

# МЕТРИКА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Лазарев А.А., Коренев П.С.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва  
[lazarev@ipu.rssi.ru](mailto:lazarev@ipu.rssi.ru), [pkorenev@rambler.ru](mailto:pkorenev@rambler.ru)

*Аннотация:* Задачи формирования составов и расписания движения грузовых поездов могут быть сформулированы как задачи теории расписаний. Многие из этих задач являются NP-трудными, в связи с чем возникает проблема поиска приближенного решения таких задач. Предлагается метод, основанный на введении метрики для пространства параметров задачи, позволяющий за полиномиальное время находить решение задачи с гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции. Метод подробно рассматривается на примере задачи минимизации суммарного запаздывания. Эффективность метода подтверждается численными экспериментами.

Ключевые слова: метрика, приближенное решение, суммарное запаздывание.

## Введение

Рассматривается следующая проблема формирования составов и графиков движения грузовых поездов. Пусть  $S$  – множество станций, определяющих вершины графа  $G$  железнодорожной сети. Дорога от одной станции до другой разбита семафорами на участки. Дано множество заказов  $N$ . Каждый заказ представляет собой один вагон, для которого известны пункт отправления и пункт назначения. Заказ  $j \in N$  поступает на станцию в момент времени  $r_j$  и должен быть перевезен в пункт назначения не позже директивного срока  $d_j = p_j + \Delta$ , где  $p_j$  – продолжительность обслуживания заказа, которая определяется нормативно,  $\Delta$  – известная константа. В случае невыполнения заказа начисляется штраф  $z_j$ . Каждый заказ характеризуется своей значимостью  $w_j$  и весом (массой)  $v_j$ .

Пусть  $L$  – множество имеющихся в наличии локомотивов, а  $B$  – множество локомотивных бригад. Под составом будем понимать объект, состоящий из трех элементов: вагонов, локомотива и локомотивной бригады. Для функционирования железнодорожной сети необходимо выполнении следующих ограничений.

1. Ограничения по составу. Количество вагонов в составе не должно превышать 71 вагон или быть меньше 30 вагонов. Вес состава ограничен 6000 тоннами.

2. Ограничения по горкам. На горке не может формироваться более некоторого фиксированного числа составов, зависящего от параметров горки.

3. Ограничения по путям. На одном участке (от семафора до семафора) не может находиться более одного состава в одном направлении. Кроме того, грузовой состав может идти по участку только в заданные интервалы времени  $[t_1, t_2], [t_3, t_4], \dots$

4. Ограничения по станциям. На станции  $j \in S$  не может находиться более  $a_j$  составов.

5. Ограничения по локомотивам и локомотивным бригадам. Каждый локомотив  $l$  “приписан” к некоторому подмножеству станций  $G_l$ , причем  $G = \bigcup_l G_l, \bigcap_{i \neq j} G_i = \emptyset$ . Локомотивная

бригада  $b_i$  закреплена за некоторой станцией и может “обслуживать” подграф  $G_i^{b_i}$ .

Необходимо так сформировать составы и графики их движения, чтобы не были нарушены ограничения.

Пусть  $C_j$  – время завершения выполнения  $j$ -го заказа (вагона). Целевая функция может быть выбрана разными способами. Далее приводятся некоторые из них.

1. Минимизация суммарного запаздывания:

$$\min \sum_{j \in N} w_j \max\{0, C_j - d_j\}.$$

2. Минимизация среднего времени нахождения состава в пути:

$$\min \sum_{j \in N} C_j.$$

3. Учет интересов диспетчера:

$$\min \max_{j \in N} \{C_j - d_j\}.$$

Таким образом, задачи формирования составов и графиков движения грузовых поездов могут быть представлены как задачи теории расписаний. Многие из этих задач являются  $NP$ -трудными, в связи с чем возникает необходимость поиска приближенных решений таких задач.

В статье развивается метод приближенного решения задач теории расписаний, основанный на построении метрики задачи представленный в [1] и [2].

Структура статьи следующая. В разделе 1 вводится понятие метрики задачи теории расписаний и описывается метод приближенного решения задач. В разделе 2 предложенный метод подробно рассматривается на примере  $NP$ -трудной задачи минимизации суммарного запаздывания  $1 | r_j | \sum T_j$  [3], [4].

