Российская академия наук
Институт проблем управления

Д. А. Новиков

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ
организационными системами
в популярном изложении:
Книга для школьников … и не только!

2026

ББК 32.817
УДК 519
Н 73

Н 73 **Новиков Д. А.** Теория управления организационными системами в популярном изложении: Книга для школьников … и не только!. – М.: ЛЕНАНД, 2026. – 208 с.

Книга посвящена краткому и популярному изложению базовых результатов теории управления организационными системами (раздела математической теории управления).

Читатель познакомится с содержанием понятий: управление, организационная система, механизм управления, мотивационное управление, рефлексивное управление, принятие решений, стратегическое поведение, манипулирование информацией, согласование интересов, дуополия Курно, многокритериальный выбор, эффективность по Парето, равновесие Нэша, иерархическая игра и др.

Книга адресована ученикам старших классов общеобразовательных школ и их учителям, а также студентам младших курсов вузов, и всем, кто интересуется тем, как сегодня математика используется для описания поведения людей и управления ими.

ISBN 978–5–00237–348–2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Сначала думай, потом делай.

Вводные примеры. В одном средневековом городе развелось много крыс. В качестве меры борьбы с ними магистрат объявил, что будет выплачивать одну монету за каждую принесенную горожанами убитую крысу. Сначала число крыс пошло на спад, а затем их стало больше, чем раньше. В чем же дело? Все просто – горожане, поняв, что появился новый источник неутомительного заработка, стали прикармливать и даже разводить крыс, чтобы сдать их побольше и получить побольше монет. Магистрат понял, что принял неправильное решение и отменил его. После этого крыс стало еще больше – горожане, узнав, что за крыс теперь не платят, выпустили всех на волю, чтобы не тратиться на корм.

Почему не сработало решение магистрата (точнее, сработало, но еще более ухудшило ситуацию)? А потому, что магистрат не смоделировал (не спрогнозировал) реакцию горожан на это решение. Человек способен к адаптации и подстраивается к «правилам игры[1]» (научно называемых *механизмами управления*[2]), делая все, чтобы минимизировать свои затраты и максимизировать свои «плюсы» (доходы, выигрыш и т.п.).

[1] ***Игра*** *– взаимодействие субъектов, при котором выигрыш каждого зависит от действий всех. Субъекты при этом называются* ***игроками****. Модели игр изучаются в рамках такого раздела прикладной математики, как теория игр – см. [7]. Все определения даются в соответствии с книгой «Теория управления: словарь системы основных понятий. – М.: Ленанд, 2024. – 128 с.».*
[2] *Основные термины выделены курсивом.*

Вторая ошибка магистрата – если уж принял решение, следуй ему или продумывай последствия отмены. •[3]

? Какое решение приняли бы Вы на месте магистрата?

Второй пример: руководство промышленного предприятия озаботилось тем, что рабочие одного из производственных цехов стали (по его мнению) слишком часто выходить «на перекур», делая перерывы в работе. На очередном совещании, посвященном вопросам трудовой дисциплины, были приведены примеры и названы конкретные фамилии и промежутки времени, когда простаивало оборудование, на котором работают эти сотрудники. На вопрос о том, каким образом руководство подсчитало это время, прозвучал ответ: когда работник выходит «на перекур», его станок не работает, он выключен, и это время нетрудно подсчитать. С этих пор рабочие (те, кому это необходимо) стали выходить из цеха и делать перерывы в работе, не выключая своих станков. Вместо повышения выработки, приходящейся на одного работника (именно этого добивалось руководство), получился перерасход электроэнергии, возросла энергоемкость продукции. •

? Какое решение приняли бы Вы на месте руководства предприятия?

Приведем еще один пример[4] противоречащего интуиции поведения систем[5], включающих человека (так называемый парадокс Браеса, названный в честь открывшего его немецкого ученого Д. Браеса).

Пусть от города А к городу В можно добраться двумя автомобильными дорогами, ведущими через пункты С и D соответственно (см. Рис. 1 а). При этом участки AD и CB представляют собой многополосные объездные трассы, лишенные пробок, но довольно протяженные – в пути на них составляет 45 минут.

---

[3] *Символом «•» здесь и далее обозначается окончание примера.*
[4] *Описание этого примера будем вести, следуя замечательной книге [14], с которой читателя призываем ознакомиться целиком.*
[5] ***Система** – совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которая образует определенную целостность, единство.*

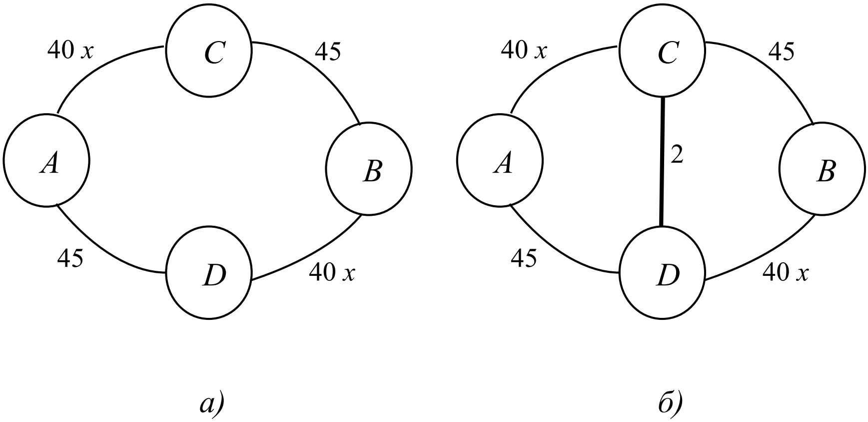


Рис. 1. Первоначальная и обновленная схемы движения в парадоксе Браеса

Напротив, участки AC и DB достаточно коротки, однако на них часто случаются пробки, и время в пути связано с долей трафика x по соответствующей дороге формулой $40\,x$. Это означает, что если по дороге поедут все ($x = 1$), то она займет 40 минут, а если половина ($x = 0{,}5$), то только 20 минут. Поскольку северный и южный путь полностью симметричны, установившийся трафик распределяется ровно пополам и добраться из города A в город B как по маршруту ACB, так и по маршруту ADB, можно за $45 + 20 = 65$ минут. То есть, имеет место *равновесие*[6], устойчивое относительно индивидуальных отклонений – половина водителей выберет северный маршрут, а половина – южный, и ни один из них не может, самостоятельно выбрав другой маршрут, сэкономить время в пути. Более того, такое равновесное распределение трафика является и

[6] ***Равновесием*** *называется устойчивый в том или ином смысле набор действий игроков. Нестрого, если речь идет об устойчивости от изменений игроками своих действий поодиночке, то равновесие называется* ***равновесием Нэша****, если от выигрыша одного игрока «за счет» проигрыша другого, то такая ситуация называется* ***точкой Парето*** *или* ***Парето-эффективной ситуацией игры*** *(см. определения ниже в разделе 2.3).*

коллективным оптимумом[7] (минимизирует суммарное время в пути всех водителей – в силу линейной зависимости продолжительности движения от числа автомобилей).

Чтобы улучшить транспортное сообщение, пункты C и D, находящиеся на разных берегах реки, было решено соединить мостом, позволяющим за пару минут проехать в любом направлении (см. Рис. 1 б). Будет ли кто-то теперь ездить по многополосным объездным дорогам AD и CB? Нет. Рассмотрим дорогу AD. Движение по ней занимает 45 минут, а на путь AC даже в случае максимальных пробок ($x = 1$) придется потратить не более 40 минут, а значит, и с учетом двухминутного переезда по мосту CD, маршрут ACD оказывается всегда быстрее маршрута AD (42 < 45).

Что в итоге? Все автомобилисты, которым нужно добраться из A в B, едут по маршруту ACDB, затрачивая 40 + 2 + 40 = 82 минуты, что на 17 минут больше, чем до строительства моста. Хуже становится всем (!), но никто в индивидуальном порядке не может изменить ситуацию, поскольку другие маршруты еще более долгие[8]. То есть, казалось бы, сделали благое дело – построили мост. Но тем самым загнали всех из устойчивого коллективного оптимума в невыгодное для всех водителей равновесие. Значит, прежде чем начинать строить мост, следовало бы спрогнозировать поведение водителей в новых условиях и принять иное решение. •

> Гладко было на бумаге,
> да забыли про овраги.

Люди и организации. Завершив рассмотрение двух вводных примеров организационного управления, отметим, что организации распространены повсеместно и с самых древних времен: племя, семья, ремесленная корпорация, церковь, армия,

---

[7] *То есть, вариантом, наилучшим «для всех», например, минимизирующим сумму времен в пути всех водителей.*

[8] *Это утверждение справедливо в предположении, что все автомобилисты принимают решение о выборе маршрута однократно, одновременно и независимо. В противном случае пришлось бы рассматривать динамические модели, в т.ч. с учетом возможностей современных навигаторов строить маршруты с учетом пробок, в т.ч. прогнозируемых.*

политическая партия, предприятие, бригада, школа, класс – все это примеры организаций.

? Приведите примеры организаций, с которыми Вы сталкиваетесь в жизни.

Один в поле не воин.

Зачем нужны организации? Для того, чтобы помогать людям более эффективно осуществлять совместную деятельность, достигая разделяемой цели, чтобы делать для них предсказуемыми действия других, чтобы защищать членов организации от внешних угроз.

Зачем изучать организации? Чтобы ими управлять? Чтобы управлять собой, работая в них? Правильный ответ – чтобы в них жить! Действительно, организации являются таким же родовым признаком человека, как прямохождение, рука, речь, сознание, труд [6]. Человек всю жизнь погружен в организации различной природы от семьи до глобальной цивилизации, ежедневно участвуя в их создании и испытывая их благотворное или губительное влияние.

Природа организаций обусловлена еще и тем, что они – живые. Организации зачинаются, рождаются, взрослеют, стареют, и, наконец, умирают. Жизнь организаций часто течет незаметно, но иногда их кризисы влекут за собой драмы и трагедии личностей, народов и поколений.

Как изучать организации? Этот на первый взгляд простой и даже странный вопрос (ведь организации изучаются с античных времен) при ближайшем рассмотрении оказывается совсем не простым и вполне уместным. Дело в том, что организации – пожалуй, самая сложная, разнообразная, изменчивая и, как следствие, наименее изученная из известных в настоящее время «форм жизни».

Разнообразие типов, видов, форм организаций растет постоянно и ускоренно, что не позволяет создать в настоящее время сколько-нибудь общей концепции или теории. Даже наиболее постоянные из известных типов организаций, такие как семья, этнос, государство, претерпевают в последние десятилетия столь значительные изменения, что описывающие их теории нередко противоречат друг другу.

Что же касается организаций, связанных с производственной деятельностью, то их изменение является прямым следствием развития технологий. Ярким примером сказанного являются стремительно развивающиеся в последние десятилетия глобальные сетевые (в том числе, виртуальные) организации, на наших глазах объединяющиеся в интернет-сообщества, создающие интернет-экономику и интернет-культуру.

Литература, посвященная исследованию организаций, обширна и многообразна. С далекой древности, когда появились первые человеческие коллективы, возник вопрос о рациональной организации взаимодействия людей, вовлеченных в процесс достижения общей цели.

Например, вопросам рационального государственного устройства посвящен широко известный диалог Платона «Государство», где структура государства имеет вид *иерархии*[9],

возглавляемой мудрецами-правителями. На протяжении последующих веков огромное количество мыслителей обращалось к этой теме, и накопленный ими эмпирический опыт с трудом можно описать в каком бы то ни было ограниченном объеме.

Организации являются предметом исследования многих наук. Две большие их группы: менеджмент и теория управления (см. подробное обсуждение их соотношения в [9, 11]). *Менеджмент* занимается систематизацией и обобщением

---

[9] ***Иерархия*** *– порядок подчинения низших элементов более высоким в рамках одной системы. Она организует объекты, людей или понятия в древовидную структуру (**дерево**), где каждый элемент некоторого уровня управляется или подчиняется одному элементу более высокого уровня. Пример простейшего двухуровневого дерева приведен на Рис. 12 ниже.*

лучших практик управления в виде концептуальных положений и рекомендаций. *Математическая теория управления* оперирует формальными (математическими) моделями[10].

Формальные модели организаций начали активно разрабатываться с середины XX века вследствие, с одной стороны, практической потребности управления все усложняющимися экономическими, социальными и военными системами, а с другой стороны, – появления новой научной методологии исследования сложных систем – системного подхода и системного анализа. С этого времени организации являются предметом приложения и источником развития математических методов (таких как методы оптимизации, исследование операций, теория игр и др.).

Множество проблем в управлении организациями (фирмами, предприятиями, учреждениями и т. д.) самого разного масштаба и рода деятельности возникает из-за того, что за грамотной декларацией целей нередко следует набор действий и мероприятий, имеющих к этим целям самое отдаленное отношение. В масштабах государства это проявляется, например, в том, что принимаемые законы не работают, в масштабах предприятия – в том, что распоряжения руководства приводят к результатам, которые прямо противоположны запланированным. Причина в том, что мало принять закон или распоряжение – необходимо предусмотреть механизмы, которые обеспечат их выполнение.

Вот мы и произнесли ключевое слово – «механизм». Общее определение **механизма** таково – «система, устройство, определяющее порядок какого-либо вида деятельности». В СССР математические модели механизмов управления стали предметом исследований *теории активных систем* – научной

---

[10] ***Модель*** *– аналог (схема, структура, знаковая система) определенного фрагмента природной или социальной реальности, «заместитель» оригинала в познании и практике.*

Математическая модель *– упрощённое представление реального объекта, явления или процесса, созданное с помощью математических средств (уравнений, формул, соотношений), чтобы изучать и прогнозировать его свойства и поведение.*

школы В.Н. Буркова, развивающейся с конца 1960-х годов, к которой принадлежит и автор настоящей книги.

Как же разрабатывать механизмы управления людьми, как измерять и проверять их эффективность? Как делать устойчивыми эффективные для коллектива и/или общества ситуации в условиях стратегического поведения их членов? Этим занимается **теория управления организационными системами** (раздел математической теории управления). Краткому популярному изложению некоторых её результатов и посвящена настоящая работа[11].

Начнем с определений ключевых категорий – «управление» и «организационная система».

---

[11] Автор признателен своим коллегам-профессорам: Ф.Т. Алескерову, А.А. Воронину, Н.А. Коргину, С.А. Красновой, Р.М. Нижегородцеву, Ю.Л. Словохотову, Д.Н. Федянину и А.Г. Чхартишвили за критику и ценные замечания, а также В.К. Авдеевой – за прекрасные иллюстрации.

1. Человек в контуре управления

Своя голова на плечах есть.

Итак, что отличает человека от технической системы? Конечно, многое. Но с точки зрения теории управления наиболее существенное отличие – наличие у человека свойства *активности*, то есть способности *рационального, стратегического поведения* – самостоятельного целеполагания, принятия решений в соответствии с собственными потребностями, интересами и предпочтениями (см. два примера выше).

Проявлений активности много – выбор рациональных действий, сообщение информации (быть может, недостоверной), дальновидность (учет будущих последствий принимаемых сегодня решений), способность к *рефлексии* (анализу собственной деятельности и деятельности других людей) и др. Многие из этих проявлений мы рассмотрим ниже.

? Приведите примеры проявлений стратегического поведения, с которыми Вы сталкиваетесь в жизни.

! **Управление** – воздействие на управляемую систему с целью[12] обеспечения требуемого ее поведения[13].

Пусть имеются руководитель или руководящая группа (например, совет директоров фирмы), называемые далее *центром*, и подчиненный (или их группа, коллектив), называемый далее *агентом*. Результат деятельности агента зависит от внешних

---

[12] ***Цель*** *- то, к чему стремятся, что надо осуществить; осознанный образ предвосхищаемого результата деятельности.*

[13] ***Поведение*** *системы - последовательное (во времени), хотя бы частично наблюдаемое, поддающееся измерению, объективной фиксации изменение её состояний.*

воздействий, воздействий со стороны центра и действий самого агента (см. Рис. 2). Приведенная на Рис. 2 вход-выходная *структура*[14] является базовой для *теории управления*, изучающей задачи управления системами различной природы [16].

Задача центра заключается в том, чтобы осуществить такие управляющие воздействия (жирная линия на Рис. 2), чтобы с учетом информации о внешних условиях (пунктирная линия) обеспечить требуемый результат деятельности или требуемое действие агента. Для того, чтобы решить задачу управления, необходимо иметь *модель агента* – зависимость выбираемого им действия от управляющих воздействий[15].

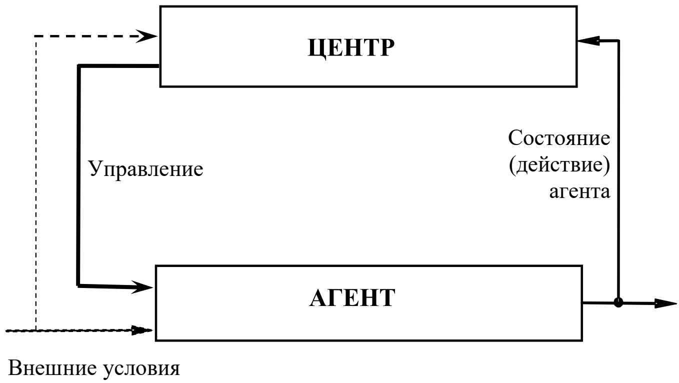


Рис. 2. Структура системы управления

! Деятельность человека и управление им происходят, как правило, в рамках той или иной организации.

---

[14] ***Структура*** *– совокупность устойчивых связей между элементами системы.*

[15] *В теории автоматического управления [16], когда объектом управления является техническая система, структура системы управления имеет точно такой же вид, что и на Рис. 2, а модель объекта представляется дифференциальным уравнением, определяющим изменение состояния объекта в зависимости от его предыдущего состояния, текущих внешних условий и управляющих воздействий.*

В «Философском энциклопедическом словаре» приводится следующее определение **организации** (см. Рис. 3): «1) внутренняя упорядоченность, согласованность взаимодействия более или менее дифференцированных и автономных частей целого, обусловленная его строением; 2) совокупность процессов или действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого; 3) объединение людей, совместно реализующих некоторую программу или цель и действующих на основе определенных процедур и правил». Совокупность этих процедур и правил называется *механизмом функционирования*.

! Применительно к **организационным системам** (**ОС**; см. третье определение организации, которое мы и будем использовать) механизм функционирования – это совокупность правил, законов и процедур, регламентирующих взаимодействие участников организационной системы; **механизм управления** – совокупность процедур принятия управленческих решений (в том числе зависимости управляющих воздействий центра от действий агентов, известные последним).

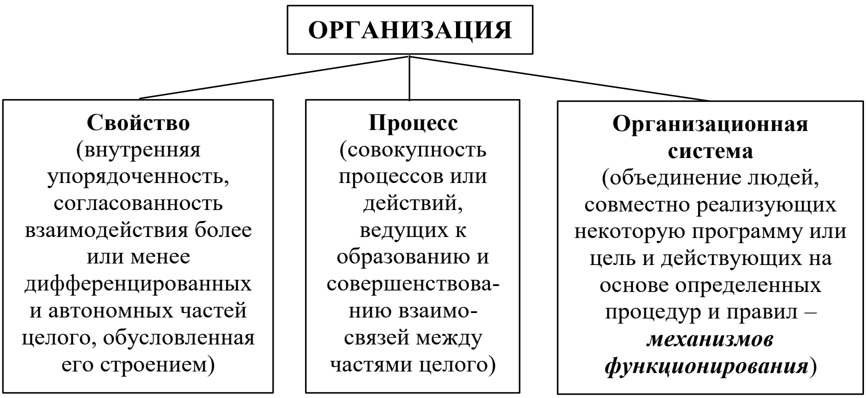


Рис. 3. Определение организации

Примерами механизмов управления являются зависимости: зарплаты работника от результатов его деятельности; ставки налогообложения от дохода экономического агента; количества выделяемого ресурса от достигнутых результатов его использования в прошлом периоде; позиции в рейтинге от опыта, стажа и результатов работы в организации; размера пенсии от трудового стажа; штрафных санкций от сроков задержки выполнения работ по договору; и т.д. и т.п.

? Приведите примеры механизмов организационного управления, с которыми Вы сталкиваетесь в жизни.

Для того чтобы *центр* выбрал тот или иной механизм управления, он должен уметь предсказывать поведение подчиненных – их реакцию на те или иные управляющие воздействия, на применение того или иного механизма. Экспериментировать в жизни, применяя различные управляющие воздействия и изучая реакцию подчиненных, не эффективно и практически никогда не представляется возможным.

Здесь на помощь приходит математическое *моделирование* – метод исследования, заключающийся в построении и анализе *моделей* – аналогов исследуемых объектов. Имея адекватную модель агента, можно с ее помощью проанализировать его возможные реакции на те или иные управляющие воздействия (этап *анализа*[16]), а затем выбрать (на этапе *синтеза*[17]) и использовать на практике то

[16] ***Анализ*** *– процесс мысленного или реального расчленения предмета, явления, процесса на части и установление отношений между этими частями.*

[17] ***Синтез*** *- мысленное или реальное соединение различных элементов в единое целое (систему).*

управляющее воздействие, которое приводит к требуемой реакции.

? Приведите примеры моделей из школьного курса физики.

Классификация видов управления организационными системами. *Модель организационной системы* определяется заданием (см. Рис. 4):

- *состава ОС* (участников, входящих в ОС);
- *структуры ОС* (совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС);
- *множеств допустимых действий* (ограничений и норм деятельности) участников ОС, отражающих, в том числе, институциональные, технологические и другие ограничения и нормы их совместной деятельности;
- *целей* и *предпочтений* участников ОС, отражаемых их целевыми функциями;
- *информированности* – той информации о существенных параметрах, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых действиях;
- *порядка функционирования* (последовательности получения информации и выбора действий участниками ОС).

Состав определяет, «кто» входит в систему, структура – «кто с кем взаимодействует»[18], допустимые множества – «кто что может», целевые функции – «кто что хочет», информированность – «кто что знает».

В ходе дальнейшего изложения мы будем использовать следующий единый шаблон для описания различных организационных систем, который в примере про борьбу с крысами имеет следующий вид:

Состав ОС	Магистрат (центр) и горожане (агенты)

[18] *С этой точки зрения порядок функционирования тесно связан со структурой системы, так как им определяются причинно-следственные связи и порядок взаимодействия.*

Структура ОС	Двухуровневая
Управление	Стоимость одной убитой крысы
Действие агента	Число убитых крыс
Цель центра	Минимизировать число крыс в городе
Цель агента	Максимизировать доход от сданных убитых крыс
Информированность	Центр знает число крыс, сданных каждым горожанином. Горожане знают объявленную стоимость одной убитой крысы.
Порядок функционирования	Магистрат объявляет стоимость одной убитой крысы. Горожане выбирают, сколько крыс они сдают. Магистрат выплачивает вознаграждение.

В парадоксе Браеса ОС имеет вид:

Состав ОС	Администрация области (центр) и водители (агенты)
Структура ОС	Двухуровневая
Управление	Строительство моста или сохранение статус-кво
Действие агента	Выбор маршрута движения
Цель центра	Улучшение транспортного сообщения между городами A и B
Цель агента	Минимизация времени поездки
Информированность	Водители знают зависимость времени поездки от трафика на маршруте
Порядок функционирования	Центр решает, строить мост или нет. Водители выбирают маршруты своего движения.

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью[19] обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из параметров ее модели – *предметов управления*.

[19] *Критерием эффективности управления обычно является значение целевой функции центра, считающегося выразителем интересов ОС в целом. Однако, иногда цели управления могут быть и иные, например, обеспечение достоверности сообщаемой агентами информации и др.*

Следовательно, можно выделить (см. Рис. 4):

- *управление составом*;
- *управление структурой* и *порядком функционирования*[20];
- *институциональное управление* (управление ограничениями и нормами деятельности);
- *мотивационное управление* (управление предпочтениями и интересами);
- *информационное управление* (управление информацией, которой обладают участники ОС на момент принятия решений).

Рис. 4. Классификация управлений ОС

Обсудим кратко специфику различных **видов управления**.

Управление составом касается того, кто войдет в организацию, кого следует уволить, кого – нанять. Обычно к управлению составом относят и задачи обучения и развития персонала.

Задача *управления структурой* обычно решается параллельно с задачей управления составом и позволяет дать ответ на вопрос – кто какие функции должен выполнять, кто кому должен подчиняться, кто кого контролировать и т. д. Сюда

[20] *Так как структура определяет порядок функционирования, то обычно объединяют управление структурой и управление порядком функционирования.*

относятся открытие, ликвидация и объединение кафедр, лабораторий, отделов, департаментов внутри одной организации, изменение структуры подчинения, включая перераспределение обязанностей.

Институциональное управление – что можно, что нельзя; как принято поступать в той или иной ситуации – является наиболее жестким и заключается в том, что центр целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности агентов. Такое ограничение может осуществляться явными или неявными воздействиями – правовыми актами, распоряжениями, приказами и так далее или морально-этическими нормами, корпоративной культурой и т. д.

Мотивационное управление является более «мягким», чем институциональное, и заключается в целенаправленном изменении предпочтений агентов, мотивирующем (как правило, материально) предпринять их требуемые действия. Такое изменение может осуществляться введением системы штрафов или поощрений за выбор тех или иных действий или достижение определенных результатов деятельности.

Наиболее «мягким», по сравнению с институциональным и мотивационным, является *информационное управление,* заключающееся в целенаправленном воздействии на информацию, имеющуюся у участников ОС на момент принятия ими решений. Такое воздействие может заключаться как в ограничении их информированности, так и в сообщении дополнительной, новой для них информации, в т.ч. в соответствии с принципом «говорить правду, только правду, но не всю правду».

