1\} \quad (1.5.6)$$

(заметим, что  $CWC^\top > 0$ , если  $C$  — матрица максимального строчного ранга). В частности, для системы с одним выходом  $y = c^\top x$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ , множество  $\mathcal{Y}$  является отрезком

$$|y| \leq (c^\top Wc)^{1/2}.$$

Как уже отмечалось, при синтезе управления обычно желательно обеспечивать малость выхода при всех допустимых возмущениях из данного класса. Теорема 1.5.1 показывает, что в системах с  $L_2$ -ограниченными возмущениями в качестве критерия оптимальности при выборе обратной связи естественно принимать размер эллипсоида (1.5.6).<sup>2</sup>

Аналогичный результат верен и для дискретных систем вида

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0, \quad (1.5.7)$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , а входы ограничены в  $l_2$ -норме:

$$\|w\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^\top w_k \leq 1. \quad (1.5.8)$$

**Теорема 1.5.2.** Пусть внешние возмущения в линейной системе (1.5.7) удовлетворяют ограничению (1.5.8).

Если пара  $(A, D)$  управляема, множество  $\mathcal{R}_k$  при  $k \geq n$  представляет собой эллипсоид

$$\mathcal{R}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top W_k^{-1}x \leq 1\}$$

с матрицей

$$W_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i D D^\top (A^\top)^i. \quad (1.5.9)$$

Если матрица  $A$  шуровская, множество  $\mathcal{R} = \bigcup_{k \geq n} \mathcal{R}_k$  также является эллипсоидом

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top W^{-1}x \leq 1\},$$

где

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} A^i D D^\top (A^\top)^i,$$

<sup>2</sup>Заметим, что величина коэффициента усиления  $\mathfrak{g}_{2,\infty}$  дает гораздо более бедную характеристику выхода, указывая лишь радиус шара, в котором содержится эллипсоид.

то есть матрица  $W$  является решением дискретного уравнения Ляпунова

$$AWA^\top - W = -DD^\top.$$

**Доказательство** проводится по той же схеме, что и доказательство Теоремы 1.5.1 с использованием результатов раздела 1.3.1, относящихся к дискретным системам.

В формулировке Теоремы 1.5.2 требование  $k \geq n$  вводится для обеспечения обратимости матрицы  $W_k$ , — выше обсуждалась вырожденность множеств достижимости для дискретных систем (см. Определение 1.5.2 и замечание после него). Можно было бы и не накладывать это требование, тогда эллипсоид  $\mathcal{R}_k$  оказался бы вырожденным (имеющим меньшую размерность). Подробнее способы описания эллипсоидов, в том числе и вырожденных, будут описаны в разделе 2.2.2 (см. Замечание 2.2.2).

### 1.5.3. $L_\infty$ -ограниченные возмущения

Опишем теперь достижимое множество для возмущений (или управлений), ограниченных в  $L_\infty$ -норме. В этом случае картина оказывается более сложной.

Для системы

$$\dot{x} = Ax + Dw \tag{1.5.10}$$

с  $L_\infty$ -ограниченными входами

$$\|w\|_\infty = \sup_{t \geq 0} (w^\top(t)w(t))^{1/2} \leq 1$$

сохраним прежние обозначения  $\mathcal{R}(T)$  и  $\mathcal{R}$  для достижимого множества. Дадим характеристику этих множеств с помощью опорной функции.

Напомним, что для множества  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  и вектора  $c \in \mathbb{R}^n$  *опорной функцией* называется

$$\varphi_{\mathcal{X}}(c) \doteq \max_{x \in \mathcal{X}} c^\top x.$$

Замкнутое ограниченное выпуклое множество  $\mathcal{X}$  однозначно восстанавливается по своей опорной функции  $\varphi_{\mathcal{X}}(c)$ ,  $|c| = 1$ . Именно,

$$\mathcal{X} = \{x: c^\top x \leq \varphi_{\mathcal{X}}(c), \quad |c| = 1\}$$

есть пересечение опорных полупространств.

В рассматриваемом случае множества  $\mathcal{R}(T)$  и  $\mathcal{R}$  выпуклы, замкнуты и ограничены; множество  $\mathcal{R}$  ограничено при предположении об устойчивости системы.

Поскольку

$$x(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} Dw(\tau) d\tau,$$

то

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{R}(T)}(c) &= \max_{\|w\|_\infty \leq 1} \int_0^T c^\top e^{A(T-\tau)} Dw(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T |D^\top e^{A^\top(T-\tau)} c| d\tau = \int_0^T |D^\top e^{A^\top \tau} c| d\tau, \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

а при устойчивой матрице  $A$

$$\varphi_{\mathcal{R}}(c) = \int_0^\infty |D^\top e^{A^\top \tau} c| d\tau.$$

При фиксированном векторе  $c$  величину  $\varphi_{\mathcal{R}}(c)$  можно вычислять следующим образом. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A^\top z, \\ \dot{\phi} &= |D^\top z|, \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

с начальным условием

$$z(0) = c, \quad \phi(0) = 0. \quad (1.5.13)$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{A^\top t} c, \\ \phi(t) &= \int_0^t |D^\top e^{A^\top \tau} c| d\tau, \end{aligned}$$

так что

$$\phi(\infty) = \varphi_{\mathcal{R}}(c).$$

Таким образом, решая дифференциальное уравнение (1.5.12)–(1.5.13) при различных векторах  $c$ ,  $|c| = 1$ , строим *опорные гиперплоскости*

$$\{x: c^\top x = \varphi_{\mathcal{R}}(c)\}.$$

При этом пересечение полупространств  $\{x: c^\top x \leq \varphi_{\mathcal{R}}(c)\}$  по всем векторам  $c$ ,  $|c| = 1$ , и дает искомое множество  $\mathcal{R}$ .

**Пример 1.5.1.** В качестве иллюстрации рассмотрим устойчивую двумерную систему (1.5.10) в канонической управляемой форме с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и  $L_\infty$ -ограниченными возмущениями  $\|w\|_\infty \leq 1$ .

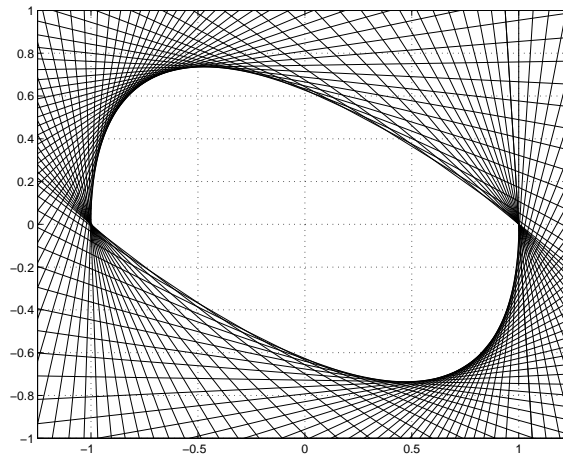


Рис. 1.5.1. Аппроксимация двумерного достижимого множества для системы из Примера 1.5.1 пересечением опорных полуплоскостей;  $d\theta = 2\pi/100$ .

Выбирая значения вектора  $c$  на единичной окружности в виде

$$c = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

с некоторым шагом  $d\theta$  по параметру  $\theta$  и решая уравнение (1.5.12) с начальным условием (1.5.13), получаем характеристику достижимого множества с помощью опорных полуплоскостей  $\{x: c^\top x \leq \varphi_{\mathcal{R}}(c)\}$ , изображенную на Рис. 1.5.1. ▼



Такое описание эффективно при малых размерностях ( $n = 2, 3$ ), допускающих простую параметризацию вектора  $c$  на единичном шаре. Ясно, что при больших размерностях фазового пространства этот способ трудоемок и при этом дает весьма неполное представление о достижимом множестве.

Однако во многих технических приложениях бывает достаточно определять не всю границу, а лишь интервалы, в которых независимо меняются координаты вектора состояний. В этом случае достаточно посчитать лишь  $n$  значений опорной функции, взяв в качестве  $c$  единичные координатные векторы  $e_i$  (в силу симметрии множества  $\mathcal{R}$ , при  $c = -e_i$  получим симметричную опорную гиперплоскость).

Ограниченность предложенного метода заключается также и в том, что он не дает возможности строить достижимое множество при наличии неопределенности в матрице системы. В то же время, как будет показано далее, эллипсоидальная техника с легкостью позволяет учесть это обстоятельство, приводя к так называемым *робастным оценкам*.

Введем еще одно понятие, связанное с достижимыми множествами; оно встретится нам позже, но будет иметь несколько иное происхождение и структуру. Рассмотрим конечное  $T > 0$  и назовем *наихудшим возмущением* такое  $w(t)$ , которое выводит траекторию на границу множества  $\mathcal{R}(T)$ . Существование такого допустимого возмущения уже было доказано при выводе формулы (1.5.11); оно доставляет максимум подынтегральному выражению в (1.5.11) и при данном фиксированном  $c$  имеет вид

$$\hat{w}(t) = \frac{D^\top e^{A^\top(T-t)} c}{|D^\top e^{A^\top(T-t)} c|}. \quad (1.5.14)$$

Нетрудно видеть, что в момент  $T$  возмущение  $\hat{w}(t)$  приводит траекторию системы в точку  $x_c(T) \in \partial\mathcal{R}(T)$  с нормалью  $c$ .

В простейшем случае скалярного возмущения и размерности  $n = 2$ , записав вектор  $c$  в полярных координатах, получим

$$\hat{w}(t) = \text{sign } D^\top e^{A^\top(T-t)} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

с некоторым  $\theta \in [0, 2\pi]$ ; тогда траектория в момент  $t = T$  попадет в точку  $x_\theta$  на границе  $\mathcal{R}(T)$ .

Заметим, что в скалярном случае наилучшее возмущение принимает два значения  $\pm 1$ , то есть имеет релейный характер. Этот факт хорошо известен в теории оптимального управления.

Рассмотрим теперь бесконечное время и устойчивую матрицу  $A$ . Нетрудно видеть (см. свойство 8 достижимых множеств), что при любом начальном положении  $x(0)$  (в том числе и при  $x(0) \notin \mathcal{R}$ ) и указанном возмущении  $\widehat{w}(t)$  имеем

$$x_\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_\theta \in \partial \mathcal{R}.$$

Обратим внимание, что заодно доказана замкнутость множества  $\mathcal{R}$  и явно указано (как и в предыдущем параграфе для случая  $L_2$ -ограниченных возмущений) то возмущение, которое выводит траекторию на границу достижимого множества при  $t \rightarrow \infty$ .

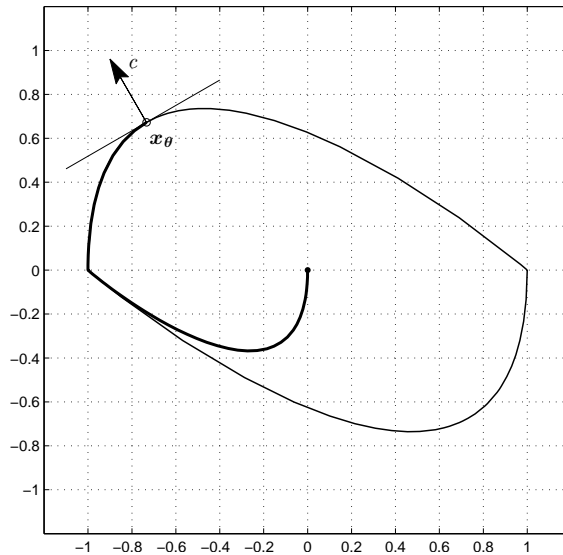


Рис. 1.5.2. Достижимое множество для системы из Примера 1.5.1 и ее траектория при наихудшем возмущении для  $\theta = 2\pi/3$ .

**Пример 1.5.2.** Граница достижимого множества для системы из Примера 1.5.1 изображена на Рис. 1.5.2. Значению  $\theta = 2\pi/3$  соответствует точка

$$x_\theta = \begin{pmatrix} -0,7336 \\ 0,6726 \end{pmatrix}$$

на границе множества  $\mathcal{R}$ , в которой касательная имеет вектор нормали  $c = (\cos \theta \quad \sin \theta)^\top$ . Соответственно, при возмущении вида (1.5.14) с  $\theta = 2\pi/3$  траектория системы сходится в точку  $x_\theta$ . ▼

Заметим также, что поскольку из ограниченности возмущения в  $L_2$  или  $L_\infty$ -норме в общем случае не следует ограниченности в другой из них, то соответствующие множества достижимости для данной системы могут соотноситься (в смысле вложенности) произвольным образом.

Случай дискретного времени анализируется практически так же. Для системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0,$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , а возмущения  $w_k$  ограничены в  $l_\infty$ -норме:

$$w_k^\top w_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

*опорная функция* достижимых множеств выписывается явно и имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{R}_k}(c) &= \sum_{i=0}^{k-1} |D^\top (A^\top)^i c|, \\ \varphi_{\mathcal{R}}(c) &= \sum_{i=0}^{\infty} |D^\top (A^\top)^i c|. \end{aligned}$$

Этому описанию присущи те же недостатки, что и для непрерывных задач.

Итак, множества достижимости систем с  $L_\infty$ -ограниченными входами, вообще говоря, не являются эллипсоидами, и их описание не просто. Однако в силу их выпуклости и центральной симметрии, их удобно аппроксимировать эллипсоидами. Соответствующие результаты будут представлены в Главе 3.

## 1.6. Системы с неопределенностью

В предыдущем разделе рассмотрен один из источников неопределенности в описании системы — неизвестные внешние возмущения; в остальном везде выше предполагалось, что нам доступно точное математическое описание системы. Такая ситуация является идеализированной; в реальных задачах неизбежно присутствует системная неопределенность, и используемое управление должно быть работоспособно в этих условиях. Такое управление называется *робастным*. В этом разделе рассматриваются некоторые наиболее распространенные типы матричной неопределенности и приводятся основные используемые в дальнейшем изложении результаты из анализа робастной устойчивости неопределенных систем.

### 1.6.1. Основные типы неопределенности

#### Параметрическая неопределенность

Если модель описывает физический объект (механический, электрический, экономический и т. п.) то, как правило, его параметры не известны точно, причем во многих случаях их значения в принципе не могут быть доступны, поскольку они могут меняться в процессе эксплуатации. Например, при управлении автомобилем мы не знаем заранее его массу (она зависит от загрузки), скорость, коэффициент трения (он зависит от состояния дороги и износа шин) и т. д. При этом сами уравнения, описывающие движение, известны точно. В таких ситуациях можно говорить о *параметрической неопределенности*. Линейная система (1.1.3) при этом заменяется на *семейство систем* (иногда используют термин *неопределенная система*)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(q)x + B(q)u + D_1(q)w, & q \in \mathcal{Q}, \\ y &= C(q)x + D_2(q)w, \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

где все матрицы  $A, B, C, D_1, D_2$  зависят от параметров  $q \in \mathbb{R}^\ell$ , которые принадлежат заданному *допустимому множеству*  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^\ell$  (*множеству неопределенности*). Подчеркнем, что система (1.6.1) остается стационарной — параметры  $q$  не меняются во времени, однако априори известно лишь то, что они лежат во множестве  $\mathcal{Q}$ .

Можно рассматривать различные виды ограничений на неопределенные параметры, то есть на форму множества  $\mathcal{Q}$ . В принципе, допустимое множество может иметь произвольный вид и даже совпадать с  $\mathbb{R}^\ell$ , но чаще всего (по соображениям природы задачи, когда неопределенные физические параметры имеют некоторые допуски) имеют дело с параллелепипедом, когда каждый из параметров меняется независимо в своем диапазоне (интервале неопределенности):

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{R}^\ell: \underline{q}_i \leq q_i \leq \bar{q}_i\}, \quad (1.6.2)$$

в частности, с кубом (шаром в  $l_\infty$ -норме):

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{R}^\ell: |q|_\infty \leq \gamma\}, \quad (1.6.3)$$

где  $\gamma > 0$  задает *размах неопределенности*.

При этом *вершинным элементом* семейства (или просто *вершиной*) называется его элемент, определяемый крайними допустимыми значениями параметров:  $q_i = \underline{q}_i$  либо  $q_i = \bar{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , в случае (1.6.2) или  $q_i = \pm\gamma$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , в случае (1.6.3). Таким образом, всего имеется  $2^\ell$

вершинных элементов — по числу вершин  $\ell$ -мерного параллелепипеда (1.6.2) (или куба (1.6.3)).

Параметры могут не быть независимыми, а иметь некоторые совместные ограничения; простейший из таких случаев — допустимое множество является шаром

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{R}^\ell: |q|_2 \leq \gamma\}$$

в  $l_2$ -норме радиуса  $\gamma$  или эллипсоидом вида

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{R}^\ell: q^\top M^{-1} q \leq 1, M \succ 0\}$$

или

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{R}^\ell: \sum_{i=1}^{\ell} \frac{(q_i - q_i^0)^2}{\alpha_i^2} \leq 1\},$$

где  $q^0 = (q_1^0 \ \dots \ q_\ell^0)$  — некоторое значение параметра, соответствующее *номинальной* системе,  $\alpha_i$  — масштабные множители. В этом случае говорим о *сферических* (эллипсоидальных) ограничениях на параметры. Вообще, в качестве  $\mathcal{Q}$  обычно рассматривается множество, ограниченное в какой-нибудь норме.

Различают также *структуры неопределенности*, то есть типы функциональной зависимости от параметра  $q$ ; главным образом, *линейную неопределенность*. При этом элементы  $a_{ij}(q)$  неопределенной матрицы  $A(q)$  есть линейные функции от  $q$ .

Особо выделяют следующие случаи:

1. *Интервальная неопределенность*. *Интервальная матрица* задается следующим образом:

$$A = (a_{ij}), \quad \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

то есть сами ее элементы являются неопределенными параметрами, которые могут независимо друг от друга принимать значения в своих интервалах неопределенности  $[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ .

Иногда бывает удобнее следующая форма записи интервального семейства матриц:

$$A = A_0 + \gamma \Delta.$$

Здесь  $A_0 = (a_{ij}^0)$  — *номинальная матрица* семейства,  $\Delta = (\Delta_{ij})$ ,  $|\Delta_{ij}| \leq \delta_{ij}$  — неопределенность, матрица  $\delta = (\delta_{ij})$  задает масштабы изменения элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A$ , а  $\gamma > 0$  — *размах неопределенности*.

2. *Аффинная неопределенность.* Описанная выше ситуация, когда неопределенными параметрами являются сами элементы матрицы, достаточно редкая, так как обычно коэффициенты матрицы сами по себе не имеют непосредственного физического смысла и зависят от параметров  $q$  более сложным образом. Аффинная неопределенность является простейшей моделью такой *зависимой* структуры неопределенности.

*Аффинное семейство* матриц задается следующим образом:

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + \dots + q_\ell A_\ell, \quad q \in \mathcal{Q},$$

где матрицы  $A_i$ ,  $i = 0, \dots, \ell$ , фиксированы и известны (матрицу  $A_0$  также называют *номинальной матрицей* семейства). В этом случае коэффициенты  $a_{ij}(q)$  матрицы  $A(q)$  зависят аффинным образом от параметров  $q$ :

$$a_{ij}(q) = a_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{\ell} q_k a_{ij}^k,$$

где  $A_k = (a_{ij}^k)$ . Иными словами, коэффициенты  $a_{ij}(q)$  не могут меняться независимо друг от друга при изменении  $q$ .

Рассматривают и другие, более общие структуры неопределенности, такие как мультилинейная, полиномиальная и др., но они гораздо более сложны для анализа и затрагиваться не будут.

### Структурированная неопределенность

При описании в пространстве состояний часто уместно использовать модель матричной неопределенности, когда не физические параметры, а непосредственно матрицы, описывающие систему, допускают неопределенность, например,

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x. \quad (1.6.4)$$

Здесь  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — *номинальная матрица* системы,  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$  — *возмущающая матрица* (вообще говоря, прямоугольная), удовлетворяющая условию

$$\|\Delta\| \leq \gamma,$$

а  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — известные матрицы (в частности, возможно  $F = H = I$ ). Норма  $\|\cdot\|$ , в которой ограничено возмущение, обычно спектральная, а величина  $\gamma$  задает уровень возможных возмущений.

Именно эта модель, иногда называемая *структурированной матричной неопределенностью*, будет в основном рассматриваться в последующих главах.

Следует оговориться, что термин “структурированность” обычно используется применительно к специальному типу неопределенности, исследуемому в рамках так называемой  $\mu$ -теории, когда сама матрица  $\Delta$  имеет некоторую блочно-диагональную структуру. Введенная выше неопределенность по своей природе является параметрической, но ограниченной в матричной норме (в англоязычной литературе она называется *norm-bounded uncertainty*). Под структурированностью же понимается следующее: за счет выбора матриц  $F$  и  $H$  в (1.6.4) можно указывать некоторые возмущаемые элементы номинальной матрицы  $A_0$ , оставляя остальные фиксированными.

**Пример 1.6.1.** Пусть, например, матрица  $A$  номинальной системы задана во фробениусовой форме:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix};$$

тогда при структурированной неопределенности  $B\Delta C$ , где

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = (\delta_1 \quad \cdots \quad \delta_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \quad \|\Delta\| \leq \gamma,$$

а  $C$  — единичная матрица, возмущению будут подвергаться лишь элементы последней строки матрицы  $A$ , сохраняя фробениусову форму возмущенной матрицы. Если норма, в которой ограничено возмущение  $\Delta$ , спектральная, имеем сферическую неопределенность, если матричная норма интервальная, получаем интервальную неопределенность специального вида. ▼

Вообще, такая модель естественно возникает во многих постановках задач; например, при наличии неопределенности  $\|\Delta\| \leq \gamma$  в матрице регулятора по выходу

$$K = K_0 + \Delta,$$

соответствующая неопределенность в матрице  $A_c = A + BK_0C$  замкнутой системы будет иметь структурированную форму

$$B\Delta C, \quad \|\Delta\| \leq \gamma,$$

а номинальное значение матрицы  $A_c$  равно  $A + BK_0C$ . В разделе 5.2 будет рассмотрена так называемая проблема *нехрупкости* номинального регулятора  $K_0$  — сохранение им свойства стабилизируемости при наличии в нем неопределенности  $\Delta$ .

### $(M, \Delta)$ -конфигурация

Еще более общей моделью неопределенности является так называемая  $(M, \Delta)$ -конфигурация системы. Не будем подробно обсуждать структуру и свойства такого способа задания неопределенности, а ограничимся простейшими формулировками.

Начнем с рассмотрения системы

$$\dot{x} = (A + \Delta_A)x, \quad (1.6.5)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — номинальная матрица, а неопределенность имеет вид

$$\Delta_A = F_1\Delta(I - F_2\Delta)^{-1}C, \quad (1.6.6)$$

где  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$  — матричная неопределенность, ограниченная в спектральной норме

$$\|\Delta\| \leq \gamma,$$

а  $F_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $F_2 \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — постоянные матрицы, причем предполагается, что  $\det(I - F_2\Delta) \neq 0$  при всех допустимых значениях неопределенности  $\Delta$ .

Обратим внимание, что возмущение  $\Delta_A$  представлено дробно-линейной функцией от матричной неопределенности  $\Delta$ , при этом матрица

$$A + F_1\Delta(I - F_2\Delta)^{-1}C$$

называется *дробно-линейным преобразованием* (linear fractional transformation, LFT) неопределенности  $\Delta$ , задаваемым матрицами  $A$ ,  $F_1$ ,  $C$ ,  $F_2$ .

Неопределенность такого типа возникает, например, если рассмотреть систему, записанную в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + F_1v, \\ e &= Cx + F_2v, \\ v &= \Delta e. \end{aligned} \quad (1.6.7)$$



Здесь  $v$  и  $e$  — “искусственные” переменные, с помощью которых неопределенность включена в цепь обратной связи. Тогда, исключая их из уравнений, приходим к (1.6.5), (1.6.6).

Вообще говоря, дробно-линейное преобразование определяется следующим образом. Пусть  $M$  — матрица, имеющая блочную форму:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.6.8)$$

где матрицы  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  — квадратные (возможно, разных размерностей). *Нижним* (соответственно *верхним*) *дробно-линейным преобразованием* матриц  $\Delta_l$  и  $\Delta_u$  называются матрицы

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) \doteq M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21},$$

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) \doteq M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12},$$

соответственно, при условии, что обратные матрицы существуют.

Дробно-линейное описание естественным образом возникает в задачах с так называемой  $(M, \Delta)$ -конфигурацией. Это общая схема анализа задач с неопределенностями, получившая широкое распространение в современных исследованиях; она позволяет учитывать возмущения номинального объекта, имеющие различную природу — параметрическую, структурированную, частотную, немоделируемую динамику и др.

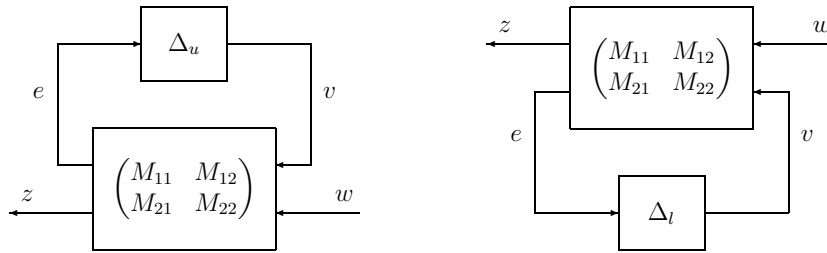


Рис. 1.6.1.  $(M, \Delta)$ -конфигурация: верхнее и нижнее дробно-линейные преобразования.

Такой способ описания особенно удобен при задании систем с помощью передаточных функций; он заключается в том, что система приводится к виду, изображенному на Рис. 1.6.1, где  $w$  — внешний вход,  $z$  — выход,  $M_{ij} = M_{ij}(s)$  — блоки матричной передаточной функции  $M(s)$  вида (1.6.8), а  $\Delta(s)$  — матричная функция, отвечающая неопределенностям.

Например, для верхнего LFT из блок-схемы слева на Рис. 1.6.1 имеем

$$\begin{pmatrix} e \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad v = \Delta_u e,$$

или

$$\begin{aligned} e &= M_{11}v + M_{12}w, & v &= \Delta_u e, \\ z &= M_{21}v + M_{22}w. \end{aligned}$$

Как и в (1.6.7), формально исключая отсюда  $e$  и  $v$ , получаем

$$z = (M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12})w;$$

иначе говоря,

$$z = \mathcal{F}_u(M, \Delta_u)w.$$

При такой записи блок  $M_{22}$  матрицы  $M(s)$  отвечает за динамику невозмущенной системы (при  $\Delta = 0$ ), а все, относящееся к неопределенности, помещается в цепь обратной связи. При этом говорят, что неопределенность “изымается” из системы.<sup>1</sup> Блоки  $M_{21}$ ,  $M_{11}$  и  $M_{12}$  описывают конкретные связи и форму, в которой неопределенность воздействует на номинальную систему.

Техника таких преобразований бывает удобной не только при описании систем с неопределенностью. Приведем два примера.

Для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

передаточная функция от  $u$  к  $y$  имеет вид

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

а в терминах дробно-линейного преобразования она может быть записана как

$$G(s) = \mathcal{F}_u\left(M, \frac{1}{s}I\right), \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на языке LFT удалось связать представление системы в пространстве состояний с ее передаточной функцией.

Другим примером служит задача  $H_\infty$ -оптимизации (см. конец раздела 1.1.2), когда для системы с внешним возмущением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Англиязычный термин — “pulling out the  $\Delta$ s”.

требуется найти регулятор  $u = Kx$ , который минимизирует  $H_\infty$ -норму передаточной функции замкнутой системы

$$G(s) = (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}.$$

Путем несложных преобразований функцию  $G(s)$  можно записать как

$$G(s) = \mathcal{F}_l(M, K),$$

где

$$M = \begin{pmatrix} C(sI - A)^{-1} & D + C(sI - A)^{-1}B \\ (sI - A)^{-1} & (sI - A)^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Тогда задача  $H_\infty$ -оптимизации приобретает вид

$$\min_K \|\mathcal{F}_l(M, K)\|_\infty.$$

При этом блок  $\Delta$  имеет смысл регулятора, по которому можно проводить оптимизацию.

$(M, \Delta)$ -конфигурация является весьма общей и удобной *формой записи* системы, однако она не есть самоцель. Так, например, если исходно система записана в пространстве состояний и имеет аффинную параметрическую неопределенность, то при желании ее можно привести к виду  $(M, \Delta)$ , но при этом выражения сильно усложняются и естественность параметрического представления теряется.

### Нестационарность

В рассмотренных моделях матричных неопределенностей предполагалось, что  $\Delta$  — постоянная матрица. Однако иногда возмущения меняются во времени; в этом случае приходим к модели *нестационарных возмущений*

$$\Delta = \Delta(t).$$

При этом предполагается, что для всех  $t$  матрицы  $\Delta(t)$  принадлежат какому-либо заданному семейству, например,

$$\|\Delta(t)\| \leq \gamma$$

для некоторой матричной нормы  $\|\cdot\|$ , или интервальному семейству

$$\underline{\Delta}_{ij} \leq \Delta_{ij}(t) \leq \bar{\Delta}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Более того, в ряде случаев возмущения зависят и от состояния системы, и можно рассматривать системы вида

$$\dot{x} = \left( A_0 + \Delta(t, x(t)) \right) x,$$

в которых неопределенность зависит от текущего состояния системы, а также и иные типы вхождения нелинейных и нестационарных возмущений.

В дальнейшем будет показано, как развитый аппарат квадратичной стабилизации позволяет решать задачи в том числе и при наличии нестационарных возмущений.

### 1.6.2. Робастная устойчивость

В отличие от раздела 1.2, где исследовались устойчивость одной заданной линейной системы, здесь будем заниматься устойчивостью целого семейства систем, соответствующих исходной (номинальной) системе при наличии неопределенности.

Обратимся сперва к параметрическим семействам матриц, таким как *интервальное семейство*, задаваемое в форме

$$A = (a_{ij}), \quad \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.6.9)$$

или

$$A = A_0 + \Delta, \quad \Delta = (\Delta_{ij}), \quad |\Delta_{ij}| \leq \gamma, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.6.10)$$

либо *аффинное семейство*

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} q_i A_i, \quad |q_i| \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (1.6.11)$$

Семейство называется *робастно устойчивым*, если устойчивы все его элементы, то есть

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

при всех  $q$  (или  $\Delta$  для семейства (1.6.10)) из допустимого множества, где  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $A$ . При этом наибольшее  $\gamma = \gamma_{\max}$ , для которого робастная устойчивость сохраняется при всех  $\gamma < \gamma_{\max}$ , называется *радиусом устойчивости* матричного семейства.

В некоторых специальных случаях робастная устойчивость может быть установлена эффективно. Одним из таких случаев является интервальное семейство матриц во фробениусовой форме, у которых неопределенность содержится лишь в элементах последней строки, см. Пример 1.6.1. К такому семейству применима известная *теорема Харитонова*, согласно которой робастная устойчивость эквивалентна устойчивости четырех так называемых угловых матриц семейства (по сути теорема Харитонова, конечно, имеет дело с интервальными семействами *полиномов*).

Однако в общей ситуации непосредственная проверка робастной устойчивости заданного матричного семейства сложна; ясно, что задача отыскания величины радиуса робастной устойчивости также является трудной, для которой в общем случае отсутствуют регулярные способы решения. Поэтому, часто используется подход, основанный на достаточных условиях робастной устойчивости. Ниже будет подробно обсуждаться такой подход, заключающийся в построении общей квадратичные функции Ляпунова для неопределенных семейств, и потому называемый *робастной квадратичной устойчивостью*.

Перейдем теперь к другому типу матричных неопределенностей, задаваемых с помощью матричных норм. Пусть

$$A(\Delta) = A + \Delta, \quad \|\Delta\| \leq \gamma,$$

где матрица  $A$  устойчива, а  $\|\cdot\|$  означает спектральную норму. Нас интересует *радиус устойчивости* такого семейства, то есть величина

$$\gamma_{\max} = \sup\{\gamma: A + \Delta \text{ устойчива при всех } \|\Delta\| \leq \gamma\}.$$

Если матрицы предполагаются определенными над полем вещественных чисел, то такая задача оказывается очень трудной; ее решение было найдено сравнительно недавно; оно будет приведено далее. В то же время, проблема существенно упрощается, если считать возмущения  $\Delta$  комплексными.

Назовем *комплексным радиусом устойчивости* устойчивой матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  величину

$$\gamma_{\max}^c \doteq \sup\{\gamma: A + \Delta \text{ устойчива при всех } \Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}, \|\Delta\| \leq \gamma\}.$$

Имеет место следующий результат.

**Теорема 1.6.1.** Пусть  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  устойчива. Комплексный радиус устойчивости матрицы  $A$  определяется формулой

$$\gamma_{\max}^c = \frac{1}{\sup_{\omega} \|(j\omega I - A)^{-1}\|}.$$

Заметим, что результат Теоремы 1.6.1 может быть переписан следующим образом:

$$\gamma_{\max}^c = \frac{1}{\sup_{\omega} \sigma_n(j\omega I - A)^{-1}} = \inf_{\omega} \sigma_1(j\omega I - A) \quad (1.6.12)$$

(см. Лемму В.6 из Приложения В).

Мы не приводим доказательства Теоремы 1.6.1; отметим лишь, что оно существенно опирается на следующий важный результат о матричном радиусе невырожденности.

**Лемма 1.6.1.** Пусть матрица  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  невырождена. Тогда  
1) матрица  $A + \Delta$  невырождена при любом

$$\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \|\Delta\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|};$$

2) при  $\gamma \geq 1/\|A^{-1}\|$  найдется матрица  $\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\|\Delta\| \leq \gamma$  такая, что матрица  $A + \Delta$  вырождена.

**Доказательство.** 1) Пусть  $\|D\| \leq q < 1$ ; тогда матрица  $(I + D)^{-1}$  существует и

$$\|(I + D)^{-1}\| = \|I - D + D^2 - \dots\| \leq 1 + q + q^2 + \dots = (1 - q)^{-1}.$$

Тогда при  $\|\Delta\| \leq q/\|A^{-1}\|$ ,  $q < 1$  имеем

$$\begin{aligned} \|(A + \Delta)^{-1}\| &= \|(I + A^{-1}\Delta)^{-1}A^{-1}\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \|(I + A^{-1}\Delta)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - q}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\|A^{-1}\Delta\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta\| \leq q,$$

то есть матрица  $A + \Delta$  невырождена.

2) Пусть  $\gamma \geq 1/\|A^{-1}\|$ . Возьмем вектор  $a$ ,  $|a| = 1$ , такой, что

$$|A^{-1}a| = \|A^{-1}\| |a|$$

(он существует по определению спектральной нормы матрицы), и положим

$$\Delta = -\frac{a(A^{-1}a)^*}{\|A^{-1}\|^2}.$$

Тогда  $\|\Delta\| = 1/\|A^{-1}\| \leq \gamma$ , так как для матрицы ранга 1 имеем

$$\|xy^*\| = |x||y|, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

С другой стороны, для вектора  $b = A^{-1}a \neq 0$  имеем

$$(A + \Delta)b = a - \frac{a}{\|A^{-1}\|^2} (A^{-1}a)^* (A^{-1}a) = a - a = 0,$$

то есть матрица  $B + \Delta$  — вырожденная.  $\blacksquare$

Заметим, что в ходе доказательства обнаружено, что дестабилизирующее возмущение  $\Delta$  при  $\gamma \geq \gamma_{\max}^c$  может быть взято в виде матрицы ранга 1.

Лемма 1.6.1 справедлива также для случая, когда и номинальная матрица  $A$ , и возмущение  $\Delta$  предполагаются вещественными и симметричными. При этом говорят о *симметрическом радиусе невырожденности*:

$$\gamma_{\max}^{\text{sym}}(A) = \sup\{\|\Delta\| : \Delta \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad A + \Delta \text{ невырождена}\}.$$

Справедлив следующий результат, аналогичный Лемме 1.6.1.

**Лемма 1.6.2.** *Для невырожденной матрицы  $A \in \mathbb{S}^{n \times n}$  симметрический радиус невырожденности равен*

$$\gamma_{\max}^{\text{sym}}(A) = \frac{1}{\|A^{-1}\|} = \min_i |\lambda_i(A)|.$$

При этом критическое значение  $\Delta$  равно

$$\Delta_{\text{cr}} = -\lambda e e^\top,$$

где  $\lambda$  — минимальное по абсолютной величине собственное значение матрицы  $A$ , а  $e$  — отвечающий ему единичный собственный вектор.

Приведем (также без доказательства) аналогичную формулу для радиуса комплексной устойчивости для случая *структурированной неопределенности*. Пусть матрица  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  устойчива; нас интересует наибольшее число  $\gamma_{\max}^c$ , такое что все матрицы вида

$$A + B\Delta C, \quad \Delta \in \mathbb{C}^{m \times l}, \quad \|\Delta\| < \gamma_{\max}^c, \quad (1.6.13)$$

являются устойчивыми. Здесь  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{C}^{l \times n}$  — заданные матрицы. Ясно, что при  $B = C = I$  получаем предыдущую задачу.

Следующая теорема содержит простой способ вычисления комплексного радиуса робастной устойчивости рассматриваемого матричного семейства.<sup>1</sup>

**Теорема 1.6.2.** *Комплексный радиус робастной устойчивости семейства (1.6.13) равен*

$$\gamma_{\max}^c = \frac{1}{\sup_{\omega} \|C(j\omega I - A)^{-1}B\|}.$$

Ситуация с вещественным радиусом робастной устойчивости

$$\gamma_{\max}^r \doteq \sup\{\gamma: A + B\Delta C \text{ устойчива при всех } \Delta \in \mathbb{R}^{m \times l}, \|\Delta\| \leq \gamma\},$$

где  $A, B, C$  — вещественные матрицы и матрица  $A$  устойчива, гораздо более сложна. Конечно, имеется очевидная оценка

$$\gamma_{\max}^r \geq \gamma_{\max}^c$$

(поскольку комплексные возмущения включают в себя вещественные), однако, уже простые примеры показывают, что отношение  $\gamma_{\max}^r/\gamma_{\max}^c$  может быть сколь угодно велико, то есть вышеприведенная оценка может быть плохой.

**Пример 1.6.2.** Для системы с  $\Delta \in \mathbb{R}$  и

$$A = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 1),$$

где  $a > 0$ , имеем

$$\gamma_{\max}^r = 1,$$

поскольку для матрицы  $A + B\Delta C$  характеристическим полиномом является  $s^2 + as + 1 - \Delta$ . В то же время из (1.6.2) следует, что при малых  $a$

$$\gamma_{\max}^c \approx a\sqrt{1 - a^2}. \quad \blacktriangledown$$

<sup>1</sup>Вспомним, что в конце раздела 1.1.1 введено понятие коэффициента усиления входного сигнала  $w$  для линейной системы

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad y = Cx,$$

и отметили, что он может вычисляться как  $H_\infty$ -норма ее передаточной функции. Таким образом, согласно Теореме 1.6.2, комплексный радиус устойчивости равен величине, обратной к  $\mathfrak{q}_{2,2}$  коэффициенту усиления соответствующей линейной системы (или, что то же самое, к  $H_\infty$ -норме ее передаточной функции).



Известны и другие достаточные условия робастной устойчивости вещественного семейства  $A + B\Delta C$ , однако и они обладают тем же недостатком.

Аналитическое выражение для нахождения вещественного радиуса робастной устойчивости  $\gamma_{\max}^r$  было получено сравнительно недавно.

**Теорема 1.6.3.** *Обозначим*

$$U(\omega) \doteq \operatorname{Re}(C(j\omega I - A)^{-1}B),$$

$$V(\omega) \doteq \operatorname{Im}(C(j\omega I - A)^{-1}B),$$

*и составим блочную матрицу*

$$H(\omega, \alpha) \doteq \begin{pmatrix} U(\omega) & -\alpha V(\omega) \\ \alpha^{-1}V(\omega) & U(\omega) \end{pmatrix},$$

*зависящую от двух вещественных параметров  $\omega, \alpha$ .*

*Тогда*

$$\gamma_{\max}^r = \frac{1}{\sup_{\omega} \inf_{\alpha \in (0,1]} \sigma_{n-1}(H(\omega, \alpha))}.$$

В отличие от Теоремы 1.6.1 (в форме (1.6.12)) здесь фигурируют уже два скалярных параметра, по которым нужно проводить оптимизацию; кроме того, нужно вычислять не первое, а второе по порядку сингулярное значение матрицы. Ясно, что в вычислительном смысле нахождение вещественного радиуса устойчивости — более трудная задача, чем комплексного. Отметим также, что дестабилизирующими возмущениями являются матрицы второго ранга, а не первого.

Ниже будет показано, что если оставаться в классе *симметричных матриц со структурированной неопределенностью*, отыскание вещественного радиуса робастности сводится к решению простой задачи выпуклой оптимизации.

В заключение раздела отметим, что все полученные результаты естественно обобщаются на случай дискретных систем. Например, если матрица  $A$  дискретно устойчива, то комплексный радиус робастной устойчивости семейства

$$A + \Delta, \quad \|\Delta\| \leq \gamma,$$

равен

$$\gamma_{\max}^c = \frac{1}{\sup_{0 \leq \omega < 2\pi} \|(e^{j\omega} I - A)^{-1}\|} = \inf_{0 \leq \omega < 2\pi} \sigma_1(e^{j\omega} I - A),$$

что является дискретным аналогом Теоремы 1.6.1.

## Глава 2

# Линейные матричные неравенства в задачах управления

В этой главе вводятся определения и понятия теории линейных матричных неравенств — основного аппарата, используемого при изложении дальнейшего материала книги; приводятся свойства, формулируются ключевые задачи и обсуждаются важные технические приемы, часто используемые в последующих разделах. По сложившейся традиции, для линейных матричных неравенств будет иногда использоваться аббревиатура LMI, соответствующую англоязычному наименованию *Linear Matrix Inequalities*.

Далее, в качестве иллюстрации и подготовки читателя к основным разделам книги (Главы 3 и 4), будет продемонстрирована эффективность этого аппарата и простота его применения к решению некоторых классических задач теории управления (в том числе и в робастном варианте).

### 2.1. Основные понятия и свойства

Введем в рассмотрение следующую линейную матричнозначную функцию векторного аргумента  $x \in \mathbb{R}^\ell$ :

$$F(x) \doteq F_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i F_i, \quad (2.1.1)$$

где  $F_i = F_i^\top \in \mathbb{S}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, \ell$ , — известные фиксированные вещественные симметричные матрицы, называемые иногда *коэффициентами*, а  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , — скалярные переменные.

Запись

$$F(x) \prec 0, \quad (2.1.2)$$

в которой неравенство понимается в смысле знакоопределенности матрицы (см. Приложение А), называется *линейным матричным неравенством в канонической форме* относительно переменных  $x_1, \dots, x_\ell$ . Заметим, что матричное неравенство (2.1.2) эквивалентно числовому неравенству

$$\lambda_{\max}(F(x)) < 0,$$

но функция  $\lambda_{\max}(F(x))$  *нелинейна* по  $x$ .

Строго говоря, правильнее было бы использовать термин “аффинное матричное неравенство”, поскольку функция (2.1.1) аффинна, но по сложившейся традиции принято наименование “линейное матричное неравенство”.

Несмотря на кажущийся специальный вид линейных матричных неравенств, они представляют собой весьма богатый класс ограничений, в том числе встречающихся в управлении. Принципиально важным свойством ЛМН является *выпуклость* множества его решений (она доказывается непосредственно по определению), которая позволяет формулировать многие задачи оптимального управления в виде задач выпуклого программирования.

Приведем еще несколько простых полезных свойств ЛМН, непосредственно следующих из свойств знакоопределенных матриц.

Например, неравенство обратного знака сводится к неравенству вида (2.1.2) очевидным образом:  $F(x) \succ 0$  тогда и только тогда, когда  $-F(x) \prec 0$ , а запись

$$F(x) \prec G(x)$$

для линейных функций  $F(x)$ ,  $G(x)$  вида (2.1.1) эквивалентна матричному неравенству

$$F(x) - G(x) \prec 0.$$

Далее, поскольку несколько линейных матричных неравенств

$$F_j(x) \prec 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

эквивалентны одному блочно-диагональному:

$$\begin{pmatrix} F_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & F_m(x) \end{pmatrix} \prec 0,$$

можно не делать разницы между системой линейных матричных неравенств и одним LMI.

Еще одно часто используемое свойство заключается в сохранении знака строгого LMI при умножении слева и справа на произвольную невырожденную матрицу  $M$ :

$$F(x) \prec 0 \implies MF(x)M^\top \prec 0, \quad \det M \neq 0.$$

Для нестрогого LMI это свойство выполняется независимо от вырожденности или невырожденности матрицы  $M$ .

Как правило, далее будем иметь дело с линейными матричными неравенствами, в которых переменными являются не скаляры, как в (2.1.2), а матрицы. Типичным примером таких LMI является условие на знакоопределенность матрицы:  $Q \succ 0$ , или, более содержательно, рассматривавшееся выше классическое неравенство Ляпунова вида

$$A^\top Q + QA + R \prec 0, \quad R \succ 0, \quad (2.1.3)$$

где переменной является симметричная матрица  $Q$ .

Мы увидим, что матричная форма LMI естественным образом возникают при формулировании задач управления; помимо удобства записи она также может способствовать более эффективным вычислениям. Неравенства типа (2.1.3) будем называть линейными матричными неравенствами относительно матричной переменной  $Q = Q^\top$ .

При необходимости матричная форма (2.1.3) легко может быть приведена к каноническому виду. Именно, пусть

$$E_1, \dots, E_\ell, \quad \ell = \frac{n(n+1)}{2},$$

базис в пространстве  $\mathbb{S}^{n \times n}$  симметричных матриц; тогда, имея представление  $Q = \sum_{i=1}^{\ell} x_i E_i$  для  $Q \in \mathbb{S}^{n \times n}$ , вместо (2.1.3) получаем

$$\underbrace{R}_{F_0} + \sum_{i=1}^{\ell} x_i \underbrace{(AE_i + E_i A^\top)}_{F_i} \prec 0.$$

Введем следующее важное понятие.

**Определение 2.1.1.** Совокупность точек

$$\mathcal{D}_{\text{feas}} \doteq \{x \in \mathbb{R}^\ell : F(x) \preceq 0\}$$

называется *допустимой областью* линейного матричного неравенства  $F(x) \preceq 0$ .

Очевидно,  $\mathcal{D}_{\text{feas}}$  — совокупность решений ЛМІ — представляет собой выпуклую область, возможно неограниченную, возможно пустую. Для простейшего случая  $\ell = 2$  (две переменных  $x_1, x_2$ ) и  $n = 2$  (матрицы  $F_i \in \mathbb{S}^{2 \times 2}$ ) приведем примеры, показывающие разнообразие областей  $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ .

**Пример 2.1.1.** Рассмотрим линейную матричную функцию

$$F(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и соответствующее *нестрогое* матричное неравенство  $F(x) \preceq 0$ ; оно эквивалентно паре линейных алгебраических неравенств

$$\begin{aligned} -1 + x_1 - x_2 &\leq 0, \\ -1 - x_1 + x_2 &\leq 0, \end{aligned}$$

так что допустимое множество

$$\mathcal{D}_{\text{feas}} = \{(x_1 \ x_2)^\top : |x_1 - x_2| \leq 1\}$$

представляет собой полосу. ▼

Отсюда, в частности, следует очевидное, но важное наблюдение: если матрицы  $F_i$  диагональные, то линейное матричное неравенство представляет собой набор линейных *алгебраических* ограничений на переменную  $x \in \mathbb{R}^\ell$ , так что  $\mathcal{D}_{\text{feas}}$  — многогранник.

Обратим внимание на то, что в приведенном примере, равно как и в Определении 2.1.1, рассматривалось *нестрогое* ЛМІ; обсудим связь со строгим неравенством. Ясно, что если строгое неравенство (2.1.2) разрешимо, то и соответствующее нестрогое — тоже; обратное, вообще говоря, неверно. Так, если в Примере 2.1.1 в качестве  $F_0$  взять

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

допустимое множество будет являться прямой

$$\mathcal{D}_{\text{feas}} = \{(x_1 \ x_2)^\top : x_1 = x_2\},$$

а соответствующее *строгое* матричное неравенство  $F(x) \prec 0$  неразрешимо.

Последняя ситуация — вырожденная, это пример так называемого *нестрого разрешимого* (nonstrictly feasible) матричного неравенства, неявно содержащего условие типа равенства.

В большинстве задач от такой патологии можно избавиться, исключив равенство и, перейдя к новым переменным  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \leq \ell$ , получить *строго разрешимое* неравенство, то есть такое, для которого найдется точка

$$\tilde{x}^0 \in \mathbb{R}^p: \quad \tilde{F}(\tilde{x}^0) \prec 0$$

— внутренняя точка допустимого множества для  $\tilde{F}(\tilde{x}) \preceq 0$ .

**Замечание 2.1.1.** Отметим, что в дальнейшем нам иногда придется решать задачи типа отыскания *точной верхней грани* функции на *открытом множестве*, заданном *нестрогими* ЛМИ-ограничениями, причем это множество будет заведомо непусто (то есть  $\mathcal{D}_{\text{feas}}$  содержит внутреннюю точку). Будем заменять такую задачу на эквивалентную ей задачу отыскания *максимума* этой функции на *замыкании* ограничивающего множества. ▼

Как правило, далее будем иметь дело именно с *нестрогими* неравенствами  $F(x) \preceq 0$  (которые строго разрешимы!), и тому есть несколько причин.

Прежде всего, при решении задач стабилизации обычно требуется не только обеспечить устойчивость, то есть выполнение *строгого* неравенства

$$-\operatorname{Re} \lambda_i(A_c) > 0$$

для собственных значений матрицы замкнутой системы, но и гарантировать некоторую степень устойчивости, то есть выполнение *нестрого* неравенства

$$-\operatorname{Re} \lambda_i(A_c) \geq \sigma > 0.$$

**Замечание 2.1.2.** Обратим внимание на следующее обстоятельство, относящееся к анализу устойчивости через построение квадратичной функции Ляпунова. Существование положительно определенного решения  $Q \succ 0$  неравенства Ляпунова

$$A^\top Q + QA + 2\sigma Q \preceq 0 \tag{2.1.4}$$

при некотором заданном  $\sigma > 0$  эквивалентно тому, что степень устойчивости матрицы  $A$  не меньше, чем  $\sigma$ . ▼

Аналогичным образом, почти всегда от решения  $Q$  системы LMI требуется не просто положительная определенность ( $Q \succ 0$ ), но выполнение этого свойства с некоторым “запасом”:

$$Q \succ \delta I,$$

где  $\delta > 0$  задано. Как будет показано ниже в разделе 2.2.2, это условие, в частности, означает, что эллипсоид с матрицей  $Q$  содержит шар радиуса  $\delta^{1/2}$ , то есть имеет желаемую “степень невырожденности”.

Таким образом, по самой природе задач часто уместно и удобно иметь дело с нестрогими неравенствами.

Наконец, чуть ниже будет сформулирована одна из основных задач теории LMI — так называемая задача *полуопределенного программирования*, в самом названии которой содержится указание на нестрогость линейного матричного неравенства.

Перейдем теперь к рассмотрению другого примера.

**Пример 2.1.2.** Пусть

$$F(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что точка  $x^0 = (0 \ 0)^\top$  принадлежит допустимому множеству, и собственные значения матрицы  $F(x^0)$  строго отрицательны. Нарушение знакоопределенности симметричной матрицы может произойти лишь если одно из собственных значений обратится в нуль, то есть

$$\det F(x) = 0 \tag{2.1.5}$$

при некотором  $x$ . Решая это нелинейное уравнение, находим, что допустимое множество

$$\mathcal{D}_{\text{feas}} = \{(x_1 \ x_2)^\top : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

является единичным кругом с центром в начале координат.

Из (2.1.5) видно, что при  $\ell = 2$ ,  $n = 2$ , допустимая область может представлять собой любое выпуклое множество в  $\mathbb{R}^2$ , задаваемое кривыми второго порядка. Так например, допустимым множеством неравенства

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \preceq 0$$

является внутренность отрицательной ветви гиперболы  $x_1 x_2 = 1$ . ▼

Теперь сформулируем две основные проблемы теории линейных матричных неравенств, к которым будут сводиться задачи управления, рассматриваемые в книге.

**Определение 2.1.2.** Задача *разрешимости (допустимости)* заключается в отыскании некоторой точки  $x \in \mathcal{D}_{\text{feas}}$  или в доказательстве того, что такой точки не существует.

Типичным примером задачи допустимости является отыскание общей квадратичной функции Ляпунова для семейства линейных стационарных систем

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, \dots, k,$$

что сводится к проверке разрешимости конечного числа ЛМИ

$$A_i^T Q + Q A_i \preceq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

относительно матричной переменной  $Q \succ 0$ .

Отметим также, что иногда требуется не только проверять разрешимость системы ЛМИ, но и уметь описывать всё множество  $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ , как это было сделано в приведенных выше примерах. Однако в более общей ситуации (при больших размерностях матриц и вектора параметров) соображение, использующее уравнение (2.1.5) не приводит к результату.

Для описания допустимого множества можно предложить следующий общий подход. Рассмотрим замкнутое множество  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^\ell$  и две точки  $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ . Назовем *граничным оракулом* процедуру, которая вычисляет точки пересечения прямой  $x + \lambda y$  с границей множества или указывает на отсутствие таких пересечений. Для множеств, задаваемых ЛМИ-ограничениями, такой граничный оракул может быть выписан явно. Приведем основной результат в простейшей формулировке.

**Лемма 2.1.1.** Пусть  $G \prec 0$  и  $H = H^T$  — фиксированные матрицы. Минимальное и максимальное значения параметра  $\lambda \in \mathbb{R}$ , при которых сохраняется отрицательная (полу)определенность матрицы  $G + \lambda H$ , даются следующими выражениями:

$$\lambda_- = \begin{cases} \max_{\lambda_i < 0} \lambda_i, \\ -\infty, \end{cases} \quad \text{если все } \lambda_i > 0,$$

и

$$\lambda_+ = \begin{cases} \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i, \\ +\infty, \end{cases} \quad \text{если все } \lambda_i < 0,$$



где  $\lambda_i$  — обобщенные собственные значения пары матриц  $(G, -H)$ , то есть

$$Ge_i = -\lambda_i He_i.$$

Построим граничный оракул, используя Лемму 2.1.1. Пусть для простоты множество  $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ , определяемое линейным матричным неравенством

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i F_i \preceq 0,$$

непусто, известна допустимая точка  $x^0 \in \mathcal{D}_{\text{feas}}$ , и пусть  $x \in \mathbb{R}^{\ell}$  произвольно. Рассматривая

$$F(x^0 + \lambda x) = F(x^0) + \lambda(F(x) - F_0) \doteq G + \lambda H$$

и, применяя Лемму 2.1.1, находим точки на границе  $\mathcal{D}_{\text{feas}}$  в форме

$$\begin{aligned} x_- &= x^0 + \lambda_- x, \\ x_+ &= x^0 + \lambda_+ x. \end{aligned}$$

Варьируя вектор  $x$ , получаем описание границы допустимого множества.

Сходным образом в разделе 1.5.3 предлагалось строить множество достижимости для систем с  $L_{\infty}$ -ограниченными возмущениями с помощью опорных гиперплоскостей. Разумеется, как и при построении множества достижимости, метод на основе граничного оракула эффективен лишь при невысоких размерностях  $\ell$  вектора переменных  $x$ .

**Пример 2.1.3.** Рассмотрим простейший пример с  $\ell = 2$ ,  $n = 3$  и матрицами

$$\begin{aligned} F_0 &= -I, \\ F_1 &= \begin{pmatrix} -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ 0,6 & 0,1 & 0,8 \\ -0,2 & 0,8 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,8 & 0,4 \\ 0,8 & -0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,2 & -0,3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку  $F_0 \prec 0$ , то в качестве допустимой точки имеем

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть вектор  $x = (x_1 \ x_2)^{\top}$  пробегает единичную окружность; тогда, обозначая

$$G \doteq F_0, \quad H \doteq x_1 F_1 + x_2 F_2,$$

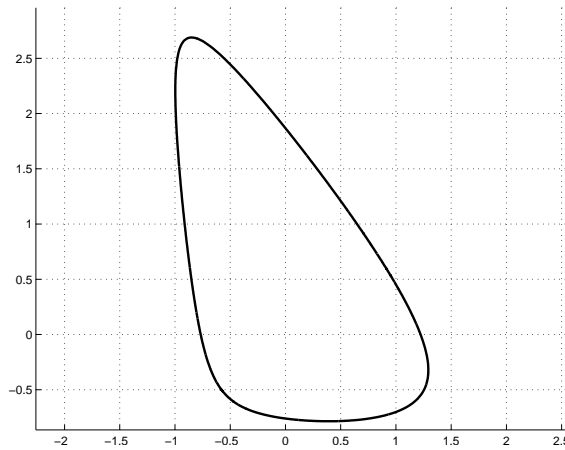


Рис. 2.1.1. Граница допустимого множества для ЛМИ из Примера 2.1.3.

и применяя Лемму 2.1.1, получаем описание допустимого множества, как показано на Рис. 2.1.1. ▼

Следующая важная задача ЛМИ-теории — оптимизация критерия на множестве, заданном линейными матричными неравенствами.

**Определение 2.1.3.** Задача минимизации линейной функции

$$c^\top x \longrightarrow \min$$

при ЛМИ-ограничениях

$$F_i(x) \preceq 0$$

называется задачей *полуопределенного программирования* (Semi-Definite Programming или SDP).

Очевидно, задача *максимизации* линейной функции  $c^\top x$  сводится к стандартной SDP заменой знака целевой функции.

**Замечание 2.1.3.** Правильнее было бы определить задачу SDP как отыскание не минимума, а *точной верхней грани* линейной целевой функции на допустимом множестве (ср. также с Замечанием 2.1.1). Действительно, при (даже и замкнутом) неограниченном  $D_{\text{feas}}$  оптимальное значение целевой функции может быть конечным, но при этом не достигаться в конечной точке. Например, ЛМИ из Примера 2.1.2

задает допустимое множество как внутренность гиперболы, и максимальное значение линейной функции  $g(x_1, x_2) = x_2$ , равное нулю, не достигается в конечной точке  $D_{\text{feas}}$ . Разумеется, такая ситуация возможна и для задач с матричными переменными, но, как правило, такие проблемы далее встречаться не будут. ▼

Ясно, что задача допустимости является частным случаем задачи полуопределенного программирования. В самом деле, рассмотрим линейное матричное неравенство

$$F(x) \preceq 0, \quad x \in \mathbb{R}^\ell. \quad (2.1.6)$$

Пусть  $\hat{\gamma}, \hat{x}$  — решение задачи SDP

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$F(x) \preceq \gamma I,$$

где минимизация проводится по переменным  $\gamma \in \mathbb{R}$  и  $x \in \mathbb{R}^\ell$ . Очевидно, что LMI (2.1.6) разрешимо тогда и только тогда, когда  $\hat{\gamma} \leq 0$ ; при этом  $\hat{x}$  является допустимой точкой.

Для задачи SDP можно использовать следующую запись:

$$\gamma \longrightarrow \min \quad \text{при} \quad F(x, \gamma) \preceq 0, \quad (2.1.7)$$

где функция  $F(x, \gamma)$  аффинна по совокупности переменных  $x, \gamma$ . Действительно, в задаче из Определения 2.1.3 введем дополнительную скалярную переменную  $\gamma$  и составим неравенство

$$c^\top x \leq \gamma.$$

Поскольку оно является линейным матричным неравенством со скалярными коэффициентами  $c_i$ , добавим его к исходному набору LMI-ограничений  $F(x) \preceq 0$ . Минимизация величины  $\gamma$  на множестве, задаваемом такой расширенной системой LMI, эквивалентна исходной задаче SDP.

Отсюда следует, что спецификой задачи SDP в сравнении с общей задачей минимизации *выпуклой* функции на *выпуклом* множестве является вид ограничений. Оказывается, что LMI-ограничения представляют весьма широкий класс выпуклых множеств. Как было показано выше, в этот класс входят множества, задаваемые линейными ограничениями (таким образом, задача линейного программирования может

формулироваться как SDP), выпуклыми квадратичными ограничениями (как в элементарном Примере 2.1.2), матричными ограничениями типа неравенства Ляпунова. В следующем разделе будет показано, что в терминах LMI можно формулировать ограничения на матричную норму, выпуклые квадратичные матричные неравенства, условия на взаимно-обратные матрицы, а также описывать широкие классы неопределенностей, присутствующих в системе управления.

Задача полуопределенного программирования является основным форматом, к которому будут сводиться все задачи управления, подавления возмущений, фильтрации и т. д., решаемые в последующих главах с применением инвариантных эллипсоидов и техники LMI. Сейчас не будем конкретизировать возможные типы целевой функции в задаче SDP, отложив это до следующего раздела, в котором будут введены различные способы описания эллипсоидов и приведены простейшие примеры эллипсоидальных задач, сводящихся к SDP.

Опишем теперь важный технический прием (ср. с альтернативной формой записи (2.1.7)), который позволяет упростить минимизируемую функцию в задаче полуопределенного программирования; в дальнейшем он будет часто использоваться.

**Лемма 2.1.2.** *Задача*

$$\operatorname{tr} L_1(P) \longrightarrow \min$$

*при ограничении*

$$L_2(P) \preceq 0,$$

где  $P = P^\top$  — матричная переменная, а  $L_1(P)$ ,  $L_2(P)$  — некоторые линейные функции, эквивалентна задаче SDP

$$\operatorname{tr} Z \longrightarrow \min \tag{2.1.8}$$

*при ограничениях*

$$L_2(P) \preceq 0, \quad L_1(P) \preceq Z, \tag{2.1.9}$$

где оптимизация проводится по матричным переменным  $P = P^\top$  и  $Z = Z^\top$ .

**Доказательство.** В силу монотонности следа матрицы имеем

$$\operatorname{tr} Z \geq \operatorname{tr} L_1(P).$$

Таким образом, решение задачи (2.1.8), (2.1.9) дает оценку сверху для решения исходной задачи.

С другой стороны, если  $\hat{P}$  — решение исходной задачи, то, полагая

$$Z = L_1(\hat{P}),$$

получаем  $\text{tr } Z = \text{tr } L_1(\hat{P})$ , и при этом второе неравенство в (2.1.9) выполнено. Таким образом,  $\hat{P}$ ,  $Z$  — решение задачи (2.1.8), (2.1.9). ■

**Замечание 2.1.4.** Нетрудно видеть, что полученный результат будет справедлив не только для функции следа, но и для любой монотонной функции  $\varphi(\cdot)$ , то есть такой, что

$$F \preceq G \implies \varphi(F) \leq \varphi(G),$$

например,  $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|$ . ▼

Для полноты картины кратко обсудим еще одну стандартную оптимизационную задачу теории линейных матричных неравенств, к решению которой, впрочем, почти не будем прибегать в дальнейшем. Это так называемая задача на *обобщенные собственные значения* (Generalized Eigenvalue Problem, GEVP), которая формулируется следующим образом:

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\gamma G(x) - F(x) \succeq 0,$$

$$G(x) \succeq 0, \quad H(x) \succeq 0,$$

где  $F(x)$ ,  $G(x)$ ,  $H(x)$  — аффинные симметричные матричнозначные функции векторной переменной  $x \in \mathbb{R}^\ell$ . Эквивалентная запись:

$$\lambda_{\max}(F(x), G(x)) \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$G(x) \succeq 0, \quad H(x) \succeq 0,$$

где через  $\lambda(F, G)$  обозначены обобщенные собственные значения пары матриц  $(F, G)$ .

Такая задача возникает при оптимизации обусловленности знакоопределенной матрицы, аффинно зависящей от переменных, в различных задачах, связанных с минимизацией нормы и др. Она встретится нам при отыскании радиуса квадратичной устойчивости матричных семейств.

Самая естественная и простая формулировка задачи GEVP относится к оценке скорости убывания нормы решения устойчивой системы  $\dot{x} = Ax$  (см. Лемму 1.2.4 и Теорему 1.2.1), а именно:

$$\gamma \longrightarrow \max \quad (2.1.10)$$

при ограничениях

$$A^\top Q + QA + 2\gamma Q \preceq 0, \quad (2.1.11)$$

где переменными являются матрица  $Q = Q^\top$  и скаляр  $\gamma$  (ср. с (2.1.4)).

Получаемая таким образом оценка точна, то есть если  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{Q}$  — решение задачи (2.1.10), (2.1.11), то  $\hat{\gamma} = \sigma$ , где  $\sigma$  — степень устойчивости системы (ср. с Замечанием 1.2.3).

Заметим, что ограничения в этой задаче не представлены линейными матричными неравенствами, и она не сводится к формату SDP. Более того, задача не является выпуклой; однако в иной (эквивалентной) записи она оказывается *квазивыпуклой* (множества уровня целевой функции выпуклы) и может быть эффективно решена.

## 2.2. Некоторые технические средства и типичные задачи

### 2.2.1. Лемма Шура и следствия из нее

В качестве одного из наиболее эффективных технических средств часто будет использоваться так называемая *лемма Шура*. Приведем ее в следующей формулировке.

**Лемма 2.2.1 (Лемма Шура).** Пусть

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

где  $M_{11} = M_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $M_{22} = M_{22}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Тогда

$$M \succ 0 \iff M_{22} \succ 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \succ 0.$$

**Доказательство.** Введем в рассмотрение вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},$$

разбиение которого соответствует разбиению матрицы  $M$ . Тогда

$$\begin{aligned} x^\top Mx &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \\ &= x_1^\top M_{11}x_1 + x_1^\top M_{12}x_2 + x_2^\top M_{12}^\top x_1 + x_2^\top M_{22}x_2 = \\ &= (M_{22}^{-1}M_{12}^\top x_1 + x_2)^\top M_{22}(M_{22}^{-1}M_{12}^\top x_1 + x_2) + \\ &\quad + x_1^\top (M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top)x_1. \end{aligned}$$

Таким образом, заключаем, что  $M \succ 0$  тогда и только тогда, когда  $M_{22} \succ 0$  и  $M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \succ 0$ . ■

Матрица  $M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top$  называется *дополнением по Шуру* к блоку  $M_{22}$  в матрице  $M$ .

Следующий результат представляет собой модификацию леммы Шура для *нестромого* матричного неравенства.

**Следствие 2.2.1.** Пусть

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

где  $M_{11} = M_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , а  $M_{22} = M_{22}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$  — невырожденная матрица.

Тогда

$$M \succcurlyeq 0 \iff M_{22} \succ 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \succcurlyeq 0.$$

**Замечание 2.2.1.** Лемма Шура справедлива в следующей “симметричной” формулировке:

$$M \succ 0 \iff M_{11} \succ 0, \quad M_{22} - M_{12}^\top M_{11}^{-1} M_{12} \succ 0,$$

которая оказывается в равной мере полезной. Ее доказательство совершенно аналогично доказательству Леммы 2.2.1. ▼

Из леммы Шура для нестрогих неравенств и свойств определенных матриц (см. Приложение А) вытекает следующее важное следствие, которое будет неоднократно использоваться.

**Следствие 2.2.2.** Пусть матрица

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

причем  $M_{22} \prec 0$ , а  $M_{12}$  — матрица максимального строчного ранга.  
Тогда

$$M_{11} \prec 0.$$

Основное применение леммы Шура — сведение нелинейных матричных неравенств к линейным, в частности, переход от обратных матриц к прямым. Приведем наиболее важные приемы, используемые в дальнейшем.

### Дискретное неравенство Ляпунова

Прежде всего обсудим упомянутую в разделе 1.2.1 эквивалентность двух форм записи дискретного неравенства Ляпунова:

$$A^\top Q A - Q \preceq 0$$

и

$$A P A^\top - P \preceq 0.$$

Каждое из них является линейным матричным неравенством относительно  $P \succ 0$  и  $Q \succ 0$ , соответственно; однако, используя лемму Шура, придадим им другую форму, из которой будет легко следовать их эквивалентность. С другой стороны, такая форма записи полезна при построении квадратичных функций Ляпунова для дискретных систем.

Умножив первое неравенство слева и справа на  $P = Q^{-1}$ , получим

$$P A^\top P^{-1} A P - P \preceq 0,$$

что по лемме Шура в “симметричной” формулировке (см. Замечание 2.2.1) с

$$M_{11} = M_{22} = P, \quad M_{12} = A P,$$

эквивалентно блочному матричному неравенству относительно  $P$ :

$$\begin{pmatrix} P & A P \\ P A^\top & P \end{pmatrix} \succ 0.$$

Вновь воспользовавшись леммой Шура, теперь уже в исходной формулировке, получим второе из обсуждаемых неравенств.

Последнее блочное матричное неравенство можно записать в эквивалентном виде через переменную  $Q$ :

$$\begin{pmatrix} Q & Q A \\ A^\top Q & Q \end{pmatrix} \succ 0,$$

например, с помощью домножения его слева и справа на блочно-диагональную матрицу  $\text{diag}\{Q \quad Q\}$ .



### Неравенство Риккати

Рассмотрим матричное неравенство Риккати

$$A^\top Q + QA - QBS^{-1}B^\top Q + R \succ 0, \quad S \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $Q \succ 0$ ; оно часто встречается в задачах оптимального управления и является квадратичным по  $Q$ . “Разворачивая” это матричное неравенство с помощью леммы Шура (иными словами, применяя ее в “обратную сторону”), приходим к эквивалентной записи в виде линейного матричного неравенства:

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + R & QB \\ B^\top Q & S \end{pmatrix} \succ 0,$$

откуда, в частности, следует, что множество решений неравенства Риккати выпукло (что совсем неочевидно!).

Вообще, пусть матричнозначные функции  $F_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, 2$ , аффинны по векторной переменной  $x \in \mathbb{R}^\ell$ , причем

$$F_{11}(x) = F_{11}^\top(x), \quad F_{22}(x) = F_{22}^\top(x),$$

и требуется удовлетворить неравенствам

$$F_{22}(x) \prec 0, \quad F_{11}(x) - F_{12}(x)F_{22}^{-1}(x)F_{12}^\top(x) \prec 0,$$

второе из которых, очевидно, нелинейно по  $x$ .

По лемме Шура получаем, что они эквивалентны одному линейному матричному неравенству

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{12}^\top(x) & F_{22}(x) \end{pmatrix} \prec 0.$$

Кроме того, поскольку ЛМН  $F(x) \prec 0$  выпукло, то и исходное неравенство оказывается выпуклым.

### Ограничение на норму

Пусть  $F(x)$  — аффинная матричная функция от векторной переменной  $x \in \mathbb{R}^\ell$  и имеется ограничение на ее спектральную норму:

$$\|F(x)\|_2 \leq 1.$$

Поскольку, по Лемме Б.3, последнее неравенство эквивалентно матричному неравенству

$$F^\top(x)F(x) \preceq I,$$

по лемме Шура получаем

$$\begin{pmatrix} I & F(x) \\ F^\top(x) & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

что является уже линейным матричным неравенством относительно  $x$ . В частности, ограничение  $|x| \leq 1$  на величину евклидовой нормы вектора  $x$  можно записать в линейном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & x^\top \\ x & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Приведенный пример имеет важные применения. Так, если переменными являются матрицы, то, рассматривая задачу минимизации максимального собственного значения матрицы  $P \succ 0$  (или, что то же самое, ее спектральной нормы) при некотором ЛМИ-ограничении  $L(P) \preceq 0$ , видим, что эта задача эквивалентна следующей задаче полуопределенного программирования:

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$P \preceq \gamma I, \quad P \succ 0, \quad L(P) \preceq 0,$$

с переменными  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Схожим образом, если требуется минимизировать величину

$$x_0^\top P^{-1} x_0$$

(иными словами, норму вектора  $P^{-1/2} x_0$ , где  $x_0$  фиксировано) на решениях линейного матричного неравенства  $L(P) \preceq 0$ , то вводя скалярную переменную  $\gamma$  из расчета

$$x_0^\top P^{-1} x_0 \leq \gamma, \tag{2.2.1}$$

видим, что по лемме Шура это неравенство представимо в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

относительно  $P = P^\top$  и  $\gamma$ . Таким образом, минимизация величины  $x_0^\top P^{-1} x_0$  эквивалентна задаче SDP вида

$$\gamma \longrightarrow \min \quad \text{при} \quad \begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0, \quad L(P) \preceq 0. \tag{2.2.2}$$

Заметим еще, что этой записи можно придать чуть более компактный вид, воспользовавшись леммой Шура в “симметричной” формулировке и записав блочное неравенство в виде

$$P - \frac{1}{\gamma} x_0 x_0^\top \succcurlyeq 0.$$

Теперь вводя новую скалярную переменную  $\lambda = 1/\gamma$ , приходим к задаче SDP

$$\lambda \longrightarrow \max \quad \text{при} \quad P \succcurlyeq \lambda x_0 x_0^\top, \quad P \succ 0, \quad L(P) \preccurlyeq 0.$$

### Оценка обратной матрицы

Пусть  $F(x)$  и  $G(x)$  — симметричные аффинные матричнозначные функции от  $x \in \mathbb{R}^\ell$  и имеется нелинейное ограничение

$$F(x) \preccurlyeq G^{-1}(x) \prec 0.$$

По лемме Шура немедленно получаем, что оно эквивалентно LMI

$$\begin{pmatrix} F(x) & I \\ I & G(x) \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

### Еще одна задача SDP

В дальнейшем будем часто использовать следующий прием, позволяющий свести минимизацию некоторой специальной нелинейной функции матричного аргумента при LMI-ограничениях к эквивалентной задаче полуопределенного программирования.

#### Лемма 2.2.2. Задача

$$\text{tr } Y P^{-1} Y^\top \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$L(P, Y) \preccurlyeq 0,$$

где  $P = P^\top$ ,  $Y$  — матричные переменные соответствующей размерности, а  $L(P, Y)$  — некоторая линейная функция, эквивалентна следующей задаче SDP:

$$\text{tr } Z \longrightarrow \min \tag{2.2.3}$$

при ограничениях

$$L(P, Y) \preccurlyeq 0, \quad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \tag{2.2.4}$$

где оптимизация проводится по матричным переменным  $P = P^\top$ ,  $Y$ ,  $Z = Z^\top$ .

**Доказательство.** Заметим, что аргумент  $YP^{-1}Y^\top$  целевой функции имеет структуру дополнения по Шуру к блоку  $Z$  в матрице

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix},$$

поэтому, вводя новую матричную переменную  $Z = Z^\top$  и требуя выполнения второго ограничения в (2.2.4), по лемме Шура имеем в силу монотонности следа матрицы:

$$\text{tr } Z \geq \text{tr } YP^{-1}Y^\top.$$

Таким образом, решение задачи (2.2.3), (2.2.4) даст оценку сверху для решения исходной задачи.

С другой стороны, если  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$  — решение исходной задачи, то, полагая  $Z = \hat{Y}\hat{P}^{-1}\hat{Y}^\top$ , получаем  $\text{tr } Z = \text{tr } \hat{Y}\hat{P}^{-1}\hat{Y}^\top$ , и при этом второе неравенство в (2.2.4) выполнено, то есть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $Z$  — решение задачи (2.2.3), (2.2.4). ■

Отметим, что этот результат остается справедливым, если вместо следа используется любая иная монотонная функция (ср. Замечание 2.1.4).

Из Леммы 2.2.2 вытекает важное следствие.

**Следствие 2.2.3.** *Задача*

$$\text{tr } P^{-1} \rightarrow \min$$

при ограничении

$$L(P) \preceq 0,$$

где  $P = P^\top$  — матричная переменная, а  $L(P)$  — некоторая линейная функция, эквивалентна задаче SDP

$$\text{tr } Z \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$L(P) \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} Z & I \\ I & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным  $P = P^\top$  и  $Z = Z^\top$ .

Наконец, отметим следующий результат.

**Лемма 2.2.3.** *Матричное неравенство*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C - \mu I \end{pmatrix} \prec 0 \quad (2.2.5)$$

выполняется при некотором значении скалярного параметра  $\mu$  тогда и только тогда, когда  $A \prec 0$ .

**Доказательство.** Необходимость условия  $A \prec 0$  непосредственно вытекает из леммы Шура; докажем достаточность.

В силу леммы Шура неравенство (2.2.5) эквивалентно

$$C - \mu I \prec B^\top A^{-1} B,$$

откуда

$$\mu I \succ C - B^\top A^{-1} B.$$

Последнее неравенство выполняется при

$$\mu > \lambda_{\max}(C - B^\top A^{-1} B);$$

в самом деле, имеем

$$\mu I \succ \lambda_{\max}(C - B^\top A^{-1} B) I \succ C - B^\top A^{-1} B$$

по свойству 10 знакоопределенных матриц (см. Приложение А). ■

Нетрудно видеть, что утверждение Леммы 2.2.3 останется справедливым в случае нестрогих неравенств в предположении невырожденности матрицы  $A$ .

### 2.2.2. Матричное описание эллипсоидов

Почти все рассматриваемые далее в книге задачи управления будут сводиться к отысканию минимального в некотором смысле эллипсоида, связанного с системой управления, то есть к “минимизации” его матрицы по тому или иному критерию. Такие оптимизационные задачи будут иметь формат SDP, в котором целевая функция представлена либо некоторой скалярной переменной — как это было показано на простых иллюстративных примерах в предыдущем параграфе, либо следом матрицы, либо логарифмом ее определителя — как будет показано ниже. Все критерии минимальности матрицы “эквивалентны”,

но по соображениям простоты реализации чаще всего будем использовать первые два критерия. В этом параграфе опишем различные способы задания эллипсоидов.

Прежде всего, эллипсоид можно описать как образ единичного шара при аффинном отображении:

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: x = Ry + x_c, y \in \mathbb{R}^m, |y| \leq 1\}, \quad (2.2.6)$$

где  $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$  — прямоугольная матрица, а  $x_c$  — центр эллипсоида (в дальнейшем почти всегда будем иметь дело с эллипсоидами, центр которых совпадает с началом координат). Отметим выпуклость данного представления по совокупности  $R$  и  $x_c$ .

В частности, если  $R$  — матрица максимального строчного ранга, представлению (2.2.6) можно придать вид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: (x - x_c)^\top P^{-1}(x - x_c) \leq 1\}, \quad P = RR^\top, \quad (2.2.7)$$

или

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: (x - x_c)^\top Q(x - x_c) \leq 1\}, \quad Q = P^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Две последние формы записи наиболее удобны с точки зрения построения квадратичных функций Ляпунова и далее будут рассматриваться в качестве основных. В дальнейшем матрицу  $P$  будем называть *матрицей эллипсоида* (2.2.7).

Отметим принципиальное различие форм (2.2.7) и (2.2.8) с точки зрения задач оптимизации. Представление (2.2.7) нелинейно по совокупности  $x_c$  и  $P$ , однако, оно может быть приведено к линейному с помощью леммы Шура:

$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n: \begin{pmatrix} 1 & (x - x_c)^\top \\ x - x_c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0\right\}. \quad (2.2.9)$$

Представление (2.2.8) также нелинейно по совокупности параметров  $Q$  и  $x_c$ , но избавиться от этой нелинейности не удастся.

**Замечание 2.2.2.** Можно рассматривать эллипсоиды в представлении (2.2.9) с неотрицательно определенной матрицей  $P$ . Множество, задаваемое таким образом, представляет собой эллипсоид меньшей размерности, лежащий в подпространстве, натянутом на собственные векторы матрицы  $P$ , отвечающие ненулевым собственным значениям.

Так, вспомним Теорему 1.5.2 о множестве достижимости дискретной системы. Не заботясь о строгой знакоопределенности матрицы  $W_k$ ,

определяемой соотношением (1.5.9), эллипсоид достижимости для конечных значений времени  $k$  можно записать как

$$\mathcal{R}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} 1 & x^\top \\ x & W_k \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \right\}.$$

Аналогично, эллипсоид вида (2.2.8) с неотрицательно определенной матрицей  $Q$  является вырожденным (неограниченным) — содержащим нуль-пространство (ядро) линейного преобразования, задаваемого матрицей  $Q$ . ▼

В зависимости от постановки задачи минимизации размера эллипсоида приходится использовать ту или иную форму записи. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 2.2.1.** Пусть задача заключается в нахождении эллипсоида с наименьшей *длиной большой полуоси* (иными словами, содержащегося в шаре наименьшего радиуса), содержащего заданные точки  $x_1, \dots, x_k$ .

Поскольку при представлении эллипсоида в виде (2.2.7) длина его большой полуоси равна  $\lambda_{\max}^{1/2}(P)$ , где  $\lambda_{\max}(P)$  — максимальное собственное значение матрицы  $P$ , то приходим к задаче SDP

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$P \preccurlyeq \gamma I, \\ \begin{pmatrix} 1 & (x_i - x_c)^\top \\ x_i - x_c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.2.10)$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , векторной переменной  $x_c \in \mathbb{R}^n$  и скалярной переменной  $\gamma$ . ▼

Поскольку  $\lambda_{\max}(P) = \|P\|_2$  для  $P \succ 0$ , то иногда будем говорить, что полученный эллипсоид минимален по *критерию нормы*.

Заметим еще, что при  $x_c = 0$  условиям (2.2.10) принадлежности точек  $x_i$  эллипсоиду с матрицей  $P$  можно придать вид

$$P \succcurlyeq x_i x_i^\top,$$

воспользовавшись леммой Шура в “симметричной” формулировке.

**Пример 2.2.2.** Размер эллипсоида можно также характеризовать величиной *суммы квадратов длин его полуосей*. Напомним, что при задании эллипсоида в виде (2.2.7) сумма квадратов длин его полуосей равна следу матрицы  $P$ , его определяющей. Минимизируя размер эллипсоида по этому критерию, приходим к задаче SDP

$$\text{tr } P \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} 1 & (x_i - x_c)^\top \\ x_i - x_c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и векторной переменной  $x_c \in \mathbb{R}^n$ .

Обратим внимание, что критерию следа эллипсоида можно придать иной содержательный смысл. Действительно, для проекции эллипсоида  $\mathcal{E}$  (2.2.7) (пусть для простоты  $x_c = 0$ ) на  $i$ -ю координатную ось нетрудно получить

$$|x_i| \leq a_i \doteq (e_i^\top P e_i)^{1/2} = P_{ii}^{1/2}, \quad (2.2.11)$$

где  $e_i$  — единичный вектор, а  $P_{ii}$  —  $i$ -й диагональный элемент матрицы  $P$ .

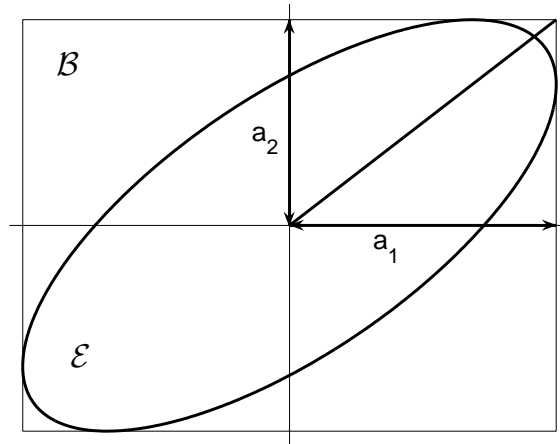


Рис. 2.2.1. Эллипс и объемлющий прямоугольник.



Рассмотрим прямоугольный параллелепипед  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  с центром в нуле и гранями, параллельными координатным осям. Тогда след матрицы  $P$ , равный сумме квадратов величин  $a_i$ , представляет собой квадрат длины половины большой диагонали самого “тесного” такого параллелепипеда, содержащего эллипсоид, см. Рис. 2.2.1. Заметим, что это утверждение справедливо и для любой другой ортогональной системы векторов  $e_i$ , задающих ориентацию параллелепипеда.

Из (2.2.11) следует, что замена целевой функции в приведенной выше задаче SDP на  $P_{ii} \rightarrow \min$  приводит к нахождению эллипсоида, содержащего заданные точки и имеющего минимальную проекцию на  $i$ -ю координатную ось. ▼

**Замечание 2.2.3.** При задании эллипсоида в форме (2.2.7) и минимизации его следа (или нормы) при некоторых LMI-ограничениях бывает естественно добавлять еще одно ограничение вида

$$P \succ \delta I$$

с некоторым малым  $\delta > 0$ . Это условие гарантирует, что получившийся эллипсоид содержит шар радиуса  $\delta^{1/2}$ . Величина  $\delta$ , таким образом, задает “степень невырожденности” эллипсоида, поскольку при этом минимальное собственное значение матрицы  $P$  (длина наименьшей полуоси соответствующего эллипсоида) оказывается не меньше, чем  $\delta^{1/2}$ . ▼

**Пример 2.2.3.** Теперь будем искать эллипсоид наименьшего объема, содержащий заданные точки  $x_1, \dots, x_k$ . Сначала рассмотрим случай, когда ищется эллипсоид с центром в начале координат, то есть при  $x_c = 0$ .

Заметим, что при представлении эллипсоида в виде (2.2.7) его объем равен  $c_n \sqrt{\det P}$ , где  $c_n$  — объем единичного шара в  $n$ -мерном пространстве. Как известно, функция

$$f(X) = -\log \det X$$

матричного аргумента  $X \succ 0$  является выпуклой. Поэтому воспользуемся описанием (2.2.8) и, с учетом  $Q = P^{-1}$ , придем к задаче выпуклой оптимизации<sup>1</sup>

$$-\log \det Q \longrightarrow \min$$

<sup>1</sup>Можно показать, что в других переменных такая задача имеет формат SDP, однако в матричном виде она формулируется более естественно.

при линейных ограничениях

$$x_i^\top Q x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, k, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Решение  $\hat{Q}$  такой задачи определяет матрицу

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$$

искомого эллипсоида с центром в начале координат.

В случае нефиксированного центра придется воспользоваться еще одним способом описания эллипсоида:

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Ex - d\| \leq 1\}, \quad (2.2.12)$$

где  $E$  — прямоугольная матрица,  $d$  — вектор, и векторная норма евклидова. Нетрудно видеть, что эллипсоид (2.2.7) представим в виде (2.2.12) при

$$E = P^{-1/2} \succ 0, \quad d = P^{-1/2} x_c.$$

В этом случае неравенство в (2.2.12) эквивалентно записывается как

$$(Ex - d)^\top (Ex - d) \leq 1,$$

и с помощью леммы Шура ему можно придать вид линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & (Ex - d)^\top \\ Ex - d & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Поскольку матрица искомого эллипсоида  $P = E^{-2}$ , то

$$\log \det P = \log \det E^{-2} = -2 \log \det E.$$

Таким образом, приходим к задаче выпуклой оптимизации

$$-\log \det E \longrightarrow \min$$

при линейных ограничениях

$$\begin{pmatrix} 1 & (Ex_i - d)^\top \\ Ex_i - d & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad E \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $E = E^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и векторной переменной  $d \in \mathbb{R}^n$ . Ее решение  $\hat{E}$ ,  $\hat{d}$  определяет матрицу

$$\hat{P} = \hat{E}^{-2}$$

и центр

$$\hat{x}_c = \hat{E}^{-1} \hat{d}$$

искомого эллипсоида (2.2.7), содержащего заданные точки  $x_1, \dots, x_k$  и минимального по критерию объема.

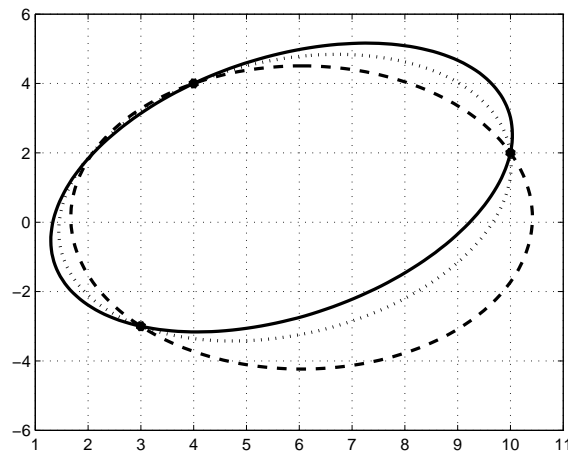


Рис. 2.2.2. Эллипсы, содержащие три заданные точки и минимальные по различным критериям.

На Рис. 2.2.2 построены эллипсы с нефиксированным центром, содержащие три заданные точки и минимальные по различным критериям. Пунктиром показан эллипс, минимальный по критерию нормы, точечной линией — по критерию следа, а сплошной линией — по критерию объема. ▼

Необходимость в подобных построениях возникает при минимизации размера эллипсоида, содержащего сумму или пересечение некоторых множеств (в том числе и эллипсоидов) или максимизации эллипсоида, содержащегося в некотором выпуклом множестве, например, в многограннике или пересечении эллипсоидов. Некоторые из этих задач допускают “точное” численное решение путем сведения к формату SDP; некоторые решаются аналитически. Одна из них — задача минимизации объема эллипсоида, содержащего “половину” заданного эллипсоида, отсеченного гиперплоскостью, проходящей через его центр; эта задача составляет основу известного метода эллипсоидов.

Наконец упомянем еще один способ матричного описания эллипсоидов — с помощью выпуклой квадратичной функции

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top A x + 2x^\top b + c \leq 0\}, \quad (2.2.13)$$

где

$$A \succ 0, \quad b^\top A^{-1} b - c > 0.$$

Это описание является однородным (можно одновременно умножить матрицу  $A$ , вектор  $b$  и число  $c$  на произвольное положительное число) и линейным по параметрам эллипсоида  $A$ ,  $b$  и  $c$ .

Несложно переходить и от одного представления к другому. В самом деле, эллипсоид (2.2.7) представим в виде (2.2.13) с

$$A = P^{-1}, \quad b = -P^{-1}x_c, \quad c = x_c^\top P^{-1}x_c - 1.$$

Обратно, эллипсоид (2.2.13) представим в виде (2.2.7) при

$$P = (b^\top A^{-1} b - c)A^{-1}, \quad x_c = -A^{-1}b.$$

В заключение раздела приведем точную формулировку хорошо известного факта о линейном образе эллипсоида.

**Лемма 2.2.4.** *Образом эллипсоида*

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

при линейном отображении  $z = Cx$ , где  $C$  — матрица максимального строчного ранга, является эллипсоид

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l : z^\top (CPC^\top)^{-1}z \leq 1\}.$$

**Доказательство.** Прежде всего, отметим, что при линейном отображении образом эллипсоида является эллипсоид. Далее, неравенство

$$x^\top P^{-1}x \leq 1, \quad P \succ 0,$$

по лемме Шура можно переписать в виде матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & x^\top \\ x & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Домножив его слева на матрицу  $\text{diag}\{1 \ C\}$  и справа на матрицу  $\text{diag}\{1 \ C^\top\}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & z^\top \\ z & CPC^\top \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Поскольку  $C$  — матрица максимального строчного ранга, то матрица  $CPC^T$  обратима. Поэтому по лемме Шура имеем

$$z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1,$$

то есть образ эллипсоида  $\mathcal{E}_x$  принадлежит эллипсоиду  $\mathcal{E}_z$ .

С другой стороны, нетрудно показать, что точки, попадающие на границу образа эллипсоида  $\mathcal{E}_x$ , принадлежат эллипсоиду  $\mathcal{E}_z$ . В самом деле, выберем произвольный вектор  $d \neq 0$  и рассмотрим задачу

$$\max_{x^T P^{-1} x \leq 1} (Cx, d).$$

Нетрудно видеть, что ее решением является

$$\hat{x} = PC^T \frac{d}{\|P^{1/2} C^T d\|} \in \mathcal{E}_x$$

и при этом для точки

$$\hat{z} = C\hat{x} = CPC^T \frac{d}{\|P^{1/2} C^T d\|}$$

имеем

$$\hat{z}^T (CPC^T)^{-1} \hat{z} = \frac{d^T CPC^T d}{\|P^{1/2} C^T d\|^2} = 1,$$

то есть  $\hat{z} \in \mathcal{E}_z$ . ■

В дальнейшем нам будет полезна полученная характеристика граничных точек образа эллипсоида.

**Замечание 2.2.4.** Условие полноты ранга матрицы  $C$  гарантирует невырожденность матрицы  $CPC^T$  и, как следствие, полномерность эллипсоида  $\mathcal{E}_z$ . ▼

Итак, приведены различные способы задания эллипсоидов и рассмотрены задачи их минимизации по различным критериям; все эти задачи имеют формат полуопределенного программирования и легко решаются численно. Видим, что в зависимости от критерия удобнее та или иная форма представления эллипсоида; в свою очередь, выбор критерия диктуется физической постановкой задачи. Еще раз отметим, что основной формой записи будет служить (2.2.7) при  $x_c = 0$ .

