Адаптивное анизотропийное управление с явной эталонной моделью в условиях стохастических неопределенных внешних возмущений

М.М. Чайковский[1,2]

[1]Научно-производственный центр автоматики и приборостроения им. академика Н.А. Пилюгина

[2]Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Москва, Россия

К 75-летию со дня рождения Александра Петровича Курдюкова

- В 2003–2007 г.г. рассмотрены первые задачи анизотропийной теории для систем с неопределенными параметрами:
  - ◇ Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Robust stability of linear discrete stationary systems with uncertainty bounded in the anisotropic norm // Autom. & Remote Contr., 2004, vol. 65, no. 12, pp. 1977–1990.
  - ◇ Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Solution to the stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization problem for discrete time linear systems under parametric uncertainty // Autom. & Remote Contr., 2006, vol. 67, no. 8, pp. 1283–1310.
  - ◇ Kurdyukov A.P., Maximov E.A., Tchaikovsky M.M., Homotopy method for solving anisotropy-based stochastic $\mathcal{H}_\infty$ optimization problem with uncertainty // Proc. 5th IFAC Symp. Robust Control Design, 2006, Toulouse, France.
- С 2011 г. в анизотропийной теории применятся техника линейных матричных неравенств (ЛМН), что привело к постановке и решению ряда субоптимальных и γ-оптимальных задач:
  - ◇ Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P., Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of matrix inequalities // Doklady Math., 2011, vol. 84, no. 3, pp. 895–898.

- С 2012 г. для систем с неопределенными параметрами в рамках анизотропийной теории получен ряд новых результатов на основе расширения регулируемого выхода системы, а также на основе применения леммы Питерсена:

  - ◇ Чайковский М.М., Синтез субоптимального анизотропийного стохастического робастного управления методами выпуклой оптимизации. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Москва, 2012.
  - ◇ Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P., Anisotropic suboptimal control for systems with linear-fractional uncertainty // Autom. & Remote Contr., 2018, vol.79, No.6, pp. 1100–1116.
  - ◇ Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P., On upper estimate of anisotropic norm of uncertain system with application to stochastic robust control // Int. Journal of Control, 2018, vol. 91, no. 11, pp. 2411–2421.

- Методология робастного управления направлена на синтез регуляторов, обеспечивающих устойчивость системы и желаемое качество ее работы для целого семейства объектов, порожденного заданным множеством принадлежности неопределенных параметров математической модели системы

- Альтернативой робастному управлению при работе в условиях неопределенности является адаптация

- В докладе рассматривается задача синтеза прямого адаптивного управления с явной эталонной моделью для стабилизации дискретной линейной стационарной системы, находящейся под воздействием неопределенных коррелированных случайных внешних возмущений с ограниченным уровнем средней анизотропии

- Выбор прямого адаптивного управления для решения данной задачи обусловлен возможностью построения эталонной модели с помощью методов анизотропийной теории стохастического робастного управления

- Очень многие известные методы решения задачи прямого адаптивного управления основаны на применении функций Ляпунова для синтеза алгоритмов адаптации и доказательства устойчивости построенной замкнутой нелинейной адаптивной системы
- Для систем с непрерывным временем синтез адаптивных законов управления традиционно осуществляется с применением функции Ляпунова в виде суммы положительно определенной квадратичной формы и взвешенной суммы квадратов невязок между настраиваемыми параметрами управления и их идеальными значениями в явной эталонной модели
- Известно, что при синтезе прямого адаптивного управления с явной эталонной моделью для систем с дискретным временем применение аналогичной формы функции Ляпунова позволяет установить сходимость алгоритма адаптации, но не гарантирует ляпуновской устойчивости замкнутой системы

- Применение функций Ляпунова в логарифмической форме (в виде суммы логарифма квадратичной формы и взвешенной суммы квадратов невязок между настраиваемыми параметрами управления) для синтеза адаптивных законов управления и анализа устойчивости замкнутой нелинейной адаптивной системы обеспечивает не только сходимость алгоритмов адаптации, но и ляпуновскую устойчивость системы

- В докладе рассматриваются нормализованные законы прямого адаптивного управления с явной эталонной моделью, полученные на основе применения функции Ляпунова именно в логарифмической форме

- P — объект управления
- W — возмущение: $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a > 0$
- U — вход управления
- Z — регулируемый выход системы

Уравнения объекта управления P в пространстве состояний:

$$P(z): \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B_w(\theta) & B_u(\theta) \\ C_z & 0 & D_{zu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ u_k \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$x_k \in \mathbb{R}^{n_x} \quad w_k \in \mathbb{R}^{m_w} \quad u_k \in \mathbb{R}^{m_u} \quad z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$$