? Приведите примеры различных видов управления в организационных системах.

В последующих разделах приводятся примеры всех пяти вышеперечисленных видов управления организационными системами. Стиль и уровень изложения ориентирован на читателя, не знакомого с высшей математикой[21].

---

[21] *Корректное и полное изложение соответствующих формальных результатов можно найти в учебнике [11].*

2. Принятие решений

Рыба ищет, где глубже, а человек - где лучше.

Принятие решения заключается в *выборе* из множества *альтернатив* (вариантов) одной или нескольких. Вся жизнь человека – сплошное принятие решений. Что взять на десерт – булочку или пирожок; сколько времени потратить на учебу, а сколько на развлечения; куда пойти гулять с друзьями; чем заняться на каникулах; какую выбрать профессию – всё это примеры ситуаций принятия решений.

? Приведите примеры ситуаций принятия решений, с которыми Вы регулярно сталкиваетесь в жизни.

Начнем с принятия решений одним субъектом (индивидом).

2.1. Индивидуальное принятие решений

Всяк кузнец своего счастья.

Как человек принимает решения? Современная наука (по крайней мере, ее часть) считает, что человек выбирает из имеющихся альтернатив наилучшую для него. А что значит «наилучшую»? То есть на множестве альтернатив должно быть задано отношение между ними. Например, для каждой пары альтернатив известно, какая из них более предпочтительна.

Предпочтительность может измеряться в числовой шкале (чем больше, тем «лучше») посредством задания на множестве альтернатив функции $f(x)$, называемой *функцией полезности*, целевой функцией или функцией выигрыша (далее для простоты мы будем использовать эти термины как синонимы). Тогда, если $f(x) > f(y)$, то есть полезность (выигрыш от) альтернативы x больше полезности альтернативы y, то человек, характеризуемый этой функцией полезности, из двух альтернатив x и y выберет первую. Если значение функции полезности от пирожка больше, чем от булочки, то выбирать следует пирожок.

Соответственно, из множества альтернатив человек с учетом всей имеющейся у него информации выберет альтернативу x^*, обладающую(ие) максимальной полезностью – см. Рис. 5. Допустимые альтернативы, обладающие максимальной полезностью, называются *оптимальными*. Подобное предположение о поведении человека называется **гипотезой рационального поведения**.

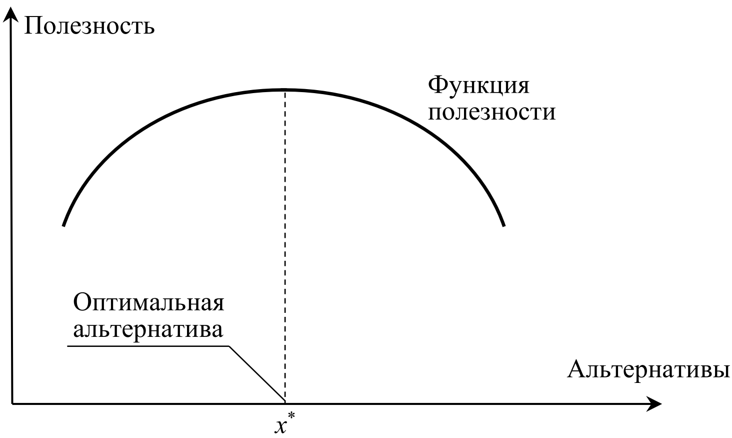


Рис. 5. Гипотеза рационального поведения

? Приведите примеры рационального поведения, с которыми Вы сталкиваетесь в жизни. А «нерационального»?

Если речь идет об экономическом *агенте* (человек, бригада, организация и т.п.), то в качестве функции полезности может выступать та или иная экономическая категория – доход, прибыль и т.д. Тогда агент выберет, например, альтернативу, обеспечивающую ему максимальную прибыль. Многие простые примеры принятия экономических решений можно найти в [8].

Приведем пример принятия двумя агентами решения о взаимовыгодном взаимодействии друг с другом.

Пример 1. «Стоимость ремонта квартиры». Пусть имеются два агента (см. Рис. 6), первый агент получает «доход»[22] H от взаимодействия со вторым агентом, который несет от этого взаимодействия «затраты» c. Например, первый агент – заказчик, а второй агент – исполнитель, подрядчик – строительная бригада, делающая ремонт в квартире или доме заказчика.

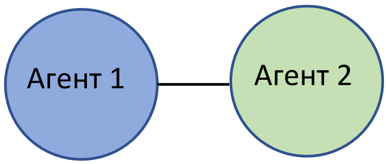


Рис. 6. «Равноправные» агенты в примере 1

Пусть H – мера удовлетворенности заказчика результатами ремонта (качество ремонта), а c – затраты бригады с учетом труда и материалов.

Две первичные альтернативы – вступать ли агентам во взаимодействие друг с другом. Если взаимодействие выгодно обеим сторонам, то уже возникает вопрос - на каких конкретных условиях им следует взаимодействовать, то есть сколько заказчик должен заплатить?

Итак, каким ограничениям должна удовлетворять стоимость ремонта q, которую заказчик выплатит бригаде?

Во-первых, эта величина должна быть неотрицательна: $q \geq 0$, иначе получится, что строительная бригада платит заказчику за возможность поработать на его объекте.

---

[22] *Как правило, в моделях принятия решений предполагается, что функции полезности (и, естественно, все их слагаемые) измеряются в единицах, стоимости, времени, энергии и т.п., либо в некоторых условных единицах полезности – ютилях (от англ. utility – полезность).*

Во-вторых, заказчик (первый агент), функцию полезности которого будем считать разностью дохода и затрат: $f_1 = H - q$, вряд ли захочет, чтобы его полезность («прибыль») была отрицательна, то есть не заплатит больше своего дохода: $q \leq H$. В-третьих, аналогично будет рассуждать и бригада (второй агент) - функцию полезности, которой также будем считать разностью между вознаграждением и затратами: $f_2 = q - c$ - тоже должна быть неотрицательна: $q \geq c$.

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Заказчик (агент) и исполнитель (агент)
Структура ОС	Одноуровневая (см. Рис. 6).
Управление	Стоимость ремонта
Действие агента	Согласие или отказ выполнить ремонт
Цель агента$_1$	Максимизировать $H - q$
Цель агента$_2$	Максимизировать q - c
Информированность	Заказчик видит качество ремонта и знает затраты исполнителя. Исполнитель знает качество ремонта и свои затраты. Оба участника знают стоимость ремонта после того, как они о ней договорились
Порядок функционирования	Участники договариваются о стоимости ремонта. Исполнитель делает ремонт требуемого качества. Заказчик выплачивает вознаграждение.

? Приведите примеры жизненных ситуаций, которые также описываются рассматриваемой моделью взаимодействия заказчика и исполнителя.

! Итак, взаимодействие между агентами взаимовыгодно, если выполняется **условие согласования**:

(1) $c \leq q \leq H$,

из которого, в частности, следует, что должно иметь место соотношение $c \leq H$. Действительно, если стоимость ремонта выше, чем мера удовлетворенности заказчика его результатами, то не стоит затевать такой ремонт!

Разность $H - c$ (равная, кстати, сумме функций полезности обоих агентов $f_1 + f_2$) характеризует *область компромисса* – отрезок от нуля до $H - c$, в которой первый и второй агент могут «торговаться» о размере платежа q, осуществляя **согласование интересов**.

И волки сыты, и овцы целы.

Как определить конкретный размер платежа в этом диапазоне? Здесь нет универсальных рецептов – если агенты равноправны, то возможен любой исход. При $q = c$ второй агент получает нулевую полезность, а первый – полезность $H - c$. При $q = H$ имеет место противоположная ситуация - второй агент получает полезность $H - c$, а первый – нулевую полезность.

? Предложите правило распределения полезности $H - c$ между заказчиком и бригадой.

Справедливым может показаться вариант, когда их полезности равны, что обеспечивается следующим размером платежа: $q = (H + c) / 2$. •

Отметим, что рассмотренная в примере 1 модель охватывает ситуацию торга о цене товара между покупателем и продавцом, обсуждение между заказчиком и исполнителем стоимости и сроков выполнения работ и многие другие ситуации, возникающие в рамках договорных (формальных или неформальных) отношений.

Пример 2. «Право первого хода». Ситуация радикально изменится, если один из агентов может формулировать «правила игры» (диктовать условия взаимодействия) для второго агента. Пусть первый агент (заказчик в рассматриваемом примере) имеет такую возможность. Значит он (обладающий правом первого хода) и является *центром* - см. Рис. 7 (для агента 2 будем по-прежнему использовать термин «*агент*»).

! Кто делает первый ход, тот и является центром.

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Заказчик (центр) и исполнитель (агент)
Структура ОС	Двухуровневая (см. Рис. 7).
Управление	Стоимость ремонта
Действие агента	Согласие или отказ выполнить ремонт
Цель центра	Максимизировать $H - q$
Цель агента	Максимизировать q - c
Информированность	Заказчик видит качество ремонта и знает затраты исполнителя. Исполнитель знает качество ремонта и свои затраты, а также стоимость ремонта, объявленную заказчиком.
Порядок функционирования	Заказчик предлагает исполнителю стоимость ремонта. Исполнитель соглашается или отказывается. В первом случае исполнитель делает ремонт оговоренного качества, и заказчик выплачивает вознаграждение.

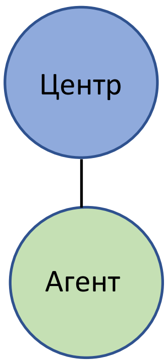


Рис. 7. Центр и агент

Изображенная на Рис. 7 (и на Рис. 2) организационная структура является двухуровневой – на верхнем уровне[23] находится центр, на нижнем – агент, и отражает последовательность принятия решений. В математике двухуровневые структуры с активными агентами описываются *иерархическими играми*[24] – кто находится «выше» в иерархии, тот и выбирает свое действие раньше, причем этим «действием» могут быть и «правила игры» для более низких уровней иерархии.

Имея возможность сделать первый ход, центр предлагает агенту размер платежа $q = c$, обрекая его на нулевую полезность и забирая полезность $H - c$ себе. Такая стратегия центра называется **принципом компенсации затрат**. Агенту не остается ничего иного, как согласиться, так как эта ситуация является для него допустимой (см. условие (1)), хоть и невыгодной.

! Данная ситуация иллюстрирует, что **выбор организационной структуры является средством управления**. •

2.2. Ограниченная рациональность

Принцип принятия оптимальных решений (см. предыдущий раздел) соответствует так называемой *классической рациональности* или *полной рациональности*. В работах Нобелевского лауреата Герберта Саймона было предложено рассматривать так называемые модели ***ограниченной рациональности*** (ОР), то есть отказаться от предположения о стремлении агента к достижению абсолютного максимума функции полезности, заменив его предположением о стремлении к достижению определенного удовлетворяющего его уровня

[23] *Нумерация уровней возрастает сверху вниз, причем возможны не только двухуровневые (как на Рис. 7), но и трех- и более уровневые структуры.*
[24] ***Иерархическая игра*** *– игра с фиксированной последовательностью ходов.*

полезности f_0 – см. Рис. 8. Такое поведение вызвано тем, что могут быть ограничены:

1) когнитивные способности агента:

- получать, обрабатывать и передавать информацию (в т.ч. производить вычисления) за требуемое время;
- оперировать несколькими целями или критериями (см. раздел 2.3);

2) информация об обстановке и/или последствиях различных решений.

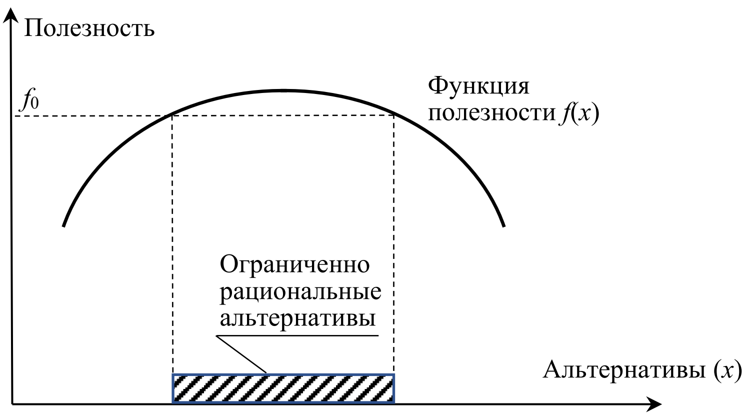


Рис. 8. Ограниченная рациональность

Другими словами, **ограниченная рациональность имеет место, когда у субъекта нет знаний, времени, возможности или желания искать оптимальное решение**.

Естественно, любое оптимальное решение является ограниченно рациональным, а принцип ограниченно рационального поведения переходит в гипотезу рационального поведения при $f_0 = f(x^*)$.

Концепция ограниченной рациональности близка к идее другого Нобелевского лауреата – Даниэля Канемана - о двух когнитивных системах: интуиция (т.н. «система 1») и рассуждения (т.н. «система 2»). *Система 1* включает в себя ассоциации, эвристики, т.е. быстрые («рефлекторные») процессы при минимальном контроле сознания. Эта система позволяет быстро принять решение, пусть и не оптимальное в текущей ситуации. Примерами эвристик являются: «выбирай наилучшее из известного», «соглашайся на первое предложение», «следуй мнению большинства», «дели поровну» и т.п. *Система 2* включает в себя логику, вычисления и оптимизацию – медленные процессы, требующие от субъекта значительных когнитивных усилий, но приводящие к более эффективному выбору. То есть Система 1 соответствует ограниченно рациональным решениям, а Система 2 – оптимальным, принимаемым в рамках гипотезы рационального поведения.

Как же на самом деле принимает решения человек? Неужели простые модели (гипотеза рационального поведения и/или гипотеза ограниченно рационального поведения) описывают все многообразие ситуаций принятия решений людьми?

Описывают, но, конечно, не всё. Естественно, в каждом конкретном практическом случае стоит вопрос о том, какова у человека функция полезности. Но в оправдание концепции рациональности можно привести следующий изящный пример из книги Г. Саймона [15].

«Взгляните на муравья, совершающего утомительный путь по песчаному берегу, на котором ветер и волны оставили свои следы. Сначала он ползет вперед, затем сворачивает вправо, чтобы легче было взбираться на крутой песчаный барашек, огибает гальку и на секунду замирает, чтобы обменяться информацией со своими сородичами.

Из таких элементов складывается его петляющий и неуверенный путь домой. Не будем антропоморфистами и не станем фантазировать, каковы «задачи» муравья, а просто зарисуем его путь на клочке бумаги. Получится последовательность нерегулярных ломаных отрезков, которую тем не менее нельзя назвать случайным блужданием, ибо в ней явно просматривается какое-то чувство направления, стремление к какой-то цели.

Такой рисунок без какой-либо подписи я как-то показал другу. Что тут нарисовано? След опытного горнолыжника, спускающегося по крутой и довольно каменистой трассе? Или след парусного суденышка, плывущего против ветра по водному пространству, усеянному островами и отмелями? А может, это траектория в более абстрактном пространстве — путь поиска студента, пытающегося доказать геометрическую теорему?

Но кому бы ни принадлежала траектория и в каком бы пространстве она ни были начертана, почему она не прямая? Почему она не ведет прямо от начала к конечной цели? Для муравья (а по правде сказать, и во всех других случаях) мы знаем ответ на этот вопрос. У муравья есть общие ориентиры местоположения его дома, но он не в состоянии предвидеть всех препятствий, которые встретятся ему на пути. Ему снова и снова приходится менять направление, приспосабливаясь к трудностям, встретившимся на пути, а иногда и возвращаться назад, чтобы обойти непреодолимое препятствие. Его горизонт очень ограничен, поэтому он преодолевает препятствие, лишь когда на него натыкается; он пробует обойти его или пройти поверх него, не учитывая того, что его ждет впереди. Поэтому его легко заманить в ловушку.

Рассматривая траекторию движения муравья как геометрическую фигуру, мы убедимся, что она неправильная, запутанная и трудно поддается описанию. Но ее сложность на самом деле отражает лишь сложность рельефа побережья, а не сложность муравья. Другое животное небольших размеров, живущее в том же песке, где и наш муравей, вероятно, изберет примерно такой же путь.

Все эти рассуждения приводят нас к гипотезе, что в том, что касается принципов своего поведения, муравей весьма прост. **Кажущаяся сложность его поведения во времени в основном отражает сложность внешней среды, в которой он функционирует.**»

Так и человек, руководствуясь, быть может, простыми принципами рациональных решений в безбрежном море жизненных ситуаций демонстрирует многообразие и порой непредсказуемость этих решений.

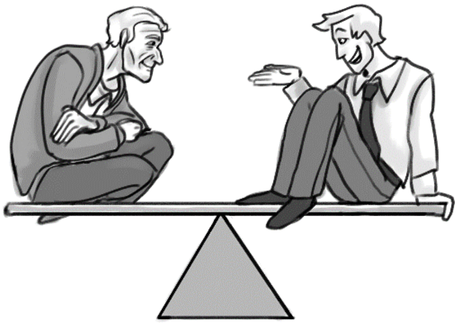
2.3. Многокритериальное принятие решений

Куда ни кинь - все клин.

В предыдущих двух разделах у агента имелся единственный критерий – значение функции полезности, по которому он оценивал и сравнивал между собой альтернативы. А что делать, если таких критериев у человека несколько?

Пример 3. «Выбор подрядчика». В примере 2 имелись заказчик и один подрядчик, причем заказчик обладал правом первого хода. А что делать заказчику, если потенциальных подрядчиков несколько? Пусть имеются шесть потенциальных подрядчиков, характеризуемых затратами и качеством (c_i, H_i), $i = 1, 2, \ldots, 6$, приведенными в таблице:

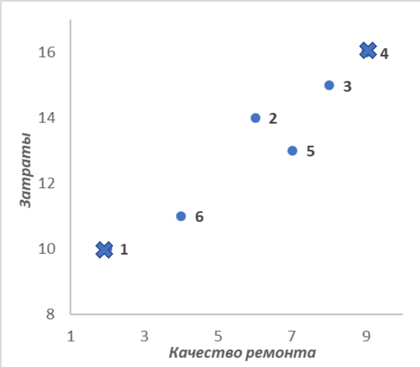
№	*c*	*H*
1	2	10
2	6	14
3	8	15
4	9	16
5	7	13
6	4	11



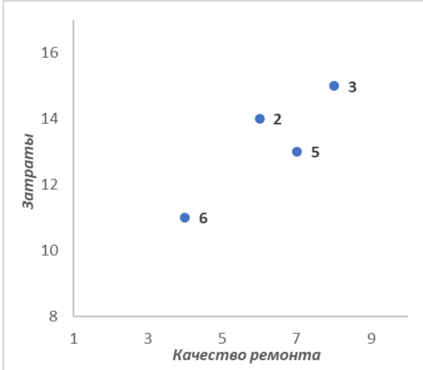
На Рис. 9а представлены все шесть вариантов. Подрядчику предстоит осуществить выбор по нескольким критериям – *многокритериальный выбор*. Действительно, имеются два критерия – качество и затраты. Конечно, «лучше быть богатым и здоровым, чем бедным и больным», то есть хорошо бы сделать ремонт качественно и дешево, но в жизни обычно редко случается так, что есть альтернатива, которая одновременно является наилучшей по всем критериям. Так и в нашем случае.

? Приведите примеры многокритериального выбора, с которыми Вы регулярно сталкиваетесь в жизни.

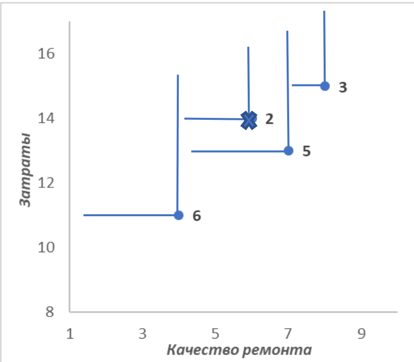
Что же наука может посоветовать заказчику?



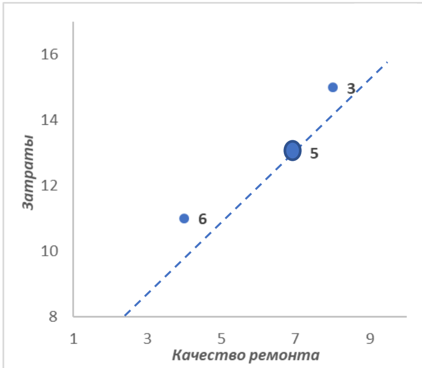
а) все варианты



б) допустимые варианты



в) исключение доминируемых вариантов



г) недоминиуемые варианты

Рис. 9. Качество ремонта H и затраты c

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Заказчик (центр) и исполнитель (агент)
Структура ОС	Одноуровневая (см. Рис. 6).
Управление	Исполнитель, которому поручается выполнение ремонта.
Действие агента	Согласие выполнить ремонт
Цель центра	Максимизировать H и минимизировать q
Цель агента	Максимизировать q

Информированность	Заказчик знает качество ремонта и затраты всех потенциальных исполнителей.
Порядок функционирования	Заказчик выбирает исполнителя. Заказчик предлагает выбранному исполнителю стоимость ремонта. Исполнитель соглашается. Исполнитель делает ремонт оговоренного качества. Заказчик выплачивает вознаграждение.

Предположим, что заказчик заранее решил, что может потратить на ремонт не более 15 условных финансовых единиц[25], и ему требуется качество не ниже 4 единиц. По этим критериям можно исключить подрядчика №1 (слишком низкое качество) и подрядчика №4 (слишком дорого). Поставим на этих альтернативах крестик на Рис. 9а. Остались четыре варианта: №№ 2, 3, 5 и 6 – см. Рис. 9б.

Применим еще один принцип отбора – так называемый *принцип исключения доминируемых* альтернатив, то есть таких, для которых существует другая допустимая альтернатива, которая не хуже ее по всем критериям, а по одному критерию лучше (качество выше, затраты ниже).

Для того, чтобы найти все доминируемые альтернативы, нужно для каждой альтернативы нарисовать прямой угол, внутри которого все точки соответствуют меньшему качеству и б*о*льшим затратам (см. Рис. 9в). Если какая-то альтернатива попала в один из углов, то она доминируемая, и ее следует исключить из рассмотрения. В рассматриваемом примере альтернатива 5 доминирует альтернативу 2 (качество последней ниже, а затраты выше), поэтому альтернативу 2 исключаем из рассмотрения (и ставим на ней крестик на Рис. 9в).

В результате применения описанной процедуры получается *множество точек Парето* или *Парето-эффективных*

[25] *Установление лимитов на ресурсы может рассматриваться как институциональное управление.*

альтернатив[26] (названное так в честь итальянского экономиста В. Парет*о*).

Итак, множество Парето-эффективных точек состоит из трех альтернатив: 3, 5 и 6 (см. Рис. 9г), и именно из них заказчику следует осуществлять выбор. Больше ничем наука ему помочь не может, кроме рекомендации привлечь дополнительные критерии, чтобы перейти от многокритериальной задачи к однокритериальной. Таким дополнительным критерием в нашем случае может быть «эффективность» - отношение качества к затратам (оптимальным по этому критерию будет Парето-эффективный вариант, для которого прямая, проведенная через него и начало координат, будет иметь минимальный наклон – см. пунктирную линию на Рис. 9г). По этому критерию из трех альтернатив «побеждает» пятая. То есть, заказчик выберет подрядчика № 5.

! Данная ситуация иллюстрирует, что **выбор состава организационной системы является средством управления.** •

Еще одним примером управления составом является следующая ситуация. Руководство некоего ведомства обосновало необходимость увеличения штата сотрудников, мотивируя этот шаг расширением и усложнением круга задач, которые данное ведомство призвано решать. Когда это было сделано, принятые на работу сотрудники, пытаясь доказать необходимость своего пребывания на рабочих местах, усложнили и расширили объем отчетности подведомственных организаций.

В результате присылаемые этими организациями отчеты накапливались в электронном виде в архивах данного ведомства, и в этом не было большого смысла, поскольку их даже некому было прочесть, тем более – провести анализ содержащейся в них информации.

---

[26] ***Парето-эффективной*** *альтернативой (или* ***точкой Парето****) называется такая альтернатива, что при переходе к любой другой альтернативе ни один показатель не может быть улучшен без ухудшения какого-либо другого показателя (см. также раздел 2.3 ниже).*

Руководство ведомства снова добилось увеличения численности сотрудников, которые, в свою очередь, стали изобретать все новые и более изощренные формы отчетности. Эта положительная обратная связь может продолжаться до тех пор, пока подведомственные организации справляются с неуклонно возрастающим объемом отчетности и ее усложнением.

Некоторые из этих организаций, располагающие финансовыми возможностями, сформировали специальные подразделения, занятые исключительно перепиской с сотрудниками руководящего ведомства (то есть **управление составом зачастую приводит к необходимости управления структурой**, и наоборот). Эта управленческая ловушка называется *избыточным управлением* (overcontrolling). •

! Таким образом, **описание процедур принятия агентом решений являются моделью его поведения, используемой в задачах управления организационными системами**.

В настоящем разделе центр и агент производили выбор из конечного числа альтернатив. Их число может быть и бесконечным, как, например, в рассматриваемой ниже в третьем разделе задаче стимулирования.

2.4. Коллективное принятие решений. Теория игр

Одна голова хорошо, а две - лучше.

В рассмотренных выше моделях принятия решений имелся один агент, и его выигрыш зависел только от его собственных решений (выбираемых им действий). Если взаимодействуют несколько агентов, то в общем случае выигрыш каждого из них зависит от действий всех. Такое взаимодействие (*коллективное принятие решений*) называется *игрой*, а агенты – *игроками*.