Как правило, будем использовать критерий следа; как увидим ниже, оптимизация по этому критерию приводит к единственному эллипсоиду, который к тому же минимален по вложенности среди всех эллипсоидов, чьи матрицы удовлетворяют линейным матричным ограничениям (также см. Следствие 1.2.3).

### 2.2.3. $S$ -процедура и следствия из нее

Приводимые ниже результаты, наряду с леммой Шура, представляет собой основное средство при доказательстве ряда утверждений как в текущей главе, так и в главах 3 и 4, где пойдет речь об инвариантных эллипсоидах.

**Теорема 2.2.1 ( $S$ -процедура).** Пусть даны однородные квадратичные формы

$$f_i(x) = x^\top A_i x, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i = A_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , и числа  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Если существуют числа  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , такие, что

$$A_0 \preceq \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad \alpha_0 \geq \sum_{i=1}^m \tau_i \alpha_i, \quad (2.2.14)$$

то неравенства

$$f_i(x) \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.2.15)$$

влекут неравенство

$$f_0(x) \leq \alpha_0. \quad (2.2.16)$$

Обратно, если из (2.2.15) следует (2.2.16) и выполняется любое из условий:

а)  $m = 1$ ;

б)  $m = 2$ ,  $n \geq 3$  и существуют числа  $\mu_1, \mu_2$  и вектор  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  такие, что

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 \succ 0, \quad f_1(x^0) < \alpha_1, \quad f_2(x^0) < \alpha_2, \quad (2.2.17)$$

то найдутся  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , такие, что выполняются соотношения (2.2.14).

Нетривиальной частью этого утверждения является, конечно, необходимость условия (2.2.14) при  $m = 1, 2$ . Можно показать, что при  $m > 2$  аналогичный результат не имеет места.

Вообще, говорят, что  $S$ -процедура *неущербна*<sup>1</sup>, если она предоставляет не только достаточные, но и необходимые условия. Таким образом,  $S$ -процедура неущербна при наличии одного ограничения, а для случая двух ограничений требуется дополнительно выполнение условий (2.2.17).

Приведем формулировку  $S$ -процедуры в случае строго неравенства.

<sup>1</sup>В западной литературе используется термин *lossless*.

**Теорема 2.2.2.** Пусть заданы однородные квадратичные формы

$$f_i(x) = x^\top A_i x, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i = A_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Если существуют числа  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , такие, что

$$A_0 \prec \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad (2.2.18)$$

то неравенства

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.2.19)$$

влекут неравенство

$$f_0(x) < 0 \quad (2.2.20)$$

для всех  $x \neq 0$ .

Обратно, если из (2.2.19) следует (2.2.20) и выполняется любое из условий:

а)  $m = 1$ ;

б)  $m = 2$ ,  $n \geq 3$  и существует вектор  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$f_1(x^0) < 0, \quad f_2(x^0) < 0,$$

то найдутся  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , такие, что выполняются соотношения (2.2.18).

**Замечание 2.2.5.** Утверждения Теоремы 2.2.1 и Теоремы 2.2.2 останутся справедливыми и в том случае, если одно или несколько неравенств в (2.2.15) (соответственно, в (2.2.19)) заменить на равенства; при этом будет отсутствовать требование неотрицательности соответствующих коэффициентов  $\tau_i$ . ▼

Отметим, что существуют формулировки  $S$ -процедуры и для неоднородных квадратичных форм

$$f_i(x) = x^\top A_i x + 2b_i^\top x + c_i.$$

Частным случаем  $S$ -процедуры является так называемая *лемма Финслера*, которую приведем в следующей формулировке.

**Лемма 2.2.5 (Финслер).** Пусть  $A_0, A_1 \in \mathbb{S}^{n \times n}$ . Условие

$$x^\top A_0 x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top A_1 x = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда найдется число  $\gamma$  такое, что

$$A_0 \succcurlyeq \gamma A_1.$$

**Замечание 2.2.6.** При  $A_1 \succcurlyeq 0$  можно уточнить, что  $\gamma < 0$ . ▼

На лемме Финслера, в частности, основан следующий полезный прием. Ниже придется часто иметь дело с неравенствами вида

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0, \quad (2.2.21)$$

относительно двух матриц  $Y$  и  $P$ . Оказывается, как вытекает из следующей леммы, из него можно исключить переменную  $Y$ .

**Лемма 2.2.6.** *Линейное матричное неравенство*

$$BY + Y^\top B^\top \preccurlyeq Q,$$

*разрешимо относительно матричной переменной  $Y$  тогда и только тогда, когда существует число  $\gamma < 0$  такое, что*

$$\gamma BB^\top \preccurlyeq Q.$$

*При этом можно положить*

$$Y = \frac{\gamma}{2} B^\top.$$

**Доказательство.** *Необходимость.* Поскольку квадратичная форма

$$x^\top (BY + Y^\top B^\top)x$$

обращается в нуль на подпространстве  $B^\top x = 0$ , то по лемме Финслера найдется число  $\gamma$  такое, что

$$BY + Y^\top B^\top \succcurlyeq \gamma BB^\top,$$

а поскольку  $BB^\top \succcurlyeq 0$ , то в силу Замечания 2.2.6 имеем  $\gamma < 0$ .

При этом

$$Q \succcurlyeq BY + Y^\top B^\top \succcurlyeq \gamma BB^\top.$$

*Достаточность.* Пусть нашлось число  $\gamma$  такое, что

$$\gamma BB^\top \preccurlyeq Q.$$

Тогда, положив  $Y = \frac{\gamma}{2} B^\top$ , имеем

$$BY + Y^\top B^\top = \gamma BB^\top \preccurlyeq Q. \quad \blacksquare$$



Применяя Лемму 2.2.6 к матричному неравенству (2.2.21) заключаем, что неравенство (2.2.21) разрешимо относительно матричных переменных  $P \succ 0$  и  $Y$  тогда и только тогда, когда матричное неравенство

$$AP + PA^\top + \gamma BB^\top \preceq 0 \quad (2.2.22)$$

разрешимо относительно матричной переменной  $P \succ 0$  и скалярной переменной  $\gamma < 0$ . С учетом однородности неравенства (2.2.22) по  $P$  и  $\gamma$  полагаем  $\gamma = -1$  и получаем следующий результат.

**Следствие 2.2.4.** *Матричное неравенство*

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \preceq 0$$

*разрешимо относительно матричных переменных  $P \succ 0$  и  $Y$  тогда и только тогда, когда матричное неравенство*

$$AP + PA^\top - BB^\top \preceq 0$$

*разрешимо относительно матричной переменной  $P \succ 0$ .*

**Замечание 2.2.7.** Завершим этот раздел важным примером применения  $S$ -процедуры. В дальнейшем нас часто будет интересовать вопрос о том, содержится ли один эллипсоид в другом. Ответ дается  $S$ -процедурой (с одним ограничением), из которой немедленно следует, что если эллипсоиды  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  заданы выражением (2.2.7) с матрицами  $P_1$  и  $P_2$ , то  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$  тогда и только тогда, когда  $P_1 \preceq P_2$  (неявно этот результат уже использован в Примере 2.2.1, где требовалось погрузить эллипсоид в шар; см. также Замечание 2.2.3, в котором, наоборот, шар погружается в эллипсоид). Если же пользоваться записью в форме (2.2.8), то вложенность  $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$  эквивалентна соотношению  $Q_1 \succcurlyeq Q_2$ . ▼

#### 2.2.4. Лемма Питерсена и ее обобщения

Еще одно яркое приложение методов LMI к теории систем и управлению лежит в сфере робастной устойчивости и стабилизации. Как уже говорилось, реальные системы неизбежно содержат неопределенности описания, и выше рассмотрены некоторые важнейшие модели неопределенности, типично используемые при описании систем в пространстве состояний. Среди них модель *структурированной матричной неопределенности* принята в качестве основной в этой книге по причинам, обсуждавшимся выше.

Предмет изучения в данном разделе — так называемая лемма Питерсена, которая является основным техническим средством работы с такими неопределенностями; она эффективно применяется во всех робастных постановках задач. Ниже увидим, что эта лемма является удобным инструментом анализа *робастной квадратичной устойчивости* систем со структурированной неопределенностью, позволяя отыскивать общую квадратичную функцию Ляпунова.

### Лемма Питерсена

Пусть  $G \in \mathbb{S}^{n \times n}$  — вещественная симметричная матрица; рассмотрим ее возмущение вида

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top, \quad (2.2.23)$$

где  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$  — возмущающая матрица, а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — постоянные “обрамляющие” матрицы соответствующих размерностей, задающие структуру неопределенности. Подчеркнем, что в этой схеме симметричное возмущение задается с помощью матрицы  $\Delta$ , которая не обязана быть симметричной и даже квадратной.

Вскоре будет показано, что такая симметризованная схема структурированной неопределенности естественным образом возникает в задачах, связанных с построением квадратичной функции Ляпунова для динамической системы, матрица которой содержит произвольную, но ограниченную по норме матричную неопределенность  $\Delta$ . Именно этим фактом прежде всего объясняется многообразие приложений, в которых встречается модель (2.2.23).

Мы хотим ответить на вопрос о том, при каких условиях возмущенная матрица (2.2.23) является знакоопределенной при всех ограниченных по норме возмущениях  $\Delta$ :

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preccurlyeq 0 \quad \text{при всех } \Delta: \|\Delta\| \leq 1.$$

Мы будем называть эти условия *леммой Питерсена*; приведем этот результат в следующей формулировке.

**Лемма 2.2.7 (Лемма Питерсена).** Пусть  $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — ненулевые матрицы. Неравенство

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preccurlyeq 0 \quad (2.2.24)$$

справедливо для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \quad (2.2.25)$$

**Доказательство.** Пусть

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preceq 0$$

для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$ . Это эквивалентно выполнению

$$x^\top Gx + 2x^\top M\Delta Nx \leq 0$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\|\Delta\| \leq 1$ . Положим  $x^\top M\Delta = y^\top$ ; тогда предыдущее условие запишется как

$$x^\top Gx + 2y^\top Nx \leq 0$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $y \in \mathbb{R}^q$  таких, что

$$y^\top y = x^\top M\Delta\Delta^\top M^\top x \leq x^\top MM^\top x.$$

Обозначая

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+q},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} G & N^\top \\ N & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -MM^\top & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

перепишем найденное условие в матричном виде:

$$z^\top A_0 z \leq 0 \quad \text{при} \quad z^\top A_1 z \leq 0.$$

Используя  $S$ -процедуру (Лемма 2.2.1) с одним ограничением, заключаем, что для выполнения полученного условия необходимо и достаточно существование  $\varepsilon \geq 0$  такого, что

$$A_0 \preceq \varepsilon A_1,$$

то есть

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad \blacksquare$$

В приведенном доказательстве существенно использование  $S$ -процедуры; это значительно упрощает вывод в части необходимости. Ниже *достаточность* условия (2.2.25) будет доказана отдельно.

Обратим внимание на то, что матричная неопределенность  $\Delta$  не предполагается фиксированной; единственное требование — ее ограниченность по норме. Таким образом, полученный результат и его модификации, приводимые ниже, справедливы в том числе и для нестационарной неопределенности  $\|\Delta(t)\| \leq 1$ . Равным образом это замечание относится и ко всем последующим применениям леммы Питерсена, изучаемым в книге: робастная квадратичная устойчивость и стабилизация, робастное оптимальное управление, робастное подавление

внешних возмущений и др., связанным с отысканием общей квадратичной функции Ляпунова.

С помощью  $S$ -процедуры (Теорема 2.2.2) аналогичным образом можно получить следующий вариант леммы Питерсена для случая *строгого* матричного неравенства.

**Лемма 2.2.8.** Пусть  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ . Неравенство

$$G + M\Delta N + N^T \Delta^T M^T \prec 0$$

справедливо для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^T & N^T \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0.$$

Итак, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности семейства (2.2.23) к задаче разрешимости линейного матричного неравенства относительно одной скалярной переменной  $\varepsilon$ . Такая форма будет нами неоднократно использоваться, значительно упрощая вычисления.

Приведем теперь некоторые полезные для дальнейшего изложения технические модификации и следствия из этой леммы.

Первое очевидное следствие относится к матричному неравенству противоположного знака; оно также может формулироваться и для строгого неравенства.

**Следствие 2.2.5.** Пусть  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — ненулевые матрицы. Неравенство

$$G + M\Delta N + N^T \Delta^T M^T \succcurlyeq 0$$

справедливо для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} G - \varepsilon MM^T & N^T \\ N & \varepsilon I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Второе следствие представляет удобные формы записи, когда неопределенность ограничена по норме некоторым (отличным от единицы) числом  $\gamma$ .

**Следствие 2.2.6.** Пусть  $\gamma > 0$ ,  $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — ненулевые матрицы. Следующие утверждения эквивалентны:

1) *Неравенство*

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preceq 0$$

*справедливо для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq \gamma$ ;*

2) *Существует число  $\varepsilon$  такое, что*

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & \gamma N^\top \\ \gamma N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0;$$

3) *Существует число  $\varepsilon$  такое, что*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma}G + \varepsilon MM^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0;$$

4) *Существует число  $\varepsilon$  такое, что*

$$\begin{pmatrix} G + \gamma^2 \varepsilon MM^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0;$$

5) *Существует число  $\varepsilon$  такое, что*

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & N^\top \\ N & -\frac{1}{\gamma^2} \varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

**Доказательство.** Действительно, запишем первое утверждение в виде

$$G + \gamma(M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top) \preceq 0$$

для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$ . Тогда, положив  $N \doteq \gamma N$  и применяя лемму Питерсена, получаем утверждение 2). Эквивалентность остальных форм записи доказывается аналогично. ■

Оказывается, Лемма Питерсена сохраняет свою силу и в том случае, когда возмущение  $\Delta$  ограничено во фробениусовой норме.

**Лемма 2.2.9.** Пусть  $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — ненулевые матрицы. Неравенство

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preceq 0$$

*справедливо для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\|_F \leq 1$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что*

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (2.2.26)$$

**Доказательство.** Условие

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta M^\top \preceq 0 \quad \text{при всех } \Delta: \|\Delta\|_F \leq 1 \quad (2.2.27)$$

эквивалентно выполнению

$$x^\top Gx + 2x^\top M\Delta Nx \leq 0$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и всех  $\Delta: \|\Delta\|_F \leq 1$ , или же

$$x^\top Gx \leq -2 \max_{\|\Delta\|_F \leq 1} x^\top M\Delta Nx \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

С учетом Леммы Е.1 имеем

$$\max_{\|\Delta\|_F \leq 1} x^\top M\Delta Nx = \max_{\|\Delta\| \leq 1} x^\top M\Delta Nx \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, условие (2.2.27) эквивалентно условию

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preceq 0 \quad \text{при всех } \Delta: \|\Delta\| \leq 1,$$

которое по лемме Питерсена эквивалентно существованию числа  $\varepsilon$  такого, что выполнено матричное неравенство (2.2.26). ■

Следующий полезный результат представляет собой обобщение достаточной части леммы Питерсена.

**Лемма 2.2.10.** Пусть  $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ . Тогда

$$M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preceq \varepsilon M M^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N$$

для любого  $\varepsilon > 0$  и всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$  или  $\|\Delta\|_F \leq 1$ .

**Доказательство.** Положив  $L = \begin{pmatrix} M^\top \\ N \end{pmatrix}$ , утверждение леммы запишем в виде

$$L^\top \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^\top & 0 \end{pmatrix} L \preceq L^\top \begin{pmatrix} \varepsilon I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} L,$$

или

$$L^\top \begin{pmatrix} \varepsilon I & -\Delta \\ -\Delta^\top & \frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} L \succeq 0.$$

Остается заметить, что по лемме Шура матрица

$$\begin{pmatrix} \varepsilon I & -\Delta \\ -\Delta^\top & \frac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена при  $\Delta^\top \Delta \preceq I$ , то есть при  $\|\Delta\| \leq 1$ .

Второе утверждение леммы вытекает из того, что  $\|\Delta\| \leq \|\Delta\|_F$ . ■

**Следствие 2.2.7.** Пусть  $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ . Тогда

$$M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preceq \gamma \left( \varepsilon M M^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N \right)$$

для любого  $\varepsilon > 0$  и всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq \gamma$  или  $\|\Delta\|_F \leq \gamma$ .

Наконец приведем без доказательства обобщение леммы Питерсена, в котором матричная неопределенность входит дробно-линейным образом. Эта формулировка имеет прямое отношение к системам в  $(M, \Delta)$ -конфигурации, записанным в форме дробно-линейного преобразования (см. раздел 1.6.1). Аналогично лемме Питерсена, применяемой в случае структурированной неопределенности, приводимый ниже результат является удобным средством анализа квадратичной робастной устойчивости систем с неопределенностью в виде  $(M, \Delta)$ -конфигурации.

**Лемма 2.2.11.** Пусть  $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ , а  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$  ненулевые матрицы. Условия  $\det(I - R\Delta) \neq 0$  и

$$G + M\Delta(I - R\Delta)^{-1}N + N^\top ((I - R\Delta)^{-1})^\top \Delta^\top M^\top \preceq 0$$

выполнены для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$  тогда и только тогда, когда  $\|R\| < 1$  и справедливо линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon M M^\top & N^\top + \varepsilon M R^\top \\ N + \varepsilon R M^\top & -\varepsilon(I - R R^\top) \end{pmatrix} \preceq 0$$

относительно скалярной переменной  $\varepsilon$ .

Заметим, что при  $R = 0$  приходим к стандартной схеме Питерсена.

Как и в случае леммы Питерсена, существует следующий аналог Леммы 2.2.11 для случая строгих матричных неравенств.

**Лемма 2.2.12.** Пусть  $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ . Условия  $\det(I - R\Delta) \neq 0$  и

$$G + M\Delta(I - R\Delta)^{-1}N + N^\top((I - R\Delta)^{-1})^\top \Delta^\top M^\top \prec 0$$

выполнены для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :  $\|\Delta\| \leq 1$  тогда и только тогда, когда  $\|R\| < 1$  и справедливо линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & N^\top + \varepsilon MR^\top \\ N + \varepsilon RM^\top & -\varepsilon(I - RR^\top) \end{pmatrix} \prec 0$$

относительно скалярной переменной  $\varepsilon$ .

### Радиусы знакоопределенности и невырожденности

Лемма Питерсена решает задачу анализа, предоставляя необходимое и достаточное условие робастной знакоопределенности семейства (2.2.23) при фиксированном уровне возмущения  $\Delta$ . Естественным обобщением этого результата является отыскание максимально допустимого уровня, сохраняющего знакоопределенность семейства

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top, \quad \|\Delta\| \leq \gamma. \quad (2.2.28)$$

Предполагая далее, что  $G \prec 0$ , введем в рассмотрение *радиус знакоопределенности* (робастности) семейства (2.2.28):

$$\gamma_{\max} = \sup\{\gamma: G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \prec 0 \text{ для всех } \|\Delta\| \leq \gamma\}.$$

Воспользовавшись формой 2) из Следствия 2.2.6, и принимая во внимание Замечание 2.1.1, немедленно получаем

**Теорема 2.2.3.** Пусть  $\hat{\gamma}$  – решение задачи SDP

$$\gamma \longrightarrow \max$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & \gamma N^\top \\ \gamma N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0$$

относительно скалярных переменных  $\varepsilon$  и  $\gamma$ .

Тогда радиус знакоопределенности семейства (2.2.28) равен  $\hat{\gamma}$ .

Таким образом, нахождение радиуса знакоопределенности сводится к простой задаче полуопределенного программирования.

Приведем еще один близкий результат о *радиусе невырожденности* семейства (2.2.28), когда матрица  $G$  симметрична, но не знакоопределена.



**Теорема 2.2.4.** Пусть матрица  $G \in \mathbb{S}^{n \times n}$  и невырождена; тогда радиус невырожденности

$$\rho(G, M, N) = \sup\{\|\Delta\| : G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \text{ невырождена}\}$$

равен

$$\rho(G, M, N) = \max_{\varepsilon > 0} \min_i |\lambda_i(\varepsilon)|,$$

где  $\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i(G, -(\varepsilon MM^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N))$  — обобщенные собственные значения пары матриц  $G$  и  $-(\varepsilon MM^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N)$ .

Для специального случая, когда обрамляющие матрицы в (2.2.24) отсутствуют, то есть  $M = N = I$ , а возмущение  $\Delta$  предполагается симметричной матрицей, *симметрический* радиус невырожденности определяется согласно Лемме 1.6.2. Таким образом, Теорема 2.2.4 обобщает этот результат на более общую схему неопределенности (2.2.24). В самом деле, при  $M = N = I$  получаем  $G + (\Delta + \Delta^\top)/2$ , и, обозначая  $\Delta_1 = (\Delta + \Delta^\top)/2 \in \mathbb{S}^{n \times n}$ , оказываемся в условиях Леммы 1.6.2; при этом  $\rho(G) = 2\rho(G, I, I)$ .

### Лемма Питерсена для нескольких неопределенностей

Проведем анализ леммы Питерсена в случае нескольких неопределенностей. Будем рассматривать в схеме Питерсена  $\ell > 1$  независимых возмущений  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p_i \times q_i}$ ; при этом матрицы  $M_i, N_i$  имеют размерности  $n \times p_i$  и  $q_i \times n$  соответственно. Задача заключается в проверке условия

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} (M_i \Delta_i N_i + N_i^\top \Delta_i^\top M_i^\top) \preceq 0$$

при всех  $\Delta_i: \|\Delta_i\| \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (2.2.29)$

для заданного уровня  $\gamma$  и нахождении радиуса робастности  $\gamma_{\max}$  — максимального значения  $\gamma$ , при котором условие (2.2.29) остается справедливым. Ясно, что размах  $\gamma$  можно считать общим для всех  $\Delta_i$ , вводя скалярный масштабный множитель в матрицы  $M_i$  (или  $N_i$ ).

В случае нескольких неопределенностей лемма Питерсена оказывается верной лишь в части достаточности. Обобщение Леммы 2.2.10 на случай нескольких неопределенностей представлено следующей леммой.

**Лемма 2.2.13.** Пусть  $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_i \in \mathbb{R}^{n \times p_i}$ ,  $N_i \in \mathbb{R}^{q_i \times n}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ . Если существуют числа  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$  такие, что

$$\begin{pmatrix} G + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i M_i M_i^\top & N_1^\top & \cdots & N_\ell^\top \\ * & -\varepsilon_1 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & -\varepsilon_\ell I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

то матричное неравенство

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} (M_i \Delta_i N_i + N_i^\top \Delta_i^\top M_i^\top) \preceq 0$$

выполняется для всех  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p_i \times q_i}$ , где  $\|\Delta_i\| \leq 1$  или  $\|\Delta_i\|_F \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ .

**Доказательство.** Применяя Лемму 2.2.10 к величинам  $M_i$ ,  $\Delta_i$ ,  $N_i$  и  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , имеем

$$M_i \Delta_i N_i + N_i^\top \Delta_i^\top M_i^\top \preceq \varepsilon_i M_i M_i^\top + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^\top N_i, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Складывая полученные матричные неравенства, получаем

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} (M_i \Delta_i N_i + N_i^\top \Delta_i^\top M_i^\top) \preceq G + \sum_{i=1}^{\ell} (\varepsilon_i M_i M_i^\top + \frac{1}{\varepsilon_i} N_i^\top N_i),$$

причем правая часть полученного неравенства неположительно знакоопределена по условию леммы. ■

Следующий результат относится к оценке радиуса знакоопределенности семейства

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} (M_i \Delta_i N_i + N_i^\top \Delta_i^\top M_i^\top), \quad \|\Delta_i\| \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

**Теорема 2.2.5.** Если существуют числа  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$  такие, что

$$\begin{pmatrix} G + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i M_i M_i^\top & \gamma N_1^\top & \cdots & \gamma N_\ell^\top \\ * & -\varepsilon_1 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & -\varepsilon_\ell I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (2.2.30)$$

то матричное неравенство

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} (M_i \Delta_i N_i + N_i^{\top} \Delta_i^{\top} M_i^{\top}) \preceq 0$$

справедливо для всех  $\Delta_i$ :  $\|\Delta_i\| \leq \gamma$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ .

При этом максимальное значение  $\gamma$ , при котором условие (2.2.30) выполнено при некоторых  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell}$ , равно  $\gamma_{\text{est}}$ , где  $\gamma_{\text{est}}$  — решение задачи SDP

$$\gamma \longrightarrow \max \quad (2.2.31)$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} G + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i M_i M_i^{\top} & \gamma N_1^{\top} & \cdots & \gamma N_{\ell}^{\top} \\ * & -\varepsilon_1 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & -\varepsilon_{\ell} I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (2.2.32)$$

относительно скалярных переменных  $\gamma, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell}$ .

**Доказательство.** Первое утверждение теоремы вытекает из Леммы 2.2.13, а вычисление величины  $\gamma_{\text{est}}$  сводится к задаче SDP (2.2.31), (2.2.32) аналогично доказательству Теоремы 2.2.3. ■

Как и в случае одной неопределенности, имеются три другие эквивалентные формы записи матричного неравенства (2.2.32) (см. Следствие 2.2.6):

$$\begin{pmatrix} G + \gamma^2 \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i M_i M_i^{\top} & N_1^{\top} & \cdots & N_{\ell}^{\top} \\ * & -\varepsilon_1 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & -\varepsilon_{\ell} I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} G + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i M_i M_i^{\top} & N_1^{\top} & \cdots & N_{\ell}^{\top} \\ * & -\varepsilon_1 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & -\varepsilon_{\ell} I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} G + \sum_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i M_i M_i^{\top} & N_1^{\top} & \cdots & N_{\ell}^{\top} \\ * & -\frac{1}{\gamma^2} \varepsilon_1 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & -\frac{1}{\gamma^2} \varepsilon_{\ell} I \end{pmatrix} \not\prec 0.$$

Теорема 2.2.5 дает простой способ вычисления нижней оценки  $\gamma_{\text{est}}$  для радиуса робастности  $\gamma_{\text{max}}$  в случае нескольких неопределенностей — сведением к задаче полуопределенного программирования.

В некоторых частных случаях, например, когда на возмущения наложены более жесткие ограничения, лемма Питерсена дает также и *необходимые* условия робастной знакоопределенности; в этих случаях оценка радиуса робастности точна. В частности, имеет место следующий результат.

**Лемма 2.2.14.** Пусть  $G = G^{\top} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_i \in \mathbb{R}^{n \times p_i}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , а  $N_1 = \dots = N_{\ell} = N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ . Тогда неравенство

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} (M_i \Delta_i N_i + N_i^{\top} \Delta_i^{\top} M_i^{\top}) \preccurlyeq 0$$

справедливо для всех  $\Delta_i \in \mathbb{R}^{p_i \times q}$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , таких, что

$$\left\| \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{\ell} \end{pmatrix} \right\| \leq 1,$$

тогда и только тогда, когда найдется число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon \sum_{i=1}^{\ell} M_i M_i^{\top} & N^{\top} \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

**Доказательство.** Имеем:

$$G + \sum_{i=1}^{\ell} (M_i \Delta_i N_i + N_i^{\top} \Delta_i^{\top} M_i^{\top}) =$$

$$= G + (M_1 \ \cdots \ M_\ell) \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_\ell \end{pmatrix} N + N^\top \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_\ell \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} M_1^\top \\ \vdots \\ M_\ell^\top \end{pmatrix}.$$

Обозначая

$$\widehat{M} = (M_1 \ \cdots \ M_\ell),$$

приходим к обычной схеме Питерсена  $G + \widehat{M}\Delta N + N^\top \Delta^\top \widehat{M}^\top$ . Воспользовавшись леммой Питерсена, получаем искомое утверждение. ■

Очевидно, аналогичное утверждение справедливо и для случая, когда

$$M_1 = \cdots = M_\ell = M.$$

В этом разделе рассмотрено удобное средство, с помощью которого условия робастной знакоопределенности матриц могут формулироваться в виде линейных матричных неравенств простой структуры. Приведенные модификации основного результата будут систематически использоваться далее при изучении робастных версий задач о подавлении внешних возмущений. В простейших формулировках лемма Питерсена будет применяться уже в следующем разделе, где встанет проблема робастной квадратичной устойчивости и стабилизации.

## 2.3. Робастная квадратичная устойчивость

В разделе 1.6 были обсуждены основные типы неопределенности, которые будут рассматриваться в последующих главах книги. Ставился вопрос о робастной устойчивости матричных семейств; было показано, что, как правило, проверка этого свойства сопряжена с большими (часто непреодолимыми) трудностями.

Теперь, будучи вооруженными аппаратом линейных матричных неравенств, обсудим легко проверяемое достаточное условие устойчивости, которым будем систематически пользоваться в дальнейшем. Таким условием является наличие общей квадратичной функции Ляпунова семейства, и в этом случае семейство называется *квадратично устойчивым*. Приводимые ниже результаты относятся к трем основным типам неопределенности, введенным в разделе 1.6, однако здесь уже не предполагается, что они фиксированы во времени (см. Замечание 1.2.1).

### 2.3.1. Параметрическая неопределенность

Обратимся к рассмотренному выше параметрическому семейству матриц  $\mathbb{R}^{n \times n}$  вида

$$A = A(q), \quad q \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^\ell,$$

и потребуем, чтобы у этого семейства была *общая квадратичная функция Ляпунова*

$$V(x) = x^\top Q x, \quad Q \succ 0.$$

Мы знаем (см. раздел 1.2.1), что существование решения  $Q \succ 0$  линейного матричного неравенства

$$\widehat{A}^\top Q + Q \widehat{A} \prec 0$$

эквивалентно устойчивости матрицы  $\widehat{A}$ . Тем самым, существование решения системы ЛМИ

$$A^\top(q)Q + QA(q) \prec 0, \quad Q \succ 0, \quad q \in \mathcal{Q}, \quad (2.3.1)$$

гарантирует робастную устойчивость матричного семейства  $A(q)$ . Этот прием, использующий отыскание общей квадратичной функции Ляпунова для семейства, является систематической основой решения задач робастности в последующих главах.

Если  $A(q)$  — семейство интервальных матриц (1.6.9) или аффинное семейство

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} q_i A_i, \quad |q_i| \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (2.3.2)$$

неравенства (2.3.1) достаточно решить лишь для вершин  $q^v$  множества  $\mathcal{Q}$ : поскольку любая точка  $q \in \mathcal{Q}$  представляется как выпуклая комбинация вершин, то из выполнения (2.3.1) для вершин будет следовать, что система неравенств (2.3.1) удовлетворяется (с данной матрицей  $Q$ ) и для любого  $q \in \mathcal{Q}$ .

Итак, задача свелась к разрешимости конечного числа матричных неравенств

$$A^\top(q^v)Q + QA(q^v) \prec 0, \quad Q \succ 0, \quad q^v \in \mathcal{V}, \quad (2.3.3)$$

где  $\mathcal{V}$  — все вершины множества  $\mathcal{Q}$ , а  $A(q^v)$  — вершинные матрицы, см. раздел 1.6.1.

Более того, в этом случае можно вычислить *радиус квадратичной устойчивости* семейства (2.3.2) — максимальный размах неопределенности, при котором у семейства имеется общая квадратичная функция Ляпунова:

$$\gamma_{\max}^q \doteq \sup\{\gamma: A^\top(q)Q + QA(q) \prec 0 \\ \text{с некоторой } Q \succ 0 \text{ при всех } |q_i| \leq \gamma\}$$

Действительно, записывая (2.3.3) в виде

$$(A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma q_i^v A_i)^\top Q + Q(A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma q_i^v A_i) \prec 0, \quad v \in \mathcal{V},$$

где  $q^v$ ,  $v = 1, \dots, 2^\ell$  — вершины единичного куба, после очевидных преобразований получаем

$$-\frac{1}{\gamma}(A_0^\top Q + QA_0) - \sum_{i=1}^{\ell} q_i^v (A_i^\top Q + QA_i) \succ 0, \quad v \in \mathcal{V}.$$

Обозначим теперь

$$\lambda \doteq \frac{1}{\gamma}, \\ F^0 \doteq -(A_0^\top Q + QA_0), \\ F^v \doteq \sum_{i=1}^{\ell} q_i^v (A_i^\top Q + QA_i), \quad v \in \mathcal{V},$$

и введем диагональные матрицы

$$G = \text{diag}\{\underbrace{F^0 \quad \dots \quad F^0}_{2^\ell}\}, \quad F = \text{diag}\{F^1 \quad \dots \quad F^{2^\ell}\}.$$

Тогда отыскание радиуса квадратичной устойчивости сводится к задаче на *обобщенные собственные значения* (см. конец раздела 2.1):

$$\lambda \longrightarrow \sup$$

при ограничениях

$$\lambda G - F \succ 0, \quad Q \succ 0;$$

ее решение  $\widehat{\lambda}$  дает величину квадратичного радиуса устойчивости:

$$\gamma_{\max}^q = 1/\widehat{\lambda}$$

(см. Замечание 2.1.1).

В то же время, нужно ясно понимать, что получен лишь достаточный критерий робастной устойчивости. Если система линейных матричных неравенств (2.3.1) не имеет решения, то это вовсе не значит, что робастная устойчивость нарушена — могут существовать робастно устойчивые семейства, для которых нет общей квадратичной функции Ляпунова.

Приведем очень простой пример, показывающий, что такая картина может наблюдаться даже для случая двух устойчивых систем, то есть когда множество  $\mathcal{Q}$  состоит из двух элементов.

**Пример 2.3.1.** Найдем такие устойчивые матрицы  $A_1, A_2$ , что их выпуклая комбинация

$$A(q) = qA_1 + (1 - q)A_2, \quad 0 \leq q \leq 1,$$

неустойчива при некотором  $0 < q < 1$ . В качестве таких матриц можно взять, например

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

которые, очевидно, устойчивы, но  $A(q)$  имеет нулевое собственное значение при  $q^* = 0,5$ , то есть неустойчива. Понятно, что у пары матриц  $A_1, A_2$  не может быть общей квадратичной функции Ляпунова  $P$ , в противном случае она же являлась бы функцией Ляпунова для их выпуклой комбинации  $A(q)$  при всех  $0 \leq q \leq 1$ , что гарантировало бы устойчивость матрицы  $A(q^*)$ . Отсутствие общей функции Ляпунова объясняется тем, что область устойчивости в пространстве параметров (элементов матрицы) невыпукла, в то время как квадратичная устойчивость — выпуклое свойство. ▼

Таким образом, существование общей квадратичной функции Ляпунова для семейства систем — довольно ограничительное требование. Более гибким является подход, основанный на построении *параметрических функций Ляпунова*. Так, например, для аффинного семейства  $A(q)$  вида (1.6.11) можно пытаться искать функцию Ляпунова с матрицей, которая также аффинно зависит от неизвестных параметров:

$$P(q) = P_0 + \sum_{i=1}^{\ell} q_i P_i,$$



где симметричные матрицы  $P_i$  определяются через неравенства Ляпунова для угловых матриц семейства  $A(q)$  и схожие неравенства для матриц  $A_i$ . Существование параметрической функции Ляпунова также является лишь достаточным для робастной устойчивости семейства, но этот подход гораздо менее консервативен.

В дискретном времени робастная квадратичная устойчивость анализируется совершенно аналогично: в этом случае вместо (2.3.1) требуется проверять наличие общего решения системы дискретных неравенств Ляпунова

$$A^\top(q)QA(q) - Q \prec 0, \quad Q \succ 0, \quad q \in \mathcal{Q}.$$

Отыскание радиуса квадратичной устойчивости также сводится к соответствующей задаче GEVP.

### 2.3.2. Структурированная неопределенность

Рассмотрим матричное семейство со структурированной неопределенностью вида

$$A(\Delta) = A + F\Delta H, \quad (2.3.4)$$

где номинальная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  устойчива,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , а возмущение  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$  (возможно, зависящее от времени) ограничено по норме:

$$\|\Delta\| \leq \gamma,$$

и вспомним, как непросто решалась задача об отыскании вещественного радиуса устойчивости в разделе 1.6.2. Встанем на позиции квадратичной устойчивости и покажем, что построение общей функции Ляпунова и в этом случае сводится к решению линейных матричных неравенств, значительно упрощая вычисления. Рассмотрим сперва задачу проверки квадратичной устойчивости при  $\|\Delta\| \leq 1$ .

Действительно, выполнение неравенства Ляпунова

$$(A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top \prec 0,$$

то есть

$$AP + PA^\top + F\Delta HP + PH^\top \Delta^\top F^\top \prec 0$$

с некоторой матрицей  $P \succ 0$  при всех допустимых неопределенностях означает, что у семейства (2.3.4) есть общая квадратичная функция Ляпунова  $V(x) = x^\top P^{-1}x$ . Теперь остается воспользоваться леммой Питерсена (в форме Леммы 2.2.8) с

$$G = AP + PA^\top, \quad M = F, \quad N = HP,$$

и записать последнее матричное неравенство в виде эквивалентного ему ЛМИ относительно скалярной переменной  $\varepsilon$  и матричной переменной  $P \succ 0$ :

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \varepsilon FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (2.3.5)$$

Если это ЛМИ разрешимо, семейство (2.3.4) робастно квадратично устойчиво, и наоборот.

Заметим, что неравенство (2.3.5) однородно по  $P$  и  $\varepsilon$ , то есть можно положить  $\varepsilon = 1$ . Приходим к следующему результату.

**Теорема 2.3.1.** *Разрешимость линейных матричных неравенств*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричной переменной  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  эквивалентно квадратичной устойчивости семейства (2.3.4) при всех  $\|\Delta\| \leq 1$ , причем решение  $\hat{P}$  определяет общую квадратичную функцию Ляпунова.*

Теперь нетрудно вычислить *радиус квадратичной устойчивости* семейства (2.3.4):

$$\gamma_{\max} \doteq \sup \{ \gamma : (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top \prec 0 \\ \text{при некотором } P \succ 0 \text{ и всех } \|\Delta\| \leq \gamma \}, \quad (2.3.6)$$

то есть максимальный размах  $\gamma_{\max}$  неопределенности  $\Delta$ , такой, что при всех  $\gamma < \gamma_{\max}$  у семейства имеется общая квадратичная функция Ляпунова.

Итак, пусть  $\|\Delta\| \leq \gamma$ ; потребуем выполнения

$$AP + PA^\top + \gamma(F\Delta HP + PH^\top \Delta^\top F^\top) \prec 0$$

при некоторой матрице  $P \succ 0$  и всех неопределенностях  $\|\Delta\| \leq 1$ . Пользуясь леммой Питерсена (в форме Леммы 2.2.8) с

$$G = AP + PA^\top, \quad M = \gamma F, \quad N = HP,$$

и принимая во внимание однородность неравенства (2.3.5), получаем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \gamma^2 FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0.$$

С учетом Замечания 2.1.1 приходим к следующей теореме.

**Теорема 2.3.2.** Пусть  $\hat{\gamma}$  — решение задачи SDP

$$\gamma \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \gamma FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\gamma$ . Тогда радиус квадратичной устойчивости семейства (2.3.4) равен  $\sqrt{\hat{\gamma}}$ .

**Замечание 2.3.1.** Теорема 2.3.2 утверждает, что величина  $\hat{\gamma}$  равна радиусу квадратичной устойчивости (2.3.6). При этом в силу нестрогости LMI-ограничения, соответствующая матрица  $\hat{P}$ , вообще говоря, не определяет общей квадратичной функции Ляпунова.

Однако, как следует из определения радиуса квадратичной устойчивости, для любого  $\tilde{\gamma} < \hat{\gamma}$ , сколь угодно близкого к  $\hat{\gamma}$ , найдется  $P \succ 0$  такое, что выполнено *строгое* LMI-условие.

При этом общей квадратичной функции семейства (2.3.4) при всех  $\|\Delta\| \leq \tilde{\gamma}$  будет отвечать решение  $\hat{P}$  задачи SDP

$$\varepsilon \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \varepsilon I + \tilde{\gamma}^2 FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\varepsilon$ .

В дальнейшем, при выводе сходных результатов (Теоремы 2.3.4 и 2.4.6) не будем останавливаться на строгом обосновании использования нестрогих ограничений. ▼

Рассмотрим теперь ту же задачу, но для систем дискретного времени. Потребуем, чтобы у дискретной системы

$$x_{k+1} = (A + F\Delta H)x_k \tag{2.3.7}$$

с шуровской матрицей  $A$  и  $\|\Delta\| \leq 1$  была общая функция Ляпунова  $V(x) = x^\top P^{-1}x$ , то есть чтобы неравенство

$$(A + F\Delta H)P(A + F\Delta H)^\top - P \prec 0, \quad P \succ 0,$$

выполнялось при всех допустимых  $\Delta$ . По лемме Шура это записывается как

$$\begin{pmatrix} P & (A + F\Delta H)P \\ P(A + F\Delta H)^\top & P \end{pmatrix} \succ 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} P & AP \\ PA^\top & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & F\Delta HP \\ PH^\top \Delta^\top F^\top & 0 \end{pmatrix} \succ 0,$$

или, эквивалентно:

$$\begin{pmatrix} P & AP \\ PA^\top & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \Delta (0 \quad HP) + \begin{pmatrix} 0 \\ PH^\top \end{pmatrix} \Delta^\top (F^\top \quad 0) \succ 0.$$

Применяя теперь лемму Питерсена в форме Следствия 2.2.5 с

$$G = \begin{pmatrix} P & AP \\ PA^\top & P \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = (0 \quad HP),$$

приходим к линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} P - \varepsilon FF^\top & AP & 0 \\ PA^\top & P & PH^\top \\ 0 & HP & \varepsilon I \end{pmatrix} \succ 0$$

относительно  $P, \varepsilon$ . Принимая во внимание однородность по совокупности переменных  $P, \varepsilon$ , окончательно получаем следующий результат.

**Теорема 2.3.3.** *Разрешимость матричного неравенства*

$$\begin{pmatrix} P - FF^\top & AP & 0 \\ * & P & PH^\top \\ * & * & I \end{pmatrix} \succ 0$$

относительно матричной переменной  $P \succ 0$  эквивалентна квадратичной устойчивости системы (2.3.7) при всех  $\|\Delta\| \leq 1$ , причем решение  $\hat{P}$  определяет общую квадратичную функцию Ляпунова.

Вопрос о радиусе квадратичной устойчивости решается аналогично непрерывному случаю.

### 2.3.3. Дробно-линейная неопределенность

Наконец, пусть неопределенность в матрице имеет дробно-линейную форму

$$A(\Delta) = A + F\Delta(I - S\Delta)^{-1}H \quad (2.3.8)$$

с устойчивой номинальной матрицей  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , некоторыми известными матрицами  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{q \times p}$  и ограниченной неопределенностью  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ :

$$\|\Delta\| \leq \gamma.$$

Для нахождения радиуса робастной квадратичной устойчивости семейства (2.3.8) потребуем выполнения неравенства

$$(A + F\Delta(I - S\Delta)^{-1}H)P + P(A + F\Delta(I - S\Delta)^{-1}H)^\top \prec 0$$

с некоторой матрицей  $P \succ 0$  при всех допустимых неопределенностях  $\Delta$ . Раскрывая скобки, получаем неравенство

$$AP + PA^\top + \gamma F\Delta(I - \gamma S\Delta)^{-1}HP + PH^\top((I - \gamma S\Delta)^{-1})^\top \Delta^\top \gamma F^\top \prec 0,$$

которое должно выполняться при всех  $\|\Delta\| \leq 1$ .

Согласно Лемме 2.2.12, это условие эквивалентно выполнению неравенства

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \gamma^2 \varepsilon FF^\top & PH^\top + \gamma^2 \varepsilon FS^\top \\ HP + \gamma^2 \varepsilon SF^\top & -\varepsilon(I - \gamma^2 SS^\top) \end{pmatrix} \prec 0.$$

Заметив, что полученное неравенство однородно по  $P$  и  $\varepsilon$ , и поэтому полагая  $\varepsilon = 1$ , имеем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \gamma^2 FF^\top & PH^\top + \gamma^2 FS^\top \\ HP + \gamma^2 SF^\top & \gamma^2 SS^\top - I \end{pmatrix} \prec 0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение (см. также Замечание 2.3.1).

**Теорема 2.3.4.** Пусть  $\hat{\gamma}$  — решение задачи SDP

$$\gamma \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \gamma FF^\top & PH^\top + \gamma FS^\top \\ HP + \gamma SF^\top & \gamma SS^\top - I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\gamma$ .

Тогда радиус квадратичной устойчивости семейства (2.3.8) равен  $\sqrt{\hat{\gamma}}$ .

Для систем с неопределенностью в форме  $(M, \Delta)$  техника ЛМІ применима и в более содержательных задачах, таких как робастная квадратичная стабилизация или робастное подавление внешних возмущений, но выкладки становятся очень громоздкими, а идейно существо дела не меняется, поэтому дробно-линейная неопределенность больше рассматриваться не будет.

## 2.4. Квадратичная стабилизация

В разделе 1.2 обсуждалось важнейшее понятие устойчивости линейных систем. Однако открытая система может быть неустойчивой. В этом случае можно пытаться *стабилизировать* систему — добиться устойчивости замкнутой системы путем введения обратной связи. Ограничимся рассмотрением линейной статической обратной связи.

### 2.4.1. Квадратичная стабилизация

Вернемся к так называемой *квадратичной стабилизации*; мы начали ее обсуждать в разделе 1.2.2. Напомним, она основывается на том, что устойчивость системы эквивалентна наличию у нее квадратичной функции Ляпунова вида

$$V(x) = x^T Q x, \quad Q \succ 0. \quad (2.4.1)$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (2.4.2)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , с управляемой парой  $(A, B)$ . Замкнув ее линейной обратной связью по состоянию

$$u = Kx, \quad (2.4.3)$$

придем к замкнутой системе

$$\dot{x} = A_c x \quad (2.4.4)$$

с матрицей  $A_c = A + BK$ .

Как показано в разделе 1.2, функция (2.4.1) является функцией Ляпунова для системы (2.4.4) тогда и только тогда, когда

$$A_c^T Q + Q A_c \prec 0.$$

то есть когда найдутся матрицы  $K$  и  $Q \succ 0$  такие, что

$$(A + BK)^\top Q + Q(A + BK) \prec 0. \quad (2.4.5)$$

Неравенство (2.4.5) нелинейно (и невыпукло!) относительно матричных переменных  $Q$  и  $K$ . От этого можно избавиться с помощью следующего приема, который будет систематически использоваться в дальнейшем.

Домножив неравенство (2.4.5) слева и справа на матрицу  $P = Q^{-1}$ , получим

$$(A + BK)P + P(A + BK)^\top \prec 0$$

или

$$AP + PA^\top + BKP + PK^\top B^\top \prec 0.$$

Введем вспомогательную матричную переменную

$$Y = KP,$$

исключая  $K$ . В силу  $P \succ 0$ , матрица  $K$  восстанавливается единственным образом:

$$K = YP^{-1}.$$

В результате приходим к матричному неравенству

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0,$$

линейному по переменным  $Y$  и  $P$ .

Таким образом, получен следующий результат.

**Теорема 2.4.1.** Пусть матрицы  $\hat{P}$  и  $\hat{Y}$  удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0. \quad (2.4.6)$$

Тогда регулятор (2.4.3) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (2.4.2), а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Из доказательства видно, что для управляемых систем разрешимость линейных матричных неравенств (2.4.6) эквивалентна возможности стабилизировать систему с помощью обратной связи по состоянию. Более того, теорема предлагает очень простую параметризацию всех стабилизирующих регуляторов через решения этого ЛМІ и, как будет показано в дальнейшем, служит основой синтеза. Понятно, что никаких выводов о *степени устойчивости* замкнутой системы в данном утверждении не делается; она зависит от того, какое именно допустимое решение ЛМІ (2.4.6) будет выбрано.

Из утверждения теоремы вытекает следующее важное наблюдение. Рассмотрим эллипсоид вида (2.2.7) с центром в начале координат и матрицей  $\hat{P}$ . Тогда, если начальное условие  $x_0$  системы (2.4.2) лежит в этом эллипсоиде, то ее траектория будет оставаться в нем для всех моментов времени; это следует из того, что квадратичная форма  $x^\top \hat{P}^{-1} x$  является функцией Ляпунова для данной системы. Это свойство будем называть *инвариантностью* полученного эллипсоида относительно начальных условий; в последующих главах будут подробно изучены инвариантные эллипсоиды для линейных систем, но уже при наличии внешних возмущений.

Если же начальное условие  $x_0$  задано, то для построения инвариантного эллипсоида необходимо потребовать, чтобы он содержал начальную точку, то есть

$$x_0^\top P^{-1} x_0 \leq 1,$$

или в ЛМІ-форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (2.4.7)$$

и это неравенство следует добавить к ограничениям (2.4.6) в Теореме 2.4.1.

**Замечание 2.4.1.** Иногда нам нужно не просто стабилизировать систему, а гарантировать желаемую степень  $\sigma > 0$  ее устойчивости. В этом случае, согласно Замечанию 2.1.2, первое из неравенств (2.4.6) заменится на *нестрогое* линейное матричное неравенство

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \preceq -2\sigma P \quad (2.4.8)$$

в формулировке Теоремы 2.4.1. ▼



### Ограничение на управление

Обычно на практике требуется, чтобы управляющие воздействия были тем или иным образом ограничены; в разделе 1.3.1 уже затрагивался этот вопрос, когда накладывались интегральные ограничения на величину управления. Далее, при рассмотрении явления всплеска в разделе 1.4.1, было показано, что синтезированное управление может оказаться очень большим, если пытаться сдвинуть полюса замкнутой системы сильно влево (иными словами, добиться больших значений  $\sigma$  в неравенстве (2.4.8)).

Покажем, каким образом ограничения на величину управления можно учитывать в рамках описанной выше квадратичной стабилизации.

Мы будем накладывать следующее ограничение на управление, которое должно выполняться вдоль траектории системы:

$$|u(t)| \leq \mu \quad \forall t \geq 0, \quad (2.4.9)$$

где  $\mu > 0$  — уровень допустимых управлений.

В следующей лемме дается достаточное условие для выполнения этого ограничения, которое формулируется в виде линейного матричного неравенства относительно матричных переменных  $P$  и  $Y$ , фигурирующих в Теореме 2.4.1. Это неравенство будет использоваться нами и далее, при рассмотрении систем с внешними возмущениями.

**Лемма 2.4.1.** Пусть матрицы  $P$  и  $Y$  удовлетворяют линейным матричным неравенствам (2.4.6) и (2.4.7). Тогда выполнение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succ 0 \quad (2.4.10)$$

гарантирует выполнение ограничения (2.4.9) на траектории системы (2.4.2), (2.4.3).

**Доказательство.** Поскольку  $u = Kx$ , то ограничение (2.4.9) представимо в виде

$$x^\top K^\top K x \leq \mu^2.$$

Рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top Q x \leq 1\}$$

с матрицей  $Q = P^{-1} \succ 0$ , удовлетворяющей (2.4.6) и (2.4.7), и потребуем выполнения

$$x^\top K^\top K x \leq \mu^2 \quad \text{при} \quad x^\top Q x \leq 1. \quad (2.4.11)$$

В соответствии с Замечанием 2.2.7 для выполнения (2.4.11) необходимо и достаточно

$$\frac{1}{\mu^2} K^\top K \preceq Q.$$

Далее, поскольку  $K = YP^{-1}$ , то полученное матричное неравенство примет вид

$$\frac{1}{\mu^2} P^{-1} Y^\top Y P^{-1} \preceq P^{-1}.$$

Домножив его слева и справа на матрицу  $P$ , получаем

$$\frac{1}{\mu^2} Y^\top Y \preceq P,$$

или, по лемме Шура,

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succ 0. \quad \blacksquare$$

Достаточность этого условия следует из (2.4.11): выполнение ограничения (2.4.9) требуется не только вдоль траектории системы, но и в любой точке эллипсоида с матрицей  $P$ , содержащем траекторию.

Таким образом, для построения квадратично стабилизирующего регулятора при наличии ограничения на управление, Теорема 2.4.1 модифицируется следующим образом. К неравенствам (2.4.6), гарантирующим стабилизацию, добавляются линейные матричные неравенства (2.4.7) и (2.4.10). При этом эллипсоид с полученной матрицей  $\hat{P}$  будет инвариантным, содержащим начальное условие  $x_0$ , а ограниченность управления вдоль траектории гарантируется условием (2.4.10).

Ясно, что не для всякого начального условия  $x_0$  систему можно стабилизировать управлением заданного уровня. Вопрос о минимально возможном значении величины  $\mu$  решается с помощью следующего очевидного развития Леммы 2.4.1.

**Лемма 2.4.2.** Пусть  $\hat{\gamma}$  — решение задачи полуопределенного программирования

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succ 0, \quad \begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \gamma I \end{pmatrix} \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярной переменной  $\gamma$ .

Тогда при

$$\mu \geq \mu_{\min} \doteq \sqrt{\hat{\gamma}}$$

существует регулятор  $u = Kx$ , стабилизирующий систему (2.4.2) и удовлетворяющий ограничению (2.4.9).

**Пример 2.4.1.** В качестве примера рассмотрим задачу управления *двухмассовой системой* — системой из двух твердых тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных пружиной с коэффициентом упругости  $k$ , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (рис. 2.4.1); к левому телу приложено управление  $u$ . Эта задача

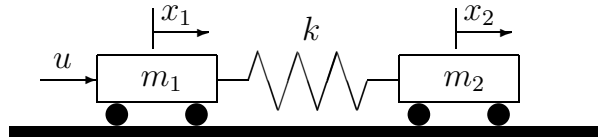


Рис. 2.4.1. Двухмассовая система из Примера 2.4.1.

часто используется как тестовая для различных методов синтеза регуляторов, чему способствуют ее реальное происхождение и разумная размерность модели; в различных постановках она будет привлекаться нами в последующих главах для демонстрации работоспособности и эффективности предлагаемых методов синтеза управления.

Обозначим через  $x_1, v_1$  координату и скорость левого тела, а через  $x_2, v_2$  — правого тела. Тогда

$$x = (x_1 \quad x_2 \quad v_1 \quad v_2)^\top$$

есть вектор фазового состояния рассматриваемой динамической системы, полностью описывающий ее поведение.

Непрерывная модель колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2. \end{aligned}$$

В результате приходим к системе вида (2.4.2) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ m_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть параметры системы единичны:

$$k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1,$$

а в качестве начальной точки возьмем

$$x_0 = (-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1)^\top.$$

Зададимся также желаемой степенью устойчивости замкнутой системы:

$$-\max_i \operatorname{Re} \lambda(A_c) = \sigma = 1.$$

В соответствии с Теоремой 2.4.1 и Замечанием 2.4.1, решая линейные матричные неравенства (2.4.8) и  $P \succ 0$ , получаем регулятор

$$\widehat{K} = (-30,6292 \quad -12,0670 \quad -7,3333 \quad -51,3909),$$

стабилизирующий систему со степенью устойчивости

$$\widehat{\sigma} = \sigma(A + B\widehat{K}) = 1,3378.$$

Эта величина оказывается заметно больше желаемой  $\sigma = 1$ , поскольку регулятор  $\widehat{K}$  получен в результате решения задачи *допустимости* линейного матричного неравенства (2.4.8) (см. комментарии после Теоремы 2.4.1).

В приведенном решении никак не учитывалась величина управляющего воздействия; решим теперь задачу заново, наложив на него явные ограничения. Для этого сначала определим величину  $\mu_{\min}$  минимально допустимого ресурса управления, как это предписано Леммой 2.4.2 (учитывая при этом требование к степени устойчивости в форме (2.4.8)); получаем

$$\mu_{\min} = 32,2736.$$

Положим теперь

$$\mu = 1,2\mu_{\min} = 38,7284$$

и воспользуемся Леммой 2.4.1 (также учитывая (2.4.8)). В результате получаем

$$P = \begin{pmatrix} 138,3194 & 35,5645 & -144,3467 & -68,2231 \\ * & 24,0833 & -5,8715 & -25,2779 \\ * & * & 347,2916 & 39,5763 \\ * & * & * & 41,1862 \end{pmatrix},$$

и

$$Y = (54,1847 \quad -14,9767 \quad -500,0120 \quad 12,9178),$$

что дает стабилизирующий регулятор

$$\tilde{K} = (-10,2069 \quad 0,9351 \quad -4,3130 \quad -11,8753),$$

норма которого почти вчетверо меньше нормы регулятора  $\hat{K}$ . При этом степень устойчивости замкнутой системы оказывается равной

$$\tilde{\sigma} = \sigma(A + B\tilde{K}) = 1,0661,$$

причем везде внутри инвариантного эллипсоида с матрицей  $P$  гарантировано ограничение на управление

$$|\tilde{K}x| \leq 38,7284.$$

В действительности управление не превышало заметно меньшей величины 18,7043, поскольку Лемма 2.4.1 дает лишь достаточные условия, см. Рис. 2.4.2, на котором приведены графики управления для системы замкнутой регуляторами  $\hat{K}$  (пунктир) и  $\tilde{K}$  (сплошная линия).

На Рис. 2.4.3 показано изменение со временем нормы решения системы, замкнутой регуляторами  $\hat{K}$  (пунктир) и  $\tilde{K}$  (сплошная линия).

Обратим внимание на явно выраженный эффект всплеска траектории системы, замкнутой регулятором  $\hat{K}$ : норма решения возрастает более чем в семь раз, прежде чем начать убывать, — довольно большая величина для исследуемой маломерной системы. В тоже время, при регуляторе  $\tilde{K}$  наблюдается почти вдвое меньший всплеск.

Итак, введение ограничения на управление в данном примере приводит к гораздо меньшим коэффициентам усиления, придает замкнутой системе степень устойчивости, существенно более близкую к желаемой, и заметно ослабляет эффект всплеска. ▼

Обратимся теперь к случаю дискретного времени; для него справедлив результат, аналогичный Теореме 2.4.1. В самом деле, рассмотрим систему

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (2.4.12)$$

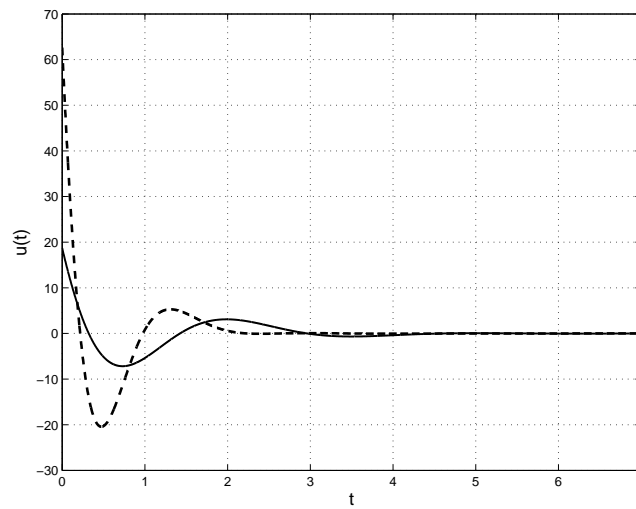


Рис. 2.4.2. Управление в системе из Примера 2.4.1 при различных регуляторах.

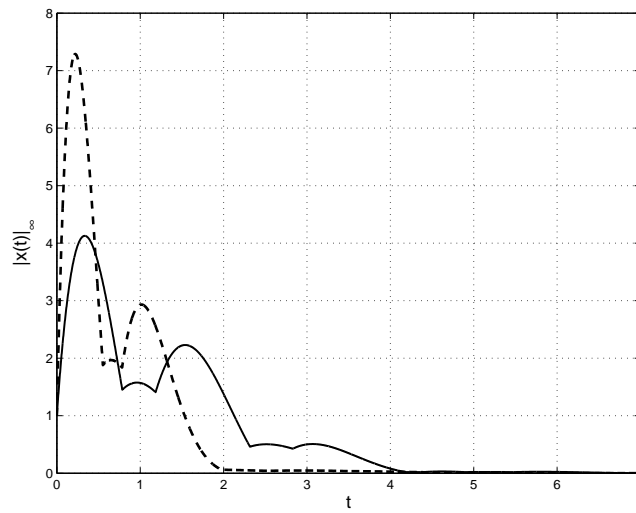


Рис. 2.4.3. Норма решения системы из Примера 2.4.1 для различных регуляторов.

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , с управлением, выбираемым в виде

$$u_k = Kx_k. \quad (2.4.13)$$

Тогда, как показано в разделе 1.2, функция

$$V(x) = x^\top P^{-1}x, \quad P \succ 0,$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы с матрицей  $A_c$  тогда и только тогда, когда

$$A_c P A_c^\top - P \prec 0.$$

Преобразуя это ЛМІ с помощью леммы Шура (см. раздел 2.2.1) и вводя, как и выше, новую матричную переменную  $Y = KP$ , приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.4.2.** Пусть матрицы  $\hat{P}$  и  $\hat{Y}$  удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} P & AP + BY \\ PA^\top + Y^\top B^\top & P \end{pmatrix} \succ 0, \quad P \succ 0.$$

Тогда регулятор (2.4.13) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (2.4.12), а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Таким образом, и в дискретном, и в непрерывном времени отыскание стабилизирующего регулятора может формулироваться в терминах линейных матричных неравенств и сводиться к решению задачи разрешимости.

Описанный выше подход к стабилизации, основанный на поиске квадратичной функции Ляпунова (и потому называемый *квадратичной стабилизацией*) не дает решения в явном виде, а сводит задачу к решению линейных матричных неравенств. Такая техника оказывается особенно эффективной для задач робастной стабилизации, когда требуется стабилизировать систему в условиях неопределенности (а также при наличии внешних возмущений и в разнообразных задачах оптимизации), чему и посвящены следующие разделы.

### 2.4.2. Робастная квадратичная стабилизация

Рассмотрим задачу квадратичной стабилизации в робастном варианте, а именно, для семейства систем

$$\dot{x} = A(q)x + Bu, \quad q \in \mathcal{Q}, \quad (2.4.14)$$

будем искать общий регулятор вида

$$u = Kx$$

такой, чтобы у замкнутых систем

$$\dot{x} = A_c(q)x, \quad A_c(q) = A(q) + BK, \quad q \in \mathcal{Q},$$

была общая квадратичная функция Ляпунова

$$V(x) = x^\top Px, \quad P \succ 0.$$

Зависимость матрицы  $A$  от параметров  $q$  может быть любой, например, это может быть интервальное или аффинное семейство матриц (см. раздел 1.6.1). Как было показано в Теореме 2.4.1, решение задачи для фиксированной  $A$  определяется решением одного линейного матричного неравенства. В случае неопределенной матрицы появляется набор соответствующих неравенств, отвечающих всевозможным (допустимым) значениям параметра  $q$ .

**Теорема 2.4.3.** Пусть матрицы  $\hat{P}$  и  $\hat{Y}$  удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$A(q)P + PA^\top(q) + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0, \quad q \in \mathcal{Q}.$$

Тогда регулятор с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (2.4.14) при всех  $q \in \mathcal{Q}$ , а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы (при всех  $q \in \mathcal{Q}$ ).



**Доказательство** практически дословно повторяет доказательство Теоремы 2.4.1.

Таким образом, разрешимость приведенной в теореме системы линейных матричных неравенств эквивалентна робастной квадратичной стабилизируемости неопределенной системы (2.4.14).

Итак, проблема свелась к решению линейных матричных неравенств. Как уже обсуждалось ранее, число неравенств может быть конечным и соответствовать вершинным элементам семейства (например, если  $A(q)$  — интервальное семейство, или аффинное семейство, а  $\mathcal{Q}$  — куб).

Тем не менее, число неравенств может быть велико: скажем, в случае интервальной матрицы размера  $n \times n$  число неравенств равно  $2^{n^2}$ , и уже при  $n = 5$  возникают трудности при использовании вычислительных методов. В этих случаях могут применяться более простые итеративные методы, которые на каждом шаге имеют дело лишь с одним случайно генерируемым неравенством. При этом общее число неравенств может быть даже бесконечным.

Мы рассмотрели лишь ситуацию, когда матрица  $A$  включает неопределенность, в то время как матрица  $B$  известна точно. Более общий случай неопределенной матрицы  $B$  также может быть сведен к линейным матричным неравенствам. Действительно, рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(q_A)x + B(q_B)u, \quad q_A \in \mathcal{Q}_A, \quad q_B \in \mathcal{Q}_B,$$

и пусть для простоты матрицы  $A(q_A)$  и  $B(q_B)$  аффинно зависят от неопределенностей  $q_A, q_B$ , а области  $\mathcal{Q}_A, \mathcal{Q}_B$  — выпуклые многогранники в  $\mathbb{R}^{\ell_A}$  и  $\mathbb{R}^{\ell_B}$  соответственно. Тогда, обозначив через  $\mathcal{V}_A, \mathcal{V}_B$  совокупности вершин этих многогранников, видим, что наличие общего квадратично стабилизирующего регулятора эквивалентно разрешимости системы линейных матричных неравенств, отвечающих всем точкам из декартова произведения  $\mathcal{V}_A \times \mathcal{V}_B$ .

Теперь рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \quad (2.4.15)$$

со структурированной матричной неопределенностью, где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , пара  $(A, B)$  управляема, а матричная неопределенность  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$  удовлетворяет ограничению

$$\|\Delta\| \leq 1.$$

Цель прежняя — стабилизировать систему (2.4.15) с помощью ли-

нейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx \quad (2.4.16)$$

при всех допустимых неопределенностях.

Воспользуемся Теоремой 2.4.1 из раздела 2.4.1 и будем предполагать существование матриц  $P \succ 0$  и  $Y$ , удовлетворяющих матричному неравенству

$$(A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0$$

или

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + F\Delta HP + PH^\top \Delta^\top F^\top \prec 0.$$

В силу леммы Питерсена (в форме Леммы 2.2.8) с

$$G = AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top, \quad M = F, \quad N = HP,$$

полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0.$$

Таким образом, с учетом однородности по  $P$ ,  $Y$ ,  $\varepsilon$ , приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.4.4.** Пусть матрицы  $\hat{P}$  и  $\hat{Y}$  удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0. \quad (2.4.17)$$

Тогда регулятор (2.4.16) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (2.4.15) при всех неопределенностях  $\|\Delta\| \leq 1$ , а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы (при всех неопределенностях  $\|\Delta\| \leq 1$ ).

Как и в случае параметрической неопределенности, Теорема 2.4.4 дает необходимые и достаточные условия *робастной квадратичной стабилизируемости* неопределенной системы.

**Замечание 2.4.2.** Нетрудно видеть, что в случае заданной степени устойчивости  $\sigma > 0$  замкнутой системы, первое из условий (2.4.17) Теоремы 2.4.4 заменится на *нестрогое* матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + 2\sigma P + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

ср. с Замечанием 2.4.1. ▼

Можно рассмотреть случай, когда структурированная неопределенность также содержится и в матрице  $B$  системы:

$$\dot{x} = (A + F_A \Delta_A H_A)x + (B + F_B \Delta_B H_B)u,$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$ ,  $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$ ,  $F_B \in \mathbb{R}^{n \times p_B}$ ,  $H_B \in \mathbb{R}^{q_B \times m}$ ,  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$ ,  $\Delta_B \in \mathbb{R}^{p_B \times q_B}$ , причем

$$\|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_B\| \leq 1.$$

Однако при этом соответствующий аналог Теоремы 2.4.4 предоставит лишь *достаточные* условия робастной квадратичной стабилизируемости, поскольку лемма Питерсена для нескольких неопределенностей справедлива только в части достаточности. Необходимость имеет место лишь если  $A$  и  $B$  подвержены воздействию одной и той же возмущающей матрицы:  $\Delta_A = \Delta_B$  (при этом, разумеется, возможно  $F_A \neq F_B$ ,  $H_A \neq H_B$ ).

Дискретным аналогом Теоремы 2.4.4 является следующее утверждение, которое немедленно следует из Теорем 2.3.3 и 2.4.2.

**Теорема 2.4.5.** Пусть матрицы  $\hat{P}$  и  $\hat{Y}$  удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} P - FF^\top & AP + BY & 0 \\ * & P & PH^\top \\ * & * & I \end{pmatrix} \succ 0, \quad P \succ 0.$$

Тогда регулятор  $u_k = \hat{K}x_k$  с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему

$$x_{k+1} = (A + F\Delta H)x_k + Bu_k$$

при всех неопределенностях  $\|\Delta\| \leq 1$ , а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы (при всех неопределенностях  $\|\Delta\| \leq 1$ ).

Закончим этот раздел изучением еще одной характеристики системы (2.4.15) — *радиуса квадратичной стабилизируемости*, который определим как величину максимального размаха неопределенности, при котором еще возможна робастная квадратичная стабилизация:

$$\gamma_{\max}^{\text{st}} = \sup \left\{ \gamma : (A + BK + F\Delta H)P + P(A + BK + F\Delta H)^\top \prec 0 \right. \\ \left. \text{при некотором } P \succ 0, \text{ регуляторе } K \text{ и всех } \|\Delta\| \leq \gamma \right\}.$$

Ответ дается следующим утверждением, которое немедленно вытекает из Теорем 2.3.2 и 2.4.4, принимая во внимание однородность неравенства (2.4.17) по совокупности всех переменных (см. также Замечание 2.3.1).

**Теорема 2.4.6.** Пусть  $\hat{\gamma}$  — решение задачи SDP

$$\gamma \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \gamma FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярной переменной  $\gamma$ . Тогда радиус квадратичной стабилизируемости системы (2.4.15) равен  $\sqrt{\hat{\gamma}}$ .

Сделаем важное замечание.

**Замечание 2.4.3.** В системе

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu$$

радиус квадратичной стабилизируемости, вообще говоря, может и не быть конечным. В частности, это заведомо имеет место при

$$F = B$$

(несколько позже подобная ситуация возникнет еще не раз).

Действительно, в этом случае матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \gamma BB^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

из Теоремы 2.4.6 окажется разрешимым относительно  $P \succ 0$  и  $Y$  при любом  $\gamma > 0$ .

В самом деле, положив

$$Y = -\frac{\gamma + \alpha}{2} B^\top, \quad \alpha > 0,$$

имеем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - \alpha BB^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Полученное матричное неравенство по лемме Шура эквивалентно неравенству Риккати

$$AP + PA^\top - \alpha BB^\top + PH^\top HP \preccurlyeq 0$$

или, после домножения слева и справа на матрицу  $Q = P^{-1}$ , к эквивалентному неравенству

$$A^\top Q + QA - \alpha QBB^\top Q + H^\top H \preccurlyeq 0,$$

которое имеет решение  $Q \succ 0$  при любом значении параметра  $\alpha$ .  $\blacktriangledown$

В следующем примере радиус квадратичной стабилизируемости системы также бесконечен.

**Пример 2.4.2.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = (0 \quad 1), \quad \Delta \in \mathbb{R}.$$

Будем искать матрицу усиления в виде

$$K = \begin{pmatrix} 0 & k \end{pmatrix};$$

тогда матрица замкнутой системы приобретает вид

$$A_c(\Delta) = A + F\Delta H + BK = \begin{pmatrix} -1 & \Delta \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что она устойчива тогда и только тогда, когда  $k < -1$ , причем устойчивость сохраняется *при всех*  $\Delta \in \mathbb{R}$ . Мы попутно видим, что вещественный радиус устойчивости (см. конец раздела 1.6.2) номинальной системы, замкнутой таким регулятором, равен бесконечности.

Теперь зафиксируем некоторый уровень неопределенности  $\gamma > 0$  и найдем общую квадратичную функцию Ляпунова для семейства устойчивых систем  $\dot{x} = A_c(\Delta)x$  при всех  $|\Delta| < \gamma$ . Будем искать матрицу функции Ляпунова в виде

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \succ 0.$$

Представим  $k = -1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ ; тогда

$$A_c(\Delta)P + PA_c^\top(\Delta) = \begin{pmatrix} -2p_1 & \Delta p_2 \\ \Delta p_2 & -2\varepsilon p_2 \end{pmatrix}.$$

Для отрицательной определенности этой матрицы получаем (например, из леммы Шура) следующее условие:

$$p_1 > \frac{\Delta^2}{4\varepsilon} p_2,$$

которое выполняется для всех допустимых  $|\Delta| < \gamma$  при выборе

$$p_1 > \frac{\gamma^2}{4\varepsilon} p_2,$$

например, при  $p_2 = \varepsilon$ ,  $p_1 = \gamma^2$ .

Итого, каков бы ни был размах неопределенности  $\gamma$ , робастно стабилизирующий регулятор может быть выбран в виде  $K = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon > 0$ , а в качестве матрицы общей квадратичной функции Ляпунова взята матрица  $P = \text{diag}\{\gamma^2 \quad \varepsilon\}$ . ▼

Идеи и технические средства, использовавшиеся при построении (робастно) квадратично стабилизирующих регуляторов самым существенным образом будут применяться в дальнейшем изложении. Основными среди таких средств являются замена переменных, введенная в Теореме 2.4.1, и использование леммы Питерсена для учета структурированной неопределенности при робастном синтезе.

## 2.5. Оптимальное управление

В предыдущем разделе показано, что стабилизирующий регулятор может строиться через решения соответствующего линейного матричного неравенства. Каждое такое неравенство имеет много решений, и среди них можно выбирать то, которое оптимизирует тот или иной показатель качества. В этом разделе продемонстрируем эффективность техники ЛМІ и простоты ее применения к решению некоторых классических задач оптимального управления и покажем, как эти задачи могут сводиться к формату полуопределенного программирования. Ограничимся непрерывными системами; дискретные аналоги приводимых ниже результатов легко могут быть получены по той же схеме с использованием той же ЛМІ-техники применяемой к дискретным уравнениям и неравенствам Ляпунова.

### 2.5.1. Линейно-квадратичный регулятор

Рассмотрим систему управления с фиксированным начальным условием

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (2.5.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  и управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ; пара  $(A, B)$  управляема.

Будем искать закон управления в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad (2.5.2)$$

минимизирующий следующий *квадратичный критерий качества*:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T R x + u^T S u) dt. \quad (2.5.3)$$

Здесь  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $S \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — заданные положительно определенные матрицы, так что  $J \geq 0$ .

Примечательно, что в этой задаче расширение класса управлений до программных не приводит к улучшению используемого критерия качества.

Очевидно, что для того, чтобы функционал  $J$  был конечен, необходимо, чтобы замкнутая система была устойчива; это же условие и достаточно для конечности  $J$ . Критерий (2.5.3) гарантирует малость как состояний замкнутой системы, так и применяющихся управлений (за счет больших управлений можно добиться, чтобы  $x(t)$  быстро убывал, однако тогда член  $u^\top Su$  будет очень велик).

Матрицы  $R$  и  $S$  играют роль *весовых коэффициентов*, учитывающих оба указанных фактора. Приведенная выше задача является одной из основных в теории управления; в отечественной литературе она иногда называется *задачей об аналитическом конструировании регуляторов*, а в западной — *задачей о линейно-квадратичном регуляторе*.

Стандартный метод решения этой задачи основан на рассмотрении так называемого *алгебраического уравнения Риккати*

$$A^\top Q + QA - QBS^{-1}B^\top Q + R = 0 \quad (2.5.4)$$

относительно матрицы  $Q$ . При этом оптимальный регулятор задается выражением

$$\hat{K} = -S^{-1}B^\top \hat{Q},$$

а значение функционала  $J$  равно

$$J_{\text{opt}} = x_0^\top \hat{Q} x_0,$$

где  $\hat{Q}$  — положительно определенное решение уравнения (2.5.4).

Однако для решения этой задачи можно применить технику, использующую аппарат линейных матричных неравенств. В этом разделе и далее будет использоваться следующий результат, известный под названием *лемма Беллмана*.

**Лемма 2.5.1 (Лемма Беллмана).** *Значение функционала*

$$J = \int_0^\infty x^\top R x dt, \quad R \succ 0,$$

на решениях системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad (2.5.5)$$



с устойчивой матрицей  $A$  равно

$$J = x_0^\top Q x_0,$$

где матрица  $Q$  удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$A^\top Q + QA = -R. \quad (2.5.6)$$

**Доказательство.** Поскольку матрица  $A$  устойчива и  $R \succ 0$ , то по Лемме 1.2.3 уравнение (2.5.6) имеет единственное решение  $Q \succ 0$ .

Рассмотрим функцию

$$V(x) = x^\top Q x$$

на решениях системы (2.5.5). Поскольку  $Q \succ 0$ , то  $V(x) > 0$  при  $x \neq 0$ ; при этом производная функции  $V(x)$  в силу системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x(t)) = x^\top (A^\top Q + QA)x = -x^\top R x < 0,$$

откуда

$$\int_0^\infty x^\top R x dt = - \int_0^\infty \dot{V}(x) dt = -V(x) \Big|_0^\infty = x_0^\top Q x_0. \quad \blacksquare$$

**Замечание 2.5.1.** Пусть матрица  $Q \succ 0$  является решением матричного неравенства Ляпунова

$$A^\top Q + QA \preceq -R. \quad (2.5.7)$$

В силу Леммы 1.2.5 имеем  $Q \succ \hat{Q}$ , где  $\hat{Q}$  — решение уравнения Ляпунова (2.5.6), поэтому

$$J = x_0^\top \hat{Q} x_0 \leq x_0^\top Q x_0.$$

Следовательно, точное значение функционала  $J$  можно искать как решение задачи

$$x_0^\top Q x_0 \longrightarrow \min$$

при ограничении (2.5.7). ▼

Вернемся к исходной задаче. Система (2.5.1), замкнутая обратной связью (2.5.2), принимает вид

$$\dot{x} = (A + BK)x,$$

и на ее решениях имеем

$$J = \int_0^{\infty} (x^{\top} R x + x^{\top} K^{\top} S K x) dt = \int_0^{\infty} x^{\top} (R + K^{\top} S K) x dt.$$

Воспользовавшись Леммой Беллмана 2.5.1 (точнее, замечанием к ней), получаем, что минимальное значение функционала  $J$  предоставляет решение задачи

$$x_0^{\top} Q x_0 \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$(A + BK)^{\top} Q + Q(A + BK) \preceq -R - K^{\top} S K.$$

Домножив последнее матричное неравенство слева и справа на матрицу  $P = Q^{-1}$ , получаем

$$(A + BK)P + P(A + BK)^{\top} + PRP + PK^{\top}SKP \preceq 0,$$

или, дважды применяя лемму Шура,

$$\begin{pmatrix} (A + BK)P + P(A + BK)^{\top} & P & PK^{\top} \\ P & -R^{-1} & 0 \\ KP & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Окончательно, введя вспомогательную матричную переменную

$$Y = KP$$

приходим к линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + BY + Y^{\top}B^{\top} & P & Y^{\top} \\ P & -R^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (2.5.8)$$

Таким образом, на решениях полученного матричного неравенства нам следует минимизировать величину

$$x_0^{\top} Q x_0 = x_0^{\top} P^{-1} x_0,$$

которая нелинейна по переменной  $P$ . Введем скалярную переменную  $\gamma$  и, используя прием (2.2.1)–(2.2.2) из раздела 2.2.1, запишем неравенство

$$x_0^{\top} P^{-1} x_0 \leq \gamma$$

в виде LMI

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Наконец, поскольку весовая матрица  $R$  положительно определена, то в силу Следствия 2.2.2 имеем

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0$$

для всех  $P$  и  $Y$ , удовлетворяющих (2.5.8). Это означает, что соответствующий регулятор  $K = YP^{-1}$  будет стабилизирующим (см. раздел 2.4.1).

В результате приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.5.1.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}$  – решение задачи SDP

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top & P & Y^\top \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -S^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (2.5.9)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярной переменной  $\gamma$ .

Тогда регулятор (2.5.2) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (2.5.1); при этом квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1} x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы, а величина  $x_0^\top \hat{P}^{-1} x_0$  определяет минимальное значение функционала (2.5.3) на решениях системы (2.5.1) с начальным условием  $x_0$ .

Оптимизационная задача, сформулированная в Теореме 2.5.1, представляет собой задачу полуопределенного программирования относительно двух матричных переменных  $P$  и  $Y$  и одной скалярной переменной  $\gamma$ . Таким образом, классическая задача о линейно-квадратичном

регуляторе сведена к формату SDP. Более того, поскольку весовые матрицы  $R$  и  $S$  (точнее, матрицы, обратные к ним) входят в матричное неравенство (2.5.9) линейно, то при необходимости и они могут рассматриваться как переменные в SDP-задаче.

Мы увидим, что описанный подход полезен при решении робастной линейно-квадратичной задачи, когда в матрицах системы присутствует неопределенность (ср. с квадратичной стабилизацией). В этом случае одним уравнением Риккати обойтись не удастся; вместо этого будем оптимизировать квадратичный критерий на решениях соответствующих *неравенств*.

**Пример 2.5.1.** Вернемся к двухмассовой системе, рассмотренной в Примере 2.4.1 и построим для нее линейно-квадратичный регулятор, полагая весовые матрицы единичными:

$$R = S = I.$$

Воспользовавшись Теоремой 2.5.1, находим

$$P = \begin{pmatrix} 0,5847 & 0,2782 & -0,2891 & -0,2743 \\ * & 0,4491 & -0,0784 & -0,1546 \\ * & * & 0,6993 & -0,0005 \\ * & * & * & 0,3745 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$K = \begin{pmatrix} -1,7212 & 0,3070 & -2,1078 & -1,1366 \end{pmatrix}$$

и значение функционала

$$\gamma = 16,6635.$$

При этом имеем степень устойчивости

$$\sigma(A_c) = -\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A + BK) = 0,3738$$

матрицы замкнутой системы. ▼

**Замечание 2.5.2.** Можно рассматривать задачу о линейно-квадратичном регуляторе в более общей постановке, когда минимизируемый функционал имеет структуру

$$J = \int_0^{\infty} (x^\top R x + 2u^\top L^\top x + u^\top S u) dt, \quad (2.5.10)$$

где  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  и  $S \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — заданные матрицы такие, что

$$\begin{pmatrix} R & L \\ L^\top & S \end{pmatrix} \succ 0.$$

В этом случае задача сводится к рассмотренной выше с помощью замены

$$u = \tilde{u} - S^{-1}L^\top x.$$

Для численного решения задачи о линейно-квадратичном регуляторе в системе МАТЛАВ имеется процедура `lqr`, в которой минимизируется именно такой функционал общего вида (2.5.10) и которая основана на решении соответствующего уравнения Риккати. ▼

**Замечание 2.5.3.** Обратим внимание, что в формулировке Теоремы 2.5.1 явно присутствуют начальные условия  $x_0$  системы, поэтому полученный регулятор, будучи оптимальным по критерию, может оказаться зависящим от значения  $x_0$ , и для других начальных условий задачу придется решать заново. Этим полученное решение отличается от классического (использующего уравнение Риккати), которое приводит к “универсальному” регулятору, дающему оптимальное значение критерия для любого начального условия.

Такой неприятности можно избежать, если принять во внимание Следствие 1.2.3, согласно которому, оптимизируя *след* матрицы на решениях *неравенства* Ляпунова или Риккати, получаем решение соответствующего *уравнения*. Иными словами, решая задачу SDP вида  $\text{tr } P \rightarrow \max$  при ограничении (2.5.9), приходим к регулятору, совпадающему с классическим, полученным через решение уравнения Риккати. ▼

## 2.5.2. $H_\infty$ -оптимизация

### Оценка $H_\infty$ -нормы

Напомним, что выше вводилось понятие матричной передаточной функции системы. Помимо наглядных частотных свойств и связи с (комплексным) радиусом устойчивости матрицы со структурированной неопределенностью, мы отметили еще одно ее важное свойство: величина  $H_\infty$ -нормы передаточной функции системы равна коэффициенту усиления  $\mathfrak{g}_{2,2}$  входного сигнала, ограниченного в  $L_2$ -норме. Точнее, имеет место следующий известный результат, который приведем без доказательства.

**Лемма 2.5.2.** *Рассмотрим систему, заданную с помощью передаточной функции:*

$$z = G(s)w, \quad G(s) = C(j\omega I - A)^{-1}D,$$

где матрица  $A$  устойчива,  $z$  — выход системы, а  $w$  — внешнее возмущение, ограниченное в  $L_2$ -норме:

$$\|w\|_2^2 = \int_0^{\infty} w^\top(t)w(t) dt \leq 1. \quad (2.5.11)$$

Тогда

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w \|z\|_2,$$

где супремум берется по всем входным возмущениям, удовлетворяющим (2.5.11).

Одной из задач теории  $H_\infty$ -оптимизации является вычисление значения  $H_\infty$ -нормы передаточной функции данной устойчивой системы. Способы вычисления этой величины при описании системы с помощью передаточных функций хорошо известны. Рассмотрим альтернативный способ, предполагающий описание системы в пространстве состояний и основанный на технике линейных матричных неравенств. Он исключительно численно устойчив и дает точный результат при численной реализации.

Рассмотрим несколько более общую формулировку, а именно, для системы

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0,$$

с устойчивой матрицей  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $L_2$ -ограниченным внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (2.5.11), будем интересоваться следующей интегральной характеристикой:

$$J = \int_0^{\infty} x^\top R x dt, \quad R \succ 0. \quad (2.5.12)$$

В частности, при  $R = I$  этот показатель совпадает с квадратом  $L_2$ -нормы решения:

$$J = \int_0^{\infty} x^\top x dt = \|x\|_2^2.$$

Нас интересует, какие значения может принимать функционал  $J$  на решениях системы при всевозможных внешних возмущениях

$$\|w\|_2 \leq 1.$$

Ясно, что  $J_{\min} = 0$  при  $w \equiv 0$  (тогда  $x \equiv 0$ ), поэтому важно найти  $J_{\max} = \max_{\|w\|_2 \leq 1} J$ .

**Теорема 2.5.2.** Для функционала

$$J = \int_0^{\infty} x^T R x dt, \quad R \succ 0,$$

на решениях системы

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0, \quad (2.5.13)$$

с устойчивой матрицей  $A$  и  $L_2$ -ограниченными внешними возмущениями  $\|w\|_2 \leq 1$  справедлива оценка

$$J \leq \hat{\gamma},$$

где  $\hat{\gamma}$  — решение задачи минимизации

$$\gamma \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^T Q + QA + R & QD \\ D^T Q & -\gamma I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (2.5.14)$$

$$Q \succ 0.$$

**Доказательство.** Прежде всего, отметим, что LMI (2.5.14), эквивалентное матричному неравенству

$$A^T Q + QA + R + \frac{1}{\gamma} Q D D^T Q \preceq 0,$$

разрешимо относительно  $Q \succ 0$  и  $\gamma$ .

Далее, пусть неравенство (2.5.14) выполняется для некоторого  $\gamma$  и  $Q \succ 0$ . Это означает, что для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^m$  верно

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T Q + QA + R & QD \\ D^T Q & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \leq 0$$

или

$$x^\top (A^\top Q + QA + R)x + x^\top QDw + w^\top D^\top Qx - \gamma w^\top w \leq 0. \quad (2.5.15)$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x) = x^\top Qx$$

с некоторой матрицей  $Q \succ 0$ . На решениях системы (2.5.13) имеем

$$\dot{V}(x, w) = \dot{x}^\top Qx + x^\top Q\dot{x} = (Ax + Dw)^\top Qx + x^\top Q(Ax + Dw),$$

откуда с учетом (2.5.15)

$$\dot{V}(x, w) \leq -x^\top Rx + \gamma w^\top w.$$

Интегрируя это неравенство по  $t$  от 0 до  $T$ , с учетом  $V(x(0)) = 0$  получаем

$$V(x(T)) \leq -\int_0^T x^\top Rx dt + \gamma \int_0^T w^\top w dt.$$

Поскольку  $V(x(T)) \geq 0$ , переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$  (что возможно в силу устойчивости матрицы  $A$ ) имеем

$$\int_0^\infty x^\top Rx dt \leq \gamma \int_0^\infty w^\top w dt \leq \gamma.$$

Таким образом, число  $\gamma$  дает верхнюю оценку для функционала  $J$ . ■

Как и в предыдущем разделе, сформулированная нами задача оптимального управления сведена к задаче полуопределенного программирования относительно матричной переменной  $Q$  и скалярной переменной  $\gamma$ .

**Замечание 2.5.4.** Если пара  $(A, D)$  управляема, то оценка сверху для функционала  $J$ , предоставляемая величиной  $\hat{\gamma}$ , является достижимой. Иными словами, существует возмущение (2.5.11), для которого  $J = \hat{\gamma}$ . ▼

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы остается справедливым и в том случае, когда  $R = C^\top C$  и пара  $(A, C)$  наблюдаема. Тогда функционал  $J$  может пониматься как квадрат  $L_2$ -нормы выхода



$z = Cx$  системы (2.5.13) при  $L_2$ -ограниченном внешнем возмущении, а величина  $\hat{\gamma}$ , полученная в Теореме (2.5.2) представляет собой не что иное как квадрат  $H_\infty$ -нормы передаточной функции от входа  $w$  к выходу  $z$ . Таким образом, Теорема (2.5.2) предлагает еще один способ вычисления  $H_\infty$ -нормы.

Выше в разделе 1.5 было введено понятие достижимого множества и дано его описание для устойчивой системы со входами, ограниченными в норме  $L_2$  или  $L_\infty$ . Задача этого раздела может также интерпретироваться как еще один вариант задачи о достижимости — в “интегральной” формулировке (2.5.12).

### Задача $H_\infty$ -оптимизации

Обратимся теперь к задаче синтеза. Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в  $L_2$ -норме.

В простейшей постановке задача  $H_\infty$ -оптимизации заключается в выборе регулятора в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (2.5.17)$$

который минимизирует величину  $H_\infty$ -нормы передаточной функции системы (2.5.16).

В соответствии с Леммой 2.5.2 введем в рассмотрение функционал

$$J = \int_0^\infty z^\top z dt = \|z\|_2^2$$

и будем искать его минимум по всем стабилизирующим регуляторам вида (2.5.17); решение этой задачи и дает  $H_\infty$ -оптимальный регулятор.

Обратим внимание, что в (2.5.16) управление  $u$  включено в уравнение для выхода  $z$  для того, чтобы ограничить величину используемого управления. С той же самой целью управление было введено в критерий  $J$  в задаче о линейно-квадратичном регуляторе.

Существуют методы решения этой задачи, исходящие из описания системы в частотной области (то есть с помощью передаточных функций). Они используют довольно сложный математический аппарат и непросты с вычислительной точки зрения. Мы же снова воспользуемся техникой линейных неравенств и сведем задачу к полуопределенному программированию.

Преобразуем величину  $\|z\|_2^2$ :

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \int_0^{\infty} (Cx + B_2u)^\top (Cx + B_2u) dt = \\ &= \int_0^{\infty} (x^\top C^\top Cx + 2u^\top B_2^\top Cx + u^\top B_2^\top B_2u) dt. \end{aligned}$$

Далее будем предполагать,<sup>1</sup> что  $B_2^\top C = 0$ ; тогда

$$\|z\|_2^2 = \int_0^{\infty} (x^\top C^\top Cx + u^\top B_2^\top B_2u) dt = \int_0^{\infty} x^\top (C^\top C + K^\top B_2^\top B_2K)x dt.$$

На основании Теоремы 2.5.2 заключаем, что если матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^\top Q + QA_c + C^\top C + K^\top B_2^\top B_2K & QD \\ D^\top Q & -\gamma I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (2.5.18)$$

где  $A_c = A + B_1K$ , имеет решение  $Q \succ 0$ , то  $J \leq \gamma$ .

Умножив полученное неравенство (2.5.18) слева и справа на матрицу  $\text{diag}\{P \ 0\}$ , где  $P = Q^{-1}$ , имеем

$$\begin{pmatrix} \Omega & D \\ D^\top & -\gamma I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\Omega = P(A + B_1K)^\top + (A + B_1K)P + PC^\top CP + PK^\top B_2^\top B_2KP,$$

или, дважды применяя лемму Шура,

$$\begin{pmatrix} P(A + B_1K)^\top + (A + B_1K)P & D & PC^\top & PK^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

<sup>1</sup>Это предположение непринципиально и вводится исключительно для упрощения выкладок. В общем случае можно воспользоваться соответствующей заменой переменных, см. Замечание 2.5.2.

После замены  $Y = KP$ , окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (2.5.19)$$

Таким образом, если линейное матричное неравенство (2.5.19) выполняется при некоторых  $P \succ 0$ ,  $Y$  и  $\gamma$ , то  $J \leq \gamma$ , а соответствующий стабилизирующий регулятор получается как  $K = YP^{-1}$ .

**Замечание 2.5.5.** Следует отметить, что будучи  $H_\infty$ -оптимальным, полученный регулятор  $K = YP^{-1}$  может обладать некоторыми недостатками. В частности, из-за нестрогости матричного неравенства (2.5.19), он может не оказаться стабилизирующим (замкнутая система будет находиться на границе устойчивости); строгая знакоопределенность матрицы  $P$  функции Ляпунова не гарантируется и др.

