

Устойчивость за заданное время:
анализ и синтез посредством деформации пространства состояний
и времени.

Орлов Ю.В.

Институт Проблем Управления
27 октября 2025 г.

- Устойчивость за конечное время: мотивация и иллюстративные примеры
- Математический аппарат
- Стабилизация за заданное время (prescribed-time stabilization) линейных систем в канонической форме
 - Синтез регулятора по полным измерениям состояния
 - Синтез наблюдателя
 - Синтез регулятора по выходу
 - Численное интегрирование замкнутой системы управления: неявное интегрирование по Эйлера (implicit Euler discretization)
 - Результаты моделирования
- Обзор литературы
- Заключение

Стабилизация за конечное время: мотивирующие приложения

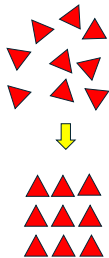


Рис.: Координируемая конфигурация транспортных систем в установленное время.

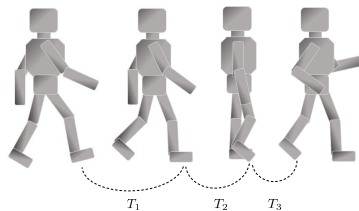
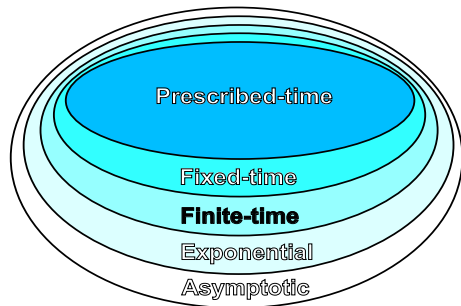


Рис.: Отслеживание эталонной походки шагающего робота между последовательными касаниями поверхности.

Различные типы устойчивости и иллюстративные примеры

Сходимость за конечное время (finite time stability)



Время установления зависит от начальных условий.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x} = -\frac{1}{\alpha} [x]^{1/2}, \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

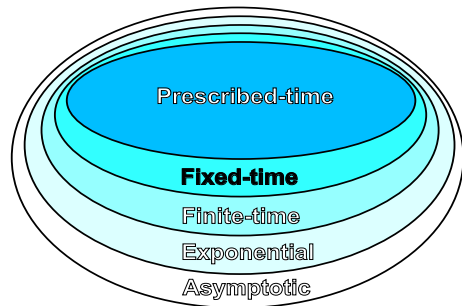
Его решение

$$x(t) = \text{sign}(x^0) \left(\sqrt{|x^0|} - \frac{t}{2\alpha} \right)^2 \quad (2)$$

определяет функцию времени установления (settling time function) в явном виде:

$$\mathcal{T}(x^0) = 2\alpha \sqrt{|x^0|}. \quad (3)$$

Сходимость за фиксированное время (fixed time stability)



Время установления равномерно ограничено вне зависимости от начальных условий.

Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{x} = -[x]^{1/2} - [x]^2, \quad x(0) = x^0, \quad (4)$$

где $[x]^\alpha = |x|^\alpha \operatorname{sign}(x)$, $\alpha \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

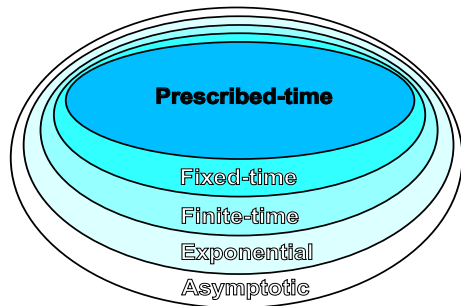
Его решение

$$x(t) = \tan^2 \left(\arctan \left(\sqrt{|x^0|} \right) - \frac{t}{2} \right) \operatorname{sign}(x^0), \quad (5)$$

определяет функцию времени установления в явном виде:

$$\mathcal{T}(x^0) = 2 \arctan \left(\sqrt{|x^0|} \right) \leq \pi. \quad (6)$$

Устойчивость за заданное время (prescribed-time stability)



Пользователь может устанавливать желаемое время сходимости $T > 0$ путем настройки параметров регулятора вне зависимости от начальных условий.

Рассмотрим неавтономное скалярное уравнение

$$\dot{x} = -\alpha \frac{T}{T-t} x, \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0. \quad (7)$$

Его решение

$$x(t) = \left(\frac{T-t}{T} \right)^{\alpha T} x^0, \quad (8)$$

определяет функцию времени установления в явном виде:

$$\mathcal{T}(x^0) = T. \quad (9)$$

Импульсная интерпретация при $T = 0$: $\dot{x} = -\delta(t)x^0$.

Математический аппарат

Базовые методы анализа и синтеза устойчивых систем с заданным временем схождения.

Синтез обратной связи: основополагающая идея в скалярном случае

Следуя Song et al, 2017¹, рассмотрим скалярную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x(0) = x^0 \in \mathbb{R}, \\ u = -k\mu_1(t; T)x, & \mu_1(t; T) = \frac{T}{T-t}, \quad T > 0, \quad kT > 1. \end{cases} \quad (10)$$

Общее решение (10) записывается в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-k \int_0^t \mu_1(\tau) d\tau} x^0 \\ &= \left(\frac{T-t}{T} \right)^{kT} x^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда следует, что для всех $kT > 1$ независимо от начальных условий достигается устойчивость за заданное время T с равномерно ограниченным входным воздействием u :

$$\lim_{t \rightarrow T} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow T} \dot{x}(t) = 0, \quad (12)$$

¹Y. Song, Y. Wang, J. Holloway, M. Krstic, Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time, Automatica 83 (2017) 243–251.

Синтез обратной связи: базовая идея в скалярном случае

Деформация Пространства Состояния и Времени

Первоначальная система в замкнутой форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = -k\mu_1(t;T)x(t), \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}, \quad \mu_1(t;T) = \frac{T}{T-t}, \quad T > 0, \quad kT > 1 \quad (13)$$

Новая переменная времени

$$\tau(t;T) = -T \ln \left(\frac{T-t}{T} \right) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \frac{d\tau(t;T)}{dt} = \mu_1(t;T) \quad (14)$$

Новая переменная в деформированном времени

$$x(t) = \xi(\tau(t;T)) \quad (15)$$

Перемасштабированная система

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) \frac{dt}{d\tau} = -k\mu_1(t;T)x(t) \frac{1}{\mu_1(t;T)} \Big|_{x(t)=\xi(\tau(t;T))} = -k\xi(\tau). \quad (16)$$

Синтез обратной связи: базовая идея в скалярном случае

$$\tau(t; T) = -T \ln \left(\frac{T-t}{T} \right)$$

$$x(t) = \xi(\tau(t; T))$$

Устойчивость за время T



Асимптотическая устойчивость

$$\frac{dx(t)}{dt} = -k\mu_1(t; T)x(t)$$



$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = -k\xi(\tau)$$



$$t(\tau; T) = T \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right)$$

$$\xi(\tau) = x(t(\tau; T))$$

Lemma

Пусть функция $\mu(t) : [t_0, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$, $\mu(t_0) = 1$ удовлетворяет условиям:

- ① $\mu(t)$ монотонно возрастает и принимает конечные значения на $[t_0, t_0 + T)$;
- ② $\lim_{t \rightarrow t_0 + T} \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau = \infty$.

Тогда всякое неотрицательное решение скалярного дифференциального неравенства

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -2k\mu(t)V(t), \quad k > 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T) \quad (17)$$

убывает к нулю при $t \rightarrow t_0 + T$.

Вышеприведенная Лемма² обобщает свойства ранее использованного неавтономного генератора $\mu_1(t)$ и формирует основу синтеза за заданное время T с различными генераторами $\mu(t)$.

