РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ (ИПУ РАН)

К 85-летию ИПУ РАН

Ю. Л. Словохотов

ФИЗИКА ОБЩЕСТВА

Применение физических моделей в описании общественных явлений

ББК 22.18 22.1п 22.317 32.817 60.5 65.05 65.23 22.311

СЛОВОХОТОВ Ю.Л. **Физика общества: применение физических моделей в описании общественных явлений.** — М.: ЛЕНАНД. 2024. — 880 с.

ISBN 978-5-00237-048-1

Систематически рассмотрены современные направления общественных наук, в которых применяются модели и методы, заимствованные из физики. Приложения физики к анализу социума охватывают коллективное движение «живых» частиц (включая автомобильные и пешеходные потоки), процессы на графах и сетях, моделирующих социальные структуры, физические идеи в экономике, социологии, политологии, истории и некоторых других дисциплинах. Представлены сведения из элементарной и общей физики, а также элементы теоретической физики и физики сложных систем, используемые в феноменологическом моделировании социальных процессов. На доступном уровне рассмотрены соотношения теории графов, теории игр, теории вероятностей и другие математические конструкции, необходимые для квази-физического описания социума. Обсуждаются проявления распределенного интеллекта в динамике социальных систем, принципы его компьютерного моделирования и «комбинированный» коллективный интеллект человеческих сообществ. Для студентов и научных работников, интересующихся новыми областями междисциплинарной физики.

© Ю.Л. Словохотов, 2024
© ИПУ РАН, 2024
Печатный вариант: © ЛЕНАНД, оригинал-макет, оформление, 2024

Москва 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 9

ВВЕДЕНИЕ 15

ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЗИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К СОЦИУМУ

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ФИЗИКА: ЕЕ МОДЕЛИ И ФОРМУЛЫ В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ 21

1.1. Основные понятия механики 21

1.1.1. Кинематика 22

1.1.2. Сила, масса, энергия 25

1.1.3. Поле сил 27

1.1.4. Законы Ньютона 29

1.1.5. Механика в описании социальных систем 31

Модель социального поля 32

Гравитационная модель обмена 33

1.2. Элементарная физика макроскопических систем 35

1.2.1. Масштабы физических явлений и система единиц СИ 35

1.2.2. Газовые законы 37

Функция Кобба-Дугласа 40

Оценка стратегического потенциала государства 41

1.3. Законы постоянного тока 41

Законы Кирхгофа 45

Задача о светофоре 46

Парадокс Браеса 47

1.4. Школьная математика: дифференцирование и интегрирование 50

1.4.1. Производная от функции 50

Производные элементарных функций 51

Некоторые свойства производной 52

Правило Лопиталя 53

Формула Тейлора 54

1.4.2. Интегралы 56

Неопределенный интеграл 56

Определенный интеграл 58

1.4.3. Дифференцирование и интегрирование функций нескольких переменных 59

Частные производные 60

Многократные интегралы 61

1.5. Дифференциальное исчисление в науках о человеке 63

1.5.1. Дифференциалы и интегралы в экономике 63

Функция Кобба-Дугласа: изокванты и изокосты 67

1.5.2. Количественные соотношения в экспериментальной психологии 69

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ОПИСАНИИ ОБЩЕСТВЕННЫХ ЯВЛЕНИЙ 74

2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения 74

Уравнение Мальтуса 75

Логистическое уравнение 77

2.2. Классическая механика простых систем 81

Линейный осциллятор 82

Математический маятник и колебательный контур 84

Физический маятник: малые отклонения от равновесия 86
Физический маятник: общий случай 88
2.2.1. Основные положения классической механики 90
Принцип наименьшего действия 92
Законы сохранения в механике 95
Упругое столкновение частиц 96
2.2.2. Математическое отступление: линии и поверхности 2-го порядка 100
Эллипс 100
Гипербола 101
Парабола 102
Поверхности 2-го порядка 102
2.3. Элементы молекулярной физики и термодинамики 105
Связь параметров идеального газа с кинетической энергией его молекул 108
Распределение Больцмана-Гиббса и распределение Максвелла 112
2.3.1. Энтропия и термодинамические потенциалы 114
Экономика и энтропия 120
«Свободная энергия мысли» 123
2.4. Динамическое равновесие и химические реакции 123
2.5. Фазовые переходы и критические явления 128
Критические параметры фазовых переходов 131
Гиперболический рост населения Земли в XV – XX вв. 133

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 137
3.1. Некоторые сведения из математики 137
3.1.1. Мнимая единица и комплексные числа 138
3.1.2. Векторы и матрицы 143
Векторы 143
Матрицы и определители 145
Расчет обратной матрицы 151
Леонтьевские матрицы ввода-вывода 152
Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц 156
Начальные сведения о тензорах и дифференциальных операторах 159
3.2. Дифференциальные уравнения в частных производных 163
3.2.1. Общие положения 163
3.2.2. Уравнение теплопроводности 165
Уравнение Блэка-Шоулза 167
3.2.3. Волновое уравнение 168
Стоячие волны 175
Схема вывода уравнения стоячих волн 176
3.2.4. Уравнение Лапласа 178
3.2.5. Течение жидкости 179
Закономерности течения жидкости 180
Уравнение Навье-Стокса 183
Критерий Рейнольдса 184
3.3. Элементы квантовой механики 185
3.3.1. Волновая функция и уравнение Шредингера 187
3.3.2. Простейшие квантовые системы 192
Частица в потенциальной яме 192
Матрица оператора Гамильтона 196
Эмиссионные спектры атомов и «социальный лазер» 197
Свободное движение квантовой частицы 198

Волны де Бройля и соотношение неопределенностей 199
Интерференция волн де Бройля при рассеянии потока частиц 201
Законы сохранения и «квантовая запутанность» 203
3.4. Компьютерное моделирование многочастичных систем 204
3.4.1. Принципы статистической термодинамики 204
3.4.2. Методы расчета состояний многочастичных систем 207
Метод молекулярной механики (ММ) 207
Метод Монте-Карло (МК) 208
Метод молекулярной динамики (МД) 209
Модели Изинга и Поттса 211
3.5. Релятивистские представления в физике 214
3.5.1. Инерциальные системы и преобразования Лоренца 215
Масса, энергия и импульс релятивистской частицы 219
3.5.2. Геометрия пространства-времени 221
Евклидовы и псевдоевклидовы пространства 222
Четырехмерное пространство событий 223
3.5.3. Достижения релятивистской физики 225

ГЛАВА 4. СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ 227
Введение 227
4.1. «Аномальные» физические системы 228
Сильные проявления межчастичных и межагентных взаимодействий 229
4.2. Нелинейные системы 231
Солитоны 231
Ячейки Бенара 232
Другие нелинейные системы 233
4.2.1. Модель Лотки-Вольтерра 234
4.2.2. Колебательные химические реакции 237
Брюсселятор 238
Реакция Белоусова-Жаботинского 239
«Мексиканская волна» 241
О происхождении жизни на Земле 241
4.3. Анализ нелинейных дифференциальных уравнений 244
4.3.1. Особые точки нелинейных уравнений 2-го порядка 244
4.3.2. Странный аттрактор и детерминированный хаос 251
4.4. Стохастические системы 257
4.4.1. Мезоскопические системы и процессы в них 258
Броуновское движение 258
Стохастические дифференциальные уравнения 260
Стохастический резонанс 263
4.4.2. Дискретные отображения 264
Логистическое отображение и его свойства 266

ЧАСТЬ II. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ 272

ГЛАВА 5. ДВИЖЕНИЕ «ЖИВЫХ» ЧАСТИЦ 275
5.1. Движение бактерий и бактериальные автоволны 275
Моделирование движения «живых частиц» 279
5.2. Коллективное перемещение в трехмерном пространстве: рыбы, птицы и дроны 281
Клеточные автоматы 284
5.3. Динамика автомобильных потоков 286

Макроскопические модели 289
Микроскопические модели 291
Клеточные автоматы в описании автомобильных потоков 293
Прерывистое управление 295
Системы управления городским транспортом 297
5.4. Движение пешеходов 298
5.5. Управление толпой 303

ГЛАВА 6. СТРУКТУРА СОЦИУМА: ГРАФЫ И СЕТИ 308
6.1. Графы и их характеристики 308
Графы и транспортные потоки 314
Задача о ранце 317
Задача о коммивояжере 319
Когнитивные карты 320
Комплексное оценивание 321
6.2. Сети и их характеристики 324
6.2.1. Случайные графы 325
Графы Эрдеша-Реньи 325
Графы Уоттса-Строгаца 327
«Растущие» безмасштабные графы 329
6.2.2. Сложные сети 330
Математическое отступление: характеристики случайных величин 336
Сложные сети в реальном мире 337
Нейронные сети мозга 338
6.3. Процессы на сетях 341
Перколяция 342
Математические модели эпидемиологии 344
Устойчивость сетей 346
Каскадные процессы 348
6.3.1. Сеть Интернет и ее составные части 349
Архитектура сети Интернет 349
Компоненты Сети 352
Трафик информации и поиск в Интернет 357
6.3.2. Сложные сети и неевклидова геометрия 360
6.4. Фазовые переходы в сетевых структурах 365
Термодинамические модели 365
Модель Изинга на сетях 366
Синхронизация узлов сети 367
6.4.1. Взаимодействие процессов на сетях. Ко-эволюция 370

ГЛАВА 7. ТЕОРИЯ ИГР В ОПИСАНИИ СОЦИУМА 375
7.1. Введение: конкуренция как игра 375
Первое математическое отступление: задачи оптимизации 378
Второе математическое отступление: теория групп 379
7.2. Некоторые понятия математической теории игр 382
7.2.1. Простейшие игры двух лиц 382
Орел или решка 382
Перекресток 384
Семейный спор 385
Дилемма бандита 386

7.2.2. Преобразования платежной матрицы ... 387
Предпочтения и полезность ... 387
Упрощение матрицы платежей ... 389
7.3. Решения матричной игры ... 390
Равновесие в доминирующих стратегиях ... 391
Равновесие в осторожных стратегиях ... 392
Равновесие Нэша и оптимум Парето ... 394
7.4. Равновесие в смешанных стратегиях ... 396
Алгебраическое решение ... 397
Графическое решение ... 398
Игра полковника Блотто ... 400
7.5. Непрерывные игры ... 402
«Горизонтальная конкуренция», или мороженое на пляже ... 403
Борьба за ренту ... 405
Потенциальные игры ... 406
Дуополия Курно ... 407
7.6. **Другие виды некооперативных игр** ... 408
Крестики-нолики на доске 3×3 ... 409
Аукционы ... 411
7.6.1. Игры с неполной информацией ... 413
Полицейский и подозреваемый ... 413
Дуополия Курно с неполной информацией ... 415
Рефлексивные игры ... 416
Пенальти в футболе ... 416
7.6.2. Ограниченная рациональность ... 418
«Игра в меньшинство» ... 418
7.6.3. Эволюционные игры ... 421
Ястребы и голуби ... 422
7.7. Кооперативные игры ... 426
Математическое пояснение: выпуклые множества ... 432
Формальные соотношения кооперативных игр ... 433
Вектор Шепли ... 435
Устойчивые браки ... 437
7.8. Игры и тропическая алгебра ... 441
Третье математическое отступление: группы и алгебры ... 442
Тропическая алгебра ... 443

ГЛАВА 8. ФИЗИЧЕСКИЕ ИДЕИ В ЭКОНОМИКЕ ... 447
Очень краткий исторический очерк ... 448
8.1. Основы экономики и физика ... 450
Экономика и физические принципы ... 452
Экономическое равновесие ... 454
Управление экономикой: многокритериальная оптимизация ... 459
8.2. Некоторые соотношения теории вероятностей ... 462
8.2.1. Вероятности случайных событий ... 462
Математическое отступление: сведения о множествах ... 463
8.2.2. Распределения вероятностей ... 466
Дискретные случайные величины ... 466
Непрерывные распределения ... 470
А. Нормальное распределение ... 470

Б. Логарифмически нормальное распределение 472
В. Распределение Коши 473
Г. Распределение Гиббса 475
Д. Распределение Парето 475
8.2.3. Моменты распределений и статистические параметры выборок 477
Статистические средние величины 479
8.3. Экономика и энтропия 482
8.3.1. Термодинамическая энтропия и экономика 482
Феноменологическая энтропия в экономике 483
8.3.2. Статистическая энтропия в экономических моделях 486
Энтропия Больцмана-Гиббса и вероятность 487
Энтропия Шеннона 489
8.4. Деньги и физика 492
8.4.1. Кинетическая теория денег 495
8.4.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа и максимум энтропии 499
8.4.3. Монетаристские теории 502
Денежные агрегаты 506
Современная монетаристская теория 507
Криптовалюты 509
8.5. Сетевые структуры экономики 510
Сеть мировой торговли 513
Сеть транснациональных корпораций 515
Другие модели сетевых структур 517
Агент-ориентированные модели 518
8.6. Биржа и эконофизика 519
8.6.1. Биржевые индексы 520
8.6.2. Биржевые данные и эконофизика 525
8.6.3. Прогнозирование биржевой динамики 529
Математическое отступление: фрактальные множества 530
Алгоритмическая торговля 535
8.6.4. Мировые финансово-экономические кризисы 537
Современный мировой кризис 2020-?? гг. 541
8.7. Экспериментальная экономика и квантовоподобные модели 544
Квантовомеханические модели биржи 545
Квантовая теория игр 549
Квантовоподобные модели принятия решений 551

ГЛАВА 9. ПРИНЦИПЫ ФИЗИКИ В ГУМАНИТАРНЫХ НАУКАХ 559
9.1. Общественные науки и методы физики 560
9.2. Методы точных наук в психологии и лингвистике 564
9.2.1. Математические модели семантики 565
Математическое отступление: главные компоненты и сингулярное разложение матриц 566
Латентный семантический анализ 572
9.2.2. Формальные модели лингвистики 577
«Игра в имена» 581
Нейролингвистическое программирование 583
9.2.3. Закон Ципфа 585
9.3. Физические модели в социологии 590
9.3.1. Иерархии и группы в социальных системах 593

Классификация агентов в социальной системе: блочное моделирование ... 596
Моделирование малых групп ... 598
9.3.2. Распространение мнений в социуме ... 603
Модель де Гроота ... 609
9.3.3. Содержательный анализ общественного мнения ... 611
9.3.4. Тематический анализ ... 614
Математическое отступление: неклассические виды энтропии ... 616
9.3.5. Моделирование коллективных действий ... 619
9.4. Математические методы политологии ... 627
9.4.1. Системы голосования ... 628
Манипулируемость выборов и теорема Эрроу ... 633
9.4.2. Парламентские процедуры ... 635
Индекс Банцафа ... 636
9.4.3. Некоторые математические модели политологии ... 638
Законы Бенфорда ... 644
9.4.4. Политические технологии ... 646
9.5. Моделирование конфликтов и войн ... 651
9.5.1. Количественные данные о конфликтах и войнах ... 654
Количественные соотношения в военных науках ... 654
Компьютерное моделирование войн и политических конфликтов ... 659
Модели прерывистого равновесия ... 660
9.5.2. Теория катастроф в применении к социальным системам ... 663
Пример: остойчивость корабля ... 665
Особенности потенциальных функций и классификация катастроф ... 667
Катастрофы в междисциплинарных задачах ... 668
9.6. Физическая и математическая история ... 669
9.6.1. Верификация и математическая обработка исторических данных ... 672
9.6.2. «Физическая история» ... 676
Поток солнечной энергии и климат ... 676
Солнечная активность и историческая динамика ... 679
9.6.3. Математическое моделирование исторических процессов ... 682

ЧАСТЬ III. РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ... 693

ГЛАВА 10. ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ИНТЕЛЛЕКТА И АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ... 695
10.1. Роевой интеллект ... 698
Научно-популярное отступление: общественные насекомые ... 698
10.1.1. Роевой интеллект общественных насекомых ... 702
10.1.2. Роевой интеллект других животных ... 705
Подчинение и иерархия среди животных ... 706
Роевой интеллект позвоночных ... 707
«Разум толпы» ... 708
10.2 Автономные аппараты и теория автоматического управления ... 711
10.2.1. Теория автоматического управления ... 711
Пример управления: задача о «шофере-убийце» ... 712
Динамика линейной системы с управлением ... 713
10.2.2. Автоматическое управление и робототехника ... 717
Техническое отступление: перемещения робота-пылесоса ... 717
Фильтр Калмана и пространство представлений ... 718
Навигация технических устройств ... 722
Групповая робототехника и роевой интеллект ... 723

10.3. Нечеткое управление ... 724
Нечеткие множества ... 725
Нечеткий контроллер ... 729

ГЛАВА 11. «ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ», ИСКУССТВЕННЫЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ ... 736
11.1 Интеллект как коллективный феномен ... 736
11.1.1. Социальный интеллект животных и человека ... 737
11.1.2. Коллективное свертывание информации ... 740
11.2. Типы искусственного интеллекта ... 742
11.2.1. Искусственные нейронные сети ... 743
Техническая иллюстрация: «водяная» ИНС XVII-го века ... 745
11.2.2. «Логический» ИИ ... 747
Математическое отступление: некоторые элементы формальной логики ... 748
Применение «логического» ИИ ... 753
Анализ формальных понятий ... 754
11.2.3. Компьютерное моделирование роевого интеллекта ... 757
11.3. Коллективный интеллект в человеческих сообществах ... 760
Групповой интеллект ... 762
Интеллект организационных систем ... 766
Коллективный интеллект «макроскопических» систем ... 771
Войны как прямой диспут РИ ... 773
Коллективный интеллект и вариационные принципы ... 775

ГЛАВА 12. ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНТЕЛЛЕКТА ... 779
12.1. Образы действительности в информационном пространстве ... 780
12.1.1. Общие положения ... 780
12.1.2. Детализация образов реальности: модули ... 782
Краниометрическое отступление: как отличить собаку от кошки без помощи ИНС ... 783
Цифровая обработка изображений ... 785
Теории восприятия в психологии ... 789
12.2. Модульная модель восприятия ... 793
12.2.1. Предварительные соображения ... 793
12.2.2. Описание модели ... 796
12.2.3. Направления детализации модульной модели ... 799
12.2.4. Модульная структура РИ ... 803
12.2.5. Модульная модель в ИИ ... 805

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 807

ПРИЛОЖЕНИЕ. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ ... 814

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ... 831

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ... 832

ПРЕДИСЛОВИЕ

Только физики соль, остальное всё ноль.
А филолог и химик – дубина!
студенческая песня физиков

Начало работы над книгой – серьезный шаг. В своей уже довольно долгой жизни автор лишь несколько раз вступал в такую полосу. Для того, чтобы часть вашего времени полностью принадлежала будущему созданию, нужны аргументы, в том числе эмоциональные. Хочу поделиться ими с читателями.

Физика и математика – солидные дисциплины. В средней школе, где жизнь сортировала нас для будущих профессий, они представлялись мне важными, необходимыми, но трудными и абсолютно неинтересными. Школьный учебник физики для восьмого класса выглядел как мешанина из унылых задач по арифметике («из пункта А в пункт Б против течения реки отправилась лодка… ») и не понятных подростку высокоумных рассуждений («близкодействие и действие на расстоянии»). То ли дело химия, где каждая реакция – волшебство! Ради него можно выучить наизусть большие массивы информации: например, таблицу Менделеева.

Получив химическое образование, автор вместе с филологами искренне порицал снобов-физиков, почему-то полагавших свою науку главной. И только потом, разбираясь с физическими данными в той же химии и пытаясь найти им объяснение, я начал понимать: со школьным учебником физики просто не повезло, но сама физика действительно выделяется из всех «естественных» дисциплин, постепенно поглощая их пограничные разделы. А математика – тоже совсем не одна из равноправных наук: она создает их общий язык, то есть формализованные схемы рассуждений в любой области (правда, доступные лишь немногим лицам с болезненной склонностью к абстрактному мышлению).

В XX веке математика, а вслед за ней и физика ворвались в гуманитарные области знания. Демографические данные, итоги социологических опросов и (главное!) цены акций на бирже стали восприниматься как результаты количественных измерений чего-то не вполне определенного под названиями «экономика», «политические пристрастия», «ожидания спекулянтов» и вообще «параметры социума». Массивы полученных чисел начали обрабатывать и обсуждать так, как принято в экспериментальной физике, отчего возникли не только новые термины, но и не вполне традиционные идеи. В который раз (см. Введение) в науках о человеке возродилась надежда на естественные науки, где уже построено описание явлений природы – а разве общество людей не природное явление? Потребовалось время, чтобы снова осознать: прямой перенос методов из одной дисциплины в другую некорректен, человеческое общество не сводится ни к движению планет, ни к термодинамике газа или физическим процессам в сколь угодно сложной конденсированной среде. Но, как и в прошлые годы, натиск физиков выявил явные аналогии «живых» и «неживых» систем, частично формализовал – и оставил без ответа серьезнейший вопрос о причинах их фундаментальной расходимости. Это мы и обсудим в книге.

Мнение математиков и физиков (а также «естественников» и инженеров) насчет определяющей роли точных наук в прогрессе человечества не совсем верно. Оно принимает за всемирный закон весьма особую динамику трех последних столетий, результаты которой человечеству еще предстоит корректировать. В историческом прошлом для продуктивного интереса к наукам – хоть естественным, хоть гуманитарным – любознательный индивидуум должен был жить значительно дольше тех 25-30 лет, которые отпускала ему природа в архаическом обществе. И эту глобальную революцию произвели совсем не математики,

которых тогда вообще не было, а древние сатрапы (понемногу выросшие из полуживотных вожаков человеческих стай) и лекари (так же эволюционировавшие из колдунов и шаманов). Первых инженеров и ученых-жрецов создали практические запросы всё тех же сатрапов («проведи воду в наши поля, и чтобы всегда была – не то на кол!») плюс естественное желание людей лучше и дольше жить. Геометры в античности не имели отношения к весьма мифологизированной арифметике: они размечали земельные участки, то есть главную древнюю собственность. На их интерпретацию, условно говоря, теоремы Пифагора, примерно как на теоретические построения современных экономистов, вполне могли влиять запросы заказчика. А такие важные отрасли знания, как строительство или оружейное дело, были ремеслами с секретами, передаваемыми по наследству. Локальные очаги культуры понемногу росли, подтягиваясь к высокому искусству и абстрактным понятиям, до очередного снижения потока солнечной энергии, поступающей на Землю – тут случались глобальные неурожаи и эпидемии, голодные завоеватели рушили городскую жизнь и смешивали карты, возвращая регионы в неолит; игра начиналась с начала.

Объединение человечества в техническую цивилизацию за несколько столетий – мгновение в полумиллионе лет существования *homo sapiens* – изменило сознание людей, вложив новоявленным ученым и инженерам мысль об их исключительной ценности. Рост населения Земли, в разобщенном X веке нашей эры едва составлявшего 250 млн. человек, сопровождался и ускорялся серьезным умягчением нравов. Принципы внешней политики развивались от архаического «убить и съесть» через древнее «разгромить и разграбить» до нынешнего «подчинить и эксплуатировать». Нормы существования индивидуума в социуме обогатились еретическим понятием «личное поведение». Именно в тот период у важной ученой дамы Схоластики объявилась побочная дочь Алгебра (видно, не обошлось без мавра), которая из нескладной занудной дылды быстро превратилась в царицу наук Математику. Во второй половине прошлого века под присягу этой царице стали приходить гуманитарные дисциплины. Роль церемониймейстера с удовольствием взяла на себя Физика: внучатая племянница Натурфилософии, которая первой из всех естественных наук сделала Математику своей лучшей подругой. По совершенно справедливому мнению Д.А. Новикова – директора Института проблем управления РАН и одного из лидеров современных приложений точных наук в экономике и обществе – идеологически все мы принадлежим не к традиционному человечеству с его воинствующей дикостью, фанатизмом, неолитической деревней, жертвоприношениями и так далее, а к трем последним столетиям взрывного роста цивилизации со всеми их успехами, а также новыми злодействами и иллюзиями.

Эта книга задумана как введение в новые формализованные области обществознания для тех, кто, подобно автору, не является прирожденным математиком или физиком. Главное препятствие в построении логически непротиворечивой физики общества – взаимная нелюбовь физиков и обществоведов ко второй половине такого альянса. Считается, что за точные науки и гуманитарное знание отвечают разные полушария головного мозга. От этого, как и в прежние времена (о чем пойдет речь во Введении), при контактах «физиков» с «лириками» параллельно возникают нестандартные разделы теоретической физики и новые методы обработки информации в науках о человеке. Последними обычно тоже занимаются математики или физики, перешедшие из своей дисциплины, как они полагают, в гуманитарную сферу. Но ядро гуманитарных наук в сознании их профессиональных носителей таким процессом почти не затрагивается.

В нынешнем проникновении методов естествознания в общественные дисциплины есть новое обстоятельство: быстрая компьютеризация всех сторон человеческой жизни. Она

вынуждает оперировать числами представителей самых «неестественных» наук (возможно, за исключением философов). А это подразумевает некоторое владение математикой. Беда приходит с другой стороны: в современных физических моделях общества используют неклассический формализм, поскольку более традиционные математические методы здесь уже опробовали. Это значит, что ученым «гуманитариям» для знакомства с междисциплинарной физикой недостаточно школьной алгебры и геометрии: в настоящее время им следует знать основы теории игр и теории графов, фракталы, нечеткие множества… Правда, в самих этих основах нет ничего особенно сложного или «контринтуитивного» – философские концепции гораздо заумнее. Но понятно объяснить новые разделы математики можно лишь на некотором математическом же фундаменте, которого коллеги-обществоведы обычно не имеют.

Необходимость физико-математической подготовки историков, филологов, юристов и других представителей наук о человеке никем не оспаривается и постепенно реализуется в учебных программах. Главным препятствием здесь остается необходимость возводить верхние этажи почти без фундамента – а достаточный математический фундамент в нашей университетской системе, пожалуй, имеют только физики. Среди попыток указать обходной путь нельзя не назвать «Математику для гуманитариев» А.В. Савватеева [1], где хорошо и просто представлен современный и очень интересный материал. Проблема только в том, что людям, предрасположенным к гуманитарным предметам, математические «ребусы» (включая графы, фракталы и тому подобное) сами по себе неинтересны, а естественные науки, в их понимании, слишком резко и безапелляционно разделяют познанный и непознанный мир. Восприятие нефизических дисциплин – на самом деле начиная с химии и биологии – подразумевает не столько четкую логику, сколько ритм в построении результатов, рифмовку далеких идей и огромный объем почти не структурированной эмпирики. Используя аналогию с компьютерами, быстродействие и мощный центральный процессор здесь не так важны, как обширная (в том числе оперативная) память. Возможно, в гуманитарных и точных предметах действительно работают разные полушария. И стандартные методы обучения, позволяющие совместить «физику» и «лирику» в одной голове, до сих пор не вполне известны.

Автор этой книги предполагает, что представители гуманитарных направлений решаются на знакомство с новой физикой и математикой не ради красивых задач, а просто для того, чтобы выжить в своей профессии. Формализация мирового обществоведения развивается примерно теми же темпами, что и компьютеризация быта: оставшиеся внутри «традиционного» (на деле устаревшего) круга проблем и методов рискуют отстать навсегда. Негуманный западный принцип *опубликуйся или пропади* (англ. *publish or perish*) хорошо стимулирует умственную деятельность, но статьи наших авторов в международной периодике должны отвечать современным требованиям научных журналов и конференций. Иначе их там не будет.

Книга задумана в помощь всем желающим ознакомиться с новыми разделами «физики общества» – включая тех, кто по объективным причинам овладел математикой и физикой лишь в объеме средней школы либо редко их использовал на практике. Ее основу составили лекции автора по одноименному межфакультетскому курсу в МГУ, а также литературные и собственные результаты в междисциплинарных приложениях физики к описанию социума. Погружаться в этот новый захватывающий мир помогали яркие нестандартные работы, представляемые на семинарах Г.Г. Малинецкого в Институте прикладной математики и Д.С. Чернавского в ФИАНе, на нашем семинаре по социофизике, с 2016 г. носящем имя Дмитрия Сергеевича Чернавского (соруководители Ю.Л. Словохотов и проф.

Л.А. Асланов), на семинаре ректора МГУ академика В.А. Садовничего «Время, хаос и математические проблемы» и других неклассических форумах. Живую творческую атмосферу формировали регулярные конференции «Математика, компьютер, образование» (МКО), осуществляемые самоотверженными усилиями профессора Галины Юрьевны Ризниченко (биофак МГУ) и ее коллег, российские конференции «Социофизика и социоинженерия» 2015 г. и 2018 г., в организации которых участвовал автор, – а в последние годы новое место работы: лаборатория активных систем Института проблем управления РАН.

При подготовке книги бесценной стала помощь и поддержка специалистов, использующих методы точных наук в изучении экономики и общества. Я очень обязан знакомым авторам, по первой просьбе предоставлявшим доступ к своим обзорам и книгам, среди многих – директору ЦЭМИ РАН чл.-корр. А.Р. Бахтизину, д.ф.-м.н. К.В. Воронцову (МГУ+МФТИ), докт. комп. н. С.Н. Кольцову (НИУ ВШЭ в С.-Петербурге), д.ф.-м.н. С.Н. Дороговцеву (ун-т Авейру, Португалия + ФТИ им. Иоффе, С.-Петербург), докт. ист. наук (а по первой специальности математику и к.ф.-м.н.) С.А. Нефедову (Институт истории и археологии УрО РАН, Екатеринбург), проф. П.В. Турчину (University of Connecticut, США) и другим коллегам – их список трудно сделать полным. Огромную пользу принесли комментарии и исправления профессиональных физиков и математиков, которым автор навязывал свою продукцию; надеюсь, что учет замечаний улучшил книгу. Особую благодарность я хотел бы высказать директору ИПУ РАН академику Дмитрию Александровичу Новикову, прочитавшему и местами откорректировавшему весь текст, за постоянное внимание, помощь и поддержку. Также огромное спасибо заведующему кафедрой биофизики физического факультета МГУ профессору Всеволоду Александровичу Твердислову, взявшему на себя аналогичный труд, за большую помощь и важные комментарии. Отдельные главы и разделы прочитали, а в ряде случаев и выправили д.ф.-м.н. А.И. Абрамович (химфак МГУ), д.ф.-м.н. А.Г. Чхартишвили (ИПУ РАН), проф. А.А. Васин (ВМК МГУ), д.ф.-м.н. К.Э Плохотников (физфак МГУ) и к.х.н. И.С. Неретин (Rock Flow Dynamics, Москва). Иван Сергеевич Неретин не только консультировал в трудной области компьютерных сетей, но и был соавтором в наших работах. Составлению авторского макета очень способствовали профессиональные рекомендации ведущего инженера отдела оперативной полиграфии ИПУ РАН С.В. Сухановой. Всем, кто помогал и поддерживал подготовку этой книги, а также своими исследованиями формировал ее содержание (полный список стал бы огромным, но в тексте приведены ссылки), автор чрезвычайно признателен.

Книга состоит из трех частей. Во Введении дан очень краткий исторический очерк о влиянии естественных наук на гуманитарные дисциплины. В первой части представлен выборочный конспект основных понятий физики и используемого в ней математического аппарата на уровне средней школы (глава 1) и институтских курсов физики для студентов-«естественников» (главы 2 и 3), а также материал по физике сложных систем, реже попадающий в учебники (глава 4). Каждую главу иллюстрируют модели, перенесенные из физики в экономику, психологию, теорию транспортных потоков и другие «общественные» приложения.

Во второй части обсуждается применение физических методов к описанию разнообразных социальных систем: потоков «живых» частиц (бактерий, рыб и птиц, автомобилей, пешеходов, глава 5), сетевых структур общества (глава 6), закономерностей экономики и эконофизики (глава 8), а также в лингвистике, социологии, политологии и *математической истории* (глава 9). В каждой главе, по мере необходимости, без строгих

доказательств вводится соответствующий формальный аппарат: элементы теории графов (глава 6), фракталы (глава 8), элементы теории катастроф (глава 9). В главе 7 кратко сформулированы основные положения теории игр и рассмотрены теоретико-игровые схемы конкуренции и противостояния действующих единиц (*агентов*) в экономике и в других социальных системах.

В третьей части представлены основы теории автоматического управления и роевого интеллекта (глава 10); описание разных видов социума как мультиагентных систем, оснащенных распределенным интеллектом, и пути формализации самого понятия «интеллект» (главы 11 и 12). Здесь приводятся сведения об искусственных нейронных сетях, нечетких множествах и формальной логике, рассмотрены «умные» алгоритмы поиска и оптимизации, задачи социолингвистики и некоторые другие вопросы. В целом две последние главы выражают мнение автора о вкладах физики и разума в динамику социальных систем, за которое он несет полную ответственность. В Приложении приведены сведения об использованном математическом аппарате.

Эта книга адресована лицам с разной физико-математической подготовкой, но было бы неразумно осваивать ее «с нуля». Предполагается, что читатель знает математику и физику, как минимум, в объеме средней школы. Если в школе эти предметы не были любимыми (что не редкость в гуманитарной среде), некоторые вопросы желательно повторить – особенно логарифмы и элементы математического анализа по стандартному учебнику математики для старших классов. Чтобы вспомнить школьную физику, хорошо подойдет, например, краткое (немногим больше 500 стр., в основном это задачи) пособие для поступающих на факультет ВМК МГУ [2].

Первая глава книги не содержит новых, не известных выпускнику средней школы фактов из физики. В ней перечислены основные физические законы и связанные с ними квазифизические модели, которые используются в описании экономики и общества. Те, кто имеет подготовку в объеме двух-трех курсов естественных факультетов университета, так же легко прочтут вторую главу, старшекурсники – третью. Здесь будет уместно заглядывать в книги по общей физике, рекомендованные во 2-й главе: учебники С.Э. Фриша и А.В. Тиморевой (почтенный – но, кажется, и лучший) [3], И.В. Савельева [4] либо в Берклеевский курс [5]. Так как многие обсуждаемые нами сложные системы происходят из химии и биологии, желательно по мере прохождения материала главы 4 восстанавливать и эти базовые знания – например, по справочнику Е.А. Ереминой и О.Н. Рыжовой [6] и таблицам А.В. Онищенко [7], рассчитанным на старшеклассников.

Приложения физики к обществу начинаются со «школьных» формул. Поэтому четыре главы первой части следует прочитать всем независимо от уровня подготовки – разница будет лишь в легкости и скорости восприятия. Остальные главы посвящены систематическому, насколько так можно говорить в настоящее время, использованию моделей и методов междисциплинарной физики в современных общественных науках. Некоторые чуть более формализованные либо немного менее общие (однако тоже необходимые) темы представлены мелким шрифтом как дополнительный материал. При первом чтении их можно пропустить, но после освоения главы или ее раздела к ним надо вернуться: «дополнительный» не значит «необязательный»! В списках рекомендуемой литературы по каждой теме из огромного существующего объема приведены несколько хороших книг на русском языке и 1-2 фундаментальных руководства на английском. По ходу изложения также приводятся некоторые полезные ссылки на журнальные статьи и интернет-публикации.

Задачи и контрольные вопросы больше ориентированы на «гуманитарных» читателей. В основном они призваны поддерживать интерес к материалу и заодно показать некоторые элементы устройства мира с точки зрения закоренелых материалистов. Кроме того, даже самые простые вопросы и задачи (а трудных заданий в этой книге нет) помогают усвоить информацию. По мере написания текста автор убедился в этом на собственном опыте – приходилось вспоминать забытые сведения и разбираться в новых.

Книга не в меньшей степени адресована и тем, кто приходит в междисциплинарную физику из естествознания или инженерных дисциплин. Таким читателям задачи покажутся элементарными, но лучше все-таки находить их решения. Наша главная цель – рассказать, не перегружая теоретическими выкладками, как физические и математические подходы используются в разных разделах современных общественных наук, какие результаты здесь уже достигнуты и что в дальнейшем можно ожидать от этого процесса.

Рекомендуемая литература

1. А.В Савватеев. *Математика для гуманитариев*. Живые лекции. - М.: Литрес, 2020.
2. К.Н. Драбович, В.А. Макаров, С.С. Чесноков. *Физика. Практический курс для поступающих в университеты.* М: Физматлит, 2006.
3. С.Э. Фриш, А.В. Тиморева, *Курс общей физики*. В 3-х томах. 12-е изд., т. 1. СПб.: Лань, 2017.
4. И.В. Савельев, *Курс общей физики*. В 5 томах. 7-е изд. СПб.: Лань, 2022.
5. *Берклеевский курс физики.* В 5 томах, Пер. с англ. М.: Наука, 1977-1986.
6. Е.А. Еремина, О.Н. Рыжова. *Химия: справочник школьника*. 2-е изд., М.: МГУ, 2014.
7. А.В. Онищенко. *Биология в таблицах и схемах*, 3-е изд., СПб: Виктория плюс, 2017.

ВВЕДЕНИЕ

Предмет моей лекции – плодотворная дебютная идея. Что такое, товарищи, дебют, и что такое, товарищи, идея? Дебют, товарищи – это quasi una fantasia…
И. Ильф, Е. Петров. «12 стульев»

Поскольку книга называется «Физика общества», надо определить значение слов в этом сочетании. В Физической энциклопедии (Научное издательство «Большая российская энциклопедия», 1998 г, Москва) первое понятие раскрывается так:

Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства и законы движения окружающих нас объектов материального мира. Вследствие этой общности не существует явлений природы, не имеющих физических свойств или сторон. Понятия физики и ее законы лежат в основе всего естествознания.

За обтекаемыми фразами здесь кроется весьма агрессивное экспансионистское заявление: весь материальный мир и всё естествознание – суть современные или будущие главы физики. Его трудно оспорить на материале истории науки: астрономия как наблюдение звезд породила сначала небесную механику, а потом общую теорию относительности; кристаллография из описания формы кристаллов и методов их выращивания эволюционировала в сильно математизированный раздел физики твердого тела; инженерная теория паровых машин создала термодинамику, сложные электрические схемы открыли путь качественному анализу нелинейных дифференциальных уравнений и так далее. Ближе к нашему времени эмпирические закономерности транспортных и пешеходных потоков, в первой половине XX века относившиеся к городскому хозяйству, к концу века перешли в физику сложных систем, а технический анализ биржи создал эконофизику. Этот список можно продолжать почти бесконечно.

Но даже если физика – действительно «наше всё», правила ее использования в других дисциплинах этим не определяются. Математический формализм в каждой из упомянутых областей настолько разный, что возникает обоснованное подозрение: возможно, универсальных рецептов его построения не существует. Тогда теоретическое описание явлений в новых приложениях физики (в этих случаях ее называют *междисциплинарной*) не сводится к переносу уже известных соотношений и формул в другую науку: оно должны вырасти в каждой области из ее специфических задач.

Существует столько разных определений общества, что без ущерба для их многообразия можно сформулировать еще одно. Оно основано на стандартных сочетаниях слова «общественный» с очень разными существительными: общественный резонанс, общественная собственность, общественные насекомые… Так как общество в интеллектуальной среде принято называть *социумом*, а любые социумы (и не только они) в гуманитарных науках обычно считаются «системами» – дадим определение:

Социальная система – это динамическая совокупность автономных индивидов, которые преследуют собственные цели при взаимодействии друг с другом и с окружающей средой.

Определению удовлетворяет широкий спектр систем, состоящих из индивидов или индивидуумов*: кружок филателистов, первобытное стадо, муравейник, колония бактерий, «стая» (или *формация*) беспилотных аппаратов... (Совокупность взаимодействующих аппаратов или ансамбль квазичастиц в компьютерном алгоритме мы назовем *искусственной социальной системой*). Частные, но важные примеры социальных систем –

человеческое общество и его отдельные фракции: группы людей, организации и предприятия, политические партии, классы, …

Ключевое слово *взаимодействие* перебрасывает мостик от социума к «неживым» многочастичным системам, где кооперативную динамику вычисляют через суммы состояний взаимодействующих частиц. Расчетные компьютерные модели социальных систем, называемые *агентными моделями*, создаются именно на этом пути – со всеми его достоинствами («мультиагентный» характер социальной системы трудно отрицать) и недостатками. (В отличие от покупателя в магазине, молекула или атом как частица конденсированной среды не может *передумать* – и эта разница отражается в коллективной динамике социума).

Чтобы применять физику к обществу, желательно сформулировать основное содержание этой науки. Для многих дисциплин ответы на такой вопрос общеизвестны. Химия исследует превращения веществ, то есть химические реакции. Биология изучает живые организмы, включая разнообразные физические и химические процессы внутри них и с их участием. Социология занимается строением и динамикой общественных структур, то есть одной из частных сторон социальных систем; экономические науки анализируют другую их сторону: взаимодействие структур и индивидуумов, основанное на обмене. Математика создает формулы и уравнения. Тогда физика, в ее бытовом понимании, исследует такие явления природы, которые можно выразить математическими уравнениями и формулами. Под формулами здесь понимаются любые соотношения, которые соединяют «А» и «В» – не обязательно однозначные, но непременно *объективные*, то есть существующие независимо от тех лиц, кто эти соотношения обнаружил.

Грубый материализм, как к нему ни относиться – основа физического подхода к миру. Объективность явлений природы, измеримость связанных с ними эффектов, воспроизводимость результатов измерений – без этого физики нет. И если мы считаем социальные системы природными объектами (а какими еще?), сколь угодно сложные и неоднозначные процессы в них *объективны*. В этом и только в этом случае можно надеяться на их формальное описание языком физики[**]. [1]

Основные физические понятия – скорость, массу, силу, энергию, и т.д. – мы будем обсуждать, но каждый имеет о них интуитивное представление. Чтобы не обосновать, а скорее ощутить их применимость к общественным системам, проведем мысленный эксперимент. Представим, что читателю этого текста в зимнем городе поручили отвести пешеходов от опасного участка на тротуаре, куда сбрасывают снег и лед с крыши, не обеспечив средствами заграждения: флажками, столбиками, предупреждающей лентой… Вдвоем, тем более втроем с такой задачей легче справиться: мы перегородим тротуар и будем вежливо повторять всем, кто упрется в наше оцепление: впереди опасная зона, обход.

---

[*] В естественных науках *индивидом* обычно называют единичный объект из исследуемого множества: одушевленный (в антропологии), неодушевленный (представитель биологического вида) и даже неживой (так, в кристаллографии это один из сросшихся монокристаллов в друзе). В гуманитарных науках одушевленный субъект чаще называется *индивидуумом* – но, например, социологи традиционно используют первый термин. Поскольку мы обсуждаем всю совокупность наук о человеке и обществе, нестыковка названий в разных дисциплинах неизбежна. В этой книге мы будем называть «индивидуумами» людей в тех или иных социальных системах, а «индивидами» – иные действующие единицы: это могут быть пчелы, приматы, роботы, фирмы, учреждения и так далее. Чтобы уменьшить неопределенность, любые участники социального процесса будут предпочтительно называться *акторами* или *агентами*: расшифровку этих терминов мы дадим в первой главе.

[**] Измерения в квантовых системах, воспроизводимость среднего результата, ограниченность причинно-следственных связей и прочие интересные вопросы будут обсуждаться в третьей главе.

Если же отворачивать пешеходный поток (а это социальная система!) придется в одиночку, окажется, что многие идущие погружены в себя и вас просто не воспринимают; кто-то поймет обращение как агрессию, кто-то не поверит, не расслышит и пойдет под падающие сосульки – в общем, спасение людей будет трудной задачей. Зато, если вы оказались достаточно настойчивы и все-таки отвернули череду пешеходов с тротуара на край проезжей части дороги, дальнейшее будет зависеть уже от сознательности водителей. Большинство людей станут автоматически поворачивать с тротуара вслед за идущими впереди, вам останется корректировать самых рассеянных (рис. 1). А это значит, что у социальной системы, при всей сложности ее структуры и процессов, есть *инерция*.

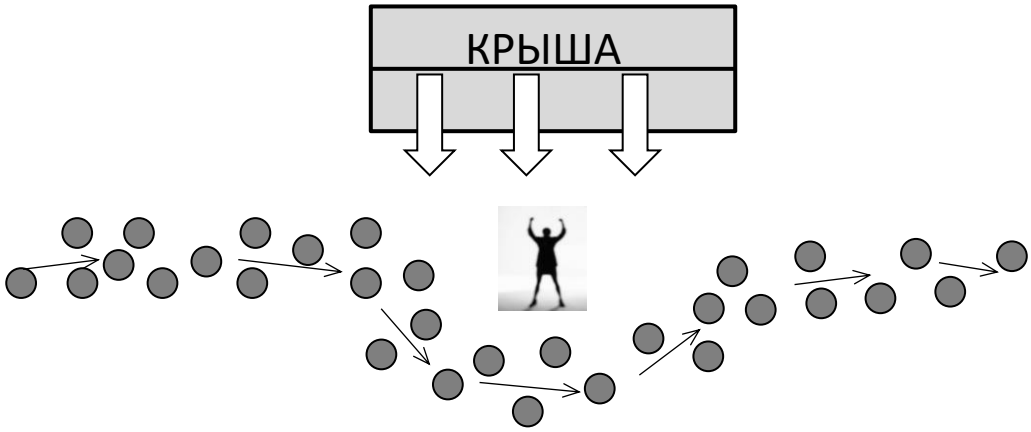


Рисунок 1. Как повернуть толпу? (мысленный эксперимент)

Количественной мерой инертности в физике является масса. В нашем мысленном эксперименте тоже есть количественная мера: чем больше поток пешеходов, тем труднее его повернуть, но тем легче поддерживать установившееся движение. Можно придумать похожие модельные задачи о продвижении нового товара на рынок, предвыборной агитации и так далее – во всех случаях более многочисленная общность людей окажется более устойчивой к внешнему воздействию.

Другой «квазифизический» эксперимент каждый может провести самостоятельно. Для этого в разговоре со спокойным уравновешенным человеком, который не поймет вас неправильно, достаточно сделать полшага по направлению к собеседнику. Вы наглядно убедитесь, что естественное расстояние в разговоре – около метра: ваш собеседник его восстановит, автоматически сделав полшага назад (рис. 2). Между «неживыми» частицами действуют силы притяжения и отталкивания – здесь же проявляется взаимное отталкивание «живых» частиц, нарушивших неприкосновенность личного пространства. (В переполненном автобусе отталкивание по необходимости отключается, и в такой дороге пассажиры сильно устают).

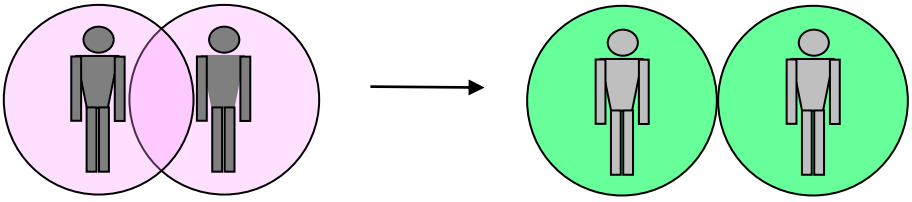


Рисунок 2. Комфортное расстояние при разговоре

В описании социальных систем используются и другие физические понятия. Не обязательно конструировать новые мысленные эксперименты, достаточно вспомнить словосочетания: волна банкротств, творческий импульс, энергия денег – даже «борьба с энтропией». Но чтобы физический подход работал, состояния социальных систем должны объективно существовать (в физике это аксиома) и воспроизводимо регистрироваться.

Воспроизводимость общественных процессов традиционно вызывает сомнения («в одну и ту же реку нельзя войти дважды»). Однако и простые физические параметры – такие как вес тела – воспроизводимы лишь в пределах точности измерительного устройства (весов). Если мы характеризуем состояние общества числами – например, процентом живущих ниже черты бедности – необходимо понять степень объективности тех, кто поставляет эти числа (они могут быть заинтересованы в искажении информации) и оценить разброс данных. Конечно, мы всегда подозреваем, что наш «измерительный прибор» не очень надежен, а в критический момент может проявить свободу воли, извратив показания. Но именно так и воспринимает свои приборы профессиональный физик-экспериментатор.

Другими словами, методы физики могут применяться и уже применяются к описанию разных аспектов жизни общества. При этом, как для любой исследуемой материальной (то есть объективно существующей) системы, возникают вопросы о корректности получаемых данных и о правомерности выбранных теоретических моделей. Модели, теории и целые направления могут оказаться ошибочными, для естествознания это нормально. Но возрастание роли физики, постепенно трансформирующей гуманитарные дисциплины в особую область естественных наук – объективный процесс, в котором нет непреодолимых запретов.

Физика в истории обществознания

Постоянное внедрение физики в науки об обществе лучше всего иллюстрирует история науки. Каждое новое достижение физико-математических теорий последних столетий испытывалось во всех областях знания без разделения на естественные и гуманитарные. (В XVI-XVII веках само это разделение только оформлялось). Фундаментальная для политологии книга «Левиафан, или материя, форма и власть государства церковного и гражданского» (1651 г.), написанная Томасом Гоббсом под сильным впечатлением от Английской революции и запрещенная в послереволюционной Англии, была классическим натурфилософским трактатом о человеке, сообществах людей и христианской вере; основу обществоведения составила его вторая часть. Вышедшая в 1691 г. книга Уильяма Петти «Политическая арифметика: рассуждение о величине и ценности земель, населения, строений, земледелия, мануфактур…» (полное название очень длинное) положила начало классической политической экономии и ввела количественные, в нынешних терминах *статистические* расчеты в науки об обществе. В конце XVIII века еще один знаменитый англичанин, астроном Уильям Гершель среди многих своих достижений установил корреляцию активности Солнца (по числу ежегодно наблюдаемых солнечных пятен) с колебаниями цен на пшеницу. Выдающийся французский математик Пьер Симон Лаплас в книге «Опыт философии теории вероятностей» (1814 г.) сопоставлял результаты новой дисциплины, одним из создателей которой он был, с вопросами демографии, судебной практики, деятельности страховых обществ и другими сторонами общественной жизни. Термин «социальная физика» в первой половине XIX века использовали основатель математической статистики Адольф Кетле и родоначальник научной социологии Огюст Конт. Во всех случаях «физика» понималась как количественные закономерности природы:

в теории и практике общественных наук прежде всего применялись новые математические приемы и методы.

К началу XIX века физика вполне отделилась от математики и механики и стала самодостаточной экспериментальной дисциплиной, интенсивно использующей математические инструменты. Ее быстрое расширение в сопредельные области затронуло науки о человеке. Немецкий психолог Густав Теодор Фехнер в своей книге Elemente der Psychophysik, вышедшей в 1860 г., сформулировал основные положения *психофизики* (фактически – экспериментальной психологии), обосновав количественную связь между внешним стимулом и реакцией субъекта. Во второй половине того же века физическая идея равновесия между спросом и предложением стала фундаментом *неоклассической экономики*. Эту область создавали, в том числе, математики и физики – так, знаменитый американский экономист Ирвинг Фишер в 1891 г. защитил свою, по-нынешнему, кандидатскую диссертацию «Математический анализ теории стоимости и цен» под руководством социолога У.Г. Самнера и создателя статистической термодинамики Дж.У. Гиббса. В другой кандидатской работе «Теория спекуляций» (1900 г.) французский математик Луи Башелье при описании биржи, по сути, впервые предложил модель движения броуновской частицы. Были и встречные процессы – так, одним из провозвестников социофизики ныне считают Льва Николаевича Толстого. В роман «Война и мир» действительно встроен профессиональный историко-философский текст (по понятным причинам школьники его пропускают), где человеческое общество названо физической системой и обсуждаются параллели исторических событий с физическими явлениями.

Двадцатый век внес много нового во взаимодействие естественных и гуманитарных дисциплин, куда вошли и многочисленные направления социальной инженерии. Политические и социальные кризисы ускорили развитие всего, что можно использовать в военном деле; «царицей наук» становилась техническая физика. Эти же кризисы заставляли отказаться от некоторых устаревших аксиом в гуманитарной сфере – например, от сугубо позитивного восприятия народных масс. Такие новые направления физики, как релятивистскую теорию и квантовую механику (в том числе превратно понятые), подобно прошлым столетиям, пытались немедленно применить в психологии, экономике, общественных дисциплинах. Результатом, как и прежде, стали усовершенствование экспериментальных методов и новые термины в науках о человеке, частичное преодоление штампов в сознании физиков («принцип дополнительности») – но не «социальная физика» как самостоятельная отрасль знания.

По существу, с начала XX века в науке проявилось *ускорение истории*, вызванное четырехкратным ростом населения Земли за этот период: мы обсудим его во второй части книги. При этом возникли новые разделы физики, которые вплотную приблизили ее к нефизическим дисциплинам. Из упомянутой теории броуновской частицы выросла физика стохастических явлений – именно они преобладают в социуме, где нет настоящих макроскопических систем. Нелинейные связи физических параметров так расширили набор возможных видов динамики системы, что для классификации множества решений дифференциальных уравнений потребовался новый математический аппарат. Прикладная математика занялась вопросами планирования и управления в социальных структурах, в том числе на основе соотношений физики, хотя само это слово до конца XX столетия здесь почти не употреблялось. Развитие транспорта, формализация производственных связей и межчеловеческих контактов (в частности, для задач эпидемиологии), а затем Интернет породили теорию сетей и процессов на сетях. В вычислительной математике возникли

компьютеры и затем суперкомпьютеры, первые модели нейронных сетей (*перцептрон*) и искусственный интеллект. В машинных расчетах обнаружили явление *детерминированного хаоса*, где вскоре тоже научились делать ограниченные прогнозы. Все это позволяет современной теоретической физике, с рядом необходимых оговорок, непосредственно перейти к описанию биологических и социальных систем.

Первую успешную попытку распространить физический подход на любые неравновесные процессы предпринял немецкий физик Герман Хакен в конце 1960-х годов. В его многократно переизданной книге «Синергетика» [1] для сходной динамики в системах разной природы были предложены однотипные дифференциальные уравнения. В том же направлении эволюционировали математическая социология (Вольфганг Вайдлих [2] и его школа в Германии), дифференциальные стохастические уравнения макроэкономики (Томас Сарджент в США [3]) и другие дисциплины. Термин *биофизика* появился в начале XX века, но был официально утвержден только в 1961 г. на 1-м конгрессе биофизиков в Стокгольме. Во второй половине века стали развиваться математические и агентные модели генетики, экологии, эволюционной биологии. В 1990-е годы возникли официальные термины *эконофизика* (Юджин Стенли, США) и чуть позже *социофизика* (Серж Галам, Франция), затем сформировались *клиодинамика* (Петр Турчин, США), как одно из направлений математической истории, и некоторые другие дисциплины. Таким образом, соединение физики с описанием социальных систем – не пожелание или предвидение, а свершившийся факт.

В этой книге будут рассмотрены основные направления физики общества, развиваемые в мире и в нашей стране. Предполагается, что её поймут не только те, кто по роду своей деятельности уже сталкивается с многообразными аспектами математики или физики, но и такие представители естественных и гуманитарных наук, которых жизнь заставляет углубиться в эту чужую, как сначала может показаться, область (см. Предисловие). На деле анти-гуманитарных научных методов не существует; нужно лишь потратить некоторое время на усвоение логики коллег-«естественников», в ходе тренинга решать простые учебные примеры и не огорчаться, если физики и математики в своих публикациях продолжают называть собственные представления о Вселенной единственно возможными. Синтез естественнонаучного и гуманитарного знания автор оставляет для будущих титанов мысли. У нас куда более скромная задача: рассказать о современных приложениях физики в науках о человеке и обществе так, чтобы их восприняли специалисты «естественных», инженерных и гуманитарных профессий.

Рекомендуемая литература

1. Г. Хакен, *Синергетика*, М., Мир, 1980.
2. В. Вайдлих, *Социодинамика. Системный подход к математическому моделированию в социальных науках*, М.: URSS, 2005.
3. T.J. Sargent, *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge, Harward University Press, 1987.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ФИЗИКА, ЕЕ МОДЕЛИ И ФОРМУЛЫ В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

Основные понятия механики. Кинематика, уравнение траектории теннисного мяча. Сила, масса, энергия. Закон Гука. Поле сил, закон всемирного тяготения, закон Кулона. Законы Ньютона. Идеи механики в общественных науках: социальное поле, гравитационная модель.

Международная система единиц СИ. Макроскопическое тело, грамм-молекула, число Авогадро. Идеальный газ, изотерма, изобара, адиабата. Функция Кобба-Дугласа. Стратегический потенциал государства. Постоянный ток, законы Ома и Джоуля-Ленца. Уравнения материального баланса. Транспортный поток: задача о светофоре, парадокс Брасса.

Дифференцирование, производные элементарных функций. Формула Тейлора, ряд Маклорена. Неопределенный и определенный интеграл. Частные производные и кратные интегралы. Дифференциалы и интегралы в экономике, эластичность спроса, полезность. Изокванты и изокосты. Дифференциальные соотношения в экспериментальной психологии, законы Фехнера и Стивенса.

1.1. Основные понятия механики

Во Введении мы назвали физику дисциплиной, которая ставит в соответствие явлениям природы математические формулы и уравнения. Это не вполне точно. В следующих главах мы найдем «словесные» описания некоторых физических систем на сугубо качественном уровне, а также математические символы, не имеющие точного содержания, и такие процессы, для которых формулы и уравнения еще не предложены. Однако для той физики, которую мы все проходили в школе и будем повторять в этой главе, наше определение справедливо. «Школьная» физика построена именно так, ее задача – привить навыки описания Природы с помощью алгебры. Алгебраический язык не вполне универсален, некоторые объективные процессы на нем нельзя выразить – тем не менее, лучшего способа познакомить школьника с физикой пока не придумали. А так как научные работники любых направлений обычно неплохо учились в школе, среди «взрослых» приложений физики к общественным наукам есть формулы, прямо перенесенные из школьного курса. Поэтому наша первая глава не только поможет вспомнить кое-что из прошедшей юности, но и даст новые сведения.

В описании физических систем ключевое слово – *состояние*. «Кирпич падает с крыши», «по цепи течет электрический ток», «мне грустно» – всё это состояния, причем динамические, то есть способные изменяться во времени: кирпич когда-то долетит до тротуара, настроение может улучшиться… Философы помещают в основу своих конструкций *бытие* – но мы уже отмечали, что для материализма это слишком тонкая категория. Физики полагают, что все явления, которые они пытаются выразить уравнениями и формулами, объективно существуют. Поэтому в основе физики лежит не гипотеза о наличии окружающего мира (здесь это аксиома), а гораздо более детализированное понятие: *состояние системы*.

В разных разделах физики рассматривают системы разной сложности. Мы начнем с простейших систем, которые исследует *механика*. Строго говоря, это почти чистая математика, где на «буквы в формулах» наложены существенные ограничения и связи. За эти ограничения приходится платить: *классическая механика* замечательно воспроизводит движение планет Солнечной системы, космических аппаратов на орбите, полет кирпича с крыши и многие другие процессы – но она не может описать движение электронов в атоме

(здесь нужна *квантовая механика*) или внутри ускорителя-синхротрона (здесь механика *релятивистская*). В первой главе мы рассмотрим «школьную» классическую механику, где под состоянием объекта («тела») понимается его положение в трехмерном физическом пространстве. В этом пространстве мы живем и интуитивно его понимаем.

Изменение положения объекта в пространстве с течением времени называется *движением*. Но тело имеет форму, при перемещении оно может вращаться, как подброшенная палка или спутник на орбите – то есть механическое движение бывает сложным. Чтобы максимально упростить описание, физики ввели понятие *материальной точки*. Это не точка в геометрии, не имеющая размеров (как тогда ее увидеть?). Материальная точка – это физический объект, форма и размеры которого несущественны для моделирования процессов с его участием. Объект должен быть много меньше той области пространства, где протекает процесс – например, много меньше расстояния, на которое он перемещается. Такие важные характеристики, как масса, скорость или электрический заряд, у материальной точки остаются и определяют ее движение в заданных внешних условиях.

1.1.1. Кинематика

Математическим описанием движения тела под воздействием внешних сил занимается *динамика*. Распределение сил и вызванных ими напряжений в неподвижных объектах (в растянутой пружине, потолочной балке, Останкинской телебашне и т.д.) изучает другой раздел механики: *статика*. Но описание механической системы (лучше всего – материальной точки) можно дополнительно упростить, если рассматривать только движение, не анализируя его причин. Этот раздел механики называется *кинематикой* («наукой о движении»).

Состояние материальной точки в момент времени t_1 – это ее положение в трехмерном пространстве, или *координаты* (x_1, y_1, z_1). В другой момент времени t_2 (например, через одну секунду) движущийся объект попадет в другую точку пространства с координатами (x_2, y_2, z_2). В классической механике время и пространство не связаны: тремя пространственными координатами задают положение точки, а изменение этого положения во времени характеризуют *скоростью*. Если скорость постоянна, она равна отношению

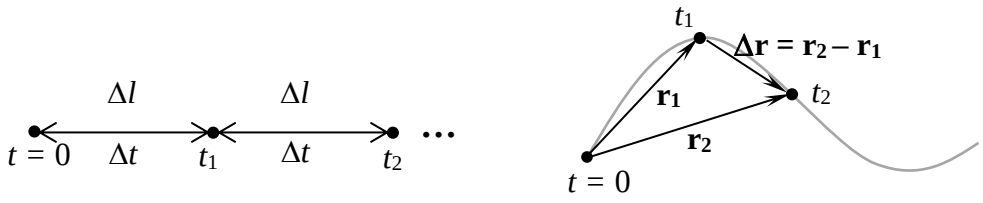
$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t},$$

где Δl – путь, пройденный материальной точкой за время $\Delta t = t_2 - t_1$ (рисунок 1.1 а). Такое движение называется *равномерным* (v = const). В соответствии с этой формулой скорость измеряют в единицах расстояния, пройденного за единицу времени – например, метрах в секунду (м/с).

При движении скорость может изменяться. Её изменение в единицу времени называется *ускорением* («скоростью изменения скорости»):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Ускорение измеряется в единицах м/с^2 (метр в секунду за секунду). Простейший случай неравномерного движения – это движение с постоянным ускорением, или *равномерно-ускоренное (равноускоренное)*: a = const.



(а) (б)

Рисунок 1.1. Движение материальной точки: (а) прямолинейное равномерное, (б) криволинейное

При равномерном движении тела (материальной точки) по прямой его скорость постоянна по величине и направлению. В случае движения по криволинейной траектории (линия серого цвета на рисунке 1.1 б) скорость изменяется во времени. Чтобы построить математическое описание этого общего случая, надо вспомнить, что положение точки в пространстве задает *вектор* $\mathbf{r} = (x, y, z)$, проведенный в точку из начала координат, а перемещение $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, равное изменению этого вектора за конечный интервал времени Δt – тоже вектор.

Векторы нам знакомы со средней школы – и именно из курса физики. Дальше надо применить основы математического анализа: в формулах для скорости и ускорения перейти к бесконечно малым приращениям времени dt и *дифференцировать* зависимость $\mathbf{r}(t)$, после чего $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{a}(t)$ станут точно определенными векторными величинами. Мы так и поступим в конце главы – пока же обойдемся школьной алгеброй.

ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ

Теннисный мяч брошен со скоростью v_0 под углом α к земной поверхности (рисунок 1.2). Какой высоты H достигнет мяч в полете и на каком расстоянии L он упадет на землю?

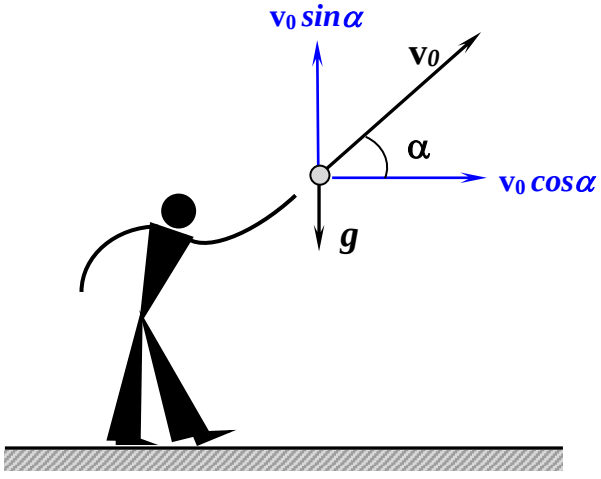


Рисунок 1.2.

Упрощение условий

Примем упрощающие предположения. В масштабах задачи (1) мяч – материальная точка, (2) земля строго плоская и мяч брошен с ее поверхности (то есть рост человека много меньше расстояний H и L), (3) сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Тогда мы можем определить H и L как параметры траектории, то есть линии движения мяча.