Можно предложить следующий простейший способ получения стабилизирующего регулятора в данном случае: в соответствии с Замечанием 2.4.1 заменим левый верхний блок в (2.5.19) на

$$AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + 2\sigma P,$$

где  $\sigma > 0$  — желаемая степень устойчивости замкнутой системы. ▼

Итак, приходим к следующему результату.

**Теорема 2.5.3.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{\gamma}$  — решение задачи

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + 2\sigma P & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярной переменной  $\gamma$ .

Тогда стабилизирующий регулятор (2.5.17) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

будет минимизировать функционал  $J = \sup_w \|z\|_2^2$  на решениях системы (2.5.16):

$$J_{\min} = \hat{\gamma},$$

а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1} x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы со степенью устойчивости  $\sigma$ .

Мы опять видим, что, как и выше, задачу удалось свести к формату SDP.

Выше рассматривалась задача  $H_\infty$ -оптимизации в предположении, что известно состояние системы. Аналогичная техника возможна и в задаче управления по выходу. Кроме того, возможен и ряд других, более общих постановок задачи, а также ее дискретные аналоги. Не будем на этом останавливаться, так как выкладки становятся значительно сложнее, а идейная сторона решения мало меняется.

## 2.6. Робастное управление

Рассмотрим теперь робастные варианты задач из предыдущего раздела. Еще раз напомним, что далее ограничимся построением *квадратично стабилизирующих* регуляторов; эффективная техника решения таких задач, основанная на линейных матричных неравенств, была развита нами в предыдущих разделах этой главы. Соответственно, говоря о минимизации того или иного критерия, подразумеваем, что она производится в классе робастно *квадратично* стабилизирующих регуляторов.

### 2.6.1. Робастный линейно-квадратичный регулятор

Построим оптимальный линейно-квадратичный регулятор в ситуации, когда матрицы системы содержат неопределенность. В этих условиях встанем на минимаксные позиции и будем оптимизировать качество замкнутой системы против “наихудшей” неопределенности.

Рассмотрим сперва случай, когда параметрическая неопределенность содержится лишь в матрице  $A$  системы:

$$\dot{x} = A(q)x + Bu, \quad q \in \mathcal{Q}.$$

В соответствии с минимаксным подходом будем минимизировать критерий

$$J = \max_{q \in \mathcal{Q}} \int_0^{\infty} (x^\top R x + u^\top S u) dt, \quad R, S \succ 0,$$

по всем квадратично стабилизирующим регуляторам по состоянию  $u = Kx$ .

Способ решения такой задачи немедленно следует из Теоремы 2.5.1, в которой вместо LMI-ограничения (2.5.9) появится совокупность ограничений, соответствующих всем возможным значениям параметра  $q$  из области неопределенности  $\mathcal{Q}$ . Совершенно аналогично задаче о робастной квадратичной стабилизации число ограничений может быть конечным; например, если само множество  $\mathcal{Q}$  конечно, или оно имеет многогранную структуру, а зависимость  $A(q)$  линейна.

Таким образом, робастная линейно-квадратичная задача при параметрической неопределенности допускает простое решение.

Теперь обратимся к системе со структурированной матричной неопределенностью:

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (2.6.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q_2 \times n}$ , а матричная неопределенность  $\Delta \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$  удовлетворяет ограничению

$$\|\Delta\| \leq 1. \quad (2.6.2)$$

и будем искать закон управления в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (2.6.3)$$

минимизируя квадратичный критерий качества

$$J = \max_{\Delta} \int_0^{\infty} (x^\top R x + u^\top S u) dt, \quad R, S \succ 0, \quad (2.6.4)$$

по всем квадратично стабилизирующим регуляторам.

Согласно Теореме 2.5.1, будем предполагать существование матриц  $P \succ 0$  и  $Y$ , удовлетворяющих матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top + BY + Y^\top B^\top & P & Y^\top \\ P & -R^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0,$$

которое представимо в виде

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top & P & Y^\top \\ P & -R^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta (HP \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top (F^\top \ 0 \ 0) \preceq 0.$$

Вновь воспользовавшись леммой Питерсена (Лемма 2.2.7), заключаем, что полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon FF^\top & P & Y^\top & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -S^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (2.6.5)$$

Далее, поскольку весовая матрица  $R$  положительно определена, в силу Следствия 2.2.2 имеем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0$$

для всех  $P$  и  $Y$ , удовлетворяющих ЛМИ (2.6.5). Это означает, что соответствующий регулятор  $K = YP^{-1}$  будет робастно стабилизировать систему (см. раздел 2.4.2).

Наконец, минимизируя на решениях полученного линейного матричного неравенства величину  $x_0^\top P^{-1} x_0$  (переписав ее в виде линейной функции, так же, как и в неробастном случае), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.6.1.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon FF^\top & P & Y^\top & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -S^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярных переменных  $\gamma$  и  $\varepsilon$ .

Тогда регулятор (2.6.3) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

робастно квадратично стабилизирует систему (2.6.1); при этом квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1} x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы при всех неопределенностях (2.6.2), а минимальное значение функционала (2.6.4) на решениях системы (2.6.1) с начальным условием  $x_0$  равно

$$J_{\min} = x_0^\top \hat{P}^{-1} x_0.$$

Отметим, что при достаточно высоком уровне неопределенности  $\|\Delta\|$  решение данной задачи отсутствует. Впрочем, в Теореме 2.4.6 был представлен простой способ отыскания максимального уровня  $\gamma_{\max}^{\text{st}}$ , допускающего квадратичную стабилизацию, так что в предыдущей теореме молчаливо предполагается, что этот уровень не превышен.

### 2.6.2. $H_\infty$ -оптимизация: робастный вариант

Обратимся теперь к робастной постановке задачи  $H_\infty$ -оптимизации и рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + F\Delta H)x + B_1 u + Dw, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и ограниченным в  $L_2$ -норме внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ .

Как и ранее, полагаем, что неопределенность в системе имеет структурированную матричную форму:  $F \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$  и  $H \in \mathbb{R}^{q_2 \times n}$  — постоянные матрицы, а матричная неопределенность  $\Delta \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$  удовлетворяет ограничению

$$\|\Delta\| \leq 1. \quad (2.6.7)$$

Будем искать регулятор в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (2.6.8)$$

который минимизирует величину

$$J = \max_{\|\Delta\| \leq 1} \sup_{|w| \leq 1} \|z\|_2^2$$

на решениях системы (2.6.6) по всем квадратично стабилизирующим регуляторам.

Согласно Теореме 2.5.3, будем предполагать существование матриц  $P \succ 0$ ,  $Y$  и скалярной переменной  $\gamma$ , удовлетворяющих следующему матричному неравенству:

$$\begin{pmatrix} \Phi & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\Phi = (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top.$$

Представив его в виде

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ & D^\top & -\gamma I & 0 \\ & CP & 0 & -I \\ & B_2Y & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta (HP \ 0 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top (F^\top \ 0 \ 0 \ 0) \preceq 0$$

и воспользовавшись леммой Питерсена, заключаем, что полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta$  тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top & PH^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (2.6.9)$$



где

$$\Omega = AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \varepsilon FF^\top.$$

Как и в неробастном случае, из-за нестрогости матричного неравенства (2.6.9), регулятор  $K = YP^{-1}$  может оказаться не стабилизирующим. Поступая аналогично Замечанию 2.5.5, приходим к следующему результату.

**Теорема 2.6.2.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{\gamma}$  — решение задачи

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top & PH^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

где

$$\Omega = AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + 2\sigma P + \varepsilon FF^\top,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярных переменных  $\gamma$  и  $\varepsilon$ .

Тогда регулятор (2.6.8) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно квадратично стабилизирует систему (2.6.6), минимальное значение функционала  $J$  на ее решениях равно

$$J_{\min} = \hat{\gamma},$$

а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы при всех неопределенностях (2.6.7) со степенью устойчивости  $\sigma$ .

Итак, в этой главе введены основные понятия теории линейных матричных неравенств и описаны основные технические средства работы с ними, которые в дальнейшем будут нами систематически использоваться. Заключительные разделы посвящены применению аппарата ЛМН к решению важнейших задач квадратичной и робастной

стабилизации и двух классических задач оптимального управления. Показано, каким образом эти задачи могут записываться в виде линейных матричных неравенств и сводиться к формату полуопределенного программирования. Эти задачи были рассмотрены для иллюстрации возможностей техники LMI, которую отличают удобство, возможность решения разнообразных задач с единых позиций, простота и небольшие вычислительные затраты. Робастные версии задач также поддаются решению путем незначительной модификации этой техники.

## Глава 3

# Системы с ограниченными внешними возмущениями. Метод инвариантных эллипсоидов

Мы переходим к рассмотрению систем, в которых присутствуют неизвестные внешние возмущения, ограниченные в  $L_\infty$ -норме; именно такие возмущения являются предметом изучения в книге. В этой главе рассматриваются задачи анализа и оценивания состояния таких систем, для чего вводится важнейшее понятие инвариантного эллипсоида, которое служит основным средством, с помощью которого будут описываться соответствующие множества достижимости. Построение инвариантных эллипсоидов лежит в основе всех результатов этой и последующих глав.

Еще одно ключевое место в главе занимает доказательство Теоремы 3.1.1: предложенная в нем техника, использующая  $S$ -процедуру для построения функции Ляпунова, на протяжении всего дальнейшего изложения будет применяться в различных модификациях к задачам стабилизации, оптимального и робастного управления и др.

### 3.1. Задача анализа

#### 3.1.1. Непрерывный случай

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0, \quad (3.1.2)$$

где  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора. Подчеркнем, что никаких других ограничений на возмущение  $w(t)$  не накладываем; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Таким образом, рассматриваются  $L_\infty$ -ограниченные внешние возмущения:  $\|w(t)\|_\infty \leq 1$ . Класс таких возмущений будем называть *допустимым*.

Заметим, что сейчас не рассматриваются *интервальные* ограничения вида

$$|w_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad \forall t \geq 0,$$

(они будут обсуждаться позже); ограничения (3.1.2) являются *евклидовыми*. Впрочем, в одномерном случае эти ограничения совпадают.

Будем полагать, что система (3.1.1) устойчива (матрица  $A$  гурвицева), пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Целью является простое и по возможности “аккуратное” описание множества возможных состояний (или выходов) системы, в которых она может оказаться под воздействием допустимых возмущений.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Напомним, что в этом направлении нами уже предприняты некоторые усилия. Так, в конце раздела 1.1.2 введена важная характеристика системы — коэффициент усиления. Для случая, когда и входной, и выходной сигналы измеряются в норме  $L_\infty$ , этот коэффициент был обозначен как  $g_{\infty, \infty}$  (*peak-to-peak gain*). Если матрица  $A$  устойчива, то решения системы (3.1.1) при всех допустимых возмущениях  $w(t)$  ограничены и величина  $g_{\infty, \infty}$  конечна. Далее, в разделе 1.5.3 дана более точная, исчерпывающая характеристика выходного сигнала, основанная на построении достижимого множества, однако, его описание в этой ситуации наталкивается на определенные трудности.

В этом разделе вводится ключевое для всей книги понятие *инвариантного эллипсоида* для систем с внешними возмущениями, которое будет служить систематической основой построения эффективных оценок достижимых множеств.

**Определение 3.1.1.** Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0, \quad (3.1.3)$$

будем называть *инвариантным* для системы (3.1.1), если из условия  $x(0) \in \mathcal{E}_x$  следует  $x(t) \in \mathcal{E}_x$  для всех моментов времени  $t \geq 0$  и всех допустимых возмущений  $w(t)$ . Матрицу  $P$  будем называть *матрицей эллипсоида*  $\mathcal{E}_x$ .

Отметим, что из условия управляемости системы следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида — совпадающего со всем фазовым пространством. Вообще говоря, инвариантный эллипсоид может оказаться неограниченным (матрица  $Q = P^{-1}$  вырождена) или иметь меньшую размерность (при отсутствии управляемости), см. раздел 2.2.2. Как правило, будем иметь дело с регулярным случаем, когда инвариантные эллипсоиды имеют полную размерность и ограничены.

Как будет показано ниже (см. Следствие 3.1.1), инвариантный эллипсоид для линейной системы обладает следующим свойством: при  $x(0) \notin \mathcal{E}_x$  будет

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_x$$

(при этом, возможно,  $x(t) \in \mathcal{E}_x$  при  $t \geq T$  для некоторого  $T > 0$ ), то есть траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида  $\mathcal{E}_x$ , стремится к эллипсоиду  $\mathcal{E}_x$  с течением времени (или попадает в него в некоторый конечный момент  $T > 0$ ). Таким образом, инвариантный эллипсоид является также и *притягивающим*.

Как показано в разделе 1.5, сами достижимые множества являются выпуклыми, инвариантными и притягивающими, поэтому наличие этих принципиальных свойств у инвариантных эллипсоидов представляется существенным при использовании их для аппроксимации достижимых множеств.

Из данного определения инвариантного эллипсоида вытекают два подхода к изучению воздействия внешних возмущений на поведение системы:

— если начальное состояние системы принадлежит инвариантному эллипсоиду, имеем *равномерную* оценку поведения ее траекторий — в

каждый момент времени траектории системы будут находиться в этом эллипсоиде при любых допустимых внешних возмущениях;

— если начальные условия произвольны, оценка поведения траекторий системы будет *асимптотической* — при любом допустимом внешнем возмущении с течением времени траектория будет стремиться к инвариантному эллипсоиду.

**Замечание 3.1.1.** Важно отметить, что понятие инвариантного эллипсоида является более “робастным” по сравнению с множеством достижимости. Действительно, в последнем предполагается, что начальные условия — нулевые, однако на практике это предположение не всегда можно гарантировать; более того, проверка принадлежности данного ненулевого начального состояния достижимому множеству невозможна без построения самого множества. В случае, когда начальное состояние лежит вне достижимого множества, построения еще более усложняются.

Если же принять на вооружение технику инвариантных эллипсоидов, то учет ненулевых начальных условий гораздо более прост. Так, пусть в начальном состоянии системы содержится неопределенность вида

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P_0^{-1} x \leq 1\}, \quad P_0 \succ 0,$$

тогда выполнение условия  $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_x$ , эквивалентного матричному неравенству

$$P \succcurlyeq P_0, \quad (3.1.4)$$

гарантирует, что траектории системы, начавшись в эллипсоиде  $\mathcal{E}_0$ , не покинут инвариантный эллипсоид  $\mathcal{E}_x$ .

В случае непосредственного задания начального условия  $x_0 \neq 0$ , достаточно потребовать, чтобы

$$x_0^\top P^{-1} x_0 \leq 1;$$

это условие по лемме Шура представимо в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \quad (3.1.5)$$

Таким образом, добавляя условия (3.1.4) или (3.1.5) в качестве дополнительных в формулировке всех последующих результатов книги, можно легко найти инвариантный эллипсоид, заведомо содержащий имеющиеся начальные условия. ▼

Следует отметить, что, поскольку достижимое множество  $\mathcal{R}$  системы (3.1.1) минимально по включению среди всех инвариантных множеств, то для любого инвариантного эллипсоида (даже минимального по какому-либо критерию) имеет место вложение  $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_x$ , причем качество такой аппроксимации может быть весьма плохим.

**Пример 3.1.1.** Рассмотрим устойчивую систему

$$\dot{x} = Ax + Dw$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -20 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и ограниченным внешним возмущением  $\|w\|_\infty \leq 1$ ; ср. с системой из Примера 1.5.1, от которой матрица  $A$  отличается лишь величиной правого нижнего элемента  $a_{22}$ .

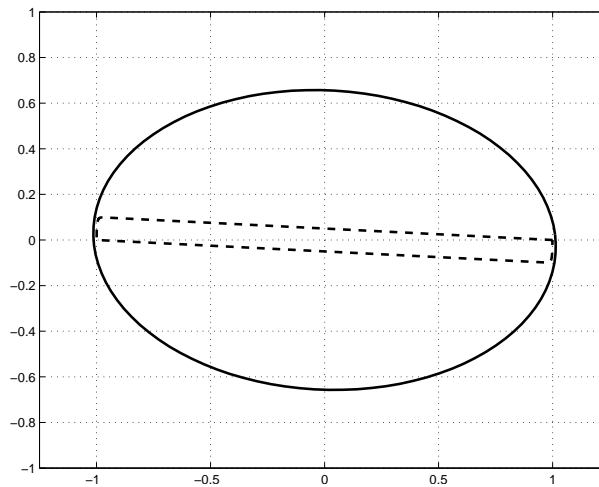


Рис. 3.1.1. Достижимое множество и минимальный инвариантный эллипс для системы из Примера 3.1.1.

На Рис. 3.1.1 изображено достижимое множество и минимальный по критерию следа инвариантный эллипс (способ их построения будет описан ниже в этом разделе). Более того, можно показать, что с ростом абсолютной величины элемента  $a_{22}$  инвариантный эллипс будет давать все более грубую оценку достижимого множества. ▼

Иными словами, подход на основе инвариантных эллипсоидов дает лишь субоптимальные решения, точность которых может быть невысокой. Однако приведенный пример демонстрирует лишь *теоретическую* возможность того, что получаемые оценки могут быть плохими. На многочисленных содержательных примерах будет показано, что изучаемый в книге подход дает весьма высокую точность аппроксимации; в совокупности с простотой его реализации и единообразием применения к различным задачам управления, он представляется эффективным методом анализа и синтеза в условиях ограниченных внешних возмущений. Поэтому в дальнейшем будем оперировать исключительно понятием инвариантного эллипсоида, не прибегая к построению достижимых множеств.

Отметим, что в качестве инвариантных множеств, аппроксимирующих достижимые множества, разумеется, могут использоваться не только эллипсоиды. Так, например, в разделе 6.4 будут рассматриваться системы специального вида, для которых легко и естественно строить *инвариантные параллелепипеды* (исходя не из квадратичной, а из линейной функции Ляпунова).

Теперь сформулируем основной результат этого раздела.

**Теорема 3.1.1.** *Эллипсоид (3.1.3) является инвариантным для системы*

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad \|w\| \leq 1, \quad (3.1.6)$$

*тогда и только тогда, когда его матрица  $P$  удовлетворяет линейным матричным неравенствам*

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad (3.1.7)$$

*при некотором  $\alpha > 0$ .*

Приводимое ниже доказательство отличается от “общепринятых” и основано на принципиально иной технике, использующей неущербный вариант  $S$ -процедуры с двумя ограничениями. При этом появляются два числовых параметра, от одного из которых можно избавиться с помощью следующей леммы.

**Лемма 3.1.1.** *Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$  — заданные матрицы,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда множества*

$$\Omega_1 = \{(P, \alpha): AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0, \quad \alpha > 0\}$$



*и*

$$\Omega_2 = \left\{ (P, \alpha): AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^\top \preccurlyeq 0 \right. \\ \left. \text{при некотором } 0 < \beta \leq \alpha \right\}$$

*совпадают.*

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ; покажем обратное включение.

Пусть  $(P, \alpha) \in \Omega_2$ , тогда существует  $0 < \beta \leq \alpha$  такое, что

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^\top \preccurlyeq 0.$$

При этом

$$\begin{aligned} AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top &= \\ &= AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^\top + \underbrace{\left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)}_{\leq 0} DD^\top \preccurlyeq 0, \end{aligned}$$

то есть  $(P, \alpha) \in \Omega_1$ . ■

Вернемся к доказательству Теоремы 3.1.1.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.1.6). Для того, чтобы траектории  $x(t)$  системы не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \leq 1\}, \quad (3.1.8)$$

*достаточно* потребовать, чтобы при  $\dot{V}(x, w) > 0$  (и всех допустимых внешних возмущений  $w$ ) выполнялось  $V(x) < 1$ . Это условие представимо в виде

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \text{при} \quad V(x) \geq 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1. \quad (3.1.9)$$

С учетом того, что производная функции  $V(x)$  в силу системы (3.1.6) имеет вид

$$\dot{V}(x, w) = \dot{x}^\top Qx + x^\top Q\dot{x} = x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx,$$

условие (3.1.9) запишем как

$$x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx \leq 0$$

при  $x^\top Qx \geq 1$  и  $w^\top w \leq 1$ . (3.1.10)

Введем в рассмотрение вектор  $s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$  и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^\top Q + QA & QD \\ D^\top Q & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

тогда условие (3.1.10) примет вид

$$f_0(s) \leq 0 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq -1 \quad \text{и} \quad f_2(s) \leq 1, \quad (3.1.11)$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Воспользуемся  $S$ -процедурой; легко видеть, что условия (2.2.17) в ее формулировке выполнены. Действительно, при любых  $\mu_1 < 0$ ,  $\mu_2 > 0$  имеем

$$\mu_1 \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

а для вектора

$$s_0 = \begin{pmatrix} \gamma Q^{-1/2} e \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\gamma > 1$ , а  $|e| = 1$ , верно

$$s_0^\top \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s_0 = -\gamma^2 < -1$$

и

$$s_0^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} s_0 = 0 < 1.$$

Следовательно, условие (3.1.11) эквивалентно выполнению неравенства

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preceq 0 \quad (3.1.12)$$

при некоторых неотрицательных  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что  $\alpha \geq \beta$ .

В исходных обозначениях полученное неравенство имеет вид

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + \alpha Q & QD \\ D^\top Q & -\beta I \end{pmatrix} \preceq 0$$

Поскольку  $\beta > 0$ , то, воспользовавшись леммой Шура, приходим к соотношению

$$A^\top Q + QA + \alpha Q + \frac{1}{\beta} QDD^\top Q \preceq 0.$$

Умножив полученное неравенство слева и справа на матрицу  $P = Q^{-1}$ , получаем линейное матричное неравенство

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^\top \preceq 0.$$

Полагая в силу Леммы 3.1.1

$$\beta = \beta_{\max} = \alpha > 0,$$

приходим к условиям (3.1.7).

С другой стороны, *необходимым* условием инвариантности эллипсоида (3.1.8) является условие

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \text{при} \quad V(x) = 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1. \quad (3.1.13)$$

Оказывается, оно также эквивалентно соотношению (3.1.7).

Действительно, условие (3.1.13) запишем как

$$x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx \leq 0 \quad \text{при} \quad x^\top Qx = 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1,$$

и воспользуемся  $S$ -процедурой. С учетом Замечания 2.2.5 приходим к соотношению (3.1.12) при некоторых числах  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что  $\beta \geq 0$  и  $\alpha \geq \beta$ . Поскольку при этом параметр  $\alpha$  оказывается неотрицательным, вновь приходим к соотношениям (3.1.7).

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P \succ 0$  эквивалентно выполнению матричных неравенств (3.1.7) при некотором  $\alpha > 0$ . ■

**Замечание 3.1.2.** Важно отметить, что идея, лежащая в основе доказательства Теоремы 3.1.1, будет регулярно эксплуатироваться нами в дальнейшем применительно к задачам в непрерывном времени. Она состоит в том, что для системы с возмущением строится функция  $V(x) = x^\top Qx$ , подчиняющаяся условиям (3.1.9). Как нетрудно видеть,

эти условия обеспечивают ее убывание на траекториях системы (3.1.6) вне эллипсоида, задаваемого матрицей  $Q$ . Иными словами, в этой области фазового пространства функция  $V(x)$  является квадратичной функцией Ляпунова для возмущенной системы (3.1.6). Соответственно, инвариантность получаемого эллипсоида доказывается исходя не из “внутреннего” определения инвариантности, а из наличия “внешней” функции Ляпунова. ▼

С учетом сделанного замечания получаем

**Следствие 3.1.1.** *Инвариантный эллипсоид для линейной непрерывной системы является притягивающим.*

Как установлено выше, условие (3.1.9) является необходимым и достаточным условием инвариантности эллипсоида, поэтому будем требовать его выполнения в доказательствах последующих теорем.

Из Теоремы 3.1.1 вытекает следующее свойство масштабируемости инвариантных эллипсоидов.

**Следствие 3.1.2.** *Если  $P$  — матрица некоторого инвариантного эллипсоида, то для всякого  $\varepsilon > 0$  матрица  $(1+\varepsilon)P$  также определяет инвариантный эллипсоид.*

**Доказательство.** Пусть матрица  $P \succ 0$  удовлетворяет соотношению (3.1.7) при некотором  $\alpha > 0$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)AP + (1+\varepsilon)PA^\top + \alpha(1+\varepsilon)P + \frac{1}{\alpha}DD^\top &= \\ &= (\varepsilon+1)(AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^\top) - \frac{\varepsilon}{\alpha}DD^\top. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равенства неположительно определено ввиду (3.1.7); в совокупности с  $DD^\top \succcurlyeq 0$  это влечет неположительно определенность и всей правой части, так что матрица  $(1+\varepsilon)P$  удовлетворяет соотношению (3.1.7). ■

**Замечание 3.1.3.** По лемме Шура матричное неравенство (3.1.7) может быть записано в следующих эквивалентных видах:

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + \alpha Q & QD \\ D^\top Q & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

где  $Q = P^{-1}$ . Несмотря на некоторое усложнение, именно такие формы записи позволят в дальнейшем получить основные результаты, относящиеся к непрерывным системам. ▼

Инвариантные эллипсоиды могут рассматриваться как средство оценивания возможных значений *состояния* динамической системы, находящейся под влиянием ограниченного постоянно действующего возмущения. Однако часто интерес представляет оценивание выхода системы, в простейшем случае представленного в виде  $z = Cx$ . Соответственно, задача состоит в построении “простых” и *минимальных* в некотором смысле множеств, содержащих вектор выхода.

В соответствии с Леммой 2.2.4 об образе эллипсоида при линейном отображении имеем, что если  $\mathcal{E}_x$  — инвариантный эллипсоид (3.1.3) с матрицей  $P$ , то выход  $z = Cx$  системы (3.1.1) при  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l: z^\top (CPC^\top)^{-1} z \leq 1\}, \quad (3.1.14)$$

который будем называть *ограничивающим* для выхода  $z$ . Отметим, что, как вытекает из Следствия 3.1.1, при  $x_0 \notin \mathcal{E}_x$  выход  $z$  будет стремиться к эллипсоиду  $\mathcal{E}_z$ .

В частности, в случае одномерного выхода ( $l = 1$ ) ограничивающий эллипсоид представляет собой отрезок

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}: |z| \leq \sqrt{CPC^\top}\}.$$

Разумеется, при  $C = I$ , когда в качестве выхода системы рассматривается весь вектор состояния, ограничивающий эллипсоид совпадает с инвариантным.

Для корректности записи эллипсоида в форме (3.1.14) требуется, чтобы матрица  $CPC^\top$  была обратима, то есть матрица  $C$  имела максимальный строчный ранг (как это и было сформулировано в Лемме 2.2.4). Если не оговорено противное, везде ниже будем предполагать, что это свойство выполняется, так что ограничивающий эллипсоид имеет полную размерность (см. Замечание 2.2.4). В отсутствие этого свойства соответствующие результаты могут быть легко переписаны с использованием иных форм записи эллипсоида (см. раздел 2.2.2), но не будем останавливаться на этом.

Итак, степень влияния ограниченных внешних возмущений  $w(t)$  на выход  $z(t)$  системы будем характеризовать *минимальным* ограничивающим эллипсоидом (3.1.14).

Минимальность эллипсоидов можно понимать по-разному; этот вопрос подробно рассматривался в разделе 2.2.2. Мы примем в качестве

основного линейный критерий следа

$$f(P) = \text{tr } CPC^T, \quad (3.1.15)$$

соответствующий сумме квадратов длин полуосей эллипсоида  $\mathcal{E}_z$ .

Как отмечалось выше, в качестве других естественных критериев минимальности можно выбирать длину наибольшей полуоси эллипсоида выхода, равную

$$g(P) = \sqrt{\|CPC^T\|},$$

или его объем, выражаемый величиной

$$h(P) = c_l \sqrt{\det CPC^T},$$

где  $c_l$  — объем единичного шара в  $\mathbb{R}^l$ ; см. Приложение А (в скалярном случае все критерии совпадают).

Поскольку система (3.1.1) предполагается устойчивой, то для каждой из указанных выше функций существует конечный ограничивающий эллипсоид (3.1.14), ее минимизирующий. Отыскание такого минимального эллипсоида можно проводить на основе Теоремы 3.1.1, решая при каждом фиксированном значении параметра  $\alpha$  задачу полуопределенного программирования (минимизируя тот или иной критерий при ЛМІ-ограничениях (3.1.7)) и выбирая минимальное среди полученных решений. Именно такая схема и будет использоваться в дальнейшем.

Для критерия следа (3.1.15) можно получить следующее упрощение.

**Следствие 3.1.3.** *Минимальный по критерию следа ограничивающий эллипсоид для системы (3.1.1) с  $x_0 = 0$  принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами  $CP(\alpha)C^T$ , где  $P(\alpha)$  удовлетворяет уравнению Ляпунова*

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T = 0 \quad (3.1.16)$$

на интервале  $0 < \alpha < -2 \max_i \text{Re } \lambda_i(A)$ . При этом функция

$$\varphi(\alpha) = \text{tr } CP(\alpha)C^T$$

строго выпукла на указанном интервале.

**Доказательство.** Уравнение (3.1.16) представимо в виде

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T = -\frac{1}{\alpha}DD^T$$

и, согласно Лемме 1.2.3, имеет единственное положительно определенное решение тогда и только тогда, когда матрица  $A + \frac{\alpha}{2}I$  гурвицева:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left( A + \frac{\alpha}{2} I \right) < 0,$$

то есть  $0 < \alpha < -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$ . Пользуясь Следствием 1.2.3, получаем первое утверждение.

Покажем теперь, что функция

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^\top$$

строго выпукла на интервале  $(0, -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$ . В соответствии с Леммой 1.2.3, решение уравнения (3.1.16) представимо в явном виде как

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)t} \frac{1}{\alpha} DD^\top e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)^\top t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} e^{At} DD^\top e^{A^\top t} dt > 0, \end{aligned}$$

следовательно

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^\top = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \operatorname{tr}[C e^{At} DD^\top e^{A^\top t} C^\top] dt > 0.$$

Заметим, что функция

$$\mu(\alpha) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$$

при всех  $t \geq 0$  строго выпукла на интервале  $(0, -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$ , а

$$\psi(t) \doteq \operatorname{tr}[C e^{At} DD^\top e^{A^\top t} C^\top] \geq 0,$$

причем при некоторых  $t \geq 0$  это неравенство является строгим. Следовательно, в силу непрерывности  $\psi(t)$ , функция  $\varphi(\alpha)$  строго выпукла на интервале  $(0, -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$ . ■

Согласно Следствию 3.1.3, при поиске минимального (по критерию следа!) ограничивающего эллипсоида достаточно рассматривать однопараметрическое семейство *уравнений* (3.1.16). При этом задача сводится к одномерной выпуклой минимизации на известном конечном интервале, что приводит к единственному минимальному ограничивающему эллипсоиду. Можно показать, что решение, доставляющее минимум другим упоминавшимся критериям, вообще говоря, не единственно. Как уже не раз отмечалось, везде ниже будем пользоваться критерием следа, если не оговорено противное.

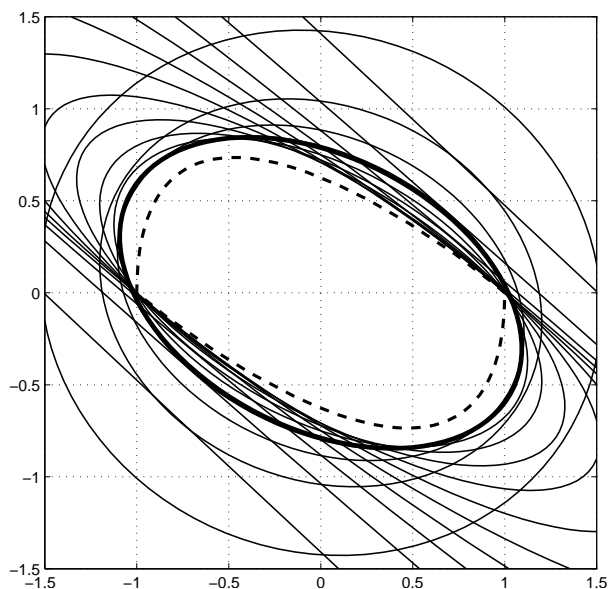


Рис. 3.1.2. Семейство инвариантных эллипсов для системы из Примера 1.5.1.

**Пример 3.1.2.** На Рис. 3.1.2 для системы из Примера 1.5.1 изображены инвариантные эллипсы с матрицами, являющимися решением уравнения Ляпунова (3.1.16) при нескольких значениях параметра  $\alpha$  из соответствующего интервала; жирной линией выделен минимальный по критерию следа эллипс. Заметим, что пересечение всех инвариантных эллипсов, будучи инвариантным множеством, в общем случае эллипсом не является. Для сравнения на этом же рисунке пунктиром изображена граница достижимого множества системы. ▼



Прежде чем перейти к иллюстрации описанного подхода на модельной задаче, остановимся еще на одной интересной характеристике инвариантных эллипсоидов. В процессе доказательства Теоремы 3.1.1 строится функция Ляпунова  $V(x)$  для системы (3.1.1) такая, что

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \text{при} \quad V(x) \geq 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1.$$

Естественно задаться целью найти “наихудшее” возмущение  $\tilde{w}(t)$ , — то, которое максимизирует производную  $\dot{V}(x, w)$  функции Ляпунова в силу системы.

Отметим, что так определяемое возмущение является наихудшим не для самой системы, а лишь для нашего метода оценивания ее возможного поведения: такое возмущение “в наибольшей степени противодействует” выбранной функции Ляпунова (ср. с понятием наихудшего возмущения, введенного в разделе 1.5.3).

**Лемма 3.1.2.** Пусть матрица  $P \succ 0$  определяет квадратичную функцию Ляпунова для системы (3.1.1) с ненулевым начальным условием. Тогда наихудшее возмущение  $\tilde{w}(t)$  задается формулой

$$\tilde{w}(t) = \frac{D^\top P^{-1}x(t)}{|D^\top P^{-1}x(t)|}. \quad (3.1.17)$$

В частности, если возмущение одномерно, то

$$\tilde{w}(t) = \text{sign}(D^\top P^{-1}x(t)).$$

**Доказательство.** Потребуем, чтобы

$$\dot{V}(x, w) \longrightarrow \max,$$

где  $V(x) = x^\top P^{-1}x$  — функция Ляпунова, построенная на решениях системы (3.1.1).

Имеем:

$$\dot{V}(x, w) = x^\top (A^\top P^{-1} + P^{-1}A)x + 2w^\top D^\top P^{-1}x.$$

Тогда внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$  является решением задачи

$$\max_{|w| \leq 1} (w, D^\top P^{-1}x),$$

откуда имеем (3.1.17). ■

Видим, что здесь, по-существу, происходит выход за класс программных внешних возмущений и допускается их зависимость от фазового состояния системы.

**Пример 3.1.3.** Продемонстрируем эффективность предложенного подхода на примере двойного пружинного маятника, движущегося в вязкой среде. Наряду с двухмассовой системой из Примера 2.4.1, эта модель часто используется для тестирования алгоритмов управления и далее будет неоднократно использоваться для иллюстрации предлагаемого метода.

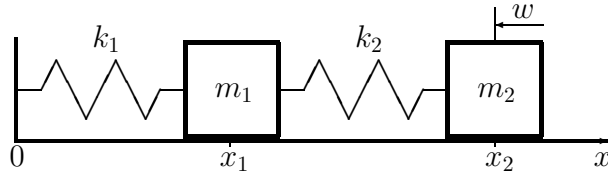


Рис. 3.1.3. Двойной пружинный маятник из Примера 3.1.3.

Как и ранее, обозначим через  $x_1, x_2$  — координаты левого и правого тела, через  $v_1, v_2$  — их скорости, тогда вектор состояния имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix};$$

и пусть на правое тело воздействует ограниченное внешнее возмущение  $|w| \leq 1$ , см. Рис. 3.1.3. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \gamma v_1, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 - \gamma v_2 + \frac{1}{m_2}w, \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2$  — коэффициенты жесткости левой и правой пружины,  $m_1, m_2$  — массы левого и правого тела,  $\gamma$  — коэффициент сопротивления среды.

Взяв в качестве выхода вектор

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

приходим к системе вида (3.1.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\gamma & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Примем следующие численные значения параметров:

$$k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1, \quad \gamma = 0,2,$$

и воспользуемся Следствием 3.1.3. В результате находим матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 30,3772 & 40,7626 & -1,5189 & -4,0145 \\ * & 71,5351 & -0,0617 & -3,5768 \\ * & * & 19,8400 & 9,9839 \\ * & * & * & 30,4148 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному (по критерию следа) ограничивающему эллипсу с матрицей

$$C\hat{P}C^T = \begin{pmatrix} 19,8400 & 9,9839 \\ 9,9839 & 30,4148 \end{pmatrix}.$$

На Рис. 3.1.4 изображен получившейся минимальный ограничивающий эллипс; для сравнения пунктирной линией изображено истинное ограничивающее множество для выхода системы — двумерный образ множества достижимости (для состояния) при линейном преобразовании с матрицей  $C$ .

На этом же рисунке показана траектория выхода системы при некотором выборе начального положения внутри соответствующего инвариантного эллипсоида и при воздействии на систему наихудшего внешнего возмущения  $\tilde{w}(t)$ , определяемого Леммой 3.1.2. Как видно из рисунка, степень консерватизма полученной эллипсоидальной оценки весьма невелика. ▼

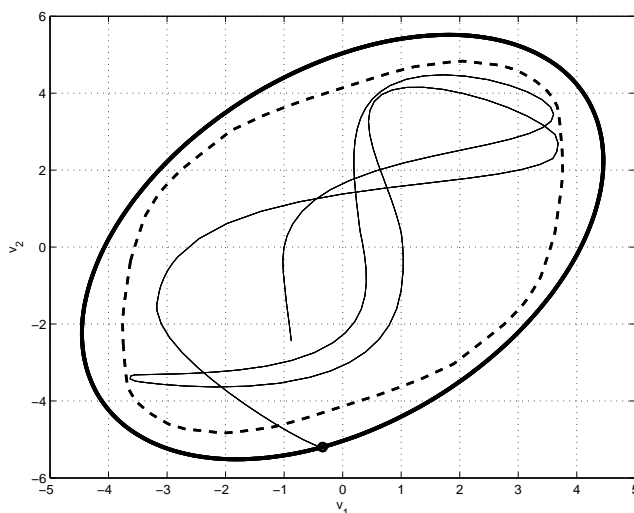


Рис. 3.1.4. Ограничивающий эллипс и траектория системы из Примера 3.1.3.

Сделаем важный комментарий. Не следует думать, что нам удалось точно решить задачу, и надобность в эллипсоидальном описании отпадает, — достижимое множество для выхода приведено на рисунке исключительно в иллюстративных целях; построения осуществлялись следующим образом. Во-первых, четырехмерное множество достижимости для состояний системы строилось с помощью опорных функций, как это было показано в разделе 1.5.3. Так, были сгенерированы  $N = 500$  векторов  $c$ , равномерно распределенных на единичном шаре в  $\mathbb{R}^4$ , и по ним построены  $2N$  опорных гиперплоскостей с нормалью  $\pm c$  (в силу свойства симметрии достижимых множеств), определяющих некоторый многогранник (параллелотоп). Далее, используя пакет МРТ (Multi-Parametric Toolbox) системы МАТЛАВ, были вычислены вершины  $v_i$  полученного многогранника; наконец, выпуклая оболочка их двумерных образов  $Cv_i$  взята в качестве приближенного описания достижимого множества для выхода.

Будучи очень трудоемким даже для невысокой размерности, такое построение не дает сколько-нибудь надежного описания множества, в то время как отыскание минимального инвариантного эллипсоида в соответствии со Следствием 3.1.3 требует порядка сотых долей секунды на стандартном персональном компьютере.

**Интервальные ограничения на возмущения**

Как отмечалось выше, вместо евклидовых ограничений (3.1.2) на внешние возмущения можно наложить *интервальные* ограничения:

$$|w_i(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.1.18)$$

Такие ограничения естественны для многих практических приложений, когда компоненты вектора возмущений в модели объекта имеют различную физическую природу и никак не связаны между собой. При такой постановке можно получить *субоптимальное* решение задачи в терминах ЛМІ.

Следующая теорема является аналогом Теоремы 3.1.1.

**Теорема 3.1.2.** *Эллипсоид (3.1.3) является инвариантным для системы*

$$\dot{x} = Ax + Dw \quad (3.1.19)$$

*при интервальных ограничениях (3.1.18), если его матрица  $P$  удовлетворяет линейным матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad (3.1.20)$$

*при некоторых  $\alpha > 0$  и  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$  таких, что*

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq \alpha.$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.1.19) с внешними возмущениями (3.1.18).

Представим интервальные ограничения (3.1.18) в виде

$$w^\top I_i w \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$I_i = \text{diag}\left\{ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_i \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \right\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда, для того, чтобы траектории системы (3.1.19) не вышли из эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \leq 1\},$$

потребуем выполнения

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \text{при} \quad V(x) \geq 1 \quad \text{и} \quad w^\top I_i w \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

то есть

$$\begin{aligned} x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx \leq 0 \\ \text{при} \quad x^\top Qx \geq 1 \quad \text{и} \quad w^\top I_i w \leq 1, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Поскольку при более, чем двух ограничениях,  $S$ -процедура справедлива лишь в части достаточности, получаем, что условие (3.1.21) будет выполнено, если справедливо матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + \alpha Q & QD \\ D^\top Q & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0$$

при некоторых значениях  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$  таких, что

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq \alpha.$$

Домножая полученное матричное неравенство слева и справа на матрицу  $\text{diag}\{P \ I\}$ , где  $P = Q^{-1}$ , приходим к (3.1.20).  $\blacksquare$

**Следствие 3.1.4.** Пусть  $\hat{P}$  — решение задачи

$$\text{tr } C\hat{P}C^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq \alpha, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярных переменных  $\beta_1, \dots, \beta_m$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица

$$C\hat{P}C^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  системы (3.1.1) при внешних возмущениях вида (3.1.18) и нулевых начальных условиях.

Отметим различия в результатах для двух рассмотренных типов ограничений. В интервальном случае имеем более широкое множество допустимых возмущений (поскольку единичный  $l_2$ -шар содержится в единичном  $l_\infty$ -шаре), поэтому получаемый эллипсоид содержит в себе эллипсоид, построенный для случая евклидовых ограничений. Что существеннее, Теорема 3.1.2 предоставляет лишь достаточные условия инвариантности, приводящие к более консервативным оценкам. Кроме того, здесь приходится решать задачу SDP (а не уравнение Ляпунова) при каждом допустимом значении параметра  $\alpha$ .

**Пример 3.1.4.** Сравним результаты, получаемые для двух типов ограничений на примере двойного пружинного маятника (см. Пример 3.1.3). Однако на этот раз будем предполагать, что компоненты внешнего возмущения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

воздействуют на каждое из тел, см. Рис. 3.1.5.

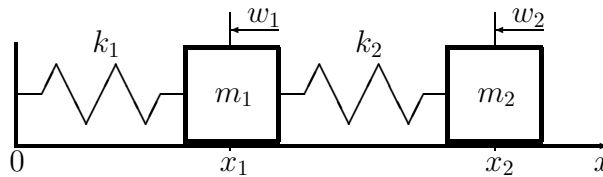


Рис. 3.1.5. Двойной пружинный маятник из Примера 3.1.4.

Модель возмущенных колебаний системы будет описываться уравнением

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\gamma & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\gamma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} w,$$

в котором все входящие величины имеют тот же смысл, что и в Примере 3.1.3.

В качестве выхода системы возьмем вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

При единичных значениях параметров и коэффициенте сопротивления среды  $\gamma = 0,2$  приходим к системе (3.1.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае евклидовых ограничений (3.1.2), согласно Следствию 3.1.3 находим матрицу

$$\widehat{P}_{\text{euc}} = \begin{pmatrix} 50,7643 & 51,1480 & -2,5382 & -2,5574 \\ * & 101,9123 & -2,5574 & -5,0956 \\ * & * & 50,1269 & 0,1279 \\ * & * & * & 50,2548 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующую минимальному ограничивающему эллипсу с матрицей

$$C\widehat{P}_{\text{euc}}C^T = \begin{pmatrix} 50,7643 & 51,1480 \\ 51,1480 & 101,9123 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, для случая интервальных ограничений

$$|w_1(t)| \leq 1, \quad |w_2(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0,$$

согласно Теореме 3.1.2 находим матрицу

$$\widehat{P}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 101,0902 & 94,6315 & -5,0545 & -3,3260 \\ * & 195,4406 & -6,1372 & -9,7720 \\ * & * & 107,0435 & -6,7913 \\ * & * & * & 99,8319 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида и соответствующую матрицу ограничивающего эллипса

$$C\widehat{P}_{\text{int}}C^T = \begin{pmatrix} 101,0902 & 94,6315 \\ 94,6315 & 195,4406 \end{pmatrix}.$$

Естественно,  $l_\infty$ -эллипс оказался значительно больше  $l_2$ -эллипса. ▼



**Ограничивающий эллипсоид при возмущении в выходе**

Усложним задачу и рассмотрим ситуацию, когда внешние возмущения воздействуют также и на выход системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w_1, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + D_2 w_2, \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m_2}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешними возмущениями<sup>2</sup>  $w_1(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$  и  $w_2(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ , удовлетворяющими ограничению (3.1.2).

Система (3.1.22) предполагается устойчивой (матрица  $A$  гурвицева), пара  $(A, D_1)$  управляема, а  $(C \ D_2)$  — матрица максимального строчного ранга. Последнее требование обеспечивает полноту ограничивающего эллипсоида для выхода системы (ср. с задачей без возмущения в выходе).

Как показано выше, при отсутствии возмущений в выходе системы матрицей ограничивающего эллипсоида является  $CPCT^\top$ , где  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида системы. При возмущениях в выходе ограничивающий эллипсоид определяется в соответствии со следующей теоремой.

**Теорема 3.1.3.** *Матрица минимального ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  системы (3.1.22) с  $x_0 = 0$  дается решением  $\hat{H}$  задачи*

$$\text{tr } H \longrightarrow \min \quad (3.1.23)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AS + SA^\top + \alpha S & D_1 \\ D_1^\top & -\alpha \varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (3.1.24)$$

$$\begin{pmatrix} H - CSC^\top & D_2 \\ D_2^\top & (1 - \varepsilon)I \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (3.1.25)$$

$$H \succ 0, \quad S \succ 0,$$

с матричными переменными  $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , скалярной переменной  $\varepsilon$  и скалярным параметром  $\alpha \in (0, -2 \max_i \text{Re } \lambda_i(A))$ .

<sup>2</sup>В данной постановке задачи мы будем считать возмущения в уравнении состояния и в выходе системы *различными*; ср. с комментарием к формуле (1.1.2) на с. 25. Аналогичная ситуация будет иметь место и в дискретном случае.

**Доказательство.** Введя в рассмотрение составной вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},$$

представим выход  $z$  системы (3.1.22) в виде

$$z = Cx + D_2w = \begin{pmatrix} C & D_2 \end{pmatrix} g.$$

Пусть вектор  $x$  состояния системы принадлежит инвариантному эллипсоиду с матрицей  $P$ ; найдем эллипсоид, содержащий вектор  $g$ .  
Условие

$$g^\top R^{-1} g \leq 1 \quad \text{при} \quad x^\top P^{-1} x \leq 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1$$

представимо в виде

$$g^\top R^{-1} g \leq 1 \quad \text{при} \quad g^\top \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g \leq 1 \quad \text{и} \quad g^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} g \leq 1. \quad (3.1.26)$$

Воспользуемся  $S$ -процедурой, отметив, что условия (2.2.17) в ее формулировке выполнены. Действительно, при любых  $\mu_1, \mu_2 > 0$  имеем

$$\mu_1 \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

а для вектора  $g_0 = 0$  верно

$$g_0^\top \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g_0 = 0 < 1$$

и

$$g_0^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} g_0 = 0 < 1.$$

Таким образом, условие (3.1.26) эквивалентно выполнению матричного неравенства

$$R^{-1} \preceq \varepsilon \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (3.1.27)$$

при  $\varepsilon, \delta \geq 0$  таких, что  $\varepsilon + \delta \leq 1$ .

Согласно Лемме 2.2.4, если вектор  $g$  содержится в эллипсоиде с матрицей  $R$ , то выход системы  $z$  будет принадлежать эллипсоиду с матрицей  $(C \ D_2)R(C \ D_2)^\top$ . При этом, согласно (3.1.27),

$$R \succcurlyeq R_{\min}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}P & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\varepsilon}I \end{pmatrix}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

(нетрудно видеть, что без ограничения общности можно положить  $\delta = \delta_{\max} = 1 - \varepsilon$ ).

Поскольку

$$(C \ D_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}P & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\varepsilon}I \end{pmatrix} (C \ D_2)^\top = \frac{1}{\varepsilon}CPC^\top + \frac{1}{1-\varepsilon}D_2D_2^\top,$$

согласно Теореме 3.1.1 приходим к задаче

$$\operatorname{tr} \left( \frac{1}{\varepsilon}CPC^\top + \frac{1}{1-\varepsilon}D_2D_2^\top \right) \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}D_1D_1^\top \preccurlyeq 0, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

При этом, в силу Следствия 3.1.3,  $\alpha \in (0, -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$ .

Согласно Лемме 2.1.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr} H \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}D_1D_1^\top \preccurlyeq 0,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}CPC^\top + \frac{1}{1-\varepsilon}D_2D_2^\top \preccurlyeq H, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

которая содержит два скалярных параметра  $\alpha$  и  $\varepsilon$ , нелинейно входящих в ограничения.

Оказывается, можно избежать процедуры двумерной оптимизации по  $\alpha$  и  $\varepsilon$ . Введя вспомогательную матричную переменную

$$S = \frac{1}{\varepsilon}P,$$

придадим полученным условиям вид

$$AS + SA^\top + \alpha S + \frac{1}{\alpha\varepsilon} D_1 D_1^\top \preceq 0,$$

$$CSC^\top + \frac{1}{1-\varepsilon} D_2 D_2^\top \preceq H, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Преобразовав каждое из матричных неравенств по лемме Шура, приходим к задаче (3.1.23)–(3.1.25). Отметим, что при фиксированном  $\alpha$  в полученные ограничения параметр  $\varepsilon$  входит линейно. ■

Заметим, что при наличии возмущения в выходе отыскание минимального ограничивающего эллипсоида существенно усложняется. Минимизируется не сама матрица эллипсоида, а некоторая взвешенная матрица; при каждом значении параметра  $\alpha$  приходится решать задачу полуопределенного программирования, а не уравнение Ляпунова как ранее; появляется дополнительный скалярный параметр, который входит в ограничения нелинейно, так что оптимизацию приходится проводить на двумерной сетке. Этого усложнения удастся избежать, вводя дополнительную матричную переменную; этот прием будет часто использоваться в дальнейшем. Наконец, понятно, что ограничивающий эллипсоид оказывается больше того, который получается при отсутствии возмущений в выходе.

### 3.1.2. Дискретный случай

Все основные результаты, полученные в предыдущем разделе для непрерывных систем, переносятся на дискретное время. Изложение материала настоящего раздела следует той же схеме: сначала вводится понятие инвариантного и ограничивающего эллипсоида, формулируются необходимые и достаточные условия инвариантности и доказываются основные свойства. Далее определяется наихудшее возмущение, а также рассматриваются случаи интервальных ограничений на возмущение и их наличия в выходе.

Как будет видно далее, разница со случаем непрерывного времени минимальна.

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением

$w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w_k| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.29)$$

Таким образом, рассматриваются  $l_\infty$ -ограниченные внешние возмущения; такие возмущения будем называть *допустимыми*.

Как и в непрерывном случае, считаем, что система (3.1.28) устойчива (матрица  $A$  шуровская), пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Определение инвариантного эллипсоида для дискретной системы, по-существу, остается таким же, как и в случае непрерывного времени.

**Определение 3.1.2.** Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0, \quad (3.1.30)$$

называется *инвариантным* для дискретной системы (3.1.28), если из условия  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  следует  $x_k \in \mathcal{E}_x$  для всех моментов времени  $k = 1, 2, \dots$  и всех допустимых внешних возмущений  $w_k$ . Матрицу  $P$  будем называть матрицей эллипсоида  $\mathcal{E}_x$ .

Как и в непрерывном случае, инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости: при  $x_0 \notin \mathcal{E}_x$  будет

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_x$$

(при этом, возможно,  $x_k \in \mathcal{E}_x$  при  $k \geq K$  для некоторого  $K \in \mathbb{N}$ ). Соответствующее доказательство будет приведено ниже (см. Теорему 3.1.5).

Понятно, что Замечание 3.1.1 о робастности инвариантных эллипсоидов по отношению к начальным условиям сохраняет свою силу и в дискретном случае.

Приведем теперь дискретный аналог основной Теоремы 3.1.1.

**Теорема 3.1.4.** Эллипсоид (3.1.30) является инвариантным для системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k \quad (3.1.31)$$

при внешних возмущениях (3.1.29) тогда и только тогда, когда его матрица  $P$  удовлетворяет линейным матричным неравенствам

$$\frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^\top \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad (3.1.32)$$

при некотором  $0 < \alpha < 1$ .

Как и в непрерывном случае, приведем ее новое доказательство, основанное на модифицированном варианте  $S$ -процедуры; доказательству предположим следующий дискретный аналог Леммы 3.1.1.

**Лемма 3.1.3.** Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $0 \prec S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  заданные матрицы,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда множества

$$\Omega_1 = \left\{ (P, \alpha) : \frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{1-\alpha} DSD^\top \preceq 0, \quad 0 < \alpha < 1 \right\}$$

и

$$\Omega_2 = \left\{ (P, \alpha) : \frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{\beta} DSD^\top \preceq 0, \quad \alpha > 0, \right. \\ \left. \text{при некотором } \beta > 0, \quad \alpha + \beta \leq 1 \right\}$$

совпадают.

**Доказательство.** Очевидно, что  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ; покажем справедливость обратного включения.

Пусть  $(P, \alpha) \in \Omega_2$ , тогда существует  $0 < \beta \leq 1 - \alpha$  такое, что

$$\frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{\beta} DSD^\top \preceq 0.$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{1-\alpha} DSD^\top &= \\ &= \frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{\beta} DSD^\top + \underbrace{\left( \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)}_{\leq 0} DSD^\top \preceq 0, \end{aligned}$$

то есть  $(P, \alpha) \in \Omega_1$ . ■

Итак, перейдем к доказательству Теоремы 3.1.4.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.1.31). *Необходимым и достаточным* условием того, что траектории  $x_k$  системы не выходят за границу эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\}, \quad (3.1.33)$$

является условие

$$V(x_{k+1}) \leq 1 \quad \text{при} \quad V(x_k) \leq 1 \quad \text{и} \quad w_k^\top w_k \leq 1. \quad (3.1.34)$$

Представим условие (3.1.34) в виде

$$(Ax + Dw)^\top Q(Ax + Dw) \leq 1 \quad \text{при} \quad x^\top Qx \leq 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1, \quad (3.1.35)$$

и введем в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^\top QA & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Тогда условие (3.1.35) примет вид

$$f_0(s) \leq 1 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq 1 \quad \text{и} \quad f_2(s) \leq 1, \quad (3.1.36)$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Воспользуемся  $S$ -процедурой. Заметим, что условия (2.2.17) в ее формулировке выполнены. В самом деле, при любых  $\mu_1, \mu_2 > 0$  выполняется

$$\mu_1 \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

а при  $s_0 = 0$  верно

$$s_0^\top \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s_0 = 0 < 1,$$

и

$$s_0^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} s_0 = 0 < 1.$$

Следовательно, условие (3.1.36) эквивалентно соотношению

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preceq 0$$

при  $\alpha, \beta \geq 0$  таких, что  $\alpha + \beta \leq 1$ . Полученное неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \alpha Q & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD - \beta I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (3.1.37)$$

Соотношение (3.1.37) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha Q & 0 \\ 0 & \beta I \end{pmatrix} \succcurlyeq \begin{pmatrix} A^\top \\ D^\top \end{pmatrix} Q (A \ D),$$

или, по лемме Шура,

$$\begin{pmatrix} \alpha Q & 0 & A^\top \\ 0 & \beta I & D^\top \\ A & D & Q^{-1} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Заметим, что из последнего неравенства следует, что  $\alpha, \beta > 0$ .

Далее, вновь по лемме Шура имеем

$$\begin{pmatrix} \beta I & D^\top \\ D & Q^{-1} - \frac{1}{\alpha} A Q^{-1} A^\top \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Еще раз воспользовавшись леммой Шура и полагая  $P = Q^{-1}$ , получаем

$$\frac{1}{\alpha} A P A^\top - P + \frac{1}{\beta} D D^\top \preccurlyeq 0$$

при  $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta \leq 1$ .

Наконец, согласно Лемме 3.1.3 полагая

$$\beta = \beta_{\max} = 1 - \alpha,$$

приходим к условиям (3.1.32).

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P \succ 0$  эквивалентно выполнению матричных неравенств (3.1.32) при некотором  $0 < \alpha < 1$ . ■

В отличие от непрерывного случая, доказательство инвариантности эллипсоида для дискретной системы осуществляется непосредственно на основе определения: если в момент  $k$  траектория принадлежит эллипсоиду, потребуем, чтобы при любом допустимом возмущении  $w_k$  она оставалась в нем и в момент  $k + 1$ . Поэтому свойство притягиваемости требует отдельного доказательства.

**Теорема 3.1.5.** *Инвариантный эллипсоид для дискретной системы (3.1.31) является притягивающим.*



**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.1.31). Для того, чтобы траектории  $x_k$  системы, исходя из точки вне эллипсоида (3.1.33), стремились к нему с течением времени, *достаточно* потребовать, чтобы при  $V(x_k) > 1$  (и всех допустимых внешних возмущениях  $w_k$ ) выполнялось  $V(x_{k+1}) < V(x_k)$  (то есть вне эллипсоида (3.1.33)  $V(x)$  является функцией Ляпунова).

Это условие представимо в виде

$$V(x_k) \leq 1 \quad \text{при} \quad V(x_{k+1}) \geq V(x_k) \quad \text{и} \quad w_k^\top w_k \leq 1,$$

то есть

$$x^\top Qx \leq 1 \quad \text{при} \\ x^\top Qx - (Ax + Dw)^\top Q(Ax + Dw) \leq 0 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1. \quad (3.1.38)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_1 = \begin{pmatrix} Q - A^\top QA & -A^\top QD \\ -D^\top QA & -D^\top QD \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

тогда условие (3.1.38) примет вид

$$f_0(s) \leq 1 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq 0 \quad \text{и} \quad f_2(s) \leq 1,$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Воспользовавшись  $S$ -процедурой в ее достаточной части, приходим к условию

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preceq 0$$

при  $\alpha, \beta \geq 0$  таких, что  $\beta \leq 1$ .

Последнее неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \frac{\alpha-1}{\alpha}Q & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD - \frac{\beta}{\alpha}I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Заметив, что  $\alpha \geq 1$  и положив

$$\alpha \doteq \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad \beta \doteq \frac{\beta}{\alpha},$$

приходим к условию

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \alpha Q & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD - \beta I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (3.1.39)$$

с неотрицательными  $\alpha, \beta$  такими, что  $\alpha + \beta \leq 1$ .

Из доказательства Теоремы 3.1.4 вытекает, что условие (3.1.39) эквивалентно первому из матричных соотношений (3.1.32). Это и означает, что инвариантный эллипсоид для системы (3.1.31) является притягивающим.  $\blacksquare$

**Замечание 3.1.4.** Как непосредственно вытекает из доказательства Теоремы 3.1.5, условия (3.1.32) обеспечивает убывание функции  $V(x) = x^\top P^{-1}x$  на траекториях системы (3.1.31) вне эллипсоида, задаваемого матрицей  $P$ . Иными словами, в этой области фазового пространства  $V(x)$  является квадратичной функцией Ляпунова для возмущенной системы (3.1.31) (ср. с Замечанием 3.1.2).  $\blacktriangledown$

**Замечание 3.1.5.** Используя лемму Шура, первому из матричных неравенств (3.1.32) можно придавать различные эквивалентные формы. В частности, отметим следующие представления:

относительно матрицы  $P$ :

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0;$$

относительно матрицы  $Q = P^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & A^\top Q & 0 \\ * & -Q & QD \\ * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0;$$

в “комбинированном” виде:

$$\begin{pmatrix} -P & D & A \\ * & -(1 - \alpha)I & 0 \\ * & * & -\alpha Q \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Несмотря на кажущееся усложнение, именно такие формы записи в дальнейшем позволят получить основные результаты, относящиеся к дискретным системам.  $\blacktriangledown$

Отметим, что в дискретном времени инвариантные эллипсоиды также обладают свойством масштабируемости (ср. Следствие 3.1.2); это немедленно вытекает из (3.1.32).

Далее, как и в непрерывном случае, если  $\mathcal{E}_x$  — инвариантный эллипсоид (3.1.30) с матрицей  $P \succ 0$ , то выход  $z_k = Cx_k$  системы (3.1.28) при  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^m : z^\top (CPC^\top)^{-1} z \leq 1\}. \quad (3.1.40)$$

В частности, в случае одномерного выхода ( $l = 1$ ) этот эллипсоид является отрезком

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R} : |z| \leq \sqrt{CPC^\top}\},$$

в котором будет находиться выход  $z_k$  системы. Эллипсоид (3.1.40) будем называть *ограничивающим*.

Из Теоремы 3.1.4 вытекает

**Следствие 3.1.5.** *Минимальный по критерию следа ограничивающий эллипсоид системы (3.1.28) с  $x_0 = 0$  принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами*

$$CP(\alpha)C^\top,$$

где  $P(\alpha)$  удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^\top = 0 \quad (3.1.41)$$

на интервале  $\rho^2(A) < \alpha < 1$ .

При этом функция

$$\varphi(\alpha) = \text{tr } CP(\alpha)C^\top$$

строго выпукла на указанном интервале.

**Доказательство.** Первое утверждение непосредственно вытекает из Следствия 1.2.6.

Далее, уравнение (3.1.41) представимо в виде

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}} P \left( \frac{A}{\sqrt{\alpha}} \right)^\top - P = -\frac{1}{1-\alpha} DD^\top$$

и, согласно Лемме 1.2.6, имеет единственное положительно определенное решение тогда и только тогда, когда матрица  $A/\sqrt{\alpha}$  шуровская:

$$\rho\left(\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\right) < 1,$$

то есть  $\rho^2(A) < \alpha < 1$ .

Осталось доказать строгую выпуклость функции

$$\varphi(\alpha) = \text{tr } CP(\alpha)C^\top$$

на интервале  $(\rho^2(A), 1)$ . По Лемме 1.2.6, решение уравнения (3.1.41) представимо в явном виде как

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\sqrt{\alpha}}\right)^k \frac{1}{1-\alpha} DD^\top \left(\frac{A^\top}{\sqrt{\alpha}}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^k} A^k DD^\top (A^\top)^k \succ 0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\varphi(\alpha) = \text{tr } CP(\alpha)C^\top = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^k} \text{tr}[CA^k DD^\top (A^\top)^k C^\top] > 0.$$

При этом для всех  $k \geq 0$  функция

$$\frac{1}{(1-\alpha)\alpha^k}$$

строго выпукла на интервале  $\alpha \in (\rho^2(A), 1)$ , а

$$\text{tr}[CA^k DD^\top (A^\top)^k C^\top] \geq 0,$$

причем при некоторых  $k \geq 0$  это неравенство является строгим. Поэтому функция  $\varphi(\alpha)$  строго выпукла на интервале  $(\rho^2(A), 1)$  как сумма выпуклых и строго выпуклых функций. ■

Таким образом, как и в непрерывном случае, поиск минимального ограничивающего эллипсоида сводится к задаче одномерной выпуклой минимизации среди однопараметрического семейства, порожденного уравнением (3.1.41).

Как и для случая непрерывного времени, исследуем вопрос о наилучшем возмущении. В процессе доказательства Теоремы 3.1.4 строится функция Ляпунова  $V(x)$  такая, что

$$V(x_{k+1}) \leq 1 \quad \text{при} \quad V(x_k) \leq 1 \quad \text{и} \quad w_k^\top w_k \leq 1.$$

Будем искать допустимое возмущение  $\tilde{w}_k$ , максимизирующее  $V(x_{k+1})$ ; назовем его “наихудшим” возмущением. Ответ дается следующей леммой, являющейся дискретным аналогом Леммы 3.1.2.

**Лемма 3.1.4.** Пусть матрица  $P \succ 0$  определяет квадратичную функцию Ляпунова для системы (3.1.28) с ненулевым начальным условием. Тогда одномерное ( $m = 1$ ) наилучшее возмущение  $\tilde{w}_k$  задается формулой

$$\tilde{w}_k = \text{sign}(D^\top P^{-1} A x_k).$$

**Доказательство.** Потребуем, чтобы

$$V(x_{k+1}) \longrightarrow \max,$$

где  $V(x) = x^\top P^{-1} x$  — функция Ляпунова, построенная на решениях системы (3.1.28).

Имеем:

$$V(x_{k+1}) = x_k^\top A^\top P^{-1} A x_k + 2w_k^\top D^\top P^{-1} A x_k + w_k^\top D^\top P^{-1} D w_k,$$

поэтому внешнее возмущение  $\tilde{w}_k$  является решением задачи

$$\max_{|w_k| \leq 1} ((w_k, 2D^\top P^{-1} A x_k) + (w_k, D^\top P^{-1} D w_k)).$$

При  $m = 1$ , то есть в случае одномерного внешнего возмущения, эта задача имеет явное решение

$$\tilde{w}_k = \text{sign}(D^\top P^{-1} A x_k).$$

В многомерном случае задача может быть решена численно. ■

**Пример 3.1.5.** Вернемся к Примеру 3.1.3, где рассматривалась непрерывная модель двойного пружинного маятника, схема которого изображена на Рис. 3.1.3 и изучим поведение дискретного аналога.

Напомним, что в непрерывном времени при единичных значениях параметров и коэффициенте сопротивления среды  $\gamma = 0,2$  динамика

объекта описывалась системой вида (3.1.1) с матрицами

$$A_{\text{cont}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad D_{\text{cont}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно Замечанию 1.2.4, дискретная модель возмущенных колебаний описывается системой вида (3.1.28), где

$$A = e^{\delta A_{\text{cont}}}, \quad D = \int_0^{\delta} e^{\tau A_{\text{cont}}} d\tau D_{\text{cont}},$$

а  $\delta$  — интервал дискретизации.

При  $\delta = 0,2$  получаем:

$$A = \begin{pmatrix} 0,9609 & 0,0195 & 0,1935 & 0,0013 \\ 0,0195 & 0,9804 & 0,0013 & 0,1948 \\ -0,3856 & 0,1922 & 0,9222 & 0,0193 \\ 0,1922 & -0,1935 & 0,0193 & 0,9414 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,0001 \\ 0,0197 \\ 0,0013 \\ 0,1948 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись Следствием 3.1.5, находим матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 30,3560 & 40,7844 & -1,5618 & -4,0108 \\ * & 71,5118 & -0,1860 & -3,6631 \\ * & * & 19,7761 & 10,0389 \\ * & * & * & 30,3686 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному ограничивающему эллипсу с матрицей

$$C\hat{P}C^{\top} = \begin{pmatrix} 19,7761 & 10,0389 \\ 10,0389 & 30,3686 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти матрицы с теми, которые получены для непрерывной модели системы в Примере 3.1.3, видим что отличие крайне незначительно; это говорит о том, что при выбранном значении интервала  $\delta$  дискретная модель хорошо аппроксимирует свой непрерывный аналог.

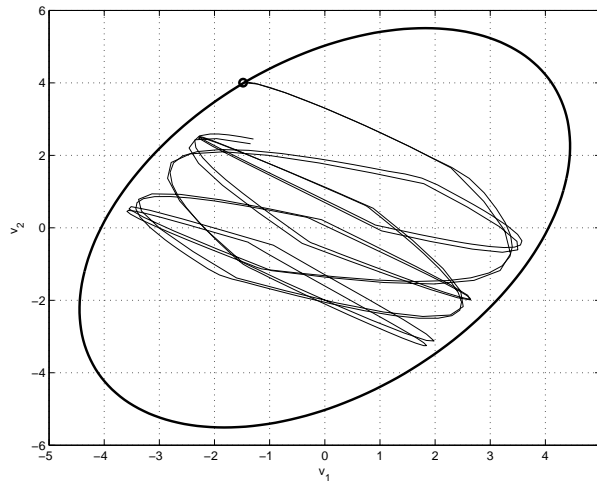


Рис. 3.1.6. Ограничивающий эллипс и траектории выхода дискретной системы из Примера 3.1.5 и ее непрерывного аналога.

Полученный минимальный ограничивающий эллипс изображен на Рис. 3.1.6. Здесь же показана траектория выхода системы при некотором выборе начального положения внутри соответствующего инвариантного эллипсоида и при воздействии наихудшего внешнего возмущения  $\tilde{w}_k$ . Для сравнения также приведена соответствующая траектория непрерывной модели; видно, что и здесь различия невелики. ▼

Понятно, что с ростом величины интервала дискретизации  $\delta$  инвариантный эллипсоид будет уменьшаться, — непрерывное возмущение заменяется на кусочно-постоянное (с интервалом постоянства длины  $\delta$ ), то есть имеет более простую структуру.

### Интервальные ограничения на возмущения

Так же, как и в непрерывном случае, вместо евклидовых ограничений (3.1.29) на допустимые внешние возмущения можно рассматривать *интервальные* ограничения

$$|w_k^i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1.42)$$

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 3.1.2.

**Теорема 3.1.6.** *Эллипсоид (3.1.30) является инвариантным для системы*

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k \quad (3.1.43)$$

*при внешних возмущениях (3.1.42), если его матрица  $P$  удовлетворяет линейным матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} APA^\top - P & D \\ \alpha D^\top & -\text{diag}\{\beta_1 \ \cdots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad (3.1.44)$$

*при некоторых  $\alpha > 0$  и  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$  таких, что*

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq 1 - \alpha.$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.1.43).

Представим интервальные ограничения (3.1.42) в виде

$$w_k^\top I_i w_k \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$I_i = \text{diag}\{\underbrace{0 \ \cdots \ 0}_i \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда, для того, чтобы траектории системы (3.1.43) не вышли из эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \leq 1\},$$

потребуем выполнения условия

$$V(x_{k+1}) \leq 1 \quad \text{при} \quad V(x_k) \leq 1 \quad \text{и} \quad w_k^\top I_i w_k \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

то есть

$$\begin{aligned} (Ax_k + Dw_k)^\top Q(Ax_k + Dw_k) &\leq 1 \\ \text{при} \quad x_k^\top Qx_k &\geq 1 \quad \text{и} \quad w_k^\top I_i w_k \leq 1. \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

В силу достаточной части  $S$ -процедуры условие (3.1.45) будет выполнено, если справедливо матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \alpha Q & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD - \text{diag}\{\beta_1 \ \cdots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0$$



при некоторых значениях  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$  таких, что

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq 1 - \alpha.$$

Воспользовавшись леммой Шура получаем

$$\begin{pmatrix} -Q^{-1} & A & D \\ A^\top & -\alpha Q & 0 \\ D^\top & 0 & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Еще раз применив лемму Шура, приходим к условиям (3.1.44).  $\blacksquare$

Воспользовавшись Замечанием 3.1.5, приходим к следующему утверждению.

**Следствие 3.1.6.** Пусть  $\hat{P}$  — решение задачи

$$\text{tr } C\hat{P}C^\top \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$P \succ 0, \quad \sum_{i=1}^m \beta_i \leq 1 - \alpha,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярных переменных  $\beta_1, \dots, \beta_m$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица

$$C\hat{P}C^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода системы (3.1.28) при внешних возмущениях вида (3.1.42) и нулевых начальных условиях.

Как и в непрерывном случае, вновь приходим к задаче SDP и одномерной минимизации по параметру  $\alpha$ .

**Ограничивающий эллипсоид при возмущении в выходе**

Завершим этот раздел рассмотрением ситуации, в которой внешние возмущения воздействуют на выход дискретной системы:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_{1,k}, \\z_k &= Cx_k + D_2 w_{2,k},\end{aligned}\tag{3.1.46}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m_1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m_2}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$  и внешними возмущениями  $w_{1,k} \in \mathbb{R}^{m_1}$  и  $w_{2,k} \in \mathbb{R}^{m_2}$ , удовлетворяющими ограничению (3.1.29).

Система (3.1.46) предполагается устойчивой (матрица  $A$  шуровская), пара  $(A, D_1)$  управляема,  $(C \ D_2)$  — матрица максимального строчного ранга.

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 3.1.3.

**Теорема 3.1.7.** *Матрица минимального ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$  системы (3.1.46) с  $x_0 = 0$  дается решением  $\hat{H}$  задачи*

$$\text{tr } H \longrightarrow \min\tag{3.1.47}$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} ASA^\top - S & D_1 \\ D_1^\top & -\varepsilon(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,\tag{3.1.48}$$

$$\begin{pmatrix} H - CSC^\top & D_2 \\ D_2^\top & (1-\varepsilon)I \end{pmatrix} \succeq 0,\tag{3.1.49}$$

$$H \succ 0, \quad S \succ 0,$$

с матричными переменными  $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , скалярной переменной  $\varepsilon$  и скалярным параметром  $\alpha \in (\rho^2(A), 1)$ .

**Доказательство.** Следуя доказательству Теоремы 3.1.3, с учетом Теоремы 3.1.4 приходим к задаче

$$\text{tr} \left( \frac{1}{\varepsilon} CPC^\top + \frac{1}{1-\varepsilon} D_2 D_2^\top \right) \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{1-\alpha} D_1 D_1^\top \preceq 0, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

При этом, согласно Следствию 3.1.5,  $\alpha \in (\rho^2(A), 1)$ .

Далее, согласно Лемме 2.1.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr} H \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}APA^\top - P + \frac{1}{1-\alpha}D_1D_1^\top &\preceq 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}CPC^\top + \frac{1}{1-\varepsilon}D_2D_2^\top &\preceq H, \quad 0 < \varepsilon < 1, \end{aligned}$$

которая вновь содержит два скалярных параметра  $\alpha$  и  $\varepsilon$ , *нелинейно* входящих в ограничения.

Как и в непрерывном случае, можно избежать процедуры двумерной оптимизации по  $\alpha$  и  $\varepsilon$ , введя вспомогательную матричную переменную

$$S = \frac{1}{\varepsilon}P.$$

При этом установленные выше ограничения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}ASA^\top - S + \frac{1}{\varepsilon(1-\alpha)}D_1D_1^\top &\preceq 0, \\ CSC^\top + \frac{1}{1-\varepsilon}D_2D_2^\top &\preceq H, \quad 0 < \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

Преобразовав каждое из матричных неравенств по лемме Шура, приходим к задаче (3.1.47)–(3.1.49). Отметим, что при фиксированном  $\alpha$  в полученные ограничения (3.1.48)–(3.1.49) параметр  $\varepsilon$  входит линейно. ■

### 3.1.3. Робастные постановки

В этом разделе приводятся робастные модификации полученных выше результатов в случаях, когда в матрицах системы присутствует неопределенность. В такой ситуации удастся сформулировать лишь достаточные условия инвариантности.

#### Непрерывный случай

Рассмотрим сперва линейную непрерывную *неопределенную систему*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (D + \Delta D)w, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{3.1.50}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (3.1.2). Системные неопределенности  $\Delta A$  и  $\Delta D$  имеют структуру

$$\begin{aligned}\Delta A &= F_A \Delta_A H_A, \\ \Delta D &= F_D \Delta_D H_D.\end{aligned}\tag{3.1.51}$$

Здесь матричные неопределенности  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$  и  $\Delta_D \in \mathbb{R}^{p_D \times q_D}$  удовлетворяют ограничениям<sup>1</sup>

$$\|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_D\| \leq 1,\tag{3.1.52}$$

а  $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$ ,  $F_D \in \mathbb{R}^{n \times p_D}$ ,  $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$ ,  $H_D \in \mathbb{R}^{q_D \times m}$  — постоянные матрицы. Будем полагать, что матрица  $A$  гурвицева, пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Как обсуждалось выше, условия (3.1.51)–(3.1.52) являются достаточно общей формой задания неопределенностей системы; такая структура часто возникает в разнообразных технических системах.

Определение инвариантного эллипсоида для неопределенной системы претерпевает следующее естественное изменение.

**Определение 3.1.3.** Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0,\tag{3.1.53}$$

называется *инвариантным* для системы (3.1.50)–(3.1.52), если из условия  $x(0) \in \mathcal{E}_x$  следует  $x(t) \in \mathcal{E}_x$  для всех моментов времени  $t \geq 0$  при всех допустимых возмущениях  $w(t)$  и всех допустимых неопределенностях  $\Delta_A, \Delta_D$ . Матрицу  $P$  будем называть *матрицей эллипсоида*  $\mathcal{E}_x$ .

Нетрудно видеть, что Замечание 3.1.1, касающееся неопределенности в начальных условиях, по-прежнему сохраняет свою силу.

Ясно также, что при

$$\Delta_A = \Delta_D = 0$$

система (3.1.50) обращается в систему без неопределенностей (3.1.1), рассмотренную в разделе 3.1.1, а инвариантный эллипсоид (3.1.53) совпадает с (3.1.3)

Следующая теорема является робастным аналогом Теоремы 3.1.1.

<sup>1</sup>Все устанавливаемые далее результаты полностью распространяются и на случай, когда матричные неопределенности ограничены во фробениусовой норме; в дальнейшем не будем это специально оговаривать.

**Теорема 3.1.8.** *Эллипсоид (3.1.53) является инвариантным для системы (3.1.50) с  $x_0 = 0$ , если его матрица  $P$  удовлетворяет линейным матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_D F_D^\top & D & P H_A^\top & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & H_D^\top \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (3.1.54)$$

и

$$P \succ 0,$$

при некоторых  $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V(x) = x^\top Q x, \quad Q = P^{-1} \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.1.50).

Воспользовавшись Теоремой 3.1.1 получаем, что условие инвариантности эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\} \quad (3.1.55)$$

эквивалентно существованию

$$\alpha(\Delta) = \alpha(\Delta_A, \Delta_D) > 0$$

такого, что выполняется

$$\begin{pmatrix} \Psi & D + F_D \Delta_D H_D \\ (D + F_D \Delta_D H_D)^\top & -\alpha(\Delta) I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (3.1.56)$$

при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ , где

$$\Psi = (A + F_A \Delta_A H_A) P + P (A + F_A \Delta_A H_A)^\top + \alpha(\Delta) P.$$

Предположим, что существует число  $\alpha > 0$  такое, что матричное неравенство (3.1.56) выполняется при всех допустимых  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ . Тогда неравенство (3.1.56) будет справедливо, если выполнено матричное неравенство

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\alpha I \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A (H_A P \quad 0) + \begin{pmatrix} PH_A^\top \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^\top (F_A^\top \quad 0) + \\
& + \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_D (0 \quad H_D) + \begin{pmatrix} 0 \\ H_D^\top \end{pmatrix} \Delta_D^\top (F_D^\top \quad 0) \preceq 0.
\end{aligned}$$

В силу леммы Питерсена полученное соотношение справедливо при всех допустимых значениях неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ , если существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  такие, что выполняется условие (3.1.54). ■

Аналогично ситуации без неопределенностей, найденное условие (3.1.54) обеспечивает убывание функции  $V(x) = x^\top P^{-1}x$  на траекториях системы (3.1.50) *вне* эллипсоида (3.1.55). То есть вне этого эллипсоида функция  $V(x)$  является общей квадратичной функцией Ляпунова для возмущенной системы (3.1.50) при всех допустимых неопределенностях  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ .

**Замечание 3.1.6.** При доказательстве Теоремы 3.1.8 требовалось существование числа  $\alpha$ , общего для всех значений матричных неопределенностей. Вследствие этого, полученное условие (3.1.54) является только *достаточным* для существования инвариантного эллипсоида, то есть приводящим к *субоптимальным* решениям. С другой стороны, в случае нескольких неопределенностей используется лемма Питерсена, также верная лишь в части достаточности. Это замечание в равной мере относится ко всем “робастным” результатам. ▼

Требуемая выше гурвицевость матрицы  $A$  и условие управляемости являются лишь необходимыми для того, чтобы LMI в Теореме 3.1.8 было разрешимо. Более того, эти условия должны выполняться робастно при всех допустимых значениях неопределенностей, и при этом у семейства должна существовать общая квадратичная функция Ляпунова. Не заботясь заранее о выполнении этих условий, просто решим матричное неравенство (3.1.54), и если оно окажется неразрешимым, то это будет свидетельствовать о том, что конечного инвариантного эллипсоида не существует (уровень неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$  слишком высок для существования общей квадратичной функции Ляпунова).

Как и раньше, будем интересоваться выходом системы, но теперь наша задача — оценить как на него влияют не только внешние возмущения  $w$ , но и допустимые матричные неопределенности  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ .

Поэтому будем искать минимальный *ограничивающий эллипсоид*  $\mathcal{E}_z$ , содержащий выход  $z$  системы (3.1.50). Для этого, имея описание семейства инвариантных эллипсоидов из Теоремы 3.1.8, остается лишь минимизировать целевую функцию  $\text{tr } CPC^\top$  при ограничении (3.1.54).

Итак, получаем

**Следствие 3.1.7.** Пусть  $\hat{P}$  — решение задачи

$$\text{tr } CPC^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_D F_D^\top & D & PH_A^\top & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & H_D^\top \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица

$$C\hat{P}C^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  системы (3.1.50) при внешних возмущениях вида (3.1.2) и нулевых начальных условиях.

В ходе доказательства Теоремы 3.1.8 построена функция Ляпунова  $V(x)$  для системы (3.1.50) такая, что  $\dot{V}(x, w, \Delta) \leq 0$  при  $V(x) \geq 1$  (и  $w^\top w \leq 1$ ). Вновь зададимся целью найти *наихудшее* внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$ , а также *наихудшие*<sup>2</sup> матричные неопределенности  $\tilde{\Delta}_A(t)$  и  $\tilde{\Delta}_D(t)$ , максимизирующие  $\dot{V}(x, w, \Delta)$ .

Следующая лемма является робастным аналогом Леммы 3.1.2.

**Лемма 3.1.5.** Пусть матрица  $P \succ 0$  определяет квадратичную функцию Ляпунова для системы (3.1.50) с ненулевым начальным условием. Тогда *наихудшее* возмущение  $\tilde{w}(t)$  задается формулой

$$\tilde{w}(t) = \frac{(D + F_D \Delta_D H_D)^\top P^{-1} x(t)}{|(D + F_D \Delta_D H_D)^\top P^{-1} x(t)|}, \quad (3.1.57)$$

<sup>2</sup>Обратим внимание, что в данной постановке матричные неопределенности рассматриваются уже как функции от времени.

а наилучшие матричные неопределенности  $\tilde{\Delta}_A(t)$  и  $\tilde{\Delta}_D(t)$  задаются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_A(t) &= \frac{F_A^\top P^{-1} x(t) x^\top(t) H_A^\top}{\|F_A^\top P^{-1} x(t) x^\top(t) H_A^\top\|}, \\ \tilde{\Delta}_D(t) &= \frac{F_D^\top P^{-1} x(t) w^\top(t) H_D^\top}{\|F_D^\top P^{-1} x(t) w^\top(t) H_D^\top\|}.\end{aligned}\quad (3.1.58)$$

**Доказательство.** Потребуем, чтобы

$$\dot{V}(x, w, \Delta) \longrightarrow \max,$$

где  $V(x) = x^\top P^{-1} x$  — функция Ляпунова, построенная на решениях системы (3.1.50). Имеем:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, w, \Delta) &= \\ &= x^\top \left( (A + F_A \Delta_A H_A)^\top P^{-1} + \hat{P}^{-1} (A + F_A \Delta_A H_A) \right) x + \\ &\quad + 2w^\top (D + F_D \Delta_D H_D)^\top P^{-1} x.\end{aligned}$$

Тогда наилучшее возмущение  $\tilde{w}(t)$  является решением задачи

$$\max_{|w| \leq 1} \left( w, (D + F_D \Delta_D H_D)^\top P^{-1} x \right),$$

откуда имеем соотношение (3.1.57).

Далее, матричные неопределенности  $\tilde{\Delta}_A(t)$  и  $\tilde{\Delta}_D(t)$  соответственно являются решениями задач

$$\max_{\|\Delta_A\| \leq 1} x^\top P^{-1} F_A \Delta_A H_A x,$$

$$\max_{\|\Delta_D\| \leq 1} x^\top P^{-1} F_D \Delta_D H_D w.$$

Применяя Лемму Е.1, приходим к соотношениям (3.1.58). ■

Следует отметить, что, строго говоря, Лемма 3.1.5 определяет *наихудшее* внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$  при заданной матричной неопределенности  $\Delta_D(t)$  и наоборот. В общем же случае задача сводится к максимизации нелинейной функции относительно векторной переменной  $w$  и матричной переменной  $\Delta_D$  и может быть решена численным образом.



**Следствие 3.1.8.** Если в системе (3.1.50) внешнее возмущение одномерно, то

$$\tilde{w}(t) = \text{sign}(D + F_D \Delta_D H_D)^\top P^{-1} x(t).$$

**Пример 3.1.6.** Обратимся к модели двойного пружинного маятника, движущегося в вязкой среде, см. Пример 3.1.3. Напомним, что непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнением

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\gamma & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\gamma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} w,$$

где  $k_1, k_2$  — коэффициенты жесткости левой и правой пружины,  $m_1, m_2$  — массы левого и правого тела (см. Рис. 3.1.3),  $\gamma$  — коэффициент сопротивления среды, а вектор фазового состояния имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

В качестве выхода системы выберем вектор

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что система содержит неопределенность в коэффициенте упругости правой пружины

$$k_2 = 1 + \delta \Delta, \quad \delta = \text{const},$$

то есть введем в рассмотрение системную неопределенность

$$\Delta A = F_A \Delta H_A, \quad \|\Delta\| \leq 1.$$

Пусть параметры системы единичны, а коэффициент сопротивления среды равен 0,2. В результате приходим к системе вида (3.1.50) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad H_A = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0).$$

При  $\delta = 0,1$  с помощью Следствия 3.1.7 находим матрицу

$$\begin{pmatrix} 77,0188 & -13,0604 \\ -13,0604 & 65,2470 \end{pmatrix}$$

ограничивающего эллипса для выхода системы.

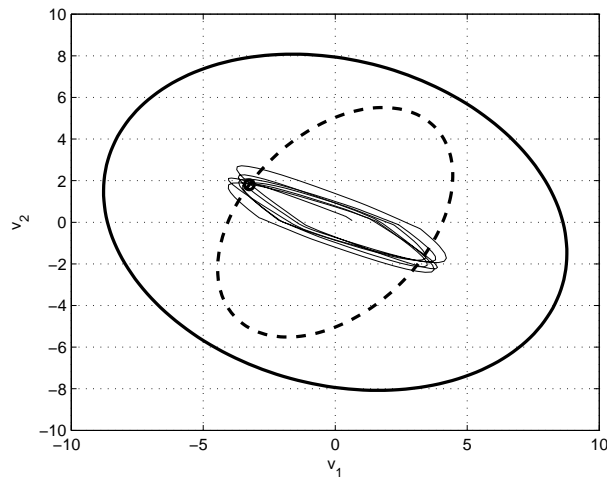


Рис. 3.1.7. Ограничивающие эллипсы и траектория системы.

На Рис. 3.1.7 сплошной линией показан найденный ограничивающий эллипс. Для сравнения, пунктиром показан минимальный ограничивающий эллипс для той же системы в отсутствие системных неопределенностей. На этом же рисунке показана траектория выхода системы при некотором выборе начального положения на границе неробастного эллипсоида и при наихудшем внешнем возмущении  $\tilde{w}(t)$  и некоторой допустимой системной неопределенности  $\Delta(t)$ . ▼

### Дискретный случай

Аналогичные результаты могут быть получены и для дискретной системы вида

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + (D + \Delta D)w_k, \\z_k &= Cx_k,\end{aligned}\tag{3.1.59}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (3.1.29).

Системные неопределенности  $\Delta A$  и  $\Delta D$  имеют структуру

$$\Delta A = F_A \Delta_A H_A,$$

$$\Delta D = F_D \Delta_D H_D,$$

матричные неопределенности  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$  и  $\Delta_D \in \mathbb{R}^{p_D \times q_D}$  удовлетворяют ограничениям

$$\|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_D\| \leq 1,\tag{3.1.60}$$

а  $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$ ,  $F_D \in \mathbb{R}^{n \times p_D}$ ,  $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$ ,  $H_D \in \mathbb{R}^{q_D \times m}$  — постоянные матрицы. Будем полагать, что матрица  $A$  шуровская, пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Нетрудно видеть, что при

$$\Delta A = \Delta D = 0$$

система (3.1.59) обращается в систему без неопределенностей (3.1.28), рассмотренную в разделе 3.1.2.

**Определение 3.1.4.** Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0,\tag{3.1.61}$$

называется *инвариантным* для системы (3.1.59)–(3.1.60), если из условия  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  следует  $x_k \in \mathcal{E}_x$  для всех моментов времени  $k = 1, 2, \dots$  при всех допустимых возмущениях  $w_k$  и всех допустимых неопределенностях  $\Delta_A, \Delta_D$ .

Следующая теорема является робастным аналогом Теоремы 3.1.4 и дискретным аналогом Теоремы 3.1.8.

**Теорема 3.1.9.** *Эллипсоид (3.1.61) является инвариантным для системы (3.1.59) с  $x_0 = 0$ , если его матрица  $P$  удовлетворяет линейным матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top & 0 & PH_A^\top & 0 \\ * & -P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_D F_D^\top & D & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 & H_D^\top \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (3.1.62)$$

$$P \succ 0,$$

при некоторых  $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Q x, \quad Q = P^{-1} \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.1.59). Воспользовавшись Теоремой 3.1.4, с учетом Замечания 3.1.5 получаем, что условие инвариантности эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\} \quad (3.1.63)$$

эквивалентно существованию

$$\alpha(\Delta) = \alpha(\Delta_A, \Delta_D) > 0$$

такого, что

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\Delta)P & P(A + F_A \Delta_A H_A)^\top & 0 \\ (A + F_A \Delta_A H_A)P & -P & D + F_D \Delta_D H_D \\ 0 & (D + F_D \Delta_D H_D)^\top & -(1 - \alpha(\Delta))I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (3.1.64)$$

при всех допустимых  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ .

Пусть существует число  $\alpha > 0$  такое, что неравенство (3.1.64) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ . Тогда неравенство (3.1.64) будет справедливо, если выполняется неравенство

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top & 0 \\ AP & -P & D \\ 0 & D^\top & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A (H_A P \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} P H_A^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^\top (0 \ F_A^\top \ 0) + \\
& + \begin{pmatrix} 0 \\ F_D \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_D (0 \ 0 \ H_D) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_D^\top \end{pmatrix} \Delta_D^\top (0 \ F_D^\top \ 0) \preccurlyeq 0.
\end{aligned}$$

По Лемме 2.2.13 полученное неравенство справедливо при всех допустимых  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ , если существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  такие, что выполняется условие (3.1.62). ■

Как и в непрерывном случае, полученное условие (3.1.62) обеспечивает убывание функции  $V(x) = x^\top P^{-1}x$  на траекториях системы (3.1.59) вне эллипсоида (3.1.63). Таким образом, вне этого эллипсоида функция  $V(x)$  является общей квадратичной функцией Ляпунова для возмущенной системы (3.1.59) при всех допустимых неопределенностях  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$ .

Задача по-прежнему состоит в оценке степени влияния внешнего возмущения  $w_k$  и матричных неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_D$  на выход  $z_k$  системы. В этой связи будем интересоваться *минимальным* (в смысле критерия следа (3.1.15)) ограничивающим эллипсоидом  $\mathcal{E}_z$ , содержащим выход  $z_k$  системы (3.1.59).

Итак, имеем следующий дискретный аналог Следствия 3.1.7.

**Следствие 3.1.9.** Пусть  $\hat{P}$  — решение задачи

$$\text{tr } C P C^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P A^\top & 0 & P H_A^\top & 0 \\ * & -P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_D F_D^\top & D & 0 & 0 \\ * & * & -(1 - \alpha)I & 0 & H_D^\top \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда матрица

$$C \hat{P} C^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода системы (3.1.59) при внешних возмущениях вида (3.1.29) и нулевых начальных условиях.

