Анизотропийное управление в дескрипторных системах. Спектральная энтропия

А.А. Белов

Лаборатория №1 Динамических информационно-управляющих систем

ИПУ РАН, г. Москва

Основные результаты

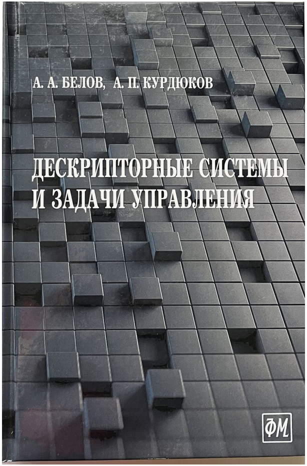


Рис.: Монография 2015 г.

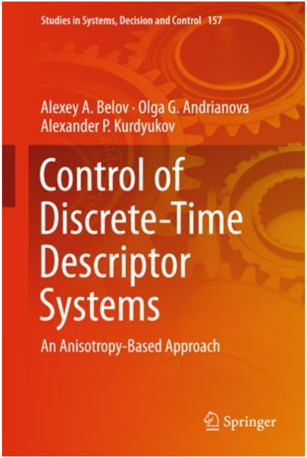


Рис.: Монография 2018 г.

План доклада

- Введение
- Теория анизотропийного управления дескрипторными системами
  - Анизотропийный анализ дескрипторных систем
  - Задачи оптимального анизотропийного управления
  - Задачи субоптимального анизотропийного управления
  - Задачи робастного анизотропийного анализа и управления
- Спектральная энтропия — обобщение на непрерывные системы.

Анизотропийное управление в дескрипторных системах

Предпосылки развития методов анизотропийного управления в дескрипторных системах

Классическая постановка:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k)+Dw(k) \end{aligned}$$

Дескрипторная постановка:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k)+Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k)+Dw(k) \end{aligned}$$

Дескрипторная система — система, которую нельзя явно разрешить относительно левой части уравнения (формальное). Передаточная функция: $P(z)=C(zE-A)^{-1}B+D$.

ВЫВОДЫ:

Обыкновенная система — частный случай дескрипторной системы при $E=I_n$.

Анизотропийная норма

$$|||P|||_a = \sup_{G\in\mathbf{G}_a} \frac{\|PG\|_2}{\|G\|_2}, \ \mathbf{G}_a = \left\{G \in \mathscr{H}_2^{m\times m} : \ \overline{\mathbf{A}}(G) \leqslant a\right\}.$$

$\mathbf{G}_a$ — множество формирующих фильтров.

Определение дескрипторной системы

Неформальное определение

Дескрипторная система — система, состоящая из переменных, имеющих физический смысл.

Преимущества

- Удобство при составлении математической модели.
- Переменные состояния имеют физический смысл.
- Можно описать больше объектов.
- Избыточность в описании.

Недостатки

- Физические законы бывают алгебраическими, это приводит к вырожденности модели.
- Сложности в построении численных решений уравнений.
- Нарушение принципа причинности.
- Нетривиальные обобщения существующих теорий.

Решение LQG/$\mathscr{H}_2$ и $\mathscr{H}_\infty$ задач для дескрипторных систем

LQG/$\mathscr{H}_2$ задачи

- L. Dai, 1989 г., решение LQG задачи на основе преобразования к эквивалентной форме.
- T. Katayama, 1996 г., решение в терминах обобщенных алгебраических уравнений Риккати.
- S.F. Tudor, C. Oara, 2014 г., решение в частотной области в терминах передаточных функций.

$\mathscr{H}_\infty$ задачи

- S. Xu, J. Lam, 2006 г., решение по состоянию в терминах нелинейных матричных неравенств.
- M. Chadli, M. Daruach, 2012 г., билинейные матричные неравенства.
- Yu. Feng, M. Yagoubi, 2013 г., линейные матричные неравенства.
- Задачи робастного $\mathscr{H}_\infty$управления: Ji, 2007 — нелинейные матричные неравенства, M. Chadli, M. Daruach, 2014 — билинейные МН и достаточные ЛМН условия.