²Lemma 4.2 in Y. Orlov, Nonsmooth Lyapunov analysis in finite and infinite dimensions, Springer, 2020

Инструментальные Леммы

Lemma

Пусть функция $\eta(r) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ монотонно возрастает от $\eta(0) = 1$ до бесконечности при $r \rightarrow \infty$ и будет такой, что $\int_0^\infty \frac{dr}{\eta(r)} \leq 1$ (например, $\eta(r) = p^{-1} \exp(r^p) r^{1-p}$ с некоторым $p \in (0, 1]$). Вдоль непрерывного векторного поля $f(x, u)$ над Евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальное неравенство

$$D_{f(\xi, u(\xi))} V(\xi) \leq -\frac{\eta(V(\xi))}{T} \quad (18)$$

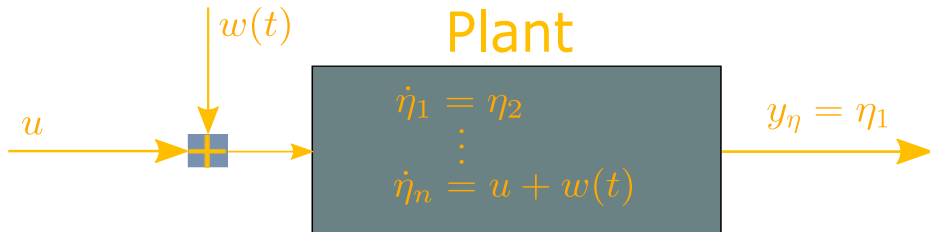
относительно скалярной положительно определенной функции $V(x)$. Тогда произвольное решение $V(x(t))$ неравенства (18) достигает нуля по крайней мере к моменту $t = T$ независимо от начального значения $V_0 = V(x(0))$.

Данная Лемма³ формирует основу стабилизирующего синтеза с заданной верхней границей времени схождения регулируемой системы к началу координат.

³Lemma 1 in Y. Orlov, Time space deformation approach to prescribed-time stabilization: Synergy of time-varying and non-Lipschitz feedback designs, Automatica 144 (2022) 110485.

Синтез регулятора по полным измерениям состояния

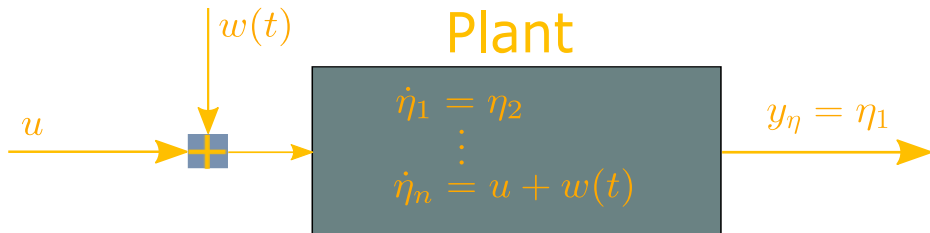
Постановка задачи



where

- $\eta \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния
- $y_\eta \in \mathbb{R}$ – единственное доступное измерение
- u – входное воздействие
- w – возмущение

Постановка задачи



Предположение

Внешнее возмущение $w(t)$, равномерно ограничено

$$|w(t)| \leq L \quad \forall t \geq t_0$$

априорно неизвестной константой $L > 0$.

Цель управления

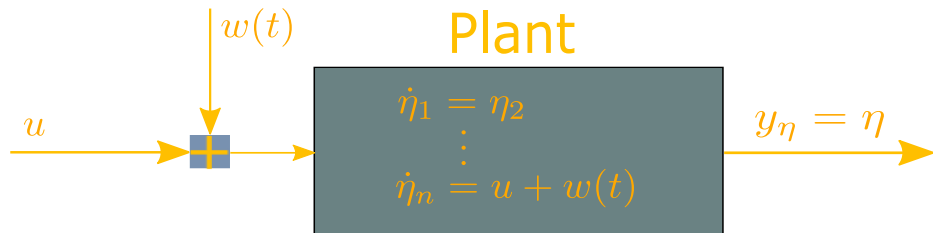
Синтезировать равномерно устойчивую замкнутую систему

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) + b(u + w(t)), \quad \eta(0) = \eta^0,$$
$$y_\eta = \eta_1$$

с заданным временем схождения T , фазовые траектории которой сходятся к нулю при $t \rightarrow T$

- с произвольно малым заранее выбранным $T > 0$
- независимо от начального состояния η^0
- и независимо от допустимого возмущения $w(t)$.

Синтез регулятора по полным измерениям состояния



$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{b}(u + w(t)), \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0 \quad (19)$$

(20)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} & \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 & 0_{1,n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи

- Масштабированная обратная связь

$$u(t) = -KD_c(t)\eta(t) \quad (22)$$

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи

- Масштабированная обратная связь

$$u(t) = -KD_c(t)\eta(t) \quad (22)$$

- Постоянный коэффициент усиления $K = [K_1 \dots K_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: **предстоит выбрать**

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи

- Масштабированная обратная связь

$$u(t) = -KD_c(t)\eta(t) \quad (22)$$

- Постоянный коэффициент усиления $K = [K_1 \dots K_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: **предстоит выбрать**
- Специально масштабированная диагональная матрица

$$D_c(t) = \text{diag}\{\mu_{T_c}^n(t) \ \mu_{T_c}^{n-1}(t) \ \dots \ \mu_{T_c}(t)\}^\top \quad (23)$$

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи

- Масштабированная обратная связь

$$u(t) = -KD_c(t)\eta(t) \quad (22)$$

- Постоянный коэффициент усиления $K = [K_1 \dots K_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: **предстоит выбрать**
- Специально масштабированная диагональная матрица

$$D_c(t) = \text{diag}\{\mu_{T_c}^n(t) \ \mu_{T_c}^{n-1}(t) \ \dots \ \mu_{T_c}(t)\}^\top \quad (23)$$

- Генератор сходимости с заданным временем

$$\mu_{T_c}(t) = \frac{T_c}{T_c - t}, \quad T_c > 0 \quad (24)$$

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи

- Масштабированная обратная связь

$$u(t) = -KD_c(t)\eta(t) \quad (22)$$

- Постоянный коэффициент усиления $K = [K_1 \dots K_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: **предстоит выбрать**
- Специально масштабированная диагональная матрица

$$D_c(t) = \text{diag}\{\mu_{T_c}^n(t) \ \mu_{T_c}^{n-1}(t) \ \dots \ \mu_{T_c}(t)\}^\top \quad (23)$$

- Генератор сходимости с заданным временем

$$\mu_{T_c}(t) = \frac{T_c}{T_c - t}, \quad T_c > 0 \quad (24)$$

- Замкнутая система

$$\dot{\eta}(t) = [A - bKD_c(t)]\eta(t) + bw(t). \quad (25)$$

Шаг 2: Решение LMIs

- Лине́йные Матричные Неравенства

$$P_c^{-1} \succ 0, \begin{bmatrix} Q_{11} & b \\ b^\top & -\gamma_c \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (26)$$

- где

$$Q_{11} = P_c^{-1} (A - \Delta)^\top + (A - \Delta) P_c^{-1} - b U_c - U_c^\top b^\top + P_c^{-1}, \quad (27)$$

$$\Delta = T_c^{-1} \text{diag}\{[0 \ 1 \dots n-1]^\top\}. \quad (28)$$

- Известно⁴, что для линейной системы в канонической форме вышеприведенные LMIs всегда обладают подходящими решениями $P_c = P_c^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_c \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma_c \in \mathbb{R}_+$.

⁴Lemma 1 in L. Praly and Z. Jiang, “Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems,” Systems and Control Letters, vol. 53, no. 2, pp. 107–116, 2004

Шаг3: Проверка равномерной устойчивости замкнутой системы за заданное время T_c

Lemma

Пусть $K = U_c P_c$. Тогда для произвольных начальных значений $\eta(0) \in \mathbb{R}^n$ и допустимых возмущений $w \in \mathcal{L}_\infty$ решения замкнутой системы удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{\min}(P_c)} \begin{bmatrix} |\eta_1(t)| \\ |\eta_2(t)| \\ \vdots \\ |\eta_n(t)| \end{bmatrix} &\leq \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_{T_c}(t) \\ \vdots \\ \mu_{T_c}^{n-1}(t) \end{bmatrix} \\ &\times \left[\mu_{T_c}^{-T_c/2}(t) \sqrt{\eta(0)^\top P_c \eta(0)} + \sqrt{\gamma_c \omega(t)} \|w\|_\infty \right] \end{aligned} \quad (29)$$

для всех $t \in [0, T_c)$, где

$$\omega(t) = T \begin{cases} \frac{\mu_{T_c}^{-2n}(t) - \mu_{T_c}^{-T_c}(t)}{T_c - 2n} & \text{if } T_c \neq 2n, \\ \mu_{T_c}^{-T_c}(t) \ln \mu_{T_c}(t) & \text{if } T_c = 2n \end{cases}. \quad (30)$$