Вопрос о наилучшем возмущении  $\tilde{w}_k$  решается следующим образом.

**Лемма 3.1.6.** Пусть матрица  $P \succ 0$  определяет квадратичную функцию Ляпунова для системы (3.1.59) с ненулевым начальным условием. Тогда наилучшее скалярное возмущение  $\tilde{w}_k$  задается формулой

$$\tilde{w}_k = \text{sign}((D + F_D \Delta_D H_D)^\top P^{-1} (A + F_A \Delta_A H_A) x_k). \quad (3.1.65)$$

**Доказательство.** Потребуем, чтобы

$$V(x_{k+1}) \longrightarrow \max,$$

где  $V(x) = x^\top P^{-1} x$  — функция Ляпунова, построенная на решениях системы (3.1.59).

Имеем:

$$V(x_{k+1}) = ((A + F_A \Delta_A H_A) x_k + (D + F_D \Delta_D H_D) w_k)^\top \times \\ \times P^{-1} ((A + F_A \Delta_A H_A) x_k + (D + F_D \Delta_D H_D) w_k).$$

Тогда внешнее возмущение  $\tilde{w}_k$  является решением задачи

$$\max_{|w_k| \leq 1} (w_k, (D + F_D \Delta_D H_D)^\top P^{-1} (A + F_A \Delta_A H_A) x_k),$$

которая, с учетом одномерности внешнего возмущения, имеет решение (3.1.65). ■

Приведенная лемма является робастным аналогом Леммы 3.1.4 и дискретным аналогом Леммы 3.1.5.

## 3.2. Фильтрация внешних возмущений

Выше рассматривались задачи анализа, то есть исследовалось поведение систем, подверженных влиянию ограниченных внешних возмущений, и оценивалось множество возможных значений выхода с помощью инвариантных эллипсоидов. В настоящем разделе с этих же

позиций будет рассмотрена проблема *фильтрации*, то есть оценки состояния системы (или ее оцениваемого выхода) по имеющимся измерениям, когда и динамика системы, и измерения содержат внешние возмущения.

При случайных возмущениях эта задача допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана. Однако во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным; часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными. В этом случае можно строить *гарантированные* (а не вероятностные) оценки состояний.

А именно, для линейных *стационарных* систем, когда все параметры модели не зависят от времени, ищется такая оценка состояния, чтобы ошибка была гарантированно заключена в эллипсоид (*инвариантный эллипсоид*) для всех моментов времени, то есть получаемая оценка будет равномерной; сам фильтр также ищется в классе линейных стационарных фильтров. В этом классе задач и оценок проблема оказывается полностью разрешимой, то есть удается построить *оптимальный* фильтр и оценку состояния.

Соответствующий подход легко обобщается и на дискретный случай, и на случай больших начальных уклонений.

### 3.2.1. Задача фильтрации

#### Непрерывный случай

Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением (шумом)  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (3.1.2); пара  $(A, D_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Пусть состояние  $x$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}$ , включающим в себя рассогласование выхода  $y$  и его прогноза  $C\hat{x}$ :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0, \quad (3.2.2)$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ . Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее —

он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица  $L$ . Эта структура такая же, как в известном *наблюдателе Люенбергера*, см. раздел 1.4.2.

Введем в рассмотрение *невязку*

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

характеризующую точность фильтрации. Задачей является нахождение минимального инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}$ , содержащего невязку  $e$ . Таким образом, оценивается асимптотическая (а при малых отклонениях и равномерная по  $t$ ) точность фильтрации.

Прежде всего отметим, что из условия наблюдаемости следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида (а управляемость гарантирует его полномерность). Инвариантных эллипсоидов много, цель — найти минимальный из них при фиксированном стабилизирующем  $L$ , а затем добиться минимума этого эллипсоида по  $L$ . По-прежнему удобно считать тот эллипсоид *минимальным*, у которого минимален след его матрицы.

**Теорема 3.2.1.** Пусть  $\hat{Q}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } H \longrightarrow \min \quad (3.2.3)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^T Q + QA - YC - C^T Y^T + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ D_1^T Q - D_2^T Y^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (3.2.4)$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (3.2.5)$$

$$Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y},$$

а минимальный инвариантный эллипсоид, содержащий невязку системы (3.2.1), (3.2.2) с  $x_0 = 0$ , определяется матрицей

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}.$$



**Доказательство.** Согласно (3.2.1), (3.2.2) невязка  $e(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC)e + (D_1 - LD_2)w. \quad (3.2.6)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V(e) = e^\top Qe, \quad Q = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.2.6).

Воспользовавшись Теоремой 3.1.1, получаем, что условие инвариантности эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{e \in \mathbb{R}^n : e^\top Qe \leq 1\} \quad (3.2.7)$$

эквивалентно выполнению линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} (A - LC)^\top Q + Q(A - LC) + \alpha Q & Q(D_1 - LD_2) \\ (D_1 - LD_2)^\top Q & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0$$

при некотором  $\alpha > 0$ . Вводя матричную переменную

$$Y = QL$$

и, тем самым, исключая  $L$ , получаем линейное матричное неравенство (3.2.4).

Таким образом, приходим к задаче

$$\text{tr } Q^{-1} \longrightarrow \min$$

при ограничении (3.2.4). Согласно Следствию 2.2.3, полученная задача эквивалентна задаче минимизации  $\text{tr } H$  при ограничениях (3.2.4) и (3.2.5), где  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — вспомогательная матричная переменная. ■

Отметим, что при фиксированном  $\alpha$  задача (3.2.3)–(3.2.4) является задачей SDP. При этом одномерная минимизация по  $\alpha$  всегда оказывается выпуклой (однако строгое обоснование этого факта пока остается открытой задачей).

Из доказательства Теоремы 3.2.1 с учетом Замечания 3.1.2 вытекает, что функция  $V(x) = x^\top Qx$  с матрицей  $Q \succ 0$ , удовлетворяющей ЛМН (3.2.4), является квадратичной функцией Ляпунова для невязки системы (3.2.1), (3.2.2) вне эллипсоида (3.2.7).

**Замечание 3.2.1.** Если известно начальное состояние  $x(0) = x_0$  системы (3.2.1), то к условиям Теоремы 3.2.1 добавляется ограничение

$$x_0^\top Q x_0 \leq 1,$$

означающее, что  $x_0 \in \mathcal{E}$ .

Если же имеется следующая априорная информация о начальном состоянии системы:

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P_0^{-1} x \leq 1\}, \quad P_0 \succ 0,$$

то к системе ограничений Теоремы 3.2.1 добавляется LMI

$$Q \preceq P_0^{-1},$$

означающее, что  $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ .

В любом из этих случаев, ввиду  $\hat{x}(0) = 0$ , имеем

$$e(0) = x(0) \in \mathcal{E},$$

что и гарантирует равномерную оценку точности фильтрации. ▼

Исходная задача синтеза оптимальной (в смысле следа инвариантного эллипсоида, содержащего невязку) матрицы фильтра (3.2.2) для системы (3.2.1) эквивалентна полученной задаче (3.2.3)–(3.2.4), то есть полученные условия являются необходимыми и достаточными.

**Замечание 3.2.2.** Нередко нужно оценивать качество фильтрации не всех координат состояния  $x$ , а лишь некоторых. Пусть имеется регулируемый выход

$$y_1 = C_1 x \tag{3.2.8}$$

(например, одна из координат состояния) и желательно сделать ошибку его оценки

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = C_1(x - \hat{x})$$

возможно малой. Тогда задача сводится к минимизации  $\text{tr } C_1 P C_1^\top$ , что достигается заменой LMI (3.2.5) на неравенство

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^\top & Q \end{pmatrix} \succeq 0$$

в формулировке Теоремы 3.2.1. ▼

Отметим также, что можно воспользоваться и иными критериями оптимальности вместо суммы квадратов полуосей эллипсоида. Например, можно минимизировать  $L_\infty$ -норму невязки, то есть радиус шара, содержащего эллипсоид  $\mathcal{E}$ . Для этого потребуем

$$r \rightarrow \max$$

при дополнительном ограничении

$$Q \succeq rI.$$

**Пример 3.2.1.** Продемонстрируем предложенный подход к фильтрации ограниченных внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи оценивания состояния двойного пружинного маятника, движущегося в вязкой среде, см. Пример 3.1.3.

Наблюдаемый выход системы выберем в виде

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а в качестве оцениваемого выхода возьмем вектор

$$y_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть, как и ранее, параметры системы единичны, а коэффициент сопротивления среды равен 0,2. В результате приходим к системе вида (3.2.1), (3.2.8) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При  $P_0 = 0,1I$  с помощью Теоремы 3.2.1 и Замечания 3.2.2 находим оптимальную матрицу фильтра

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1,4380 & 0,5623 \\ -0,4119 & 1,9274 \\ -1,0667 & 1,1968 \\ 0,5114 & 3,3514 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0,2000 & 0 & 0,0700 & 0 \\ * & 0,1465 & 0 & 0,1738 \\ * & * & 0,1490 & 0 \\ * & * & * & 0,7497 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному ограничивающему эллипсу с матрицей

$$C_1 \hat{P} C_1^\top = \begin{pmatrix} 0,1490 & 0 \\ 0 & 0,7497 \end{pmatrix},$$

содержащему невязку  $e_1$ .

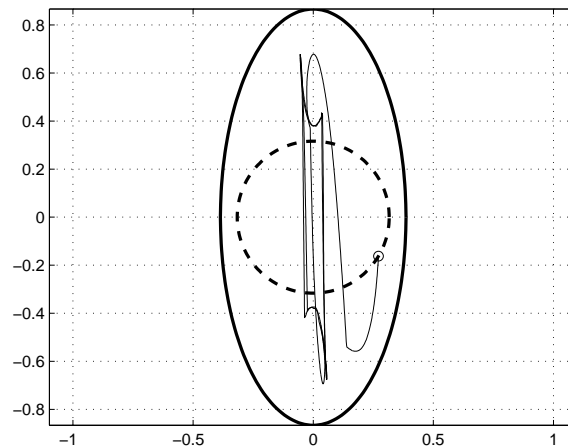


Рис. 3.2.1. Инвариантный эллипс и траектория невязки для системы из Примера 3.2.1.

На Рис. 3.2.1 сплошной линией изображен найденный минимальный ограничивающий эллипс, а пунктиром — проекция эллипсоида начальных состояний (эллипс с матрицей  $C_1 P_0 C_1^\top$ ). На этом же рисунке показана некоторая траектория  $e_1(t)$ ; при этом в качестве внешнего возмущения выбиралось локально наихудшее — максимизирующее  $\dot{V}(e, w)$  при фиксированном  $e$ . Как уже знаем, оно определяется формулой

$$\tilde{w} = \frac{D_1^\top \hat{P}^{-1} e}{|D_1^\top \hat{P}^{-1} e|}.$$

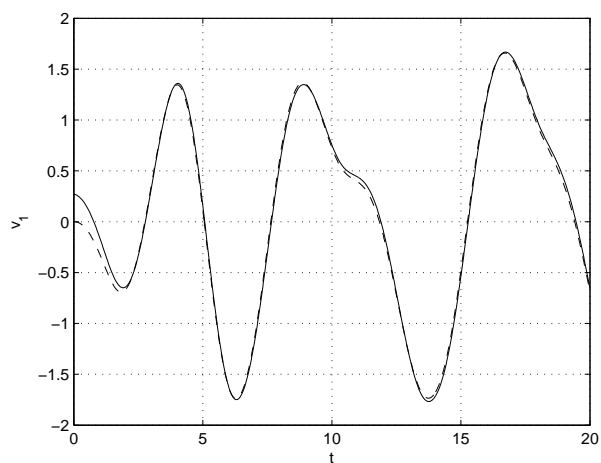


Рис. 3.2.2. Координата  $v_1(t)$  и ее оценка  $\hat{v}_1(t)$  для системы из Примера 3.2.1.

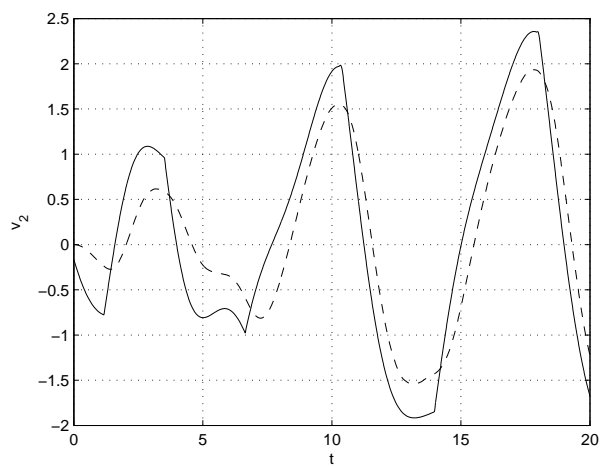


Рис. 3.2.3. Координата  $v_2(t)$  и ее оценка  $\hat{v}_2(t)$  для системы из Примера 3.2.1.

На Рис. 3.2.2 показаны траектории оцениваемой координаты  $v_1(t)$  (сплошной линией) и ее оценки  $\hat{v}_1(t)$  (пунктиром), а на Рис. 3.2.3 показаны траектории  $v_2(t)$  (сплошной линией) и  $\hat{v}_2(t)$  (пунктиром). Видно, что точность фильтрации весьма высока. ▼

### Дискретный случай

Аналогичные приведенным выше результаты получены и для линейной дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

с некоторым начальным условием  $x_0$ , где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением (шумом)  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (3.1.29); пара  $(A, D_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Построим фильтр, описываемый линейным разностным уравнением с постоянной матрицей  $L$  относительно оценки состояния  $\hat{x}_k$ :

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0, \quad (3.2.10)$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ .

Введем в рассмотрение невязку

$$e_k = x_k - \hat{x}_k.$$

Как и в непрерывном случае, нашей задачей является нахождение матрицы  $L$ , обеспечивающей минимальность инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}$ , содержащего невязку  $e_k$ .

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 3.2.1.

**Теорема 3.2.2.** Пусть  $\hat{Q}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } H \rightarrow \min \quad (3.2.11)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & A^\top Q - C^\top Y^\top & 0 \\ * & -Q & QD_1 - YD_2 \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (3.2.12)$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (3.2.13)$$

$$Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y},$$

а минимальный инвариантный эллипсоид, содержащий невязку  $e_k$  системы (3.2.9), (3.2.10) с  $x_0 = 0$ , определяется матрицей

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}.$$

**Доказательство.** Согласно (3.2.9), (3.2.10) невязка  $e_k$  будет удовлетворять разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC)e_k + (D_1 - LD_2)w_k. \quad (3.2.14)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V(e) = e^\top Q e, \quad Q = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (3.2.14).

Воспользовавшись Теоремой 3.1.4, с учетом Замечания 3.1.5 получаем, что условие инвариантности эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{e \in \mathbb{R}^n : e^\top Q e \leq 1\} \quad (3.2.15)$$

эквивалентно выполнению линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & (A - LC)^\top Q & 0 \\ * & -Q & Q(D_1 - LD_2) \\ * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

которое, после введения матричной переменной

$$Y = QF,$$

принимает линейный вид (3.2.12).

Итак, приходим к задаче минимизации

$$\text{tr } Q^{-1} \longrightarrow \min$$

при ограничении (3.2.12), которая, согласно Следствию 2.2.3, эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr} H \rightarrow \min$$

при ограничениях (3.2.12) и (3.2.13), где  $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — вспомогательная матричная переменная. ■

Как и в непрерывном случае, в силу Замечания 3.1.4 функция  $V(x) = x^T Q x$  с матрицей  $Q \succ 0$ , удовлетворяющей LMI (3.2.12), является квадратичной функцией Ляпунова для невязки системы (3.2.9), (3.2.10) вне эллипсоида (3.2.15).

Заметим, что, как и в непрерывном случае, исходная задача синтеза оптимальной матрицы фильтра (3.2.10) для системы (3.2.9) эквивалентна полученной задаче (3.2.11)–(3.2.13), то есть найденные условия являются необходимыми и достаточными.

Наконец, отметим, что при фиксированном  $\alpha$  полученная задача вновь является задачей SDP и, как и в непрерывном случае, оптимизация по параметру  $\alpha$  оказывается выпуклой. Замечания 3.2.1 и 3.2.2 также сохраняют свою силу.

Ниже будут рассмотрены *робастные* варианты задачи фильтрации, когда описание системы содержит неопределенности (то есть матрицы  $A$ ,  $D_1$  включают ограниченные неопределенности). Проблема заключается в построении фильтра и гарантированных оценок его точности, справедливых при любых допустимых неопределенностях. Эта задача разрешима с использованием той же техники, что и выше.

### 3.2.2. Фильтрация при наличии неопределенностей

#### Непрерывный случай

Рассмотрим неопределенную непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (D_1 + \Delta D_1)w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + D_2w, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением (шумом)  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (3.1.2); системные неопределенности  $\Delta A$  и  $\Delta D_1$  имеют структуру

$$\begin{aligned} \Delta A &= F_A \Delta_A H_A, \\ \Delta D_1 &= F_{D_1} \Delta_{D_1} H_{D_1}. \end{aligned}$$



Здесь матричные неопределенности  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$  и  $\Delta_{D_1} \in \mathbb{R}^{p_D \times q_D}$  удовлетворяют ограничению (3.1.52), а  $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$ ,  $F_{D_1} \in \mathbb{R}^{n \times p_D}$ ,  $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$ ,  $H_{D_1} \in \mathbb{R}^{q_D \times n}$  — постоянные матрицы. Пара  $(A, D_1)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Пусть, как и ранее, состояние  $x$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}$ , включающим в себя рассогласование выхода  $y$  и его прогноза  $C\hat{x}$ :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0, \quad (3.2.17)$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ .

Введем в рассмотрение невязку

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

характеризующую точность фильтрации; задачей является нахождение матрицы  $L$ , обеспечивающей минимальность эллипсоида, содержащего невязку.

Следующая теорема является робастным аналогом Теоремы 3.2.1.

**Теорема 3.2.3.** Пусть  $\hat{Q}_2, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } H \rightarrow \min \quad (3.2.18)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ * & \Omega_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ * & * & -\alpha I + \varepsilon_2 H_{D_1}^\top H_{D_1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (3.2.19)$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (3.2.20)$$

$$Q_1 \succ 0, \quad Q_2 \succ 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= A^\top Q_1 + Q_1 A + \alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^\top H_A, \\ \Omega_2 &= A^\top Q_2 + Q_2 A - C^\top Y^\top - Y C + \alpha Q_2, \end{aligned}$$

относительно матричных переменных  $Q_1 = Q_1^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $Q_2 = Q_2^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица фильтра дается выражением

$$\hat{L} = \hat{Q}_2^{-1} \hat{Y},$$

а соответствующий ограничивающий эллипсоид для невязки  $e(t)$  системы (3.2.16), (3.2.17) с  $x_0 = 0$  определяется матрицей

$$\hat{P} = \hat{Q}_2^{-1}.$$

**Доказательство.** Как следует из (3.2.16) и (3.2.17), невязка  $e(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = \Delta A x + (A - LC)e + (D_1 + \Delta D_1 - LD_2)w.$$

Введя в рассмотрение вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \tilde{A}g + \tilde{D}w, \\ z &= \tilde{C}g, \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A + \Delta A & 0 \\ \Delta A & A - LC \end{pmatrix}, \\ \tilde{D} &= \begin{pmatrix} D_1 + \Delta D_1 \\ D_1 + \Delta D_1 - LD_2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= (0 \quad I), \end{aligned}$$

с выходом  $z = e$ .

Рассмотрим функцию

$$V(g) = g^\top Qg, \quad Q \succ 0,$$

с блочно-диагональной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix},$$

построенную на решениях системы (3.2.21).

Воспользовавшись Теоремой 3.1.1, с учетом Замечания 3.1.3 получаем, что условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P = Q^{-1}$  для системы (3.2.21) эквивалентно существованию

$$\alpha(\Delta) = \alpha(\Delta_A, \Delta_{D_1}) > 0$$

такого, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^\top Q + Q\tilde{A} + \alpha(\Delta)Q & Q\tilde{D} \\ \tilde{D}^\top Q & -\alpha(\Delta)I \end{pmatrix} \preceq 0$$

при всех допустимых  $\Delta_A$  и  $\Delta_{D_1}$ .

Полученное соотношение представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & H_A^\top \Delta_A^\top F_A^\top Q_2 & Q_1(D_1 + F_{D_1} \Delta_{D_1} H_{D_1}) \\ * & \Phi_2 & Q_2(D_1 + F_{D_1} \Delta_{D_1} H_{D_1} - LD_2) \\ * & * & -\alpha(\Delta)I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (3.2.22)$$

где

$$\Phi_1 = (A + F_A \Delta_A H_A)^\top Q_1 + Q_1(A + F_A \Delta_A H_A) + \alpha(\Delta)Q_1,$$

$$\Phi_2 = (A - LC)^\top Q_2 + Q_2(A - LC) + \alpha(\Delta)Q_2.$$

Пусть существует  $\alpha > 0$  такое, что матричное неравенство (3.2.22) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_{D_1}$ . Тогда неравенство (3.2.22) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A^\top Q_1 + Q_1 A + \alpha Q_1 & 0 & Q_1 D_1 \\ 0 & \Phi_3 & Q_2(D_1 - LD_2) \\ D_1^\top Q_1 & (D_1 - LD_2)^\top Q_2 & -\alpha I \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} Q_1 F_A \\ Q_2 F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A \begin{pmatrix} H_A & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_A^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^\top \begin{pmatrix} F_A^\top Q_1 & F_A^\top Q_2 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} Q_1 F_{D_1} \\ Q_2 F_{D_1} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{D_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_{D_1} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{D_1}^\top \end{pmatrix} \Delta_{D_1}^\top \begin{pmatrix} F_{D_1}^\top Q_1 & F_{D_1}^\top Q_2 & 0 \end{pmatrix} \preceq 0, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_3 = (A - LC)^\top Q_2 + Q_2(A - LC) + \alpha Q_2.$$

Полученное соотношение в силу Леммы 2.2.13 выполняется при всех допустимых  $\Delta_A$  и  $\Delta_{D_1}$ , если существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  такие, что

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ * & \Omega_2 & Q_2(D_1 - LD_2) & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ * & * & -\alpha I + \varepsilon_2 H_{D_1}^\top H_{D_1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= A^\top Q_1 + Q_1 A + \alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^\top H_A, \\ \Omega_2 &= A^\top Q_2 + Q_2 A - C^\top Y^\top - Y C + \alpha Q_2. \end{aligned}$$

Введя матричную переменную

$$Y = Q_2 L,$$

и, тем самым, исключая  $L$ , приходим к линейному матричному неравенству (3.2.19).

Далее, в соответствии с Леммой 2.2.4, невязка  $e(t)$  содержится в ограничивающем эллипсоиде с матрицей

$$\tilde{C} Q^{-1} \tilde{C}^\top = Q_2^{-1}.$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\operatorname{tr} Q_2^{-1} \longrightarrow \min$$

при ограничении (3.2.19). Согласно Следствию 2.2.3, она эквивалентна задаче минимизации  $\operatorname{tr} H \longrightarrow \min$  при ограничениях (3.2.19) и (3.2.20), где  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — вспомогательная матричная переменная. ■

Отметим, что полученные выше условия являются только достаточными (см. Замечание 3.1.6). При фиксированном  $\alpha$  задача (3.2.18)–(3.2.20) также является задачей SDP. Замечание 3.2.1 также сохраняют свою силу.

Обратим внимание, что, в отличие от неробастной постановки задачи, невязка  $e(t)$  заключается не в инвариантный, а в *ограничивающий* эллипсоид — содержащий выход системы (3.2.21).

Полученный результат допускает обобщение на случай, когда в системе (3.2.16) имеется регулируемый выход

$$y_1 = C_1 x, \quad (3.2.23)$$

где  $C_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times n}$ , и нужно сделать малой ошибку оценки этого выхода

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = C_1(x - \hat{x}),$$

а не всего фазового состояния системы. Соответствующий результат представлен следующей теоремой.

**Теорема 3.2.4.** Пусть  $\hat{Q}_2, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } H \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ * & \Omega_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ * & * & -\alpha I + \varepsilon_2 H_{D_1}^\top H_{D_1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^\top & Q_2 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Q_1 \succ 0, \quad Q_2 \succ 0,$$

где

$$\Omega_1 = A^\top Q_1 + Q_1 A + \alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^\top H_A,$$

$$\Omega_2 = A^\top Q_2 + Q_2 A - C^\top Y^\top - Y C + \alpha Q_2,$$

а минимизация проводится относительно матричных переменных  $Q_1 = Q_1^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $Q_2 = Q_2^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_1}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица фильтра дается выражением

$$\hat{L} = \hat{Q}_2^{-1} \hat{Y},$$

а ограничивающий эллипсоид для невязки  $e_1(t)$  выхода (3.2.23) системы (3.2.16), (3.2.17) с  $x_0 = 0$  определяется матрицей

$$\hat{P} = \hat{Q}_2^{-1}.$$

**Пример 3.2.2.** Предложенный подход к робастной фильтрации ограниченных внешних возмущений продемонстрируем на примере задачи оценивания состояния двойного пружинного маятника, движущегося в вязкой среде, см. Пример 3.1.3.

Пусть наблюдаемый выход имеет вид

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а в качестве оцениваемого выхода возьмем вектор

$$y_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

При единичных параметрах системы, коэффициенте сопротивления среды 0,2 и неопределенности, сосредоточенной в коэффициенте жесткости левой пружины

$$k_1 = 1 + \delta\Delta, \quad \delta = \text{const}, \quad \|\Delta\| \leq 1,$$

приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + F_A\Delta H_A)x + Dw, \\ y &= Cx, \\ y_1 &= C_1x, \end{aligned}$$

со скалярной неопределенностью  $\Delta$  и матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_A = (1 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Полагая

$$P_0 = 0,1I, \quad \delta = 0,03,$$

и воспользовавшись Теоремой 3.2.4, находим матрицу инвариантного эллипсоида

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0,1339 & -0,0001 & 0,1877 & 0,0075 \\ * & 0,1330 & 0,0075 & 0,3099 \\ * & * & 1,1402 & 0,1141 \\ * & * & * & 3,0082 \end{pmatrix}$$

и соответствующую матрицу фильтра

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 229,8841 & 0,1641 \\ -0,3153 & 235,4314 \\ 324,4728 & 15,0014 \\ 13,7122 & 558,7068 \end{pmatrix},$$

соответствующие ограничивающему эллипсу с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1,1402 & 0,1141 \\ 0,1141 & 3,0082 \end{pmatrix},$$

содержащего невязку  $e_1(t)$ .

На Рис. 3.2.4 сплошной линией изображен найденный ограничивающий эллипс, пунктиром — проекция эллипсоида начальных состояний (эллипс с матрицей  $C_1 P_0 C_1^T$ ), а также некоторая траектория невязки  $e_1(t)$ .

На Рис. 3.2.5 показаны траектории  $v_1(t)$  (сплошной линией) и  $\hat{v}_1(t)$  (пунктиром), а на Рис. 3.2.6 — траектории  $v_2(t)$  (сплошной линией) и  $\hat{v}_2(t)$  (пунктиром). ▼

### Дискретный случай

Теперь рассмотрим решение задачи робастной фильтрации для дискретной системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + (D_1 + \Delta D_1)w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным состоянием  $x_0$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением (шумом)  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим

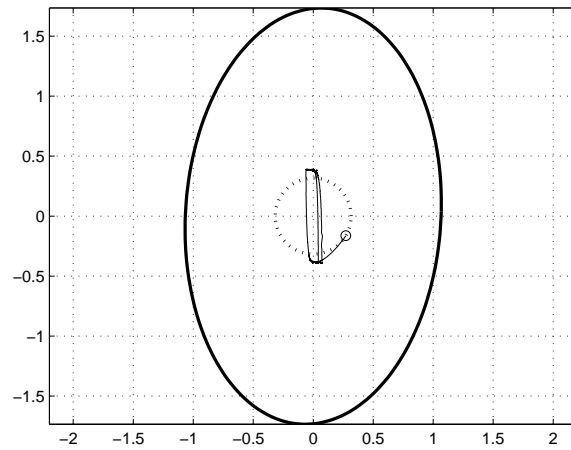


Рис. 3.2.4. Ограничивающий эллипс и траектория невязки из Примера 3.2.2.

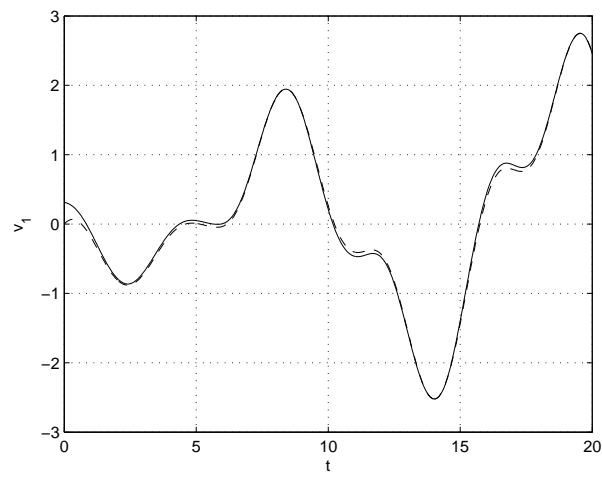
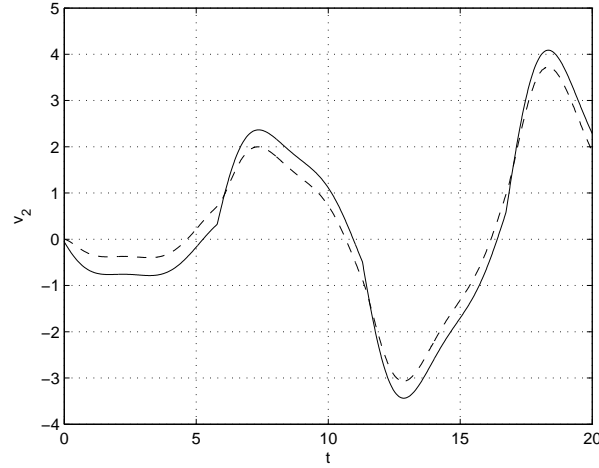


Рис. 3.2.5. Координата  $v_1(t)$  и ее оценка  $\hat{v}_1(t)$  из Примера 3.2.2.



Рис. 3.2.6. Координата  $v_2(t)$  и ее оценка  $\hat{v}_2(t)$  из Примера 3.2.2.

ограничению (3.1.29); системные неопределенности  $\Delta A$  и  $\Delta D_1$  имеют структуру

$$\Delta A = F_A \Delta_A H_A, \quad \Delta D_1 = F_{D_1} \Delta_{D_1} H_{D_1}.$$

Здесь матричные неопределенности  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$  и  $\Delta_{D_1} \in \mathbb{R}^{p_D \times q_D}$  удовлетворяют ограничению (3.1.60), а  $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$ ,  $F_{D_1} \in \mathbb{R}^{n \times p_D}$ ,  $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$ ,  $H_{D_1} \in \mathbb{R}^{q_D \times m}$  — постоянные матрицы. Пара  $(A, D_1)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Пусть, как и ранее, состояние  $x_k$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y_k$ . Построим фильтр, описываемый линейным разностным уравнением относительно оценки состояния  $\hat{x}_k$ , включающим в себя рассогласование выхода  $y_k$  и его прогноза  $C\hat{x}_k$ :

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0, \quad (3.2.25)$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ .

Введем в рассмотрение *невязку*  $e_k = x_k - \hat{x}_k$ , характеризующую точность фильтрации; задачей является нахождение такой матрицы  $L$ , которая обеспечивает минимальность (по критерию следа) инвариантного эллипсоида, содержащего невязку  $e_k$ .

Следующая теорема является робастным аналогом Теоремы 3.2.2 и дискретным аналогом Теоремы 3.2.3.

**Теорема 3.2.5.** Пусть  $\widehat{Q}_2, \widehat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } H \longrightarrow \min \quad (3.2.26)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & A^\top Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\alpha Q_2 & 0 & \Omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_1 & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ * & * & * & -Q_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ * & * & * & * & \Omega_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (3.2.27)$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (3.2.28)$$

$$Q_1 \succ 0, \quad Q_2 \succ 0,$$

где

$$\Omega_1 = -\alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^\top H_A,$$

$$\Omega_2 = -(1 - \alpha)I + \varepsilon_2 H_{D_1}^\top H_{D_1},$$

$$\Omega_3 = A^\top Q_2 - C^\top Y^\top,$$

а минимизация проводится относительно матричных переменных  $Q_1 = Q_1^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $Q_2 = Q_2^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда матрица фильтра дается выражением

$$\widehat{L} = \widehat{Q}_2^{-1} \widehat{Y},$$

а ограничивающий эллипсоид для невязки  $e_k$  системы (3.2.24), (3.2.25) с  $x_0 = 0$  определяется матрицей

$$\widehat{P} = \widehat{Q}_2^{-1}.$$

**Доказательство.** Согласно (3.2.24), (3.2.25), невязка  $e_k$  удовлетворяет уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC)e_k + \Delta A x_k + (D_1 + \Delta D_1 - LD_2)w_k.$$

Введя вектор

$$g_k = \begin{pmatrix} x_k \\ e_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

приходим к дискретной системе

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= \tilde{A}g_k + \tilde{D}w_k, \\ z_k &= \tilde{C}g_k, \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A + \Delta A & 0 \\ \Delta A & A - LC \end{pmatrix}, \\ \tilde{D} &= \begin{pmatrix} D_1 + \Delta D_1 \\ D_1 + \Delta D_1 - LD_2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= (0 \quad I), \end{aligned}$$

с выходом  $z_k = e_k$ .

Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V(g) = g^\top Qg, \quad Q \succ 0,$$

с блочно-диагональной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix},$$

построенную на решениях системы (3.2.29).

Воспользовавшись Теоремой 3.1.4 с учетом Замечания 3.1.5 получаем, что условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P = Q^{-1}$  для системы (3.2.29) эквивалентно существованию

$$\alpha(\Delta) = \alpha(\Delta_A, \Delta_{D_1}) > 0$$

такого, что

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\Delta)Q & \tilde{A}^\top Q & 0 \\ * & -Q & Q\tilde{D} \\ * & * & -(1 - \alpha(\Delta))I \end{pmatrix} \preceq 0$$

при всех допустимых  $\Delta_A$  и  $\Delta_{D_1}$  или, эквивалентно,

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\Delta)Q_1 & 0 & \Phi_1 & (F_A \Delta_A H_A)^\top Q_2 & 0 \\ * & -\alpha(\Delta)Q_2 & 0 & (A - LC)^\top Q_2 & 0 \\ * & * & -Q_1 & 0 & \Phi_2 \\ * & * & * & -Q_2 & \Phi_3 \\ * & * & * & * & -(1 - \alpha(\Delta))I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (3.2.30)$$

где

$$\Phi_1 = (A + F_A \Delta_A H_A)^\top Q_1,$$

$$\Phi_2 = Q_1(D_1 + F_{D_1} \Delta_{D_1} H_{D_1}),$$

$$\Phi_3 = Q_2(D_1 + F_{D_1} \Delta_{D_1} H_{D_1} - LD_2).$$

Пусть существует  $\alpha > 0$  такое, что неравенство (3.2.30) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_{D_1}$ . Тогда неравенство (3.2.30) будет справедливо, если выполнено матричное неравенство

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\alpha Q_1 & 0 & A^\top Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha Q_2 & 0 & \Phi_4 & 0 \\ Q_1 A & 0 & -Q_1 & 0 & Q_1 D_1 \\ 0 & \Phi_4^\top & 0 & -Q_2 & Q_2(D_1 - LD_2) \\ 0 & 0 & D_1^\top Q_1 & (D_1 - LD_2)^\top Q_2 & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1 F_A \\ Q_2 F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A \begin{pmatrix} H_A & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} H_A^\top \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_A^\top Q_1 & F_A^\top Q_2 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1 F_{D_1} \\ Q_2 F_{D_1} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{D_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & H_{D_1} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{D_1}^\top \end{pmatrix} \Delta_{D_1}^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{D_1}^\top Q_1 & F_{D_1}^\top Q_2 & 0 \end{pmatrix} \preceq 0, \end{aligned}$$

где

$$\Phi_4 = (A - LC)^\top Q_2.$$

В силу Леммы 2.2.13, полученное соотношение выполняется при всех допустимых неопределенностях  $\Delta_A$  и  $\Delta_{D_1}$ , если существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  такие, что

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & A^\top Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\alpha Q_2 & 0 & \Phi_4 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_1 & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ * & * & * & -Q_2 & Q_2(D_1 - LD_2) & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ * & * & * & * & \Omega_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^\top H_A, \\ \Omega_2 &= -(1 - \alpha)I + \varepsilon_2 H_{D_1}^\top H_{D_1}. \end{aligned}$$

Введя матричную переменную

$$Y = Q_2 L,$$

и, тем самым, исключая  $L$ , приходим к линейному матричному неравенству (3.2.27).

Согласно Лемме 2.2.4, невязка  $e_k$  содержится в ограничивающем эллипсоиде с матрицей

$$\tilde{C}Q^{-1}\tilde{C}^\top = Q_2^{-1}.$$

Итак, приходим к задаче минимизации

$$\text{tr } Q_2^{-1} \longrightarrow \min$$

при ограничении (3.2.27). Согласно Следствию 2.2.3, полученная задача эквивалентна задаче  $\text{tr } H \longrightarrow \min$  при ограничениях (3.2.27) и (3.2.28), где  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — вспомогательная матричная переменная. ■

Как ранее, полученные условия являются только достаточными (см. Замечание 3.1.6). При фиксированном  $\alpha$  задача (3.2.26)–(3.2.28) также является задачей SDP. По-прежнему, Замечание 3.2.1 сохраняет свою силу.

Обратим внимание, что, в отличие от неробастной постановки задачи, невязка  $e_k$  заключается не в инвариантный, а в *ограничивающий* эллипсоид — содержащий выход системы (3.2.29).

Полученный результат допускает обобщение на случай, когда в системе (3.2.24) имеется регулируемый выход

$$y_{1,k} = C_1 x_k, \quad (3.2.31)$$

где  $C_1 \in \mathbb{R}^{l_1 \times n}$ , и необходимо сделать малой ошибку оценки этого выхода

$$e_{1,k} = y_{1,k} - \hat{y}_{1,k} = C_1(x_k - \hat{x}_k),$$

а не всего фазового состояния системы.

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 3.2.4.

**Теорема 3.2.6.** Пусть  $\hat{Q}_2, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } H \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & A^\top Q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -\alpha Q_2 & 0 & \Omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_1 & 0 & Q_1 D_1 & Q_1 F_A & Q_1 F_{D_1} \\ * & * & * & -Q_2 & Q_2 D_1 - Y D_2 & Q_2 F_A & Q_2 F_{D_1} \\ * & * & * & * & \Omega_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^\top & Q_2 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Q_1 \succ 0, \quad Q_2 \succ 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\alpha Q_1 + \varepsilon_1 H_A^\top H_A, \\ \Omega_2 &= -(1 - \alpha)I + \varepsilon_2 H_{D_1}^\top H_{D_1}, \\ \Omega_3 &= A^\top Q_2 - C^\top Y^\top, \end{aligned}$$

а минимизация проводится относительно матричных переменных  $Q_1 = Q_1^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $Q_2 = Q_2^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{l_1 \times l_1}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда матрица фильтра дается выражением

$$\hat{L} = \hat{Q}_2^{-1} \hat{Y},$$

а соответствующий ограничивающий эллипсоид для невязки  $e_{1,k}$  выхода (3.2.31) системы (3.2.24) с  $x_0 = 0$  определяется матрицей

$$\hat{P} = \hat{Q}_2^{-1}.$$

---

На этом мы заканчиваем главу, посвященную решению задач анализа и оценивания состояния систем, подверженных влиянию ограниченных внешних возмущений. Введенное здесь понятие инвариантного эллипсоида и основанная на нем техника в следующей главе будут применены к решению задач *синтеза* управления, оптимально подавляющего такие возмущения.

## Глава 4

# Подавление ограниченных внешних возмущений

В данной главе показано, как на основе идеологии инвариантных эллипсоидов и аппарата линейных матричных неравенств, могут единообразно решаться задачи управления системами, подверженными влиянию внешних постоянно действующих возмущений. Среди рассматриваемых задач — синтез управления в виде обратной связи по состоянию и по выходу с использованием наблюдателя, построение динамического регулятора и др. Все задачи будут решены как для непрерывного, так и для дискретного времени (робастные же версии этих задач будут освещены в следующей главе).

Рассматриваемый подход к синтезу управления заключается в том, что ищется стабилизирующий регулятор, минимизирующий размер инвариантного или ограничивающего эллипсоида для выхода замкнутой системы, что, в свою очередь, формулируется в виде задачи полуопределенного программирования. Такой регулятор будем называть *оптимально подавляющим влияние внешних возмущений*, или просто *оптимальным регулятором*.

### 4.1. Влияние внешних возмущений

Прежде чем приступить к синтезу управления в системах с внешними возмущениями, обсудим принципиальное отличие такого типа задач от уже рассмотренных. Действительно, везде выше при построении стабилизирующего управления предполагалось отсутствие некон-



тролируемых внешних возмущений; единственным исключением являлась задача  $H_\infty$ -оптимизации, которая может формулироваться лишь в ситуации с возмущениями. Интуитивно понятно, что управление, построенное в предположении отсутствия возмущений, может оказаться неудовлетворительным или вовсе неработоспособным при их наличии. Вернемся к задачам из разделов 2.4.1 и 2.5.1 и убедимся в этом.

**Пример 4.1.1 (Задача стабилизации).** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

с матрицами  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  и управлением в форме статической линейной обратной связи по состоянию:

$$u = Kx.$$

Предположим, что нужно обеспечить желаемую степень устойчивости  $\sigma$  замкнутой системы. В частности, это можно сделать с помощью подхода, описанного в разделе 2.4.1, см. Замечание 2.4.1. Если при этом система подвергается воздействию ограниченных (в некоторой норме, например, из класса  $L_\infty$ ) внешних возмущений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw,$$

то ее нулевое решение будет содержаться в трубке некоторой величины  $d_\sigma$ .

С другой стороны, если наличие внешнего возмущения было бы известно заранее, то стабилизирующий регулятор выбирался бы иначе. В частности, можно было бы уменьшить размер трубки для нулевого решения замкнутой возмущенной системы, увеличивая ее степень устойчивости. ▼

Подобными вопросами, в частности, и займемся в настоящей главе.

**Пример 4.1.2 (LQR-задача).** Вновь вернемся к задаче построения линейно-квадратичного регулятора (см. раздел 2.5.1) для скалярной системы

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1,$$

с функционалом качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + u^2) dt,$$

то есть с единичными весовыми коэффициентами.

Решим задачу с использованием уравнения Риккати (2.5.4), которое в данном случае принимает вид

$$-q^2 + 1 = 0,$$

и его положительное решение есть  $q = 1$ . Поэтому оптимальное управление равно  $u = -x$ , и замкнутая оптимальная система имеет вид

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = 1,$$

с единичным оптимальным значением функционала.

Напомним, что постановка задачи о линейно-квадратичном регуляторе предполагает отсутствие внешних возмущений. Что будет происходить при их наличии?

Итак, пусть в исходной системе присутствует постоянное внешнее возмущение

$$w(t) = \varepsilon,$$

то есть система принимает вид

$$\dot{x} = -x + \varepsilon, \quad x(0) = 1.$$

Решение полученной системы ограничено и имеет вид

$$x(t) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)e^{-t},$$

однако при этом значение функционала

$$J = 2 \int_0^{\infty} x^2(t) dt$$

оказывается бесконечным. ▼

**Пример 4.1.3 (Программное управление).** Теперь обратимся к двумерной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned}$$

с начальным условием

$$x_1(0) = a, \quad x_2(0) = b,$$

и ограниченным управлением  $|u| \leq 1$ . Задача оптимального быстрого действия заключается в выборе управления  $u$ , минимизирующего время попадания системы в начало координат.

Как хорошо известно, оптимальное программное управление  $u^*(t)$  в рассматриваемой задаче строится следующим образом. Если начальная точка  $(a \ b)^\top$  находится выше кривой

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} \operatorname{sign} x_2 \quad (4.1.1)$$

или на ней, то

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \alpha, \\ 1, & \alpha \leq t \leq T; \end{cases} \quad \alpha = b + \sqrt{a + b^2/2},$$

при этом процесс завершится за время  $T = b + 2\sqrt{a + b^2/2}$ .

Если начальная точка расположена ниже кривой (4.1.1), то управление выбирается как

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \alpha, \\ -1, & \alpha \leq t \leq T, \end{cases} \quad \alpha = -b + \sqrt{-a + b^2/2},$$

и оптимальное время равно  $T = -b + 2\sqrt{-a + b^2/2}$ .

Будем предполагать, что начальная точка расположена выше кривой (4.1.1), а оптимальное управление подвержено воздействию (малого) возмущения:

$$\hat{u}(t) = u^*(t) + \varepsilon.$$

Нетрудно подсчитать, что в момент  $T$  система попадет в точку

$$x(T) = \varepsilon \begin{pmatrix} T^2/2 \\ T \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при любом сколь угодно малом возмущении  $\varepsilon$  но достаточно далеких начальных условиях (то есть,  $T$  велико), конечное положение системы может сколь угодно сильно отличаться от начала координат. ▼

Итак, управление, построенное без учета действия возмущений, при их наличии оказывается неудовлетворительным. Поэтому ниже при синтезе с самого начала будем вводить возмущения в модель и строить соответствующее управление. При этом (например, в отличие от задачи  $H_\infty$ -оптимизации) возмущения будут предполагаться “постоянно действующими”, то есть из класса  $L_\infty$ .

## 4.2. Управление по состоянию

### 4.2.1. Непрерывный случай

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , минимизируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в  $L_\infty$ -норме:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0, \quad (4.2.2)$$

где  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора; пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.<sup>1</sup>

Нашей целью является нахождение регулятора  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (4.2.3)$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$ ) подавляет воздействие внешних возмущений  $w$ .

Заметим, что наличие ненулевой компоненты  $B_2 u$  в выходе системы (4.2.1) позволяет при минимизации выхода избежать появления больших значений управления.<sup>2</sup> Таким образом, матрица  $B_2$  играет роль весового коэффициента, подобного матрице  $S$  в задаче о линейно-квадратичном регуляторе. Альтернативой такому подходу является явное введение ограничения на величину управления; эта ситуация будет освещена ниже.

В следующей теореме поиск оптимального регулятора сводится к задаче SDP и одномерной минимизации.

**Теорема 4.2.1.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2 Y C^\top + B_2 Z B_2^\top] \rightarrow \min \quad (4.2.4)$$

<sup>1</sup>Чтобы избежать “смешивания” управлений и фазовых координат в выходе системы, можно положить  $B_2^\top C = 0$ , однако, получаемые в дальнейшем результаты не предполагают выполнения этого условия; ср. со сноской на с. 25.

<sup>2</sup>Более того, если управление и возмущение приложены “в одной точке”, то есть матрицы  $B_1$  и  $D$  совпадают, то за счет огромного управления выход системы можно сделать сколь угодно малым.

при ограничениях

$$AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^\top \preceq 0, \quad (4.2.5)$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (4.2.6)$$

$$P \succ 0, \quad (4.2.7)$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда регулятор (4.2.3) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (4.2.1), (4.2.2) и оптимально подавляет внешние возмущения, при этом матрица минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

**Доказательство.** Система (4.2.1) с учетом (4.2.3) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_1K)x + Dw, \\ z &= (C + B_2K)x. \end{aligned}$$

Применяя к ней Теорему 3.1.1, приходим к задаче

$$\text{tr}[(C + B_2K)P(C + B_2K)^\top] \longrightarrow \min \quad (4.2.8)$$

при ограничениях (4.2.7) и

$$(A + B_1K)P + P(A + B_1K)^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^\top \preceq 0. \quad (4.2.9)$$

В матричное неравенство (4.2.9) переменные  $P$  и  $K$  входят нелинейным образом. Воспользуемся приемом, который неоднократно использовался при квадратичной стабилизации в Главе 2. Введем матричную переменную

$$Y = KP, \quad Y \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

Тогда неравенство (4.2.9) примет линейный (по переменным  $P$  и  $Y$ ) вид (4.2.5). Далее, с учетом введенной переменной  $Y$  целевая функция в (4.2.8) переписется в виде

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top].$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\operatorname{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.2.5) и (4.2.7). Согласно Лемме 2.2.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.2.5), (4.2.6) и (4.2.7), где  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — вспомогательная матричная переменная. ■

Заметим, что функция  $V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$  с матрицей  $\hat{P} \succ 0$ , удовлетворяющей ЛМІ (4.2.5), является квадратичной функцией Ляпунова для системы (4.2.1), замкнутой регулятором  $\hat{K}$ , вне эллипсоида с матрицей  $\hat{P}$ . С другой стороны, внутри этого эллипсоида (который является инвариантным для замкнутой системы) управление ограничено следующим образом:

$$|u| \leq \max_{x^\top \hat{P}^{-1}x \leq 1} |\hat{K}x| = \|\hat{K}\hat{P}^{1/2}\|.$$

**Замечание 4.2.1.** Как и в задаче анализа (см. Замечание 3.1.1), если в начальном состоянии системы имеется неопределенность вида

$$x(0) \in \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P_0^{-1}x \leq 1\}, \quad P_0 \succ 0,$$

для получения равномерной оценки поведения траекторий дополнительно потребуем выполнения ЛМІ

$$P \succ P_0. \quad (4.2.10)$$

В случае же непосредственного задания начального условия  $x_0 \neq 0$ , потребуем выполнения ЛМІ

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \quad (4.2.11)$$

Соответствующее неравенство может добавляться к совокупности ограничений в формулировках приводимых ниже результатов.

В дальнейших постановках задач будем указывать некоторое начальное условие  $x_0$  системы, не обсуждая способы его учета. ▼

При фиксированном  $\alpha$  данная задача представляет собой задачу минимизации линейной функции (4.2.4) при ограничениях (4.2.5)–(4.2.6), задаваемых линейными матричными неравенствами, то есть задачу SDP. Это замечание относится ко всем результатам, полученным в данной главе.

**Лемма 4.2.1.** *Задача, сформулированная в Теореме 4.2.1, имеет решение при любом значении параметра  $\alpha > 0$ .*

**Доказательство.** Прежде всего, отметим, что если пара  $(A, B)$  управляема, то и пара  $(A + \beta I, B)$  управляема при любом  $\beta \in \mathbb{R}$ . В самом деле, по Теореме Д.1

$$\text{rank}(A + \lambda I \quad B) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

При этом если  $\lambda$  пробегает множество  $\mathbb{C}$ , то и  $\lambda + \beta$  пробегает  $\mathbb{C}$ , поэтому

$$\text{rank}(A + (\lambda + \beta)I \quad B) = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Далее, зафиксируем произвольное  $\alpha > 0$  и выберем любую матрицу  $R \succ 0$  такую, что

$$R \succ \frac{1}{\alpha} DD^\top.$$

Поскольку пара  $(A, B_1)$  управляема, то управляема и пара матриц  $(A + \frac{\alpha}{2}I, B_1)$ , поэтому найдется  $K$  такое, что матрица  $A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K$  устойчива. Тогда согласно Лемме 1.2.3 уравнение Ляпунова

$$(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K)P + P(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K)^\top = -R$$

имеет (единственное) положительно определенное решение  $P \succ 0$ . При этом

$$\begin{aligned} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top &= \\ = (A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K)P + P(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K)^\top + \frac{1}{\alpha} DD^\top &= \\ = -R + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preccurlyeq 0. &\blacksquare \end{aligned}$$

**Замечание 4.2.2.** Аналогичный результат будет справедлив и в том случае, когда в формулировке Теоремы 4.2.1 имеется дополнительное ограничение

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

соответствующее заданному (ненулевому) начальному условию  $x_0$ .

В самом деле, пусть, следуя ходу доказательства Леммы 4.2.1, это условие оказалось невыполненным. Это означает, что величина

$$\eta = \frac{|x_0|^2}{\lambda_{\min}(P)} > 1.$$

Тогда для той же матрицы  $R$  уравнение Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K\right)^\top = -\eta R$$

имеет (единственное) положительно определенное решение

$$\tilde{P} = \eta P \succ x_0 x_0^\top,$$

для которого

$$\begin{aligned} \left(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K\right)\tilde{P} + \tilde{P}\left(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K\right)^\top + \frac{1}{\alpha}DD^\top &= \\ = -\eta R + \frac{1}{\alpha}DD^\top \prec -R + \frac{1}{\alpha}DD^\top \preccurlyeq 0. \end{aligned}$$

Наконец, нетрудно видеть, что Лемма 4.2.1 останется справедливой и в случае неопределенности в начальном состоянии системы в виде дополнительного ограничения  $P \succcurlyeq P_0$ . ▼

**Замечание 4.2.3.** В формулировке Теоремы 4.2.1 отсутствует утверждение о строгой выпуклости целевой функции. При численном моделировании на тестовых примерах одномерная минимизация по  $\alpha$  всегда оказывалась выпуклой, однако строгое обоснование этого факта пока остается открытой задачей. ▼

**Пример 4.2.1.** Вновь обратимся к двухмассовой системе из Примера 2.4.1, но на этот раз будем предполагать, что на систему воздействует внешнее возмущение (см. Рис. 4.2.1). Пусть к левому телу приложено управление  $u$  для компенсации внешнего возмущения  $w$ , действующего на правое тело. Возмущение предполагается произвольным, но ограниченным в любой момент времени, то есть удовлетворяют ограничению (4.2.2).

В прежних обозначениях непрерывная модель возмущенных коле-



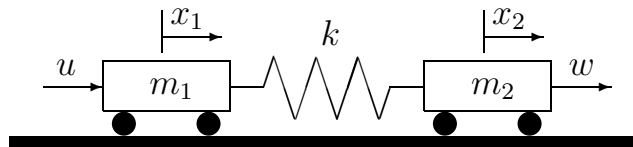


Рис. 4.2.1. Двухмассовая система из Примера 4.2.1.

баний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w.\end{aligned}$$

Взяв в качестве регулируемого выхода вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix},$$

приходим к системе вида (4.2.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_2} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При единичных значениях параметров системы

$$k = m_1 = m_2 = 1$$

с помощью Теоремы 4.2.1 был найден оптимальный регулятор

$$\widehat{K} = (-2,2779 \quad 0,6450 \quad -2,3373 \quad -1,6594)$$

и матрица

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 4,8143 & 1,8060 & -0,9340 & -3,6538 \\ * & 6,7449 & 2,9531 & -1,3085 \\ * & * & 4,9266 & -1,5907 \\ * & * & * & 5,4467 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному ограничивающему эллипсу для выхода  $z$  замкнутой системы с матрицей

$$(C + B_2 \widehat{K}) \widehat{P} (C + B_2 \widehat{K})^\top = \begin{pmatrix} 6,7449 & -4,4941 \\ -4,4941 & 8,3819 \end{pmatrix}.$$

На Рис. 4.2.2 этот эллипс изображен вместе с траекторией выхода системы при некотором выборе начального положения внутри соответствующего инвариантного эллипсоида и при воздействии на систему внешнего возмущения  $w(t) = \text{sign} \sin(t/3)$ .

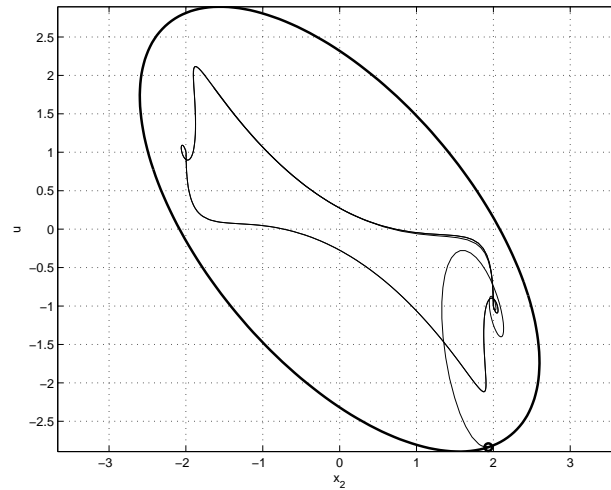


Рис. 4.2.2. Ограничивающий эллипс и траектория выхода системы из Примера 4.2.1.

Видим, что консерватизм полученной оценки невелик: траектория выхода системы подходит близко к границе ограничивающего эллипса.

На Рис. 4.2.3 приведены графики внешнего возмущения  $w(t)$  (пунктиром) и синтезированного управления  $u(t)$  (сплошной линией).

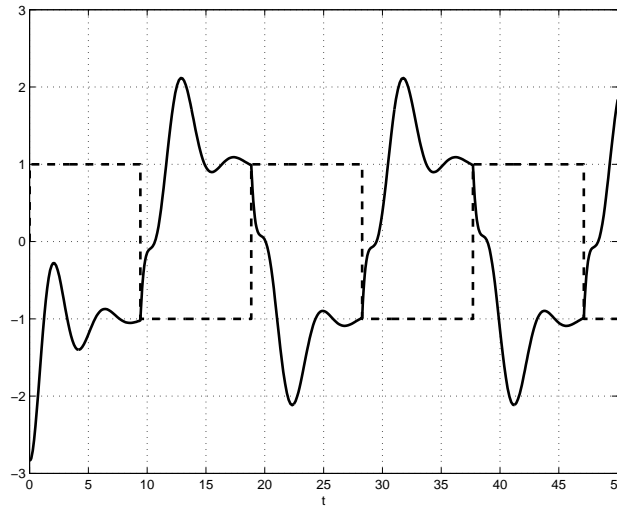


Рис. 4.2.3. Внешнее возмущение  $w(t)$  и управление  $u(t)$  для системы из Примера 4.2.1.

В соответствии с вышесказанным, внутри инвариантного эллипсоида с полученной матрицей  $\hat{P}$  управление остается ограниченной величиной

$$|u| \leq \|\hat{K}\hat{P}^{1/2}\| = 2,8951.$$

Мы отмечали, что в системе (4.2.1) матрица  $B_2$  играет роль весового коэффициента при управлении; уменьшение ее ненулевого элемента приводит к большим значениям управления и, как следствие, к уменьшению размера инвариантного эллипсоида и ограничивающего эллипса для выхода. Так, при выборе

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

приходим к результатам, изображенным на Рис. 4.2.4 и 4.2.5.

Как отмечалось выше, в качестве критерия оптимальности можно выбрать норму матрицы ограничивающего эллипсоида для выхода замкнутой системы (то есть минимизировать радиус шара, содержащего этот эллипсоид).

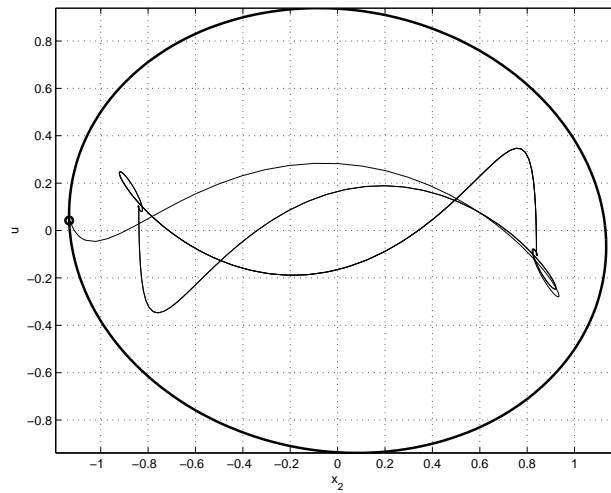


Рис. 4.2.4. Ограничивающий эллипс и траектория системы из Примера 4.2.1 при  $B_2 = (0 \ 0,1)^T$ .

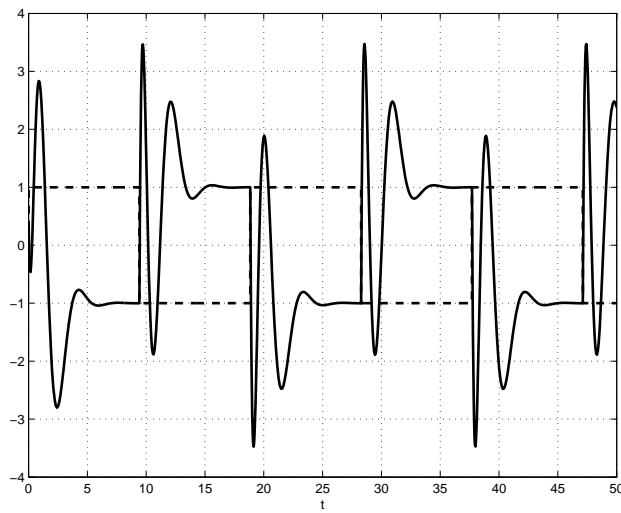


Рис. 4.2.5. Графики внешнего возмущения  $w(t)$  и управления  $u(t)$  для системы из Примера 4.2.1 при  $B_2 = (0 \ 0,1)^T$ .

Следующая теорема является соответствующим аналогом Теоремы 4.2.1.

**Теорема 4.2.2.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — решение задачи

$$\lambda \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top \preceq \lambda I,$$

$$AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^\top \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярной переменной  $\lambda$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда статический регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (4.2.1) и оптимально подавляет внешние возмущения; при этом матрица минимального (по критерию нормы) ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

### Наличие ограничений на управление

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , минимизируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (4.2.2); пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

В отличие от системы (4.2.1), в выходе системы (4.2.12) отсутствует компонента, зависящая от управления. Как уже отмечалось, минимизация выхода такой системы может осуществляться за счет сколь угодно больших значений управления, поэтому естественно потребовать введения явных ограничений на управление.

Как и в случае невозмущенной системы (см. раздел 2.4.1), будем накладывать на управление ограничение вида

$$|u(t)| \leq \mu \quad \forall t \geq 0, \quad (4.2.13)$$

достаточное условие выполнения которого вдоль траектории замкнутой системы дается следующим аналогом Леммы 2.4.1.

**Лемма 4.2.2.** Пусть матрицы  $P \succ 0$  и  $Y$  удовлетворяют неравенству

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0$$

при некотором  $\alpha > 0$ . Тогда выполнение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

влечет выполнение ограничения (4.2.13) внутри эллипсоида с матрицей  $P$  для системы (4.2.12), (4.2.2), (4.2.3) с регулятором

$$K = YP^{-1}.$$

Как и в ситуации без внешних возмущений, возникает вопрос о допустимых значениях величины  $\mu$ , который решается следующим образом.

**Лемма 4.2.3.** Пусть  $\hat{\lambda}, \hat{P}$  — решение задачи

$$\lambda \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \lambda I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

с матричными переменными  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярной переменной  $\lambda$  и скалярным параметром  $\alpha > 0$ .

Тогда при

$$\mu \geq \mu_{\min} \doteq \sqrt{\widehat{\lambda}}$$

для системы (4.2.12) существует стабилизирующий регулятор по состоянию  $u = Kx$ , удовлетворяющий ограничению (4.2.13) внутри эллипсоида с матрицей  $\widehat{P}$ .

**Замечание 4.2.4.** Допустимым диапазоном варьирования параметра  $\alpha$  в Лемме 4.2.3 является вся положительная полуось, а при каждом фиксированном значении  $\alpha$  полученная задача является задачей полуопределенного программирования. Более того, при численном моделировании на тестовых примерах функция  $\mu_{\min}(\alpha)$  всегда оказывалась выпуклой (строгое обоснование этого факта в настоящее время отсутствует, ср. с Замечанием 4.2.3). На Рис. 4.2.6 показан график этой функции для некоторой возмущенной системы.

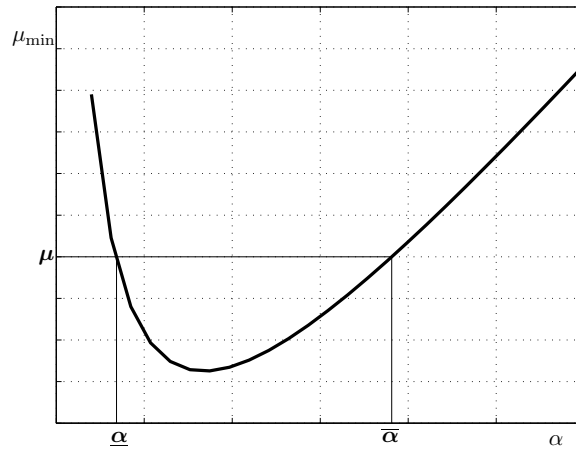


Рис. 4.2.6. График функции  $\mu_{\min}(\alpha)$ .

Это наблюдение может быть использовано следующим образом. Пусть задан некоторый уровень  $\mu$  допустимых управлений. Тогда проекция сечения надграфика функции на уровне  $\mu$  на горизонтальную ось дает соответствующий этому уровню интервал  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  для значений параметра  $\alpha$ , при которых справедлива Лемма 4.2.2. ▼

Как и в ситуации без возмущений, при определении минимально возможного уровня управления ненулевые начальные условия можно учитывать, добавляя дополнительное ограничение (4.2.10) или (4.2.11).

Таким образом, приходим к следующему утверждению, которое представляет собой аналог Теоремы 4.2.1, но при наличии явных ограничений на управление.

**Теорема 4.2.3.** Пусть величина  $\mu$  удовлетворяет Лемме 4.2.3. Тогда существует решение  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$  задачи

$$\text{tr } CPC^T \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0, \quad (4.2.14)$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (4.2.15)$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

При этом регулятор (4.2.3) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (4.2.1) при соблюдении ограничения (4.2.13), а матрица ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C \hat{P} C^T.$$

В соответствии с Замечанием 4.2.4, пределы варьирования параметра  $\alpha$  в сформулированной выше задаче можно находить с использованием Леммы 4.2.2.

**Пример 4.2.2.** Вновь рассмотрим задачу из Примера 4.2.1. На этот раз компонента управления в выходе будет отсутствовать, а ограничение на управление наложим явным образом.

Пусть выход системы представим вектором

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$



то есть матрица выхода системы имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего, в соответствии с Леммой 4.2.3 норма стабилизирующего управления не может быть меньше, чем

$$\mu_{\min} = 2,0006,$$

поэтому в качестве ограничения на управление выберем  $\mu = 2,8951$ , т. е. то, которое получилось в задаче без явных ограничений на управление (см. Пример 4.2.1). Согласно Лемме 4.2.2 это дает следующий интервал варьирования параметра:

$$0,01 \leq \alpha \leq 0,48.$$

Воспользовавшись Теоремой 4.2.3, находим

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 6,0541 & 1,1046 & -0,7985 & -4,3065 \\ * & 9,5265 & 4,0151 & -1,2565 \\ * & * & 7,8585 & -3,8134 \\ * & * & * & 8,7533 \end{pmatrix}$$

и регулятор

$$\hat{K} = (-1,1665 \quad -0,0484 \quad -1,2256 \quad -0,7984),$$

соответствующий минимальному ограничивающему эллипсу для выхода  $z$  с матрицей

$$C\hat{P}C^T = \begin{pmatrix} 6,0541 & 1,1046 \\ 1,1046 & 9,5265 \end{pmatrix}.$$

На Рис. 4.2.7 изображен найденный ограничивающий эллипс и некоторая траектория системы; в качестве внешнего возмущения взято  $w(t) = \text{sign} \sin(t/3)$ .

На Рис. 4.2.8 приведены графики внешнего возмущения  $w(t)$  и управления  $u(t)$ , величина которого почти достигает разрешенного допустимого уровня.

Сравнивая эти результаты с полученными для системы из Примера 4.2.1, убеждаемся, что использование явных ограничений на управление приводит к схожему поведению замкнутой системы. ▾

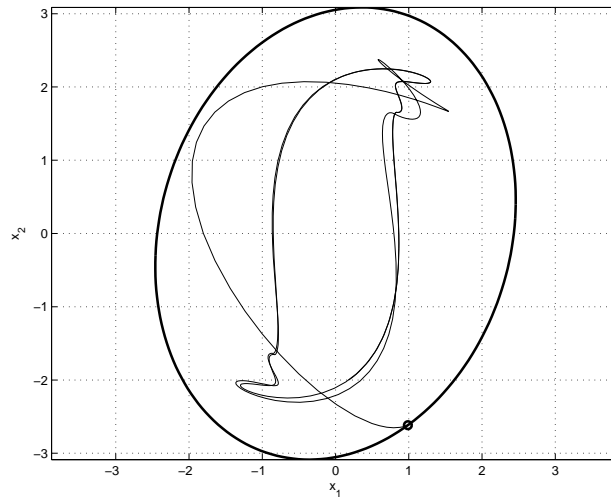


Рис. 4.2.7. Ограничивающий эллипс и траектория системы из Примера 4.2.2.

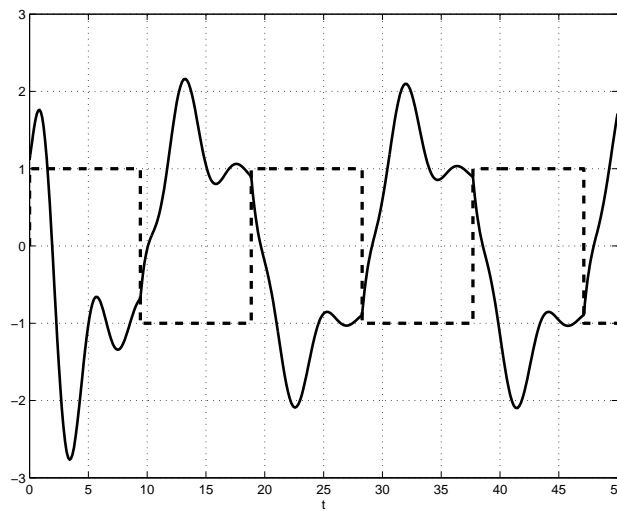


Рис. 4.2.8. Внешнее возмущение  $w(t)$  и управление  $u(t)$  для системы из Примера 4.2.2.

**Интервальные ограничения на внешние возмущения**

Вместо евклидовых ограничений (4.2.2) на внешние возмущения можно рассматривать *интервальные* ограничения

$$|w_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad \forall t \geq 0. \quad (4.2.16)$$

Как уже обсуждалось выше (см. Теорему 3.1.2), в такой ситуации используемая нами техника позволяет получить лишь субоптимальное решение задачи. Следующая теорема является соответствующим аналогом Теоремы 4.2.1.

**Теорема 4.2.4.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (4.2.17)$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (4.2.18)$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq \alpha, \quad P \succ 0, \quad (4.2.19)$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярных переменных  $\beta_1, \dots, \beta_m$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда регулятор (4.2.3) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (4.2.1), (4.2.16), а матрица ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

**Доказательство.** Система (4.2.1) с учетом (4.2.3) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_1K)x + Dw, \\ z &= (C + B_2K)x. \end{aligned}$$

Применяя к ней Следствие 3.1.4, приходим к задаче

$$\operatorname{tr}[(C + B_2K)P(C + B_2K)^\top] \longrightarrow \min \quad (4.2.20)$$

при ограничениях (4.2.19) и

$$\begin{pmatrix} (A + B_1K)P + P(A + B_1K)^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\operatorname{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (4.2.21)$$

Вводя, как и выше, матричную переменную  $Y = KP$ , приводим неравенство (4.2.21) к линейному виду (4.2.17). При этом целевая функция в (4.2.20) переписывается в виде

$$\operatorname{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top].$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\operatorname{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.2.17) и (4.2.19). Согласно Лемме 2.2.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.2.17), (4.2.19) и (4.2.18), где  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — вспомогательная матричная переменная. ■

### Еще несколько примеров

**Пример 4.2.3.** Вновь рассмотрим двухмассовую систему из Примера 2.4.1, но на этот раз будем предполагать, что компоненты ограниченного внешнего возмущения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad |w(t)| \leq 1,$$

воздействуют на каждое из тел, см. Рис. 4.2.9.

Взяв в качестве регулируемого выхода системы вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix},$$

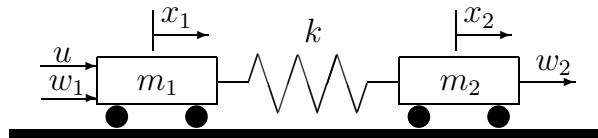


Рис. 4.2.9. Двухмассовая система из Примера 4.2.3.

приходим к системе вида (4.2.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее параметры системы предполагаются единичными.

С помощью Теоремы 4.2.1 находим оптимальный регулятор

$$\hat{K} = (-2,5868 \quad 0,8140 \quad -2,5096 \quad -1,8295)$$

и матрицу

$$(C + B_2 \hat{K}) \hat{P} (C + B_2 \hat{K})^\top = \begin{pmatrix} 7,1762 & -4,6513 \\ -4,6513 & 13,7513 \end{pmatrix}$$

минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипса для выхода системы.

Для сравнения построим для этой же системы линейно-квадратичный регулятор (с единичными весовыми матрицами); в частности, он может быть получен с помощью Control System Toolbox в системе МАТЛАВ (процедура `lqr`). Имеем:

$$K_{lqr} = (-0,6285 \quad -0,0786 \quad -1,1212 \quad -0,8069).$$

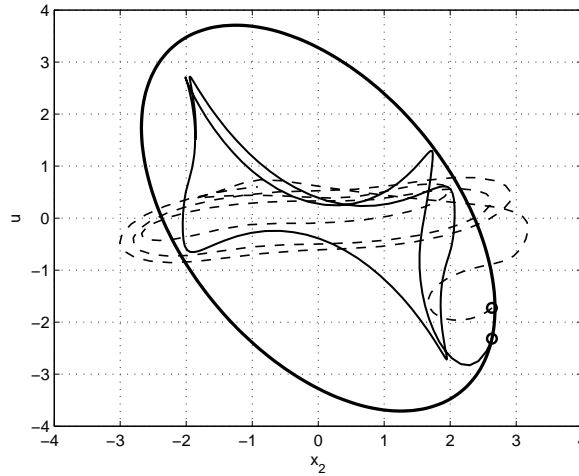


Рис. 4.2.10. Ограничивающий эллипс и траектории системы из Примера 4.2.3.

На Рис. 4.2.10 изображен минимальный ограничивающий эллипс, соответствующий оптимальному регулятору  $\hat{K}$ . На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы и наихудшем внешнем возмущении  $\tilde{w}(t)$ , определяемым Леммой 3.1.2, построены две траектории выходной переменной: сплошной линией — траектория, соответствующая регулятору  $\hat{K}$ , а штрихпунктиром — траектория, соответствующая регулятору  $K_{1qr}$ . Обратим внимание, что траектория системы, замкнутой регулятором  $K_{1qr}$  выходит за пределы минимального ограничивающего эллипса, тогда как траектория системы, замкнутой регулятором  $\hat{K}$ , естественно, в нем и остается.

Для сравнения в качестве критерия выберем норму матрицы ограничивающего эллипса для выхода системы. С помощью Теоремы 4.2.2 получаем оптимальный регулятор

$$\hat{K} = (-2,3272 \quad 1,0534 \quad -2,3912 \quad -1,7859)$$

и соответствующий ему минимальный ограничивающий эллипс с матрицей

$$(C + B_2 \hat{K}) \hat{P} (C + B_2 \hat{K})^\top = \begin{pmatrix} 11,2055 & -2,5846 \\ -2,5846 & 13,6202 \end{pmatrix}.$$

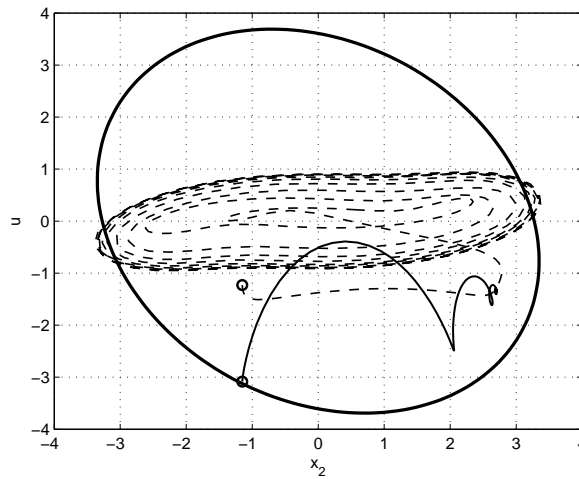


Рис. 4.2.11. Ограничивающий эллипс и траектории системы из Примера 4.2.3.

На Рис. 4.2.11 изображен найденный минимальный ограничивающий эллипс для выхода системы, замкнутой регулятором  $\hat{K}$ . На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы и наихудшем внешнем возмущении  $\tilde{w}(t)$  построены две траектории выходной переменной: сплошной линией — траектория, соответствующая регулятору  $\hat{K}$ , и штрихпунктиром — траектория, соответствующая регулятору  $K_{\text{лqr}}$ . Отметим, что и в этом случае траектория системы, замкнутой регулятором  $K_{\text{лqr}}$ , выходит за пределы ограничивающего эллипса, тогда как траектория системы, замкнутой регулятором  $\hat{K}$ , естественно, в нем и остается. ▼

Таким образом, предлагаемый метод синтеза, специально нацеленный на подавление внешних возмущений, в данном отношении имеет явные преимущества перед традиционными подходами.

В рамках рассмотренного примера можно продемонстрировать и дискретный случай возмущенных колебаний двойного осциллятора, аппроксимируя его движение моделью в дискретном времени. Соответствующие теоретические результаты приведены в следующем разделе.

**Пример 4.2.4.** Рассмотрим линейную систему десятого порядка

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + Dw, \quad x(0) = 0,$$

с ограниченным внешним возмущением

$$\|w(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

и матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

ср. с Примером 1.4.1.

В качестве минимизируемого выхода системы рассмотрим вектор

$$z = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ u)^\top,$$



то есть

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись Теоремой 4.2.1, находим следующий оптимальный регулятор

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -2,1652 & -14,7898 & -48,9315 & -102,9161 & -151,9990 & \dots \\ \dots & -164,3900 & -131,6554 & -77,0149 & -31,4702 & -8,1080 \end{pmatrix};$$

при этом степень устойчивости замкнутой системы равна

$$\hat{\sigma} = 0,3945.$$

На Рис. 4.2.12 показана зависимость от времени нормы  $|x(t)|$  фазового состояния рассматриваемой системы, замкнутой оптимальным регулятором  $\hat{K}$ , при *ступенчатом* внешнем возмущении. В этом случае установившемся режиму соответствует

$$|\bar{x}| \approx 338,$$

а перерегулирование (см. конец раздела 1.4.1) составляет менее 4%.

С другой стороны, если пытаться стабилизировать систему прямым размещением полюсов (см. раздел 1.4.1) с той же степенью устойчивости, получим регулятор

$$K = \begin{pmatrix} -0,0001 & -0,0023 & -0,0264 & -0,1784 & -0,7916 & \dots \\ \dots & -2,4079 & -5,0864 & -7,3675 & -7,0034 & -3,9450 \end{pmatrix}.$$

На Рис. 4.2.13, также при ступенчатом внешнем возмущении, показана зависимость от времени нормы фазового состояния системы, замкнутой регулятором  $K$ . При этом установившемся режиму соот-

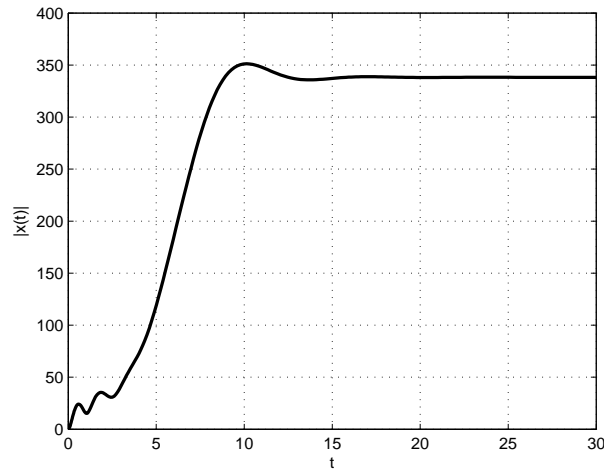


Рис. 4.2.12. Норма вектора состояния замкнутой системы при подавлении внешних возмущений из Примера 4.2.4.

ветствует величина  $|\bar{x}| \approx 3 \cdot 10^5$ , то есть почти в 900 раз больше. Видим, что и время установления оказалось заметно бóльшим.

Следует отметить, что столь большой выигрыш дается не даром: норма коэффициента усиления  $\hat{K}$  примерно в 20 раз больше нормы коэффициента усиления  $K$ , при этом ресурс управления увеличивается примерно на порядок. ▼

#### 4.2.2. Дискретный случай

Приведем в этом разделе дискретные аналоги предыдущих результатов. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k + B_2 u_k, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w_k| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2.23)$$

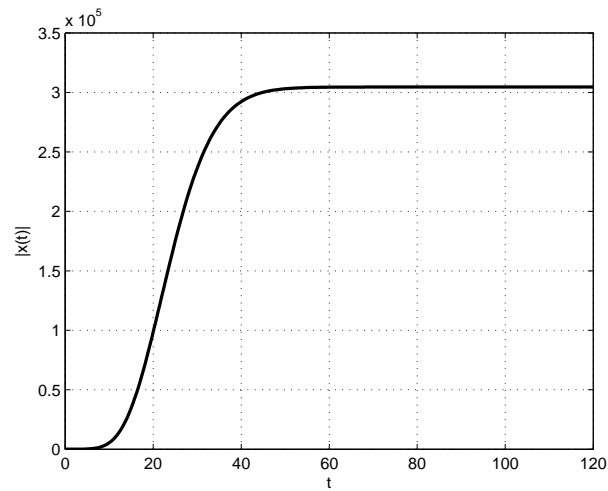


Рис. 4.2.13. Норма вектора состояния замкнутой системы при размещении полюсов из Примера 4.2.4.

где  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора; как обычно, пара  $(A, B_1)$  предполагается управляемой, а пара  $(A, C)$  — наблюдаемой.

Требуется найти регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k, \quad (4.2.24)$$

обеспечивающий минимальный по критерию следа размер ограничивающего эллипсоида для выхода системы (4.2.22).

Следующее утверждение представляет собой дискретный аналог Теоремы 4.2.1.

**Теорема 4.2.5.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top + Y^\top B_1^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (4.2.25)$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (4.2.26)$$

$$P \succ 0, \quad (4.2.27)$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда регулятор (4.2.24) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (4.2.22) и оптимально подавляет влияние внешних возмущений (4.2.23); при этом матрица минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

**Доказательство.** Замкнув систему (4.2.22) регулятором (4.2.24), получаем

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + B_1K)x_k + Dw_k, \\ z_k &= (C + B_2K)x_k. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись Теоремой 3.1.4, с учетом Замечания 3.1.5 приходим к задаче

$$\text{tr}[(C + B_2K)P(C + B_2K)^\top] \longrightarrow \min \quad (4.2.28)$$

при ограничениях (4.2.27) и

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1K)^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (4.2.29)$$

С введением новой матричной переменной  $Y = KP$  неравенство (4.2.29) переходит в линейное неравенство (4.2.25), а целевая функция в (4.2.28) принимает вид

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top].$$

Итак, приходим к задаче

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.2.25) и (4.2.27). Согласно Лемме 2.2.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.2.25), (4.2.26) и (4.2.27), где  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — вспомогательная матричная переменная. ■

Как и в непрерывном случае, имеют место следующие свойства:

- при фиксированном значении параметра  $\alpha$  имеем задачу полуопределенного программирования, однако, строгое обоснование выпуклости целевой функции по  $\alpha$  отсутствует;
- полученные в Теореме 4.2.5 условия являются необходимыми и достаточными для оптимальности регулятора;
- матрица  $\hat{P} \succ 0$ , удовлетворяющая ЛМИ (4.2.25), задает инвариантный эллипсоид для для системы (4.2.22), замкнутой регулятором  $\hat{K}$ ; при этом  $V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$  является квадратичной функцией Ляпунова *вне эллипсоида*;
- внутри этого эллипсоида выполнено следующее ограничение на управление:

$$|u_k| \leq \|\hat{K}\hat{P}^{1/2}\|.$$

Следующая лемма является дискретным аналогом Леммы 4.2.1.

**Лемма 4.2.4.** *Задача, сформулированная в Теореме 4.2.5, имеет решение при любом значении параметра  $0 < \alpha < 1$ .*

**Доказательство.** Прежде всего, вспомним, что линейное матричное неравенство (4.2.25) эквивалентно матричному неравенству

$$\frac{1}{\alpha}(A + B_1K)P(A + B_1K)^\top - P + \frac{1}{1-\alpha}DD^\top \preceq 0.$$

Зафиксируем произвольное  $0 < \alpha < 1$  и выберем произвольную матрицу  $R \succ 0$  такую, что

$$R \succ \frac{1}{1-\alpha}DD^\top.$$

Поскольку управляемость пары  $(A, B_1)$  эквивалентна управляемости пары  $(\gamma A, B_1)$  для любого  $\gamma \neq 0$ , существует  $K$  такое, что матрица

$$\gamma(A + B_1K) = \gamma A + B_1(\gamma K) = \gamma A + B_1\tilde{K}$$

шуровская.

Выберем  $K$  такое, что матрица  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(A + B_1K)$  шуровская, тогда согласно Лемме 1.2.6 дискретное уравнение Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha}(A + B_1K)P(A + B_1K)^\top - P = -R$$

имеет (единственное) положительно определенное решение  $P \succ 0$ . При этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}(A + B_1K)P(A + B_1K)^\top - P + \frac{1}{1-\alpha}DD^\top &= \\ &= -R + \frac{1}{1-\alpha}DD^\top \preceq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Наличие ограничений на управление

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$ , на которое наложено ограничение

$$|u_k| \leq \mu \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad (4.2.31)$$

и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим (4.2.23). Пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Лемма 2.4.1 сохраняет свою силу и в дискретном случае, а дискретный аналог Леммы 4.2.3 имеет следующий вид.

**Лемма 4.2.5.** Пусть  $\hat{\lambda}, \hat{P}$  — решение задачи

$$\lambda \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top + Y^\top B^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \lambda I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярной переменной  $\lambda$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда при

$$\mu \geq \sqrt{\lambda}$$

для системы (4.2.30) существует стабилизирующий регулятор вида (4.2.24), удовлетворяющий ограничению (4.2.31) внутри эллипсоида с матрицей  $\hat{P}$ .

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 4.2.3.

**Теорема 4.2.6.** Пусть величина  $\mu$  удовлетворяет условиям Леммы 4.2.5. Тогда существует решение  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$  задачи

$$\text{tr } CPC^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top + Y^\top B^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

При этом регулятор (4.2.24) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (4.2.30) при ограничении (4.2.31), а матрица ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C\hat{P}C^\top.$$

Отметим, что Замечание 4.2.4 сохраняет свою силу и в дискретном случае. При этом допустимым диапазоном варьирования параметра  $\alpha$  является не вся положительная полуось, как в непрерывном случае, а интервал  $0 < \alpha < 1$ .

**Интервальные ограничения на внешние возмущения**

Как и в непрерывном случае, вместо евклидовых ограничений вида (4.2.23) на внешние возмущения можно наложить *интервальные* ограничения

$$|w_{i,k}| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.32)$$

В этих условиях также можно получить лишь субоптимальное решение, которое дается следующим аналогом Теоремы 4.2.4.

**Теорема 4.2.7.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top + Y^\top B_1^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (4.2.33)$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (4.2.34)$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq 1 - \alpha, \quad P \succ 0, \quad (4.2.35)$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярных переменных  $\beta_1, \dots, \beta_m$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда регулятор (4.2.24) с матрицей  $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$  стабилизирует систему (4.2.22), (4.2.32), а матрица ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

**Доказательство.** Система (4.2.22) с учетом (4.2.24) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + B_1K)x_k + Dw_k, \\ z_k &= (C + B_2K)x_k. \end{aligned}$$

Применяя к ней Следствие 3.1.6, приходим к задаче

$$\text{tr}[(C + B_2K)P(C + B_2K)^\top] \rightarrow \min \quad (4.2.36)$$



при ограничениях (4.2.35) и

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1 K)^\top & & 0 \\ * & -P & & D \\ * & * & & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (4.2.37)$$

Вновь введем матричную переменную  $Y = KP$ . При этом неравенство (4.2.37) примет линейный вид (4.2.33), а целевая функция в (4.2.36) переписется в виде

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top].$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.2.33) и (4.2.35). Согласно Лемме 2.2.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.2.33), (4.2.35) и (4.2.34), где  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — вспомогательная матричная переменная. ■

Приведенные методы синтеза регуляторов позволяют решать многие классические инженерные задачи управления линейными системами с одним входом — одним выходом. В этих задачах обычно формулируются требования к переходному процессу, то есть к реакции системы на единичный скачок. Однако единичный скачок можно рассматривать как частный случай ограниченного внешнего возмущения, поэтому к нему можно применять полученные оценки. Например, если решить задачу минимизации скалярного выхода  $z$  при ограничении на скалярный вход  $|w(t)| \leq 1$  с помощью Теоремы 4.2.1 и найденный ограничивающий эллипсоид (в данном случае интервал) будет задаваться числом  $r$ , то это гарантирует, что реакция на единичный скачок не превосходит  $r$  для всех моментов времени. Иначе говоря, будет получена оценка возможного перерегулирования.

Важно, что эта оценка верна не только для нулевых граничных условий (как это принято в стандартной постановке задачи), но и для всех начальных условий  $x(0)$  из инвариантного эллипсоида. Отметим, что задача синтеза стабилизирующего регулятора, обеспечивающего заданное перерегулирование, относится к числу трудных в традиционной теории автоматического регулирования. Аналогичным образом

могут решаться и другие проблемы (о времени установления,<sup>1</sup> степени затухания и т. п.).

### 4.3. Управление по выходу

Перейдем к синтезу обратной связи *по наблюдаемому выходу* и рассмотрим два подхода к ее построению: с помощью оценки состояния и с помощью динамического регулятора полного порядка.

Как и везде в книге, в качестве критерия оптимальности получаемого стабилизирующего регулятора принимается след ограничивающего эллипсоида — для *регулируемого выхода* замкнутой системы. Вновь задача будет формулироваться в виде линейных матричных неравенств с последующей оптимизацией соответствующей линейной функции, т. е. к задаче полуопределенного программирования. Однако в рассматриваемой ситуации в рамках принятого подхода удастся предложить лишь достаточные условия оптимальности; как показано на примерах, степень консерватизма получаемых субоптимальных решений невелика.

#### 4.3.1. Управление по выходу с помощью наблюдателя

В этом разделе для построения управления будет использоваться оценка состояния, получаемая с помощью наблюдателя Люенбергера, см. раздел 1.4.2. В равной мере будут рассмотрены случаи непрерывного и дискретного времени.

##### Непрерывный случай

Рассмотрим линейную непрерывную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + D_1w, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x + D_2w, \\ z &= C_2x + B_2u, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{r \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим

<sup>1</sup>Способ оценки времени установления будет освещен ниже, в разделе 6.3.

ограничению

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0; \quad (4.3.2)$$

пара  $(A, B_1)$  предполагается управляемой, а пара  $(A, C_1)$  наблюдаемой.

Как и ранее, нашей задачей является построение стабилизирующего регулятора и нахождение эллипсоида, содержащего регулируемый выход  $z$ . Однако теперь считаем, что состояние системы не доступно измерению и информация о ней предоставляется выходом  $y$ .

В соответствии с разделом 1.4.2, будем строить оценку состояния, для чего рассмотрим наблюдатель, описываемый линейным дифференциальным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода  $y$  и его прогноза  $C_1 \hat{x}$ :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 u + L(y - C_1 \hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0, \quad (4.3.3)$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$  — матрица наблюдателя.

Обратную связь будем строить с помощью динамического регулятора

$$u = K\hat{x}. \quad (4.3.4)$$

Напомним, что для задач фильтрации (то есть оценки состояний при отсутствии управления) свойства наблюдателя (4.3.3) исследованы в разделе 3.2.1.