- Матрицы $A(\theta)$, $B_w(\theta)$, $B_u(\theta)$, содержат неопределенные параметры — вектор $\theta \in \Theta$, множество неопределенных параметров Θ задано, матрицы C_z и D_{zu} определены
- Пара матриц $(A(\theta), B_u(\theta)$ является управляемой для всех значений неопределенных параметров $\theta \in \Theta$
- Предполагается, что вектор состояния X объекта управления (1) измеряется точно

Возмущение W — стационарная центрированная последовательность случайных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии:

$$W \in \mathcal{W}_a := \{W \in \ell_{\mathcal{P}}^{m_w} : \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a, a > 0\}$$

где

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\frac{m_w S(\omega)}{\|G\|_2^2} d\omega$$

— функционал средней анизотропии,

$$\ell_{\mathcal{P}}^{m_w} := \{W = (w_k)_{-\infty<k<+\infty} : w_k \in L_2^{m_w}, \|W\|_{\mathcal{P}} < +\infty\}$$

— пространство стационарных в узком смысле последовательностей интегрируемых с квадратом случайных векторов,

$$\|W\|_{\mathcal{P}} := \left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \mathbf{E}|w_k|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} S(\omega) d\omega\right)^{1/2}$$

— мощностная норма последовательности случайных векторов W, которая может быть вычислена через спектральную плотность $S(\omega)$ этой последовательности

- $\overline{F}$ — эталонная модель замкнутой системы
- W — возмущение: $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a > 0$
- Z — регулируемый выход системы

Уравнения эталонной модели $\overline{F}$ в пространстве состояний:

$$\overline{F}(z): \begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \bar{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B}_w \\ \overline{C}_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ w_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x} \quad w_k \in \mathbb{R}^{m_w} \quad \bar{z}_k \in \mathbb{R}^{p_z}$$

- Матрица $\overline{A}$ асимптотически устойчива ($\max_k |\lambda_k(\overline{A})| < 1$)
- На эталонную модель действует то же внешнее возмущение $W \in \mathcal{W}_a$, что и на объект управления (1)
- Анизотропийная норма эталонной модели замкнутой системы, количественно характеризующая ее возможности по подавлению стохастических возмущений W, ограничена заданным значением $\gamma_a > 0$:

$$|\!|\!|\overline{F}|\!|\!|_a := \sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|\overline{Z}\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} < \gamma_a$$

- Задача адаптивного анизотропийного управления заключается в стабилизации замкнутой системы и обеспечении желаемого качества подавления случайных возмущений и динамики, заданной эталонной моделью
- Для решения этой задачи будет использоваться закон управления в виде статической обратной связи по состоянию

$$u_k = K_k x_k \tag{3}$$

с настраиваемой матрицей коэффициентов усиления $K_k \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$

Задача адаптивного анизотропийного управления

Для объекта управления (1), заданной эталонной модели (2), уровня средней анизотропии $a > 0$ и порогового значения $\gamma_a > 0$ отыскать алгоритм адаптивной настройки параметров закона управления (3), обеспечивающий достижение цели управления

$$e_k := x_{k+1} - \bar{x}_{k+1} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{4}$$

и выполнение неравенства

$$\sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} < \gamma_a \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{5}$$

Замечание 1

Поскольку по предположению пара матриц $(A(\theta), B_u(\theta))$ объекта управления (1) является управляемой для всех значений неопределенных параметров $\theta \in \Theta$, то для любых фиксированных значений θ существует матрица $\overline{K} \in \mathbb{R}^{m_u \times n_x}$, такая что

$$A(\theta) + B_u(\theta)\overline{K} = \overline{A}$$

Замечание 2

Матрица $\overline{A}$ эталонной модели (2) асимптотически устойчива, поэтому $\mathbf{E}|\overline{x}_k| < \varepsilon$ при $\mathbf{E}|w_k| < \delta$, а в отсутствие внешних возмущений ($W \equiv 0$) $\overline{x}_k \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку на замкнутую систему (1), (3) и на эталонную модель (2) действует одно и то же возмущение, то при выполнении цели управления (4) будет выполняться и

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}|x_k| < \varepsilon & \text{при} & \mathbf{E}|w_k| < \delta \\ x_k \to 0 & \text{при} & k \to \infty \text{ и } W \equiv 0 \end{array} \tag{6}$$

$$\sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} \to |\!|\!|\overline{F}|\!|\!|_a \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{7}$$

Теорема (достаточные условия существования алгоритма адаптации)