Идея доказательства: деформация пространства состояний и времени

$$\tau(t) = T \ln \frac{T}{T-t} : [0, T) \rightarrow [0, \infty), \quad \xi(t) = \Gamma(t) \boldsymbol{\eta}(t)$$

$$\Gamma(t) = \text{diag}\{[1 \quad \mu^{-1}(t) \dots \mu^{1-n}(t)]^\top\}, \quad \mu_T(t) = \frac{T}{T-t}$$

Система в канонической форме

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = A \boldsymbol{\eta}(t) + b(u + w(t))$$

$$u(\boldsymbol{\eta}) = -K D_c(t) \boldsymbol{\eta}(t)$$

$$D_c(t) = \text{diag}\{[\mu_T^n(t) \quad \mu_T^{n-1}(t) \quad \dots \quad \mu_T(t)]^\top\}$$

Преобразованная система

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = (A_K - \Theta) \xi(\tau) + \mathbf{e}^{-nT^{-1}\tau} b d(\tau),$$

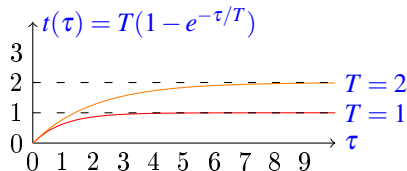
$$A_K = A - bK$$

$$\Theta = T^{-1} \text{diag}\{[0 \ 1 \ \dots \ n-1]^\top\}$$

Идея доказательства: деформация пространства состояний и времени

$$t(\tau) = T \left(1 - e^{-\tau/T} \right)$$

$$\xi(\tau) = \Gamma(t(\tau)) \eta(t(\tau))$$



Преобразованная система

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = (A_K - \Theta) \xi(\tau) + e^{-nT^{-1}\tau} b d(\tau),$$

Квадратичная функция Ляпунова дает

K такую что $A_K - \Theta$ Гурвицева

$$\tau(t) = T \ln \left(\frac{T}{T-t} \right)$$

$$\eta = \Gamma^{-1}(\xi(\tau(t)))$$

Система в канонической форме

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = A\eta(t) - KD_c(t)\eta(t) + bw(t)$$

Как только такая K выбрана, желаемая устойчивость гарантирована

Theorem

Для $T_c > 2n - 2$ синтезированная приведенным способом замкнутая система

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}(t) + b(u + w(t)), \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0, \quad (31)$$

$$u(t) = -KD_c(t)\boldsymbol{\eta}(t), \quad (32)$$

$$D_c(t) = \text{diag}\{\mu_{T_c}^n(t) \ \mu_{T_c}^{n-1}(t) \ \dots \ \mu_{T_c}(t)\}^\top, \quad (33)$$

$$K = U_c P_c, \quad \text{and} \quad \mu_{T_c}(t) = \frac{T_c}{T_c - t}, \quad T_c > 0, \quad (34)$$

является равномерно устойчивой с заданным временем схождения T_c .

Произвольно малое время схождения T_c может быть достигнуто путем подходящего изменения масштаба времени. Более того, как будет показано далее, техническое ограничение $T_c > 2n - 2$ на время схождения становится несущественным при численном интегрировании замкнутой системы, используя неявную схему Эйлера.

Обобщение на бесконечный горизонт времени

Remark

Так как $\mu_{T_c}(t) = \frac{T_c}{T_c - t} \rightarrow \infty$ при $t \uparrow T_c$, то предложенный синтез

$$u(t) = -KD_c(t)\eta(t), \quad D_c(t) = \text{diag}\{[\mu_{T_c}^n(t) \ \mu_{T_c}^{n-1}(t) \ \dots \ \mu_{T_c}(t)]^\top\} \quad (35)$$

применим на конечном интервале времени, $[0, T_c)$ на котором он равномерно ограничен. Поэтому зависящий от времени коэффициент усиления $\mu_{T_c}(t)$ допускает периодическое продолжение по модулю $\text{mod}(t, T_c) \in [0, T_c)$ для всех $t \geq 0$. Продолженный таким образом коэффициент усиления

$$\mu_{T_c}(\text{mod}(t, T_c)), \quad t \geq 0$$

периодически возрастает со своего начального значения $\rho_{T_c}(0) = 1$ до бесконечности, монотонно на каждом интервале $t \in [iT_c, (i+1)T_c)$, $i = 1, 2, \dots$, что приводит к равномерной робастности замкнутой системы на бесконечном интервале времени. $[0, \infty)$.

Для реализации приведенного закона управления предлагается использовать неявную дискретизацию Эйлера, которая сохраняет в дискретном времени желаемые свойства равномерной робастной устойчивости за заданное время.

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Коэффициент усиления $D_c(t) \rightarrow \infty$ при $t \uparrow T_c \Rightarrow$ явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{x} = f(x) \Rightarrow \xi_{k+1} = \xi_k + hf(\xi_{k+1})$

⁵Того же класса $\mathcal{L}_\infty$, что и возмущения $w(t)$

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Коэффициент усиления $D_c(t) \rightarrow \infty$ при $t \uparrow T_c \Rightarrow$ явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{x} = f(x) \Rightarrow \xi_{k+1} = \xi_k + hf(\xi_{k+1})$
- Система с обратной связью при наличии шума⁵ $v(t)$ измерениях:

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - bKD_c(t)z(t) + bw(t), \quad z(t) = \eta(t) + v(t), \quad (36)$$

⁵Того же класса $\mathcal{L}_\infty$, что и возмущения $w(t)$

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Коэффициент усиления $D_c(t) \rightarrow \infty$ при $t \uparrow T_c \Rightarrow$ явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{x} = f(x) \Rightarrow \xi_{k+1} = \xi_k + hf(\xi_{k+1})$
- Система с обратной связью при наличии шума⁵ $v(t)$ измерениях:

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - bKD_c(t)z(t) + bw(t), \quad z(t) = \eta(t) + v(t), \quad (36)$$

- Неявная дискретизация Эйлера $\Rightarrow$ Требуется аналитически решить линейные уравнения относительно ξ_{k+1} :

$$\frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{h} = A\xi_{k+1} + bw_{k+1} - bKD_c(t_{k+1})[\xi_{k+1} + v_{k+1}]$$

где $\xi_k \in \mathbb{R}^n$ – аппроксимация $\eta_k = \eta(t_k)$ ($\xi_k \rightarrow x_k$ при $h \rightarrow 0$) и $v_k = v(t_k)$, $w_k = w(t_k)$.

⁵Того же класса $\mathcal{L}_\infty$, что и возмущения $w(t)$

Неявная дискретизация Эйлера

- Итоговое аналитическое представление

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= F_c^{-1}(t_{k+1}) [\xi_k + hbw_{k+1} + R_c(t_{k+1})v_{k+1}], \\ F_c(t) &= I_n - h[A - bKD_c(t)], R_c(t) = -hbKD_c(t), \quad k = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{37}$$

⁶D. Efimov and Y. Orlov On implicit discretization of prescribed-time stabilizers 2024 IEEE 63rd Conference on Decision and Control, CDC'2024, p. 7350-7355 (submitted to IEEE TAC)

Неявная дискретизация Эйлера

- Итоговое аналитическое представление

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= F_c^{-1}(t_{k+1}) [\xi_k + hbw_{k+1} + R_c(t_{k+1})v_{k+1}], \\ F_c(t) &= I_n - h[A - bKD_c(t)], \quad R_c(t) = -hbKD_c(t), \quad k = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{37}$$

- Чтобы реализовать итоговую дискретизацию (37), остается обратить матрицу $F_c(t)$ при условии ее несингулярности для всех $t \geq 0$.

⁶D. Efimov and Y. Orlov On implicit discretization of prescribed-time stabilizers 2024 IEEE 63rd Conference on Decision and Control, CDC'2024, p. 7350-7355 (submitted to IEEE TAC)

Неявная дискретизация Эйлера

- Итоговое аналитическое представление

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= F_c^{-1}(t_{k+1}) [\xi_k + hbw_{k+1} + R_c(t_{k+1})v_{k+1}], \\ F_c(t) &= I_n - h[A - bKD_c(t)], R_c(t) = -hbKD_c(t), \quad k = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{37}$$

- Чтобы реализовать итоговую дискретизацию (37), остается обратить матрицу $F_c(t)$ при условии ее несингулярности для всех $t \geq 0$.
- Для линейной матрицы в канонической форме обратимость матрицы $F_c(t)$ установлена для всех $t \geq 0$ и показана равномерная устойчивость дискретной системы (37) за заданное время⁶.