## 1. Схема нахождения приближенного решения

### 1.2. Метрика задачи

Рассмотрим задачу теории расписаний, характеризующуюся набором параметров  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ , к примеру, для задачи минимизации суммарного запаздывания в роли параметров  $\omega_i$  выступают времена поступления заказов  $r_j$  продолжительности обслуживания  $p_j$  и директивные сроки  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , всего  $m = 3n$  параметров. Индивидуальный пример  $A$  задачи полностью характеризуется значениями  $m$  параметров  $\omega \in \Omega$  и потому может быть рассмотрен как точка в  $m$ -мерном пространстве. Значения параметров примера  $A$  будем обозначать  $\omega^A$ . Значения целевой функции примера  $A$  при некотором расписании  $\pi$  будем обозначать через  $F^A(\pi)$ .

**Теорема 1.** Пусть функция  $\rho(A, B)$ , определенная в пространстве параметров  $\Omega$ , при любом расписании  $\pi$  удовлетворяет неравенству

$$(1) \quad |F^A(\pi) - F^B(\pi)| \leq \rho(A, B),$$

тогда

$$(2) \quad F^A(\pi^B) - F^A(\pi^A) \leq 2\rho(A, B),$$

где  $\pi^A$  и  $\pi^B$  – оптимальные расписания примеров  $A$  и  $B$  соответственно.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} F^A(\pi^B) - F^A(\pi^A) &\leq |F^A(\pi^B) - F^B(\pi^B)| + (F^B(\pi^B) - F^B(\pi^A)) + \\ &+ |F^B(\pi^A) - F^A(\pi^A)| \leq 2\rho(A, B) + (F^B(\pi^B) - F^B(\pi^A)) \leq 2\rho(A, B) \end{aligned}$$

□

В ряде случаев функция  $\rho(A, B)$  удовлетворяет аксиомам метрики и может быть рассмотрена как расстояние между примерами  $A$  и  $B$ .

## 1.2. Схема нахождения приближенного решения

Схема нахождения приближенного решения заключается в выполнении следующих двух шагов. На первом шаге параметры заданного примера  $A$  изменяются таким образом, чтобы полученный пример  $B$  принадлежал полиномиально разрешимому классу примеров. На втором шаге для решения примера  $B$  используется известный для данного класса примеров полиномиальный алгоритм, а затем полученное расписание применяется к примеру  $A$ .

Согласно теореме 1 абсолютная погрешность найденного решения не будет превышать удвоенного расстояния  $\rho(A, B)$  между примерами  $A$  и  $B$ . Ясно, что минимальная оценка погрешности будет получена в случае, когда на первом шаге схемы будет найден пример  $B$  минимизирующий значение функции  $\rho(A, B)$ . Таким образом, решение задачи сводится к отысканию для заданного примера  $A$  наиболее близкого примера из заданного полиномиально разрешимого класса.

В следующих разделах предложенный метод будет подробно рассмотрен на примере NP-трудной задачи  $1 | r_j | \sum T_j$ .

## 2. Вариант схемы для задачи минимизации суммарного запаздывания

### 2.1. Метрика для задачи минимизации суммарного запаздывания

Выберем целевую функцию  $F(\pi)$  в виде

$$(3) \quad \min \sum_{j \in N} T_j(\pi) = \min \sum_{j \in N} \max\{0, C_j(\pi) - d_j\},$$

где  $C_j(\pi)$  – момент окончания обслуживания требования  $j$  при расписании  $\pi$ . Для сокращения записи будем опускать  $(\pi)$ , если понятно о каком расписании идет речь.

Расписание  $\pi = (j_1, \dots, j_n)$  называется ранним, если при этом расписании каждое требование  $j_k, k \in N$  начинает обслуживаться в наиболее ранний допустимый момент времени: либо в момент его поступления  $r_{j_k}$ , либо в момент окончания обслуживания предыдущего требования  $C_{j_{k-1}}$ . Очевидно, что оптимальное расписание является ранним. В дальнейшем будут рассматриваться только ранние расписания.