**Теорема 4.3.1.** Пусть  $\hat{P}_1, \hat{Q}_2, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Z}_1, \hat{H}$  — решение задачи

$$\text{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^\top + B_2 Y_1 C_2^\top + C_2 Y_1^\top B_2^\top + B_2 Z_1 B_2^\top] \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} Z & Y_2 C_1 & Y_2 D_2 \\ * & A^\top Q_2 + Q_2 A - C_1^\top Y_2^\top - Y_2 C_1 + \alpha Q_2 & Q_2 D_1 - Y_2 D_2 \\ * & * & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (4.3.5)$$

$$\begin{pmatrix} -2Q_2 - Z & I \\ I & AP_1 + P_1 A^\top + B_1 Y_1 + Y_1^\top B_1^\top + \alpha P_1 \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (4.3.6)$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^\top & P_1 \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (4.3.7)$$

$$P_1 \succ 0, \quad Q_2 \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P_1 = P_1^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Q_2 = Q_2^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_1 = Z_1^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда динамический регулятор по выходу (4.3.4)

$$\widehat{K} = \widehat{Y}_1 \widehat{P}_1^{-1},$$

использующий наблюдатель с матрицей

$$\widehat{L} = \widehat{Q}_2^{-1} \widehat{Y}_2,$$

является стабилизирующим, и при этом матрица ограничивающего эллипсоида для регулируемого выхода  $z$  замкнутой системы (4.3.1), (4.3.2) с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C_2(\widehat{P}_1 + \widehat{H})C_2^\top + B_2\widehat{Y}_1C_2^\top + C_2\widehat{Y}_1^\top B_2^\top + B_2\widehat{Z}_1B_2^\top.$$

**Доказательство.** Рассмотрим невязку

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t);$$

согласно (4.3.1), (4.3.3) она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC_1)e + (D_1 - LD_2)w.$$

Вводя вектор

$$g = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

и замыкая систему обратной связью (4.3.4), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \widetilde{A}g + \widetilde{D}w, \\ z &= \widetilde{C}g, \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \begin{pmatrix} A + B_1K & LC_1 \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{D} = \begin{pmatrix} LD_2 \\ D_1 - LD_2 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{C} &= (C_2 + B_2K \quad C_2). \end{aligned}$$

При фиксированных матрицах  $K$ ,  $L$  таких, что  $\widetilde{A}$  устойчива, нахождение минимального ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  системы (4.3.8) представляет собой задачу анализа, рассмотренную выше в разделе 3.1.1. Соответственно, поступим следующим образом: заключим величину  $g$  в эллипсоид  $\mathcal{E}_g$ , порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P \succ 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$ , порожденный матрицей  $\tilde{C}P\tilde{C}^\top$ .

Для этого рассмотрим функцию

$$V(g) = g^\top Qg, \quad Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

построенную на решениях уравнения (4.3.8). Согласно Теореме 3.1.1, условие инвариантности эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{g \in \mathbb{R}^{2n} : g^\top Qg \leq 1\}$$

эквивалентно выполнению линейного матричного неравенства

$$\tilde{A}P + P\tilde{A}^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} \tilde{D}\tilde{D}^\top \preceq 0$$

при некотором  $\alpha > 0$ . Запишем его в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}P + P\tilde{A}^\top + \alpha P & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & LC_1P_2 & LD_2 \\ * & (A - LC_1)P_2 + P_2(A - LC_1)^\top + \alpha P_2 & D_1 - LD_2 \\ * & * & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\Phi_1 = (A + B_1K)P_1 + P_1(A + B_1K)^\top + \alpha P_1.$$

Домножая полученное матричное неравенство слева и справа на матрицу

$$\text{diag}\{Q_2 \quad Q_2 \quad I\},$$

получаем:

$$\begin{pmatrix} Q_2\Phi_1Q_2 & Q_2LC_1 & Q_2LD_2 \\ * & Q_2(A - LC_1) + (A - LC_1)^\top Q_2 + \alpha Q_2 & Q_2(D_1 - LD_2) \\ * & * & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Вводя матричные переменные

$$Y_1 = KP_1, \quad Y_2 = Q_2L,$$

исключаем  $K$  и  $L$ :

$$\begin{pmatrix} Q_2\Phi Q_2 & & Y_2C_1 & & Y_2D_2 \\ * & A^\top Q_2 + Q_2A - C_1^\top Y_2^\top - Y_2C_1 + \alpha Q_2 & & & Q_2D_1 - Y_2D_2 \\ * & & * & & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (4.3.9)$$

где

$$\Phi = AP_1 + P_1A^\top + B_1Y_1 + Y_1^\top B_1^\top + \alpha P_1.$$

Теперь введем вспомогательную матричную переменную  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; тогда, если

$$\begin{pmatrix} Z & & Y_2C_1 & & Y_2D_2 \\ * & A^\top Q_2 + Q_2A - C_1^\top Y_2^\top - Y_2C_1 + \alpha Q_2 & & & Q_2D_1 - Y_2D_2 \\ * & & * & & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

и

$$Q_2\Phi Q_2 \preceq Z, \quad (4.3.10)$$

то выполняется и матричное неравенство (4.3.9).

Далее, согласно Лемме Е.3,

$$Q_2\Phi Q_2 \preceq -2Q_2 - \Phi^{-1}.$$

Поэтому матричное неравенство (4.3.10) будет выполняться, если справедливо неравенство

$$-2Q_2 - \Phi^{-1} \preceq Z,$$

которое эквивалентно LMI (4.3.6).

Далее,

$$\begin{aligned} \tilde{C}P\tilde{C}^\top &= (C_2 + B_2K \quad C_2) \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (C_2 + B_2K)^\top \\ C_2^\top \end{pmatrix} = \\ &= (C_2 + B_2K)P_1(C_2 + B_2K)^\top + C_2Q_2^{-1}C_2^\top = \\ &= C_2(P_1 + Q_2^{-1})C_2^\top + B_2Y_1C_2^\top + C_2Y_1^\top B_2^\top + B_2Y_1P_1^{-1}Y_1^\top B_2^\top. \end{aligned}$$

Итак, приходим к задаче минимизации

$$\text{tr}[C_2(P_1 + Q_2^{-1})C_2^\top + B_2Y_1C_2^\top + C_2Y_1^\top B_2^\top + B_2Y_1P_1^{-1}Y_1^\top B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.3.5) и (4.3.6). В соответствии с Леммой 2.2.2 и Следствием 2.2.3, полученная задача эквивалентна задаче

$$\text{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^\top + B_2Y_1C_2^\top + C_2Y_1^\top B_2^\top + B_2Z_1B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.3.5), (4.3.6), а также ограничениях (4.3.7), где  $Z_1 = Z_1^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — вспомогательные матричные переменные. ■

**Замечание 4.3.1.** Из доказательства Теоремы (4.3.1) видно следующее отличие от рассмотренной ранее задачи стабилизации по состоянию. Для конструктивного применения используемой в книге техники приходится строить инвариантный эллипсоид для составного вектора  $g$ , включающего и оценку состояния, и невязку; в результате приходим лишь к достаточным условиям и субоптимальным решениям. Кроме того, достаточной является и оценка, предоставляемая Леммой Е.3. ▼

**Замечание 4.3.2.** При построении регулятора по выходу учитывать возможную неопределенность в начальном состоянии системы можно аналогично тому, как это делалось в задачах анализа и управления по состоянию. Однако есть и некоторое отличие. Поскольку в качестве начального условия для состояния наблюдателя естественно выбирать

$$\hat{x}(0) = 0,$$

то

$$g_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому начальная неопределенность может содержаться лишь в состоянии системы, то есть затрагивает лишь диагональный блок  $Q_2$ .

Так, если неопределенность имеет вид

$$x_0 \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P_0^{-1} x \leq 1\},$$

то к системе ограничений Теоремы 4.3.1 добавится еще одно неравенство

$$Q_2 \preceq P_0^{-1},$$

а при явном задании начальных условий дополнительно требуем

$$x_0^\top Q_2 x_0 \leq 1.$$

При этом получим не только асимптотическую, но и равномерную оценку для регулируемого выхода системы (4.3.1). ▼

**Пример 4.3.1.** Вновь рассмотрим двухмассовую систему из Примера 4.2.3, немного усложнив модель.

Как и ранее, будем предполагать, что на каждое из тел действуют возмущения  $w_1$  и  $w_2$ , соответственно, но теперь считаем, что наблюдению доступен лишь двумерный выход

$$y = \begin{pmatrix} x_1 + w_3 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

также подверженный возмущению  $w_3$ , то есть ограниченное внешнее возмущение теперь имеет вид

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad |w(t)| \leq 1.$$

В качестве регулируемого выхода, как и раньше, возьмем вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}.$$

В результате (при единичных параметрах системы) придем к системе вида (4.3.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью Теоремы 4.3.1 находим матрицу регулятора

$$\widehat{K} = (-1,6072 \quad 0,2759 \quad -1,9126 \quad -1,3343),$$

матрицу фильтра

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} 1,2681 & 0,1369 \\ 0,2667 & 1,1859 \\ 0,6422 & 0,3744 \\ 0,2206 & 0,8480 \end{pmatrix},$$



и соответствующий ограничивающий эллипс для выходной переменной, задаваемый матрицей

$$\widehat{C}\widehat{P}\widehat{C}^T = \begin{pmatrix} 77,0150 & -29,7147 \\ -29,7147 & 57,6518 \end{pmatrix}.$$

На Рис. 4.3.1 изображен найденный ограничивающий эллипс для выхода  $z$  системы, замкнутой регулятором  $\widehat{K}$ ; приведена также траектория выходной переменной (сплошная линия) для некоторого начального состояния и некоторого допустимого внешнего возмущения.

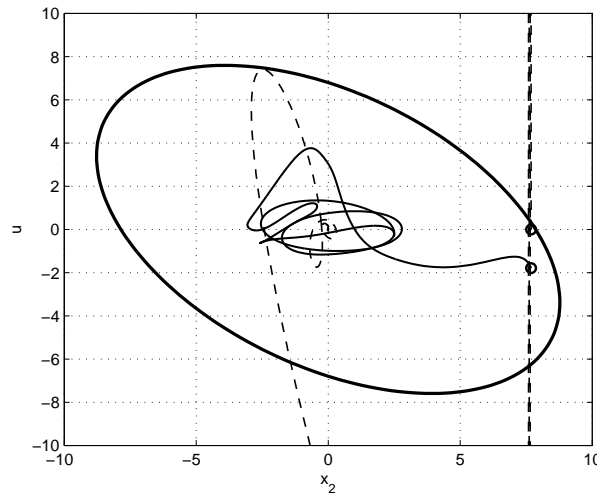


Рис. 4.3.1. Ограничивающий эллипс и траектории выхода системы из Примера 4.3.1.

Для сравнения решим задачу с привлечением стандартной техники  $H_\infty$ -оптимизации (см. раздел 2.5.2, где обсуждалась стабилизация по состоянию); динамический регулятор по выходу, оптимальный по критерию  $H_\infty$ -нормы замкнутой системы построим с помощью процедуры `hinfyn` пакета `Robust Control Toolbox` в среде `MATLAB`.

Для тех же начальных условий и того же внешнего возмущения штрихпунктиром показана траектория, соответствующая  $H_\infty$ -регулятору. Видно, что траектория претерпевает выбросы далеко за пределы ограничивающего эллипса. Обратим внимание, что на Рис. 4.3.1 одинаковым начальным условиям соответствуют разные начальные точки

траекторий выхода системы; это объясняется различием синтезированных управлений, в том числе — в начальный момент времени. ▼

### Дискретный случай

Рассмотрим теперь дискретную систему

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + B_1u_k + D_1w_k, \\y_k &= C_1x_k + D_2w_k, \\z_k &= C_2x_k + B_2u_k,\end{aligned}\tag{4.3.11}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{r \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w_k| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots;\tag{4.3.12}$$

пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C_1)$  наблюдаема.

Пусть состояние  $x_k$  системы не доступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y_k$ . Задача заключается в нахождении эллипсоида, содержащего регулируемый выход  $z_k$ .

Построим наблюдатель, описываемый линейным разностным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода  $y_k$  и его прогноза  $C_1\hat{x}_k$ :

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + B_1u_k + L(y_k - C_1\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0,\tag{4.3.13}$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$  — матрица наблюдателя.

Обратную связь будем строить с помощью динамического регулятора

$$u_k = K\hat{x}_k.\tag{4.3.14}$$

Следующий результат представляет собой дискретный аналог Теоремы 4.3.1.

**Теорема 4.3.2.** Пусть  $\hat{P}_1, \hat{Q}_2, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Z}_1, \hat{H}$  — решение задачи

$$\text{tr}[C_2(P_1 + H)C_2^\top + B_2Y_1C_2^\top + C_2Y_1^\top B_2^\top + B_2Z_1B_2^\top] \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q_2 & C_1^\top Y_2^\top & A^\top Q_2 - C_1^\top Y_2^\top & 0 \\ * & Z & 0 & Y_2 D_2 \\ * & * & -Q_2 & Q_2 D_1 - Y_2 D_2 \\ * & * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,\tag{4.3.15}$$

$$\begin{pmatrix} -2Q_2 - Z & I & 0 \\ * & \frac{1}{\alpha}(AP_1A^\top + B_1Y_1A^\top + AY_1^\top B_1^\top) - P_1 & B_1Y_1 \\ * & * & -\alpha P_1 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (4.3.16)$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Y_1 \\ Y_1^\top & P_1 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q_2 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (4.3.17)$$

$$P_1 \succ 0, \quad Q_2 \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P_1 = P_1^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Q_2 = Q_2^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_1 = Z_1^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда динамический регулятор по выходу (4.3.14)

$$\hat{K} = \hat{Y}_1 \hat{P}_1^{-1}$$

использующий наблюдатель с матрицей

$$\hat{L} = \hat{Q}_2^{-1} \hat{Y}_2,$$

является стабилизирующим, и при этом матрица ограничивающего эллипсоида для регулируемого выхода  $z_k$  замкнутой системы (4.3.11), (4.3.12) с  $x_0 = 0$  дается следующим выражением:

$$C_2(\hat{P}_1 + \hat{H})C_2^\top + B_2\hat{Y}_1C_2^\top + C_2\hat{Y}_1^\top B_2^\top + B_2\hat{Z}_1B_2^\top.$$

**Доказательство.** Рассмотрим невязку

$$e_k = x_k - \hat{x}_k;$$

согласно (4.3.11), (4.3.13) она удовлетворяет разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC_1)e_k + (D_1 - LD_2)w_k.$$

Вводя вектор

$$g_k = \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ e_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

и замыкая систему регулятором (4.3.14), приходим уравнениям

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= \tilde{A}g_k + \tilde{D}w_k, \\ z_k &= \tilde{C}g_k, \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A + B_1K & LC_1 \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} LD_2 \\ D_1 - LD_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = (C_2 + B_2K \quad C_2).$$

Заклучим  $g_k$  в эллипсоид  $\mathcal{E}_g$ , порожденный матрицей

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P \succ 0,$$

и будем минимизировать (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$ , порожденный матрицей  $\tilde{C}P\tilde{C}^\top$ .

Введем в рассмотрение функцию

$$V(g) = g^\top Qg, \quad Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (4.3.18). Согласно Теореме 3.1.4, условие инвариантности эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{g \in \mathbb{R}^{2n} : g^\top Qg \leq 1\}$$

эквивалентно выполнению линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P\tilde{A}^\top & 0 \\ * & -P & \tilde{D} \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0$$

при некотором  $0 < \alpha < 1$ , или

$$\begin{pmatrix} -\alpha P_1 & 0 & P_1(A + B_1K)^\top & 0 & 0 \\ * & -\alpha P_2 & P_2(LC_1)^\top & P_2(A - LC_1)^\top & 0 \\ * & * & -P_1 & 0 & LD_2 \\ * & * & * & -P_2 & D_1 - LD_2 \\ * & * & * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Домножив полученное матричное неравенство слева и справа на матрицу

$$\text{diag}\{I \quad Q_2 \quad Q_2 \quad Q_2 \quad I\}$$

получаем:

$$\begin{pmatrix} -\alpha P_1 & 0 & \Phi_1 & 0 & 0 \\ * & -\alpha Q_2 & (LC_1)^\top Q_2 & (A - LC_1)^\top Q_2 & 0 \\ * & * & -Q_2 P_1 Q_2 & 0 & Q_2 LD_2 \\ * & * & * & -Q_2 & Q_2(D_1 - LD_2) \\ * & * & * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\Phi_1 = P_1(A + B_1K)^\top Q_2.$$

Воспользовавшись леммой Шура эквивалентно имеем

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q_2 & (LC_1)^\top Q_2 & (A - LC_1)^\top Q_2 & 0 \\ * & \Phi_2 & 0 & Q_2LD_2 \\ * & * & -Q_2 & Q_2(D_1 - LD_2) \\ * & * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\Phi_2 = Q_2 \left( \frac{1}{\alpha} (A + B_1K)P_1(A + B_1K)^\top - P_1 \right) Q_2.$$

Вводя новые матричные переменные

$$Y_1 = KP_1, \quad Y_2 = Q_2L,$$

исключаем матричные переменные  $K$  и  $L$ . В результате приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q_2 & C_1^\top Y_2^\top & A^\top Q_2 - C_1^\top Y_2^\top & 0 \\ * & Q_2\Phi Q_2 & 0 & Y_2D_2 \\ * & * & -Q_2 & Q_2D_1 - Y_2D_2 \\ * & * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (4.3.19)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{\alpha} (AP_1A^\top + B_1Y_1A^\top + AY_1^\top B_1^\top + B_1Y_1P_1^{-1}Y_1^\top B_1^\top) - P_1.$$

Введем матричную переменную  $Z = Z^\top$ ; тогда, если выполнено линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q_2 & C_1^\top Y_2^\top & A^\top Q_2 - C_1^\top Y_2^\top & 0 \\ * & Z & 0 & Y_2D_2 \\ * & * & -Q_2 & Q_2D_1 - Y_2D_2 \\ * & * & * & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0$$

и

$$Q_2\Phi Q_2 \preceq Z, \quad (4.3.20)$$

то выполняется и матричное неравенство (4.3.19).

Согласно Лемме Е.3,

$$Q_2\Phi Q_2 \preceq -2Q_2 - \Phi^{-1},$$

поэтому матричное неравенство (4.3.20) будет выполняться, если справедливо неравенство

$$-2Q_2 - \Phi^{-1} \preceq Z,$$

представимое по лемме Шура в виде

$$\begin{pmatrix} -2Q_2 - Z & I \\ I & \Phi \end{pmatrix} \preceq 0,$$

или, еще раз воспользовавшись леммой Шура, в виде (4.3.16).

Далее,

$$\begin{aligned} \tilde{C}P\tilde{C}^\top &= (C_2 + B_2K \quad C_2) \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (C_2 + B_2K)^\top \\ C_2^\top \end{pmatrix} = \\ &= (C_2 + B_2K)P_1(C_2 + B_2K)^\top + C_2Q_2^{-1}C_2^\top = \\ &= C_2(P_1 + Q_2^{-1})C_2^\top + B_2Y_1C_2^\top + C_2Y_1^\top B_2^\top + B_2Y_1P_1^{-1}Y_1^\top B_2^\top. \end{aligned}$$

Итак, приходим к задаче минимизации

$$\text{tr}[C_2(P_1 + Q_2^{-1})C_2^\top + B_2Y_1C_2^\top + C_2Y_1^\top B_2^\top + B_2Y_1P_1^{-1}Y_1^\top B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.3.15)–(4.3.16). Наконец, согласно Лемме 2.2.2 и Следствию 2.2.3, полученная задача эквивалентна задаче

$$\text{tr}[C_2(P_1 + Q_2^{-1})C_2^\top + B_2Y_1C_2^\top + C_2Y_1^\top B_2^\top + B_2Y_1P_1^{-1}Y_1^\top B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (4.3.15)–(4.3.16), а также ограничениях (4.3.17), где  $Z_1 = Z_1^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — вспомогательные матричные переменные. ■

Замечания 4.3.1 и 4.3.2 сохраняют свою силу и в дискретном случае.

**Пример 4.3.2.** Рассмотрим задачу управления двухмассовой системой в дискретном времени, полученную дискретизацией соответствующей непрерывной системы, см. Пример 4.3.1.

Как обсуждалось выше, дискретная модель возмущенных колебаний будет описываться системой вида (4.3.11) с матрицами

$$\begin{aligned} A &= e^{\delta A_{\text{cont}}}, \\ B_1 &= \int_0^\delta e^{sA_{\text{cont}}} B_{1,\text{cont}} ds, \end{aligned}$$

$$D_1 = \int_0^{\delta} e^{sA_{\text{cont}}} D_{1,\text{cont}} ds,$$

где  $A_{\text{cont}}, B_{1,\text{cont}}, D_{1,\text{cont}}$  — матрицы соответствующей системы в непрерывном времени, а  $\delta$  — интервал дискретизации.

При  $\delta = 0,1$  и единичных параметрах исходной непрерывной системы имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0050 & 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0050 & 0,9950 & 0,0002 & 0,0998 \\ -0,0997 & 0,0997 & 0,9950 & 0,0050 \\ 0,0997 & -0,0997 & 0,0050 & 0,9950 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0000 \\ 0,0998 \\ 0,0002 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0,0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0050 & 0 \\ 0,0998 & 0,0002 & 0 \\ 0,0002 & 0,0998 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью Теоремы 4.3.2 был определен регулятор

$$\hat{K} = (-1,7442 \quad 0,3935 \quad -2,0276 \quad -1,3362),$$

и матрица наблюдателя

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0,0881 & 1,6118 \\ 0,0007 & 0,8502 \\ 0,0424 & 0,4313 \\ 0,0180 & 2,7768 \end{pmatrix}.$$

На Рис. 4.3.2 изображен ограничивающий эллипс для выхода рассматриваемой системы и траектория выхода системы при некотором выборе начальной точки и допустимом внешнем возмущении. ▼

### 4.3.2. Линейный динамический регулятор

В настоящем разделе рассмотрим ту же задачу подавления внешних возмущений, но теперь для достижения цели будем искать *линейный динамический регулятор по выходу*; такой регулятор кратко рассматривался в конце раздела 1.4.2.

Как и раньше, задача будет сведена к формату полуопределенного программирования с последующей одномерной минимизацией, однако схема синтеза оптимального динамического регулятора отличается от предложенных выше: сначала находится минимальный ограничивающий эллипсоид для выхода системы, а затем определяются параметры соответствующего регулятора.

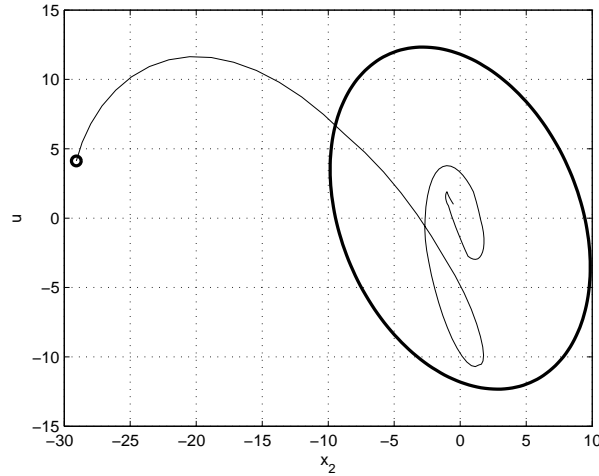


Рис. 4.3.2. Ограничивающий эллипс и траектория системы из Примера 4.3.2.

### Непрерывный случай

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + D_1w, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x + D_2w, \\ z &= C_2x, \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и ограниченным внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим  $L_\infty$ -ограничению (4.3.2); пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C_1)$  наблюдаема.

Пусть состояние  $x$  не доступно измерению, и информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Задачей является нахождение минимального эллипсоида, содержащего регулируемый выход  $z$ .

Будем искать стабилизирующий линейный динамический регулятор полного порядка по выходу вида

$$\begin{aligned} \dot{x}^r &= A_r x^r + B_r y, & x^r(0) &= 0, \\ u &= C_r x^r + D_r y, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$



где  $x^r \in \mathbb{R}^n$  — состояние регулятора,  $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_r \in \mathbb{R}^{p \times l}$  — параметры регулятора.

Вводя в рассмотрение вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ x^r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

с учетом (4.3.21), (4.3.22) приходим к замкнутой системе

$$\begin{aligned} \dot{g} &= A_c g + D_c w, & g(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z &= Cg, \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{pmatrix} A + BD_r C_1 & BC_r \\ B_r C_1 & A_r \end{pmatrix}, & D_c &= \begin{pmatrix} D_1 + BD_r D_2 \\ B_r D_2 \end{pmatrix}, \\ C &= (C_2 \quad 0). \end{aligned}$$

Следуя вышеописанному подходу, заключим вектор состояния  $g$  системы (4.3.23) в эллипсоид  $\mathcal{E}_g$  с матрицей  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $P \succ 0$ , и будем минимизировать ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  с матрицей  $CPC^\top$ . Соответствующий результат представлен следующей теоремой.

**Теорема 4.3.3.** Пусть  $\hat{P}_{11}$ ,  $\hat{Q}_{11}$ ,  $\hat{\alpha}$  — решение задачи

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP_{11} + P_{11}A^\top + \alpha P_{11} - \mu_1 BB^\top + \frac{1}{\alpha} D_1 D_1^\top \prec 0, \quad (4.3.24)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11}A + A^\top Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^\top D_2 \\ D_1^\top Q_{11} - \mu_2 D_2^\top C_1 & -\alpha I - \mu_2 D_2^\top D_2 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.3.25)$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (4.3.26)$$

$$P_{11} \succ 0, \quad Q_{11} \succ 0,$$

где оптимизация проводится по скалярным переменным  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , матричным переменным  $P_{11} = P_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $\alpha > 0$ .

Тогда динамический регулятор

$$K_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+l)},$$

стабилизирующий систему (4.3.21), находится как любое решение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}\hat{P} + \hat{P}\tilde{A}^\top + \hat{\alpha}\hat{P} & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\top & -\hat{\alpha}I \end{pmatrix} + \\ + MK_r N \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} N^\top K_r^\top M^\top \preccurlyeq 0, \quad (4.3.27)$$

где

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad R = \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11}^{-1}, \\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times m}, \\ M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times (n+p)}, \\ N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (2n+m)},$$

а матрица

$$C_2 \hat{P}_{11} C_2^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы при внешних возмущениях вида (4.3.2) и нулевых начальных условиях.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(g) = g^\top Q g, \quad Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (4.3.23). Согласно Теореме 3.1.1, для того чтобы траектории  $g(t)$  системы (4.3.23) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{g \in \mathbb{R}^{2n} : V(g) \leq 1\}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\begin{pmatrix} PA_c^\top + A_c P + \alpha P & D_c \\ D_c^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P = Q^{-1}. \quad (4.3.28)$$

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P \succ 0$  для системы (4.3.23) эквивалентно выполнению матричного неравенства (4.3.28) при некотором  $\alpha > 0$ .

Определим матрицы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times m},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+m) \times (n+p)},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (2n+m)},$$

и матрицу

$$K_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+l)}$$

параметров регулятора (4.3.22).

Тогда матричное неравенство (4.3.28) примет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}P + P\tilde{A}^\top + \alpha P & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\top & -\alpha I \end{pmatrix} + \\ + MK_r N \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} N^\top K_r^\top M^\top \preceq 0 \quad (4.3.29)$$

и согласно Лемме Е.5 будет заведомо разрешимо относительно  $K_r$ , если существуют числа  $\mu_1, \mu_2$  такие, что выполнены *строгие* матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}P + P\tilde{A}^\top + \alpha P & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\top & -\alpha I \end{pmatrix} - \mu_1 M M^\top \prec 0 \quad (4.3.30)$$

и

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}P + P\tilde{A}^\top + \alpha P & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\top & -\alpha I \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} N^\top N \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \prec 0. \quad (4.3.31)$$

Домножив последнее матричное неравенство слева и справа на матрицу  $\text{diag}\{Q \ I\}$ , приходим к неравенству

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^\top Q + Q\tilde{A} + \alpha Q & Q\tilde{D} \\ \tilde{D}^\top Q & -\alpha I \end{pmatrix} - \mu_2 N^\top N \prec 0. \quad (4.3.32)$$

Представив матрицы  $P$  и  $Q$  в блочном виде

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^\top & P_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^\top & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad P_{11}, Q_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

придадим соотношениям (4.3.30), (4.3.32) вид

$$\begin{pmatrix} AP_{11} + P_{11}A^\top + \alpha P_{11} - \mu_1 BB^\top & AP_{12} + \alpha P_{12} & D_1 \\ * & \alpha P_{22} - \mu_1 I & 0 \\ * & * & -\alpha I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.3.33)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi & A^\top Q_{12} + \alpha Q_{12} & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^\top D_2 \\ * & \alpha Q_{22} - \mu_2 I & Q_{12}^\top D_1 \\ * & * & -\alpha I - \mu_2 D_2^\top D_2 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.3.34)$$

где

$$\Phi = Q_{11}A + A^\top Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1.$$

Согласно Лемме 2.2.3, матричное неравенство (4.3.33) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\begin{pmatrix} AP_{11} + P_{11}A^\top + \alpha P_{11} - \mu_1 BB^\top & D_1 \\ D_1^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \prec 0,$$

эквивалентное по лемме Шура неравенству (4.3.24), а матричное неравенство (4.3.34) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (4.3.25).

Далее, в силу Леммы Е.6 для существования искомых матриц  $P$  и  $Q$  с соответствующими блоками  $P_{11}$  и  $Q_{11}$  необходимо и достаточно выполнения условия (4.3.26). При этом матрица  $P$  может быть построена следующим образом:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad R = P_{11} - Q_{11}^{-1} \succ 0.$$

Итак, приходим к задаче минимизации величины

$$\text{tr } CPC^\top = \text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top$$

при ограничениях (4.3.24)–(4.3.26); при этом параметры искомого динамического регулятора удовлетворяют линейному матричному неравенству (4.3.27).  $\blacksquare$

Отметим, что используемая при доказательстве Лемма Е.5 справедлива только для случая *строгих* матричных неравенств, так что условия (4.3.30)–(4.3.31) оказываются лишь достаточны для выполнения *нестрогого* неравенства (4.3.29). Поэтому “строгую” форму имеют и неравенства (4.3.24), (4.3.25), а Теорема 4.3.3 предоставляет лишь достаточные условия существования регулятора.

**Замечание 4.3.3.** Имеется определенный произвол в выборе конкретного решения  $K_r$  линейного матричного неравенства (4.3.27). Как показывает практика, вполне удовлетворительный результат дает минимизация величины  $\|A_r\|$  на решениях (4.3.27). Для этого потребуем

$$\lambda \longrightarrow \min$$

при дополнительном ограничении

$$\begin{pmatrix} \lambda I & A_r \\ A_r^\top & I \end{pmatrix} \succ 0.$$

Очевидно, эта задача является задачей SDP. ▼

**Лемма 4.3.1.** *Если начальное условие  $x(0) = x_0$  известно, добавляя к линейным матричным неравенствам Теоремы 4.3.3 неравенство*

$$x_0^\top Q_{11} x_0 \leq 1, \quad (4.3.35)$$

*гарантируем равномерную оценку для выхода  $z$  замкнутой системы (4.3.21).*

**Доказательство.** Поскольку в качестве начального условия для состояния регулятора выбирается  $x^r(0) = 0$ , то

$$g_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы в начальный момент времени траектория системы располагалась внутри инвариантного эллипсоида, потребуем выполнение условия

$$g_0^\top P^{-1} g_0 \leq 1,$$

или

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} P_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 1.$$

Последнее неравенство по лемме Шура эквивалентно матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top & 0 \\ x_0 & P_{11} & R \\ 0 & R & R \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} P_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} (x_0^\top \ 0) \succcurlyeq 0.$$

Записав полученное неравенство в виде

$$\begin{pmatrix} P_{11} - x_0 x_0^\top & R \\ R & R \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

по лемме Шура с учетом  $R = P_{11} - Q_{11}^{-1}$  имеем

$$x_0 x_0^\top \preccurlyeq Q_{11}^{-1},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & Q_{11}^{-1} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Вновь применяя лемму Шура, приходим к соотношению (4.3.35). ■

Из Леммы 4.3.1 вытекает очевидное следствие.

**Следствие 4.3.1.** *Если в начальный момент времени*

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P_0^{-1} x \leq 1\},$$

*то добавляя к ограничениям Теоремы 4.3.3 неравенство*

$$Q_{11} \preccurlyeq P_0^{-1},$$

*гарантируем равномерную оценку для регулируемого выхода системы (4.3.21).*

В случае, когда внешние возмущения в системе (4.3.21) ограничены не в евклидовой норме, а подчинены интервальным ограничениям вида

$$|w_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad \forall t \geq 0, \quad (4.3.36)$$

нетрудно получить соответствующий вариант Теоремы 4.3.3 аналогично тому, как были получены Теоремы 3.1.2 и 4.2.4.

**Теорема 4.3.4.** Пусть  $\hat{P}_{11}, \hat{Q}_{11}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$  — решение задачи

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^T \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP_{11} + P_{11}A^T + \alpha P_{11} - \mu_1 BB^T & D_1 \\ D_1^T & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \prec 0, \\ \begin{pmatrix} \Omega & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^T D_2 \\ D_1^T Q_{11} - \mu_2 D_2^T C_1 & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} - \mu_2 D_2^T D_2 \end{pmatrix} \prec 0, \\ \begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \sum_{i=1}^m \beta_i \leq \alpha, \\ P_{11} \succ 0, \quad Q_{11} \succ 0,$$

где

$$\Omega = Q_{11}A + A^T Q_{11} + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^T C_1,$$

относительно скалярных переменных  $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \dots, \beta_m$ , матричных переменных  $P_{11} = P_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда динамический регулятор

$$K_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix},$$

стабилизирующий систему (4.3.21), находится как любое решение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}^T + \hat{\alpha}\tilde{P} & \tilde{D} \\ \tilde{D}^T & \text{diag}\{\hat{\beta}_1 \ \dots \ \hat{\beta}_m\} \end{pmatrix} + \\ + MK_r N \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} N^T K_r^T M^T \preccurlyeq 0,$$

где

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad R = \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11}^{-1}, \\ \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

а матрица

$$C_2 \hat{P}_{11} C_2^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы при внешних возмущениях вида (4.3.36) и нулевых начальных условиях.

**Пример 4.3.3.** Продемонстрируем предложенный подход на примере задачи управления двухмассовой системой, см. описание объекта в Примере 4.2.3. В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а в качестве минимизируемого — вектор

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

При  $k = m_1 = m_2 = 1$  приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, \\ y &= C_1 x, \\ z &= C_2 x, \end{aligned}$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью Теоремы 4.3.4 находим матрицу

$$\begin{pmatrix} 3,8044 & 0,3286 \\ 0,3286 & 3,2321 \end{pmatrix}$$



ограничивающего эллипса по регулируемому выходу системы, соответствующего динамическому регулятору с параметрами

$$A_r = \begin{pmatrix} -5,4771 & -1,1079 & 0,3392 & 0,4894 \\ -0,1422 & -0,0924 & -0,0275 & -0,0388 \\ -1,3797 & 5,8582 & -0,8684 & -1,2544 \\ 0,1153 & -3,0605 & -2,3597 & -3,4133 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 6,1376 & 0,7262 \\ 0,0884 & 0,1235 \\ -0,3153 & -4,8783 \\ -4,7218 & 5,7224 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$C_r = (3,8513 \quad 0,8575 \quad -0,2464 \quad -0,3566) \cdot 10^5,$$

$$D_r = (-4,3326 \quad -0,5794) \cdot 10^5;$$

при этом  $\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_c) \approx -0,4715$ .

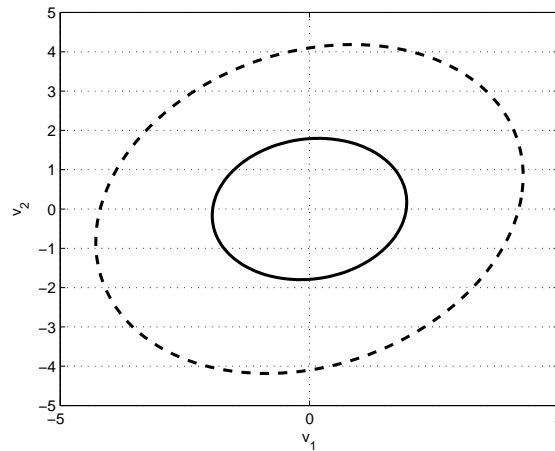


Рис. 4.3.3. Ограничивающие эллипсы для различных регуляторов из Примера 4.3.3.

На Рис. 4.3.3 сплошной линией показан найденный ограничивающий эллипс; пунктиром показан ограничивающий эллипс, найденный при построении линейной обратной связи по выходу с использованием наблюдателя Люенбергера (см. раздел 4.3.1). Видим, что возможности

динамического регулятора гораздо шире: его использование приводит к существенно более точным оценкам.

### Дискретный случай

Рассмотрим линейную дискретную систему управления

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + D_1w_k, \\y_k &= C_1x_k + D_2w_k, \\z_k &= C_2x_k,\end{aligned}\tag{4.3.37}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (4.3.12); пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C_1)$  наблюдаема.

Пусть состояние  $x_k$  системы не доступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y_k$ . Будем вновь искать минимальный эллипсоид, содержащий регулируемый выход  $z_k$ , с помощью стабилизирующего линейного динамического регулятора полного порядка по выходу

$$\begin{aligned}x_{k+1}^r &= A_r x_k^r + B_r y_k, \quad x_0^r = 0, \\u_k &= C_r x_k^r + D_r y_k,\end{aligned}\tag{4.3.38}$$

где  $x_k^r \in \mathbb{R}^n$  — состояние регулятора,  $A_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_r \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $C_r \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_r \in \mathbb{R}^{p \times l}$  — матричные параметры регулятора.

Введя в рассмотрение вектор

$$g_k = \begin{pmatrix} x_k \\ x_k^r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

с учетом (4.3.37), (4.3.38) приходим к замкнутой системе

$$\begin{aligned}g_{k+1} &= A_c g_k + D_c w_k, \quad g_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\z_k &= C g_k,\end{aligned}\tag{4.3.39}$$

где

$$A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C_1 & BC_r \\ B_r C_1 & A_r \end{pmatrix}, \quad D_c = \begin{pmatrix} D_1 + BD_r D_2 \\ B_r D_2 \end{pmatrix},$$

$$C = (C_2 \ 0).$$

Как и в непрерывном случае, заключим вектор состояния  $g_k$  системы (4.3.39) в инвариантный эллипсоид  $\mathcal{E}_g$  с матрицей  $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $P \succ 0$ , и будем минимизировать ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  с матрицей  $CPCT^\top$ .

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 4.3.3.

**Теорема 4.3.5.** Пусть  $\hat{P}_{11}$ ,  $\hat{Q}_{11}$ ,  $\hat{\alpha}$  — решение задачи

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\frac{1}{\alpha} A P_{11} A^\top - P_{11} - \mu_1 B B^\top + \frac{1}{1-\alpha} D_1 D_1^\top \prec 0, \quad (4.3.40)$$

$$\begin{pmatrix} -Q_{11} & Q_{11} D_1 & Q_{11} A \\ * & -(1-\alpha)I - \mu_2 D_2^\top D_2 & -\mu_2 D_2^\top C_1 \\ * & * & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.3.41)$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (4.3.42)$$

$$P_{11} \succ 0, \quad Q_{11} \succ 0,$$

где оптимизация проводится по скалярным переменным  $\mu_1, \mu_2$ , матричным переменным  $P_{11} = P_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда динамический регулятор

$$K_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+l)},$$

стабилизирующий систему (4.3.37), находится как любое решение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} -\hat{P} & \tilde{D} & \tilde{A} \\ \tilde{D}^\top & -(1-\hat{\alpha})I & 0 \\ \tilde{A}^\top & 0 & -\hat{\alpha}\hat{Q} \end{pmatrix} + M K_r N + N^\top K_r^\top M^\top \preceq 0, \quad (4.3.43)$$

где

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad R = \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11}^{-1}, \quad \hat{Q} = \hat{P}^{-1},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times m},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4n+m) \times (n+p)},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & D_2 & C_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (4n+m)},$$

а матрица

$$C_2 \hat{P}_{11} C_2^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы при внешних возмущениях вида (4.3.12) и нулевых начальных условиях.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V(g) = g^\top Q g, \quad Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (4.3.39). Согласно Теореме 3.1.4 и Замечанию 3.1.5, для того чтобы траектории  $g_k$  системы (4.3.39) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{g \in \mathbb{R}^{2n} : V(g) \leq 1\}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\begin{pmatrix} -P & D_c & A_c \\ * & -(1-\alpha)I & 0 \\ * & * & -\alpha Q \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P = Q^{-1}. \quad (4.3.44)$$

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P \succ 0$  для системы (4.3.39) эквивалентно выполнению матричного неравенства (4.3.44) при некотором  $\alpha > 0$ .

Определим матрицы

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times m},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4n+m) \times (n+p)},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & D_2 & C_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (4n+m)}$$

и матрицу параметров регулятора

$$K_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+l)}.$$

Тогда матричное неравенство (4.3.44) примет вид

$$\begin{pmatrix} -P & \tilde{D} & \tilde{A} \\ \tilde{D}^\top & -(1-\alpha)I & 0 \\ \tilde{A}^\top & 0 & -\alpha Q \end{pmatrix} + MK_r N + N^\top K_r^\top M^\top \preceq 0$$

и согласно Лемме Е.5 будет заведомо разрешимо относительно  $K_r$ , если существуют числа  $\mu_1, \mu_2$  такие, что выполнены *строгие* матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} -P & \tilde{D} & \tilde{A} \\ \tilde{D}^\top & -(1-\alpha)I & 0 \\ \tilde{A}^\top & 0 & -\alpha Q \end{pmatrix} - \mu_1 MM^\top \prec 0 \quad (4.3.45)$$

и

$$\begin{pmatrix} -P & \tilde{D} & \tilde{A} \\ \tilde{D}^\top & -(1-\alpha)I & 0 \\ \tilde{A}^\top & 0 & -\alpha Q \end{pmatrix} - \mu_2 N^\top N \prec 0. \quad (4.3.46)$$

Представив матрицы  $P$  и  $Q$  в блочном виде

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^\top & P_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^\top & Q_{22} \end{pmatrix}, \quad P_{11}, Q_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

придадим соотношениям (4.3.45)–(4.3.46) вид

$$\begin{pmatrix} -P_{11} - \mu_1 BB^\top & -P_{12} & D_1 & A & 0 \\ * & -P_{22} - \mu_1 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\alpha Q_{11} & -\alpha Q_{12} \\ * & * & * & * & -\alpha Q_{22} \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.3.47)$$

$$\begin{pmatrix} -P_{11} & -P_{12} & D_1 & A & 0 \\ * & -P_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Phi & -\mu_2 D_2^\top C_1 & -\alpha Q_{12} \\ * & * & * & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha Q_{22} - \mu_2 I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (4.3.48)$$

где

$$\Phi = -(1 - \alpha)I - \mu_2 D_2^\top D_2.$$

В силу Леммы 2.2.3 матричное неравенство (4.3.47) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\begin{pmatrix} -P_{11} - \mu_1 B B^\top & D_1 & A & 0 \\ * & -(1 - \alpha)I & 0 & 0 \\ * & * & -\alpha Q_{11} & -\alpha Q_{12} \\ * & * & * & -\alpha Q_{22} \end{pmatrix} \prec 0. \quad (4.3.49)$$

Аналогично, по той же Лемме 2.2.3 матричное неравенство (4.3.48) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} -P_{11} & -P_{12} & D_1 & A \\ * & -P_{22} & 0 & 0 \\ * & * & \Phi & -\mu_2 D_2^\top C_1 \\ * & * & * & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} \prec 0. \quad (4.3.50)$$

Преобразуем полученные соотношения. Применяя к матричному неравенству (4.3.49) лемму Шура, имеем:

$$\begin{pmatrix} -P_{11} - \mu_1 B B^\top & D_1 \\ D_1^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha Q_{11} & -\alpha Q_{12} \\ -\alpha Q_{12}^\top & -\alpha Q_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \prec 0$$

или

$$\begin{pmatrix} -P_{11} - \mu_1 B B^\top & D_1 \\ D_1^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^\top & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \prec 0,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} -P_{11} - \mu_1 B B^\top + \frac{1}{\alpha} A P_{11} A^\top & D_1 \\ D_1^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \prec 0.$$

Наконец, еще раз воспользовавшись леммой Шура, приходим к соотношению (4.3.40).

Аналогичным образом применяя лемму Шура к матричному неравенству (4.3.50), получаем

$$\begin{pmatrix} -(1-\alpha)I - \mu_2 D_2^\top D_2 & -\mu_2 D_2^\top C_1 \\ -\mu_2 C_1^\top D_2 & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} D_1^\top & 0 \\ A^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P_{11} & -P_{12} \\ -P_{12}^\top & -P_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \prec 0$$

или

$$\begin{pmatrix} -(1-\alpha)I - \mu_2 D_2^\top D_2 & -\mu_2 D_2^\top C_1 \\ -\mu_2 C_1^\top D_2 & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} D_1^\top & 0 \\ A^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^\top & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \prec 0,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} -(1-\alpha)I - \mu_2 D_2^\top D_2 & -\mu_2 D_2^\top C_1 \\ -\mu_2 C_1^\top D_2 & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} D_1^\top Q_{11} D_1 & D_1^\top Q_{11} A \\ A^\top Q_{11} D_1 & A^\top Q_{11} A \end{pmatrix} \prec 0.$$

Еще раз воспользовавшись леммой Шура, получаем матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} -Q_{11}^{-1} & & D_1 & & A \\ * & -(1-\alpha)I - \mu_2 D_2^\top D_2 & & -\mu_2 D_2^\top C_1 & \\ * & & * & & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} \prec 0,$$

домножая которое слева и справа на матрицу  $\text{diag}\{Q_{11} \quad I \quad I\}$ , приходим к соотношению (4.3.41).

Далее, в силу Леммы Е.6 для существования искомого матриц  $P$  и  $Q$  с соответствующими блоками  $P_{11}$  и  $Q_{11}$  необходимо и достаточно выполнения условия (4.3.42), а сама матрица  $P$  достраивается, как и в непрерывном случае:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad R = P_{11} - Q_{11}^{-1} \succ 0.$$

Итак, приходим к задаче минимизации

$$\text{tr } CPC^\top = \text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top$$

при ограничениях (4.3.40)–(4.3.42). При этом параметры искомого динамического регулятора удовлетворяют линейному матричному неравенству (4.3.43).  $\blacksquare$

Отметим, что Лемма 4.3.1 сохраняет свою силу и в дискретном случае.

Наконец, в случае, когда внешние возмущения в системе (4.3.37) подчинены интервальным ограничениям

$$|w_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad \forall t \geq 0, \quad (4.3.51)$$

легко получить вариант Теоремы 4.3.5, являющийся дискретным аналогом Теоремы 4.3.4 (см. доказательства Теорем 3.1.6 и 4.2.7).

**Теорема 4.3.6.** Пусть  $\hat{P}_{11}$ ,  $\hat{Q}_{11}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$  — решение задачи

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} A P_{11} A^\top - P_{11} - \mu_1 B B^\top & D_1 \\ \alpha D_1^\top & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{pmatrix} -Q_{11} & Q_{11} D_1 & Q_{11} A \\ * & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} - \mu_2 D_2^\top D_2 & -\mu_2 D_2^\top C_1 \\ * & * & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succ 0, \quad \sum_{i=1}^m \beta_i \leq 1 - \alpha,$$

$$P_{11} \succ 0, \quad Q_{11} \succ 0,$$

относительно скалярных переменных  $\mu_1, \mu_2, \beta_1, \dots, \beta_m$ , матричных переменных  $P_{11} = P_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда динамический регулятор

$$K_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix},$$

стабилизирующий систему (4.3.37), находится как любое решение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} -\hat{P} & \tilde{D} & \tilde{A} \\ \tilde{D}^\top & -\text{diag}\{\hat{\beta}_1 \ \dots \ \hat{\beta}_m\} & 0 \\ \tilde{A}^\top & 0 & -\hat{\alpha} \hat{Q} \end{pmatrix} + M K_r N + N^\top K_r^\top M^\top \preceq 0,$$



где

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad R = \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11}^{-1}, \quad \hat{Q} = \hat{P}^{-1},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & D_2 & C_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица

$$C_2 \hat{P}_{11} C_2^T$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы при внешних возмущениях вида (4.3.51) и нулевых начальных условиях.

## Глава 5

# Робастное подавление внешних возмущений

В этой главе рассматриваются робастные модификации всех задач синтеза, изучавшихся в Главе 4; при этом предполагается, что матрицы системы содержат неопределенность. Также исследуются задачи о *нехрупких регуляторах*, которые сохраняют выход системы в соответствующем ограничивающем эллипсоиде при варьировании своих коэффициентов.

### 5.1. Управление по состоянию

#### 5.1.1. Непрерывный случай

Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B_1 + \Delta B_1)u + (D + \Delta D)w, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2u, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0. \quad (5.1.2)$$

Системные неопределенности  $\Delta A$ ,  $\Delta B_1$  и  $\Delta D$  имеют структуру

$$\Delta A = F_A \Delta_A H_A,$$

$$\begin{aligned}\Delta B_1 &= F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1}, \\ \Delta D &= F_D \Delta_D H_D,\end{aligned}$$

при этом матричные неопределенности  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{q_1^A \times q_2^A}$ ,  $\Delta_{B_1} \in \mathbb{R}^{q_1^B \times q_2^B}$  и  $\Delta_D \in \mathbb{R}^{q_1^D \times q_2^D}$  удовлетворяют ограничениям

$$\|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_{B_1}\| \leq 1, \quad \|\Delta_D\| \leq 1, \quad (5.1.3)$$

$F_A \in \mathbb{R}^{n \times q_1^A}$ ,  $F_{B_1} \in \mathbb{R}^{n \times q_1^B}$ ,  $F_D \in \mathbb{R}^{n \times q_2^D}$ ,  $H_A \in \mathbb{R}^{q_2^A \times n}$ ,  $H_{B_1} \in \mathbb{R}^{q_2^B \times p}$ ,  $H_D \in \mathbb{R}^{q_2^D \times m}$  — заданные постоянные матрицы. Пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Таким образом, в отличие от системы (4.2.1), в описании допускаются неопределенности; соответственно, целью является построение управления вида  $u = Kx$ , которое *робастно стабилизирует* неопределенную систему (5.1.1) при всех допустимых  $\Delta_A$ ,  $\Delta_{B_1}$  и  $\Delta_D$ , и при этом минимизирует ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы.

Следующая теорема является робастным аналогом Теоремы 4.2.1.

**Теорема 5.1.1.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & PH_A^\top & Y^\top H_{B_1}^\top & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & 0 & H_D^\top \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (5.1.4)$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (5.1.5)$$

$$P \succ 0, \quad (5.1.6)$$

где

$$\begin{aligned}\Omega &= AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \\ &\quad + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_{B_1} F_{B_1}^\top + \varepsilon_3 F_D F_D^\top,\end{aligned}$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (5.1.1), а матрица ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

**Доказательство.** Система (5.1.1) с учетом (4.2.3) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_1K + F_A\Delta_A H_A + F_{B_1}\Delta_{B_1} H_{B_1}K)x + (D + F_D\Delta_D H_D)w, \\ z &= (C + B_2K)x. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях (5.1.7).

Далее, воспользовавшись Теоремой 4.2.1 приходим к задаче минимизации

$$\text{tr}[(C + B_2K)P(C + B_2K)^\top] \longrightarrow \min \quad (5.1.8)$$

при ограничениях (5.1.6) и

$$\begin{pmatrix} P(A + B_1K + \Psi)^\top + (A + B_1K + \Psi)P + \alpha P & D + F_D\Delta_D H_D \\ (D + F_D\Delta_D H_D)^\top & -\alpha(\Delta)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \quad (5.1.9)$$

для всех допустимых  $\Delta_A$ ,  $\Delta_{B_1}$  и  $\Delta_D$ , где

$$\Psi = F_A\Delta_A H_A + F_{B_1}\Delta_{B_1} H_{B_1}K,$$

а

$$\alpha(\Delta) = \alpha(\Delta_A, \Delta_{B_1}, \Delta_D).$$

Предположим, что существует число  $\alpha$  такое, что неравенство (5.1.9) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$ ,  $\Delta_{B_1}$  и  $\Delta_D$ . Представим матричное неравенство (5.1.9) в виде

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{cc} P(A+B_1K)^\top + (A+B_1K)P + \alpha P & D \\ D^\top & -\alpha I \end{array} \right) + \\
& + \left( \begin{array}{c} F_A \\ 0 \end{array} \right) \Delta_A (H_A P \quad 0) + \left( \begin{array}{c} PH_A^\top \\ 0 \end{array} \right) \Delta_A^\top (F_A^\top \quad 0) + \\
& + \left( \begin{array}{c} F_{B_1} \\ 0 \end{array} \right) \Delta_{B_1} (H_{B_1} K P \quad 0) + \left( \begin{array}{c} PK^\top H_{B_1}^\top \\ 0 \end{array} \right) \Delta_{B_1}^\top (F_{B_1}^\top \quad 0) + \\
& + \left( \begin{array}{c} F_D \\ 0 \end{array} \right) \Delta_D (H_D \quad 0) + \left( \begin{array}{c} 0 \\ H_D^\top \end{array} \right) \Delta_D^\top (F_D^\top \quad 0) \preceq 0,
\end{aligned}$$

которое по Лемме 2.2.13, выполняется, если существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  такие, что

$$\left( \begin{array}{ccccc} \Omega & D & PH_A^\top & PK^\top H_{B_1}^\top & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & 0 & H_D^\top \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{array} \right) \preceq 0, \quad (5.1.10)$$

где

$$\Omega = (A+B_1K)P + P(A+B_1K)^\top + \alpha P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_{B_1} F_{B_1}^\top + \varepsilon_3 F_D F_D^\top.$$

После замены

$$Y = KP$$

матричное неравенство (5.1.10) принимает линейный вид (5.1.4).

Далее, с учетом введенной переменной  $Y$  целевая функция в (5.1.8) переписывается в виде

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top].$$

Согласно Лемме 2.2.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (5.1.4), (5.1.5) и (5.1.6), где  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — вспомогательная матричная переменная.  $\blacksquare$

В рамках данного подхода к робастному подавлению внешних возмущений можно также потребовать введения ограничений на управление, как это сделано в разделе 4.2.1; при этом Лемма 2.4.1 сохраняет свою силу.

Следующая лемма является аналогом Леммы 3.1.5.

**Лемма 5.1.1.** Пусть матрица  $P \succ 0$  задает квадратичную функцию Ляпунова для системы (5.1.1) с ненулевым начальным условием. Тогда наилучшее внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$  задается формулой

$$\tilde{w}(t) = \frac{(D + F_D \Delta_D(t) H_D)^\top \hat{P}^{-1} x(t)}{|(D + F_D \Delta_D(t) H_D)^\top \hat{P}^{-1} x(t)|}, \quad (5.1.11)$$

а наилучшие матричные неопределенности  $\tilde{\Delta}_A(t)$ ,  $\tilde{\Delta}_{B_1}(t)$  и  $\tilde{\Delta}_D(t)$  находятся как

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_A(t) &= \frac{F_A^\top \hat{P}^{-1} x(t) x^\top(t) H_A^\top}{\|F_A^\top \hat{P}^{-1} x(t) x^\top(t) H_A^\top\|}, \\ \tilde{\Delta}_{B_1}(t) &= \frac{F_{B_1}^\top \hat{P}^{-1} x(t) x^\top(t) \hat{K}^\top H_{B_1}^\top}{\|F_{B_1}^\top \hat{P}^{-1} x(t) x^\top(t) \hat{K}^\top H_{B_1}^\top\|}, \\ \tilde{\Delta}_D(t) &= \frac{F_D^\top \hat{P}^{-1} x(t) w^\top(t) H_D^\top}{\|F_D^\top \hat{P}^{-1} x(t) w^\top(t) H_D^\top\|}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Потребуем, чтобы

$$\dot{V}(x, w) \longrightarrow \max,$$

где  $V(x) = x^\top \hat{P}^{-1} x$  — функция Ляпунова, построенная на решениях замкнутой системы (5.1.1).

Имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^\top \left( (A + B_1 \hat{K} + F_A \Delta_A(t) H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1}(t) H_{B_1} \hat{K})^\top \hat{P}^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \hat{P}^{-1} (A + B_1 \hat{K} + F_A \Delta_A(t) H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1}(t) H_{B_1} \hat{K}) \right) x + \\ &\quad + 2w^\top (D + F_D \Delta_D(t) H_D)^\top \hat{P}^{-1} x. \end{aligned}$$

Тогда внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$ , как и прежде, является решением задачи

$$\max_{|w| \leq 1} \left( w, (D + F_D \Delta_D(t) H_D)^\top \hat{P}^{-1} x \right),$$

откуда имеем (5.1.11).

Далее, матричные неопределенности  $\tilde{\Delta}_A(t)$ ,  $\tilde{\Delta}_{B_1}(t)$  и  $\tilde{\Delta}_D(t)$  соответственно являются решениями задач

$$\max_{\|\Delta_A\| \leq 1} x^\top \hat{P}^{-1} F_A \Delta_A(t) H_A x,$$

$$\begin{aligned} \max_{\|\Delta_{B_1}\| \leq 1} x^\top \widehat{P}^{-1} F_{B_1} \Delta_{B_1}(t) H_{B_1} \widehat{K} x, \\ \max_{\|\Delta_D\| \leq 1} x^\top \widehat{P}^{-1} F_D \Delta_D(t) H_D w. \end{aligned}$$

Применяя Лемму Е.1, получаем искомые соотношения. ■

Полученные результаты несложно обобщить на случай, когда

$$\begin{aligned} \Delta A &= \sum_{i=1}^r F_A^i \Delta^i H_A^i, \\ \Delta B_1 &= \sum_{i=1}^r F_{B_1}^i \Delta^i H_{B_1}^i, \\ \Delta D &= \sum_{i=1}^r F_D^i \Delta^i H_D^i, \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

где матричные неопределенности  $\Delta^i \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , удовлетворяют ограничению

$$\|\Delta^i\| \leq 1, \quad i = 1, \dots, r,$$

а  $F_A^i, F_{B_1}^i, F_D^i, H_A^i, H_{B_1}^i, H_D^i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , — постоянные матрицы соответствующих размерностей. В этом случае Теорема 5.1.1 примет следующий вид.

**Теорема 5.1.2.** Пусть  $\widehat{P}, \widehat{Y}, \widehat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & \cdots & PH_A^{i\top} & Y^\top H_{B_1}^{i\top} & 0 & \cdots \\ * & -\alpha I & \cdots & 0 & 0 & H_D^{i\top} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & -\varepsilon_i I & 0 & 0 & \cdots \\ * & * & \cdots & * & -\varepsilon_i I & 0 & \cdots \\ * & * & \cdots & * & * & -\varepsilon_i I & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad P \succ 0,$$

где

$$\Omega = AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i (F_A^i F_A^{i\top} + F_{B_1}^i F_{B_1}^{i\top} + F_D^i F_D^{i\top}),$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (5.1.1), (5.1.12), а матрица

$$C \hat{P} C^\top + C \hat{Y}^\top B_2^\top + B_2 \hat{Y} C^\top + B_2 \hat{Z} B_2^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$ .

Следующая лемма является аналогом Леммы 5.1.1 в случае, когда матричные неопределенности задаются соотношениями (5.1.12).

**Лемма 5.1.2.** Пусть матрица  $P \succ 0$  задает квадратичную функцию Ляпунова для системы (5.1.1) с ненулевым начальным условием. Тогда наилучшее внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$  задается формулой

$$\tilde{w}(t) = \frac{(D + \sum_{i=1}^r F_D^i \Delta_i H_D^i)^\top \hat{P}^{-1} x(t)}{|(D + \sum_{i=1}^r F_D^i \Delta_i H_D^i)^\top \hat{P}^{-1} x(t)|}, \quad (5.1.13)$$

а наилучшие матричные неопределенности  $\tilde{\Delta}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , ограниченные во фробениусовой норме, находятся как

$$\tilde{\Delta}_i(t) = \frac{\Omega_i \begin{pmatrix} x^\top(t) H_A^{i\top} \\ x^\top(t) \hat{K}^\top H_{B_1}^{i\top} \\ w^\top(t) H_D^{i\top} \end{pmatrix}}{\left\| \Omega_i \begin{pmatrix} x^\top(t) H_A^{i\top} \\ x^\top(t) \hat{K}^\top H_{B_1}^{i\top} \\ w^\top(t) H_D^{i\top} \end{pmatrix} \right\|_F}, \quad i = 1, \dots, r, \quad (5.1.14)$$



где

$$\Omega_i = \left( F_A^i \top \widehat{P}^{-1}x(t) \quad F_{B_1}^i \top \widehat{P}^{-1}x(t) \quad F_D^i \top \widehat{P}^{-1}x(t) \right), \quad i = 1, \dots, r.$$

**Доказательство.** Потребуем, чтобы

$$\dot{V}(x, w) \longrightarrow \max,$$

где  $V(x) = x \top \widehat{P}^{-1}x$  — функция Ляпунова, построенная на решениях замкнутой системы (5.1.1), (5.1.12).

Имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, w) = x \top & \left( (A + B_1 \widehat{K} + \sum_{i=1}^r F_A^i \Delta^i H_A^i + \sum_{i=1}^r F_{B_1}^i \Delta^i H_{B_1}^i \widehat{K}) \top \widehat{P}^{-1} + \right. \\ & + \widehat{P}^{-1} (A + B_1 \widehat{K} + \sum_{i=1}^r F_A^i \Delta^i H_A^i + \sum_{i=1}^r F_{B_1}^i \Delta^i H_{B_1}^i \widehat{K}) x + \\ & \left. + 2w \top (D + \sum_{i=1}^r F_D^i \Delta^i H_D^i) \top \widehat{P}^{-1} x. \right) \end{aligned}$$

Тогда искомое внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$  является решением задачи

$$\max_{|w| \leq 1} \left( w, (D + \sum_{i=1}^r F_D^i \Delta^i H_D^i) \top \widehat{P}^{-1} x \right),$$

откуда имеем (5.1.13).

Далее, матричные неопределенности  $\tilde{\Delta}^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , являются решениями задач

$$\max_{\|\Delta^i\|_F \leq 1} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} x \top \widehat{P}^{-1} F_A^i \\ x \top \widehat{P}^{-1} F_{B_1}^i \\ x \top \widehat{P}^{-1} F_D^i \end{pmatrix} \Delta^i \begin{pmatrix} H_A^i x & H_{B_1}^i \widehat{K} x & H_D^i w \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, r,$$

откуда, в силу Леммы Е.2, получаем соотношения (5.1.14).  $\blacksquare$

**Следствие 5.1.1.** Если в системе (5.1.1), (5.1.12) матричные неопределенности одномерны, то

$$\tilde{\Delta}_i(t) = \operatorname{sign} \Omega_i \begin{pmatrix} x \top(t) H_A^i \top \\ x \top(t) \widehat{K} \top H_{B_1}^i \top \\ w \top(t) H_D^i \top \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, r,$$

где

$$\Omega_i = \left( F_A^i \top \widehat{P}^{-1}x(t) \quad F_{B_1}^i \top \widehat{P}^{-1}x(t) \quad F_D^i \top \widehat{P}^{-1}x(t) \right), \quad i = 1, \dots, r.$$

### 5.1.2. Дискретный случай

Аналогичные результаты можно получить и в дискретном случае, для системы вида

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta A)x_k + (B_1 + \Delta B_1)u_k + (D + \Delta D)w_k, \\ z_k &= Cx_k + B_2u_k, \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w_k| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1.16)$$

Системные неопределенности  $\Delta A$ ,  $\Delta B_1$  и  $\Delta D$  имеют структуру

$$\begin{aligned} \Delta A &= F_A \Delta_A H_A, \\ \Delta B_1 &= F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1}, \\ \Delta D &= F_D \Delta_D H_D, \end{aligned}$$

при этом матричные неопределенности  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{q_1^A \times q_2^A}$ ,  $\Delta_{B_1} \in \mathbb{R}^{q_1^B \times q_2^B}$  и  $\Delta_D \in \mathbb{R}^{q_1^D \times q_2^D}$  удовлетворяют ограничению (5.1.3), а  $F_A \in \mathbb{R}^{n \times q_1^A}$ ,  $F_{B_1} \in \mathbb{R}^{n \times q_1^B}$ ,  $F_D \in \mathbb{R}^{n \times q_2^D}$ ,  $H_A \in \mathbb{R}^{q_2^A \times n}$ ,  $H_{B_1} \in \mathbb{R}^{q_2^B \times p}$ ,  $H_D \in \mathbb{R}^{q_2^D \times m}$  — заданные постоянные матрицы; пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Требуется найти регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию (4.2.24), который стабилизирует замкнутую систему и, в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$ , подавляет воздействие внешних возмущений  $w_k$ .

Следующее утверждение представляет собой дискретный аналог Теоремы 5.1.1 и робастный аналог Теоремы 4.2.5.

**Теорема 5.1.3.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top + Y^\top B_1^\top & 0 & PH_A^\top & Y^\top H_{B_1}^\top & 0 \\ * & \Omega & D & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & H_D^\top \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5.1.17)$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (5.1.18)$$

$$P \succ 0, \quad (5.1.19)$$

где

$$\Omega = -P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_{B_1} F_{B_1}^\top + \varepsilon_3 F_D F_D^\top,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}.$$

стабилизирует систему (5.1.15), а матрица

$$C \hat{P} C^\top + C \hat{Y}^\top B_2^\top + B_2 \hat{Y} C^\top + B_2 \hat{Z} B_2^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$ .

**Доказательство.** Система (5.1.15) с учетом (4.2.24) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + B_1 K + F_A \Delta_A H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1} K) x_k + (D + F_D \Delta_D H_D) w_k, \\ z_k &= (C + B_2 K) x_k. \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Q x, \quad Q = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (5.1.20).

Воспользовавшись Теоремой 4.2.5, приходим к задаче минимизации

$$\text{tr}[(C + B_2 K) P (C + B_2 K)^\top] \longrightarrow \min \quad (5.1.21)$$

при ограничениях (5.1.19) и

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\Delta)P & \Phi & 0 \\ * & -P & D + F_D \Delta_D H_D \\ * & * & -(1 - \alpha(\Delta))I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5.1.22)$$

для всех допустимых  $\Delta_A, \Delta_{B_1}$  и  $\Delta_D$ , где

$$\Phi = P(A + B_1 K + F_A \Delta_A H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1} K)^\top,$$

$$\alpha(\Delta) = \alpha(\Delta_A, \Delta_{B_1}, \Delta_D).$$

Пусть существует число  $\alpha$  такое, что неравенство (5.1.22) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$ ,  $\Delta_{B_1}$  и  $\Delta_D$ . Представим матричное неравенство (5.1.22) в виде

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1 K)^\top & 0 \\ (A + B_1 K)P & -P & D \\ 0 & D^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A (H_A P \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} P H_A^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^\top (0 \ F_A^\top \ 0) + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ F_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{B_1} (H_{B_1} K P \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} P K^\top H_{B_1}^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_{B_1}^\top (0 \ F_{B_1}^\top \ 0) + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ F_D \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_D (0 \ 0 \ H_D) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_D^\top \end{pmatrix} \Delta_D^\top (0 \ F_D^\top \ 0) \preccurlyeq 0, \end{aligned}$$

которое по Лемме 2.2.13 выполняется, если существуют числа  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , такие, что

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P A^\top + P K^\top B_1^\top & 0 & P H_A^\top & P K^\top H_{B_1}^\top & 0 \\ * & \Omega & D & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -(1 - \alpha)I & 0 & 0 & H_D^\top \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

где

$$\Omega = -P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_{B_1} F_{B_1}^\top + \varepsilon_3 F_D F_D^\top.$$

После замены  $Y = KP$  полученное матричное неравенство принимает линейный вид (5.1.17).

С учетом введенной переменной  $Y$  целевая функция в (5.1.21) перепишется в виде

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2 Y C^\top + B_2 Y P^{-1} Y^\top B_2^\top].$$

Согласно Лемме 2.2.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2 Y C^\top + B_2 Z B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (5.1.17), (5.1.18) и (5.1.19), где  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — вспомогательная матричная переменная.  $\blacksquare$

Следующая лемма является аналогом Леммы 3.1.6.

**Лемма 5.1.3.** Пусть матрица  $P \succ 0$  задает квадратичную функцию Ляпунова для системы (5.1.15) с ненулевым начальным условием. Тогда одномерное ( $m = 1$ ) наилучшее внешнее возмущение  $\tilde{w}_k$  представимо формулой

$$\tilde{w}_k = \text{sign}((D + F_D \Delta_D H_D)^\top \hat{P}^{-1} \times \\ \times (A + B_1 \hat{K} + F_A \Delta_A H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1} \hat{K}) x_k). \quad (5.1.23)$$

**Доказательство.** Потребуем

$$V(x_{k+1}) \longrightarrow \max,$$

где  $V(x) = x^\top \hat{P}^{-1} x$  — функция Ляпунова, построенная на решениях системы (5.1.15).

Имеем:

$$V(x_{k+1}) = ((A + B_1 \hat{K} + F_A \Delta_A H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1} \hat{K}) x_k + \\ + (D + F_D \Delta_D H_D) w_k)^\top \hat{P}^{-1} ((A + B_1 \hat{K} + F_A \Delta_A H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1} \hat{K}) x_k + \\ + (D + F_D \Delta_D H_D) w_k).$$

С учетом одномерности внешнего возмущения, приходим к задаче

$$\max_{|w_k| \leq 1} (w_k, (D + F_D \Delta_D H_D)^\top \hat{P}^{-1} \times \\ \times (A + B_1 \hat{K} + F_A \Delta_A H_A + F_{B_1} \Delta_{B_1} H_{B_1} \hat{K}) x_k),$$

которая имеет решение (5.1.23). ■

Полученные результаты, как и в непрерывном случае, можно обобщить на случай, когда

$$\Delta A = \sum_{i=1}^r F_A^i \Delta^i H_A^i, \\ \Delta B_1 = \sum_{i=1}^r F_{B_1}^i \Delta^i H_{B_1}^i, \\ \Delta D = \sum_{i=1}^r F_D^i \Delta^i H_D^i, \quad (5.1.24)$$

где матричные неопределенности  $\Delta^i \in \mathbb{R}^{q_1^i \times q_2^i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , удовлетворяют ограничению

$$\|\Delta^i\| \leq 1, \quad i = 1, \dots, r,$$

а  $F_A^i, F_{B_1}^i, F_D^i, H_A^i, H_{B_1}^i, H_D^i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , — постоянные матрицы соответствующих размерностей. В этом случае Теорема 5.1.3 примет следующий вид.

**Теорема 5.1.4.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & \Omega_1 & 0 & \cdots & PH_A^i{}^\top & Y^\top H_{B_1}^i{}^\top & 0 & \cdots \\ * & \Omega_2 & D & \cdots & 0 & 0 & H_D^i{}^\top & \cdots \\ * & * & -(1-\alpha)I & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & \cdots & -\varepsilon_i I & 0 & 0 & \cdots \\ * & * & * & \cdots & * & -\varepsilon_i I & 0 & \cdots \\ * & * & * & \cdots & * & * & -\varepsilon_i I & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad P \succ 0,$$

где

$$\Omega_1 = PA^\top + Y^\top B_1^\top,$$

$$\Omega_2 = -P + \sum_{i=1}^r \varepsilon_i (F_A^i F_A^i{}^\top + F_{B_1}^i F_{B_1}^i{}^\top + F_D^i F_D^i{}^\top),$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (5.1.15), (5.1.24), а матрица

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$ .

**Пример 5.1.1.** Предложенный подход к робастному подавлению внешних возмущений мы продемонстрируем на примере задачи управления двухмассовой системой (см. Пример 4.2.3).

Пусть параметры системы единичны, а неопределенность системы состоит в неопределенности коэффициента упругости пружины:

$$k = 1 + \delta\Delta, \quad \delta = \text{const.}$$

В этом случае приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + F_A\Delta H_A)x + B_1u + Dw, \\ y &= Cx + B_2u, \end{aligned}$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad H_A = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При  $\delta = 0,2$  с помощью Теоремы 5.1.1 был найден стабилизирующий регулятор

$$\widehat{K} = (-3,3996 \quad 1,6387 \quad -2,8066 \quad -2,2011),$$

и соответствующий ему ограничивающий эллипс выхода

$$\begin{pmatrix} 14,6060 & -8,9177 \\ -8,9177 & 25,7623 \end{pmatrix}.$$

На Рис. 5.1.1 изображен ограничивающий эллипс для выхода системы, замкнутой регулятором  $\widehat{K}$ ; на том же рисунке показана траектория выхода системы при некотором выборе начальной точки, наилучшей матричной неопределенности  $\widetilde{\Delta}(t)$  и наилучшем внешнем возмущении  $\widetilde{w}(t)$ .

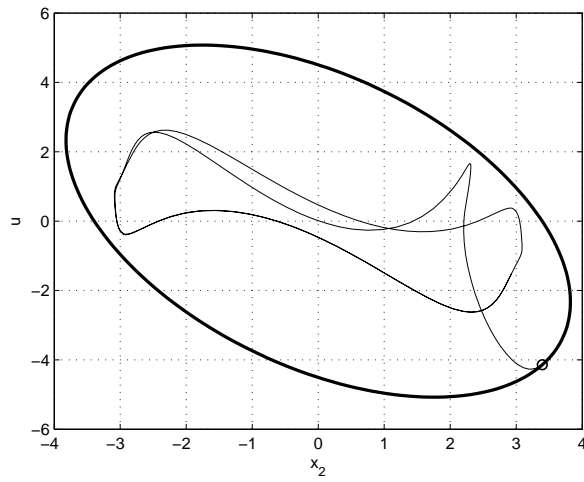


Рис. 5.1.1. Ограничивающий эллипс и траектория выхода системы из Примера 5.1.1.

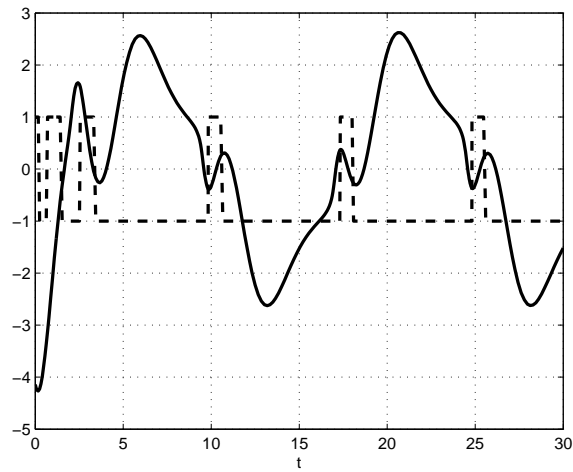


Рис. 5.1.2. Графики матричной неопределенности  $\tilde{\Delta}(t)$  и управления  $u(t)$  для системы из Примера 5.1.1.



На Рис. 5.1.2 представлены графики матричной неопределенности  $\tilde{\Delta}(t)$  (пунктиром) и управления  $u(t)$  (сплошной линией).

Случай, когда неопределенности содержатся в массах тел:

$$\frac{k}{m_1} = 1 + \delta_1 \Delta_1, \quad \frac{k}{m_2} = 1 + \delta_2 \Delta_2, \quad \delta_1, \delta_2 = \text{const},$$

приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (A + F_A^1 \Delta_1 H_A^1 + F_A^2 \Delta_2 H_A^2)x + \\ & + (B_1 + F_{B_1}^1 \Delta_1 H_{B_1}^1 + F_{B_1}^2 \Delta_2 H_{B_1}^2)u + \\ & + (D + F_D^1 \Delta_1 H_D^1 + F_D^2 \Delta_2 H_D^2)w, \end{aligned}$$

с двумя скалярными матричными неопределенностями  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . При этом матрицы системы имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_A^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_A^1 = (-1 \quad 1 \quad 0 \quad 0),$$

$$F_A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad H_A^2 = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0),$$

$$F_{B_1}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_{B_1}^1 = 1, \quad F_{B_1}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_{B_1}^2 = 0,$$

$$F_D^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_D^1 = (1 \quad 0), \quad F_D^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \quad H_D^2 = (0 \quad 1),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При  $\delta_1 = \delta_2 = 0,2$  с помощью Теоремы 5.1.2 определен регулятор

$$\widehat{K} = (-5,2373 \quad 3,3396 \quad -3,7970 \quad -3,5180)$$

и соответствующий ему ограничивающий эллипс для выхода с матрицей

$$\begin{pmatrix} 50,2168 & -20,4471 \\ -20,4471 & 109,5387 \end{pmatrix}.$$

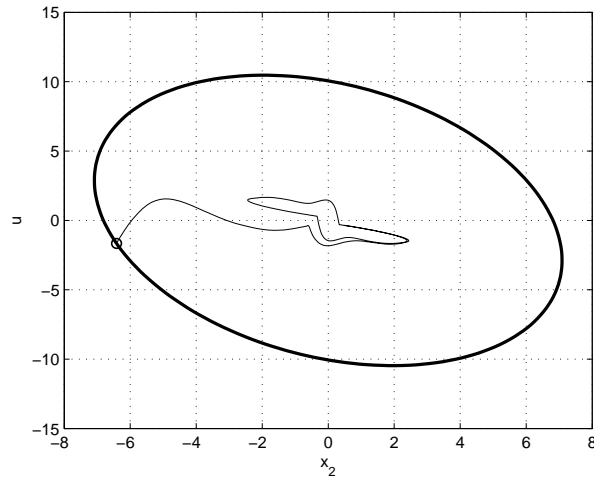


Рис. 5.1.3. Ограничивающий эллипс и траектория выхода системы из Примера 5.1.1.

На Рис. 5.1.3 изображен ограничивающий эллипс для выхода системы, замкнутой регулятором  $\widehat{K}$ , и траектория выхода системы при некотором выборе начальной точки, допустимом внешнем возмущении и наихудших матричных неопределенностях.

На Рис. 5.1.4 представлены графики матричных неопределенностей  $\widetilde{\Delta}_1(t)$  и  $\widetilde{\Delta}_2(t)$ .

На Рис. 5.1.5 представлен график управления  $u(t)$ . ▼

В рамках данного примера можно продемонстрировать и дискретный случай возмущенных колебаний рассматриваемой системы, аппроксимируя его движение моделью в дискретном времени.

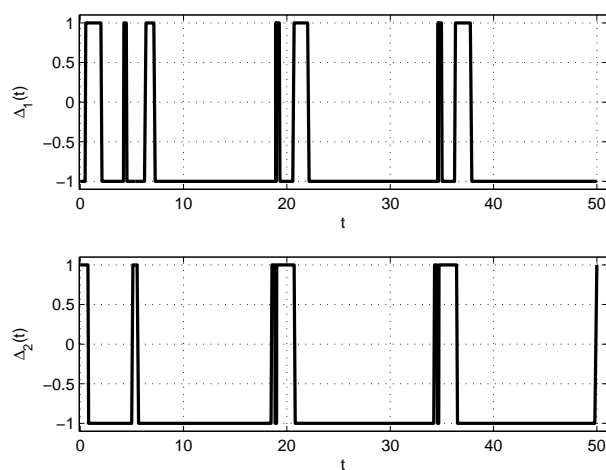


Рис. 5.1.4. Графики матричных неопределенностей  $\tilde{\Delta}_1(t)$  и  $\tilde{\Delta}_2(t)$  для системы из Примера 5.1.1.

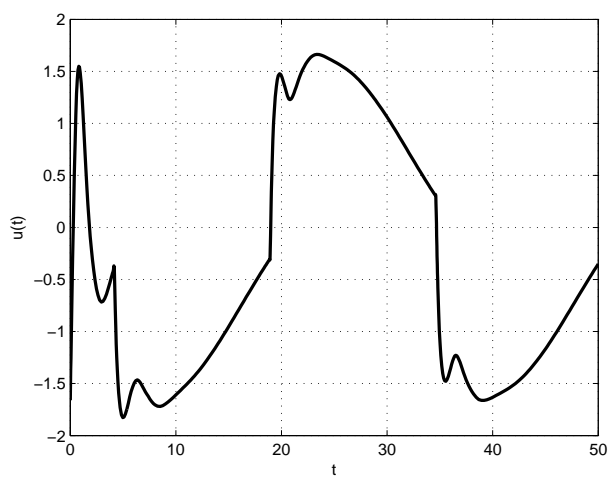


Рис. 5.1.5. График управления  $u(t)$  для системы из Примера 5.1.1.

## 5.2. Нехрупкий регулятор

В этом разделе мы рассмотрим проблему *хрупкости* регуляторов, оптимальных по тому или иному критерию. Обычно под хрупкостью регулятора понимается потеря им свойства *стабилизируемости* при малых изменениях коэффициентов. При этом вариации параметров регулятора могут возникать, главным образом, по двум причинам: во-первых, по причине его неточной реализации и, во-вторых, при необходимости дополнительно настраивать его параметры в процессе использования (например, при изменении условий работы системы и др.). Явление хрупкости хорошо известно из инженерной практики, и при описании систем в частотной области для его предотвращения разработаны различные методики.

Мы же (следуя описанию в пространстве состояний), говоря о придании регулятору свойства *нехрупкости*, имеем в виду робастность относительно изменений его параметров, а специальный термин<sup>1</sup> вводится для того, чтобы отличать неопределенность в регуляторе от неопределенности в параметрах модели (в матрицах системы).

Покажем, каким образом некоторые из рассмотренных задач подавления внешних возмущений могут быть решены при дополнительном требовании нехрупкости регулятора; при этом оценки показателей качества получаемого нехрупкого регулятора будут также даны в терминах инвариантных эллипсоидов.

Обратим внимание, что эта задача содержательно отличается от ранее рассмотренных робастных постановок задач. Как мы увидим ниже, она соответствует системе с матричной неопределенностью в выходе; такая задача также поддается решению в рамках развиваемого подхода.

### 5.2.1. Непрерывный случай

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением

<sup>1</sup>Иногда используется термин “грубый регулятор”, однако, целесообразнее использовать понятие “хрупкий”. Дело в том, что грубость обычно предполагает малое изменение свойств системы, здесь же возможные отклонения не предполагаются малыми.

$u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (5.1.2). Пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Как и выше, будем строить ограничивающий эллипсоид для выхода замкнутой системы, минимальный по критерию следа, однако теперь от стабилизирующего регулятора будем дополнительно требовать нехрупкости.

*Нехрупкий регулятор*  $K$  будем искать в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx \quad (5.2.2)$$

таким образом, чтобы возмущенный регулятор

$$K + \Delta_K$$

при всех

$$\Delta_K \in \mathbb{R}^{p \times n}: \quad \|\Delta_K\| \leq \gamma_K$$

стабилизировал замкнутую систему и подавлял воздействие внешних возмущений  $w$ . Иными словами, мы хотим найти такой регулятор  $K$ , чтобы для любых допустимых неопределенностей  $\Delta_K$  в его параметрах и любых допустимых внешних возмущений  $w$  гарантировать малость выхода  $z$  замкнутой системы.

Величину  $\gamma_K$  будем называть *радиусом нехрупкости* регулятора  $K$ .

**Теорема 5.2.1.** Пусть  $\hat{R}, \hat{P}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } R \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^\top & D & P \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (5.2.3)$$

$$\begin{pmatrix} R - \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^\top & CP + B_2 Y & 0 \\ * & P & P \\ * & * & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (5.2.4)$$

$$R \succ 0, \quad P \succ 0, \quad (5.2.5)$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (5.2.1), обладая радиусом нехрупкости  $\gamma_K$ , а матрица  $\hat{R}$  определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы (5.2.1) с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.1.2).

**Доказательство.** Система (5.2.1) с учетом (5.2.2) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_1K + B_1\Delta_K)x + Dw, \\ z &= (C + B_2K + B_2\Delta_K)x. \end{aligned}$$

Воспользовавшись техникой, изложенной в разделе 4.2.1, приходим к задаче минимизации

$$\max_{\|\Delta_K\| \leq \gamma_K} \operatorname{tr}[(C + B_2K + B_2\Delta_K)P(C + B_2K + B_2\Delta_K)^\top] \longrightarrow \min \quad (5.2.6)$$

при ограничениях  $P \succ 0$  и

$$\begin{pmatrix} \Phi & D \\ D^\top & -\alpha(\Delta_K)I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (5.2.7)$$

для всех допустимых  $\Delta_K$ , где

$$\Phi = (A + B_1K + B_1\Delta_K)P + P(A + B_1K + B_1\Delta_K)^\top + \alpha(\Delta_K)P.$$

Согласно Лемме 2.1.2, задача (5.2.6), (5.2.7) эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr} R \longrightarrow \min$$

при ограничениях (5.2.7), (5.2.5) и

$$\begin{aligned} (C + B_2K + B_2\Delta_K)P(C + B_2K + B_2\Delta_K)^\top \preceq R \\ \text{при всех } \Delta_K: \|\Delta_K\| \leq \gamma_K. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Пусть существует число  $\alpha > 0$  такое, что неравенство (5.2.7) выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta_K$ . Тогда неравенство (5.2.7) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} P(A + B_1K)^\top + (A + B_1K)P + \alpha P & D \\ D^\top & -\alpha I \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K \begin{pmatrix} P & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K^\top \begin{pmatrix} B_1^\top & 0 \end{pmatrix} \preceq 0, \end{aligned}$$

что, по Следствию 2.2.6 выполняется, если существует число  $\varepsilon_1$  такое, что

$$\begin{pmatrix} (A + B_1K)P + P(A + B_1K)^\top + \alpha P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^\top & D & P \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (5.2.9)$$

После замены  $Y = KP$  матричное соотношение (5.2.9) принимает линейный вид (5.2.3).

Далее, согласно лемме Шура неравенство (5.2.8) эквивалентно

$$\begin{pmatrix} R & C + B_2K + B_2\Delta_K \\ (C + B_2K + B_2\Delta_K)^\top & P^{-1} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} R & C + B_2K \\ (C + B_2K)^\top & P^{-1} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \Delta_K^\top \begin{pmatrix} B_2^\top & 0 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \end{aligned}$$

что по Следствиям 2.2.6 и 2.2.5 выполняется, если существует число  $\varepsilon_2$  такое, что

$$\begin{pmatrix} R - \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^\top & C + B_2K & 0 \\ * & P^{-1} & I \\ * & * & \varepsilon_1 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Домножая полученную матрицу слева и справа на  $\text{diag}\{I \ P \ I\}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} R - \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_2 B_2^\top & C + B_2KP & 0 \\ * & P & P \\ * & * & \varepsilon_1 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

откуда, с учетом введенной матричной переменной  $Y$ , приходим к соотношению (5.2.4).

В результате приходим к задаче минимизации величины  $\text{tr } R$  при ограничениях (5.2.3), (5.2.4) и (5.2.5).  $\blacksquare$

**Замечание 5.2.1.** Обратим внимание, что исходная задача допускает следующую робастную переформулировку: минимизировать ограничивающий эллипсоид для выхода системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + B_1\Delta_K)x + B_1u + Dw, \\ z &= (C + B_2\Delta_K)x + B_2u,\end{aligned}$$

при всех допустимых неопределенностях  $\Delta_K$ .

При этом, как следует из Замечания 2.4.3, радиус квадратичной робастной стабилизируемости данной системы бесконечен. Это означает, что система неравенств из Теоремы 5.2.1 разрешима при любом значении  $\gamma_K$ . Иными словами, для рассматриваемой системы можно построить регулятор, обладающий любым радиусом нехрупкости (естественно, платой за это является сколь угодно большое увеличение размеров ограничивающего эллипсоида). ▼

Как и ранее, учет начального условия системы производится путем добавления соответствующего линейного матричного неравенства к совокупности ограничений как в этой, так и в последующих теоремах; см. Замечание 4.2.1.

Пусть из каких-либо соображений выбран стабилизирующий регулятор  $K$ , то есть такой, что матрица  $A + B_1K$  устойчива. Назовем его *квадратичным радиусом устойчивости* величину

$$\begin{aligned}\gamma_0 &\doteq \sup\{\gamma: \exists P \succ 0: \\ &(A + B_1(K + \Delta_K))P + P(A + B_1(K + \Delta_K))^\top \prec 0 \\ &\quad \forall \Delta_K: \|\Delta_K\| \leq \gamma\}.\end{aligned}$$

Способ вычисления величины  $\gamma_0$  немедленно следует из Теоремы 2.3.2.

**Лемма 5.2.1.** Пусть  $\hat{\varepsilon}$  — решение задачи SDP

$$\varepsilon \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} (A + B_1K)P + P(A + B_1K)^\top + \varepsilon B_1 B_1^\top & P \\ P & -I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\varepsilon$ .

Тогда

$$\gamma_0 = \sqrt{\hat{\varepsilon}}.$$



Таким образом, радиус устойчивости фиксированного регулятора  $K$  связан с потерей устойчивости системы, замкнутой регуляторами вида  $K + \Delta_K$ . С другой стороны, в пределах радиуса нехрупкости регулятора мы можем не только гарантировать устойчивость, но и дать равномерную оценку для выхода системы, замкнутой произвольными регуляторами  $K + \Delta_K$ ,  $\|\Delta_K\| \leq \gamma_K$ .

Следующая теорема определяет при радиусе нехрупкости  $\gamma_K$  ограничивающий эллипсоид для выхода системы, замкнутой заданным стабилизирующим регулятором  $K$ .

**Теорема 5.2.2.** Пусть  $\hat{R}$  — решение задачи

$$\text{tr } R \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} (A + B_1 K)P + P(A + B_1 K)^\top + \alpha P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^\top & D & P \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} R - \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^\top & (C + B_2 K)P & 0 \\ * & P & P \\ * & * & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$R \succ 0, \quad P \succ 0,$$

по матричным переменным  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $\alpha > 0$ .

Тогда матрица  $\hat{R}$  определяет оптимальный ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы (5.2.1) с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.1.2), соответствующий заданному стабилизирующему регулятору  $K$  и радиусу нехрупкости  $\gamma_K$ .

**Доказательство.** Доказательство теоремы немедленно следует из Теоремы 5.2.1. ■

Ясно, что при заданном стабилизирующем регуляторе  $K$  радиус нехрупкости  $\gamma_K$  уже не может быть выбран произвольным образом; в частности, его максимальное значение не может быть больше квадратичного радиуса устойчивости  $\gamma_0$  регулятора  $K$ .

**Пример 5.2.1.** Рассмотрим задачу управления двухмассовой системой, см. Пример 4.2.3.

Пусть

$$k = 0,1, \quad m_1 = 0,1, \quad m_2 = 2,$$

а в качестве начальной точки выберем

$$x_0 = (-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1)^\top.$$

Пусть сначала  $\gamma_K = 0$ ; в соответствии с Теоремой 4.2.1 (или, что то же самое, Теоремой 5.2.1 для  $\gamma_K = 0$ ) имеем оптимальный регулятор

$$\hat{K} = (-0,1713 \quad -1,3146 \quad -0,1706 \quad -3,4196)$$

и минимальный ограничивающий эллипс с матрицей

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 8,5220 & -3,4088 \\ -3,4088 & 11,1650 \end{pmatrix}.$$

При этом степень устойчивости замкнутой системы достаточно велика:

$$-\max_i \lambda_i(A + B_1 \hat{K}) = 0,4003.$$

Однако если добавить к регулятору  $\hat{K}$  малое возмущение

$$\Delta = (0,0542 \quad -0,0046 \quad 0,0766 \quad 0,0168),$$

2-норма которого составляет всего лишь 2,6% от нормы  $\hat{K}$ , такой *возмущенный* регулятор уже не стабилизирует систему:

$$-\max_i \lambda_i(A + B_1(\hat{K} + \Delta)) = -0,0059.$$

С другой стороны, даже если возмущенный регулятор останется стабилизирующим, выход замкнутой им системы может покинуть минимально возможный ограничивающий эллипсоид. На Рис. 5.2.1 показан минимальный ограничивающий эллипс и две траектории выхода замкнутой системы (при одном и том же начальном состоянии и внешнем возмущении): пунктиром — для оптимального регулятора  $\hat{K}$  и сплошной линией — для возмущенного регулятора  $\hat{K} + 0,4\Delta$ . При этом регулятор  $\hat{K} + 0,4\Delta$  остается стабилизирующим:

$$-\max_i \lambda_i(A + B_1(\hat{K} + 0,4\Delta)) = 0,2299.$$

Отметим, что Лемма 5.2.1 дает следующий квадратичный радиус устойчивости для оптимального регулятора  $\hat{K}$ :

$$\gamma_0 = 0,0647.$$

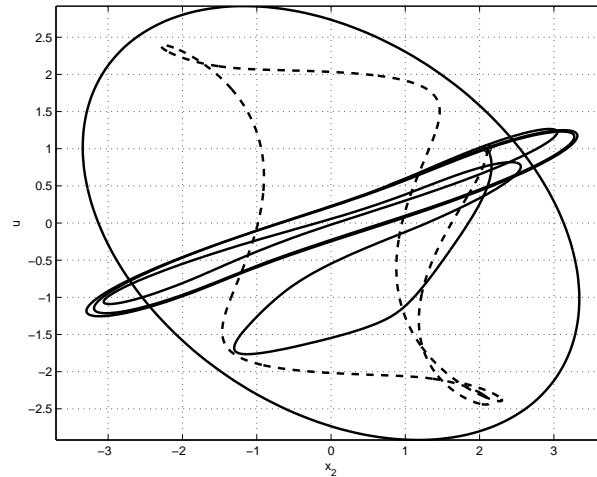


Рис. 5.2.1. Траектории выхода системы из Примера 5.2.1, замкнутой оптимальным и возмущенным регуляторами.