Решение задачи

Если просто отпустить мяч из вытянутой руки, он будет падать вертикально вниз с ускорением (равномерно-ускоренное движение). Без учета сопротивления воздуха ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2 одинаково для всех тел вблизи земной поверхности: это экспериментальный факт. Если же подбросить мяч вертикально вверх со скоростью v_0, он придет в *равномерно-замедленное* движение, то есть движение с постоянным *отрицательным ускорением*. За время t_0 мяч достигнет высоты H, где его скорость обратится в ноль: $v_0 - gt_0 = 0$. Затем он будет равноускоренно падать вниз и коснется земли через такой же интервал времени t_0. Весь вертикальный полет вверх–вниз займет время $2t_0$. Время t_0 легко найти из простейшего алгебраического преобразования:

$$v_0 - gt_0 = 0, \text{ отсюда } v_0 = gt_0, \text{ поэтому } t_0 = v_0/g$$

Скорость мяча, брошенного под углом α к поверхности земли (см. рис. 1.2), можно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие (скорость – это вектор!). Горизонтальную координату обозначим x, вертикальную y. При наших предположениях траектория мяча не выйдет из плоскости (x, y), поскольку в ней лежат векторы скорости **v** и ускорения **g**. Таким образом, в начальный момент времени $t = 0$

$$v_y{}^{(0)} = v_0 \sin\alpha$$
$$v_x{}^{(0)} = v_0 \cos\alpha.$$

На восходящей части траектории в момент времени t мяч имеет вертикальную координату $y(t)$ и вертикальную составляющую скорости $v_x = v_0 \sin\alpha - gt$. Длина пути $y(t)$, пройденного за промежуток времени t, равна средней скорости $\langle v_y \rangle$, умноженной на это время. Для движения с постоянным ускорением g среднюю скорость легко найти:

$$\langle v_y \rangle = v_0 \sin\alpha - gt/2 \quad \text{, поэтому}$$

(1.1) $$y = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2.$$

В горизонтальном направлении мяч перемещается с постоянной скоростью:

(1.2) $$x = v_x{}^{(0)} t = v_0 t \cos\alpha.$$

Из формулы (1.2) следует $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$. Подставив эту дробь вместо t в формулу (1.1), получим зависимость $y(x)$ – то есть уравнение траектории

(1.3) $$y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Это уравнение квадратичной параболы $y = px - qx^2$; знак «минус» перед слагаемым qx^2 означает, что ветви параболы направлены вниз (рис. 1.3). Итак, мяч, брошенный под углом к горизонту, летит по параболической траектории. В момент времени t_0 он достигнет верхней точки, где $v_0 \sin\alpha - gt_0 = 0$. Отсюда найдем t_0

$$t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

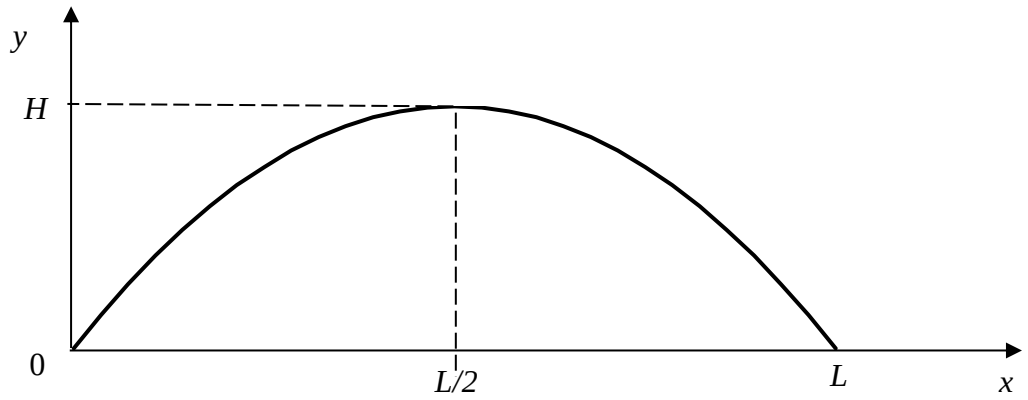


Рисунок 1.3. Параболическая траектория полета мяча

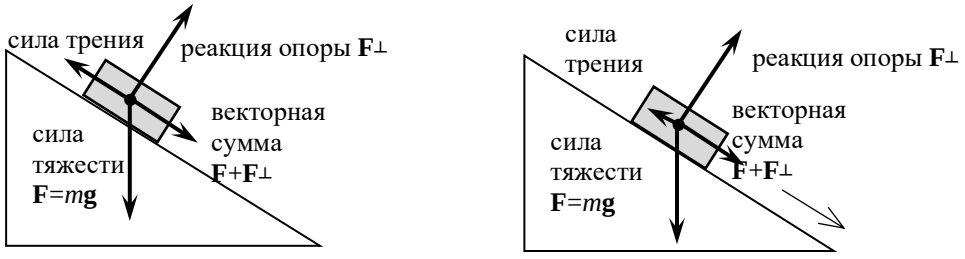
Полное время полета мяча равно $2t_0$. Максимальная высота H и расстояние L

(1.4) $$H = \langle v_y \rangle \cdot t_0 = (v_0 \sin\alpha - \frac{gt_0}{2})t_0 = (v_0 \sin\alpha)\frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g(v_0 \sin\alpha)^2}{2g^2} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g},$$

(1.5) $$L = (v_0 \cos\alpha) \cdot 2t_0 = \frac{2{v_0}^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

(мы использовали соотношение из школьной тригонометрии $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$: «синус двойного угла»). Из формулы (1.5) следует, что при одной и той же начальной скорости v_0 мяч пролетит наибольшее расстояние L, если бросить его под углом α=45° к горизонту: в этом случае $\sin(2\alpha) = 1$. Подставляя в (1.4) и (1.5) реалистическую скорость броска $v_0 =$ 25 м/с и округляя ускорение свободного падения до 10 м/с^2, для этого угла получим $H \approx 625 \times 0.5/20 = 15.6$ м и $L \approx 625/10 = 62.5$ м, время в полете 3.6 с. Мы видим, что бросок с высоты человеческого роста ≈1.5 м и старт мяча с поверхности земли действительно дадут почти одинаковую дальность полета L при расхождении примерно на 10% в его максимальной высоте H. «Перевернутая» парабола $y = px - qx^2$ на рис. 1.3 еще много раз встретится нам в этой книге.

1.1.2. Сила, масса, энергия



(а) покой (б) движение с ускорением

Рисунок 1.4. Сложение сил, действующих на тело: (а) неподвижный груз на наклонной плоскости, (б) санки на ледяной горке

Теперь перейдем от кинематики к динамике: будем рассматривать движение тела под действием других тел. Действие одних физических объектов на другие выражает *сила*. Это тоже векторная величина. Мы знаем, что тело остается на месте, то есть *находится в покое*,

если на тело не действуют силы или векторная сумма всех действующих на него сил равна нулю (силы взаимно компенсируются). В противном случае тело движется с ускорением, которое по направлению совпадает с *равнодействующей* приложенных сил, т.е. их векторной суммой (рис. 1.4). Например, если сжать или растянуть пружину, возникнет сила упругости, стремящаяся вернуть пружину в исходное ненагруженное состояние. При небольших деформациях упругого тела (пружины, струны, металлического стержня и др.) величина возвращающей силы пропорциональна удлинению либо укорочению x и направлена против деформации:

(1.6) $$F_{\text{упр}} = -kx \qquad \textbf{\textit{закон Гука}}.$$

Множитель k, связывающий деформацию и возникшую из-за нее силу, называется *коэффициентом жесткости*.

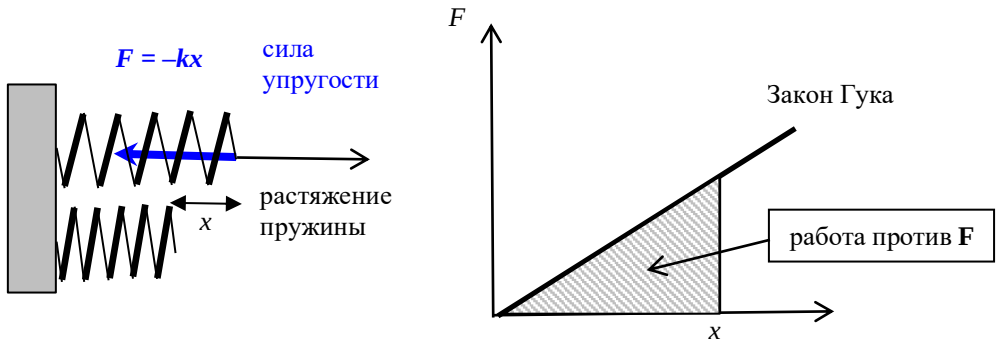


Рисунок 1.5. (а) Возникновение силы упругости F при растяжении пружины. (б) Площадь закрашенного треугольника равна работе против силы упругости

Другой важнейший множитель связывает равнодействующую сил, приложенных к телу, и ускорение, с которым оно движется. Эта величина, характеризующая инертные свойства тела, называется *массой*.

(1.7) $$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Объекты с большей массой m при приложении одной и той же силы F будут разгоняться медленнее (представьте, что вы толкаете детскую игрушечную коляску или садовую тележку, груженную песком). Формула (1.7) – важнейшая закономерность механики. Это *второй закон Ньютона*: он связывает внешние воздействия на физический объект с изменением его состояния, то есть движением.

Единицу F, в соответствие с уравнением (1.7), можно определить как такую силу, которая в отсутствие трения приводит тело массой 1 кг в движение с ускорением 1 м/с^2. Эта единица в международной системе СИ, которая будет обсуждаться в следующем разделе, называется *ньютон*: 1 Н = 1 кг/(м·с^2). Поскольку мы уже знаем ускорение свободного падения g=9.8 м/с^2, с силой в 1 ньютон на нашу ладонь давят 102 грамма колбасы или сыра, купленные в супермаркете. Иными словами, в повседневной жизни 1 Н – небольшая величина. В XX веке вес $P=mg$ массы в 1 кг (9.8 Н) назывался «килограмм-силой», что до сих пор иногда приводит к недоразумениям.

Растягивая или сжимая пружину на рис. 1.5, мы *совершаем работу* A против силы упругости:

$$A = \langle F_{\text{упр}} \rangle \Delta x,$$

где Δx – изменение длины пружины, $\langle F_{\text{упр}} \rangle$ – средняя сила упругости. Величину работы, которую может совершить деформированная пружина, характеризует ее *потенциальная энергия* $U_{\text{потенц}}$. Если деформации невелики и соблюдается закон Гука (1.6), средняя сила $\langle F_{\text{упр}} \rangle$ по абсолютной величине равна $\frac{1}{2}kx$, так что (рис. 1.5 б)

(1.8) $$U_{\text{потенц}} = k\,x^2/2.$$

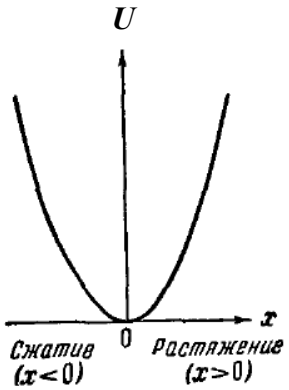


Рисунок 1.6. Энергия *U(x)* деформированной пружины

Энергии деформации соответствует квадратичная парабола (рис. 1.6). Эту энергию можно перевести в движение тела – например, выстрелить пластмассовым шариком массой m из детского пружинного пистолета. Пружина сообщит шарику некоторую скорость v. Летящий шарик способен совершить работу, величину которой задает *кинетическая энергия*:

(1.9) $$U_{\text{кин}} = m\,v^2/2.$$

Пренебрегая силами трения,

(1.10) $$U_{\text{потенц}} = U_{\text{кин}}.$$

Это частный вид самого фундаментального закона естествознания: ***закона сохранения энергии***. Если учитывать потери энергии пружины при «выстреле» и трение шарика о воздух (то и другое приведет к небольшому нагреву пружины и шарика), потери механической энергии системы в точности равны выделившейся тепловой энергии Q

(1.10 а) $$U_{\text{потенц}} - U_{\text{кин}} = Q.$$

Формула (1.10 а) – одна из многих возможных записей закона сохранения энергии, который справедлив для любых физических систем.

1.1.3. Поле сил

Состояние деформированной пружины задает одна координата: величина деформации *x*. Каждому значению *x* отвечают сила упругости, вычисляемая по формуле (1.6), и энергия деформации, определяемая формулой (1.8). В этом случае говорят, что деформацией создается *силовое поле*. Энергия $U_{\text{потенц}}$ также называется *потенциалом поля*. Если в состояниях x_1 и x_2 деформированной пружины потенциал, соответственно, равен U_1 и U_2,

переход из первого состояния во второе (пренебрегая потерями на трение) сопровождается изменением потенциальной энергии $\Delta U = U_1 - U_2$.

В школьной физике рассмотрены несколько важнейших видов силовых полей. Одно из них – *гравитационное поле*, которое порождается каждым физическим телом. Между двумя телами, обладающими массами m_1 и m_2, действуют силы притяжения (гравитации) F_1 и F_2. Если считать тела материальными точками, силы соответствуют формуле

(1.11) $$F_1 = F_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^2},$$

где r_{12} – расстояние между телами (точками), а масштабный множитель $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ м^2/(кг·с^2) называется *гравитационной постоянной*. Это ***закон всемирного тяготения***, в 1666 г. также установленный Исааком Ньютоном. Силы F_1 и F_2 равны по величине и противоположны по направлению (рис. 1.7).

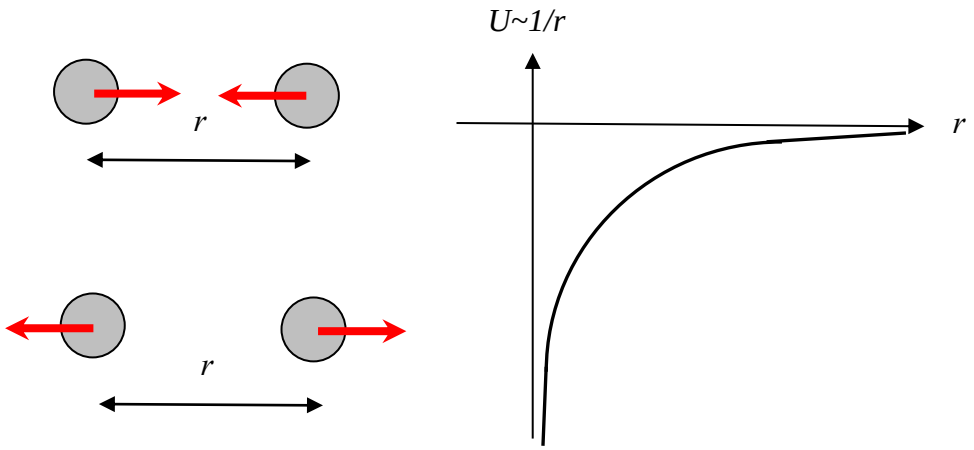


Рисунок 1.7. Форма потенциалов *U(r)* гравитационного и кулоновского взаимодействий. Массы, а также разноименные заряды притягиваются; одноименные заряды отталкиваются

Очень похожий вид имеет ***закон Кулона***, которым определяются силы взаимодействия электрических зарядов q_1 и q_2, расположенных на расстоянии r_{12} друг от друга:

(1.12) $$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{{r_{12}}^2}.$$

Здесь в масштабный множитель входят знаменитое число $\pi = 3.14159\ldots$ и величина $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, называемая *диэлектрической проницаемостью вакуума* (в ее размерности содержится единица емкости электрического конденсатора *фарада*). В отличие от массы, которая всегда положительна, электрические заряды могут иметь положительный или отрицательный знак. Разноименные заряды притягиваются, одноименные отталкиваются.

Из закона всемирного тяготения выводится ускорение свободного падения у поверхности Земли. Для этого подставим в (1.11) массу нашей планеты $m_1 = M = 5.97 \cdot 10^{24}$ кг и ее радиус $r_{12} = R \approx 6380$ км. Обозначив массу второго тела (m_2), находящегося вблизи поверхности Земли, просто буквой m, мы получим

(1.13) $$F = mg,$$

где $g = \gamma M/R^2 = 9.807$ м/с^2 – ускорение свободного падения.

Формула (1.13) определяет такую важнейшую характеристику материального тела, как *вес*. В быту мы измеряем вес единицами массы: граммами, килограммами, центнерами и тоннами. Это основано на соглашении об *идентичности инертной и гравитационной массы*. В действительности инертная масса в законе (1.7) или в определении кинетической энергии (1.9) отражает совсем не ту характеристику материальных тел, что взаимодействующие массы в законе всемирного тяготения (1.11). В классической механике это разделение не объясняется. В релятивистской механике («теории относительности»), с которой мы познакомимся в третьей главе, инертная и гравитационная масса едины.

При общем описании Солнечной системы небесные тела в формуле закона всемирного тяготения (1.11) можно представить материальными точками. Действительно, радиус орбиты Луны (≈384000 км) в 220 раз больше ее собственного радиуса (1737 км) и в 60 раз больше радиуса Земли. Планеты близки к шаровой форме («земной шар»), поэтому всю их массу почти без ошибки можно считать сосредоточенной в центре. Так, вблизи поверхности Земли (в том числе в космосе на высоте 200-300 км) скорость аппарата на круговой орбите (*первая космическая скорость*) равна

$$v_1 = \sqrt{gR} = (0.0098 \text{ км/с}^2 \times 6380 \text{ км})^{1/2} \approx 7.9 \text{ км/с}$$

(смещение движущейся материальной точки к центру Земли при такой скорости как раз соответствует искривлению земной поверхности). Другое хорошо известное проявление всемирного тяготения – приливы и отливы мирового океана, которые уже нельзя объяснить в приближении материальных точек. Из-за гравитационного взаимодействия водная оболочка Земли немного смещается по направлению к Луне, так что уровень воды над земной поверхностью, обращенной к Луне, становится выше, а на противоположной стороне планеты понижается (рис. 1.8).

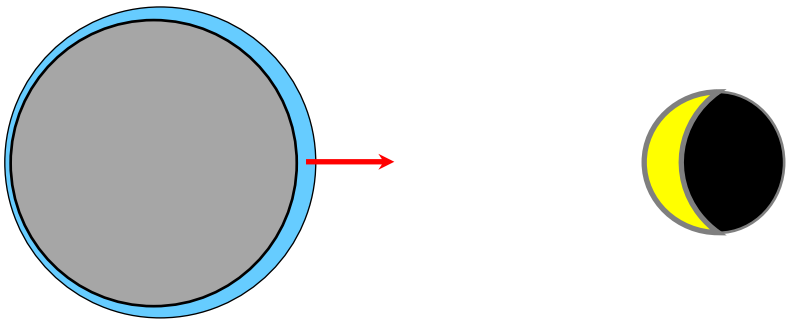


Рисунок 1.8. Приливы и отливы как результат притяжения водной оболочки Земли к Луне

1.1.4. Законы Ньютона

Фундаментом классической механики служат *законы Ньютона*. Они выглядят очень просто, но их глубокое содержание затрагивает всю современную физику.

1-й закон Ньютона – это *принцип относительности*, который в начале XVII века впервые открыл Галилео Галилей. Его первоначальная формулировка такова:

Тело, не подверженное внешним воздействиям (свободное тело), находится в покое либо движется прямолинейно и равномерно (свободное движение).

На самом деле внешние воздействия имеются всегда, поэтому «свободным телом» можно называть такой физический объект, действия на который всех внешних сил компенсируются (см. рисунок 1.4 а). Если внешние воздействия складываются в ненулевую равнодействующую силу, тело придет в движение – то есть станет перемещаться с ускорением (рис. 1.4 б). Теперь вообразим санки, поставленные на отполированную горизонтальную ледяную поверхность, или массивный идеальный шар на идеальной горизонтальной плоскости – после начального толчка можно считать, что центры таких объектов с хорошей точностью перемещаются прямолинейно и равномерно, а трение пренебрежимо мало.

Фундаментальное содержание 1-го закона состоит в том, что наблюдатель, оказавшийся внутри свободно движущейся системы, любыми доступными ему измерениями *не сможет определить ее «абсолютную» скорость* – в частности, не сумеет понять, движется система или покоится ($v = 0$). (Мы предполагаем, что контакта с окружением системы нет, то есть у космического корабля с наблюдателем внутри закрыты иллюминаторы. Но даже если иллюминаторы открыты, скорость корабля удается определить лишь относительно другого объекта, абсолютной скорости которого мы не знаем). Такие системы называются *инерциальными*. В неинерциальных системах (например, в набирающем скорость автомобиле с зашторенными окнами) наблюдатель почувствует, что система перемещается с ускорением, и с помощью отвеса определит направление движения. Сам 1-й закон, который к началу XX века дал толчок теории относительности, в настоящее время считают постулатом классической механики в такой формулировке:

Существуют инерциальные системы отсчета, в которых все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно.

2-й закон Ньютона связывает нескомпенсированное внешнее воздействие с механическим движением тела. Мы немного забежали вперед и уже его привели (формулы (1.7) и (1.13)):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

где **F** –равнодействующая сила, т.е. векторная сумма сил, которыми окружающий мир воздействует на тело, вызывая его движение, **a** – вектор ускорения при таком движении, m – масса, отражающая инертность тела к внешнему воздействию. Второй закон утверждает, что при суммарном внешнем воздействии, не равном нулю, тело движется с переменной скоростью, а «скорость изменения скорости» (то есть «глубина» изменения состояния тела) тем меньше, чем больше численный показатель его «косности»: инертная масса.

3-й закон Ньютона утверждает, что силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине (модулю), противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки. Примером могут служить гравитационные взаимодействия масс (1.11) или электростатические взаимодействия зарядов (1.12) на рис. 1.7: для пары материальных точек они одинаковы по абсолютной величине и направлены противоположно. На студенческом жаргоне 3-й закон формулируется так:

Действие равно противодействию.

Рассматривая взаимодействие протяженных тел, их мысленно разбивают на очень маленькие («бесконечно малые») части, определяют силы взаимодействия в каждой паре таких частей, а затем суммируют (интегрируют) эти силы.

Сделаем важное уточнение. Законы механики, усвоенные в школе, могут казаться нам тривиальными, сами собой разумеющимися – но для современников Галилея и Ньютона это было не так. Общепринятым считался постулат Аристотеля о том, что любое (в том числе равномерное) движение порождается вынуждающей силой. Его подтверждал весь повседневный опыт (лодка, тележка, сани) – а идея абстрагироваться от трения выглядела безумной. Единое для всех тел ускорение свободного падения g явно противоречило наблюдениям: из-за сопротивления воздуха легкие предметы падают медленнее тяжелых. (Школьный демонстрационный опыт с синхронным падением перышка и дробинки в стеклянной трубке, из которой откачан воздух, действительно «стоит на плечах гигантов»). По правильному замечанию Георгия Геннадьевича Малинецкого – одного из ключевых авторов в отечественной междисциплинарной физике – законы Ньютона для своего времени выглядели *контринтуитивными*.

Для гравитационных и кулоновских полей можно рассчитать потенциальную энергию. Мы покажем это в конце главы, пока приведем только результат:

(1.14) $$U = -K\,Z/r,$$

где Z – «действующий» параметр (соответственно гравитационная масса или электрический заряд) материальной точки в «центре пространства», т.е. в начале координат, r – расстояние от нее до выбранной точки пространства, K – масштабный множитель. Силовое поле, для которого можно ввести подобную характеристику, называют *потенциальным*. Энергия физического объекта с аналогичным «действующим» параметром z в поле с потенциалом U равна

(1.15) $$E = zU.$$

Знак «минус» в (1.14) показывает, что при $r \to \infty$ потенциал поля возрастает и стремится к нулю. Система из двух притягивающихся материальных точек обладает отрицательной энергией – меньшей, чем «нулевая» энергия двух невзаимодействующих тел на бесконечном удалении друг от друга. Система из двух отталкивающихся материальных точек имеет положительную потенциальную энергия, которая понижается при увеличении расстояния между ними. Процессы с уменьшением потенциальной энергии протекают самопроизвольно.

1.1.5. Механика в описании социальных систем

Воздействие физики на описание и моделирование социума начинается со «школьного» материала. Главный канал, по которому физические законы влияют на состояние общества, непосредственно относится к небесной механике. Климатические зоны и смена времен года на нашей планете, жизненно важные для земледелия (основы древних цивилизаций), определяются наклоном оси вращения Земли к плоскости земной орбиты, или *плоскости эклиптики*. Особенностями динамики Земли (*прецессией* «земной оси», *эксцентриситетом* орбиты и другими факторами) вызваны такие палеоклиматические явления, как ледниковые периоды. Количество энергии, излучаемой Солнцем в единицу времени, тоже не вполне постоянно: ее изменения в *циклах солнечной активности* составляют примерно 0.1%, а нерегулярные *вековые флуктуации* достигают 0.2-0.3%. А человечество – *диссипативная система*: оно существует только благодаря притоку солнечной энергии и сильно зависит уже от малых вариаций этого притока. Понижением среднегодовой температуры земной поверхности в пределах 1° в историческом прошлом провоцировались крупные, обычно

негативные события: крушение империй вблизи «римского минимума» IV-VI веков н.э., длительные войны и революции «малого ледникового периода» в XVII веке и многие другие.

Влияние климата на исторические процессы мы рассмотрим в главе 9. Пока отметим, что модели, заимствованные из физики, в науках об обществе до сих пор привлекают к решению частных вопросов, оставляя глобальную динамику человечества на Земле в ведение *физической истории*: такая дисциплина, родственная физической географии, возникла несколько десятилетий тому назад. Успехами «физических» (обычно *квазифизических*) схем в описании тех или иных частных явлений нельзя ни подтвердить, ни опровергнуть корректность применения физики в общественных дисциплинах. И все же само их использование в науках о человеке свидетельствует в пользу физики.

Модель социального поля

В первой половине XX века произошла революция в теоретической физике: появились квантовая и релятивистская механика, а вслед за ними квантовая теория поля с многочисленными приложениями. Многих научных работников заинтересовала возможность использовать новый математический формализм (в отличие от классической физики, прямо вносивший в прогнозы дискретность, относительность и неопределенность) в биологии и в описании поведения человека. С 1920-х годов в западной Европе этими проблемами занимался ряд авторитетных семинаров под руководством ведущих физиков – среди российских ученых с них участвовали один из основателей отечественной генетики Н.В. Тимофеев-Ресовский и выдающийся физико-химик А.А. Баландин.

В первой половине XX века немецкий психолог Курт Левѝн (1890-1947), в 1933 г. эмигрировавший в США, разработал *теорию психологического поля*. В рамках этой теории для описания состояния индивидуума в общественном окружении на «словесном» (вербальном) уровне вводились квазифизические (или *физикалистские*) понятия психологической среды, напряжения, психической энергии и собственно «поля» как совокупности всех воздействий на человеческое поведение. В области психологии теория Левина существенно реформировала *бихевиоризм*, с начала XX века постулировавший жесткие рефлекторные связи между внешней средой и реакцией субъекта, и дала толчок исследованиям психологии личности.

Упрощенная расчетная схема социального поля возродилась в 1980-е – 1990-е годы в компьютерном моделировании городского хозяйства. В таких моделях стремление движущегося пешехода, обычно представляемого материальной точкой с ненулевыми массой и скоростью, к его целям (банкам, магазинам, подземным переходам) и уклонение от препятствий (стен, фонарных столбов, других пешеходов) задается искусственными потенциалами притяжения и отталкивания. Эти модели позволяют рассчитать плотность потока людей в городе, их скорости и другие характеристики, допускающие экспериментальную проверку: сопоставление с данными видеокамер и др.

Компьютерные расчеты транспортных и пассажирских потоков с применением модельного «социального поля» будут рассмотрены во второй части. Пока заметим, что такие модели движения не вполне соответствует классической механике. Так, естественное стремление пешехода обойти препятствия обычно выражает «отталкивательный» потенциал наподобие кулоновского. Однако этот потенциал действует лишь в одну сторону. На рис. 1.9 два пешехода корректируют свое движение вблизи препятствия и один из них, догоняя второго, также старается с ним не столкнуться. Но пешеход, идущий

впереди, не видит догоняющего – и не учитывает его в своих перемещениях. Если моделировать коррекцию движения искусственной силой отталкивания – она действует только на идущего сзади; отталкивание неподвижного столба от движущихся пешеходов тоже отсутствует. Таким образом, в расчетных моделях социального поля не выполняется 3-й закон Ньютона: строго говоря, эти модели являются не физическими, а *имитационными*.

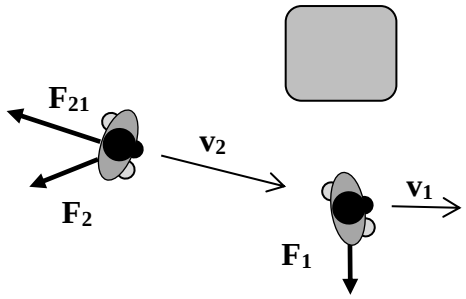


Рисунок 1.9. Два пешехода (вид сверху) и препятствие в модели социального поля

Гравитационная модель обмена

Закон всемирного тяготения (1.11) утверждает, что сила гравитационного взаимодействия материальных точек прямо пропорциональна произведению их масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между точками. Гравитационное поле низкосимметричных небесных тел (космических аппаратов, астероидов и комет) находят численным интегрированием; при этом общая форма зависимости (1.11) остается прежней.

В расчетах для городского хозяйства, начатых к середине XX века, было постулировано, что влияние некоторой экономической единицы (района, а также города, страны и др.) на другую аналогичную единицу прямо пропорционально численности населения этих единиц («экономическим массам») и обратно пропорционально расстоянию между ними. Этим постулатам соответствует *гравитационная модель*:

(1.16) $$Y_{12} = K N_1 N_2 / {R_{12}}^{\alpha},$$

где Y_{12} – количественная мера взаимодействия, N_1 и N_2 – численности населения взаимодействующих экономических субъектов, R_{12} – расстояние между ними, K и α – «подгоночные» эмпирические параметры.

Гравитационную модель (1.16) часто используют в расчетах транспортных потоков. В этом случае Y_{12} – поток пассажиров между двумя районами, расстояние R_{12} между которыми определяется довольно условно. С ее помощью также оценивают объемы внешней торговли. Тогда N_1 и N_2 – внутренний валовый продукт (ВВП) рассматриваемых стран, Y_{12} –торговый оборот между ними. «Экономическое расстояние» между странами, особенно соседними, здесь становится еще одним произвольно подбираемым параметром. Хотя обоснованность (1.16) не вполне очевидна, а переносимость эмпирических параметров из одной системы социальных взаимодействий в другую надо исследовать в каждом конкретном случае – формулы наподобие (1.16) действительно применяются для экономических и хозяйственных оценок. Заметим, что объемы торгового оборота небольшой страны X с большими государствами часто сравнивают по формуле (1.16), но «обратный» интерес крупных стран к торговле со страной X может определяться другими соображениями – например, политическими. В этом случае, как и для «социального поля»,

гравитационная модель не удовлетворяет 3-му закону Ньютона, то есть является имитационной.

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 1.1

1.1. Пользуясь данными из таблицы и законом всемирного тяготения (1.11), найдите ускорение свободного падения на поверхности Луны, Марса и Юпитера

Планета	Масса, кг	Радиус, км	Ускорение свободного падения, м/с^2
Земля	$5.97 \cdot 10^{24}$	6380	9.8
Луна	$7.35 \cdot 10^{22}$	1738	
Марс	$6.42 \cdot 10^{23}$	3396	
Юпитер	$1.90 \cdot 10^{27}$	69900	

1.2. Супермаркет в строящейся части города предназначен для обслуживания новых микрорайонов (рис. 1.10). После заселения 1-го и 2-го микрорайонов (соответственно 5 тыс. и 10 тыс. жителей на расстоянии 1 км от супермаркета) среднее число посетителей в день составляло 1500 человек. При заселении третьего микрорайона (40 тыс. жителей на расстоянии 2 км) число посетителей в день возросло до 2500. По гравитационной модели оцените вероятное ежедневное число посетителей супермаркета после заселения четвертого микрорайона: 10 тыс. жителей на расстоянии 1.4 км.

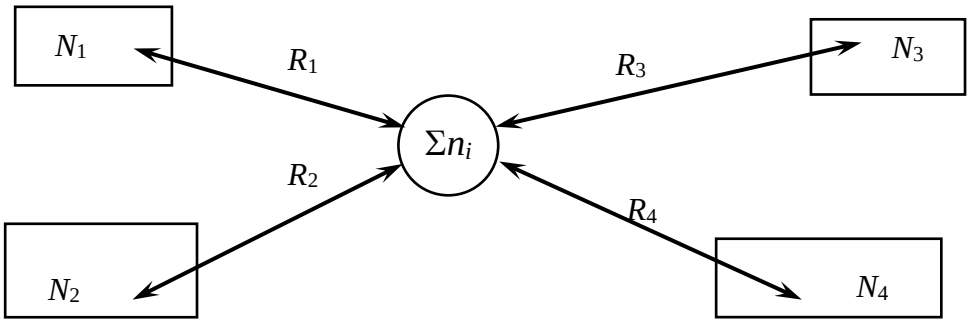


Рисунок 1.10. Микрорайоны и супермаркет

Решение

«Потенциалу» микрорайона с населением N_i жителей на расстоянии R_i от супермаркета соответствует n_i посетителей супермаркета в день. Формулу (1.16) надо упростить по аналогии с потенциалом массы или заряда (1.14):

$$n_i = K \frac{N_i}{R_i^{\alpha}}.$$

Здесь i = 1, 2, 3 или 4 – номер микрорайона, R_i – расстояние до него, K и α – эмпирические параметры. Выразим население микрорайонов N_i в тысячах человек, а расстояния R_i в километрах. Микрорайоны 1 и 2 расположены на одинаковом расстоянии, поэтому

$$K\left(\frac{5}{1^{\alpha}} + \frac{10}{1^{\alpha}}\right) = K \cdot 15 = n_1 + n_2 = 1.5, \text{ т.е. } K = 0.1$$

($1^{\alpha} = 1$ для любой степени α; мы взяли самый простой пример, показывающий, как работает гравитационная формула). Третий микрорайон, расположенный на расстоянии 2 км, увеличил число посетителей на 1 тыс. человек в день. Запишем уравнение

$$n_3 = 0.1 \cdot \frac{40}{2^{\alpha}} = 1,$$ то есть $2^{\alpha}=4$, или $\alpha=2$

С найденными параметрами потенциала вычислим, сколько покупателей в день добавит четвертый микрорайон:

$$n_4 = 0.1 \cdot \frac{10}{1.4^2} = \frac{1}{1.96} \approx 0.510.$$

Таким образом, после заселения четвертого микрорайона число покупателей вырастет еще примерно на 500 человек (мы занимаемся приблизительной оценкой) и составит 3 тыс. человек в день. На резонный вопрос «а если в условиях задачи расстояния R_1 и R_2 не равны единице и они разные?» ответ таков: тогда надо составить систему двух уравнений с двумя неизвестными и решить ее методами школьной алгебры. При этом значения параметров K и α могут измениться, но схема останется прежней. Подобные расчеты проводят при планировании городской застройки.

1.2. Элементарная физика макроскопических систем

1.2.1. Масштабы физических явлений и система единиц СИ

Масштабы явлений, исследуемых физикой, лежат в интервале расстояний от 10^{-15} м (диаметр нуклонов в атомном ядре) до 10^{26} м (расстояние до наиболее удаленных наблюдаемых космических объектов) и в интервале времени от 10^{-23} до 10^{17} секунд (соответственно, характерное время процессов внутри ядра и возраст Вселенной). В таблице 1.1 собраны приставки, указывающие кратные значения и десятичные доли в обозначениях физических величин.

Таблица 1.1.

Десятичные множители и десятичные доли единиц измерения

Приставка	Символ	Степень	Приставка	Символ	Доля
дека	да	10^{1}	деци	д	10^{-1}
гекто	г	10^{2}	санти	с	10^{-2}
кило	к	10^{3}	милли	м	10^{-3}
мега	М	10^{6}	микро	мк	10^{-6}
гига	Г	10^{9}	нано	н	10^{-9}
тера	Т	10^{12}	пико	п	10^{-12}
пета	П	10^{15}	фемто	ф	10^{-15}
экса	Э	10^{18}	атто	а	10^{-18}
зетта	З	10^{21}	зепто	з	10^{-21}
иотта	И	10^{24}	иокто	и	10^{-24}

Самыми большими числами в нашем быту выражаются объемы компьютерной информации – например, память, занятая бытовыми видеозаписями и рекламными «роликами» во всемирной сети Интернет. Для единиц информации используется *двоичная* система записи, основанная на множителе $2^{10} = 1024$. Так, минимальная единица информации 1 байт – это комбинация из трех символов 0 или 1 (бит), записанных в

двоичной системе. Таким образом, 1 байт = 8 бит (2^3). В двоичной системе 1 кбайт = 1024 байт, 1 Мбайт = 1024 кбайт, и т.д. При сравнении двоичных значений с десятичными это может вызывать трудности («начинающий программист думает, что в одном килобайте тысяча байтов, профессионал – что в одном килограмме 1024 грамма»). Значения физических величин приводятся только в десятичной системе.

Физические данные чаще всего представляют в международной системе единиц СИ (от французского *Système international d'unités, SI)*, установленной XI Генеральной конференцией по мерам и весам в 1960 г. В основу системы СИ положены семь единиц основных физических параметров:

килограмм, метр, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела.

Эти величины независимы, то есть не выводятся алгебраическими действиями из других основных единиц. Они установлены физиками по соглашению. Так, за один метр исторически была принята одна сорокамиллионная длины меридиана, проходящего через город Париж, а в XX веке – равное ей количество длин волн для одной из линий в оптическом спектре криптона, также выбранной по соглашению (соответственно, очень большое и некруглое). Первые три основные единицы системы СИ в этой главе мы уже использовали. Единица электрического тока *ампер*, тоже заданная эмпирически, довольно велика: при напряжении 220 вольт в бытовой электрической сети ток силой 1 *а* смертельно опасен для человека. Единица температуры *кельвин*, обозначаемый *K* и прежде называвшийся «градусом Кельвина», совпадает по величине с более привычным градусом Цельсия (1 K = 1 °C), но температура в системе СИ отсчитывается не от точки замерзания воды, а от *абсолютного нуля* (–273.15 °C). Единицу *моль*, как и кельвин, мы еще рассмотрим в этом разделе. Наконец, *кандела* (старое название *свеча*) – эмпирическая единица силы света; для наших целей она не понадобится.

Все другие физические величины в системе СИ выводятся из семи основных величин алгебраическими действиями. Так, единица электрического заряда *кулон* (см. формулу (1.12)) определяется как количество электричества, проходящее за 1 секунду через проводник, по которому течет ток в 1 ампер: 1 Кл = 1 А·с. По бытовым меркам это тоже очень большая величина. Единицу энергии *джоуль* выражают через основные величины в соответствии с определением работы и энергии: 1 Дж = 1 Н·м = 1 кг·м^2/с^2. Единицей потенциала электрического поля служит *вольт* (*В*): при разности потенциалов между двумя точками поля 1 В для перемещения между ними заряда 1 Кл нужно совершить работу в 1 Дж[*]. Заметим, что одна из основных величин (секунда) переводится в более крупные повседневные единицы времени (минуту, час, сутки, год) совсем не в десятичной системе.

Кроме системы СИ (и вообще десятичных метрических единиц), в физике применяются *внесистемные единицы*: так, в следующей главе будет обсуждаться *калория*. Наряду с СИ, физики продолжают использовать другие международные системы, предложенные ранее. В литературе часто встречается система СГС («сантиметр – грамм – секунда») с собственными обозначениями: например, единицами силы «дина» и энергии «эрг» (1 дин = 1 г·см/с^2, 1 эрг = 1 г·см^2/с^2 – таким образом, 1 Н = 10^5 дин и 1 Дж = 10^7 эрг). Два разных

[*] В соответствии с правилами СИ, наименование производных единиц, названных по имени учёных, пишется со строчной буквы (ньютон), а её обозначение — с заглавной (1 Н).

варианта системы СГС используются в описании электрических (СГСЭ) и магнитных явлений (СГСМ).

Несогласованность обозначений в физике не особенно осложняет ее междисциплинарные применения. Дело в том, что попытки описать социальные процессы формулами, заимствованными из физики, обычно так изменяют исходную модель, что строгой обоснованности у полученных теорий изначально не предполагается. (Например, «гравитационной» формулой (1.16) в мировой торговле определяется не аналог силы либо энергии, а товарооборот, то есть поток). Для «физики общества» характерны отсутствие общепринятых единиц измерения и разнородность количественных данных, у многих из которых, выражаясь языком средней школы, не вполне ясен *физический смысл*.

1.2.2. Газовые законы

В этом разделе мы рассмотрим некоторые физические закономерности, справедливые для *макроскопических* количеств вещества. Масса макроскопических образцов – это именно те граммы и килограммы, с которыми мы привыкли в быту. Приставка «макро» обусловлена тем, что все тела состоят из очень маленьких атомов и молекул – соответственно, в одном грамме вещества таких частиц очень и очень много.

Один *моль* чистого вещества с определенным химическим составом – это количество вещества в граммах, численно равное его формульной массе в относительных атомных единицах. Молекулярной, или формульной массой (в старой литературе – *молекулярным весом*) в химии называется относительная масса одной молекулы вещества либо комбинации элементов в его «химической формуле», например NaCl. Обычно используют *углеродную единицу*: 1/12 массы атома для изотопа углерода ^{12}C. Формульные массы в атомных единицах (а.е.) близки к целым числам. Так, относительная масса молекулы воды H_2O, состоящей из преобладающих в природе изотопов ^{1}H (протия) и ^{16}O, приближенно равна 18 а.е. Молекулярная масса *тяжелой воды*, в которой протий заменен изотопом дейтерием ^{2}H (в химических формулах также обозначаемым D), составляет примерно 20 а.е. Соответственно, моль обычной воды H_2O по массе близок к 18 г, а моль тяжелой воды D_2O – к 20 г; один грамм тяжелой воды – это 0.05 молей.

В химии моль часто называют *грамм-молем* или *грамм-молекулой*. В молях выражаются и количества таких веществ, которые не состоят из изолированных молекул. Например, формульная масса фторида натрия NaF (кристаллического вещества, в первом приближении построенного из ионов Na^+ и F^-) равна 42 а.е.; 21 грамм NaF – это 0.5 моля. Для простых веществ, состоящих из атомов только одного элемента, химики вместо моля используют термин *грамм-атом*: количество граммов вещества, численно равное соответствующей атомной массе. Например, масса одного грамм-атома (или 1 моля) металлического натрия с точностью до 1% равна 23 г.

«Абсолютные» массы атомов и молекул очень малы: так, масса одного атома ^{1}H равна $1.673\cdot10^{-27}$ кг. Соответственно, 1 моль любого вещества должен содержать огромное и при этом одно и то же число формульных единиц. Это число называется *числом Авогадро* или *постоянной Авогадро*

(1.17) $$N_A = (6.02214\ldots)\cdot10^{23}$$

В системе СИ число Авогадро имеет размерность [моль$^{-1}$] («число молекул в моле»). Так как моль – совершенно эмпирическая единица, это число по определению одинаково для одного моля любого вещества. Точные массы 1 грамм-атома даже для чистых изотопов

обычно дробные, ибо энергия связи протонов и нейтронов (*нуклонов*) в атомном ядре немного уменьшает массу ядра по сравнению с суммой масс образующих его нуклонов (так называемый *дефект массы*). Например, 1 моль водорода $^1H_2$ имеет массу 2.016 г и при этом содержит, как положено, $N_A = (6.02214\ldots)\times10^{23}$ двухатомных молекул.

Колоссальное число атомов в грамме любого вещества показывает, что такие образцы корректно называть *макроскопическими*. При внешних воздействиях динамика составляющих их частиц с высокой точностью усредняется, поэтому дозированное воздействие вызывает точно измеряемую реакцию – то есть макроскопические образцы вещества обладают хорошо определенными свойствами. Заметим, что всё население земного шара к началу 2024 г. составило приблизительно $8.14\cdot10^9$ человек, что *на 14 порядков* меньше числа Авогадро. Поскольку само человечество распределено по очень большому набору разных социальных систем – это чаще всего не макро-, а *микроскопические* (как физические системы, содержащие от десятков до нескольких тысяч частиц), в лучшем случае *мезоскопические* (т.е. находящиеся между микро- и макроуровнями) системы. Тем не менее, в науках об обществе есть немало моделей, перенесенных из физики макроскопических образцов вещества.

Простейшим абстрактным макроскопическим телом является *идеальный газ*. К этой модели очень близки газы, составляющие земную атмосферу (78% N_2, 21% O_2, 0.9% Ar, примеси других инертных газов и CO_2, переменное содержание водяного пара) при *нормальных условиях*: температуре 0 °C и атмосферном давлении 760 *Торр* (по старому обозначению 760 *миллиметров ртутного столба*). В этих условиях 1 моль любого газа занимает объем $V \approx 22.4$ дм^3, т.е. 22.4 литра. Это *закон Авогадро*, экспериментально установленный в XIX веке.

В произвольных условиях состояние идеального газа характеризуется его массой m, объемом V, давлением P и температурой T. Эти параметры связаны *уравнением состояния*, которое называется *уравнением Клапейрона-Менделеева*

$$PV = \frac{m}{M}RT, \tag{1.18}$$

где M = молярная масса, R = 8.31 Дж/(моль·К) –универсальная газовая постоянная. Отношение m/M равно числу молей газа. Левая и, соответственно, правая части уравнения (1.18) имеют размерность энергии (1 Н/м^2·м^3 = 1 Н·м = 1 Дж). Температура T выражена в абсолютных единицах, или кельвинах, связанных с обычной температурой t по шкале Цельсия:

$$T(K) = t(°C) + 273.15 \tag{1.19}$$

Для «обычных» макроскопических количеств газов с объемом от ~1 см^3 и более законы, выраженные формулой (1.18), соблюдаются строго. Хотя состояние газа определяется хаотическим движением молекул и их столкновениями со стенками сосуда, при числе столкновений порядка 10^{23} в секунду на 1 см^2 давление и температура практически являются точными параметрами без экспериментально выявляемых нерегулярных колебаний (*флуктуаций*). (Движение броуновской частицы, которое будет рассмотрено в 4-й главе – это как раз флуктуации ее положения из-за «ударов» молекул окружающей среды, возникающие потому, что такая система не является макроскопической). Газовые законы были установлены опытным путем (рис. 1.11) и лишь затем теоретически обоснованы в рамках молекулярной физики.

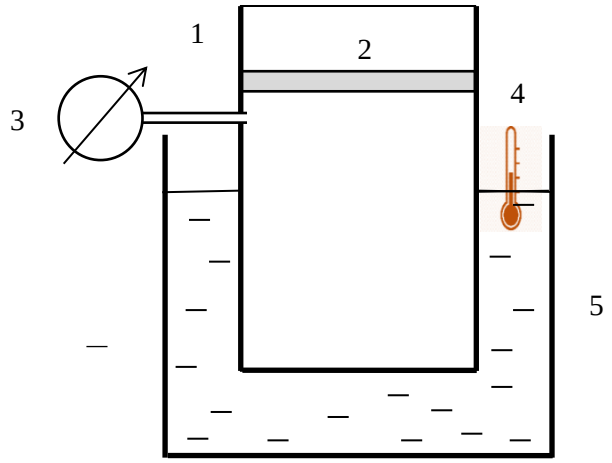


Рисунок 1.11. Установка для проверки газовых законов: (1) цилиндр с газом, (2) легкий поршень, (3) манометр, (4) термометр, (5) термостат

При постоянном давлении газа (*изобарический процесс*) его объем, в соответствии с (1.18), линейно изменяется с изменением температуры (рис. 1.12).

(1.20) $$V_1/T_1 = V_2/T_2$$ ***закон Гей-Люссака.***

Продолжая прямые линии до $V = 0$, можно определить «абсолютный ноль» температуры $t = -273.15$ °C в соответствии с (1.19).

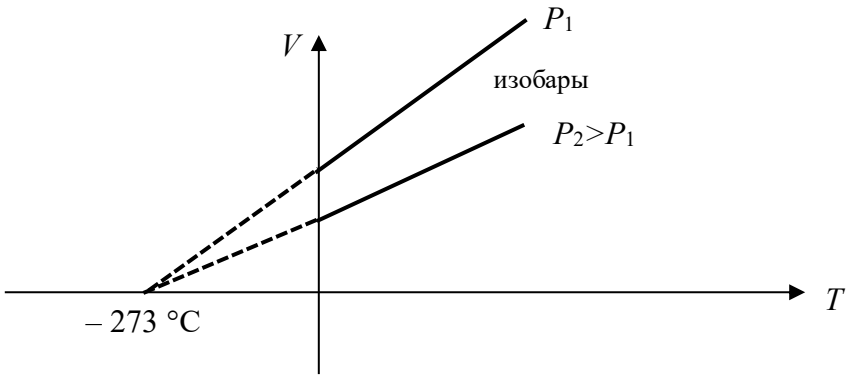


Рисунок 1.12. Изобарический процесс (*P* = const)

При постоянной температуре (*изотермический процесс*) из (1.18) следует

(1.21) $$PV = \text{const}$$ ***закон Бойля-Мариотта.***

На графике зависимости P от V *изотермы*, отвечающие разным значениям температуры T, представляют собой гиперболы (рис. 1.13). Похожую гиперболическую форму также имеет зависимость давления от объема в *адиабатических условиях*: если газ в сосуде под поршнем теплоизолирован:

(1.22) $$PV^{\gamma} = \text{const}',$$

где константы в правых частях (1.21) и (1.22) не совпадают и $\gamma > 1$ (уравнение *адиабаты*). (При расширении газа его температура понижается, а при сжатии возрастает, но идеализированный изотермический процесс протекает так медленно, что температура остается постоянной. Если же быстро сжимать газ в теплоизолированном объеме, его температура возрастет и давление дополнительно увеличится в соответствии с формулой

(1.18)). В следующей главе мы увидим, что показатель степени $\gamma > 1$ определяется числом степеней свободы молекул газа; для идеального газа он рассчитывается точно.

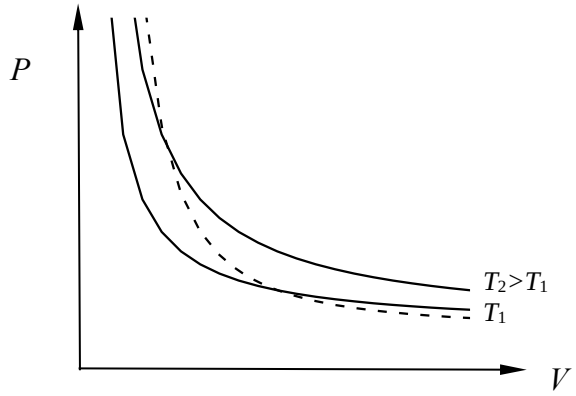


Рисунок 1.13. Изотермы 1 моля газа $PV=RT_1$ и $PV=RT_2$ (T_1,T_2=const) – сплошные линии. Адиабата PV^{γ}=const′– штриховая линия, $\gamma>1$

Подчеркнем, что газовые законы (1.20) и (1.21), как и уравнение (1.18), из которого они выводятся, вначале были установлены экспериментально. Этим хорошо иллюстрируется строгость и воспроизводимость измерений физического состояния газов как макроскопических систем.

Функция Кобба-Дугласа

В экономической теории используется функция, очень похожая на формулы (1.21) и (1.22). Она отражает зависимость количества продукции Y, выпускаемой предприятием либо отраслью в заданный период времени, от затрат *факторов производства*: денег (капитала K) и человеческого труда L (англ. labor):

(1.22 а) $$Y = A \cdot K^{\alpha} L^{\beta},$$

где L – количество отработанных человеко-часов, K – затраченный капитал (зарплаты работников, амортизация стоимости машин, оборудования и зданий). Степени α и β называются *показателями эластичности* факторов производства: они определяют пропорции замещения труда капиталом (и наоборот) при постоянном выпуске продукции. Масштабный множитель A обычно называется технологическим коэффициентом.

Соотношение (1.22 а) является одним из видов *производственных функций* (англ. *production functions*), которые показывают зависимость выпуска продукции от использованных факторов производства. Эту функцию обосновали в 1920-е годы американские экономисты Чарльз Кобб и Пол Дуглас. Гиперболические «траектории», соответствующие выпуску постоянного количества продукции в координатах (L, K), называются *изоквантами*. В разделе 1.5 мы обсудим их более детально.

Функция Кобба-Дугласа – пример «стилизованных закономерностей», характерных для неоклассической экономической теории. В общем виде такие формулы не вызывают возражений, но физического обоснования для них обычно не существует. При их выводе предполагается, что экономические явления, подобно динамике макроскопических систем, воспроизводимы и строго детерминированы. Разные виды производственных функций служат качественными ориентирами в реальной экономической деятельности.

Оценка стратегического потенциала государства

При оценке стратегического потенциала страны в геополитике следует учесть ее фундаментальные параметры: экономические, демографические, технические и военные. Для этой цели часто используют эмпирическую формулу

$$P_s = K \cdot TG^{\alpha} N^{\beta} S^{\gamma} M^{\delta}, \tag{1.23}$$

где P_s – искомый стратегический потенциал, G – объем валового внутреннего продукта (ВВП) страны, N – численность ее населения, S – площадь территории, T – «технологический коэффициент» (а не время или температура), M – численность вооруженных сил, показатели степеней от α до δ – эмпирические (подгоночные) параметры, а K в данном случае не капитал, а масштабный множитель, подбираемый тоже эмпирически.

Объективная обоснованность формул, подобных (1.23), не вполне ясна. Полнота набора параметров определяется мнением специалистов в данной области, из общих соображений она также не очевидна. В опасной геополитической обстановке государства могут предоставлять о себе ложные или искаженные статистические данные[*]. Разная размерность сомножителей в (1.23), даже отвлекаясь от дробных показателей степени, сильно затрудняет объективную интерпретацию «потенциала», хотя само это слово косвенно отражает определенное влияние физики на политику. Безразмерный «технологический коэффициент» некоторые авторы объединяют вместе с K в единый масштабный множитель. В общем смысле оценка стратегического потенциала других стран, как представляющих угрозу самим своим существованием, хорошо показывает уровень недоверия в международной политике.

Тем не менее, подобные оценки действительно применяются в геополитических рассуждениях и потому заслуживают внимания[**]. При сравнении потенциалов разных государств, безусловно, надо использовать одинаковые соотношения вида (1.23) с единой шкалой входящих в них параметров. Для объективности заметим, что в расчетные формулы некоторых вполне реальных физических явлений (например, в близкой автору области рентгеновской дифракции) тоже входит «цуг» поправочных множителей, каждый из которых обоснован только в рамках своей частной модели.

[*] Лауреат нобелевской премии Роальд Хоффман в лекциях по химии для американских первокурсников, на которых довелось присутствовать автору, в частности, говорил, что объем промышленного производства серной кислоты в СССР и КНР (по числу цистерн на железных дорогах, определяемого со спутников) с 1960-х годов использовали в США для оценки реального ВВП этих стран.

[**] В.А. Садовничий, А.А. Акаев, А.В. Коротаев, С.Ю. Малков, В.Н. Соколов, *Анализ и моделирование мировой и страновой динамики*, URSS. 2017.

1.3. Законы постоянного тока

Голый кондуктор бежит под вагоном
Вольный перевод английского naked conductor runs under the carriage:
шутка инженеров XX века

Другой пример точных зависимостей в макроскопических физических системах – законы, связывающие силу электрического тока с напряжением, сопротивлением и выделяющейся теплотой. Как и газовые законы, они были вначале экспериментально установлены в XVIII–XIX веках и лишь затем обоснованы теоретически. Чтобы их обсуждать, вспомним основные физические характеристики постоянного тока в электрической цепи.

(1) *Электрическая цепь* – это последовательность соединенных *проводников*, через которые протекает поток носителей зарядов: *электрический ток*. Ток, текущий в одном направлении между противоположно заряженными концами цепи без изменений во времени, называется *постоянным*.

(2) *Сила тока I* пропорциональна количеству заряженных частиц, перенесенных в единицу времени через проводник.

(3) *Напряжением U* (в старой, более точной терминологии *падением напряжения*) между двумя точками 1 и 2 в цепи называется разность электрического потенциала $U_1 - U_2$ между этими точками. Потенциал проводника, соединенного с поверхностью земли, равен нулю (*заземление*). От этого нуля в электрических схемах отсчитывается напряжение на всех участках цепи. Знаком разности потенциалов на участке цепи (+ или –) задается направление тока; сила тока пропорциональна напряжению.

(4) Коэффициент пропорциональности между напряжением и током называется *сопротивлением R* участка цепи. Это аналог трения при механическом движении: сопротивление переводит часть энергии электрического поля, переносящего заряды, в тепловое движение атомов в проводнике.

Чаще всего проводниками в электрических цепях служат металлы или сплавы металлов в виде проволоки («провода»). В рамках *модели электронного газа* предполагается, что в кристаллических металлах отрицательно заряженные электроны с внешних оболочек атомов (например, по одному электрону от каждого атома меди) покидают свои атомы и беспорядочно перемещаются в кристаллической решетке среди оставшихся в ней положительно заряженных ионов. При приложении к металлу внешнего электрического поля с разностью потенциала *U* на хаотическое движение электронного газа накладывается дрейф электронов к положительно заряженному концу проводника: *электрический ток* (рис. 1.14). Более массивные атомы и ионы металла, соединенные с соседними атомами химическими связями, при этом остаются на месте. Средняя скорость дрейфа электронов пропорциональна напряжению *U* и обычно составляет доли мм/с, а вот вызывающее его поле при «включении в сеть» распространяется в проводнике со скоростью света (≈300000 км/с). В проводниках другой природы переносчиками заряда могут быть положительные и отрицательные ионы (например, в расплаве либо в водном растворе NaCl) или электроны вместе с положительными ионами (ионизированный газ в газосветной трубке). По историческим причинам за направление тока в цепи принимается направление от положительно заряженного конца цепи к отрицательному («от плюса к минусу»).

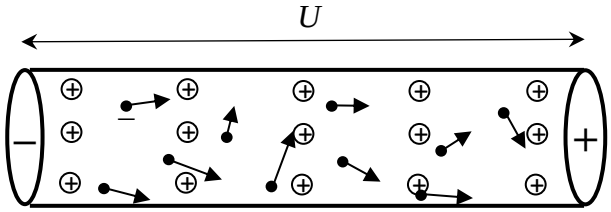


Рисунок 1.14. Электрический ток как дрейф электронов металла в поле с потенциалом *U* (схема)

Приложенное напряжение U и вызванный им ток I в проводнике подчиняются ***закону Ома***

(1.24 а) $U = IR$, или

(1.24 б) $I = (1/R)U$,

где R – сопротивление проводника. В форме (1.24 а) этот закон обычно используют в расчетах электрических цепей, тогда как (1.24 б) лучше передает его физический смысл: от приложения разности потенциалов U, как внешнего воздействия, в проводнике возникает постоянный электрический ток I. Единицей сопротивления в системе СИ является *ом* (международное обозначение Ω). В проводнике с сопротивлением 1 Ом при напряжении 1 В возникает ток силой 1 А. *Удельное* сопротивление для проводников единичной длины и одинакового сечения у разных металлов и сплавов может различаться в десятки и сотни раз. Обратная величина $1/R$ называется *проводимостью* или *электропроводностью* с единицей *сименс* (*См*): 1 См = 1 $Ом^{-1}$. В физике чаще используется удельная электропроводность на единицу длины проводника (См/м, то есть сименс на метр).

Внешнее сходство закона Ома с линейной зависимостью ускорения тела от действующей силы во втором законе Ньютона (1.7) обманчиво. В отличие от движения *консервативных* механических систем, где мерой инертности служит масса, электрический ток в проводнике – *диссипативный* процесс дрейфа «электронного газа» в металле: он мгновенно останавливается, если отключить внешний потенциал U. В этом смысле электрические цепи строго подчиняются постулату Аристотеля о движении под действием внешней силы. Причина кроется в разной природе механических и многочастичных систем. При механическом движении макроскопического тела все его атомы перемещаются одинаково (амплитуда их колебаний вокруг положений равновесия в масштабах размеров системы пренебрежимо мала), тогда как беспорядочные смещения молекул газа либо заряженных частиц в проводнике сравнимы с размерами самой системы. Главный смысл закона Ома – в линейной связи тока с напряжением, которая соблюдается в очень широком интервале значений U и I; это экспериментальный факт[*].

Сопротивление металлического проводника вызвано столкновениями электронов, дрейфующих в электрическом поле, с атомами металла. При этом кинетическая энергия электронов переходит в тепловую энергию колебания атомов: проводник нагревается.

[*] Нулевое электрическое сопротивление имеют *сверхпроводники*: электроны внутри них в постоянном магнитном поле могут перемещаться неограниченно долго. В сверхпроводящее состояние при глубоком охлаждении переходят многие металлы, сплавы и *интерметаллиды* (химические соединения металла с металлом – например, Nb_3Sn), а также некоторые сложные неорганические соединения с переменным составом ($YBa_2Cu_3O_{7-x}$). Движение электронов в сверхпроводниках, имеющих множество практических приложений, без потерь энергии в столкновениях с атомами родственно другому физическому эффекту, вызванному экстремально низкой температурой: *сверхтекучести* жидкого гелия при T < 4 K .

Потери энергии в единицу времени при работе электрического устройства показывает *мощность*

$$W = U \cdot I.$$

Мощность, или работу электрического тока в единицу времени, измеряют в *ваттах* (*Вт*): 1 Вт = 1 В·А = 1 Дж/с. Количество теплоты Q (этот вид энергии мы строго определим в следующей главе), которую создает ток за время t на участке цепи с сопротивлением R, можно выразить через закон Ома (1.24 а, б):

(1.25) $$Q = Wt = I^2Rt = (U^2/R)t.$$

Это ***закон Джоуля-Ленца***, записанный в двух формах: через ток и через напряжение в цепи. Сравнение его формулировок показывает, что количество теплоты, порожденной током в нагревательном элементе (например, в спирали электрической плитки), который включен в сеть с постоянным напряжением U, при росте сопротивления R не увеличивается, а *уменьшается*. Дело в том, что ток I, обратно пропорциональный сопротивлению, входит в формулу (1.25) во второй степени (см. (1.24 б), поэтому ток через более высокое сопротивление меньше. Наоборот, при уменьшении R ток и выделившаяся теплота возрастают гиперболически (рис. 1.15). Аварийное разрушение элемента цепи с низким сопротивлением от нагрева проходящим током (плавление, разрыв, сгорание на воздухе) в электротехнике называют *коротким замыканием*.

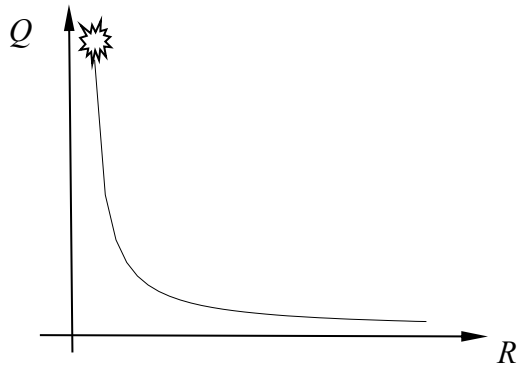


Рисунок 1.15. Увеличение выделившейся теплоты *Q* с уменьшением сопротивления *R* проводника. Знак вспышки – короткое замыкание

Расчет тока и сопротивления в электрических схемах имеет большую практическую важность. На рис. 1.16 показан простейший пример: последовательное (а) и параллельное (б) соединения элементов с сопротивлением R_1 и R_2 (дальше мы будем их называть просто «сопротивлениями») в участке цепи, к которому приложено напряжение U. При последовательном соединении через R_1 и R_2 пройдет одинаковый ток I (т.е. одинаковое число зарядов), так как полное число зарядов в цепи сохраняется. По закону Ома на сопротивлениях R_1 и R_2 при этом возникнут напряжения U_1 и U_2:

$$IR_1 = U_1$$
$$IR_2 = U_2.$$

Складывая два этих равенства, получим

$$I(R_1 + R_2) = U_1 + U_2 = U.$$

Сумма напряжений на сопротивлениях R_1 и R_2 равна заданному напряжению на концах цепи. Тогда суммарное сопротивление R в общей формуле закона Ома ($IR=U$) для этого участка

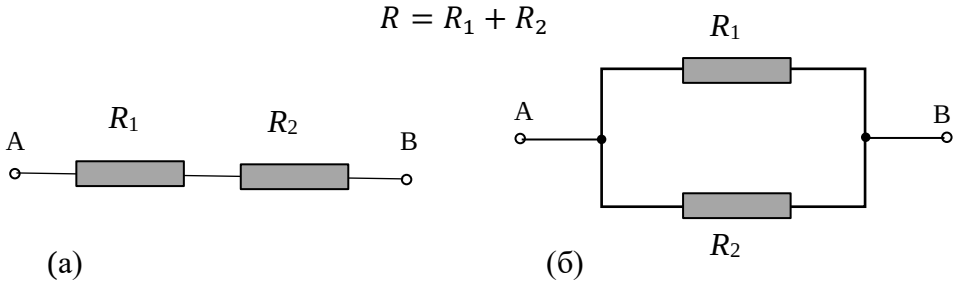


Рисунок 1.16. Соединение сопротивлений в электрической цепи: (а) последовательное, (б) параллельное

При параллельном соединении сопротивлений R_1 и R_2 напряжение на каждом из них одинаково и равно приложенному потенциалу U, а токи I_1 и I_2 через них различаются. Благодаря сохранению полного числа зарядов в цепи, ток через весь участок на рис. 1.16 б равен сумме токов через сопротивления R_1 и R_2.Тогда по закону Ома

$$I_1 = U/R_1$$
$$I_2 = U/R_2.$$

Складывая равенства, получим

$$I = I_1 + I_2 = U(1/R_1 + 1/R_2) = U/R\,.$$

Таким образом, для сопротивления R всего участка

$$1/R = I/R_1 + 1/R_2, \text{ или}$$
$$R = (R_1 + R_2)/R_1R_2.$$

Мы видим, что при последовательном соединении двух сопротивлений итоговое сопротивление участка цепи возрастает (если $R_1 = R_2$, то $R = 2R_1$), а при параллельном *уменьшается* (при $R_1 = R_2$ $R = R_1/2$). Это неудивительно: параллельно подключенный проводник – дополнительный путь для тока; при любом его конечном сопротивлении R_2 и постоянном напряжении U число проходящих носителей заряда увеличится. По закону Джоуля-Ленца (1.25), выделение тепла при последовательном соединении сопротивлений

$$Q_1/Q_2 = R_1/R_2$$

(через оба сопротивления идет одинаковый ток, и на большем сопротивлении выделится больше теплоты). При параллельном соединении

$$Q_1/Q_2 = R_2/R_1,$$

то есть больше теплоты выделится на *меньшем* сопротивлении (одинаковое напряжение).

