Левая асимптотика анизотропийной нормы в задаче оценивания для стационарных систем

Докладчик: Белов И.Р., к.ф.м.н., с.н.с. лаб.1

23 мая 2023 года

Основные определения

Относительная энтропия, или информационное отклонение Кульбака-Лейблера меры Q относительно P (при соблюдении условия абсолютной непрерывности $Q \ll P$):

$$\mathbf{D}(Q||P) = \mathbf{E}_Q \left[\ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right]. \tag{1}$$

Анизотропия случайного вектора $w \in \mathbb{L}_2^m$ с распределением Q:

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(Q||P_{m,\lambda}). \tag{2}$$

Средняя анизотропия стационарной эргодической последовательности $W = \{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ случайных векторов $w_k \in \mathbb{L}_2^m$:

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}, \quad W_{0:N-1} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Основные определения

Формирующий фильтр для последовательности гауссовских случайных векторов $W = \{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$w_k = \sum_{j\geqslant 0} g_j v_{k-j}, \quad G(z) = \sum_{k\geqslant 0} g_k z^k, \quad \|G\|_2 < +\infty. \tag{4}$$

Среднеквадратичный коэффициент усиления для линейной системы $F : W \to Z$:

$$\mathbf{Q}(F, W) = \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}, \text{ где } G : V \to W. \tag{5}$$

Анизотропийная норма линейной системы:

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} \mathbf{Q}(F, W). \tag{6}$$

Объект исследования

Исходная система:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \tag{7a}$$

$$y_k = Cx_k + Dw_k, \tag{7b}$$

$$z_k = x_k. \tag{7c}$$

Общий вид линейного оценивателя E:

$$\widehat{x}_{k+1} = (A - KC)\widehat{x}_k + Ky_k, \tag{8a}$$

$$\widehat{z}_k = (I - MC)\widehat{x}_k + My_k. \tag{8b}$$

Система в ошибках оценивания $F(E)$:

$$\widetilde{x}_{k+1} = (A - KC)\widetilde{x}_k + (B - KD)w_k, \tag{9a}$$

$$\widetilde{z}_k = (I - MC)\widetilde{x}_k + (-MD)w_k. \tag{9b}$$

Задача: найти такой E, что

$$\|F(E)\|_a \leqslant \gamma \to \min. \tag{10}$$

Свойство анизотропийной нормы

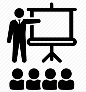
Для несферических систем, т.е. когда выполнено $\|F\|_2 < \sqrt{m}\|F\|_\infty$, анизотропийная норма удовлетворяет цепочке неравенств

$$\frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} = \underbrace{\lim_{a\to 0+0} |\!|\!|F|\!|\!|_a}_{\text{левая асимптотика}} \leqslant |\!|\!|F|\!|\!|_a < \underbrace{\lim_{a\to +\infty} |\!|\!|F|\!|\!|_a}_{\text{правая асимптотика}} = \|F\|_\infty. \qquad (11)$$

Свойство анизотропийной нормы

Для несферических систем, т.е. когда выполнено $\|F\|_2 < \sqrt{m}\|F\|_\infty$, анизотропийная норма удовлетворяет цепочке неравенств

$$\frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} = \underbrace{\lim_{a\to 0+0} |\!|\!|F|\!|\!|_a}_{\text{левая асимптотика}} \leqslant |\!|\!|F|\!|\!|_a < \underbrace{\lim_{a\to +\infty} |\!|\!|F|\!|\!|_a}_{\text{правая асимптотика}} = \|F\|_\infty. \qquad (11)$$



30 сентября 2014 г. состоялся семинар лаборатории № 7 ИПУ РАН, на котором Тимин В.Н. сделал доклад “Многокритериальная анизотропийная фильтрация на конечном горизонте”.

Два вопроса:
- как устроен анизотропийный оцениватель при $a \to 0+0$?
- когда именно можно использовать $\mathbf{H}_2$-фильтр вместо анизотропийного оценивателя при $a \to 0+0$?

Левая асимптотика в задаче анализа

В работе

[Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Асимптотика низотропийной нормы линейных стационарных систем // Автомат. и телемех., 1999, №3, 78–87]

были получены формулы, описывающие асимптотическое поведение анизотропийной нормы стационарной системы. В частности, было показано, что при $a \to 0+0$

$$\|F\|_a = \frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} \left(1 + \sqrt{\frac{Qa}{m}} + \bar{o}(a) \right), \tag{12}$$

где

$$Q = \frac{m\|F\|_4^4 - \|F\|_2^4}{\|F\|_2^4}. \tag{13}$$

Левая асимптотика в задаче синтеза анизотропийного оценивателя

левая асимптотика
анизотропийного оценивателя

оптимальный случай

$$E_a \in \operatorname{Arg}\min_{E} \|F_{\widetilde{z}w}(E)\|_a$$

$$J(a) = \|F_{\widetilde{z}w}(E_a)\|_a$$

$$\lim_{a \to 0+0} J(a) = ?$$

субоптимальный случай

$$E_b \in \operatorname{Arg}\min_{E}\{\gamma : \ \|F_{\widetilde{z}w}(E)\|_b \leqslant \gamma\}$$

$$J(a, b) = \|F_{\widetilde{z}w}(E_b)\|_a$$

$$\lim_{\max\{a,b\} \to 0+0} J(a, b) = ?$$

Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки.