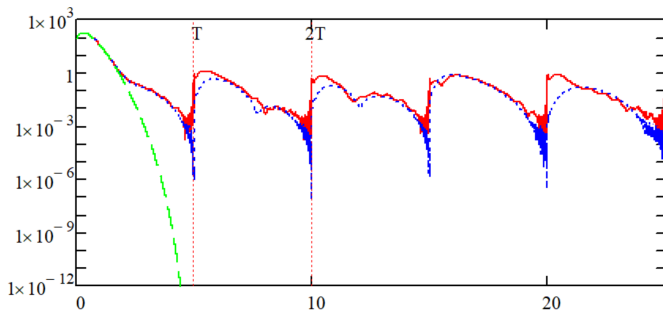
⁶D. Efimov and Y. Orlov On implicit discretization of prescribed-time stabilizers 2024 IEEE 63rd Conference on Decision and Control, CDC'2024, p. 7350-7355 (submitted to IEEE TAC)

Иллюстративный пример: затухание нормы вектора состояния

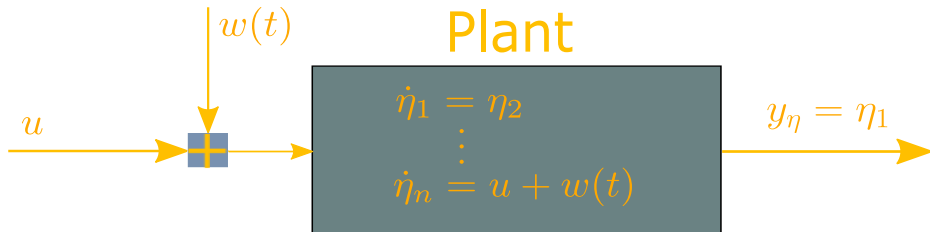
Пусть $n = 3$, $T = 5 > 2n - 2$ и $h = 0.001$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 0.001(\sin(\pi t) + \text{rnd}(1)) \\ 0.01(\cos 7(t) - \text{rnd}(1)) \\ 0.1(\sin(10t) - \text{rnd}(1)) \end{bmatrix}, \quad d(t) = \sin(0.5t) + \text{rnd}(1),$$

$$K = [0.125 \ 0.75 \ 1.5], \quad x(0) = [50 \ 50 \ 50]^\top$$



1) $v \equiv 0$ и $d \equiv 0$; 2) $v \equiv 0$ и $d \neq 0$; 3) $v \neq 0$ и $d \neq 0$



$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \Lambda \boldsymbol{\eta}(t) + B(u + w(t)), \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0, \quad (38)$$

$$y_\eta(t) = C \boldsymbol{\eta}(t) \quad (39)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1,n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0_{1,n-1}]. \quad (40)$$

Шаг 1: Поиск зависящего от времени корректирующего входа наблюдателя

- Динамический наблюдатель

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_{\eta}(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (41)$$

Шаг 1: Поиск зависящего от времени корректирующего входа наблюдателя

- Динамический наблюдатель

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_{\eta}(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (41)$$

- Масштабированное корректирующее входное воздействие

$$D_o(t)L[y_{\eta}(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (42)$$

Шаг 1: Поиск зависящего от времени корректирующего входа наблюдателя

- Динамический наблюдатель

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_{\eta}(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (41)$$

- Масштабированное корректирующее входное воздействие

$$D_o(t)L[y_{\eta}(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (42)$$

- Постоянный коэффициент усиления $L = [L_1 \dots L_n]^T \in \mathbb{R}^n$: **предстоит выбрать**

Шаг 1: Поиск зависящего от времени корректирующего входа наблюдателя

- Динамический наблюдатель

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_{\eta}(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (41)$$

- Масштабированное корректирующее входное воздействие

$$D_o(t)L[y_{\eta}(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (42)$$

- Постоянный коэффициент усиления $L = [L_1 \dots L_n]^{\top} \in \mathbb{R}^n$: **предстоит выбрать**
- Специально масштабированная диагональная матрица

$$D_o(t) == \text{diag}\{[\mu_{T_o}(t) \mu_{T_o}^2(t) \dots \mu_{T_o}^n(t)]^{\top}\} \quad (43)$$

Шаг 1: Поиск зависящего от времени корректирующего входа наблюдателя

- Динамический наблюдатель

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_\eta(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (41)$$

- Масштабированное корректирующее входное воздействие

$$D_o(t)L[y_\eta(t) - c\hat{\eta}(t)] \quad (42)$$

- Постоянный коэффициент усиления $L = [L_1 \dots L_n]^\top \in \mathbb{R}^n$: **предстоит выбрать**
- Специально масштабированная диагональная матрица

$$D_o(t) == \text{diag}\{[\mu_{T_o}(t) \mu_{T_o}^2(t) \dots \mu_{T_o}^n(t)]^\top\} \quad (43)$$

- Генератор сходимости с заданным временем

$$\mu_{T_o}(t) = \frac{T_o}{T_o - t}, \quad T_o > 0 \quad (44)$$

Шаг 2: Решение LMIs

- Лине́йные Матричные Неравенства

$$P_o \succ 0, \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & P_o b \\ b^\top P_o & -\gamma_o \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (45)$$

- где

$$\tilde{Q}_{11} = (A - \Delta)^\top P_o + P_o (A - \Delta) - U_o c - c^\top U_o^\top + P_o, \quad (46)$$

$$\Delta = T_o^{-1} \text{diag}\{[0 \ 1 \dots n-1]^\top\}. \quad (47)$$

- Известно⁷, что для линейной системы в канонической форме вышеприведенные LMIs всегда обладают подходящими решениями $P_o = P_o^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_o \in \mathbb{R}^n$, and $\gamma_o \in \mathbb{R}_+$.

⁷Lemma 1 in L. Praly and Z. Jiang, “Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems,” Systems and Control Letters, vol. 53, no. 2, pp. 107–116, 2004

Шаг 3: Проверка равномерной устойчивости ошибки оценивания за заданное время

Ошибка оценивания $e(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t)$

Уравнение в ошибках

$$\dot{e}(t) = [A - D_o(t)Lc]e(t) + bd(t). \quad (48)$$

Lemma

Пусть $L = P_o^{-1}U_o$. $K = U_cP_c$. Тогда для произвольных начальных значений $e(0) \in \mathbb{R}^n$ и допустимых возмущений $w \in \mathcal{L}_\infty$ ошибки оценивания удовлетворяют неравенствам

$$\sqrt{\lambda_{\min}(P_o)} \begin{bmatrix} |e_1(t)| \\ |e_2(t)| \\ \vdots \\ |e_n(t)| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_{T_o}(t) \\ \vdots \\ \mu_{T_o}^{n-1}(t) \end{bmatrix} \left[\mu_{T_o}^{-T_o/2}(t) \sqrt{e(0)^\top P_o e(0)} + \sqrt{\gamma_o \omega(t)} \|w\|_\infty \right] \quad (49)$$

для всех $t \in [0, T_o)$.

Идея доказательства: деформация пространства состояний и времени

$$\tau(t) = T \ln \frac{T}{T-t} : [0, T) \rightarrow [0, \infty), \quad \varepsilon(t) = \Gamma(t)e(t)$$

$$\Gamma(t) = \text{diag}\{[1 \quad \mu^{-1}(t) \dots \mu^{1-n}(t)]^\top\}, \quad \mu_T(t) = \frac{T}{T-t}$$

Система в ошибках



Преобразованная система

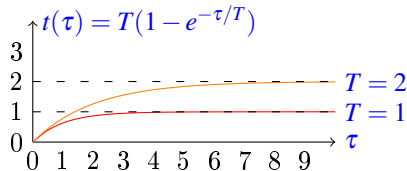
$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= [A - D_o(t)Lc] e(t) + bw(t) \\ D_o(t) &= \text{diag}\{[\mu_T(t) \quad \mu_T^2(t) \quad \dots \quad \mu_T^n(t)]^\top\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} &= (A_L - \Theta) \varepsilon(\tau) + e^{-nT^{-1}\tau} bd(\tau), \\ A_L &= A - Lc, \\ \Theta &= T^{-1} \text{diag}\{[0 \ 1 \dots n-1]^\top\} \end{aligned}$$