**Лемма 1.** Пусть у примеров  $A$  и  $B$  совпадают времена поступления и продолжительности обслуживания требований:

$$r_j^A = r_j^B = r_j,$$

$$p_j^A = p_j^B = p_j, j \in N.$$

тогда для любого расписания  $\pi$  справедливо неравенство

$$(4) \quad \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| \leq \sum_{j \in N} |d_j^A - d_j^B|.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| &\leq \sum_{j \in N} |\max\{0, C_j - d_j^A\} - \max\{0, C_j - d_j^B\}| \leq \\ &\leq \sum_{j \in N} \max\{0, |d_j^B - d_j^A|\} \leq \sum_{j \in N} |d_j^B - d_j^A|, \end{aligned}$$

где было использовано известное неравенство:

$$|\max\{a, b\} - \max\{c, d\}| \leq \max\{|a - c|, |b - d|\},$$

для любых действительных чисел  $a, b$  и  $c, d$ .

□

**Лемма 2.** Пусть у примеров  $A$  и  $B$  совпадают времена поступления и директивные сроки требований:

$$r_j^A = r_j^B = r_j,$$

$$d_j^A = d_j^B = d_j, j \in N.$$

тогда для любого расписания  $\pi$  справедливо неравенство

$$(5) \quad \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| \leq n \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B|.$$

**Доказательство.**

$$(6) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| &\leq \sum_{j \in N} |\max\{0, C_j^A - d\} - \max\{0, C_j^B - d\}| \leq \\ &\leq \sum_{j \in N} \max\{0, |C_j^A - C_j^B|\} \leq \sum_{j \in N} |C_j^A - C_j^B|. \end{aligned}$$

Для раннего расписания имеем

$$|C_{j_1}^A - C_{j_1}^B| = |r_{j_1} + p_{j_1}^A - r_{j_1} - p_{j_1}^B| = |p_{j_1}^A - p_{j_1}^B| \leq \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B|.$$

Предположим, что для некоторого  $j_k$  выполняется

$$|C_{j_k}^A - C_{j_k}^B| \leq \sum_{i=1}^k |p_{j_i}^A - p_{j_i}^B|,$$

в этом случае

$$\begin{aligned} |C_{j_{k+1}}^A - C_{j_{k+1}}^B| &\leq |\max\{r_{j_{k+1}} + p_{j_{k+1}}^A, C_{j_k}^A + p_{j_{k+1}}^A\} - \max\{r_{j_{k+1}} + p_{j_{k+1}}^B, C_{j_k}^B + p_{j_{k+1}}^B\}| \leq \\ &\leq \max\{|p_{j_{k+1}}^A - p_{j_{k+1}}^B|, |C_{j_k}^A + p_{j_{k+1}}^A - C_{j_k}^B - p_{j_{k+1}}^B|\} \leq \sum_{i=1}^{k+1} |p_{j_i}^A - p_{j_i}^B| \leq \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B|, \end{aligned}$$

тогда из (6) получаем

$$\left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| \leq \sum_{j \in N} |C_j^A - C_j^B| \leq \sum_{k \in N} \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B| = n \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B|.$$

□

**Лемма 3.** Пусть у примеров  $A$  и  $B$  совпадают продолжительности обслуживания и директивные сроки требований:

$$p_j^A = p_j^B = p_j,$$

$$d_j^A = d_j^B = d_j, j \in N.$$

тогда для любого расписания  $\pi$  справедливо неравенство

$$(7) \quad \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| \leq n \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B|.$$

**Доказательство.**

$$(8) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B \right| &\leq \sum_{j \in N} |\max\{0, C_j^A - d\} - \max\{0, C_j^B - d\}| \leq \\ &\leq \sum_{j \in N} \max\{0, |C_j^A - C_j^B|\} \leq \sum_{j \in N} |C_j^A - C_j^B|. \end{aligned}$$

Для раннего расписания имеем

$$|C_{j_1}^A - C_{j_1}^B| = |r_{j_1} + p_{j_1} - r_{j_1}^B - p_{j_1}| = |r_{j_1}^A - r_{j_1}^B| \leq \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B|.$$

Предположим, что для некоторого  $j_k$  выполняется

$$|C_{j_k}^A - C_{j_k}^B| \leq \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B|,$$

в этом случае

$$\begin{aligned} |C_{j_{k+1}}^A - C_{j_{k+1}}^A| &\leq |\max\{r_{j_{k+1}}^A + p_{j_{k+1}}, C_{j_k}^A + p_{j_{k+1}}\} - \max\{r_{j_{k+1}}^B + p_{j_{k+1}}, C_{j_k}^B + p_{j_{k+1}}\}| \leq \\ &\leq \max\{|r_{j_{k+1}}^A - r_{j_{k+1}}^B|, |C_{j_k}^A - C_{j_k}^B|\} \leq \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B|, \end{aligned}$$