Пусть для объекта управления (1) существуют $(m_u \times n_x)$-матрица G, симметричная $(m_u \times m_u)$-матрица $\Sigma \succ 0$ и скалярная величина $\gamma > 0$, такие что неравенства

$$GB_u(\theta) + B_u^{\mathrm{T}}(\theta)G^{\mathrm{T}} \succ 0 \tag{8}$$

$$\gamma \leqslant \lambda_{\min}\left((GB_u(\theta) + B_u^{\mathrm{T}}(\theta)G^{\mathrm{T}})(B_u^{\mathrm{T}}(\theta)G^{\mathrm{T}}\Sigma GB_u(\theta))^{-1}\right) \tag{9}$$

выполняются для всех значений неопределенных параметров $\theta \in \Theta$, и пусть существуют симметричная $(n_x \times n_x)$-матрица $\Gamma \succ 0$, скалярная величина $\mu > 0$ и функция $\rho\colon \mathbb{R}^{n_x} \to (0, \infty)$, такие что выполняются неравенства

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^{n_x}} \rho(x)(1 + \mu x^{\mathrm{T}} x) > 0 \tag{10}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{n_x}} \rho(x) x^{\mathrm{T}} \Gamma x < \gamma \tag{11}$$

Теорема (продолжение)

Пусть алгоритм адаптации замкнутой системы (1), (3), представленной уравнениями

$$F: \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) + B_u(\theta)K_k & B_w(\theta) \\ C_z + D_{zw}K_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \tag{12}$$

имеет вид

$$K_{k+1} = K_k - \rho(x_k)\Sigma G e_k x_k^{\mathrm{T}} \Gamma \tag{13}$$

где $e_k = x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}$, а $\bar{x}_{k+1}$ — состояние эталонной модели замкнутой системы

$$\overline{F}(z): \begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \bar{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B}_w \\ \overline{C}_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

Тогда решение $(0, \overline{K})$ замкнутой системы (12), (13) при $W = (w_k) \equiv 0$ является устойчивым по Ляпунову, последовательность K_k сходится, а $x_k \to 0$ и $e_k \to 0$ при $k \to \infty$. Более того, при $W \neq 0$ существуют такие числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что $\mathbf{E}|x_k| < \varepsilon$ при $\mathbf{E}|w_k| < \delta$ и выполняется неравенство

$$\sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} < \gamma_a \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

Идея доказательства

Доказательство теоремы основано на применении функции Ляпунова в логарифмической форме

$$V(x_k, \widetilde{K}_k) := \ln(1 + x_k^{\mathrm{T}} P x_k) + b \,\mathrm{tr}(\Gamma^{-1} \widetilde{K}_k^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} \widetilde{K}_k)$$

где $b > 0$, симметричная $(n_x \times n_x)$-матрица $P \succ 0$, а $\widetilde{K}_k := K_k - \overline{K}$

Замечание 3

Алгоритм адаптации (13) является нормализованным. Пусть $\widehat{\psi}$, $\widetilde{\psi}$ и φ — оценка настраиваемых параметров, ошибка настройки параметров и регрессор. Закон обновления (алгоритм адаптации) $\widehat{\psi} = f(\widetilde{\psi}, \varphi)$ называется нормализованным, если функция $f(\widetilde{\psi}, \varphi)$ радиально ограничена по φ. Например, закон обновления $\widehat{\psi} = \varphi^{\mathrm{T}} \widetilde{\psi} \varphi / (1 + \varphi^{\mathrm{T}} \varphi)$ является нормализованным, а $\widehat{\psi} = \varphi^{\mathrm{T}} \widetilde{\psi} \varphi$ — нет. При выборе нормализующего фактора $1 + \varphi^{\mathrm{T}} \varphi$ независимым от $\widetilde{\psi}$ алгоритм оценивания параметров сохраняет свою чувствительность к ошибке настройки параметров $\widetilde{\psi}$, но уменьшается его чувствительность к регрессору φ, что способствует уменьшению дрейфа настраиваемых параметров

Замечание 4

Выбор больших значений G и Σ в условиях теоремы приводит к тому, что значения γ и ρ должны быть малыми

Замечание 5

Нормализующая функция $\rho\colon \mathbb{R}^{n_x} \to (0, \infty)$ удовлетворяет условиям (10), (11) тогда и только тогда, когда существуют скалярные величины $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$, такие что

$$\rho(0) \geqslant \tau_1 \tag{14}$$

и для всех ненулевых $x \in \mathbb{R}^{n_x}$

$$\frac{\tau_1}{1 + \mu x^{\mathrm{T}} x} \leqslant \frac{\gamma - \tau_2}{x^{\mathrm{T}} \Gamma x} \tag{15}$$