Теперь зададимся  $\gamma_K = 0,04$ . Применяя Теорему 5.2.2 для начальной точки  $x_0$  к оптимальному регулятору  $\hat{K}$ , получаем матрицу

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 34,7560 & -12,9721 \\ -12,9721 & 167,6033 \end{pmatrix}$$

“нехрупкого” ограничивающего эллипса.

С другой стороны, воспользовавшись Теоремой 5.2.1, при заданной начальной точке  $x_0$  получаем нехрупкий регулятор

$$\tilde{K} = (-0,3080 \quad -1,2165 \quad -0,2544 \quad -5,0950),$$

а соответствующий ограничивающий эллипс для выхода замкнутой системы обладает матрицей

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 16,5602 & -6,6791 \\ -6,6791 & 37,4095 \end{pmatrix}.$$

Как и ожидалось, для найденного нехрупкого регулятора  $\tilde{K}$  квадратичный радиус устойчивости будет больше, чем для оптимального регулятора  $\hat{K}$ . В самом деле, согласно Лемме 5.2.1 имеем:

$$\gamma_0 = 0,1444.$$

Итак, мы получили регулятор, обладающий существенно большей степенью нехрупкости как в смысле собственно радиуса нехрупкости, так и квадратичного радиуса устойчивости.

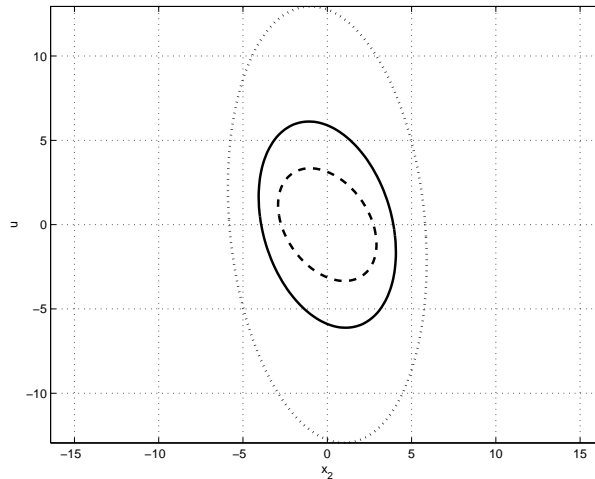


Рис. 5.2.2. Ограничивающие эллипсы из Примера 5.2.1.

На Рис. 5.2.2 показаны три ограничивающих эллипса. Пунктирной линией показан эллипс, соответствующий оптимальному регулятору  $\hat{K}$ ; он построен без учета нехрупкости и, как было показано, является чувствительным к изменению его параметров. Самый большой эллипс, изображенный точечной линией, соответствует тому же оптимальному регулятору  $\hat{K}$ , однако он получен с помощью Теоремы 5.2.2; дополнительное требование нехрупкости привело к заметному увеличению его размеров. Наконец, сплошной линией показан ограничивающий эллипс, построенный с учетом требования нехрупкости в соответствии с Теоремой 5.2.1; он заметно меньше “модифицированного” ограничивающего эллипса для регулятора  $\hat{K}$ . ▼

При синтезе нехрупкого регулятора также естественно вводить ограничения на величину управления. Как и раньше, потребуем, чтобы вдоль траектории замкнутой системы выполнялось

$$|u(t)| \leq \mu \quad \forall t \geq 0. \quad (5.2.10)$$

Следующая лемма, по существу являющаяся робастной модификацией Леммы 2.4.1, сохраняет силу и в дискретном случае.

**Лемма 5.2.2.** Пусть  $K$  — нехрупкий регулятор, стабилизирующий линейную систему по состоянию с радиусом нехрупкости  $\gamma_K$ , а  $P$  — матрица соответствующего инвариантного эллипсоида.

Тогда справедливость линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top & P \\ * & (\mu^2 - \gamma_K^2 \varepsilon)I & 0 \\ * & * & \varepsilon I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где  $\varepsilon$  — скалярный параметр, а  $Y = KP$ , гарантирует выполнение ограничения (5.2.10) на траекториях замкнутой системы внутри этого эллипсоида.

**Доказательство.** Поскольку

$$u = (K + \Delta_K)x,$$

ограничение (5.2.10) представимо в эквивалентном виде

$$x^\top (K + \Delta_K)^\top (K + \Delta_K)x \leq \mu^2.$$

Рассмотрим инвариантный эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

и потребуем выполнения условия

$$x^\top (K + \Delta_K)^\top (K + \Delta_K)x \leq \mu^2 \quad \text{при} \quad x^\top P^{-1}x \leq 1$$

для всех допустимых  $\|\Delta_K\| \leq \gamma_K$ .

В соответствии с Замечанием 2.2.7 для этого необходимо и достаточно выполнения

$$\frac{1}{\mu^2} (K + \Delta_K)^\top (K + \Delta_K) \preceq P^{-1} \quad \text{при всех } \Delta_K : \|\Delta_K\| \leq \gamma_K.$$

Домножив последнее неравенство слева и справа на матрицу  $P$ , с учетом  $Y = KP$  имеем:

$$(Y + \Delta_K P)^\top (Y + \Delta_K P) \preceq \mu^2 P,$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top + P\Delta_K^\top \\ Y + \Delta_K P & \mu^2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

откуда

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \Delta_K (P \ 0) + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K^\top (0 \ I) \succcurlyeq 0.$$

В силу Следствий 2.2.6 и 2.2.5, полученное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда существует число  $\varepsilon$  такое, что

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top & P \\ Y & (\mu^2 - \gamma_K^2 \varepsilon) I & 0 \\ P & 0 & \varepsilon I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \quad \blacksquare$$

Теперь, имея в своем распоряжении результаты о свойствах нехрупкого регулятора, вернемся к задаче о подавлении возмущений ограниченным управлением. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

в выводе которой отсутствует компонента  $B_2 u$ , и наложим ограничение (5.2.10) на управление.

С учетом Леммы 5.2.2, из Теоремы 5.2.1 вытекает следствие.

**Следствие 5.2.1.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\operatorname{tr} CPC^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^\top & D & P \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top & P \\ * & (\mu^2 - \gamma_K^2 \varepsilon_2) I & 0 \\ * & * & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (5.2.11), обладая радиусом нехрупкости  $\gamma_K$  при соблюдении ограничения (5.2.10), а матрица

$$C\hat{P}C^T$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.1.2).

Разумеется, в случае ограниченного управления нехрупкий регулятор может быть построен уже не при любом значении величины  $\gamma_K$ . Если она окажется слишком велика, система неравенств (5.2.3), (5.2.4) станет неразрешимой и  $\gamma_K$  следует уменьшить; ср. с Замечанием 5.2.1.

**Пример 5.2.2.** Рассмотрим систему из Примера 5.2.1, взяв вместо прежнего выхода

$$z = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}$$

скалярный выход

$$z = x_2$$

и наложив ограничение

$$|u| \leq 5.$$

Отметим, что минимально допустимое управление в данной задаче, согласно Лемме 4.2.3, равно  $\mu_{\min} = 2,4632$ .

При  $\gamma_K = 0$  по Следствию 5.2.1 имеем:

$$\hat{K} = (-0,3203 \quad -3,5534 \quad -0,2253 \quad -6,8686),$$

а выход системы находится в полосе с полушириной

$$\sqrt{C\hat{P}C^T} = 1,9348.$$

При этом степень устойчивости замкнутой системы равна

$$-\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A + B_1\hat{K}) = 0,4914.$$

Вновь, достаточно добавить к найденному регулятору возмущение

$$\Delta = (0,0555 \quad 0,0030 \quad 0,1124 \quad -0,0049)$$

с нормой, составляющей около 1,6% от нормы  $\hat{K}$ , как замкнутая таким регулятором система потеряет устойчивость:

$$-\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A + B_1(\hat{K} + \Delta)) = -0,0022.$$

На Рис. 5.2.3 изображена найденная полоса, содержащая выход системы, замкнутой оптимальным регулятором  $\hat{K}$ . На этом же рисунке показаны две траектории выхода системы при одном и том же начальном состоянии  $x_0$  и допустимом внешнем возмущении  $w(t)$ : замкнутой регулятором  $\hat{K}$  (сплошной линией) и стабилизирующим регулятором  $\hat{K} + 0,975\Delta$  (пунктиром).

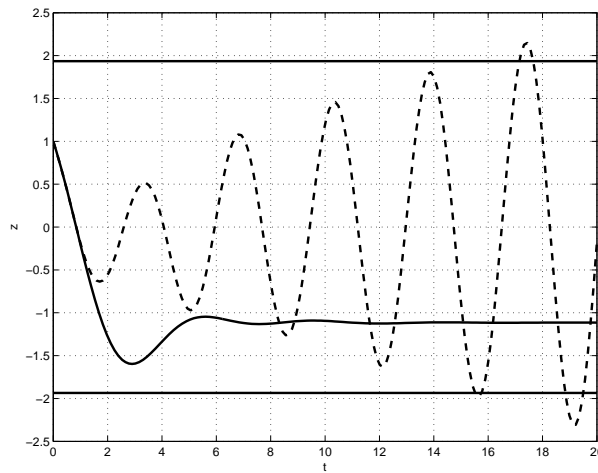


Рис. 5.2.3. Траектория скалярного выхода системы из Примера 5.2.2.

Теперь придадим регулятору степень нехрупкости  $\gamma_K = 0,03$ . Согласно Следствию 5.2.1 имеем:

$$\tilde{K} = (-0,2504 \quad -0,8545 \quad -0,2387 \quad -4,1363),$$

а выход замкнутой системы лежит в полосе с полушириной

$$\sqrt{C\tilde{P}C^T} = 4,4673. \quad \blacktriangledown$$

### 5.2.2. Дискретный случай

Приведем дискретный аналог предыдущих рассуждений. Рассмотрим линейную дискретную систему управления

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1u_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k + B_2u_k, \end{aligned} \quad (5.2.12)$$



где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (5.1.16). Пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Нехрупкий регулятор  $K$  будем искать в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k \quad (5.2.13)$$

так, чтобы возмущенный регулятор  $K + \Delta_K$  стабилизировал замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида) подавлял воздействие внешних возмущений при всех  $\Delta_K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ :  $\|\Delta_K\| \leq \gamma_K$ .

Следующее утверждение представляет собой дискретный аналог Теоремы 5.2.1.

**Теорема 5.2.3.** Пусть  $\hat{R}$ ,  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } R \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top + Y^\top B_1^\top & 0 & P \\ * & -P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^\top & D & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (5.2.14)$$

$$\begin{pmatrix} R - \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^\top & CP + B_2 Y & 0 \\ * & P & P \\ * & * & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (5.2.15)$$

$$R \succ 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (5.2.12), обладая радиусом нехрупкости  $\gamma_K$ , а матрица  $\hat{R}$  определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях (5.1.16).

**Доказательство.** Система (5.2.12) с учетом (5.2.13) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + B_1K + B_1\Delta_K)x_k + Dw_k, \\ z_k &= (C + B_2K + B_2\Delta_K)x_k. \end{aligned}$$

Воспользовавшись техникой, изложенной в разделе 4.2.2, приходим к задаче минимизации

$$\max_{\|\Delta_K\| \leq \gamma_K} \operatorname{tr}[(C + B_2K + B_2\Delta_K)P(C + B_2K + B_2\Delta_K)^\top] \longrightarrow \min \quad (5.2.16)$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\Delta_K)P & P(A + B_1K + B_1\Delta_K)^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1 - \alpha(\Delta_K))I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (5.2.17)$$

для всех допустимых  $\Delta_K$ .

Согласно Лемме 2.1.2, задача (5.2.16), (5.2.17) эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr} R \longrightarrow \min$$

при ограничении (5.2.17), а также

$$\begin{aligned} (C + B_2K + B_2\Delta_K)P(C + B_2K + B_2\Delta_K)^\top &\preceq R \\ \text{при всех } \Delta_K: \|\Delta_K\| &\leq \gamma_K. \end{aligned}$$

Пусть существует число  $\alpha > 0$  такое, что неравенство (5.2.17) выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta_K$ . Тогда неравенство (5.2.17) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1K)^\top & 0 \\ (A + B_1K)P & -P & D \\ 0 & D^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K^\top \begin{pmatrix} 0 & B_1^\top & 0 \end{pmatrix} \preceq 0, \end{aligned}$$

которое, по Следствию 2.2.6, выполняется, если существует число  $\varepsilon_1$  такое, что

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1K)^\top & 0 & P \\ * & -P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^\top & D & 0 \\ * & * & -(1 - \alpha)I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

После замены  $Y = KP$ , полученное неравенство принимает линейный вид (5.2.14).

Далее, следуя доказательству Теоремы 5.2.1, приходим к задаче минимизации  $\text{tr } R$  при ограничениях (5.2.14) и (5.2.15). ■

Заметим, что при  $\gamma_K = 0$  Теоремы 5.2.1 и 5.2.3 переходят в Теоремы 4.2.1 и 4.2.5 соответственно. Иными словами, в этом случае получаем регулятор, оптимально подавляющий внешние возмущения.

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 5.2.2.

**Теорема 5.2.4.** Пусть  $\hat{R}$  — решение задачи

$$\text{tr } R \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1 K)^\top & 0 & P \\ * & -P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^\top & D & 0 \\ * & * & -(1 - \alpha)I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0, \\ \begin{pmatrix} R - \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_2 B_2^\top & (C + B_2 K)Y & 0 \\ * & P & P \\ * & * & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succeq 0, \\ R \succ 0, \quad P \succ 0,$$

по матричным переменным  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , скалярным переменным  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярному параметру  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда матрица  $\hat{R}$  определяет оптимальный ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы (5.2.12) с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях (5.1.16), соответствующий заданному стабилизирующему регулятору  $K$  и радиусу нехрупкости  $\gamma_K$ .

В завершение раздела рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

с начальным условием  $x_0$ , в выходе которой отсутствует компонента  $B_2 u_k$ . Несложно убедиться, что в случае явного задания ограничения на управление вида

$$|u_k| \leq \mu \quad \forall k = 0, 1, \dots, \tag{5.2.19}$$

дискретный аналог Следствия 5.2.1 имеет следующий вид.

**Следствие 5.2.2.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\operatorname{tr} C P C^T \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P A^T + Y^T B_1^T & 0 & P \\ * & -P + \gamma_K^2 \varepsilon_1 B_1 B_1^T & D & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^T & P \\ * & (\mu^2 - \gamma_K^2 \varepsilon_2)I & 0 \\ * & * & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (5.2.18), обладая радиусом нехрупкости  $\gamma_K$  при соблюдении ограничения (5.2.19), а матрица

$$C \hat{P} C^T$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.1.16).

### 5.2.3. Робастная постановка

Рассмотрим робастный вариант задачи для линейной непрерывной системы управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + F_A \Delta_A H_A)x + B_1 u + D w, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C x + B_2 u, \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (5.1.2).

Матричная неопределенность  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$  удовлетворяет соотношению

$$\|\Delta_A\| \leq \gamma_A, \quad (5.2.21)$$

а  $F_A \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$ ,  $H_A \in \mathbb{R}^{q_2 \times n}$  — заданные постоянные матрицы; пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Регулятор  $K$  будем искать в форме статической линейной обратной связи по состоянию (5.2.2) таким образом, чтобы возмущенный регулятор  $K + \Delta_K$  при всех

$$\Delta_K \in \mathbb{R}^{p \times n}: \quad \|\Delta_K\| \leq \gamma_K$$

и всех допустимых  $\Delta_A$  робастно стабилизировал замкнутую систему и, в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида, подавлял воздействие внешних возмущений.

Точнее, хотим найти такое  $K$ , что при любых возмущениях параметров регулятора  $\|\Delta_K\| \leq \gamma_K$ , при любых матричных неопределенностях  $\|\Delta_A\| \leq \gamma_A$  и любых допустимых внешних возмущениях  $w$  гарантировать малость выхода  $z$  замкнутой системы.

Следующая теорема является робастным аналогом Теоремы 5.2.1.

**Теорема 5.2.5.** Пусть  $\hat{R}$ ,  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } R \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & PH_A^\top & P \\ * & -\alpha I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (5.2.22)$$

$$\begin{pmatrix} R - \gamma_K^2 \varepsilon_3 B_2 B_2^\top & CP + B_2 Y & 0 \\ * & P & P \\ * & * & \varepsilon_3 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (5.2.23)$$

$$R \succ 0, \quad P \succ 0, \quad (5.2.24)$$

где

$$\Omega = AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \gamma_A^2 \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_1 B_1^\top,$$

с матричными переменными  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярными переменными  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и скалярным параметром  $\alpha > 0$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (5.2.20), обладая радиусом нехрупкости  $\gamma_K$ , а матрица  $\hat{R}$  определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.1.2).

**Доказательство.** Система (5.2.20) с учетом (5.2.2) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + B_1K + F_A\Delta_A H_A + B_1\Delta_K)x + Dw, \\ z &= (C + B_2K + B_2\Delta_K)x.\end{aligned}$$

Воспользовавшись техникой, изложенной в разделе 5.1, приходим к задаче минимизации

$$\max_{\|\Delta_K\| \leq \gamma_K} \operatorname{tr}[(C + B_2K + B_2\Delta_K)P(C + B_2K + B_2\Delta_K)^\top] \longrightarrow \min \quad (5.2.25)$$

при ограничениях  $P \succ 0$  и

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & D \\ D^\top & -\alpha(\Delta_A, \Delta_K)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \quad (5.2.26)$$

для всех допустимых  $\Delta_A$  и  $\Delta_K$ , где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= (A + B_1K + F_A\Delta_A H_A + B_1\Delta_K)P + \\ &+ P(A + B_1K + F_A\Delta_A H_A + B_1\Delta_K)^\top + \alpha(\Delta_A, \Delta_K)P.\end{aligned}$$

Согласно Лемме 2.1.2, задача (5.2.25), (5.2.26) эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr} R \longrightarrow \min$$

при ограничениях (5.2.26), (5.2.24), а также

$$(C + B_2K + B_2\Delta_K)P(C + B_2K + B_2\Delta_K)^\top \preccurlyeq R$$

при всех  $\Delta_K: \|\Delta_K\| \leq \gamma_K$ .

Пусть существует число  $\alpha > 0$  такое, что неравенство (5.2.26) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_K$ . Тогда неравенство (5.2.26) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{pmatrix} P(A + B_1K)^\top + (A + B_1K)P + \alpha P & D \\ D^\top & -\alpha I \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A (H_A P \quad 0) + \begin{pmatrix} P H_A^\top \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^\top (F_A^\top \quad 0) + \\
& + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K (P \quad 0) + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K^\top (B_1^\top \quad 0) \preccurlyeq 0,
\end{aligned}$$

которое по Теореме 2.2.5 выполняется, если существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  такие, что

$$\begin{pmatrix} \Phi_2 & D & P H_A^\top & P \\ * & -\alpha I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5.2.27)$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_2 = (A + B_1 K)P + P(A + B_1 K)^\top + \alpha P + \\
+ \gamma_A^2 \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_1 B_1^\top.
\end{aligned}$$

После замены  $Y = KP$  матричное соотношение (5.2.27) принимает линейный вид (5.2.22).

Следуя ходу доказательства Теоремы 5.2.1, приходим к задаче минимизации  $\text{tr } R$  при ограничениях (5.2.22), (5.2.23) и (5.2.24). ■

В случае явного задания ограничений на управление вида (5.2.10), робастный аналог Следствия 5.2.1 для системы

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A + F_A \Delta_A H_A)x + B_1 u + Dw, \quad x(0) = x_0, \\
z &= Cx,
\end{aligned} \quad (5.2.28)$$

в выходе которой отсутствует компонента  $B_2 u$ , имеет следующий вид.

**Следствие 5.2.3.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } C P C^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \Omega & D & P H_A^\top & P \\ * & -\alpha I & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \\
& \begin{pmatrix} P & Y^\top & P \\ * & (\mu^2 - \gamma_K^2 \varepsilon_3) I & 0 \\ * & * & \varepsilon_3 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,
\end{aligned}$$

где

$$\Omega = AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \gamma_A^2 \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_1 B_1^\top,$$

с матричными переменными  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярными переменными  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и скалярным параметром  $\alpha > 0$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (5.2.28), обладая радиусом нехрупкости  $\gamma_K$  при соблюдении ограничения (5.2.10), а матрица

$$C \hat{P} C^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.1.2).

Приведем дискретный аналог предыдущих рассуждений. Рассмотрим линейную дискретную систему управления

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + F_A \Delta_A H_A) x_k + B_1 u_k + D w_k, \\ z_k &= C x_k + B_2 u_k, \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (5.1.16).

Матричная неопределенность  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$  удовлетворяет соотношению (5.2.21),  $F_A \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$  и  $H_A \in \mathbb{R}^{q_2 \times n}$  — заданные постоянные матрицы; пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Требуется найти регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию (5.2.13), обеспечивающий минимальный размер ограничивающего эллипсоида для выхода системы при всех допустимых неопределенностях  $\Delta_K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ :  $\|\Delta_K\| \leq \gamma_K$  в регуляторе, всех допустимых матричных неопределенностях  $\Delta_A \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$ :  $\|\Delta_A\| \leq \gamma_A$  и всех допустимых внешних возмущениях  $w_k$ .

Следующее утверждение представляет собой робастный аналог Теоремы 5.2.3 и дискретный аналог Теоремы 5.2.5.

**Теорема 5.2.6.** Пусть  $\hat{R}, \hat{P}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } R \longrightarrow \min$$



при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top + Y^\top B_1^\top & 0 & PH_A^\top & P \\ * & \Omega & D & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5.2.30)$$

$$\begin{pmatrix} R - \gamma_K^2 \varepsilon_3 B_2 B_2^\top & CP + B_2 Y & 0 \\ * & P & P \\ * & * & \varepsilon_3 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (5.2.31)$$

$$R \succ 0, \quad P \succ 0, \quad (5.2.32)$$

где

$$\Omega = -P + \gamma_A^2 \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_1 B_1^\top,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{l \times l}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (5.2.29), обладая радиусом нехрупкости  $\gamma_K$ , а матрица  $\hat{K}$  определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.1.16).

**Доказательство.** Система (5.2.29) с учетом (5.2.13) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + B_1 K + F_A \Delta_A H_A + B_1 \Delta_K) x_k + D w_k, \\ z_k &= (C + B_2 K + B_2 \Delta_K) x_k. \end{aligned}$$

Воспользовавшись техникой, изложенной в разделе 5.1, приходим к задаче минимизации

$$\max_{\|\Delta_K\| \leq \gamma_K} \operatorname{tr}[(C + B_2 K + B_2 \Delta_K) P (C + B_2 K + B_2 \Delta_K)^\top] \longrightarrow \min \quad (5.2.33)$$

при ограничениях  $P \succ 0$  и

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\Delta_A, \Delta_K) P & \Phi_1 & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1 - \alpha(\Delta_A, \Delta_K)) I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \quad (5.2.34)$$

для всех допустимых  $\Delta_A$  и  $\Delta_K$ , где

$$\Phi_1 = P(A + B_1K + F_A\Delta_A H_A + B_1\Delta_K)^\top.$$

Согласно Лемме 2.1.2, полученная задача (5.2.33), (5.2.34) эквивалентна задаче

$$\text{tr } R \longrightarrow \min$$

при ограничениях (5.2.34), (5.2.32), а также

$$(C + B_2K + B_2\Delta_K)P(C + B_2K + B_2\Delta_K)^\top \preceq R$$

при всех  $\Delta_K: \|\Delta_K\| \leq \gamma_K$ .

Пусть существует число  $\alpha > 0$  такое, что неравенство (5.2.34) выполняется при всех допустимых значениях матричных неопределенностей  $\Delta_A$  и  $\Delta_K$ . Тогда матричное неравенство (5.2.34) будет справедливо, если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1K)^\top & 0 \\ (A + B_1K)P & -P & D \\ 0 & D^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A \begin{pmatrix} H_A P & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P H_A^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_A^\top \begin{pmatrix} 0 & F_A^\top & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta_K^\top \begin{pmatrix} 0 & B_1^\top & 0 \end{pmatrix} \preceq 0, \end{aligned}$$

которое согласно Теореме 2.2.5, выполняется, если существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  такие, что

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P(A + B_1K)^\top & 0 & P H_A^\top & P \\ * & \Phi_2 & D & 0 & 0 \\ * & * & -(1 - \alpha)I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\Phi_2 = -P + \gamma_A^2 \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_1 B_1^\top.$$

После замены  $Y = KP$ , полученное неравенство принимает линейный вид (5.2.30).

Далее, как и при доказательстве Теоремы 5.2.1, приходим к задаче минимизации  $\text{tr } R$  при ограничениях (5.2.30), (5.2.31) и (5.2.32). ■

В случае непосредственного задания ограничений на управление вида (5.2.19), дискретный аналог Следствия 5.2.3 и робастный аналог Следствия 5.2.2 для системы

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + F_A \Delta_A H_A) x_k + B_1 u_k + D w_k, \\ z_k &= C x_k, \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

с начальным условием  $x_0$ , в выходе которой отсутствует компонента  $B_2 u$ , имеет следующий вид.

**Следствие 5.2.4.** Пусть  $\hat{P}, \hat{Y}$  — решение задачи

$$\text{tr } C P C^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & P A^\top + Y^\top B_1^\top & 0 & P H_A^\top & P \\ * & \Omega & D & 0 & 0 \\ * & * & -(1-\alpha)I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top & P \\ * & (\mu^2 - \gamma_K^2 \varepsilon_3) I & 0 \\ * & * & \varepsilon_3 I \end{pmatrix} \succeq 0, \quad P \succ 0,$$

где

$$\Omega = -P + \gamma_A^2 \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \gamma_K^2 \varepsilon_2 B_1 B_1^\top,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , скалярных переменных  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (5.2.35), обладая радиусом нехрупкости  $\gamma_K$  при соблюдении ограничения (5.2.19), а матрица

$$C \hat{P} C^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.1.16).

Утверждения, аналогичные Теоремам 5.2.5 и 5.2.6, можно получить и в более общем случае, когда матричные неопределенности той же структуры содержатся и в матрицах  $B_1$  и  $D$ . При  $\gamma_K = 0$  они переходят в Теоремы 5.1.1 и 5.1.3.

Предложенный подход может быть использован и для решения задачи построения нехрупкого регулятора для управления по выходу с использованием наблюдателя, которая решается подобным образом как в непрерывном, так и в дискретном случае.

Заметим, что в рамках Примеров 5.2.1 и 5.2.2 можно продемонстрировать и дискретный случай возмущенных колебаний рассматриваемой системы, аппроксимируя его движение моделью в дискретном времени.

### 5.3. Линейный динамический регулятор

#### 5.3.1. Непрерывный случай

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + F\Delta H)x + Bu + D_1w, & x(0) &= x_0, \\ y &= C_1x + D_2w, \\ z &= C_2x, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0; \quad (5.3.2)$$

пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C_1)$  наблюдаема.

Система (5.3.1) содержит структурированную неопределенность, сосредоточенную в матрице  $A$ , а именно — матричная неопределенность  $\Delta \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$  удовлетворяет соотношению

$$\|\Delta\| \leq 1,$$

а  $F \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q_2 \times n}$  — заданные постоянные матрицы.

Как и ранее, состояние  $x$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y$ . Задачей является нахождение минимального (в некотором смысле) эллипсоида, содержащего регулируемый выход  $z$ .

Следующая теорема представляет собой робастный аналог Теоремы 4.3.3.

**Теорема 5.3.1.** Пусть  $\hat{P}_{11}$ ,  $\hat{Q}_{11}$ ,  $\hat{\alpha}$  — решение задачи

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP_{11} + P_{11}A^\top + \alpha P_{11} - \mu_1 BB^\top + \varepsilon_1 FF^\top & D_1 & P_{11}H^\top \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.3.3)$$

$$\begin{pmatrix} \Omega & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^\top D_2 & Q_{11}F \\ * & -\alpha I - \mu_2 D_2^\top D_2 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.3.4)$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$P_{11} \succ 0, \quad Q_{11} \succ 0,$$

где

$$\Omega = A^\top Q_{11} + Q_{11}A + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 + \varepsilon_2 H^\top H,$$

а минимизация проводится по скалярным переменным  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , матричным переменным  $P_{11} = P_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $Q_{11} = Q_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $\alpha > 0$ .

Тогда динамический регулятор

$$K_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix},$$

робастно стабилизирующий систему (5.3.1), находится как любое решение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} \Omega_0 & \left( \hat{P} \begin{pmatrix} H^\top \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \left( (H \ 0) \hat{P} \ 0 \right) & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5.3.5)$$

где  $\varepsilon$  — скалярная переменная,

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} \tilde{A}\hat{P} + \hat{P}\tilde{A}^\top + \hat{\alpha}\hat{P} + \varepsilon \begin{pmatrix} FF^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\top & -\hat{\alpha}I \end{pmatrix} + \\ + MK_r N \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} N^\top K_r^\top M^\top,$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad R = \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11}^{-1},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_1 & 0 & D_2 \end{pmatrix},$$

а матрица

$$C_2 \hat{P}_{11} C_2^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.3.2).

**Доказательство.** Как следует из Теоремы 4.3.3, в рассматриваемом случае приходим к задаче

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$(A + F\Delta H)P_{11} + P_{11}(A + F\Delta H)^\top + \\ + \alpha(\Delta)P_{11} - \mu_1 BB^\top + \frac{1}{\alpha(\Delta)}D_1 D_1^\top \prec 0, \\ \begin{pmatrix} \Phi_1 & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^\top D_2 \\ D_1^\top Q_{11} - \mu_2 D_2^\top C_1 & -\alpha(\Delta)I - \mu_2 D_2^\top D_2 \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.3.6)$$

где

$$\Phi_1 = (A + F\Delta H)^\top Q_{11} + Q_{11}(A + F\Delta H) + \alpha(\Delta)Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1,$$

и

$$\begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (5.3.7)$$

для всех допустимых  $\Delta$ .

Первое из них по лемме Шура эквивалентно условию

$$\begin{pmatrix} \Phi_2 & D_1 \\ D_1^\top & -\alpha(\Delta) \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.3.8)$$

где

$$\Phi_2 = (A + F\Delta H)P_{11} + P_{11}(A + F\Delta H)^\top + \alpha(\Delta)P_{11} - \mu_1 BB^\top.$$

Пусть существует число  $\alpha$  такое, что неравенства (5.3.6), (5.3.7) и (5.3.8) выполняются при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta$ . Тогда неравенства (5.3.8) и (5.3.6) будут справедливы, если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} AP_{11} + P_{11}A^\top + \alpha P_{11} - \mu_1 BB^\top & D_1 \\ D_1^\top & -\alpha I \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP_{11} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11}H^\top \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} F^\top & 0 \end{pmatrix} \prec 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A^\top Q_{11} + Q_{11}A + \alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 & Q_{11}D_1 - \mu_2 C_1^\top D_2 \\ D_1^\top Q_{11} - \mu_2 D_2^\top C_1 & -\alpha I - \mu_2 D_2^\top D_2 \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} Q_{11}F \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} H & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H^\top \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} F^\top Q_{11} & 0 \end{pmatrix} \prec 0. \end{aligned}$$

Согласно Лемме 2.2.8, полученные неравенства выполняются тогда и только тогда, когда существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  такие, что выполнены линейные матричные неравенства (5.3.3) и (5.3.4).

Далее, параметры динамического регулятора должны удовлетворять матричному неравенству

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{A}(\Delta)\hat{P} + \hat{P}\tilde{A}^\top(\Delta) + \hat{\alpha}\hat{P} & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\top & -\hat{\alpha}I \end{pmatrix} + \\ & + MK_r N \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} N^\top K_r^\top M^\top \preceq 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\Delta) &= \begin{pmatrix} A + F\Delta H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} H & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{A}\hat{P} + \hat{P}\tilde{A}^\top + \hat{\alpha}\hat{P} & \tilde{D} \\ \tilde{D}^\top & -\hat{\alpha}I \end{pmatrix} + \\ & \quad + MK_r N \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{P} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} N^\top K_r^\top M^\top + \\ & + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} H & 0 & \hat{P} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{P} & (H^\top) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} (F^\top & 0) & 0 \end{pmatrix} \preceq 0. \end{aligned}$$

Согласно Лемме 2.2.7, полученное матричное неравенство справедливо при всех допустимых значениях неопределенности  $\Delta$  тогда и только тогда, когда существуют число  $\varepsilon$  такое, что выполнено соотношение (5.3.5). ■

Сходным образом решается проблема построения робастного динамического регулятора в случае, когда структурированная неопределенность содержится в матрицах  $B$  и  $D$  системы (5.3.1).

**Пример 5.3.1.** Продемонстрируем предложенный подход на примере задачи управления двухмассовой системой, см. Примеры 4.2.3 и 4.3.3. В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а в качестве минимизируемого — вектор

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть неопределенность системы состоит в неопределенности коэффициента упругости пружины. При  $m_1 = m_2 = 1$  и

$$k = 1 + \delta\Delta, \quad \delta = \text{const}, \quad |\Delta| \leq 1,$$

приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + F\Delta H)x + Bu + Dw, \\ y &= C_1 x, \\ z &= C_2 x, \end{aligned}$$



со скалярной неопределенностью  $\Delta$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta \\ \delta \end{pmatrix}, \quad H = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0),$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При  $\delta = 0,2$  с помощью Теоремы 5.3.1 была найдена матрица

$$\begin{pmatrix} 7,1529 & 1,1786 \\ 1,1786 & 4,9320 \end{pmatrix}$$

ограничивающего эллипса для регулируемого выхода системы и параметры регулятора

$$A_r = \begin{pmatrix} -8,1413 & -3,7045 & 0,6013 & 0,9201 \\ 0,9793 & 0,4460 & -0,1190 & -0,1813 \\ -3,5627 & 8,4959 & 0,7395 & 1,1362 \\ -0,1216 & -1,2975 & -3,8279 & -5,8659 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 9,3882 & 2,8545 \\ -1,2264 & -0,2775 \\ 5,1001 & -9,5437 \\ -7,8275 & 6,7165 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$C_r = (6,6953 \quad 3,1367 \quad -0,4833 \quad -0,7408) \cdot 10^5,$$

$$D_r = (-7,6992 \quad -2,4524) \cdot 10^5;$$

при этом  $\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_c) \approx -0,3403$ .

На Рис. 5.3.1 сплошной линией показан найденный ограничивающий эллипс; точечной линией — ограничивающий эллипс при неробастной постановке задачи; пунктиром показан ограничивающий эллипс для неробастной постановки задачи, найденный при построении линейной обратной связи по выходу с использованием наблюдателя Люенбергера (см. раздел 4.3.1). ▼

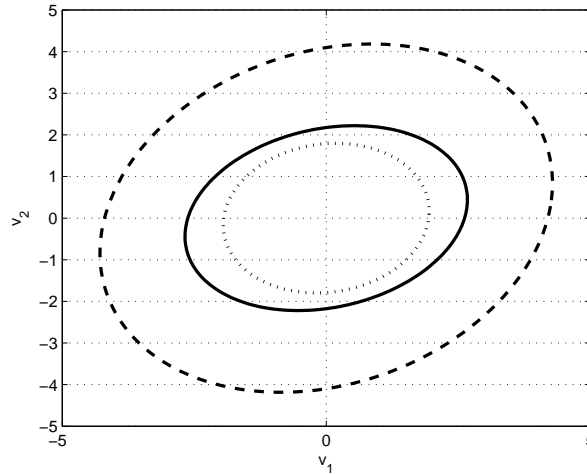


Рис. 5.3.1. Ограничивающие эллипсы для различных регуляторов из Примера 5.3.1.

### 5.3.2. Дискретный случай

Теперь рассмотрим линейную дискретную систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + F\Delta H)x_k + Bu_k + D_1w_k, \\ y_k &= C_1x_k + D_2w_k, \\ z_k &= C_2x_k, \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w_k| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (5.3.10)$$

пара  $(A, B)$  управляема, пара  $(A, C_1)$  наблюдаема.

Как и в непрерывном случае, система (5.3.9) содержит структурированную неопределенность, сосредоточенную в матрице  $A$ , а именно — матричная неопределенность  $\Delta \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$  удовлетворяет соотношению

$$\|\Delta\| \leq 1,$$

а  $F \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{q_2 \times n}$  — заданные постоянные матрицы.

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 5.3.1 и робастным аналогом Теоремы 4.3.5.

**Теорема 5.3.2.** Пусть  $\hat{P}_{11}$ ,  $\hat{Q}_{11}$ ,  $\hat{\alpha}$  — решение задачи

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P_{11} & P_{11} A^\top & 0 & P_{11} H^\top \\ * & -P_{11} - \mu_1 B B^\top + \varepsilon_1 F F^\top & D_1 & 0 \\ * & * & -(1 - \alpha)I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.3.11)$$

$$\begin{pmatrix} -Q_{11} & Q_{11} D_1 & Q_{11} A & Q_{11} F \\ * & \Omega & -\mu_2 D_2^\top C_1 & 0 \\ * & * & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 + \varepsilon_2 H^\top H & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.3.12)$$

$$\begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P_{11} \succ 0, \quad Q_{11} \succ 0,$$

где

$$\Omega = -(1 - \alpha)I - \mu_2 D_2^\top D_2,$$

а оптимизация проводится по скалярным переменным  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , матричным переменным  $P_{11} = P_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_{11} = Q_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $0 < \alpha < 1$ .

Тогда динамический регулятор

$$K_r = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix},$$

робастно стабилизирующий систему (5.3.9), находится как любое решение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} \Omega_0 & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H^\top \\ 0 \end{pmatrix} \\ (0 \ 0 \ (H \ 0)) & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon I \end{pmatrix} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (5.3.13)$$

где  $\varepsilon$  — скалярная переменная,

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} -\hat{P} + \varepsilon \begin{pmatrix} FF^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{D} & \tilde{A} \\ \tilde{D}^\top & -(1 - \hat{\alpha}I) & 0 \\ \tilde{A}^\top & 0 & -\hat{\alpha}\hat{Q} \end{pmatrix} + MK_rN + N^\top K_r^\top M^\top,$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & R \\ R & R \end{pmatrix}, \quad R = \hat{P}_{11} - \hat{Q}_{11}^{-1}, \quad \hat{Q} = \hat{P}^{-1},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & D_2 & C_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица

$$C_2 \hat{P}_{11} C_2^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  замкнутой системы с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (5.3.10).

**Доказательство.** Как следует из Теоремы 4.3.5, в рассматриваемом случае приходим к задаче

$$\text{tr } C_2 P_{11} C_2^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha(\Delta)} (A + F\Delta H) P_{11} (A + F\Delta H)^\top - \\ & - P_{11} - \mu_1 B B^\top + \frac{1}{1 - \alpha(\Delta)} D_1 D_1^\top \prec 0, \\ & \begin{pmatrix} -Q_{11} & Q_{11} D_1 & Q_{11} (A + F\Delta H) \\ * & -(1 - \alpha(\Delta)) I - \mu_2 D_2^\top D_2 & -\mu_2 D_2^\top C_1 \\ * & * & -\alpha(\Delta) Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} \prec 0 \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

и

$$\begin{pmatrix} P_{11} & I \\ I & Q_{11} \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (5.3.15)$$

при всех допустимых  $\Delta$ .

Первое из них по лемме Шура (см. Замечание 3.1.5) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\Delta)P_{11} & P_{11}(A + F\Delta H)^\top & 0 \\ * & -P_{11} - \mu_1 BB^\top & D_1 \\ * & * & -(1 - \alpha(\Delta))I \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.3.16)$$

Пусть существует число  $\alpha$  такое, что неравенства (5.3.14), (5.3.15) и (5.3.16) выполняются при всех допустимых значениях матричной неопределенности  $\Delta$ . Тогда неравенства (5.3.16) и (5.3.14) будут справедливы, если выполнены неравенства

$$\begin{pmatrix} -\alpha P_{11} & P_{11}A^\top & 0 \\ AP_{11} & -P_{11} - \mu_1 BB^\top & D_1 \\ 0 & D_1^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11}H^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} 0 & F^\top & 0 \end{pmatrix} \prec 0$$

и

$$\begin{pmatrix} -Q_{11} & Q_{11}D_1 & Q_{11}A \\ D_1^\top Q_{11} & -(1 - \alpha)I - \mu_2 D_2^\top D_2 & -\mu_2 D_2^\top C_1 \\ A^\top Q_{11} & -\mu_2 C_1^\top D_2 & -\alpha Q_{11} - \mu_2 C_1^\top C_1 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} Q_{11}F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H^\top \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} F^\top Q_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix} \prec 0.$$

Согласно Лемме 2.2.8, полученные неравенства выполняются тогда и только тогда, когда существуют числа  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  такие, что справедливы линейные матричные неравенства (5.3.11) и (5.3.12).

Далее, параметры динамического регулятора должны удовлетворять матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -\hat{P} & \tilde{D} & \tilde{A}(\Delta) \\ \tilde{D}^\top & -(1 - \hat{\alpha})I & 0 \\ \tilde{A}^\top(\Delta) & 0 & -\hat{\alpha}\hat{Q} \end{pmatrix} + MK_r N + N^\top K_r^\top M^\top \preceq 0,$$

где

$$\tilde{A}(\Delta) = \begin{pmatrix} A + F\Delta H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} H & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -\hat{P} & \tilde{D} & \tilde{A} \\ \tilde{D}^\top & -(1 - \hat{\alpha})I & 0 \\ \tilde{A}^\top & 0 & -\hat{\alpha}\hat{Q} \end{pmatrix} + M\Delta_r N + N^\top \Delta_r^\top M^\top + \\ & + \begin{pmatrix} (F) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta (0 \ 0 \ (H \ 0)) + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (H^\top) \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top ((F^\top \ 0) \ 0 \ 0) \preceq 0. \end{aligned}$$

Согласно Лемме 2.2.7, полученное матричное неравенство справедливо при всех допустимых значениях неопределенности  $\Delta$  тогда и только тогда, когда существуют число  $\varepsilon$  такое, что выполнено соотношение (5.3.13). ■

## Глава 6

### Разные задачи

В этой главе мы коротко остановимся на возможностях техники инвариантных эллипсоидов при решении некоторых задач иного типа, чем те, что рассматривались выше. Сюда прежде всего относится анализ поведения систем с нелинейностью специального вида и линейных систем с мультипликативными внешними возмущениями, а также синтез стабилизирующего управления в таких системах. Далее с тех же позиций инвариантных эллипсоидов будет предложено решение одной из типичных инженерных проблем, связанных с оценкой *времени установления* линейной системы. Наконец в последнем разделе главы будет рассмотрен особый класс линейных систем — так называемые *положительные системы*, модели которых естественным образом возникают в разнообразных приложениях. Для таких систем будут построены функции Ляпунова специального вида, описаны инвариантные множества (отличные от эллипсоидальных) при наличии внешних возмущений, приведены примеры синтеза.

#### 6.1. Нелинейные системы с ограниченными возмущениями

До сих пор рассмотрение ограничивалось линейными динамическими системами. Однако на практике часто приходится сталкиваться с системами управления, содержащими разного рода нелинейности. В случае систем с нелинейностью типа секторной, к ним также могут быть применены предложенные подходы к подавлению произвольных ограниченных внешних возмущений. Ограничимся лишь двумя зада-

чами — анализа и синтеза управления в виде статической линейной обратной связи по состоянию. Однако и иные задачи, поставленные выше для линейных систем, могут быть решены и в нелинейном случае.

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma), \\ \sigma &= c^\top x,\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

где  $A$  — постоянная матрица,  $b, c$  — постоянные вектор-столбцы, а  $\varphi(\sigma)$  — вектор-функция скалярной переменной  $\sigma$ . Проверка устойчивости системы (6.1.1) в случае *секторных* ограничений

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leq \bar{k}, \quad \sigma \neq 0,$$

накладываемых на нелинейность  $\varphi$ , приводит нас к проблеме абсолютной устойчивости.

В этом разделе, решая задачу подавления произвольных ограниченных внешних возмущений, будем рассматривать системы с нелинейностью из более широкого класса.

### 6.1.1. Непрерывный случай

Рассмотрим нелинейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + \Phi\varphi(x) + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx,\end{aligned}\tag{6.1.2}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0;\tag{6.1.3}$$

векторная функция

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

удовлетворяет ограничению

$$|\varphi(x)|^2 \leq \mu_0 + \mu_1|x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\tag{6.1.4}$$



с заданными параметрами  $\mu_0, \mu_1 \geq 0$ . Матрица  $A$  гурвицева, пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Отметим, что при  $\mu_0 = 0$  возникает так называемая *секторная нелинейность*.

В следующей теореме устанавливается достаточное условие инвариантности эллипсоида для системы (6.1.2).

**Теорема 6.1.1.** *Эллипсоид*

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}$$

является инвариантным для системы

$$\dot{x} = Ax + \Phi\varphi(x) + Dw \quad (6.1.5)$$

с внешним возмущением (6.1.3), если его матрица  $P \succ 0$  удовлетворяет линейному матричному неравенству:

при  $\mu_0, \mu_1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \beta\Phi\Phi^\top & D & P & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & I \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & -\frac{\beta}{\mu_0}I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0;$$

при  $\mu_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \beta\Phi\Phi^\top & D & P \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_1}I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0;$$

при  $\mu_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \beta\Phi\Phi^\top & D & 0 \\ * & -\alpha I & I \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_0}I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

при некоторых  $\alpha, \beta \geq 0$ .

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (6.1.5). Для того, чтобы ее траектории  $x(t)$  не покидали эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \leq 1\},$$

достаточно потребовать, чтобы при  $V(x) \geq 1$ , при всех допустимых внешних возмущениях  $|w| \leq 1$  и при  $|\varphi|^2 \leq \mu_0 + \mu_1|x|^2$  выполнялось  $\dot{V}(x, w, \varphi) \leq 0$ .

Поскольку производная функции  $V(x)$  в силу системы (6.1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, w, \varphi) &= \dot{x}^\top Qx + x^\top Q\dot{x} = \\ &= x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx + 2\varphi^\top \Phi^\top Qx, \end{aligned}$$

введя в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+k}$$

и матрицы

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} A^\top Q + QA & QD & Q\Phi \\ D^\top Q & 0 & 0 \\ \Phi^\top Q & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_1 &= \begin{pmatrix} -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -\mu_1 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

требуемое условие запишем в виде

$$f_0(s) \leq 0 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq -1, \quad f_2(s) \leq 1, \quad f_3(s) \leq \mu_0,$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Воспользовавшись  $S$ -процедурой в ее достаточной части, приходим к условию

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 - \gamma M_3 \preceq 0 \quad (6.1.6)$$

при неотрицательных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  таких, что

$$\alpha \geq \beta + \mu_0 \gamma \geq 0.$$

Неравенство (6.1.6) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + \alpha Q + \gamma \mu_1 I & QD & Q\Phi \\ D^\top Q & -\beta I & 0 \\ \Phi^\top Q & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

или по лемме Шура

$$A^\top Q + QA + \alpha Q + \gamma \mu_1 I + \frac{1}{\beta} QDD^\top Q + \frac{1}{\gamma} Q\Phi\Phi^\top Q \preceq 0.$$

Умножив полученное неравенство слева и справа на матрицу  $P = Q^{-1}$ , приходим к матричному неравенству

$$AP + PA^\top + \alpha P + \gamma \mu_1 P^2 + \frac{1}{\beta} DD^\top + \frac{1}{\gamma} \Phi\Phi^\top \preceq 0.$$

Полагая, аналогично линейному случаю,

$$\beta = \beta_{\max} = \alpha - \mu_0 \gamma,$$

имеем

$$AP + PA^\top + \alpha P + \gamma \mu_1 P^2 + \frac{1}{\alpha - \mu_0 \gamma} DD^\top + \frac{1}{\gamma} \Phi\Phi^\top \preceq 0$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \gamma \mu_1 P^2 + \frac{1}{\gamma} \Phi\Phi^\top & D \\ D^\top & (-\alpha + \mu_0 \gamma)I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Положив

$$\beta \doteq \frac{1}{\gamma},$$

имеем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \frac{\mu_1}{\beta} P^2 + \beta \Phi\Phi^\top & D \\ D^\top & (-\alpha + \frac{\mu_0}{\beta})I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Еще дважды воспользовавшись леммой Шура, приходим к одному из линейных матричных неравенств из условия Теоремы 6.1.1 в зависимости от значений параметров  $\mu_0$  и  $\mu_1$ . ■

Нетрудно видеть, что в случае  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , что имеет место для линейных систем, приходим к результату, установленному в Теореме 3.1.1 (и справедливому также и в необходимой части).

Как вытекает из доказательства Теоремы 6.1.1, полученное условие обеспечивает убывание функции  $V(x) = x^\top P^{-1}x$  на траекториях системы (6.1.5) *вне эллипсоида*, задаваемого матрицей  $P$ . Иными словами, в этой области фазового пространства  $V(x)$  является квадратичной функцией Ляпунова для возмущенной системы (6.1.5).

**Следствие 6.1.1.** *Решение  $\hat{P}$  задачи*

$$\text{tr } CPC^T \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P + \beta \Phi \Phi^T & D & P & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & I \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_1} I & 0 \\ * & * & * & -\frac{\beta}{\mu_0} I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (6.1.7)$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярной переменной  $\beta$  и скалярного параметра  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C\hat{P}C^T$$

ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  системы (6.1.2) с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (6.1.3).

**Замечание 6.1.1.** В соответствии с Теоремой 6.1.1, в случае обращения одного из параметров  $\mu_0$  или  $\mu_1$  в нуль, ограничение (6.1.7) принимает вид

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P + \beta \Phi \Phi^T & D & P \\ * & -\alpha I & 0 \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_1} I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P + \beta \Phi \Phi^T & D & 0 \\ * & -\alpha I & I \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_0} I \end{pmatrix} \preceq 0$$

соответственно. ▼

Отметим, что вновь получена задача полуопределенного программирования и одномерной минимизации по параметру  $\alpha$ .

Теперь обратимся к задаче синтеза. Рассмотрим непрерывную систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Phi \varphi(x) + B_1 u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (6.1.3); векторная функция

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

удовлетворяет ограничению (6.1.4); пара  $(A, B_1)$  управляема, а пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Будем, как и ранее, искать регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию, стабилизирующий замкнутую систему и, в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$ , подавляющий воздействие внешних возмущений.

В следующей теореме поиск регулятора сводится к задаче SDP и одномерной минимизации. Ее доказательство использует те же идеи, что и доказательство Теоремы 4.2.1.

**Теорема 6.1.2.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & P & 0 \\ * & -\alpha I & 0 & I \\ * & * & -\frac{\beta}{\mu_1} I & 0 \\ * & * & * & -\frac{\beta}{\mu_0} I \end{pmatrix} \preceq 0, \\ \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad P \succ 0,$$

где

$$\Omega = AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \beta \Phi \Phi^\top,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярной переменной  $\beta$  и скалярного параметра  $\alpha$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

является стабилизирующим, а матрица ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  замкнутой системы (6.1.8) с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (6.1.3) дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

Заметим, что в случае обращения одного из параметров  $\mu_0, \mu_1$  в нуль, первое из ограничений в формулировке Теоремы 6.1.2 претерпит очевидные изменения, см. Замечание 6.1.1.

**Пример 6.1.1.** В качестве примера рассмотрим модель возмущенных колебаний математического маятника

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = u + w,$$

с управлением  $u$  и ограниченным внешним возмущением  $w$  (при произвольных углах отклонения от положения равновесия).

Полагая

$$x_1 = x, \quad \dot{x}_1 = x_2,$$

приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 \sin x_1 + u + w, \end{aligned}$$

которую будем рассматривать как систему (6.1.2) с нелинейностью

$$\varphi(x) = \sin x_1,$$

удовлетворяющей ограничениям (6.1.4) с

$$\mu_0 = 0 \quad \text{и} \quad \mu_1 = 1.$$

В качестве выхода системы, чтобы избежать больших значений управления, выберем вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix}.$$

Также будем учитывать неопределенность в начальном состоянии системы, задаваемую матрицей  $P_0$ .

При этом

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0^2 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При

$$\omega_0 = 3, \quad P_0 = 0,1I$$

с помощью Теоремы 6.1.2 была найдена матрица

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0,1121 & -0,0994 \\ -0,0994 & 0,9192 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипса и соответствующий регулятор

$$\hat{K} = (-12,7112 \quad -12,5433).$$

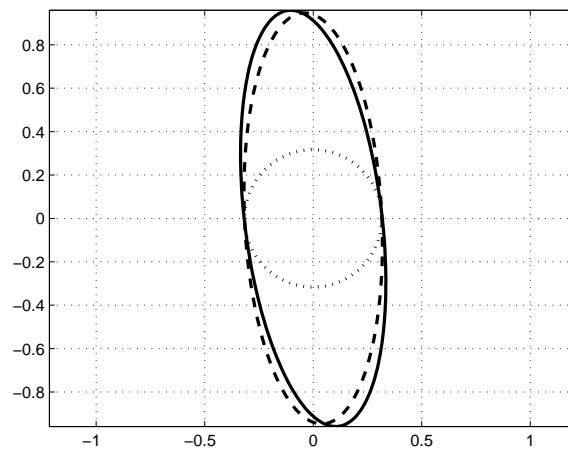


Рис. 6.1.1. Инвариантные эллипсоиды из Примера 6.1.1.

На Рис. 6.1.1 показан найденный эллипс (сплошная линия); для сравнения, на том же рисунке пунктиром показан минимальный инвариантный эллипс с матрицей

$$P_{\text{lin}} = \begin{pmatrix} 0,1018 & -0,0374 \\ -0,0374 & 0,8962 \end{pmatrix},$$

для линеаризованной модели маятника; ему соответствует регулятор

$$K_{\text{lin}} = (-0,0904 \quad -1,5059).$$

Точечной линией на рисунке показан эллипс с матрицей  $P_0$ . ▼

### 6.1.2. Дискретный случай

Рассмотрим нелинейную стационарную динамическую систему в дискретном времени

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + \Phi\varphi(x_k) + Dw_k, \\z_k &= Cx_k,\end{aligned}\tag{6.1.9}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$|w_k| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots;\tag{6.1.10}$$

векторная функция

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

удовлетворяет ограничению

$$|\varphi(x)|^2 \leq \mu_0 + \mu_1|x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\tag{6.1.11}$$

с заданными параметрами  $\mu_0, \mu_1 \geq 0$ . Матрица  $A$  шуровская, пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Отметим, что при  $\mu_0 = 0$  вновь появляется *секторная нелинейность*.

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 6.1.1.

#### Теорема 6.1.3. Эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P^{-1}x \leq 1\}$$

является инвариантным для системы

$$x_{k+1} = Ax_k + \Phi\varphi(x_k) + Dw_k\tag{6.1.12}$$

с внешним возмущением (6.1.10), если его матрица  $P \succ 0$  удовлетворяет линейному матричному неравенству:

при  $\mu_0, \mu_1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} P - \beta\Phi\Phi^\top & AP & D & 0 & 0 \\ * & \alpha P & 0 & P & 0 \\ * & * & (1 - \alpha)I & 0 & I \\ * & * & * & \frac{\beta}{\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & * & \frac{\beta}{\mu_0}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$



при  $\mu_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} P - \beta\Phi\Phi^\top & AP & D & 0 \\ * & \alpha P & 0 & P \\ * & * & (1 - \alpha)I & 0 \\ * & * & * & \frac{\beta}{\mu_1}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

при  $\mu_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} P - \beta\Phi\Phi^\top & AP & D & 0 \\ * & \alpha P & 0 & 0 \\ * & * & (1 - \alpha)I & I \\ * & * & * & \frac{\beta}{\mu_0}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

при некоторых  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 0$ .

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на траекториях системы (6.1.12).

Для того, чтобы траектории  $x_k$  системы (6.1.12), исходя из точки вне эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \leq 1\},$$

стремились к нему с течением времени, достаточно потребовать, чтобы при  $V(x_k) > 1$ , а также при всех допустимых внешних возмущениях  $|w_k| \leq 1$  и при всех  $|\varphi_k|^2 \leq \mu_0 + \mu_1|x_k|^2$ , где  $\varphi_k = \varphi(x_k)$ , выполнялось  $V(x_{k+1}) < V(x_k)$ .

Это условие представимо в виде

$V(x_k) \leq 1$  при

$$V(x_{k+1}) \geq V(x_k), \quad w_k^\top w_k \leq 1, \quad \varphi_k^\top \varphi_k \leq \mu_0 + \mu_1 x_k^\top x_k. \quad (6.1.13)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+k}$$

и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} Q - A^\top QA & -A^\top QD & -A^\top Q\Phi \\ -D^\top QA & -D^\top QD & -D^\top Q\Phi \\ -\Phi^\top QA & -\Phi^\top QD & -\Phi^\top Q\Phi \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -\mu_1 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix};$$

тогда условие (6.1.13) примет вид

$$f_0(s) \leq 1 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq 0, \quad f_2(s) \leq 1, \quad f_3(s) \leq \mu_0,$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Воспользовавшись  $S$ -процедурой в ее достаточной части, приходим к условию

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 - \gamma M_3 \preceq 0$$

при неотрицательных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  таких, что

$$\beta + \mu_0 \gamma \leq 1.$$

Полученное матричное неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \frac{\alpha-1}{\alpha}Q + \mu_1 \frac{\gamma}{\alpha}I & A^\top QD & A^\top Q\Phi \\ * & D^\top QD - \frac{\beta}{\alpha}I & D^\top Q\Phi \\ * & \Phi^\top QD & \Phi^\top Q\Phi - \frac{\gamma}{\alpha}I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Заметив, что  $\alpha \geq 1$ , и положив

$$\gamma \doteq \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \beta \doteq \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha \doteq \frac{\alpha-1}{\alpha},$$

приходим к условию

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \alpha Q + \gamma \mu_1 I & A^\top QD & A^\top Q\Phi \\ * & D^\top QD - \beta I & D^\top Q\Phi \\ * & * & \Phi^\top Q\Phi - \gamma I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (6.1.14)$$

с неотрицательными  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  такими, что

$$\alpha + \beta + \mu_0 \gamma \leq 1.$$

Неравенство (6.1.14) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha Q - \gamma \mu_1 I & 0 & 0 \\ 0 & \beta I & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I \end{pmatrix} \succcurlyeq \begin{pmatrix} A^\top \\ D^\top \\ \Phi^\top \end{pmatrix} Q (A \ D \ \Phi),$$

откуда по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} & A & D & \Phi \\ A^\top & \alpha Q - \gamma\mu_1 I & 0 & 0 \\ D^\top & 0 & \beta I & 0 \\ \Phi^\top & 0 & 0 & \gamma I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Дважды воспользовавшись леммой Шура и полагая  $P = Q^{-1}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} P - \frac{1}{\gamma}\Phi\Phi^\top - \frac{1}{\beta}DD^\top & A \\ A^\top & \alpha P^{-1} - \gamma\mu_1 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Наконец, умножив полученное неравенство слева и справа на матрицу  $\text{diag}\{I \ P\}$ , приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} P - \frac{1}{\gamma}\Phi\Phi^\top - \frac{1}{\beta}DD^\top & AP \\ PA^\top & \alpha P - \gamma\mu_1 P^2 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Полагая, аналогично линейному случаю,

$$\beta = \beta_{\max} = 1 - \alpha - \mu_0\gamma,$$

имеем

$$\begin{pmatrix} P - \frac{1}{\gamma}\Phi\Phi^\top - \frac{1}{1 - \alpha - \mu_0\gamma}DD^\top & AP \\ PA^\top & \alpha P - \gamma\mu_1 P^2 \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} P - \frac{1}{\gamma}\Phi\Phi^\top & AP & D \\ PA^\top & \alpha P - \gamma\mu_1 P^2 & 0 \\ D^\top & 0 & (1 - \alpha - \mu_0\gamma)I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

Положив

$$\beta \doteq \frac{1}{\gamma},$$

и еще дважды воспользовавшись леммой Шура, приходим к одному из линейных матричных неравенств из формулировки Теоремы 6.1.3 в зависимости от значений параметров  $\mu_0$  и  $\mu_1$ .  $\blacksquare$

Как и в непрерывном случае, полученное условие обеспечивает убывание функции  $V(x) = x^\top P^{-1}x$  на траекториях системы (6.1.12) вне эллипсоида с матрицей  $P$ , то есть в этой области фазового пространства функция  $V(x)$  является квадратичной функцией Ляпунова для системы (6.1.12).

**Следствие 6.1.2.** *Решение  $\hat{P}$  задачи*

$$\text{tr } CPC^\top \rightarrow \min$$

*при ограничениях*

$$\begin{pmatrix} P - \beta\Phi\Phi^\top & AP & D & 0 & 0 \\ * & \alpha P & 0 & P & 0 \\ * & * & (1 - \alpha)I & 0 & I \\ * & * & * & \frac{\beta}{\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & * & \frac{\beta}{\mu_0}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (6.1.15)$$

$$P \succ 0,$$

*относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , скалярной переменной  $\beta$  и скалярного параметра  $\alpha$ , определяет матрицу*

$$C\hat{P}C^\top$$

*ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$  системы (6.1.9) с  $x_0 = 0$  при внешнем возмущении вида (6.1.10).*

**Замечание 6.1.2.** В соответствии с Теоремой 6.1.1, в случае обращения одного из параметров  $\mu_0$  или  $\mu_1$  в нуль, ограничение (6.1.15) принимает вид

$$\begin{pmatrix} P - \beta\Phi\Phi^\top & AP & D & 0 \\ * & \alpha P & 0 & P \\ * & * & (1 - \alpha)I & 0 \\ * & * & * & \frac{\beta}{\mu_1}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} P - \beta\Phi\Phi^\top & AP & D & 0 \\ * & \alpha P & 0 & 0 \\ * & * & (1 - \alpha)I & I \\ * & * & * & \frac{\beta}{\mu_0}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

соответственно. ▼

Теперь обратимся к задаче синтеза. Рассмотрим систему управления в дискретном времени

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + \Phi\varphi(x_k) + B_1u_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k + B_2u_k, \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (6.1.10); векторная функция

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

удовлетворяет ограничению (6.1.11); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Вновь будем искать регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию, стабилизирующий замкнутую систему и, в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$ , подавляющий воздействие внешних возмущений.

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 6.1.2.

**Теорема 6.1.4.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P - \beta\Phi\Phi^\top & AP + B_1Y & D & 0 & 0 \\ * & \alpha P & 0 & P & 0 \\ * & * & (1 - \alpha)I & 0 & I \\ * & * & * & \frac{\beta}{\mu_1}I & 0 \\ * & * & * & * & \frac{\beta}{\mu_0}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , скалярной переменной  $\beta$  и скалярного параметра  $\alpha$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

является стабилизирующим, а матрица ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$  замкнутой системы (6.1.16) с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (6.1.10) дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

Заметим, что в случае обращения одного из параметров  $\mu_0, \mu_1$  в нуль, первое из ограничений в формулировке Теоремы 6.1.4 претерпит очевидные изменения, см. Замечание 6.1.2.

Обратим внимание, что полученные результаты могут быть легко распространены на различные робастные постановки задач.

## 6.2. Нестационарные линейные системы

Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + Dw$$

с ограниченным внешним возмущением  $w(t)$  и будем предполагать, что она приводима к виду

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Dw, \quad (6.2.1)$$

где  $\|\Delta A(t)\| \leq \delta$  для всех моментов времени  $t$ . Обратим внимание, что в отличие от рассмотренных выше робастных постановок задач, здесь матричная неопределенность предполагается *зависящей от времени  $t$* .

Взглянем на эту систему с несколько иной, чем прежде, точки зрения. А именно, будем трактовать величину

$$w(x, t) \doteq \Delta A(t)x + Dw(t)$$

как внешнее возмущение, которое уже будет зависеть от *состояния системы*. При этом, очевидно, скорость роста ее нормы не превосходит скорости роста нормы состояния системы.

Такие задачи, в которых уровень внешних возмущений может зависеть от состояния системы, достаточно типичны. В частности, нередки ситуации, когда внешние возмущения растут не быстрее, чем линейная функция от вектора состояния системы.

В этом разделе обсудим, как предложенные выше подходы, основанные на технике линейных матричных неравенств, могут быть распространены на линейные нестационарные системы с внешними возмущениями указанной структуры.

### 6.2.1. Непрерывный случай

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w(x, t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w(x, t)|^2 \leq \gamma_0 + \gamma_1 |x(t)|^2 \quad \forall t \geq 0 \quad (6.2.3)$$

с известными параметрами  $\gamma_0 \geq 0$  и  $\gamma_1 > 0$ .<sup>1</sup> Матрица  $A$  гурвицева, пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

В следующей теореме устанавливается необходимое и достаточное условие инвариантности эллипсоида для системы (6.2.2).

**Теорема 6.2.1.** *Эллипсоид*

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leq 1\}$$

*является инвариантным для системы*

$$\dot{x} = Ax + Dw \quad (6.2.4)$$

*с внешним возмущением (6.2.3) тогда и только тогда, когда его матрица  $P \succ 0$  удовлетворяет линейному матричному неравенству*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \frac{\gamma_0}{\alpha} P + \alpha DD^\top & P \\ P & -\frac{\alpha}{\gamma_1} I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \quad (6.2.5)$$

*при некотором  $\alpha > 0$ .*

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Q x, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (6.2.4). Для того, чтобы траектории  $x(t)$  системы не покидали эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad V(x) \leq 1\}, \quad (6.2.6)$$

<sup>1</sup>В частности, для системы (6.2.1) имеем  $\gamma_0 = \|D\|$ ,  $\gamma_1 = \delta$ .

достаточно потребовать, чтобы при  $V(x) \geq 1$  и при всех допустимых внешних возмущениях  $|w(x, t)|^2 \leq \gamma_0 + \gamma_1 |x|^2$  выполнялось  $\dot{V}(x, w) \leq 0$ .

Поскольку производная функции  $V(x)$  в силу системы имеет вид

$$\dot{V}(x, w) = \dot{x}^\top Qx + x^\top Q\dot{x} = x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx,$$

приходим к условию

$$\begin{aligned} x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx \leq 0 \quad \text{при} \\ x^\top Qx \geq 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq \gamma_0 + \gamma_1 x^\top x. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Введя в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

и матрицы

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} A^\top Q + QA & QD \\ D^\top Q & 0 \end{pmatrix}, \\ M_1 &= \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\gamma_1 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

требуемое условие запишем в виде

$$f_0(s) \leq 0 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq -1 \quad \text{и} \quad f_2(s) \leq \gamma_0,$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Воспользуемся  $S$ -процедурой, заметив, что условия (2.2.17) в ее формулировке выполнены. В самом деле, при

$$\mu_2 > \lambda_{\min}(Q) > 0,$$

$$\mu_1 < -\frac{\mu_2 \gamma_1}{\lambda_{\max}(Q)} < 0,$$

имеем

$$\mu_1 Q + \mu_2 \gamma_1 I \prec -\frac{\mu_2 \gamma_1}{\lambda_{\max}(Q)} Q + \mu_2 \gamma_1 I = \mu_2 \gamma_1 \left( I - \frac{1}{\lambda_{\max}(Q)} Q \right) \succ 0,$$

поэтому

$$\mu_1 \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -\gamma_1 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \succ 0.$$



Далее, рассмотрим вектор

$$s_0 = \begin{pmatrix} \xi e \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},$$

где  $e$  — нормированный ( $|e| = 1$ ) собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению  $\lambda_{\max}(Q)$  матрицы  $Q$ , а  $\xi > 1/\sqrt{\lambda_{\max}(Q)}$ . Тогда

$$s_0^\top M_1 s_0 = -\xi^2 e^\top Q e = -\xi^2 \lambda_{\max}(Q) < -1,$$

а

$$s_0^\top M_2 s_0 = -\gamma_1 \xi^2 e^\top e = -\gamma_1 \xi^2 < 0 \leq \gamma_0.$$

Следовательно, условие (6.2.7) эквивалентно выполнению соотношения

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preceq 0 \quad (6.2.8)$$

при неотрицательных  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что

$$\alpha \geq \gamma_0 \beta. \quad (6.2.9)$$

Далее, неравенство (6.2.8) представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + \alpha Q + \beta \gamma_1 I & QD \\ D^\top Q & -\beta I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

или, по лемме Шура

$$A^\top Q + QA + \alpha Q + \beta \gamma_1 I + \frac{1}{\beta} QDD^\top Q \preceq 0.$$

Умножив полученное неравенство слева и справа на матрицу  $P = Q^{-1}$ , приходим к матричному неравенству

$$AP + PA^\top + \alpha P + \beta \gamma_1 P^2 + \frac{1}{\beta} DD^\top \preceq 0. \quad (6.2.10)$$

При  $\gamma_0 \neq 0$ , так же, как и в случае ограниченных внешних возмущений, можно положить

$$\beta = \beta_{\max} = \frac{1}{\gamma_0} \alpha,$$

поэтому имеем

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \alpha P^2 + \frac{\gamma_0}{\alpha} DD^\top \preceq 0.$$

Полагая

$$\alpha \doteq \frac{\gamma_0}{\alpha}$$

и еще раз воспользовавшись леммой Шура, приходим к линейному матричному неравенству (6.2.5).

Теперь рассмотрим случай  $\gamma_0 = 0$ . При этом связь (6.2.9) между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  будет отсутствовать и приходим к соотношению

$$AP + PA^\top + \beta\gamma_1 P^2 + \frac{1}{\beta} DD^\top \preceq 0.$$

Положив в полученном матричном неравенстве

$$\alpha \doteq \frac{1}{\beta}$$

и применяя лемму Шура, вновь приходим к матричному неравенству (6.2.5).

С другой стороны, *необходимым* условием инвариантности эллипсоида (6.2.6) является условие

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \text{при} \quad V(x) = 1 \quad \text{и} \quad |w(x, t)|^2 \leq \gamma_0 + \gamma_1 |x|^2. \quad (6.2.11)$$

Оказывается, оно также эквивалентно соотношению (6.2.5).

Действительно, условие (6.2.11) запишем как

$$\begin{aligned} x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx \leq 0 \quad \text{при} \\ x^\top Qx = 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq \gamma_0 + \gamma_1 x^\top x. \end{aligned}$$

и воспользуемся  $S$ -процедурой. С учетом Замечания 2.2.5 приходим к соотношению (6.2.10) при некоторых числах  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что  $\beta \geq 0$  и  $\alpha \geq \gamma_0 \beta$ . Поскольку при этом параметр  $\alpha$  оказывается неотрицательным, вновь приходим к соотношению (6.2.5).

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P > 0$  эквивалентно выполнению матричного неравенства (6.2.5). ■

Как следует из доказательства Теоремы 6.2.1, условие (6.2.5) обеспечивает убывание функции  $V(x) = x^\top P^{-1}x$  на траекториях системы (6.2.4) вне эллипсоида с матрицей  $P$ , то есть в этой области фазового пространства  $V(x)$  является квадратичной функцией Ляпунова для рассматриваемой возмущенной системы.

**Следствие 6.2.1.** Пусть  $\hat{P}$  — решение задачи

$$\operatorname{tr} CPC^T \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \frac{\gamma_0}{\alpha}P + \alpha DD^T & P \\ P & -\frac{\alpha}{\gamma_1}I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha$ .

Тогда при  $\gamma_0 \neq 0$  матрица

$$C\hat{P}C^T$$

определяет минимальный ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  системы (6.2.2) с  $x_0 = 0$ .

Если же  $\gamma_0 = 0$ , решение  $\hat{P}$  задачи SDP

$$\operatorname{tr} CPC^T \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha DD^T & P \\ P & -\frac{\alpha}{\gamma_1}I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succeq P_0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C\hat{P}C^T$$

минимального ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  при условии, что начальное состояние  $x_0$  системы (6.2.2) принадлежит эллипсоиду с заданной матрицей  $P_0$ .

Обратим внимание, что при  $\gamma_0 \neq 0$  приходим к задаче полуопределенного программирования с одномерной минимизацией по параметру  $\alpha$ , а при  $\gamma_0 = 0$  — собственно к задаче SDP.

Перейдем к задаче синтеза и рассмотрим непрерывную систему управления с мультипликативным возмущением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2u, \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , регулируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(x, t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (6.2.3); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Целью по-прежнему является нахождение регулятора  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию, стабилизирующего замкнутую систему и минимизирующего ограничивающего эллипсоид для выхода  $z$ .

Доказательство следующей теоремы использует те же приемы, что и доказательство Теоремы 4.2.1.

**Теорема 6.2.2.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  – решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \frac{\gamma_0}{\alpha}P + \alpha DD^\top & P \\ & P \\ & & -\frac{\alpha}{\gamma_1}I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярного параметра  $\alpha$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

является стабилизирующим, а матрица минимального ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$  замкнутой системы (6.2.12) с  $x_0 = 0$  при внешних возмущениях вида (6.2.3) дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

Обратим внимание, что при  $\gamma_0 \neq 0$  приходим к задаче полуопределенного программирования с одномерной минимизацией по параметру  $\alpha$ . Если же  $\gamma_0 = 0$ , получаем задачу SDP; в этом случае к условиям Теоремы 6.2.2 добавляется условие  $P \succcurlyeq P_0$  (ср. со Следствием 6.2.1).

**Пример 6.2.1.** Рассмотрим задачу подавления возмущенных колебаний нестационарного математического маятника, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \Omega^2(t)x = u.$$

Пусть

$$\Omega^2(t) = \omega_0^2 + \omega^2(t), \quad |\omega(t)| \leq 1.$$

Тогда, в матричном виде, имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 + u + w, \end{aligned}$$

с внешним возмущением  $w(x, t)$ , которое подчинено секторному ограничению

$$|w| \leq |x|,$$

где  $x$  — вектор фазового состояния системы (то есть  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_1 = 1$ ).

В качестве выхода системы выберем вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix}$$

и будем учитывать неопределенность в начальном состоянии системы, задаваемую матрицей  $P_0$ .

Итак, имеем

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для  $\omega_0 = 3$  и  $P_0 = 0,1I$  с помощью Теоремы 6.2.2 была найдена матрица

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0,1000 & -0,0058 \\ -0,0058 & 0,8073 \end{pmatrix}$$

минимального инвариантного эллипса и соответствующий регулятор

$$\hat{K} = (0,9296 \quad -1,0605).$$

На Рис. 6.2.1 показан найденный эллипс (сплошная линия); для сравнения, на том же рисунке пунктиром показан минимальный инвариантный эллипс для той же системы с внешним возмущением  $|w| \leq 1$  (см. Пример 6.1.1). Кроме того, точечной линией на рисунке показан эллипс с матрицей  $P_0$ . ▼

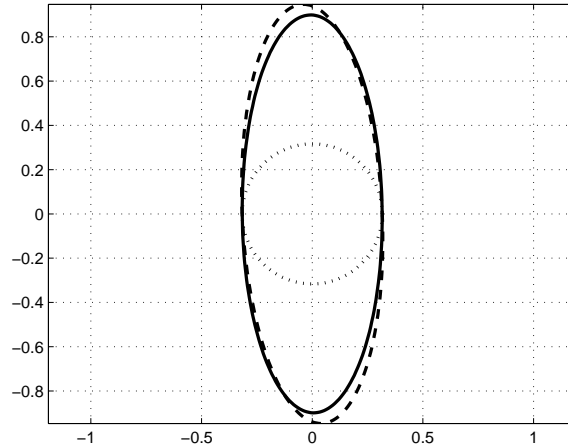


Рис. 6.2.1. Инвариантные эллипсоиды из Примера 6.2.1.

### 6.2.2. Дискретный случай

Рассмотрим линейную дискретную динамическую систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w_k(x) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w_k(x)|^2 \leq \gamma_0 + \gamma_1 |x_k|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.2.14)$$

где  $\gamma_0 \geq 0$ ,  $\gamma_1 > 0$ . Матрица  $A$  шуровская, пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 6.2.1.

**Теорема 6.2.3.** *Эллипсоид*

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\},$$

является инвариантным для системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k \quad (6.2.15)$$

с внешним возмущением (6.2.14) тогда и только тогда, когда его матрица  $P \succ 0$  удовлетворяет линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} P - \alpha DD^\top & AP & 0 \\ * & (1 - \frac{\gamma_0}{\alpha})P & P \\ * & * & \frac{\alpha}{\gamma_1}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0 \quad (6.2.16)$$

при некотором  $\alpha > \gamma_0$ .

**Доказательство.** Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (6.2.15). Необходимым и достаточным условием того, что траектории  $x_k$  системы не выходят из эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \leq 1\},$$

является условие:  $V(x_{k+1}) \leq 1$  при  $V(x_k) \leq 1$  и всех допустимых внешних возмущениях  $|w_k(x)|^2 \leq \gamma_0 + \gamma_1|x_k|^2$ .

Представив это условие в виде

$$(Ax + Dw)^\top Q(Ax + Dw) \leq 1 \quad \text{при} \\ x^\top Qx \leq 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq \gamma_0 + \gamma_1 x^\top x, \quad (6.2.17)$$

введем в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^\top QA & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD \end{pmatrix}, \\ M_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\gamma_1 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Тогда условие (6.2.17) примет вид

$$f_0(s) \leq 1 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq 1 \quad \text{и} \quad f_2(s) \leq \gamma_0, \quad (6.2.18)$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Заметим, что условия (2.2.17) в формулировке  $S$ -процедуры выполнены. В самом деле, при

$$\begin{aligned} 0 < \mu_2 < \lambda_{\min}(Q), \\ \mu_1 > \frac{\mu_2 \gamma_1}{\lambda_{\min}(Q)} > 0, \end{aligned}$$

выполняется

$$\mu_1 Q - \mu_2 \gamma_1 I \succ \frac{\mu_2 \gamma_1}{\lambda_{\min}(Q)} Q - \mu_2 \gamma_1 I = \mu_2 \gamma_1 \left( \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)} Q - I \right) \succ 0,$$

откуда

$$\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 \succ 0.$$

Далее, рассмотрим вектор

$$s_0 = \begin{pmatrix} \xi e \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},$$

где  $e$  — нормированный ( $|e| = 1$ ) собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению  $\lambda_{\max}(Q)$  матрицы  $Q$ , а  $|\xi| < 1/\sqrt{\lambda_{\max}(Q)}$ . Тогда

$$s_0^\top M_1 s_0 = \xi^2 e^\top Q e = \xi^2 \lambda_{\max}(Q) < 1,$$

а

$$s_0^\top M_2 s_0 = -\gamma_1 \xi^2 e^\top e = -\gamma_1 \xi^2 < 0 \leq \gamma_0.$$

Следовательно, условие (6.2.18) эквивалентно соотношению

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preccurlyeq 0$$

при  $\alpha, \beta \geq 0$  таких, что  $\alpha + \beta \gamma_0 \leq 1$ . Полученное неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top Q A - \alpha Q + \beta \gamma_1 I & A^\top Q D \\ D^\top Q A & D^\top Q D - \beta I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} \alpha Q - \beta \gamma_1 I & 0 \\ 0 & \beta I \end{pmatrix} \succcurlyeq \begin{pmatrix} A^\top \\ D^\top \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} A & D \end{pmatrix},$$

откуда по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} & A & D \\ A^\top & \alpha Q - \beta \gamma_1 I & 0 \\ D^\top & 0 & \beta I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$



Далее, вновь по лемме Шура имеем

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} - \frac{1}{\beta} DD^{\top} & A \\ A^{\top} & \alpha Q - \beta \gamma_1 I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Еще раз воспользовавшись леммой Шура и полагая  $P = Q^{-1}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} P - \frac{1}{\beta} DD^{\top} & A & 0 \\ A^{\top} & \alpha P^{-1} & I \\ 0 & I & \frac{1}{\beta \gamma_1} I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0$$

при  $\alpha, \beta > 0$  таких, что

$$\alpha + \beta \gamma_0 \leq 1. \quad (6.2.19)$$

Домножив полученное матричное неравенство слева и справа на матрицу

$$\text{diag}\{I \ P \ I\},$$

получаем

$$\begin{pmatrix} P - \frac{1}{\beta} DD^{\top} & AP & 0 \\ PA^{\top} & \alpha P & P \\ 0 & P & \frac{1}{\beta \gamma_1} I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

При  $\gamma_0 \neq 0$ , так же, как и в случае ограниченных внешних возмущений, можно положить

$$\alpha = \alpha_{\max} = 1 - \beta \gamma_0,$$

поэтому имеем

$$\begin{pmatrix} P - \frac{1}{\beta} DD^{\top} & AP & 0 \\ PA^{\top} & (1 - \beta \gamma_0)P & P \\ 0 & P & \frac{1}{\beta \gamma_1} I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Полагая

$$\alpha \doteq \frac{1}{\beta},$$

приходим к линейному матричному неравенству (6.2.16) при  $\alpha > \gamma_0$ .

Теперь рассмотрим случай  $\gamma_0 = 0$ . При этом связь (6.2.19) между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  будет отсутствовать и, полагая  $\alpha = \alpha_{\max} = 1$ , приходим к соотношению

$$\begin{pmatrix} P - \frac{1}{\beta} DD^\top & AP & 0 \\ PA^\top & P & P \\ 0 & P & \frac{1}{\beta\gamma_1} I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Положив в полученном матричном неравенстве

$$\alpha \doteq \frac{1}{\beta}$$

и применяя лемму Шура, вновь приходим к матричному неравенству (6.2.16) при некотором  $\alpha > 0$ .

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P \succ 0$  эквивалентно выполнению матричного неравенства (6.2.16) при некотором  $\alpha > \gamma_0$ . ■

**Замечание 6.2.1.** Оказывается, что условие (6.2.16) обеспечивает убывание функции  $V(x) = x^\top P^{-1}x$  на траекториях системы (6.2.15) вне эллипсоида с матрицей  $P$ , то есть в этой области фазового пространства функция  $V(x)$  является квадратичной функцией Ляпунова для возмущенной системы.

В самом деле, введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0,$$

построенную на траекториях системы (6.2.15).

Для того, чтобы траектории  $x_k$  системы (6.2.15), исходя из точки вне эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x) \leq 1\},$$

стремились к нему с течением времени, достаточно потребовать, чтобы при  $V(x_k) > 1$  (и всех допустимых внешних возмущениях  $w_k$ ) выполнялось  $V(x_{k+1}) < V(x_k)$ . Это условие представимо в виде

$$V(x_k) \leq 1 \quad \text{при} \quad V(x_{k+1}) \geq V(x_k) \quad \text{и} \quad w_k^\top w_k \leq \gamma_0 + \gamma_1 x_k^\top x_k. \quad (6.2.20)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} Q - A^\top QA & -A^\top QD \\ -D^\top QA & -D^\top QD \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -\gamma_1 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

тогда условие (6.2.20) примет вид

$$f_0(s) \leq 1 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq 0 \quad \text{и} \quad f_2(s) \leq \gamma_0,$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Воспользовавшись  $S$ -процедурой в ее достаточной части, приходим к условию

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preceq 0$$

при  $\alpha, \beta \geq 0$  таких, что  $\gamma_0 \beta \leq 1$ .

Последнее матричное неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \frac{\alpha-1}{\alpha}Q + \gamma_1 \frac{\beta}{\alpha}I & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD - \frac{\beta}{\alpha}I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Заметив, что  $\alpha \geq 1$  и положив

$$\alpha \doteq \frac{\alpha-1}{\alpha}, \quad \beta \doteq \frac{\beta}{\alpha},$$

приходим к условию

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \alpha Q + \gamma_1 \beta I & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD - \beta I \end{pmatrix} \preceq 0 \quad (6.2.21)$$

с неотрицательными  $\alpha, \beta$  такими, что  $\alpha + \gamma_0 \beta \leq 1$ .

Остается заметить, что из доказательства Теоремы 6.2.3 вытекает, что условие (6.2.21) эквивалентно соотношению (6.2.16), определяющему матрицу  $P$  инвариантного эллипсоида.  $\blacktriangledown$

**Следствие 6.2.2.** Пусть  $\hat{P}$  — решение задачи

$$\text{tr } C P C^\top \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P - \alpha DD^\top & AP & 0 \\ * & (1 - \frac{\gamma_0}{\alpha})P & P \\ * & * & \frac{\alpha}{\gamma_1}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha$ .

Тогда при  $\gamma_0 \neq 0$  матрица

$$C\hat{P}C^\top$$

определяет минимальный ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  системы (6.2.13) с  $x_0 = 0$  при внешнем возмущении (6.2.14).

Если же  $\gamma_0 = 0$ , решение  $\hat{P}$  задачи SDP

$$\text{tr } CPC^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P - \alpha DD^\top & AP & 0 \\ * & P & P \\ * & * & \frac{\alpha}{\gamma_1}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succcurlyeq P_0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C\hat{P}C^\top$$

минимального ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$  при условии, что начальное состояние  $x_0$  системы (6.2.13) принадлежит эллипсоиду с заданной матрицей  $P_0$ .

Вновь, как и в непрерывном случае, при  $\gamma_0 \neq 0$  приходим к задаче полуопределенного программирования с одномерной минимизацией по параметру  $\alpha$ , а при  $\gamma_0 = 0$  — собственно к задаче SDP.

Перейдем к задаче синтеза и рассмотрим дискретную систему управления с мультипликативным возмущением

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1u_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k + B_2u_k, \end{aligned} \tag{6.2.22}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k(x) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (6.2.14); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Будем искать стабилизирующий регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию, минимизирующий ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  системы (6.2.22).

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 6.2.2.

**Теорема 6.2.4.** Пусть  $\hat{P}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{Z}$  – решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P - \alpha DD^\top & AP + B_1Y & 0 \\ * & (1 - \frac{\gamma_0}{\alpha})P & P \\ * & * & \frac{\alpha}{\gamma_1}I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \\ \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярного параметра  $\alpha$ .

Тогда регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

является стабилизирующим, а матрица минимального ограничивающего эллипсоида для выхода  $z_k$  замкнутой системы (6.2.22) с  $x_0 = 0$  при внешнем возмущении вида (6.2.14) дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

Обратим внимание, что при  $\gamma_0 \neq 0$  получаем задачу полуопределенного программирования с одномерной минимизацией по параметру  $\alpha$ . Если же  $\gamma_0 = 0$ , получаем задачу SDP; при этом, как и в непрерывном случае, к условиям Теоремы 6.2.4 добавляется условие  $P \succcurlyeq P_0$ .

Все полученные результаты могут быть распространены как на различные задачи, связанные с подавлением внешних возмущений, рассмотренные в Главе 4, так и на их различные робастные постановки, см. Главу 5.

### 6.3. Оценка времени установления

Как отмечалось выше, в рамках обсуждаемого подхода могут решаться различные проблемы, не связанные непосредственно с синтезом регуляторов — в частности, такие, как оценка времени установления, перерегулирования, степени затухания и др. Решению первой из них и посвящен данный раздел.

#### 6.3.1. Непрерывный случай

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  и ограниченным внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ :

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0. \tag{6.3.2}$$

Пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Напомним (см. Следствие 3.1.1), что инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости: траектории системы, исходящие из точек вне инвариантного эллипсоида, стремятся к этому эллипсоиду с течением времени. В дальнейшем это свойство будет использоваться самым существенным образом.

Нашей главной задачей является оценка *времени установления*. Пусть

$$\mathcal{E}_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1} x \leq 1\}$$

инвариантный эллипсоид для системы (6.3.1) с матрицей  $P \succ 0$ . Оценим время  $T_\gamma$ , за которое траектории системы, исходящие из точки  $x_0$  вне эллипсоида  $\mathcal{E}_{\gamma P}$ ,  $\gamma > 1$  (в силу Следствия 3.1.2 он также будет инвариантным), достигнут этого эллипсоида.<sup>1</sup>

В следующей теореме дана оценка экспоненциальной скорости сходимости траекторий рассматриваемой системы к заданному инвариантному эллипсоиду.

**Теорема 6.3.1.** Пусть  $\hat{\alpha}$  — решение задачи SDP

$$\alpha \longrightarrow \max$$

<sup>1</sup>Для скалярного случая в инженерной практике обычно берут  $\gamma = 1,05$ .

при ограничении

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}_P$  системы (6.3.1).

Тогда для скорости сходимости траекторий системы (6.3.1) к инвариантному эллипсоиду  $\mathcal{E}_P$  справедлива оценка

$$\rho(t) \leq \rho(0) e^{-\hat{\alpha}t}, \quad (6.3.3)$$

где

$$\rho(t) = V(x(t)) - 1, \quad V(x) = x^\top P^{-1}x.$$

**Доказательство.** Пусть  $P = Q^{-1} \succ 0$  есть матрица инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}_P$  для системы (6.3.1). Согласно Замечанию 3.1.2, квадратичная форма

$$V(x) = x^\top Qx$$

будет служить функцией Ляпунова вне этого эллипсоида.

Поскольку инвариантный эллипсоид является притягивающим, потребуем выполнения условия

$$\dot{V}(x, w) \leq -\alpha(V(x) - 1) \quad \text{при} \quad V(x) \geq 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1. \quad (6.3.4)$$

Тогда величина  $\alpha > 0$  будет оценкой снизу для экспоненциальной скорости убывания квадратичной функции Ляпунова  $V(x(t))$  вне инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}_P$  при всех допустимых внешних возмущениях  $w$ . Найдем ее наибольшее значение  $\hat{\alpha}$ .

С учетом того, что производная функции Ляпунова в силу системы имеет вид

$$\dot{V}(x, w) = x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx,$$

условие (6.3.4) запишем как

$$\begin{aligned} x^\top (A^\top Q + QA)x + 2w^\top D^\top Qx + \alpha x^\top Qx &\leq \alpha \\ \text{при} \quad x^\top Qx &\geq 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leq 1. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Введем в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^\top Q + QA + \alpha Q & QD \\ D^\top Q & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

В результате условие (6.3.5) примет вид

$$f_0(s) \leq 0 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq -1 \quad \text{и} \quad f_2(s) \leq 1,$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Воспользовавшись  $S$ -процедурой (легко проверить, что ее условия (2.2.17) выполняются), заключаем, что условие (6.3.5) эквивалентно существованию  $\tau, \mu \geq 0$  таких, что

$$\tau - \mu \leq \alpha$$

и

$$M_0 - \mu M_1 - \tau M_2 \preceq 0.$$

Последнее неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + \alpha Q + \mu Q & QD \\ D^\top Q & -\tau I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или по лемме Шура

$$A^\top Q + QA + (\alpha + \mu)Q + \frac{1}{\tau} QDD^\top Q \preceq 0.$$

После домножения полученного неравенства слева и справа на матрицу  $P$  получаем

$$AP + PA^\top + (\alpha + \mu)P + \frac{1}{\tau} DD^\top \preceq 0.$$

В силу Леммы 3.1.1 можно положить  $\tau = \tau_{\max} = \alpha + \mu$ ; в результате приходим к матричному неравенству

$$AP + PA^\top + (\alpha + \mu)P + \frac{1}{\alpha + \mu} DD^\top \preceq 0.$$

Итак, искомое  $\hat{\alpha}$  является решением задачи

$$\alpha \longrightarrow \max$$



при ограничении

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0. \quad (6.3.6)$$

Записав матричное неравенство (6.3.6) в эквивалентной форме

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

приходим к задаче SDP.

При этом, согласно (6.3.4), для всех траекторий  $x(t)$  вне инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}_P$ , исходящих из точки  $x_0$ , имеем

$$V(x(t)) \leq 1 + (V(x_0) - 1) e^{-\hat{\alpha}t}. \quad \blacksquare$$

Заметим, что согласно Следствию 3.1.3, если эллипсоид  $\mathcal{E}_P$  (или соответствующий ему ограничивающий эллипсоид) минимален по критерию следа, то  $\hat{\alpha}$  доставляет равенство в (6.3.6).

Из Теоремы 6.3.1 нетрудно получить оценку для времени установления в рассматриваемой динамической системе.