Идея доказательства: деформация пространства состояний и времени

$$t(\tau) = T \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right)$$

$$\varepsilon(\tau) = \Gamma(t(\tau))e(t(\tau))$$



Преобразованная система

$$\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} = (A_L - \Theta)\varepsilon(\tau) + e^{-nT^{-1}\tau}bd(\tau),$$

Квадратичная функция Ляпунова дает

L такую что $A_L - \Theta$ Гурвицева

$$\tau(t) = T \ln \left(\frac{T}{T-t} \right)$$

$$e = \Gamma^{-1}(\varepsilon(\tau(t)))$$

Система в ошибках

$$\dot{e}(t) = [A - D_o(t)Lc]e(t) + bw(t)$$

Как только такая L выбрана,
желаемая устойчивость гарантирована

Theorem

Для $T_o > 2n - 2$ синтезированная приведенным способом ошибка оценивания

$$\dot{e}(t) = [A - D_o(t)Lc]e(t) + bw(t) \quad (50)$$

$$D_o(t) = \text{diag}\{\mu_{T_o}(t) \ \mu_{T_o}^2(t) \ \dots \ \mu_{T_c}^n(t)\}^\top, \quad (51)$$

$$L = P_o^{-1}U_o, \quad \text{and} \quad \mu_{T_o}(t) = \frac{T_o}{T_o - t}, \quad T > 0 \quad (52)$$

является равномерно устойчивой с заданным временем схождения T_o .

Произвольно малое время схождения T_c может быть достигнуто путем подходящего изменения масштаба времени. Более того, как будет показано далее, техническое ограничение $T_c > 2n - 2$ на время схождения становится несущественным при численном интегрировании замкнутой системы, используя неявную схему Эйлера.

Обобщение на бесконечный горизонт времени

Remark

Как и в случае синтеза по полным измерениям состояния, корректирующий коэффициент усиления $\mu_{T_o}(t) = \frac{T_o}{T_o - t} \rightarrow \infty$ при $t \uparrow T_o$ допускает периодическое продолжение по модулю $\text{mod}(t, T_o) \in [0, T_o)$ для всех $t \geq 0$.

Продолженный таким образом корректирующий коэффициент усиления

$$\mu_{T_o}(\text{mod}(t, T_o)), \quad t \geq 0$$

периодически возрастает со своего начального значения $\rho_{T_o}(0) = 1$ до бесконечности, монотонно на каждом интервале $t \in [iT_o, (i+1)T_o)$, $i = 1, 2, \dots$, что приводит к равномерной робастности замкнутой системы на бесконечном интервале времени. $[0, \infty)$.

Для реализации приведенного закона управления предлагается использовать неявную дискретизацию Эйлера, которая сохраняет в дискретном времени желаемые свойства равномерной робастной устойчивости за заданное время.

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Коэффициент усиления $D_o(t) \rightarrow \infty$ при $t \uparrow T_o \Rightarrow$ явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{\hat{\eta}} = f(\hat{\eta}) \Rightarrow \hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}_k + hf(\hat{\xi}_{k+1})$

⁸Того же класса $\mathcal{L}_\infty$, что и возмущения $w(t)$

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Коэффициент усиления $D_o(t) \rightarrow \infty$ при $t \uparrow T_o \Rightarrow$ явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{\hat{\eta}} = f(\hat{\eta}) \Rightarrow \hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}_k + hf(\hat{\xi}_{k+1})$
- Наблюдатель при наличии шума⁸ $v(t)$ в измерениях:

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y(t) - c\hat{\eta}(t)], \quad y(t) = c\eta(t) + v(t). \quad (53)$$

⁸Того же класса $\mathcal{L}_\infty$, что и возмущения $w(t)$

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Коэффициент усиления $D_o(t) \rightarrow \infty$ при $t \uparrow T_o \Rightarrow$ явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{\hat{\eta}} = f(\hat{\eta}) \Rightarrow \hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}_k + hf(\hat{\xi}_{k+1})$
- Наблюдатель при наличии шума⁸ $v(t)$ в измерениях:

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y(t) - c\hat{\eta}(t)], \quad y(t) = c\eta(t) + v(t). \quad (53)$$

- Неявная дискретизация Эйлера $\Rightarrow$ Требуется аналитически решить линейные уравнения относительно $\hat{\xi}_{k+1}$:

$$\frac{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_k}{h} = A\hat{\xi}_{k+1} + bu(t_{k+1}) + D_o(t_{k+1})L[y_{k+1} - c\hat{\xi}_{k+1}]$$

где $\hat{\xi}_k \in \mathbb{R}^n$ – аппроксимация $\hat{\eta}_k = \hat{\eta}(t_k)$; $y_k = y(t_k)$, $v_k = v(t_k)$ и $w_k = w(t_k)$.

⁸Того же класса $\mathcal{L}_\infty$, что и возмущения $w(t)$

Неявная дискретизация Эйлера

- Итоговое аналитическое представление

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= Z_o^{-1}(t_{k+1}) [\hat{x}_k + bu(t_{k+1}) + h_0 D_o(t_{k+1}) L_o y_{k+1}] \\ Z_o(t) &= [I_n - h(A - D_o(t)Lc)].\end{aligned}$$

⁹D. Efimov and Y. Orlov Discretization of prescribed-time observers in the presence of noises and perturbations, Systems and Control Letters, 2024, v. 188, 105820

Неявная дискретизация Эйлера

- Итоговое аналитическое представление

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= Z_o^{-1}(t_{k+1}) [\hat{x}_k + bu(t_{k+1}) + h_0 D_o(t_{k+1}) L_o y_{k+1}] \\ Z_o(t) &= [I_n - h(A - D_o(t)Lc)].\end{aligned}$$

- Чтобы реализовать итоговую дискретизацию (37), остается обратить матрицу $F_c(t)$ при условии ее несингулярности для всех $t \geq 0$.

⁹D. Efimov and Y. Orlov Discretization of prescribed-time observers in the presence of noises and perturbations, Systems and Control Letters, 2024, v. 188, 105820

Неявная дискретизация Эйлера

- Итоговое аналитическое представление

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= Z_o^{-1}(t_{k+1}) [\hat{x}_k + bu(t_{k+1}) + h_0 D_o(t_{k+1}) L_o y_{k+1}] \\ Z_o(t) &= [I_n - h(A - D_o(t)Lc)].\end{aligned}$$

- Чтобы реализовать итоговую дискретизацию (37), остается обратить матрицу $F_c(t)$ при условии ее несингулярности для всех $t \geq 0$.
- Для линейной матрицы в канонической форме обратимость матрицы $F_c(t)$ установлена для всех $t \geq 0$ и показана равномерная устойчивость показана дискретной системы (37) за заданное время⁹.

⁹D. Efimov and Y. Orlov Discretization of prescribed-time observers in the presence of noises and perturbations, Systems and Control Letters, 2024, v. 188, 105820

Неявная дискретизация Эйлера

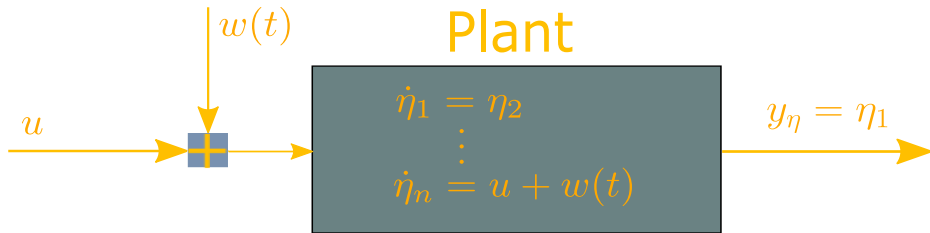
- Итоговое аналитическое представление

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= Z_o^{-1}(t_{k+1}) [\hat{x}_k + bu(t_{k+1}) + h_0 D_o(t_{k+1}) L_o y_{k+1}] \\ Z_o(t) &= [I_n - h(A - D_o(t)Lc)].\end{aligned}$$

- Чтобы реализовать итоговую дискретизацию (37), остается обратить матрицу $F_c(t)$ при условии ее несингулярности для всех $t \geq 0$.
- Для линейной матрицы в канонической форме обратимость матрицы $F_c(t)$ установлена для всех $t \geq 0$ и показана равномерная устойчивость показана дискретной системы (37) за заданное время⁹.
- Впоследствии предложенный наблюдатель и его неявная дискретизация эффективно используются для синтеза обратной связи по неполным измерениям.