Законы Кирхгофа

В расчетах сложных электрических схем (рис. 1.17) используют *законы Кирхгофа*, представляющие собой один из многих видов *уравнений материального баланса*. Для любого узла схемы можно указать направления «входящих» (имеющих знак «+») и «выходящих» токов (знак «–»), причем

(1.26) $$\Sigma\, I_i = 0.$$

Это ***первый закон Кирхгофа****, или закон сохранения заряда*: число зарядов, вошедших в узел в единицу времени, равно числу зарядов, вышедших из него.

Если в электрической схеме можно выделить замкнутые циклы, то для каждого цикла

(1.27) $$\Sigma\, I_i R_i \;=\; \mathcal{E}\ (\text{ЭДС}).$$

Это ***второй закон Кирхгофа***, или еще одна форма закона сохранения энергии: суммарная разность потенциалов (падений напряжения) с учетом направлений тока на всех сопротивлениях в цикле равна сумме *электродвижущих сил* (ЭДС) всех источников тока (т.е. напряжений, создаваемых батарейками) в этом цикле. Для циклов, в которых нет источников тока, сумма (1.27) равна нулю.

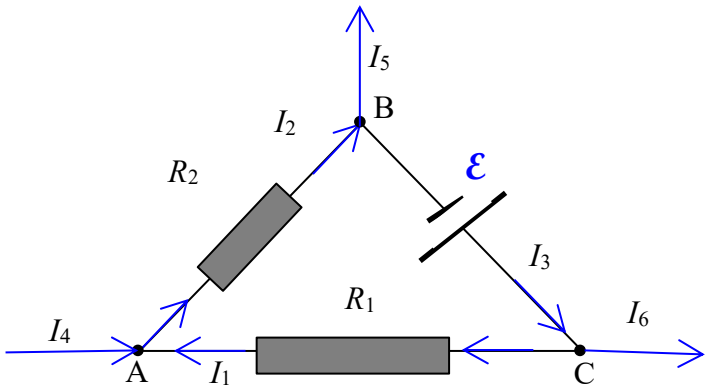


Рисунок 1.17. Законы Кирхгофа. В вершинах треугольника: $I_1+I_4=I_2$ (A), $I_2=I_3+I_5$ (B), $I_3=I_1+I_6$ (C). В цикле ABC: $I_1R_1+I_2R_2=\mathcal{E}$

Уравнения материального баланса широко применяются для расчетов потоков в разных системах – в том числе социально-экономических. Так, при составлений баланса взаимных расчетов в системе внешнеторговых связей в роли «источников тока» могут выступать центры эмиссии денег. (Эти вопросы будут рассмотрены во второй части книги). Ниже мы обсудим два простых примера из городского хозяйства: описание потоков автомобильного транспорта, где сохраняется число движущихся машин.

ЗАДАЧА О СВЕТОФОРЕ

Разреженный поток транспорта по улице вдали от светофора составляет Q_0 машин в секунду (размерность $[Q] = \text{с}^{-1}$). Автомобили, плотно стоящие на светофоре, после включения зеленого света сразу начинают движение, образуя максимальный возможный поток $Q_{\max}$ (рис. 1.18). Оба потока измеряют с помощью видеокамер. Каким должно быть отношение длительностей зеленого и красного света, чтобы перед светофором не возникла пробка?

Решение

Это очень простая задача. За время красного света $t_{\text{кр}}$ у светофора остановится $Q_0 \cdot t_{\text{кр}}$ машин, за время зеленого $t_{\text{зел}}$ подъедет еще $Q_0 \cdot t_{\text{зел}}$. Примем, что желтый свет сменяется очень быстро и на число машин у светофора не влияет ($t_{\text{ж}} \approx 0$). Тогда, чтобы на зеленом свете у светофора не оставалось стоящих машин, максимальное число проехавших на зеленый свет $Q_{\max} \cdot t_{\text{зел}}$ должно быть не меньше суммарного числа прибывающих за весь цикл работы светофора «красный+зеленый» $Q_0 \cdot (t_{\text{кр}} + t_{\text{зел}})$:

$$Q_0(t_{\text{кр}} + t_{\text{зел}}) \;\le\; Q_{\max} t_{\text{зел}}, \text{ то есть}$$

$$Q_0 t_{\text{кр}} \le (Q_{\max} - Q_0)\, t_{\text{зел}}.$$

Поэтому искомое отношение длительности зеленого и красного света

$$\frac{t_{зел}}{t_{кр}} = \frac{Q_0}{Q_{max} - Q_0}.$$

Если, например, поток машин вдали от светофора вдвое меньше максимального ($Q_0 = 0.5Q_{max}$), пробка не возникнет при $t_{зел}/t_{кр} \geq 1$. Если же $Q_0 = 0.8Q_{max}$, во избежание пробки зеленый свет должен гореть много дольше красного: $t_{зел}/t_{кр} \geq 0.8/0.2$, т.е. $t_{зел}/t_{кр} \geq 4$.

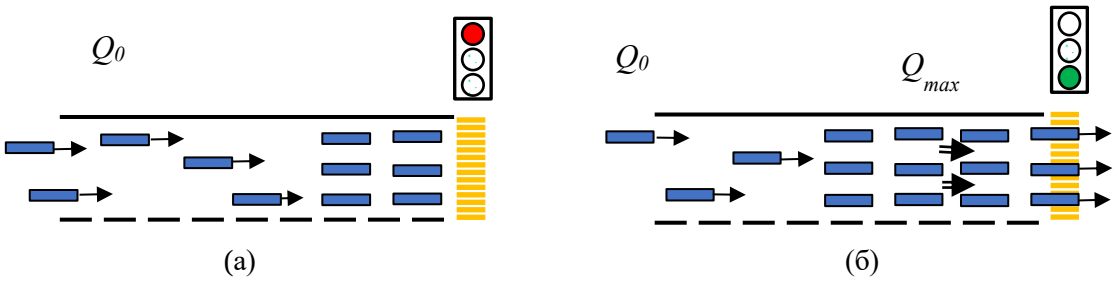


Рисунок 1.18. Задача о светофоре: (а) красный свет, (б) зеленый свет

Парадокс Браеса

На примере соединения проводников мы видели, что любое параллельно подключенное сопротивление (новый путь тока) между точками A и B при неизменном напряжении U_{AB} увеличивает общий ток I_{AB}, то есть *уменьшает* общее сопротивление. В транспортной задаче аналогом напряжения можно считать число машин N, которые направляются из пункта A в пункт B. В роли сопротивления («потерь»), с точки зрения водителя, выступает время в пути. Если из двух путей между A и B один длинный, а другой короткий –водители выберут короткий путь. Однако в том случае, когда пропускная способность этого пути окажется недостаточной, возникнут пробки, которые увеличат (а не уменьшат) среднее время проезда из A в B, то есть «общее сопротивление» транспортного участка *возрастет*.

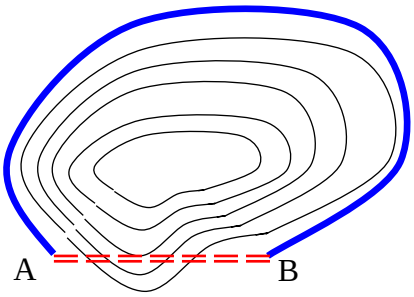


Рисунок 1.19. Широкая объездная дорога и узкий тоннель между A и B.

Представим, что единственную дорогу из A в B вокруг холма за 4 часа проходят 500 машин. Проезд занимает 20 мин, машины едут в «разреженном потоке» на безопасном расстоянии (более 100 м) друг от друга. Пусть теперь к шоссе добавлен короткий тоннель между A и B с ограниченной пропускной способностью (рис. 1.19). Первые 100 машин преодолеют его за 5 минут, после чего в тоннеле образуется пробка, движение в которой отнимет 1 час. Если при въезде в тоннель отсутствует информация о пробках и все водители, равномерно распределенные по 4-часовому интервалу, выберут короткую дорогу, полное затраченное время будет равно 5×100+60×400=24500 «машино-минут», а среднее время в пути одного автомобиля из A в B составит 49 минут. В том случае, когда 50% всех водителей выберет тоннель, а остальные, узнав о пробке, направятся по объездной

дороге, среднее время в пути (5×100+60×150+20×250):500 = 29 мин. тоже будет заметно больше, чем при движении всех по «старому» маршруту. И даже если коротким тоннелем решатся проехать лишь 200 водителей, из которых 100 попадут в пробку, среднее время в пути (5×100+60×100+20×300):500=25 мин. будет больше, чем на старом маршруте.

В приведенном примере выбраны довольно искусственные условия. Тем не менее, он воспроизводит ситуацию, когда добавление новой дороги к уже существующим не сокращает, а удлиняет среднее время пути. В системе движущихся «неживых» частиц добавление нового канала между входом и выходом, независимо от его сопротивления, всегда увеличивает общий поток, поэтому общее сопротивление снижается. Для транспортных потоков аналогом сопротивления является время проезда. Но, в отличие от сопротивления в электрических схемах, время проезда также зависит от плотности потока. При слишком большой загруженности дороги движение замедляется, время проезда растет и короткий путь может оказаться более медленным.

Парадокс Браеса, установленный в 1968 г., в его классическом виде формулируется так:

Дополнительные пути перемещения в сети могут снизить ее общую пропускную способность, если движущиеся частицы сами выбирают маршрут.

Пусть из города A в город B ежедневно проезжают 4000 автомобилей. Между A и B имеются одинаковые маршруты через населенные пункты C и D (рис. 1.20 а). Отрезки AC и DB – длинные широкие шоссе; проезд по каждому из них занимает 40 минут независимо от числа участников движения. Дороги AD и CB короткие, но узкие: при прохождении N машин по каждой из них время проезда составит $N/100$ минут. (Подобная оценка хорошо работает для дорог с ограниченной пропускной способностью). Если все водители знают эти условия, они с равной вероятностью будут выбирать пути ACB или ADB и каждая машина проведет в пути 40+2000/100=60 минут. (Сэкономить время, отправившись из A по короткой дороге AD, смогут лишь немногие первые водители. При установившемся движении, которое мы здесь рассматриваем, проезд *всех* 4000 машин по одному маршруту ADB займет 40+4000/100=80 мин., то есть на 20 минут больше, чем в случае равного распределения «2000 машин по ACB и 2000 по ADB»).

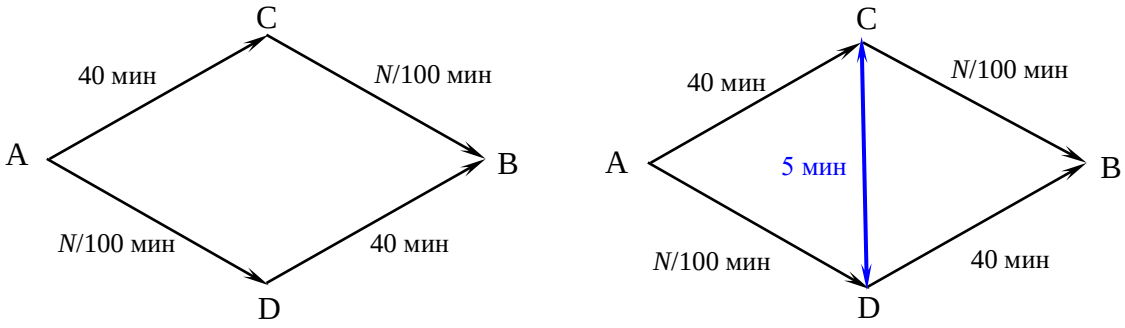


Рисунок 1.20. Парадокс Браеса. Среднее время пути из A в B (а) 60 минут, (б) 85 минут

Пусть в дополнение к имеющимся шоссе между пунктами C и D построена скоростная эстакада, проезд по которой в любую сторону (C→D или D→C) занимает всего 5 минут (рис. 1.20 б). В этом случае у водителей возникнет соблазн выиграть время, используя путь A→D→C→B. В неустановившемся режиме движения, который мы не обсуждаем, первые проезжающие действительно попадут из A в B всего за 10-15 минут. При установившемся

движении всех машин по этому маршруту дорога займет 4000/100+5+4000/100=85 минут. И даже если некоторые водители захотят ехать «старыми» маршрутами ACB либо ADB, их время в пути составит 40+4000/100=80 минут. Итак, добавление новой трассы *увеличило* среднее время движения по участку от A к B.

Парадокс Браеса – хорошая иллюстрация того, как стремление индивидуумов к выигрышу может ухудшать эффективность системы в целом. Он показывает принципиальную особенность системы «живых» частиц (в нашем случае автомобилей, управляемых людьми): в отличие от «неживой» мультичастичной системы, люди *конкурируют за лучшие условия*. Слепое стремление водителей выиграть время при ограниченной пропускной способности дороги снижает эффективность дорожной системы в целом.

«Браесовские» пути проезда, ухудшающие транспортную ситуацию после ввода в действие, не раз обнаруживали в разных городах мира. Эффективному движению в городе помогают современные средства информации: табло, навигаторы, карты дорог с указанием пробок. Помимо автомобильного транспорта, парадокс Браеса относится к таким системам с потоками, как трубопроводы и компьютерный трафик.

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛАМ 1.2 И 1.3

1.3. Задолго до открытия рентгеновских лучей, которые позволили «увидеть» атомную структуру кристаллов, физики XIX века предложили простую и надежную оценку размеров атомов. Так, грамм-атом любого металла содержит $6.02 \cdot 10^{23}$ атомов и при этом занимает объем $V = M/\rho$, где M – его масса в граммах (численно равная атомной массе), ρ – плотность металла. Придадим грамм-атому металла форму кубика с длиной ребра a и объемом $V = a^3$ – и задача решена. Так, например, атомная масса железа (Fe) 56 а.е., плотность металла 7.9 г/см^3. Предположим, что атом Fe – очень маленький кубик с длиной ребра d. Оцените его размеры, т.е. значение d.

1.4. Ювелирное золото 585-й пробы в весовых процентах содержит 58.5% Au (атомная масса 197 а.е.), 8% Ag (108 а.е.) и 33.5% Cu (64 а.е). Найдите атомную долю золота в этом сплаве (вы удивитесь…).

1.5. Пользуясь газовыми законами и законом Архимеда, определите, какой груз поднимет воздушный шар объемом 224 кубометра, наполненный (а) водородом, (б) гелием, (в) метаном. Масса оболочки шара 50 кг, средняя молярная масса воздуха 29 г.

Решение

На тело, погруженное в жидкость или газ, по закону Архимеда действует выталкивающая сила, равная весу этой жидкости или газа в объеме тела. Предполагается, что тело погружено в среду полностью – для воздушного шара в воздухе это именно так (Рис. 1.21). На шар объемом 224 м^3 (он имеет диаметр чуть больше 7.5 м и содержит 10^4 «молей» воздуха, усредненных по смеси азота N_2, 1 моль = 28 г, и кислорода O_2, 1 моль = 32 г) действует выталкивающая сила $F_{Apx}=mg$, где m=290 кг – масса воздуха в объеме шара. Эта сила направлена против веса газа в объеме шара $m_1 g$ и веса оболочки $m_2 g$, где m_2=50 кг. Максимальный вес груза Mg, прицепленного к шару, при котором шар будет неподвижно висеть в воздухе

$$Mg = mg - m_1 g - m_2 g = (m - m_1 - m_2)g$$

Сокращая на множитель g, получим, что шар, наполненный водородом (химическая формула H_2, мольная масса с точностью до сотых долей 2 г, m_1=20 кг) поднимет груз массой не более 290–20–50=220 кг. Такой же шар, наполненный гелием (одноатомные молекулы He, масса моля, равного грамм-атому, 4 г) поднимет до 290–40–50=200 кг. А шар, наполненный метаном (формула CH_4, масса 1 моля 16 г.) поднимет груз массой до 290–160–50=80 кг. Газы с молярной массой менее 29 г. *легче воздуха*, в атмосфере они поднимаются вверх (включая чистый азот N_2: 1 моль=28 г). Напротив, диоксид углерода CO_2 *тяжелее воздуха,* его молярная масса 12+2×16=44 г и от источника (баллон, «сухой лед») газ стекает вниз, создавая опасную концентрацию в нижней части помещения.

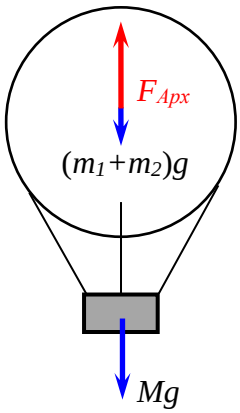


Рисунок 1.21. Баланс сил для неподвижного аэростата (задача 1.5)

Современные воздухоплаватели вместо аэростатов с опасным водородом или дорогим гелием обычно используют шар-*монгольфьер*, в котором горячий воздух заполняет негорючую оболочку и подогревается в полете газовым пламенем. Чтобы рассчитать подъемную силу такого шара объемом 224 м^3 при температуре воздуха внутри него 120 °C (393 *K*) и вне аэростата 20 °C, надо, пользуясь формулой (1.18), определить плотность воздуха при T=393 °K и атмосферном давлении, затем рассчитать массу горячего воздуха m_1 внутри шара и подставить ее в формулу закона Архимеда. Сделайте это самостоятельно.

1.6. Оцените число молекул в 1 мм^3 идеального газа при нормальных условиях (0 C и атмосферном давлении). Сравните с численностью населения Земли.

1.4. Школьная математика: дифференцирование и интегрирование

Обсуждая «школьную» физику, мы пока ограничивались алгебраическими действиями: сложением, вычитанием и умножением на число. Но в математике есть мощный инструмент для глубоких преобразований любых функций. Две его основные операции, *дифференцирование* и *интегрирование*, особенно полезны для физики. Их тоже изучают в средней школе.

1.4.1. Производная от функции

Производной функцией $f'(x)$, или *первой производной* от исходной функции $f(x)$, называется предел отношения $\Delta f/\Delta x$ при стремлении Δx к нулю. В знаменателе дроби находится изменение аргумента Δx, в числителе – вызванное им изменение функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$:

(1.28) $$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Производная от производной функции называется *второй производной*:

(1.28 а) $$f''(x) = \frac{df'}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Первую, вторую и третью производные часто обозначают соответствующим числом штрихов при символе функции. Для производных *n*-го порядка используют обозначение

(1.28 б) $$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$$

Нахождение производной от функции называется ее *дифференцированием*, а бесконечно малые приращения функции *df* и ее переменной *dx* в формуле (1.28) – *дифференциалами.*

Дифференцирование функций – инструмент *математического анализа*: раздела высшей математики, который возник в XVII веке под названиями *дифференциальное исчисление* и *анализ бесконечно малых*. Несмотря на пугающие названия, дифференцирование и обратная к нему операция интегрирования – такие же строгие математические действия, как сложение и умножение. Производные всех *элементарных* функций, которые изучают в школьных курсах математики, известны и сведены в таблицы.

Производные элементарных функций

Пользуясь определением (1.28), найдем первую производную линейной функции $y = ax + b$:

$$(ax)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x) - ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a\frac{\Delta x}{\Delta x} = a = \text{const}$$

Приращения любой постоянной величины очевидно равны нулю, поэтому равна нулю и ее производная

$$(\text{const})' = 0$$

Первая производная квадратичной функции $y = x^2$:

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Вообще для любой степенной функции $y = x^n$

(1.29) $$(x^n)' = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

Для показательной функции $y = e^x$, где e=2.7118… – основание натуральных логарифмов,

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

(при малых показателях степени $e^{\Delta x} \approx 1+\Delta x$ с точностью до поправки, пропорциональной $(\Delta x)^2$, и e^0=1). Для тригонометрических функций

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \cos x$$

(мы воспользовались тригонометрическим соотношением «синуса суммы»

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

и учли, что при малых значениях аргумента $\sin\alpha\approx\alpha$ и $\cos\alpha\approx 1$)[*]. Используя соотношение «косинуса суммы»

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta,$$

можно тем же способом получить производную косинуса

$$(\cos x)'=-\sin x$$

Некоторые свойства производной

Дифференцирование – линейная операция. Это значит, что для *линейной комбинации* независимых функций вида $f(x)=au(x)+bv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – функции от переменной *x*, *a* и *b* – постоянные множители

(1.30) $$\frac{d}{dx}(au+bv)=a\frac{du}{dx}+b\frac{dv}{dx}$$

(постоянные множители выносятся за знак дифференцирования). На основании формулы (1.30) мы сразу найдем $(ax^2+bx+c)'=2ax+b$. Производную функции $y=a/x$

$$\frac{d}{dx}(a/x)=\frac{d}{dx}(ax^{-1})=-\frac{a}{x^2}$$

также легко обобщить на все обратные степенные функции вида $y=x^{-n}$

Дифференцирование произведения функций $y=u(x)v(x)$ производится по правилу

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx},$$ или, в других обозначениях,

(1.31) $$(uv)'=uv'+vu'$$

Дифференцирование *сложной функции* $f(x)=f[u(x)]$ (функции от переменной *u*, которая сама зависит от другой переменной *x*: «функции от функции») подчиняется правилу

(1.32) $$\frac{df[u(x)]}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Левая часть равенства (1.32) получится, если мысленно «сократить» дифференциал *du* в знаменателе и числителе правой части.

По формулам (1.31) и (1.32) найдем производную тангенса

$$(tgx)'=\left(\frac{u}{v}\right)'=u'\cdot\left(\frac{1}{v}\right)-u\left(\frac{1}{v^2}\right)v',$$

где $u=\sin x$ и $v=\cos x$. Подставив сюда функции u, v, и их производные u' и v', получим

$$(\mathrm{tg}x)'=\frac{\cos x}{\cos x}-\sin x\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)=1+\mathrm{tg}^2x=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

(мы воспользовались еще одним соотношением из школьной тригонометрии: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$). Производные некоторых алгебраических и тригонометрических функций представлены в этой книге в Приложении П1.

[*] В приближенных оценках с использованием тригонометрических функций встречается утверждение «до угла 30° синус приблизительно линеен».

Первая и вторая производные позволяют исследовать общий вид графика произвольной функции $y = f(x)$ (рис. 1.22). Первая производная $f'(x)$ равна тангенсу угла наклона касательной к $f(x)$ в точке x. Для возрастающей функции она положительна, для убывающей – отрицательна. В точках максимума (А) и минимума (В) на рис. 1.22 первая производная равна нулю: касательная параллельна оси Оx. Вторая производная показывает кривизну в точке x: она положительна ($f''(x_0) > 0$) в минимумах и отрицательна ($f''(x_0) < 0$) в максимумах функции. (Чтобы это запомнить, говорят: «вторая производная *скатывается* с возвышений и *накапливается* в углублениях графика $f(x)$»). Точка $f''(x) = 0$ (на рис. 1.22 это начало координат О) называется *точкой перегиба*: в ней кривизна $f(x)$ обращается в ноль.

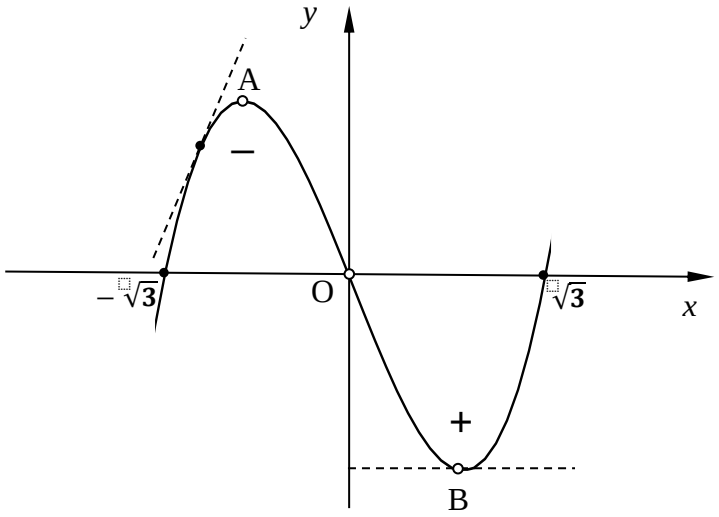


Рисунок 1.22. График функции $y=x^3 - 3x$ и его особые точки

Правило Лопиталя

Дифференцирование часто облегчает решение сложных алгебраических задач. Пусть, например, мы вычисляем отношение двух функций $u(x)/v(x)$ в точке $x = a$, где обе эти функции, как говорят математики, *обращаются в ноль*:

(1.33) $$u(a) = \lim_{x \to a} u(x) = v(a) = \lim_{x \to a} v(x) = 0.$$

Тогда отношение значений функций в этой точке называют *неопределенностью вида* 0/0. Если при $x = a$ обе функции обращаются в бесконечность, их отношение называется *неопределенностью вида* ∞/∞. Во многих случаях с помощью производных можно *раскрыть* такие неопределенности, то есть найти точное отношение $u(a)/v(a)$.

Формулы (1.33) показывают, что обе функции *непрерывны в точке* $x = a$. Если в некоторой области значений x вблизи $x = a$ (в математике это называется *в окрестности точки* a) функции u и v *дифференцируемы*, т.е. у них есть производные u' и v', вычисляемые по формуле (1.28), справедливо ***правило Лопиталя***

(1.34) $$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

В том случае, если в результате применения правила Лопиталя снова получается неопределенность, в (1.34) можно подставить вторые производные наших функций. Для этого первые производные $u'(x)$ и $v'(x)$ тоже должны быть непрерывными дифференцируемыми функциями. При все более строгих условиях на u и v можно подставлять в (1.34) их высшие производные.

В дальнейшем мы будем использовать правило Лопиталя – поэтому убедимся, как оно работает

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)'}{(x^3-8)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{3x^2}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

В левой части под знаком предела стояла неопределенность вида 0/0, мы ее раскрыли. Правда, в школьной алгебре есть формулы разности квадратов (в числителе) и разности кубов (в знаменателе; ее проходят не во всех школах). Если использовать эти формулы и сократить одинаковые множители, при $x = 2$ получится тот же результат (попробуйте сами) – но с помощью производных мы раскрыли неопределенность в одно действие.

Обычно же правилу (1.34) нет альтернативы, например

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

Здесь тоже раскрыта неопределенность вида 0/0. Попробуйте самостоятельно раскрыть неопределенность вида ∞/∞: вычислите отношение*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$$

и только после этого сравните его со следующей строчкой:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

Формула Тейлора

В естественных науках и в инженерных дисциплинах часто встречаются линейные и квадратичные зависимости. Здесь соединились понятное желание использовать возможно более простые модели и один из основных приемов приближенных вычислений: *разложение в ряд*. (Так как законы мироздания людям изначально не известны и познаются опытным путем, *все* количественные «законы» физики и других наук основаны на *приближенных формулах*. Это простое и важное положение мы не раз еще повторим дальше).

Произвольную «гладкую» функцию $f(x)$ (ниже мы поясним, что такое «гладкая» функция) можно разложить в ряд относительно ее значения в выбранной точке $f(x=x_0)$:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\cdots \tag{1.35}$$

Многоточие означает, что ряд бесконечен: для приближенной оценки значения функции $f(x)$ надо оборвать это разложение на устраивающем нас последнем слагаемом. Символ $n! = 1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-1)\times n$ (*факториал*) в знаменателе – это произведение целого числа n и всех меньших его целых положительных чисел.

Смысл формулы (1.35) вполне прозрачен. Пусть мы знаем значение функции $f(x)$ при ее определенном аргументе $x=x_0$ («в точке x_0») и хотим найти ее значение в другой точке x.

---

* Напомним, что *натуральным логарифмом* ln называется логарифм по основанию e=2.71828…:

$$\ln x=\log_e x$$

Десятичный логарифм, то есть логарифм по основанию 10, очень распространен в приложениях, в отечественной литературе его обозначают lg:

$$\lg x=\log_{10} x.$$

В зарубежной литературе десятичный логарифм чаще обозначают log, не указывая основания.

Для этого к числу $f(x_0)$ надо добавить линейное изменение функции $f'(x_0)(x–x_0)$ на интервале от x_0 до x [$f'(x_0)$ – это числовой множитель: тангенс касательной в точке $f(x_0)$] – затем ввести поправку на кривизну, пропорциональную квадрату длины интервала $(x_0–x)^2$, и далее до бесконечности, где и находится точное решение. Другими словами, по (1.35) можно определить значение $f(x)$ при любом аргументе x, даже не зная аналитического вида этой функции – зато надо знать значения всех ее производных в точке x_0. В исследовании Природы нет легких обходных путей.

Выражение (1.35) – знаменитая ***формула Тейлора***, или *разложение в ряд Тейлора*. На этой формуле и на ее аналогах для более сложных систем основана существенная часть физики. Ясно, что на больших интервалах (x_0, x) формула нам мало поможет: потребуется много поправок, а для каждой надо знать соответствующую производную. А вот на малых интервалах можно игнорировать поправки, пропорциональные высоким степеням $(x–x_0)^n$ (0.1^2=0.01, 0.1^3=0.001, …) В этом случае формула Тейлора становится одним из главных рабочих инструментов.

Разложение (1.35) особенно удобно проводить в близкой окрестности минимума функции $f(x)$. В этой окрестности она имеет наименьшее значение $f(x_0)$, для упрощения записи часто приравниваемое к нулю. Также в точке минимума x_0 равна нулю первая производная $f'(x_0)$. Тогда из (1.35) можно вывести простое и удобное приближенное выражение

(1.35 а) $$f(x_0) = {}^1\!/_2\, f''(x_0)(x - x_0)^2 + o[(x - x_0)^2],$$

где символом $o(y)$ в математическом анализе обозначают величину, много меньшую y; в нашем случае $y = (x–x_0)^2$. Такой величиной будет «кубическая» поправка в ряде Тейлора $(1/6)f'''(x–x_0)^3 << (1/2)f''(x–x_0)^2$: все остальные поправки еще меньше. Формула (1.35 а) объясняет, почему в физике так много квадратичных зависимостей вида $y = kx^2$: это хорошее первое приближение для любых функций в окрестностях минимума (рис. 1.23).

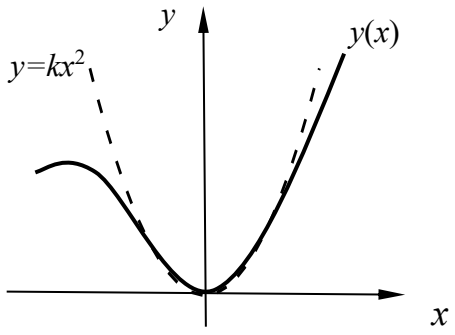


Рисунок 1.23. Квадратичная функция $y=kx^2$ как первое приближение функции $y(x)$ вблизи $x = 0$

Разложение функции $f(x)$ относительно $x_0 = 0$ также называется ***рядом Маклорена***

(1.36) $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots$$

По формуле (1.36) многие элементарные функции можно представить в виде бесконечных рядов. Так, экспоненциальная функция e^x не изменяется при дифференцировании

$$(e^x)' = (e^x)'' = \ldots = (e^x)^{(n)} = e^x,$$

и e^0=1. Подставив это значение в ряд Маклорена (1.35), получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Разложение функций в ряд широко используется в теоретической физике.

Словосочетание «гладкая функция», которым мы назвали функцию, допускающую разложение в ряд Тейлора, имеет глубокое, почти философское содержание. В математике *гладкими* называют непрерывные функции, имеющие *нужное* (для данной задачи) число непрерывных производных в окрестностях точки x_0. Определением функции, непрерывной в точке, можно считать соотношение (1.33). Также функции или (и) их производные могут быть *разрывными* (рис. 1.24). Для разрывных функций в окрестностях их *особых точек* формула Тейлора неприменима. К началу прошлого века математиков заинтересовали *всюду разрывные* функции (которые, тем не менее, подчиняются своим строгим соотношениям). А во второй половине XX века выяснилось, что «всюду разрывными», или *фрактальными*, зависимостями можно описывать динамику социальных систем. Мы отложим обсуждение этих математических конструкций до второй части.

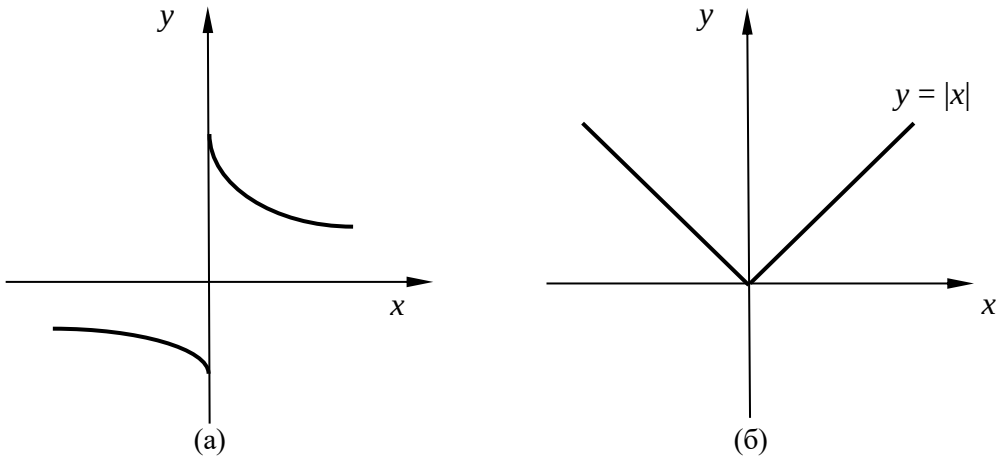


Рисунок 1.24. (а) Разрывная функция, (б) простейший пример непрерывной функции, не имеющей производной в точке $x = 0$

1.4.2. Интегралы

Математическая операция, обратная к дифференцированию, называется *интегрированием*. Она позволяет найти функцию $f(x)$, k-я производная которой $f^{(k)}(x)$ задана аналитически (формулой) или численно (в виде таблицы). В частности, интегрированием рассчитывают суммарные силы взаимодействия двух протяженных тел, разбивая их на бесконечное число материальных точек, если потенциал их взаимодействия известен (см. разд. 1.1.4).

Неопределенный интеграл

Пусть известная нам функция $f(x)$ является производной от некоторой другой функции $F(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией*, или *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$. Вычисление первообразной $F(x)$ по известной функции $f(x)$ – это и есть интегрирование:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \quad \rightarrow \qquad F(x) = \int f(x)dx.$$

Для тех производных, которые мы уже знаем, легко выписать первообразные функции. Сразу заметим, что они определяются с точностью до произвольной постоянной величины. Действительно, для любого числа C = const (не зависящего от x) dC/dx=0. Тогда, если

$$F(x) = \int f(x)dx, \qquad \text{то } {}^{d}\!/_{dx}\,[F(x) + C] = {}^{dF}\!/_{dx} + 0 = f(x)$$

Поэтому в неопределенный интеграл любой функции обязательно входит *постоянная интегрирования* C. Например,

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

(поскольку $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$, а дифференцирование постоянной величины дает 0). Аналогично

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,$$

и все прочие неопределенные интегралы.

Подобно дифференцированию, интегрирование – линейная операция:

$$\int [au(x) + bv(x)]dx = a\int u(x)dx + b\int v(x)dx$$

(где a и b – постоянные множители).

В отличие от дифференцирования, единого способа для нахождения неопределенных интегралов наподобие формулы (1.28) не существует. Ряд приемов вычисления производной можно распространить на неопределенные интегралы. Например, из производной произведения функций (1.31) следует

$$u(x)v(x) = \int uv'dx + \int vu'dx,$$

что обычно записывают в форме

(1.37) $$\int udv = uv - \int vdu$$

(*интегрирование по частям*). По этой формуле можно, например, найти интеграл произведения функций

$$\int x\sin x\, dx = -\int xd(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Интегралы сложных функций, производные которых задает формула (1.32), определяют *методом подстановки*, или *замены переменной*. Так, чтобы найти неопределенный интеграл от функции $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$, введем новую переменную

$$u = \cos x,$$

для которой du/dx = –sin x, то есть du=–sin $x\,dx$. (мы умножили левую и правую части равенства на dx – для бесконечно малых приращений действуют правила алгебры!) Тогда

(1.38) $$\int tgxdx = -\int \frac{du}{u} = -\int d\ln u = -\ln u + C = \ln\frac{1}{u} + C = \ln\left(\frac{1}{|\cos x|}\right)) + C$$

(логарифм определен для положительных величин!). Интегралы от элементарных функций, заданных формулами (в *аналитическом виде*), также сведены в таблицы (см. Приложение П2). В частности, $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ – *табличный интеграл*.

Производные любых аналитических функций выражаются в аналитическом виде, но не все неопределенные интегралы можно записать алгебраическими формулами. В частности, простое с виду уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \tag{1.39}$$

не имеет решений, построенных из конечного числа обычных алгебраических функций. Такие интегралы представляют бесконечными рядами функций, а их значения $F(x)$ в виде таблиц введены в справочники и компьютерные программы. Интегралы, которые не выражаются аналитически, но часто встречаются в вычислениях, называются *специальными функциями*; в этом качестве они могут входить в алгебраические формулы. Так, решение уравнения (1.39) выражается через *эллиптические функции*, или *функции Якоби*, которые не имеют аналитической формы.

Определенный интеграл

Неопределенный интеграл – это функция. Она определена с точностью до произвольной постоянной интегрирования C – иными словами, не имеет численного значения. Точное численное значение имеет *определенный интеграл* функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta_i = F(b) - F(a), \tag{1.40}$$

где $f(a_i)$ – среднее значение функции $f(x)$ на i-м из n маленьких одинаковых интервалов, на которые разбит отрезок* $x \in [a, b]$, Δ_i – длина этого интервала, $F(b)$ и $F(a)$ – значения первообразной функции $F(x)$ в крайних точках отрезка $[a, b]$. Соотношение (1.40) называется ***формулой Ньютона-Лейбница***.

Как и определение производной функции (1.28), формула (1.40) содержит предельный переход. Величина определенного интеграла от функции $f(x)$ равна площади под графиком этой функции на отрезке $[a, b]$. Её можно приближенно задать как сумму площадей прямоугольников с малым основанием Δ_i, на каждом из которых функция $f(x)$ близка к ее среднему значению $f(a_i)$ (рис. 1.25). В пределе $\Delta_i \to 0$ равенство становится точным.

Производные (1.28) и определенные интегралы (1.40) от любых функций численно рассчитывают на компьютерах. В этом случае интервалы разбиения переменной x устанавливаются не равными нулю, но достаточно мелкими. Получаемая функция задается в виде таблицы $x_i / f(x_i)$, где x_i – среднее или начальное значение переменной x на i-м интервале. По аналогичной схеме *численного интегрирования* вычисляют интегралы, не имеющие аналитической формы.

* *Отрезком* $[a, b]$ в математике называется интервал на числовой оси между точками a и b, к которому добавлены его крайние точки. *Интервал* без добавленных крайних точек обозначается (a, b), а с одной из двух таких точек называется *полуинтервалом* $[a, b)$ либо $(a, b]$.

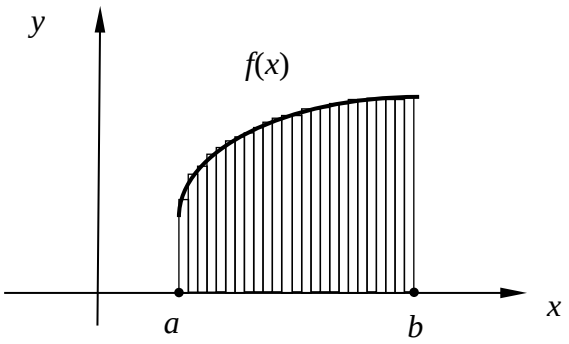


Рисунок 1.25. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$: площадь под кривой *f(x)*

Дифференцированием и интегрированием строго выводятся соотношения механики, которые мы обсуждали выше. Так, потенциал сил упругости, заданных законом Гука (1.6), равен

$$U = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2,$$

а путь, пройденный телом при равноускоренном движении (a = const) от начального момента t = 0, равен

$$l = \int vdt = \int atdt = \frac{1}{2}at^2$$

(см. (1.1) и (1.8)). Формулы закона всемирного тяготения (1.11) и закона Кулона (1.12) выводятся однократным дифференцированием потенциала вида (1.14):

(1.41) $$d/_{dr}\left(-KX/_r\right) = KX/_{r^2} = E$$

(где r – расстояние до создающей поле точечной массы в законе всемирного тяготения либо точечного заряда в законе Кулона, X – параметр источника поля (масса, заряд), K – масштабный множитель). Формуле (1.41) соответствует *напряженность* E центрального поля. В таком поле на материальную точку с параметром α (соответственно массой или зарядом) действует сила

$$\mathbf{F} = \alpha\mathbf{E}$$

(напряженность поля, как и сила – векторная величина). В следующей главе мы рассмотрим некоторые примеры дифференцирования и интегрирования физических величин.

1.4.3. Дифференцирование и интегрирование функций нескольких переменных

Значения большинства физических (т.е. измеримых), а также «не вполне физических» (качественно оцениваемых) величин зависят не от одной, а от нескольких независимых переменных. Так, плотность неоднородного трехмерного тела $\rho(x, y, z)$ имеет разную величину в разных точках пространства (x, y, z), производственная функция Кобба-Дугласа задает выработку стилизованного «продукта» Y по затратам капитала K и труда L (разд. 1.2.2.) и многое другое. Определение производной и интеграла обобщаются на функции нескольких переменных (или нескольких *аргументов*), позволяя проводить с ними вычисления по тем же принципам, что и с функциями одной переменной $f(x)$.

Частные производные

Для функции двух переменных $f(x, y)$ по аналогии с формулой (1.28) можно определить пределы отношения *частных* приращений Δf_i к приращениям аргументов Δx_i и Δy_i при их стремлении к нулю (если такие пределы существуют):

(1.42)
$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$
$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Функции (1.42) называются *частными производными*. При вычислении предела по одному аргументу функции $f(x,y)$ все остальные ее аргументы считаются постоянными:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + xy) = 3x^2 + y, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy) = x$$

Частные производные высших порядков задаются по аналогии с формулами (1.28 а, б)

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right],$$
$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right],$$
$$f'''_{xyz} = \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z}\right]$$

и далее. Например, для функции $f = 2x^2 + xy + y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$$

(в общем случае смешанные частные производные $\partial^2 f/\partial x \partial y$ и $\partial^2 f/\partial y \partial x$ с разным порядком дифференцирования по их аргументам могут различаться). По аналогии с формулами (1.42) можно определить частные производные функции от любого числа аргументов. В этой главе мы ограничимся примерами функций двух и трех переменных.

В следующей главе мы увидим, как частные производные функций двух переменных используются при анализе поверхностей 2-го порядка в трехмерном пространстве. Кроме бесконечно малых изменений одного аргумента при фиксированных остальных («круглого» дифференциала ∂), для функций n переменных $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ можно рассчитать *полный дифференциал* df в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Для двух переменных

(1.43)
$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

В общем случае полным дифференциалом функции называется сумма по приращениям всех ее аргументов с частными производными в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ в виде множителей:

(1.43 а)
$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})dx_i$$

Частные производные в формуле полного дифференциала служат коэффициентами, определяющими направление бесконечно малого вектора df в n-мерном пространстве переменных (в случае двух переменных – на плоскости).

Если в трехмерном пространстве задано *скалярное* поле $U(x, y, z)$ (потенциала, температуры, концентраций), важной величиной является *градиент поля*: вектор, составленный из первых частных производных U по всем координатам:

(1.44) $$\text{grad}\, U(x,y,z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Градиент поля показывает, по какому направлению в точке пространства (x, y, z) изменения поля максимальны. Эта векторная величина широко используется в физике.

Многократные интегралы

По аналогии с определением (1.40), для функций двух переменных $f(x, y)$ можно ввести понятие *двойного интеграла* по некоторой области D на плоскости как предела суммы средних значений функции $\{ f_i \}$ на малых элементах площади ΔS внутри этой области (рис. 1.26)

(1.45) $$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\Delta S \to 0} \sum f_i(x,y)\Delta S_i.$$

Эта операция называется интегрированием по области D. Бесконечно малое произведение $dS = dxdy$ называется элементом площади. Если $f(x, y) = 1$ на всей области D (в математике это обозначают $f(x, y) \equiv 1$, то есть «всюду равна», или *тождественно равна*), двойной интеграл (1.45) равен площади области

$$\iint_D dxdy = \iint_D dS = S_D.$$

Аналогично вводится тройной интеграл как предел суммы по элементам объема ΔV некоторой области Ω в трехмерном пространстве

(1.45 а) $$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \lim_{\Delta V \to 0} \sum f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i.$$

Через двойные и тройные интегралы рассчитывают величины, зависящие, соответственно, от двух и от трех переменных. Так, если функция $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)$ – распределение плотности внутри трехмерного тела, тройной интеграл (1.45 а) равен массе этого тела, а при $f \equiv 1$ – объему тела. Для вычислений кратных интегралов разработан ряд методов, позволяющих упростить задачу и уменьшить число переменных, по которым производится интегрирование.

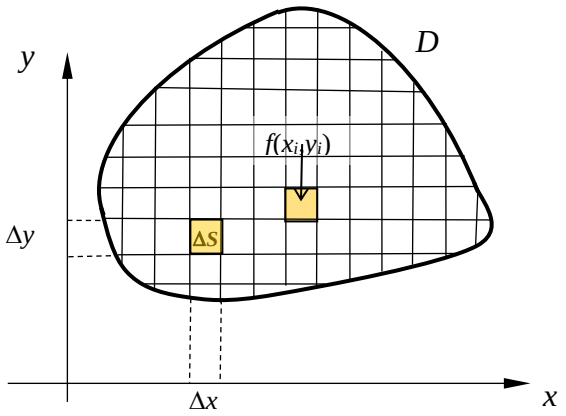
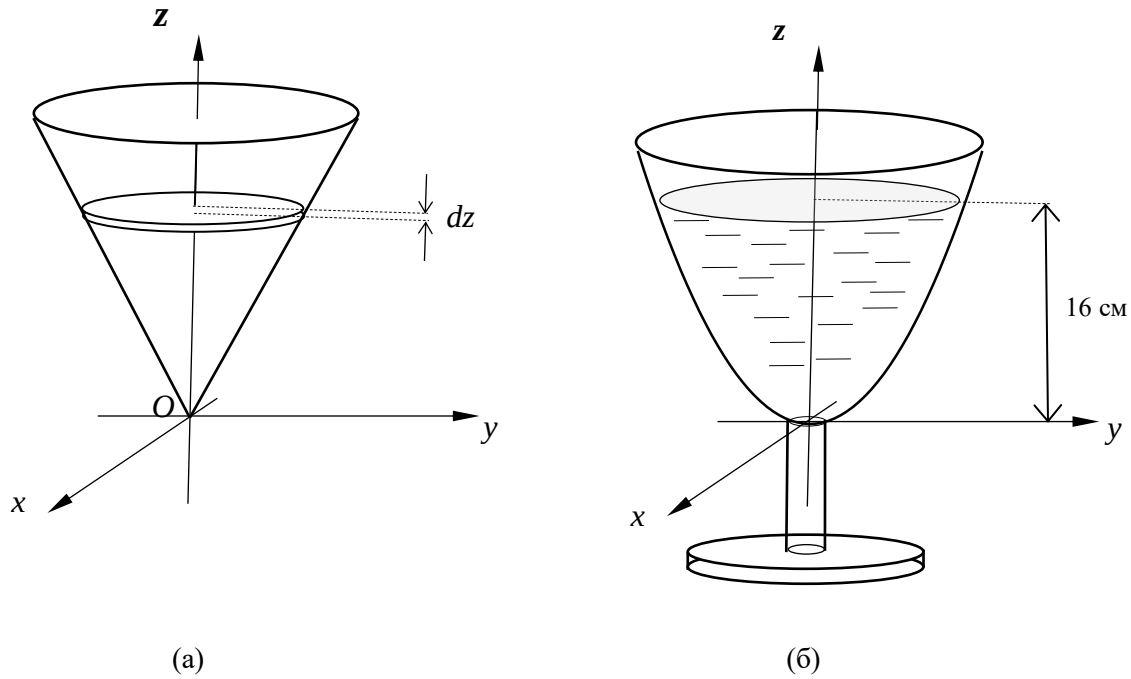


Рисунок 1.26. Двойной интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$: предел суммы средних значений $f_i\Delta S$ внутри области D при $\Delta S \to 0$

ЗАДАЧА 1.7. Определите объем конуса высотой *H* с окружностью радиуса *R* в основании.

Решение

Объем трехмерного тела в общем случае задается тройным интегралом, но нашу задачу легко упростить. В прямоугольной (*декартовой*) системе координат совместим ось конуса с осью *Oz*, а его вершину – с началом координат (рис. 1.27 а). Боковая поверхность конуса пересекает координатную плоскость *Oxz* по прямой линии $z = kx$, а плоскость *Oyz* – по линии $z = ky$. Это позволяет выразить объем конуса через определенный интеграл от единственной переменной *z*.



(а) (б)

Рисунок 1.27. (а) К вычислению объема конуса (задача 1.7), (б) задача 1.8

Выберем внутри конуса два круговых сечения на бесконечно малом расстоянии *dz* друг от друга. Можно приближенно считать, что оба круга имеют одинаковую координату *z* и одинаковые радиусы $r = z/k$. Объем *dV* полученного слоя фигуры бесконечно мало отличается от объема кругового цилиндра, ограниченного «верхним» и «нижним» кругами радиуса $r = z/k$:

$$dV = \pi r^2 dz = \pi (z/k)^2 dz.$$

Нам осталось только проинтегрировать объем *dV* по единственной переменной: координате *z*, принимающей значения от 0 до *H*. Это определенный интеграл (см. формулу (1.40))

$$V = \int_0^H (\pi/k^2) z^2 dz = \pi/k^2 \int_0^H z^2 dz = \frac{\pi}{3k^2} \int_0^H d(z^3) = \frac{\pi}{3k^2} z^3 |_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H \quad (1.46)$$

(мы вынесли все постоянные величины за знак интеграла, использовали соотношение $\int x^2 dx = x^3/3 + C$, которое легко проверить дифференцированием, и вспомнили, что $H/k = R$ – радиус основания конуса). В школьной стереометрии формула для объема конуса (1.46) приводится без доказательства – а получают её именно интегрированием, как это сделали мы. Еще раз отметим, что константа интегрирования *C* в определенном интеграле

отсутствует: для верхнего и нижнего пределов $F(a)$ и $F(b)$ (формула (1.40)) неопределенные слагаемые «сокращаются».

ЗАДАЧА 1.8. В бокал, имеющий форму параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ (см. разд. 2.2.2 следующей главы), налили воду до высоты H = 16 см (рис. 1.27 б). Определите объем воды в бокале.

Эта задача решается аналогично предыдущей. Самостоятельно найдите объем воды и проверьте результата по ответам в конце книги (раздел «Ответы к задачам»).

1.5. Дифференциальное исчисление в науках о человеке

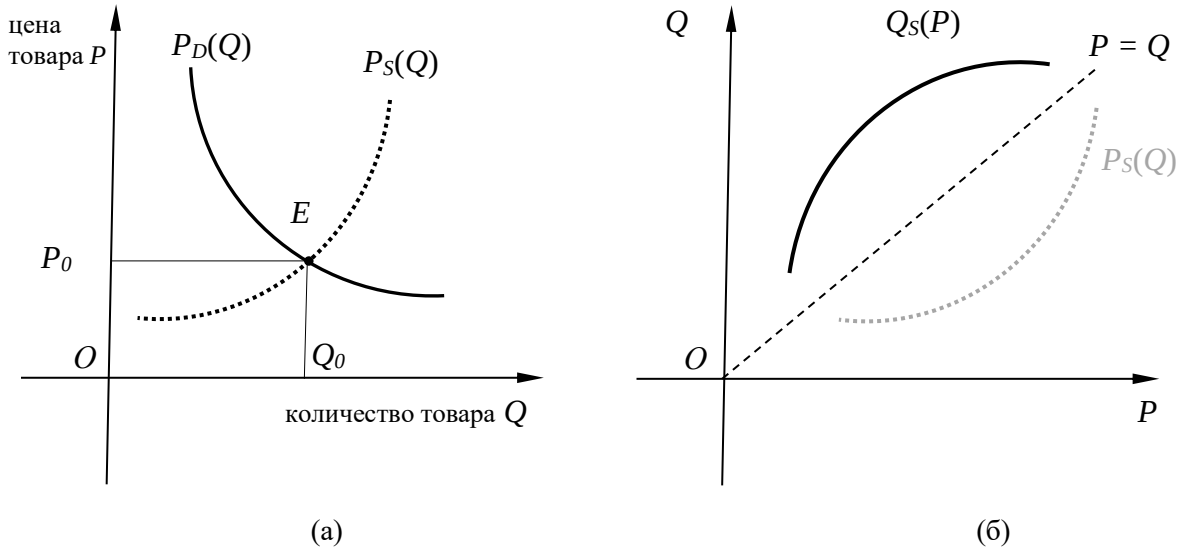
Дифференцирование и интегрирование в XVII веке преобразили математику, затем механику и физику – а с XIX века и остальные естественные науки. В дисциплинах, исторически считавшихся общественными (т.е. гуманитарными), с середины XIX века математика также становится важным рабочим инструментом. Этот процесс больше всего затронул экономику: сторону жизни общества, где неправильные расчеты так же губительны, как ошибки в проектировании, строительстве или военном деле.

1.5.1. Дифференциалы и интегралы в экономике

Начальные курсы экономики обычно рассчитаны на лиц, незнакомых с высшей математикой. Тем не менее, в них вводится много таких соотношений, которые гораздо понятнее на языке математического анализа. Но поскольку экономические дисциплины возникли как независимая область знания и долго сохраняли суверенитет, обозначения здесь могут отличаться по форме от общепринятых. Мы не будем углубляться в математические методы экономики (где как раз используют стандартный аппарат), а лишь обсудим их пересечение с методами физики в нескольких главах этой книги. Предполагается, что читатель знаком с основами экономической теории в объеме средней школы или же курсов экономики для неэкономических специальностей, которые практически совпадают со школьной программой.

«Действующую единицу» в экономических науках часто называют *агентом*. Термин не несет оценочного содержания: это всего лишь перевод английского слова *agent* в смысле «средство воздействия». Общие закономерности рынка, где действуют индивидуальные экономические агенты–производители (предприятия) и агенты–покупатели («домашние хозяйства»), рассматривает *микроэкономика*. Фундаментальным понятием в этой области является *баланс спроса* (суммарных потребностей покупателей, англ. *demand*) *и предложения* (*supply*: объема товаров и услуг, выставленных производителями на продажу). Посредники-ритейлеры (на деле многочисленные) в этой модели рынка предположительно отсутствуют. *Кривая спроса* выражает зависимость цены P_D некоторого товара, которую в состоянии платить покупатели, от его предложения, т.е. от количества товара Q, выставленного на рынок. Если потребности покупателей в товарах более или менее удовлетворяются – то есть государство, в экономических теориях часто выносимое за скобки, в реальности существует и организует торговлю – цены товаров снижаются с увеличением предложения и растут при возникновении дефицита. Иными словами, в нормальной экономической ситуации «потребительская» зависимость $P_D(Q)$ – убывающая функция ($dP/dQ < 0$), а ее график – вогнутая кривая ($d^2P/dQ^2 > 0$, рис. 1.28 а). В начальных курсах экономики кривую спроса часто изображают прямой линией, для которой $dP/dQ = \text{const}$ (<0), а $d^2P/dQ^2 = d(\text{const})/dQ = 0$.

Кривая предложения $Q_S(P)$ в «переставленных» координатах, т.е. зависимость предложения от цены, отражает интересы производителей товара. При росте цены P выгода от продажи товара возрастает, поэтому производители увеличивают объемы Q_S его поставок на рынок. Предполагается, что «зависимость производителя» $Q_S(P)$ – возрастающая функция ($dQ/dP > 0$), а ее кривая выпукла: возможности производства не безграничны ($d^2Q/dP^2 < 0$, сплошная линия на рис. 1.28 б). Если отразить кривую $Q_S(P)$ относительно диагонали в *квадранте* (четверти координатной плоскости), ограниченном положительными полуосями P и Q, мы получим «производительскую» связь цены и количества $P_S(Q)$: возрастающую вогнутую кривую ($dQ/dP > 0$, $d^2Q/dP^2 > 0$). На рис. 1.28 а это пунктирная линия.



(а) (б)

Рисунок 1.28. (а) Равновесие спроса (*D*) и предложения (*S*). (б) Зависимости поставок товара от его цены $Q_S(P)$ (сплошная линия) и цены товара от его количества на рынке $P_S(Q)$ (пунктирная линия)

Перенесем зависимость $P_S(Q)$ на рис. 1.28 а и рассмотрим точку ее пересечения с графиком функции $P_D(Q)$. В этой точке количество товара Q_0, которые производители поставляют на рынок *по цене* P_0, совпадает с тем количеством товара, которое по этой цене приобретают покупатели. Это точка *рыночного равновесия* E (от англ. equilibrium). Установив цену $P > P_0$, производители продадут меньше равновесного количества товара $Q_1 < Q_0$, и могут понести убытки[*], а покупатели не найдут продавцов с ценой $P < P_0$: продавцам легче договориться. Интуитивно ясно, что после насыщения платежеспособного спроса потребность покупателей в данном товаре стабилизируется, вынуждая производителей сбросить цену для увеличения продаж. Возникающее при этом равновесие до сих пор остается предметом гордости неоклассических экономистов.

Множества покупателей и производителей неоднородны. Косвенно это отражают кривые спроса $P_D(Q)$ и предложения $P_S(Q)$, воспроизведенные на Рис. 1.29. Богатым покупателям доступен товар по любым ценам $P \le P_{\max}$, однако объемы покупок с ростом цены падают (на минуту допустим, что цена выше $P_{\max}$ оттолкнет даже миллионеров). Рассуждая по аналогии, предположим, что продавать товар по цене $P < P_{\min}$ невыгодно и самым успешным производителям. В гипотетических условиях рыночного равновесия и

[*]С позиций чистой математики это совершенно необязательно: спекулянты поднимают цены выше «равновесных» именно для своего обогащения. Но мы считаем, что государство, незримо присутствующее в неоклассических моделях экономики, карает спекулянтов – или, например, речь идет о скоропортящемся товаре, который производители не могут отложить на склад.

идеальной конкуренции все платежеспособные покупатели приобретают товар в общем количестве Q_0 по цене P_0. Деньги M, перешедшие от покупателей к производителям, на графике 1.29 соответствуют площади прямоугольника OP_0EQ_0, т.е. $M = P_0Q_0$. Но богатые покупатели могли заплатить и больше: каждый из них выигрывает сумму $P_i - P_0$, где i – «номер» покупателя, а P_i – приемлемая для него цена товара. Если же богатых покупателей бесконечно много, значения P_i заполняют непрерывный интервал от P_0 до P_{max}. Проинтегрировав функцию $P_D(Q)$ по интервалу от 0 до Q_0, мы получим сумму максимально возможных расходов потребителей M_{max} в интервале цен от P_0 до P_{max}: на графике это площадь фигуры $OP_{max}EQ_0$. Разность $\Delta M_D = M_{max} - M$ (заштрихованная площадь под кривой $P_D(Q)$) называется *выигрышем потребителя*:

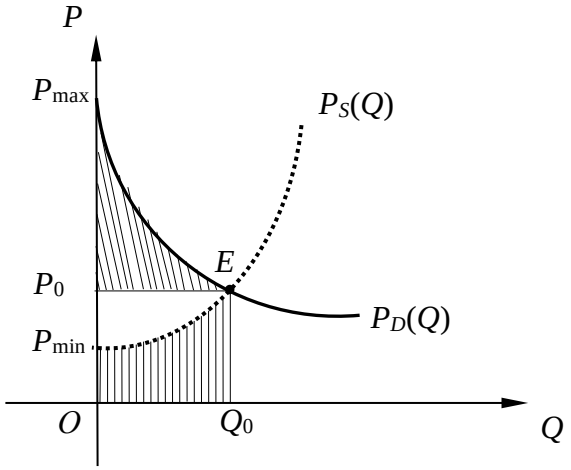


Рисунок 1.29. «Выигрыш потребителя» ΔM_D (косая штриховка), издержки производства (прямая штриховка) и «выигрыш производителя» ΔM_S (незаштрихованная площадь фигуры $P_{min}P_0E$) при равновесии спроса и предложения

(1.47 а) $$\Delta M_D = \int_0^{Q_0} P_D(Q)dQ - P_0\,Q_0$$

С другой стороны, затраты производителей (издержки производства) при тех же допущениях отвечают заштрихованной площади M_{min} под кривой $P_S(Q)$. Так как от продажи по равновесной цене производители в целом выручили больше, разность $\Delta M_S = M - M_{min}$ называется *выигрышем производителя*:

(1.47 б) $$\Delta M_S = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} P_S(Q)dQ.$$

Сумма $\Delta M = \Delta M_D + \Delta M_S = f(Q)$ в неоклассической экономической теории называется «общественной выгодой». Правда, эта выгода достается не всем, а лишь наиболее богатым покупателям и наиболее эффективным производителям (скорее всего, самым крупным – то есть тоже богатым: неоклассическая экономика весьма политизирована). Для нас важнее, что ΔM – определенный интеграл от разности функций $f(Q) = P_D(Q) - P_S(Q)$ на отрезке $[0, P_0]$, так как при сложении уравнений (1.47 а) и (1.47 б) члены $-P_0Q_0$ и $+P_0Q_0$ взаимно уничтожаются:

(1.47 в) $$\Delta M = \int_0^{Q_0} [P_D(Q) - P_S(Q)]dQ$$

В реальной жизни покупатели могут удовлетворить одну и ту же потребность разными товарами – например, утолить голод макаронами или картошкой. Возможность заменить дорогой товар более дешевым аналогом ограничивает аппетиты продавцов (если они не

подчиняются единому монополисту), оказывая влияние на форму функций спроса и предложения. Отношение приращения функции к приращению ее аргумента в экономической теории называется *эластичностью*. Нетрудно видеть, что в предельном случае бесконечно малых приращений эластичность – это производная. Но абсолютные значения цен не очень информативны: в определение эластичности входят *относительные* изменения цены товара $\Delta P/P$ и его количества $\Delta Q/Q$, доступного за эту цену. Таким образом, «точечная» ценовая эластичность товара – это *логарифмическая производная*, взятая с обратным знаком (так как производная убывающей функции $P_D(Q)$ отрицательна, а в хозяйственных вопросах гораздо проще оперировать положительными числами):

$$E_P = -\frac{dQ/Q}{dP/P} = -\frac{d\ln Q}{d\ln P}. \tag{1.48}$$

Эластичность спроса обычно выражают в относительном изменении «равновесного» количества товара при изменении его цены на 1%. Если $E_P > 1$ (то есть увеличение цены товара не особенно выгодно продавцам – например, при 10%-ном подорожании картошки 20% покупателей перейдет на макароны), спрос называется эластичным, при $E_P < 1$ неэластичным. «Абсолютно неэластичный» спрос ($E_P = 0$), когда касательная (1.48) параллельна оси ординат (билеты на театральную премьеру, хлеб во время голода и т.д.), как уникальная возможность обогащения спекулянтов – серьезный повод для государственного регулирования цен. Заметим, что в математике чаще рассматрив*а*ют производную функции от «управляющей» переменной, которой в зависимости $Q(P)$ является цена – но читатель был предупрежден об особенностях экономической теории.

Функции $Q(P)$ либо $P(Q)$ для разнородных товаров в рамках неоклассической теории однотипны. Предполагается, что они отражают единый процесс: удовлетворение потребностей покупателей. Для его формального описания в экономической теории вводится специальная характеристика: *полезность*, обычно обозначаемая U (англ. *utility*). Эта функция многих переменных отражает субъективные предпочтения разных категорий покупателей, для ряда товаров (табак, алкоголь, наркотики) несовместимые с пользой. Тем не менее, полезность *энергоподобна* в том смысле, что каждый покупатель стремится к максимальной сумме полезности приобретаемых товаров – точно так же, как физическая система с набором варьируемых параметров стремится к минимуму энергии. (В химии, где энергия на пути к минимуму выделяется особенно наглядно, бытует полужаргонная формулировка «энергетически выгодный процесс»).

Суммарная полезность $U(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ набора приобретенных товаров $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$, иногда называемого «корзиной», сильно зависит от интервала значений переменных $\{Q_i\}$. До насыщения физиологических потребностей функция $U(\ldots Q_i, \ldots)$ возрастает (т.е. $\partial U/\partial Q_i > 0$ при $Q_i < Q_i^{(0)}$), а при некотором пороговом значении обычно проходит через максимум $\frac{\partial U(Q_i^0)}{\partial Q_i} = 0$ (шоколадные конфеты, мороженое, интернет-форумы). Первая производная полезности по i-му товару $\partial U/\partial Q_i$ называется его *предельной полезностью*. В отсутствии патологий у массы потребителей функция U является выпуклой: все ее вторые производные $\partial^2 U/\partial Q_i^2$ отрицательны (рис. 1.30).