Левая асимптотика в задаче синтеза анизотропийного оценивателя

Оптимальный случай (И.Г. Владимиров)

$J(a) = J(a, F(E))$, где $F(E)$ – “макет” системы (т.е. также включает в себя настраиваемые коэффициенты).

Оптимальные варианты:

$$F_a = \arg\min_{F(E)} J(a, F(E)), \tag{14a}$$

$$F_0 = \arg\min_{F(E)} J(0, F(E)). \tag{14b}$$

Левая асимптотика в задаче синтеза анизотропийного оценивателя

Оптимальный случай (И.Г. Владимиров)

С учетом того, что $J(a) = J(a, F(E))$ является достаточно гладкой функцией по совокупности своих переменных, можно показать, что при $a \to 0+0$ имеет место представление

$$J(a, F_a) = c_0(F_0) + c_1(F_0)\sqrt{a} + \frac{1}{2}\left(c_2(F_0) - \frac{(c_1'(F_0))^2}{c_0''(F_0)}\right)a + \bar{o}(a), \quad (15)$$

где

$$c_0(F(E)) = J(0), \quad (16a)$$

$$c_1(F(E)) = \partial_{\sqrt{a}} J(a)\Big|_{a=0}, \quad (16b)$$

$$c_2(F(E)) = \partial^2_{\sqrt{a}} J(a)\Big|_{a=0}. \quad (16c)$$

Левая асимптотика в задаче синтеза анизотропийного оценивателя

Субоптимальный случай (И.Р. Белов, А.Ю. Кустов)

Можно показать, что при $b \to 0+0$ субоптимальный анизотропийный оцениватель допускает разложение

$$E_b = E_0 + \sqrt{b}E_1 + \underbrace{bE_2 + \ldots}_{\bar{o}(\sqrt{b})}, \tag{17}$$

где E_0 соответствует $\mathbf{H}_2$-оптимальному оценивателю.

Наши задачи – определить коэффициенты E_1 и максимальный порог средней анизотропии внешнего возмущения, до которого $\mathbf{H}_2$-фильтр с хорошей точностью аппроксимирует анизотропийный оцениватель, т.е.

$$\frac{\|F(E_b)\|_a}{\|F(E_0)\|_0} \leqslant 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = \bar{o}(1). \tag{18}$$

Левая асимптотика в задаче синтеза анизотропийного оценивателя

Субоптимальный случай (И.Р. Белов, А.Ю. Кустов)

Решение первой задачи имеет вид

$$K_1 = (AP_1C^{\mathrm{T}} + BL_1P_0C^{\mathrm{T}} + AP_0(DL_1)^{\mathrm{T}} - K_0T_1)T_0^{-1}, \tag{19a}$$

$$M_1 = (P_1C^{\mathrm{T}} + P_0(DL_1)^{\mathrm{T}} - M_0T_1)T_0^{-1}, \tag{19b}$$

где матрицы с индексами “0” соответствуют $\mathbf{H}_2$-оптимальному случаю, а остальные находятся из решения системы *линейных матричных уравнений*. При этом

$$\frac{\|F(E_b)\|_a}{\|F(E_0)\|_0} = \left(1 + c_1\sqrt{a} + c_2\sqrt{b}\right)\left(1 - c_3\sqrt{a}\right) + \bar{o}(\max\{a, b\}), \tag{20}$$

где c_i – некоторые постоянные, связанные с системой $F_0 = F(E_0)$.

Левая асимптотика в задаче синтеза анизотропийного оценивателя

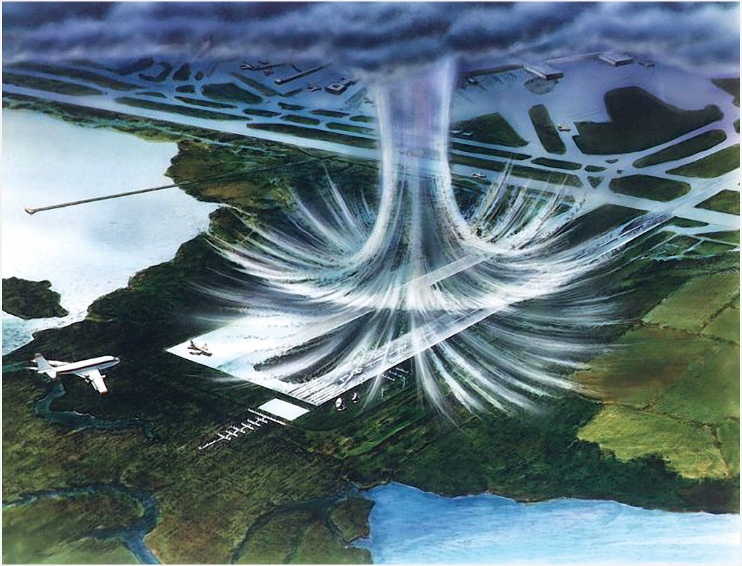
Субоптимальный случай (И.Р. Белов, А.Ю. Кустов)