Замечание 6

Параметр μ в условиях теоремы можно выбрать произвольно большим

Замечание 7

Нормализующая функция ρ не обязательно должна быть непрерывной. Например, пусть $\alpha > 0$, $\lambda_{\max}(\Gamma) < \beta < \mu$ и $\kappa_1, \kappa_2 \in (0, \gamma)$. Тогда функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \kappa_1/(1+\beta x^{\mathrm{T}} x) & \text{при} \quad |x| \leqslant \alpha \\ \kappa_2/(1+\beta x^{\mathrm{T}} x) & \text{при} \quad |x| > \alpha \end{cases}$$

удовлетворяет условию (15) при $0 < \tau_1 < \min\{\kappa_1, \kappa_2\}$ и $0 < \tau_2 < \min\{\gamma - \kappa_1, \gamma - \kappa_2\}$

Замечание 8

Поскольку в алгоритм адаптации (13) входит рассогласование состояний неопределенной и эталонной систем $e_k = x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}$, стабилизация замкнутой системы (12), (13) фактически осуществляется на основе слежения за траекториями эталонной системы (2). Этот факт не только способствует сходимости

$$\sup_{W \in \mathcal{W}_a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} \to \left|\!\left|\!\left| \overline{F} \right|\!\right|\!\right|_a < \gamma_a \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

но и позволяет применять результаты решения поставленной задачи управления для слежения за известным задающим воздействием

- $\overline{P}$ — эталонная модель объекта управления, построенная на основании физико-теоретических представлений о системе или в результате решения задачи идентификации
- W — возмущение: $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a > 0$
- $\overline{U}$ — вход управления
- $\overline{Z}$ — регулируемый выход

Уравнения эталонной модели объекта управления $\overline{P}$ в пространстве состояний:

$$\overline{P}(z) : \begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \bar{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & \overline{B}_w & \overline{B}_u \\ C_z & 0 & D_{zu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ w_k \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x} \quad w_k \in \mathbb{R}^{m_w} \quad \bar{u}_k \in \mathbb{R}^{m_u} \quad z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$$

- Пара матриц (A_m, B_u) является стабилизируемой
- Предполагается, что вектор состояния $\overline{X}$ эталонной модели объекта управления (16) измеряется точно

Задача построения эталонной модели замкнутой системы

Для эталонной модели объекта управления (16), уровня средней анизотропии $a > 0$ и значения $\gamma_a > 0$ найти регулятор в виде статической обратной связи по состоянию

$$\bar{u}_k = K_m \bar{x}_k \tag{17}$$

стабилизирующий эталонную замкнутую систему

$$\overline{F}(z): \begin{bmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \bar{z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m + \overline{B}_u K_m & \overline{B}_w \\ C_z + D_{zu} K_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

где $A_m + \overline{B}_u K_m = \overline{A}$, $C_z + D_{zu} K_m = \overline{C}_z$, и гарантирующий, что ее анизотропийная норма (10) не превосходит γ_a, т.е. выполняется неравенство

$$|||\overline{F}|||_a < \gamma_a$$

Решение задачи построения эталонной модели замкнутой системы

Регулятор (17) существует, если система неравенств

$$\eta - (\mathrm{e}^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma_a^2 \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \overline{B}_w & -\Pi & * \\ 0 & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} -\Pi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A_m \Pi + \overline{B}_u \Lambda & \overline{B}_w & -\Pi & * \\ C_z \Pi + D_{zu} \Lambda & 0 & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{20}$$

$$\eta > \gamma_a^2 \qquad \Psi \succ 0 \qquad \Pi \succ 0 \tag{21}$$

разрешима относительно скалярной переменной η, вещественных симметричных матриц Ψ, Π и матрицы Λ.

Если система неравенств (18)–(21) разрешима и неизвестные переменные найдены, искомая матрица коэффициентов регулятора $K_m = \Lambda \Pi^{-1}$

Замечание 9

Анизотропийный регулятор, полученный из решения задачи выпуклой оптимизации

$$\begin{gathered} \gamma_a^2 \to \min \\ \text{на множестве} \quad \Psi, \Pi, \Lambda, \eta, \gamma_a^2 \\ \text{удовлетворяющих ограничениям (18)–(21) и } \gamma_a^2 > 0 \end{gathered} \tag{22}$$