⁹D. Efimov and Y. Orlov Discretization of prescribed-time observers in the presence of noises and perturbations, Systems and Control Letters, 2024, v. 188, 105820

Синтез обратной связи по неполным измерениям при $T_c = T_o = T$



$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \Lambda \boldsymbol{\eta}(t) + B(u + w(t)), \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}^0, \quad (54)$$

$$y_\eta(t) = C \boldsymbol{\eta}(t) \quad (55)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1,n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0_{1,n-1}]. \quad (56)$$

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи: $T_c = T_o = T$

- Масштабированная обратная связь $u(t) = -KD_c(t)\hat{\eta}(t)$ по выходу наблюдателя

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_\eta(t) - c\hat{\eta}(t)]. \quad (57)$$

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи: $T_c = T_o = T$

- Масштабированная обратная связь $u(t) = -KD_c(t)\hat{\eta}(t)$ по выходу наблюдателя

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_\eta(t) - c\hat{\eta}(t)]. \quad (57)$$

- Замкнутая система

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - bKD_c(t)\hat{\eta}(t) + bwt), \quad (58)$$

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи: $T_c = T_o = T$

- Масштабированная обратная связь $u(t) = -KD_c(t)\hat{\eta}(t)$ по выходу наблюдателя

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_\eta(t) - c\hat{\eta}(t)]. \quad (57)$$

- Замкнутая система

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - bKD_c(t)\hat{\eta}(t) + bwt), \quad (58)$$

- Постоянные коэффициенты усиления $K = [K_1 \dots K_n]$, $L = [L_1 \dots L_n]^\top$ предстоит выбрать

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи: $T_c = T_o = T$

- Масштабированная обратная связь $u(t) = -KD_c(t)\hat{\eta}(t)$ по выходу наблюдателя

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_\eta(t) - c\hat{\eta}(t)]. \quad (57)$$

- Замкнутая система

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - bKD_c(t)\hat{\eta}(t) + bwt, \quad (58)$$

- Постоянные коэффициенты усиления $K = [K_1 \dots K_n]$, $L = [L_1 \dots L_n]^\top$ **предстоит выбрать**
- Специально подобранные диагональные матрицы $D_c(t)$ и $D_o(t)$ такие же, как и ранее.
- Тот же самый генератор сходимости с заданным временем $\mu_T(t)$

Шаг 1: Поиск линейной неавтономной обратной связи: $T_c = T_o = T$

- Масштабированная обратная связь $u(t) = -KD_c(t)\hat{\eta}(t)$ по выходу наблюдателя

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = A\hat{\eta}(t) + bu(t) + D_o(t)L[y_\eta(t) - c\hat{\eta}(t)]. \quad (57)$$

- Замкнутая система

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - bKD_c(t)\hat{\eta}(t) + bwt, \quad (58)$$

- Постоянные коэффициенты усиления $K = [K_1 \dots K_n]$, $L = [L_1 \dots L_n]^\top$ **предстоит выбрать**
- Специально подобранные диагональные матрицы $D_c(t)$ и $D_o(t)$ такие же, как и ранее.
- Тот же самый генератор сходимости с заданным временем $\mu_T(t)$
- Ошибка оценивания $e(t) = \eta(t) - \hat{\eta}(t)$ и уравнение на нее

$$\dot{e}(t) = [A - D_o(t)Lc]e(t) + bw(t). \quad (59)$$

Шаг 2: Решение LMIs

- Лине́йные Матри́чные Неравенства

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_c + M & 0 & b \\ 0 & \mathcal{A}_o + I_n & P_o b \\ b^\top & b^\top P_o & -\gamma \end{bmatrix} \preceq 0, I_n \preceq P_c \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} M & -b U_c \\ -U_c^\top b^\top & P_c \end{bmatrix} \succeq 0, P_o \succ 0, M \succeq 0 \quad (61)$$

- где $\Theta = T^{-1} \text{diag}\{[0 \ 1 \dots n-1]^\top\}$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c &= P_c (A - \Theta)^\top + (A - \Theta) P_c - b U_c - U_c^\top b^\top + P_c, \\ \mathcal{A}_o &= (A - \Theta)^\top P_o + P_o (A - \Theta) - U_o c - c^\top U_o^\top + P_o, \end{aligned} \quad (62)$$

- Данные неравенства более ограничительны чем те, которые использовались для обратной связи по полным измерениям и для построения наблюдателя: **одновременно требуется найти решения** $U_c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $U_o \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, и $M, P_c, P_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$ совместной системы неравенств (60), (61).

Шаг 3: Проверка равномерной устойчивости замкнутой системы за заданное время

Lemma

Пусть $K = U_c P_c^{-1}$, $L = P_o^{-1} U_o$, и $\omega(t)$. Тогда для произвольных начальных значений $\eta(0)$, $e(0) \in \mathbb{R}^n$ и допустимых возмущений $w \in \mathcal{L}_\infty$ вектор состояния замкнутой системы и компоненты ошибки оценивания удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{\min}(P_c^{-1})\eta_i^2(t) + \lambda_{\min}(P_o)e_i^2(t)} \leq \rho_T^{i-1}(t) \left[\rho_T^{-T/2}(t) \left(\sqrt{\eta(0)^\top P_c^{-1} \eta(0) + e(0)^\top P_o e(0)} \right) \right. \\ \left. + \sqrt{\gamma \omega(t)} \|w\|_\infty \right], \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (63)$$

для всех $t \in [0, T)$, где $\omega(t)$ – та же функция, что и ранее.

Идея доказательства: деформация пространства состояний и времени

$$\tau(t) = T \ln \frac{T}{T-t} : [0, T) \rightarrow [0, \infty), \quad (\xi(t), \varepsilon(t))^\top = \Gamma(t) (\eta(t), e(t))^\top$$

$$\Gamma(t) = \text{diag}\{[1 \quad \mu^{-1}(t) \dots \mu^{1-n}(t)]^\top\}, \quad \mu_T(t) = \frac{T}{T-t}$$

Замкнутая система в канонической форме

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= [A - bKD_c(t)] \eta(t) + bKD_c(t)e(t) + bw(t) \\ \dot{e}(t) &= [A - D_o(t)Lc] e(t) + bw(t) \end{aligned}$$

Преобразованная система

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} &= (A_K - \Theta) \xi(\tau) \\ &\quad + bK\varepsilon(\tau) + \mathbf{e}^{-nT^{-1}\tau} bw(\tau), \\ \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} &= (A_L - \Theta) \varepsilon(\tau) + \mathbf{e}^{-nT^{-1}\tau} bw(\tau) \end{aligned}$$

Идея доказательства: деформация пространства состояний и времени

$$t(\tau) = T \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right) \rightarrow \tau(t) = T \ln \left(\frac{T}{T-t}\right)$$

$$(\xi(\tau), \varepsilon(\tau))^{\top} = \Gamma(t(\tau))(\eta(t(\tau)), e(t(\tau)))^{\top} \rightarrow (\eta(t), e(t))^{\top} = \Gamma^{-1}(t)(\xi(\tau(t)), \varepsilon(\tau(t)))^{\top}$$

Преобразованная система

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} &= (A_K - \Theta) \xi(\tau) \\ &+ bK\varepsilon(\tau) + e^{-nT^{-1}\tau} bw(\tau), \end{aligned}$$

$$\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} = (A_L - \Theta) \varepsilon(\tau) + e^{-nT^{-1}\tau} bw(\tau)$$

Квадратичная функция Ляпунова дает

K, L такие что $A_K - \Theta, A_L - \Theta$ Гурвицева

Замкнутая система в канонической форме

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= [A - bKD_c(t)] \eta(t) \\ &+ bKD_c(t)e(t) + bw(t) \end{aligned}$$

$$\dot{e}(t) = [A - D_o(t)Lc]e(t) + bw(t)$$

Как только такие K и L выбраны, желаемая устойчивость гарантирована

Theorem

Для $T > 2n - 2$ построенная указанным способом замкнутая система

$$\dot{\eta}(t) = [A - bKD_c(t)]\eta(t) + bKD_c(t)e(t) + bw(t) \quad (64)$$

$$\dot{e}(t) = [A - D_o(t)Lc]e(t) + bw(t), \quad (65)$$

$$K = U_c P_c^{-1}, L = P_o^{-1} U_o, \quad (66)$$

является равномерно устойчивой с заданным временем схождения T .