тогда из (8) получаем

$$|\sum_{j \in N} T_j^A - \sum_{j \in N} T_j^B| \leq \sum_{j \in N} |C_j^A - C_j^B| \leq \sum_{k \in N} \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B| \leq n \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B|$$

□

**Лемма 4.** Функция

$$(9) \quad \rho(A, B) = n \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B| + n \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B| + \sum_{j \in N} |d_j^A - d_j^B|$$

удовлетворяет свойствам метрики.

**Доказательство.** Функция (9) очевидно является симметричной, неотрицательной и равняется нулю тогда и только тогда, когда  $A = B$ . В силу известных свойств модуля, неравенство треугольника выполняется для каждого из слагаемых функции (9), а значит и для самой функции.

□

**Теорема 2.** Функция (9) при любом расписании  $\pi$  удовлетворяет неравенству

$$(10) \quad |\sum_{j \in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j \in N} T_j^B(\pi)| \leq \rho(A, B).$$

**Доказательство.** Пусть пример  $C$  имеет директивные сроки как у примера  $B$  и одинаковые с примером  $A$  времена поступления и продолжительности обслуживания требований. Пусть далее, пример  $D$  имеет одинаковые с примером  $B$  директивные сроки и времена поступления требований и одинаковые с примером  $A$  продолжительности обслуживания.

Используя леммы 1-3, получим

$$\begin{aligned} |\sum_{j \in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j \in N} T_j^B(\pi)| &\leq |\sum_{j \in N} T_j^A(\pi) - \sum_{j \in N} T_j^C(\pi)| + |\sum_{j \in N} T_j^C(\pi) - \sum_{j \in N} T_j^D(\pi)| + \\ &+ |\sum_{j \in N} T_j^D(\pi) - \sum_{j \in N} T_j^B(\pi)| \leq \sum_{j \in N} |d_j^A - d_j^B| + n \max_{j \in N} |r_j^A - r_j^B| + \\ &+ n \sum_{j \in N} |p_j^A - p_j^B| = \rho(A, B). \end{aligned}$$

□

Согласно теоремам 1 и 2 для функции (9) выполняется

$$(11) \quad \sum_{j \in N} T_j^A(\pi^B) - \sum_{j \in N} T_j^A(\pi^A) \leq 2\rho(A, B),$$

где  $\pi^A$  и  $\pi^B$  – оптимальные расписания примеров  $A$  и  $B$  соответственно.

## 2.2. Сведение к задаче линейного программирования

Рассмотрим случай, когда некоторый полиномиально разрешимый класс примеров определяется системой линейных неравенств вида

$$\mathfrak{Z}R^B + \mathfrak{R}P^B + \mathfrak{N}D^B \leq H,$$

где  $R^B = (r_1^B, \dots, r_n^B)^T$ ,  $P^B = (p_1^B, \dots, p_n^B)^T$ ,  $D^B = (d_1^B, \dots, d_n^B)^T$ ,  $r_j^B \geq 0$ ,  $p_j^B \geq 0$ ,  $j \in N$ ,

$\mathfrak{Z}, \mathfrak{R}, \mathfrak{N}$  – матрицы размера  $m \times n$ ,  $H$  –  $m$ -мерный вектор, верхний индекс  $T$  обозначает транспонирование.

Тогда для отыскания в полиномиально разрешимом классе примера  $B$ , ближайшего к примеру  $A$ , достаточно решить следующую задачу линейного программирования.

$$(12) \quad \min f = n(x^r - y^r) + n \sum_{j \in N} (x_j^p - y_j^p) + \sum_{j \in N} (x_j^d - y_j^d),$$

при условиях

$$\begin{aligned}
& x^r \leq r_j^A - r_j^B \leq y^r, \\
& x_j^p \leq p_j^A - p_j^B \leq y_j^p, \\
(13) \quad & x_j^d \leq d_j^A - d_j^B \leq y_j^d, \\
& r_j^B \geq 0, p_j^B \geq 0, j \in N, \\
& \mathfrak{S}R^B + \mathfrak{R}P^B + \mathfrak{N}D^B \leq H.
\end{aligned}$$

В полученной задаче линейного программирования присутствуют  $7n + 2$  переменных:

$r_j^B, p_j^B, d_j^B, x_j^p, y_j^p, x_j^d, y_j^d, x^r, y^r, j = 1, \dots, n$ . Для её решения существуют полиномиальные алгоритмы, поэтому вся схема нахождения приближенного решения в рассматриваемом случае является полиномиальной.