Весьма неопределенное словосочетание «удовлетворение потребностей» и отсутствие универсальной шкалы переменных $\{Q_i\}$ делают полезность сугубо качественной – скорее даже вербальной – характеристикой экономического процесса. Возможно, именно поэтому полезность очень широко используется в самых разных общественных науках, включая психологию и политологию. Трактовка рыночной экономики как механизма всеобщего

удовлетворения потребностей (а, например, не конкурентного выживания) характерна для апологетов капитализма. В российских политически ангажированных курсах экономики английский термин «товары» (goods) нередко переводится как «блага». Также стараниями переводчиков «предельные», то есть дифференциальные значения экономических переменных в русскоязычной литературе иногда называются «маржинальными».

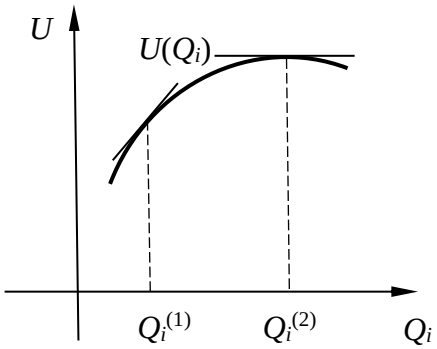


Рисунок 1.30. Функция полезности товара *U(Qi)* и предельная полезность $\partial U/\partial Q_i|_{Q_i^{(1)}} > 0$ в точке $Q_i^{(1)}$ и $\partial U/\partial Q_i|_{Q_i^{(2)}} = 0$ в точке $Q_i^{(2)}$

Функция Кобба-Дугласа: изокванты и изокосты

Зависимость произведенной продукции Y (от англ. yield), понимаемой как результат любой созидательной деятельности, от ее ключевых факторов ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) выражает *производственная функция*

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Одну из конкретных форм этой зависимости задает функция Кобба-Дугласа, приведенная ранее в разделе 1.2.2:

(1.49) $$Y = A \cdot K^{\alpha} L^{\beta},$$

где L – труд (labor), K – капитал, используемые в процессе производства, A – технологический коэффициент, отражающий масштаб деятельности. Очевидно, что при увеличении или уменьшении множителя A результат Y пропорционально увеличится либо уменьшится. Показатели степени $0<\alpha, \beta<1$ – эмпирические параметры, подбираемые для достижения наилучшего согласия между объемом продукта и разнородными факторами, затраченными на его производство. Таким образом, прямого «физического смысла», который, в том числе, должен отражаться в размерности переменных, функция Кобба-Дугласа не имеет. Тем не менее, она воспроизводит реально существующую обратную пропорцию в затратах труда и капитала на единицу выпускаемой продукции (машинный труд производительнее ручного, но для механизации производства нужны деньги, помещения и сами машины). Кроме того, эта простая функция задана в аналитическом виде и детально изучена. В следующих главах мы увидим, что стремление представить сложный процесс функцией двух переменных, наглядно изображаемой на плоскости – один из стандартных приемов формализации общественных явлений.

Аргументы K и L функции Кобба-Дугласа в экономической литературе называются *стилизованными переменными*: они не имеют определенных значений, показывая связь выпуска продукции с факторами производства на качественном уровне. Разделив левую часть функции (1.49) на ее аргументы, получим среднюю зависимость выпуска от производственных факторов:

(1.49 а) $X_L = Y/L = A \cdot K^{\alpha} L^{\beta-1}$ – *средняя производительность труда*

$X_K = Y/K = A \cdot K^{\alpha-1} L^{\beta}$ – *средняя производительность капитала (фондоотдача)*

Обратные величины также имеют экономическое содержание: X_L^{-1} – *трудоемкость*, X_K^{-1} – *капиталоемкость* производства. Отношение K/L называется *капиталовооруженностью* труда.

Первыми производными функции Кобба-Дугласа по L и K задаются дифференциальные (в экономической литературе – *предельные*) значения производительностей:

(1.49 б) $$\partial Y/\partial L = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1} = \beta X_L$$
$$\partial Y/\partial K = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta} = \alpha X_K.$$

Показатели степени α и β называются *эластичностью замещения*, соответственно, по труду и по капиталу. Дифференциальная («предельная») норма замещения капитала трудом $\partial K/\partial L$ для функции Кобба-Дугласа равна

(1.49 в) $$-\frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} = -\frac{\beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}}{\alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}} = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{K}{L}$$

Вторые производные продукта по производственным факторам

(1.49 г) $$\partial^2 Y/\partial L^2 = \beta(\beta-1) A K^{\alpha} L^{\beta-2} < 0$$
$$\partial^2 Y/\partial K^2 = \alpha(\alpha-1) A K^{\alpha-2} L^{\beta} < 0$$

(поскольку $0 < \alpha, \beta < 1$, то есть «предельные производительности» по труду и капиталу – убывающие функции).

Уравнению $A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} = Y_c$ при разных количествах продукции Y_c = const соответствует семейство гипербол на плоскости, называемых *изоквантами*, или линиями равного выпуска. Производной (1.49 в) соответствует касательная в точке (L_0, K_0), называемая *изокостой*, или линией равных издержек (рис. 1.31). Точкам на этой прямой отвечают комбинации факторов производства (в данном случае труда и капитала, однако изокосты можно определить для любых производственных функций), приводящие к одинаковым затратам.

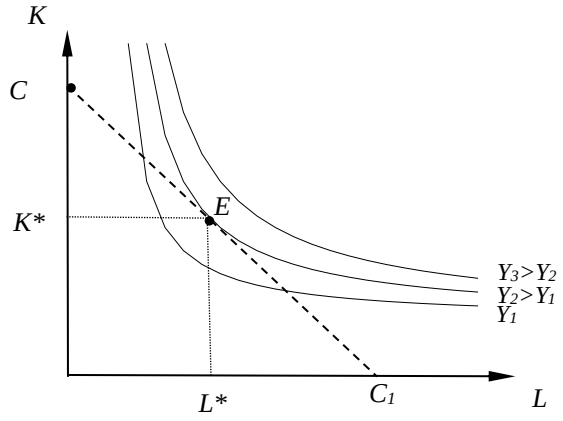


Рисунок 1.31. Функция Кобба-Дугласа $Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$: изокванты Y_i=const и изокоста (штриховая линия). Точка *C* – бюджетное ограничение, *E* – максимум выпуска продукции при фиксированных затратах: равновесие производителя (*L, *K**)**

Уравнение изокосты на рис. 1.31 определяется «ценой труда» w (например, средней почасовой заработной платой) и «ценой капитала» r (почасовой стоимостью эксплуатации производственных мощностей):

$$C = rK + wL.$$

Точка C пересечения прямой с осью ординат показывает сумму затрат (*бюджетное ограничение*). Таким образом, наклон изокосты определяется ценами факторов производства, а ее положение – бюджетом производителя

$$K = C/r - (w/r)L.$$

При фиксированном бюджете максимуму выпуска продукции Y_0 отвечает изокванта, касающаяся изокосты CC_1 в точке E. Эта точка называется *равновесием производителя*. Все другие изокванты, пересекающие прямую CC_1, отвечают меньшему выпуску $Y < Y_0$ при тех же затратах.

«Карты» изоквант и изокост характеризуют производство в заданных внешних условиях. При изменении бюджетных ограничений (масштабов производства) изменяется и «равновесное» количество выпускаемой продукции. Если в (1.49) показатели степени $\alpha+\beta=1$, затраты (и, соответственно, прибыль) на единицу произведенной продукции Y при изменении масштабов производства остаются постоянными. В этом случае формула Кобба-Дугласа имеет вид

$$Y = A \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha}.$$

Если сумма эластичностей $\alpha+\beta >1$, функция (1.49) описывает производство с возрастающей отдачей (расширять производство выгодно), в противном случае ($\alpha+\beta<1$) – производство с убывающей отдачей.

1.5.2. Количественные соотношения в экспериментальной психологии

Одним из основоположников современного психологического эксперимента считается немецкий психолог Эрнст Вебер (1795-1878). В первой половине XIX века он исследовал зависимость человеческой реакции R, формулируемой на качественном уровне, от физического стимула S, который задан точно. На основе опытов, где испытуемые оценивали разные параметры *предъявляемых* им стимулов (вес груза, высоту звука, яркость света и др.), Вебер предположил, что различимость двух близких по величине стимулов $\Delta S = S_1 - S_2$ определяется не абсолютным значением их разности, а отношением $\Delta S/S$ (где $S \approx S_1 \approx S_2$ либо среднее). Так, испытуемые обычно различали («легче-тяжелее») грузы в 100 и 105 г, но веса 200 г и 205 г воспринимали как одинаковые. Вебер сформулировал понятие *едва заметного различия* (ЕЗР) между стимулами и постулировал, что для каждого стимула эта величина у всех людей в среднем постоянна

(1.50) $$\text{ЕЗР} = \Delta S/S = K = \text{const}.$$

При этом пороговые значения K для стимулов разной природы (у психологов – *ощущений различных модальностей*) различны: 0.3% для высоты звука, 2.5% для веса предметов, 20% для изменений концентрации поваренной соли в растворе и др.

Густав Фехнер (1801–1887) – соавтор Вебера, назвавший его именем соотношение (1.50) – вывел математическую формулу, которая связала «силу» реакции R с величиной

стимула *S*. Если положить dR = ЕЗР/K и $k = 1/K$, можно записать (1.50) в «дифференциальном» виде

(1.50 а) $$dR = k\,{}^{dS}/_{S} = kd(\ln S).$$

Интегрированием этого уравнения получим

$$R = k\ln S + C.$$

Константу интегрирования C можно найти, предполагая, что ниже некоторой пороговой интенсивности воздействия S_0 реакция отсутствует, то есть $R(S_0) = 0$:

$$k\ln S_0 + C = 0, \text{ или } C = -k\ln S_0, \text{ поэтому}$$

(1.51) $$R = k\ln\frac{S}{S_0},$$

где масштабный множитель k определяется природой стимула (***закон Фехнера***). В книге Фехнера «Элементы психофизики» (1860 г.) была впервые поставлена задача количественной оценки ощущений. Она сохраняет критическую важность для ряда профессий, где нарушения восприятия и ошибки связаны с высоким риском (операторы на химическом производстве и АЭС, авиадиспетчеры и др.).

Соотношения Вебера-Фехнера до сих пор используются для оценки восприятия сигналов разной интенсивности. Так, сила звука, пропорциональная квадратному корню давления воздуха в звуковой волне, переводится во внесистемные единицы громкости *децибелы (*дБ*)* по логарифмической шкале. Формула (1.50) применима лишь для «средних» интенсивностей стимула ΔS. Очень слабый внешний сигнал искажается внутренними источниками в организме – например, биением сердца для слабых звуков – а интенсивные воздействия, наоборот, компенсируются, как яркий свет сокращает «диафрагму» зрачка.

В XX веке американский психолог Стенли Стивенс (1906-1973) предложил методику прямого измерения реакции испытуемых. Эта методика основана на постулате Вебера (1.50) и аналогичном соотношении для *разницы ощущений* $\Delta R = R_1(S_1) - R_2(S_2)$, вызванной разницей стимула ΔS

(1.52) $$\Delta R/R = C_1 = const,$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{1}{C_1}\frac{dR}{R} = \frac{1}{k}\frac{dS}{S}$$

Проинтегрировав левую и правую части, получим

$$\ln R = \frac{C_1}{k}\ln S + C_2, \quad \text{откуда}$$

(1.52 а) $$R = aS^n,$$

где a и n – эмпирические константы (***закон Стивенса***)

В отличие от формулы Фехнера (1.51), природой внешнего стимула S в формуле (1.52 а) определяется нецелочисленный показатель степени n, тогда как масштабный множитель a – это коэффициент пропорциональности между физической интенсивностью стимула и условными единицами, характеризующими «силу» реакции. Разные уровни измерения R по Стивенсу включали как качественные, так и количественные соотношения – последние,

установленные по оценкам испытуемых в эксперименте, называются *психофизическими функциями* (рис. 1.32). Показатель степени n выше для потенциально опасных воздействий – так, при контакте с горячим металлическим предметом (где S – его температура) $n = 1.6$, а при электрическом разряде (!) через пальцы руки (S – сила тока) $n = 3.5$. В случае $n < 1$ степенная зависимость $R(S)$, всегда заданная на ограниченном интервале величины стимула, мало отличается от логарифмического графика Фехнера. Соотношения психофизики (термин используется до сих пор) как раздела экспериментальной психологии, посвященного формальному анализу связей «стимул-реакция», наглядно показывают ограниченную применимость математики в «науках о человеке»: формулы (1.51), (1.52) и подобные им не следуют из каких-либо общих законов, а лишь постулируются по эмпирическим данным.

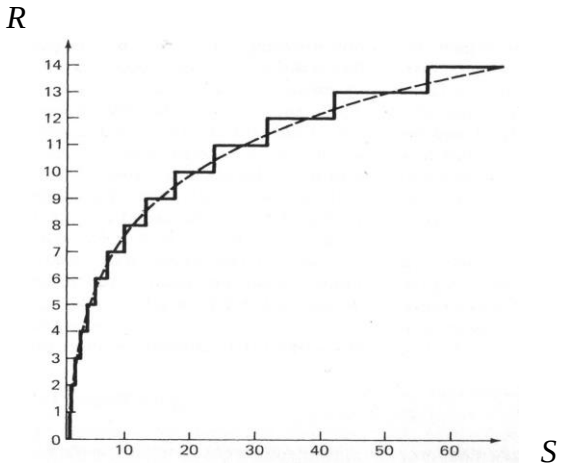


Рисунок 1.32. (а) Общий вид психофизической функции: *S* – стимул (произв. ед.), *R* – реакция в единицах ЕЗР (см. текст)

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 1.4

1.9. Выведите первую производную функции $y=\cos x$ через *предельный переход*, выражаемый формулой (1.28). Используйте схему вывода производной синуса.

1.10. Определите аналитически координаты (x_i, y_i) и тип особых точек A, O и B на графике функции $y=x^3-3x$ (см. рис. 1.22), а также значения $y'(x)$ в точках A и B.

1.11. Разложите в бесконечный ряд Маклорена функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$. Сравните с разложением $y=e^x$.

1.12. Материальная точка с массой m закреплена на ободе колеса радиуса R, которое вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1.33 а). Найдите направление и величину *центростремительного ускорения* $a_ц$ и определите «центробежную силу» F, с которой материальная точка действует на обод колеса.

Решение

Угловая скорость вращения колеса $\omega = d\varphi/dt$: производная угла поворота* φ по времени. Бесконечно малое изменение угла $d\varphi = \omega dt$ и $\omega = \text{const}$. Определим значение и направление вектора скорости $\mathbf{v}(t)$ в момент времени t (в механике она называется *мгновенной скоростью*).

За конечный интервал времени Δt колесо повернется на угол $\Delta\varphi$. Наша материальная точка переместится из положения A в положение B, которые соединяет вектор смещения $\Delta\mathbf{r}$ (рис. 1.33 а). Высота OC разделит

* Угол поворота в физических задачах чаще измеряют в радианах. Напомним: 360° = 2π радиан, то есть 1 рад. ≈ 57.30°.

равнобедренный треугольник AOB на два равных прямоугольных треугольника AOC и BOC. Из школьной тригонометрии легко найти длину смещения, т.е. сторону AB = Δ**r**:

(1.53) $$\Delta r = 2 \cdot R \sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 2R \sin\frac{\omega\Delta t}{2}$$

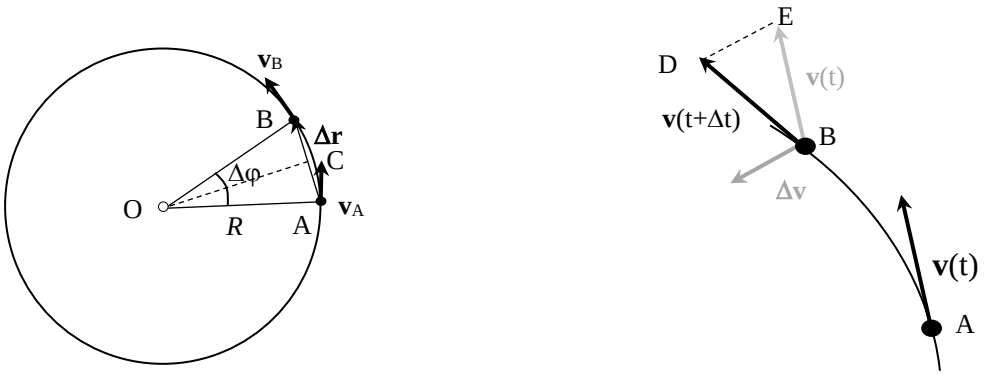
(мы учли, что при постоянной угловой скорости Δφ = ωΔt). Смещение точки за бесконечно малое время *dt* составит

$$dr = 2R \sin\frac{\omega dt}{2} = 2R \cdot \frac{\omega dt}{2} = R\omega dt$$

(в разд. 1.4.1, применив правило Лопиталя, мы установили, что $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$). Итак, скорость перемещения точки на ободе колеса по абсолютно величине равна

$$v = \frac{dr}{dt} = R\omega.$$

Направление вектора **Δr** – среднее между прямыми, касательными к окружности в точках A и B; при Δφ→0 он сам станет касательным к окружности. Таким образом, мгновенная скорость материальной точки на ободе вращающегося колеса постоянна по абсолютной величине и непрерывно изменяется по направлению. – это показано на рис. 1.33 а.



(а) (б)

Рисунок 1.33. (а) Движение массы *m*, закрепленной на ободе колеса: вектор Δr – смещение, v(*t*)– скорость. (б) Участок траектории AB (дуга окружности): Δv– вектор изменения скорости между точками A и B

Чтобы найти скорость изменения вектора скорости **v**(*t*), то есть ускорение, рассмотрим дугу окружности AB «крупным планом» (рис. 1.33 б). Вектор скорости **v**(*t* + Δ*t*) в точке B по *правилу параллелограмма* (его тоже проходят в школьном курсе физике) можно представить суммой вектора **v**(*t*) в точке A и «поправки» **Δv**, изменяющей его направление. Можно строго доказать, что при уменьшении угла поворота Δφ абсолютная величина этой поправки

$$\Delta v \to v\Delta\varphi$$

и вектор **Δv** будет все точнее направлен к центру круга, т.е. к оси вращения колеса. (Угол, образованный векторами **v**(*t*) и **v**(*t* + Δ*t*), равен углу AOB, то есть Δφ, по теореме из планиметрии: это *углы с соответственно перпендикулярными сторонами*. Дальше надо заменить в формуле (1.53) радиус *R* на скорость v, а сдвиг **Δr** – на изменение скорости Δv, так как равнобедренные треугольники AOB на рис. 1.31 а и BDE на рис. 1.31 б *подобны*). Для бесконечно малых приращений

$$dv = vd\varphi = R\omega \cdot \omega dt = R\omega^2 dt, \qquad \text{поэтому}$$

(1.54) $$a_{\text{ц}} = \frac{dv}{dt} = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

Формулы (1.54) позволяют вычислить величину ускорения для точки, расположенной на равномерно вращающемся колесе на расстоянии *R* от оси вращения – как через угловую скорость вращения ω, так и через «мгновенную» скорость v. Это ускорение направлено перпендикулярно вектору скорости, т.е. к центру вращения – и поэтому называется *центростремительным ускорением*.

Материальной точке, т.е. телу с массой m, жестко закрепленному на вращающемся колесе, центростремительное ускорение придает обод колеса. По 2-му закону Ньютона это означает, что к телу приложена *центростремительная сила*

$$F = ma_{\text{ц}} = mR\omega^2 = \frac{mv^2}{R},$$

при отсутствии которой тело перемещалось бы прямолинейно. По 3-му закону Ньютона, с такой же силой, направленной в противоположную сторону, тело давит на обод колеса – эта сила и называется центробежной. Мы подробно рассмотрели этот пример потому, что криволинейное движение и центробежные силы встретятся в следующих главах. На нем можно видеть, что формулы школьной физики не даны нам как откровение свыше: они строго выводятся дифференцированием.

Рекомендуемая литература

1. К.Н. Драбович, В.А. Макаров, С.С. Чесноков. *Физика. Практический курс для поступающих в университеты.* М: Физматлит, 2006.
2. А.П. Ершов, В.Г. Харитонов, *Физика. Учебник для школ физико-математического профиля.* М.: Научный мир, 2001.
3. Е.А. Еремина, О.Н. Рыжова. *Химия: справочник школьника.* М.: МГУ, 2014.
4. Н.Г. Тактаров. *Справочник по высшей математике для студентов вузов*. М.: ЛИБРОКОМ, 2015.
5. А.Г. Ивасенко, Я.И. Никонова, *Микроэкономика: учебное пособие*. М.: КНОРУС, 2020.
6. О.А. Волгина, Г.И. Шуман, *Математическое моделирование экономических процессов и систем*. М.: КНОРУС, 2019.
7. А.Н. Гусев, И.С. Уточкин, *Психологические измерения: Теория. Методы: Общепсихологический практикум.* М.: Аспект Пресс, 2011.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ОПИСАНИИ ОБЩЕСТВЕННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Закон Мальтуса, радиоактивный распад. Уравнение Ферхюльста, логистическая функция. «Диффузия инноваций».

Механика материальной точки, гармонический осциллятор, математический маятник, колебательный контур. Фазовая плоскость. Фазовый портрет физического маятника. Функции Лагранжа и Гамильтона, законы сохранения, принцип наименьшего действия. Орбитальное движение. Кривые и поверхности 2-го порядка.

Элементы молекулярной физики и термодинамики. Потенциалы межмолекулярных взаимодействий. Распределения Больцмана-Гиббса и Максвелла. Энтропия. «Связанная» и свободная энергия. Термодинамические потенциалы. Энтропия в экономике. «Свободная энергия мысли».

Химическая кинетика и химическое равновесие. Фазовые переходы и критические показатели. «Режим с обострением». Гиперболический рост населения Земли.

В институтах и университетах студенты естественнонаучных направлений изучают общую физику. (К сожалению, для некоторых специальностей физика этим и ограничивается). Кроме того, они осваивают математический анализ, аналитическую геометрию и элементы линейной алгебры; многие также знакомятся с основами дифференциальных уравнений и теории вероятностей. Все это позволяет рассматривать физические процессы более строго. Но поскольку основные разделы физики – механику, агрегатные состояния вещества, электричество, магнетизм, оптику – все проходили в школе, несознательные студенты иногда называют общую физику «школьной физикой с дифференциалом и интегралом».

В нашей книге мы не планируем вспоминать институтские курсы: даже краткое повторение займет непропорционально много места. Кроме того, многие важные составляющие физической картины мира (оптика, акустика, твердое тело и другие) пока совсем не применяются к описанию общества. В этой главе мы кратко повторим такие разделы и теоретические модели общей физики, для которых найдены определенные аналогии в области социальных процессов. Поэтому без дифференциалов и интегралов не обойтись, хотя здесь (как и далее в этой книге) нас будет интересовать прежде всего описание систем и процессов на качественном уровне. Дополнительный материал, содержащий минимум математических выкладок, представлен мелким шрифтом; при первом чтении его можно пропустить. Разобраться в нем после прочтения главы настоятельно рекомендуется: все изложенное здесь будет использовано в части II для анализа «живых» социальных систем методами, перенесенными из общей физики.

2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется математическое равенство, включающее неизвестную функцию f, ее аргументы и производную функцию f', а также, при необходимости, f'' и производные более высоких порядков. В общем виде дифференциальное уравнение записывают двумя способами:

(2.1) $$f^{(n)} = F(f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, \dots, f'', f', f, x), \text{ или}$$

(2.1 а) $$\Phi\left(f^{(n)}, f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, \dots, f'', f', f, x\right) = 0,$$

где под F и $\Phi = F - f^{(n)}$ понимаются алгебраические соотношения, содержащие в качестве аргументов переменную x, искомую функцию f и ее (некоторые) производные. Если $f(x)$ – функция одной переменной, а n – максимальный порядок производной, формулам (2.1) и (2.1 а) соответствует *обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n*. Решением уравнения является функция $f(x)$, которая при подстановке в (2.1) или (2.1 а) обращает их в тождества.

С точки зрения математики обыкновенные дифференциальные уравнения не очень интересны: для поиска их решений имеется универсальный алгоритм (хотя уравнение вида (2.1) может не иметь решения, если подходящей функции $f(x)$ для него не существует). Начнем с простого примера обыкновенного, и притом линейного дифференциального уравнения 1-го порядка.

Уравнение Мальтуса

Исследуем размножение бактерий в питательной среде. В исходный момент времени $t = 0$ количество бактерий, выраженное концентрацией («штук на единицу объема», например 1/мм^3), равно c_0. Наблюдая в микроскоп рост колонии бактерий в чашке Петри (по размерам, интенсивности окраски и т.д.), мы заключаем, что прирост концентрации бактерий Δc в интервал времени Δt пропорционален их количеству в единице объема, т.е. самой концентрации:

(2.2) $$\Delta c(t + \Delta t) - c(t) = ac\Delta t,$$

где a – коэффициент пропорциональности. Заменяя в (2.2) конечные приращения времени и концентрации бесконечно малыми, получим дифференциальное уравнение

(2.2 а) $$dc = acdt, \quad \text{или} \quad dc/dt = ac.$$

Это ***уравнение Мальтуса***. Его решение легко найти, разделив левую и правую части (2.2 а) на концентрацию c:

$$dc/c = adt.$$

Решение уравнения – табличный интеграл (см. Приложение П2):

$$\ln c = at + C$$

(в неопределенном интеграле обязательно присутствует константа интегрирования!).

Натуральный логарифм, или логарифм по основанию e = 2.718281828… (для запоминания: «2.7 плюс два раза год рождения Льва Толстого») – обратная функция от экспоненты $y = e^x$. Чтобы в явном виде записать зависимость концентрации c от времени, достаточно помнить, что константа интегрирования C в неопределенном интеграле не должна потеряться, и знать школьное равенство $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Получаем результат:

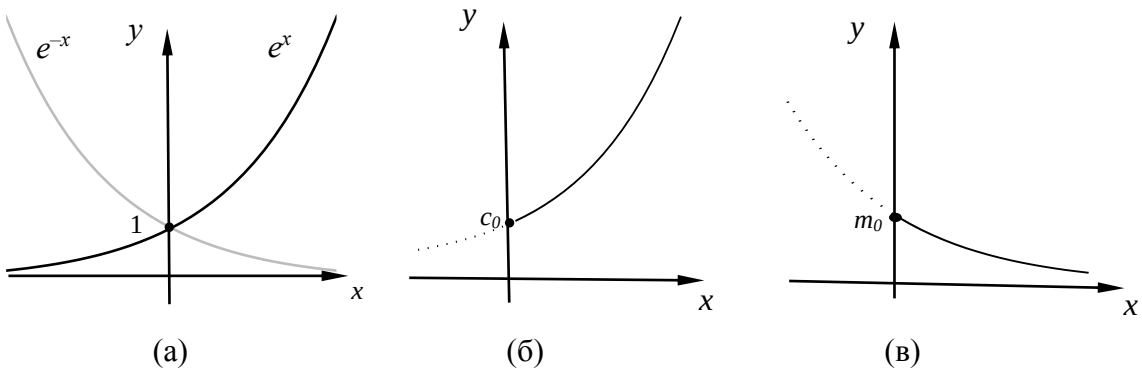
(2.3) $$c = c_0 e^{at},$$

где $c_0 = e^C = c(t{=}0)$ – концентрация бактерий в начальный момент времени. Скорость прироста концентрации в уравнениях (2.2) и (2.2 а) равна

$$dc/dt = ac(t) = ac_0e^{at}.$$

Константа интегрирования в решении (2.3) сохранилась, но приняла определенное значение $\ln c_0$, заданное начальными условиями.

Решение уравнения Мальтуса предсказывает экспоненциальный рост биомассы с неограниченным источником питания (пока считаем, что наши бактерии бессмертны). Именно неограниченный рост количества «бактерий» (рис. 2.1 б), под которыми в Европе XIX века подразумевались трудящиеся классы, спровоцировал Томаса Мальтуса на пессимистический прогноз о перспективах человечества как системы. Если формула (2.3) – всемирный закон, то улучшение жизненных условий приводит к неконтролируемому размножению людей, что при ограниченной площади земли, пригодной для сельского хозяйства, вызовет перенаселение и кризис. *Неомальтузианские* идеи – в частности, *аграрное перенаселение*, дестабилизирующее доиндустриальные государства – до сих пор плодотворно используют историки[1].



(а) (б) (в)

Рисунок 2.1. (а) Экспоненциальные функции $e^{\pm x}$, (б) возрастающая функция c_0e^{at} (закон Мальтуса), (в) убывающая функция m_0e^{-at} (закон радиоактивного распада)

Прежде чем вносить поправки в уравнение Мальтуса, отметим, что формуле (2.3) соответствуют и многие другие явления. Так, «сложный процент» по вкладу в банк означает увеличение дохода, пропорциональное вкладу – то есть именно экспоненциальный рост (геометрическая прогрессия). Правда, желание вкладчиков получать деньги «по экспоненте» ограничены правилами, устанавливаемыми банками, которые сами стремятся извлечь максимальный доход из денег клиентов, и «дискретным» начислением процентов в конце года. Эту динамику описывают *разностные уравнения*, которые будут рассмотрены в 4-й главе.

Возможны ситуации, когда коэффициент пропорциональности в формулах (2.2 а) и (2.3) отрицателен («убыль пропорциональна наличному количеству», или $dc/dt = -ac(t)$, где $a > 0$). Если аргументом является время, уравнение (2.3) превращается в *закон радиоактивного распада*

(2.3 а) $$m = m_0e^{-at}.$$

Коэффициентом a определяется скорость убывания массы радиоактивного элемента, в начальный момент времени взятого в количестве m_0 (рис. 2.1 в). Скорость характеризуется периодом полураспада $\tau_{1/2}$: временем, за которое первоначальное количество элемента уменьшается вдвое,

(2.3 б) $$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{a} \approx \frac{0.693}{a}.$$

Время – не единственная возможная переменная в уравнениях типа (2.3). Так же экспоненциально снижается интенсивность света $I(x)$ на его пути длиной x в однородной поглощающей среде:

(2.3 в) $$I = I_0 e^{-\mu t}.$$

В оптике и спектроскопии формулу (2.3 в) называют *законом Бугера-Ламберта-Бера*. Этот закон также был вначале установлен экспериментально и лишь затем подтвержден дифференциальным уравнением вида (2.2 а) при $a < 0$. В этом случае I_0 – интенсивность света, падающего на образец вещества, I – интенсивность прошедшего света, x – толщина образца, а μ – линейный коэффициент поглощения, измеряемый в обратных единицах длины (обычно $см^{-1}$ или $мм^{-1}$): показатель экспоненты μx должен быть «безразмерным».

Логистическое уравнение

Теперь учтем ограничения, с которыми столкнется рост популяции бактерий при $a > 0$. Рано или поздно они вступят в конкуренцию за питательную среду, которая поддерживает их существование. Это снизит скорость прироста пропорционально вероятности присутствия двух бактерий в малой единице объема. Оценку такого замедления следует добавить в уравнение (2.2 а):

$$dc/dt = ac - bc^2$$

(вероятность найти бактерию в малой области пропорциональна концентрации, а двух бактерий в одной и той же области – квадрату концентрации; a и b – числовые множители). Уравнение Мальтуса применимо для разнообразных физических систем, поэтому вместо концентрации подставим в новое уравнение абстрактную переменную x:

(2.4) $$dx/dt = ax - bx^2.$$

Это ***уравнение Ферхюльста***, также называемое *логистическим уравнением*. Оно описывает динамику процесса, в котором действуют два противоположных фактора: самоускоряющийся рост переменной x и его подавление избытком той же переменной. (Если $a = b = 1$, при $x = 0.01$ скорость роста dx/dt составит 0.0099, при $x = 0.1$ увеличится до 0.09, а при $x = 1$ обратится в ноль).

Поиск решений дифференциальных уравнений носит скорее прецедентный характер. Стандартные приемы интегрирования – разделение переменных, замена переменной и многие другие (см. раздел 1.4 в 1-й главе) – выработаны поколениями математиков на конкретных практических задачах. Предположим, мы догадались заменить переменную x на такую переменную y, что

(2.5) $$x = ye^{at}\ .$$

Тогда dx/dt – производная произведения y и e^{at} (см. формулу (1.31) в 1-й главе)

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(ye^{at}) = aye^{at} + e^{at}\frac{dy}{dt}.$$

Подставляя x и x' в (2.4), получим

$$aye^{at} + e^{at}\frac{dy}{dt} = aye^{at} - by^2e^{2at}, \qquad \text{то есть}$$

$$\frac{dy}{dt} = -by^2e^{at}$$

(мы сократили одинаковые члены в левой и правой части равенства, а всё, что осталось, разделили на e^{at}). Новая переменная действительно упростила уравнение! Решим его:

$$\frac{dy}{y^2} = -be^{at}dt, \qquad \text{то есть} \qquad d\left(-\frac{1}{y}\right) = -\frac{b}{a}d(e^{at})$$

(в этом легко убедиться, применив к левой и правой части правила дифференцирования из раздела 1.4.1 первой главы). Значит,

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{a}e^{at} + C = \frac{be^{at}+aC}{a},$$

где C – константа интегрирования. «Перевернем» дроби в левой и правой частях:

$$y = \frac{a}{be^{at}+aC}$$

Мы решили уравнение (2.4) относительно «новой» переменной y, связанной с исходной переменной x формулой (2.5). Теперь выразим y через x

$$y = \frac{x}{e^{at}} = xe^{-at}$$

и подставим в решение:

(2.6) $$x = \frac{ae^{at}}{be^{at}+aC} = \frac{ae^{at}}{be^{at}+C_1}.$$

Функция (2.6) – это математическое решение уравнения Ферхюльста: в ее знаменателе остается неопределенная постоянная интегрирования $aC = C_1$. Чтобы проводить расчеты, надо связать (2.6) с начальным условием $x(t{=}0) = x_0$ (в нашем случае с исходной численностью популяции). При $t = 0$ экспоненциальные множители равны 1 и

(2.7) $$x_0 = \frac{a}{b+aC}.$$

В результате несложных алгебраических преобразований, которые здесь не приводим, в константу интегрирования в функции (2.6) можно ввести начальные условия:

(2.8) $$x = \frac{ax_0e^{at}}{a-bx_0(1-e^{at})} = \frac{Kx_0e^{at}}{K+x_0(e^{at}-1)}$$

(где $K = a/b$). В формах (2.6) и (2.8) обычно записывают решение уравнения (2.4), которое называется ***логистической функцией*** («логистой»).

График логистической функции (2.6) показан на рис. 2.2. Из уравнения (2.6) хорошо видно, что эта функция всюду положительна. При малых t, когда знаменатель дроби близок к $b + aC$ ($e^{at} \approx 1$), $x \approx ae^{at}(b + aC)$ и рост функции определяет экспонента e^{at} в числителе. При больших положительных t в (2.6) знаменатель дроби близок к be^{at}, числитель равен ae^{at} и график функции *асимптотически приближается* «снизу» к горизонтальной линии $x = a/b$. При больших отрицательных t, также асимптотически, $x \to 0$. Набравшись терпения, можно продифференцировать (2.6) и определить максимум ее «колоколообразной» производной в точке перегиба $t = 0$. Если же в исходных условиях $x_0 > a/b$, решение (2.8) асимптотически приближается к a/b «сверху», то есть численность популяции снижается до устойчивого значения a/b (рис. 2.2).

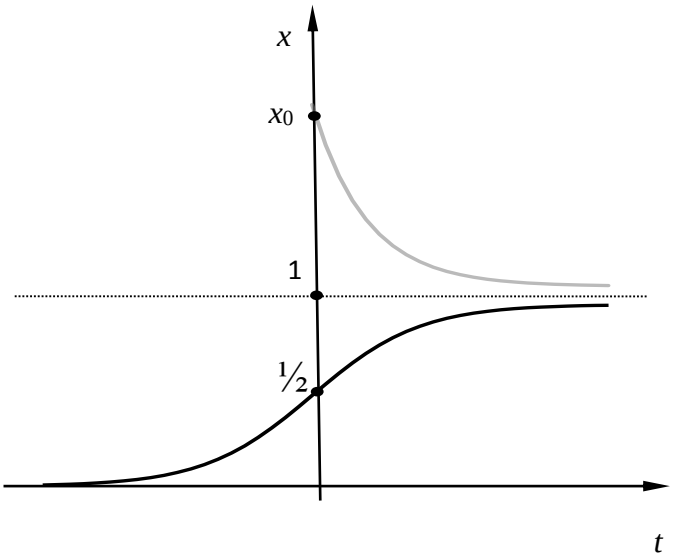
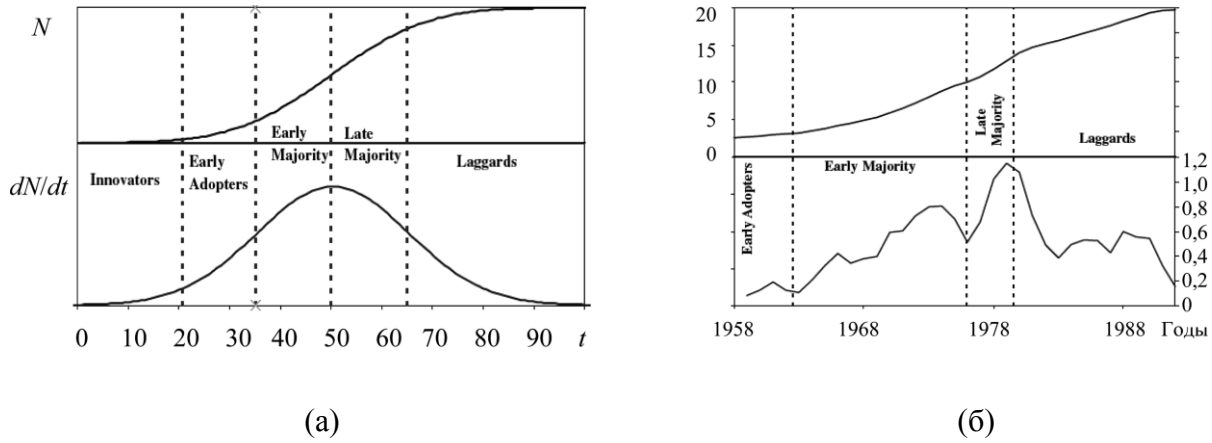


Рисунок 2.2. Логистическая функция ($a = b = C = 1$) при $x_0 = 0.5$ (черный цвет) и $x_0 > 1$ (серый цвет)

Логистическая функция не только дает приближенное описание динамики популяций. Из названия понятно, что она широко используется в *логистике*: планировании и организации процессов в экономике и на производстве. В частности, на логистической зависимости основана теория *диффузии инноваций*[2], ставшая популярной в маркетинге и политологии во второй половине XX века. Понятие «инноваций» в ней трактовалось очень широко: от внедрения новых товаров в насыщенный рынок до навязывания государству новой политической системы. Цитированная книга Эверета Роджера содержала практические советы по ускорению «диффузии» и оптимистический прогноз: после привлечения «критической массы» в 15-20% целевой аудитории диффузия становится необратимой. Многие из рекламных приемов были далее перенесены в практические политтехнологии, которые мы обсудим во второй части книги. Довольно условное соответствие теории (рис. 2.3 а) и практики иллюстрирует динамика телефонизации Англии во 2-й половине XX века (рис. 2.3 б).

Между уравнениями (2.2 а) и (2.4) есть принципиальное различие. То и другое – обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка, они не содержат высших производных. Однако уравнение Мальтуса – *линейное* дифференциальное уравнение (все его компоненты заданы в 1-й степени), а уравнение Ферхюльста (2.4) – нелинейное: в его

правой части присутствует слагаемое $-bx^2$. Линейные дифференциальные уравнения подробно исследованы математиками, они широко применяются в разных областях науки и техники для моделирования многочисленных явлений и процессов. Но в XX веке выяснилось, что в обширном круге объектов и систем линейное приближение непригодно: для их теоретического описания нужны *нелинейные дифференциальные уравнения*. Уход от линейных систем вызвал взрывообразный рост математических результатов (нелинейных функций много!), были открыты или объяснены многие новые явления.



(а) (б)

Рисунок 2.3. (а) Логистическая функция и ее производная (внизу): этапы внедрения инноваций. (б) Динамика телефонизации Англии, вверху общее число абонентов, внизу число новых абонентов в год [2]

«Нелинейный» и вообще неклассический математический аппарат очень распространен в современной физике, включая ее междисциплинарные приложения в экономике и общественных науках. В этой книге мы не сможем ограничиться линейными уравнениями – хотя на них было основано физико-математическое образование студентов-«естественников» вплоть до последней трети XX века. Дело в том, что нелинейные уравнения как сложнее, так и много богаче линейных: они позволяют построить общее описание физических систем, где линейные системы оказываются частным случаем. Для классификации нелинейных процессов разработаны математические методы, которые позволяют анализировать уравнения, не находя их точных решений – то есть на качественном уровне. Некоторые методы будут рассмотрены в 4-й главе.

Однако математическое описание линейных систем тоже надо знать. Во-первых, таких систем тоже немало (см. законы «школьной» физики в 1-й главе). Во-вторых, для них хорошо разработаны теоретические схемы, в том числе применяемые к моделированию общества. И в-третьих (по некоторой аналогии с разложением функций в ряд Тейлора), анализ нелинейных дифференциальных уравнений часто основан на их *линеаризации*, когда нелинейные компоненты считают малыми «поправками», модифицирующими поведение линейной системы. Знакомство с элементами современного теоретического аппарата, даже по необходимости поверхностное, для «физики общества» должно быть достаточно широким.

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 2.1

2.1. Исходя из формулы (2.7), выразите произведение aC через начальное значение переменной x_0 и подставьте его в (2.6). Получите уравнения (2.8).

2.2. Найдите производные y' и y'' упрощенной логистической функции

$$y = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

(в уравнении (2.6) $a = b = C = 1$, см. рис. 2.2) и исследуйте ее график.

Литература к разделу 2.1

[1] С.А. Нефёдов, *История России. Факторный анализ*. В 2-х т. — М.: Территория будущего, 2010, 2011.
[2] E.M. Rogers, *Diffusion of innovations*, Free Press, N.Y., 1983.

2.2. Классическая механика простых систем

Одну из задач механики мы рассмотрим довольно подробно: это описание *колебаний*. Колебательные процессы распространены не только в физике (механические и электрические колебания, электромагнитные волны), но и в химии, где есть колебательные реакции, биологии (биохимические и жизненные циклы), экономике (производственные циклы) и в других науках. Математическое описание колебаний связывает их с движением по замкнутой траектории. (Действительно, суточные и годовые циклы нашей жизни вызваны, соответственно, вращением Земли и ее движением по орбите вокруг Солнца). Модели колебательного движения широко применяются в междисциплинарной физике; мы рассмотрим лишь некоторые их элементы.

Классическая, или ньютоновская механика основана на линейных дифференциальных уравнениях. Фундаментальный 2-й закон Ньютона (см. формулу (1.7) в предыдущей главе) – это уравнение

$$\mathbf{F} = m(d^2\mathbf{r}/dt^2) = m\mathbf{r}''_{tt}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{r}$ – вектор, задающий положение частицы (материальной точки) в трехмерном пространстве, $\mathbf{r}''_{tt}$ – его вторая производная по времени (вектор ускорения), m – масса частицы и $\mathbf{F}$ – векторная сумма действующих на нее сил. Если частица движется без трения в поле с потенциалом U, действующая сила $\mathbf{F}$ пропорциональна градиенту этого поля ($\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$,) (см. раздел 1.4 в главе 1).

Для «одномерного» движения $x(t)$ вдоль единственной координаты x второй закон Ньютона записывается особенно просто:

$$F = mx'' \tag{2.9 а}$$

Здесь от векторов сил и ускорений остаются только знаки «+» или «–», показывающие их направление по координате x[*].

[*] В механике производную координаты, скорости или импульса по времени часто обозначают точкой над соответствующим символом: $x' = \dot{x} = v$, $x'' = \ddot{x} = a$. В нашей книге используются «штриховые» обозначения.

Линейный осциллятор

Пусть материальная точка массой m присоединена к пружине и может перемещаться без трения вдоль координаты x по гладкой горизонтальной поверхности. Примем ее равновесное положение на ненагруженной пружине за начало координат: $x_0 = 0$. Сила упругости деформированной пружины в соответствии с законом Гука равна производной ее потенциальной энергии $U = kx^2/2$ по координате x и направлена противоположно растяжению ($x > 0$) либо сжатию ($x < 0$) (см. рис. 1.5 в гл. 1).

Дифференциальное уравнение 2-го закона Ньютона (2.9 а) в этом случае принимает вид

(2.9 б) $$mx'' = -kx$$

В классической механике его обычно записывают в такой форме:

(2.9 в) $$x'' + \omega_0{}^2 x = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – параметр, характеризующий систему. Это *уравнение гармонического осциллятора*: линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Его *частные* (то есть не единственные) решения – функции $x = \sin \omega_0 t$ и $x = \cos \omega_0 t$, что легко проверить дифференцированием. Параметр $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – это *круговая* (*циклическая*) *частота* колебаний материальной точки массой m на пружине с жесткостью k, или *собственная частота* осциллятора, ν – его «линейная» частота (число колебаний в единицу времени), T – период колебаний. Размерность циклической частоты «радиан в единицу времени» часто представляется в виде 1/с (см. ниже).

Общее решение уравнения (2.9 в) – сумма частных решений с произвольными множителями, или их *линейная комбинация:*

(2.10) $$x = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t = C \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где C_1 и C_2 – две константы интегрирования, поскольку интегрирование x'' до x производится дважды. В правой части (2.10) функции преобразованы по соотношениям тригонометрии в другую форму, где

$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ – амплитуда колебаний,
$\operatorname{tg} \varphi = -C_1/C_2$ – начальная фаза

Формула (2.10) соответствует колебательному движению материальной точки на пружине с круговой частотой ω_0 вокруг положения равновесия (рис. 2.4 а). Амплитуда C и «стартовая» фаза φ такого движения определяются начальными условиями: исходным положением пружины и начальной скоростью материальной точки.

Осциллятор, совершающий колебания в соответствии с уравнением движения (2.10), называется гармоническим. Изменениям его потенциальной и кинетической энергии отвечают уравнения

(2.10 а) $$E_к = \frac{1}{2} m (x')^2 = \frac{1}{2} m \omega_0{}^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

(2.10 б) $$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kC^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Полная механическая энергия равна максимальным значениям кинетической энергии $E_{\text{к}}^{\text{макс}}$ и потенциальной энергии $E_{\text{п}}^{\text{макс}}$ в крайних фазах цикла: соответственно при прохождении с наибольшей скоростью точки равновесия ($x = 0$, $E_{\text{п}} = 0$) и при наибольших отклонениях от нее ($x = \pm C$, $E_{\text{к}} = 0$)

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2C^2 = \frac{1}{2}kC^2 = \text{const}$$

(осциллятор – консервативная система).

В общем виде линейное дифференциальное уравнение n-го порядка решают, преобразуя его в систему n дифференциальных уравнений 1-го порядка очень простой заменой переменных. Запишем еще раз формулу (2.1)

$$f^{(n)} = F(f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, \dots, f'', f', f, x)$$

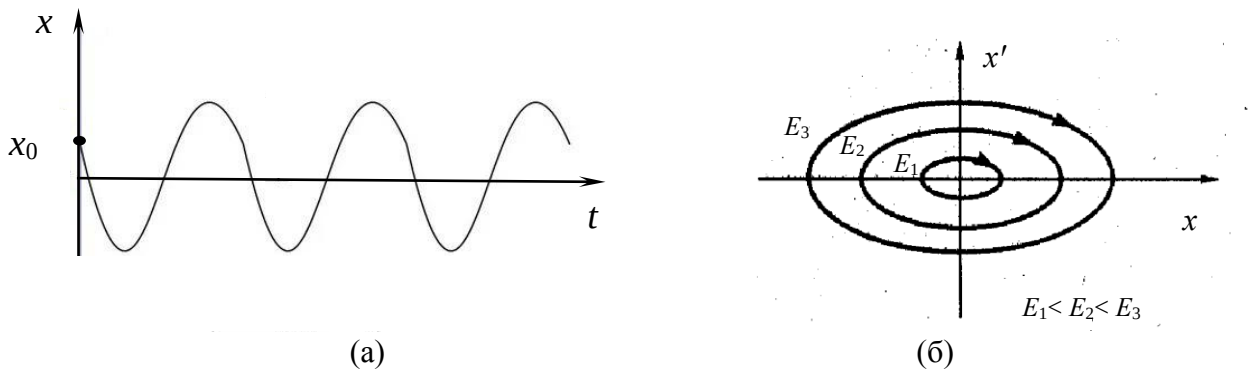
и переобозначим переменные величины в функции F:

$$\begin{aligned}
&f = y_1\\
&f' = y_1{}' = y_2\\
&f'' = y_2{}' = y_3\\
&\dots\\
&f^{(n-1)} = y_{n-1}{}' = y_n\\
&f^{(n)} = y_n{}' = F(y_n, y_{n-1}, \dots, y_2, y_1, x)
\end{aligned}$$

Пусть, например, $y'''=F(x, y, y', y'')$. Положив $y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3$, мы преобразуем это уравнение 3-го порядка в систему из трех дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned}
dy_1/dx &= y_2\\
dy_2/dx &= y_3\\
dy_3/dx &= F(x, y_1, y_2, y_3).
\end{aligned}$$

Очевидно, что решение этой системы уравнений будет включать три независимые константы интегрирования C_1, C_2 и C_3.



(а) (б)

Рисунок 2.4. Линейный гармонический осциллятор: (а) колебания, (б) фазовый портрет

Применим эту схему к дифференциальному уравнению гармонического осциллятора (2.9 в). Из линейного дифференциального уравнения 2-го порядка получим два уравнения 1-го порядка

$$dx/dt = y$$
$$dy/dt = -\omega_0{}^2 x.$$

По правилам алгебры разделим второе уравнение на первое*

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = -\omega_0{}^2 \frac{x}{y} \qquad \text{то есть} \qquad \frac{dy}{dx} = -\omega_0{}^2 \frac{x}{y}$$

(дифференциалы *dt* в числителе и в знаменателе сократились). Умножив левую и правую части на *ydx*, получим

$$ydy = -\omega_0{}^2 x dx.$$

Слева и справа в этом равенстве стоят дифференциалы $d(y^2/2) = ydy$ и $d(x^2/2) = xdx$. Мы получили решение, связывающее положение материальной точки *x* с ее скоростью $y = x'$:

(2.11) $$x^2/C + x'^2/(\omega_0{}^2 C) = 1,$$

где *C* – постоянная (однократного) интегрирования.

График взаимосвязи *x* и x' при одномерном движении называется *интегральной кривой*, или *фазовой траекторией*. Как доказывается в аналитической геометрии, функция двух переменных (2.11) относится к семейству эллипсов (рис. 2.4 б, далее см. рис. 2.19) с *каноническим уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где *a* и *b* – соответственно большая и малая полуоси эллипса.

Итак, фазовые кривые гармонического осциллятора при разных амплитудах колебаний (то есть при разной энергии *E*) представляют собой концентрические эллипсы. Их параметры (*a, b*) зависят от характеристик системы и начальных условий; они возрастают с ростом амплитуды и, соответственно, энергии колебаний. Множество всех координат и скоростей механической системы называется *фазовым пространством*, а для одномерного движения, где переменных всего две – *фазовой плоскостью*. Набор возможных траекторий в фазовом пространстве называется *фазовым портретом* системы.

Математический маятник и колебательный контур

Итак, фазовые кривые гармонического осциллятора при разных амплитудах колебаний Бесконечные гармонические колебания могут происходить во многих идеализированных системах, где возвращающая сила линейно зависит от смещения из состояния покоя и трение отсутствует. Наиболее известный пример из школьного курса физики – математический маятник, или груз массой *m*, подвешенный на невесомой нити длиной *l*.

* Если умножить или разделить левую и правую часть равенства на одно и то же число, не равное нулю, знак равенства между ними останется в силе. Это также справедливо для дифференциальных уравнений.

При его отклонении от положения равновесия на угол α возникнет возвращающая сила $F = mg \sin \alpha$. (рис. 2.5). Из задачи 1.12 в предыдущей главе следует, что скорость смещения материальной точки по окружности радиуса l

$$dx/dt = l\omega = l\alpha',$$

где α – угол отклонения маятника, ω – круговая частота [рад/с], или 2π·(1/с)*. Поэтому

$$d^2x/dt^2 = l\omega' = l\alpha''.$$

Это позволяет записать второй закон Ньютона $F=ma$ в виде

(2.12) $$-mg \sin \alpha = ml\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

где g – ускорение свободного падения 9.8 м/с^2.

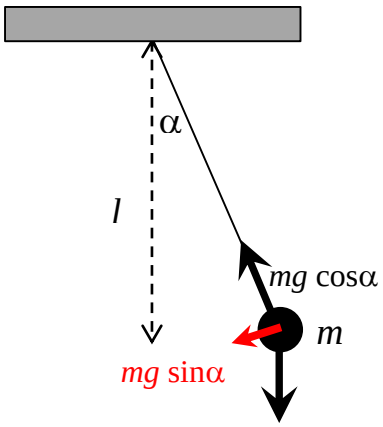


Рисунок 2.5. Математический маятник

При малых отклонениях подвеса от вертикали угол α мал, тогда $\sin \alpha \approx \alpha$. Подставив это в уравнение (2.12) и сократив массу m в левой и правой части, в пределе при строгом равенстве мы снова получим уравнение гармонических колебаний

(2.12 а) $$\alpha'' + {\omega_0}^2\alpha = 0,$$

где на этот раз переменной является угол отклонения α, а $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Другая «гармоническая» система из школьной физики – идеальный колебательный контур, который состоит из катушки с индуктивностью L, конденсатора с емкостью C и соединяющих проводов с нулевым сопротивлением (рис. 2.6). В этом контуре происходят гармонические колебания электрического тока с собственной частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

В действительности энергия осциллятора будет понемногу уменьшаться: в механических системах из-за трения, а в колебательном контуре из-за сопротивления проводов. Если в формулу (2.12 а) добавить вязкое трение маятника о воздух, пропорциональное скорости движения, мы получим уравнение

* Угол поворота в физических задачах часто измеряют в радианах. Напомним: 360º=2π радиан, то есть 1 рад.≈57.30º. Величина круговой частоты ω=2πν равна числу ν оборотов в секунду, умноженному на 2π.

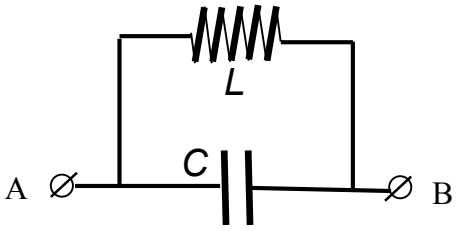
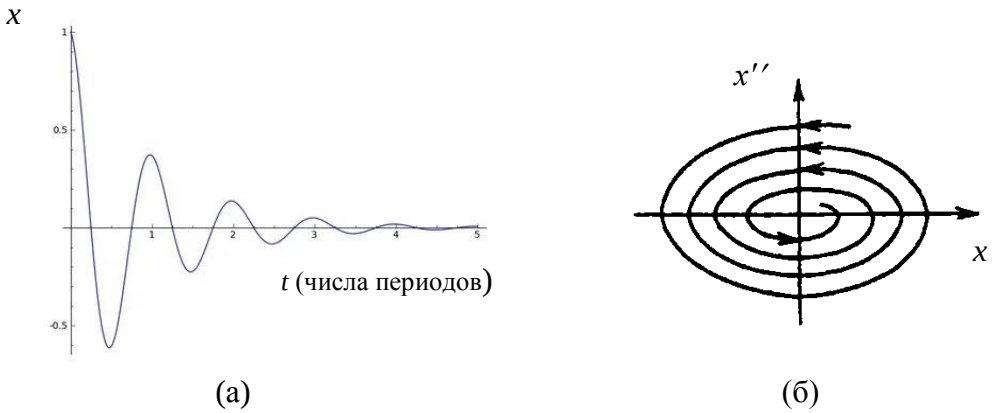


Рисунок 2.6. Колебательный контур без сопротивления

(2.13) $$\alpha'' + \beta\alpha' + \omega_0{}^2\alpha = 0,$$

где β – числовой множитель, характеризующий сопротивление среды. Его решением являются затухающие колебания, амплитуда которых экспоненциально уменьшается со временем (рис. 2.7 а). На фазовой плоскости таким колебаниям соответствует *логарифмическая спираль*, которая «наматывается» на начало координат (α=0, α′=0) (рис. 2.7 б).



(а) (б)

Рисунок 2.7. Осциллятор с вязким трением: (а) затухающие колебания, (б) фазовый портрет

Еще один знакомый нам со школы вид колебательного движения – это *вынужденные колебания*. Их можно возбудить, приводя на рис. 1.5 в 1-й главе груз, прикрепленный к пружине, в периодическое движение или подавая на точки А и В колебательного контура на рис. 2.6 переменный ток с частотой $\omega \neq \omega_0$. При этом возникнут колебания, частота которых близка к частоте вынуждающей силы. Если же варьировать вынуждающую частоту ω вблизи собственной частоты осциллятора ω_0, то возникнет *резонанс*: амплитуда колебаний системы будет возрастать, то есть энергия станет «перетекать» от возбуждающего устройства к осциллятору (рис. 2.8). Благодаря огромному количеству периодических процессов в нашей жизни (от суточных и годовых циклов земной биосферы до электрических ритмов головного мозга), теория колебаний очень широко применяется в описании природы и общества.

Физический маятник: малые отклонения от равновесия

Рассмотрим более общий случай колебательной системы: протяженное тело массой *M*, подвешенное на оси, или *физический маятник* (рис. 2.9 а). Будем считать, что трение в оси отсутствует. Такая система может совершать колебания относительно положения равновесия, а при достаточно сильном толчке – вращаться (в нашей модели без остановки) вокруг оси. Ее уравнение движения в наиболее простой форме связывает через угол

поворота α две новые характеристики: *момент силы тяжести* $M = mgr$, или произведение силы $F = mg$ на «плечо» этой силы $r = l \cdot \sin\alpha$ (где l – расстояние от оси до центра масс тела[*]), и *момент инерции тела* относительно оси вращения $I = ml^2 + I_0$, где I_0 – собственный момент инерции маятника относительно параллельной оси, проходящей через его центр масс.

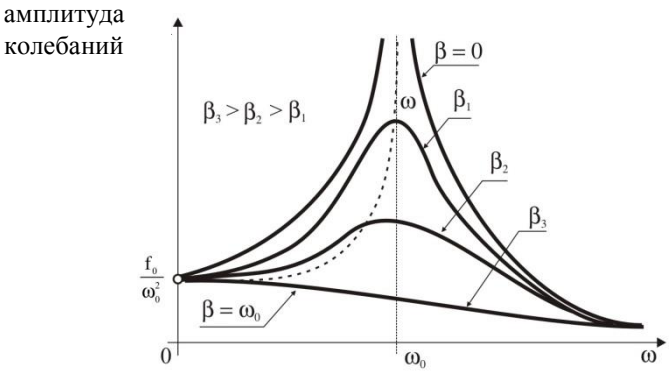


Рисунок 2.8. Резонанс: ω – частота вынуждающей силы, ω_0 – собственная частота, β – коэффициент трения

(2.14) $$M = mgr = -mgl\sin\alpha = I\,\alpha''$$

(знак «минус» показывает, что момент силы M действует против увеличения угла $\Delta\alpha$, возвращая маятник к положению равновесия). Для математического маятника $I = I_0 = ml^2$, где l – длина подвеса. В случае физического маятника момент инерции I_0 определяется формой тела и вычисляется интегрированием.

При малых отклонениях от положений равновесия $\sin\alpha \approx \alpha$. Это уже знакомый нам случай математического маятника

(2.14 а) $$\alpha'' + \kappa^2\alpha = 0,$$

который совершает гармонические колебания вокруг положения устойчивого равновесия $\alpha = 0$ (в него система придет, если «включить» трение). Собственная частота маятника

$$\omega_0{}^2 = \kappa^2 = Mgl/I.$$

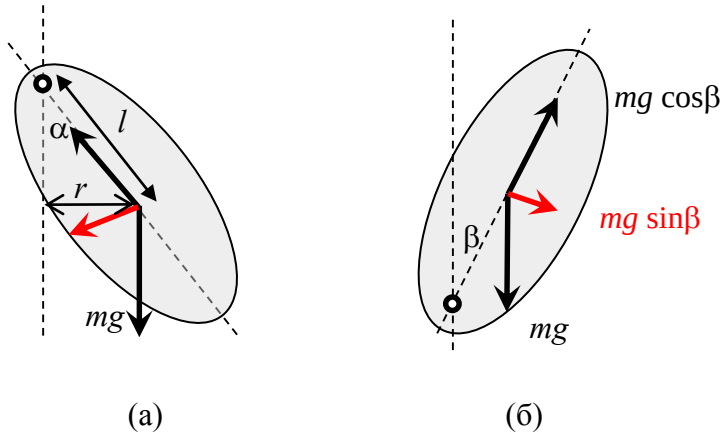
Если повернуть тело вокруг оси на угол $180^o = \pi$ радиан, физический маятник окажется в состоянии неустойчивого равновесия. В его точном положении сила тяжести компенсируется силой реакции оси, однако сколь угодно малое отклонение от угла π создаст равнодействующую силу, направленную на увеличение отклонения (рис. 2.9 б). При небольших углах отклонения β после некоторых выкладок получится дифференциальное уравнение

(2.15) $$\beta'' - \kappa^2\beta = 0,$$

[*] Наша задача – анализ физических систем на качественном уровне, поэтому некоторые новые термины (особенно – интуитивно понятные: центр масс тела в обиходе называется «центром тяжести») будут объясняться там, где это необходимо для точности изложения. Одинаковые обозначения момента инерции и электрического тока (см. главу 1) – неизбежное следствие ограниченности набора латинских и греческих букв; к нему надо быть готовым и дальше.

где снова $\kappa^2 = Mgl/I$. По схеме, использованной нами при выводе уравнения фазовой кривой (2.11), мы получим функцию

(2.16) $$\beta^2/C^2 - \beta'^2/\kappa^2 C^2 = 1.$$



(а) (б)

Рисунок 2.9. Физический маятник: (а) возврат к устойчивому равновесию, (б) выход из неустойчивого равновесия

Этой функции отвечает кривая 2-го порядка – гипербола, которая будет показана далее на рис. 2.20. Ее каноническое уравнение (см. следующий раздел и Приложение П3)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фазовые траектории движения, заданного дифференциальным уравнением (2.15) – семейство гипербол. В идеализированной системе без трения и внешнего толчка маятник совершает движение из «верхнего» неустойчивого состояния покоя на рис. 2.9 б с возвращением в это же состояние за бесконечно долгое время.

Физический маятник: общий случай

Биссектриса – это крыса,
которая бегает по углам и делит угол пополам
школьная мнемоническая шутка

Мы определили фазовые траектории, которыми задана связь угловой координаты и скорости физического маятника при его отклонениях, соответственно, от устойчивого и неустойчивого равновесия. Эти формулы получены только для малых угловых отклонений, их переменные не совпадают: $\beta = \alpha + \pi$. Кроме того, фазовые траектории – периодические функции (поворот на угол 2π приведет маятник в исходное состояние). Если мы хотим построить полный набор фазовых траекторий на плоскости (α, α'), или фазовый портрет этой системы, необходимо решить уравнение (2.12) в общем виде на отрезке $[-\pi, \pi]$. Правда, мы уже знаем вид траекторий в небольших окрестностях $\alpha = 0$ и $\alpha = \pm\pi$.

Уравнение (2.12) приводится к виду

(2.17) $$\alpha'' + \omega_0{}^2 \sin\alpha = 0,$$

где $\omega_0^2 = mgr/I = M/I$, $M = mgr$ – момент силы тяжести относительно оси маятника, $I = ml^2 + I_0$ – момент инерции маятника относительно оси.. В этом случае собственный момент инерции I_0 маятника как тела, занимающего область V трехмерного пространства, задается интегралом

$$I_0 = \iiint_V \rho\, r^2 dV,$$

где ρ – плотность материала, из которого сделан маятник, r – расстояние от его центра масс до элементарного объема $dV = dxdydz$.

Уравнение (2.17) соответствует уравнению (1.39) из главы 1 с добавлением множителя ω_0^2 перед синусом. Это частный случай уравнения *ангармонического осциллятора* $x''+f(x)=0$. Решения (2.17) нельзя выразить через элементарные функции алгебры и тригонометрии, хотя они хорошо исследованы, их значения сведены в таблицы. На качественном уровне здесь можно использовать тот же метод построения интегральных кривых, который применялся выше в анализе малых колебаний. Введем новую переменную $\varphi = \alpha'$ и преобразуем (2.17) в систему двух дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} d\alpha/dt &= \varphi \\ d\varphi/dt &= -\omega^2 \sin\alpha\,. \end{aligned}$$

Разделив второе уравнение на первое (см. уравнения (2.9 в) и (2.11)), получим

$$\begin{aligned} & d\varphi/d\alpha = -(\omega^2/\varphi)\sin\alpha, \text{ или} \\ & \varphi d\varphi = -(\omega^2)\sin\alpha \cdot d\alpha, \quad \text{то есть} \\ & \varphi^2 = \omega^2\cos\alpha + C_1, \end{aligned} \qquad (2.17\text{ а})$$

где C_1 – первая константа интегрирования.