Математические модели коллективного принятия решений изучаются в *теории игр* [7]. Основной задачей этой науки является поиск исхода игры – *равновесия*, то есть устойчивой относительно отклонений игроков (выбора ими других действий) *ситуации игры* (набора действий всех игроков).

Понятие «устойчивости» требует уточнения. Так как игроки рациональны (см. раздел 2.1), то они не будут выбирать действия, приводящие к уменьшению их выигрыша (значения целевой функции). Но при этом существенны еще и последовательность принятия игроками решений, и та информация, которой они обладают на момент принятия решений (см. пятый раздел ниже).

Мы будем рассматривать два типа игр – *игры в нормальной форме* (в которых игроки выбирают действия однократно, одновременно и независимо) и *иерархические игры* (в которых решения принимаются игроками последовательно, в зависимости от того, на каком уровне организационной иерархии они находятся).

Отметим, что именно иерархические игры являются базовым аппаратом теории управления организационными системами. Но начнем с игр в нормальной форме. Для них базовыми являются две концепции равновесия.

Равновесие Нэша – ситуация игры, одностороннее отклонение от которой не выгодно ни одному из игроков. То есть, если остальные игроки не изменяют своих действий, то и данный (произвольный) игрок, выбирая поодиночке (!) другое действие, получает меньший или такой же выигрыш.

Примером равновесия Нэша (названого так в честь американского математика Дж. Нэша, лауреата Нобелевской премии) является следующее. В одном средневековом городе на базарной площади идет представление бродячих артистов. Толпа зрителей, имеющих примерно одинаковый рост, окружила их, каждому представление хорошо видно. У зрителя есть два действия – стоять ровно или встать на цыпочки. Ситуация, когда все стоят ровно – равновесие Нэша, так как отдельный зритель, встав на цыпочки не станет видеть представление лучше, но устанет. Более того, это – точка Парето (коллективный оптимум) – всем все видно и удобно стоять. Но в этом примере есть и второе (неэффективное) равновесие Нэша. Пусть один, затем другой зрители встали на цыпочки. Остальным стало плохо видно, они тоже приподнялись. В итоге все стоят на цыпочках, всем опять хорошо видно. Но всем неудобно! Причем ни один зритель (кроме находящихся в первом ряду) по одиночке не может встать ровно, так как в этом случае он не увидит представление. •

Точка Парето – такая ситуация игры, что при переходе к любой другой ситуации найдется игрок, выигрыш которого строго уменьшится. Парето-эффективность отражает «выгодность» ситуации для всего сообщества игроков.

? Докажите самостоятельно, что любая ситуация, максимизирующая суммарный выигрыш игроков, является точкой Парето.

! **Одна из ключевых задач теории игр – обеспечить устойчивость по Нэшу ситуации игры, которая Парето-эффективна**, то есть сделать коллективный оптимум таким, что каждому отдельному игроку невыгодно от него отклоняться.

Биматричные игры. Начнем с простейшей модели так называемой *биматричной игры*[27], в которой имеются два агента, и у каждого из них есть конечное множество возможных действий.

<u>Пример 4. «Концерт или футбол?[28]».</u> Старшеклассники Петя и Маша дружат не первый год и получают удовольствие от совместного проведения свободного времени. У них есть две альтернативы – пойти в выходной день на футбольный матч (что предпочтительнее для Пети) или на концерт (что

---

[27] ***Матрицей*** *в данном случае называется таблица, для которой действие первого игрока – выбор номера строки, действие второго – выбор столбца. Элементы матрицы, находящиеся в ячейках таблицы – пары чисел, равные соответствующим выигрышам первого и второго игрока. То есть в случае конечного числа возможных действий функция выигрыша задается в табличном виде (в виде матрицы).*

[28] *Взрослый вариант этой хрестоматийной игры называется «Семейный спор».*

предпочтительнее для Маши). Если не смогут договориться, то будут сидеть каждый у себя дома.

Матрица выигрышей при этом имеет следующий вид (Петя выбирает строку, Маша – столбец, первое число в ячейке – выигрыш Пети, второе – выигрыш Маши):

		МАША	
		Футбол	Концерт
ПЕТЯ	Футбол	(4; 1)	(0; 0)
	Концерт	(0; 0)	(1; 4)

Если оба выбирают «футбол», то выигрыш Пети равен 4, а выигрыш Маши равен 1. Если оба выбирают «концерт, то наоборот – выигрыш Маши равен 4, а выигрыш Пети равен 1. Если мнения разошлись и все сидят дома, то каждый получает нулевой выигрыш.

Проверьте сами, что в данной игре имеются два равновесия Нэша – («Футбол»; «Футбол») и («Концерт»; «Концерт»).

Какое же из этих равновесий реализуется? Тут теория игр помочь не может – нужно модифицировать игру. Возможным вариантом является отказ от обязательной одновременности выбора действий. Если Петя первым предлагает «Давай пойдем на футбол»[29], то Маше выгодно согласиться, так как в этом случае она получит единичный выигрыш, а оставшись дома – нулевой. Аналогично, если Маша первой предложит «Давай пойдем на концерт», то Пете выгодно согласиться. А вот кому в этом случае делать ход первому, это вне математики – скорее этот вопрос из области искусства достижения договоренностей, для которого математика характеризует лишь возможные рациональные варианты.

! В данном примере переход к точке Парето осуществлен за счет изменения порядка выбора игроками своих действий, то есть за счет **появления иерархии** – перехода от игры в нормальной форме к иерархической игре (что является управлением структурой организационной системы; см. также пример 6 ниже). •

Пример 5. «Два начальника[30]». Пусть имеются два игрока-начальника. У них есть один подчиненный. Каждый из начальников дает подчиненному задание и может как разрешить выполнять свое задание совместно с заданием другого начальника, так и потребовать выполнения своего задания в первую очередь.

> У семи нянек дитя без глаза.

Назовем первый выбор «стратегия сотрудничества», а второй – «эгоистическая стратегия». Если задания выполняются совместно, то каждый из начальников получает по 10 единиц выигрыша. Если только один из начальников потребовал первоочередного выполнения своего задания, он получает 15 единиц выигрыша, времени на выполнение задания второго начальника у подчиненного не остается, и второй начальник несет убытки в размере 5 единиц.

Если оба начальника потребовали выполнения своего задания в первую очередь, подчиненный отказывается работать вообще, и начальники получают нулевые выигрыши.

---

[29] *Если данная игра повторяется (например, каждый выходной день), то предложение может звучать мягче: «Давай пойдем сегодня на футбол, а в следующие выходные – на концерт» или наоборот.*

[30] *Хрестоматийное для теории игр название этого примера – «Дилемма заключенного».*

Выигрыши игроков в данной биматричной игре можно представить в виде следующей матрицы:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \textit{сотр.} & \textit{эгоист.} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \textit{сотр.} \\ \textit{эгоист} \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 10,10 & -5,15 \\ 15,-5 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Здесь паре чисел в каждой из четырех ячеек матрицы соответствуют выигрыши первого и второго игрока при том или ином их поведении. Строки соответствуют выбору первого игрока, столбцы – второго.

В данной игре эффективная по Парето ситуация игры («сотр.»; «сотр.») не является устойчивой по Нэшу. Действительно, первый игрок, при неизменном действии второго, переходя от сотрудничества к эгоистическому поведению, увеличивает свой выигрыш с 10 до 15. Аналогично может поступить и второй игрок.

Легко видеть, что единственное равновесие Нэша («эгоист.», «эгоист.») этой игры не эффективно по Парето. В то же время, в реальной жизни подобные конфликты зачастую разрешаются довольно эффективно. Дело в том, что на практике в подобных ситуациях у игроков имеются и другие способы поведения, помимо одновременного выбора их двух стратегий. Модифицируем игру следующим образом: добавим каждому игроку дополнительную стратегию «договор» и доопределим матрицу выигрышей следующим образом:

$$
\begin{array}{c}
 \\
\begin{bmatrix} \textit{сотр.} \\ \textit{эгоист.} \\ \textit{договор} \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
[\textit{сотр.} \quad \textit{эгоист.} \quad \textit{договор}] \\
\begin{pmatrix} 10,10 & -5,15 & 5,15 \\ 15,-5 & 0,0 & 0,0 \\ 15,5 & 0,0 & 10,10 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Содержательно дополнительную стратегию можно проинтерпретировать следующим образом: первый начальник, выбрав эту стратегию, предлагает второму заключить совместный договор (обычно называемый в таких случаях положением о должностных полномочиях), который бы регламентировал время, которое подчиненный тратит на работы каждого начальника. В случае, если второй начальник отвергнет договор, выбирая «эгоистическую» стратегию (ситуация («договор», «эгоист.»)), первый начальник угрожает также применить «эгоистическую» стратегию, что приводит к нулевым выигрышам для обоих. Если второй начальник выбирает безусловное сотрудничество (это ситуация игры («договор», «сотр.»)), договор будет подписан на условиях, более выгодных для первого начальника. Если же оба начальника одновременно выходят с инициативой подписания договора (ситуация («договор», «договор»)), их выигрыши равны выигрышам при одновременном сотрудничестве.

В этой игре уже два равновесия Нэша, («эгоист.», «эгоист.») и («договор», «договор»), причем второе выгоднее (доминирует по Парето) первое. Кроме того, можно заметить, что, при «эгоистической» стратегии второго начальника, первому безразлично, «эгоистическую» ли стратегию выбирать, или «договор». Но если он выберет «договор», стратегия «договор» станет выгодной и второму начальнику.

Все сказанное позволяет надеяться, что именно «договорное» равновесие будет исходом этой игры.

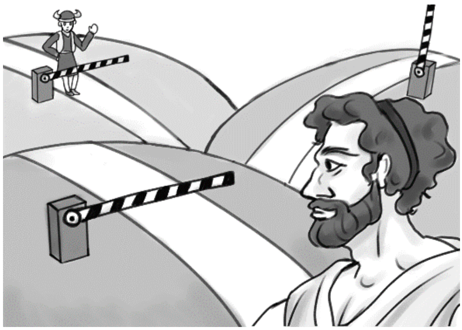
? Предложите сами вариант достижения договоренности между начальниками.

! В данном примере переход к точке Парето осуществлен за счет изменения множества возможных действий игроков (то есть за счет **институционального управления**). •

Вышеприведенный пример проиллюстрировал, как расширение множества стратегий за счет введения возможности совместных действий между игроками может вывести игру из неэффективного по Парето равновесия Нэша. Подобные идеи лежат в основе подхода отдельного раздела теории игр – теории *кооперативных игр* [7], рассматривать которые мы с вами не будем.

Нэш и Парето. Рассмотрим модельный пример, достаточно ярко иллюстрирующий возможное несовпадение равновесий Нэша и точек Парето.

Пример 6. «Легенда о призвании варягов на Русь». В X веке путь «из варяг в греки» был важнейшим торговым маршрутом, соединяющим Северную Европу с Византией через реки и озера Руси. Путь этот проходил через шесть славянских княжеств, каждое из которых устанавливало свои пошлины за проход торговых караванов.



Пусть имеются шесть игроков (княжеств), а выбираемые каждым из них самостоятельно и независимо от остальных действия – размеры пошлин $0 \le x \le 1$ (условимся, что при «запретительных» пошлинах $x > 1$ купцы через такое княжество вообще не поедут).

Так как с ростом пошлин число караванов сокращается (купцы ищут другие, более выгодные маршруты), то выбор каким-то агентом высокой пошлины приносит пользу ему, но вред всем остальным агентам. То есть условно целевые функции агентов имеют следующий *линейный* вид:

$$f_{\mathbf{1}}(x_1, x_2, ..., x_6) = 4 + x_{\mathbf{1}} - x_2 - ... - x_6,$$
$$f_{\mathbf{2}}(x_1, x_2, ..., x_6) = 4 + x_{\mathbf{2}} - x_1 - ... - x_6,$$
$$...$$
$$f_{\mathbf{6}}(x_1, x_2, ..., x_6) = 4 + x_{\mathbf{6}} - x_1 - ... - x_5.$$

Оптимальным (независимо от действий других игроков) действием каждого игрока в данном случае является установление максимальной пошлины, равной единице.

Набор единичных действий – равновесие Нэша игры агентов, так как, выбирая, при неизменных действиях остальных, любое меньшее действие, агент только уменьшит свой выигрыш. В равновесии Нэша каждый игрок получает нулевой выигрыш, сумма выигрышей при этом тоже равна нулю.

Альтернативой является точка Парето – вектор нулевых действий (низких пошлин), при выборе которого каждый агент получает выигрыш 4, а в сумме они получают 24! Но эта ситуация не является равновесием по Нэшу, так как любой из агентов, при неизменных действиях остальных, выбрав единичное действие, получит выигрыш 5 (при этом сумма выигрышей уменьшится на 5).

Несколько раз собирались князья, договаривались, что все будут устанавливать низкие пошлины. Но каждый раз находился князь, нарушавший договоренность первым, а затем и все остальные вслед за ним повышали пошлины, ссорясь друг с другом.

Надоела им междоусобица, собрались они в 862 году в Новгороде и обратились к варягам «земля наша велика и обилна, а наряда у нас нѣту; да поидѣте к намъ княжить и владѣть нами» (агенты призвали центр в нашей современной терминологии). Так, пришедший с братьями Рюрик заложил основы российской государственности[31]. Но потребовал дани на

> На то щука, чтобы карась не дремал.

[31] *Интересно отметить, что торговые пошлины на перемещение товаров между регионами Российской империи окончательно исчезли только в средине XVIII века.*

содержание двора и дружины. Каков максимальный размер этой дани, еще выгодный для подданных?

! Разность между суммарными выигрышами агентов в точке Парето и в равновесии Нэша (в нашем абстрактном примере она равна 24 – 0 = 24) может рассматриваться как **цена иерархии** – максимальная цена, которую коллектив агентов может заплатить за содержание центра, который в том числе будет обязан обеспечивать (например, за счет штрафов или военной силы и т.п.) устойчивость Парето-эффективной ситуации игры относительно индивидуальных отклонений.

Если в рассмотренном примере переход к иерархической структуре обходится менее, чем в 24 единицы, то он выгоден и обеспечивает реализуемость Парето-эффективной ситуации. •

? Приведите содержательные примеры неэффективности по Парето равновесий Нэша, и наоборот – неустойчивости по Нэшу точек Парето.

Безопасные стратегии. А что делать, если в игре в нормальной форме отсутствует равновесие Нэша? Как спрогнозировать результат взаимодействия игроков? Для этого нужно вводить другие концепции равновесия (более «широкие», то есть включающие равновесие Нэша как частный случай) Приведем пример, иллюстрирующий одну из таких концепций – равновесие в безопасных стратегиях.

Пусть имеется *ситуация игры* - набор действий игроков. Отклонение от этого набора действий одного игрока, выгодное ему самому, но наносящее вред какому-то другому игроку, называется *угрозой*. Если в ситуации игры нет ни одной угрозы для игрока, такой набор называется *безопасным* для него, а его действие называется *безопасной стратегией*.

Равновесие в безопасных стратегиях (РБС[32]) – такая ситуация игры, в которой:

(1) никакой игрок не может потерять в результате одностороннего и «корыстного» отклонения любого другого игрока (то есть нет угроз);

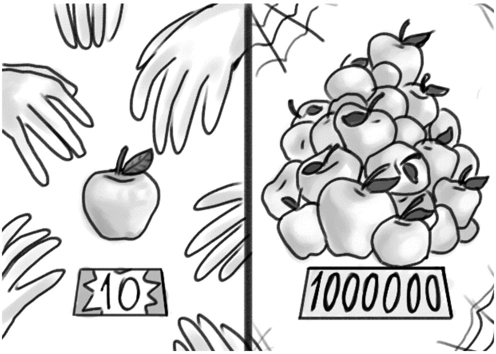
---

[32] *Концепция РБС предложена российским математиком М.Б. Искаковым.*

(2) выгодно отклоняясь сам, он может потерять больше, чем получил, в результате одностороннего и выгодного отклонения какого-либо другого игрока (то есть ни у одного игрока нет *безопасных отклонений*).

Или то же, немного по-другому: в РБС нет угроз, и никто не может улучшить свое положение, не подставляясь под угрозу большей потери.

Пример 7. «Продавцы на рынке». На рынке (базаре) продают яблоки одного и того же сорта два продавца (игрока). Каждый из них может назначить на свой товар низкую (Н), среднюю (С) или высокую (В) цену.



При одинаковых ценах покупатели распределяются между ними поровну и выигрыши продавцов одинаковы – (2; 2), (3; 3) или (4; 4), причем чем выше цена, тем больше эти выигрыши (см. диагональ матрицы выигрышей ниже).

Вообще, более высокая цена дает больший доход, но, если один продавец назначит высокую цену, а другой низкую, то к последнему пойдут все покупатели и он получит еще больший выигрыш - 5, при этом задорого покупать не будет никто, и продавец с высокой ценой получит нулевой выигрыш. Матрица выигрышей будет такой:

		Продавец 2		
		Н	С	В
Продавец 1	Н	(2; 2)	(2; 3)	(5; 0)
	С	(3; 2)	**(3; 3)**	(3; 4)
	В	(0; 5)	(4; 3)	(4; 4)

? Проанализируйте выигрыши продавцов при различных комбинациях их действий. Приведите содержательные интерпретации изменений выигрышей при то или ином изменении действий одного из игроков.

? Убедитесь, что равновесия Нэша в этой игре нет.

Но есть РБС – так как стратегии высоких цен подвержены угрозе, то равновесием в безопасных стратегиях будут средние цены для обоих игроков, приводящие к выигрышам (3; 3), выделенным жирным шрифтом в матрице выигрышей. •

? Обоснуйте, что равновесие Нэша является РБС.

Завершив описание основных понятий теории принятия индивидуальных и коллективных решений, перейдем к задачам управления, основывающихся на этих моделях рационального поведения и теории игр.

3. Мотивационное управление

По работе и плата.

Рассмотрим мотивационное управление в организационной системе (ОС), состоящей из одного центра на верхнем уровне иерархии и агента на нижнем уровне (см. Рис. 7). *Участники ОС*, то есть центр и агент, обладают свойством *активности* – способностью самостоятельного выбора своих действий. Мотивационное управление, как отмечалось выше, заключается в целенаправленном изменении центром предпочтений агента, то есть целевой функции последнего.

! *Механизмом стимулирования* называется зависимость размера стимулирования (материального поощрения) агента от его действий или результатов деятельности.

Механизм стимулирования полностью определяется *функцией стимулирования*, задающей зависимость размера вознаграждения агента от выбираемых им действий. реализующим функцию,

Пусть агент (человек, предприятие и т.п.) выбирает *действие* $x \geq 0$. Содержательно действием агента может быть количество отрабатываемых часов, объем произведенной продукции и т.д.

Действием центра является *функция стимулирования* $q(x)$, ставящая в соответствие действию агента неотрицательное вознаграждение, выплачиваемое ему центром.

На практике широко распространены системы оплаты труда, основанные на использовании постоянных *ставок оплаты*: повременная оплата подразумевает существование ставки оплаты единицы рабочего времени (как правило, часа или дня), сдельная оплата – существование ставки оплаты за единицу продукции и т.д. Объединяет эти системы оплаты то, что вознаграждение агента прямо пропорционально его действию (количеству отработанных часов, объему выпущенной продукции и т.д.), то есть $q(x) = a\,x$, а ставка оплаты $a \geq 0$ является коэффициентом пропорциональности – углом наклона прямой $q(x)$ на Рис. 10. Такие системы стимулирования называются *пропорциональными* или линейными.

Пусть выбор действия x требует от агента *затрат*[33] $c(x) = x^2 / 2r$ (где $r > 0$ – параметр агента, например, его квалификация, с ростом которой затраты убывают) и приносит центру *доход* $H(x) = a_0 x$, где $a_0 > a$. Параметр a_0 может интерпретироваться как цена единицы продукции, производимой агентом, по которой центр может реализовать ее на рынке.

Интересы участников организационной системы (центра и агента) отражены их *целевыми функциями*, которые обозначим, соответственно, $\Phi(x)$ и $f(x)$ (функциями выигрыша, функциями полезности, в записи которых зависимость от действий центра будет опускаться), представляющими собой: для агента – «стимулирование минус затраты»

(2) $f(x) = q(x) – c(x) = a x - x^2 / 2 r$;

а для центра – «доход минус стимулирование»:

(3) $\Phi(x) = H(x) – q(x) = a_0 x - a x = (a_0 – a) x$.

Центр обладает правом первого хода и на момент принятия решений (о том, какую ставку оплаты следует установить для агента) имеет информацию о предпочтениях агента (его целевой функции (2)) на этом множестве. Помимо этого центру, естественно, известны свои собственные предпочтения (3). Агент на момент принятия решения о том, какое действие ему следует выбрать, знает свои предпочтения (2), а также выбранную центром ставку a оплаты.

В настоящей модели ОС имеет вид:

Состав ОС	Центр и агент
Структура ОС	Двухуровневая (см. Рис. 7).
Управление	Ставка оплаты
Действие агента	Неотрицательное действие
Цель центра	Максимизировать (3)

[33] *Понятно, что зависимость затрат от действия должна быть возрастающей функцией. Кроме того, обычно считается, что каждое последующее увеличение действия требует бОльших затрат, чем предыдущее. Простейшим примером такой зависимости является квадратичная (возрастающая ветвь параболы с вершиной внизу).*

Цель агента	Максимизировать (2)
Информированность	Центр знает функции своего дохода и затрат агента. Агент знает функцию своих затрат, а также выбранную центром ставку оплаты. Центр видит выбранное агентом действие. Агент знает размер выплаченного ему центром вознаграждения.
Порядок функционирования	Центр выбирает ставку оплаты и объявляет ее агенту, агент выбирает свое действие, центр выплачивает агенту вознаграждение.

Считай доходы
да береги расходы.

Так как значение целевой функции агента зависит как от его собственного действия, так и от действия центра, то в рамках принятой гипотезы рационального поведения агент будет выбирать действия, которые при заданной системе стимулирования максимизируют его целевую функцию – разность между вознаграждением и затратами. Понятно, что множество таких действий зависит от используемой центром системы стимулирования.

! **Основная идея мотивационного управления (стимулирования)** как раз и **заключается в том, что, варьируя систему стимулирования, центр может побуждать агента выбирать те или иные действия**.

Так как целевая функция центра зависит от действия, выбираемого агентом, то *эффективностью системы стимулирования*[34] является значение целевой функции центра на множестве действий агента, выбираемых им при данной системе стимулирования. Следовательно, задача стимулирования заключается в том, чтобы выбрать оптимальную систему стимулирования – имеющую максимальную эффективность. Решим эту задачу.

График целевой функции агента при использовании центром пропорциональной системы стимулирования приведен на Рис. 10.

---

[34] *То есть мерой того, насколько «хороша» система стимулирования.*

Найдем, какое действие выберет агент при заданной ставке оплаты a. Целевая функция агента $a\,x - x^2 / 2\,r$ представляет собой параболу[35] с ветвями вниз, см. Рис. 10. В силу гипотезы рационального поведения агент выберет действие, максимизирующее его целевую функцию[36]. Это оптимальное для агента действие – вершина параболы[37]: $x^*(a) = a\,r$. При этом его *выигрыш* (значение целевой функции) $f(x^*) = a^2\,r / 2$ максимален.

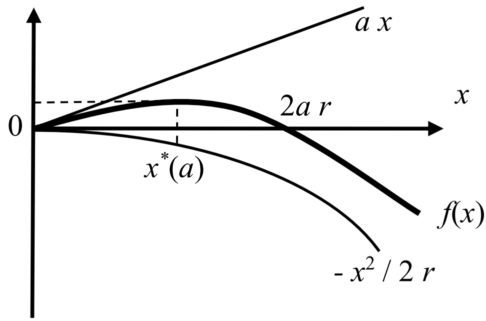


Рис. 10. Целевая функция агента при использовании центром пропорциональной системы стимулирования

Сделав маленькое отступление, рассмотрим следующий пример.

Пример 8. «Ставка оплаты и рабочее время». В рамках рассматриваемой модели стимулирования мы получили, что выбираемое агентом действие пропорционально ставке оплаты ($x^*(a) = a\,r$). С одной стороны, это логично – чем выше ставка оплаты, тем больше работает агент (если речь идет о почасовой оплате, а x – число часов, отрабатываемых агентом в день, то с

---

[35] *Напомним, что квадратное уравнение $b\,x^2 + d\,x + e = 0$ определяет параболу. При $b > 0$ – ветви вверх (вершина параболы – точка минимума), при $b < 0$ – ветви вниз (вершина параболы – точка максимума). Абсцисса вершины параболы равна $(– d / 2\,b)$.*

[36] *Методическое замечание: в настоящей работе во всех примерах, где надо искать максимум или минимум функции, последняя имеет квадратичный вид (см. выражения (2), (5), (12), (13)). Максимум/минимум параболы достигается в ее вершине, формулу координат которой проходят в 8 классе.*

[37] *Те, кто уже проходил производные, может приравнять производную целевой функции агента нулю и найти x^*.*

ростом ее ставки агент будет выбирать все большую продолжительность рабочего времени, увеличивая свой доход).

Но такая ситуация имеет место далеко не всегда. В такой науке, как экономика труда, известен следующий пример. Однажды в одной южной стране был необычайно высокий урожай апельсинов. Для того, чтобы не потерять этот рекордный урожай, владельцы апельсиновых плантаций пригласили сельскохозяйственных рабочих из соседней страны и повысили ставку оплаты за один ящик собранных апельсинов. Владельцы надеялись, что это побудит работников действовать более интенсивно и трудиться в течение более длительного времени, что позволит вовремя собрать весь урожай.