является анизотропийным γ_a-оптимальным регулятором

Замечание 10

Можно обеспечить расположение полюсов эталонной модели замкнутой системы в заданной ЛМН-области комплексной плоскости $\mathcal{D} = \cap_{i=1}^{s} \mathcal{D}_i \subset \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, представляющей собой пересечение s заданных ЛМН-областей $\mathcal{D}_i = \{z \in \mathbb{C} \colon f_{\mathcal{D}_i}(z) \prec 0\}$ с характеристическими функциями $f_{\mathcal{D}_i}(z) = L_i + zM_i + z^* M_i^{\mathrm{T}}$, определяемыми матрицами $L_i = L_i^{\mathrm{T}}$ и M_i. Для этого систему неравенств (18)–(21) следует дополнить ЛМН

$$L_i \otimes \Pi + M_i \otimes (A_m \Pi + \overline{B}_u \Lambda) + M_i^{\mathrm{T}} \otimes (\Pi A_m^{\mathrm{T}} + \Lambda^{\mathrm{T}} \overline{B}_u^{\mathrm{T}}) \prec 0, \quad i = 1, \ldots, s \tag{23}$$

Параметры алгоритма адаптации (13):

$$K_{k+1} = K_k - \rho(x_k)\Sigma G e_k x_k^{\mathrm{T}}\Gamma$$

— $(m_u \times n_x)$-матрица G, симметричная $(m_u \times m_u)$-матрица $\Sigma \succ 0$ и скалярная величина $\gamma > 0$ — должны удовлетворять условиям теоремы (8), (9):

$$GB_u(\theta) + B_u^{\mathrm{T}}(\theta)G^{\mathrm{T}} \succ 0 \qquad \gamma \leqslant \lambda_{\min}\left((GB_u(\theta) + B_u^{\mathrm{T}}(\theta)G^{\mathrm{T}})(B_u^{\mathrm{T}}(\theta)G^{\mathrm{T}}\Sigma GB_u(\theta))^{-1}\right)$$

Первое неравенство — это ЛМН, зависящее от неопределенных параметров $\theta \in \Theta$. С учетом $\Sigma \succ 0$, в силу леммы Шура второе неравенство для всех $\theta \in \Theta$ эквивалентно ЛМН

$$\begin{bmatrix} GB_u(\theta) + B_u^{\mathrm{T}}(\theta)G^{\mathrm{T}} & * \\ GB_u(\theta) & \Phi \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \qquad (24)$$

в котором $\Phi := (\gamma\Sigma)^{-1}$. Задавая число $\gamma > 0$ и решая систему ЛМН (8), (24) и $\Phi \succ 0$, можно найти матрицы G и $\Sigma = \frac{1}{\gamma}\Phi^{-1}$. Поскольку ЛМН (8), (24) зависят от неопределенных параметров $\theta \in \Theta$, процедура отыскания их решения зависит от формы описания множества Θ

Интервальное множество неопределенных параметров

Множество $\Theta \subset \mathbb{R}^\ell$ — параллелепипед, заданный интервалами возможных значений неопределенных параметров $\theta \in \mathbb{R}^\ell$

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^\ell \colon \underline{\theta}_i \leqslant \theta_i \leqslant \overline{\theta}_i, i = 1, \ldots, \ell\}$$

или, в частности, куб

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^\ell \colon \max_{1 \leqslant i \leqslant \ell} |\theta_i| \leqslant \gamma_\Delta\}$$

Вершина θ_i^v множества Θ — это его элемент, определяемый крайними допустимыми значениями параметров: $\theta_i^v = \underline{\theta}_i$ либо $\theta_i^v = \overline{\theta}_i$ для параллелепипеда, или $\theta_i^v = \pm\gamma_\Delta$ для куба, $i = 1, \ldots, \ell$

При заданном $\gamma > 0$ для нахождения матриц G и Σ, удовлетворяющих (8), (9) достаточно решить систему ЛМН, включающую неравенства для всех вершинных элементов:

$$GB_u(\theta_i^v) + B_u^{\mathrm{T}}(\theta_i^v)G^{\mathrm{T}} \succ 0 \quad \begin{bmatrix} GB_u(\theta_i^v) + B_u^{\mathrm{T}}(\theta_i^v)G^{\mathrm{T}} & * \\ GB_u(\theta_i^v) & \Phi \end{bmatrix} \succcurlyeq 0 \quad \Phi \succ 0 \quad i = 1, \ldots, \ell$$

относительно матричных переменных G, Φ и вычислить $\Sigma = \frac{1}{\gamma}\Phi^{-1}$