Уравнение

$$\varphi = {}^{d\alpha}/_{dt} = \sqrt{\omega^2\cos\alpha + C_1},$$

к которому преобразуется (2.17 а), не имеет решений в виде конечного числа аналитических функций – но эти решения найдены численно. Фазовый портрет физического осциллятора при произвольных углах отклонения α изображен на рис. 2.10. Замкнутые кривые отвечают колебательному, или ограниченному (*финитному*) движению, незамкнутые – *инфинитному*: тело маятника вращается на оси без трения. При инфинитном движении переменная $\alpha(t)$ неограниченно возрастает или уменьшается с течением времени. Вблизи $\alpha = 0$ и $\alpha = \pm\pi$ фазовые траектории близки, соответственно, к эллипсам и гиперболам. Области финитного и инфинитного движения разделяет *сепаратриса* (жирная линия на рисунке). В окрестностях точек $\alpha = \pm\pi n$ ее ветви пересекаются, приближаясь к асимптотам гипербол.

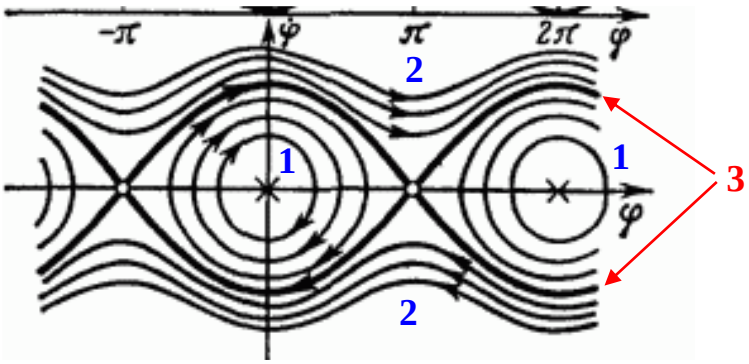


Рисунок 2.10. Фазовый портрет физического маятника: 1 – финитное движение, 2 – инфинитное движение, 3 – сепаратриса

2.2.1. Основные положения классической механики

Как уже отмечалось в предыдущей главе (разд. 1.1), механика – наиболее строгий и формализованный раздел физики, очень близкий к «чистой» математике. Но соотношения механики – не просто математические абстракции. В них отражены фундаментальные закономерности материального мира, которые проявляются во всех науках, в том числе при описании социальных систем методами междисциплинарной физики. Для того, чтобы лучше понять содержание физических моделей общества, соберем вместе основные соотношения классической механики.

Отправной точкой классической механики служат три закона Ньютона, которые мы вспоминали в 1-й главе. Состояние механической системы в момент времени t задают *функции состояния*, а его изменение во времени отражают дифференциальные *уравнения состояния*, или *уравнения движения*. Этот подход распространяется на все физические и квазифизические модели Природы (включая Общество как ее часть). В следующих главах мы увидим, что разнообразные уравнения состояния используются в описании транспортных потоков, в экономике, в социологии, в военных науках – вплоть до моделей *математической истории*.

В качестве функции состояния удобно выбрать энергию. Но в механических системах есть два вида энергии: потенциальная $E_{\text{п}}$ и кинетическая $E_{\text{к}}$. В замкнутых системах без трения сохраняется сумма $E_{\text{п}} + E_{\text{к}}$, а при наличии тепловых или иных потерь Q – сумма $E_{\text{п}} + E_{\text{к}} + Q$ (закон сохранения энергии). Интуитивно можно ожидать, что из двух разных видов энергии можно вывести две функции состояния механической системы.

Функции состояния замкнутых, то есть не получающих энергию извне и не теряющих свою энергию механических систем действительно составляются из $E_{\text{к}}$ и $E_{\text{п}}$ двумя способами:

(2.18 а) $H = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$ – *функция Гамильтона* (*«гамильтониан»*)

(2.18 б) $L = E_{\text{к}} - E_{\text{п}}$ – *функция Лагранжа* (*«лагранжиан»*)

На функциях Лагранжа и Гамильтона основаны две формы уравнений движения. В физике на них построено описание очень широкого класса явлений – и не только механических. Переменные (т.е. аргументы) в этих функциях называются *обобщенными*

координатами. В классической механике их обозначают $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$; общее число n обобщенных координат называется *числом степеней свободы* системы. Мы не будем углубляться в строгие и довольно сложные математические соотношения механики, а рассмотрим их практический аспект: зачем нужны функции (2.18 а, б), т.е. как в них отражаются глубинные свойства механических систем.

Функция Гамильтона (2.18 а) нам уже встречалась: это *полная энергия* механической системы без трения. Для таких систем

$$H = \text{const}$$

– одна из форм записи закона сохранения энергии. Физические системы, в которых функция Гамильтона неизменна, называются *консервативными*. Такие системы, где механическая энергия может уменьшаться, переходя в другие виды энергии (например, тепловую – см. уравнение (2.13) осциллятора с трением), называются *диссипативными системами*. Примеры диссипативных систем тоже приводились в 1-й главе: это нагреваемый объем идеального газа, ток в электрической цепи или, ближе к «социальной» тематике, транспортный поток, который поддерживается работой двигателей в автомобилях и остановится, если убрать из них бензин либо аккумуляторы. В консервативных системах, помимо энергии, сохраняются и другие физические величины. Мы рассмотрим этот вопрос чуть ниже – теперь же перейдем к функции Лагранжа (2.18 б).

Пусть материальная точка с массой m и положительным зарядом $q+$ (назовем ее *частицей*) запущена со скоростью $\mathbf{v_0}$ перпендикулярно неподвижной, жестко закрепленной и тоже положительно заряженной пластинке. Наши знания физики позволяют заключить, что, по мере движения к пластинке, скорость частицы будет уменьшаться из-за электростатического отталкивания одноименных зарядов (рис. 2.11). Если первоначальная скорость $\mathbf{v_0}$ (положение А на рис. 2.11) не очень велика, в какой-то момент времени t частица остановится, т.е. ее скорость обратится в 0 (положение В на рис. 2.11) – а затем она станет перемещаться в обратном направлении с возрастающей скоростью. В отсутствии трения о воздух и притяжения к Земле (например, если всё вывести в космос) система консервативна: через интервал времени $2t$ частица вернется в положение А, где ее скорость $-\mathbf{v_0}$ по абсолютной величине будет равна v_0 и направлена в противоположную сторону.

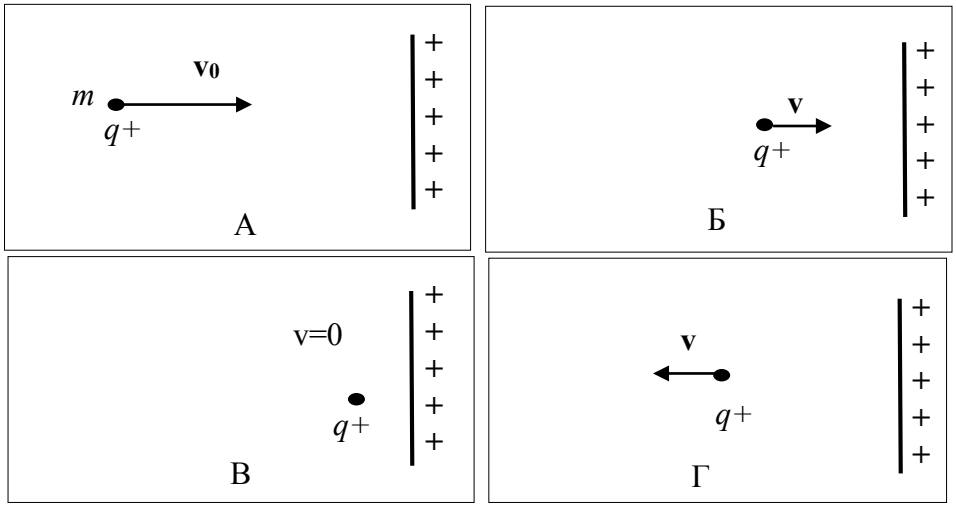


Рисунок 2.11. Движение заряженной частицы в поле сил отталкивания

Предположим, что в начальном положении расстояние от частицы до пластинки так велико, что электростатическим отталкиванием можно пренебречь. Тогда полная энергия системы в точке А будет равна кинетической энергии частицы $E_к^{(A)} = mv^2/2$. В точке В, где частица на мгновение останавливается, вся ее кинетическая энергия перейдет в потенциальную энергию $E_п$ (система консервативна!). И эта потенциальная энергия будет положительной: нахождение частицы в поле одноименно заряженной пластинки «энергетически невыгодно», поле затем вытолкнет частицу в обратном направлении. Если исходная кинетическая энергия частицы равна 1 Дж, в точке В, где $E_к^{(B)} = 0$, такое же значение примет ее потенциальная энергия в электростатическом поле пластинки. Определим значения гамильтониана и лагранжиана в точках А и В:

точка А: $H = E_к^{(A)} + E_п^{(A)} = 1 + 0 = 1$ Дж,

$L = E_к^{(A)} - E_п^{(A)} = 1 - 0 = 1$ Дж.

точка В: $H = E_к^{(B)} + E_п^{(B)} = 1 + 0 = 1$ Дж ,

$L = E_к^{(A)} - E_п^{(A)} = 0 - 1 = -1$ Дж.

Таким образом, функция Гамильтона при движении частицы в поле пластинки остается постоянной, т.е. сохраняется. Это неудивительно: H – полная механическая энергия системы. Однако значение функция Лагранжа при движении во внешнем поле *не сохраняется*. Тогда зачем она нужна?

Принцип наименьшего действия

Дифференциальные уравнения движения в классической механике можно записать как через функцию Лагранжа, так и через функцию Гамильтона. Мы не станем этим заниматься, отсылая самых трудолюбивых читателей к учебникам – например, к 1-му тому «Курса теоретической физики» Ландау и Лифшица[3]. (Надо предупредить: потребуются знания математического анализа и дифференциальных уравнений в объеме двух первых курсов для студентов естественнонаучных специальностей). Обсудим лишь самое «краеугольное» применение лагранжиана, которое используется во многих физических моделях, включая модели социальных систем: *принцип наименьшего действия***.**

Пусть материальная точка с массой *m,* или частица, не имеющая электрического заряда, движется со скоростью **v** и сталкивается с абсолютно упругой гладкой стеной. (Хороший прототип такой модели – столкновение маленького стального шарика с гладким массивным стальным листом в невесомости). На частицу не действуют внешние силы – значит, по 1-му закону Ньютона, до столкновения и после него она перемещается прямолинейно и равномерно. Ее траектория (прямая линия) направлена под углом к поверхности стены. Из школьного курса механики можно вспомнить, что в этом случае угол падения частицы на стену равен углу отражения от нее (рис. 2.12). Зададим нетривиальный вопрос: а почему это так?

Рассмотрим два пути перемещения частицы из точки А в точку В: путь ACB с одинаковыми углами φ падения и отражения, а также альтернативный путь ADB с разными углами падения и отражения $\alpha \neq \beta$. Модуль скорости частицы на всех участках траектории,

кроме точки отражения от стенки, равен v (закон сохранения энергии!). Мы знаем, что реализуется первый маршрут – а чем он «лучше» второго?

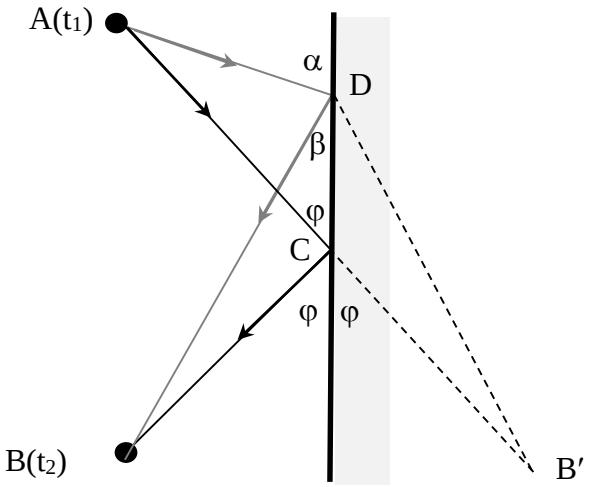


Рисунок 2.12. К иллюстрации принципа наименьшего действия

Ответ очень прост: путь ACB с одинаковыми углами падения и отражения *короче* любого альтернативного пути. Чтобы в этом убедиться, отразим отрезок CB на рисунке 2.12 в плоскости стенки. Из планиметрии следует, что полученный отрезок CB′ служит продолжением AC (противолежащие углы в точке пересечения двух прямых равны между собой). Таким образом, отрезок AB′ равен длине пути ACB и короче любой ломаной линии, соединяющей его концы – в данном случае линии ADB′, которой соответствует альтернативный путь ADB. Итак, равным углам падения и отражения отвечает самый короткий путь. Это справедливо и для геометрической оптики, так как свет – поток материальных частиц: *фотонов*.

Естественно возникающий вопрос «ну и что?» оказывается очень глубоким. В равенстве углов падения и отражения при упругом соударении шарика со стенкой проявляется особая характеристика механической системы, связанная с ее траекторией. Она не менее фундаментальна, чем энергия системы, но хуже поддается прямым измерениям. Эта характеристика, называемая *действием S*, выражается через функцию Лагранжа

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_C L(\Delta x_i)\,\Delta t \qquad (2.19)$$

где интегрирование выполняется по траектории между положениями шарика в моменты времени t_1 и t_2.

Символ $\sum_C$ в формуле (2.19) соответствует сумме по траектории C, разбитой на малые «кусочки» Δx_i. На каждом участке функция Лагранжа принимает средние значения $L(\Delta x_i)$ в малый промежуток времени Δt_i. Формуле (2.19) соответствует *интеграл по траектории движения* между ее начальной (t_1) и конечной (t_2) точками. Как и все интегралы, он определяется через предельный переход, но Δx_i в (2.19) – не приращение аргумента функции, а малый участок кривой. В соответствии с формулой (2.19) действие имеет размерность [энергия×время] – в системе СИ [Дж·с].

Принцип наименьшего действия выражается с виду простой и очень важной формулой

(2.20) $$\delta S = 0,$$

которая означает, что из всех возможных вариантов движения в механической системе реализуется такая траектория, на которой действие (2.19) *минимально*. Формулы (2.19) и (2.20). нередко объединяют:

(2.20 а) $$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0.$$

Здесь необходимы пояснения. Мы знаем, что в минимуме либо максимуме (*экстремуме*) функции одной переменной $f(x_0)$ ее производная обращается в ноль: $df(x_0)/dx = 0$. Так как dx – бесконечно малое, но в общем случае *не нулевое* приращение аргумента функции, условие экстремума функции $f(x)$ можно переписать в дифференциальном виде

$$df|_{x=x_0} = 0$$

(в точке экстремума x_0 приращение функции при бесконечно малом изменении ее аргумента равно нулю). При варьировании траекторий аргументу действия S соответствует форма кривой, а дифференциалу аргумента – ее бесконечно малые изменения. Такие изменения называются *вариациями* (их обозначают буквой δ), а соответствующий раздел математики – *вариационным исчислением*. Таким образом, формула (2.20) выражает минимум *функционала* действия в дифференциальной форме. Термин «функционал» вместо «функция» используется потому, что разным траекториям отвечают разные функции Лагранжа.

Интегралы по траекториям, или *криволинейные интегралы* – довольно сложный раздел математического анализа, который изучают студенты не всех естественнонаучных специальностей. Вариационное исчисление осваивают только математики и физики. Тем не менее, ***вариационный принцип***, выражаемый формулой (2.20 а), широко распространен в физике, включая ее междисциплинарные приложения.

Для проверки справедливости формулы (2.20) в случае шарика, упруго отражающегося от стенки, криволинейные интегралы не нужны. На частицу, за исключением момента соударения со стенкой, не действуют внешние поля: лагранжиан (2.18 б) в данном случае равен ее кинетической энергии $mv^2/2$ и постоянен (система консервативна, энергия сохраняется). Тогда вместо интеграла (2.19) действие равно

$$S = L \cdot \Delta t = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{l_{AB}}{v} = \frac{1}{2} mv \cdot l_{AB},$$

где l_{AB} – длина пути между точками A и B. Как мы видели, этот путь минимален (ACB), если угол падения на стенку равен углу отражения. Тогда и время перемещения из A в B на пути ACB будет меньше, чем на любом альтернативном пути ADB. Таким образом, путь ACB отвечает минимуму действия S.

Принцип наименьшего действия, вполне понятный на бытовом уровне, имеет столь общий характер, что даже у физиков сложилось несколько мистическое отношение к нему.

Во многих учебниках можно найти фразу «в каждой точке траектории Природа выбирает смещение, отвечающее наименьшему действию». На деле все много проще: траекторию материальной точки задают ее масса, скорость и действующие силы – сами же эти силы определяются фундаментальными физическими законами, в число которых входит принцип наименьшего действия.

Законы сохранения в механике

Закон сохранения энергии справедлив для любых физических систем – как консервативных, так и диссипативных. В консервативных системах сохраняется механическая энергия, то есть функция Гамильтона (2.18 а). ***Закон сохранения массы*** в химической реакции, тоже известный нам со школы – еще один вид материального баланса: он означает, что число атомов каждого элемента в ходе реакции не изменяется. В предыдущей главе упоминались другие уравнения материального баланса. Так, по 1-му закону Кирхгофа (раздел 1.3) сумма токов, входящих в узел электрической цепи, равна сумме токов, выходящих из узла (число носителей заряда постоянно – они не возникают и не уничтожаются), а в задаче о светофоре не возникают и не уничтожаются машины в транспортном потоке.

В консервативных механических системах сохраняется еще одна фундаментальная физическая величина: *импульс*, до середины XX века называвшийся в учебной литературе «количеством движения». Механический импульс материальной точки, положение которой задано вектором **r**, равен произведению ее массы на скорость

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\, d\mathbf{r}/dt.$$

Таким образом, импульс в трехмерном пространстве – векторная величина с компонентами (p_x, p_y, p_z). Во втором законе Ньютона силу, действующую на материальную точку, можно выразить как через произведение массы на ускорение (формула (2.9)), так и через производную импульса:

$$\mathbf{F} = m \cdot d^2\mathbf{r}/dt^2 = d\mathbf{p}/dt$$

В классической механике переменными в уравнениях состояния систем являются не только упомянутые выше обобщенные координаты, но и *обобщенные импульсы* (p_1, p_2, …, p_n). Это упрощает формулы в тех случаях, когда массы частей системы непостоянны (например, при движении со скоростью, близкой к скорости света) – однако дифференциальные уравнения классической механики здесь обсуждаться не будут.

Для замкнутой инерциальной системе, где не действуют внешние силы или же их сумма равна нулю, справедлив ***закон сохранения импульса***: суммарный импульс системы не изменяется во времени.

(2.21) $$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i = const, \qquad \text{или} \qquad d\mathbf{P}/dt = 0,$$

где $\{\mathbf{p}_i\}$ – импульсы всех составных частей системы, **P** – их векторная сумма.

Упругое столкновение частиц

Закон сохранения импульса позволяет описать состояние замкнутой системы после некоторого события внутри нее даже в тех случаях, когда механизм самого события не рассматривается или неизвестен. Примером может служить столкновение двух частиц – например, двух металлических шариков на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 2.13). При упругом столкновении без потерь кинетической энергии скорости частиц изменяются в соответствии с их массами m_1 и m_2. Если обозначить векторы скорости частиц до столкновения $\mathbf{v_1}$ и $\mathbf{v_2}$, а после столкновения $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$, по закону сохранения импульса

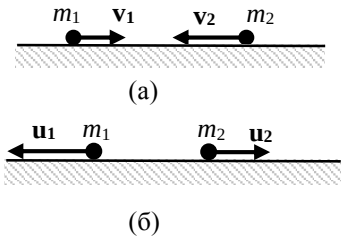


Рисунок 2.13. Две частицы (а) до упругого столкновения, (б) после столкновения

(2.22) $$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 \text{ , или}$$
$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_2u_2 - m_1u_1$$

(суммы векторов противоположно направленных скоростей $\mathbf{v_1}$ и $\mathbf{v_2}$, а также $\mathbf{u_1}$ и $\mathbf{u_2}$ на рис. 2.13, превратятся в разности модулей импульсов; направления векторов $\mathbf{v_1}$ и $\mathbf{u_2}$ совпадают). По закону сохранения энергии суммарная кинетическая энергия двух частиц до и после столкновения одинакова:

(2.23) $$\frac{m_1{v_1}^2}{2} + \frac{m_2{v_2}^2}{2} = \frac{m_1{u_1}^2}{2} + \frac{m_2{u_2}^2}{2}$$

Умножим правую и левую части уравнения (2.23) на 2, перегруппируем члены в левой и правой частях уравнений (2.22) и (2.23), вынесем за скобки общие множители. Получим систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными u_1 и u_2

(2.22 а) $$m_1(v_1 + u_1) = m_2(v_2 + u_2)$$
(2.23 а) $$m_1({v_1}^2 - {u_1}^2) = m_2({u_2}^2 - {v_2}^2)$$

Для нее легко найти решение. Зная формулу разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, разделим уравнение (2.23 а) на (2.22 а). Получим

$$v_1 - u_1 = u_2 - v_2.$$

Умножая левую и правую части этого равенства на m_1 и складывая его с (2.22 а), получим решение (2.24 б). Если то же самое равенство умножить на m_2 и *вычесть* его из (2.22 а), получим решение (2.24 а). Тем читателям, которые ранее не проходили курс общей физики, рекомендуется выполнить это полезное упражнение.

(2.24 а) $$u_1 = \frac{(m_2 - m_1)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$
(2.24 б) $$u_2 = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Формулы (2.24 а, б) задают значения скоростей после упругого столкновения двух частиц с разными массами. Если у полученной скорости u_1 отрицательный знак – она направлена противоположно вектору $\mathbf{u_1}$ на рис. 2.13 (т.е. слева направо); то же относится к скорости u_2. В частности, при большой массе или большой скорости первой частицы суммарный импульс двух частиц на рис. 2.13 направлен слева направо, и первая частица после столкновения будет перемещаться в этом же направлении с изменившейся скоростью. Тогда из формулы (2.24 а) следует $u_1 < 0$. Если же вторая частица неподвижна ($v_2 = 0$) и ее масса $m_2 = M$ очень велика ($M >> m_1$), легкая частица отразится от тяжелой и почти не приведет ее в движение. Вектор скорости легкой

частицы $u_1 \approx v_1 > 0$ после столкновения направлен так, как на рис. 2.13 б, то есть ее скорость изменит направление на противоположное.

В том случае, когда массы частиц одинаковы ($m_1 = m_2 = m$), решение (2.24 а, б) упрощается

(2.24 в) $$u_1 = v_2,\ u_2 = v_1$$

(частицы при ударе «обмениваются» своими скоростями). В частности, если вначале вторая частица неподвижна ($v_2 = 0$), после столкновения остановится первая частица, а вторая придет в движение со скоростью v_1.

Законом сохранения импульса объясняется равенство углов падения и отражения при упругом соударении частицы с неподвижной твердой стеной (рис. 2.14). В этом случае вектор скорости частицы $\mathbf{v_1}$ надо разложить на два компонента, направленные перпендикулярно стене ($\mathbf{v}_\perp$) и параллельно ее поверхности ($\mathbf{v}_{||}$)

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_{||}$$

(на рис. 2.14 эти векторы изображены синим цветом). Далее надо записать закон сохранения импульса частицы по обоим направлениям. До и после удара частицы о стену $m\mathbf{v}_{||} = const$, т.е. «параллельная» составляющая скорости сохраняется. В перпендикулярном направлении стену можно считать неподвижной частицей с бесконечно большой массой: она останется неподвижной, а «перпендикулярная» составляющая скорости частицы после удара изменит направление на противоположное: $v_\perp' = -v_\perp$ (здесь штрихом обозначена не производная, а компонент скорости частицы после столкновения). В результате сложения векторов

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{v}_\perp' + \mathbf{v}_{||}$$

направление движения частицы после столкновения образует со стеной тот же угол φ, что и линия ее движения к стене: *угол падения равен углу отражения*.

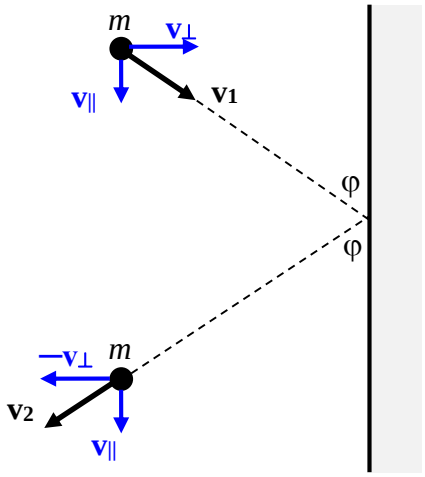


Рисунок 2.14. Упругое отражение частицы от стены

Сохранение энергии и импульса в процессе столкновений молекул газа друг с другом и со стенками сосуда позволяют обосновать газовые законы в рамках молекулярно-

кинетической теории (см. следующий раздел). Расчеты параметров макроскопической системы с усреднением динамики составляющих ее частиц применяются во многих дисциплинах – включая экономику и общественные науки, где в роли частиц выступают агенты. Эти приложения междисциплинарной физики будут обсуждаться во второй части.

Еще один фундаментальный закон сохранения объясняет строение Солнечной системы, действие навигационных устройств, ледниковые периоды в истории Земли и многое другое – поэтому его следует упомянуть даже для общей эрудиции. Это ***закон сохранения момента импульса***, или, в старых учебниках, «момента количества движения». Данный закон проявляется при криволинейном движении тела относительно неподвижного центра – в частности, при вращении материальной точки, имеющей массу m, по окружности радиуса r с угловой скоростью $\omega = d\varphi/dt$ без учета трения (см. задачу 1.12 в главе 1).

(2.25) $$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega} = \text{const}$$

При равномерном движении по окружности угловую скорость изображают стрелкой на оси вращения, равной по длине $d\varphi/dt$ и направленной как ввинчивающийся штопор (*правило буравчика*, Рис. 2.15). Так же направлена в пространстве стрелка «псевдовектора» (этот термин мы поясним ниже), соответствующего моменту импульса **L**.

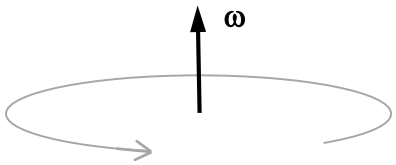


Рисунок 2.15. Псевдовектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = {}^{d\boldsymbol{\varphi}}/_{\boldsymbol{dt}}$

При произвольном движении частицы в центральном поле, где расстояние r и угловая скорость ω могут быть переменными, сохранение момента импульса остается в силе. Момент импульса не изменяется как по модулю, так и по направлению в пространстве. Поэтому орбита космического тела находится в плоскости, перпендикулярной **L**. В частности, траектории планет, астероидов и комет внутри Солнечной системы лежат в одной *плоскости эклиптики* и имеют форму эллипсов (см. ниже). В одном из фокусов эллипса находится притягивающий центр: Солнце для планет, Земля для Луны и искусственных спутников. Космическое тело, превысившее *вторую космическую* скорость $d\mathbf{r}/dt$ относительно притягивающего центра (для гравитационного поля Земли равную 11.2 км/с), покидает его по незамкнутой траектории: параболе или гиперболе, в фокусе которой находится центр (рис. 2.16).

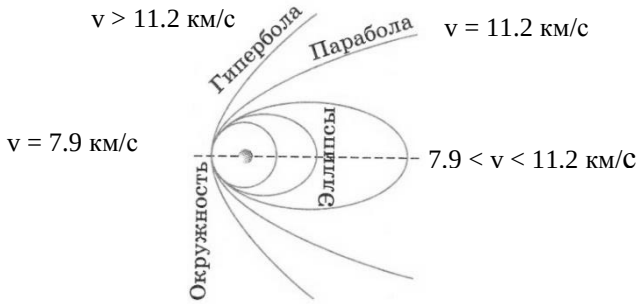


Рисунок 2.16. Первая и вторая космические скорости

Момент импульса **L** материальной точки, как и угловую скорость **ω**, в математике называют *псевдовектором*, или *аксиальным вектором*. Он равен *векторному произведению*

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p},$$

где **r** – вектор положения точки относительно центра, **p** – вектор ее импульса (рис. 2.17). По определению векторного произведения,

$$L = r \cdot p \cdot \sin\varphi,$$

где φ – угол между векторами **r** и **p**. Смысл этих определений мы поясним в следующей главе. Пока отметим, что аксиальный вектор **L** = (L_x, L_y, L_z) в пространстве, как обычный (*полярный*) вектор, имеет три компонента и перпендикулярен плоскости векторов **r** и **p**.

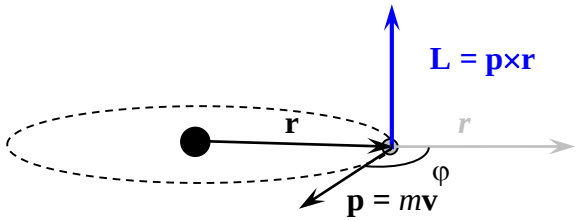


Рисунок 2.17. Момент количества движения как векторное произведение L = p×r

Другой пример сохранения момента импульса (2.25) – движение массивного вращающегося тела (*гироскопа*): например, детского волчка (рис. 2.18). Устойчивость наклонного вращающегося волчка с единственной точкой опоры объясняется сохранением аксиального вектора **L**, направленного по оси вращения. На инерции оси волчка основана конструкция *гирокомпасов*. При действии сил земного притяжения на наклонный волчок возникает довольно сложная динамика: медленные повороты оси (*прецессия*) и ее небольшие колебания (*нутация*). Мы не будем рассматривать эти важные механические явления, отсылая читателя к руководствам по классической механике. Тем не менее, про их существование надо знать: например, изменения палеоклимата Земли, которые будут затронуты в 9-й главе, вызваны именно прецессией и нутацией оси вращения нашей планеты.

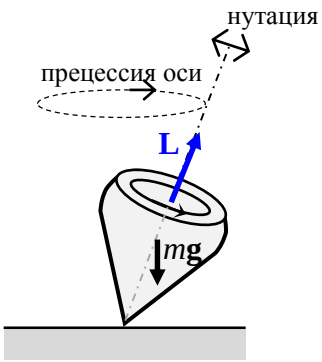


Рисунок 2.18. Гироскоп (схема)

2.2.2. Математическое отступление: линии и поверхности 2-го порядка

Представим краткую сводку информации о кривых и поверхностях 2-го порядка, которые уже использовались в обсуждении механических систем. Они особенно важны для «нелинейной» физики и ее междисциплинарных аспектов как первые ненулевые вклады в разложение произвольной функции в ряд вблизи экстремума, т.е. минимума или максимума (формулы (1.35) и (1.35 а) в главе 1). Такие разложения отражают особенности нелинейных систем – поэтому квадратичные функции широко применяются при анализе решений дифференциальных уравнений, который будет обсуждаться в гл. 4.

Все кривые 2-го порядка в декартовой системе координат (X, Y) на плоскости задает общее алгебраическое соотношение: *квадратичная форма*

(2.26) $$A_{11}X^2 + 2A_{12}XY + A_{22}Y^2 + 2A_{13}X + 2A_{23}Y + A_{33} = 0,$$

где A_{ij} – произвольные числа, а множители 2 следуют из формального равенства $A_{ij} = A_{ji} \rightarrow A_{ij} + A_{ji} = 2A_{ij}$ (где $i, j = 1, 2, 3$). Частный случай квадратичной формы – знакомое всем *квадратное уравнение*

(2.26 а) $$ax^2 + bx + c = 0$$

Как уже отмечалось, в латинском и греческом алфавитах букв не так много, а другие в математике почти не используются – поэтому множители и переменные в (2.26) обозначены заглавными буквами. Если множители A_{11}, A_{12} и A_{22} равны нулю, (2.26) переходит в уравнение прямой линии $Y = pX + q$.

Поворотом системы координат $(X, Y) \rightarrow (x, y)$, «технику» которого мы поясним в разделе 3.1 главы 3, квадратичную форму (2.26) можно преобразовать к *каноническому виду* одной из трех кривых 2-го порядка: эллипса, гиперболы и параболы.

Эллипс

(2.27) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Эллипс – замкнутая кривая. Для всех точек этой кривой сумма расстояний до двух заданных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ на оси Ox, которые называются *фокусами* эллипса, одинакова (рис. 2.19).

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Длина отрезка F_1F_2, равная $2c$ ($< 2a$), называется *фокусным расстоянием*. Отрезок оси x длиной a называется *большой полуосью* эллипса, отрезок оси y длиной $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ – *малой полуосью*.

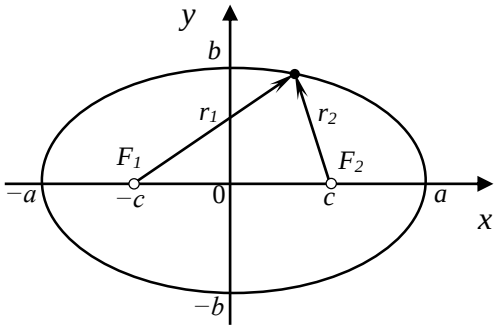


Рисунок 2.19. Эллипс. $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$

В случае $a = b = R$ формула (2.24) переходит в уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$, которое мы уже видели в 1-й главе.

Гипербола

(2.28) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гипербола – незамкнутая кривая, которая состоит из двух одинаковых бесконечных ветвей (Рис. 2.20 а). У всех точек гиперболы разность расстояний до двух заданных точек $F_1(–c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ (*фокусов*) одинакова по абсолютной величине

$$|r_1 - r_2| = 2a < 2c.$$

Отрезок длиной $2a$ между вершинами гиперболы A_1 и A_2 на оси x называется *действительной осью*, отрезок длиной $2b$ на оси y – *мнимой осью*. Величины a и b соответственно называются действительной полуосью и мнимой полуосью.

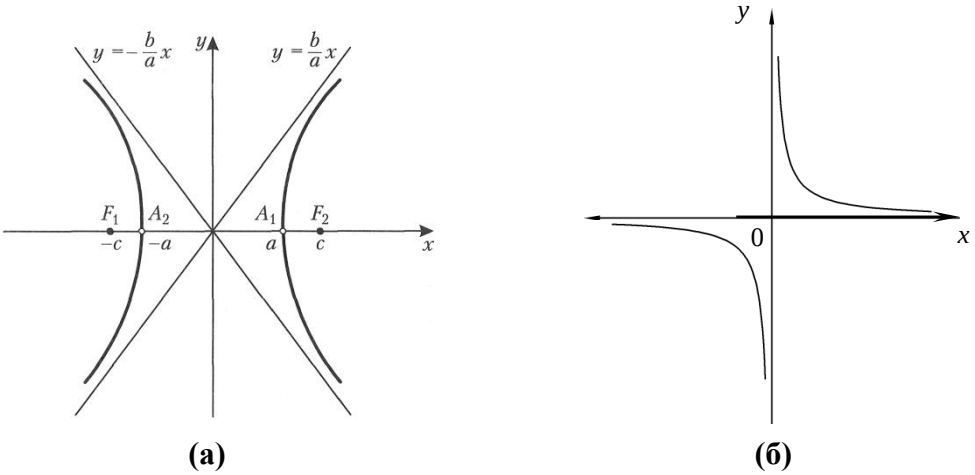


Рисунок 2.20. Графики гиперболы: (а) $x^2/a^2 – y^2/b^2 = 1$, (б) $xy = a^2/2$

При $x \to \pm\infty$ ветви гиперболы асимптотически приближаются к двум прямым линиям $y = \pm(b/a)x$. При $b = a$ гипербола называется *равносторонней*, ее асимптоты проходят по биссектрисам между координатных осей x и y. Если повернуть координатные оси на 45° против часовой стрелки, в новых координатах (x', y') (буквы со штрихом – не производные!)

равностороннюю гиперболу задает уравнение $x'y' = a^2/2$, а ее ветви находятся в 1-й и 3-й четвертях (*квадрантах*) координатной плоскости (рис. 2.20 б).

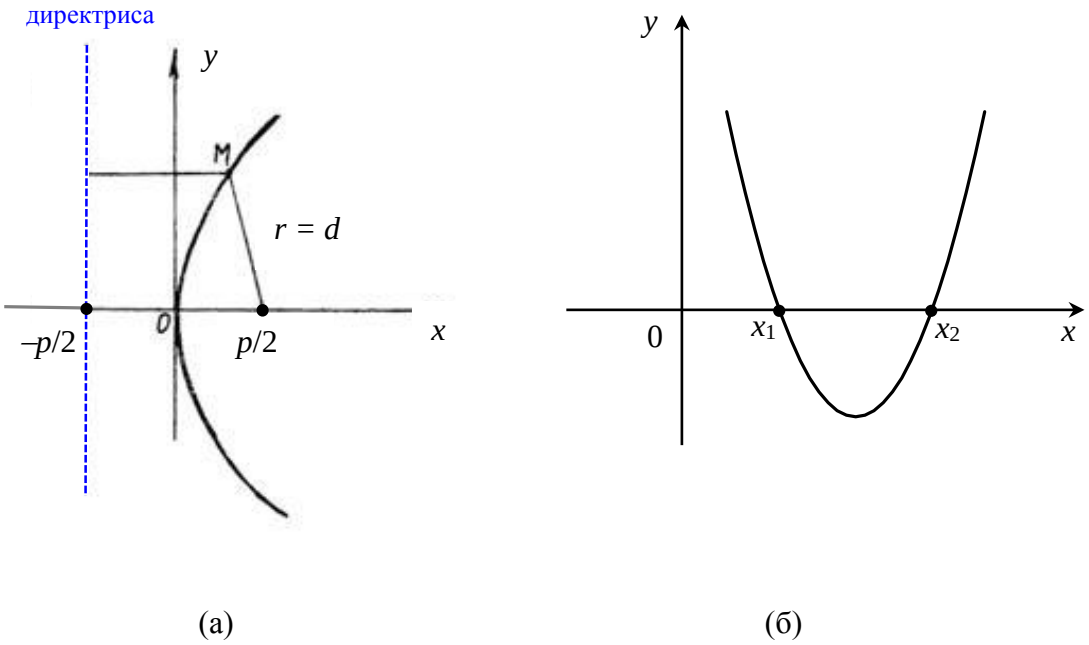
Сравнивая этот график с рис. 1.13 из главы 1, мы убедимся, что изотермы в законе Бойля-Мариотта – гиперболы. Графики многих стилизованных зависимостей в микроэкономике также имеют гиперболическую форму.

Парабола

Эту незамкнутая кривая 2-го порядка известна со школы. Ее каноническое уравнение

(2.29) $$x^2 = 2py,$$

где $p/2$ – расстояние от начала координат до точки *фокуса* F. У всех точек параболы расстояние r до точки F равно кратчайшему расстоянию d до линии $y = -p/2$, параллельной координатной оси y (рис. 2.21 а). Такая «направляющая» линия называется *директрисой*. Корни квадратного уравнения (2.26 а) – это точки пересечения с осью x параболы, повернутой на 90° и сдвинутой из начала координат (рис. 2.21 б). Если парабола не пересекает ось x, квадратное уравнение не имеет *действительных* корней, но имеет *комплексные* корни (см. следующую главу).



(а) (б)

Рисунок 2.21. Графики параболы: (а) $y^2 = 2px$ (каноническая форма), (б) $y = a(x–x_1)(x–x_2)$ (стандартная форма)

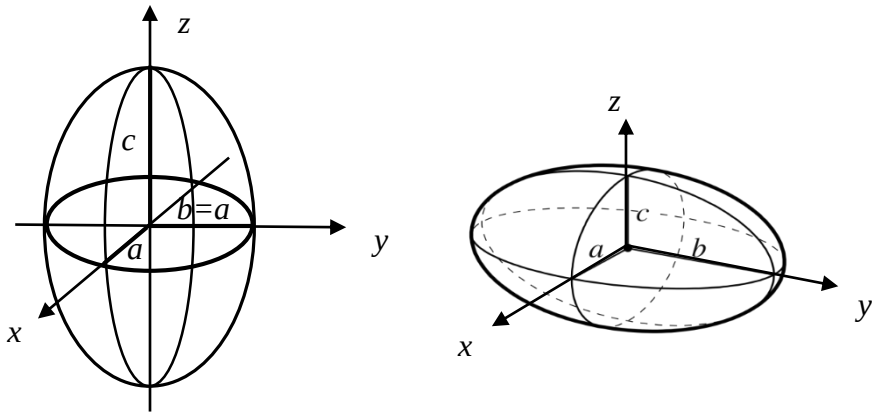
Поверхности 2-го порядка

В трехмерном пространстве существуют *поверхности 2-го порядка*: как замкнутые, так и незамкнутые. В простейшем случае их можно получить, вращая кривую 2-го порядка вокруг одной из координатных осей. Таким способом из эллипса на рис. 2.19 можно получить два *эллипсоида вращения* (рис. 2.22 а), а из гиперболы – два разных *гиперболоида вращения* (рис. 2.23). В первой главе на рис. 1.27 б был изображен *параболоид вращения*, заданный уравнением

$$z = x^2 + y^2$$

Общий вид эллипсоида в трехмерном пространстве дает уравнение

(2.30) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

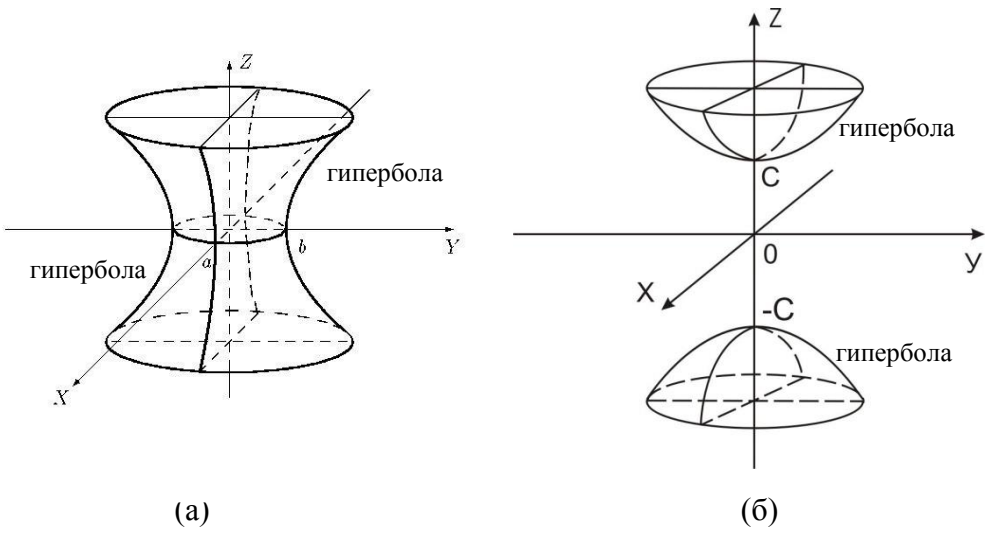


(а) (б)

Рисунок 2.22. (а) Эллипсоид вращения: $a = b \neq c$, (б) трехосный эллипсоид: $a \neq b \neq c$

Если полуоси a, b и c имеют разную длину, эллипсоид называется *трехосным* (рис. 2.22 б). При равенстве двух полуосей (например, $a = b$) он переходит в эллипсоид вращения (рис. 2.22 а: вращение вокруг оси Oz). При $a = b = c = R$ (2.30) превращается в уравнение трехмерной сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad \text{(где } a = b = c = R\text{)}$$



(а) (б)

Рисунок 2.23. (а) Однополостный гиперболоид, (б) двухполостный гиперболоид

В максимумах и минимумах поверхностей 2-го порядка обращаются в ноль их частные производные по координатам. Так, для параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ (см. гл. 1, рис. 1.27 б) условия

$$\partial z/\partial x = 2x = 0$$
$$\partial z/\partial y = 2y = 0$$

задают систему уравнений с единственным решением ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). Вторые частные производные в данном случае положительны:

$$\partial^2 z/\partial x^2 = \partial^2 z/\partial y^2 = 2 > 0$$

По аналогии с экстремумами плоских кривых (см. раздел 1.4 главы 1) это показывает, что точка (0,0,0) является минимумом поверхности («точкой накопления вторых производных»).

Поверхности в трехмерном пространстве могут иметь и такие особые точки, у которых нет аналогов для линий на плоскости. Так, одной из незамкнутых поверхностей 2-го порядка является *гиперболический параболоид*, которому отвечает каноническое уравнение

(2.31) $$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q},$$

где $p, q > 0$. Первые производные этой функции $\partial z/\partial x = x/p$ и $\partial z/\partial y = -y/q$ обращаются в ноль при $x = 0$, $y = 0$ – поэтому начало координат (0, 0, 0) является особой точкой (рис. 2.24). Вторые частные производные в этой точке имеют разные знаки:

$$\partial^2 z/\partial x^2 = 1/p > 0$$
$$\partial^2 z/\partial y^2 = 1/q < 0.$$

Этими условиями определяется *седловая точка*: для гиперболического параболоида (2.31) такой точкой является начало координат. Сведения о поверхностях 2-го порядка представлены в Приложении П3.

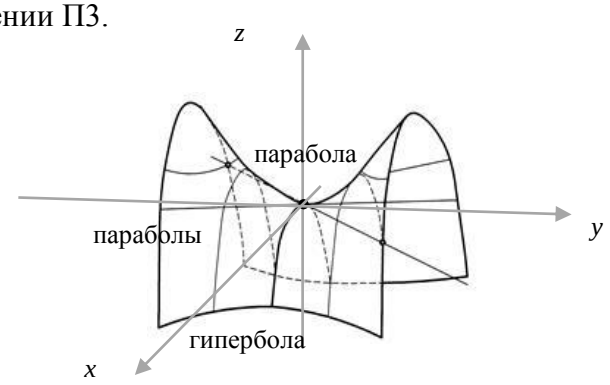


Рисунок 2.24. Гиперболический параболоид («седло»: (0,0,0) – седловая точка)

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 2.2

2.3. Из уравнения движения математического маятника с малыми отклонениями от вертикали (2.12 а) оцените период колебаний T при длине маятника l = 25 см (настенные часы-«ходики») и l = 1 м (напольные часы в холле). Ускорение свободного падения g = 9.8 м/с^2.

2.4. При спонтанном делении атомного ядра массой M на два ядра-«осколка» с массами m_1 и m_2 выделяется энергия $E = (M - m_1 - m_2)c^2$, где $c \approx 3 \cdot 10^8$м/с – скорость света (формула Эйнштейна). Предполагая, что сумма масс ядер-осколков лишь незначительно меньше массы исходного ядра $(m_1 + m_2 \lesssim M)$ и вся выделившаяся энергия переходит в

кинетическую энергию осколков, по закону сохранения импульса определите относительные направления и отношение v_1/v_2 их скоростей.

2.5. Ракета со стартовой массой M_0 (рис. 2.25) состоит из космического аппарата массой M_1 и топлива (вся остальная масса). Скорость истечения газов при сгорании топлива равна v_0. Используя закон сохранения импульса, найдите зависимость скорости V_1, которую приобретет космический аппарат после полной выработки топлива, от параметров M_0, M_1 и v_0. Определите массу аппарата M_1, который можно разогнать до первой космической скорости V_1=8 км/с при стартовой массе M_0 = 100 т и скорости истечения газов v_0 = 2 км/с.

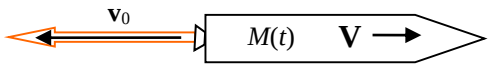


Рисунок 2.25. Реактивное движение (к задаче 2.5)

Решение

Обозначим скорость ракеты $V(t)$. За малый промежуток времени Δt реактивный двигатель выбросит массу газов ΔM со скоростью v_0, при этом масса ракеты $M(t)$ уменьшится на ΔM, а ее скорость увеличится на ΔV. Запишем закон сохранения импульса в системе «ракета + струя газа»:

$$M\Delta V = \Delta M \cdot v_0$$

(за малый промежуток времени масса ракеты почти не изменится: $M - \Delta M \approx M$). Устремив Δt к нулю, перейдем к бесконечно малым изменениям массы и скорости. Получаем дифференциальное уравнение

$MdV = v_0 dM$, то есть $(1/v_0)dV = (dM/M) = d(\ln M)$, отсюда

$V/v_0 = -\int_{M_0}^{M_1} d\ln M = \ln M_0 - \ln M_1$, или

$V = v_0 \ln\left(M_0/M_1\right)$: *формула Циолковского*

Чтобы найти массу аппарата, надо перейти от натуральных логарифмов (ln) к степеням числа e (*потенцировать* это уравнение):

$$e^{V/v_0} = M_0/M_1, \text{ то есть } M_1 = M_0 e^{-V/v_0}$$

Подставив параметры M_0 и v_0 из условий задачи, получим $M_1 = 100000/e^4 \approx 100000/54.6 = 1831$ кг.

Литература к разделу 2.2

[3] Л.Д, Ландау, Е.М. Лифшиц, Теоретическая физика в 10 томах. Том 1. Механика, 4-е изд., М.: Наука, 1988.

2.3. Элементы молекулярной физики и термодинамики

Газы состоят из молекул, движение которых подчиняется законам классической механики. Динамику многих «классических» систем из небольшого числа частиц можно рассчитать на основе законов Ньютона. Даже если аналитического решения в виде формул не существует*, численный расчет на компьютере позволяет получить результат с высокой

* Уравнения движения в аналитическом, то есть «формульном», виде нельзя вывести из баланса сил **F**(*t*), действующих на материальные точки, уже начиная с *задачи трех тел*. Несмотря на это, численные расчеты движения небесных тел и космических аппаратов в настоящее время успешно проводятся.

точностью. Во второй половине в XIX века физики, не имея компьютеров, смогли вывести газовые законы и многие другие закономерности для противоположного случая: когда число частиц $N \sim N_A$ очень велико и по порядку величины приближается к числу Авогадро.

Молекулярно-кинетическая теория, разработанная Людвигом Больцманом, связывает состояние газа с движением его молекул. Эта теория предполагает, что в очень больших (макроскопических) образцах газообразных веществ одинаковые молекулы хаотически перемещаются с разными скоростями $\mathbf{v}_i$. При столкновениях молекул со стенками сосуда и друг с другом их скорости и импульсы изменяются (см. рис. 2.13 а, б), однако распределение молекул по скоростям $f(v)$ при фиксированных температуре и давлении остается неизменным. Такие физические параметры газа, как давление P и температура T, получают усреднением, соответственно, значений импульсов mv_i и кинетической энергии $mv_i^2/2$ по всем молекулам в фиксированном объеме.

Молекулярно-кинетическая теория хорошо воспроизводит параметры лёгких *инертных газов*: гелия (He), неона (Ne) и аргона (Ar) при атмосферном давлении. Молекулы инертных газов одноатомны. По физическим характеристикам эти вещества близки к идеальному газу (см. главу 1) – в частности, 1 моль инертного газа в нормальных условиях (P=760 Торр, T=273 K) с хорошей точностью занимает объем 22.4 л, или 22400 см^3. Близкие параметры имеют газы, состоящие из легких двухатомных молекул: водород H_2, азот N_2 и кислород O_2.

Взаимодействие молекул в газах – это сумма слабого *ван-дер-ваальсова* притяжения их атомов в интервале расстояний 0.3 – 0.5 нм (в «химических» внесистемных единицах длины 3–5 Å) и возрастающего *невалентного отталкивания* на расстояниях ближе 0.3 нм. Эти силы нельзя описать в рамках классической физики, их рассчитывают методами квантовой механики. В расчетах межмолекулярных взаимодействий используют приближенные модельные потенциалы, например

(2.32 а) $$U = -A/r^6 + B/r^{12}$$ *потенциал Леннард-Джонса*

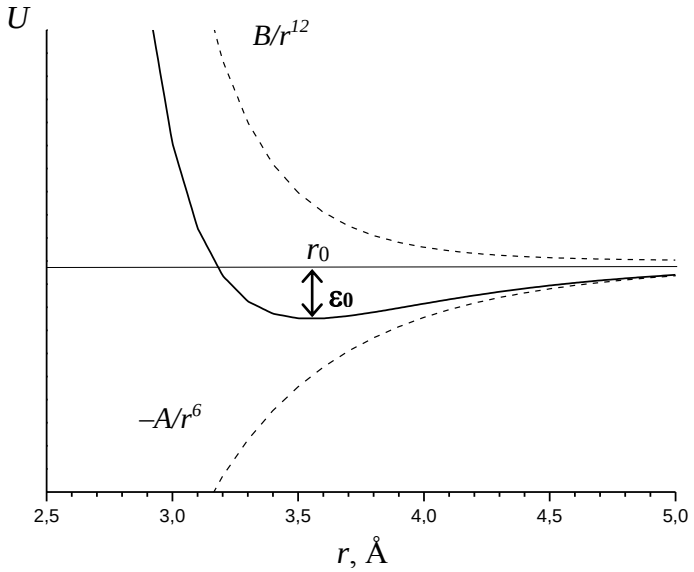
(или «потенциал 6-12»), где A и B – эмпирические («подгоночные») параметры, r – расстояние между взаимодействующими атомами (рис. 2.26 а).

Квантовая механика позволяет численно рассчитать зависимость энергии дисперсионных взаимодействий от межатомного расстояния, представив ее в виде таблицы U/r_{ij}, где r_{ij} –межатомные расстояния, заданные с малым «шагом» (обычно 0.01 или 0.001 нм). Потенциалы наподобие (2.32 а) хорошо воспроизводят расчетную кривую потенциальной энергии $U(r)$ – или, чаще, информативную часть этой кривой при $r \geq 0.3$ нм. Благодаря простой аналитической форме они широко применяются в молекулярной физике.

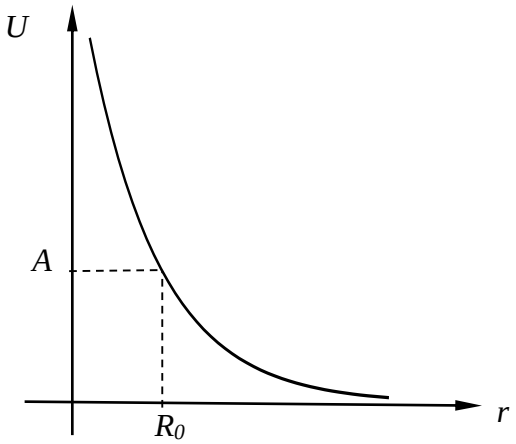
Для моделирования состояния газов в нормальных условиях (1 бар, 273 K), где преобладают упругие столкновения молекул, часто используют *потенциалы отталкивания*, в которых взаимное притяжение молекул игнорируется. Среди них важное место занимает *потенциал Борна-Майера* (рис. 2.26 б)

(2.32 б) $$U(r) = Ae^{-b(r-R_0)}$$

Это так называемый *потенциал с твердым ядром*: при $r \to R_0$ энергия отталкивания частиц быстро возрастает, так что вероятность их сближения на расстояние, меньшее R_0, стремится к нулю. Потенциал Борна-Майера переносят из физики газов на расчеты пешеходных потоков по модели социального поля (см. главу 1, разд. 1.1.5).



(а)



(б)

Рисунок 2.26. (а) Потенциал Леннард-Джонса (LJ) $U = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$, (б) потенциал Борна-Майера $U(r) = Ae^{-b(r-R_0)}$

Плотность инертных газов, как и других газов, состоящих из малых молекул, при атмосферном давлении в 100-400 раз меньше, чем для соответствующей жидкости при той же температуре. При P = 760 Торр, T = 273 K плотность газов (M/22400, где M – масса моля в граммах) снижается еще в несколько раз по сравнению с плотностью при температуре конденсации (таблица 2.1). Таким образом, при переходе этих молекулярных жидкостей в газовую фазу среднее расстояние d между ближайшими молекулами увеличивается в 5 – 7

раз ($d_{\text{газ}}/d_{\text{ж}} \approx \sqrt[3]{\rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{газ}}}$), а в нормальных условиях такое расстояние примерно в 10 раз больше, чем в жидкостях*.

Жидкости относятся к конденсированным фазам: молекулы в них расположены почти «вплотную». Без теплового движения («при 0 K») одноатомные молекулы инертных газов отстояли бы от соседних молекул на расстоянии минимума потенциалов 0.3–0.5 нм. Среднее расстояние между молекулами газа – единицы нанометров; между столкновениями друг с другом и со стенками сосуда молекулы перемещаются прямолинейно и равномерно. Уменьшив давление в миллион раз (10^{-6} бар, то есть <0.001 торр), мы получим *разреженный* газ, где молекулы в основном сталкиваются со стенками. Такое давление можно создать обычным вакуумным насосом. Таким образом, с изменением внешних условий могут изменяться как распределение скоростей молекул газа $f(v)$, так и механизм достижения *теплового равновесия*: состояния, при котором во всех точках среды устанавливается одинаковая температура.

Таблица 2.1

Плотности молекулярных жидкостей и соответствующих им газов

Состав	$\rho_{ж}$, г/см^3 (T, K)	$\rho_{г}$, г/см^3 (T, K)	$\rho_{г}$, г/см^3 (273 K)	Состав	$\rho_{ж}$, г/см^3 (T, K)	$\rho_{г}$, г/см^3 (T, K)	$\rho_{г}$, г/см^3 (273 K)
He	0.1469 (2.5K)	0.001159 (2.5K)	0.000179	H_2	0.07630 (15K)	0.00020 (15K)	0.000089
Ne	1.23824 (25K)	0.00534 (30K)	0.00093	N_2	0.8265 (73K)	0.00278 (73K)	0.00125
Ar	1.3740 (90K)	0.00801 (90K)	0.00179	O_2	1.14 (90K)	0.004 (90K)	0.00143

Связь параметров идеального газа с кинетической энергией его молекул

Установим связь давления газа со средней скоростью его молекул. Для этого рассмотрим небольшой элемент объема *V*, в котором содержится *N* одноатомных молекул. Концентрация молекул газа $n = N/V$. Границы объема будем считать абсолютно упругими стенками.

Чтобы упростить вывод, запишем 2-й закона Ньютона в «импульсной» форме

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt,$$

где $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ – импульс классической частицы-молекулы. Компонент вектора скорости частицы v, перпендикулярный стенке в одном из трех равноправных координатных направлений *x*, обозначим v_x. При упругом столкновении частицы с неподвижной стенкой

* При температуре 100 °C один моль жидкой воды H_2O занимает чуть больше 18 см^3 (при нагревании вода расширяется незначительно), а 1 моль водяного пара – не принципиально больше 22.4 л, заданных законом Авогадро для комнатной температуры: по формуле Клапейрона-Менделеева (1.18) при 100 °C получается 28.5 л. (Мы сравниваем объемы на качественном уровне). По порядку величины $V_{ж}$~20 см^3, $V_{газ}$~$2\cdot10^4$ см^3, т.е. объем воды в газовой фазе по сравнению с жидкой фазой увеличивается приблизительно в 1000 раз. Соответственно, среднее расстояние между соседними молекулами в газовой фазе примерно в 10 раз больше, чем в жидкости.

компонент вектора ее импульса p_x, перпендикулярный стенке, изменится на противоположный. По закону сохранения импульса (см. рис. 2.14), в результате удара одной молекулы стенка получит импульс $2mv_x$. Мы должны перевести это точное микроскопическое соотношение в усредненный макроскопический параметр: давление газа «изнутри» объема.

Если молекул внутри объема очень много (а это именно так), за малое время Δt со стенкой площадью S столкнется большое число молекул, равное $\frac{1}{2}nS\langle v_x\rangle\Delta t$, где n – концентрация молекул, $\langle v_x\rangle$ – *средняя проекция их скорости* на направление x, а $S\cdot\langle v_x\rangle\cdot\Delta t$ – та часть объема, в которой молекулы успеют долететь до стенки за время Δt. Множитель ½ учитывает, что направления x и $-x$ равноправны, то есть проекция средней скорости с одинаковой вероятностью направлена в обе стороны – а значит, в «положительную» сторону ($x > 0$) с разной проекцией скорости v_x перемещается половина всех молекул (рис. 2.27). Таким образом, за время Δt стенка, перпендикулярная x, получит суммарный импульс

$$\Delta p = \sum p_i \;=\; 2m\langle v_x\rangle\cdot\tfrac{1}{2}n\cdot S\cdot\langle v_x\rangle\cdot\Delta t \;=\; nS\cdot m\langle v_x\rangle^2\cdot\Delta t$$

Средняя сила, действующая на стенку за время Δt, равна $\Delta p/\Delta t$. Для бесконечно малых приращений получим точное равенство

$$F_x = dp_x/dt = nSm\langle v_x\rangle^2.$$

Давление на стенку площади S имеет размерность [сила / площадь]:

(2.33) $$P = F/S = n\cdot m\cdot\langle v_x\rangle^2$$

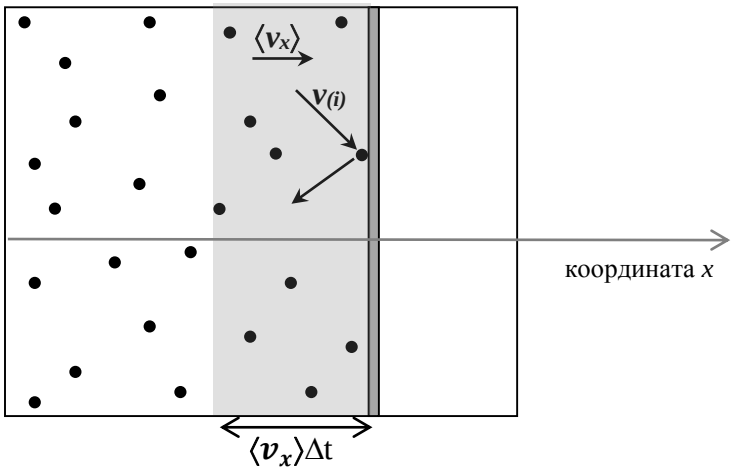


Рисунок 2.27. Столкновения молекул газа с поршнем. Серым цветом выделена часть объема, в которой молекулы столкнутся с поршнем за время Δt

Выразим средний квадрат скорости в координатном направлении x через среднюю скорость молекул в газе. Это очень просто: скорость $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – векторная величина, и квадрат ее модуля определяется по «трехмерной» теореме Пифагора:

$$\langle v\rangle^2 \;=\; {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2$$

Но координатные направления *x*, *y* и *z* равноправны, поэтому

(2.34) $\langle v\rangle^2 = \langle v_x\rangle^2 + \langle v_y\rangle^2 + \langle v_z\rangle^2$, и в среднем $\langle v_x\rangle^2 = \langle v_y\rangle^2 = \langle v_z\rangle^2 = \frac{1}{3}\langle v\rangle^2$

Подставив в формулу (2.33) ⅓ среднего квадрата скорости молекул из (2.34) и помня, что $mv^2/2$ – кинетическая энергия, окончательно получим

(2.35 а) $P = \frac{2}{3}n(m\langle v_x\rangle^2/2) = \frac{2}{3}n\langle E_{\text{кин}}\rangle$, или

(2.35 б) $PV = \frac{2}{3}N\langle E_{\text{кин}}\rangle = RT$

(см. уравнение Клапейрона-Менделеева для 1 моля идеального газа). Как и прежде, обозначения импульса *p* и давления *P* похожи – но мы помним, что это разные физические величины.

Формула (2.35 б) связывает среднюю кинетическую энергию молекул с газовыми законами. Из нее следует

(2.36) $\langle E_{\text{кин}}\rangle = m\langle v_x\rangle^2/2 = 3/2(R/N)T = 3/2 \cdot kT,$

(2.36 а) $P = nkT$

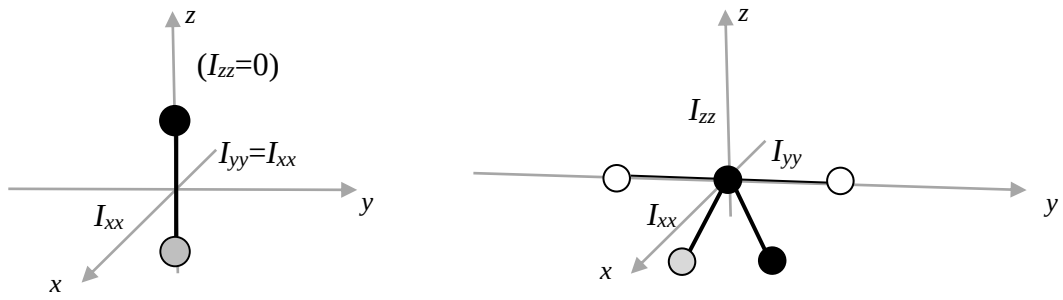
где *n* – концентрация молекул, $k = 1.38\cdot10^{-23}$ Дж/град – *постоянная Больцмана.*

Формула (2.36) выражает температуру «одноатомного» газа через среднюю кинетическую энергию его молекул. Подставив в нее температуру 300 K, получим оценку энергии теплового движения молекул вблизи комнатной температуры: $6.2\cdot10^{-21}$ Дж на одну молекулу или 3740 Дж на 1 моль газа (3.7 кДж/моль). Глубина ямы в потенциале (2.32 а) очень невелика (~1 кДж/моль), так что между моментами встречных ударов и столкновений со стенками молекулы газа при атмосферном давлении перемещаются почти свободно.

В молекулярно-кинетической теории газов имеется важный параметр с квази-гуманитарным названием *число степеней свободы молекулы*. Если материальная точка перемещается вдоль прямой линии, любая ее физическая характеристика $A(x)$ зависит от единственной координаты *x* на этой линии (либо ее производных): система имеет *одну* степень свободы. Материальная точка на плоскости имеет две степени свободы (координаты *x* и *y*), в трехмерном пространстве – три. Если состояние абстрактной системы определяют *n* независимых аргументов (x_1, x_2, …, x_n), она имеет *n* степеней свободы.