Анизотропийный анализ дескрипторных систем

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k)+Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k)+Dw(k), \end{aligned} \qquad (1)$$

$w(k)$ – случайное возмущение с нулевым средним ограниченной средней анизотропией, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$.

Задача вычисления нормы

Система является допустимой, известен уровень средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ входного возмущения. Требуется вычислить $|||P|||_a$.

Задача проверки ограниченности нормы

Задан скаляр $\gamma > 0$, известен уровень средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ входного возмущения, $\operatorname{rank} E = \operatorname{rank}[E \quad B]$. Необходимо проверить выполнение условий:

1. Система (1) допустима,
2. $|||P|||_a < \gamma$

Анизотропийный анализ дескрипторных систем

Задача вычисления нормы

Задача вычисления анизотропийной нормы допустимой дескрипторной системы решена в 2009 г. Решение сводится к переходу к эквивалентной форме, решению уравнения Риккати, Ляпунова и специального вида.

Задача оценки нормы

- В 2013 г. получены условия ограниченности нормы в виде нестрогих матричных неравенств.
- В 2013 г. получены условия на основе решения обобщенного алгебраического уравнения Риккати.
- В 2015 г. получены строгие условия ограниченности нормы.

Анизотропийная норма вычисляется при решении задачи минимизации параметра γ на множестве переменных, удовлетворяющих выпуклым ограничениям.

Общая постановка задачи оптимального синтеза

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \\
z(k) &= C_z x(k) + D_{zw} w(k) + D_{zu} u(k), \\
y(k) &= C_y x(k) + D_{yw} w(k),
\end{aligned}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — случайное внешнее возмущение, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — сигнал управления, $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ — измеряемый выход. $w(k)$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a \geqslant 0$.

Задача оптимального управления

Необходимо найти закон управления $u(k) = K(x(k), y(k))$, который делает замкнутую систему допустимой и при этом минимизирует ее анизотропийную норму, определяемую соотношениями

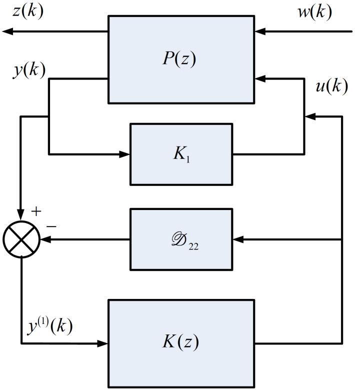
$$
\sup_{\overline{\mathbf{A}}(G) \leqslant a} \frac{\|T_{zw}(P,K)G\|_2}{\|G\|_2} \to \min_K, \; G \in \mathbf{G}_a. \tag{2}
$$

Решение задачи оптимального управления по состоянию

Закон управления $u = Kx(k)$ находится из решения системы уравнений:

- два обобщенных алгебраических уравнения Риккати, одно из которых отвечает за наихудший формирующий фильтр, а другое — за решение взвешенной задачи $\mathscr{H}_2$ управления,
- обобщенного уравнения Ляпунова, которое отвечает за вычисление $\mathscr{H}_2$ нормы формирующего фильтра,
- нелинейного уравнения, отвечающего за уровень средней анизотропии входного возмущения.

Решение задачи оптимального управления по выходу



Решение задачи состоит из нескольких этапов:

1. Каузализация системы. Вводится контур обратной связи, который делает систему причинной.
2. Приведение системы к обыкновенной. Система приводится к обыкновенному виду через эквивалентную форму.
3. Приведение к стандартной форме. На данном этапе вводится дополнительное слагаемое, обеспечивающее выполнение условия $\mathscr{D}_{yu} = 0$ для эквивалентной системы.
4. Синтез оптимального регулятора для эквивалентной системы.