Структурированная матричная неопределенность

Параметрическая неопределенность матрицы $B_u(\theta)$ — структурированная матричная неопределенность:

$$B_u(\theta) = \overline{B}_u + B_{B_u}\Delta_{B_u}(\theta)N_{B_u}$$

где матрицы $M_{B_u} \in \mathbb{R}^{n_x \times p_\Delta}$, $N_{B_u} \in \mathbb{R}^{m_\Delta \times m_u}$ известны точно, а неопределенная матрица $\Delta_{B_u}(\theta) \in \mathbb{R}^{p_\Delta \times m_\Delta}$ ограничена в спектральной или фробениусовой норме известным числом $\gamma_\Delta > 0$:

$$\|\Delta_{B_u}\|_2 \leqslant \gamma_\Delta \qquad \text{или} \qquad \|\Delta_{B_u}\|_F \leqslant \gamma_\Delta$$

При заданном $\gamma > 0$ для нахождения матриц G и Σ, удовлетворяющих (8), (9) достаточно решить систему ЛМН

$$\begin{bmatrix} G\overline{B}_u + \overline{B}_u^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} - \varepsilon N_{B_u}^{\mathrm{T}}N_{B_u} & * \\ \gamma_\Delta M_{B_u}^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} & \varepsilon I_{p_\Delta} \end{bmatrix} \succ 0 \qquad \Phi \succ 0 \qquad \varepsilon > 0$$

$$\begin{bmatrix} G\overline{B}_u + \overline{B}_u^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} - \varepsilon N_{B_u}^{\mathrm{T}}N_{B_u} & * & * \\ G\overline{B}_u & \Phi & * \\ \gamma_\Delta M_{B_u}^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} & \gamma_\Delta M_{B_u}^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}} & \varepsilon I_{p_\Delta} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0$$

относительно переменных G, Φ, ε и вычислить $\Sigma = \frac{1}{\gamma}\Phi^{-1}$

После определения параметров алгоритма адаптации (13) G, Σ при заданном $\gamma > 0$ требуется выбрать нормализующую функцию $\rho\colon \mathbb{R}^{n_x} \to (0, \infty)$ и определить еще один параметр — симметричную $n_x \times n_x$-матрицу $\Gamma \succ 0$ так, чтобы неравенства (10), (11) теоремы выполнялись для некоторого заданного числа $\mu > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}^{n_x}$. Функцию $\rho(x)$ можно выбрать, например, в формах

$$\rho(x) = \begin{cases} \kappa/|x|^2 & \text{при} \quad x \neq 0 \\ \kappa & \text{при} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \rho(x) = \frac{\kappa}{1 + \beta|x|^2}$$

для некоторых $\kappa > 0$, $\beta > 0$ или в форме

$$\rho(x) = \begin{cases} \kappa_1/(1 + \beta x^{\mathrm{T}} x) & \text{при} \quad |x| \leqslant \alpha \\ \kappa_2/(1 + \beta x^{\mathrm{T}} x) & \text{при} \quad |x| > \alpha \end{cases}$$

для некоторых $\alpha > 0$, $\beta \in (0, \mu)$, $\kappa_1, \kappa_2 \in (0, \gamma)$

Проверку выполнения условий теоремы (10), (11) можно осуществлять на основе замечания 5 и неравенств (14), (15) При выборе $\rho(x)$ в форме

$$\rho(x) = \begin{cases} \kappa/|x|^2 & \text{при} \quad x \neq 0 \\ \kappa & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

неравенство (14) выполняется для любого $\mu > 0$, неравенство (15) выполняется для любой матрицы $\Gamma \succ 0$, а при $x \neq 0$ принимает вид

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{n_x} \setminus \{0\}} \frac{x^{\mathrm{T}} \kappa \Gamma x}{x^{\mathrm{T}} x} < \gamma$$

Известно, что для любой симметричной матрицы $\kappa\Gamma$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^{n_x} \setminus \{0\}} \frac{x^{\mathrm{T}} \kappa \Gamma x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_{\max}(\kappa\Gamma)$$

Поэтому матрицу $\Gamma \succ 0$ можно найти из условия $\lambda_{\max}(\kappa\Gamma) < \gamma$, что эквивалентно решению ЛМН

$$\gamma I_{n_x} - \kappa\Gamma \succ 0 \qquad \Gamma \succ 0$$

при заданных $\gamma > 0$, $\kappa > 0$

Модель линейного осциллятора — математического маятника — имеет вид

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \hline z_1(t) \\ z_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 0,01 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & -2\xi & 0 & 1 & 1 \\ \hline 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \hline w_1(t) \\ w_2(t) \\ \hline u(t) \end{array}\right]$$

Неопределенные параметры — частота собственных колебаний и коэффициент демпфирования:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \qquad \omega_0 = 15$$
$$\xi = \xi_0 + \Delta\xi \qquad \xi_0 = -0,1$$