При механическом движении тело может не только перемещаться, но и вращаться (вспомним подброшенную палку, упомянутую в начале 1-й главы). Однако «вращение» одноатомных молекул можно игнорировать: оно не отражается на физических параметрах системы. Дело в том, что 99.95% массы любого атома сосредоточена в ядре. Радиус атомного ядра (1-10 фм) в десятки и сотни тысяч раз меньше радиуса внешней электронной оболочки, который обычно и называют ван-дер-ваальсовым радиусом атома. При межмолекулярных взаимодействиях молекулы сближаются на расстояния, равные суммам радиусов атомов; их массивные ядра в этих масштабах почти без ошибок можно считать точечными. Итак, одноатомные молекулы инертных газов имеют три степени свободы: они «не умеют» вращаться.

Из формулы (2.34) следует, что при движении одноатомных молекул в трехмерном пространстве на одну «поступательную» степень свободы приходится ½kT кинетической энергии. Вращение двухатомных и многоатомных молекул, где расстояния между ядрами соседних атомов составляют 0.1 – 0.3 нм, имеет физический смысл и отражаются в теплоемкости газов. У двухатомных молекул AB, имеющих форму «гантели», помимо поступательного движения есть две дополнительные степени свободы: вращение вокруг пары взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр молекулы перпендикулярно связи A–B*. У многоатомных молекул три независимые оси вращения (рис. 2.28).



(а) (б)

Рисунок 2.28. Проекции момента инерции I_{xx}, I_{yy} и I_{zz} (а) двухатомной и (б) многоатомной молекулы на оси координат

В нормальных условиях (P = 1 бар, T =273 K), тепловая энергия молекул распределяется поровну между всеми их поступательными и вращательными степенями свободы. Внутримолекулярные колебания, то есть деформации самих молекул, проявляются как дополнительные степени свободы только при достаточно высокой температуре. Этот экспериментальный факт объясняет квантовая механика (см. следующую главу).

Два физических тела в *тепловом равновесии* – например, два объема газа, разделенные теплопроводной перегородкой – имеют одинаковую температуру. Это позволяет сравнивать средние скорости молекул разных газов. Так, при T = 300 K *средняя квадратичная* скорость одноатомных молекул неона (1 моль = 20 г = 0.02 кг) составит

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{3kT/m} \approx \sqrt{3 \times 300 \times 1.38 \cdot 10^{-23}/0.02 : (6 \cdot 10^{23})} = 612 \text{ м/с},$$

а для молекул азота (1 моль = 28 г = 0.028 кг), кинетическая энергия которых равномерно распределена между пятью степенями свободы, $\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{(3/5) \times 3kT/m} = 401$ м/с. При одинаковом числе степеней свободы молекул отношение их средних скоростей равно

(2.37) $$\sqrt{\langle v_1^2\rangle/\langle v_2^2\rangle} = \sqrt{m_2/m_1}.$$

Мы видим, что средняя скорость движения молекул газа при температуре, близкой к комнатной, очень велика. Для полного статистического описания их движения также нужно знать распределение молекул по скоростям или по кинетической энергии.

* Момент инерции двухатомной молекулы вдоль оси, соединяющей атомы (рис. 2.28 а), с хорошей точностью также равен нулю.

Распределение Больцмана-Гиббса и распределение Максвелла

Рассмотрим движение молекул газа в некотором поле с потенциалом $U(x)$, возрастающим по координате x. На каждую молекулу в этом поле действует сила $\mathbf{F}(x) = -dU/dx$. Накладываясь на «перемешивающее» хаотическое движение молекул, эти силы создадут неравномерное распределение концентраций молекул $n(x)$ вдоль координаты x. Чтобы найти это распределение, выделим в газе малый объем с площадью сечения S и толщиной dx, внутри которого $F \approx$ const для всех молекул (рис. 2.29). Если этот объем не смещается вдоль координаты x, разница давлений $dP = kTdn$ на его границах должна уравновешиваться суммарным воздействием поля на его молекулы $FnSdx$ (уравнение (2.36 а) и определение давления $P = F/S$):

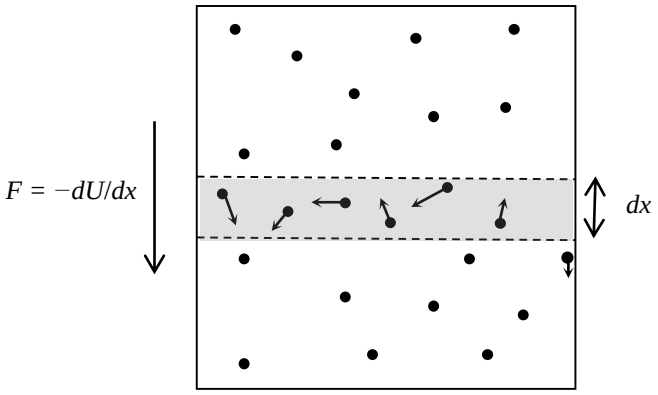


Рисунок 2.29. К выводу распределения Больцмана

$$FnSdx = kTSdn, \qquad \text{или} \qquad dn/n = (F/kT)dx$$

Решая это знакомое нам дифференциальное уравнение, получим

$$\ln n(x) = \frac{1}{kT}\int_0^x F(x)dx = -\frac{1}{kT}U(x)\Big|_{U(x=0)}^{U}, \text{ т.е.}$$

$$n = n_0 exp\,[-U(x)/kT] \tag{2.38}$$

(мы приняли, что $U(0) = 0$, $U(x) < 0$, и обозначили $n(0) = n_0$).

Формула (2.38) – *распределение Больцмана* (также называемое *распределением Гиббса*), очень важное во многих областях физики. Ему соответствует экспоненциальное убывание количества частиц в единице объема с повышением их потенциальной энергии (см. график на рис. 2.1 в). Похожую форму имеет распределение молекул по кинетической энергии. Так, если $U(x)$ – поле земного притяжения, до высоты x_0 в этом поле поднимутся лишь молекулы с $E_{кин} \geq U(x_0)$. По этой причине с увеличением высоты над уровнем моря (например, в горах) давление воздуха уменьшается – число молекул в единице его объема становится меньше. В показателе экспоненты в (2.38) может стоять как потенциальная, так и кинетическая энергия, а также их различные комбинации (см. далее).

Распределение молекул газа по скоростям, или *распределение Максвелла*, подобно (2.38), стремится к нулю при увеличении кинетической энергии

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \tag{2.39}$$

При «средних» скоростях молекул это распределение, имеющее вид Axe^{-x} (где $x \sim v^2$), проходит через максимум $v^{(0))}$ (рис. 2.30). Множитель $4\pi v^2$ («весовой коэффициент»), вычисленный в молекулярно-кинетической теории, отражает равную вероятность всех направлений движения молекул v_x, v_y и v_z. Распределение (2.39) при нормальных условиях весьма широкое. Так, наиболее вероятная скорость молекул азота в газе $v^{(0)} = \sqrt{2RT/M}$ (максимум распределения, рассчитанный из условия $df/dv = 0$) при 300 K равна 422 м/с. При этом около 1% всех молекул имеют скорости меньше 100 м/с, а почти 5% – более 1000 м/с.

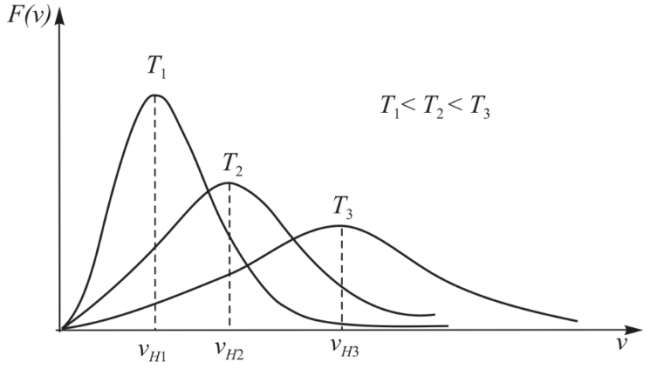


Рисунок 2.30. Распределение Максвелла при разной температуре газа T

Предположение о случайном характере процессов на «микроуровне» во внешнем поле сил $F=-\partial U/\partial \boldsymbol{r}$ автоматически приводит к макроскопическим распределениям больцмановского типа. Подобные распределения встречаются в теоретических моделях *макроэкономики*: раздела экономической теории, исследующей взаимодействие крупных экономических агентов – отраслей и государств.

В 1970-е годы Л.И. Розоноэр и А.В. Малишевский в СССР, рассматривая экономическую деятельность как хаотический обмен ресурсами, вывели больцмановское распределение общественного богатства вида (2.38) по хозяйственным единицам (агентам). В XXI веке данные налоговых ведомств о благосостоянии жителей США, Англии и ряда других западных стран стали доступными в Интернет. Распределения жителей этих стран по доходу оказались близкими к больцмановскому для большинства населения, кроме его самой богатой части (~5%), доходам которой соответствует обратное степенное *распределение Парето* (см. далее гл. 8). На этой основе Виктор Яковенко (США) разработал *кинетическую теорию денег*, которая также будет рассмотрена в гл. 8.

Молекулярно-кинетическая теория, созданная во второй половине XIX века, имела огромное значение для всего естествознания. Она стала первым достижением *статистической физики*, которая выводит параметры макроскопических систем из хаотической динамики частиц, составляющих систему – то есть в буквальном смысле «строит порядок из хаоса». Методы статистической физики применяются во многих дисциплинах – включая экономические и общественные науки, где из случайных разнонаправленных действий индивидуумов и их групп складываются закономерности социума. По этой причине рассмотренный выше материал полезен не только работникам естественных наук: он также нужен современным экономистам, социологам и другим носителям гуманитарного знания.

Простое усреднение динамики частиц, из которых состоит система, позволяет определить ее параметры, но не их изменения во времени, т.е. *эволюцию* макроскопических систем. Динамика таких систем отражает неустранимые проявления хаоса: внешние

воздействия на систему рассеиваются и не могут «вернуться назад» в полном первоначальном объеме, хотя все акты взаимодействия индивидуальных частиц (например, их столкновения) в рамках механики полностью обратимы. Эту особенность диссипативных систем с красивым названием *стрела времени* анализирует *термодинамика*. Ее понятийный и математический аппарат не очень прост, но он применяется во многих науках – в том числе в междисциплинарном моделировании общества. Поэтому для следующего раздела требуется особое внимание.

2.3.1. Энтропия и термодинамические потенциалы

Неразбериха в обществе постоянно возрастает. Только очень упорным трудом можно несколько ее уменьшить. Однако сама эта попытка приведет к росту совокупной неразберихи
«2-й закон термодинамики Эверитта» (научный фольклор)

Термодинамикой называется дисциплина, изучающая способы передачи и превращения тепловой энергии в макроскопических системах. При широком понимании физических объектов как любых реально существующих и при учете других видов энергии соотношения термодинамики часто используют за пределами физики: в химии, биологии, информатике, в экономических и других общественных науках. Для первого знакомства с этой областью можно рекомендовать соответствующие разделы в замечательном учебнике А.П. Ершова и В.Г. Харитонова для физико-математических школ [1], а также краткий курс физической химии В.И. Горшкова и А.И. Кузнецова [5] (см. рекомендуемую литературу). Здесь мы перечислим некоторые термодинамические соотношения, уже применяемые, в том числе, к описанию человека и общества.

Некоторые понятия термодинамики хорошо известны и не требуют особых пояснений. Так, теплоемкость – это количество тепловой энергии, которое следует сообщить единице (массовой или мольной) вещества для повышения ее температуры на 1 градус. Различаются теплоемкость при постоянном давлении C_P и теплоемкость при постоянном объеме C_V, для 1 моля идеального газа равные

(2.40) $$C_V = \frac{s}{2}R, \qquad C_P = C_V + R = \frac{s+2}{2}R$$

где s – число степеней свободы молекулы в газе, R – универсальная газовая постоянная. Для конденсированных фаз, то есть твердых тел и большинства жидкостей, $C_V \approx C_P$.

С теплоемкостью связана *калория*: внесистемная единица количества теплоты, необходимого для нагревания 1 грамма жидкой воды на 1 градус при температуре 20°C (293 K): 1 кал ≈ 4.18 Дж. В экономических науках используются аналоги удельной либо мольной теплоемкости: энергоемкость, ресурсоемкость, эластичность спроса и т.д., нередко на качественном уровне (разд. 1.5.1 главы 1).

При *адиабатическом* расширении теплоизолированного идеального газа зависимость давления от объема напоминает закон Бойля-Мариотта, но ближе к функции Кобба-Дугласа (см. гл. 1, разд. 1.2.2):

(2.41) $$PV^{\gamma} = \text{const}',$$

где в показатель степени γ входит число степеней свободы молекул (рис. 2.31). Его можно вычислить по формуле (2.40) из экспериментально измеренных теплоемкостей C_P и C_V:

(2.41 а) $$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{s+2}{s}$$

Также интуитивно понятна *внутренняя энергия*, в термодинамике обозначаемая U – например, средняя кинетическая энергия молекул газа, которая пропорциональна температуре. При этом сумма энергии образования молекул из атомов, энергии электронов в атомах и молекулах, а также энергия взаимодействия нуклонов в атомных ядрах считается постоянной, нечувствительной к перемещениям и столкновениям самих молекул – поэтому в термодинамических расчетах ее не учитывают, приравнивая к нулю. Однако при передаче и превращениях энергии (например, при переводе тепловой энергии в механическую работу) проявляется такое фундаментальное качество макроскопических систем, как необратимый переход части энергии в форму, непригодную к дальнейшему использованию, или *диссипация энергии*. Это тем более справедливо для биологических и социальных систем, ибо все они с точки зрения физики относятся к диссипативным.

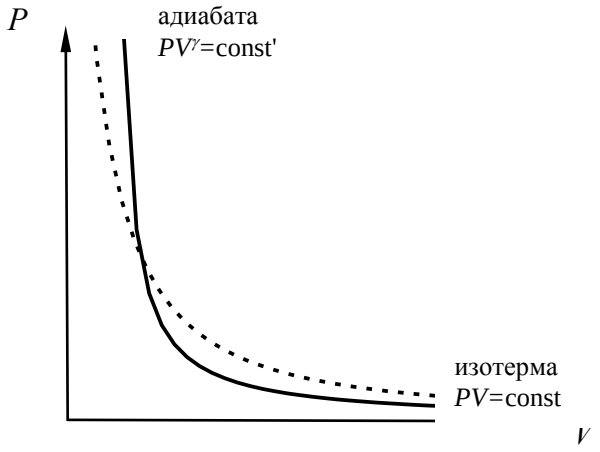


Рисунок 2.31. Изотерма и адиабата идеального газа (см. рис. 1.13 в 1-й главе)

«Термодинамика для взрослых» начинается с понятия *энтропии*: параметра состояния физической системы, который характеризует ее способность необратимо поглощать энергию. Представим себе две одинаковые «тепловые машинки»: теплоизолированные сосуды, содержащие определенный объем газа при атмосферном давлении и одинаковой температуре, с незакрепленным поршнем и нагревательной спиралью внутри (рис. 2.32). Пропуская ток через спираль, за время Δt можно сообщить газу в сосуде заданное количество теплоты по закону Джоуля-Ленца $Q = IU\Delta t = (U^2/R)\Delta t$ (в этом случае I – ток, U – напряжение, R – сопротивление нагревательного элемента; см. главу 1) и сравнить его с работой $P\Delta V$ расширения газа против атмосферного давления.

Пусть одна из двух машинок заполнена неоном Ne, а другая – равным объемом дейтерометана* CD_4: газами с близкой молекулярной массой $M \approx 20$, но разным числом степеней свободы молекул. У одноатомных молекул неона, которые можно считать материальными точками, три поступательные степени свободы ($s = 3$), тогда как у молекул

* Метана CH_4, в котором все атомы H заменены атомами дейтерия («тяжелого водорода») ^2H (D).

метана, имеющих форму тетраэдра с атомом углерода в центре, дополнительно имеется три вращательные степени свободы, т.е. $s = 6$. Если сопротивления нагревательных элементов одинаковы ($R_1 = R_2$), за время Δt газам в обоих сосудах передается одинаковое количество теплоты $Q_1 = Q_2$. Газы нагреются и расширятся, совершая механическую работу. У какой из машинок эта работа больше?

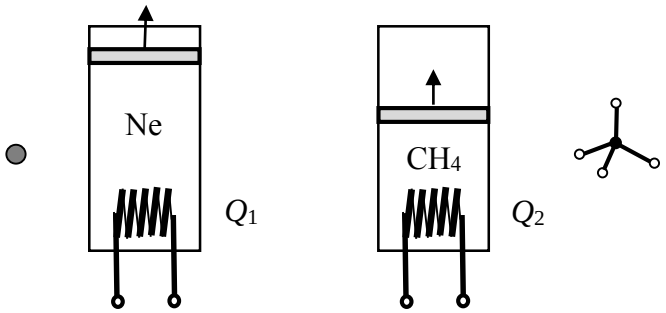


Рисунок 2.32. «Тепловые машинки», наполненные газами из одноатомных и многоатомных молекул, при $Q_1 = Q_2$ совершают разную работу

Ответ довольно очевиден: при нормальных условиях как неон, так и метан близки к идеальному газу, поэтому сильнее расширится и совершит больше работы тот газ, теплоемкость которого ниже, так как он сильнее нагреется. Теплоемкость одноатомного газа (неона) меньше, поскольку его молекулы обладают лишь тремя поступательными степенями свободы, тогда как у молекул метана шесть степеней свободы – три поступательные и три вращательные (см. формулы (2.40)). Одинаковое количество тепловой энергии совершит больше механической работы в машинке, заполненной неоном.

Таким образом, передача тепловой энергии на вращательные механические степени свободы многоатомных молекул газа равнозначна ее «связыванию»: эту энергию уже нельзя перевести в механическую работу. Кинетическая энергия молекул в обоих газах тоже не полностью перейдет в работу расширения $P\Delta V$. Ее существенная часть будет потрачена на увеличение числа беспорядочных столкновений молекул, то есть на повышение «степени хаоса» внутри системы.

Чтобы выразить необратимость процессов в макроскопических системах, которые складываются из механических столкновений (по отдельности обратимых) огромного числа молекул, в старых учебниках физики вводилось понятие «связанной энергии» TS. Ключевой характеристикой здесь является феноменологическая *энтропия* S: параметр системы, отражающий отношение поглощенной тепловой энергии к энергии поступательного движения ее частиц $\sum m\langle v^2\rangle/2$, которую выражает температура T:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}, \tag{2.42}$$

где ΔQ – изменение количества теплоты в системе. Подобно внутренней энергии U, энтропия S аддитивна и определяется с точностью до произвольной постоянной через приращения ΔS, пропорциональные ΔQ. (В точном определении энтропии (2.42) эти приращения должны быть бесконечно малыми).

Мы видели, что одинаковое количество теплоты ΔQ при одинаковом объеме V и давлении P = 1 бар нагреет 1 моль метана меньше, чем 1 моль неона. Таким образом, доля связанной газом тепловой энергии, которая выражается в повышении его энтропии, у метана выше, чем у неона. Тепловая энергия, оставшаяся несвязанной, приводит к расширению газа и таким образом переходит в механическую работу $P\Delta V$.

Как и внутренняя энергия, энтропия является *функцией состояния*: ее изменение $\Delta S_{12}=S(1) - S(2)$ определяются начальным и конечным состояниями системы, условно обозначенными здесь «1» и «2». Также изменение энтропии зависит от способа перехода 1→2: оно минимально при идеализированном *равновесном* переходе (например, бесконечно медленном изотермическом расширении газа от объема V_1 до объема V_2) и увеличивается для аналогичных неравновесных процессов. При адиабатическом расширении газа в теплоизолированном объеме $\Delta Q = 0$ и, по формуле (2.42), S = const*. Если между двумя объемами идеального газа V_1 и V_2 поставить теплопроводную перегородку, между ними установится тепловое равновесие $T_1 = T_2$, при котором суммарная энтропия системы $S_1 + S_2$ достигнет максимума.

Абсолютные изменения энтропии определяются условием $S(T=0) = 0$: при абсолютном нуле температуры энтропия любой системы равна нулю (*теорема Нернста*). При температуре T и фиксированном объеме V = const в любых процессах – например, в химических реакциях – количество тепловой энергии, способной перейти в механическую работу, не может превышать $U - TS$. Эта величина называется *свободной энергией*.

В начале XIX века физика была молодой наукой. Со всей бесшабашностью молодости она попыталась построить новую область термодинамики по образцу наиболее строгой области механики, которая к тому времени достигла больших успехов в математическом описании движения. (Сама термодинамика первоначально возникла как инженерная дисциплина – в ней занимались расчетами паровых машин, которые уже применялись в промышленности и на транспорте). В стремлении создать единую «теорию всего» физиков не остановило принципиальное отличие диссипативных тепловых систем от консервативных механических – это отличие было известно, но при создании нового существующие фундаментальные законы обычно игнорируются. В результате термодинамика прибрела свой нынешний вид: сами физики считают ее трудной дисциплиной, но однажды построенные формальные аналогии с классической механикой сохраняются в ней до сих пор.

Выше в этой главе (разд. 2.2.1) упоминались функции состояния механических систем: гамильтониан и лагранжиан, построенные как сумма и разность потенциальной и кинетической энергии (см. формулы (2.18 а, б). Также (пусть без детализации) там отмечалось, что обе функции состояния в общем случае можно выразить через обобщенные координаты (q_1, q_2, … q_n) и обобщенные импульсы (p_1, p_2, … p_n), где n – число степеней свободы системы. (Число степеней свободы молекул газа в данном разделе обозначено буквой s, как принято в молекулярно-кинетической теории – смысл от этого не изменяется). Физическое содержание обобщенных координат и обобщенных импульсов в механике не

* Нагревание газа внутри «тепловой машинки» увеличивает его энтропию, а при дальнейшем адиабатическом расширении она остается постоянной.

устанавливается: им могут соответствовать *любые* измеримые параметры системы. Возможно, данное обстоятельство дополнительно вдохновляло создателей *феноменологической термодинамики* на построение этой дисциплины как «механики теплоты».

Состояние физической системы в термодинамике, по формальной аналогии с механикой, задают два типа параметров: *обобщенные координаты* $\{x_i\}$ и *обобщенные силы* $\{X_i\}$. Обобщенные координаты, также называемые *экстенсивными параметрами* или *факторами ёмкости,* аддитивны: для системы из двух взаимодействующих частей A + B

$$x_i(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = x_i(\mathrm{A}) + x_i(\mathrm{B}).$$

Напротив, обобщенные силы – *интенсивные параметры*, или *факторы действия* – одинаковы во всех частях системы:

$$X_i(A+B) = X_i(A) = X_i(B).$$

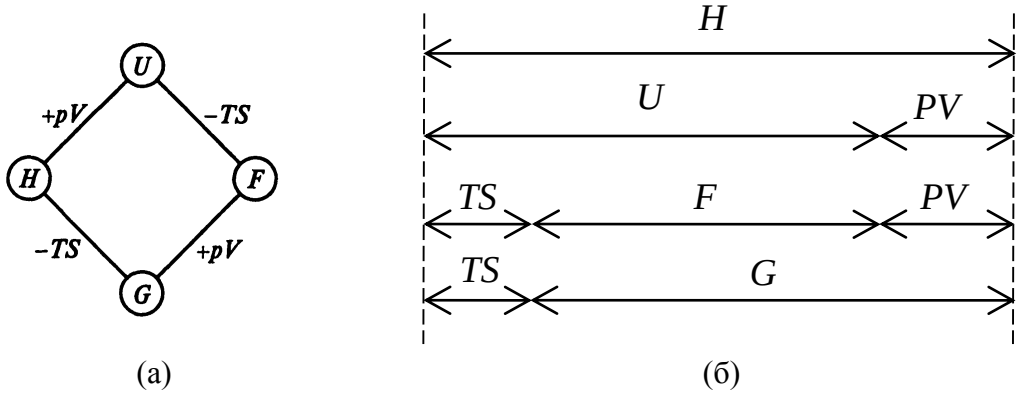
При отсутствии внешних полей обобщенными координатами простейшей однородной (*гомогенной*) термодинамической системы – идеального газа – являются объем V и энтропия S, а сопряженными им обобщенными силами – соответственно давление P и температура T. Механическая работа расширения газа при постоянном давлении равна $P\Delta V$, а его «связанная энергия», вызванная передачей теплоты, при постоянной температуре равна $T\Delta S$. По аналогии с функциями Гамильтона и Лагранжа в механике, для газа можно задать четыре функции состояния, называемые *термодинамическими потенциалами*:

(2.43)
U – внутренняя энергия
$H = U + PV$ – *энтальпия*
$F = U - TS$ – *свободная энергия Гельмгольца*
$G = H - TS = U + PV - TS$ – *свободная энергия Гиббса*

Энтальпия (в учебниках первой половины XX века называвшаяся *теплосодержанием*) особенно популярна в химии: ее изменению ΔH соответствует *вся* энергия, которая выделяется или поглощается в химической реакции. Свободная энергия Гельмгольца, или *изохорно-изотермический потенциал*, соответствует максимуму энергии, которую термодинамическая система может отдать при постоянном объеме и постоянной температуре – например, той энергии, которую вырабатывает электрическая батарейка*. Наконец, свободная энергия Гиббса, также называемая «свободной энтальпией» и *изобарно-изотермическим потенциалом*, соответствует максимуму энергии, которую можно получить от системы при постоянной температуре и постоянном давлении. Процессы (например, химические реакции), в которых потенциал Гиббса уменьшается ($\Delta G < 0$), осуществляются самопроизвольно, а в случае $\Delta G > 0$ – только при подведении энергии извне.

* Напомним, что электрическая батарейка вырабатывает ток потому, что внутри нее протекают химические реакции.

Взаимосвязь потенциалов (2.43) в удобной для запоминания форме показывают *термодинамический квадрат* на рис. 2.33 а и диаграммы на рис. 2.33 б. Термодинамические функции состояния широко используются в физических и химических задачах. В рамках междисциплинарной физики они переносятся (насколько обоснованно – отдельный вопрос) на моделирование социальных систем, поэтому знать об их существовании необходимо.



(а) (б)

Рисунок 2.33. (а) Термодинамический квадрат, (б) соотношение термодинамических потенциалов (см. [5] в списке рекомендуемой литературы

Термодинамические потенциалы, как функции состояния, определены для *равновесных* систем и для бесконечно малых изменений их параметров. Выше нам уже встречалась дифференциальная форма записи физических законов – в частности, вариационный принцип (2.20). В термодинамике этот способ записи особенно распространен. Два основных закона термодинамики в дифференциальной форме выглядят так:

(2.44) $$dU = dQ - dW$$ ***1-е начало термодинамики***

(бесконечно малое приращение внутренней энергии системы равно сообщенному ей количеству теплоты минус механическая работа расширения dW, которую система при этом совершает). Для идеального газа при постоянном давлении $dW = PdV$. Формула (2.44) – это закон сохранения энергии в системах с передачей тепла.

(2.45) $$dS = dQ/T \geq 0$$ ***2-е начало термодинамики***

(в любых процессах передачи тепла энтропия системы не уменьшается; в неравновесных процессах энтропия увеличивается). Формула (2.45) означает, что самопроизвольная передача тепла от тела с температурой T_1 к более горячему телу ($T_2 > T_1$), при котором $\Delta S < 0$, невозможна. (В холодильных машинах охлаждение достигается за счет внешней работы – например, электромотора в компрессоре; при этом суммарная энтропия системы увеличивается – см. эпиграф).

Изменения термодинамических потенциалов (2.43) также записывают в дифференциальной форме (Приложение П4). Поскольку количество теплоты, механическая работа и энтропия в тепловых процессах не сохраняются, в учебниках физики для математической строгости дифференциалы (d) в законах (2.44) и (2.45) заменяют

вариациями (δ)*. Приведенную выше теорему Нернста $S(T=0) = 0$ часто называют *3-м началом термодинамики*.

В самом общем случае рассматриваются термодинамические функции *открытых систем*, части которых могут обмениваться атомами между собой и с окружающей средой за счет протекания химических реакций. При этом в функциях состояния (2.43) возникают новые переменные: мольные количества реагентов$\{n_i\}$ и *химические потенциалы* $\{\mu_i\}$

(2.46) $$G = U - TS + PV + \sum_{i=1}^{m} \mu_i n_i,$$

Особенной математической сложностью отличается *неравновесная термодинамика*, возникшая в первой половине XX века. Подавляющее большинство социальных систем – открытые и неравновесные, но трудный термодинамический формализм в их описании почти не используется. Для дальнейшего изложения нам достаточно перечисленных выше основных понятий. Некоторые соотношения феноменологической термодинамики представлены в Приложении П4.

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 2.3

2.6. (см.[4], задача 12 а): Сколько энергии надо затратить для нагревания стакана воды (200 г) от комнатной температуры 20 °C до 100 °C? Если всю эту энергию перевести в механическую работу – на какую высоту она поднимет легковой автомобиль массой 1000 кг?

2.7. Как изменится энтропия идеального газа при его изотермическом расширении?

Решение

Подставим соотношение первого закона термодинамики (2.44) $dU = dQ - PdV$ в определение энтропии (2.42). Получим

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{dU}{dT}\frac{dT}{T} + P\frac{dV}{T} = C_V\frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V} = d(C_V \ln T + R \ln V)$$

(мы воспользовались определением теплоемкости $C_V = dU/dT$ и представленным в 1-й главе законом Клапейрона-Менделеева $PV = RT$ для 1 моля газа). При изотермическом расширении T = const, т.е. $dT = 0$, и первое слагаемое обратится в 0. Останется

(2.47) $$\Delta S = S_2 - S_1 = R\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = R(\ln V_2 - \ln V_1) = R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Экономика и энтропия (см.[4,5]*)*

Формулы (2.40) – (2.46) относятся к феноменологической термодинамике. При всей математической строгости, эта область физики не дает простого объяснения своим переменным и потенциалам. В следующей главе мы увидим, что физический смысл энтропии и термодинамических потенциалов более понятен на микроскопическом (т.е. молекулярном) уровне, а путь к их обоснованию подсказывает формула (2.47). Но

* Одинаковые обозначения (S) действия в механике и энтропии в термодинамике – несчастная случайность, к которой надо привыкнуть.

большинство математических моделей в науках о людях и обществе (англ. Human Science, в широком смысле включающих экономику и социоинженерию) в разное время были перенесены из физических дисциплин без строгого обоснования – и термодинамические величины не стали исключением. Это особенно касается энтропии и свободной энергии, которые даже у физиков считаются непростыми понятиями. Тем не менее, их уже используют в описании социума.

В экономике, как системе отношений обмена, деньги – энергоподобный универсальный эквивалент любых товаров. В отличие от полезности, капитал можно количественно измерить. Отвлекаясь от инфляции (что корректно на небольших промежутках времени), экономику большого самодостаточного региона или государства можно представить как совокупность (физики часто называют ее *ансамблем*) N абстрактных агентов, вместе располагающих суммой денег M, или *валовым продуктом*. Распределение денег по единицам ансамбля может быть очень разным; оно сильно зависит от экономической политики государства и прочих «силовых» факторов, которые редко упоминаются в экономических теориях. Интуитивно ясно, что с увеличением числа агентов N и объема валового продукта M число вариантов распределения также увеличивается. (Мы рассматриваем капиталистическую экономику, где вопрос о происхождении капитала считается неприличным и не обсуждается – то есть распределение M денег по N агентам устанавливается «свободно»).

Изотермическое расширение идеального газа, в соответствии с формулой (2.47), повышает энтропию системы. Чтобы перенести это наблюдение в экономику, предположим, что объем валового продукта M ведет себя подобно объему газа: в «расширяющейся» экономике он увеличивается. На качественном уровне введем «экономическую энтропию»

(2.47 а) $$S_{\text{экон}} = K \ln C_M^N ,$$

где число вариантов $C_M{}^N$ в распределении M единиц капитала по N агентам определяется формулой комбинаторики

(2.47 б) $$C_M^N = \frac{M!}{N!(M-N)!},$$

$M! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(M–1)\cdot M$ – *факториал*, (см. формулу (1.35) в главе 1) и K – масштабный множитель. Формула (2.47 а) показывает «степень неопределенности» в распределении капитала по агентам: если $M = N$, то $C_M{}^N = 1$ и $S_{экон} = 0$, а при $M > N$ экономическая энтропия возрастает по приблизительной аналогии с формулой (2.47). Обоснование энтропии вещества в форме (2.47 а, б) дает статистическая термодинамика (см. следующую главу) – здесь мы лишь перенесем ее без доказательства на экономические процессы.

Пусть две экономики с параметрами (N_1, M_1) и (N_2, M_2) приведены во взаимодействие (рис. 2.34). Предположим, что это взаимодействие сводится к обмену «энергией» (деньгами M, в которых «спрятаны» продажи и покупки товаров) и не включает перемещения агентов через границу раздела – то есть миграции людей (в терминах физики *массопереноса*). Тогда, по аналогии с тепловым равновесием газов, «равновесие денег» в объединенной системе с суммарным капиталом $M = M_1 + M_2$ отвечает максимуму «экономической энтропии»

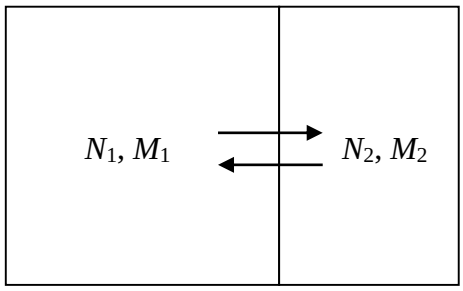


Рисунок 2.34. Обмен «энергией денег»{Mi} в экономике

$$\partial S_{\text{экон}}/_{\partial M} = {}^{\partial S_1}/_{\partial M_1} + {}^{\partial S_2}/_{\partial M_2} = 0$$

При перетоке капиталов из одной экономики в другую $dM_1 = -dM_2$ (уравнение материального баланса), поэтому

$${}^{\partial S_1}/_{\partial M_1} = {}^{\partial S_2}/_{\partial M_2}$$

Среди дифференциальных соотношений термодинамики (Приложение П4) можно найти такую формулу:

$$(\partial S/\partial U)_V = 1/T.$$

По аналогии с ней условием экономического равновесия является максимум энтропии в объединенной системы и равенство «экономической температуры» в ее частях

$$T_1^{(э)} = T_2^{(э)}.$$

«Экономической температуре» в рамках модели соответствует перевернутая производная $T^{(э)} = \partial M/\partial S$. При низкой «температуре» рост валового продукта приводит к сильному увеличению «энтропии», а при высокой – к слабому (рынок близок к насыщению). Выравнивание температуры в обеих частях системы автоматически приводит к равенству цен на одинаковые товары (см. [4.5]). Правда, отсюда следует перетекание денег от богатой экономики M_2 к бедной $M_1 < M_2$, не наблюдаемое в реальности… В начале 1990-х годов в пользу немедленного открытия внешних рынков стран СНГ приводились и «термодинамические» аргументы.

Идея температуры к настоящему времени стала почти официальной в теоретической и практической экономике («перегретый рынок»). Физические подходы в экономике мы рассмотрим во 2-й части (глава 8), но сразу сделаем принципиальное замечание:

Число агентов в экономических системах ограничено сверху численностью населения Земли (~8 млрд. чел.), что не идет ни в какое сравнение с числом Авогадро ($6\cdot10^{23}$ *частиц в одном моле вещества). Поэтому экономические системы никак нельзя считать макроскопическими. Применимость к ним таких «макроскопических» характеристик, как энтропия или температура, надо доказывать отдельно.*

Особенности систем промежуточного уровня (мезоскопических) будут обсуждаться в главе 4.

«Свободная энергия мысли»

Поиск механизмов эволюции человеческой мысли (в чуть более строгих терминах *сознания*) – «горячее» направление современной междисциплинарной физики. Более детально мы рассмотрим его в третьей части книги, а в этой главе отметим описание умственной деятельности с привлечением термодинамических параметров. В серии работ 2010-х гг. британский нейрофизиолог Карл Фристон[6] предложил схему (или, скорее, идею) «термодинамики отражения» в сознании человека внешней реальности: образов, умозаключений и т.д. Схема основана на аналогии – или метафоре – стремления мозга к минимуму свободной энергии Гельмгольца $F_{V,T=\text{const}}$ при объединении сенсорной информации p, воспринятой мозгом, и уже находящейся в нем информации q, которая позволяет распознать внешние сигналы. (Мы еще раз сталкиваемся с ограниченностью латинского алфавита). Именно,

$$F = -\langle \ln p \rangle + \langle \ln q \rangle,$$

где треугольные скобки соответствуют усреднению по всей имеющейся информации q. Второе слагаемое, взятое с обратным знаком, рассматривается как аналог энтропии, в работах Фристона не очень строго отделяемой от термодинамического потенциала. Минимуму «свободной энергии мысли» (функции F) соответствует максимальная близость новой информации p к уже имеющейся информации p по тому или иному «раздражителю», т.е. внешнему сигналу – в цитируемых работах его природа не детализируется. С позиций здравого смысла это представляется верным, но рассуждения автора с обильными математическими формулами пока не дали ни количественных, ни качественных оценок для введенных им величин.

Литература к разделу 2.3

[4]В.А.Зорич, *Математические аспекты классической термодинамики*, 2018, https://matan.math.msu.su/files/zorich/MathThermodynamics.pdf

[5]В.М. Сергеев, *Пределы рациональности. Термодинамический подход к теории экономического равновесия.* М.: Фазис, 1999.

[6]K. Friston, *The free-energy principle: a unified brain theory?* Nature Reviews – Neuroscience, 2010 (11), 127.

2.4. Динамическое равновесие и химические реакции

Сходные названия переменных («координаты», «силы», «потенциалы») в термодинамике и механике не надо понимать буквально: в нем лишь отразилось стремление физиков XIX века построить единую «теорию всего». Макроскопические системы, управляемые термодинамикой, принципиально диссипативны из-за хаотического движения составляющих их микрочастиц. В этом состоит их главное отличие от систем классической механики. Вместо механического равновесия как нулевой суммы сил, действующих на тело (см. например, рис. 1.4 в главе 1), в диссипативных многочастичных системах, включая человеческое общество, наблюдается другое явление: *динамическое равновесие*, или нулевая сумма двух *потоков*, направленных в противоположные стороны.

Пусть в замкнутом объеме сухого воздуха (например, под стеклянным колоколом) при комнатной температуре находится стакан с некоторым количеством воды (рис. 2.35). Из школьной физики мы знаем, что, благодаря тепловому движению, молекулы воды станут выходить из жидкости в газовую фазу в виде водяного пара. Испарение продолжится до тех пор, пока среднее число молекул H_2O, переходящих в пар в единицу времени, не сравняется со средним числом таких же молекул, случайным образом возвратившихся из воздуха в жидкость. Возникшее равновесие можно записать как уравнение материального баланса

$$(H_2O)_{ж} \rightleftharpoons (H_2O)_{газ}$$

(двойная стрелка показывает «встречные» процессы испарения и конденсации). Концентрацию молекул воды в газовой фазе, находящейся в динамическом равновесии с жидкостью, характеризует *парциальное давление* P_{H_2O}. Сумма парциальных давлений всех компонентов газовой смеси – в данном случае воздуха: N_2, O_2, H_2O, Ar, CO_2 и др. – по определению равна общему (атмосферному) давлению.

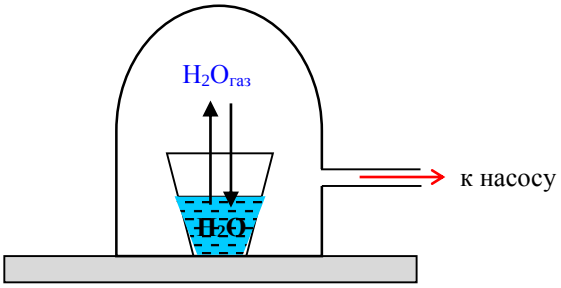


Рисунок 2.35. Испарение жидкости в замкнутом объеме

Динамический характер равновесия жидкость–газ в замкнутом объеме легко увидеть, изменяя температуру под колоколом либо откачивая часть воздуха из этого объема. Объем воды в стакане уменьшится при повышении температуры и при понижении давления и увеличится при снижении температуры. Если изменения P или T невелики, жидкая фаза не исчезнет. Равенство потоков «вышедших» $m(H_2O)_{газ}$ и «вернувшихся» $m(H_2O)_{ж}$ молекул воды

$$m(H_2O)_{г} = m(H_2O)_{ж},$$

где $m(H_2O)_{ж} \sim P(H_2O)$, $m(H_2O)_{газ} \sim S\rho(H_2O)$, S – площадь поверхности испарения жидкости, $\rho(H_2O)$ – ее плотность, при S, ρ = const (плотности воды с хорошей точностью постоянна) преобразуется в зависимость

(2.48) $$P_{H_2O} = K(P,T),$$

где величина «константы испарения» определяется условиями опыта.

Примеры динамического равновесия не ограничиваются испарением–конденсацией. В более общем случае аналогом соотношения (2.48) служит материальный баланс атомов, переходящих из одного вещества в другое при *обратимой* химической реакции:

(2.49 а) $$N_2O_4 \text{ (жидкость)} \rightleftharpoons N_2O_4 \text{ (газ)}$$

(2.49 б) N_2O_4 (газ) ⇌ $2NO_2$ (газ) – 18.4 кдж/моль

В демонстрационном опыте, которому соответствуют уравнения (2.49 а, б), бесцветная прозрачная жидкость N_2O_4 («четырехокись азота») на первой стадии переходит в бесцветный газ N_2O_4, молекулы которого далее расщепляются (*диссоциируют*), образуя бурый газ NO_2 («двуокись азота»). Глубину химического превращения, определяемую давлением и температурой, можно точно установить по окраске газовой фазы. Цифра в правой половине уравнения (2.49 б) отражает тепловой эффект ΔH реакции при постоянном давлении. Величине $\Delta H > 0$ соответствуют *экзотермические* реакции (то есть протекающие с выделением теплоты), $\Delta H < 0$ *эндотермические*. Диссоциация молекул N_2O_4 – эндотермическая реакция.

Заметим, что энергия разрыва связи $O_2N–NO_2$ в молекуле четырехокиси азота намного выше средней энергии теплового движения молекул в газовой фазе (несколько кдж/моль). В соответствии с законом сохранения энергии, к расщеплению способна лишь небольшая доля «горячих» молекул N_2O_4, концентрацию которых задает распределение Гиббса

(2.50) $$P = P_0 exp\,(-\Delta H/RT),$$

где P_0 – парциальное давление N_2O_4 в условиях реакции. Как мы видели выше (разд. 2.3), в химическом уравнении (2.49 б) доля «горячих» молекул составит 4-5% – для реакции этого вполне достаточно.

Выражение (2.49 б) – пример *уравнения химической реакции*. Такие уравнения отражают материальный баланс: число атомов каждого элемента при переходе одного вещества в другое остается неизменным. В общем виде уравнение реакции

$$p\text{A} + q\text{B} + \ldots \rightarrow \text{продукты}$$

содержит коэффициенты p, q, и др., которые соответствуют мольным количествам *реагентов* A, B, C…, взаимодействующих с образованием продуктов реакции, например

$$CaCO_3 + 2HCl \rightarrow CaCl_2 + CO_2 + H_2O$$

(получение углекислого газа из мела и соляной кислоты на школьных уроках химии). На основе материального баланса реагентов составляются дифференциальные уравнения скорости реакции. Для двух реагентов A и B, при взаимодействии образующих продукт C,

(2.51) $$w = dc_{\text{прод}}/dt = k c_A^{\,p} c_B^{\,q}$$ *закон действующих масс*

Здесь c_A и c_B – концентрации реагентов, $c_{\text{прод}}$ –концентрация продукта реакции, k – *константа скорости*.

Дифференциальными уравнениями вида (2.51) занимается *химическая кинетика*. Из их общей формы следует, что размерность «константы» k может быть разной для разных *механизмов реакции* (скорость реакции всегда имеет размерность [концентрация / время]). Таким образом, формула (2.51) носит эмпирический характер. С другой стороны, скорости очень многих реакций в самом деле нелинейно зависят от концентраций реагирующих веществ, хотя показатели степени p, q и др. в них могут не соответствовать уравнению

материального баланса. Многие сложные динамические системы, которые будут рассмотрены в главе 4, основаны на уравнениях химической кинетики.

Величина константы скорости в формуле (2.51) в согласии с распределением Больцмана-Гиббса имеет вид

(2.52) $$k = Ae^{-E_a/RT},$$

где E_a – *энергия активации*, A – масштабный множитель, который определяется молекулярным механизмом реакции. При фиксированной температуре процессы с более высокой энергией активации протекают медленнее, с низкой E_a – быстрее.

Механизм реакции может быть весьма сложным. В химической кинетике вводится понятие *лимитирующей стадии*: наиболее медленной ступени, которая определяет суммарную скорость многостадийной реакции. Так, если в уравнении

$$A \xrightarrow{k_1} B + C \xrightarrow{k_2} D + E$$

константа скорости для промежуточной стадии $k_2 >> k_1$, скорость образования конечных продуктов D и E определяется скоростью медленной стадии $k_1 c_A$ и не зависит от концентрации промежуточных продуктов B и C (*интермедиатов*), которые, возникая в системе, сразу превращаются в продукты D и E.

Из уравнений (2.51) и (2.52) можно вывести общее понятие *химического равновесия*. Так, для диссоциации N_2O_4 в газовой фазе скорости «прямой» реакции

$$N_2O_4 \rightarrow 2NO_2 - 18.4 \text{ кдж/моль}$$

(2.53 а) $$w_+ = k_+ P(N_2O_4)$$

и обратной реакции

$$2NO_2 \rightarrow N_2O_4 + 18.4 \text{ кдж/моль}$$

(2.53 б) $$w_- = k_- P(N_2O_4)^2$$

(где роль концентраций играют парциальные давления газов). В состоянии динамического равновесия эти скорости равны: $w_+ = w_-$. При этом «прямая» реакция является эндотермической, а обратная – экзотермической, то есть она сопровождается выделением теплоты. Приравнивая (2.53 а) и (2.53 б), получим:

$$k_+ P(N_2O_4) = k_- [P(NO_2)]^2, \text{ или}$$

(2.54) $$K = {k_+}/{k_-} = \frac{[P(NO_2)]^2}{P(N_2O_4)}$$

Отношений K констант прямой и обратной реакций при равенстве их скоростей в заданных условиях (давление, температура) – постоянная величина, называемая *константой равновесия*. Из (2.52) и (2.54) можно вывести зависимость K от энергетического параметра реакции:

(2.55) $$K = \exp(-\Delta G/RT),$$

где $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ – изменение потенциала Гиббса при переходе от реагентов к продуктам равновесной реакции в газовой фазе.

Из формулы (2.54) следует, что химическое (как и любое динамическое) равновесие сдвигается при внешнем воздействии. В самом деле, если при неизменной температуре отношение концентраций продуктов реакций к концентрациям реагентов постоянно (K = const), то увеличение числителя в (2.54) вызовет увеличение знаменателя. Таким образом, в закрытом объеме повышение давления вызовет опережающий рост парциального давления $P(N_2O_4)$. Химическое равновесие сдвинется «влево», то есть в сторону обратной реакции $2NO_2 \rightarrow N_2O_4$, снижающей суммарное давление газа. Наоборот, понижение давления сдвинет равновесие «вправо»: диссоциация N_2O_4 увеличит число молекул в системе, компенсируя уменьшение давления. Повышение температуры увеличит долю распавшихся молекул N_2O_4 (сдвиг равновесия вправо), а так как распад протекает с поглощением энергии, он будет способствовать снижению температуры.

Направление сдвига динамической системы под внешним воздействием определяет ***принцип Ле Шателье***:

Химическое равновесие при внешнем воздействии сдвигается в сторону, уменьшающую это воздействие.

За пределами химии принцип Ле Шателье также справедлив в широком классе динамических равновесий. Так, в рыночной экономике цену X товара определяет баланс его спроса $Q_D = D$ (demand) и предложения $Q_S = S$ (supply), то есть требуемого и наличного количеств этого товара

(2.56) $$X = K\,{}^{D}\!/_{S},$$

где коэффициент пропорциональности K косвенно отражает состояние экономики. Формулу (2.56) можно получить, если общую зависимость $X = f(D/S)$ разложить в ряд Тейлора, ограничиться первой степенью аргумента D/S и приравнять к нулю X_0: долю издержек производства в цене товара. Ей легко придать общий «квазихимический» вид

(2.56 а) $$\frac{X \cdot S^p}{D^q} = K = \text{const}$$

(в «стилизованном» уравнении достаточно положить $p = q = 1$). При равновесии спроса и предложения $D_E = S_E$: константа K неявно включает все факторы, задающие равновесную цену X_E. Небольшие отклонения от равновесной цены приводят к сдвигам вдоль стилизованных кривых спроса и предложения; возникающая разность $\Delta = D_E - S_E$ способствует возврату к точке равновесия ($Q_E^{(1)}$, $X_E^{(1)}$) (рис. 2.36). Существенный же сдвиг функции спроса, т.е. увеличение знаменателя в формуле (2.56 а), приведет к увеличению числителя: при неизменной цене товара (X = const) поставщики увеличат его предложение S, а при фиксированном предложении вырастет цена. Совместное действие этих факторов приведет к установлению нового равновесия ($Q_E^{(2)}$, $X_E^{(2)}$). Динамические равновесия спроса и предложения на рынке, конкуренции однотипных товаров (*эластичность спроса*), замещения факторов производства (функция Кобба-Дугласа, см. 1-ю главу) и другие – важные инструменты неоклассической экономической теории.

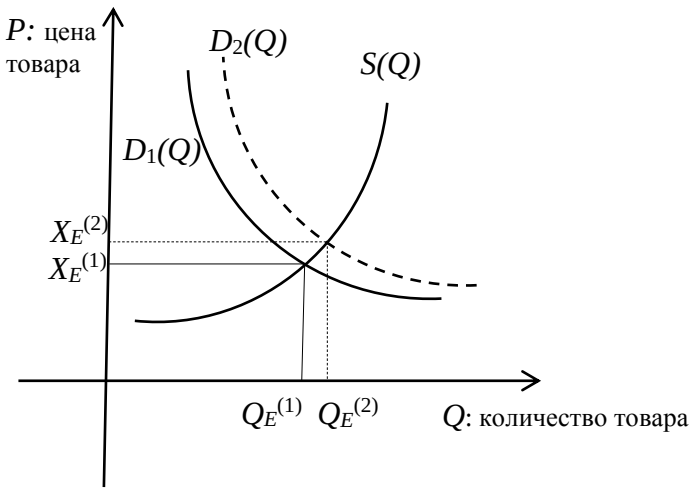


Рисунок 2.36. Сдвиг динамического равновесия *S* = *D* при увеличении спроса на товар

2.5. Фазовые переходы и критические явления

Испарение и замерзание воды, плавление металла, химическая реакция – все это разные примеры *фазовых переходов*. В подобных процессах «неживая» система переходит из одного состояния в другое состояние с быстрым и значительным изменением своих параметров. Если система однородна (например, вся состоит из единственного вещества) и находится в одном агрегатном состоянии, она называется *фазой*. Многие явления в экономике и обществе (банкротства, кризисы, революции, войны) по эмпирической картине напоминают фазовый переход; математические модели таких явлений нередко заимствуют из соответствующих разделов физики.

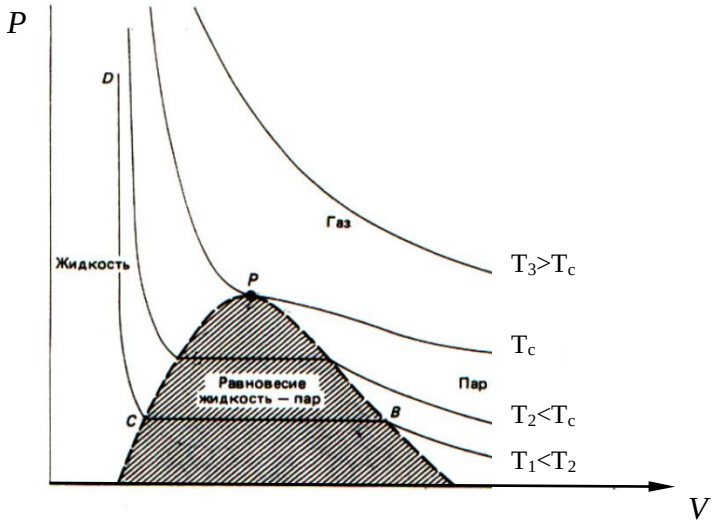


Рисунок 2.37. Изотермы конденсации газа, штриховая линия – критический купол

Фазовые переходы в физических системах разнообразны по природе, механизмам и глубине протекания. В примере из «школьной» физики – конденсации *реального газа* – его изотермическое сжатие в цилиндре под поршнем при некотором пороговом давлении приводит к появлению капель жидкости: система становится *двухфазной*. На *P*,*V*–диаграмме ей соответствует горизонтальный участок изотермы с постоянным давлением (рис. 2.37). На этом участке уменьшение объема под поршнем, в полном соответствии с

принципом Ле Шателье, сдвигает равновесие «газ ⇌ жидкость» в сторону более плотной жидкости до тех пор, пока весь газ в цилиндре не перейдет в жидкую фазу. Дальнейшее сжатие этой снова однофазной, но уже гораздо более плотной среды приводит к резкому возрастанию давления. Область конденсации при разных температурах T на P,V–диаграмме ограничена *критическим куполом*. Изотермы идеального газа, отвечающие высоким температурам, лежат значительно выше этой области.

С точки зрения физики, для конденсации газа в жидкость его молекулы должны сблизиться на расстояние порядка минимума r межмолекулярного потенциала (2.32 а) (менее 1 нм), имея кинетическую энергию не более глубины потенциальной ямы U_0. При слишком высокой кинетической энергии (т.е. температуре) столкнувшиеся молекулы «выскочат» из потенциальной ямы, не удержавшись на близком расстоянии. Реальная картина сложнее: конденсация сопровождается выделением тепла, так что для движения по изотермам на рис. 2.36 цилиндр с поршнем надо охлаждать. В двухфазной системе присутствуют агрегаты, которые могут состоять из нескольких сближенных молекул (*кластеры*), сотен и тысяч молекул (большие кластеры) и далее до миллионов и миллиардов молекул в микроскопических капельках жидкости. Эти агрегаты находится в тепловом движении, они дробятся и сливаются – то есть в каждой точке (P, V, T) системы газ и жидкость находятся в динамическом равновесии.

Условия существования индивидуального вещества в твердом (кристаллическом), жидком и газообразном состояниях показывает его *фазовая диаграмма* (рис. 2.38). На этом графике в координатах (T, P) линии, или *ветви*, соответствуют равновесию двух фаз: «твердое тело – газ» (*A*-*Tp*), «твердое тело – жидкость» (*B*-*Tp*) и «газ – жидкость» (*Tp*-*K*). Каждая такая диаграмма является сечением трехмерной поверхности состояний в координатах (T, P, V) либо (T, P, ρ), где ρ(T, P) – плотность вещества, но поверхности состояний выглядят гораздо сложнее и реже используются. В особой точке T, P-диаграммы, которая называется *тройной точкой Tp*, твердая, жидкая и газовая фазы сосуществуют в динамическом равновесии. В отличие от равновесия твердого тела с жидкостью, ветвь «жидкость – газ» не уходит в бесконечность: она обрывается в *критической точке K*, «обход» которой позволяет перевести газ в жидкость и обратно без макроскопического разделения фаз[*].

Состоянию фазы на (T, P)-диаграмме соответствует свободная энергия Гиббса, или изобарно-изотермический потенциал $G(P, T) = U + PV - TS$ (см. формулы (2.43) и рис. 2.33). При постоянном давлении эта функция «*выпуклая вверх*» (ее вторые производные отрицательны) и уменьшается с повышением температуры. В точке перехода в менее упорядоченную фазу ее «связанная энергия» TS возрастает на конечную величину $T\Delta S$, т.к.

[*] Линия равновесия «твердое тело – жидкость» на фазовой диаграмме (рис. 2.38) из общих соображений также не может уходить в бесконечность: все вещества состоят из атомов конечного размера. При очень высоком давлении порядка нескольких Мбар (мегабар, т.е. млн. атмосфер) многие кристаллические фазы действительно переходят в неупорядоченное аморфное состояние, эквивалентное затвердевшей жидкости («стеклу»). Набор фаз высокого давления сложен, поскольку атомы всех элементов тяжелее водорода и гелия имеют несколько электронных оболочек (см. справочник [7]). При сверхвысоких давлениях электронные оболочки могут «вдавливаться» в атом и смешиваться, изменяя характер химических связей в образце. Для экспериментального исследования этой области требуется статическое давление свыше 10 Мбар, которое в лабораторных условиях еще не достигнуто.

плавление и испарение сопровождаются «мгновенным» увеличением энтропии ΔS. Плотность высокотемпературной фазы также уменьшается, так что $\Delta V > 0$ (для испарения жидкости это понятно). Суммарное изменение потенциала Гиббса при фазовом переходе выглядит так: функция $G(P, T)$ остается непрерывной, а ее первые производные, говоря математическим языком, «претерпевают разрыв» (рис. 2.39). При P = const этот разрыв соответствует скачкообразному изменению теплоемкости и энтропии (рис. 2.39 б).

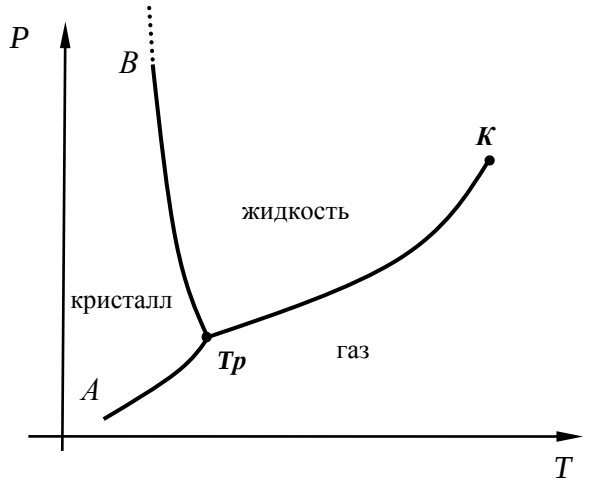


Рисунок 2.38. Стилизованная фазовая диаграмма воды

Разрыв производной $(\partial G/\partial T)_P$ при фазовом переходе хорошо согласуется со здравым смыслом: разные «микроструктуры» твердого тела и жидкости приводят к разному тепловому движению составляющих их частиц. У жидкости, где кристаллический порядок расположения частиц в основном разрушен, теплоемкость ниже. Аналогично изменяется свободная энергия Гельмгольца $F = U - TS$ с разрывом производной $S = (\partial F/\partial T)_V$. Процессы, которым соответствуют графики на рис. 2.39 а, называются *фазовыми переходами (ФП) 1-го рода*.

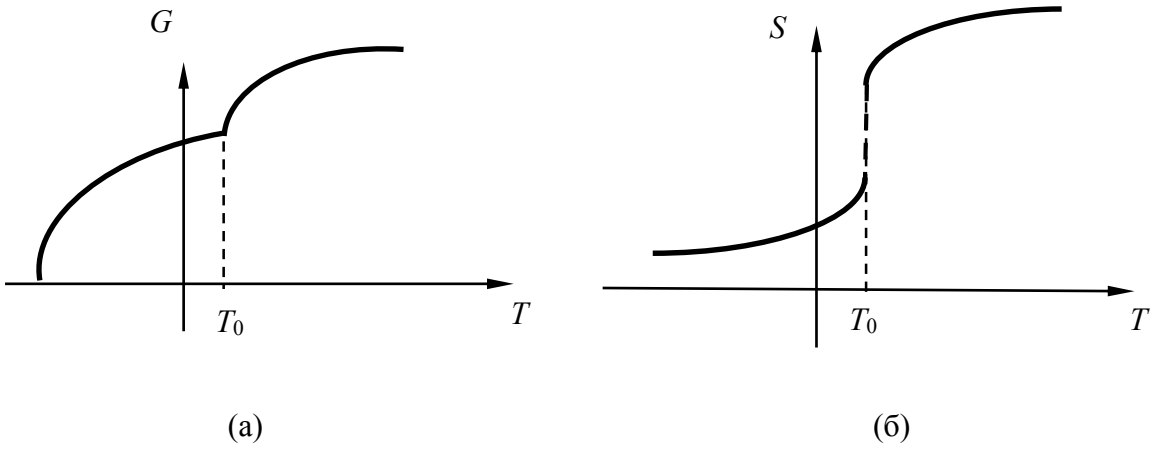


Рисунок 2.39. (а) Изменение потенциала Гиббса при фазовом переходе (ФП) 1-го рода («надлом»). (б) Изменение энтропии: разрыв (ФП 1-го рода) или «скачок» (ФП 2-го рода)

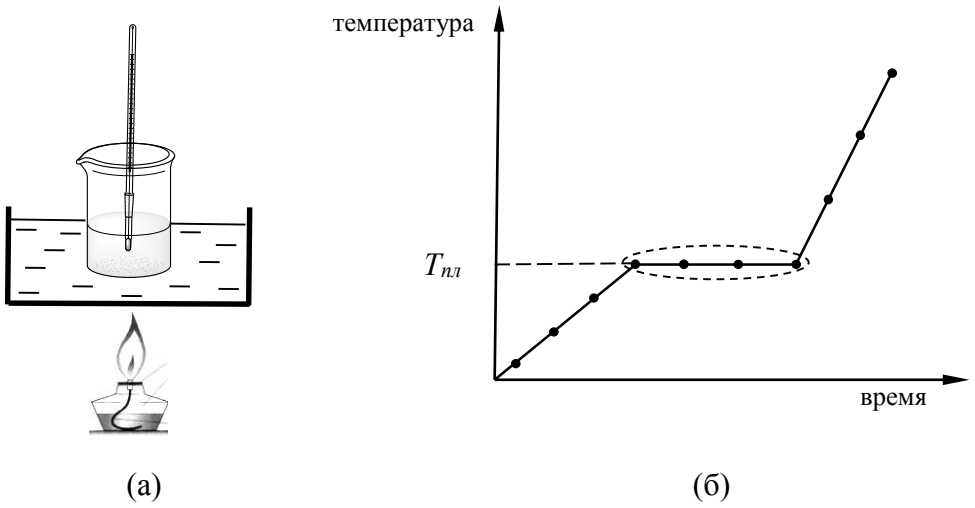
Полный набор всевозможных фазовых переходов весьма разнообразен. В некоторых из них атомная структура вещества почти не изменяется, как для магнитных фаз (раздел 3.4 в следующей главе). При таких *фазовых переходах 2-го рода* «надлом» термодинамических потенциалов отсутствует или не регистрируется существующими экспериментальными

методами. Производные термодинамических потенциалов при этом изменяются быстро («скачком») без разрыва (см. рис. 2.38 б). Другие фазы могут обратимо преобразовываться друг в друга (обычно в жестких условиях), при этом сильно различаясь как по структуре, так и по внутренней энергии – например, две кристаллические модификации углерода: алмаз и графит. Условие $U_1 \neq U_2$ означает *разрыв термодинамических потенциалов* в точке T_0. Такие фазовые переходы «нулевого порядка» нередко относят к химическим реакциям. Термодинамические модели фазовых переходов образуют большой массив экспериментальных данных и переносятся на описание кризисных явлений в социуме.

Разрыв теплоемкости образца при фазовом переходе приводит к поглощению теплоты $\Delta Q = \Delta C \cdot T$ при плавлении кристаллического вещества либо испарении жидкости – и к выделению тепла в обратных процессах. В повседневной жизни мы чувствуем холод от прикосновения мокрой ткани или, например, дезинфицирующей салфетки, пропитанной спиртом. С XIX века это называли «скрытой», или *латентной*, теплотой испарения: термин «латентная теплота патриотизма» использовал Лев Толстой в «Войне и мире». На экспериментальном уровне ненулевая теплота фазового перехода проявляется в *расходимости* измеряемых параметров вещества вблизи температуры $T_{ФП}$.

Критические параметры фазовых переходов

В одном из опытов по физике в далекие 1970-е годы мы, школьники, измеряли температуру кристаллического нафталина, нагреваемого «на водяной бане» (рис. 2.40 а). Источник тепла (пламя спиртовки) через стакан с водой, игравший роль теплообменника, передавал образцу (порошку нафталина) постоянное количество теплоты $\Delta Q/\Delta t$ в единицу времени; учащиеся регистрировали зависимость температуры образца от времени и строили ее график (Рис. 2.40 б). На этом графике наглядно проявлялась «скрытая теплота» фазового перехода: достигнув точки плавления 80 °C, температура образца «замирала» и оставалась неизменной, пока весь нафталин не переходил в жидкость. Таким образом, на горизонтальном участке графика теплоемкость образца $\Delta Q/\Delta T$ обращалась в бесконечность, т.к. $\Delta T = 0$.