Но эффект был противоположным – число ящиков, собираемых в день одним рабочим, снизилось! Объяснение

простое – хозяева плантаций считали, что цель рабочего – максимизировать доход, получаемый за сделанную работу. А оказалось, что у данной категории работников задачей было обеспечить себе заданный фиксированный доход в день. Для достижения этой цели при росте ставки оплаты вполне рационально работать меньше, обеспечив себе еще и прирост свободного времени (что, в том числе отражает эффект дауншифтинга[38]). •

? Представьте, что на летних каникулах Вы нашли работу с почасовой оплатой и возможностью самостоятельно выбирать продолжительность рабочего времени в рамках, допускаемых трудовым кодексом. Проработали Вы неделю, и ставку оплаты Вам повысили. Больше или меньше часов в день Вы предпочтете работать?

[38] ***Дауншифтинг*** *(downshifting) – осознанный отказ от карьеры, высокого статуса и материальных благ ради более спокойной, простой и гармоничной жизни, где приоритет отдаётся личному времени, семье, хобби и внутреннему комфорту, а не гонке за успехом.*

Зная, как действие агента зависит от ставки оплаты: $x^*(a)$, подставим эту зависимость в целевую функцию центра (3): $\Phi(x^*(a)) = (a_0 - a)\, a\, r$ и найдем ставку оплаты a^*, при которой достигается максимум этой функции. Сделать это легко, так как $a_0\, a\, r - a^2\, r$ – парабола с ветвями вниз. В результате оптимальная (для центра) ставка оплаты $a^* = a_0 / 2$. Обратим внимание, что она не зависит от параметра r агента, то есть в рассматриваемой модели любому агенту следует устанавливать ставку оплаты, равную половине от той цены, по которой центр собирается реализовывать его продукцию.

Итак, агент выберет действие $x^*(a^*) = a_0\, r / 2$, выигрыши центра и агента равны соответственно $\Phi(x^*(a^*)) = a_0^2\, r / 4$, $f(x^*(a^*)) = a_0^2{}^2\, r / 8$, а их сумма $\Phi(x^*(a^*)) + f(x^*(a^*)) = 3\, a_0^2\, r / 8$.

Спрашивается, является ли пропорциональная система стимулирования оптимальной, то есть не существует ли другой системы стимулирования, которая побуждает агента выбрать то же действие, но при этом центр платит ему меньшее вознаграждение?

> За работу деньги,
> а за провинность палки.

Оказывается, такая система стимулирования существует: в силу принципа компенсации затрат центру достаточно использовать систему стимулирования (которая называется *компенсаторной*)

$$(4)\quad q_K(x) = \begin{cases} c(x^*(a^*)), \text{ если } x = x^*(a^*), \\ \quad 0, \text{ если } x \neq x^*(a^*), \end{cases}$$

при которой центр возвращает агенту его затраты при выборе им требуемого действия (*стратегия поощрения*), а в остальных случаях стимулирование равно нулю[39] (*стратегия наказания*).

При использовании центром компенсаторной системы стимулирования за выбор агентом действия $x^*(a^*)$ выигрыш агента равен нулю, а выигрыш центра увеличивается по сравнению с линейной системой стимулирования до $3\, a_0^2\, r / 8$ (сумма выигрышей не изменяется).

---

[39] *Проверьте самостоятельно, что максимум целевой функции агента при этом по-прежнему достигается в единственной точке x*(a*).*

Возникает вопрос, может быть центру, используя компенсаторную систему стимулирования, стоит ориентировать агента на выбор другого действия, чем $x^*(a^*)$? Это, действительно, так, в чем легко убедиться, найдя максимум параболы[40] $a_0\, x - x^2 / 2\, r$. Этот максимум достигается при $x = a_0\, r$. При этом сумма целевых функций центра и агента возрастает до $a_0^2\; r / 2$, то есть использование компенсаторной системы стимулирования вместо пропорциональной позволяет увеличить сумму выигрышей участников ОС на треть (!).

Спрашивается, почему в реальной жизни распространены пропорциональные системы стимулирования, а не гораздо более «эффективные» компенсаторные?

! Ответ таков – пропорциональная система стимулирования проста и понятна для агента, ему легко прогнозировать свое вознаграждение в зависимости от выбираемого действия.

Компенсаторная система стимулирования сложнее, требует точного знания функции затрат агента и не очень справедлива по отношению к последнему – обеспечивает ему нулевой выигрыш, перераспределяя весь выигрыш в пользу центра. Компенсаторная

система – это язык ультиматумов: либо делаешь то, что я сказал, либо ничего не получишь. В реальной жизни мало кто из агентов на это согласится. Более того, если агент делает не совсем то, что ему говорят, в жизни разные исходы не одинаково плохи и неприемлемы для центра: обычно «непрерывная» градация – ближе или дальше результат действия агента к изначально поставленной центром цели.

Выше рассматривалось мотивационное управление со стороны центра, заключающееся в изменении целевой функции

[40] *В целевую функцию центра подставили, вместо стимулирования, компенсируемые затраты агента, фактически, максимизируя сумму целевых функций центра и агента.*

агента. Встречаются ситуации, когда целевую функцию не изменяют, а «подменяют» на другую. Приведем пример.

Один американский писатель жил на первом этаже многоэтажного дома, и недалеко от его окон была детская площадка, на которой ребята школьного возраста играли в футбол с утра до вечера и тем самым мешали ему работать. Он несколько раз выходил во двор и просил их не шуметь, но это, как легко понять, не принесло результата. Тогда он придумал, как перессорить этих ребят между собой. Он вышел к ним и сказал: ребята, я тоже очень люблю футбол, поэтому хочу вам немного помочь. Каждый день в 5 часов вечера я буду выходить на вашу площадку и давать по 1 доллару каждому, кто в этот момент окажется на площадке. Эта сумма в 1 доллар не зависит от того, хорошо или плохо вы играли, от того, кто из вас выиграл, кто проиграл. Оказался на площадке в 5 часов – получаешь доллар. Писатель строго следовал установленному правилу, и даже тот, кто весь день орал под его окнами и мешал ему работать, но почему-то не смог доиграть до 5 часов вечера, никакого доллара не получал. Ребята быстро разделились на тех, кто получал свой доллар «честно», проводя весь день на площадке, и тех, кто приходил к 5 часам только за долларом, причем последних со временем становилось все больше. Это, собственно, и было целью писателя: дети стали ходить на футбольную площадку как на работу: не затем, чтобы поиграть, а чтобы получить доллар. Вскоре (не прошло и пары недель) они между собой перессорились, и шумная компания распалась.

Так работает принцип вменённой цели: заменяя целевую функцию агента, центр добивается требуемого ему поведения. В данном примере ребята забыли о радости, которую получают от самого процесса игры, и стали думать о заработке. •

Другой хрестоматийный пример подмены (неудачной) цели: в одном городе премии пожарной команде стали выплачивать пропорционально числу потушенных пожаров, что привело к тому, что они сами стали устраивать поджоги. •

? Приведите примеры подмены цели из Вашей жизни.

4. Институциональное управление

С казной не судись.

В рассмотренной в предыдущем разделе модели пропорциональной системы стимулирования центр выступал в роли «посредника» - он, фактически, покупал у агента производимую последним продукцию по цене a и продавал ее на рынке по большей цене a_0. Такая ситуация может возникать, когда у агента нет возможности (инфраструктуры и пр.) самостоятельно продавать на рынке свою продукцию. Или нет таких прав, например, в случае лицензируемой или квотируемой деятельности.

Рассмотрим случай, когда агент сам продает свою продукцию на рынке, а центр осуществляет регулирование, то есть осуществляет *институциональное управление*, определяя ограничения и/или нормы деятельности агента. Частными случаями являются два примера – продажа квот и налоговое регулирование.

Пример 9. «Продажа квот». Пусть центр предлагает агенту две альтернативы – продавать продукцию ему (по цене a - случай, рассмотренный в предыдущем разделе) или продавать продукцию самостоятельно по большей цене a_0, заплатив за это право неотрицательную величину D. При каком размере этой платы агенту выгодно работать самостоятельно?

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Центр и агент
Структура ОС	Двухуровневая (см. Рис. 7).
Управление	Стоимость квоты D.
Действие агента	Согласие или отказ приобретать квоту.
Цель центра	Максимизировать стоимость квоты.
Цель агента	Максимизировать доход от продаж за вычетом затрат на производство и стоимости квоты.
Информированность	Центр знает функции своего дохода и затрат агента.

	Агент знает функции дохода центра и своих затрат. Агент знает выбранную центром ставку оплаты и предлагаемую стоимость квоты. Центр видит выбранное агентом действие. Агент знает размер выплаченного ему центром вознаграждения.
Порядок функционирования	Центр выбирает стоимость квоты. Агент соглашается или отказывается приобретать квоту. Агент выбирает свое действие. Центр выплачивает агенту вознаграждение или получает от агента стоимость квоты.

Работая с центром, агент получает выигрыш $f(x^*(a^*)) = a_0^2\ r / 8$ (см. выше).

Работая самостоятельно, он определяет свое действие (объем выпуска) $x^*(a_0) = a_0\, r$, получая выигрыш $(a_0)^2\, r - \dfrac{(a_0 r)^2}{2r} - D = a_0^2\ r / 2 - D$ (доход от продаж за вычетом затрат на производство и стоимости квоты).

Значит для агента приобретение квоты выгодно, если $a_0^2\ r / 2 - D \geq a_0^2\ r / 8$, то есть

$$D \leq 3a_0^2\, r / 8.$$

Центр, работая с агентом, получал выигрыш $a_0^2\ r / 4$ (см. выше), значит он согласится продать квоту по цене не менее этой величины:

$$D \geq a_0^2\ r / 4.$$

Объединяя эти два неравенства, получаем, что согласование интересов центра и агента (переход от мотивационного к институционального управлению, с которым должны согласиться они оба) возможно при стоимости квоты, удовлетворяющей (**условие согласования интересов**) системе неравенств:

$$2\ a_0^2\ r \leq 8\, D \leq 3\ a_0^2\ r. \bullet$$

? Приведите примеры институционального управления из Вашей жизни.

Пример 10. «Налог на прибыль». Пусть центр имеет возможность ввести налог на прибыль агента. Ставку этого налога, то есть изымаемую у агента долю его прибыли, обозначим через g (число от нуля до единицы). Цель центра – максимизация налоговых поступлений.

Копейка рубль бережет.

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Центр и агент
Структура ОС	Двухуровневая (см. Рис. 7).
Управление	Ставка налога на прибыль g.
Действие агента	Согласие или отказ работать в при установленном налоге на прибыль.
Цель центра	Максимизировать налоговые поступления.
Цель агента	Максимизировать чистую прибыль.
Информированность	Центр знает функции своего дохода и затрат агента. Агент знает функции дохода центра и своих затрат. Агент знает выбранную центром ставку оплаты и предлагаемую ставку налога на прибыль. Центр видит выбранное агентом действие. Агент знает размер выплаченного ему центром вознаграждения.
Порядок функционирования	Центр выбирает ставку налога на прибыль. Агент соглашается или отказывается работать в условиях налога на прибыль. Агент выбирает свое действие. Центр выплачивает агенту вознаграждение или получает от агента налоговый платеж.

Целевая функция (чистая прибыль)) агента

$$(1 - g)\,(a_0\, x - \frac{x^2}{2r})$$

достигает максимума, как и в разделе 3, при выборе агентом действия $x^*(a_0) = a_0\, r$. Значит, выигрыш агента равен $(1 - g)\ a_0^2\ r / 2$. Система налогообложения для него выгодна (по сравнению с продажей продукции центру), если $(1 - g)\ a_0^2\ r / 2 \geq a_0^2\ r / 8$, то есть $g \leq 3 / 4$.

Центр, работая с агентом, получал выигрыш $a_0^2\ r / 4$ (см. выше), значит он согласится установить ставку налога, обеспечивающую ему выигрыш, не меньший этой величины: $g\ a_0^2\ r / 2 \geq a_0^2\ r / 4$, то есть $g\ \geq 1 /2$.

С мира по нитке - голому рубаха.

Объединяя эти два неравенства, получаем следующее условие согласования интересов центра и агента (отметим, что диапазон ставок налога на прибыль не зависит от рыночной цены и параметра агента r): $1 /2 \leq g \leq 3 / 4$. Максимум налоговых поступлений достигается при ставке $g \leq 3 / 4$. Не правда-ли, не очень справедливо изымать 75% прибыли? •

5. Информационное управление

Не верь чужим речам, а верь своим очам.

В соответствии с гипотезой рационального поведения (см. выше), человек выбирает с учетом всей имеющейся у него информации альтернативу, обладающую максимальной полезностью. Целенаправленно воздействуя на эту информацию, то есть осуществляя *информационное управление*, можно влиять на процесс и результаты выбора, на принимаемые решения. Люди очень подвержены влиянию СМИ, социальных медиа и пр. Стоит запустить слух, что, как пел В. Высоцкий: «говорят, что скоро все подорожает, абсолютно; а особенно – поваренная соль», как полки с солью опустеют[41].

Слухами земля полнится.

Приведем бытовой пример. В крупных городах в течение лета коммунальные службы отключают подачу горячей воды на пару недель в одном районе за другим и проводят профилактические работы в системе водоснабжения. На двери одного из подъездов многоквартирного дома было вывешено объявление о том, что подача горячей воды возобновится, к примеру, 16.06. Однако 16-е июня миновало, а горячая вода так и не появилась. Не подали ее ни 17-го, ни 18-го числа. Один из жильцов этого подъезда 19-го июня, выходя утром на работу, поговорил с рабочими, занятыми благоустройством территории, о том, когда все-таки ожидать появления горячей воды. Ответ заключался в том, что профилактические работы, собственно, давно завершены, но недостает какого-то инструмента, чтобы завершить финальную часть подготовки системы водоснабжения к эксплуатации. Конкретных сроков подачи никто из собеседников назвать не решился. Тогда жилец взял авторучку и, подойдя к двери подъезда, переправил в объявлении одну цифру: вместо 16.06 получилось 16.07, - и ушел на работу. Такого количества желающих выяснить конкретные сроки подачи

[41] *Подобное публичное «самореализующееся» суждение о будущем называется* ***активным прогнозом****.*

горячей воды, которое объявилось в течение этого рабочего дня, управляющая компания, вероятно, не видела со дня своего основания. В результате, вернувшись вечером с работы, сообразительный жилец обнаружил, что злополучного объявления на двери подъезда уже нет, а из кранов в квартире течет горячая вода, что и требовалось.

Таким образом работает образцовая социальная технология информационного управления, призванная управлять поведением большого количества агентов. Во-первых, однонаправленные, однотипные действия этих агентов никак не согласованы между собой (они друг с другом ни о чем не договаривались), каждый из них действует в соответствии со своими интересами и намерениями. Во-вторых, сигналом к действию служит определенный знак (вброс информации), побуждающий этих людей независимо друг от друга совершать определенные действия, которые рассчитывает увидеть управляющий центр. При этом действия агентов не зависят от степени правдивости и релевантности вброшенной информации: результат во всех случаях должен быть одинаков. В-третьих, инициатор возмущений остается «в тени»: его имя, внешность, статус и прочие параметры не должны быть известны действующим агентам. •

В настоящем разделе рассматриваются примеры двух задач информационного управления – рефлексивное управление и информационное управление в сетевых структурах.

5.1. Рефлексия и рефлексивное управление

В чужой монастырь со своим уставом не ходят.

Рефлексия. Одним из фундаментальных свойств человека является то, что наряду с природной («объективной») реальностью существует ее отражение в его сознании. При этом между *природной реальностью* и ее образом в сознании (будем считать этот образ частью особой – *рефлексивной реальности*) может существовать определенный зазор, несовпадение.

Целенаправленное изучение этого феномена традиционно связано с термином «рефлексия», которому «Философский словарь» дает следующее определение: «*рефлексия* (лат. reflexio – обращение назад). Термин, означающий отражение, а также исследование познавательного акта». Как в песне М. Леонидова: «Я оглянулся посмотреть, не оглянулась ли она, чтоб посмотреть, не оглянулся ли я».

Для прояснения понимания сути рефлексии рассмотрим сначала ситуацию с одним субъектом. У него есть представления о природной реальности, но он может и осознавать (отражать, рефлексировать) эти представления, а также осознавать осознание этих представлений и т.д. Так формируется рефлексивная реальность. Рефлексия субъекта относительно своих собственных *представлений* о реальности, принципах своей деятельности и т.д. называется *авторефлексией* или *рефлексией первого рода*. В большинстве гуманитарных исследований речь идет, в первую очередь, об авторефлексии, под которой в философии понимается процесс размышления индивида о происходящем в его сознании.

Рефлексия второго рода имеет место относительно представлений о реальности, принципах принятия решений, авторефлексии и т.д. других субъектов.

Различают информационную и стратегическую рефлексию.

! *Информационная рефлексия* – процесс и результат размышлений агента о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие агенты). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений агент не принимает.

! *Стратегическая рефлексия* – процесс и результат размышлений агента о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие агенты) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии.

Примеры. Приведем пример стратегической рефлексии – «Пенальти». Агентами являются игрок, бьющий по воротам, и вратарь. Предположим для простоты, что у игрока есть два действия – «бить в левый угол ворот» и «бить в правый угол ворот». У вратаря также есть два действия – «ловить мяч в левом углу» и «ловить мяч в правом углу». Если вратарь угадывает, в какой угол бьет игрок, то он ловит мяч.

Промоделируем рассуждения агентов. Пусть вратарю известно, что данный игрок обычно бьет в правый угол. Следовательно, ему нужно ловить мяч в правом углу. Но если вратарь знает, что игроку известно, что вратарь знает, как обычно поступает игрок, то вратарю следует моделировать рассуждения игрока. Он может думать так: «Игроку известно, что я знаю его обычную тактику. Поэтому он ожидает, что я буду ловить мяч в правом углу и может ударить в левый угол. В этом случае мне надо ловить мяч в левом углу». Если игрок обладает достаточной глубиной рефлексии, то он может догадаться о рассуждениях вратаря и попытаться его перехитрить, ударив в правый угол. Эту же цепочку рассуждений может провести и вратарь и на этом основании ловить мяч в правом углу.

И игрок, и вратарь могут увеличивать глубину рефлексии до бесконечности, проводя рассуждения друг за друга, и ни один из них не имеет рациональных оснований остановиться на некотором конечном шаге. Следовательно, в рамках моделирования взаимных рассуждений нельзя априори определить исход рассматриваемой игры. Сама игра, в которой у каждого из агентов есть по два возможных действия, может быть заменена на другую игру, в которой агенты выбирают ранги рефлексии, приписываемые оппоненту. Но и в этой игре нет разумного решения, так как каждый агент может моделировать поведение

оппонента, рассматривая «дважды рефлексивную» игру, и т.д. до бесконечности.

Единственное, чем можно помочь в рассматриваемой ситуации агентам, так это ограничить глубину их рефлексии, подметив, что, начиная со второго ранга рефлексии (в силу конечности исходного множества возможных действий), ситуация начинает повторяться – находясь как на нулевом, так и на втором (и вообще на любом четном) уровне рефлексии, игрок будет бить в правый угол. Следовательно, вратарю остается угадать четность уровня рефлексии игрока. Но это ничуть не проще, так как эквивалентно правильному ответу на вопрос о том, что ему делать, в исходной ситуации.

Максимальный ранг рефлексии, который следует иметь агенту для того, чтобы охватить все многообразие исходов игры, называется *максимальным целесообразным рангом рефлексии*. Оказывается, что во многих случаях этот ранг конечен. В примере «Пенальти» максимальный целесообразный ранг рефлексии агентов равен двум. •

Дальше в настоящем разделе будет рассматриваться только информационная рефлексия.

Приведем примеры информационной рефлексии второго рода, иллюстрирующие, что во многих случаях правильные собственные умозаключения можно сделать, лишь если занять позицию других субъектов и проанализировать их возможные рассуждения.

Первым примером является классическая «задача о грязных лицах» (Dirty Face Game), иногда ее называют «задачей о мудрецах и колпаках».

Представим себе, что в купе вагона Викторианской эпохи находятся Боб и его племянница Алиса. У каждого испачкано лицо. Однако никто не краснеет от стыда, хотя любой Викторианский пассажир покраснел бы, зная, что другой человек видит его грязным. Отсюда мы делаем вывод, что никто из пассажиров не знает, что его лицо грязное, хотя каждый видит грязное лицо своего компаньона.

В это время в купе заглядывает Проводник и объявляет, что в купе находится человек с грязным лицом. После этого Алиса покраснела. Она поняла, что лицо у нее испачкано. Но почему она поняла это? Разве Проводник не сообщил то, что она уже знала?

Проследим цепочку рассуждений Алисы. Алиса: «Предположим, мое лицо чистое. Тогда Боб, зная, что кто-то из нас грязный, должен сделать вывод, что грязный он, и покраснеть. Раз он не краснеет, значит, моя посылка про мое чистое лицо ложная, мое лицо грязное и я должна покраснеть.»

Проводник добавил к информации, известной Алисе, информацию о знаниях Боба. До этого она не знала, что Боб знает, что кто-то из них испачкан. Короче, сообщение проводника превратило знание о том, что в купе есть человек с грязным лицом, в общее знание. •

Второй хрестоматийный пример – «задача о скоординированной атаке» (Coordinated Attack Problem). Ситуация выглядит следующим образом. На вершинах двух холмов расположены две дивизии, а в долине расположился противник. Одержать победу можно, только если обе дивизии нападут на противника одновременно. Генерал – командир первой дивизии – посылает генералу – командиру второй дивизии – гонца с сообщением: «Атакуем на рассвете». Так как гонец может быть перехвачен противником, то первому генералу необходимо дождаться от второго генерала сообщения о

том, что первое сообщение получено. Но так как второе сообщение также может быть перехвачено противником, то второму генералу необходимо получить от первого подтверждение, что тот получил подтверждение. И так далее до бесконечности. Задача заключается в том, чтобы определить, после какого числа сообщений (подтверждений) генералам имеет смысл атаковать противника. Вывод следующий – в описанных условиях скоординированная атака невозможна, а выходом является использование вероятностных моделей. •

Третья классическая модель информационной рефлексии – «задача о двух брокерах». Предположим, что у двух брокеров, играющих на фондовой бирже, имеются собственные экспертные системы, которые используются для поддержки принятия решений. Сетевой администратор нелегально копирует обе экспертные системы и продает каждому брокеру экспертную систему своего оппонента. После этого администратор пытается продать каждому из них следующую информацию – «У вашего оппонента есть ваша экспертная система». Потом администратор пытается продать информацию: «Ваш оппонент знает, что у вас есть его экспертная система», и т.д. Вопрос заключается в том, как брокерам следует использовать информацию, получаемую от администратора, а также какая информация на каком шаге является существенной? •

Четвертый пример – рефлексивная вариация примера «концерт или футбол» (см. пример 4 выше). Маша и Петя не могли решить, куда пойти в выходной: на концерт или на футбол. Каждый хотел на своё (Маша – на концерт, Петя – на футбол), но не хотел портить отношения. Мудрая Маша применила рефлексивный ход. Она сказала Пете: «Знаешь, я вчера видела твоего друга Васю из параллельного класса. Он сказал, что все тусовки сегодня будут на площади у концертного зала, потому что после футбола идти некуда». Для Пети было очень важно не только провести время с Машей, но и быть «в центре событий». Когда Петя это услышал, его внутренняя модель выходных изменилась: концерт теперь ассоциировался не со скучной музыкой, а с «тусовкой». Он тут же воодушевился: «А давай действительно на концерт!». Маша же, которая хотела на концерт с самого начала, добилась своего, не уговаривая, а всего лишь изменив контекст в сознании Пети, вписав желаемое действие в систему его ценностей. •

? Приведите примеры рефлексии и информационного управления из Вашей жизни.

Все это примеры так называемых *рефлексивных игр*, в которых ключевым фактором является информированность агентов – иерархия представлений (знаний агентов о существенных параметрах, о том, кто что знает и т.д.). Для её формального описания вводится понятие *информационной структуры*: графической схемы, кружочкам-вершинам которой соответствует как достоверная информация, так и представления агентов о существенных параметрах, представлениях других агентов и так далее. На математическом языке информационная структура представляет собой *граф*[42], отражающий знания и представления агентов.

Понятие структуры информированности (информационной структуры) позволяет дать формальное определение некоторых интуитивно ясных понятий, таких как: адекватная информированность одного агента о другом, взаимная информированность, одинаковая информированность и др.

Одним из ключевых понятий, применяемых для анализа рефлексивных игр, является понятие *фантомного агента*. Обсудим его на качественном уровне. Пусть в некоторой ситуации взаимодействуют два агента – А и Б. Вполне естественно, что в сознании каждого из них имеется некий образ другого: у А имеется образ Б (назовем его АБ), а у Б – образ А (назовем его БА). Эти образы могут совпадать с реальностью, а могут отличаться от нее. Иными словами, агент, например А, может иметь адекватное представление о Б (этот факт можно записать в виде тождества АБ = Б), а может и не иметь.

Сразу возникает вопрос: а может ли в принципе выполняться тождество АБ = Б, ведь Б – это реальный агент, а АБ – лишь его образ? Не вдаваясь в обсуждение этого философского, по сути, вопроса, отметим следующие два обстоятельства. Во-

---

[42] ***Графом*** *в математике называется объект, состоящая из точек и соединяющих их линий, отражающих связи между первыми. Точки называются* ***вершинами*** *графа, а линии -* ***ребрами****. Примеры графов – сеть автомобильных дорог, социальная сеть, телекоммуникационная сеть, организационная структура и многое другое.*

первых, речь идет не о всецелом понимании личности во всей ее полноте, а о моделировании ее поведения в данной конкретной ситуации. На обыденном, житейском уровне человеческого общения мы постоянно сталкиваемся с ситуациями как адекватного, так и неадекватного восприятия одним человеком другого.