- Колебания линейного осциллятора возбуждаются стохастическим внешним возмущением $w(t)$
- Система является неустойчивой для $\Delta\xi \leqslant 0,1$
- Управление $u(t)$ служит для стабилизации замкнутой системы при ненулевых начальных условиях под воздействием возмущения $w(t)$
- Модель линейного осциллятора дискретизована с шагом 0,001 с

Эталонная модель замкнутой системы построена для уровня средней анизотропии внешнего возмущения $a = 0,7$ и порогового значения анизотропийной нормы $\gamma_a = 0,0089$

- Анизотропийная норма эталонной модели замкнутой системы

$$\|\overline{F}\|_a = 0,0080523 < \gamma_a$$

Параметры алгоритма адаптации

$$K_{k+1} = K_k - \rho(x_k)\Sigma G(x_{k+1} - \overline{x}_{k+1})x_k^{\mathrm{T}}\Gamma$$

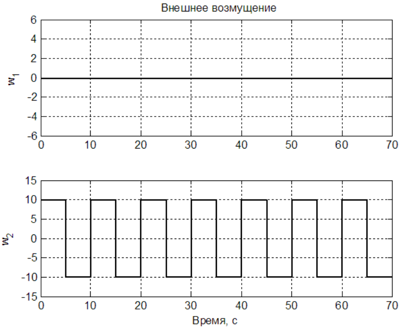
для выбранного значения $\gamma = 5$ получены из решения соответствующих ЛМН и равны

$$G = \begin{bmatrix} 4,99952868 & 0,00249997 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \qquad \Sigma = 0,79999365 \qquad \Gamma = 0,08 \cdot I_2$$