(а) (б)

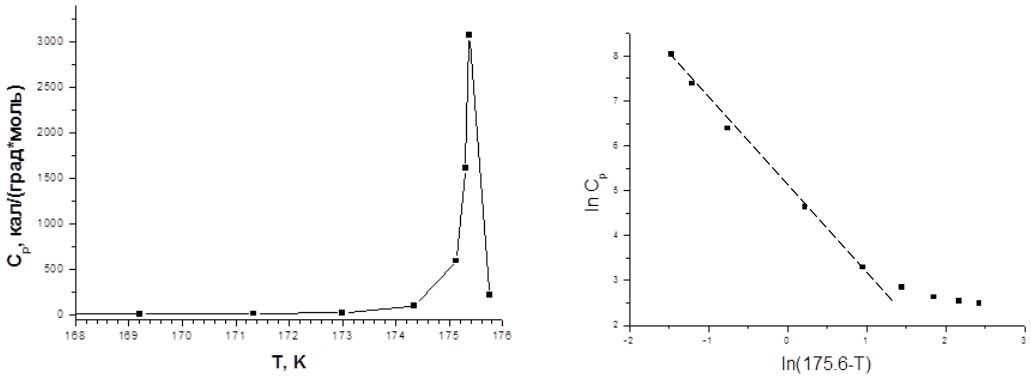
Рисунок 2.40. (а) Школьный опыт по плавлению нафталина, (б) ход изменения температуры образца

Длина горизонтального участка, где образец поглощает тепло без изменения температуры, очевидно зависит от количества вещества: чем меньше вещества, тем он короче. Но даже с очень малым количеством образца, когда горизонтальная часть стянется в точку, график останется «надломленным»: при температуре плавления $T_{пл}$ $dT/dt = 0$ (где T – температура, t – время; мы опять упираемся в ограничения алфавита). Но поскольку dQ/dt = const > 0 (непрерывный нагрев), простейшее алгебраическое преобразование $dt = dQ/\text{const}$ ($dT/dQ = 0$) по-прежнему дает

$$C(T \to T_{пл}) = dQ/dT \to \infty:$$

теплоемкость образца в точке плавления стремится к бесконечности! Это один из примеров *критических явлений*: вблизи фазового перехода измеряемые параметры фаз «расходятся».

На рис. 2.41 а представлена экспериментальная зависимость удельной теплоемкости метанола (метилового спирта) CH_3OH от температуры вблизи его точки плавления $T_{пл}$ = 175.6 K. Из графика видно, что при $T \to T_{пл}$ теплоемкость C_P резко возрастает. В полулогарифмических координатах ($\ln C_P$, T), где экспоненциальная функция $C_P \sim e^{AT}$ превратилась бы в прямую линию, график остается криволинейным. И только в двойном логарифмическом масштабе [$\ln C_P$, $\ln(T_{пл}-T)$] вблизи $T_{пл}$ возникает прямая линия, которой соответствует обратная степенная зависимость $C_P = (T_{пл}-T)^{-\alpha}$ с показателем степени $\alpha \approx 1.92$ (рис. 2.41 б).



(а) (б)

Рисунок 2.41. (а) Удельная теплоемкость метилового спирта CH_3OH вблизи точки плавления (H.G. Carlson, E.F. Westrum, Jr., *J. Chem. Phys.* 1971, 54, 1464). (б) та же зависимость в двойных логарифмических координатах, штриховая линия – обратная степенная функция $C_P=(175.6-T)^{-1.92}$

Итак, при $T \to T_{пл}$ наблюдается гиперболическая, или *расходящаяся* зависимость теплоемкости от температуры: $C_P[(T_{пл}-T)] \to \infty$. В физике фазовых переходов эту зависимость обычно выражают через *критические параметры*:

$\varepsilon = (T_0 - T)/T$, где T_0 – температура перехода, вблизи которой

(2.57) $$C_P \sim \varepsilon^{-\beta}.$$

Критические показатели степени β для однотипных процессов (например, плавления молекулярных кристаллов) имеют близкие значения (см. [6] в списке литературы).

Гиперболическая зависимость теплоемкости от температуры вблизи точки фазового перехода отражает неоднородную (*гетерогенную*) структуру вещества в этих условиях. Так, на фазовой диаграмме на рис. 2.38 равновесие «молекулярная жидкость – газ» вблизи критической точки C превращается в динамическое равновесие кластеров, агрегатов и микроскопических капель жидкости. Размеры D таких молекулярных агрегатов тоже распределены по обратной степенной зависимости с другим показателем степени

$$D \sim \varepsilon^{-\gamma}.$$

Все такие распределения *масштабно инвариантны*: распределение кластеров по размерам не зависит от увеличения, при котором мы рассматриваем вещество в микроскоп вблизи критической точки. Сильное рассеяние света на больших молекулярных агрегатах (в точке C прозрачный образец конденсирующегося газа мутнеет) называется *критической опалесценцией*, а «промежуточное» состояние вещества в этих условиях – *сверхкритическим флюидом* (от англ. fluid: жидкий).

Масштабно инвариантное распределение также имеют размеры упорядоченных участков (доменов) кристалла вблизи его перехода в жидкую фазу, магнитно-упорядоченных доменов ферромагнетика в равновесии с парамагнитной фазой (раздел 3.4 в следующей главе) и многие другие компоненты конденсированной среды. Это описание удается перенести на большие социальные системы, состоящие из «доменов» разного масштаба (предприятия в экономике, группы и коллективы в социологии и т.д.). Многие из этих систем постоянно находятся в окрестностях ограниченных «фазовых переходов» – таких как слияние и поглощение фирм в капиталистической экономике («конденсация капитала»), банкротства, кризисы, революции и др. Расходящуюся гиперболическую зависимость параметров социальной системы вблизи точки перехода (обычно кризиса) один из основоположников российской социофизической школы Сергей Павлович Курдюмов (1928-2004) назвал *режимом с обострением*.

Гиперболический рост населения Земли в XV – XX вв.

Рост численности популяции в благоприятных условиях после работ Мальтуса более века считали «мальтузианским», то есть экспоненциальным (см. формулу (2.3)). Однако во второй половине XX века выяснилось, что демографическим данным по ряду стран и всему населению Земли в масштабах столетий лучше соответствует гиперболическая зависимость

$$N = N_0 \frac{1}{(t_\infty - t)^\gamma}, \tag{2.58}$$

где N_0 – численность населения в некоторый начальный момент (фактически это масштабный множитель), $\gamma \approx 1$, а t_∞ – «критическая точка», по которой проходит асимптота гиперболы (см. рис. 2.20 б). Формально с приближением к t_∞ численность человечества должна обратиться в бесконечность[*], но формулу (2.58) не следует понимать буквально.

[*] Статья, заявившая о гиперболической динамике роста человечества, вышла в 1960 г. под броским названием «Конец света: 21 октября 2026 г. (H. von Foerster, *et al.* Science, 1960, **132** (3436), 1291). Дату «конца света», то есть положение асимптоты t_∞, авторы определили по линейной регрессии в двойных логарифмических координатах с небольшим числом точек и тремя варьируемыми параметрами N_0, γ и t_∞. Необдуманный рекламный прием сильно повредил репутации зарождающейся «физики общества» в академических кругах. По иронии судьбы, население Земли, переживающее

Она лишь утверждает, что на некотором интервале исторического времени населения Земли росло «быстрее», чем по экспоненте.

Главное препятствие в исследовании исторической динамики роста человечества – отсутствие надежных демографических данных. Регулярные всеобщие переписи населения происходили в Древнем Риме, а также в древнем и средневековом Китае. В Европе и США они начались лишь с конца XVIII века (в Российской империи с 1897 г.). Достоверные сведения о численности населения Земли исчерпываются XX веком; все остальные историко-демографические данные по XV-XVIII вв. основаны на оценках по разрозненным сведениям из церковных записей и метрических книг (Западная Европа), налоговых документов и списков рекрутов (Китай и некоторые другие государства Востока; Россия начиная с Петра I). Для 1-го тысячелетия н.э. и более древних периодов доступны только оценки. Тем не менее, большинство историков и демографов считает наиболее достоверными данные за два тысячелетия, приведенные в Табл. 2.2. Этим цифрам гораздо лучше соответствует гиперболическая зависимость (2.58), чем экспоненциальный рост (2.3).

«Надэкспоненциальный» рост человечества вызвал большой интерес в гуманитарных кругах, представители которых вряд ли могли критически оценить достоверность использованных данных (рис. 2.42 а). Гиперболическую динамику и ее относительное замедление, проявившееся к концу XX века (*демографический переход*) моделировали во многих экономических и междисциплинарных работах[7,8]. Однако «физический смысл» такой динамики в этих работах не был установлен.

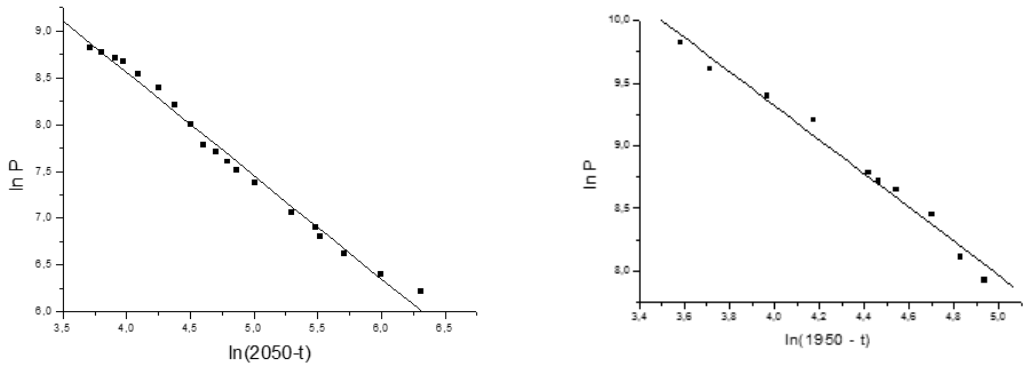
Таблица 2.2

Численность населения Земли (млн. чел.) с I по XX век нашей эры (см.[7])

Год	Население	Год	Население
1	170	1800	900
200	190	1850	1200
400	190	1875	1325
600	200	1900	1625
800	220	1920	1813
1000	265	1930	1987
1100	320	1940	2213
1200	360	1950	2516
1300	360	1960	3019
1400	350	1970	3693
1500	425	1980	4450
1600	545	1990	5333
1650	545	2000	6145*
1700	610	2010	6957*
1750	720	2020	7795*

* https://www.worldometers.info/world-population/

демографический переход, с середины XX века растет уже не гиперболически, а линейно – в 60-е годы такого ряда данных еще не было.



(а) (б)

Рисунок 2.42. Динамика численности населения в двойных логарифмических координатах: (а) население Земли в 1650-1970 гг., t_0=2050, β =1.03; (б) городское население Европейской России в 1800-1914 гг., t_0=1950, β=1.36 (см. А.Г. Рашин, *Население России за 100 лет (1811-1913 гг.)* Госстатиздат, Москва, 1956)

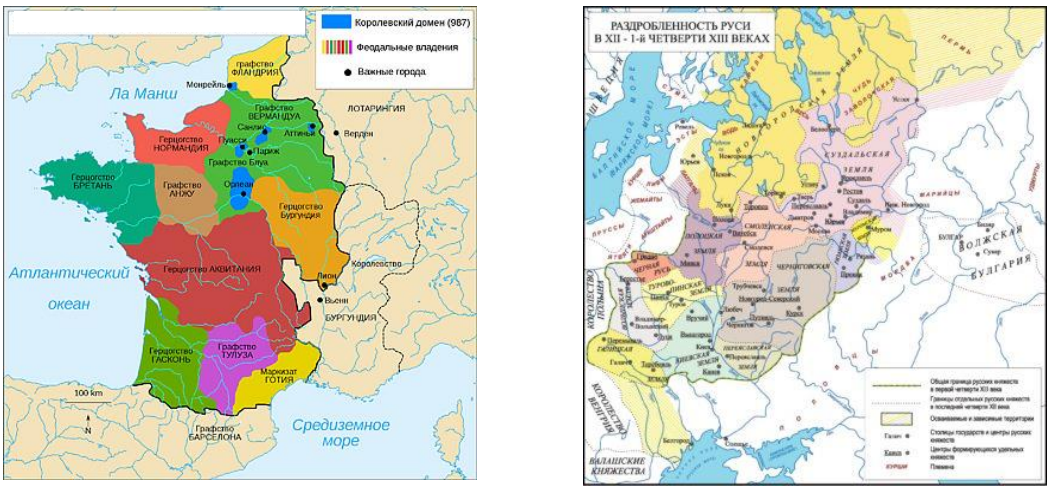
В частности, модель, предложенная Майклом Кремером,[7] воспроизводит гиперболический рост человечества в XV-XX вв. н.э. (см. табл. 2.2), не давая ему убедительного объяснения. В ее рамках скорость роста $dN/dt=A(N)\cdot N$ пропорциональна произведению численности населения N на *уровень технологий* $A(N)$ – возрастающую функцию от N, поскольку число изобретателей пропорционально численности населения. После некоторых преобразований автором[7] был получен искомый гиперболический рост $N(t)$. В цитируемой статье постулировались свободное перемещение информации и активное внедрение изобретений в населенной части суши во все времена, начиная с доисторических, а также использовалась производственная функция Кобба-Дугласа, подразумевающая свободное замещение труда капиталом в архаических обществах.

В действительности гиперболическая динамика $N(t)$ в модели Кремера следует из введенного в ней множителя $A(N)$ без дополнительных допущений. Разлагая $A(N)$ в ряд Маклорена (формула (1.36) в разд. 1.4 главы 1) и приравнивая в этом разложении к нулю все члены $(1/k!)A^{(k)}(0)N^k$ с $k > 1$, а также резонно полагая $A(0) = 0$, получим простое уравнение

$$dN/dt = A'(0)N^2, \text{ или } dN/N^2 = -d\left(\frac{1}{N}\right) = A'(0)dt$$

с решением $N = 1/[C - A'(0)t] = a/(t_0 - t)$, где C – постоянная интегрирования, $a = 1/A'(0)$ и $t_0=C/A'(0)$ – то есть гиперболическую зависимость численности населения от времени. Так как функция $A(N)$ неизвестна, наложенные условия не менее правомочны, чем модель Кремера.

С нашей точки зрения[9], гиперболическая динамика (2.58) *не является* универсальным законом роста человечества. Она лучше всего соответствует демографическим данным с XV по первую половину XX вв., то есть периоду интенсивного преодоления феодальной раздробленности с объединением стран Европы и, далее, мира в единую экономическую систему. При «конденсации» хозяйственных и политических субъектов (рис. 2.43) по механизму фазового перехода *управляющий параметр,* или «общественная температура» T – фактически уровень насилия среди враждующих «доменов» (городов, графств, княжеств, государств) – уменьшался с течением времени.



(а) (б)

Рисунок 2.43. «Домены» политической раздробленности: (а) территория Франции, X век, (б) русские княжества, XII-XIII вв. (карты взяты из сети Интернет)

На медленное улучшение жизненных условий как лимитирующую стадию объединения (в масштабе столетий) население объединяемых территорий отвечало более быстрым ростом (в масштабе поколения, т.е. 15-20 лет), а также развитием ремесел, торговли и промышленности. В пользу такого объяснения свидетельствуют данные по численности населения отдельных стран и регионов: они показывают родственную гиперболическую динамику с разными показателями степени и положениями асимптот (рис. 2.42 б). С возникновением единой мировой хозяйственно системы в 1-й половине – середине XX века начинается демографический переход. Динамика роста человечества в настоящее время замедляется (в последние полвека рост линейный) с перспективами выхода на стационарную численность населения Земли – которая, по разным оценкам, может составить от 10 до 15 млрд. человек[8].

Литература к разделу 2.5

[7] M. Kremer, *Population growth and technological change: one million B.C. to 1990*, Quart. J. Econ., 1993, **108** (3), 681.

[8] С.П. Капица. *Общая теория роста человечества*. М: Наука, 1999.

[9] Y.L. Slovokhotov, V.X. Echenique, *Hyperbolic trend of a global population in XVI-XX a.d. as a mirror of 'condensation' in the World system,* 11th Internal. Conf. Management of Large-Scale Systems (MLSD) 2018, IEEE *Xplore*, DOI:10.1109/MLSD.2018.8551772,

Рекомендуемая литература

1. А.П. Ершов, В.Г. Харитонов, *Физика. Учебник для школ физико-математического профиля*. М.: Научный мир, 2001.
2. Н.Г. Тактаров, *Справочник по высшей математике для студентов вузов*, М.: ЛИБРОКОМ, 2015.
3. Ю.Ю. Тарасевич, *Математическое и компьютерное моделирование*, М.: УРСС, 2003.
4. С.Э. Фриш, А.В. Тиморева, *Курс общей физики*, СПб.: Лань, 2017, т. 1.
5. В.И. Горшков, И.А. Кузнецов, *Основы физической химии*, Изд-во МГУ, 1993.
6. Г. Стенли, *Фазовые переходы и критические явления*, М.: Мир, 1973.
7. Е.А. Еремина, О.Н. Рыжова. *Химия: справочник школьника*. М.: МГУ, 2014.

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Действия с комплексными числами. Векторы и матрицы. Леонтьевские матрицы ввода-вывода. Тензоры и дифференциальные операторы. Дифференциальные уравнения в частных производных: уравнение теплопроводности, волновое уравнение, уравнение Лапласа. Соотношения гидродинамики, уравнение Навье-Стокса, число Рейнольдса.

Элементы квантовой механики: волновая функция, уравнение Шредингера. Связанные состояния и свободное движение частиц. Простейшие квантовые системы, атом, лазер, «социальный лазер». Интерференция волн де Бройля. Законы сохранения и «квантовая запутанность».

Основные понятия статистической термодинамики и компьютерное моделирование многочастичных систем. Расчетные методы молекулярной механики, Монте-Карло и молекулярной динамики. Модели Изинга и Поттса.

Элементы релятивистской механики. Преобразование Лоренца. Масса, импульс и энергия релятивистской частицы. Геометрия пространства-времени, мировая линия, световой конус. Достижения релятивистской физики.

В этой главе мы перечислим некоторые соотношения теоретической физики. Студентов, изучающих естественные науки, знакомят с ними ближе к старшим курсам, и продолжительность такого знакомства сильно варьируется для разных специальностей. Но в описании экономики и общества все шире применяются векторы, матрицы, уравнения в частных производных и компьютерное моделирование, и эти темы следует вспомнить, а для тех, кто прежде с ними не сталкивался – освоить в разумном начальном объеме. Как и раньше, нас будут интересовать общие принципы, описание физических систем на качественном уровне и его использование в междисциплинарных моделях. Этот материал будет использован во второй части книги.

3.1. Некоторые сведения из математики

Автор отдает себе отчет в том, что у большинства носителей гуманитарного знания знакомство с математикой завершилось в средней школе. Однако профессиональное самолюбие исследователя, в область интересов которого начинают вторгаться математические и физические конструкции, вполне может заставить условного филолога или юриста понять, как эти конструкции устроены. Если «гуманитарный» читатель успешно преодолел две первые главы, выполнил десяток заданий и в некоторых самостоятельно давал правильные ответы – это хорошие предпосылки к тому, что третья глава, а за ней и вся книга будут освоены без особенного напряжения сил. В более смягченном варианте то же самое относится к физикам-экспериментаторам, химикам, биологам и представителям других естественных дисциплин, проявляющим интерес к междисциплинарным приложениям физики. Новые математические понятия и соотношения в этой главе и далее, как правило, вводятся без доказательства с пояснениями «как это работает». Математика необходима нам как логический скелет теорий, которые применяются, в том числе, за пределами канонической физики.

3.1.1.Мнимая единица и комплексные числа

Мнимые числа - это прекрасное и чудесное убежище божественного духа,
почти что амфибия бытия с небытиём
Готфрид Вильгельм Лейбниц,
великий математик, философ и ученый-энциклопедист XVII-XVIII вв.

Эпиграф не должен пугать читателя: он лишь показывает, что новые математические идеи вызывали сильные чувства даже у профессионалов. На деле понятие мнимых и, шире, комплексных чисел не сложнее понятия *действительного числа*, которому соответствует точка на *числовой оси* (рис. 3.1). В курсах математики отмечается, что семейство действительных чисел само по себе неоднородно. (Так бывает, если мы хотим «исчислить» непрерывный геометрический объект, приложив к нему дискретную меру; возможно, это философский закон). На числовой оси располагаются целые числа 1, 2, 3, … и так далее, включая отрицательные и ноль, *рациональные числа* (их можно представить дробью p/q, где p и $q \neq 0$ – целые числа; сами же целые числа – частный случай рациональных при $q = 1$), а также числа *иррациональные*, которые так представить нельзя. Последнее название тоже неплохо отражает отношение математиков к некоторым объектам их науки. Иррациональные числа представляются в виде бесконечных непериодических десятичных дробей: это π□= 3.141593…, e = 2.718281…, $\sqrt{2}$ = 1.414214…, $\sqrt{3}$ = 1.732051… и многие(- многие) другие. На числовой оси иррациональные числа расположены «гуще», чем рациональные: тех и других бесконечно много, однако у множества иррациональных чисел выше *мощность*. Между всеми действительными числами и точками на бесконечной прямой с выбранным направлением от минуса к плюсу существует *взаимно однозначное соответствие*.

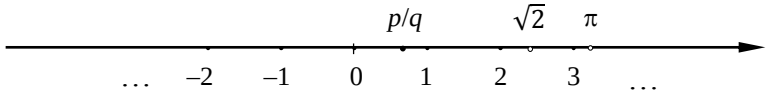


Рисунок 3.1. Действительные числа на числовой оси

Действительных чисел вполне достаточно для повседневных арифметических и алгебраических расчетов. Но у них есть серьезный логический дефект: ими можно выразить решения *не всех* квадратных уравнений (и уравнений более высокой степени). Мы хорошо знаем, что у простейшего квадратного уравнения $x^2 = 1$ имеется два корня: $x = 1$ и $x = –1$. Из школы нам также известно, что уравнение $x^2 = –1$ «не имеет решения». Правда, в хороших учебниках мы могли прочесть эту важную фразу в неурезанном виде:

Квадратное уравнение $x^2 = –1$ *не имеет решения в области действительных чисел.*

Начиная с XVI – XVII веков математики стали вводить особые символы для квадратных корней из отрицательных чисел и выяснять алгебру этих символов. (Как мы не раз убедимся во второй части книги, математика в некотором смысле тоже экспериментальная наука). В XVIII веке обозначение *мнимой единицы* стало общепринятым:

$$\sqrt{-1} = i,$$

и таким образом квадратное уравнение $x^2 = -1$ получило два решения: $x_1 = i$ и $x_2 = -i$.

Все мнимые числа имеют вид $b \cdot i$, где множитель b – действительное число. Каждое мнимое число – это квадратный корень из какого-нибудь отрицательного числа: действительно, $(bi)^2 = b^2 i^2 = -b^2$. Но как решение *любого* квадратного уравнения, не имеющего корней на множестве действительных чисел (т.е. на числовой оси, рис. 3.1), мнимые числа не годятся. В самом деле: будет логично поставить в правую часть простейшего квадратного уравнения мнимую единицу

(3.1) $$x^2 = i$$

– и у такого уравнения нет не только действительных (интуитивно это понятно), но и «чисто мнимых» корней. До тех пор, пока мнимые числа не соединили в XIX веке с действительными числами, даже для математиков они оставались подозрительной игрой ума.

Идею ***комплексных чисел***, которые и являются объединением мнимых чисел с действительными, также можно получить из школьной алгебры. Квадратное уравнение общего вида

(3.2) $$Ax^2 + Bx + C = 0$$

имеет решение

(3.2 а) $$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Выражение под знаком корня в формуле (3.2 а) (*дискриминант*) в школе также называли *определителем 2-го порядка*, не поясняя, что это значит. Мы это установим несколько дальше. Пока вспомним, что, разделив левую и правую (ноль) части уравнения (3.2) на A, его можно преобразовать в *приведенное квадратное уравнение*

(3.3) $$x^2 + px + q = 0, \qquad \text{где } p = B/A,\ q = C/A,$$

с решениями

(3.3 а) $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

В школьных учебниках утверждается, что действительные решения (3.2 а) и (3.3 а) имеют смысл только в том случае, когда выражение под знаком квадратного корня неотрицательно ($p^2/4 \geq q$). Если же «определитель 2-го порядка» под корнем меньше нуля, действительных решений нет: квадратичная парабола не пересекает ось Ox (рис. 3.2). Используя мнимые числа, мы можем записать решение и для случая $p^2/4 < q$:

(3.3 б) $$x_{12} = a \pm bi,$$

$$\text{где } a = -\frac{p}{2},\ \ b = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

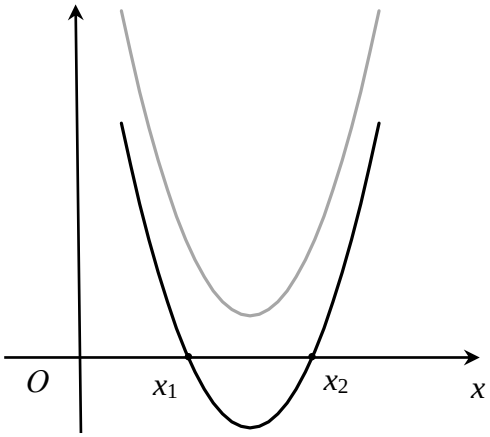


Рисунок 3.2. Квадратичная парабола, соответствующая уравнению $x^2 + px + q = 0$. Черный цвет – есть действительные корни x_1 и x_2, серый цвет – действительных корней нет

С точностью до знака перед множителем b, формулу (3.3 б) можно считать определением *комплексного числа*

(3.4) $$z = a + bi$$

где a и b – любые действительные числа, i – мнимая единица. Действительная и мнимая части комплексного числа z имеют специальные обозначения

$$a = Re\, z, \quad b = Im\, z$$

(от английских real и imaginary).

Если каждому действительному числу отвечает определенная точка на числовой оси, комплексным числам соответствует *комплексная плоскость* с действительной (*Re*) и мнимой (*Im*) координатными осями (Рис. 3.3). Любому числу на комплексной плоскости соответствует точка, или «вектор». При $Im\ z = 0$ число z является действительным, при $Re\ z = 0$ – чисто мнимым.

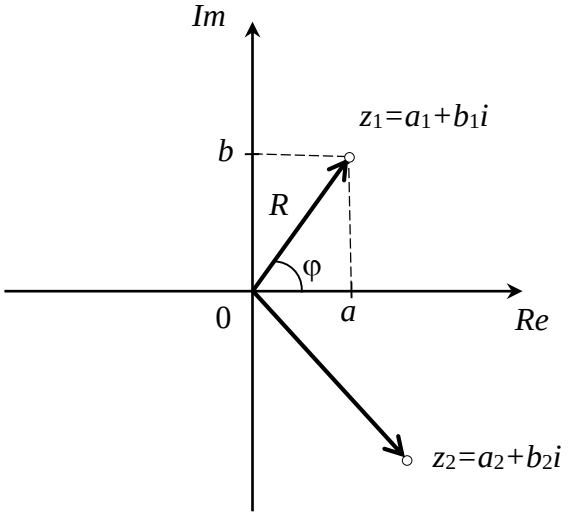


Рисунок 3.3. Комплексные числа как точки на комплексной плоскости

Комплексные числа подчиняются всем законам математики, включая соотношение $i^2 = -1$. На их множестве легко найти решение уравнения (3.1) в форме $x = a + bi$:

(3.5) $$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = i,$$ то есть

$$a^2 - b^2 = Re\, x = 0 \quad \text{и} \quad 2ab = Im\, x = 1$$

По определению, a и b – действительные числа. Таким образом,

$$a = b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Итак, мы нашли корни уравнения (3.1):

$$x_1 = {}^{1}\!/_{\sqrt{2}}(1 + i) \quad \text{и} \quad x_2 = -{}^{1}\!/_{\sqrt{2}}(1 + i).$$

Решение легко проверить, возводя x_1 и x_2 в квадрат по обычным правилам алгебры – конечно, с учетом $i^2 = -1$ (рис. 3.4).

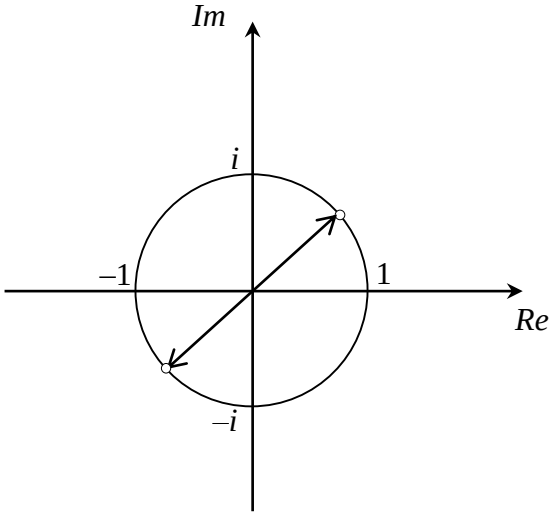


Рисунок 3.4. Единичный круг на комплексной плоскости. Выделенные точки – корни уравнения $x^2 = i$

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется расстояние от точки $a + bi$ до начала координат («длина вектора»)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Угол φ между вектором комплексного числа z и действительной осью, выраженный в радианах, называется *фазой*, или *аргументом* (см. рис. 3.3)

$$\text{Arg}\, z = \varphi, \qquad tg\, \varphi = b/a.$$

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $z^* = a - bi$ называются *сопряженными*. У сопряженных комплексных чисел модули одинаковы, а фазы противоположны (φ и –φ), отсюда

$$z \cdot z^* = |z|^2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

Сложение и умножение комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ выполняют по обычным правилам алгебры:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Разность комплексных чисел задается так же, как «разность» векторов: это сумма z_1 и $-z_2$

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2$$

Комплексное число *1/z*, или z^{-1}, *обратное* к *z*, определяется через операцию умножения

(3.6) $z \cdot z^{-1} = 1$, отсюда $z^{-1} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Формула (3.6) позволяет ввести *деление* комплексных чисел:

$$z_1/z_2 = z_1(z_2)^{-1}.$$

В отличие от действительных чисел, два комплексных числа z_1 и z_2 нельзя сравнить: для них не существует понятий «больше» или «меньше». Но модули z_1 и z_2 – действительные положительные числа, их сравнивать можно. Так, на рис. 3.3 $|z_1| < |z_2|$.

Кроме определения (3.3) как точек на плоскости, комплексные числа также задают в других формах

(3.7) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *тригонометрическая форма*,

(3.8) $z = |z|e^{i\varphi}$ *экспоненциальная форма.*

Справедливость формулы (3.7) следует из рисунка 3.3 и элементарных тригонометрических соотношений. Формулу (3.8) также можно считать определением комплексной экспоненты

(3.8 а) $$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

Из (3.8) следует, что модуль функции e^{ix} при любом *x* равен единице:

$$\left|e^{ix}\right| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1.$$

На рисунке 3.4 значениям e^{ix} соответствуют точки, лежащие в комплексной плоскости на круге единичного радиуса. В следующем разделе мы увидим, что распространение волн удобно описывать *комплекснозначными* функциями в экспоненциальной форме.

Множество комплексных чисел *замкнуто*: решения любых уравнений с действительными или комплексными коэффициентами лежат в комплексной плоскости. (Поэтому квадратное уравнение $x^2 = i$ не вводит нового типа чисел: см. рис. 3.4). На множестве комплексных чисел любое алгебраическое уравнение степени *n* имеет *n* корней. Некоторые корни могут быть действительными, поскольку действительные числа – частный случай комплексных. В следующей главе будет показано, как действительные и комплексные корни квадратного уравнения, которое отражает динамику нелинейной физической системы, позволяют на качественном уровне построить ее фазовый портрет. Это очень важно для анализа сложных, в том числе социальных процессов.

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 3.1.1.

3.1. Найдите произведение двух комплексных чисел $z_1 = 1 - 2i$ и $z_2 = 2 + i$. Изобразите z_1, z_2 и $z_1 z_2$ точками на комплексной плоскости, определите их модули и аргументы.

3.2. Найдите все корни уравнений $x^3 = 1$ и $x^4 = 1$, покажите их точками на единичной окружности в комплексной плоскости.

Решение

Так как $x = a + bi$, то *куб суммы*

$$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = 1.$$

Мнимые числа в правой части уравнения $x^3 = 1$ отсутствуют, т.е. $b(3a^2 - b^2) = 0$. Отсюда получаем три корня:

(1) $b = 0$, то есть $a^3 = 1 \rightarrow x_1 = 1$

(2) $3a^2 - b^2 = 0$, т.е. $b = \pm\sqrt{3}a$. Подставив b в действительную часть уравнения, получим

$a^3 - 3a \cdot 3a^2 = -8a^3 = 1$, т.е. $a^3 = -1/8$, $a = -1/2$, следовательно, $x_{2,3} = -{}^1\!/_2 \pm {}^{\sqrt{3}}\!/_2\, i$

В уравнении $x^4 = 1$ сделаем замену переменных $x^2 = y$. Тогда оно примет вид $y^2 = 1$ с двумя решениями $y = \pm 1$, каждому из которых соответствует по два значения x. Отсюда четыре корня:

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$

3.3. Пользуясь разложением в ряд Маклорена функций e^x (формула (1.36 а) в 1-й главе), $\sin x$ и $\cos x$ (задача 1.11 в 1-й главе), докажите равенство (3.8 а).

3.1.2. Векторы и матрицы

Векторы

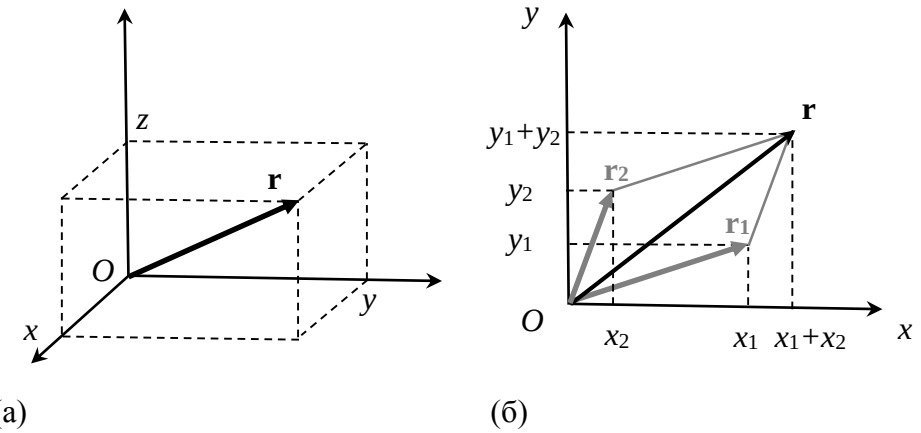
С векторными величинами нас знакомит школьная физика. В предыдущих главах векторы уже встречались. Дадим им строгое математическое описание.

Вектор – это направленный отрезок («стрелка») определенной длины с заданным положением в пространстве. В трехмерном пространстве с системой *декартовых координат*[*] вектор, выходящий из начала координат, определяют три числа: *компоненты* вектора, то есть его проекции на взаимно перпендикулярные координатные оси:

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

[*] Система декартовых координат – это взаимно перпендикулярные оси *Ox, Oy* на плоскости или *Ox, Oy, Oz* в трехмерном пространстве, пересекающиеся в *начале координат O*. Координатами в ней являются расстояния от точки до заданных осей со знаками «плюс» (в положительном направлении оси) или «минус» (в отрицательном направлении, рис. 3.5). Методы *линейной алгебры*, куда мы не будем погружаться, позволяют задать такую систему координат в абстрактных пространствах с любым числом измерений *n*.

(Рис. 3.5 а). Вектор на плоскости задается двумя числами: $\mathbf{r} = (x, y)$. Векторами выражают перемещение, скорость, ускорение, силу, напряженность электрического поля и многие другие «направленные» физические величины. *Скалярную* величину, которая не зависит от направления в пространстве (плотность, массу, температуру, энергию), в точке пространства с координатами (x, y, z) задают одним действительным числом.



(а) (б)

Рисунок 3.5. (а) Вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в трехмерном пространстве. (б) Сумма векторов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ на плоскости

Модуль трехкомпонентного вектора, то есть его длина – это скалярная положительная величина, в декартовой системе координат равная

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

На рис. 3.3 комплексные числа изображались векторами $\{(a, b)\}$ на комплексной плоскости*. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их компоненты:

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \qquad \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2.$$

Без уменьшения общности можно считать, что все векторы в пространстве или на плоскости выходят из одной точки начала координат.

Векторные величины можно складывать по правилу параллелограмма (Рис. 3.5 б) и умножать на число

$$\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$
$$\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$
(3.9 а) $$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$$
(3.9 б) $$\alpha\mathbf{r} = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

«Вычитание» вектора $\mathbf{r}_2$ из вектора $\mathbf{r}_1$ – это сложение $\mathbf{r}_1$ и $-\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + (-1)\mathbf{r}_2 = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2).$$

* Строго говоря, комплексные числа не совсем соответствуют векторам на плоскости. Декартовы координаты вектора *линейно независимы*, так как оси *Ox* и *Oy* не связаны между собой: скалярное произведение (10)·(0 1) равно нулю (см. ниже). А на комплексной плоскости оси *Re z* и *Im z* связаны равенством $i^2 = -1$ – но мы не будем углубляться в математику.

Кроме скалярных и векторных, существуют *псевдовекторные* физические величины: угловая скорость, напряженность магнитного поля, механический и магнитный моменты и другие (см. разд. 2.2.1 предыдущей главы). Псевдовектор **R** в трехмерном пространстве также определяется тремя проекциями на оси координат (R_x, R_y, R_z), а его модуль R задается циркуляцией массы, заряда или чего-нибудь еще в перпендикулярной ему плоскости. Векторы и псевдовекторы по-разному изменяются при преобразованиях пространства, которые будут рассмотрены ниже в этом разделе. Обычные векторы также называют *полярными*, а псевдовекторы – *аксиальными* векторами. Далее мы увидим, что скаляры, векторы и псевдовекторы – это частные случаи *тензорных* величин.

Скалярным произведением $\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2}$, или $(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2})$, векторов $\mathbf{r_1}=(x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{r_2}=(x_2, y_2, z_2)$ называется сумма произведений их компонентов

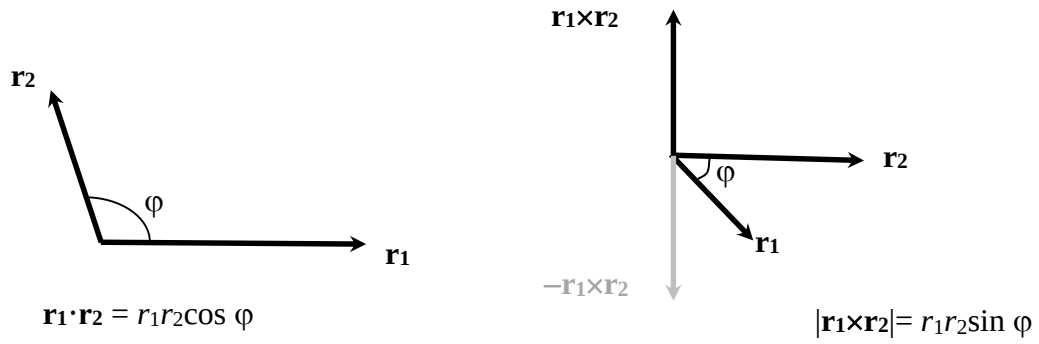
(3.10 а) $$\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2} = (\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = r_1r_2\cos\varphi,$$

где r_1 и r_2 – модули векторов, φ – угол между ними. В (3.10 а) приведены два его равноправных обозначения. Таким образом, квадрат модуля вектора равен его скалярному произведению на самого себя. Два ненулевых вектора *ортогональны*, если их скалярное произведение равно нулю (рис. 3.6 а).

Векторным произведением двух векторов $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ называется перпендикулярный им обоим вектор $\mathbf{r_1}\times\mathbf{r_2}$, который образует с $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ *правую связку* (как оси *x*, *y* и *z* в системе декартовых координат) и по своей длине (модулю) равен

(3.10 б) $$|\mathbf{r_1}\times\mathbf{r_2}| = r_1r_2\sin\varphi$$

(рис. 3.6 б). Если векторы $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ взаимно перпендикулярны, их векторное произведение максимально, а для параллельных векторов (φ = 0) оно равно нулю.



$\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2} = r_1r_2\cos\varphi$ $|\mathbf{r_1}\times\mathbf{r_2}| = r_1r_2\sin\varphi$

(а) (б)

Рисунок 3.6. (а) Скалярное и (б) векторное произведения векторов

Матрицы и определители

Две скалярные величины u и v могут быть связаны скалярным множителем: $u = av$. (Так, средняя кинетическая энергия молекул газа $\langle E_{кин}\rangle$ равна его температуре T, умноженной на $\frac{3}{2}k$, где k – постоянная Больцмана, см. предыдущую главу). Две векторные величины, заданные в одном и том же пространстве, могут переводиться одна в другую

скалярным множителем, если их векторы одинаково направлены. Например, в уравнении 2-го закона Ньютона ускорение тела совпадает по направлению с действующей на него силой, а величина ускорения связана с величиной силы через скалярный множитель:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{F},$$

где m – масса тела. Компоненты вектора ускорения (a_x, a_y, a_z) в трехмерном пространстве в этом случае равны $\left(\frac{1}{m}F_x,\ \frac{1}{m}F_y,\ \frac{1}{m}F_z\right)$. А если в пространстве заданы два по-разному направленных вектора разной длины – можно ли перевести один вектор в другой вектор некоторой особой операцией умножения? И если можно – как выглядят правила этого умножения и какой математический объект выполняет роль «множителя»?

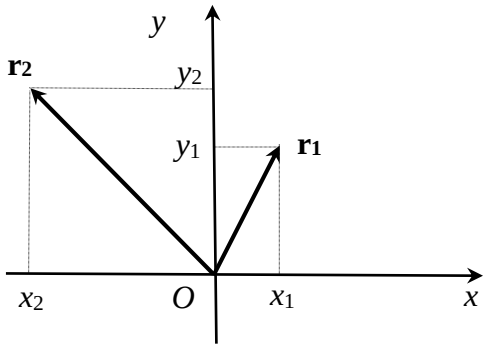


Рисунок 3.7

Пусть на плоскости в декартовой системе координат заданы два несовпадающих вектора $\mathbf{r_1}=(x_1, y_1)$ и $\mathbf{r_2}=(x_2, y_2)$ (рис. 3.7). Выразим компоненты $\mathbf{r_2}$ через компоненты $\mathbf{r_1}$ системой уравнений

(3.11)
$$\begin{cases} x_2 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 \end{cases},$$

в которых множители a_{11}, a_{12}, a_{21} *и* a_{22} – действительные числа: они могут быть положительными, отрицательными либо равными нулю. Составим из этих чисел таблицу: *матрицу*

(3.11 а)
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

и зададим правило умножения таких *квадратных* матриц (число строк равно числу столбцов) на *вектор-столбец*, позволяющее перевести $\mathbf{r_1}=(x_1, y_1)$ в $\mathbf{r_2}=(x_2, y_2)$:

(3.11 б)
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

На первый взгляд, мы всего лишь переписали систему двух уравнений (3.11) в другой, более абстрактной форме. Но такая форма позволяет преобразовать очень многие сложные алгебраические выражения к простому компактному виду, что сильно облегчает расчеты. В частности, теперь вектор $\mathbf{r_2}$ можно представить в виде произведения

(3.11 в)
$$\mathbf{r_2} = \mathrm{A}\mathbf{r_1},$$

где «множителем» А служит матрица (3.11 а).

Умножение матрицы А на вектор $\mathbf{r_1}$ выполняется по схеме «строка на столбец»: сначала два числа верхней строки поочередно перемножаются с двумя числами единственного столбца $\mathbf{r_1}$ и результаты складываются, потом то же самое делаем с нижней строкой. Чтобы воспроизвести систему уравнений (3.11), в произведении (3.11 в) матрица А *обязана* стоять первой – это правило матричного умножения. Произведение $\mathbf{r_1}$А даст другой результат, разбирать который мы здесь не будем (см. Приложение П5).

Поставим обратную задачу: выразить компоненты вектора $\mathbf{r_1}$ через компоненты $\mathbf{r_2}$. Получим другую систему уравнений

(3.12)
$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_2 + b_{12}y_2 \\ y_1 = b_{21}x_2 + b_{22}y_2 \end{cases} /$$

Ее также можно представить в виде произведения матрицы на вектор

(3.12 а)
$$\mathbf{r_1} = \mathrm{B}\mathbf{r_2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

по правилу умножения «строка на столбец». Если же вектор $\mathbf{r_1}$ сначала по формуле (3.11 в) перевести в $\mathbf{r_2}$, а затем по (3.12 а) снова получить из него $\mathbf{r_1}$ – мы приходим к *умножению матриц* – также по правилу «строка на столбец»:

(3.13)
$$\mathbf{r_1} = \mathrm{B}(\mathrm{A}\mathbf{r_1}) = (\mathrm{BA})\mathbf{r_1} = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

(скобки при перемножении матриц можно переносить так же, как и при перемножении чисел – это *сочетательный закон* умножения). Последняя матрица в (3.13) обозначается Е и называется *единичной*: по аналогии с умножением числа на 1, она оставит неизменным любой вектор на плоскости. Матрица В называется *обратной* к матрице А; ее обозначают A^{-1}. Перемножение пары взаимно обратных матриц всегда дает единичную матрицу:

$$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{E}$$

Формулы (3.11) – (3.13) – не строгое математическое определение матриц, а лишь описание их некоторых свойств. На геометрическом языке два не совпадающих по направлению вектора $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ в пространстве могут переводиться друг в друга поворотами, отражением в плоскости, растяжением/сжатием и сочетанием этих операций. Матрицы выполняют роль «множителей» при записи таких преобразований в виде $\mathbf{r_1} = \mathrm{A}\mathbf{r_2}$.

Преобразование одного вектора в другой равносильно преобразованию пространства, в котором находятся эти векторы. Пусть, например, вектор $\mathbf{r}$ задает на плоскости точку с декартовыми координатами (x, y). Если повернуть систему координат на некоторый угол α, в новой системе тот же вектор $\mathbf{r}$ будет иметь другие координаты (x', y') (Рис. 3.8), связанные с исходными координатами уже знакомой нам системой линейных уравнений

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$$

которую можно перевести в матричную форму (x' и y' – не производные!)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Матрица поворота системы координат в плоскости на произвольный угол α имеет вид

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Квадратные матрицы размера 2×2 преобразуют плоскость, а матрицы 3×3 преобразуют трехмерное пространство.

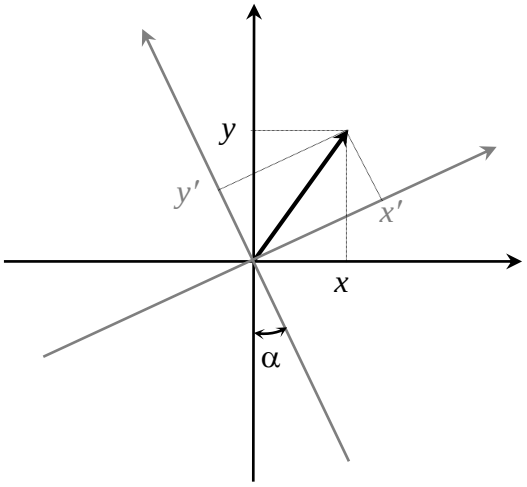


Рисунок 3.8. Поворот системы координат в плоскости

Кроме квадратных матриц *n*×*n*, используются *прямоугольные* матрицы размера *n*×*m* (*n* строк и *m* столбцов). В алгебраических выражениях матрицы обозначают заглавными буквами, а также «сокращенными» символами: A = ||a_{ij}||. В квадратной матрице размера *n*×*n* индексы ее элементов *i* и *j* *пробегают значения* 1, 2, … *n*, в прямоугольной матрице *n*×*m* *i* = 1, 2, …, *n* и *j* = 1, 2, …, *m*.

Матрицы позволяют распространить понятие вектора на плоскости либо в трехмерном пространстве на вектор в абстрактном пространстве с любым числом измерений:

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

В этом случае переменные {x_i}, определяющие значение какой-либо функции *f*, рассматриваются как компоненты вектора в *n*-мерном пространстве, а саму функцию записывают в виде *f* (**r**). Так, расположение двух взаимодействующих частиц в трехмерном пространстве можно представить точкой в шестимерном *конфигурационном пространстве* с координатами ($x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $z^{(2)}$), где (1) и (2) – номера частиц (см. раздел 2.2.1 в предыдущей главе). Такие характеристики двумерных и трехмерных векторов, как модуль, скалярное произведение, ортогональность и др., распространяются на *n*-мерные векторы. Векторы и матрицы широко используются в очень многих дисциплинах, включая общественные и экономические науки.

Математические свойства матриц представлены в приложении П5. Здесь мы перечислим некоторые из них. Как и в случае векторов, две матрицы одинакового размера *n*×*n*, обозначаемые A = ||a_{ij}|| и B = ||b_{ij}||, равны (A = B), если равны друг другу все их элементы

с одинаковыми парами индексов i и j ($a_{ij} = b_{ij}$). Матрицы одинакового размера можно складывать: A + B = $\|a_{ij} + b_{ij}\|$. Умножению матрицы на число соответствует умножение на это число всех ее элементов: $\alpha A = \|\alpha a_{ij}\|$. В общем случае элементами матрицы могут быть не только действительные, но и комплексные числа. *Комплекснозначные* матрицы используются в квантовой механике (см. далее разд. 3.3 этой главы) и в исследовании решений дифференциальных уравнений (глава 4).

Квадратные матрицы $n \times n$ A = $\|a_{ij}\|$ и B = $\|b_{ij}\|$ перемножаются по правилу «строка на столбец»:

(3.15) $$AB = C = \|c_{pq}\|,$$

где $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}$, $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2}$ и т.д., то есть

(3.15 а) $$c_{pq} = \sum_{i=1}^{n} a_{pi}b_{iq} .$$

Для квадратных матриц 2×2 это выглядит так:

(3.15 б) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

В общем случае AB ≠ BA, то есть, в отличие от умножения чисел (как действительных, так и комплексных), умножение матриц *некоммутативно*.

Матрица называется *диагональной*, если все ее недиагональные элементы a_{ij} ($i \neq j$) равны нулю; при этом условий на величины диагональных элементов не накладывается. Единичные матрицы (см. формулу (3.13)) – частный случай диагональных: $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$, все остальные $a_{ij} = 0$. Умножение диагональных матриц коммутативно (AB = BA).

Если произвольное *ортогональное преобразование* плоскости, при котором сохраняются расстояния между парами всех ее точек (как поворот системы координат на рис. 3.8), задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix},$$

обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}:$$

диагональные элементы a_{ii} остаются на своих местах, а недиагональные a_{ij} и a_{ji} ($i \neq j$) переставляются. Такая матрица A^T называется *транспонированной*. Для матриц ортогональных преобразований $A^{-1} = A^T$. Другие матрицы «обращаются» по более сложной схеме (см. следующий подраздел). В случае матрицы поворота (3.14) перемножением A и A^T нетрудно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab - ab \\ ab - ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть действительно $A^T = A^{-1}$.

Детерминант, или *определитель* матрицы 2×2 вида (3.11 а) (*определитель 2-го порядка*) – это разность «диагональных» произведений ее элементов:

(3.16) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Детерминант квадратной матрицы любого порядка n можно вычислить, разлагая его в *альтернированную сумму*

(3.16 а) $$\det A = \sum a_{ij}(-1)^{i+j}\,\mathrm{M}_{ij}.$$

Под знаком суммы стоят произведения всех элементов a_{ij} в определенной (i-й) строке или в определенном (j-м) столбце исходного детерминанта, на детерминант M_{ij} порядка (n–1), оставшийся после вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Такой «уменьшенный» детерминант называется *минором* элемента a_{ij}. Произведение $\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot\mathrm{M}_{ij}$ минора на множитель $(-1)^{i+j}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}; множитель имеет разный знак для четной и нечетной суммы индексов $i+j$ (рис. 3.9). Таким образом, альтернированная сумма (3.16 а) состоит из произведений элементов строки (столбца) матрицы на их алгебраические дополнения. Каждый минор, в свою очередь, можно разложить в альтернированные суммы вплоть до миноров 2-го порядка, вычисляемых по формуле (3.16). Разложение детерминанта по любой его строке и любому столбцу дает один и тот же результат.

$$\mathrm{A}_{14} = (-1)^{1+4}\cdot\mathrm{M}_{14} = -\mathrm{M}_{14}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Рисунок 3.9. Алгебраическое дополнение $\mathrm{A}_{14} = -\mathrm{M}_{14}$ элемента a_{14} в квадратной матрице размера 4×4. Выделен минор M_{14} элемента a_{14}

Разложение по минорам покажем на примере определителя матрицы 3×3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (32-0) - 3(40-0) + 2(35-24)$$
$$= 32 - 120 + 22 = -66$$

Один из элементов матрицы равен 0, поэтому в разложении этого детерминанта по второй строке или по третьему столбцу нужно вычислить лишь два минора:

$$-5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -5(24-14) + 4(8-12) = -66$$

– результат, конечно, не изменится.

Детерминант – линейная функция от квадратной матрицы:

$$\det(\alpha\mathrm{A}+\beta\mathrm{B}) = \alpha\cdot\det\mathrm{A}+\beta\cdot\det\mathrm{B}$$

(где A, B – квадратные матрицы одинакового размера, α, β – числа). Если все элементы строки или столбца имеют одинаковый множитель, его можно вынести за знак детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a & 3c \\ d & 3b \end{vmatrix} = 3ab - 3cd = 3\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}.$$

При перестановке двух строк или двух столбцов знак детерминанта изменяется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} c & a \\ b & d \end{vmatrix} = cd - ab = -\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}.$$

Детерминант матрицы с двумя одинаковыми либо двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю: из det A = –det A следует det A ≡ 0 (читается *тождественно равен нулю*).

У всех матриц, которым соответствуют ортогональные преобразования пространства, не изменяющие расстояния между его точками, det A = ±1. Примером может служить матрица поворота (3.14). Обратные матрицы A^{-1} существуют только для *невырожденных* матриц, у которых det A ≠ 0[*].

Расчет обратной матрицы

Общую схему расчета элементов обратной матрицы проиллюстрируем простейшим примером квадратных матриц A и B размера 2×2 (AB = AA^{-1} = E) из уравнения (3.13). Выпишем все элементы произведения AB по схеме умножения «строка на столбец» (3.15 б):

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенства двух матриц следуют четыре уравнения, которые позволяют выразить элементы обратной матрицы B через элементы матрицы A:

$$\begin{aligned} &a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \\ &a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \\ &a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0, \text{ т.е. } b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}b_{22} \\ &a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0, \text{ т.е. } b_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}b_{11}. \end{aligned}$$

Мы выразили недиагональные элементы обратной матрицы b_{12} и b_{21} через ее диагональные элементы b_{11} и b_{22}. Подставим полученные соотношения в два первых уравнения.

$$\begin{aligned} &a_{11}b_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}b_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}}b_{11} = 1 \\ &a_{22}b_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}b_{22} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}b_{22} = 1 \end{aligned}$$

В обоих оставшихся уравнениях числитель дроби – детерминант матрицы A. Для компактной записи обозначим его Δ:

[*] *Вырожденные* квадратные матрицы размера $n \times n$ с det A=0 преобразуют n-мерное пространство в пространство меньшей размерности – например, переводят все точки трехмерного пространства в точки на плоскости или на прямой линии. Обратного преобразования в этом случае не существует.

$\frac{\Delta}{a_{22}} b_{11} = 1$, то есть $b_{11} = \frac{a_{22}}{\Delta}$, и
$\frac{\Delta}{a_{11}} b_{22} = 1$, т.е. $b_{22} = \frac{a_{11}}{\Delta}$.

Терпение и внимание вознаграждаются! Мы получили замечательный результат: выразили через элементы матрицы A все элементы ее обратной матрицы B = A^{-1} в общем виде, справедливом для любых невырожденных матриц 2×2. Вот он:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & -\frac{a_{12}}{\Delta} \\ -\frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det A$. Элементы A^{-1} – это алгебраические дополнения элементов a_{ij} (для матриц 2×2 не детерминанты, а числа), деленные на det A; притом недиагональные элементы переставлены. Для вывода многих важных соотношений алгебры матриц вполне достаточно четырех действий арифметики.

В общем случае квадратных матриц размера $n \times n$ обратную матрицу A^{-1} (см. Приложение П5) вычисляют так:

(1) Построить матрицу $\tilde{A} = \|A_{ij}\|$ из алгебраических дополнений к элементам матрицы $A = \|a_{ij}\|$.
(2) Транспонировать матрицу $\tilde{A}$, заменив строки столбцами. (Для матриц размера 2×2 – переставить недиагональные элементы).
(3) В полученной матрице $\tilde{A}^T$ разделить все элементы на det A

Алгоритмы расчета обратных матриц хорошо разработаны (см. Приложение П5) и введены в компьютерные программы. Разберем один пример их практического применения.

Леонтьевские матрицы ввода-вывода (см.[1])

Рассмотрим ферму, которая производит картофель и шампиньоны для продажи на рынке. Некоторая часть продукции потребляется внутри фермы, определенная доля выращенного по контракту поставляется в магазин. Часть урожая картофеля используют для посадки. При производстве одной тонны картофеля ферма расходует на все эти цели 500 кг картофеля и 200 кг шампиньонов, а при производстве одной тонны шампиньонов – 500 кг шампиньонов и 100 кг картофеля. Требуется поставить на рынок 3 тонны картофеля и 4 тонны шампиньонов. Сколько надо произвести той и другой продукции?

Решение

Обозначим требуемые количества (*валовый выпуск*) картофеля x_1, шампиньонов x_2. Зная требуемые для продажи количества в тоннах (*конечный спрос*), составим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

(3.17)
$$\begin{cases} x_1 - (0.5x_1 + 0.2x_2) = 3 \\ x_2 - (0.1x_1 + 0.5x_2) = 4 \end{cases}$$

(в скобках – произведенные, но не дошедшие до рынка объемы продукции). Раскрывая скобки, найдем решение:

(3.17 а)
$$\begin{cases} 0.5x_1 - 0.2x_2 = 3 \\ -0.1x_1 + 0.5x_2 = 4 \mid \times 5 \end{cases}$$

(умножим на 5 левую и правую части второго уравнения и сложим с первым)

$$+\begin{array}{r} 0.5x_1 - 0.2x_2 = 3 \\ -0.5x_1 + 2.5x_2 = 20 \\ \hline 2.3x_2 = 23, \text{ то есть } x_2 = 10 \end{array}$$

Подставим $x_2 = 10$ в любое из двух уравнений (3.17 а). Из первого уравнения получим

$$0.5x_1 - 2 = 3 - \text{отсюда } x_1 = 10$$

(подстановка $x_2=10$ во второе уравнение даст тот же результат). Итак, чтобы в условиях задачи поставить на рынок 3 тонны картофеля и 4 тонны шампиньонов, ферма должна произвести по 10 тонн той и другой продукции.

Системы уравнений, подобные (3.17), необходимо решать при планировании выпуска во взаимосвязанных видах производства. Названия (картофель и шампиньоны), конечно, условны. И пусть нам хватило простой школьной алгебры, но эту задачу можно перевести в матричную форму – которая позволяет рассчитать выпуск разных видов товаров для удовлетворения заданного спроса в сложных системах с большим числом «перекрестных» производственных затрат.

В общем случае требуется определить, сколько продукции (x_1, x_2, …, x_n) должны выпустить n взаимосвязанных отраслей экономики, пронумерованные индексом (1, 2, …, k, …, n), чтобы удовлетворить спрос на эту продукцию (y_1, y_2, …, y_n) в масштабах государства. Предполагается, что в производстве каждой отрасли расходуется продукты производства ряда отраслей. Так, в современной добыче угля используются продукты металлургии, машиностроения, нефтехимии, деревообрабатывающей и легкой промышленности, а также электроэнергия, транспорт и т.д. – в том числе некоторая часть произведенного угля потребляется теплоцентралями в районах добычи.

Пусть каждая из n отраслей экономики вырабатывает свой единственный продукт x_i. Тогда условия производства продуктов (x_1, x_2, …, x_n) для удовлетворения спроса (y_1, …, y_n) и «внутреннего» потребления $\{a_i x_i\}$ можно выразить системой n линейных уравнений

$$\begin{array}{l} x_1 = y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2 = y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \\ x_k = y_k + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \\ \ldots \\ x_n = y_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n . \end{array} \qquad (3.18)$$

Множители $\{a_{ki}\}$, или *коэффициенты прямых затрат*, в (3.18) показывают доли продуктов x_i, израсходованных в процессе производства продукта x_k. Они обладают важным математическим свойством: эти коэффициенты *неотрицательны*:

$$0 \le a_{ij} \le 1$$

Если в производстве продукта x_m некоторый продукт x_j не используется, соответствующий коэффициент равен нулю: $a_{mj} = 0$.

По аналогии с (3.11) и (3.12), систему уравнений (3.18) можно записать в матричном виде. Для этого выпуск всех отраслей экономики

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и спрос на продукцию этих отраслей

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

представляют в виде n-мерных векторов, а коэффициенты $\{a_{ij}\}$ – в виде квадратной *технологической матрицы*, или *матрицы прямых затрат* размера $n \times n$

$$\mathrm{A} = \| a_{ij} \| \; (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

После этого система линейных уравнений (3.18) переводится в матричную форму

(3.19) $$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathrm{A}\mathbf{X},$$

которую легко преобразовать так, чтобы вектор спроса **Y** находился в правой части, а вектор продукции **X** – в левой части уравнения

(3.19 а) $$\mathbf{X} - \mathrm{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Вектор **X** не изменится при умножении на единичную матрицу E размера $n \times n$ (см. предыдущий подраздел). Поэтому

(3.19 б) $$\mathrm{E}\mathbf{X} - \mathrm{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \text{ или}$$

$$(\mathrm{E} - \mathrm{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Уравнение (3.19 б) показывает, что искомый вектор выпуска **X** и заданный вектор спроса **Y** связаны через квадратную матрицу E – A, все элементы которой известны. Это позволяет рассчитать вектор выпуска:

(3.20) $$\mathbf{X} = (\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}\,\mathbf{Y},$$

где $(\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}$ – матрица, обратная к E – A.

Матрицы ввода-вывода, позволяющие формализовать планирование в экономике, предложил в 1930-е годы Василий Леонтьев (1906-1999): российский, а затем американский экономист, создатель теории межотраслевого баланса. Мы поупражняемся в матричном расчете вектора **X** на модельном примере производства «картофеля» и «шампиньонов». Правда, мы уже нашли решение системы уравнений (3.17) очень простым способом. Однако будем помнить, что леонтьевские матрицы используют в сложных системах из десятков и сотен уравнений, где расчеты проводят на компьютерах. Наша задача – понять, как работает эта схема.

Переведем систему уравнений (3.17) в матричную форму:

$$\mathbf{X} = \mathrm{A}\mathbf{X} + \mathbf{Y},$$

где **Y** = (3, 4) – вектор спроса, **X** = (x_1, x_2) – неизвестный вектор выпуска, A – квадратная матрица прямых затрат размера 2×2:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Для решения задачи нам нужно найти матрицу B = E – A, вычислить ее детерминант, построить обратную матрицу B^{-1} и с ней решить уравнение (3.19) для нашего случая – тем более, что мы уже знаем ответ: x_1=10, x_2=10, или **X** = (10, 10). Итак, приступим к решению.

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathrm{B} = 0.5\times 0.5 - (-0.2)\times(-0.1) = 0.25 - 0.02 = 0.23$$

1-й этап:

$$\widetilde{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(алгебраические дополнения элементов матрицы 2×2 –это элементы, стоящие напротив по диагонали, с множителями $(-1)^{1+1} = (-1)^{2+2} = +1$ и $(-1)^{1+2} = (-1)^{2+1} = -1$)

2-й этап:

$$\widetilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(переставили недиагональные элементы, получили транспонированную матрицу)

3-й этап:

(3.21) $$\mathrm{B}^{-1} = \frac{1}{0.23}\widetilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2.174 & 0.870 \\ 0.435 & 2.174 \end{pmatrix}$$

(разделили все элементы матрицы $\widetilde{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}$ на det B = 0.23; результаты с точностью до 0.001)

Проверим, что мы действительно нашли обратную матрицу

$$\mathrm{B}\mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.174 & 0.870 \\ 0.435 & 2.174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.087 - 0.087 & 0.435 - 0.435 \\ -0.217 + 0.217 & -0.087 + 1.087 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(результат $\mathrm{B}\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{E}$ от порядка перемножения матриц не зависит).

Теперь осталось только вычислить вектор выпуска X по вектору спроса Y с найденной нами матрицей B^{-1}. Чтобы умножить вектор на матрицу справа, надо записать его в виде столбца

$$\mathbf{X} = \mathrm{B}^{-1}\mathbf{Y}, \text{ или}$$

$$\begin{pmatrix} 2.174 & 0.870 \\ 0.435 & 2.174 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.522 + 3.480 \\ 1.305 + 8.696 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.002 \\ 10.001 \end{pmatrix}$$

Итак, у нас всё получилось. Не важно, что выше мы очень просто нашли точное решение: с увеличением числа уравнений и неизвестных расчеты настолько усложняются, что без компьютера задача становится невыполнимой. Важно понять, как проводится

расчет с матрицами ввода и вывода. Такие матрицы с большим числом строк и столбцов в середине XX века были составлены для многих отраслей экономики (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Схема межотраслевого материального баланса по трем продуктам (усл. ед.) (см.[1]).