Общая постановка задачи субоптимального синтеза

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \\ z(k) &= Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k). \end{aligned}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a \geqslant 0$, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — управление

1. система является причинно управляемой и стабилизируемой;
2. выполнено ранговое ограничение

$$\operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & B_w \end{bmatrix}.$$

Задача субоптимального управления

Найти закон управления $u(k) = Kx(k)$, при котором замкнутая система является допустимой и выполнено неравенство

$$|||T_{zw}|||_a \leqslant \gamma.$$

Задачи синтеза робастного управления

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A_\Delta x(k) + B_{\Delta w} w(k) + B_{\Delta u} u(k), && (3) \\ y(k) &= C_\Delta x(k) + D_{\Delta w} w(k), && (4) \end{aligned}$$

$A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_{\Delta w} = B_w + M_B^w \Delta N_B^w$, $B_{\Delta u} = B_u + M_B^u \Delta N_B^u$, $C_\Delta = C + M_C \Delta N_C$, $D_{\Delta w} = D_w + M_D \Delta N_D$. Здесь матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s\times s}$ неизвестная матрица с ограниченной нормой $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leqslant I_s$. Предположим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}\left(E^{\mathrm{T}}\right) &= \operatorname{rank}\left[E^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}, N_C^{\mathrm{T}}\right], && (5) \\ \operatorname{rank}(E) &= \operatorname{rank}\left[E, B_w, M_B^w\right]. && (6) \end{aligned}$$

Анизотропийной нормой системы с параметрическими неопределенностями будем называть норму оператора P_Δ, определяемую следующим соотношением:

$$|||P_\Delta|||_a = \sup_{\Delta:\Delta^{\mathrm{T}}\Delta\leqslant I_s} \sup_{W\in\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} \frac{\|Y\|_{\mathscr{P}}}{\|W\|_{\mathscr{P}}}.$$

Общая постановка задач анализа и синтеза

Задача анализа

Пусть выполнено одно ограничение (6). Для системы с реализацией в пространстве состояний (3)–(4) и ограниченных по норме неопределенностей требуется проверить свойство робастной допустимости и выполнение ограниченности анизотропийной нормы системы в виде:

$$|||P_\Delta|||_a < \gamma$$

для известных числовых значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$.

Задача управления

Для системы с реализацией в пространстве состояний (3)–(4) и известного уровня средней анизотропии входного возмущения $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $(a \geqslant 0)$ требуется построить закон управления $u(k) = Kx(k)$, который делает систему робастно допустимой ($\mathfrak{D}$–допустимой) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы оператора замкнутой системы $\gamma > 0$.

Спектральная энтропия

Спектральная энтропия: обобщение на непрерывные системы

Пленарный доклад: Бойченко В.А., Курдюков А.П., Кустов А.Ю. From the Anisotropy-based Theory towards the s-entropy Theory / 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, Мехико, 2018.
Журнальная статья: Курдюков А.П., Бойченко В.А. A spectral method of the analysis of linear control systems // International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2019. Vol. 29, No. 4. pp. 667-679.

Аксиомы анизотропийной теории

- Анизотропия случайного вектора: относительная энтропия, наличие эталонного распределения.
- Средняя анизотропия случайной последовательности.

Аксиомы σ-энтропийной теории

- Существование преобразования Фурье для сигнала.
- Выражение спектральной энтропии постулируется.

$\mathfrak{N}$ норма вектора

Пусть $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — детерминированный или случайный сигнал. $\mathfrak{N}$ норма сигнала $w(t)$ определяется выражением:

$$\left\|w\right\|_{\mathfrak{N}}^2 = \mathfrak{N}\left(w^\top(t)\,w(t)\right),$$

где $\mathfrak{N}$ — линейный оператор, который преобразует евклидову норму $\left|w(t)\right|^2 = w(t)^\top w(t)$ в $\mathscr{L}_2$ или мощностную норму по правилу:

- $\left\|w(t)\right\|_{\mathfrak{N}}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}[\cdot]\,dt$ если $w(t) \in \mathscr{L}_2$;
- $\left\|w(t)\right\|_{\mathfrak{N}}^2 = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \mathbf{E}[\cdot]\,dt$ если $w(t)$ имеет конечную мощностную норму.