Во-вторых, в рамках формального (теоретико-игрового) моделирования человеческого поведения агент – участник ситуации – описывается относительно небольшим набором характеристик. И эти характеристики могут быть полностью известны другому агенту в той же мере, в какой они известны исследователю.

Рассмотрим подробнее случай, когда между Б и АБ имеется различие (это различие может проистекать, говоря формально, из неполноты информации А о Б, либо из доверия к ложной информации). Тогда А, принимая решение о каких-либо своих действиях, имеет в виду не Б, а тот его образ, который у него имеется, то есть АБ. Можно сказать, что субъективно А взаимодействует с АБ. Поэтому АБ можно назвать фантомным агентом. Его нет в реальности, но он присутствует в сознании *реального агента* А и, соответственно, влияет на его действия, то есть на реальность.

Приведем простейший пример «друг или враг». Пусть А считает, что они с Б друзья, а Б, зная об этом, является врагом А (эту ситуацию можно описать словом «предательство»). Тогда, очевидно, в ситуации имеется фантомный агент АБ, которого можно описать так: «Б, являющийся другом А»; в реальности такой субъект отсутствует. Отметим, что при этом Б адекватно информирован об А, то есть БА = А. •

Доверяй, но проверяй.

Таким образом, помимо реальных агентов, фактически участвующих в игре, можно рассматривать *фантомных агентов*, то есть агентов, которые существуют в сознании реальных и других фантомных агентов. Реальные и фантомные агенты в рамках своей рефлексии наделяют фантомных агентов определенной информированностью, которая отражается в информационной структуре.

! Введение понятия фантомного агента позволяет определить рефлексивную игру как игру реальных и фантомных агентов, а также определить *информационное равновесие* как обобщение равновесия Нэша на случай рефлексивной игры, в рамках которого предполагается, что каждый агент (реальный и фантомный) при вычислении своего *субъективного равновесия* (равновесия в той игре, в которую он со своей точки зрения играет) использует имеющуюся у него иерархию представлений об объективной и рефлексивной реальности.

Парадокс Абилина, который стал известным благодаря психологу Джерри Харви[43], рассказавшему историю, приключившуюся с его семьей.

Абилин – это небольшой город в штате Техас. Однажды в жаркий летний вечер семья скучала на крыльце загородного дома. Тесть предложил съездить в Абилин, вся семья его дружно поддержала. До Абилина они ехали по жаре два часа в машине без кондиционера, потом еще два часа обратно. После поездки кто-то сказал: зря мы туда поехали. И тут же все заявили, что они были против этой поездки и согласились только потому, что думали, будто другие ее хотят. В результате, пишет Харви, четверо довольно разумных людей проехали 170 километров по унылой пустыне с температурой как в печи и в густом облаке пыли, чтобы поесть невкусной пищи в Абилинской забегаловке, хотя никто из них на самом деле не хотел ехать.

С точки зрения теории игр это типичная история о фантомных агентах. Каждый участник игры озабочен тем, что о нем скажут или подумают, и не хочет, чтобы его мнение или решение шло вразрез с мнением большинства. Вместо того, чтобы сперва выяснить, в чем это мнение состоит, человек строит гипотезы по этому поводу и этим гипотезам следует, принимая решение. Поскольку таким образом ведет себя каждый, в

[43] *Harvey J. The Abilene Paradox and other Meditations on Management // Organizational Dynamics Journal. 1974. Vol. 3. № 1.*

результате возникает ситуация, которой изначально никто не хотел.

Кстати, этот парадокс отчасти объясняет тот факт, что коллективное (групповое) принятие решений обычно менее эффективно, чем индивидуальное. Каждый член коллектива взаимодействует не с реальными партнерами, а с фантомными, то есть со своими представлениями о том, каковы мнения, намерения, вкусы и пристрастия окружающих его людей. В этой ситуации ошибиться гораздо проще, чем принимая решения в одиночку. •

Удобным инструментом исследования информационного равновесия является *граф рефлексивной игры*, в котором вершины соответствуют реальным и фантомным агентам и в каждую вершину-агента входят стрелки (их число на единицу меньше числа реальных агентов), идущие из вершин-агентов, от действий которых в субъективном равновесии зависит выигрыш данного агента. Граф рефлексивной игры может быть построен и без конкретизации целевых функций агентов. При этом он отражает если не количественное соотношение интересов, то качественное соотношение информированности рефлексирующих агентов, и является удобным и выразительным средством описания эффектов рефлексии. Примеры графов рефлексивной игры приведены на Рис. 13 и 14 ниже.

Для описанного выше примера двух «друзей» граф рефлексивной игры имеет вид: Б ← А ↔ АБ, то есть реальный агент Б (предатель) адекватно информирован об агенте А, который взаимодействует с фантомным агентом АБ (агент Б, являющимся другом А).

Рефлексивная дуополия Курно. Рассмотрим следующий пример.

<u>Пример 11. «Дуополия Курно».</u> Пусть имеются два агента с целевыми функциями следующего вида:

$$(5)\quad f_i(Q, x_1, x_2) = \underbrace{\underbrace{(Q - x_1 - x_2)}_{\text{цена}}\, x_i}_{\text{доход}} - \underbrace{\frac{x_i^2}{2}}_{\text{затраты}},$$

где $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$; $Q \in \{1, 2\}$. Содержательно, x_i – это объем выпуска продукции i-ым агентом, Q – суммарный внешний спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж[44] – выручка от продаж («доход»), а второе слагаемое – как затраты на производство. Отметим, что цена убывает с ростом суммарного объема производства. Рассматриваемая модель является частным случаем *дуополии Курно*, названной так в честь французского экономиста А. Курно.

Выигрыш каждого из агентов зависит не только от его собственного *действия* (выбираемого объема выпуска), но и от действия оппонента (другого агента), то есть имеет место игра между ними. Каждый агент перед тем, как выбрать свое действие, должен спрогнозировать выбор оппонента. Как ему это сделать?

Пусть агенты осуществляют выбор своих действий однократно, одновременно и независимо. Целевая функция первого игрока $f_1(Q, x_1, x_2) = (Q - x_1 - x_2)\, x_1 - \dfrac{x_1^2}{2}$ зависит от переменной x_1 (эта функция – парабола, ветвями вниз) и параметров Q и x_2. Найдем зависимость точки максимума (абсциссы вершины параболы) от этих параметров: $x_1^*(Q, x_2) = (Q - x_2) / 3$. Зависимость $x_1^*(Q, x_2)$ называется *наилучшим ответом* первого игрока (агента) на действия второго. Аналогично находим $x_2^*(Q, x_1) = (Q - x_1) / 3$ – наилучший ответ второго игрока на действия первого.

Логично предположить, что игроки в рамках гипотезы рационального поведения (см. выше) выберут такие действия,

---

[44] *Считается, что цена пропорциональна неудовлетворенному спросу. Коэффициент пропорциональности, «переводящий» спрос в цену, для простоты выбран равным единице.*

что одно является наилучшим ответом на другое и наоборот. То есть исходом игры (*равновесием Нэша* – таким набором действий, одностороннее отклонение от которого не выгодно ни одному из игроков) является решение системы уравнений

(6) $x_1^*(Q, x_2^*) = (Q - x_2^*) / 3, \; x_2^*(Q, x_1^*) = (Q - x_1^*) / 3.$

Каждое из двух уравнений (6) представляет собой прямую на плоскости (x_1^*, x_2^*) – см. Рис. 11. Точка их пересечения (точка N (x_1^N, x_2^N) на Рис. 11) – равновесие Нэша – имеет координаты (Q / 4, Q / 4), то есть равновесные объемы выпуска зависят от спроса и растут с его увеличением.

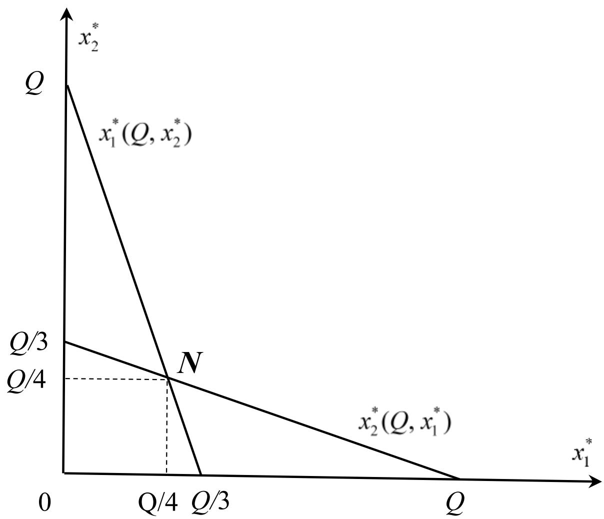


Рис. 11. Решение системы уравнений (6)

Обсудим, какой информированностью должны обладать агенты (что они должны знать) для того, чтобы повторить наши рассуждения и вычислить равновесие Нэша. Первый агент должен знать целевые функции обоих агентов и значение спроса (существенные параметры игры). Кроме того, он должен быть уверен, что и второй агент это знает. Но этого мало! Первый агент должен предполагать, что второй агент знает, что он это знает, что он знает, что второй агент это знает и так далее до бесконечности! Аналогично и второй агент. Ситуация, когда все представления, представления о представлениях и т.д. до бесконечности совпадают называется общим знанием. Более корректно, термин «*общее знание*» (Common Knowledge) обозначает факт, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) о нем известно всем агентам;
2) всем агентам известно условие 1;
3) всем агентам известно условие 2 и т.д. до бесконечности.

! **Для реализации равновесия Нэша все существенные параметры игры должны быть общим знанием.**

А что произойдет, если общее знание отсутствует? Обобщение равновесия Нэша на случай отсутствия общего знания называется *информационным равновесием*. Рассмотрим пример, введя в рассматриваемую модель дуополии Курно центр, который осуществляет информационное управление, воздействуя на представления агентов о размере спроса и на из представления о представлениях друг друга.

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Центр и два агента
Структура ОС	Двухуровневая (см. Рис. 12).
Управление	Информированность агентов.
Действие агента	Объем выпуска.
Цель центра	Максимизировать суммарный объем выпускаемой агентами продукции.
Цель агента	Максимизировать целевую функцию (5).
Информированность	Целевые функции агентов являются общим знанием. Каждый агент имеет свои представления об объеме спроса, а также о представлениях о нем другого агента. Центр видит выбранное агентом действие.
Порядок функционирования	Центр выбирает информированность агентов. Агенты выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо.

Пусть спрос может принимать только два значения. Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($Q = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($Q = 2$) – оптимистом. В условиях общего знания, если спрос низкий, то равновесные действия равны 1/4, а суммарный объем выпуска равен 1/2; если спрос высокий, то равновесные действия равны 1/2, а суммарный объем выпуска равен 1. Значит, влияя на представления агентов о спросе, можно изменять их равновесные действия – осуществлять информационное управление. Но влиять можно не только на представления агентов, но и на их представления о представлениях друг друга, представления о представлениях о представлениях и т.д. Эти представления целенаправленно может формировать центр в рамках организационной структуры, представленной на Рис. 12.

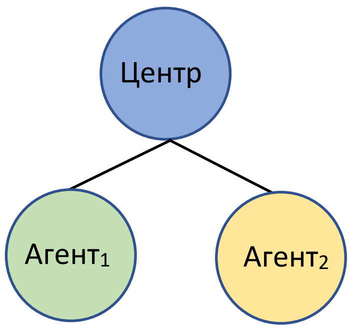


Рис. 12. Двухуровневая организационная структура с двумя агентами

Соответствующее влияние называется *рефлексивным управлением*. Приведем пример. Рассмотрим два варианта.

<u>Вариант 1.</u> Пусть первый агент оптимист, а второй – пессимист, причем оба одинаково информированы. Граф рефлексивной игры изображен на Рис. 13.

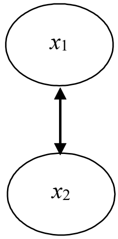


Рис. 13. Граф рефлексивной игры в Варианте 1

Для нахождения информационного равновесия надо записать соответствующие аналоги выражений (6), то есть решить следующую систему двух уравнений:

$x_1^*(Q, x_2^*) = (2 - x_2^*) / 3,$

$x_2^*(Q, x_1^*) = (1 - x_1^*) / 3.$

Действия агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^I = 5/8, x_2^I = 1/8$. Суммарный объем выпуска равен 3/4 (больше, чем в равновесии Нэша при любом спросе).

Вариант 2. Пусть первый агент оптимист, а второй – пессимист, который считает обоих агентов одинаково информированными пессимистами[45]. Первый агент адекватно информирован о втором агенте. Здесь имеют место три агента – два реальных и один *фантомный агент* с номером 21, соответствующий представлениям второго агента о первом. Граф рефлексивной игры изображен на Рис. 14.

[45] *Наверное, убедить агента, что его оппонент считает спрос тем или иным, проще, чем убедить его же, что сам спрос тот или иной.*

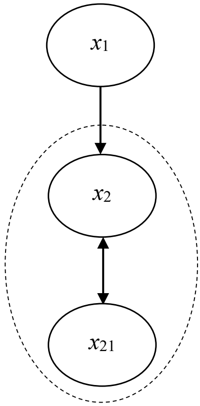


Рис. 14. Граф рефлексивной игры в Варианте 2

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему трех уравнений типа (6)[46]:

$$x_1^*(Q, x_2^*) = (2 - x_2^*) / 3,$$

$$x_2^*(Q, x_{21}^*) = (1 - x_{21}^*) / 3,$$

$$x_{21}^*(Q, x_2^*) = (1 - x_2^*) / 3.$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^I = 7/12, x_2^I = 1/8$. Суммарный объем выпуска равен 17/24 (меньше, чем в варианте 1).

! То есть, **нетривиальная взаимная информированность агентов приводит к изменению как индивидуальных действий, так и суммарного объема выпуска по сравнению с ситуацией общего знания**! Значит, изменяя взаимную информированность агентов, то есть, **осуществляя информационное** (точнее, в данном случае – рефлексивное) **управление, можно изменять выбираемые ими в равновесии действия**.

[46] *Второй агент играет с фантомным агентом (их игра на Рис. 14 выделена пунктирным эллипсом), первый агент знает об этом и ищет наилучший ответ на действие второго, которое он может предсказать.*

? Подберите самостоятельно взаимную информированность агентов, приводящую к максимизации суммарного объема выпуска в соответствующем информационном равновесии игры агентов. •

Пример 12. «Команда». В менеджменте, в управлении проектами и в других разделах прикладной теории управления большое внимание уделяется командной деятельности персонала организации. Под ***командой*** понимается коллектив[47], способный достигать цели автономно и согласованно, при минимальных управляющих воздействиях. Примерами являются: сыгранная спортивная команда, опытная строительная бригада или операционная бригада в больнице, давно и успешно решающий типовые задачи коллектив и др.

Существенными в приведенном определении команды являются два аспекта. Первый – достижение цели, то есть конечный результат совместной деятельности является для команды объединяющим фактором. Второй аспект – автономность и согласованность деятельности – означает, что каждый из членов команды демонстрирует поведение, требуемое в данных условиях (то есть позволяющее достичь поставленной цели) – то поведение, которого от него ожидают другие члены команды.

Пусть команда состоит из двух агентов, выбирающих действия из единичного отрезка. При выборе действия $x_i \in [0; 1]$ агент i несет затраты $c_i(x_i) = (x_i)^2 / 2\, r_i$ (где $r_i > 0$ – параметр

[47] ***Коллектив*** *– объединение людей, осуществляющих совместную деятельность и обладающих общими интересами.*

агента, например, его квалификация, с ростом которой затраты убывают).

Агенты должны выполнить единичный объем работ, то есть сумма их действий должна быть не меньше единицы: $x_1 + x_2 \geq 1$, за что каждый из них получит вознаграждение, гарантированно компенсирующее его затраты (см. раздел 3). В противном случае (при $x_1 + x_2 < 1$) вознаграждение равно нулю.

Выполнять лишнюю работу агентам не имеет смысла, поэтому их задача – обеспечить выполнение равенства

(7) $x_1 + x_2 = 1$.

Как же агентам распределить объем работ между собой?

> Один пашет,
> а семеро руками машут.

Наверное, с точки зрения центра логично, что они будут стремиться минимизировать суммарные затраты, то есть решать задачу выбора действий $(x_1; x_2)$, доставляющих минимум сумме их затрат при условии (7):

(8) $(x_1)^2 / 2\, r_1 + (x_2)^2 / 2\, r_2 \to \min\limits_{x_1 + x_2 = 1}$.

Решать задачи типа (8) – минимизации функции двух переменных – в рамках школьной программы мы не умеем. Но можно воспользоваться условием (7), выразив из него x_2: $x_2 = 1 - x_1$, и подставив в (8). В результате получим более простую задачу – минимизации функции одной переменной:

(9) $(x_1)^2 / 2r_1 + (1 - x_1)^2 / 2r_2 \to \min\limits_{x_1 \in [0;\,1]}$.

Приводя левую часть выражения (9) к общему знаменателю, получим:

(10) $(r_1 + r_2)\,(x_1)^2 - 2\, r_1\, x_1 + r_1 \to \min\limits_{x_1 \in [0;\,1]}$.

В левой части выражения (10) записано уравнение параболы ветвями вверх. Минимальное значение, которое мы и ищем, достигается в вершине параболы, то есть при $x_1 = \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}$.

Из условия (7) находим $x_2 = \dfrac{r_2}{r_1 + r_2}$. Значит решение задачи (8) задается системой уравнений

$$
(11)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r_1}{r_1 + r_2}, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 = \dfrac{r_2}{r_1 + r_2}. \end{cases}
$$

То есть, в рассматриваемом примере **оптимальным с точки зрения минимизации суммарных затрат является распределение между агентами объема работ пропорционально их квалификации**.

Что должны знать агенты для того, чтобы самостоятельно (автономно, в отсутствие центра) найти решение задачи (8) минимизации суммарных затрат? Ответ простой – функции затрат и квалификации агентов должны быть среди них общим знанием.

> Собором
> и черта поборем.

! Таким образом, для **автономной деятельности команды достаточно, чтобы существенные параметры ее членов были среди них общим знанием**.

Является ли требование наличия общего знания обязательным? Нет. Приведем пример эффективной и автономной команды, в которой общее знание отсутствует.

Пусть в условиях предыдущего примера каждый агент знает достоверно свою квалификацию, но может ошибаться в оценке квалификации оппонента (другого агента). Обозначим через r_{12} представления первого агента о квалификации второго, а через r_{21} – представления второго о квалификации первого. Возможно, что $r_{12} \neq r_2$ и/или $r_{21} \neq r_1$.

Действия агентов, согласованные с их взаимными представлениями о квалификации друг друга, должны удовлетворять следующей системе уравнений (сравните с (11)):

$$
(12)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r_{21}}{r_{21}+r_2}, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 = \dfrac{r_{12}}{r_1 + r_{12}}. \end{cases}
$$

Система уравнений (12) с четырьмя неизвестными r_{12}, r_{21}, x_1 и x_2 имеет бесконечное количество решений: например, выражая все неизвестные через параметр $x_1 \in (0; 1)$, получим следующее семейство решений: $r_{12} = r_1 (1/x_1 - 1)$, $r_{21} = r_2\, x_1/(1 - x_1)$, $x_2 = 1 - x_1$.

Итак, все пары $(x_1; x_2)$, удовлетворяющие (12), являются *информационными равновесиями* игры агентов.

! Информационное равновесие является *стабильным*, если все агенты наблюдают те действия оппонентов, которые и ожидали пронаблюдать [12]. В случае стабильного информационного равновесия ожидания агентов совпадают с реальностью, и они не имеют оснований для пересмотра своих представлений друг о друге.

В силу условий (12), в рассматриваемом примере стабильными являются информационные равновесия, удовлетворяющие условию:

(13) $r_{12}\, r_{21} = r_1\, r_2$.

Значит, члены команды могут иметь неправильные представления о квалификациях друг друга, но, если эти представления удовлетворяют условию (13), то информационное равновесие их игры стабильно. Очевидно, частным случаем выполнения условия (13) является ситуация, когда представления агентов друг о друге соответствуют истине: $r_{12} = r_2$ и $r_{21} = r_1$.

Теперь имеется все необходимое для того, чтобы корректно определить, что следует понимать под слаженной командой.

! *Слаженной командой* является множество агентов, выборы которых согласованы с иерархией их взаимных представлений друг о друге. •

Многочисленные модели рефлексивного управления можно найти в монографии [12].

5.2. Информационное управление в сетевых структурах[48]

С кем поведешься, от того и наберешься.

Термин «*социальная сеть*» был введён в 1954 году социологом Джоном Барнсом, но массовое распространение (не только среди ученых-социологов) получил с начала 2000-х годов с развитием соответствующих Интернет-технологий. При моделировании социальных сетей, взаимного влияния их членов, динамики их информированности и (или) мнений возникает необходимость учета факторов (эффектов), имеющих место в реальных социальных сетях. Например, могут иметь место следующие эффекты и свойства, обусловленные характеристиками и потребностями агентов (оказывающих влияние и подвергающихся влиянию), характером их взаимодействия, а также свойствами самой социальной сети:

– наличие собственных *мнений* агентов; изменение мнений под *влиянием* других членов социальной сети;

– различная значимость мнений (влиятельности, *доверия*) одних агентов для других агентов;

– различная степень подверженности агентов влиянию (конформизм, устойчивость мнений);

– существование *косвенного влияния* в цепочке социальных контактов; существование «*лидеров мнений*» (агентов с максимальным влиянием) и т.д.

Общая схема информационного управления показана на Рис. 15. Агенты в сети влияют друг на друга, и их мнения по различным вопросам меняются в результате этого взаимного влияния. Имея модель информационного влияния, можно ставить и решать задачу *информационного управления* – какими должны быть информационные воздействия (с точки зрения

---

[48] *Подраздел написан д.ф.-м.н. А.Г. Чхартишвили.*

управляющего органа - центра), чтобы добиться определенного состояния сети (набора мнений агентов).

Рассмотрим одну из сравнительно простых моделей изменения мнений в сети в результате социального влияния (обычно ее связывают с именем специалиста по математической статистике Морриса Де Гроота и его статьей, опубликованной в 1974 году, хотя модель была разработана еще в 1950-е годы – см. обзор и ссылки в [16]).

Обозначим через величину $a_{ij} \geq 0$ степень доверия i-го агента j-му агенту. Здесь и далее мы будем говорить как о влиянии, так и о доверии, и считать, что эти два понятия являются противоположными в следующем смысле: выражение «степень доверия i-го агента j-му равна a_{ij}» тождественно по смыслу выражению «степень влияния j-го агента на i-го равна a_{ij}».

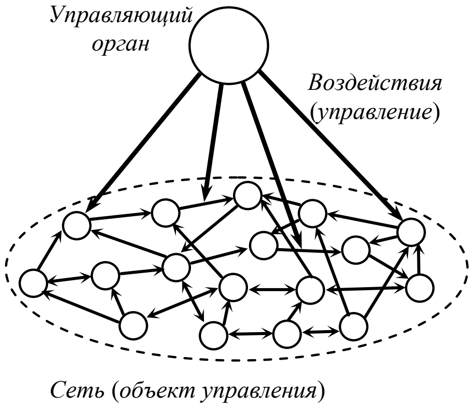


Рис. 15. Управление сетью

Доверие в социальной сети можно наглядно изображать в виде стрелок с весами, соединяющих вершины. Например, стрелка от i-го агента к j-му с весом a_{ij} (см. Рис. 16) означает соответствующую степень доверия.

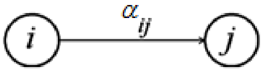


Рис. 16. Прямое (*непосредственное*) *доверие*

Будем считать выполненным условие нормировки: «суммарное доверие» агента равно единице. Отметим, что агент может доверять и самому себе, чему соответствует $a_{ii} > 0$.

Если i-й агент доверяет j-му, а j-й доверяет k-му (см. Рис. 17), то это означает следующее: k-й агент *косвенно влияет* на i-го.

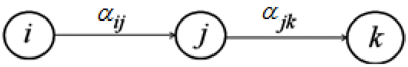


Рис. 17. Косвенное доверие (*влияние*)

Пример 13. «Информационное влияние и управление в социальной сети». Далее модель будем рассматривать на примере социальной сети, состоящей из четырех агентов, которых будем обозначать номерами от 1 до 4 – см. Рис. 18. Агенты на рисунке обозначены кругами, доверие обозначено стрелками, а «степени доверия» – числами у стрелок. Например, стрелка от агента 1 к агенту 2 помечена числом 0,3, которое означает степень доверия агента 1 агенту 2. Отсутствие стрелки между узлами означает, что соответствующие агенты не взаимодействуют (возможно, даже не знают о существовании друг друга). Замкнутая стрелка при вершине (*петля*) обозначает влияние агента на самого себя; число при петле отражает относительную устойчивость его мнения.

Пусть у каждого агента в начальный момент времени $t = 0$ имеется мнение по некоторому вопросу, и эти мнения отражают вещественные числа: x_1^0 для агента 1, x_2^0 для агента 2 и т.д.