**Следствие 6.3.1.** Пусть  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида для системы (6.3.1). Тогда для времени установления справедлива оценка

$$T_\gamma \leq \frac{1}{\hat{\alpha}} \ln \frac{x_0^\top P^{-1} x_0 - 1}{\gamma - 1}.$$

В частности, если начальное состояние  $x_0$  системы принадлежит эллипсоиду с матрицей  $\delta P$ ,  $\delta \geq \gamma > 1$ , то

$$T_\gamma \leq \frac{1}{\hat{\alpha}} \ln \frac{\delta - 1}{\gamma - 1}.$$

**Доказательство.** Поскольку в момент  $T_\gamma$  все траектории, исходящие из точки  $x_0$  вне эллипсоида  $\mathcal{E}_{\gamma P}$ ,  $\gamma > 1$ , находятся в этом эллипсоиде, то

$$V(x(T_\gamma)) \leq \gamma.$$

Поэтому с учетом (6.3.3) имеем оценку

$$\gamma \leq 1 + (x_0^\top P^{-1} x_0 - 1) e^{-\hat{\alpha}T_\gamma},$$

откуда

$$T_\gamma \leq \frac{1}{\hat{\alpha}} \ln \frac{x_0^\top P^{-1} x_0 - 1}{\gamma - 1}. \quad \blacksquare$$

Нетрудно видеть, что, в силу линейности, к моменту  $T_\gamma$  выход  $z$  системы (6.3.1) окажется в эллипсоиде с матрицей  $\gamma CPC^\top$  (напомним, что  $CPC^\top$  — матрица ограничивающего эллипсоида для выхода  $z$ ).

**Замечание 6.3.1.** В ходе доказательства Теоремы 6.3.1 был найден “физический смысл” параметра  $\alpha$  в Следствии 3.1.3. А именно, пара  $(\hat{P}, \hat{\alpha})$ , доставляющая решение задаче

$$\text{tr } CPC^\top \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top = 0,$$

определяет матрицу  $\hat{P}$  инвариантного эллипсоида, минимального по критерию следа, и гарантированную экспоненциальную скорость  $\hat{\alpha}$  сходимости траекторий системы (6.3.1) извне к этому эллипсоиду.  $\blacktriangledown$

Полученный результат легко обобщается на задачу синтеза оптимального управления. Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (6.3.2); пара  $(A, B_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Напомним, что Теорема 4.2.1 определяет стабилизирующий регулятор

$$u = \hat{K}x,$$

оптимально (в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида) подавляющий воздействие внешних возмущений, и соответствующую матрицу  $\hat{P}$  инвариантного эллипсоида замкнутой системы (6.3.7) при некотором значении параметра  $\hat{\alpha}$ . Поэтому, с учетом Следствия 6.3.1, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 6.3.2.** Для времени установления в системе (6.3.7), замкнутой регулятором  $\hat{K}$ , справедлива оценка

$$T_\gamma \leq \frac{1}{\hat{\alpha}} \ln \frac{x_0^\top \hat{P}^{-1} x_0 - 1}{\gamma - 1},$$

где  $x_0$  — начальное состояние системы вне эллипсоида с матрицей  $\gamma\hat{P}$ ,  $\gamma > 1$ .

В частности, если начальное состояние системы принадлежит эллипсоиду  $\mathcal{E}_{\delta\hat{P}}$ , где  $\delta \geq \gamma > 1$ , то

$$T_\gamma \leq \frac{1}{\hat{\alpha}} \ln \frac{\delta - 1}{\gamma - 1}.$$

**Пример 6.3.1.** Продемонстрируем предложенный подход на примере задачи управления двухмассовой системой, см. Пример 4.2.1. В качестве выхода системы возьмем весь вектор фазового состояния

$$z = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

и введем ограничение на управление:

$$|u| \leq 2,3.$$

При единичных параметрах системы с помощью Теоремы 4.2.1 была найдена матрица минимального инвариантного эллипсоида

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 22,0261 & 20,4368 & -3,0616 & -6,1821 \\ * & 25,4940 & 0,5007 & -3,5437 \\ * & * & 4,8668 & 0,1293 \\ * & * & * & 6,0424 \end{pmatrix}$$

и оптимальный регулятор

$$\hat{K} = (-0,6946 \quad 0,3263 \quad -1,3324 \quad -0,3439).$$

При этом

$$\hat{\alpha} = 0,2780.$$

Согласно Теореме 6.3.2, при  $\delta = 2$ ,  $\gamma = 1,05$  время установления не превосходит

$$T_{1,05} \approx 10,7760.$$

На Рис. 6.3.1 показаны проекции на плоскость  $(x_2, v_2)$  найденного инвариантного эллипсоида с матрицей  $\hat{P}$  (сплошной линией), эллипсоида с матрицей  $\gamma\hat{P}$  (пунктиром) и эллипсоида с матрицей  $\delta\hat{P}$  (точечной линией). На этом же рисунке показаны проекции двух траекторий системы, исходящих из одной точки — соответствующей наихудшему внешнему возмущению (сплошной линией) и единичной ступеньке (пунктиром). Конечные точки траекторий соответствуют моменту времени  $T_{1,05}$ . ▼

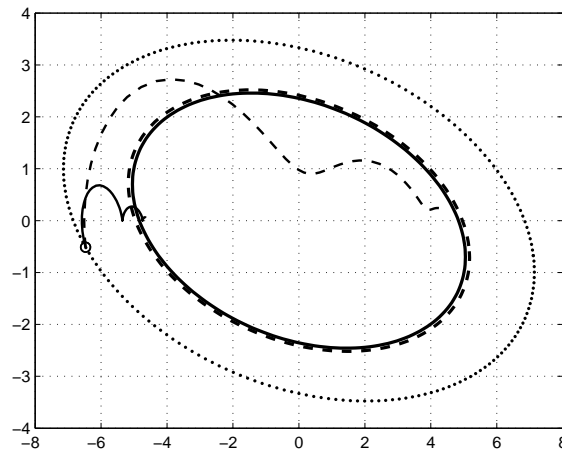


Рис. 6.3.1. Проекция эллипсоидов и траекторий для системы из Примера 6.3.1.

### 6.3.2. Дискретный случай

Предложенный подход позволяет получить оценку для времени установления в дискретной динамической системе

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$|w_k| \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга.

Как и в непрерывном случае, инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости. Как вытекает из следующей теоремы, в дискретном случае траектории системы сходятся к инвариантному эллипсоиду со скоростью геометрической прогрессии.

**Теорема 6.3.3.** Пусть  $\hat{\alpha}$  — решение задачи SDP

$$\alpha \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}_P$  системы (6.3.8).

Тогда для скорости сходимости траекторий системы (6.3.8) к инвариантному эллипсоиду  $\mathcal{E}_P$  справедлива оценка

$$\rho_k \leq \rho_0 \hat{\alpha}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (6.3.9)$$

где

$$\rho_k = V(x_k) - 1, \quad V(x) = x^\top P^{-1}x.$$

**Доказательство.** Пусть  $P = Q^{-1} \succ 0$  матрица инвариантного эллипсоида для системы (6.3.8). Согласно Замечанию 3.1.4, форма

$$V(x) = x^\top P^{-1}x$$

является квадратичной функцией Ляпунова вне этого эллипсоида.

С учетом свойства притягиваемости инвариантного эллипсоида, потребуем выполнения условия

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\eta(V(x_k) - 1) \quad \text{при } V(x_k) \geq 1 \text{ и } w_k^\top w_k \leq 1. \quad (6.3.10)$$

Тогда величина  $\eta > 0$  будет оценкой снизу для скорости убывания квадратичной функции Ляпунова  $V(x_k)$  вне инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}_P$  при всех допустимых внешних возмущениях  $w_k$ . Найдем ее наибольшее значение  $\hat{\eta}$ .

Условие (6.3.10) запишем как

$$x_k^\top (A^\top Q A + (\eta - 1)Q)x_k + 2w_k^\top D^\top Q A x_k + w_k^\top D^\top Q D w_k \leq \eta \quad \text{при } x_k^\top Q x_k \geq 1 \text{ и } w_k^\top w_k \leq 1. \quad (6.3.11)$$

Далее, введем в рассмотрение вектор

$$s = \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^\top QA + (\eta - 1)Q & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

В результате условие (6.3.11) примет вид

$$f_0(s) \leq \eta \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq -1 \quad \text{и} \quad f_2(s) \leq 1,$$

где  $f_i(s) = s^\top M_i s$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Воспользовавшись  $S$ -процедурой (вновь легко убедиться в том, что ограничения (2.2.17) выполняются) получаем, что условие (6.3.10) эквивалентно существованию  $\tau, \mu \geq 0$  таких, что

$$\tau - \mu \leq \eta$$

и

$$M_0 - \mu M_1 - \tau M_2 \preceq 0.$$

Последнее неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top QA + (\eta - 1)Q + \mu Q & A^\top QD \\ D^\top QA & D^\top QD - \tau I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} (1 - \eta - \mu)Q & 0 \\ 0 & \tau I \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} A^\top \\ D^\top \end{pmatrix} Q (A \quad D),$$

откуда по лемме Шура

$$\frac{1}{1 - \mu - \eta} APA^\top - P + \frac{1}{\tau} DD^\top \preceq 0.$$

В силу Леммы 3.1.3 полагая  $\tau = \tau_{\max} = \mu + \eta$ , приходим к матричному неравенству

$$\frac{1}{1 - (\eta + \mu)} APA^\top - P + \frac{1}{\eta + \mu} DD^\top \preceq 0.$$

Таким образом,  $\hat{\eta} = 1 - \hat{\alpha}$ , где  $\hat{\alpha}$  является решением задачи

$$\alpha \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$\frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{1 - \alpha} DD^\top \preceq 0. \quad (6.3.12)$$

Записав матричное неравенство (6.3.12) в соответствии с Замечанием 3.1.5 в эквивалентной форме

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & PA^\top & 0 \\ * & -P & D \\ * & * & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

приходим к искомой задаче SDP.

При этом, согласно (6.3.10), для всех траекторий  $x_k$  вне инвариантного эллипсоида  $\mathcal{E}_P$ , исходящих из точки  $x_0$ , имеем

$$V(x_{k+1}) - 1 \leq \hat{\alpha}(V(x_k) - 1),$$

откуда и следует искомая оценка (6.3.9).  $\blacksquare$

**Замечание 6.3.2.** Согласно Следствию 3.1.5, если эллипсоид  $\mathcal{E}_P$  (или соответствующий ему ограничивающий эллипсоид) минимален по критерию следа, то  $\hat{\alpha}$  доставляет равенство в (6.3.12).  $\blacktriangledown$

Из Теоремы 6.3.3 легко получить оценку для времени установления  $k_\gamma$ , за которое траектории дискретной системы, исходящие из точки  $x_0$  вне эллипсоида  $\mathcal{E}_{\gamma P}$ ,  $\gamma > 1$ , достигнут этого эллипсоида.

**Следствие 6.3.2.** Пусть  $P$  — матрица инвариантного эллипсоида для системы (6.3.8). Тогда для времени установления справедлива оценка

$$k_\gamma \leq \log_{\hat{\alpha}} \frac{\gamma - 1}{x_0^\top P^{-1} x_0 - 1}.$$

В частности, если начальное состояние  $x_0$  системы принадлежит эллипсоиду с матрицей  $\delta P$ ,  $\delta \geq \gamma > 1$ , то

$$k_\gamma \leq \log_{\hat{\alpha}} \frac{\gamma - 1}{\delta - 1}.$$

**Доказательство.** Поскольку в момент  $k_\gamma$  все траектории, исходящие из точки  $x_0$  вне эллипсоида  $\mathcal{E}_{\gamma P}$ ,  $\gamma > 1$ , должны находиться в этом эллипсоиде, то

$$V(x_{k_\gamma}) \leq \gamma.$$

Поэтому, согласно (6.3.9), имеем оценку

$$\gamma - 1 \leq (x_0^\top P^{-1} x_0 - 1) \hat{\alpha}^{k_\gamma},$$

откуда

$$k_\gamma \leq \log_{\hat{\alpha}} \frac{\gamma - 1}{x_0^\top P^{-1} x_0 - 1}. \quad \blacksquare$$

Полученный результат, как и в непрерывном случае, легко обобщается на задачу синтеза оптимального управления.

Представляется, что предложенный подход имеет большие возможности для обобщений. Например, в одной из простейших постановок задача может формулироваться следующим образом. Задана точка  $x_0$  и окрестность нуля  $\Omega$ ; будем минимизировать время  $T_\Omega$  перехода траекторий системы из начальной точки  $x_0$  во множество  $\Omega$ . Для этого достаточно найти *наибольший* инвариантный эллипсоид с матрицей  $P \subset \Omega$ , тогда время перехода из  $x_0$  в этот эллипсоид даст нам искомую оценку.<sup>1</sup>

#### 6.4. Положительные линейные системы

Во многих прикладных задачах переменные по своей природе являются неотрицательными величинами. Достаточно упомянуть очевидные примеры из физики, химии, биологии, экономики, экологии. Естественно, это свойство должно найти отражение в математических моделях таких систем, в частности, дифференциальных уравнениях, описывающих их динамику. Будем рассматривать линейные системы вида

$$\dot{x} = Ax$$

с постоянной матрицей  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; система называется *положительной*, если из  $x(0) > 0$  следует  $x(t) > 0$  для всех  $t > 0$ . Разумеется, большинство из прикладных задач с положительными переменными описываются нелинейными моделями, однако, ограничимся линейным случаем, имеющим свою специфику и позволяющим развить интересный математический аппарат исследования.

В данном разделе приведем основные свойства положительных систем (условия положительности, условия устойчивости, робастность, влияние внешних возмущений) и типичные задачи управления для них (стабилизация, оптимизация по различным критериям). Оказывается, здесь существуют специфические уточнения общей теории линейных систем управления (линейная функция Ляпунова вместо квадратичной, линейные векторные неравенства вместо линейных матричных неравенств, линейные критерии оптимальности вместо квадратичных и т.д.)

<sup>1</sup>Поскольку любой инвариантный эллипсоид содержит достижимое множество  $\mathcal{R}$  системы, то при достаточно малой окрестности  $\Omega$  эта задача может оказаться неразрешимой — может не найтись инвариантного эллипсоида, который бы помещался внутри  $\Omega$ .



### 6.4.1. Условия положительности и устойчивости

Напомним, что система

$$\dot{x} = Ax, \quad (6.4.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ , называется *положительной*, если<sup>1</sup> из  $x(0) > 0$  следует  $x(t) > 0$  для всех  $t > 0$ . Нетрудно привести легко проверяемые необходимые и достаточные условия положительности систем.

**Теорема 6.4.1.** Система (6.4.1) положительна тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j.$$

Этот результат хорошо известен и просто доказывается. Действительно, на границе неотрицательного ортанта (то есть при  $x_i = 0$ ) должно быть  $\dot{x}_i \geq 0$  для всех  $x_j$ ,  $j \neq i$ , что возможно лишь, если  $a_{ij} \geq 0$ ,  $i \neq j$  для всех  $i, j$ . Интересно, что диагональные элементы матрицы  $A$  могут быть любого знака; положительность определяется знаком недиагональных элементов. Заметим, что свойство положительности системы не инвариантно относительно преобразований координат; оно привязано к координатной форме матрицы, а не к ее спектральным характеристикам.

Весьма важный вопрос об устойчивости положительных систем также имеет простой и конструктивный ответ, не связанный с вычислением собственных значений матрицы  $A$ . Для общих линейных систем условие устойчивости заключается в существовании квадратичной функции Ляпунова, то есть сводится к линейным матричным неравенствам. Оказывается, что для положительных систем устойчивость эквивалентна существованию *диагональной* квадратичной функции Ляпунова или существованию *линейной* функции Ляпунова.

**Теорема 6.4.2.** Для положительной системы

$$\dot{x} = Ax$$

следующие условия эквивалентны:

1. Матрица  $A$  гурвицева;
2. Существует диагональная квадратичная функция Ляпунова, то есть найдется

$$V(x) = x^T D x, \quad D = \text{diag}\{d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n\}, \quad d_i > 0,$$

<sup>1</sup>Здесь и далее векторные и матричные неравенства понимаются покомпонентно.

такая, что

$$DA + A^T D < 0;$$

3. Существует линейная функция Ляпунова

$$V(x) = h^T x, \quad h > 0,$$

такая, что

$$-A^T h > 0;$$

4.  $\exists h > 0: Ah < 0;$

5.  $A^{-1} \leq 0;$

6.  $(A^T)^{-1} \leq 0.$

**Доказательство.** Мы не будем приводить полное доказательство этой теоремы, оно может быть найдено в книгах, приводимых в библиографии. Отметим лишь, что основная идея заключается в том, что при надлежащем выборе  $t$  матрица  $A + tI$  будет неотрицательной, поэтому к ней можно применить результаты для дискретных систем, см. доказываемую ниже Теорему 6.4.4. ■

Будем матрицу  $A$  называть *M-матрицей*, если она гурвицева и для нее выполнено условие (6.4.1); в этом случае пишем:  $A \in \mathcal{M}$  (заметим, что в некоторых работах терминология несколько иная).

Таким образом, проверка факта  $A \in \mathcal{M}$  сводится к проверке разрешимости линейных неравенств

$$h > 0, \quad Ah < 0, \tag{6.4.2}$$

что может быть реализовано без труда стандартными средствами линейного программирования.

В качестве примера рассмотрим аналог Леммы Беллмана (см. Лемму 2.5.1). В ней речь шла о вычислении квадратичного функционала на решении линейной системы; здесь же изучим вычисление линейного интегрального критерия.

Пусть

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad A \in \mathcal{M}. \tag{6.4.3}$$

Нас интересует значение интеграла

$$J = \int_0^{\infty} c^T x(t) dt, \quad c > 0, \tag{6.4.4}$$

как функция от начального условия  $x_0$ .

**Лемма 6.4.1.** *Значение функционала (6.4.4) на решениях системы (6.4.3) равно*

$$J = -c^\top (A^\top)^{-1} x_0.$$

**Доказательство.** Возьмем  $p = -(A^\top)^{-1}c$ , тогда  $V(x) = p^\top x$  будет функцией Ляпунова, поскольку

$$p > 0, \quad A^\top p < 0,$$

и

$$\dot{V}(x) = p^\top Ax = p^\top A^\top x = -c^\top x < 0.$$

Интегрируя это равенство от нуля до бесконечности и учитывая, что  $V(x(\infty)) = 0$ , получаем требуемый результат. ■

Приведем аналогичные результаты для дискретных систем. Система

$$x_{k+1} = Ax_k, \tag{6.4.5}$$

где  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , называется *положительной*, если из  $x_0 > 0$  следует  $x_k > 0$  для всех  $k > 0$ . Условия положительности здесь даже проще, чем для непрерывного случая.

**Теорема 6.4.3.** *Система (6.4.5) положительна тогда и только тогда, когда*

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Доказательство этого факта очевидно. Таким образом, положительные дискретные системы — те, у которых матрица  $A$  неотрицательна. Такие матрицы обладают рядом замечательных свойств, из которых нам понадобится следующий результат типа теоремы Перрона–Фробениуса.

**Лемма 6.4.2.** *Пусть  $A \geq 0$  квадратная матрица, а  $\rho$  ее спектральный радиус. Тогда найдется вещественный собственный вектор  $x \geq 0$  такой, что*

$$Ax = \rho x.$$

Иными словами, наибольшее по модулю собственное значение неотрицательной матрицы вещественно и неотрицательно, и ему соответствует *неотрицательный* собственный вектор. Заметим, что этот собственный вектор не обязательно единственный, и могут найтись комплексные собственные значения, равные по модулю спектральному радиусу.

Сформулируем условия устойчивости положительных дискретных систем.

**Теорема 6.4.4.** Для положительной дискретной системы

$$x_{k+1} = Ax_k$$

следующие условия эквивалентны:

1.  $A$  — шуровская матрица;
2. существует диагональная квадратичная функция Ляпунова

$$V(x) = x^\top D x, \quad D = \text{diag}\{d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n\}, \quad d_i > 0,$$

такая, что

$$A^\top D A - D < 0;$$

3. существует линейная функция Ляпунова:

$$V(x) = c^\top x, \quad c > 0,$$

такая, что

$$A^\top c \leq c;$$

4.  $\exists h > 0: \quad Ah < h;$
5.  $(I - A)^{-1} \geq 0;$
6.  $(I - A^\top)^{-1} \geq 0.$

Таким образом, и здесь проверка устойчивости сводится к разрешимости системы линейных неравенств

$$h > 0, \quad Ah < h.$$

Заметим еще, что из приводимых ниже доказательств видно, как по решениям таких линейных неравенств строить диагональную квадратичную или линейную функцию Ляпунова.

**Доказательство.** (1)  $\rightarrow$  (4). Пусть  $A$  — шуровская матрица, тогда матрица  $I - A$  невырождена и

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$$

Возьмем  $y > 0$  и вычислим

$$h = (I - A)^{-1} y = y + Ay + A^2 y + \cdots > 0.$$

Для вектора  $h$  имеем  $h - Ah = y > 0$ , то есть условие (4) выполнено.

(4)  $\rightarrow$  (1). Пусть  $Ah < h$ ,  $h > 0$ ; тогда  $Ah < qh$  для некоторого  $q < 1$ . В соответствии с Леммой 6.4.2 у матрицы  $A$  есть собственный вектор  $x \geq 0$  такой, что

$$Ax = \rho x,$$

где  $\rho$  — спектральный радиус матрицы  $A$ .

За счет нормировки можно сделать  $0 < x < h$ , тогда

$$\rho^k x = A^k x \leq A^k h < q^k h$$

и  $\rho^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ; тем самым  $\rho < 1$ .

(1)  $\iff$  (2). Достаточно доказать, что (1)  $\rightarrow$  (2) (противоположное вложение очевидно). Поскольку  $A$  и  $A^\top$  — шуровские матрицы, то в соответствии с условием (4) найдутся векторы  $x > 0$ ,  $y > 0$ , такие, что

$$Ax < x, \quad A^\top y < y.$$

Возьмем матрицу

$$D = \text{diag}\{d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n\}, \quad d_k = y_k/x_k,$$

и вектор  $z = \sqrt{x_k y_k}$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} D^{-1/2} A^\top D A D^{-1/2} z &= D^{-1/2} A^\top D A x < \\ &< D^{-1/2} A^\top D x = D^{-1/2} A^\top y < D^{-1/2} y = z \end{aligned}$$

и в соответствии с условием (4) матрица  $D^{-1/2} A^\top D A D^{-1/2}$  шуровская. Поскольку она симметрична, то  $D^{-1/2} A^\top D A D^{-1/2} < I$ , откуда и следует условие (2).

Остальные импликации доказываются весьма просто. Например, докажем (1)  $\iff$  (3): пусть  $A$  — шуровская матрица; выберем вектор  $h > 0$ ,  $A^\top h < h$  и построим функцию  $V(x) = h^\top x$ . Тогда

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) = (A^\top h - h)^\top x_k < 0. \quad \blacksquare$$

**Пример 6.4.1.** В качестве примера рассмотрим *стохастическую* (по строкам) матрицу  $A$  такую, что

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Такие матрицы возникают, например, в теории цепей Маркова или в задаче PageRank.

Система

$$x_{k+1} = Ax_k$$

положительна, но не устойчива (как правило,  $x_k \rightarrow x^*$ , где  $x^*$  — главный собственный вектор  $Ax^* = x^*$ , см. теорему Перрона-Фробениуса). Однако если

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} < 1 \quad \forall i,$$

то матрица  $A$  будет устойчивой, поскольку выполняется условие

$$h > 0, \quad Ah < h, \quad h = e = (1 \ \dots \ 1)^\top. \quad \blacktriangledown$$

### 6.4.2. Внешние возмущения

Рассмотрим теперь линейные системы с внешними возмущениями:

$$\dot{x} = Ax + Dw. \quad (6.4.6)$$

Здесь  $w$  — либо внешнее возмущение, либо (программное) управление.

Для положительности системы (6.4.6) и ограниченности ее траекторий необходимы и достаточны условия

$$A \in \mathcal{M}, \quad D \geq 0, \quad 0 \leq w \leq e,$$

где, как и ранее,  $e = (1 \ \dots \ 1)^\top$ .

Действительно, например, при нарушении условия  $w \geq 0$  траектория системы может выйти из неотрицательного ортанта. В дальнейшем будем предполагать выполнение этих условий. Заметим, что более общие интервальные ограничения

$$0 \leq w_i \leq c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

легко сводятся к рассматриваемому случаю за счет масштабирования матрицы  $D$ .

Нас интересуют:

- *инвариантные множества*: при  $x(0) \in Q$  выполняется  $x(t) \in Q$  для всех  $t \geq 0$  и всех  $0 \leq w(\tau) \leq e$ ;
- *предельно достижимые множества*:  $\bigcap_T \{x(T)\}$  при  $x(0) = 0$ ;
- *притягивающие множества*:  $x(t) \rightarrow Q$  при  $t \rightarrow \infty$  для всех  $x(0)$ .

Исследование этих объектов для линейных систем, не являющихся положительными, проведено в Главе 3. Там в качестве соответствующих множеств удобно брать эллипсоиды; здесь же они являются параллелепипедами (интервальные ограничения на возмущения  $0 \leq w \leq e$  порождают интервальные ограничения на траекторию).

**Теорема 6.4.5.** *Любое инвариантное множество для линейной системы (6.4.6) содержит параллелепипед*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq -A^{-1}De\}$$

и это множество является минимальным инвариантным, предельно достижимым и притягивающим множеством.

**Доказательство.** *Достижимое множество.* Пусть  $Q(T)$  — достижимое из нуля множество к моменту  $T$ ; оно выпукло, замкнуто и ограничено. Решив задачу

$$c^\top x \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$c > 0, \quad x \in Q(T),$$

находим

$$\begin{aligned} \max_w c^\top x(T) &= \max_w \int_0^T c^\top e^{A(T-t)} Dw dt = \\ &= \max_w \int_0^T w^\top D^\top e^{A^\top(T-t)} c dt. \end{aligned}$$

Но поскольку

$$D \geq 0, \quad c > 0, \quad e^{A^\top t} \geq 0,$$

то максимум по  $0 \leq w \leq e$  достигается при  $w = e$  при всех  $t$  и  $c > 0$ .

Таким образом, на множестве  $Q(T)$  максимум линейной функции  $(c, x)$ ,  $c > 0$ , достигается в одной точке  $x(T)$ , являющейся решением системы

$$\dot{x} = Ax + De, \quad x(0) = 0.$$

При этом  $x(T) \rightarrow -A^{-1}De$ . Множество с таким свойством является параллелепипедом

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq -A^{-1}De\}.$$

*Инвариантное множество.* Пусть точка  $x$  не принадлежит множеству  $Q$ , то есть

$$x_i > (-A^{-1}De)_i$$

для некоторого  $i$ .

Возьмем функцию

$$V(x) = h^\top x, \quad h = -(A^\top)^{-1}e_i,$$

где

$$e_i = \underbrace{(0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)}_i.$$

Тогда

$$h > 0, \quad A^\top h < 0,$$

и функция  $V$  будет функцией Ляпунова для системы без возмущений.

Для нее

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= h^\top (Ax + Dw) \leq -e_i^\top x + e_i^\top (-A^{-1}De) = \\ &= -x_i + (-A^{-1}De)_i < 0, \end{aligned}$$

то есть траектория притягивается к  $Q$ . ■

Аналогичный результат для дискретной системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \tag{6.4.7}$$

где

$$A \geq 0, \quad D \geq 0, \quad 0 \leq w_k \leq e,$$

формулируется следующим образом. Будем предполагать, что  $A$  — шуровская матрица, а ограничения на возмущение имеют тот же вид, что и для непрерывной системы.

**Теорема 6.4.6.** *Минимальное инвариантное, предельное достижимое, притягивающее множество системы (6.4.7) является параллелепипедом*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq (I - A)^{-1}De\}.$$

Доказательство аналогично приведенному выше для непрерывных систем.



В качестве примера рассмотрим метод последовательных приближений для решения системы линейных алгебраических уравнений при наличии помех. Рассмотрим систему

$$x = Ax + b$$

с матрицей  $A$  такой, что

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} < 1,$$

и вектором  $b \geq 0$  (они нам неизвестны) и пусть в точках  $x_k$  нам доступны векторы

$$s_k = Ax_k + b + w_k,$$

содержащие помеху  $w_k$ . Будем предполагать, что помехи ограничены:

$$0 \leq w_k \leq \varepsilon e$$

(предположение о неотрицательности помех отчасти искусственно и сделано для упрощения результатов; от него можно избавиться путем замены переменных).

Мы будем применять для решения метод последовательных приближений:

$$x_{k+1} = Ax_k + b + w_k,$$

при этом будем считать что

$$x_0 > x^* = (I - A)^{-1}b,$$

то есть начальное приближение мажорирует решение.

Обозначим

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x - x^* \leq (I - A)^{-1}De\}$$

и введем правило остановки итераций:

$$|x_{k+1} - x_k|_\infty \leq \mu\varepsilon, \quad \mu > 2.$$

**Теорема 6.4.7.** *Параллелепипед  $Q$  является притягивающим инвариантным множеством итерационного метода; условие останова заведомо выполнится за конечное число итераций и при этом будет*

$$x_k \in (\mu - 1)Q,$$

*то есть полученное приближение будет близко к минимальному предельно достижимому множеству для данного уровня помех.*

### 6.4.3. Стабилизация

Вернемся к задаче без возмущений, но с управлением:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (6.4.8)$$

причем управление будем искать в форме линейной обратной связи

$$u = Kx.$$

При этом не предполагается, что  $A \in \mathcal{M}$  и задача заключается в том, чтобы сделать  $A + BK \in \mathcal{M}$ .

Для этого нужно

$$a_{ij} + b_i k_j \geq 0, \quad i \neq j, \quad h > 0, \quad Ah + B \sum_i k_i h_i < 0,$$

где  $k_i$  — столбец искомой матрицы  $K$ , а  $h_i$  — компонента искомого вектора  $h$ .

Эта система неравенств нелинейна относительно  $K$  и  $h$ . Сделаем замену

$$k_i h_i = y_i \in \mathbb{R}^n$$

и получим

$$\begin{aligned} a_{ij} h_j + b_i y_j &\geq 0, \quad i \neq j, \\ h > 0, \quad Ah + B \sum_i y_i &< 0. \end{aligned}$$

Эти неравенства линейны по  $y$  и  $h$ ; решив их, найдем обратную связь

$$K = (k_1 \quad \cdots \quad k_n), \quad k_i = y_i / h_i.$$

Однако, в отличие от обычной задачи стабилизации, управляемость пары  $(A, B)$  не гарантирует возможность сделать замкнутую систему (6.4.8) положительной и устойчивой. Заметим, что вместо привычной задачи с ЛМІ для стабилизации общих линейных систем (см. Главу 2) получена система линейных векторных неравенств.

### 6.4.4. Робастность

Некоторые задачи с неопределенностями получают для положительных систем неожиданно простое решение. Рассмотрим лишь один характерный пример — проблему робастной устойчивости интервальных матриц. В общем случае эта проблема исключительно сложна —

например, даже проверка на устойчивость всех “вершинных” матриц (в которых элементы принимают крайние значения) не гарантирует робастной устойчивости семейства. Однако для положительных систем критерий оказывается исключительно простым.

Рассмотрим интервальное семейство матриц:

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}\}.$$

Мы хотим установить критерий, гарантирующий, что все матрицы из этого семейства принадлежат  $\mathcal{M}$ , то есть что все системы  $\dot{x} = Ax$  положительны и устойчивы.

Составим матрицу  $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$  такую, что

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \bar{a}_{ii}, & i = j, \\ \underline{a}_{ij}, & i \neq j. \end{cases}$$

**Теорема 6.4.8.** *Для робастной устойчивости и положительности семейства  $\mathcal{A}$  необходима и достаточна гурвицевость матрицы  $\tilde{A}$  и выполнение условий*

$$\underline{a}_{ij} \geq 0, \quad i \neq j. \quad (6.4.9)$$

**Доказательство.** В соответствии с Теоремой 6.4.1, для положительности семейства  $\mathcal{A}$  необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j,$$

для всех матриц из  $\mathcal{A}$ . Ясно, что это эквивалентно условию (6.4.9).

Для гурвицевости всех матриц из семейства  $\mathcal{A}$  необходимо и достаточно выполнение условий (6.4.2). Однако если это условие выполнено для матрицы  $\tilde{A}$ , то оно выполнено и для любой матрицы из заданного семейства. ■

Не станем останавливаться на других задачах робастности положительных систем; приведенный пример вполне характеризует как специфику таких задач, так и возможную технику исследования.

## Глава 7

# Вычислительные методы и практические задачи

### 7.1. Программные пакеты и вычислительные средства

Все рассмотренные в книге задачи эффективно решаются численно с помощью процедур выпуклой оптимизации, в основе которых лежат так называемые *методы внутренней точки*. Описание этих методов и их строгое обоснование выходят за рамки настоящей книги, поэтому не будем останавливаться на этих вопросах. В данном разделе коротко обсудим программную реализацию этих численных процедур применительно к одной из рассмотренных выше задач о подавлении возмущений.

В качестве программной среды для численных расчетов во всех примерах нами использовалась среда MATLAB,; при этом для решения задач полуопределенного программирования привлекались два свободно распространяемых пакета SeDuMi и YALMIP, работающие в среде MATLAB. Первый из них (аббревиатура от Self-Dual Minimization) представляет собой библиотеку программ, реализующих численные процедуры (решатели) для широкого круга задач оптимизации. Второй пакет, YALMIP (Yet Another LMI Parser) является простым и гибким языком обращения к решателям (интерфейс).

Ниже приведен типичный пример кода для решения задачи о подавлении возмущений при явном ограничении на управление из Примера 4.2.2 и прокомментированы процедуры пакета YALMIP.

```

1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  % Построение минимального (по следу) ограничивающего эллипсоида
3  % для выхода z непрерывной системы
4  % dot x = Ax + Bu + Dw, |w| <= 1
5  % z = Cx
6  % с помощью статической линейной обратной связи по состоянию
7  % u = Kx
8  % при ограничении на величину управления вдоль траектории
9  % |Kx| <= mu
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 clear all; clc;
12 global A B D K_opt; % глобальные переменные
13 % (для передачи в функцию решения дифф. ур-я)
14 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ДАННЫЕ %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
15 A = [ 0 0 1 0 % матрицы системы
16 0 0 0 1
17 -1 1 0 0
18 1 -1 0 0 ];
19 B = [ 0; 0; 1; 0 ];
20 D = [ 0; 0; 0; 1 ];
21 C = [ 1 0 0 0
22 0 1 0 0 ];
23 mu = 2.8951; % допустимое ограничение на величину управления
24 alp_min = 0.01; % интервал варьирования параметра alpha
25 alp_max = 0.48; % (см. Замечание 4.2.4)
26
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% РЕШЕНИЕ %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28 N = 50;
29 dalp = (alp_max-alp_min)/N; % величина шага дискретизации по alpha
30
31 P = sdpvar(4); % матричная SDP переменная 4 x 4
32 Y = sdpvar(1,4); % матричная SDP переменная 1 x 4
33 opts = sdpsettings('verbose',0); % подавить вывод диагностики решателя
34
35 %% Решить задачу SDP из Теоремы 4.2.3 для каждого значения alpha
36 k = 0;
37 for alp = alp_min:dalp:alp_max
38 k = k+1
39
40 M1 = A*P+P*A'+alp*P+B*Y+Y'*B'+D*D'/alp; % ограничение (4.2.14)
41
42 M2 = [ P Y';... % ограничение (4.2.15)
43 Y mu^2*eye(1) ];
44
45 constr = set(M1<=0) + set(M2>=0); % задать LMI ограничения
46 solvesdp(constr, trace(C*P*C'), opts); % решить задачу SDP
47
48 P_sol = double(P); % получить числовые
49 Y_sol = double(Y); % значения решения
50 Pmatrices(:, :, k) = P_sol; % при данном alpha
51 Ymatrices(:, :, k) = Y_sol; % и запомнить

```



менных и числовых констант. Обсудим имеющиеся в тексте команды интерфейса YALMIP, относящиеся к решению задачи полуопределенного программирования; остальные строки представляют собой стандартные команды языка MATLAB, и их описание может быть найдено в руководстве пользователю.

Строка 31 задает матричную переменную  $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , которая по умолчанию является симметричной, а в строке 32 задается матричная переменная  $Y \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ . Обе переменные имеют символьный формат. Команда в строке 33 предписывает не выводить на экран текущую информацию о процессе решения задачи SDP, решатель которой будет вызываться в основном цикле (строки 37–53).

В строках 40, 42 и 43 строятся матрицы, зависящие от введенных переменных, а в строке 45 задаются соответствующие ограничения (4.2.14) и (4.2.15) в форме линейных матричных неравенств для задачи SDP.

В строке 46 вызывается решатель задачи SDP: при LMI-ограничениях `constr` минимизируется линейная функция — след матрицы ограничивающего эллипсоида. Наконец, командой `double` в строках 48 и 49 значения матричных переменных, полученные в результате оптимизации, конвертируются в числовой формат.

Общее время счета на стандартном персональном компьютере составляет около 5 секунд.

## 7.2. Итерационный метод

Основная схема построения минимального инвариантного (или ограничивающего) эллипсоида, используемая в книге, заключается в решении при каждом фиксированном значении скалярного параметра  $\alpha$  задачи полуопределенного программирования с последующим выбором минимального среди полученных решений. Однако в настоящее время выпуклость целевой функции по параметру  $\alpha$  в задачах *подавления возмущений* не доказана. Кроме того, в некоторых постановках область допустимых значений параметра нелегко определить, равно как и величину шага дискретизации по  $\alpha$ .

Ниже излагается численный метод решения указанных задач, позволяющий избежать процедуры одномерной минимизации. Строгое обоснование его сходимости пока остается открытой задачей, однако на конкретных примерах метод сходится и притом весьма быстро.

### 7.2.1. Непрерывный случай

#### Анализ

Рассмотрим систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$\|w(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0. \quad (7.2.2)$$

Напомним, что согласно Теореме 3.1.1 наименьший ограничивающий эллипсоид для выхода  $z$  системы (7.2.1), (7.2.2), определяется матрицей  $C\hat{P}C^\top$ , где  $\hat{P}$  является решением задачи

$$\text{tr } CPC^\top \rightarrow \min \quad (7.2.3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top &\preceq 0, \\ P &\succ 0, \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярному параметру  $\alpha$ .

Эта задача невыпукла по совокупности переменных  $P$  и  $\alpha$  (но выпукла по каждой из них в отдельности). Предложим итерационный метод решения задачи (7.2.3)–(7.2.4), позволяющий избежать процедуры одномерной минимизации по параметру  $\alpha$ .<sup>1</sup>

Итак, введем новую скалярную переменную

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

При этом неравенство (7.2.4) примет вид

$$AP + PA^\top + \frac{1}{\beta^2} P + \beta^2 DD^\top \preceq 0. \quad (7.2.5)$$

<sup>1</sup>Конечно, для задачи анализа можно явным образом указать интервал для параметра  $\alpha$ , а именно  $0 < \alpha < -2 \max_i \text{Re } \lambda_i(A)$ , см. Следствие 3.1.3. Однако уже для задачи синтеза сделать это не так просто.



В силу Леммы Е.2 имеем

$$\frac{1}{\beta^2}P \preceq F(2\beta F - P)^{-1}F, \quad (7.2.6)$$

где  $F = F^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — произвольная матрица, такая что  $2\beta F - P \succ 0$ . При этом матричное неравенство (7.2.6) обращается в равенство при  $\beta F = P$ .

Как следует из (7.2.6), если выполнено матричное неравенство

$$AP + PA^\top + F(2\beta F - P)^{-1}F + \beta^2 DD^\top \preceq 0,$$

эквивалентное по лемме Шура линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top & \beta D & F \\ * & -I & 0 \\ * & * & P - 2\beta F \end{pmatrix} \preceq 0,$$

то выполнено и неравенство (7.2.5).

Итак, будем решать задачу полуопределенного программирования

$$\text{tr } CPC^\top \longrightarrow \min \quad (7.2.7)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top & \beta D & F \\ * & -I & 0 \\ * & * & P - 2\beta F \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad \beta > 0, \quad (7.2.8)$$

относительно по матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\beta$ , а матрицу  $F$  будем подбирать итеративно.

Если при этом окажется, что  $\beta F = P$ , то решение задачи (7.2.3)–(7.2.4) найдено. Поэтому качестве  $F_0$  выберем произвольную (достаточно большую) симметрическую матрицу и на  $(k+1)$ -м шаге будем полагать

$$F_{k+1} = \frac{P_k}{\beta_k}, \quad (7.2.9)$$

где  $P_k, \beta_k$  — решение задачи (7.2.7)–(7.2.8), полученное на  $k$ -м шаге.

При этом оказывается справедливым следующее утверждение.

**Утверждение 7.2.1.** Пусть  $P_k, \alpha_k$  есть решение задачи (7.2.7), (7.2.8), (7.2.9), полученное на  $k$ -м итерационном шаге. Тогда

$$P_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{P},$$

$$\beta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}},$$

где  $\hat{P}$ ,  $\hat{\alpha}$  — решение задачи (7.2.3)–(7.2.4).

Еще раз подчеркнем, что авторы не располагают строгим доказательством этого утверждения, однако, численные эксперименты подтверждают работоспособность метода.

Отметим, что итерационный процесс сходится с экспоненциальной скоростью и его результат не зависит от выбора начального условия — матрицы  $F_0$ .

**Пример 7.2.1.** Вновь вернемся к Примеру 3.1.2 и воспользуемся предложенным подходом.

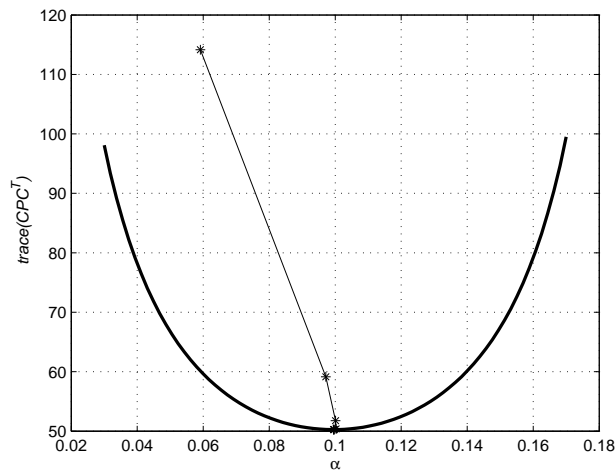


Рис. 7.2.1. График функции  $\text{tr } CP(\alpha)C^T$  и результат итерационного процесса для системы из Примера 7.2.1.

На Рис. 7.2.1 построена зависимость следа матрицы  $\text{tr } CP(\alpha)C^T$  от величины  $\alpha$  (жирная кривая), полученная одномерной сеткой по  $\alpha$ . На этом же рисунке показаны результаты работы итерационного метода: символы “\*” соответствуют точкам

$$(\alpha_k, \text{tr } CP_k C^T).$$

Уже после шестой итерации величина  $\alpha_k$  отличается от оптимального  $\hat{\alpha}$  на величину порядка  $10^{-4}$ , а след матрицы эллипса для выхода системы отличается от оптимального на величину порядка  $10^{-3}$ .

Имеем:

$$C\hat{P}C^\top = \begin{pmatrix} 19,8400 & 9,9839 \\ 9,9839 & 30,4148 \end{pmatrix}$$

и

$$CP_kC^\top = \begin{pmatrix} 19,8374 & 9,9820 \\ 9,9820 & 30,4161 \end{pmatrix}.$$

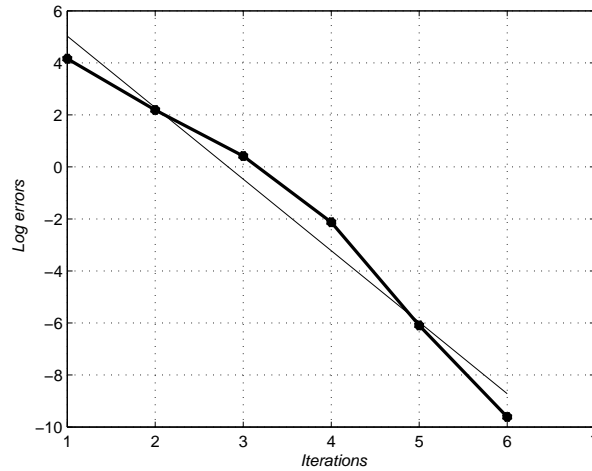


Рис. 7.2.2. Скорость сходимости итерационного процесса для системы из Примера 7.2.1.

На Рис. 7.2.2 в логарифмическом масштабе показана зависимость невязки процесса

$$\text{tr } CP_kC^\top - \text{tr } C\hat{P}C^\top$$

от числа  $k$  итераций. Нетрудно видеть, что процесс сходится с экспоненциальной скоростью; на том же рисунке показана прямая соответствующей линейной регрессии (тонкая линия) с тангенсом угла наклона  $-2,75$ . ▼

Далее рассмотрим модификации предложенного итерационного метода применительно к задаче синтеза управления, задаче фильтрации, а также рассмотрим дискретные варианты этих задач.

**Задача синтеза**

Теперь рассмотрим модификацию итерационного метода для непрерывной системы управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , минимизируемым выходом  $z(t) \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (7.2.2).

Будем искать регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx,$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида выхода) подавляет воздействие внешних возмущений.

Как показано в разделе 4.2.1, решение этой задачи дается Теоремой 4.2.1, предполагающей проведение процедуры одномерной минимизации по параметру  $\alpha$ . При этом аналогом матричного неравенства (7.2.4) является неравенство

$$(A + B_1 K)P + P(A + B_1 K)^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D D^\top \preceq 0.$$

Применяя к нему предложенную выше технику, приходим к задаче

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2 Y C^\top + B_2 Z B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top & \beta D & F \\ * & -I & 0 \\ * & * & P - 2\beta F \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad P \succ 0, \quad \beta \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярной переменной  $\beta$ .

Параметр  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  вновь подбирается итеративно. Взяв в качестве  $F_0$  произвольную (достаточно большую) симметрическую матрицу, на  $(k+1)$ -м шаге будем полагать

$$F_{k+1} = \frac{P_k}{\beta_k},$$

где  $P_k, \beta_k$  — решение задачи, полученное на  $k$ -м шаге.

При этом, как показывают численные эксперименты, оказывается, что

$$\begin{aligned} P_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{P}, \\ Y_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{Y}, \\ \beta_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}}, \end{aligned}$$

где  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{\alpha}$  — значения величин  $P, Y, Z, \alpha$ , предоставляемые Теоремой 4.2.1, и, следовательно,

$$K_k = Y_k P_k^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1},$$

где  $\hat{K}$  — оптимальный регулятор в задаче (7.2.10), (7.2.2).

**Пример 7.2.2.** Вновь рассмотрим задачу из Примера 4.2.1.

На Рис. 7.2.3 построена зависимость следа матрицы  $\text{tr} CP(\alpha)C^\top$  от величины  $\alpha$  (жирная кривая), полученная одномерной сеткой по  $\alpha$ .

На этом же рисунке показаны результаты работы итерационного метода: символы “\*” соответствуют точкам

$$(\alpha_k, \text{tr}(C + B_2 K_k)P(\alpha_k)(C + B_2 K_k)^\top).$$

После тридцатой итерации величина  $\alpha_k$  отличается от оптимального  $\hat{\alpha}$  на величину порядка  $10^{-3}$ ; такого же порядка и отличие следа матрицы эллипса для выхода системы от оптимального.

На Рис. 7.2.4 в логарифмическом масштабе показана зависимость невязки

$$\text{tr} CP(\alpha_k)C^\top - \text{tr} C\hat{P}C^\top$$

рассматриваемого итерационного процесса от числа  $k$  итераций. Процесс сходится с экспоненциальной скоростью: на том же рисунке показана прямая соответствующей линейной регрессии (тонкая линия) с тангенсом угла наклона  $-0,34$ . ▼

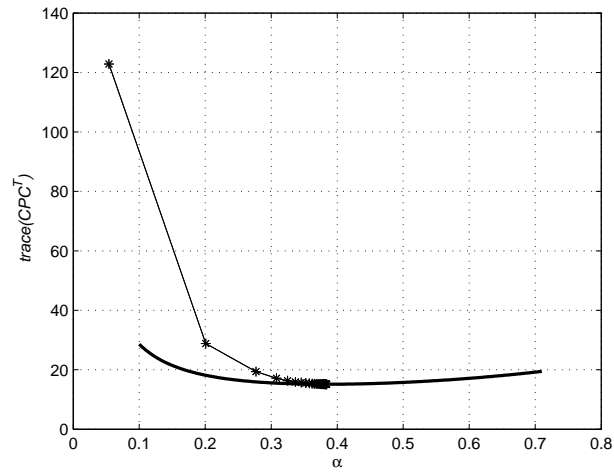


Рис. 7.2.3. График функции  $\text{tr } CP(\alpha)C^T$  и результат итерационного процесса для системы из Примера 7.2.2.

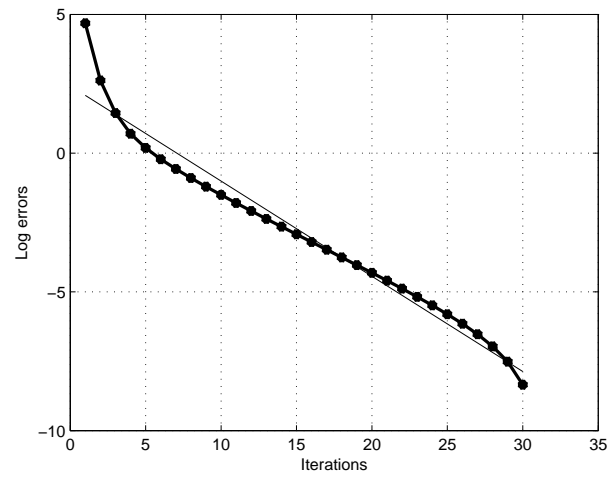


Рис. 7.2.4. Скорость сходимости итерационного процесса для системы из Примера 7.2.2.

**Задача фильтрации**

Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ , с фазовым состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением (шумом)  $w(t) \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (7.2.2).

Будем искать матрицу фильтра  $L$ , обеспечивающую оптимальную точность фильтрации в смысле минимальности инвариантного эллипсоида, содержащего рассогласование между состоянием системы  $x$  и его прогнозом  $\hat{x}$ , описываемым уравнением

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}).$$

Решение задачи предоставляет Теорема 3.2.1, предполагающая проведение одномерной минимизации по скалярному параметру  $\alpha$ . При этом аналогом неравенства (7.2.4) служит матричное неравенство

$$(A - LC)P + P(A - LC)^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^\top \preceq 0.$$

Домножив его слева и справа на матрицу  $Q = P^{-1}$  и положив  $\alpha = \frac{1}{\beta^2}$ , имеем

$$\begin{aligned} (A - LC)^\top Q + Q(A - LC) + \frac{1}{\beta^2}Q + \\ + \beta^2 Q(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^\top Q \preceq 0. \end{aligned}$$

Введя в рассмотрение матрицу

$$R = \beta^2 Q,$$

получаем

$$\begin{aligned} (A - LC)^\top R + R(A - LC) + \frac{1}{\beta^2}R + \\ + R(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^\top R \preceq 0. \end{aligned}$$

Применяя к нему предложенную выше технику, с учетом леммы Шура приходим к линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} (A - LC)^\top R + R(A - LC) & F & R(D_1 - LD_2) \\ * & R - 2\beta F & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или, вводя матричную переменную

$$Z = RL,$$

окончательно получаем

$$\begin{pmatrix} A^\top R + RA - ZC - C^\top Z^\top & F & RD_1 - ZD_2 \\ * & R - 2\beta F & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Нашей задачей является минимизация эллипсоида для невязки с матрицей

$$P = Q^{-1} = \beta^2 R^{-1}.$$

Введем матричную переменную  $H = H^\top$  такую, что

$$\beta^2 R^{-1} \preceq H;$$

при этом последнее неравенство эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} H & \beta I \\ \beta I & R \end{pmatrix} \succeq 0.$$

При этом ограничение  $P \succeq P_0$ , которое принимает вид

$$\frac{1}{\beta^2} R \preceq P_0^{-1},$$

в силу той же оценки гарантируется выполнением линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} P_0^{-1} & F \\ F & 2\beta F - R \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Итак, приходим к задаче

$$\text{tr } H \longrightarrow \min$$



при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^\top R + RA - ZC - C^\top Z^\top & F & RD_1 - ZD_2 \\ * & R - 2\beta F & 0 \\ * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P_0^{-1} & F \\ F & 2\beta F - R \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \begin{pmatrix} H & \beta I \\ \beta I & R \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$P \succ 0, \quad \beta \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $R = R^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\beta$ .

Взяв в качестве  $F_0$  произвольную (достаточно большую) симметрическую матрицу, на  $(k+1)$ -м шаге будем полагать

$$F_{k+1} = \frac{R_k}{\beta_k},$$

где  $R_k, \beta_k$  — решение задачи, полученное на  $k$ -м шаге.

При этом, как показывают численные эксперименты, оказывается, что

$$\beta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sqrt{\hat{\alpha}}},$$

$$\frac{R_k}{\beta_k^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{Q},$$

$$L_k = Z_k R_k^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{L} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y},$$

где  $\hat{Q}, \hat{Y}, \hat{\alpha}$  — значения величин  $Q, Y, \alpha$ , предоставляемые Теоремой 4.2.1, а  $\hat{L}$  — оптимальная матрица фильтра в задаче (7.2.11), (7.2.2).

### 7.2.2. Дискретный случай

#### Анализ

Предложенный подход полностью переносится и на системы в дискретном времени

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{7.2.12}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению

$$\|w_k\| \leq 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2.13)$$

Согласно Теореме 3.1.4, наименьший (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид для выхода  $z_k$  системы (7.2.12), (7.2.13), определяется матрицей  $C\hat{P}C^\top$ , где  $\hat{P}$  является решением задачи

$$\text{tr } CPC^\top \rightarrow \min \quad (7.2.14)$$

при ограничениях

$$\frac{1}{\alpha} APA^\top - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^\top \preceq 0, \quad (7.2.15)$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричной переменной  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярного параметра  $\alpha$ , нелинейно входящего в соотношение (7.2.15).

Введя переменную

$$\beta = \sqrt{\alpha},$$

представим матричное неравенство (7.2.15) в виде

$$AP\left(\frac{1}{\beta^2}P^{-1}\right)PA^\top - P + \frac{1}{1-\beta^2}DD^\top \preceq 0.$$

Воспользовавшись (7.2.6), имеем оценку

$$\frac{1}{\beta^2}P^{-1} \preceq F(2\beta F - P^{-1})^{-1}F,$$

которая обращается в равенство при  $F\beta = P^{-1}$ .

Поэтому, если выполнено матричное неравенство

$$APF(2\beta F - P^{-1})^{-1}FPA^\top - P + \frac{1}{1-\beta^2}DD^\top \preceq 0,$$

эквивалентное по лемме Шура линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -P & APF & 0 & D & 0 \\ * & -2\beta F & I & 0 & 0 \\ * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & \beta I \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

то выполнено и матричное неравенство (7.2.15).

Итак, приходим к задаче SDP

$$\operatorname{tr} CPC^T \longrightarrow \min \quad (7.2.16)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -P & APF & 0 & D & 0 \\ * & -2\beta F & I & 0 & 0 \\ * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & \beta I \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad (7.2.17)$$

относительно матричной переменной  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\beta$ .

Взяв в качестве  $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  произвольную (достаточно малую) симметрическую матрицу, на  $(k+1)$ -м шаге будем полагать

$$F_{k+1} = \frac{P_k^{-1}}{\beta_k}, \quad (7.2.18)$$

где  $P_k, \beta_k$  — решение задачи (7.2.16)–(7.2.17), полученное на  $k$ -м шаге.

Оказывается справедливым следующее утверждение.

**Утверждение 7.2.2.** Пусть  $P_k, \alpha_k$  — решение задачи (7.2.16)–(7.2.18), полученное на  $k$ -м итерационном шаге. Тогда

$$P_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \widehat{P},$$

$$\beta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sqrt{\widehat{\alpha}},$$

где  $\widehat{P}, \widehat{\alpha}$  — решение задачи (7.2.14)–(7.2.15).

Как и в непрерывном случае, авторы не располагают строгим доказательством этого результата, однако, метод оказывается вполне работоспособным, а итерационный процесс сходится с экспоненциальной скоростью.

### Задача синтеза

Как и в непрерывном случае, предложим модификацию итерационного метода для дискретной системы управления

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k + B_2 u_k, \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (7.2.13).

Будем искать регулятор  $K$  в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k,$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально подавляет воздействие внешних возмущений.

Как показано в разделе 4.2.2, решение задачи предоставляется Теоремой 4.2.5, также предполагающей проведение процедуры одномерной минимизации по параметру  $\alpha$ . Вместе с тем, применяя описанную в предыдущем разделе технику к замкнутой системе

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + B_1K)x_k + Dw_k, \\ z_k &= (C + B_2K)x_k, \end{aligned}$$

приходим к задаче

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -P & (AP + B_1Y)F & 0 & D & 0 \\ * & -2\beta F & I & 0 & 0 \\ * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & \beta I \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярной переменной  $\beta$ .

Взяв в качестве  $F_0$  произвольную (достаточно малую) симметрическую матрицу, на  $(k+1)$ -м шаге будем полагать

$$F_{k+1} = \frac{P_k^{-1}}{\beta_k},$$

где  $P_k, \beta_k$  — решение задачи, полученное на  $k$ -м шаге.

При этом, как показывают численные эксперименты, оказывается, что

$$\begin{aligned} P_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \widehat{P}, \\ Y_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \widehat{Y}, \\ \beta_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sqrt{\widehat{\alpha}}, \end{aligned}$$

где  $\widehat{P}$ ,  $\widehat{Y}$ ,  $\widehat{\alpha}$  — значения величин  $P$ ,  $Y$ ,  $\alpha$ , предоставляемые Теоремой 4.2.5. Следовательно,

$$K_k = Y_k P_k^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \widehat{K} = \widehat{Y} \widehat{P}^{-1},$$

где  $\widehat{K}$  — оптимальный регулятор в задаче (7.2.19), (7.2.13).

### Задача фильтрации

Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \end{aligned} \quad (7.2.20)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , с фазовым состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением (шумом)  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (7.2.13); пара  $(A, D_1)$  управляема, пара  $(A, C)$  наблюдаема.

Будем искать матрицу фильтра  $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ , обеспечивающую оптимальную точность фильтрации в смысле минимальности инвариантного эллипсоида, содержащего рассогласование между состоянием системы  $x_k$  и его прогнозом  $\widehat{x}_k$ , описываемым уравнением

$$\widehat{x}_{k+1} = A\widehat{x}_k + L(y_k - C\widehat{x}_k).$$

Решение задачи дается Теоремой 3.2.2, предполагающей проведение одномерной минимизации по скалярному параметру  $\alpha$ . При этом аналогом неравенства (7.2.15) является матричное неравенство

$$\frac{1}{\alpha}(A - LC)P(A - LC)^\top - P + \frac{1}{1 - \alpha}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^\top \preceq 0$$

или, положив  $\alpha = \beta^2$ ,

$$(A - LC) \frac{1}{\beta^2} Q^{-1} (A - LC)^{\top} - Q^{-1} + \\ + \frac{1}{1 - \beta^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^{\top} \preceq 0.$$

Применяя к нему предложенную выше технику, приходим к матричному неравенству

$$(A - LC)F(2\beta F - Q^{-1})^{-1}F(A - LC)^{\top} - Q^{-1} + \\ + \frac{1}{1 - \beta^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^{\top} \preceq 0,$$

откуда по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} - 2\beta F & F(A - LC)^{\top} & 0 \\ * & -Q^{-1} & D_1 - LD_2 \\ * & * & -(1 - \beta^2)I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Домножая полученное матричное неравенство слева и справа на матрицу  $\text{diag}\{I \quad Q \quad I\}$  и дважды воспользовавшись леммой Шура, получаем

$$\begin{pmatrix} -Q & I & 0 & 0 & 0 \\ * & -2\beta F & F(A - LC)^{\top} Q & 0 & 0 \\ * & * & -Q & Q(D_1 - LD_2) & 0 \\ * & * & * & -I & \beta I \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Введя вспомогательную матричную переменную  $Y = QL$ , окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} -Q & I & 0 & 0 & 0 \\ * & -2\beta F & F(A^{\top}Q - C^{\top}Y^{\top}) & 0 & 0 \\ * & * & -Q & QD_1 - YD_2 & 0 \\ * & * & * & * & \beta I \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Нашей задачей является минимизация эллипсоида для невязки с матрицей  $P = Q^{-1}$ . Согласно Следствию 2.2.3, приходим к задаче

$$\text{tr } H \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -Q & I & 0 & 0 & 0 \\ * & -2\beta F & F(A^\top Q - C^\top Y^\top) & 0 & 0 \\ * & * & -Q & QD_1 - YD_2 & 0 \\ * & * & * & -I & \beta I \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q \succ 0, \quad Q \preceq P_0^{-1},$$

относительно матричных переменных  $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$ ,  $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и скалярной переменной  $\beta$ .

Обратим внимание, что последнее из ограничений гарантирует выполнение требования  $P \succeq P_0$ .

Взяв в качестве  $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  произвольную симметрическую матрицу, на  $(k+1)$ -м шаге будем полагать

$$F_{k+1} = \frac{Q_k^{-1}}{\beta_k},$$

где  $Q_k, \beta_k$  — решение задачи, полученное на  $k$ -м шаге.

При этом, как показывают численные эксперименты, оказывается, что

$$\begin{aligned} \beta_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sqrt{\hat{\alpha}}, \\ Q_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{Q}, \\ Y_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{Y}, \end{aligned}$$

поэтому

$$L_k = Q_k^{-1} Y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \hat{L} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y},$$

где  $\hat{Q}, \hat{Y}, \hat{\alpha}$  — значения величин  $Q, Y, \alpha$ , предоставляемые Теоремой 3.2.2, а  $\hat{L}$  — оптимальная матрица фильтра в задаче (7.2.20), (7.2.13).

Системы, рассматриваемые в предыдущих главах, главным образом относятся к классу так называемых *strictly proper systems*,<sup>1</sup> в выходе которых отсутствуют внешние возмущения, в отличие от *proper systems*, в выходе которых внешние возмущения присутствуют. Предлагаемый итерационный метод легко распространяем и на *proper systems*, позволяя избежать процедуры многомерной минимизации (ср. с Теоремой 3.1.3).

<sup>1</sup>Русскоязычный аналог термина, по-видимому, отсутствует.

### 7.3. Некоторые практические задачи

#### 7.3.1. Подавление колебаний вертикального сооружения<sup>1</sup>

Рассмотрим здание, состоящее из пяти этажей, подверженное воздействию ветра. На каждый этаж действуют следующие нагрузки:

- внешняя, действующая по нормали к зданию в виде воздействия различной продолжительности и амплитуды;
- момент изгиба от действия внешней силы;
- сопротивление среды;
- воздействие со стороны соседних этажей.

Необходимо сглаживать амплитуду реакции здания с использованием управлений, приложенных к двум нижним этажам.

Пусть  $x_i$  — координата  $i$ -го этажа относительно основания, а  $v_i$  — скорость его отклонения,  $i = 1, \dots, 5$ . Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний здания имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{v}_1 &= \frac{1}{m_1} \left( \frac{4\xi_1}{l_1^2} x_1 - \alpha_1 v_1 - k_1 x_1 + w_1 + u_1 \right), \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{m_2} \left( \frac{4\xi_2}{l_2^2} (x_2 - x_1) - \alpha_2 v_2 - k_2 x_2 + w_2 + u_2 \right), \\ \dot{x}_3 &= v_3, \\ \dot{v}_3 &= \frac{1}{m_3} \left( \frac{4\xi_3}{l_3^2} (x_3 - x_2) - \alpha_3 v_3 - k_3 x_3 + w_3 \right), \\ \dot{x}_4 &= v_4, \\ \dot{v}_4 &= \frac{1}{m_4} \left( \frac{4\xi_4}{l_4^2} (x_4 - x_3) - \alpha_4 v_4 - k_4 x_4 + w_4 \right), \\ \dot{x}_5 &= v_5, \\ \dot{v}_5 &= \frac{1}{m_5} \left( \frac{4\xi_5}{l_5^2} (x_5 - x_4) - \alpha_5 v_5 - k_5 x_5 + w_5 \right). \end{aligned}$$

Здесь  $w_1, \dots, w_5$  — компоненты ветрового возмущающего воздействия,  $u_1, u_2$  — управления;  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 7$  м,  $l_3 = 10$  м,  $l_4 = 15$  м,  $l_5 = 20$  м — высоты этажей;  $m_1 = 5000$  кг,  $m_2 = 3000$  кг,  $m_3 = 2000$  кг,

<sup>1</sup>Задача любезно предоставлена М. А. Ковырагиным.



$m_4 = 1500$  кг,  $m_5 = 1000$  кг — их массы;  $k_1 = k_2 = 0$ ,  $k_3 = 0,1$  кг/с<sup>2</sup>,  $k_4 = 0,05$  кг/с<sup>2</sup>,  $k_5 = 0,01$  кг/с<sup>2</sup> — коэффициенты упругости вант;  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0,01$  кг/с,  $\alpha_4 = 0,05$  кг/с,  $\alpha_5 = 0,1$  кг/с — коэффициенты демпфирования;  $\xi_1 = 20000$  нм,  $\xi_2 = 15000$  нм,  $\xi_3 = 10000$  нм,  $\xi_4 = 8000$  нм,  $\xi_5 = 5000$  нм — изгибающие моменты (коэффициенты связи между элементами).

Рассмотрим ситуацию, когда внешнее возмущение скалярно:

$$w_i \equiv w, \quad |w| \leq 10 \text{ н,}$$

то есть в каждый момент времени ветровое воздействие одно и то же на всех этажах здания.

Введя в рассмотрение вектор

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5)^\top$$

фазового состояния системы, приходим к системе управления вида

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,6400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4082 & 0,4082 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2000 & 0,1999 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0948 & 0,0948 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0500 & 0,0500 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

где  $\gamma = -0,0001$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3333 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,002 \\ 0,0033 \\ 0,005 \\ 0,6667 \\ 0,0100 \end{pmatrix}.$$

Казалось бы, задача минимизации отклонения координаты  $x_5$  может быть решена с помощью Теоремы 4.2.1; при этом в качестве минимизируемого выхода естественно взять вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

что приводит к матрицам уравнения выхода

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

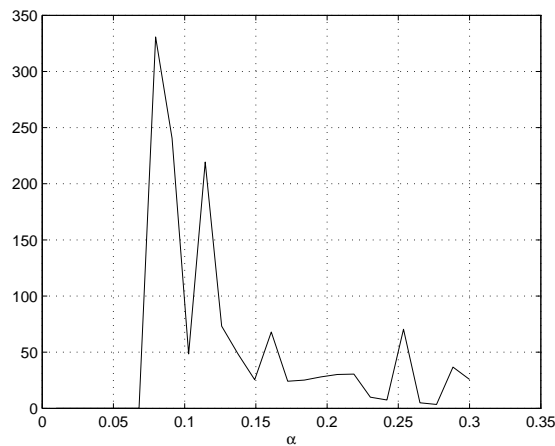


Рис. 7.3.1. График зависимости следа ограничивающего эллипсоида от параметра  $\alpha$  для системы из раздела 7.3.1.

Однако такой подход не приводит к успеху. На Рис. 7.3.1 показан получающийся график зависимости следа минимизируемого эллипсоида от значения параметра  $\alpha$ . Обратим внимание на отсутствие строгой выпуклости функции; это всегда является признаком некоторого «неблагополучия». В самом деле, помимо отсутствия выпуклости, ни при каком значении параметра  $\alpha$  соответствующий регулятор даже не стабилизирует систему!

Объяснение этому достаточно простое. Дело в том, что величины элементов матриц  $A$  и  $B_1$  отличаются на 3–4 порядка, что приводит

к проблемам вычислительного характера. Такая ситуация достаточно типична для задач практического происхождения (скажем, в отличие от многократно обсуждаемых выше задач управления двухмассовой системой или двойным пружинным маятником).

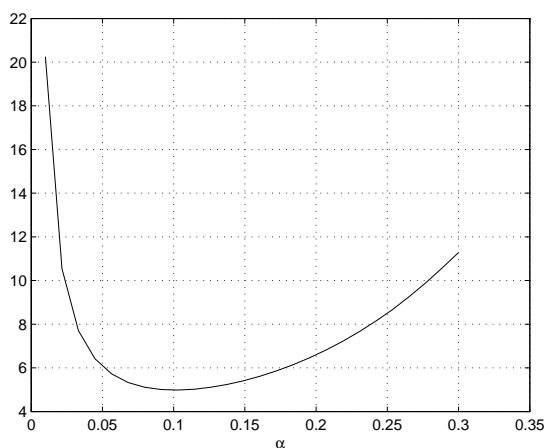


Рис. 7.3.2. График зависимости следа ограничивающего эллипсоида от параметра  $\alpha$  для системы из раздела 7.3.1.

Можно предложить следующий выход — масштабировать матрицы системы до близких (по порядку величины) значений их элементов, разумеется, учтя это в дальнейшем при конструировании регулятора. Так, в рассматриваемой задаче увеличим матрицу  $B_1$  в 5000 раз. В результате график зависимости следа от параметра  $\alpha$  примет ожидаемый выпуклый вид, см. Рис. 7.3.2.

Случай недостаточного масштабирования иллюстрирует Рис. 7.3.3, соответствующий масштабированию матрицы  $B_1$  в 1000 раз.

Далее, важным моментом в рассматриваемой постановке задачи служит выбор матрицы  $B_2$ . Как обсуждалось выше, ее наличие позволяет наряду с подавлением неопределенности в выходе системы избежать появления больших значений управления. Масштабирование матрицы  $B_2$  (как правило, ее *структура* определяется однозначно по постановке задачи) позволяет изменять эти пропорции, в большей или меньшей степени уменьшая выход системы за счет увеличения прилагаемого для этого управляющего воздействия.

В частности, ясно, что при увеличении параметра  $\mu \geq 0$  в “комби-

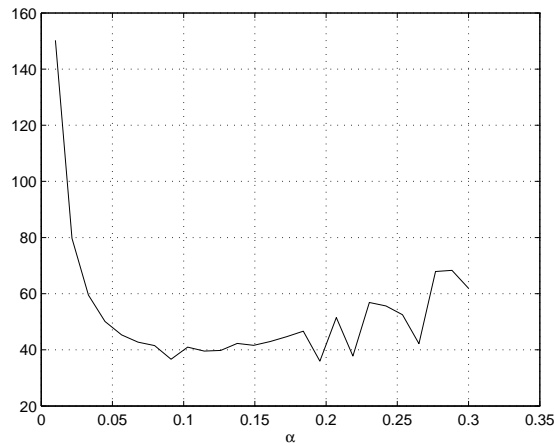


Рис. 7.3.3. График зависимости следа ограничивающего эллипсоида от параметра  $\alpha$  для системы из раздела 7.3.1.

нированном” выходе

$$z = Cx + \mu B_2 u,$$

в меньшей степени подавляются возмущения в выходе  $Cx$  системы, однако, при этом используются меньшие величины управляющих воздействий (и наоборот).

Итак, возвращаясь к рассматриваемой задаче, при  $\mu = 1$  имеем регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -0,0678 & -0,0027 & 0,0117 & -0,0042 & -0,0006 & \dots \\ 0,0152 & -0,2109 & 0,8557 & -1,4722 & 0,9226 & \dots \\ \dots & -0,0830 & 0,0020 & 0,0227 & -0,0138 & -0,0046 \\ \dots & 0,0035 & -0,1147 & 1,0781 & -3,5376 & 4,1047 \end{pmatrix} \cdot 10^5,$$

а соответствующий ограничивающий эллипсоид имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2,4455 & -1,8289 \cdot 10^3 & -5,1297 \cdot 10^3 \\ * & 4,3351 \cdot 10^6 & 1,4128 \cdot 10^7 \\ * & * & 5,9225 \cdot 10^7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, максимальное отклонение координаты  $x_5$  не превосходит

$$a = \sqrt{2,4455} \approx 1,56 \text{ м}$$

и при этом

$$|u_{\max}| \leq 7,9 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

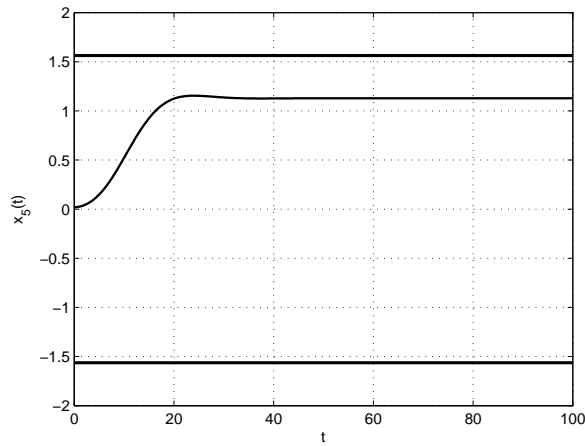


Рис. 7.3.4. Траектория координаты  $x_5(t)$  при  $\mu = 1$  для системы из раздела 7.3.1.

На Рис. 7.3.4 показана траектория координаты  $x_5(t)$  при наихудшем внешнем возмущении; на том же рисунке показана найденная полоса, внутри которой заведомо располагается траектория минимизируемой координаты.

На Рис. 7.3.5 показаны траектории соответствующих управлений  $u_1(t)$  (сплошной линией) и  $u_2(t)$  (пунктиром).

Теперь зададимся целью уменьшить получившуюся ширину полосы (как обсуждалось выше, ценой допуска больших управлений). Полагая для этого

$$\mu = 0,2,$$

находим регулятор

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -0,0071 & -0,0006 & 0,0026 & -0,0030 & 0,0018 & \dots \\ 0,0013 & -0,0255 & 0,1290 & -0,2887 & 0,2330 & \dots \\ \dots & -0,0088 & 0,0001 & 0,0040 & -0,0074 & 0,0074 \\ \dots & 0,0001 & -0,0126 & 0,1473 & -0,6349 & 1,0212 \end{pmatrix} \cdot 10^6$$

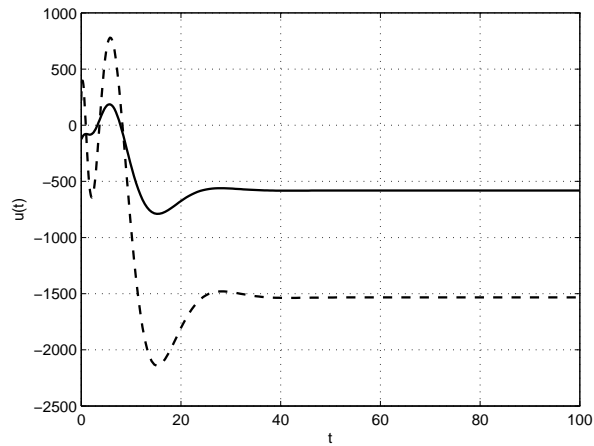


Рис. 7.3.5. Графики управлений при  $\mu = 1$  для системы из раздела 7.3.1.

и матрицу ограничивающего эллипсоида

$$\begin{pmatrix} 0,7757 & -220,6012 & -699,3389 \\ -220,6012 & 4,9633 \cdot 10^5 & 2,0029 \cdot 10^6 \\ -699,3389 & 2,0029 \cdot 10^6 & 1,1201 \cdot 10^7 \end{pmatrix}.$$

В этом случае максимальное отклонение координаты  $x_5$  не превосходит

$$a = \sqrt{0,7757} \approx 0,88 \text{ м,}$$

а

$$|u_{\max}| \leq 1,7 \cdot 10^4 \text{ н.}$$

На Рис. 7.3.6 показана траектория координаты  $x_5(t)$  при наихудшем внешнем возмущении; на том же рисунке показана найденная полоса, внутри которой заведомо располагается траектория минимизируемой координаты.

На Рис. 7.3.7 показаны траектории соответствующих управлений  $u_1(t)$  (сплошной линией) и  $u_2(t)$  (пунктиром).

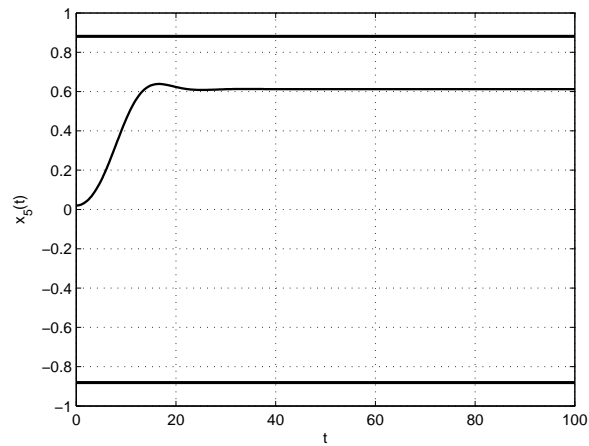


Рис. 7.3.6. Траектория координаты  $x_5(t)$  при  $\mu = 0,2$  для системы из раздела 7.3.1.

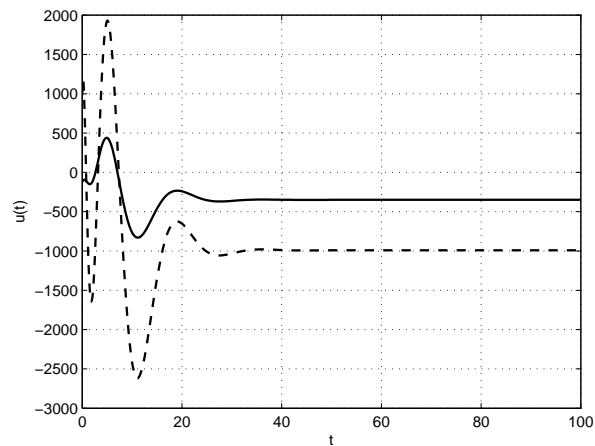


Рис. 7.3.7. Графики управлений при  $\mu = 0,2$  для системы из раздела 7.3.1.

### 7.3.2. Управление гироскопом

Рассмотрим следующую задачу управления гироскопом. Система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 400\dot{q}_1 + 0,342\dot{q}_3 + 0,94\dot{q}_4 - 940q_3 + 342q_4 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + 400\dot{q}_2 + 0,866\dot{q}_3 + 0,5\dot{q}_4 - 500q_3 + 866q_4 &= 0, \\ 803\dot{q}_1 + 154\dot{q}_2 + 100\dot{q}_3 + 754q_3 + 1130q_4 &= u_1 + w_1, \\ -718\dot{q}_1 - 1070\dot{q}_2 + 200\dot{q}_4 - 867q_3 - 754q_4 &= u_2 + w_2, \end{aligned}$$

где  $q_1, q_2$  — углы прецессии гироскопов,  $q_3, q_4$  — проекции абсолютной угловой скорости площадки на ее оси,  $u_1, u_2$  — моменты двигателей стабилизации (управления),  $w_1, w_2$  — возмущающие моменты.

Наблюдаемый и регулируемый выходы системы совпадают:

$$y = z = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Введя вспомогательные фазовые переменные

$$q_5 = \dot{q}_1,$$

$$q_6 = \dot{q}_2,$$

приходим к системе вида (4.3.21) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7,5400 & -11,3000 & -8,0300 & -1,5400 \\ 0 & 0 & 4,3350 & 3,7700 & 3,5900 & 5,3500 \\ 0 & 0 & 938,5038 & -341,6792 & -400,6283 & -4,5023 \\ 0 & 0 & 504,3621 & -858,0992 & 5,1590 & -401,3414 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0100 & 0 \\ 0 & 0,0050 \\ -0,0034 & -0,0047 \\ -0,0087 & -0,0025 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = 0.$$

В данной постановке задачи на внешние возмущения накладываются не евклидовы, а интервальные ограничения:

$$|w_1(t)| \leq 1000 \quad |w_2(t)| \leq 1000 \quad \forall t \geq 0.$$

Воспользовавшись Теоремой 4.3.4, находим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0,6006 & -0,0751 \\ -0,0751 & 0,5208 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$



ограничивающего эллипса для выхода  $z$  замкнутой системы и матрицы динамического регулятора

$$A_r = \begin{pmatrix} -0,5408 & -0,1603 & -0,0001 & 0,0001 & 0,0007 & -0,0003 \\ -0,1876 & -0,6237 & 0,0003 & 0,0002 & 0,0003 & 0,0004 \\ -0,0984 & -0,3428 & -0,5032 & -2,4500 & -1,5509 & 2,3488 \\ -0,7418 & 0,2763 & 2,2923 & -0,0413 & 2,0527 & 0,3655 \\ -0,9789 & 0,6172 & -1,0942 & 0,6133 & -1,8016 & -1,2032 \\ 0,2129 & -0,6155 & -0,1428 & 1,3290 & 0,3619 & -2,6982 \end{pmatrix} \cdot 10^3,$$

$$B_r = \begin{pmatrix} 0,0007 & 0,0001 \\ 0,0005 & 0,0008 \\ -1,1373 & 3,2523 \\ 2,4306 & 1,6325 \\ -1,7583 & -2,7140 \\ -0,0806 & -3,5192 \end{pmatrix} \cdot 10^6,$$

$$C_r = \begin{pmatrix} -4,4358 & -5,5876 & -0,4830 & -2,4675 & -1,5463 & 2,3702 \\ 3,9709 & 0,0964 & 4,7017 & -0,1011 & 4,1553 & 0,6790 \end{pmatrix} \cdot 10^5,$$

$$D_r = \begin{pmatrix} -1,1877 & 3,2715 \\ 4,9049 & 3,4564 \end{pmatrix} \cdot 10^8.$$

Для внешних возмущений

$$w_1(t) = 410 \sin 5t + 565 \cos 7t,$$

$$w_2(t) = 565 \sin 5t + 410 \sin 7t,$$

на Рис. 7.3.8 и Рис. 7.3.9 показаны траектории выхода для полученного динамического регулятора (сплошной линией) и для динамического регулятора, построенного на основе классической техники, опирающейся на процедуры LQ- и  $H_\infty$ -оптимизации и методы конечно-частотной идентификации (пунктиром). Нетрудно видеть, что результаты заметно отличаются в лучшую сторону от получаемых с помощью классического подхода.

Разница в результатах будет еще заметнее, если подать в качестве внешних возмущений единичную ступеньку

$$w_1(t) = w_2(t) \equiv 1000.$$

Соответствующие траектории выхода для динамических регуляторов, построенных с помощью предлагаемого подхода (сплошная линия) и классических методов (пунктир) показаны на Рис. 7.3.10 и Рис. 7.3.11.

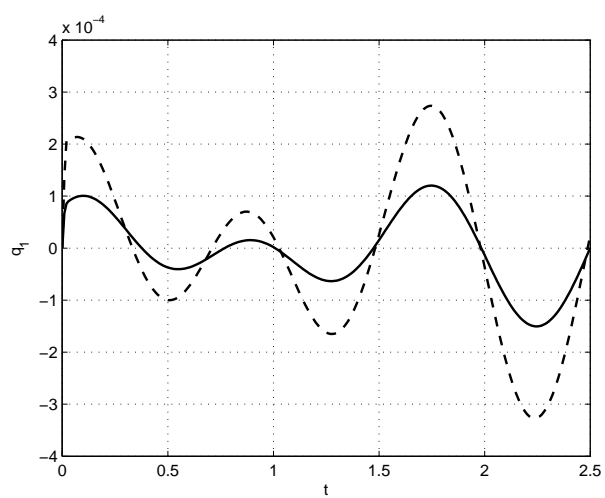


Рис. 7.3.8. Траектории  $q_1(t)$  для гармонических возмущений для системы из Примера 7.3.2.

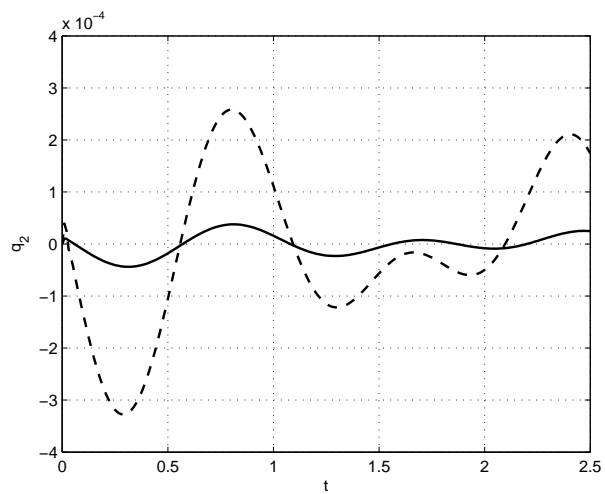


Рис. 7.3.9. Траектории  $q_2(t)$  для гармонических возмущений для системы из Примера 7.3.2.

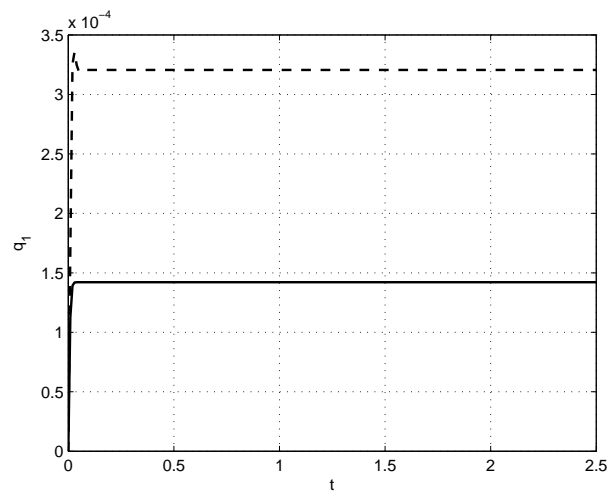


Рис. 7.3.10. Траектории  $q_1(t)$  для ступенчатых возмущений для системы из Примера 7.3.2.

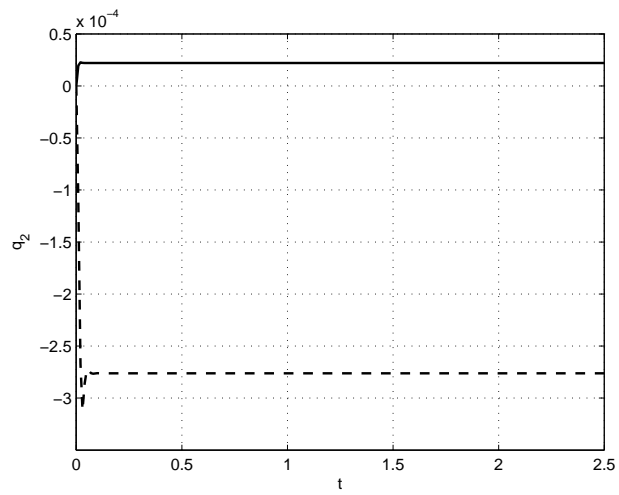


Рис. 7.3.11. Траектории  $q_2(t)$  для ступенчатых возмущений для системы из Примера 7.3.2.

## Заключение

В книге описывается проблематика анализа и синтеза линейных систем управления при наличии ограниченных внешних возмущений. Именно такие возмущения наиболее характерны для прикладных задач. При этом используется простая и удобная техника исследования, связанная с линейными матричными неравенствами и инвариантными эллипсоидами. Она сводит синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. В свою очередь, такой эллипсоид ищется с помощью методов выпуклой оптимизации, легко реализуемых численно с помощью доступных программных средств. Рассмотрены также разнообразные робастные версии всех основных постановок задач.

Разумеется, книга не охватывает всего многообразия задач управления при наличии возмущений. Например, мы остановились в основном на ограниченных возмущениях общей природы; случайные или гармонические возмущения почти не рассматриваются. Мы ограничились рассмотрением управлений в форме линейной обратной связи; большой интерес представляют другие структуры управления типа скользящих режимов или нелинейных законов управления. Наконец, в книге почти не затронут очень важный класс задач управления нелинейными и нестационарными системами с внешними возмущениями; здесь есть огромное разнообразие постановок задач и техник их решения. Мы надеемся, что представленные в монографии результаты будут полезны и для исследования этих, более общих проблем.

# Приложение

## А. Элементарные свойства матриц

Свойства определителя матриц из  $\mathbb{C}^{n \times n}$ :

1)

$$\det AB = \det BA = \det A \det B.$$

2) Если матрица  $A$  невырождена, то

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

3)

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $A$ .

4) Для любых матриц  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  выполняется

$$\det(I + AB) = \det(I + BA).$$

5) Для любых векторов  $x, y \in \mathbb{C}^n$  выполняется

$$\det(I + xy^*) = 1 + y^*x.$$

6) Объем  $n$ -мерного эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

равен

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) = c_n \sqrt{\det P},$$

где  $c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$  — объем единичного шара в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\Gamma$  — гамма-функция.

Пусть  $A$  — прямоугольная матрица. Рангом матрицы  $A$  называется число ее линейно независимых строк или, что то же самое, число ее линейно независимых столбцов. Обозначение:  $\text{rang } A$ .

Полином  $f(s)$  скалярной переменной  $s$  называется аннулирующим полиномом матрицы  $A$ , если

$$f(A) = 0.$$

Характеристическим полиномом матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  называется полином

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

корни  $\lambda_i$  которого называются собственными значениями матрицы  $A$ .

Важным свойством характеристического полинома матрицы  $A$  является то, что он является аннулирующим для  $A$ , то есть имеет место

**Теорема А.1 (Кэли-Гамильтон).** Матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  удовлетворяет своему характеристическому уравнению: если

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

то

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0I = 0.$$

**Следствие А.1.** Матрица  $A^n$  (а, следовательно, и все матрицы  $A^m$  при  $m \geq n$ ) представима в виде линейной комбинации матриц  $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ .

Из других полезных свойств характеристического полинома отметим следующие:

$$a_{n-1} = -\text{tr } A,$$

$$a_0 = \det A.$$

Аннулирующий полином  $\psi(s)$  наименьшей степени  $\mu$  с единичным старшим коэффициентом называется минимальным полиномом матрицы  $A$ . Соответственно, любая степень матрицы  $A$  представима в виде линейной комбинации матриц  $I, A, \dots, A^{\mu-1}$ ,  $\mu \leq n$ . Корнями минимального полинома служат все различные собственные значения матрицы  $A$  и только они.

Отметим следующие полезные свойства следа матриц из  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ( $A$  и  $B$  — матрицы соответствующей размерности):

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$$

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$

Напомним, что симметрическая матрица  $A$  называется *положительно определенной* и обозначается через  $A \succ 0$ , если

$$x^\top Ax > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0;$$

матрица называется *неотрицательно определенной*, и обозначается через  $A \succcurlyeq 0$ , если

$$x^\top Ax \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

При этом запись  $A \succ B$  означает, что  $A - B \succ 0$ .

Симметрическая матрица  $A$  называется *отрицательно (неположительно) определенной* и обозначается через  $A \prec 0$  ( $A \preccurlyeq 0$ ), если матрица  $-A$  положительно (неотрицательно) определена.

У положительно (неотрицательно) определенных матриц все собственные значения вещественны и положительны (неотрицательны); у отрицательно (неположительно) определенных матриц все собственные значения вещественны и отрицательны (неположительны).

Отметим некоторые важные свойства знакоопределенных матриц.

- 1) Если  $A$  и  $B$  — матрицы одинаковой размерности, причем  $A \preccurlyeq 0$  и  $B \preccurlyeq 0$ , то

$$A + B \preccurlyeq 0.$$

- 2) Если  $A$  и  $B$  — матрицы одинаковой размерности, причем  $A \prec 0$  и  $B \prec 0$ , то

$$A + B \prec 0.$$

- 3) Если  $A, B, C, D$  — матрицы одинаковой размерности, причем  $A \preccurlyeq B$  и  $C \preccurlyeq D$ , то

$$A + C \preccurlyeq B + D.$$

- 4) Если  $A, B, C, D$  — матрицы одинаковой размерности, причем  $A \prec B$  и  $C \prec D$ , то

$$A + C \prec B + D.$$

- 5) Для любой матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  верно  $A^\top A \succcurlyeq 0$  и  $AA^\top \succcurlyeq 0$ . При этом, если матрица  $A$  квадратная невырожденная, то  $A^\top A \succ 0$  и  $AA^\top \succ 0$ .