### 2.3. Численные эксперименты

Для определения эффективности предложенной схемы была проведена серия численных экспериментов. Поиск полиномиально разрешимых примеров проводился в классах  $PR = \{r_j = r, p_j = p, j \in N\}$  и  $PD = \{d_j = d, p_j = p, j \in N\}$ . В первом случае решением является расписание, упорядоченное по неубыванию директивных сроков  $d_j$ , во втором – по неубыванию времен поступления  $r_j$ .

При поиске в классе  $PR$  полиномиально разрешимого примера, ближайшего к заданному примеру  $A$  необходимо найти минимум функции

$$(14) \quad f(r, p) = n \max_{j \in N} |r_j^A - r| + n \sum_{j \in N} |p_j^A - p|.$$

**Лемма 5.** Минимум функции (14) достигается в точке  $(r = \frac{r_{\max}^A + r_{\min}^A}{2}, p \in \{p_1^A, \dots, p_n^A\})$ ,

где  $r_{\max} = \max_{j \in N} r_j^A$  и  $r_{\min} = \min_{j \in N} r_j^A$

**Доказательство.** Зависящее от  $r$  слагаемое функции (14) представимо в виде

$$n \max_{j \in N} |r_j^A - r| = n \max\{r - r_{\min}, r_{\max} - r\} = n \left( \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} + \left| r - \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} \right| \right),$$

и очевидно имеет минимум в точке  $\frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$ . Пусть зависящее от  $p$  слагаемое

$f(p) = n \sum_{j \in N} |p_j^A - p|$  имеет минимум в точке  $p_0$ , тогда либо  $f'(p_0) = 0$ , либо

$p_0 \in \{p_1^A, \dots, p_n^A\}$ . Поскольку  $f(p)$  – кусочно-линейная функция, обращение её производной в нуль означает, что функция является константой на некотором интервале  $[p_k^A, p_{k+1}^A]$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , а значит граничные точки  $p_k^A$  и  $p_{k+1}^A$  также являются точками минимума. □

При поиске в классе  $PD$  полиномиально разрешимого примера, ближайшего к заданному примеру  $A$  необходимо найти минимум функции

$$(15) \quad f(d, p) = n \sum_{j \in N} |p_j^A - p| + \sum_{j \in N} |d_j^A - d|.$$

**Лемма 6.** Минимум функции (15) достигается в точке  $(p \in \{p_1^A, \dots, p_n^A\}, d \in \{d_1^A, \dots, d_n^A\})$ .

**Доказательство.** Лемма доказывается совершенно аналогично лемме 5. □

Эксперименты проводились по следующей схеме. Рассматривались значения  $n = 4, 5, \dots, 10$ , для каждого  $n$  генерировались по 10000 примеров. Параметры примеров генерировались равномерно на интервалах  $[0, 100]$  для  $r_j^A$ ,  $[1, 100]$  для  $p_j^A$  и  $[-100, 100]$  для  $d_j^A$ . К каждому примеру применялась вышеописанная схема для нахождения приближенного решения со значением целевой функции  $F_n$ , затем при помощи алгоритма ветвей-и-границ искалось точное решение с оптимальным значением целевой функции  $F^*$ . Далее вычислялось  $\Delta$  – отношение реальной ошибки схемы  $\delta = F_n - F^*$  к её верхней оценке, определяемой неравенством (11).

$$(16) \quad \Delta = \frac{F_n - F^*}{2\rho(A, B)}$$

По итогам экспериментов строились зависимости плотности распределения ошибки  $\Delta$  для различных  $n$ . Все полученные плотности распределения имеют подобную гауссовскому распределению форму. Типичный вид полученной зависимости показан на рисунке 1. Было обнаружено, что если поиск полиномиально разрешимого примера ведется в классе  $PD$ , то средняя погрешность решения составляет 19% от верхней оценки (11) и не зависит от количества требований  $n$ . Если же поиск проводится в классе  $PR$ , то средняя ошибка  $\Delta$  меняется с ростом  $n$  от 5% до 10%, при этом  $\Delta$  не превосходит 30%. Зависимость средней ошибки  $\Delta$  от  $n$  представлена в таблице 1.