σ–Энтропия

Рассмотрим ковариационную свертку $K_w(\tau)$ сигнала $w(t)$ в форме:

$$K_w(\tau) = \mathfrak{N}\Big(w(t+\tau)\,w^\top(t)\Big).$$

Полагая, что преобразование Фурье сигнала $K_w(\tau)$ существует, определим спектральную плотность $w(t)$ как

$$S_w(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_w(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau. \tag{7}$$

Можно показать, что

$$\big\|w(t)\big\|^2_{\mathfrak{N}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}\,S_w(\omega)d\omega.$$

σ–Энтропия

Определим $\mathfrak{N}$ норму выхода $z(t)$ как

$$\|z(t)\|^2_{\mathfrak{N}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} S_z(\omega)\, d\omega,$$

где $S_z(\omega)$ — спектральная плотность $z(t)$. В частотной области $S_z(\omega)$ выражается в виде:

$$S_z(\omega) = F(i\omega)\, S_w(\omega)\, F^*(i\omega).$$

σ–Энтропия

Пусть $w(t)$ является случайным m–мерным сигналом с конечной $\mathfrak{N}$ нормой, тогда σ-энтропия $\mathfrak{S}(S_w)$ сигнала $w(t)$ определяется как

$$\mathfrak{S}(S_w) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\ln\det\frac{mS_w(\omega)}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}S_w(\lambda)\,d\lambda}\,d\omega. \tag{8}$$

где $\varphi(\omega_0,\omega)$ функция, которая обеспечивает сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\det S(\omega)\,d\omega. \tag{9}$$

В работе рассматривается функция

$$\varphi(\omega_0,\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}.$$

σ-энтропийная норма системы

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), & x(0) = 0, \\
z(t) = Cx(t) + Dw(t),
\end{cases}
\tag{10}
$$

где $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ — Гурвицева, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbf{R}^{p\times m}$, $x(t) \in \mathbf{R}^{n}$ — состояние, $z(t) \in \mathbf{R}^{p}$ — измеряемый выход, $w(t) \in \mathbf{R}^{m}$ — внешнее возмущение.

$$
F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{11}
$$

$$
\|w\|_{\mathfrak{N}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} S_w(\omega) d\omega.
$$

$$
\|z(t)\|_{\mathfrak{N}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} S_z(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} F(j\omega) S_w(\omega) F^*(j\omega) d\omega
$$

σ-энтропийная норма системы

Пусть система $F \in \mathscr{RH}_\infty$ и $w(t)$ — сигнал с конечной $\mathfrak{N}$ нормой и σ-энтропией равной $s \geqslant 0$. Тогда σ-энтропийная норма $\left|\left|\left|F\right|\right|\right|_s$ системы равна:

$$\left|\left|\left|F\right|\right|\right|_s^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S_w)\leqslant s} \frac{\left\|z(t)\right\|_{\mathfrak{N}}^2}{\left\|w\right\|_{\mathfrak{N}}^2} = \sup_{\mathfrak{S}(S_w)\leqslant s} \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}\left[\Lambda(\omega)S_w(\omega)\right] d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} S_w(\omega)\, d\omega}, \qquad (12)$$

где

$$\Lambda(\omega) = F^*(j\omega)F(j\omega).$$

Формулы для вычисления σ-энтропийной нормы системы в частотной области

Пусть $F \in \mathscr{R}\mathscr{H}_\infty$ и $w(t)$ входное возмущение с конечной $\mathfrak{N}$ нормой. Тогда для любого $s \geqslant 0$ σ-норма системы равна:

$$\left|\left|\left|F\right|\right|\right|_s^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}\left[\Lambda(\omega) S_*(\omega)\right] d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} S_*(\omega)\, d\omega}, \; S_*(\omega) = \left[I - q\Lambda(\omega)\right]^{-1}, \tag{13}$$

где $q \in \left[0, \left\|F\right\|_\infty^{-2}\right)$ — единственное решение уравнения:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0, \omega) \ln\det \frac{m\left[I - q\Lambda(\omega)\right]^{-1}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}\left[I - q\Lambda(\omega)\right]^{-1} d\omega} d\omega = s. \tag{14}$$

Спасибо за внимание!