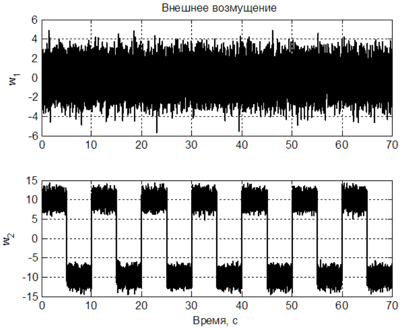
Нормализующая функция выбрана в форме

$$\rho(x_k) = \frac{3}{1 + x_k^{\mathrm{T}} x_k}$$

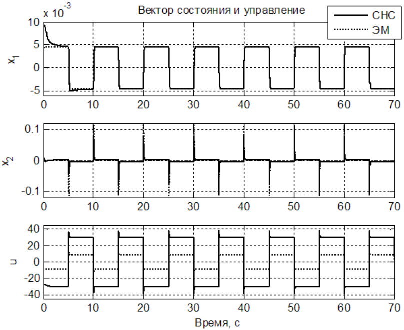
Детерминированные возмущения

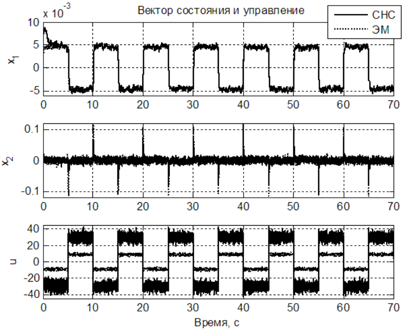


Стохастические возмущения

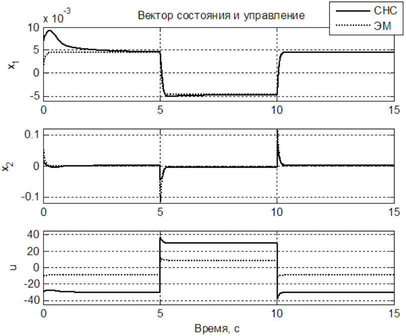


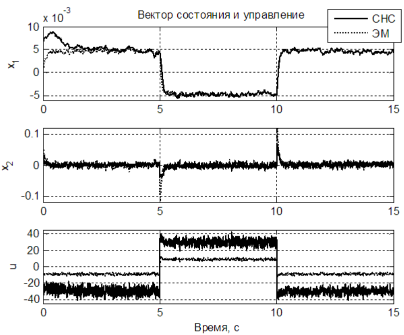
Вектор состояния x_k и управление u_k



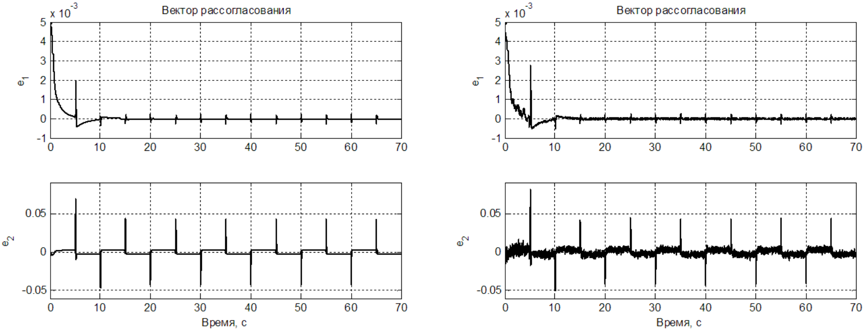


Вектор состояния x_k и управление u_k

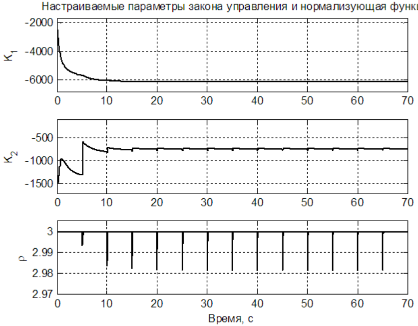


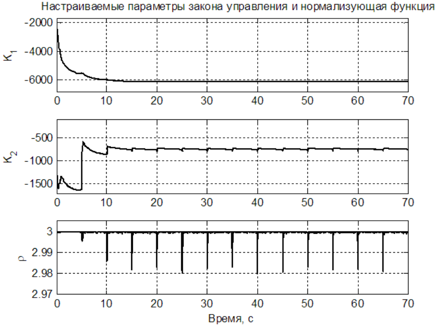


Вектор рассогласования e_k

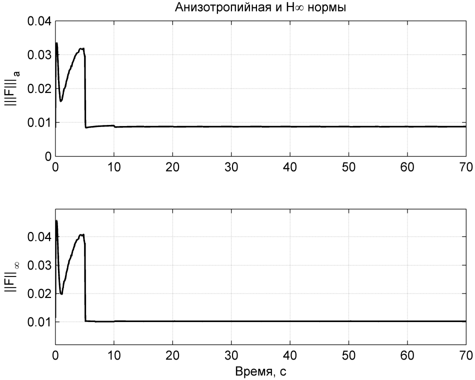


Настраиваемые коэффициенты усиления K_k и нормализующая функция $\rho(x_k)$





Анизотропийная и $\mathcal{H}_\infty$ нормы замкнутой системы для каждого значения K_k



- По завершении процесса настройки параметров закона адаптивного управления в замкнутой возмущенной системе в конечной точке (70 с)

$$\frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} = 0,0087784 < \gamma_a = 0,0089 \quad \text{и} \quad \frac{\|Z\|_2}{\|W\|_2} = 0,0108742 > \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}$$

Из анализа результатов моделирования можно заключить, что

- в процессе адаптивной настройки коэффициентов усиления закона управления рассогласование между состояниями замкнутой СНС и ЭМ уменьшается и с определенного момента времени остается ограниченным как для детерминированного, так и для стохастического возмущения
- наблюдается сходимость настраиваемых коэффициентов усиления адаптивного закона управления и их ограниченные флуктуации в некоторой окрестности установившихся значений, обусловленные периодическим характером внешнего возмущения
- осуществляется слежение СНС за траекториями ЭМ с некоторой относительно небольшой ограниченной ошибкой, вызванной периодичностью и стохастическим характером внешнего возмущения
- по завершении ярко выраженного процесса адаптивной настройки коэффициентов усиления закона управления отношение мощностной нормы регулируемого выхода СНС к мощностной норме входа возмущения не превышает порогового значения, определенного для анизотропийной нормы ЭМ замкнутой системы

- Поставлена и решена задача синтеза адаптивного анизотропийного управления для дискретной линейной стационарной системы, математическая модель которой содержит неопределенные параметры, с полностью измеряемым вектором состояния, работающей под воздействием внешних стохастических возмущений с ограниченной средней анизотропией
- Построенная замкнутая адаптивная система является беспоисковой самонастраивающейся системой, настройка параметров основного контура управления производится без предварительной идентификации модели объекта управления
- Синтез алгоритма адаптации осуществляется для явной эталонной модели замкнутой системы методом прямого адаптивного управления, основанным на применении функции Ляпунова в логарифмической форме
- Синтез эталонной модели, а также расчет параметров алгоритма адаптации производится методами выпуклой оптимизации и ЛМН
- Для практической реализации алгоритмов адаптивного анизотропийного управления необходимо получить решение задачи построения адаптивного анизотропийного оценивателя состояния системы и внешнего возмущения. Это будет сделано в 2023 году...

К 75-летию со дня рождения Александра Петровича Курдюкова

Спасибо за внимание!