Таблица 1. Зависимость средней ошибки приближенного решения от количества требований

Количество требований $n$	Средняя ошибка приближенного решения, в процентах от максимальной теоретической	
	В случае $PD$	В случае $PR$
4	19%	4,5%
5	19,5%	6,2%
6	19,2%	7,3%
7	19,6%	8,5%
8	19,3%	9,2%
9	19,4%	10%
10	19%	10,5%

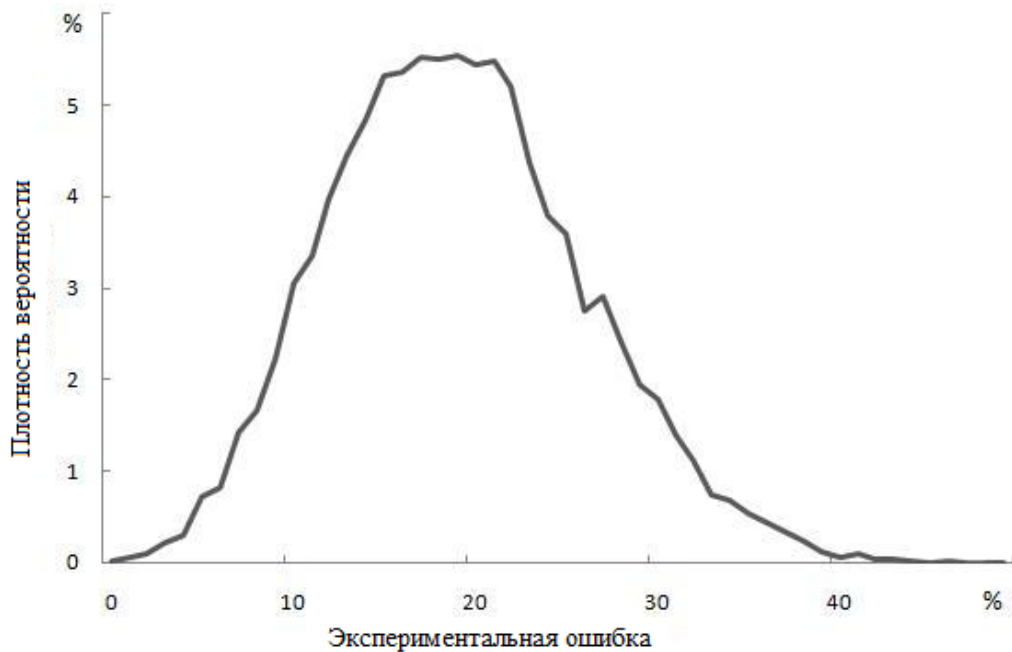


Рис. 1. Плотность распределения реальной ошибки приближенного решения, в процентах от теоретической

### 3. Заключение

В данной статье показано, что проблема формирования составов и графиков движения грузовых поездов сводится к  $NP$ -трудным задачам теории расписаний и предложен метод построения их приближенного решения с гарантированной абсолютной погрешностью. Предложенный метод основан на построении метрики задачи и подробно рассмотрен на примере задачи минимизации суммарного запаздывания.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение эффективных метрик и на оценку эффективности предложенного метода для задач теории расписаний и задач железнодорожного планирования с другими целевыми функциями.

Статья выполнена при финансовой поддержке гранта 11-08-13121-офи-м-2011-РЖД.

### Литература

1. Кварацхелия А.Г., Лазарев А.А. Метрики в задачах теории расписаний. Доклады Академии Наук, 2010. № том 432 номер 6. С. 4
2. Лазарев А.А., Садыков Р.Р., Севастьянов С.В. Схема приближенного решения задачи  $1|r_j, L_{\max}$  // Дискретный анализ и исследование операций, 2006 г. Сер. 2. т. 13, N1.-С. 57-76.
3. Du J., Leung J.Y.-T, Minimizing total tardiness on one machine is NP-hard // Mathematics of Operations Research, Vol. 15. 1990 г., №3, P. 483 – 495.
4. Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnoy Kan A.H.G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Annals of Discrete Mathematics. Vol. 5. 1979 г., № 3, P. 287 – 326.