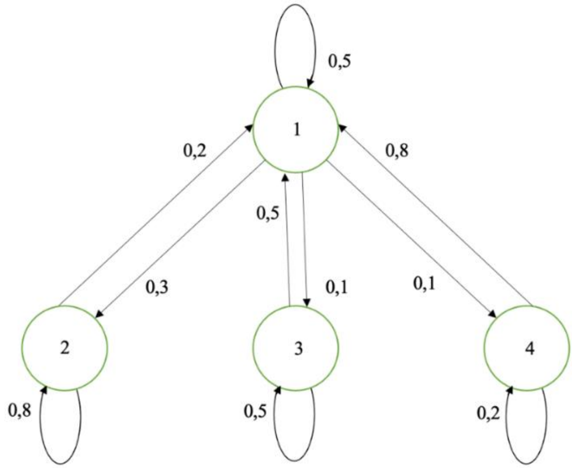


Рис. 18. Взаимное доверие и влияние в социальной сети

Агенты в социальной сети взаимодействуют, обмениваясь мнениями. Этот обмен приводит к тому, что мнение каждого агента меняется в следующие моменты времени ($t = 1, 2, \ldots$) в соответствии с мнениями агентов, которым данный агент доверяет. Будем считать это изменение линейным, то есть положим, что мнение x_i^t агента i в момент времени t является взвешенной суммой мнений агентов, которым он доверяет, в момент $(t-1)$, при этом весами являются степени доверия (приведенные на Рис. 18). Тогда в момент $t = 1$ мнения агентов $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1$ будут такими:

(14) $x_1^1 = 0{,}5\, x_1^0 + 0{,}3\, x_2^0 + 0{,}1\, x_3^0 + 0{,}1\, x_4^0;$

$x_2^1 = 0{,}2\, x_1^0 + 0{,}8\, x_2^0;$

$x_3^1 = 0{,}5\, x_1^0 + 0{,}5\, x_3^0;$

$x_4^1 = 0{,}8\, x_1^0 + 0{,}2\, x_4^0$

(отметим, что, в силу условия нормировки, сумма весов в каждой строке равна 1).

В последующие моменты времени ($t = 1, 2, \ldots$) мнения агентов меняются в соответствии с более общими формулами той же структуры:

(15) $x_1^t = 0{,}5\, x_1^{t-1} + 0{,}3\, x_2^{t-1} + 0{,}1\, x_3^{t-1} + 0{,}1\, x_4^{t-1};$

$x_2^t = 0{,}2\, x_1^{t-1} + 0{,}8\, x_2^{t-1}$;
$x_3^t = 0{,}5\, x_1^{t-1} + 0{,}5\, x_3^{t-1}$;
$x_4^t = 0{,}8\, x_1^{t-1} + 0{,}2\, x_4^{t-1}$.

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Центр и четыре агента
Структура ОС	Двухуровневая с сетью на нижнем уровне (см. Рис. 15).
Управление	Начальная информированность агентов.
Действие агента	«Выбор» мнения (см. выражения (14) и (15)).
Цель центра	Изменить среднее мнение в сети.
Цель агента	Отсутствует.
Информированность	Структура сети и процедура динамики мнений агентов являются общим знанием. Центр наблюдает мнения агентов.
Порядок функционирования	Центр выбирает начальную информированность агентов. Агенты многократно последовательно изменяют свои мнения в соответствии с процедурой (14).

Зададимся вопросом: если информационное взаимодействие агентов будет осуществляться достаточно долго, то что произойдет с их мнениями?

! Оказывается, что при больших значениях времени *t* мнения агентов *стабилизируются* (то есть почти перестают изменяться), притом становятся одинаковыми (!) – как принято говорить, агенты придут к *консенсусу*. Условие достижения консенсуса в сети можно неформально сформулировать так: из любого узла можно дойти до любого другого, переходя по стрелкам доверия, при этом некоторые агенты хотя бы чуть-чуть доверяют себе.

В сети на Рис. 18 это условие выполняется, и итоговые совпадающие мнения агентов будут равны следующей комбинации начальных мнений (коэффициенты вычислены приближенно, оставлено три знака после запятой):

$$0{,}354\, x_1^0 + 0{,}531\, x_2^0 + 0{,}071\, x_3^0 + 0{,}044\, x_4^0.$$

Полученные коэффициенты можно интерпретировать как относительную влиятельность агентов. На первый взгляд на Рис. 18 может показаться, что наибольшим влиянием обладает агент 1, но нет: самым влиятельным оказался агент 2. Если начальное мнение агента 2 изменится (увеличится или уменьшится) на 1000, то итоговое консенсусное мнение в сети изменится на 531. Аналогичное изменение начального мнения любого другого агента приведет к меньшему изменению итогового мнения в сети.

Представим теперь, что некий управляющий орган - центр - стремится сделать число, выражающее среднее мнение в сети, как можно больше (или, наоборот, как можно меньше), и при этом может изменить начальное мнение любого (но только одного) агента на фиксированную величину. Мнение какого из агентов ему следует изменить? Из предыдущего ясно, что центру следует изменить начальное мнение агента 2, поскольку это изменение окажет на сеть наибольшее влияние. •

6. Манипулирование информацией

Не всё говори, что знаешь, да не всё делай, что умеешь.

Двум часто ссорящимся братьям папа принёс торт. Он знал, что если предложит одному разрезать и выбрать себе кусок, то ссоры не избежит. Тот, кто режет, сделает свой кусок больше, а второй начнёт кричать: «Нечестно!». Папа установил новое правило: «Один режет торт на два куска. Второй первым выбирает себе один кусок». Что произошло? Тот, кто режет, понимает: если он сделает один кусок больше, второй тут же его себе заберёт. Поэтому он постарается разрезать торт идеально пополам. Описанная ситуация называется «*задачей Даунса* о дележе пирога» (названной так в честь рассмотревшего ее американского экономиста Э. Даунса, см. [14]). В ней предложен механизм, при котором манипулировать бесполезно, то есть правильно разработанные правила (механизмы) могут сделать так, что людям становится выгодно говорить правду и быть честными. Как же разрабатывать такие механизмы?

! Зачастую центр принимает решения в условиях неполной информированности на основе сообщений агентов. Последние могут воспользоваться возможностью своего влияния на эти решения, сообщая такую информацию, чтобы центр принял более выгодные именно для них решения. Подобное проявление активности называется *манипулированием* – сообщением недостоверной информации.

Можно ли придумать такие механизмы управления – процедуры принятия решений центром, при использовании которых агентам выгодно говорить правду? Оказывается, да. В настоящем разделе рассматриваются задачи анализа манипулируемости различных механизмов управления ОС, и для некоторых из них приводятся примеры *неманипулируемых механизмов*.

6.1. Механизмы распределения ресурсов и затрат

Всем сестрам по серьгам.

Распределение ресурса. Рассмотрим постановку задачи распределения ресурса в двухуровневой организационной системе, состоящей из центра и двух агентов – см. Рис. 12. Пусть в распоряжении центра имеется однородный произвольно делимый ресурс в количестве R. Примерами являются финансовые средства, материальные блага (как в примере про торт) и оборудование, права на доступ к информации или средствам ее обработки и т.п.

! Стандартная постановка задачи распределения ресурса подразумевает нахождение такого его распределения между агентами, которое максимизировало бы некоторый критерий эффективности[49], например, суммарную эффективность его использования агентами.

Если эффективность использования ресурса агентами не известна центру, то он вынужден использовать сообщения агентов, например, о требуемых им количествах. Понятно, что если имеется дефицит ресурса, то возникает *проблема манипулируемости*: агенты могут сообщать центру недостоверную информацию, стремясь получить оптимальное для себя его количество.

Обозначим через r_i – наилучшее для i-го агента количество ресурса (его целевая функция убывает по мере удаления x_i от r_i), где x_i – выделяемое ему количество (i = 1, 2).

---

[49] *Выбор критерия эффективности, а иногда и единиц измерения, существенен. Так, например, если план по гвоздям считать в килограммах, то завод будет выпускать тонны огромных гвоздей, никому не нужных, но удобных в производстве.*

Решение о количестве выделяемого ресурса принимается центром на основании заявок агентов s_1 и s_2, где s_i – сообщаемая i-м агентом заявка на ресурс.

Пример 14. «Механизм пропорционального распределения ресурса». Пусть центр использует следующий *механизм распределения ресурса*:

$$(16)\quad x_i = \min\{s_i; \frac{s_i}{s_1 + s_2} R\},\ i = 1, 2.$$

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Центр и два агента
Структура ОС	Двухуровневая (см. Рис. 12).
Управление	Механизм распределения ресурса (16).
Действие агента	Сообщение центру о требуемом количестве ресурса.
Цель центра	Обеспечение достоверности сообщаемой агентами информации.
Цель агента	Получить от центра ресурс в количестве максимально близком к требуемому.
Информированность	Цели участников и допустимые действия агентов, а также механизм распределения ресурса являются общим знанием. Каждый агент знает требуемое ему количество ресурса. Центр знает заявки агентов. Агенты знают получаемое ими количество ресурса
Порядок функционирования	Центр сообщает агентам механизм распределения ресурса. Агенты однократно, одновременно и независимо сообщают центру заявки на ресурс. Центр выделяет агентам ресурс в соответствии с механизмом его распределения и заявками агентов.

Такой принцип распределения называется *принципом пропорционального распределения* – ресурс распределяется пропорционально заявкам агентов, но не более, чем в запрашиваемом объеме. Отметим, что количество ресурса, получаемое каждым агентом, зависит от его собственной заявки и от заявки другого агента, то есть имеет место *игра* между ними. Будем искать *равновесие Нэша* их игры, то есть такой набор сообщений, одностороннее отклонение от которого не выгодно ни одному агенту.

Предположим, что заявки агентов ограничены - нельзя попросить больше имеющегося количества ресурса: $0 \le s_i \le R = 1$, $i = 1, 2$, то есть в крайних вариантах своей заявки агент может отказаться от ресурса (сообщив $s_i = 0$) или запросить весь ресурс (сообщив $s_i = R$). Для простоты будем считать, что $r_1 \le r_2$ (агентов всегда можно перенумеровать так, чтобы это неравенство выполнялось, а результат не изменился, так как механизм (16) симметричен относительно перестановок агентов; обладающие этим свойством механизмы называются ***анонимными***).

Рассмотрим, какие заявки будут сообщать агенты в зависимости от требуемого им количества ресурса.

Если $r_1 + r_2 \le R$, то проблем не возникает – равновесием является $s_1^* = r_1$, $s_2^* = r_2$ (это, действительно, равновесие, так как каждый из агентов получает оптимальное для него количество ресурса: $x_1^* = r_1$, $x_2^* = r_2$, и не имеет мотивации изменять свою заявку).

Что делать центру, если имеется *дефицит ресурса*, то есть если $r_1 + r_2 > R$?

Возможны следующие два варианта.

1. Пусть $r_1 > R / 2$, $r_2 > R / 2$. В этом случае равновесные заявки равны: $s_1^* = s_2^* = R$. Равновесие понимается в смысле Нэша (то есть такой точки, одностороннее отклонение от которой не выгодно ни одному из агентов).

Действительно, сообщить $s_1 > R$ первый агент не может. Сообщая $s_1 < R$, первый агент получит строго меньшее количество ресурса (при условии, что второй агент не изменяет свою заявку: $s_2 = s_2^* = R$), то есть, сокращая свой запрос в одиночку, он уменьшит (не увеличит) значение своей целевой функции.

Аналогичные рассуждения можно привести и про второго агента% ему отклоняться в-одиночку тоже не выгодно.

В этом случае $x_1^* = x_2^* = R / 2$, то есть ресурс будет поделен поровну между агентами.

2. Пусть $r_1 \leq R / 2$, $r_2 > R / 2$. В этом случае равновесная заявка s_2^*, очевидно, равна R, а $s_1^* = R\, r_1 / (1 - r_1)$, то есть такова, чтобы первый агент получил оптимальное для него количество ресурса. Подставляя заявки в (16), получаем: $x_1^* = r_1$, $x_2^* = R - r_1$. Первому агенту отклоняться от s_1^* не выгодно, так как он получает оптимальное для себя количество ресурса, а второй агент может только уменьшить свою заявку, тем самым уменьшив и получаемое количество ресурса, что ему тоже не выгодно.

Обратим внимание, что механизм пропорционального распределения ресурса (16) является *манипулируемым* – равновесные заявки агентов не совпадают с их истинными потребностями. Можно ли избавиться от этого манипулирования? Оказывается – да! Рассмотрим следующий механизм.

Предположим, что агенты сообщают центру непосредственно оценки $\tilde{r}_i \geq 0$ оптимальных для них количеств ресурса r_i. Получив оценки $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ центр распределяет ресурс следующим образом:

1) если $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 \leq R$, то $x_1^* = \tilde{r}_1$, $x_2^* = \tilde{r}_2$;

2) если $\tilde{r}_1 > R / 2$ и $\tilde{r}_2 > R / 2$, то $x_1^* = x_2^* = R / 2$;

3) если у i-го агента $\tilde{r}_i \leq R / 2$, а $\tilde{r}_j > R / 2$, $j \neq i$, $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 > R$, то $x_1^* = \tilde{r}_1$, $x_2^* = R - \tilde{r}_1$.

Проверим теперь, что механизм 1)-3) является *неманипулируемым*, то есть величины заявок $\tilde{r}_i \equiv r_i$, $i = 1, 2$, соответствуют равновесию Нэша. Рассмотрим следующие случаи.

1. Если $r_1 + r_2 \leq R$, то $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$, то есть каждый агент получает оптимальное для себя количество ресурса, и искажение информации ему ничего не дает.

2. Если у обоих агентов $r_i > R / 2$, то, сообщая $\tilde{r}_i \equiv r_i$, они получат ровно по половине ресурса. Распределение изменится только если $\tilde{r}_i < R / 2$, в этом случае $x_i^* < R / 2$ – то есть выигрыш i-го агента уменьшится, а значит такое отклонение ему невыгодно.

3. Если $r_i \leq R / 2$, $r_j > R / 2$, то i-му агенту отклонение невыгодно, так как он получает оптимальное для себя количество ресурса r_i. Для j-го агента ($j \neq i$), который в этой ситуации получает меньше ресурса, чем ему необходимо, отклонение также невыгодно, так как если он сообщит $\tilde{r}_j < r_j$, то получит строго меньшее количество ресурса, чем ранее.

Обратим внимание, что получаемые каждым агентом в равновесии количества ресурса в механизмах (16) и 1)-3) одинаковы (!), то есть механизмы *эквивалентны*, но в последнем агентам выгодно сообщать центру достоверную информацию! •

Сформулируем теперь результат в общем виде. Опишем *механизм последовательного распределения ресурса* для произвольного числа агентов:

1) Агенты упорядочиваются по возрастанию заявок;

2) Всем агентам выделяется ресурс в минимальном из запрошенных количестве. Если ресурса на это не хватает, то он делится между агентами поровну и процедура заканчивается;

3) Агенты, получившие ресурс в запрошенном ими количестве, исключаются из рассмотрения; из заявок остальных вычитаются полученные ими на предыдущем шаге объемы ресурса; из количества ресурса, подлежащего распределению, вычитается его количество, выделенное агентам на шаге 2;

4) Переход к шагу 2.

Этот механизм является неманипулируемым [11]! Оказывается, что **любой анонимный механизм распределения ресурса эквивалентен механизму**

последовательного распределения ресурса. Не правда ли, красивый результат!

Распределение затрат. Выше рассматривались механизмы распределения ресурса, в которых агенты являлись потребителями этого ресурса. Задача, стоявшая перед центром, заключалась в поиске механизма, удовлетворяющего тем или иным свойствам: оптимальность (в смысле максимальной эффективности), неманипулируемость и т. д. «Противоположной», в некотором смысле, к задаче распределения ресурса является *задача распределения затрат*.

Предположим, что агенты заинтересованы (причем каждый – в той или иной степени) в производстве (покупке) некоторого *общественного блага*. В качестве общественного блага может выступать новая технология, производственное оборудование, эксперт, информация и т. д. Смысл термина «общественное» заключается в том, что пользоваться этим благом может каждый из агентов.[50] Примерами общественных благ также являются: новая дорога (или линия электропередач) в дачном кооперативе; консьерж в подъезде многоквартирного дома или охранник на входе в офисный центр и т.д.

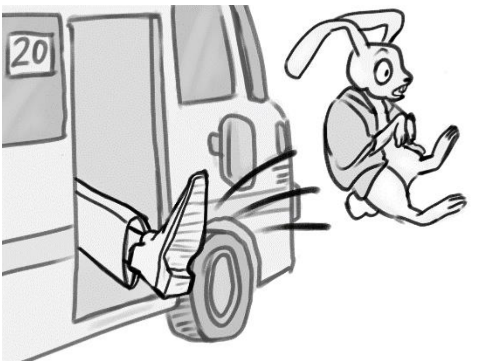
[50] *Более корректно,* ***общественное благо*** *(с точки зрения экономики) – это благо неделимое (его нельзя разделить на несколько частей и потреблять каждую часть отдельно, а можно либо потреблять целиком, либо нет), неисключаемое (то есть нельзя запретить какому-либо агенту его использовать, нельзя преградить к нему доступ) и неконкурентное в потреблении (то есть потребление блага каким-либо агентом не мешает другим агентам в то же самое время его потреблять и не ограничивает их возможностей для потребления этого блага).*

Стоимость (цена) этого блага фиксирована, следовательно, для того чтобы произвести его (купить), агентам необходимо «скинуться» и наслаждаться потреблением этого блага (предполагается, что от потребления каждый агент получает определенный «доход»). Вопрос заключается в том, сколько должен заплатить каждый из агентов или, другими словами, как распределить затраты между агентами.

Дорого, да мило, дешево, да гнило.

Если центр знает «степень удовлетворения» каждого из агентов от пользования общественным благом, то можно предлагать различные принципы распределения затрат – поровну, пропорционально потребности в потреблении, степени удовлетворенности и т. д. Какой из этих принципов является наиболее «справедливым» – отдельный вопрос. Но, как правило, потребности и полезности агентов известны только им самим. А если затраты агента зависят от его сообщений (которые невозможно или достаточно трудно проверить), то он, очевидно, постарается внести поменьше и «прокатиться» за счет других (так называемая задача о безбилетном пассажире – *free rider problem*). Следовательно, как и в механизмах распределения ресурса, в механизмах распределения затрат возникает проблема манипулируемости.

Любишь кататься, люби и саночки возить.



? Приведите примеры эффекта «безбилетника» из Вашей жизни.

Анализ задачи распределения затрат проведем на примере. Пусть имеются два города (агента), разделенные рекой. Они обращаются в фирму, специализирующуюся на строительстве мостов. Фирма объявляет, что готова построить мост за C единиц (положим $C = 1$). «Доходы» городов от использования моста равны $H_1 = 0{,}4$ и $H_2 = 1{,}2$ соответственно. Понятно, что строительство моста (мост – общественное благо) выгодно для городов, так как $H_1 + H_2 > C$. Как же следует поделить затраты между ними, то есть сколько должен заплатить первый город – C_1, а сколько второй – C_2 ($C_1 + C_2 = C$)? Рассмотрим некоторые возможные варианты.

1. *Принцип равного распределения.* Положим $C_1 = C_2 = C/2$. Если $H_1 > C/2$ и $H_2 > C/2$, то есть если значения целевых функций $f_i = H_i - C_i,\ i = 1,\ 2$, неотрицательны, то этот вариант является допустимым (в нашем примере это не так).

! **Принцип равного распределения** («уравниловка») **является неманипулируемым механизмом принятия решений** (у агентов ничего не спрашивают).

Более того, **очень во многих случаях он является единственным неманипулируемым механизмом**.

Однако не всегда принцип равного распределения является эффективным и «справедливым», так как если априори известно, что $H_1 \neq H_2$, то есть доходы от потребления не равны, то, наверное, будет неправильно заставлять агентов платить поровну.

2. *Принцип пропорционального распределения.* Примем следующий принцип – «кому общественное благо нужнее, пусть тот больше и платит», то есть разделим затраты пропорционально доходу: $C_i = \frac{s_i}{S} C$, $i = 1, 2$, где $S = s_1 + s_2$, а s_i – сообщаемая центру i-м агентом оценка собственного дохода H_i. Проанализируем механизм пропорционального распределения затрат. Очевидно, должно выполняться $s_1 + s_2 \geq C$, так как если $s_1 + s_2 < C$, то строительство моста невыгодно (суммарный доход меньше затрат на строительство). Для того чтобы целевые функции были неотрицательны, потребуем: $C_1 \leq H_1$, $C_2 \leq H_2$. Перечисленные неравенства задают допустимую область заявок (s_1, s_2) агентов.

Понятно, что оба агента будут стремиться снизить заявки. Равновесием Нэша при этом будет множество пар заявок (s_1^*, s_2^*), представляющих собой отрезок: $s_1^* + s_2^* = C,\ s_1^* \le H_1,\ s_2^* \le H_2$. Легко видеть, что **сообщение достоверной информации в механизме пропорционального распределения затрат не является равновесием Нэша**. Но зато любое равновесие Нэша в данном случае эффективно по Парето!

В силу множественности и Парето-эффективности равновесий Нэша, если агенты знают истинные доходы друг друга, то имеет место «**борьба за первый ход**». Например, первый агент сообщает $s_1 = 0$ (при этом $C_1 = 0$), перекладывая все затраты на второго: второй агент, зная $s_1 = 0$, вынужден объявить $s_2 = 1$ (при этом $C_2 = 1$).

3. *Принцип равных прибылей*. Рассмотрим следующий механизм:

$$C_1 = \frac{C}{2} + \frac{(s_1 - s_2)}{2};\ C_2 = \frac{C}{2} + \frac{(s_2 - s_1)}{2}.$$

Множество равновесий Нэша в этом случае то же, что и в принципе пропорционального распределения. И этот механизм также манипулируем.

Приведенные выше три принципа распределения затрат легко обобщаются на случай любого конечного числа агентов и, естественно, не исчерпывают все возможные варианты – на сегодняшний день известны и используются несколько десятков различных принципов. В большинстве из них вопрос о манипулируемости остается открытым.

? Предложите самостоятельно неманипулируемый механизм последовательного распределения затрат (по аналогии с описанным выше неманипулируемым анонимным механизмом последовательного распределения ресурса).

6.2. Механизмы активной экспертизы

На вкус и цвет товарища нет.

Многообразие целей и задач, решаемых руководителем организации, большое число подчиненных, их возможности и способности, требования и условия, предъявляемые окружающей средой – все это требует от центра владения большим количеством информации, необходимой для принятия эффективных управленческих решений. Но возможности центра ограничены, и он не всегда может сам непосредственно получить всю требуемую информацию. Поэтому возникает необходимость получения информации от остальных участников ОС, из внешних структур («окружающей среды») и других возможных источников. В управлении организационными системами важную роль играют *механизмы экспертизы*, то есть механизмы получения и обработки информации от *экспертов* – специалистов в конкретных областях.

Рассмотрим одно из свойств процедур экспертного оценивания, а именно возможность манипулирования - искажения информации агентами (экспертами).

Представим себе следующую ситуацию. Центр хочет получить информацию, например, о производственных возможностях коллектива агентов. Самим агентам, естественно, их возможности известны, и они могут выступать в роли экспертов. Предположим, что центр устраивает опрос агентов и на основании их информации принимает управленческое решение. Так как принимаемое центром решение непосредственно затрагивает интересы агентов (а принимается оно на основе полученной от них же информации), то, скорее всего, каждый агент сообщит такую информацию, которая приведет к принятию наиболее выгодного для него решения.

! То есть эксперты могут искажать информацию (манипулировать данными) в соответствии с собственными интересами. Такое их поведение называется активным, отсюда название этого раздела – *активная экспертиза*. Для центра желательно построить такой механизм (процедуру), при котором все эксперты говорили бы правду.

Возможно ли это? В ряде случаев оказывается, что возможно.

Пример 15. «Механизм усреднения». Пусть имеются три эксперта, оценивающих какой-либо объект по скалярной шкале от нуля до единицы (объектом может быть кандидат на некоторый пост, вариант финансирования и т. д.). Обозначим, как и в механизме распределения ресурса, через r_i *истинное мнение* i-го эксперта, который сообщает *экспертную оценку* $s_i \in [0; 1]$, где «0» – минимальная, а «1» – максимальная допустимая оценка. *Итоговая оценка*

$$(17)\ x = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3}$$

вычисляется центром как среднее арифметическое сообщенных ему оценок агентов (механизм экспертизы в данном случае – вычисление среднего арифметического). Если эксперты заинтересованы в результатах экспертизы, то они не обязательно будут сообщать свое истинное мнение, то есть механизм может быть подвержен манипулированию ($s_i \neq r_i$).

Формализуем интересы эксперта. Предположим, что каждый эксперт в силу своих профессиональных или/и конъюнктурных интересов стремится к тому, чтобы результат экспертизы был максимально близок к его истинному мнению. В настоящем примере ОС имеет вид:

> Всяк кулик своё болото хвалит.

Состав ОС	Центр (организатор экспертизы) и три агента (эксперта)
Структура ОС	Двухуровневая (см. Рис. 12).
Управление	Механизм экспертизы (17).
Действие агента	Сообщение центру экспертной оценки.
Цель центра	Обеспечение достоверности сообщаемой агентами информации.
Цель агента	Обеспечить итоговую оценку как можно более близкую к своему истинному мнению.

Информированность	Цели участников и допустимые действия агентов, а также механизм экспертизы являются общим знанием. Каждый агент знает свое истинное мнение. Центр знает оценки агентов. Агенты наблюдают итоговую оценку.
Порядок функционирования	Центр сообщает агентам механизм экспертизы. Агенты однократно, одновременно и независимо сообщают центру свои оценки. Центр вычисляет итоговую оценку в соответствии с механизмом экспертизы и заявками агентов.