- 6) Если  $A \succ 0$  и матрица  $B$  полного строчного ранга, то  $BAB^T \succ 0$ , то есть строгое матричное неравенство можно одновременно умножать слева на матрицу полного строчного ранга  $B$  и справа на  $B^T$ .
- 7) Если  $A \succcurlyeq 0$ , то для произвольной матрицы  $B$  верно  $BAB^T \succcurlyeq 0$ , то есть нестрогое матричное неравенство можно одновременно умножать слева на произвольную матрицу  $B$  и справа на  $B^T$ .
- 8) Если  $A \succcurlyeq B \succ 0$ , то обратные матрицы  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$  существуют и при этом

$$0 \prec A^{-1} \preccurlyeq B^{-1}.$$

- 9) Для матрицы  $A \succ 0$  существует единственная матрица  $B \succ 0$ , такая что  $BB = A$ ; она называется *квадратным корнем* из матрицы  $A$  и обозначается через  $B = A^{1/2}$ .
- 10) Для симметрической матрицы  $A$  верно

$$\lambda_{\min}(A)I \preccurlyeq A \preccurlyeq \lambda_{\max}(A)I.$$

- 11) Если  $0 \preccurlyeq A \preccurlyeq B$ , то

$$\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\max}(B).$$

- 12) Если  $A \succcurlyeq 0$  и  $\operatorname{tr} A = 0$ , то  $A = 0$ .

Будем называть матрицу  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  *неотрицательной* и писать  $A \geq 0$ , если все ее элементы неотрицательны, и называть матрицу *положительной* ( $A > 0$ ), если все ее элементы положительны.

Аналогично  $A \leq 0$  означает неположительность элементов матрицы ( $A$  — *неположительная* матрица), а  $A < 0$  — отрицательность ее элементов ( $A$  — *отрицательная* матрица). Иными словами, неравенства  $\geq, \leq, >$  и  $<$  для матриц будем понимать *поэлементно*.

Такие же обозначения естественным образом используются и для векторов.

## Б. Нормы матриц

### Определение Б.1. Функция

$$\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n \times m} \longrightarrow \mathbb{R},$$



определенная на множестве матриц размера  $n \times m$ , называется *матричной нормой*, если для любых  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$  выполнены следующие аксиомы:

- 1)  $\|A\| \geq 0$ ;
- 2)  $\|A\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $A = 0$ ;
- 3)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  для любого  $\alpha \in \mathbb{C}$ ;
- 4)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ;
- 5)  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Отметим два полезных свойства, непосредственно вытекающих из определения нормы:

$$\|I\| \geq 1,$$

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1 \quad \text{для обратимой матрицы } A.$$

Наиболее употребимы следующие явно задаваемые нормы:  
*спектральная норма:*

$$\|A\|_2 \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^{1/2}(A^*A);$$

*строчная норма:*

$$\|A\|_1 \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

*столбцовая норма:*

$$\|A\|_\infty \doteq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

*фробениусова норма:*

$$\|A\|_F \doteq \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Между матричными нормами имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &\leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F; \\ \frac{1}{n} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_1 \leq n \|A\|_\infty; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &\leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_F; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &\leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_F, \end{aligned}$$

и эти оценки достижимы, то есть, например,

$$\max_{A \neq 0} \frac{\|A\|_F}{\|A\|_2} = \frac{\|I\|_F}{\|I\|_2} = \sqrt{n}.$$

Если в  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ввести скалярное произведение по правилу

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} A^* B,$$

оно будет порождать фробениусову матричную норму:

$$\|A\|_F \doteq \langle A, A \rangle^{1/2} = (\operatorname{tr} A^* A)^{1/2} = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

в частности, при  $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$  будет

$$\|A\|_F = (\operatorname{tr} A^2)^{1/2}.$$

Пусть задана некоторая векторная норма  $|\cdot|$ ; функция

$$\|A\| \doteq \max_{|x| \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{|x| \leq 1} |Ax| = \max_{|x|=1} |Ax|$$

удовлетворяет всем вышеуказанным аксиомам, и поэтому является матричной нормой. Она называется *подчиненной* данной векторной норме  $|\cdot|$  (или *индуцированной* нормой). Иногда используют термин *операторная норма* (в частности, для таких норм  $\|I\| = 1$ ).

Матричные нормы  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  подчинены векторным нормами  $|\cdot|_\infty$ ,  $|\cdot|_2$ ,  $|\cdot|_1$  соответственно<sup>1</sup>, то есть

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \max_{|x|_2=1} |Ax|_2, \\ \|A\|_1 &= \max_{|x|_\infty=1} |Ax|_\infty, \\ \|A\|_\infty &= \max_{|x|_1=1} |Ax|_1,\end{aligned}$$

а  $\|\cdot\|_F$  не является подчиненной нормой.

Матричная норма  $\|\cdot\|$  называется *согласованной* с векторной нормой  $|\cdot|$ , если

$$|Ax| \leq \|A\| |x|.$$

Подчиненные нормы согласованы с соответствующими (индуцирующими их) векторными нормами и поэтому наиболее употребимы.

Величина

$$\rho(A) \doteq \max_i |\lambda_i(A)|$$

называется *спектральным радиусом* матрицы  $A$ . Для любой матричной нормы справедливо неравенство  $\rho(A) \leq \|A\|$ . Хотя спектральный радиус и не является матричной нормой, он оказывается точной нижней гранью значений всевозможных матричных норм:

**Лемма Б.1.** *Для любой  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует норма  $\|\cdot\|$ , удовлетворяющая неравенству*

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Следующая лемма характеризует асимптотическое поведение степеней  $A^k$ .

**Лемма Б.2.** *Для любой матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  и любой нормы  $\|\cdot\|$  справедливо*

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}.$$

Отметим важное свойство спектральной нормы:

$$\lambda_{\max}(A) = \|A\|_2$$

для любой матрицы  $A \succcurlyeq 0$ .

<sup>1</sup>В “матричной” литературе строчную матричную норму обычно обозначают через  $\|\cdot\|_\infty$ , а столбцовую — через  $\|\cdot\|_1$ . В таких обозначениях  $\|\cdot\|_\infty$  индуцируется векторной  $\infty$ -нормой, а  $\|\cdot\|_1$  — векторной 1-нормой. Мы же следуем обозначениям, общепринятым в  $l_1$ -оптимизации.

**Лемма Б.3.** Пусть  $A$  — прямоугольная вещественнозначная матрица. Неравенство

$$\|A\|_2 \leq \gamma$$

эквивалентно матричному неравенству

$$A^T A \preceq \gamma^2 I.$$

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\|A\|_2 \leq \gamma$ ; по определению спектральной нормы это означает, что

$$\sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \leq \gamma,$$

поэтому

$$A^T A \preceq \lambda_{\max}(A^T A) I \preceq \gamma^2 I.$$

**Достаточность.** Пусть  $A^T A \preceq \gamma^2 I$ . Тогда

$$\lambda_{\max}(A^T A) \leq \gamma^2. \quad \blacksquare$$

## В. Матричные разложения

### Приведение к диагональной форме

**Лемма В.1.** Если у матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  все собственные значения  $\lambda_i$  различны, то она приводится преобразованием подобия к диагональному виду, то есть найдется такая невырожденная матрица  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , что

$$T^{-1}AT = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\}.$$

При этом  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $A$ , столбцы  $x_i$  матрицы  $T$  являются правыми собственными векторами матрицы  $A$ :

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

а строки  $y_i$  матрицы  $T^{-1}$  являются левыми собственными векторами<sup>2</sup> матрицы  $A$ :

$$y_i^* A = \lambda_i y_i^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

<sup>2</sup>Отметим, что левые собственные векторы иногда удобнее определять как правые собственные векторы матрицы  $A^*$ .

Этот результат верен и для некоторых матриц с кратными собственными значениями (именно, для так называемых матриц *простой структуры*, все  $n$  собственных векторов которых линейно независимы). В частности, для симметричных матриц верно гораздо более сильное утверждение.

**Лемма В.2.** Матрица  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  приводится к диагональной форме вещественным ортогональным преобразованием подобия, то есть найдется матрица  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  такая, что  $U^T = U^{-1}$  и

$$U^T A U = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\},$$

и все собственные значения  $\lambda_i$  вещественны.

### Приведение к жордановой форме

**Лемма В.3.** Для любой матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  существует невырожденная матрица  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  такая, что

$$A = T^{-1} J T,$$

где  $J$  — жорданова форма матрицы  $A$ :

$$J = \text{diag}\{J_1 \quad J_2 \quad \cdots \quad J_m\},$$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, \quad \sum_{i=1}^m n_i = n.$$

Здесь  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $A$ , а  $J_i$  — *жордановы блоки*; при этом одному собственному значению может соответствовать, вообще говоря, больше одного блока, и размерности  $n_i$  этих блоков могут быть различны.

Например, в качестве  $J$  может возникнуть матрица

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix};$$

она имеет одно собственное значение  $\lambda$  кратности 6, которому соответствуют три жордановых блока размерностей 1, 2 и 3.

## Приведение к фробениусовой форме

Если для матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  найдется такой вектор  $b \in \mathbb{C}^n$ , что векторы

$$b, Ab, \dots, A^{n-1}b$$

линейно независимы, то матрица  $A$  называется *циклической матрицей* (а вектор  $b$  — ее *циклическим генератором*).

Говорят, что матрица  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  приведена к *фробениусовой форме*, если она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

где  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ . Нетрудно проверить, что характеристический полином матрицы  $A$  равен

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0. \quad (\text{B.2})$$

Иногда матрицу вида (B.1) называют *матрицей Фробениуса* для полинома (B.2).

**Лемма В.4.** *Матрица  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  может быть приведена к фробениусовой форме невырожденным преобразованием подобия с матрицей  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  тогда и только тогда, когда она циклична.*

Матрица является циклической тогда и только тогда, когда каждому ее собственному значению соответствует ровно один жорданов блок, или, эквивалентно, когда ее характеристический полином совпадает с минимальным.

## Сингулярное разложение

Матрица  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  называется *унитарной*, если она удовлетворяет условию

$$V^*V = I.$$

В вещественном случае ( $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) это условие принимает вид  $V^T V = I$ , и такие матрицы называются *ортогональными*.

**Лемма В.5.** Пусть  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Тогда найдутся унитарные матрицы  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  и  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  такие, что

$$A = U\Lambda V^*, \quad (\text{В.3})$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \text{diag}\{\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_p\}, \quad p = \min\{m, n\}.$$

Представление (В.3) называется *сингулярным разложением* матрицы  $A$ . Здесь

$$0 \leq \sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_p$$

— *сингулярные числа* матрицы  $A$ , то есть

$$\sigma_i = \sigma_i(A) = \lambda_i^{1/2}(A^*A),$$

где  $\lambda_i$  — собственные значения неотрицательно определенной матрицы  $A^*A$ .

Если при этом  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , то  $U$  и  $V$  — ортогональные матрицы. Наконец, если  $m = n$ , то  $\Lambda = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ .

Если обозначить (транспонированные) строки матриц  $U$  и  $V$  через  $u_i, v_i$ , то из (В.3) следует

$$A^*Av_i = \sigma_i^2 v_i, \quad AA^*u_i = \sigma_i^2 u_i,$$

то есть  $\sigma_i^2$  являются собственными числами матриц  $A^*A$  и  $AA^*$ , а  $v_i, u_i$  — соответствующие собственные векторы. В частности, для вещественных  $A$  имеем  $A^T A \succcurlyeq 0$ ,  $AA^T \succcurlyeq 0$ , а  $v_i, u_i$  — вещественные взаимно ортогональные собственные векторы.

**Лемма В.6.** *Наименьшее и наибольшее сингулярные числа выражаются через спектральную норму матрицы  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :*

$$\sigma_n(A) = \max_{|x|=1} |Ax| = \|A\|,$$

$$\sigma_1(A) = \min_{|x|=1} |Ax| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

(второе равенство справедливо лишь для невырожденных матриц; в вырожденном случае  $\sigma_1 = 0$ ).

### Каноническая управляемая форма

Рассмотрим систему управления с одним входом:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (\text{B.4})$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . В этом случае матрица управляемости будет квадратной ( $n$ -го порядка) со столбцами

$$b, \quad Ab, \quad \dots, \quad A^{n-1}b.$$

Таким образом, пара  $(A, b)$  будет управляемой, если эти векторы линейно независимы. В этом случае систему можно с помощью преобразования подобия привести к так называемой *канонической управляемой форме*.

**Лемма В.7.** Пусть

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

— характеристический полином матрицы  $A$ .

Если векторы  $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$  линейно независимы (то есть пара  $(A, b)$  управляема), то линейной заменой переменных

$$\tilde{x} = Tx,$$

где

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{n-1}b & \dots & Ab & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

система (B.4) приводится к канонической управляемой форме

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u,$$

где

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица  $A$  преобразованием подобия приведена к фробениусовой форме.



## Г. Функции от матриц

Рассмотрим некоторую функцию  $f(s)$  скалярного аргумента  $s$  и матрицу  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Попробуем распространить функцию  $f$  на матричные значения аргумента, то есть определить величину  $f(A)$ .

Если  $p(s)$  — полином степени  $k$  с вещественными коэффициентами

$$p(s) = a_k s^k + \dots + a_1 s + a_0,$$

то положим

$$p(A) \doteq a_k A^k + \dots + a_1 A_1 + a_0 I.$$

Исходя из этого, распространим определение  $f(A)$  и на общий случай.

Для числовой функции  $f(s)$  общего вида (не полинома) имеется несколько способов определения соответствующей функции от матрицы. Дадим лишь два наиболее употребимых — один из них представляет  $f(A)$  в виде полинома от  $A$ , а другой — в виде степенного ряда.

Итак, пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  — все различные корни минимального полинома степени  $\mu$  матрицы  $A$ , а  $\mu_1, \dots, \mu_m$  — их кратности, так что  $\mu_1 + \dots + \mu_m = \mu$ .

Назовем  $\mu$  чисел

$$f(\lambda_k), \quad f'(\lambda_k), \quad \dots, \quad f^{(\mu_k-1)}(\lambda_k), \quad k = 1, \dots, m,$$

значениями функции  $f(s)$  на спектре матрицы  $A$ .

Про любую функцию, для которой эти значения существуют, будем говорить, что она *определена на спектре матрицы  $A$* . Очевидно, что любой полином определен на спектре любой матрицы.

Если функция  $f(s)$  определена на спектре матрицы  $A$ , то по определению положим

$$f(A) = g(A),$$

где  $g(s)$  — произвольный полином, принимающий те же значения на спектре матрицы  $A$ , что и  $f(s)$ . Нетрудно убедиться в том, что выбор полинома  $g(s)$  не имеет значения. Таким полиномом наименьшей возможной степени (не превосходящей  $\mu - 1$ ) служит так называемый *интерполяционный полином*, который строится по значениям функции  $f(s)$  на спектре матрицы  $A$ .

Заметим, что если функция  $f(s)$  аналитична во всех собственных значениях матрицы  $A$ , то нетрудно построить полином степени  $n - 1$ , принимающий те же значения на спектре матрицы  $A$ , что и  $f(s)$ . В самом деле, пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  — все различные собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , а  $\nu_1, \dots, \nu_p$  — их кратности (так что  $\nu_1 + \dots + \nu_p = n$ ).

Тогда коэффициенты полинома

$$g(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \dots + \gamma_{n-1} s^{n-1}$$

находятся из условий

$$g^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots, \nu_i - 1$$

(правые части равенств определены в силу аналитичности функции  $f(s)$  в точках  $\lambda_i$ ).

Эти условия представляют собой систему  $n$  линейных уравнений относительно  $n$  неизвестных  $\gamma_i$ . Можно показать, что матрица этой системы невырождена, поэтому всегда существует единственное решение  $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ . При этом у построенного полинома  $g(s)$  и у функции  $f(s)$  совпадают значения и значения их производных вплоть до  $(\nu_i - 1)$ -й в точках  $\lambda_i$ , то есть полином  $g(s)$  и функция  $f(s)$  заведомо совпадают на спектре матрицы  $A$ .

Нетрудно видеть, что если все собственные значения матрицы  $A$  различны, то ее минимальный полином совпадает с характеристическим и имеет вид

$$g(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n).$$

В этом случае интерполяционный полином имеет следующий простой вид

$$g(s) = \sum_{k=1}^n \frac{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_{k-1})(s - \lambda_{k+1}) \cdots (s - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_n)} f(\lambda_k),$$

причем это единственный полином степени  $n - 1$  такой, что

$$g(\lambda_i) = f(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отметим следующие важные свойства функций от матрицы.

1) Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и функция  $f(s)$  определена на спектре матрицы  $A$ , то собственными значениями матрицы  $f(A)$  служат числа

$$f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n).$$

2) Если матрицы  $A$  и  $B$  подобны

$$B = T^{-1}AT$$

и функция  $f(s)$  определена на спектре матрицы  $A$ , то

$$f(B) = T^{-1}f(A)T.$$

3) Если  $A$  — блочно-диагональная матрица

$$A = \text{diag}\{A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_k\},$$

и функция  $f(s)$  определена на спектре матрицы  $A$ , то

$$f(A) = \text{diag}\{f(A_1) \quad f(A_2) \quad \cdots \quad f(A_k)\}.$$

В частности, если матрица  $A$  приводится к диагональному виду:

$$A = T^{-1} \text{diag}\{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_k\}T,$$

то

$$f(A) = T^{-1} \text{diag}\{f(\lambda_1) \quad f(\lambda_2) \quad \cdots \quad f(\lambda_k)\}T.$$

Если же матрица  $A$  приведена к жордановой форме

$$A = T^{-1} \text{diag}\{J_1 \quad J_2 \quad \cdots \quad J_k\}T,$$

то

$$f(A) = T^{-1} \text{diag}\{f(J_1) \quad f(J_2) \quad \cdots \quad f(J_k)\}T,$$

где для жорданова блока

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

размера  $m_i \times m_i$  имеем

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Итак, функция от матрицы может быть определена как значение некоторого полинома (или конечного степенного ряда) от матрицы. Иногда бывает удобно определять функцию от матрицы в виде бесконечного степенного ряда.

Пусть функция  $f(s)$  разложима в степенной ряд в круге  $|s - s_0| < r$ :

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (s - s_0)^k.$$

Тогда это разложение сохраняет силу, если скалярный аргумент  $s$  заменить любой матрицей, собственные значения которой лежат внутри круга сходимости:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (A - s_0 I)^k, \quad |\lambda_i - s_0| < r,$$

причем сходимость матричного ряда — абсолютная (в смысле матричной нормы).

В частности, при  $s_0 = 0$  имеем

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k.$$

В приложениях часто  $r = \infty$ , то есть функция  $f(s)$  аналитична на всей плоскости; в этом случае  $f(A)$  определена для всех матриц  $A$ .

Такое представление функций от матриц часто предпочтительнее с вычислительной точки зрения (в практических задачах соответствующие степенные матричные ряды, как правило, сходятся быстро); кроме того, оно позволяет пользоваться многими удобными свойствами матричных функций.

Разумеется, значения  $f(A)$ , полученные двумя описанными способами, совпадают (конечно, для тех матриц, на которых оба способа определены).

Приведем некоторые важные матричные разложения (первые три сходятся для любых матриц):

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots,$$

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots,$$

$$\cos A = I - \frac{A^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \dots,$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots, \quad |\lambda_i| < 1,$$

$$\ln(I + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots + (-1)^k \frac{A^k}{k} + \dots, \quad |\lambda_i| < 1.$$

Рассмотрим подробнее функции

$$e^{At} \text{ и } A^k.$$

В наиболее простом случае, когда матрица  $A$  приводится к диагональному виду

$$A = T^{-1} \operatorname{diag}\{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n\}T,$$

имеем

$$e^{At} = T^{-1} \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad e^{\lambda_n t}\}T,$$

$$A^k = T^{-1} \operatorname{diag}\{\lambda_1^k \quad \lambda_2^k \quad \dots \quad \lambda_n^k\}T.$$

Если же матрица  $A$  приведена к жордановой форме

$$A = T^{-1} \operatorname{diag}\{J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_k\}T,$$

то для жорданова блока

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

размера  $m_i \times m_i$  имеем

$$e^{J_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i^k \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_i^k \begin{pmatrix} 1 & C_k^1 \lambda_i^{-1} & \cdots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{-m_i+1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$C_k^m = \begin{cases} \frac{k!}{m!(k-m)!}, & m \leq k, \\ 0, & m > k. \end{cases}$$

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  — все различные корни минимального полинома матрицы  $A$ , а  $\mu_1, \dots, \mu_m$  — их кратности. Обсудим поведение матричной экспоненты  $e^{At}$  с ростом  $t$ .

Возможны следующие случаи:

1) если  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$  для всех  $\lambda_k$ , то

$$e^{At} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$$

2) если  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$  и для тех  $k$ , для которых  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ , имеем  $\mu_k = 1$ , то матрица

$$e^{At} \text{ — ограничена;}$$

3) если при некотором  $k$  имеем  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , либо  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ , но  $\mu_k > 1$ , то

$$e^{At} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Таким образом, для любой матрицы  $A$  верно представление

$$e^{At} = E_-(t) + E_0(t) + E_+(t),$$

где

$$E_-(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

$E_0(t)$  — ограничена (или постоянная),

$$E_+(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \text{ или } E_+(t) \equiv 0.$$

Аналогично можно рассмотреть поведение степени матрицы  $A^k$  с ростом  $k$ . Возможны следующие случаи:

1) если  $|\lambda_k| < 1$  для всех  $\lambda_k$ , то

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0;$$

2) если  $|\lambda_k| \leq 1$  и для тех  $k$ , для которых  $|\lambda_k| = 1$ , имеем  $\mu_k = 1$ , то матрица

$$A^k \text{ — ограничена;}$$

3) если при некотором  $k$  имеем  $|\lambda_k| > 1$ , либо  $|\lambda_k| = 1$ , но  $\mu_k > 1$ , то

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Таким образом, для любой матрицы  $A$  верно представление

$$A^k = E_- + E_0 + E_+,$$

где

$$E_- \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

$E_0$  — ограничена (или постоянная),

$$E_+ \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \text{ или } E_+ \equiv 0.$$

Приведем несколько полезных свойств матричной экспоненты.

1.  $e^0 = I$ .

2. Если  $A = \text{diag}\{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n\}$ , то

$$e^A = \text{diag}\{e^{a_1} \ e^{a_2} \ \dots \ e^{a_n}\};$$

в частности, если  $A = aI$ , то  $e^A = e^a I$ .

3. Если матрицы  $A$  и  $B$  коммутируют, то

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

(обратное, вообще говоря, неверно).

С другой стороны, если  $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$  для всех  $t \in (t_1, t_2)$ , то  $AB = BA$ .

4.  $e^A e^{-A} = I$ ; в частности,  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$  для любой (вырожденной или нет) матрицы  $A$ .

5.

$$A e^{At} = e^{At} A;$$

6.

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At};$$

7. Если матрица  $A$  обратима, то

$$\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At} + C,$$

где  $C$  — постоянная матрица; в частности,

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(e^{At} - I),$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{A\tau} d\tau = -A^{-1}$$

для устойчивых  $A$ .

Рассмотрим в качестве примера вычисление экспоненты матрицы второго порядка с собственными значениями  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . При этом интерполяционный полином (первого порядка) будет иметь вид

$$g(s) = \frac{s - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1} + \frac{s - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2} = a + bs.$$

В случае комплексно-сопряженных собственных значений

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad \beta \neq 0,$$

имеем

$$a = \frac{\beta \cos \beta - \alpha \sin \beta}{\beta} e^{\alpha}, \quad b = \frac{\sin \beta}{\beta} e^{\alpha},$$



поэтому

$$e^A = \frac{e^\alpha}{\beta} ((\beta \cos \beta - \alpha \sin \beta)I + A \sin \beta).$$

Если же собственные значения матрицы  $A$  различные вещественные, то

$$a = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1} - \lambda_1 e^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad b = \frac{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

поэтому

$$e^A = \frac{e^{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 I - A) - \frac{e^{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_1 I - A).$$

## Д. Две теоремы об управляемости

Существуют различные условия управляемости; некоторые из них сведены в следующую теорему.

**Теорема Д.1.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. Система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p,$$

управляема.

2. Грамиан управляемости

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

является положительно определенной матрицей для любого  $t > 0$ .

3. Матрица управляемости

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ .

4. Матрица Хаутуса

$$(A - \lambda I \quad B)$$

имеет ранг  $n$  для любого  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

5. Для любого левого собственного вектора  $v$  матрицы  $A$  (то есть ненулевого вектора  $v \in \mathbb{C}^n$ , удовлетворяющего условию  $v^* A = \lambda v^*$  при некотором  $\lambda \in \mathbb{C}$ ) выполняется

$$v^* B \neq 0.$$

**Замечание Д.1.** Очевидно, что если  $W_c(t) \succ 0$  для некоторого  $t > 0$ , то грамиан положительно определен и для всех  $0 < t \leq \infty$ . ▼

Часть из утверждений теоремы доказать совсем несложно. Например, пусть ранг матрицы Хаугуса меньше  $n$  при некотором  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда найдется вектор  $v \neq 0$  такой, что

$$v^* (A - \lambda I \quad B) = 0,$$

или

$$v^* A = \lambda v^*, \quad v^* B = 0.$$

Это и означает, что у матрицы  $A$  нашелся левый собственный вектор  $v$  такой, что  $v^* B = 0$ .

В свою очередь, полученное условие означает, что

$$v^* (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B) = 0,$$

то есть ранг матрицы управляемости меньше  $n$ .

Приведем дискретный аналог Теоремы Д.1.

**Теорема Д.2.** Следующие условия эквивалентны:

1. Дискретная система

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in \mathbb{R}^p,$$

управляема.

2. Грамиан управляемости

$$W_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i B B^\top (A^\top)^i$$

положительно определен для всех  $k \geq n$ .

3. Матрица управляемости

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ .

4. Матрица Хаугуса

$$(A - \lambda I \quad B)$$

имеет ранг  $n$  для любого  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

5. Для произвольного левого собственного вектора  $v$  матрицы  $A$  (то есть, ненулевого вектора  $v \in \mathbb{C}^n$ , удовлетворяющего условию  $v^* A = \lambda v^*$  при некотором  $\lambda \in \mathbb{C}$ ) выполняется

$$v^* B \neq 0.$$

Заметим, что если  $W_k > 0$  при некотором  $k$ , то грамиан положительно определен и при всех  $k$ ,  $n \leq k \leq \infty$ .

## Е. Разное

**Лемма Е.1.** Пусть  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $a \in \mathbb{R}^p$ ,  $b \in \mathbb{R}^q$  — ненулевые векторы. Тогда

$$\max_{\|\Delta\| \leq 1} a^\top \Delta b = \max_{\|\Delta\|_F \leq 1} a^\top \Delta b = \|a\| \|b\|,$$

причем в обоих случаях максимум достигается на матрице

$$\tilde{\Delta} = \frac{ab^\top}{\|a\| \|b\|}.$$

**Доказательство.** Имеем

$$a^\top \Delta b \leq \|a\| \|\Delta\| \|b\| \leq \|a\| \|b\|,$$

причем матрица  $\tilde{\Delta}$  доставляет точное равенство:

$$a^\top \tilde{\Delta} b = a^\top \frac{ab^\top}{\|a\| \|b\|} b = \frac{\|a\|^2 \|b\|^2}{\|a\| \|b\|} = \|a\| \|b\|.$$

Остается заметить, что  $\tilde{\Delta}$  есть матрица ранга 1, для которой спектральная и фробениусова нормы совпадают, причем

$$\|\tilde{\Delta}\| = \left\| \frac{ab^\top}{\|a\| \|b\|} \right\| = \frac{\|a\| \|b\|}{\|a\| \|b\|} = 1. \quad \blacksquare$$

Следующая лемма обобщает на матричный случай полученный выше результат, относящийся к фробениусовой норме.

**Лемма Е.2.** Пусть  $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и  $B \in \mathbb{R}^{q \times q}$  — ненулевые матрицы соответствующих размерностей. Тогда

$$\max_{\|\Delta\|_F \leq 1} \text{tr } A^\top \Delta B = \|AB^\top\|_F.$$

причем максимум достигается на матрице

$$\tilde{\Delta} = \frac{AB^\top}{\|AB^\top\|_F}. \quad (\text{Е.1})$$

**Доказательство.** Введем в пространстве матриц скалярное произведение

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} A^\top B.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{\|\Delta\|_F \leq 1} \operatorname{tr} A^\top \Delta B &= \max_{\|\Delta\|_F \leq 1} \operatorname{tr}((AB^\top)^\top \Delta) = \\ &= \max_{\|\Delta\|_F \leq 1} \langle AB^\top, \Delta \rangle = \|AB^\top\|_F, \end{aligned}$$

причем максимум достигается на матрице (E.1). ■

**Лемма E.3.** Пусть  $X \succ 0$  — квадратная обратимая матрица, а  $Y$  — квадратная матрица соответствующей размерности. Тогда

$$Y^\top X^{-1} Y \succcurlyeq Y + Y^\top - X. \quad (\text{E.2})$$

**Доказательство.** Поскольку  $X \succ 0$ , то

$$0 \preccurlyeq (Y - X)^\top X^{-1} (Y - X) = Y^\top X^{-1} Y - Y - Y^\top + X. \quad \blacksquare$$

**Лемма E.4 (об обращении матриц).** Пусть  $X$  и  $Z$  — квадратные обратимые матрицы,  $Y$  — матрица соответствующей размерности и матрица  $X - YZY^\top$  обратима. Тогда

$$(X - YZY^\top)^{-1} = X^{-1} + X^{-1}Y(Z^{-1} - Y^\top X^{-1}Y)^{-1}Y^\top X^{-1}.$$

**Доказательство.** Проверим непосредственно:

$$\begin{aligned} &(X - YZY^\top)(X^{-1} + X^{-1}Y(Z^{-1} - Y^\top X^{-1}Y)^{-1}Y^\top X^{-1}) = \\ &= I - YZY^\top X^{-1} + (X - YZY^\top)X^{-1}Y(Z^{-1} - Y^\top X^{-1}Y)^{-1}Y^\top X^{-1} = \\ &= I - YZY^\top X^{-1} + (Y - YZY^\top X^{-1}Y)(Z^{-1} - Y^\top X^{-1}Y)^{-1}Y^\top X^{-1} = \\ &= I - YZY^\top X^{-1} + YZ(Z^{-1} - Y^\top X^{-1}Y)(Z^{-1} - Y^\top X^{-1}Y)^{-1}Y^\top X^{-1} = \\ &= I - YZY^\top X^{-1} + YZY^\top X^{-1} = I. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Лемма E.5.** Пусть  $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{l \times n}$  — заданные матрицы. Линейное матричное неравенство

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \prec 0$$

разрешимо относительно матричной переменной  $\Delta \in \mathbb{R}^{k \times l}$  тогда и только тогда, когда существуют числа  $\mu_1, \mu_2$  такие, что

$$G \prec \mu_1 M M^\top, \quad G \prec \mu_2 N^\top N.$$

**Лемма Е.6.** Пусть  $X_{11} = X_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_{11} = Y_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Для существования матриц

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^\top & X_{22} \end{pmatrix} \succ 0, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^\top & Y_{22} \end{pmatrix} \succ 0, \quad X, Y \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

таких что

$$XY = I,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} \succ 0.$$

В частности, при  $Z = X_{11} - Y_{11}^{-1} \succ 0$  матрица  $X$  может быть доопределена следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} P_{11} & Z \\ Z & Z \end{pmatrix}.$$

## Библиографический комментарий

На русском языке в период 1955–1985 г.г. было издано большое число учебников и монографий, достаточно полно отражавших состояние теории управления в те годы. Так, много учебников посвящено частотному подходу к линейным системам [25, 31, 73, 92, 117]. Описание в пространстве состояний и задачи оптимального управления освещены в работах [4, 7, 8, 30, 31, 43, 50, 51, 58, 61, 67–69, 94, 102, 104]. Большое внимание уделялось управлению дискретными системами [27, 38, 105]. В целом основные результаты теории управления на начало 80-х годов отражены в справочнике под редакцией А. А. Красовского [99] и в фундаментальном учебнике А. А. Первозванского [82]. За последние годы издание учебной и научной литературы на русском языке продолжается (хотя и с меньшей активностью), см. например [1, 5, 9, 10, 12–14, 40, 41, 48, 53, 55, 62, 66, 75, 77, 79, 83, 97, 98, 108, 118, 121, 184]; как правило, эти книги посвящены отдельным проблемам теории.

Совершенно иная ситуация с публикациями на Западе. Помимо стандартных учебников по линейным системам, которые выходят все новыми изданиями [148, 176, 181], появляются публикации, которые отражают прогресс в развитии науки об управлении за последние десятилетия. Кроме того, издано много книг, которые можно рассматривать и как учебники, и как монографии, например [144, 153, 159, 162, 163, 167, 192, 193, 228]. Наиболее интересные статьи из журналов, связанные со становлением новых направлений, переизданы в сборниках [207, 209]. Выпущена энциклопедия по управлению [217] и справочник [218], содержащий обзорные статьи по всем основным разделам теории и практики управления.

## К Главе 1

Содержание раздела 1.1 стандартное. Описание в пространстве состояний широко распространилось в конце 1950-х годов, под влиянием пионерских работ Л. С. Понтрягина с соавторами [91] и Р. Калмана [49, 177]. До середины прошлого века исследовались в основном одномерные (односвязные) системы, интерес к многомерным (многосвязным) системам возник позже, причем основным аппаратом для их анализа и синтеза стало описание в пространстве состояний.

Взгляд на линейные стационарные системы как на линейные операторы, преобразующие входные сигналы в выходные в настоящее время является общепринятым, равно как параллельное рассмотрение непрерывных и дискретных систем. В связи с этим нужны понятия норм сигналов и операторов в различных функциональных пространствах, описанные в разделе 1.1.2.

Условия устойчивости линейных дискретных и непрерывных систем, заданных в пространстве состояний, известны давно, см., например, [21, 65]; их основы заложил еще А. М. Ляпунов [72] в работе 1892 года. Мы приводим условия, в основном, в форме квадратичных функций Ляпунова, линейных матричных уравнений и неравенств, именно этот аппарат будет использоваться впоследствии в более общих ситуациях.

Понятия управляемости и наблюдаемости введены Калманом [49]; теперь они стали ключевыми в теории линейных систем.

Теорема о возможности произвольного размещения полюсов для управляемой системы обычно связывается с именем Калмана, хотя сам Калман [50] указывает на приоритет Дж. Бертрама. Теорема 1.4.4, характеризующая эффект “всплеска” при удалении полюсов в левую полуплоскость, принадлежит Р. Н. Измайлову [46].

Результат Замечания 1.2.3 установлен в [196]. Идея использования параметрических функций Ляпунова, по-видимому, впервые была высказана в [195].

Способ оценки состояния, приведенный в Теореме 1.4.5, часто называется *наблюдателем Люенбергера*; он был предложен в [187], см. также [50, 89, 188].

Именно достижимые множества (раздел 1.5) дают важную характеристику динамической системы, однако они весьма сложны для изучения. Поскольку достижимое множество представляет собой множество точек фазового пространства, в которые может перейти динамическая система из начала координат при некоторых допустимых

возмущениях, то можно возмущения  $w$  рассматривать в качестве *управлений*. При этом мы приходим к задаче классического оптимального управления о попадании в начало координат. Структура достижимых множеств рассматривалась в ряде работ, начиная с середины прошлого столетия, см. например, [95, 96] и др. Наиболее полные результаты приведены в монографии А. М. Формальского [107], где исследованы не только ограничения вида

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0,$$

но и многие другие (например, возмущения, ограниченные в  $L_1$ - и  $L_2$ -нормах, а также их комбинации).

Различные факты о строении достижимых множеств (в том числе, и в дискретном времени) получены в книгах А. Б. Куржанского [64], Ф. Швеппе [212] и С. Бойда с соавторами [146].

Параметрическую неопределенность в линейных системах систематически начал исследовать Горовиц [36], впоследствии создавший специальные полуэвристические методы для работы с ними — так называемую QFT (Qualitative Feedback Theory) — качественную теорию обратной связи [172]. К 90-м годам прошлого столетия теория параметрической робастности, со своими задачами и методами, в целом сложилась; см. ее систематическое изложение в [128, 131, 139].

Важное направление в анализе неопределенности связано с моделью “неизвестных но ограниченных” (“unknown-but-bounded”) возмущений, восходящей к [212]. Большой вклад в развитие этого направления внесли отечественные ученые А. Б. Куржанский [64] и Ф. Л. Черноусько [119]. Близкие идеи использовались в минимаксной теории управления [20, 120, 134]. Много сведений о робастной устойчивости можно найти в [89]. Формула для комплексного радиуса устойчивости матриц (Теорема 1.6.1) получена Хинриксеном и Причардом [171]. Для вещественного радиуса устойчивости в течение долгого времени существовали лишь оценки снизу; наконец, в 1995 году эта проблема была разрешена совместными усилиями шести авторов [205]; этот результат приведен в Теореме 1.6.3.

Обзоры результатов по робастности можно найти в монографиях [128, 131, 139, 162, 167, 192, 193, 207, 209, 210, 222, 228].

## К Главе 2

Термин “*линейные матричные неравенства*” введен в теорию управления в 1962 году В. А. Якубовичем [123] и независимо Я. Виллем-



сом (J. C. Willems) в 1971 г. (хотя первым линейным матричным неравенством может считаться неравенство Ляпунова, сформулированное в 1892 г. в связи с анализом устойчивости [72]). В настоящее время этот аппарат получил широкое развитие; в [146] дано его систематическое изложение и показано, что многие задачи теории управления могут формулироваться в виде линейных матричных неравенств. Мощные и эффективные численные методы решения таких неравенств разработаны Ю. В. Нестеровым и А. С. Немировским [80]. Лемма 2.1.1 и основанный на ней способ описания допустимого множества получены в [90].

$S$ -процедура была обоснована В. А. Якубовичем [125]; ее обобщение на случай двух ограничений (в том числе, и на неоднородные квадратичные формы) получено в [200]. Обзор ее модификаций, частных случаев и применений дан в [37].

Лемма Питерсена впервые доказана в [197]; ее обобщения и модификации можно найти в [115, 211]. В [180, 226] она применялась при синтезе робастного  $H_\infty$ -управления, а в [190] этот результат привлекался для построения общей квадратичной функции Ляпунова для интервального матричного семейства. Модификация в форме Леммы 2.2.11 приведена в [155] в контексте робастного метода наименьших квадратов.

Идея робастной квадратичной устойчивости была выдвинута в 80-х годах прошлого века Дж. Лейтманом и Б. Бармишем [132, 183]; впрочем, корни этой идеи могут быть прослежены много раньше. Техника сведения к линейным матричным неравенствам описана в книге [146].

Задача о квадратичной стабилизации, по-видимому, впервые рассмотрена А. М. Мейлахсом в [74], где и применен трюк с введением искусственной переменной  $Y$ , который послужил систематической основой для использования линейных матричных неравенств в задачах стабилизации. Более подробно техника, основанная на линейных матричных неравенствах, описана в книге [146]. Сведение проблемы о гарантированном квадратичном показателе качества для систем с неопределенностью к линейным матричным неравенствам осуществлено в ряде работ, см., например, [146, 198, 199].

Идея оптимальности в теории управления стала ключевой в 1950-е годы. До этого в центр исследований ставились задачи анализа систем и обеспечения их устойчивости; проблемы качества процессов играли меньшую роль. Ситуация кардинально изменилась к 1960-м годам, когда вся наука об управлении стала ассоциироваться с оптимальным управлением, тогда как раньше она обычно называлась теорией авто-

матического регулирования. В таком смещении акцентов важную роль сыграли работы Беллмана, Калмана, Л. С. Понтрягина, А. А. Фельдбаума и других крупных ученых того времени [24, 50, 91, 104].

Задача о линейно-квадратичном регуляторе (в русской литературе часто называвшаяся задачей об аналитическом конструировании регуляторов) была одной из первых решенных задач оптимального управления; основной вклад в ее решение внесли Р. Калман [177] и А. М. Летов [68]. Это решение было легко воспринято специалистами по теории автоматического регулирования, так как оно формулировалось в привычных для них терминах обратной связи (в отличие от задачи о релейном быстродействии, в которой решение является программным управлением). В настоящее время теория линейно-квадратичной оптимизации развита очень глубоко, включая анализ всевозможных вырожденных случаев; есть ряд монографий, специально посвященных этому направлению, например, [51, 129].

Уравнение Риккати играет ключевую роль в линейно-квадратичном регулировании и неоднократно встречается в последующих главах; подробные сведения о нем и его связи с LQR-задачей можно найти в [223, 224]. Подход, описанный в разделе 2.5.1 и основанный на использовании функций Ляпунова, тесно связан с методом динамического программирования [22].

Задача  $H_\infty$ -оптимизации была поставлена в работах Зеймса, см. например, [227]; ныне это один из центральных разделов теории линейных систем, которому посвящено множество статей и монографий [153, 159, 170, 228]. Первоначально задача была решена в частотной области с использованием таких средств теории функций комплексного переменного, как теорема Неванлинны-Пика [192]. В 1989 г. появилась статья [154], в которой было дано полное решение в пространстве состояний (так называемый “2-Риккати подход”). В задачах с возмущениями ей соответствует случай  $L_2$ -ограниченных возмущений. Мы же будем в основном рассматривать  $L_\infty$ -ограниченные возмущения, поэтому  $H_\infty$ -оптимизация находится на периферии нашей книги.

Модельная задача управления двухмассовой системой заимствована из [208].

## К Главе 3

Подход на основе построения гарантированных оценок был предложен в конце 60-х – начале 70-х годов прошлого века в работах американских ученых Г. Виценхаузена [225], Д. Бертсекаса и И. Родеса [138],

Ф. Швеппе [212]. Примерно в это же время подобные проблемы разрабатывались в семинаре Н. Н. Красовского такими исследователями, как А. Б. Куржанский, А. И. Субботин, Ю. С. Осипов и другие, см. [64]. Существенный вклад в этот круг исследований внес Ф. И. Черноусько [119]. Обзор результатов можно найти в [62, 81, 109, 182, 215].

Основным результатом Главы 3, как с технической, так и с идейной точек зрения, является Теорема 3.1.1. По-видимому впервые она была сформулирована и доказана в [127, 146]; ее дискретный аналог, Теорема 3.1.4, также установлена в [146].

Внешние и внутренние аппроксимации достижимых множеств дискретных систем с помощью эллипсоидов были построены в работах Ф. Л. Черноусько [119]. Консерватизм приближенного описания достижимого множества с помощью инвариантных эллипсоидов обсуждался в [219]; в этой работе приведено семейство систем, для которых инвариантный эллипсоид может давать сколь угодно грубую оценку. Система из Примера 3.1.1 принадлежит такому семейству, записанному на языке пространства состояний.

Эллипсоидальная техника фильтрации была развита в работах [64, 119, 212]. Среди немногих работ, в которых аппарат LMI использовался для решения задач фильтрации, можно упомянуть [127], однако, наши оценки проще и точнее.

Изложение материала этого раздела следует работам авторов [78, 201] (раздел 3.1), [86, 204] (раздел 3.2.1) и [110] (раздел 3.2.2).

## К Главе 4

Задача об оптимальном подавлении внешних возмущений является одной из основных в теории управления. Однако ею занимались преимущественно в стохастической постановке, где решением является LQG (Linear Quadratic Gaussian — линейно-квадратично-гауссовский) регулятор, аналогичный линейно-квадратичному регулятору из раздела 2.5.1; мы не останавливаемся на стохастических задачах в этой книге. Другая модель внешних возмущений — гармонические с неизвестной частотой; в этом случае их подавление возможно с помощью  $H_\infty$ -оптимизации. Задача же о произвольных ограниченных помехах, была решена сравнительно недавно. Еще в 1940-е годы возникла так называемая *задача о накоплении возмущений* Б. В. Булгакова [28], однако основной интерес проявлялся к проблеме анализа: каково максимальное отклонение, вызываемое произвольными ограниченными внешними воздействиями. Такая задача, по сути, является задачей программ-

ного оптимального управления, в которой внешние возмущения рассматриваются как управления. Позже появились работы по компенсации ограниченных возмущений, не содержавшие, впрочем, общих методов синтеза оптимальных регуляторов [101].

Задача об оптимальном подавлении произвольных ограниченных возмущений для дискретных одномерных систем была четко поставлена в [126] (на Западе — в [220]); позже она получила название  $l_1$ -оптимизации. Ее решение для частных случаев было получено в [18, 126, 220]. Полное решение было построено в [19] и затем в [150]. Развитие теории и методов  $l_1$ -оптимизации дано в книгах [20, 149, 210]. Синтез регуляторов заданного порядка для задач с ограниченными помехами осуществлен в [29, 143]. Результаты, использующие множество достижимости для синтеза регуляторов, можно найти в [146]. Теорема 4.2.1 является уточнением этих результатов, она (и другие утверждения раздела 4.2) получена в работах авторов [78, 201].

Построению стабилизирующей обратной связи по выходу также посвящены работы [152, 172, 185, 216] и др.

Идея о необходимости учета неопределенности при конструировании систем управления являлась фундаментальной в теории управления на всех ее этапах. Если бы объект и внешние сигналы были известны точно, возможно было бы программное управление или использование прямой (а не обратной) связи. Об основополагающей роли неопределенности и преимуществах обратной связи в те периоды успехов оптимального управления, когда значение этих факторов несколько забывалось, неоднократно напоминал И. Горовиц [36]. Одна из первых моделей неопределенности (нелинейная секторная) была предложена в теории абсолютной устойчивости в пионерских работах А. И. Лурье, М. А. Айзермана, Ф. Р. Гантмахера [2, 70, 71].

В случае, когда внешнее возмущение принадлежит классу  $L_2$ , соответствующие методы предоставляются  $H_2$ - или  $H_\infty$ -оптимизацией [16, 133, 154, 228]. По существу, см. [32, 60, 133, 134],  $H_\infty$ -оптимальное управление является минимаксным управлением в дифференциальной игре против внешнего возмущения. В [154] впервые была предложена запись в пространстве состояний, в отличие от прежней частотной формы. Однако классическая задача  $H_\infty$ -оптимального управления предполагает, что начальные условия нулевые.

Идея подавления внешних возмущений, описываемых дифференциальными или разностными уравнениями, с помощью динамического регулятора по выходу системы появилась в работах Френсиса и Уонема [158, 160, 161] под названием “принцип внутренней модели” (internal

model principle).

Способ построения линейного динамического регулятора по выходу пониженного и полного порядка для гашения возмущений, ограниченных в  $L_2$ -норме, был предложен в монографии Д. В. Баландина и М. М. Когана [16, гл. 8] (см. также [17]); при этом синтез  $H_\infty$ -регулятора сводится к решению линейных матричных неравенств.

Изложение раздела 4.3.1 следует работе авторов [85], а изложение раздела 4.3.2 — работе [112]; см. также [114].

## К Главе 5

Мы уже отмечали выше, что проблема неопределенности является одной из центральных в теории управления. Сочетание неопределенности в объекте с неизвестными внешними возмущениями типично для прикладных задач. Результаты о синтезе линейных регуляторов в этих условиях при ограниченных возмущениях в основном принадлежат авторам [114].

Впервые проблема хрупкости стабилизирующего регулятора для управляемых систем была поднята С. Бхатгачарией и Л. Килем в работе [179]. А именно, на разнообразных примерах было показано, что даже при малом изменении параметров регулятора оптимальная система может стать неустойчивой (такие регуляторы в [179] были названы “хрупкими”). Впоследствии появилось большое число работ, развивающих эту тематику (см. [52, 175, 221] и др.). LMI-подход к построению нехрупкого регулятора освещен, например, в [169].

Первой работой на русском языке, посвященной проблеме хрупкости регуляторов, является статья [15], в ней использовался термин “грубый регулятор”. Мы считаем более целесообразным использовать понятие “хрупкий” из [179], так как грубость обычно предполагает малое изменение свойств системы [11], в то время как мы не считаем возможные отклонения малыми. В [15] успешно использовался аппарат линейных матричных неравенств, однако, при этом предполагалось, что внешние возмущения отсутствуют.

Отметим наиболее близкую по тематике работу [190], посвященную вопросам устойчивости и стабилизации интервальной системы. Однако нами рассмотрена задача в существенно более общей постановке; при этом в равном объеме рассмотрен как непрерывный, так и дискретный вариант задачи, тогда как в [190] исследован только непрерывный случай; в ней не рассматривается понятие инвариантного эллипсоида и тем более авторы не задаются целью его минимизации.

Основные результаты раздела 5.1 изложены в работе авторов [87, 203], раздела 5.2 — в [111], раздела 5.3 — в [112]; см. также [114].

## К Главе 6

Исследование проблемы абсолютной устойчивости восходит к работам А. И. Лурье [71], М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [2], Е. С. Пятницкого [93]. По-существу, здесь мы сталкиваемся с проблемой *робастной* устойчивости нелинейных систем. Систематическое использование ЛМІ-техники применительно к подобным задачам началось с работ В. А. Якубовича [123, 124]. В [213] ЛМІ-техника использовалась в целях робастной стабилизации систем с секторной нелинейностью. Задача построения абсолютно стабилизирующего регулятора для системы управления с ограничениями на нелинейность, отличающимися от рассмотренных в разделе 6.1, была решена в [16]. Близкие задачи исследовались А. С. Позняком с соавторами [165]. В изложении мы следуем нашей работе [88].

В разделе 6.2 мы рассматриваем нестационарные системы в отличие от всего остального материала книги, относящегося только к стационарным задачам. При этом оказывается, что техника линейных матричных неравенств естественно обобщается на этот случай. Изложенные результаты опубликованы в нашей статье [88].

Такие инженерные требования к качеству системы как время установления, перерегулирование, степень затухания и др. являются общепринятыми, см. например [68]. Техника инвариантных эллипсоидов оказывается очень полезной для их анализа; изложение раздела 6.3 следует работе авторов [113].

Теория положительных линейных систем достаточно развита. Им посвящены монографии [157, 168]; много требуемых математических сведений можно найти в книгах [136, 173, 178]. Отдельные вопросам анализа и синтеза управления в таких системах рассматриваются в статьях [151, 191, 206] и многих других. К сожалению, на русском языке публикации немногочисленны. Монографии М. А. Красносельского [56, 57] посвящены в основном положительным решениям операторных уравнений, хотя и содержат некоторые результаты по дифференциальным уравнениям. Как мы видели, положительные устойчивые системы обладают линейной функцией Ляпунова; это роднит их со сверхустойчивыми системами [26, 84, 89], у которых есть кусочно-линейная функция Ляпунова. Прикладные задачи, относящиеся к экологическим системам, подробно рассмотрены в [44, 47], однако боль-

шинство из них описывается нелинейными уравнениями.

В связи с условиями положительности в западной литературе обычно ссылаются на книгу Люенбергера [189] 1979 года, однако аналог этого условия (даже для нелинейных систем) приводится в монографии М. А. Красносельского [56] 1962 года. Результаты типа Теорем 6.4.2 и 6.4.4 (и даже более подробные) можно найти, например, в [116, 136, 173].

В доказательстве Теоремы 6.4.4 мы следуем статье [206].

## К Главе 7

Подробное описание методов выпуклой оптимизации, используемых при решении линейных матричных неравенств, можно найти в [80, 147].

Задачи, рассматриваемые в Главе 7 (и предыдущих главах), решались в среде MATLAB с помощью свободно распространяемых программных пакетов SeDuMi [214] и YALMIP [186], которые доступны по адресам <http://sedumi.ie.lehigh.edu/> и <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php> (см. также краткое русскоязычное руководство [122] по пользованию этими средствами).

Кроме того, отметим также более современный (и во многом более мощный) пакет cvx [166], который свободно доступен по адресу <http://stanford.edu/~boyd/cvx>

Итерационный метод (раздел 7.2) впервые был изложен в работе [114]. Задача управления гироплатформой (раздел 7.3.2) заимствована из книги [3], а результаты ее численного решения, используемые для сравнения, взяты из [6].

## К Приложению

Хорошими справочниками по теории матриц являются [23, 33, 35, 100, 116].

Лемма E.5 доказана в [174] (см. также [16]), а лемма E.6 — в работе [17].

## Литература

- [1] АГРАЧЕВ А. А., САЧКОВ Ю. Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2004.
- [2] АЙЗЕРМАН М. А., ГАНТМАХЕР Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
- [3] АЛЕКСАНДРОВ А. Г. Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986.
- [4] АЛЕКСАНДРОВ А. Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989.
- [5] АЛЕКСАНДРОВ А. Г. Методы построения систем автоматического управления. М.: Физматлит, 2008.
- [6] АЛЕКСАНДРОВ А. Г., ЧЕСТНОВ В. Н. Синтез многомерных систем заданной точности. I. Применение процедур  $LQ$ -оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1998. №7. С. 83–95.
- [7] АЛЕКСЕЕВ В. М., ТИХОМИРОВ В. М., ФОМИН С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [8] АНДРЕЕВ Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
- [9] АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. Избранные главы теории автоматического управления. СПб.: Наука, 1999.
- [10] АНДРИЕВСКИЙ Б. Р., ФРАДКОВ А. Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и SCILAB. СПб.: Наука, 2001.
- [11] АНДРОНОВ А. А., ПОНТЯГИН Л. С. Грубые системы // Андронов А. А. Собрание трудов. М.: АН СССР, 1956. С. 183–187.



- [12] АРУТЮНОВ А. В., МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ Г. Г., ТИХОМИРОВ В. М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал, 2006.
- [13] АФАНАСЬЕВ В. Н. Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.
- [14] АФАНАСЬЕВ В. Н., КОЛМАНОВСКИЙ В. Б., НОСОВ В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.
- [15] БАЛАНДИН Д. В., КОГАН М. М. Синтез грубых регуляторов на основе линейных матричных неравенств // Автоматика и телемеханика. 2006. №12. С. 154–162.
- [16] БАЛАНДИН Д. В., КОГАН М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
- [17] БАЛАНДИН Д. В., КОГАН М. М. Линейно-квадратичные и  $\gamma$ -оптимальные законы управления по выходу // Автоматика и телемеханика. 2008. №6. С. 5–14.
- [18] БАРАБАНОВ А. Е. Оптимальное управление неминимально-фазовым дискретным объектом с произвольным ограниченным шумом // Вестник ЛГУ. Серия: математика. 1980. Т. 13. С. 119–120.
- [19] БАРАБАНОВ А. Е., ГРАНИЧИН О. Н. Оптимальный регулятор для линейных объектов с ограниченным шумом // Автоматика и телемеханика. 1984. №5. С. 39–46.
- [20] БАРАБАНОВ А. Е. Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: С.-Петербург. Унив., 1996.
- [21] БЕЛЛМАН Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
- [22] БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
- [23] БЕЛЛМАН Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
- [24] БЕЛЛМАН Р., ГЛИКСБЕРГ И., ГРОСС О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М.: ИЛ, 1962.
- [25] БЕСЕКЕРСКИЙ В. А., ПОПОВ Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966.

- [26] БОБЫЛЕВА О. Н., ПЯТНИЦКИЙ Е. С. Системы с кусочно-линейными функциями Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 2001. №9. С. 25–36.
- [27] БОЛТЯНСКИЙ В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
- [28] БУЛГАКОВ Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. Вып. 5. С. 339–342.
- [29] ВИШНЯКОВ А. Н., ПОЛЯК Б. Т. Синтез регуляторов низкого порядка для дискретных систем управления при наличии случайных возмущений // Автоматика и телемеханика. 2000. №9. С. 112–119.
- [30] ВОРОНОВ А. А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
- [31] ВОРОНОВ А. А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980.
- [32] ГАНЕБНЫЙ С. А., КУМКОВ С. С., ПАЦКО В. С. Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 753–770.
- [33] ГАНТМАХЕР Ф. Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
- [34] ГНОЕНСКИЙ Л. С. Задача Булгакова о накоплении возмущений // Задача Булгакова о максимальном отклонении и ее применение / Под ред. В. В. Александрова. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1993. С. 7–29.
- [35] ГОЛУБ ДЖ., ВАН ЛОАН Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
- [36] ГОРОВИЦ И. Синтез систем с обратной связью. М.: Советское радио, 1970.
- [37] ГУСЕВ С. В., ЛИХТАРНИКОВ А. Л. Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и  $S$ -процедуры // Автоматика и телемеханика. 2006. №11. С. 77–121.

- [38] ДЖУРИ Э. Импульсные системы автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963.
- [39] ЕМЕЛЬЯНОВ С. В. Избранные труды по теории управления. М.: Наука, 2006.
- [40] ЕМЕЛЬЯНОВ С. В., КОРОВИН С. К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука, 1997.
- [41] ЕФИМОВ Д. В. Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями. СПб.: Наука, 2005.
- [42] ЖЕРМОЛЕНКО В. Н. Максимальное отклонение колебательной системы второго порядка с внешним и параметрическим возмущениями // Известия РАН. ТиСУ. 2007. №3. С. 75–80.
- [43] ЗАДЕ Л., ДЕЗООЕР Ч. Теория линейных систем. М.: Наука, 1970.
- [44] ЗАСЛАВСКИЙ Б. Г., ПОЛУЭКТОВ Р. А. Управление экологическими системами. М.: Наука, 1988.
- [45] ЗУБОВ В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромгиз, 1962.
- [46] ИЗМАЙЛОВ Р. Н. Эффект “всплеска” в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // Автоматика и телемеханика. 1987. №8. С. 56–62.
- [47] ИЛЬИЧЕВ В. Г. Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах. М.: Физматлит, 2008.
- [48] КАЛЁНОВА В. И., МОРОЗОВ В. М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010.
- [49] КАЛМАН Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды I Международного конгресса ИФАК. Т. 2. М.: АН СССР, 1961. С. 521–547.
- [50] КАЛМАН Р., ФАЛЬ П., АРБИВ М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
- [51] КВАКЕРНААК Х., СИВАН Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

- [52] КИСЕЛЕВ О. Н., ПОЛЯК Б. Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию  $H^\infty$  и по критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика. 1999. №3. С. 113–119.
- [53] КОРОВОВ В. И. Метод функций управляемости. М.–Ижевск: R&C Dynamics, 2007.
- [54] КОРОВИН С. К., ФОМИЧЕВ В. В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
- [55] КРАСНОВА С. А., УТКИН В. А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
- [56] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1962.
- [57] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М. А., ЛИВШИЦ Е. А., СОВОЛЕВ А. В. Позитивные линейные системы. М.: Наука, 1985.
- [58] КРАСОВСКИЙ Н. Н. Теория управления движением. М.: Физматгиз, 1968.
- [59] КРАСОВСКИЙ Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
- [60] КРАСОВСКИЙ Н. Н., СУББОТИН А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [61] КРОТОВ В. Ф., ГУРМАН В. И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1974.
- [62] КУНЦЕВИЧ В. М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006.
- [63] КУНЦЕВИЧ В. М., ПШЕНИЧНЫЙ Б. Н. Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. 1996. №1. С. 74–81.
- [64] КУРЖАНСКИЙ А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [65] ЛА-САЛЛЬ Ж., ЛЕФШЕЦ С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: ИЛ, 1964.

- [66] ЛЕОНОВ Г. А. Введение в теорию управления. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2004.
- [67] ЛЕТОВ А. М. Аналитическое конструирование регуляторов I–IV // Автоматика и телемеханика. 1960 №4, С. 436–441; №5, С. 561–568; №6, С. 661–665; 1961, №4, С. 425–435.
- [68] ЛЕТОВ А. М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981.
- [69] Ли Э., МАРКУС Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
- [70] ЛУРЬЕ А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951.
- [71] ЛУРЬЕ А. И., ПОСТНИКОВ В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. №8. Вып. 3. С. 246–248.
- [72] ЛЯПУНОВ А. М. Общая задача об устойчивости движения. Л.-М.: ОНТИ, 1935.
- [73] МЕЕРОВ М. В. Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. М.: Наука, 1986.
- [74] МЕЙЛАХС А. М. О стабилизации линейных управляемых систем в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1975. №2. С. 182–184.
- [75] МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ И СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
- [76] МИРОШНИК И. В., НИКИФОРОВ В. О., ФРАДКОВ А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
- [77] МИСРИХАНОВ М. Ш. Классические и новые методы анализа многомерных динамических систем. М.: Энергоатомиздат, 2004.
- [78] НАЗИН С. А., ПОЛЯК Б. Т., ГОПУНОВ М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2007. №3. С. 106–125.

- [79] НЕБЫЛОВ А. В. Гарантирование точности управления. М.: Наука, 1998.
- [80] НЕСТЕРОВ Ю. Е. Методы выпуклой оптимизации. М.: МЦНМО, 2009.
- [81] ОВСЕЕВИЧ А. И., ТАРАБАНЬКО Ю. В. Явные формулы для эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. №2. С. 33–44.
- [82] ПЕРВОЗВАНСКИЙ А. А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
- [83] ПОДЧУКАЕВ В. А. Аналитические методы теории автоматического управления. М.: Физматлит, 2002.
- [84] ПОЛЯК Б. Т. Обобщенная сверхустойчивость в теории управления // Автоматика и телемеханика. 2004. №4. С. 70–80.
- [85] ПОЛЯК Б. Т., ТОПУНОВ М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // Автоматика и телемеханика. 2008. №5. С. 72–90.
- [86] ПОЛЯК Б. Т., ТОПУНОВ М. В. Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 418. №6. С. 749–753.
- [87] ПОЛЯК Б. Т., ТОПУНОВ М. В., ЩЕРБАКОВ П. С. Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений // Стохастическая оптимизация в информатике. Вып. 3. / Под ред. О. Н. Граничина. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2007. С. 51–84.
- [88] ПОЛЯК Б. Т., ХЛЕВНИКОВ М. В., ЩЕРБАКОВ П. С. Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями // Проблемы устойчивости и управления. Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика В. М. Матросова. М.: Физматлит, 2013. С. 271–300.
- [89] ПОЛЯК Б. Т., ЩЕРБАКОВ П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
- [90] ПОЛЯК Б. Т., ЩЕРБАКОВ П. С. Техника  $D$ -разбиения при решении линейных матричных неравенств // Автоматика и телемеханика. 2006. №11. С. 159–174.

- [91] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
- [92] Попов Е. П. Теория линейных систем регулирования и управления. М.: Наука, 1989.
- [93] Пятницкий Е. С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1968. №6. С. 5–36.
- [94] Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.
- [95] Сиротин А. Н., Формальский А. М. Области достижимости и управляемости линейных дискретных систем // Изв. РАН. ТИСУ. 2002. №4. С. 5–16.
- [96] Сиротин А. Н., Формальский А. М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // Автоматика и телемеханика. 2003. №12. С. 17–32.
- [97] Соколов В. Ф. Стабилизация линейных непрерывных систем. Сыктывкар: СыктГУ, 2001.
- [98] Соколов В. Ф. Робастное управление при ограниченных возмущениях. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2011.
- [99] Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.
- [100] Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
- [101] Уланов Г. М. Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. М.: Машиностроение, 1971.
- [102] Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.
- [103] Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
- [104] Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963.

- [105] Фомин В. Н. Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: ЛГУ, 1985.
- [106] ФОРМАЛЬСКИЙ А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
- [107] ФОРМАЛЬСКИЙ А. М. Об угловых точках границ областей достижимости // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47. Вып. 4. С. 566–574.
- [108] Фрадкин А. Л. Кибернетическая физика. СПб.: Наука, 2003.
- [109] ФУРАСОВ В. Д. Задачи гарантированной идентификации. М.: Бином, 2005.
- [110] ХЛЕБНИКОВ М. В. Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2009. №1. С. 147–161.
- [111] ХЛЕБНИКОВ М. В. Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. 2010. №4. С. 106–119.
- [112] ХЛЕБНИКОВ М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // Автоматика и телемеханика. 2011. №4. С. 27–42.
- [113] ХЛЕБНИКОВ М. В. Время установления в линейной динамической системе с ограниченными внешними возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2012. №6. С. 3–17.
- [114] ХЛЕБНИКОВ М. В., Поляк Б. Т., Кунцевич В. М. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. 2011. №11. С. 9–59.
- [115] ХЛЕБНИКОВ М. В., ЩЕРБАКОВ П. С. Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // Автоматика и телемеханика. 2008. №11. С. 125–139.
- [116] ХОРН Р., ДЖОНСОН Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [117] ЦЫПКИН Я. З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.



- [118] ЧАЙКОВСКИЙ М. М., КУРДЮКОВ А. П. Алгебраические уравнения Риккати и линейные матричные неравенства для систем дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2005.
- [119] ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
- [120] ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., МЕЛИКЯН А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
- [121] ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., АНАНЬЕВСКИЙ И. М., РЕШМИН С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
- [122] ЧУРИЛОВ А. Н., ГЕССЕН А. В. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2004.
- [123] ЯКУБОВИЧ В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. 1962. Т. 143. №6. С. 1304–1307.
- [124] ЯКУБОВИЧ В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // Автоматика и телемеханика. 1964. №7. С. 1017–1029.
- [125] ЯКУБОВИЧ В. А. Частотная теорема в теории управления // Сибирский матем. журнал. 1973. Т. 14. №2. С. 384–419.
- [126] ЯКУБОВИЧ Е. Д. Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1975. №9. С. 73–79.
- [127] AVEDOR J., NAGPAL K., POOLLA K. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 1996. No. 6. P. 899–927.
- [128] ACKERMANN J. Robust Control: The Parameter Space Approach. New York: Springer, 2002.
- [129] ANDERSON B. D. O., MOORE J. B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. NJ: Prentice-Hall, 1989.

- [130] BALAKRISHNAN V., BOYD S. On computing the worst-case peak gain of linear systems // Systems and Control Letters. 1992. V. 19. P. 265–269.
- [131] BARMISH B. R. New Tools for Robustness of Linear Systems. New York: MacMillan, 1995.
- [132] BARMISH B. R., CORLESS M., LEITMANN G. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 1983. V. 21. No 2. P. 246–255.
- [133] BAŠAR T., BERNHARD P.  $H_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhäuser, 1995.
- [134] BAŠAR T., OLSDER G. Dynamic Noncooperative Game Theory. New York: Academic Press, 1982.
- [135] BEN-TAL A., NEMIROVSKI A. Lectures on Modern Convex Optimization. Philadelphia: SIAM, 2001.
- [136] BERMAN A., PLEMMONS R. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. New York: Academic Press, 1979.
- [137] BERTSEKAS D. P., RHODES I. B. On the minimax reachability of target sets and target tubes // Automatica. 1971. No. 7. P. 233–247.
- [138] BERTSEKAS D. P., RHODES I. B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. No. 16. P. 117–128.
- [139] BHATTACHARYYA S. P., CHAPPELLAT H., KEEL L. H. Robust Control: The Parametric Approach. NJ: Prentice Hall, 1995.
- [140] BLANCHINI F. Set invariance in control — a survey // Automatica. 1999. No. 35. P. 1747–1767.
- [141] BLANCHINI F., MIANI S. Set-Theoretic Methods in Control. Boston: Birkhäuser, 2008.
- [142] BLANCHINI F., SZNAIER M. Persistent disturbance rejection via static state feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1995. No. 40. P. 1127–1131.

- 
- [143] BLANCHINI F., SZNAIER M. A convex optimization approach for fixed-order controller design for disturbance rejection in SISO systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. V. 45. P. 784–789.
- [144] BOYD S., BARRATT C. Linear Controller Design: Limits of Performance. NJ: Prentice Hall, 1991.
- [145] BOYD S., DOYLE J. Comparison of peak and RMS gains for discrete-time systems // Systems and Control Letters. 1987. V. 9. P. 1–6.
- [146] BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [147] BOYD S., VANDENBERGE L. Convex Optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [148] CHEN C. T. Linear System Theory and Design. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [149] DAHLEH M., DIAZ-BOBILLO I. J. Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach. NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [150] DAHLEH M. A., PEARSON J. B.  $l_1$ -Optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1987. No. 32. P. 314–322.
- [151] DE LEENHEER P., AEYELS D. Stabilization of positive linear systems // Systems and Control Letters. 2001. V. 44. P. 259–271.
- [152] DESOER C. A., VIDYASAGAR M. Feedback Systems: Input-Output Properties. New York: Academic Press, 1975.
- [153] DOYLE J. C., FRANCIS B. A., TANNENBAUM A. R. Feedback Control Theory. New York: MacMillan, 1992.
- [154] DOYLE J. C., GLOVER K., KHARGONEKAR P. P., FRANCIS B. A. State-space solution to standard  $H^2$  and  $H^\infty$  control problem // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
- [155] EL GHAOUI L., LEBRET H. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 1997. V. 18. No. 4. P. 1035–1064.

- [156] ELIA N., DAHLEH M. A. Minimization of the worst case peak-to-peak gain via dynamic programming: state feedback case // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. No. 45. P. 687–701.
- [157] FARINA L., RINALDI S. Positive Linear Systems. New York: Wiley, 2000.
- [158] FRANCIS B. A. The linear multivariable regulator problem // SIAM Journal on Control and Optimization. 1977. V. 15. No. 3. P. 486–505.
- [159] FRANCIS B. A. A Course in  $H_\infty$  Control Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [160] FRANCIS B. A., WONHAM W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators // Applied Mathematics and Optimization. 1975. V. 2. No. 2. P. 170–194.
- [161] FRANCIS B. A., WONHAM W. M. The internal model principle of control theory // Automatica. 1976. V. 12. No. 5. P. 457–465.
- [162] FREEMAN R. A., KOKOTOVIĆ P. V. Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques. Boston: Birkhäuser, 1996.
- [163] GLAD T., LJUNG L. Control theory: Multivariable and Nonlinear Methods. London: Taylor & Francis, 2000.
- [164] GLOVER D., SCHWEPPE F. Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. No. 16. P. 411–423.
- [165] GONZALEZ-GARCIA S., POLYAKOV A., POZNYAK A. Output linear controller for a class of nonlinear systems using the invariant ellipsoids technique // Proc. American Control Conference (ACC'09). St. Louis, USA, June 10–12, 2009. P. 1160–1165.
- [166] GRANT M., BOYD S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming (web page and software). URL <http://stanford.edu/~boyd/cvx>
- [167] GREEN M., LIMEBEER D. J. N. Linear Robust Control. NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [168] HADDAD W., CHELLABOINA V., HUI Q. Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems. Princeton: Princeton University Press, 2010.

- [169] HAO F., CHU T., HUANG L., WANG L. Non-fragile controllers of peak gain minimization for uncertain systems via LMI approach // Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems. 2003. V. 10. P. 681–694.
- [170] HELTON J. W., MERINO O. Classical Control Using  $H^\infty$  Methods. Philadelphia: SIAM, 1998.
- [171] HINRICHSSEN D., PRITCHARD A. Stability radius for structured perturbations and the algebraic Riccati equation // Systems and Control Letters. 1986. V. 8. P. 105–113.
- [172] HOROWITZ I. Survey on quantitative feedback theory (QFT) // International Journal of Control. 1991. V. 53. P. 255–291.
- [173] HORN R. A., JOHNSON C. B. Topics in Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [174] IWASAKI T., SKELTON R. E. All controllers for the general  $H_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state space formulas // Automatica. 1994. V. 30. No. 8. P. 1307–1317.
- [175] JADBABAIE A., ABDALLAH C., DORATO P., FAMULARO D. Robust, nonfragile, and optimal controller design via linear matrix inequalities // Proc. American Control Conference (ACC'98). Philadelphia, USA, June 24–26, 1998. P. 2842–2846.
- [176] KAILATH T. Linear Systems. NJ: Prentice-Hall, 1980.
- [177] KALMAN R. Contributions to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. V. 5. P. 102–199.
- [178] KASZKUREVICH E., BHAYA A. Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation. Boston: Birkhäuser, 1999.
- [179] KEEL L. H., BHATTACHARYYA S. P. Robust, fragile, or optimal? // IEEE Transactions on Automatic Control. 1997. V. 42. P. 1098–1105.
- [180] KHARGONEKAR P. P., PETERSEN I. R., ZHOU K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and  $H_\infty$  control theory // IEEE Transactions on Automatic Control. 1990. V. 35. P. 356–361.
- [181] KUO B. C. Automatic Control Systems. NJ: Prentice-Hall, 1991.

- [182] KURZHANSKI A. B., VALYI I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [183] LEITMANN G. Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties // Journal of Dynamic Systems Measurement and Control. 1979. V. 101. P. 212–216.
- [184] LEONOV G. A., SHUMAFOV M. M. Stabilization of Linear Systems. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2012.
- [185] LEVINE W. S., ATHANS M. On the determination of the optimal constant output-feedback gains for linear multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1970. V. 15. No. 2. P. 44–48.
- [186] LÖFBERG J. YALMIP: Software for solving convex (and nonconvex) optimization problems // Proc. American Control Conference (ACC'06). Minneapolis, USA, June 14–16, 2006. URL <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php>
- [187] LUENBERGER D. G. Observing the state of a linear system // IEEE Transactions on Military Electronics. 1964. V. 8, P. 74–80.
- [188] LUENBERGER D. G. An introduction to observers // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. V. 35. P. 596–602.
- [189] LUENBERGER D. G. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications. New York: Wiley, 1979.
- [190] MAO W.-J., CHU J. Quadratic stability and stabilization of dynamic interval systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. No. 6. P. 1007–1012.
- [191] MASON O., SHORTEN R. N. On linear copositive Lyapunov functions and the stability of switched positive linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52. No. 7. P. 1346–1349.
- [192] MCFARLANE D. C., GLOVER K. Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [193] MORARI M., ZAFIRIOU M. Robust Process Control. NJ: Prentice-Hall, 1989.

- 
- [194] NESTEROV YU., NEMIROVSKY A. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [195] PARKS P. C. A new proof of the Routh-Hurwitz stability criterion using the second method of Lyapunov // Mathematical Proceedings of The Cambridge Philosophical Society. 1962. V. 58. P. 669–672.
- [196] PATEL R. V., TODA M. Quantitative measures of robustness for multivariable systems // Proc. Joint Automatic Control Conference. San Francisco, USA, August 13–15, 1980. P. TP8-A.
- [197] PETERSEN I. R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Systems and Control Letters. 1987. V. 8. P. 351–357.
- [198] PETERSEN I. R., HOLLOT C. V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems // Automatica. 1986. V. 22. No. 4. P. 397–411.
- [199] PETERSEN I. R., MCFARLANE D. C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. V. 39. P. 1971–1977.
- [200] POLYAK B. T. Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 1998. V. 99. P. 553–583.
- [201] POLYAK B. T., NAZIN A. V., TOPUNOV M. V., NAZIN S. A. Rejection of bounded disturbances via invariant ellipsoids technique // Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, USA, December 13–15, 2006. P. 1429–1434.
- [202] POLYAK B. T., SHCHERBAKOV P. S. Ellipsoidal approximations to attraction domains of linear systems with bounded control // Proc. American Control Conference (ACC'09). St. Louis, USA, June 10–12, 2009. P. 5363–5367.
- [203] POLYAK B. T., SHCHERBAKOV P. S., TOPUNOV M. V. Invariant ellipsoids approach to robust rejection of persistent disturbances // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3976–3981.
- [204] POLYAK B. T., TOPUNOV M. V. Filtering with nonrandom noise: invariant ellipsoids technique // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 15349–15352.

- [205] QIU L., BERNHARDSSON B., RANTZER A., DAVISON E. J., YOUNG P. M., DOYLE J. C. A formula for computation of the real stability radius // *Automatica*. 1995. V. 31. No. 6. P. 879–890.
- [206] RANTZER A. Distributed control of positive systems // *Proc. 50th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, USA, December 12–15, 2011. P. 6608–6611.
- [207] RECENT ADVANCES IN ROBUST CONTROL / P. Dorato, R. Yedavalli, eds. New York: IEEE Press, 1990.
- [208] REINELT W. Robust control of a two-mass-spring system subject to its input constraints // *Proc. American Control Conference (ACC2000)*. Chicago, USA, June 28–30, 2000. P. 1817–1821.
- [209] ROBUST CONTROL / P. Dorato, ed. New York: IEEE Press, 1987.
- [210] SANCHEZ-PEÑA R., SZNAIER M. *Robust Systems: Theory and Applications*. New York: Wiley, 1998.
- [211] SHCHERBAKOV P. S., TOPUNOV M. V. Extensions of Petersen’s lemma on matrix uncertainty // *Proc. 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 11385–11390.
- [212] SCHWEPPE F. C. *Uncertain Dynamic Systems*. NJ: Prentice-Hall, 1973.
- [213] ŠILJAK D. D., STIPANOVIĆ D. M. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach // *Mathematical Problems in Engineering*. 2000. V. 6. P. 461–493.
- [214] STURM J. F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones (updated for version 1.05). URL <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>
- [215] SPECIAL ISSUE ON THE SET-MEMBERSHIP MODELLING OF UNCERTAINTIES IN DYNAMICAL SYSTEMS / F. Chernousko, B. Polyak, eds. // *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences*. 2005. V. 11. Iss. 2.
- [216] SYRMOS V. L., ABDALLAH C. T., DORATO P., GRIGORIADIS K. Static output feedback: a survey // *Automatica*. 1997. V. 33. No. 2. P. 125–137.



- 
- [217] SYSTEMS AND CONTROL ENCYCLOPEDIA / M. G. Singh, ed. V. 1–8. Oxford: Pergamon Press, 1987.
- [218] THE CONTROL HANDBOOK / W.S. Levine, ed. Boca Raton: CRC Press, 1996.
- [219] VENKATESH S., DAHLEH M. Does star norm capture  $l_1$  norm? // Proc. American Control Conference (ACC'95). Seattle, USA, June 21–23, 1995. P. 944–945.
- [220] VIDYASAGAR M. Optimal rejection of persistent bounded disturbances // IEEE Transactions on Automatic Control. 1986. No. 31. P. 527–535.
- [221] WANG J., DUAN Z., YANG Y., HUANG L. Analysis and Control of Nonlinear Systems with Stationary Sets: Time-Domain and Frequency-Domain Methods. World Scientific Publishing Company, 2009.
- [222] WEINMANN A. Uncertain Models and Robust Control. Wien: Springer, 1991.
- [223] WILLEMS J. C. The Analysis of Feedback Systems. Boston: MIT Press, 1971.
- [224] WILLEMS J. C. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 621–634.
- [225] WITSENHAUSEN H. Sets of possible states of linear systems given perturbed observations // Sets of possible states of linear systems given perturbed observations. IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. V. 13. Iss. 5. P. 556–558.
- [226] XIE L. Output feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty // International Journal of Control. 1996. V. 63. P. 741–750.
- [227] ZAMES G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Transactions on Automatic Control. 1981. V. 26. P. 301–320.
- [228] ZHOU K., DOYLE J., GLOVER K. Robust and Optimal Control. NJ: Prentice-Hall, 1996.

# Предметный указатель

- Анализ, 212  
    дискретное время, 236  
        возмущение в выходе, 250  
        возмущение интервально ограниченного, 247  
    непрерывное время, 212  
        возмущение в выходе, 233  
        возмущение интервально ограниченного, 229  
    робастная постановка  
        дискретное время, 259  
        непрерывное время, 251
- Вектор  
    неотрицательный, 451  
    собственный, 54  
    левый, 44, 46, 49
- Вершинный элемент семейства, 108
- Возмущение  
    внешнее, 25  
         $L_2$ -ограниченное, 99  
         $L_\infty$ -ограниченное, 57, 102, 212  
         $l_\infty$ -ограниченное, 237  
    в выходе системы, 233, 250  
    допустимое, 96, 212  
        интервальные ограничения, 229, 247, 307  
        мультипликативное, 423, 430  
        наихудшее, 105, 225, 245, 255, 262  
        нестационарное, 115
- Время  
    дискретное, 30, 78  
    непрерывное, 25  
    установления, 322, 438, 441, 442, 447
- Грамиан  
    управляемости, 49, 74, 513  
    дискретный случай, 514
- Двойной пружинный маятник, 226, 231, 245, 257, 267, 278
- Двухмассовая система, 179, 196, 296, 304, 308, 327, 334, 344, 367, 377, 400, 443
- Дополнение по Шуру, 135
- Задача  
     $H_\infty$ -оптимизации, 37, 114, 201  
    робастный вариант, 207  
    GEVP, 133

- SDP, 130  
допустимости LMI, 128  
на обобщенные собственные значения, 133, 167  
о линейно-квадратичном регуляторе, 192, 289  
полуопределенного программирования, 127, 130, 292, 295  
разрешимости LMI, 128
- Инвариантный  
параллелепипед, 216, 455
- Интервал  
дискретизации, 69, 246
- Итерационный метод, 463  
дискретное время, 473  
анализ, 473  
синтез, 475  
фильтрация, 477  
непрерывное время, 464  
анализ, 464  
синтез, 468  
фильтрация, 471
- Коэффициент усиления, 32, 35–37, 89, 120, 212
- Критерий  
качества  
квадратичный, 191  
минимальности  
эллипсоида, 222  
наблюдаемости, 79  
стабилизируемости, 87  
управляемости  
дискретная система, 77  
непрерывная система, 72  
устойчивости  
дискретной системы, 62, 64  
непрерывной системы, 54, 57
- Лемма  
Беллмана, 192, 450  
об обращении матриц, 516  
Питерсена, 154, 169, 170, 186, 206, 208, 254, 261, 276, 285  
для нескольких неопределенностей, 161  
для ограничения во фробениусовой норме, 157  
для строгого неравенства, 156  
дробно-линейная неопределенность, 159, 173  
радиус знакоопределенности, 160, 162  
Финслера, 151  
Шура, 134  
применение, 214, 220, 242, 411, 419, 465
- Линейное матричное неравенство, 122  
строго разрешимое, 126  
строгое, 125  
допустимая область, 124  
каноническая форма, 123  
матричная форма, 124  
нестрого разрешимое, 126  
нестрогое, 125  
свойства, 123
- МАТЛАВ, 14, 228, 460  
процедура  
acker, 86  
hinfsv, 329  
compar, 29  
ctrb, 72  
dlyap, 50

- eig, 38
- expm, 40
- gram, 75
- lqry, 309
- lqr, 197
- lyap, 45
- norm, 40
- obsv, 79
- place, 86
- rank, 72
- пакет
  - cvx, 14, 527
  - MPT, 228
  - SeDuMi, 14, 460, 527
  - YALMIP, 14, 460, 527
- Матрица
  - блочная жордановая, 39
  - весовая, 292, 299
  - возмущающая, 110
  - выхода, 26
  - гурвицева, 38
    - степень устойчивости, 38
  - диагональная, 39
  - замкнутой системы, 82
  - знакоопределенная, 495
    - свойства, 495
  - интервальная, 109, 116
  - наблюдаемости, 79
  - неотрицательная, 450, 451, 496
  - неположительная, 496
  - номинальная, 109, 110
  - определитель, 493
  - ортогональная, 502
  - отрицательная, 496
  - положительная, 496
  - простой структуры, 501
  - ранг, 43, 48, 72, 75, 79, 494
  - регулятора, 81
  - сингулярное разложение, 503
- сингулярные числа, 503
- след, 144, 494
- собственные значения, 38, 40, 43, 48, 69, 494
  - обобщенные, 129
- сопровождающая, 29
- состояния, 26
- стохастическая, 453
- унитарная, 502
- управляемости, 72, 513
- усиления, 81
- Хаутуса, 87, 513
- циклическая, 502
- шуровская, 40
- эллипсоида, 142
- Матричная
  - замена переменных, 175, 183, 194, 293, 325, 333
- пара
  - наблюдаемая, 79
  - невыврожденная, 72
  - управляемая, 72
- форма
  - диагональная, 500
  - жордановая, 501
  - фробениусовая, 29, 111, 502
- экспонента, 26, 38
- Матричное
  - исключение переменных, 152
- Множество
  - выходов, 100
  - достижимости, 95, 96, 228
    - $L_2$ -ограниченный вход, 99
    - $L_\infty$ -ограниченный вход, 102
  - дискретной системы, 98

- свойства, 97
- инвариантное, 97, 224, 454
- неопределенности, 108
- ограничивающее, 227
- предельно достижимое, 454
- предельное, 98
- притягивающее, 454
- Наблюдатель
  - Люенбергера, 91, 264, 322
  - уравнение, 92
- Невязка, 91, 93, 264, 270, 273, 281
- Нелинейность
  - секторная, 409, 416
- Неопределенность
  - $(M, \Delta)$ -конфигурация, 113
  - аффинная, 110
  - в начальном состоянии системы, 214
  - интервальная, 109
  - линейная, 109
  - матричная, 252
  - ограниченная в матричной норме, 110, 117
  - параметрическая, 108
  - сферическая, 109
  - размах, 108, 109
  - системная, 252
  - структурированная, 111, 119, 153, 169
- Неравенство
  - Ляпунова, 45, 47, 54, 124
  - двойственное, 46, 51
  - дискретное, 50, 51, 136
  - Риккати, 137, 189
- Норма
  - векторная
    - евклидова, 37
    - матричная, 497
  - индуцированная, 36, 498
  - подчиненная, 498
  - согласованная, 499
  - спектральная, 36
  - спектральная (2-норма), 497
  - столбцовая ( $\infty$ -норма), 497
  - строчная (1-норма), 497
  - фробениусова, 497
  - сигнала
    - $L_1$ , 33
    - $L_2$ , 32
    - $L_\infty$ , 32
    - $l_1$ , 35
    - $l_2$ , 34
    - $l_\infty$ , 35
- Обратная связь, 81
  - динамическая, 92
  - линейная, 458
    - по состоянию, 26, 81, 84
    - по выходу, 82, 91
    - по оценке состояния, 79
- Оператор
  - дифференцирования, 30
  - линейный, 36
    - $(p, q)$ -индуцированная норма, 36
    - интегральный, 36
- Описание системы
  - в пространстве состояний, 26, 29
  - в частотной области, 32
  - входо-выходное, 27
  - операторное, 35
  - с помощью передаточной функции, 31
- Опорная гиперплоскость, 104, 228
- Оракул граничный, 128

- Оценка  
асимптотическая, 214, 264, 327  
равномерная, 213, 264, 266, 327, 341
- $S$ -процедура, 150, 155  
для строгих неравенств, 150  
неущербность, 150  
применение, 216, 218, 219, 230, 234, 238, 239, 241, 248, 410, 418, 424, 426, 432, 435, 440, 446
- Перерегулирование, 90, 313
- Полином  
аннулирующий, 494  
минимальный, 494  
характеристический, 29, 494
- Преобразование  
дробно-линейное, 112  
верхнее, 113  
нижнее, 113
- Пространство  
последовательностей  
абсолютно суммируемых, 35  
суммируемых с квадратом, 34  
существенно ограниченных, 35  
сигналов  
ограниченной интенсивности, 33  
ограниченной энергии, 32  
сигналов дискретных  
 $l_1$ , 35  
 $l_2$ , 34  
 $l_\infty$ , 35  
сигналов непрерывных  
 $L_1$ , 33  
 $L_2$ , 32  
 $L_\infty$ , 32  
состояний, 25  
управлений, 25  
функций  
абсолютно интегрируемых, 33  
интегрируемых с квадратом, 32  
существенно ограниченных, 32
- Радиус  
знакоопределенности  
оценка, 162  
невыврожденности, 118, 160  
симметрический, 119, 161  
спектральный, 41, 51, 499  
стабилизируемости  
квадратичной, 188  
устойчивости, 117  
вещественный, 120  
квадратичной, 167, 170, 173  
комплексный, 117, 120, 197  
комплексный дискретный, 121  
матричного семейства, 116
- Размещение полюсов, 84  
дискретный случай, 87  
многомерный случай, 86
- Регулятор  
линейно-квадратичный, 191  
весовые коэффициенты, 192

- робастный, 204
- линейный динамический,
  - 94, 335
  - дискретное время, 346
  - непрерывное время, 336
  - полного порядка, 94
  - пониженного порядка,
    - 94
  - робастный, 396
- линейный статический, 82
- нехрупкий, 112, 372
  - дискретное время, 384, 392
  - непрерывное время, 372, 388
- оптимальный, 288, 292
- радиус нехрупкости, 373
- радиус устойчивости
  - квадратичный, 376
- хрупкость, 372
- Робастная устойчивость
  - семейства матриц
    - достаточные условия, 165
- Семейство
  - матриц
    - аффинное, 110, 116
    - интервальное, 116
    - робастно устойчивое, 116
  - полиномов
    - интервальное, 117
- Сигнал
  - энергия, 37
- Система
  - каноническая управляемая форма, 29, 72, 84, 504
  - нелинейная, 408
    - дискретная, 416
    - непрерывная, 408
- Система линейная
  - выход, 25
    - наблюдаемый, 26, 95
    - регулируемый, 26, 95
  - двойственная, 80
  - дискретная, 29, 236
    - замкнутая, 82
    - неопределенная, 259
    - решение, 30
    - управляемая, 77
    - устойчивая, 61
  - замкнутая, 26
  - наблюдаемая, 79
  - ненаблюдаемая, 78
  - неопределенная, 108
  - непрерывная, 25
    - возмущенная, 57, 64
    - дискретизация, 68
    - замкнутая, 81
    - неопределенная, 251
    - решение, 26
    - устойчивая, 53
  - нестационарная, 25
  - номинальная, 109
  - одномерная, 83
  - полностью определенная, 25
  - положительная, 448
    - дискретная, 451
    - непрерывная, 449
  - разомкнутая, 26
  - с неопределенностью, 25
  - стабилизируемая, 86
  - стационарная, 25
  - управления
    - многомерная (MIMO), 27
    - непрерывная, 25, 29
    - одномерная (SISO), 27
    - управляемая, 29, 71

- вполне, 71
  - фазовое состояние, 25
  - оценка, 92
- Стабилизация, 83, 174, 289
  - квадратичная, 174, 183
  - при ограниченном управлении, 177
  - робастная, 184
- Степень устойчивости матрицы
  - гурвицевой, 46
  - шуровской, 41
- системы
  - дискретной, 64
  - непрерывной, 61
- Теорема
  - Кэли-Гамильтона, 28, 87, 494
  - Харитоновна, 117
- Управление, 25
  - ограниченное, 177, 302
  - при наличии неопределенностей, 354
  - программное, 26, 70, 290
  - робастное, 25, 107
  - с минимальной энергией, 75
  - синтез, 81
- Управление по выходу, 322
  - дискретное время, 330
  - непрерывное время, 322
- Управление по состоянию, 292
  - дискретное время, 314
  - при наличии неопределенностей, 362
  - непрерывное время, 292
  - при наличии неопределенностей, 354
  - при наличии неопределенностей, 354
- Управляемое подпространство, 75
- Управляемость, 71
- Уравнение
  - выхода, 25
  - Ляпунова, 42, 99
  - дискретное, 48, 102
  - решение, 43
  - Риккати, 192
  - разностное, 29
  - состояния, 25
- Условия
  - инвариантности
    - достаточные, 248
    - необходимые и достаточные, 216, 237
  - начальные, 26, 30
- Устойчивость, 38
  - ВВО, 60
  - матрицы
    - гурвицева, 38
    - дискретная, 41
    - непрерывная, 41
    - шуровская, 40
  - по входу, 60
  - по начальному приближению, 60
  - робастная, 116, 459
  - системы
    - гурвицева, 68
    - шуровская, 68
  - системы положительной
    - гурвицева, 449
    - шуровская, 451
- Фильтр, 263, 273
  - дискретный, 270, 281
- Фильтрация, 263
  - дискретное время, 270



- для регулируемого выхода, 286
- робастная постановка, 279
- непрерывное время, 263
  - для регулируемого выхода, 266, 277
  - робастная постановка, 272
- Формула Аккермана, 86
- Функционал
  - энергии, 70, 76
- Функция
  - значение на спектре, 505
  - опорная, 102
    - множества достижимости, 103, 107
  - от матрицы, 505
  - передаточная, 31
  - $H_\infty$ -норма, 36, 197, 198
  - от возмущения к выходу, 31
  - от управления к выходу, 31, 114
  - полос, 31
- Функция Ляпунова, 53, 61
  - для невязки
    - дискретное время, 272
    - непрерывное время, 265
  - квадратичная, 54, 62, 174
  - диагональная, 449, 452
  - дискретное время, 63, 66
  - для возмущенной системы, 220, 242
  - непрерывное время, 55, 59
  - линейная, 450, 452
  - метод, 53
  - общая квадратичная, 166, 170, 254
    - для возмущенной системы, 254, 261
  - параметрическая, 168
- Шум, 25, 263, 270, 272, 279
- Эллипсоид
  - достижимости, 100
  - дискретный случай, 101
  - инвариантный, 37, 176, 213, 237, 409
    - для невязки, 264, 270
  - консерватизм, 215
  - робастный, 252, 259
  - критерии минимальности, 224
  - линейный образ, 148
  - матричное описание, 142
  - объем, 145, 493
  - ограничивающий, 221, 227, 243
    - для невязки, 276, 285
  - минимальный, 221, 243
  - робастный, 255
  - полуоси, 143, 145
  - притягивающий, 213, 220, 237
- Эффект всплеска, 88, 181