Произвольно малое время схождения T может быть достигнуто путем подходящего изменения масштаба времени. Более того будет показано далее, что техническое ограничение $T_c > 2n - 2$ на время схождения становится несущественным при численном интегрировании замкнутой системы, используя неявную схему Эйлера.

Обобщение на бесконечный горизонт времени

Remark

Как и в случае синтеза по полным измерениям состояния, корректирующий коэффициент усиления допускает периодическое продолжение по модулю $\text{mod}(t, T) \in [0, T)$ для всех $t \geq 0$. Продолженный таким образом корректирующий коэффициент усиления

$$\mu_T(\text{mod}(t, T)), \quad t \geq 0$$

периодически возрастает со своего начального значения $\rho_T(0) = 1$ до бесконечности, монотонно на каждом интервале $t \in [iT, (i+1)T)$, $i = 1, 2, \dots$, что приводит к равномерной робастности замкнутой системы на бесконечном интервале времени. $[0, \infty)$.

Для реализации приведенного закона управления предлагается использовать неявную дискретизацию Эйлера, которая сохраняет в дискретном времени желаемые свойства равномерной робастной устойчивости за заданное время.

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Как и ранее, явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{x} = f(x) \Rightarrow x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1})$

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Как и ранее, явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{x} = f(x) \Rightarrow x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1})$
- Замкнутая система

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - bKD_c(t)\hat{\eta}(t) + bd(t). \quad (67)$$

Неявная дискретизация, сохраняющая устойчивость за заданное время

Как и ранее, явная дискретизация Эйлера неприменима!

- $h > 0$ шаг дискретизации, $t_k = hk$ для $k \in \mathbb{N}$: $\dot{x} = f(x) \Rightarrow x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1})$
- Замкнутая система

$$\dot{\eta}(t) = A\eta(t) - bKD_c(t)\hat{\eta}(t) + bd(t). \quad (67)$$

- Динамика наблюдателя

$$\dot{\hat{\eta}}(t) = [A - bKD_c(t)]\hat{\eta}(t) + D_o(t)L[y(t) - c\hat{\eta}(t)], \quad y(t) = c\eta(t) + v(t) \quad (68)$$

при наличии шума $v(t) \in \mathcal{L}_\infty$ в измерениях.

Неявная дискретизация Эйлера

- Требуется аналитически решить линейные уравнения относительно ξ_{k+1} , $\hat{\xi}_{k+1}$:

$$\frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{h} = Ax_{k+1} + bw_{k+1} - bKD_c(t_{k+1})\hat{\xi}_{k+1},$$

$$\frac{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_k}{h} = A\hat{\xi}_{k+1} - bKD_c(t_{k+1})\hat{\xi}_{k+1} + D_o(t_{k+1})L_o[y_{k+1} - c\hat{\xi}_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\xi_k \in \mathbb{R}^n$ – аппроксимация $\hat{\eta}_k = \hat{\eta}(t_k)$; $\xi_k = \xi(t_k)$, $\hat{\xi}_k$, $y_k = y(t_k) = c\xi_k + v_k$, $v_k = v(t_k)$, $w_k = w(t_k)$

Неявная дискретизация Эйлера

- Требуется аналитически решить линейные уравнения относительно ξ_{k+1} , $\hat{\xi}_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{h} &= Ax_{k+1} + bw_{k+1} - bKD_c(t_{k+1})\hat{\xi}_{k+1}, \\ \frac{\hat{\xi}_{k+1} - \hat{\xi}_k}{h} &= A\hat{\xi}_{k+1} - bKD_c(t_{k+1})\hat{\xi}_{k+1} + D_o(t_{k+1})L_o[y_{k+1} - c\hat{\xi}_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots,\end{aligned}$$

где $\xi_k \in \mathbb{R}^n$ – аппроксимация $\hat{\eta}_k = \hat{\eta}(t_k)$; $\xi_k = \xi(t_k)$, $\hat{\xi}_k$, $y_k = y(t_k) = c\xi_k + v_k$, $v_k = v(t_k)$, $w_k = w(t_k)$

- Итоговое аналитическое представление

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= M^{-1} \left[\xi_k + hbw_{k+1} - hbKD_c(t_{k+1})\hat{\xi}_{k+1} \right], \\ \hat{\xi}_{k+1} &= Z^{-1}(t_{k+1}) \left[\hat{\xi}_k + hD_o(t_{k+1})Ly_{k+1} \right], \quad k = 0, 1, \dots,\end{aligned}$$

где

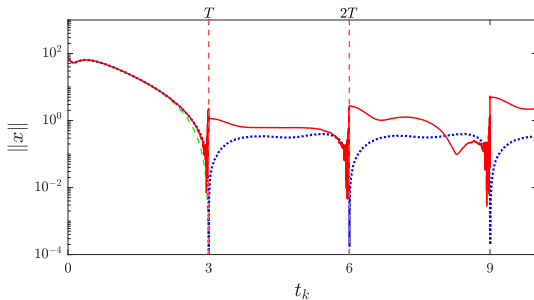
$$M = [I_n - hA], \quad Z(t) = [I_n - h(A - D_o(t)Lc - bKD_c(t))].$$

Иллюстративный пример: затухание нормы вектора состояния (по логарифмической шкале)

Данные моделирования

$$n = 2, T = 3 > 2n - 2, h = 0.001, x(0) = [50 \ 50], K^T = L = [1 \ 1]$$

$$v(t) = 0.01 [\sin(\pi t) + \text{rnd}(1)], d(t) = \sin(0.5t) + \text{rnd}(1)$$



Стабилизация за конечное время: обзор литературы

Устойчивость и стабилизация за конечное время

- **Время схождения, вообще говоря, зависит от начальных значений**

- V. I. Zubov. Methods of A.M. Lyapunov and Their Applications. Noordhoff, Leiden, 1964.
- E. Roxin, On finite stability in control systems. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 15(3), 273-283, 1966.
- W. Hahn, Stability of Motion, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- V. T. Haimo, Finite time controllers, SIAM J. Control Optim., 24 (1986), pp. 760–770.
- L. Rosier. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. Systems & Control Letters, 19:467–473, 1992.
- S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Finite-time stability of continuous autonomous systems,” SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.
- Y. Hong, J. Huang, and Y. Xu, On an output feedback finite-time stabilization problem, IEEE Trans. Automat. Control, 46 (2001), pp. 305–309.
- Y. Orlov, “Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems,” SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 43, no. 4, pp. 1253–1271, 2005.

Устойчивость и стабилизация за фиксированное время (fixed time)

- **Время схождения равномерно ограничено независимо от начальных значений**

- V. Andrieu, L. Praly, A. Astolfi, Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback, SIAM Journal on Control and Optimization 47 (4) (2008) 1814–1850.
- A. Polyakov, Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems, IEEE Transactions on Automatic Control 57 (8) (2012) 2106–2110.
- B. Tian, Z. Zuo, X. Yan, H. Wang, A fixed-time output feedback control scheme for double integrator systems, Automatica 80 (2017)
- F. Lopez-Ramirez, D. Efimov, A. Polyakov, W. Perruquetti, Fixed-time output stabilization and fixed-time estimation of a chain of integrators, International Journal of Robust and Nonlinear Control 28 (16) (2018) 4647–4665.

Устойчивость и стабилизация за заданное время (prescribed time)

- **Время схождения** **независит от начальных значений** и может быть задано заранее

Основополагающие работы по линейным системам в канонической форме: функционирование ограничено временем схождения.

- Y. Song, Y. Wang, J. Holloway, M. Krstic, Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time, *Automatica* 83 (2017) 243–251.
- J. Holloway, M. Krstic, Prescribed-time observers for linear systems in observer canonical form, *IEEE Transactions on Automatic Control* 64 (9) (2019) 3905–3912.
- J. Holloway, M. Krstic, Prescribed-time output feedback for linear systems in controllable canonical form, *Automatica* 107 (2019) 77–85.

Обобщение на бесконечный интервал времени для линейных управляемых систем.

- B. Zhou, Finite-time stabilization of linear systems by bounded linear time-varying feedback, *Automatica* 113 (2020) 108760
- H. Ye, Y. Song, Prescribed-time control of uncertain strict-feedback-like systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 31 (11) (2021) 5281–5297.
- D Efimov, Y Orlov, Discretization of prescribed-time observers in the presence of noises and perturbations, *Systems and Control Letters* 188 (2024) 105820.