Приведем пример манипулирования. Пусть $r_1 = 0{,}4$; $r_2 = 0{,}5$; $r_3 = 0{,}6$. Если $s_i \equiv r_i, i = \overline{1,3}$, то есть если все эксперты сообщают правду, то $x = 0{,}5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным мнением второго эксперта, и он удовлетворен этим результатом полностью. Остальные же эксперты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0{,}5$, а $r_3 > 0{,}5$. Следовательно, они попытаются сообщить другие s_1 и s_3. Пусть эксперты сообщают $s_1^* = 0, s_2^* = 0{,}5, s_3^* = 1$. Получим ту же итоговую оценку. Опять первый и третий эксперты не удовлетворены. Посмотрим, могут ли они поодиночке изменить ситуацию. Если $s_1 \neq s_1^*$, а $s_2 = s_2^*, s_3 = s_3^*$, то $\frac{s_1 + s_2^* + s_3^*}{3} > x^*$, следовательно, первый эксперт, изменяя свою оценку, еще более удаляет итоговую оценку от собственного истинного мнения. То же можно сказать и о третьем эксперте: $\frac{s_1^* + s_2^* + s_3}{3} < x^*$, если $s_3 \neq s_3^*$. То есть, отклоняясь поодиночке, ни один из экспертов не может приблизить итоговую оценку к своему субъективному мнению. Значит набор сообщений (0; 0,5; 1) – *равновесие Нэша*.

Определим следующие числа (результаты экспертизы при различном числе минимальных и максимальных оценок):

$$w_1 = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3};\ w_2 = \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3}.$$

При этом $w_2 \le r_2 \le w_1$ ($\frac{1}{3} \le \frac{1}{2} \le \frac{2}{3}$). То есть на отрезке [1/3; 2/3] эксперт номер два является «*диктатором* с ограниченными полномочиями» (его полномочия ограничены границами этого отрезка) – может изменять итоговую оценку в этом диапазоне.

Приведем для рассматриваемого примера механизм, в котором всем экспертам выгодно сообщить достоверную информацию, и итоговая оценка в котором будет та же, что и в исходном механизме экспертизы.

Центр может попросить экспертов сообщить истинные значения $r = \{r_i\}_{i \in N}$ и использовать их следующим образом: упорядочить экспертов в порядке возрастания сообщений; если существует число p равное 2 или 3, такое, что $w_{p-1} \ge r_{p-1}$; $w_p \le r_p$ (легко показать, что существует единственный эксперт с таким номером p), то

(18) $x^* = \min (w_{p-1}; r_p)$.

В нашем примере $p = 2$ и $\frac{1}{2} = \min (\frac{2}{3}; \frac{1}{2})$.

При этом, очевидно, $s_i^* = 0,\ i < q,\ s_i^* = 1,\ i > q$. Итак, по сообщению r центр, воспользовавшись числами w_1 и w_2, может найти равновесие Нэша s^*.

Проверим, могут ли эксперты, сообщая $\tilde{r}_i \ne r_i$ «улучшить» (со своей точки зрения) итоговую оценку. Очевидно, что второму эксперту изменять свое сообщение не выгодно, так как $x^*(r_1, r_2, r_3) \equiv r_2$. Пусть первый эксперт сообщает $\tilde{r}_1 < r_1$. Ситуация не изменится – по-прежнему «диктатором» является второй эксперт. Если $\tilde{r}_1 > r_1$, то первый эксперт может изменить итоговую оценку, только став «диктатором», то есть сообщив $\tilde{r}_1 > r_2$. Тогда центр определит $x^*(\tilde{r}_1, r_2, r_3) = \tilde{r}_1$, но при этом $|r_1 - \tilde{r}_1| > |r_1 - r_2|$, то есть первый эксперт еще более удалил исходную оценку от r_1. Значит, изменяя сообщение $\tilde{r}_1$, первый эксперт не может приблизить итоговую оценку к r_1. Аналогично можно показать, что невыгодно манипулировать и третьему эксперту.

! Таким образом, в механизме экспертизы (18) сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для экспертов, причем итоговая оценка та же, что и в исходном механизме (17), то есть эти механизмы эквивалентны. Этот результат позволяет говорить, что если центр заинтересован в получении от экспертов достоверной информации, то он может этого добиться, используя неманипулируемый механизм (18). •

Приведем результат в общем виде (см. [11]). Опишем так называемый *медианный механизм экспертизы*. Пусть имеются n экспертов и анонимный механизм $L(s_1, s_2, ..., s_n)$ вычисления итоговой оценки. Введем $n + 1$ *фантомных экспертов* с «мнениями»:

$$w_k = L(\underbrace{0, ..., 0}_{k}, \underbrace{1, ..., 1}_{n-k}),\ k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Итоговая оценка вычисляется как *медиана*[51] мнений всех - реальных и фантомных - экспертов. Для того, чтобы найти медиану в рассматриваемом случае, объединим множества $\{s_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{w_k\}_{k=0}^{n}$, упорядочим $2n+1$ элементов объединения по возрастанию; медианой будет $n + 1$-ый элемент последовательности.

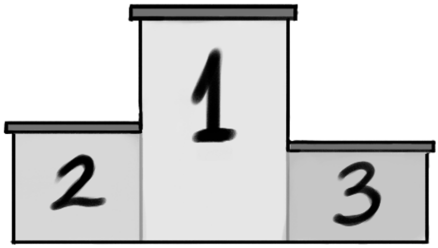
! **Для любого анонимного механизма экспертизы существует эквивалентный медианный механизм, который неманипулируем**. Звучит как чудо, но это так!

[51] Напомним, что **медианой** множества чисел называется число, которое является «серединой», то есть половина чисел больше медианы, а половина меньше.

6.3. Аукционы и конкурсы

Хорошо смеется тот, кто смеется последним.

Общая идея любого конкурса заключается в следующем: претенденты упорядочиваются на основании имеющейся о них информации (как объективной, так и сообщаемой самими претендентами), затем победителем (или победителями) объявляется претендент, занявший первое место (или, соответственно, несколько первых мест – в зависимости от условий конкурса). Возникающая при этом проблема заключается в том, что участники конкурса могут искажать сообщаемую информацию, то есть манипулировать ею с целью войти в число победителей.



В качестве примера рассмотрим так называемый *аукцион второй цены* по продаже некоторого предмета (товара, услуги, прав и т.п.), который проводится по следующим правилам:

- покупатели подают заявки (денежные суммы, которые они готовы заплатить) в закрытых конвертах;
- заявки подаются один раз;
- участники упорядочиваются по убыванию поданных заявок;
- побеждает участник, подавший максимальную заявку;
- победитель платит цену, равную «следующей» заявке (второй по величине).

Пусть имеются три агента – участники аукциона. Обозначим через $r_1 > r_2 > r_3$ их полезности от обладания предметом торга, через s_i – сообщаемую центру (организатору аукциона) заявку (сумму, которую i-ый агент готов заплатить за приобретение продаваемого предмета), $i = 1, 2, 3$.

Для победителя – агента, сообщившего максимальную заявку – значение функции выигрыша равно разности между ценностью для него предмета и суммой, которую он платит по условиям аукциона (максимумом из двух остальных заявок). Значение функций выигрыша остальных агентов равно нулю.

! Обоснуем, что **аукцион второй цены является неманипулируемым**, то есть сообщение достоверной информации является равновесием Нэша игры агентов (этот результат справедлив не только для трех, но и для любого количества агентов, больше либо равного двум).

Пусть агенты сообщили достоверную информацию: $s_i = r_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $s_1 > s_2 > s_3$ и победителем становится первый агент (выше мы сразу упорядочили агентов по убыванию для них ценности предмета аукциона).

Рассмотрим первого агента – победителя аукциона. Он платит цену, равную заявке второго агента $s_2 = r_2$, и получает выигрыш $r_1 - r_2 > 0$. Пусть он увеличил свою заявку, сообщив $s_1 > r_1$, тогда результат не изменится – он по-прежнему будет победителем аукциона и получит тот же выигрыш. Пусть он уменьшил заявку, сообщив $s_1 < r_1$. Пока его заявка превышает заявку второго агента, ситуация не изменяется. А вот при $s_1 < r_2$ первый агент перестает быть победителем (которым становится второй агент) и получает нулевой выигрыш. То есть, от изменения заявки выигрыш первого агента либо не изменяется, либо становится меньше. Значит, ему манипулировать (сообщать $s_1 \neq r_1$) не выгодно.

Рассмотрим второго агента. Сообщая достоверную информацию ($s_2 = r_2$), он получает нулевой выигрыш. Ситуация не изменится, если он сообщит меньшую заявку: $s_2 < r_2$. Изменить ситуацию второй агент может только став победителем, для чего ему надо сообщить $s_2 > r_1$. Тогда он заплатит цену r_1, и его выигрыш составит $r_2 - r_1 < 0$, то есть уменьшится по сравнению с сообщением правды. Значит, второму агенту манипулировать (сообщать $s_2 \neq r_2$) не выгодно. Аналогичные рассуждения можно привести и про третьего агента.

Значит, в аукционе второй цены сообщение достоверной информации является равновесием Нэша. Подробный и доступный анализ других конкурсных и аукционных процедур можно найти в [14].

6.4. Выборы

Какого царя изберешь, такую жизнь и проживешь.

Проблема манипулирования возникает, в том числе и при организации выборов, что является предметом исследований *теории выбора* [1]. Приведем пример, следуя [2].

Процедуры голосования. Пусть 250 избирателей поделены на группы А, Б, В и Г, численностью, соответственно, в 100, 60, 50 и 40 избирателей, и пусть рассматриваются четыре кандидата: И, П, С, и М.

Упорядочения кандидатов избирателями приведены в следующей таблице (кандидаты упорядочены сверху вниз по убыванию предпочтительности; так, для группы избирателей А наиболее предпочтительным является кандидат И, затем следует кандидат М, затем – П, а кандидат С является для этой группы наименее предпочтительным).

Группа А (100 изб.)	Группа Б (60 изб.)	Группа В (50 изб.)	Группа Г (40 изб.)
И	М	С	П
М	П	М	М
П	С	П	С
С	И	И	И

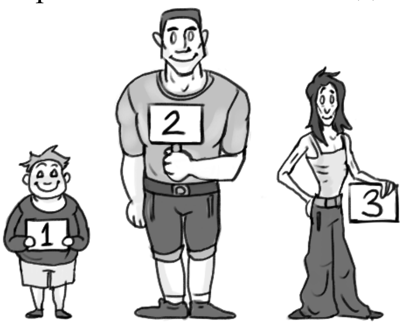
Рассмотрим две *процедуры голосования* (определения победителя).

Процедура относительного большинства – побеждает тот, за кого проголосовали больше избирателей. Считая, что избиратель честно (не манипулируя) голосует за наилучшего для себя кандидата, из таблицы получаем, что кандидат И наберет 100 голосов, М – 60, С – 50, П – 40. В соответствии с процедурой относительного большинства победит кандидат И. Заметим, однако, что среди всех 250 проголосовавших только 100 избирателей считают его кандидатуру наилучшей, а для остальных 150 избирателей И – *наихудший кандидат*.

Из двух зол выбирай меньшее.

? Предложите самостоятельно процедуру определения победителя в рассматриваемом примере.

Процедура Бордá (названная так в честь французского математика Ж. Борда) предписывает для каждой группы избирателей поставить каждому кандидату в соответствие его *ранг*, равный «число кандидатов плюс один минус место кандидата в упорядочении всех кандидатов для данной группы избирателей». Для группы А кандидат И получит ранг 4, М – 3, П – 2, С – 1. Далее эти ранги для каждого кандидата умножаются на число избирателей в группе и суммируются по всем группам.



Так, кандидат И получит 400 баллов в группе А, 60 – в группе Б, 50 в группе В, 40 в группе Г. То есть всего он наберет 550 баллов.

Посчитайте самостоятельно, что кандидат М всего наберет 810 баллов, П – 640 баллов, кандидат С – 500 баллов.

Победителем по Борда является кандидат М, набравший 810 баллов.

Таким образом, в рамках процедуры относительного большинства избран будет кандидат И, а в рамках процедуры Борда – кандидат М.

! Значит **при различных процедурах подсчета голосов победителями могут быть разные кандидаты**. Кроме того, процедура относительного большинства голосов может не отражать преобладающего мнения избирателей: в нашем примере в ней победил кандидат, которого 60 % голосовавших считают наихудшим.

Манипулируемость выборных процедур. Приведем пример, когда манипулирование со стороны избирателей является выгодным для них, то есть приводит к избранию более предпочтительного кандидата по сравнению с честным изъявлением своего мнения.

Вернемся к процедуре относительного большинства. Если по результатам опроса общественного мнения установлено, что кандидаты И и М имеют наибольшую поддержку, то избиратели из группы Г, чей наиболее предпочтительный кандидат П, согласно опросу, не имеет шансов быть избранным, могут во время голосования проголосовать за М (своего второго по предпочтительности кандидата).

Тогда при использовании процедуры «относительное большинство голосов» М будет избран 110 голосами (за него проголосуют группы Б и Г), а кандидат И наберет только 100 голосов (за него проголосует только группа А). Заметим, что М является вторым по предпочтительности для 190 из 250 избирателей.

Возможность манипулирования в этом примере показывает неожиданную опасность публикации результатов опросов общественного мнения – в рассмотренном примере избиратели не примут решение о голосовании за своего второго по предпочтительности кандидата, если они не знают о предпочтениях других избирателей.

! Таким образом, **процедура относительного большинства является манипулируемой** (или, как иногда говорят, неустойчивой к проявлениям агентами стратегического поведения). На сегодняшний день в теории выбора исследованы десятки процедур голосования [1, 2], в том числе с точки зрения их манипулируемости. Ни одна из них до сих пор не признана идеальной.

Более того, в теории выбора известен так называемый *парадокс Эрроу* (названный так в честь лауреата нобелевской премии Кеннета Эрроу), который заключается в следующем. Эрроу сформулировал ряд условий, которым должна удовлетворять избирательная система:

1) *универсальность*: каждый избиратель имеет право упорядочить кандидатов любым образом;

2) *единогласие*: если все избиратели единодушно считают, что кандидат А лучше кандидата Б, то таким же должно быть и коллективное решение;

3) *независимость от посторонних альтернатив*: взаимное расположение в итоговом списке двух кандидатов должно зависеть только от их взаимного расположения в индивидуальных списках - оно не должно зависеть от наличия других кандидатов и от их оценок избирателями.

К. Эрроу доказал, что единственной процедурой, удовлетворяющей этим условиям, является *диктаторская*, то есть процедура, при которой существует агент – диктатор, предпочтения которого определяют исход выборов.

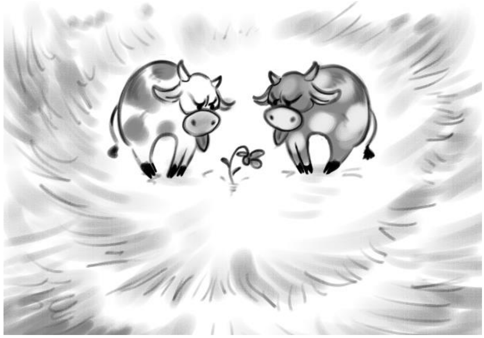
Этот отрицательный результат следующим образом комментируется в [2]:

> «При построении политической системы мы не должны уповать, что кто-то предложит нам лучшие решения. Наоборот, парадокс Эрроу предлагает нам не искать единственное лучшее при всех обстоятельствах решение, а нацеливаться на глубокое понимание того, как различные процедуры в различных структурах демократического общества преобразуют различные индивидуальные мнения в коллективные решения».

7. Игра «Коровы на поле»

И нашим, и вашим.

Хрестоматийной моделью – очень простой, но демонстрирующей множество типовых для организационных систем явлений – является игра «Коровы на поле».



Описание модели. Предположим, что имеется поле «размера»[52] $Q > 0$, на котором могут пастись коровы. Фермер, выпускающий x коров на это поле (предположим, что коров достаточно много, так что можно для простоты считать x непрерывной переменной), получает выигрыш, пропорциональный числу коров и остающемуся от них свободному месту на поле (где коровы могут пастись). Чем меньше остается свободного места, тем меньше на нем растет травы, следовательно, тем меньше коров дадут молока.

То есть целевая функция фермера: $f(x) = (Q - x)\,x$ – парабола ветвями вниз. Стремясь в силу гипотезы рационального поведения максимизировать свою целевую функцию, фермер найдет оптимальное число коров $x^* = Q / 2$, которое обеспечит ему максимально возможный выигрыш в размере $Q^2 / 4$. Запомним, что оптимальное число коров равно половине свободного места на поле.

Пусть теперь добавляется второй фермер, который тоже может выпускать своих коров на это же поле, причем принимают решения о числе коров фермеры однократно, одновременно и независимо (игра в нормальной форме). Целевые функции

[52] *«Размер» поля измеряется в максимальном числе коров, которые на нем могут пастись.*

агентов[53] станут (см. также целевую функцию агентов в примере «Дуополия Курно» раздела 5):

(19) $f_1(x_1, x_2) = (Q - x_1 - x_2)\, x_1,\ f_2(x_1, x_2) = (Q - x_1 - x_2)\, x_2$.

В настоящем примере ОС имеет вид:

Состав ОС	Центр и два агента
Структура ОС	Двухуровневая (см. Рис. 12).
Управление	Управление составом. Управление структурой.
Действие агента	Число коров, выпускаемых на поле.
Цель центра	Максимизировать суммарный выигрыш агентов.
Цель агента	Максимизировать целевую функцию (19).
Информированность	Целевые функции агентов являются общим знанием. Центр видит выбранное агентом действие.
Порядок функционирования	Агенты выбирают свои действия однократно и независимо.

Равновесие Нэша. Найдем равновесие игры фермеров. Для этого запишем наилучший ответ $x_1^*(x_2^*)$ первого фермера на выбор вторым действия (число выпускаемых коров) x_2^*: $x_1^*(x_2^*) = (Q - x_2^*) / 2$. Аналогично, наилучший ответ второго фермера: $x_2^*(x_1^*) = (Q - x_1^*) / 2$. Решая систему из этих двух уравнений, находим *равновесие Нэша*: $x_1^* = Q / 3, x_2^* = Q / 3$, в котором целевые функции каждого фермера равны по $Q^2 / 9$, то есть сумма их целевых функций составит $2\,Q^2 / 9$. Это меньше максимально возможного выигрыша единственного фермера (см. выше). Таким образом, если рассматривать в качестве *критерия эффективности использования поля* сумму выигрышей работающих на нем фермеров, то добавление второго фермера

[53] *Эти целевые функции не ограничиваются только «животноводческой» содержательной интерпретацией: например, выбор агентов может быть объемом производимой и продаваемой на рынке продукции, а величина Q – характеристикой спроса на эту продукцию – см. раздел 5.1.*

привело к тому, что поле стало использоваться менее эффективно.

? Покажите, что с увеличением числа фермеров сумма равновесных значений их целевых функций будет убывать.

Значит в рамках рассматриваемой модели с точки зрения *задачи управления составом* (выбора числа фермеров) **максимальная эффективность использования поля будет достигаться, когда у него имеется один хозяин**.

Точка Парето. Спрашивается, существует ли набор действий двух фермеров, обеспечивающий их суммарный выигрыш, больший, чем в найденном равновесии Нэша? Ответ на этот вопрос положительный: выпуская на поле по $Q / 4$ коров каждый, фермеры получат суммарный выигрыш $Q^2 / 4$ – см. Рис. 11. Это – *точка Парето* (см. определение выше в разделе 2.4), то есть коллективный оптимум.

? Покажите, что суммарный выигрыш в коллективном оптимуме равен этой величине при любом конечном числе фермеров[54].

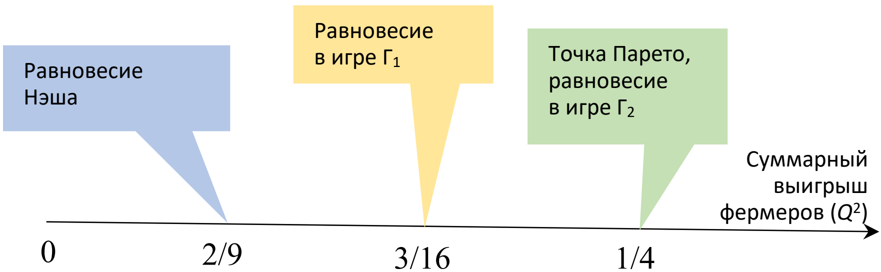


Рис. 19. Равновесия в игре «Коровы на поле»

[54] *Другое дело, что с ростом числа фермеров оптимальное (с точки зрения эффективности использования поля) число коров у каждого из них убывает и в какой-то момент предположение, что число коров - действительное число, станет нарушаться, так как положительное число коров не может быть меньше единицы.*

К сожалению, точка Парето в данном случае (как и в очень многих играх) не является равновесием Нэша, то есть коллективный оптимум неустойчив относительно индивидуальных отклонений: легко проверить, что, находясь в этом оптимуме, любому из фермеров выгодно немного увеличить число своих коров. Можно ли приблизиться к коллективном оптимуму, то есть «сдвинуть» равновесие вправо от точки Нэша на Рис. 179

Можно, если центр, осуществляя *управление структурой* подчиненной ему ОС (переведя ее из одноуровневой – см. Рис. 6 в двухуровневую – см. Рис. 7), разрешит одному из агентов сделать первый ход, тем самым назначив последнего «миницентром». Вся «организационная структура» при этом станет трехуровневой, а соответствующая игра между фермерами - иерархической.

Иерархическая игра, в которой игрок, делающий ход первым, выбирает свое действие, выраженное числом (в нашем случае – числом коров), называется *игрой* Γ_1. Перед выбором своего действия первый фермер должен спрогнозировать реакцию на него второго фермера. Выше мы уже ее нашли: $x_2^*(x_1^*) = (Q - x_1^*) / 2$. Подставляя в целевую функцию первого фермера $f_1(x_1, x_2) = (Q - x_1 - x_2)\, x_1$, получим:

(20) $f_1(x_1, x_2^*(x_1^*)) = (Q - x_1)\, x_1 / 2$.

Максимум этой целевой функции (опять парабола ветвями вниз!) достигается при $x_1^{**} = Q / 2$, следовательно $x_2^{**} = x_2^*(x_1^{**}) = (Q - x_1^{**}) / 2 = Q / 4$. При этом выигрыши фермеров равны соответственно $Q^2 / 8$ и $Q^2 / 16$. В сумме фермеры получат $3\, Q^2 / 16$, то есть эффективность использования поля больше, чем в равновесии Нэша, но меньше, чем в точке Парето (см. Рис. 19).

Можно ли еще приблизиться к точке Парето? Да. Для этого достаточно перейти к иерархической *игре* Γ_2, в которой первый фермер выбирает свое действие в виде «функции» от будущего выбора второго фермера и сообщает ее последнему (см. также выражение, в соответствии с которым размер будущего вознаграждения агента зависит от его действий). Затем второй игрок выбирает число выпускаемых им на поле коров, после чего первый фермер, следуя своим обещаниям, выпускает соответствующее число своих коров.

Пусть действие первого игрока имеет вид:

$$(21)\quad \tilde{x}_1(x_2) = \begin{cases} Q/4, \text{если } x_2 = Q/4, \\ Q - x_2, \text{если } x_2 \neq Q/4. \end{cases}$$

Содержательно, первый игрок предлагает второму: если ты выпустишь $Q/4$ своих коров, то я выпущу столько же своих. В противном случае я полностью займу своими коровам всю оставшуюся часть поля, им мы оба получим в результате нулевые выигрыши. Понятно, что второму игроку выгоднее оказаться в коллективном оптимуме, чем остаться без выигрыша.

! Стратегия первого игрока состоит из двух режимов – **сотрудничество** (поощрение – первая строка в выражениях (4) и (21)) и **наказание** за отказ за сотрудничество (вторая строка в выражениях (4) и (21)). Подобная конструкция (использование *стратегии наказания*) является общей для очень многих теоретико-игровых моделей.

Например, в повторяющихся играх известна *народная теорема*[55], которая гласит, что любую комбинацию действий игроков можно сделать устойчивой, если игроки договорятся о достаточно сильном и длительном наказании отклонившегося от нее.

? Предложите самостоятельно механизм мотивационного управления (поощрения или штрафов) агентами, который реализовывал бы коллективный оптимум.

? Предложите самостоятельно механизм институционального управления агентами (налогообложения или ограничений деятельности – числа

[55] *«Народной теоремой» жаргонно назван массовый результат, приоритетное авторство которого установить затруднительно – он был опубликован почти одновременно в различных близких вариациях и стал своего рода «народным» достоянием в теории игр.*

коров у того или иного фермера, размера поля и т.д.), который реализовывал бы коллективный оптимум.

? Поиграйте в игру «Коровы на поле» с друзьями (см. Приложение), анализируя их поведение и складывающиеся ситуации с точки зрения теории управления.

Заключение

Итак, зачем нужна математика? Действительно, неужели при управлении организациями нельзя обойтись без математики? Ведь на протяжении нескольких тысячелетий человечество создавало огромные империи, реализовывало колоссальные проекты (например, строило пирамиды), порождало устойчивые организации, охватывающие десятки миллионов человек (например, католическая церковь), осуществляло географические экспансии и т.д. Конечно, можно и без математики. Но с математикой получается лучше.

Сможете ли вы получить противоречащие интуиции (а, следовательно, особенно опасные для управленческой практики) результаты типа парадокса Браеса или условий консенсуса в сети, не используя соответствующей математической модели?

? Приведите сами еще примеры таких противоречащих интуиции результатов из изложенных выше.