Решение второй задачи имеет вид

$$\max\{a, b\} \leqslant \varepsilon^2 \left(\sqrt{\frac{Q}{m}} + c_2 \right)^{-2}. \tag{21}$$

Пример

Самолет на режиме посадки в условиях микропорыва ветра

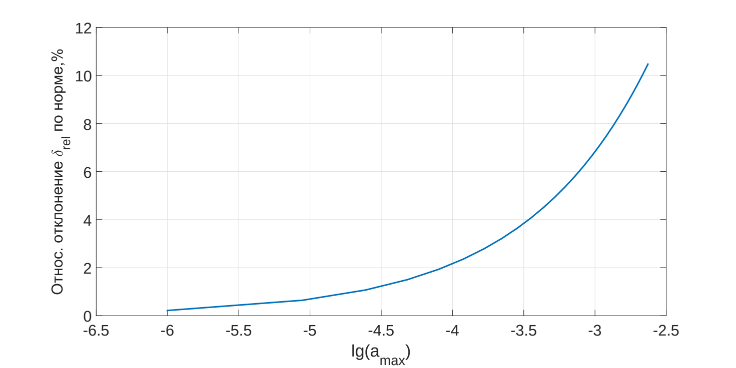


Пример

Решим следующие задачи:

1. найти пороговое значение средней анизотропии, вплоть до которого можно использовать оптимальный $\mathbf{H}_2$-фильтр (при разрешенном отклонении от оптимального значения в 5%);
2. получить приближенную формулу для субоптимального анизотропийного оценивателя для значений средней анизотропии ниже найденного в п.1 порога.

Пример



$$\delta_{\text{rel}} = \frac{\|F(E_b)\|_a - \|F(E_0)\|_2/\sqrt{m}}{\|F(E_0)\|_2/\sqrt{m}} \cdot 100\% = 5\% \;\Rightarrow\; \max\{a, b\} \approx 0.0006.$$

Пример

Приближенный субоптимальный анизотропийный оцениватель:

$$E_a \approx E_0 + \sqrt{a} E_1, \quad \sqrt{a} \approx 0.024, \tag{22}$$

$$E_0 = \left[\begin{array}{c|c} A - K_0 C & K_0 \\ \hline I - M_0 C & M_0 \end{array}\right], \quad E_1 = \left[\begin{array}{c|c} -K_1 C & K_1 \\ \hline -M_1 C & M_1 \end{array}\right], \tag{23}$$

$$K_0 \approx \begin{bmatrix} 0.0093 & 0.0001 \\ 0.0014 & 0.0039 \\ -0.0041 & -0.0019 \\ 0 & 0.001 \\ 0.0001 & 0.0138 \\ -0.0031 & -0.0014 \\ 0.0058 & 0.003 \\ 0.013 & -0.005 \\ 0.019 & 0.0094 \\ 0.0158 & -0.2312 \\ -0.2954 & 0.9168 \\ -5.644 & -2.599 \end{bmatrix}, \quad K_1 \approx \begin{bmatrix} 0.0104 & 0.0008 \\ 0.0011 & 0.0034 \\ 0.0099 & 0.0047 \\ 0.0004 & 0.0015 \\ 0.0008 & 0.0201 \\ 0.0067 & 0.0032 \\ -0.0128 & -0.006 \\ -0.019 & -0.0087 \\ -0.0415 & -0.0195 \\ 0.1646 & 0.0821 \\ -0.2378 & -0.1326 \\ 12.2142 & 5.75 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$M_0 = \ldots, \quad M_1 = \ldots. \tag{25}$$

Пример

Теоретические значения норм при использовании E_0 и $E_a \approx E_0 + \sqrt{a}E_1$:

$$\|F(E_0)\|_2/\sqrt{m} \approx 0.661, \qquad \interleave F(E_a) \interleave_a \approx 0.6952. \tag{26}$$

$\mathbf{H}_2$-фильтр (не робастный)

анизотропийный фильтр (робастный)

Эмпирическое значение $\mathbf{H}_2$-нормы будет больше приведенного *всегда* при окрашенных возмущениях. Для анизотропийного фильтра такой же эффект происходит *только если* $a > a_{\max}$, т.е. есть некоторый запас в робастности.

Спасибо за внимание!