Стабилизация нелинейных систем за заданное время

- Алгоритмический недостаток, типичный при реализации линейной обратной связи: зависящий от времени коэффициент усиления неограниченно возрастает по мере достижения времени установления
 - P. Krishnamurthy, F. Khorrami, M. Krstic, A dynamic high-gain design for prescribed-time regulation of nonlinear systems, Automatica 115 (2020) 108860,.
 - P. Krishnamurthy, F. Khorrami, M. Krstic, Adaptive OF stabilization in PT for nonlinear systems with unknown parameters coupled with unmeasured states, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing 35 (2021) 184–202.
 - B. Zhou and Y. Shi, “Prescribed-time stabilization of a class of nonlinear systems by linear time-varying feedback,” IEEE Transactions on Automatic control, vol. 66, pp. 6123–6130, 2021.

Нелинейная стабилизация с заданной границей на время схождения

- Деформация пространства состояний и времени при негладкой обратной связи.

- Y. Chitour, R. Ushirobira, H. Bouhemou, Stabilization for a perturbed chain of integrators in prescribed time, SIAM Journal on Control and Optimization 58 (2) (2020) 1022–1048.
- J. D. Tran, T. Yucelen, Finite-time control of perturbed dynamical systems based on a generalized time transformation approach, Systems & Control Letters 136 (2020) 104605.
- Y. Orlov, Time space deformation approach to prescribed-time stabilization: Synergy of time-varying and non-Lipschitz feedback designs, Automatica 144 (2022) 110485,.

- Негладкий синтез с переключениями

- R.I. Verdés Kairuz, Y. Orlov, L.T. Aguilar, Prescribed-time stabilization of controllable planar systems using switched state feedback, IEEE Control Syst. Lett. 5 (6) (2020) 2048–2053.
- Y. Orlov, R.I. Verdés Kairuz, L.T. Aguilar, Prescribed-time robust differentiator design using finite varying gains, IEEE Control Syst. Lett. 6 (2021) 620–625
- R.I. Verdés Kairuz, Y. Orlov, L.T. Aguilar, Robust observer design with prescribed settling-time bound and finite varying gains, Eur. J. Control 68 (2022) 100667.

Негладкая обратная связь приводит замкнутую систему в начало координат при конечных значениях зависящего от времени коэффициента усиления прежде чем он достигнет неограниченного значения.

Нелинейная автономная стабилизация (predefined time stabilization)

- Перемасштабирование синтеза с фиксированным временем сходимости

- E. Jiménez-Rodríguez, J.D. Sánchez-Torres, A.G. Loukianov, On optimal predefined-time stabilization, Internat. J. Robust Nonlinear Control 27 (17) (2017) 3620–3642.
- Sanchez-Torres, J.D., Munoz-Vazquez, A.J., Defoort, M., Jimenez-Rodriguez, E., and Loukianov, A.G. A class of predefined-time controllers for uncertain second-order systems. European Journal of Control, 53, 52-58, 2020.
- D. Gómez-Gutiérrez, On the design of nonautonomous fixed-time controllers with a predefined upper bound of the settling time, Internat. J. Robust Nonlinear Control 30 (10) (2020) 3871–3885
- R. Aldana-López, D. Gómez-Gutiérrez, M.A. Trujillo, M. Navarro-Gutiérrez, J. Ruiz-León, H.M. Becerra, A predefined-time first-order exact differentiator based on time-varying gains, Internat. J. Robust Nonlinear Control (11) (2021) 5510–5522
- Y. Orlov, R.I. Verdés Kairuz, Autonomous output feedback stabilization with prescribed settling-time bound, IEEE Trans. Automat. Control 68 (4) (2022) 2452–2459,

Стабилизация с заданной границей на время схождения обеспечивается за счет автономной сильно нелинейной (быстрорастущей) обратной связи.

● Мультиагентные системы

- T.F. Ding, M.F. Ge, C. Xiong, Z.W.Liu, G. Ling, Prescribed-time formation tracking of second-order multi-agent networks with directed graphs, *Automatica*, 152 (2023) 110997.
- Z. Hou, J. Zhang, Z. Zhou, Z. Tan, W. Wang, J. WanTang, Y. Tang, Prescribed-time event-triggered control of multi-agent systems based on continuous scaling function, *Journal of the Franklin Institute*, 362 (1) (2025) 107399
- J Lv, C Wang, L Xie, Distributed output-feedback leader-following consensus of nonlinear multiagent systems, *Automatica*, 177 (2025) 112281.

● Стохастические системы

- W. Li, M. Krstic, Prescribed-Time Mean-Square Nonlinear Stochastic Stabilization, *IFAC-PapersOnLine* 53 (2) (2020) 2195-2200.
- L. Xie, S Liu, X. Zhu, Prescribed-time stability of stochastic nonlinear delay systems, *Chaos, Solitons & Fractals*, 193 (4) (2025) 116116

- Системы с запаздываниями

- N Espitia, W Perruquetti, Predictor-feedback prescribed-time stabilization of LTI systems with input delay, IEEE Transactions on Automatic Control 67 (6), 2784-2799
- N Espitia, D Steeves, W Perruquetti, M Krstic, Sensor delay-compensated prescribed-time observer for LTI systems, Automatica 135 (1) (2022) 110005.
- P.J. Ning, C.C. Hua, R. Li, H. Li, A novel theorem for prescribed-time control of nonlinear uncertain time-delay systems, Automatica 152 (6) (2023), 111009.

- Системы с распределенными параметрами

- N Espitia, A Polyakov, D Efimov, W Perruquetti, Boundary time-varying feedbacks for fixed-time stabilization of constant-parameter reaction-diffusion systems, Automatica 103 (5)(2019) 398-407
- N Espitia, I Karafyllis, M Krstic, Event-triggered boundary control of constant-parameter reaction-diffusion PDEs: A small-gain approach, Automatica 128 (6) (2021), 109562.

Обзорные публикации:

- P. Dorato, An Overview of Finite-Time Stability. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2006, pp. 185–194.
Устойчивость за конечное время является наиболее содержательным определением устойчивости с практической точки зрения.
- Y. Song, H. Ye, F.L. Lewis, Prescribed-time control and its latest developments, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst. 53 (7) (2023) 4102–4116.
Представлены существенные продвижения в области с акцентом на адаптивное управление и мультиагентные системы.
- Y. Orlov, R. I. Verdés Kairuz, and L. T. Aguilar, Scaling technique for prescribed-time output feedback stabilization: Autonomous and nonautonomous paradigms and their comparative study, Journal of the Franklin Institute, vol. 361, no. 5, p. 106642, 2024.
Проведен сравнительный анализ различных алгоритмов стабилизации за конечное время с целью выявления их преимуществ и недостатков.
- Y. Orlov, Essay on robust prescribed-time stabilization, Journal of Automation and Intelligence, 2025
Обсуждаются общая схема линейного робастного синтеза с зависящими от времени коэффициентами усиления и его последующая численная реализация с сохранением сходимости за заданное время.

Выводы и перспективные направления исследований

Стабилизация за заданное время

Мотивация из прикладных задач: конфигурация транспортных систем, встреча мультиагентов, построения быстрых наблюдателей...

- Деформационный подход в непрерывном времени:
 - Преобразует полубесконечную временную ось в заданный интервал времени и сопровождается дополнительным преобразованием пространств состояний.
 - В результате преобразования стандартная линейная обратная связь приводит к робастной линейной обратной связи (как по полным, так и неполным измерениям состояния) с зависящими от времени коэффициентами усиления, которая решает задачу стабилизации за заданное время.
 - **Простые правила настройки**, полученные на основе решений LMI, обеспечивают робастность замкнутой системы.
- Предложена эффективная дискретизация со следующими свойствами:
 - Непосредственное численное интегрирование неявным методом Эйлера.
 - При отсутствии шумов измерения сохраняется **устойчивость за заданное время**.
 - **Определенная робастность** к шумам и внешним возмущениям.

- Обобщения на более широкий класс многосвязных (MIMO) систем
- Улучшение робастности про шумах измерения и внешних возмущениях вне пространства управлений.
- Возможное достижение принципа разделения в случае более быстрой сходимости наблюдателя по сравнению с регулятором ($T_o < T_c$).
- Синхронизация шагов интегрирования наблюдателя и регулятора в случае $T_o < T_c$.
- Обобщение на синтез по дискретной выборке и удержанию (sampled-and-hold implementation)