Сможете ли вы оценить и обосновать, является ли тот или иной механизм принятия управленческих решений оптимальным (не существует механизма, который приводит к лучшим результатам)? Сможете ли вы оценить, является ли тот или иной механизм принятия управленческих решений неманипулируемым? Приведите еще примеры таких свойств из изложенных выше.

Сможете ли вы объективно и убедительно для других количественно проверить истинность и оценить применимость в тех или иных конкретных условиях той или иной традиционной (являющейся текущей «лучшей практикой») процедуры принятия управленческих решений?

Вот вам и ответ!

! Да и понимание того, как можно и нужно управлять людьми, полезно для осознания того, когда, кто и как управляет вами (явно или неявно)!

Значение для практики. Полученные в теории управления организационными системами (ТУОС) теоретические результаты нашли свое применение при создании прикладных моделей, которые, в свою очередь, использовались на практике при разработке или модификации механизмов управления реальными социально-экономическими системами. Области внедрения ТУОС перечислены на Рис. 20 (см. ссылки на книги, описывающие соответствующие результаты и опыт, в [9, 11]).

Рис. 20. Области внедрения ТУОС

Дальнейшее изучение. Для дальнейшего продвижения в освоении ТУОС читателю необходимо освоить математику, как минимум, в объеме двух лет обучения в техническом или экономическом вузе. Также потребуются минимальные познания из таких разделов прикладной математики, как: теории игр [7], теории принятия решений [13] и теории графов [3].

Методологические основания и концептуальные вопросы управления организационными системами описаны в [10].

Книга [9] может рассматриваться как «облегченный» навигатор по ТУОС.

Книги [4] и [6] являются базовыми вузовскими учебниками, включающими, помимо основного содержания, задачи и упражнения, темы для курсовых работ и т.д.

Книга [11] содержит наиболее полное на сегодняшний день изложение ТУОС[56], ориентированное на студентов и аспирантов по научной специальности 2.3.4 «Управление в организационных системах» - см. программу аспирантуры.

Желаю читателю успешно пройти весь этот путь до конца!

[56] *Школьному учителю, изучавшему высшую математику в вузе, который захочет организовать факультатив по введению в ТУОС для своих учеников, в рамках правила «Рассказывать можно только то, про что знаешь в 10 раз больше, чем озвучиваешь», достаточно ознакомиться с книгой [11].*

Литература[57]

1. Айзерман М. А., Алескеров Ф. Т. Выбор вариантов (основы теории). 2-е изд. – М.: Ленанд, 2024. – 240 с.
2. Алескеров Ф. Т., Ортешук П. Выборы. Голосование. Партии. - М.: Академия, 1995. – 208 с.
3. Бурков В. Н., Заложнев А. Ю., Новиков Д. А. Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001. – 124 с.
4. Бурков В. Н., Коргин Н. А., Новиков Д. А. Введение в теорию управления организационными системами: Учебник. – М.: Либроком, 2009. – 264 с.
5. Бурков В. Н. Человек. Управление. Математика. – М.: Просвещение, 1989. – 160 с.
6. Воронин А. А., Губко М. В., Мишин С. П., Новиков Д. А. Математические модели организаций: учебное пособие. - М.: Ленанд, 2008. - 360 с.
7. Губко М. В., Новиков Д. А. Теория игр в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.
8. Засканов В.Г. Экономика (учебник для школ). – Самара: Самарский дом печати, 1996. – 72 с.
9. Механизмы управления. – М.: Ленанд, 2011. – 192 с.
10. Новиков Д. А. Методология управления. – М.: Либроком, 2011. – 128 с.
11. Новиков Д. А. Теория управления организационными системами. 4-е изд. – М.: Ленанд, 2021. – 500 с.
12. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексия и управление: математические модели. 2-е изд., испр. и дополн. – М.: Ленанд, 2021. – 416 с.
13. Петровский А. Б. Теория принятия решений. – М.: Академия, 2009. – 400 с.
14. Савватеев А. В., Филатов А. Ю. Занимательная экономика. Теория экономических механизмов от А до Я. – М.: Издательство АСТ, 2022. - 352 с.
15. Саймон Г. Науки об искусственном. 2-е изд. – М.: Ленанд, 2004. – 144 с.
16. Теория управления (дополнительные главы). – М.: Ленанд, 2019. – 552 с.

[57] *Исходя из уровня математической подготовки, школьникам доступны, к сожалению, лишь книги [2], [5], [8], [14] и [15]. Остальные – для учителей, студентов, аспирантов.*

Приложение:
Интерактивное занятие «Коровы на поле»[58]

В этом разделе приведена методика (в виде инструкции для читателя) проведения интерактивного занятия в форме игры по хрестоматийной модели «Коровы на поле» (см. раздел 7).

В эту игру можно играть вдвоем, втроем и вчетвером. От этого будут немного меняться сами правила игры. Здесь рассмотрена версия игры для двоих. Если игра понравится, то можно познакомиться с ее правилами игры для трех и четырых игроков.

Правила для игры вдвоём. Для игры вдвоем нужны три набора карточек/карт по 12 штук разного типа. Например, подойдет колода карт, из которой возьмите три масти и отложите по 12 карт, или сами изготовьте карточки трех разных цветов.

Каждый из игроков берёт себе один тип карточек, а оставшийся тип карточек выкладывается на стол – все 12 карточек (рубашкой вверх – см. Рис. 21). Это будет игровое «поле» (на котором «пасутся коровы»), которое приносит Вам и другому игроку (Вашему оппоненту) «очки» (выигрыш), которые вы вычисляете следующим образом - количество свободных карточек поля (площадь, на которой могут пастись коровы) умножается на то количество карточек, которое игрок (фермер) выложил (число коров, которых он выпустил пастись на общее поле).

Оба игрока определяют, какое количество карточек каждый из них хочет выложить на стол. И вместе, одновременно, выкладывают эти карточки (см. пример на Рис. 21 – на нем один игрок, используя карты масти «бубны», выложил на поле пять карт, а другой, используя масть «трефы» – три).

[58] *Приложение написано д.т.н. Н.А. Коргиным.*

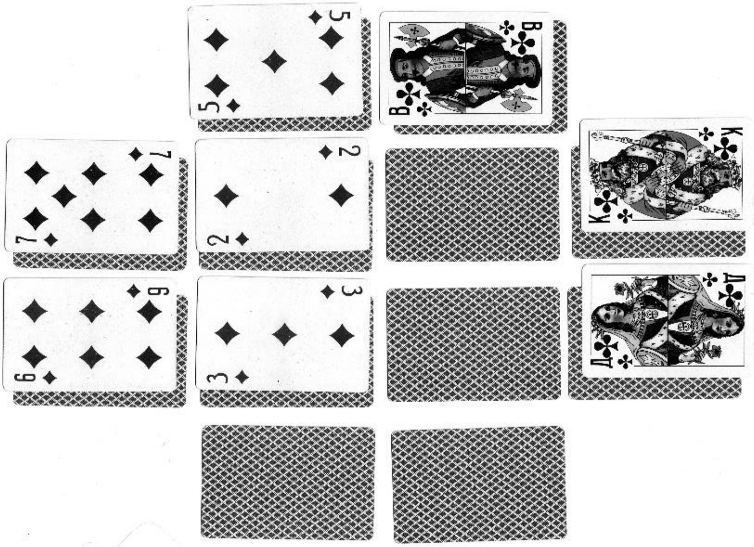


Рис. 21. Играем с помощью игральных карт

Если выложенное всеми игроками количество карточек меньше, чем количество карточек поля, то определяется свободное количество карточек поля - не закрытое карточками – и каждый умножает его на свое количество карточек. Это и есть выигранное Вами число очков в данном розыгрыше игры. Цель игры для каждого из игроков – получить как можно большее значение очков. На Рис. 21 имеется 4 свободные карточки поля, 5 карт масти «бубны» (соответствующий игрок получит выигрыш в $4 \times 5 = 20$ единиц), и 3 карты масти «трефы» (соответствующий игрок получит выигрыш в $4 \times 3 = 12$ очков).

Если же игроки выложили в сумме 12 или более карточек (т.е. больше, чем исходное количество карточек поля), то считается, что оба проигрывают – не получают очков, так как коровам негде пастись.

Давайте исследуем эту игру. Попробуйте проанализировать самостоятельно, каким может быть результат игры для двоих. Для этого попробуйте ответить на следующие вопросы.

Вопрос 1. Сколько карточек Вы хотели бы положить на стол, и сколько карточек Вы ожидаете видеть от второго игрока? С учетом этих двух величин посчитайте, какой выигрыш ожидаете получить Вы.

Если Вы хотите узнать, как на этот и последующие два вопроса предлагает отвечать теория, загляните в разделы 2.1 и 2.4 этой книги.

Вопрос 2. Вычитая из 12 карточек, лежащих на столе, то количество карточек, которые Вы ожидали увидеть от другого игрока, найдите, какое количество карточек, положенных Вами, принесло бы Вам максимальный выигрыш. А если бы другой игрок положил другое количество карточек? Подумайте, какова зависимость числа карточек, которые приносят Вам максимальный выигрыш, от числа свободных карточек поля при условии, что другой игрок уже сделал свой ход (см. также вопрос 11 ниже).

Вопрос 3. Проделайте аналогичные рассуждения с точки зрения Вашего оппонента. Посчитайте, какое количество свободных карточек остается на столе для второго игрока: вычтите из 12 карточек, лежащих на столе, то количество карточек, которое решили положить на стол Вы. Определите, какое количество карточек принесло бы второму игроку максимальный выигрыш – его *наилучший ответ*.

Вопрос 4. Сравните с полученными Вами в результате вычисления количества карточек для себя и для другого игрока, которые принесли бы вам в сумме максимальный выигрыш, те количества карточек, которые Вы изначально предположили, что положите на стол Вы и второй игрок.

Если количества карточек, которые изначально предположили Вы, совпадут с этими значениями, то Вы нашли *равновесие Нэша*, с которым познакомились в теории в разделе 2.4 этой книги.

Если же Вы получили другие значения, попробуйте для себя объяснить, почему Вы предполагали, что Вам нужно положить на стол именно такое количество карточек, и почему другому игроку нужно было бы положить на стол то количество карточек, которое Вы про него предположили.

Вопрос 5. А теперь давайте оценим, какой максимальный выигрыш оба игрока вместе (суммарно) могли бы получить в этой игре. Посчитайте и оцените, какое количество карточек должно лежать на столе для того, чтобы оба игрока вместе получили такой выигрыш?

Вопрос 6. Посчитайте, сколько карточек должен положить каждый из игроков на стол, чтобы весь этот максимальный выигрыш достался Вам?

Вопрос 6а. И второй вариант: сколько карточек должен положить каждый из игроков на стол, чтобы максимальный выигрыш был разделен поровну между Вами и другим игроком?

Результатом ответов на вопросы 5, 6 и 6а будут игровые ситуации, которые являются *оптимальными по Парето* (см. раздел 2.4).

Вопрос 7. А теперь для каждого из этих двух случаев посчитайте, какое количество карточек второму игроку было бы выгодно положить на стол для того, чтобы он получил максимальный выигрыш в ответ на то, сколько карточек положите Вы. Сравните его с тем количеством карточек, которые Вы рассчитали при ответах на вопросы 6 и 6а.

Вопрос 8. Сравните тот выигрыш, что получают в сумме игроки при ответе на вопрос 5, с тем, что они получат в сумме, если положат на стол такое количество карточек, как описано в вопросе 4, и с тем, что они получат, если будут действовать так, как предполагается в вопросе 7. Попробуйте сформулировать самостоятельно, в чем заключается «*трагедия общины*» - типовая важная проблема управления людьми, суть которой заключается в том, что, действуя в своих личных интересах, люди могут проигрывать, если они при этом не координируют свои действия с окружающими. Если Вас заинтересует, где и в каком виде встречается в настоящее время эта проблема, почитайте книгу американской исследовательницы Элинор Остром «Управляя общим». За это исследование ей была присуждена Нобелевская премия по экономике, он стала первой женщиной, получившей ее!

Если Вы хотите узнать, что следует из ответов на вопросы 7 и 8 с точки зрения теории, то загляните в раздел 2.4 и найдите формулировку одной из ключевых задач управления с точки зрения формализации трагедии общины.

Давайте теперь попробуем **поуправлять**. Подумайте над следующими вопросами.

Вопрос 9. Для того, чтобы Вы сумели получить максимальный выигрыш в игре, или же вы вдвоём со вторым игроком в сумме могли бы получить максимальный выигрыш в игре, как мы можем воздействовать на эту игру, меняя её правила?

Начнем с двух простых ситуаций изменения параметров игры.

В первой ситуации в игре останется только один игрок – Вы. Это будет примером того, что управлять игрой можно, воздействуя на *состав игроков* (см. Рис. 4).

Вопрос 10. Сумеете ли Вы в этом случае реализовать возможность получения максимально возможного выигрыша в этой игре?

Вопрос 11. Сколько карточек Вам для этого надо положить на стол?

С точки зрения теории, оставив одного игрока на поле, мы свели задачу к проблеме индивидуального принятия решений, описанную в разделе 2.1.

Вопрос 12. А теперь подумайте, как можно воздействовать на то количество карточек, которые максимально на стол может положить каждый игрок, для того чтобы Вы получили возможность реализовать максимальный выигрыш в этой игре?

Вопрос 12а. Или же второй вариант: как можно воздействовать на то количество карточек, которые максимально на стол может положить каждый игрок, для того чтобы вы вдвоем со вторым игроком сумели реализовать максимальный выигрыш?

Проверьте свое предположение с помощью карточек.

То есть второй вариант управления, это так называемое *институциональное* управление – управление *множеством допустимых действий* (см. Рис. 4), которое рассмотрено в разделе 4 выше.

Давайте попробуем теперь поуправлять *информированностью* (см. Рис. 4) игроков, что является сутью *информационного управления*, которое рассмотрено в разделе 5. Представьте, что у второго игрока есть советчик, которому он очень-очень доверяет, и который может сообщить ему число карточек, которое планируете положить Вы. При этом он необязательно говорит правду, но второй игрок ему верит абсолютно!

Вопрос 13. Подумайте, какую информацию этот советчик должен сообщить Вашему оппоненту о том, сколько карточек Вы хотите положить на стол, для того чтобы он положил такое количество карточек, которое вместе с тем количеством карточек, которые Вы положите на стол, позволит вам двоим получить в сумме максимальный выигрыш?

И второй вариант - чтобы Вы получили максимальный выигрыш в этой игре?

Опять же, попробуйте проверить свои предположения с помощью карточек.

Вопрос 14. Подумайте, увидит ли второй игрок на столе то, что обещал ему его советчик?

Вопрос 15. Подумайте, может ли советчик сказать второму игроку что-то таким образом, чтобы тот принял решение положить на стол столько карточек, сколько нужно Вам и при этом в результате увидел на столе такой результат игры, который не противоречил бы той информации что сообщил ему его советчик?

А теперь давайте попробуем воздействовать на *мотивационную составляющую* в игре - на те выигрыши, которые получаете Вы и второй игрок в зависимости от того, кто из игроков сколько карточек положил на стол. Предположим, что Вы можете у каждого из игроков отбирать часть выигрыша и частично или полностью передавать другим, тем самым прибегать с *несбалансированным* или *сбалансированным* (когда сумма изъятого равна сумме отданного) *побочным платежам* между игроками.

Вопрос 16. Попробуйте придумать правило перераспределения выигрышей (систему стимулирования – см. раздел 3), которое будет воздействовать на ваши итоговые выигрыши таким образом, чтобы весь выигрыш в сумме оставался у вас с другим игроком на руках, но в результате воздействия этого правила и Вам, и другому игроку было бы выгодно класть на стол такое количество карточек, которое приносило бы вам двоим максимальный суммарный выигрыш.

Свой ответ попробуйте проанализировать, как предлагалось выше - проверьте, выгодно ли Вам и другому игроку положить именно то количество карточек на стол, которое Вы от него ожидаете.

То, как можно ответить на этот достаточно непростой вопрос с помощью теории, Вам подскажет раздел 3.

А теперь перейдем к, пожалуй, самому захватывающему формату управления. Мы не будем менять никакие столь ощутимые (можно сказать, «физические» сущности), как количество игроков, количество карточек, которые они могут положить на стол, или то, как перераспределяется их выигрыш. Все это требует, так сказать, воздействий на игру в «реальном мире».

Мы будем воздействовать всего лишь на то, в каком порядке будете ходить Вы и второй игрок, что называют *управлением структурой* игры (или порядком функционирования – см. Рис. 4).

Вопрос 17. Подумайте, что для Вас более выгодно: ходить раньше, чем пойдет второй игрок, или ходить после него. Для каждого из предложенных вариантов попробуйте посчитать, сколько карточек выгодно на стол положить Вам и второму игроку. Проверьте это с помощью имитации, реализации этого варианта. То есть, если Вы хотите ходить первым, подумайте сколько карточек Вам выгодно положить на стол и положите их; посмотрите, каким будет наилучший ответ второго игрока, сколько карточек будет выгодно положить на стол ему. Упражнение это мы уже проделывали (см. вопросы 3 и 7), но теперь в случае, если Вы ходите первым, оппонент будет действительно видеть то количество карточек, которое лежит на столе (*игра* $Г_1$ – см. четвертый подраздел раздела 7). А в случае, если Вы будете ходить последним, а он первым, то Вы тоже будете видеть то количество карточек, которое уже лежит на столе.

Вопрос 18. Удалось ли Вам таким образом добиться ситуации, когда либо Вы получаете максимальный выигрыш, либо вы вдвоем со вторым игроком получаете максимальный суммарный выигрыш? Проведите анализ с карточками.

Давайте продвинемся еще дальше и попробуем к изменению порядка ходов добавить очень важный элемент: возможность сообщать оппоненту о том, как Вы будете действовать. Принципиально в такой ситуации будет Ваше *обязательство* - Вы будете обязаны придерживаться обещанных действий. Это так называемый *контракт*.

Теперь Вам обязательно надо будет ходить последним – после второго игрока. Но, прежде чем второй игрок сделает свой ход, Вы можешь ему объявить о том, какое количество своих карточек Вы положите на стол в ответ на то, какое количество карточек положит на стол он (*игра* $Г_2$ – см. четвертый подраздел раздела 7).

Вопрос 19. Попробуйте сначала самостоятельно проанализировать, что Вам дает такая возможность. Сформулируйте эти условия. Посмотрите, как в зависимости от сформулированных Вами условий выгодно действовать второму игроку. Какое количество карточек он будет класть на стол? При условии, что Ваше обещание обязательно должно быть выполнено!

А теперь сравните то, что у Вас получилось, с той схемой, которую мы сейчас рассмотрим – с так называемой *игрой* $Г_2$ (см. формулу (21) в четвертом подразделе раздела 7).

Вопрос 20. Для начала давайте проанализируем, как сильно Вы можете воздействовать на другого игрока. Насколько Вы его можете «наказать»? Для этого оцените, какое количество карточек Вы можете положить на стол для того, чтобы максимально уменьшить выигрыш второго игрока?

При этом Вы должны смотреть не на свой выигрыш, а именно на то, насколько уменьшается выигрыш второго игрока.

Обратите внимание, что второй игрок, как и прежде, зная о том, как Вы будете действовать, может положить на стол какое-то количество карточек. Соответственно, выбором того, какое количество карточек он положит на стол, он будет пытаться уменьшить свой проигрыш – то наказание, которое Вы пытаетесь сейчас рассчитать и осуществить.

Таким образом, Ваша задача сейчас – оценить, какой максимальный выигрыш может получить второй игрок в ситуации, когда Вы его максимально сильно наказываете. Вы кладете на стол такое количество карточек, которое будет уменьшать его выигрыш максимально; при этом Вы увидите какое количество карточек положит на стол второй игрок, а соответственно второму игроку будет известно то, что если Вы его будете наказывать, то сколько карточек Вы положите на стол в зависимости от того, какое количество карточек положит на стол он.

Оцените в игровом варианте, выкладывая карточки на стол, получается ли у Вас то, что называют *стратегией наказания*. Это то, к чему Вы будете обещать прибегнуть, если второй игрок не будет класть на стол то количество карточек, которые Вы от него хотите видеть.

А теперь давайте перейдем ко второй части твоей стратегии – так называемой *стратегия поощрения* (см. формулу (21) в четвертом подразделе раздела 7).

Вопрос 21. Оцените, при каких игровых ситуациях (выложенных на стол Вами и вторым игроком количествах карточек), которые Вы хотели бы реализовать, выигрыш второго игрока будет не менее, чем тот, который он сумеет себе обеспечить при применении Вами стратегии наказания.

Вопрос 22. Например, если Вы попробуете получить максимальный выигрыш в игре, сколько карточек нужно будет положить на стол второму игроку, и какой выигрыш он получит? Будет ли этот выигрыш меньше, чем тот, который он может себе обеспечить при применении Вами стратегии наказания?

Вопрос 23. Другой вариант - когда вы вдвоем со вторым игроком получаете вместе максимальный выигрыш и делите его поровну. Будет ли эта ситуация для второго игрока лучше, чем то, что он получает при реализации Вами стратегии наказания?

Вопрос 24. Ну и, наконец, оцените свой собственный выигрыш. То, что Вы рассчитывали (что Вы можете получить при использовании стратегии поощрения), сравните с тем, что выходило бы в ситуации, когда Вы будете использовать стратегию наказания второго игрока. Каков будет Ваш выигрыш?

А теперь давайте «соберем» тот самый контракт, комбинируя две полученные стратегии – поощрения и наказания.

В случае, если при использовании стратегии сотрудничества Вы выигрываете больше, чем при стратегии наказания, то в стратегии сотрудничества Вы будешь говорить, что, если второй игрок положит на стол нужное Вам количество карточек, то Вы положите какое-то свое количество карточек, которое будет приносить Вам тот выигрыш, который Вам нужен.

А в случае, если игрок второй положит на стол не то количество карточек, которое хотите Вы, а любое другое, то Вы будете применять стратегию наказания.

Полученные Вами ответы на вопросы 20-24 сравните с тем, что написано в разделе 7, а также с формулами (4) и (21), описывающими стратегию *центра* – именно в этой роли Вам и было предложено оказаться, отвечая на эти пять вопросов. А второму игроку – в роли *агента.*

Итак, **мы попробовали поуправлять всеми основными компонентами теоретико-игровой модели «Коровы на поле»** (см. Рис. 4): составом игроков, их возможными множествами действий, их целевыми функциями, их информированностью, и структурой игры, а именно тем, в каком порядке игроки будут ходить.

Вопрос 25. Посмотрите, в каких из рассмотренных вариантов удалось достичь той цели, о которой мы изначально говорили - что либо Вы, как отдельный игрок, либо два игрока вместе получают максимальный выигрыш.

Если Вам понравилась эта игра, то для того, чтобы было веселей и интересней, а, заодно, и познавательнее, в нее лучше играть втроём или вчетвером и, по сути, против друг друга. Для этого каждому из троих или четверых игроков раздается по одному типу карточек (масти игральных карт), и игра соответственно проходит либо в 3, либо в 4 тура в зависимости от количества игроков.

В каждом туре один из игроков (по очереди) выступает хозяином поля, а остальные принимают свои решения на этом поле. При этом перед началом игры вы собираете банк игры. Для этого можно использовать фишки или же просто записывать на бумаге результаты игры - в том числе, сколько вы «положили очков в банк», какое количество карточек положили игроки и какой результат они получили. Примеры такого листа для записи результатов Вы можете скачать в интернет на страничке, посвященной этой игре – http://mtas.ru/games/ipuker/.

Итак, еще раз уточним, как будут выглядеть правила игры для трех или четырех игроков.

Перед началом каждого тура все игроки, включая хозяина поля, складывают в банк очки. Если вы играете втроём, то складываете по 12 очков. Если вы играете вчетвером, то складываете по 9 очков.

После чего те игроки, которые в данном туре должны ходить одновременно и независимо (то есть все, кроме хозяина поля), принимают решение о том, сколько карточек положить на поле.

Если они хотят обеспечить одновременность своих ходов, то есть чтобы другие игроки не знали о том, сколько карточек они решили положить на поле, они должны передать хозяину поля (игроку, чьи карточки лежат на столе как поле) свои карточки. И только после того, как все игроки, которые пожелали, чтобы их код был неизвестен, хозяин поля или ведущий выкладывает эти карточки на стол.

Подсчет результатов игры проходит по тем же правилам, что и прежде.

После того, как подсчет результатов игры состоялся, игроки, которые выкладывали карточки, забирают из банка свои очки. А все то, что осталось в банке после того, как игроки забрали свои очки, забирает себе ведущий.

Сыграв полную игру – 3 или 4 раунда в зависимости от количества игроков, проведите общий подсчет. Посмотрите, сколько в сумме в банк передавали игроки очков за все туры и сколько забирали из банка очков за все туры игры. Разница между этими двумя величинами и будет результатом игры для каждого из игроков.

Вопрос 26. Возвращаясь к анализу проблем принятия решений реальными людьми попробуйте проанализировать, как часто ведущий игры забирал из банка больше очков, чем он туда клал.

Вопрос 27. Как часто в игре реализовывалось равновесия Нэша?

Вопрос 28. Как часто активно действующие игроки оставляли ведущего без очков вообще?

Вопрос 29. Попробуйте самостоятельно записать теоретико-игровую модель этой игры. А именно, укажите, каково: множество игроков, множество стратегий каждого игрока, их целевые функции и порядок действий игроков. Попробуйте провести анализ этой теоретико-игровой модели по вопросам 1-25.

С примером проведения игры «Коровы на поле» с учениками восьмого класса можно ознакомиться в видео. По этой ссылке можно увидеть видео игры с учениками четвертого класса и впечатления детей от участия в игре.