Производство отрасли	Потребление отрасли			Валовая продукция	Конечная продукция
	№1	№2	№3		
№1	25	60	30	250	135
№2	75	40	15	200	70
№3	50	20	45	150	35
Валовая продукция	250	200	150	600	
Чистая продукция	100	80	60		240

Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц[2]

Еще одна важнейшая операция с матрицами, обычно выполняемая на компьютерах – это определение их *собственных векторов* и *собственных значений*. Мы уже видели, что квадратные матрицы преобразуют пространство – в общем случае поворачивая и растягивая либо сжимая все принадлежащие ему векторы. Но существуют такие векторы (называемые *собственными векторами* данной матрицы), которые при этом не поворачиваются, а лишь изменяют свою длину. Для иллюстрации перемножим специально подобранную невырожденную квадратную матрицу 2×2 и вектор (1, 1) на плоскости:

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+2\\ 3+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 8\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$$

(мы вынесли общий множитель обоих компонентов полученного вектора). Исходный и полученный векторы не совпадают ни по длине, ни по ориентации. Но вектор (2, –1) при том же преобразовании только изменит знак:

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-2\\ 6-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

Множители $\{\lambda_k\}$ при собственных векторах матрицы называются ее *собственными значениями*. Чтобы найти их, надо решить *вековое уравнение* (Приложение П5)

(3.22) $$\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E}) = 0,$$

где A = $\|a_{ij}\|$ - квадратная матрица размера $n\times n$, E – единичная матрица $n\times n$, $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ – вектор корней векового уравнения, которые надо найти. В нашем примере

$$\det\begin{pmatrix}0-\lambda & 2\\ 3 & 5-\lambda\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ 3 & 5-\lambda\end{pmatrix} = 0.$$

В общем случае корни уравнения n-го порядка определяют на компьютере. Мы вычислим всего лишь детерминант 2×2 и решим приведенное квадратное уравнение:

$$\lambda(\lambda-5)-6 = \lambda^2-5\lambda-6 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+6} = \frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{24}{4}} = \frac{5}{2}\pm\frac{7}{2}.$$

Итак, детерминантное уравнение, которое также называется *задачей на собственные значения матрицы*, имеет два корня: $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = -1$ – второй из них мы уже получили выше.

Чтобы определить собственные векторы нашей матрицы (x_1, y_1) и (x_2, y_2), составим две системы уравнений

(3.22 а) $$\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot x_1 + 2y_1\\ 3x_1 + 5y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 x_1\\ \lambda_1 y_1\end{pmatrix},$$ или, так как λ_1=6,

$$\begin{aligned} 2y_1 &= 6x_1\\ 3x_1 + 5y_1 &= 6y_1. \end{aligned}$$

Оба равенства дают $y_1 = 3x_1$: уравнение прямой, на которой лежат собственные векторы нашей матрицы. Для собственного значения $\lambda_2 = -1$ аналогично получим

(3.22 б) $$\begin{pmatrix}2y_2\\ 3x_2 + 5y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_2\\ -y_2\end{pmatrix}.$$

Равенство компонентов этих векторов дает уравнение второй прямой $2y_2 = -x_2$. Эти прямые линии – «собственные» координатные оси матрицы (рис. 3.10). Расположенные на них векторы при преобразовании плоскости не сдвигаются с этих осей, а лишь изменяют длину. В реальных задачах масштабы собственных векторов определяют из физических условий системы – мы же просто возьмем для них наименьшие целые числа.[2]

$\lambda_1 = 6$: вектор (1, 3); $\lambda_2 = -1$: вектор (2, –1)

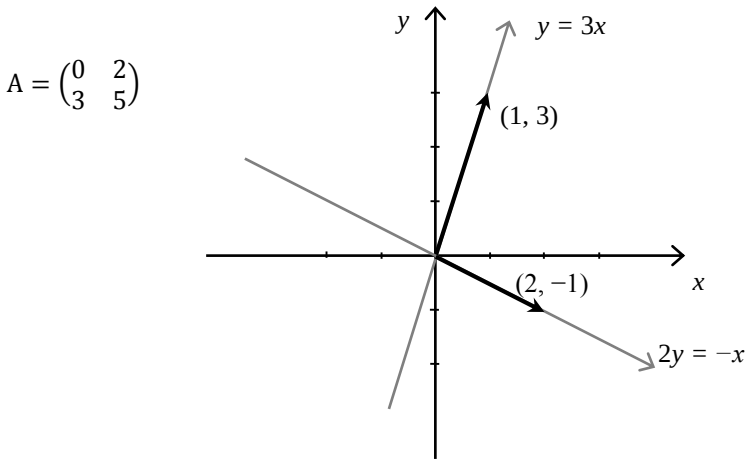


Рисунок 3.10. Матрица, преобразующая координатную плоскость (см текст), и ее собственные векторы, заданные уравнениями (3.22 а, б)

Собственные значения и собственные векторы матриц определяют в огромном числе задач физики, экономики, логистики и так далее. В этой главе мы увидим пример векового уравнения из квантовой механики, в следующей более подробно разберем, как детерминантные уравнения позволяют построить фазовый портрет нелинейной системы. Мы не будем проводить вычислений, они давно автоматизированы. Все приведенные здесь примеры лишь показывают, что алгебра векторов и матриц не содержит ничего особенно сложного.

[1] А.И. Благовисная, С.Т. Дусакаева, О.А. Тяпухина, Модель Леонтьева многоотраслевой экономики, Оренбург, 2010.

[2] http://www.mathprofi.ru/sobstvennye_znachenija_i_sobstvennye_vektory.html

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 3.1.2

3.4. В трехмерном пространстве с декартовой системой координат задан вектор **a**=(2, –3, 6). Найти векторы единичной длины: (а) $\mathbf{r_1}$ параллельный **a**, (б) $\mathbf{r_2}$ перпендикулярный к **a** и при этом лежащий в координатной плоскости *xOy*.

Решение:

(а) Так как все векторы выходят из начала координат *O*, вектор $\mathbf{r_1}$ совпадает с **a** по направлению и имеет длину 1. Запишем $\mathbf{r_1}$ в виде (2α, –3α, 6α) = α(2, –3, 6) и найдем множитель α:

$$r_1 = \sqrt{\alpha^2(2^2 + 3^2 + 6^2)} = \alpha\sqrt{4 + 9 + 36} = \alpha\sqrt{49} = 7\alpha = 1, \text{ т.е. } \alpha = {}^1\!/_7 \text{ и}$$

$\mathbf{r_1}$ = (2/7, –3/7, 6/7)

(б) Если вектор $\mathbf{r_2}$=(x_2, y_2, z_2) лежит в плоскости *xOy*, то z_2 = 0. Тогда на координаты вектора $\mathbf{r_2}$ наложены два условия:

$$\mathbf{r_2}\cdot\mathbf{a} = 2x_2 - 3y_2 = 0, \text{ отсюда следует } y_2 = (2/3)x_2$$

$$r_2 = \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2} = 1, \text{ то есть } \sqrt{{x_2}^2 + \frac{4}{9}{x_2}^2} = \frac{\sqrt{13}x_2}{3} = 1.$$

Тогда $x_2 = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt{13}}$, и искомый вектор $\mathbf{r}_2 = (\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0)$.

Проверим, что векторы $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ ортогональны, т.е. их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{6}{7}\cdot 0 = \frac{6}{7\sqrt{13}} - \frac{6}{7\sqrt{13}} = 0.$$

3.5. Перемножьте матрицы A и B. Убедитесь, что умножение некоммутативно

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.6. Найдите матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Проверьте ответ перемножением матриц.

3.7. Вычислите определитель 4-го порядка разложением по минорам.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

3.8. Детерминант матрицы с одинаковыми строками либо с одинаковыми столбцами равен нулю. Эффективный прием вычисления детерминантов – прибавить к столбцу (строке) другой столбец (или, соответственно, строку) с одинаковым множителем у всех элементов, чтобы в новом детерминанте (с тем же значением) некоторые элементы обратились в нули. Полученный детерминант разлагают по минорам самой «богатой» нулями строки или такого же столбца. Например, прибавляя в определителе из предыдущей задачи второй столбец к первому и разлагая полученный детерминант по первому столбцу, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (0+1) - 2(2-3) = 3.$$

Вычислите этим способом детерминант

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3.9. Чему равен детерминант *треугольной* матрицы размера $n \times n$?

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn-1} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Начальные сведения о тензорах и дифференциальных операторах

Обобщением понятия вектора на плоскости или в трехмерном пространстве являются не только n-мерные векторы с любым числом компонентов, но и *тензоры*: упорядоченные наборы из $n \times n$, $n \times n \times n$ и большего количества чисел. У тензоров непростая алгебра, однако они широко используются в теоретической физике и инженерных науках, а в последнее время – также в описании искусственных нейронных сетей. Через физику сложных систем тензорные конструкции начинают проникать в теорию общественных явлений, поэтому необходимо представить некоторые сведения об этих математических объектах.

Тензору соответствует «ориентированный объем». Рассмотрим кристалл, к которому приложено внешнее поле в обычном трехмерном пространстве. Это может быть давление, созданное прессом, или давление внутри земной *мантии*: области оболочки планеты на глубине более 100 км, где P~10-1000 кбар и температура с глубиной увеличивается от сотен до тысяч °С. Благодаря высокому давлению, земные породы мантии остаются в кристаллическом состоянии. И поскольку структуры большинства кристаллов *анизотропны*, из-за разной подвижности атомов вдоль разных направлений механическое воздействие на кристалл порождает в его малом объеме неравномерное поле деформаций $\|\sigma_{ij}\|$ (аналог сжатия пружины), которое нельзя представить обычным вектором. При этом поле напряжений $\|\varepsilon_{ij}\|$, вызванных деформациями (аналог сил упругости), также будет анизотропным и более сложным, чем векторное. Его распределение в кристалле не будет совпадать с полем $\|\sigma_{kl}\|$ (рис. 3.11).

Поля напряжений и деформаций в трехмерной кристаллической среде не сводятся к векторам; для их описания недостаточно тройки чисел. Эмпирически известно, что каждое

из этих полей можно охарактеризовать девятью числами – элементами матриц размера 3×3. Таким образом, поля деформаций и напряжений в кристалле – тензорные. Зависимость напряжений $||\varepsilon_{ij}||$ от деформаций $||\sigma_{ij}||$ выражает *обобщенный закон Гука* в символической записи

(3.23) $$\boldsymbol{\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\,\sigma_{kl}}$$

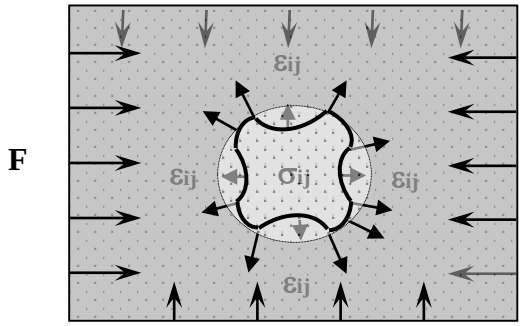


Рисунок 3.11. Малый сферический объем кристалла во внешнем поле сил F изменяет форму (тензор деформаций σ_{ij}). Тензорное поле напряжений ε_{ij} не совпадает с полем деформаций

Набор чисел $||C_{ijkl}||$, который переводит тензор деформаций в тензор напряжений, называется *тензором упругих постоянных*. Это трехмерный тензор 4-го ранга из $3^4 = 81$ чисел. В конкретных кристаллических веществах некоторые числа могут быть одинаковыми или равняться нулю благодаря симметрии кристалла. Деформациям и напряжениям $||\varepsilon_{ij}||$ соответствуют трехмерные тензоры 2-го ранга.

Числа $\{a_{ij}\}$, $\{a_{ijk}\}$, $\{a_{ijkl}\}$ и т.д., характеризующие тензор, называются его *координатами*. Подобно элементам матрицы, они нумеруются индексами ($i, j,\ldots = 1, 2, \ldots, n$, где n – размерность пространства). Число индексов (2, 3, 4, …) называется *рангом* тензора. Скаляр является тензором ранга 0, вектор – тензором 1-го ранга. В двумерном пространстве (т.е. на плоскости) тензоры 2-го ранга имеют четыре координаты (2^2), тензоры 3-го ранга восемь координат (2^3), 4-го ранга 16 координат (2^4) и т.д. В трехмерном пространстве тензоры 2, 3 и 4 рангов соответственно имеют $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ и $3^4 = 81$ координат. Это обобщается на любое число измерений. Мы обсудим здесь только тензоры в двумерном ($n = 2$) и трехмерном ($n = 3$) пространствах.

Тензорными являются некоторые из физических величин, уже встретившихся в этой книге. Так, момент инерции трехмерного тела или молекулы (разд. 2.2 в предыдущей главе) – это тензор 2-го ранга $||I_{jk}||$, или *тензор инерции*, который можно представить в виде квадратной матрицы, симметричной относительно перестановки недиагональных элементов

(3.24) $$\mathrm{I} = \left\|I_{jk}\right\| = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix};\ \mathrm{I}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}$$

($I_{ij} = I_{ji}$). Ее элементы равны суммам $\sum m_i r_i^2$ в разных направлениях **r** тела либо соответствующим интегралам. Тензоры более высоких рангов уже нельзя представить в

виде квадратных матриц. Правда, координаты тензора 3-го ранга можно расположить в кубе, разбитом на ячейки (рис. 3.12), но начиная с 4-го ранга наглядность представления теряется. Таким образом, тензор – обобщение понятия матрицы. Вектор в виде строки – это матрица размера 1×*n*, или тензор 1-го ранга, вектор-столбец – матрица *n*×1 (также тензор 1-го ранга), а квадратной матрице *n*×*n* соответствует тензор 2-го ранга.

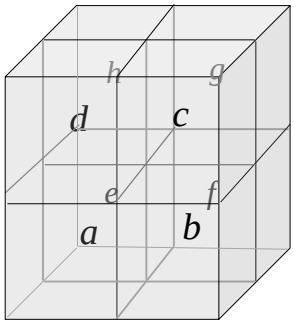


Рисунок 3.12. Схематичный вид тензора 3-го ранга в двумерном пространстве; *a, b, c, d, e, f, g, h* – координаты тензора

Тензоры 2-го ранга могут быть *симметрическими* и *антисимметрическими*. В трехмерном симметрическом тензоре 2-го ранга равны координаты a_{ij}=a_{ji}, лежащие по разные стороны от диагонали. Тензор инерции (3.24) – симметрический, он содержит шесть независимых координат: три диагональных элемента и три из шести недиагональных. В литературе по физике часто встречается *символ Кронекера*: единичный симметрический тензор 2-го ранга с координатами

(3.25) $$\delta_{ij} = \begin{matrix} 1, \text{при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{matrix}.$$

В трехмерном случае ему соответствует единичная матрица

$$\|\delta_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В антисимметрических тензорах 2-го ранга $\|A_{ij}\|$ недиагональные элементы с одинаковыми индексами имеют противоположные знаки $A_{ij} = -A_{ji}$. Все диагональные элементы равны нулю: из $A_{ii} = -A_{ii}$ следует $A_{ii} = 0$. Таким образом, трехмерный антисимметрический тензор 2-го ранга, подобно вектору, имеет три независимые координаты. Такой тензор называется *псевдовектором* или *аксиальным вектором*. Примеры псевдовекторов – момент импульса **L** и векторное произведение $\mathbf{r_1}\times\mathbf{r_2}$ (см. гл. 2).

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & 0 & L_{23} \\ -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Сложение тензоров и умножение тензора на число выполняются по обычным правилам. Складывать можно только тензоры одного ранга, заданные в пространствах одной и той же размерности:

$$\mathbf{A_{ijk}} + \mathbf{B_{ijk}} = \|a_{ijk} + b_{ijk}\|, \quad \text{т. е.}\{a_{111} + b_{111}, a_{112} + b_{112}. \ldots \; a_{333} + b_{333}\},$$

$$\alpha\mathbf{A_{ijk}} = \left\|\alpha a_{ijk}\right\|, \text{т. е.} \{\alpha a_{111}, \alpha a_{112}, \alpha a_{113}, \alpha a_{121}, \ldots \alpha a_{333}\},$$
$$\mathbf{A_{ijk}} - \mathbf{B_{ijk}} = \mathbf{A_{ijk}} + (-1)\mathbf{B_{ijk}}.$$

Перемножение тензорных физических величин обычно проходит со *сверткой* (суммированием координат) в *тензорном произведении* по паре одинаковых индексов (см. Приложение П6). Для тензоров 2-го ранга, т.е. квадратных матриц, такой операцией является обычное перемножение двух матриц «строка на столбец».

$c_{ik} = a_{ij}b_{jk} = \left\|\sum_j a_{ij}b_{jk}\right\|$, или (в трехмерном пространстве)
$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$,
$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$ и далее.

В частности, в обобщенном законе Гука (3.23) указано умножение тензора 4-го ранга $\mathbf{C_{ijkl}}$ на тензор 2-го ранга $\boldsymbol{\sigma_{kl}}$ со сверткой по индексам k и l, т.е. суммированием произведений их координат с одинаковыми индексами k и l. Из-за большого числа индексов операция свертки при умножении тензоров *подразумевается*, знак суммы *не указывается*. (Обращение с тензорами требует особого внимания!) Некоторые математические характеристики тензоров и операции с ними представлены в Приложении П6.

Дифференцирование тензорной величины $\boldsymbol{\alpha}$ ранга p по тензорной переменной $\boldsymbol{\xi}$ ранга q дает тензор $\|\partial\boldsymbol{\alpha}/\partial\boldsymbol{\xi}\|$ ранга $p+q$. В частности, вектор напряженности электрического поля **E** – это производная скалярного электростатического потенциала φ (тензора ранга 0) по координатному вектору **r** = (*x, y, z*), т.е. тензору 1-го ранга. Векторная производная от скалярной функции (потенциала, температуры, концентрации) называется *градиентом*.

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi = (\partial\varphi/\partial x,\ \partial\varphi/\partial y,\ \partial\varphi/\partial z)$$

Производная $\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{r}$ произвольной векторной функции $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ по вектору **r** = (*x, y, z*) – тензор 2-го ранга, который можно представить матрицей $\left\|\partial v_i/\partial x_j\right\|$ ||| (где *i, j* = 1, 2, 3). Сумма диагональных элементов этой матрицы, т.е. ее *след* (см. Приложение П5), называется *дивергенцией* векторного поля **v**. Ее записывают в форме скалярного произведения

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} = \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z$$

Дивергенция – мера «расходимости» силовых линий векторного поля в заданной точке пространства. Символом ∇ (*набла*) кратко обозначается вектор частных производных по координатам ($\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$). Его «скалярный квадрат» (то есть скалярное произведение на самого себя) – сумма вторых производных по координатам с кратким обозначением Δ (дельта), он также называется *оператором Лапласа*, или *лапласианом*:

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla\ (= \nabla^2) = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/z^2.$$

Символы grad, div, ∇, Δ (либо ∇^2) и иные, не рассматриваемые здесь – примеры *дифференциальных операторов*. Они распространены в *векторном анализе*, теории дифференциальных уравнений, в других разделах высшей математики – и соответственно, в теоретической физике, включая приложения ее методов к описанию биологических и социальных систем.

3.2 Дифференциальные уравнения в частных производных

К ногам привязали тройной интеграл
И в плюс-бесконечность впихнули…
еще одна песня студентов-физиков

Уравнения в частных производных – это дифференциальные уравнения от функций двух и большего числа переменных. В физических задачах одной из переменных часто является время t, тогда как другими переменными задаются значения функции $u(x,y,…t)$ в точках пространства. Мы рассмотрим главные типы уравнений для действительных функций вида $u(x, t)$ и $u(x, y, z, t)$. Их решения отражают динамику изменений физической величины u, соответственно, вдоль одной координаты x либо в трех измерениях.

3.2.1. Общие положения

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями (см. раздел 2.1 главы 2, формулы (2.1) и (2.1 а)), дифференциальное уравнение в частных производных от функции n переменных $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ можно записать в обобщенном виде:

(3.26) $$F(x_1, \ldots, x_n, u, \partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n, \partial^2 u/\partial {x_1}^2, \ldots) = 0$$

В математике доказывается, что выражения вида (3.26), в которые входят только частные производные первого порядка, можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Так, например, простейшее уравнение $\partial u(x,y)/\partial x = 0$ означает, что u не зависит от переменной x: ему удовлетворяет *любая* дифференцируемая функция $f(y)$. Чуть более сложное дифференциальное уравнение $y\partial u/\partial x + x\partial u/\partial y = 0$ от функции двух переменных $u(x, y)$ сводится к *уравнению характеристик* $dx/y = dy/x$ с решением $x^2 – y^2 = C$, где C – константа интегрирования (см. раздел 2.2. и формулу (2.11) во 2-й главе). Общее решение этого уравнения 1-го порядка – все дифференцируемые (иначе говоря, имеющие производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$) функции вида $f(x^2–y^2)$.

Таким образом, общие решения уравнений в частных производных, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, не определяются однозначно. При этом, в отличие от дифференциальных уравнений для функции одного аргумента $f(x)$, в них могут входить не только произвольные постоянные, но и произвольные функции.

Среди уравнений в частных производных чаще всего используются и лучше всего исследованы уравнения 2-го порядка. Их также называют *уравнениями математической физики*. В этом разделе мы рассмотрим самые распространенные *линейные* уравнений 2-го порядка в частных производных. Для функций двух переменных $u(x, y)$ они имеют обобщенный вид

(3.27) $$A\partial^2 u/\partial x^2 + 2B\partial^2 u/\partial x\partial y + C\partial^2 u/\partial y^2 + f(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0, \quad \text{или}$$
(3.27 а) $$Au''_{xx} + 2Bu''_{xy} + Cu''_{yy} + f(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0,$$

где «коэффициенты» A, B и C могут быть как числовыми множителями, так и функциями от переменных (x, y), либо от одной из них, имеющие непрерывные производные до 2-го порядка включительно. Выражения (3.27) и (3.27 а) различаются только обозначениями

производных; для краткости их чаще записывают в форме (3.27 а). Хотя в общем случае смешанные производные u''_{xy} и u''_{yx} с разным порядком дифференцирования (разд. 1.4.3 в гл. 1) не обязательно совпадают, для непрерывных дифференцируемых функций в основных уравнениях математической физики $u''_{xy} = u''_{yx}$. Этим объясняется множитель $2B(x, y)$ в (3.27) и (3.27 а).

По аналогии с квадратным уравнением $ax^2 + bx + c = 0$, для уравнения (3.27) можно построить *дискриминант*. Это детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

для удобства вывода взятый с обратным знаком:

$$D(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y).$$

В зависимости от знака D (если он остается неизменным во всей области определения функции u), уравнения (3.27) относят к трем основным типам. У них имеются стандартные формы, показанные ниже для случая двух переменных, хотя число переменных (x_1, x_2, ..., x_n) в таких уравнениях не ограничено.

(3.28) (1) при $D > 0$ уравнения *гиперболического типа* (t – время)
$u''_{tt} = au''_{xx} + f$,
(2) при $D < 0$ уравнения *эллиптического типа*
$u''_{xx} + u''_{yy} = f$ (решения стационарны: функция u не зависит от времени).
(3) при $D = 0$ уравнения *параболического типа*
$u'_t = au''_{xx} + f$

Если при разных значениях переменных в области определения искомой функции u дискриминант изменяет знак, уравнение относится к смешанному типу. Функции f в формулах (3.27) отражают внешние воздействия на физическую систему. При $f = 0$ соответствующие уравнения называются *однородными*, при $f \neq 0$ – *неоднородными*.

Общее решение уравнений в частных производных выражается через произвольные функции. Для содержательного решения должны быть заданы *начальные условия*

$$u(t = 0) = \varphi(x), \qquad u'(t = 0) = \psi(x)$$

(значения искомой функции и ее первой производной по времени в начальный момент $t = 0$) и *граничные условия* $u|_{\Omega} = \phi$: значения функции $u(x, \ldots, t)$ и ее производных по координатам на границе рассматриваемой области, условно обозначенной Ω. Совокупность начальных и граничных условий называется *краевыми условиями* задачи.

3.2.2. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим тонкий и однородный длинный стержень с площадью сечения S, плотностью материала ρ и удельной теплоемкостью C. По оси стержня проходит координатная ось x; его теплообмен с внешней средой через поверхность отсутствует. Температуру стержня в точке x в момент времени t задает функция двух переменных $u(x, t)$.

Так как стержень тонкий, температура во всех точках его сечения с координатой x одинакова.

Пусть в момент времени t в стержне задано распределение температуры $u(x, t)$. За время Δt теплота перейдет от горячих частей стержня к холодным; в результате температура участка $(x, x+\Delta x)$ изменится на Δu. Вызванное этим изменение количества теплоты

(2.29 а) $$\Delta Q = C \cdot \Delta u \cdot (\rho S \Delta x)$$

равно произведению удельной теплоемкости материала на изменение температуры и на массу участка стержня – которая, в свою очередь, равна произведению его плотности ρ на объем $S\Delta x$.

Запишем количество теплоты, которое уйдет по координате x через границы участка $(x, x+\Delta x)$ (тепловой поток) в малый интервал времени Δt. Этот поток пропорционален градиенту температуры $\partial u/\partial x$ (чем больше перепад температуры, тем больше поток) и продолжительности интервала Δt. Будем считать поток Q в сторону увеличения x положительным, а в противоположную сторону отрицательным (рис. 3.13). Тогда

(2.29 б) $$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = kS\left(\partial u/\partial x\,|_{x+\Delta x} - \partial u/\partial x\,|_x\right)\Delta t = kS\Delta\left(\partial u/\partial x\right)\Delta t$$

где k – коэффициент теплопроводности стержня. Приравнивая изменение количества теплоты (2.29 а) и (2.29 б), получим

$$C \cdot \rho \cdot S \cdot \Delta x \Delta u = kS\Delta\left(\partial u/\partial x\right)\Delta t$$

Площадь сечения стержня в левой и правой частях уравнения сокращается. Тогда изменение температуры Δu за время Δt

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{k}{C\rho}\frac{\Delta(\partial u/\partial x)}{\Delta x}$$

В пределе $\Delta x, \Delta t \to 0$ получим дифференциальное *уравнение теплопроводности*

(3.30) $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{или} \quad u'_t = a^2 u''_{xx} + f,$$

где $a = \sqrt{k/C\rho}$

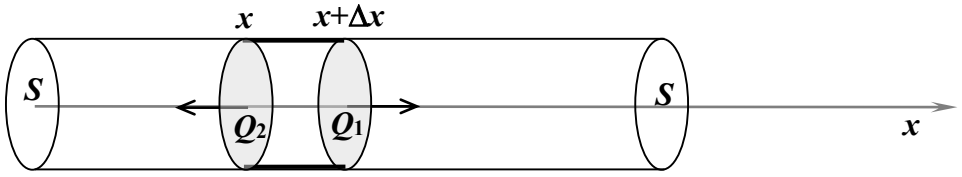


Рисунок 3.13. К выводу уравнения теплопроводности

Уравнение (3.30) относится к параболическому типу. Его решение находят при заданных начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

(исходном распределении температуры в стержне) и граничных условиях: значениях u и u_x' на границах той области, где задана функция $u(x, t)$. В частности, для теплоизолированного стержня длиной l, на концах которого поддерживается постоянная температура u_0, эти условия выглядят так:

$$u(0,t) = u(l,t) = u_0.$$

Решением уравнения (3.30), т.е. распределение температуры $u(x, t)$, в бесконечном стержне с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ (граничных условий нет) в момент времени t является интеграл

(3.31) $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} exp\left[-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right] d\xi.$$

Под интегралом находится произведение исходной функции φ на плотность вероятности *распределения Гаусса*, также называемого *нормальным распределением*, с дисперсией $\sigma = 2a\sqrt{t}$ (рис. 3.14). Интегралы вида (3.31) нельзя представить конечным числом аналитических функций, но они найдены численно и широко используются в теории вероятностей. Несколько детальнее мы рассмотрим нормальное распределение в гл. 8 второй части.

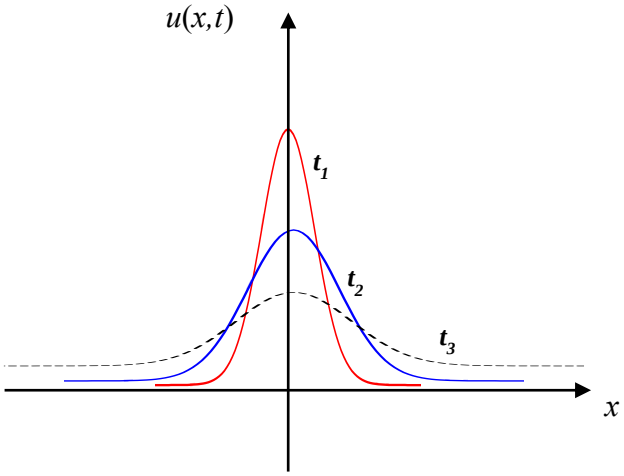


Рисунок 3.14. Распределение температуры по тонкому стержню в моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$

Уравнение теплопроводности также можно составить для тепловых потоков в трехмерном пространстве. В этом случае оно имеет вид

(3.32) $$\partial u/\partial t = a^2\left(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2\right) + f(x,y,z,t) = a^2\Delta u + f$$

(Напомним, что символом Δ в уравнениях математической физики обозначается дифференциальный оператор $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$). Краевые условия на функцию $u(x, y, z, t)$ и ее первые производные по координатам, определяющие численное решение, в этом случае задаются на границе некоторого объема – например, на охлаждаемых стенках

реактора. *Функцией источника* $f(x, y, z, t)$ определяется количество теплоты, генерируемое внутри объема. При $f = 0$ уравнение теплопроводности (3.32) называется однородным.

Дифференциальными уравнениями, аналогичными (3.30) и (3.32), задается динамика «расплывания» концентрации растворенного вещества с течением времени – соответственно в длинной тонкой трубке и в трехмерной среде. В практически важных случаях среда неоднородна, а функция источника может задавать изменение концентрации от внешних воздействий – например, при химических реакциях в растворе. Поэтому уравнение теплопроводности также называется *уравнением диффузии*. В этом случае множитель a^2 заменяют на коэффициент диффузии D. Также уравнения параболического типа предложены для описания биржевой динамики.

Уравнение Блэка-Шоулза

Дифференциальными уравнениями параболического типа описывают динамику стохастических процессов (таких, как усредненный результат движения молекул) в индифферентной среде, которая при этом не изменяется. В 1973 г. подобная модель была предложена для расчета цены *производных финансовых инструментов*, или *деривативов*, на фондовом рынке (бирже). Объектами биржевой торговли, или *активами*, являются товары и ценные бумаги: акции предприятий, долговые обязательства, а также «производные» обязательства по продажам и покупкам активов. Задачей участника торговли (*трейдера*) обычно является получение спекулятивной прибыли от покупки и перепродажи активов. В классической экономической теории предполагается, что изменение цен активов на бирже – случайный (стохастический) процесс.

Деривативы представляют собой соглашения о покупке-продаже определенного актива («базового актива») в установленный срок по согласованной цене. Их наиболее распространенными видами являются *форвардные контракты* (от англ. «будущий контракт») о сделке с фиксированной ценой до определенной даты исполнения, *фьючерсные контракты* (англ. futures: «будущие», биржевая разновидность форвардных) и *опционы* (лат. optio – выбор, желание). Последние предоставляют покупателю опциона право, но не обязательство совершить продажу (put option) либо покупку (call option) указанного в контракте базового актива в установленный срок по заданной цене. Различают европейский (фиксированная дата сделки) и американский (любая дата до установленного срока) типы опционов. Деривативы, в свою очередь, продаются и покупаются на бирже; наибольший объем оборота среди них имеют опционы.

Ценные бумаги и иные активы, принадлежащие трейдеру и используемые им в *биржевой игре*, называются *инвестиционным портфелем* (investment portfolio). По основному предположению, биржевые цены базового актива и заключенных на него опционов коррелируют (т.е. растут и падают согласованно), так что включение опционов в инвестиционный портфель снижает риск потерь. Так, если трейдер имеет N определенных акций по цене $y(t)$ за 1 акцию и опцион на эти акции, купленный по цене $C_0 = C(y, 0)$, суммарная цена портфеля в момент времени t составляет $P = Ny(t) - C(y, t)$. Тогда число акций в *безрисковом* портфеле определяется соотношением

$$Ny_+ - C_+ = Ny_- - C_-, \qquad \text{или} \qquad N = \frac{C_+ - C_-}{y_+ - y_-},$$

где подстрочные индексы «+» и «–» относятся к ценным бумагам, соответственно подорожавшим и подешевевшим за интервал времени Δt. При $\Delta t \to 0$ получаем

(3.33) $$N = {\partial C}/{\partial y}.$$

Соотношение (3.33) объясняет смысл термина «производные финансовые инструменты».

За отрезок времени Δt безрисковый портфель принес бы гарантированный доход

$$rP\Delta t = ry\left({\partial C}/{\partial y} - C\right)\Delta t$$

(процент от стоимости N акций минус цена опциона). Здесь r – безрисковая, или минимальная процентная ставка доходности данного рынка, близкая к доходности наиболее надежных государственных ценных бумаг. Так как оптимальное число акций в портфеле $N(y, t)$ само изменяется во времени, цену опциона $C(y, t)$ на идеальном рынке задает дифференциальное *уравнение Блэка-Шоулза*

$$\partial C/_{dt} = -\tfrac{1}{2}\sigma^2 y^2\, \partial^2 C/_{\partial y^2} - ry\, \partial C/_{\partial y} + rC \qquad (3.34)$$

где C – цена опциона,
y – цена базового актива (акции),
σ^2 – квадрат среднего относительного «разброса» цены базового актива (*волатильности* цены)
r – безрисковая ставка доходности.

В уравнении (3.34) параметры σ и r – безразмерные относительные величины с оценочными значениями порядка 0.01 – 0.1. Относительные изменения цены актива y можно представить в виде $\Delta y/y \to dy/y = d(\ln y)$. Заменой переменных $x = \ln y$ уравнение (3.34) сводится к линейному уравнению теплопроводности, в котором начальные условия заданы ценой и сроком исполнения опциона. Таким образом, это уравнение решается точно. Хотя при его выводе, с точки зрения экономистов, использован ряд нереалистических допущений (см. главу 8), решения уравнения Блэка-Шоулза используют для оценок и прогнозирования состояния биржи (см. [5] в списке литературы). Более подробно вопросы *финансовой математики* будут рассмотрены в 8-й главе.

Схема вывода уравнения теплопроводности, как и последующих типов уравнений, приводится здесь не для запоминания – в конечном счете математические подробности можно пропустить. Необходимо лишь понять логику выводов основных типов уравнений, на первый взгляд близких, однако описывающих разные явления – ибо уравнения в частных производных все шире используются в теоретическом моделировании социума. Численными расчетами во всех случаях занимаются компьютерные программы; важно знать, зачем и по какому алгоритму они это делают.

3.2.3. Волновое уравнение

Пусть функция $u(x, t)$ обозначает перпендикулярные деформации тонкой длинной струны, натянутой вдоль направления x (рис. 3.15). Зададим эти деформации $u > 0$ на малом участке $(x, x+\Delta x)$ (серая линия на рис. 3.15). По закону Гука $F = -\kappa x$ на двух половинах интервала будут действовать силы упругости, пропорциональные *относительному* удлинению струны $\partial u/\partial x$ (размерности [м/м]*) на деформированном участке

$$\mathbf{F}_{\text{упр}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \kappa\left(\partial u/_{\partial x}\,|_{x+\Delta x} - \partial u/_{\partial x}\,|_x\right) = \kappa\Delta\left(\partial u/_{\partial x}\right),$$

где коэффициент κ (каппа) при относительном удлинении, или *натяжение* струны, имеет размерность силы [Н], т.е. [кг·м/с^2]. Чтобы струна оставалась неподвижной, необходима уравновешивающая сила $\mathbf{F}$. (На упрощенной схеме 3.15 мы считаем интервал Δx малым, а перпендикулярную деформацию значительной, так что силы $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ и $\mathbf{F}$ направлены почти параллельно). Если убрать эту силу, деформированный участок придет в движение в соответствии со 2-м законом Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$:

* Напомним, что размерности физических величин обычно выражают комбинацией входящих в них единиц измерения по системе СИ (см. гл. 1), записанной в квадратных скобках.

$$\mathbf{F} = \rho\Delta x \cdot {}^{\partial^2 u}/_{\partial t^2},$$

где ρ = const – линейная плотность струны с размерностью [кг/м], а произведение $\rho\Delta x$ – масса ее движущегося участка. Приравнивая силы, действующие на деформированный участок струны ($\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$), получим

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \text{то есть}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa \frac{\Delta \frac{\partial u}{\partial x}}{\Delta x}.$$

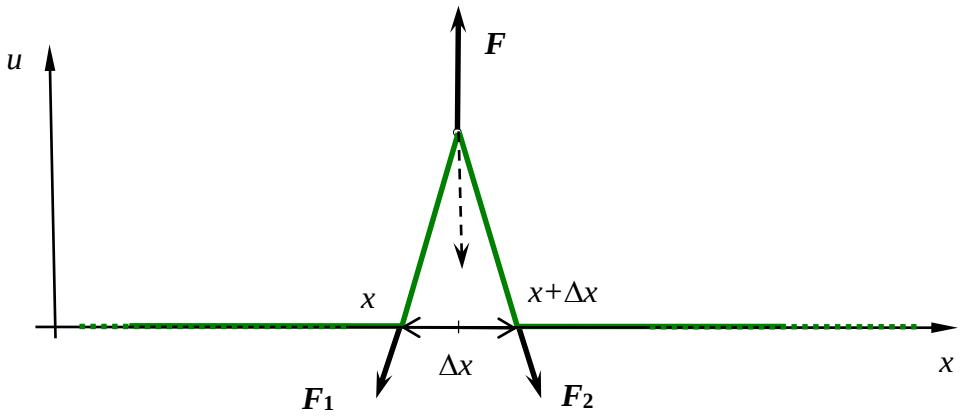


Рисунок 3.15. Поперечная деформация струны на малом участке Δ*x*

В пределе при $\Delta x \to 0$

(3.35) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{или} \quad u''_{tt} = v^2 u''_{xx}.$$

Уравнение (3.35) называется *волновым уравнением*. Множитель $v = \sqrt{{}^{\kappa}/_{\rho}}$ имеет размерность скорости [(кг·м/с^2):(кг/м)]$^{1/2}$ = [(м^2/с^2)$^{1/2}$ = м/с]. (Напомним, что ρ – линейная плотность струны, а κ – коэффициент ее жесткости в единицах силы).

У дифференциального уравнения (3.35) есть *частное решение* (т.е. одно из бесконечного множества возможных решений)

(3.36 а) $$u = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Оно соответствует синусоидальной *бегущей волне*, в которой гармонические колебания малых участков струны распространяются в положительном направлении оси x со скоростью v, называемой *фазовой скоростью* (скоростью распространения колебаний по струне). На рис. 3.16 можно видеть, что у точек струны, разделенных интервалом времени $x/v = \frac{2\pi}{\omega} = T$, который соответствует периоду колебаний, смещения одинаковы. Эти точки совершают поперечные гармонические колебания *в одинаковой фазе*.

Минимальное расстояние между точками струны, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны* λ. Если по бесконечной струне распространяются синусоидальные волны в направлении $x > 0$, такие же волны будут распространяться с той же фазовой скоростью v в противоположном направлении $x < 0$: функция

(3.36 б) $$u = A\cos\omega(t + \frac{x}{v})$$

тоже является частным решением дифференциального уравнения (3.35).

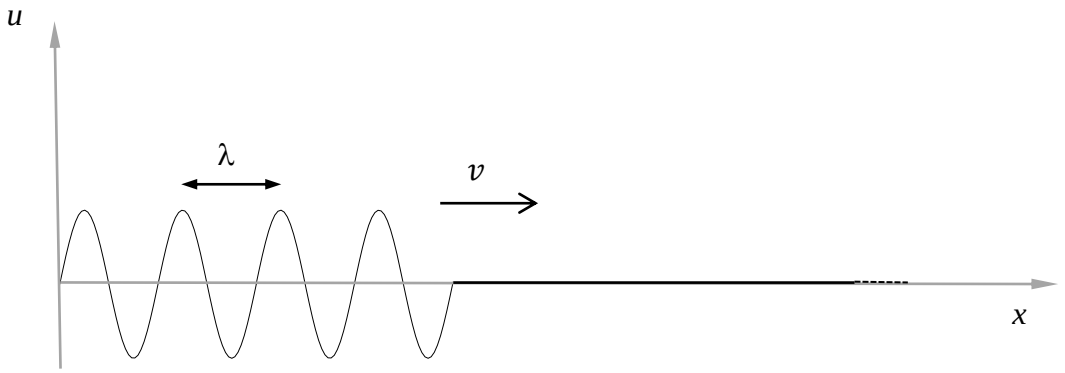


Рисунок 3.16. Синусоидальная волна

Справедливость решений (3.36 а, б) легко проверить, подставив их в уравнение (3.35). По аналогии с обыкновенным дифференциальным уравнением для гармонических колебаний (см. формулы (2.9 в) и (2.10) в главе 2) проверяется, что функции

(3.36 в) $$u = A\sin\omega(t \pm \frac{x}{v})$$

также отвечают бегущим волнам с фазовым сдвигом $\phi = \pi/2$ относительно функций (3.35 а, б). Любые *линейные комбинации* $\alpha u_1 + \beta u_2$ двух решений линейного дифференциального уравнения u_1 и u_2 (где α и β – постоянные коэффициенты) также будут решениями этого уравнения. Поэтому все функции вида (3.36 а-в) можно объединить в комплекснозначную функцию (см. раздел 3.1)

(3.37) $$w(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)},$$

где $k = 2\pi/\lambda = \omega x/v$ – *волновое число*. Действительная, т.е. *настоящая* измеримая амплитуда волны $u(x, t)$ в этом случае равна модулю ее *комплексной амплитуды* (3.37):

(3.37 а) $$u(x,t) = |w(x,t)| = \sqrt{w(x,t)\cdot w^*(x,t)}$$

(звездочка обозначает комплексно сопряженную функцию). Во всех решениях волнового уравнения (3.35) A – действительный амплитудный множитель, заданный начальными условиями.

Формула (3.37) основана на приведенных ранее в этой главе определениях экспоненциальной формы комплексного числа (3.8) и комплексной экспоненты (3.8 а):

$$z = |z|e^{i\varphi}, \text{ где } e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Уравнение (3.37) дает общее описание *плоских* (т.е. распространяющихся вдоль одной координаты) синусоидальных волн в трехмерном пространстве. Его часто используют как математическую модель электромагнитных волн, в том числе видимого света. К сожалению, важный момент перехода от действительных функций (3.36 а-в) к комплексной функции (3.37), связанной с $u(x, t)$ соотношением (3.37 а), во многих учебниках не поясняется. Комплексную амплитуду (3.37) в физической литературе *тоже* обозначают $u(x, t)$ – к этому придется привыкнуть.

Так как у всякого комплексного числа есть модуль и фаза, представление синусоидальной волны в комплексной форме (3.37) облегчает формальное описание *интерференции* и *дифракции* волн как сложения комплексных функций. Пусть, например, комплексные амплитуды двух гармонических осцилляторов заданы функциями

(3.38) $$A_1 e^{i\omega t} \text{ и } A_2 e^{i(\omega t-\varphi)},$$

где A_1 и A_2 – действительные амплитуды колебаний, ω – их одинаковая циклическая частота и φ – разность фаз (т.е. колебания второго осциллятора начались на φ/ω секунд позже, чем колебания первого). Для функции (3.37) действительная амплитуда колебаний равна A, т.к. модуль второго сомножителя в правой части уравнения равен 1. Чему равны амплитуда и фаза суммы колебаний (3.38)?

Решение

Комплексная амплитуда суммы колебаний (3.38) равна

$$A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i(\omega t-\varphi)} = e^{i\omega t}\left(A_1 + A_2 e^{-i\varphi}\right) = A_\Sigma e^{i(\omega t+\varphi_\Sigma)}$$

(A_Σ и φ_Σ – соответственно действительная амплитуда и фаза суммарного колебательного движения). В соответствии с формулой (3.37 а) запишем квадрат суммы колебаний

$$A_\Sigma{}^2 = \left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i(\omega t-\varphi)}\right)\cdot\left(A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{-i(\omega t-\varphi)}\right) = A_1{}^2 + A_2{}^2 + A_1 A_2\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right).$$

Представим сумму комплексных экспонент в правой части уравнения в тригонометрическом виде (3.8 а):

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi.$$

Окончательно получим

$$A_\Sigma{}^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1 A_2\cos\varphi.$$

Квадрату амплитуды $A_\Sigma{}^2$ соответствует суммарная энергия колебаний: при изменении разности фаз φ она изменяется по гармоническому закону. Если накладываются две плоские волны вида (3.37), расходящиеся под углом α, разность фаз между ними зависит от пройденного пути x:

$$\varphi = \frac{\omega x}{v} = kx\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Поставив на пути расходящихся звуковых волн чувствительную мембрану, можно зафиксировать на ней полосы максимумов и минимумов амплитуды колебаний; при сдвиге мембраны относительно источника волн они будут смещаться (рис. 3.17). Аналогичные темные и светлые полосы можно наблюдать при наложении двух потоков монохроматического света (см. ниже). Результат наложения волн называется *интерференционной картиной*.

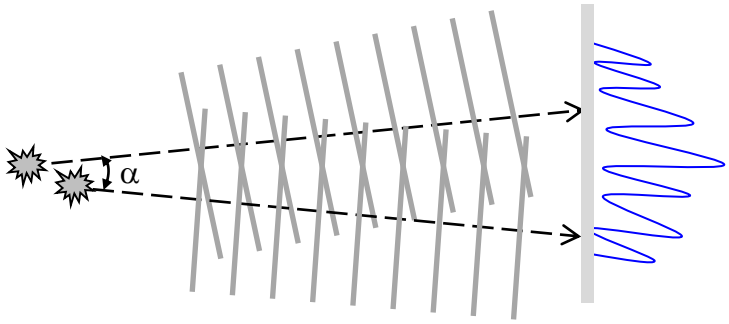


Рисунок 3.17. Явление интерференции

На явлениях интерференции основана *волновая оптика*, а также *акустика* и ряд других прикладных направлений. Не имея возможности обсуждать здесь этот большой материал, мы отсылаем читателя к школьным учебникам (см. гл. 1) и курсам общей физики для студентов – в частности, к 1-му тому «Курса общей физики» С.Э. Фриша и А.В. Тиморевой, где детально рассмотрены волновые процессы.

Помимо синусоидальных волн, решением дифференциального уравнения (3.35) может быть бесконечное множество других функций. *Общим решением* уравнения (3.35) является любая пара непрерывных функций f

(3.39) $$f(x-vt) + f(x+vt),$$

дважды дифференцируемых по переменным x и t. Для конкретизации решений (3.39) используются начальные и граничные условия. В случае бесконечной струны граничных условий нет, а начальные условия в общем виде – это

(3.39 а) $$u(x,0) = \varphi(x)$$
(3.39 б) $$u'_t(x,0) = \psi(x).$$

Уравнение в частных производных с заданными начальными условиями называется *задачей Коши*. Решение волнового уравнения с условиями (3.39 а, б) дает *формула Даламбера*:

(3.40) $$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-vt) + \varphi(x+vt)] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Таким образом, форма бегущих волн в струне задается начальными условиями задачи.

Формула (3.40) описывает распространение возмущения любой формы в бесконечной струне с фазовой скоростью v. За начало координат выберем точку x = 0, в малой окрестности которой задано первоначальное возмущение. Если это возмущение статично (как на рис. 3.15), $u_t'(0,0) = \psi(x) = 0$ и интеграл в правой части (3.40) обращается в ноль.

Тогда при $t > 0$ деформированный участок струны придет в движение, возвращаясь к равновесному состоянию $u = 0$. В отличие от линейного осциллятора в разд. 2.2 предыдущей главы, кинетическая энергия движущегося участка не вызовет гармонических колебаний, а перейдет к соседним участкам струны, порождая их деформацию. Таким образом, от точки $x = 0$ с одинаковой скоростью v будут перемещаться две волны деформаций в положительном и отрицательном направлениях (рис. 3.18).

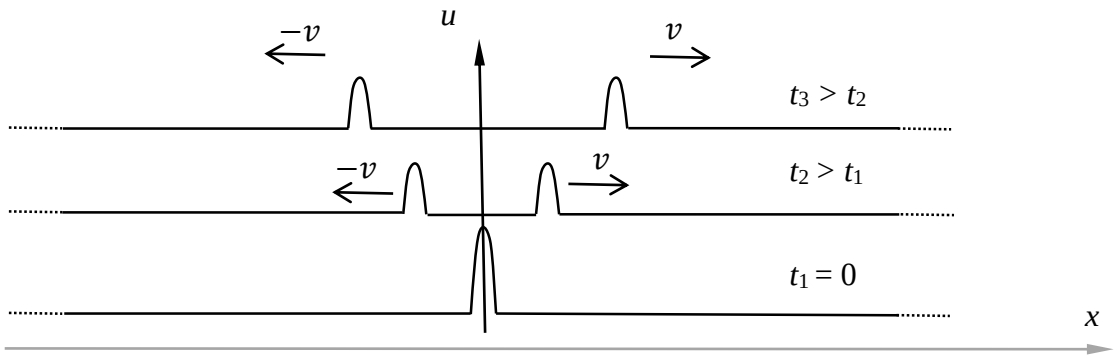


Рисунок 3.18. Распространение возмущения φ(*x*, 0) по струне

Упомянутое выше «наложение» решений линейных дифференциальных уравнений называется *принципом суперпозиции*: в упругой среде волны деформаций распространяются независимо. В частности, две встречные волны проходят друг сквозь друга, не обмениваясь энергией. (Это хорошо видно при распространении концентрических волн от падения капель или двух камешков на поверхности воды). Отметим, что такая картина основана на гармоническом приближении – другими словами, на линейной зависимости силы от деформации по закону Гука. При учете нелинейных эффектов возникают обмен энергией и рассеяние (диссипация) энергии в среде, то есть затухание волн.

Достигнув «стенки» (точки жесткого закрепления при $x = l$ с граничным условием $u(l, t) \equiv 0$), волна в струне отражается: возникает волна с той же амплитудой и противоположной фазой, которая распространяется с такой же скоростью в обратном направлении (рис. 3.19 а). Если упругая волна проходит границу раздела двух сред – в одномерном случае точку соединения двух струн с разной жесткостью к или (и) плотностью ρ – она разделяется на отраженную волну и прошедшую волну (рис. 3.19 б). Скорость прошедшей волны $v_2 = \sqrt{\kappa_2/\rho_2}$ определяется параметрами второй среды, относительные амплитуды двух волн – отношением произведений $Z_i = \rho_i v_i$:

$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ коэффициент отражения (англ. reflection)

$T_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ коэффициент пропускания (англ. transmission)

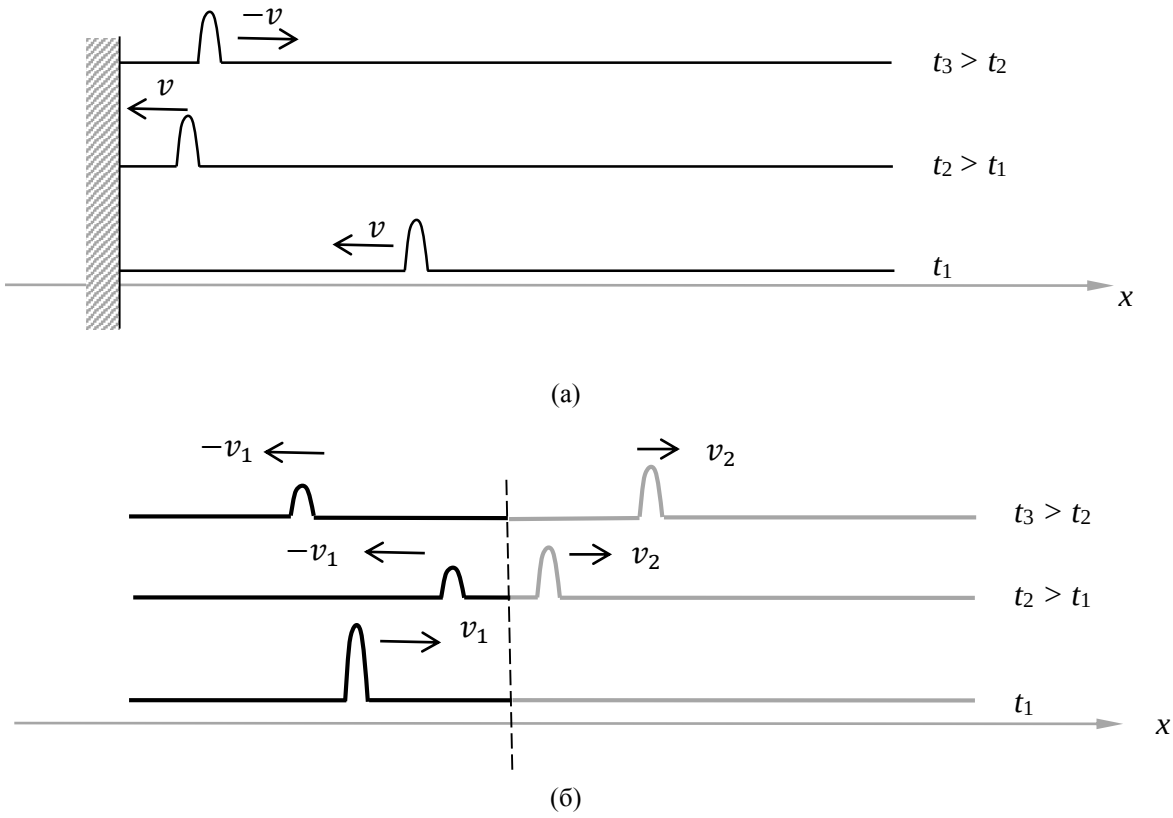


Рисунок 3.19. (а) Отражение упругой волны от стенки, (б) прохождение границы двух сред

Волновое уравнение (3.35) позволяет описать распространение возмущений в среде, которая их не поглощает и не усиливает. Кроме идеальных поперечных упругих колебаний, это могут быть продольные упругие либо крутильные колебания стержня, продольные колебания в газах и жидкостях, плоские звуковые и другие волны. Так же распространяются электромагнитные волны: колебания напряженностей взаимосвязанных электрического и магнитного полей в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны (в геометрической оптике называемому *лучом*). В этом случае $v = c$ – скорость света. Уравнение обобщается на волновые процессы в двух (волны на поверхности жидкости или мембраны) и в трех измерениях:

$$(3.41) \qquad {\partial^2 u}/{\partial t^2} = v^2\left({\partial^2 u}/{\partial x^2} + {\partial^2 u}/{\partial y^2} + {\partial^2 u}/{\partial z^2}\right) + f(x,y,z,t) = v^2\Delta u + f,$$

где Δ – оператор Лапласа (см. предыдущий подраздел), f – функция источника. При f=0 (3.41) называется *однородным волновым уравнением*.

Картина распространения плоских волн, показанная на рис. 3.18 и 3.19, сохраняется и в трехмерном случае для волн любой природы, если среда не изменяется под их воздействием (индифферентна). (Особенности *автоволн*, распространяющихся в *активной среде*, будут рассмотрены в следующих главах). «Форму» трехмерной волны задает поверхность одинаковой фазы: *волновой фронт*. С направлением распространения волны (лучом) совпадает *волновой вектор* $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, модуль которого равен $2\pi/\lambda$.

Сферическим электромагнитным волнам заданной длины λ (*монохроматическим*), расходящимся в пустом пространстве от точечного источника со скоростью света c=299792500 м/с, отвечает уравнение

(3.42) $$u(\mathbf{r},t)=\frac{A}{r}e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})},$$

где **r** – радиус-вектор от источника до данной точки пространства, **k** – волновой вектор, **k**·**r** – их скалярное произведение, $\omega = 2\pi c/\lambda$ – циклическая частота излучения, t – время. (Еще раз отметим, что в (3.42) $u(\mathbf{r},t)$ – комплекснозначная функция; действительным амплитудам колебаний соответствует ее модуль, а интенсивности излучения – квадрат модуля, см. формулы (2.10 а, б) в гл. 2). Правая часть формулы (3.42) определяет комплексную амплитуду световой волны; ее квадрат пропорционален интенсивности излучения. Таким образом, интенсивность сферических волн $u^2 \sim |r^{-2}|$ обратно пропорциональна квадрату расстояния $r(t)$, поскольку энергия волны распределяется на поверхности сферы площадью $S = 4\pi r^2$.

ЗАДАЧА 3.10. Проверьте справедливость решений (3.36) и (3.37), подставив их в уравнение (3.35).

Стоячие волны

Пусть натянутая струна длиной l жестко закреплена на концах. Решениями волнового уравнения (3.35) с граничными условиями

(3.43) $$u(0,t)=u(l,t)=0$$

являются *стоячие волны* (их вывод представлен ниже). Каждая точка струны в стоячей волне совершает гармонические колебания с частотой $\omega=\frac{\pi n v}{l}$ и начальной фазой δ_n; их амплитуда $C_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ зависит от положения точки (рис. 3.20). Точки струны

$$x = 0, l/n, 2(l/n), \ldots, (n-1)(l/n), l$$

с нулевой амплитудой колебаний называются *узлами* стоячей волны, точки

$$x = \tfrac{1}{2}(l/n), \tfrac{3}{2}(l/n), \ldots, \tfrac{(2n-1)}{2}(l/n)$$

с максимальной амплитудой – *пучностями*.

Энергию колебаний закрепленной струны на ее участке единичной длины определяет формула

$$E_n = \rho {C_n}^2 \omega^2 \sin^2[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)].$$

Таким образом, энергия стоячей волны при одинаковых амплитудах $\{C_n\}$ пропорциональна квадрату ее номера: $E_n \sim \omega^2 = (\pi v/l)^2 n^2$. Волны с разными n и, соответственно, разными частотами ω_n называются *гармониками*. Деформация натянутой струны с закрепленными концами («щипок», рис. 3.15) возбуждает в ней набор (спектр) гармоник; стоячие волны с n от 1 до 4 показаны на рис. 3.20.

Звуку струнных инструментов соответствуют бегущие волны продольных колебаний воздуха, порожденные стоячими волнами струны. Колебание с $n = 1$ дает *основной тон*, $n = 2, 3, \ldots$ соответствуют *обертонам*. Если прижать струну в пучности основного тона ($x = l/2$), амплитуды всех колебаний с нечетными n обратятся в ноль. При этом четные гармоники останутся неизменными и основная частота звука увеличится вдвое. Наборы

амплитуд $\{C_n\}$ (в действительности быстро уменьшающихся с возрастанием n) определяют тембр звучания струнных музыкальных инструментов.

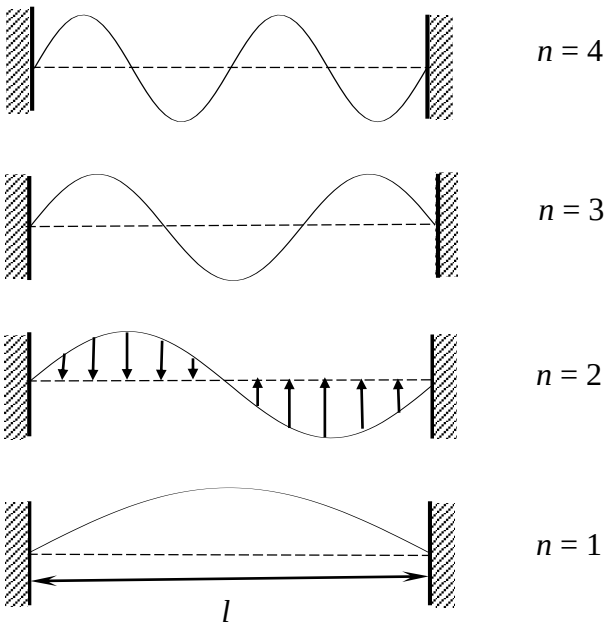


Рисунок 3.20. Стоячие волны в закрепленной струне

Схема вывода уравнения стоячих волн

Решение волнового уравнения с граничными условиями (3.43) будем искать *методом разделения переменных* в виде функции

(3.44) $$u(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Подставив эту функцию в левую и правую части дифференциального уравнения (3.35), получим

$$\frac{d^2u}{dt^2} = X(x)\frac{d^2T}{dt^2},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = T(t)\frac{d^2X}{dx^2},$$

($X(x)$ зависит только от x, а $T(t)$ только от t, и частные производные можно заменить на обычные). Дифференциальное уравнение (3.35) преобразуется к виду

$$X(x)\frac{d^2T}{dt^2} = v^2T(t)\frac{d^2X}{dx^2}, \qquad \text{или}$$

(3.45) $$\frac{1}{v^2T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\gamma = \text{const}.$$

(Левая часть уравнения (3.45) зависит от переменной x, правая – от переменной t. Чтобы равенство соблюдалось при любых (x, t), обе части должны быть равны одной и той же постоянной величине. Для упрощения дальнейших выкладок придадим этой величине отрицательный знак: «–γ».) Тогда (3.45) разбивается на два обыкновенных дифференциальных уравнения 2-го порядка

(3.45 а) $$X'' + \gamma X = 0$$
(3.45 б) $$T'' + \gamma v^2 T = 0$$

Решения уравнений (3.45 а, б) – это суммы синуса и косинуса от аргументов $\sqrt{\gamma}x$ и $\sqrt{\gamma}vt$ с произвольными множителями A и B (см. уравнение гармонических колебаний в разд. 2.2 главы 2). Кроме того, для уравнения (3.45 а) заданы граничные условия (3.43). Первое условие $X(0)T(t) = 0$ позволяет найти функцию $X(x)$:

$$A\cos(\sqrt{\gamma}\cdot 0) + B\sin(\sqrt{\gamma}\cdot 0) = 0, \text{ отсюда}$$

$$A\cos\left(\sqrt{\gamma}\cdot 0\right) = 0$$

(синус нуля при любом множителе B равен нулю). Поскольку $cos\ 0 = 1$, множители определены: $A = 0$ и $B \neq 0$. Без ограничения общности можно принять $B = 1$, то есть

$$X(x) = \sin\sqrt{\gamma}\,x$$

Второе граничное условие $X(l)T(t) = 0$ дает

$$\sin\sqrt{\gamma}\,l = 0, \text{ отсюда } \sqrt{\gamma}l = \pi n, \text{ или}$$

$$\sqrt{\gamma_n} = \pi n/l,$$

где l – длина закрепленной на концах струны, n – целое число (1, 2, 3, …). Таким образом,

(3.46)
$$X_n(x) = \sin(\tfrac{\pi n x}{l})$$
$$T_n(t) = A_n\cos\left(\tfrac{\pi n v}{l}\right)t + B_n\sin(\tfrac{\pi n v}{l})\,t.$$

Общее решение уравнения (3.35) представляет собой бесконечный ряд

(3.47) $$u(x,t) = \sum_1^\infty \left[A_n\cos\left(\tfrac{\pi n v t}{l}\right) + B_n\sin\left(\tfrac{\pi n v t}{l}\right)\right]\sin(\tfrac{\pi n x}{l}),$$

в котором коэффициенты $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ определяются из начальных условий (3.39 а, б) (см. выше).

Формула (3.47), полученная с помощью подстановки (3.44), дает общее решение одномерного волнового уравнения (3.35) на отрезке. По аналогии с разложением в ряд Тейлора (см. раздел 1.4.1 в 1-й главе), любую гладкую зависимость $T(t)$ от произвольной непрерывной переменной можно представить как бесконечную сумму тригонометрических функций вида (3.47): *разложить в ряд Фурье*. Численные коэффициенты $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$определяются конкретным видом зависимости и интервалом, на котором ее разлагают в ряд. Набор дискретных величин $\{\gamma_n\}$ в общем случае называется *спектром собственных значений* дифференциального уравнения.

Каждый член $X_n(x)T_n(t)$ в разложении (3.47) приводится к виду

(3.48) $$u_n(x,t) = C_n\sin\tfrac{\pi n x}{l}\sin\left(\tfrac{\pi n v t}{l} + \delta_n\right),$$

где $C_n = \sqrt{{A_n}^2 + {B_n}^2}$, $\delta_n = \text{arctg}(A_n/B_n)$ (см. формулу (2.10) в гл. 2). Этим уравнениям соответствуют стоячие волны с амплитудами C_n.

3.2.4. Уравнение Лапласа

Если в трехмерном уравнении теплопроводности (3.32) или в волновом уравнении (3.41) функция u не зависит от времени, ее производные $\partial u/\partial t$ и $\partial^2 u/\partial t^2$ обращаются в ноль. Тогда *стационарному* распределению $u(x, y, z)$ в пространстве отвечают решения дифференциальных уравнений

(3.49 а) $\Delta u = 0$ *уравнение Лапласа*, либо

(3.49 б) $\Delta u = f(x, y, z)$ *уравнение Пуассона.*

Уравнения (3.49 а, б) относятся к эллиптическому типу. Начальные условия для них отсутствуют, так как u не зависит от времени; граничные условия заданы значениями $u(x, y, z)$ на границе области. В описании социальных систем подобные уравнения используются редко: социум – динамическая среда.

Общая характеристика уравнения Лапласа представлена в приложении П 7. Уравнение (3.49 а), в частности, позволяет рассчитать распределение температуры внутри плавильной печи по значениям температуры на ее стенках либо гравитационное поле астероида неправильной формы в заданной точке окружающего пространства по распределению гравитации на его поверхности (рис. 3.21). (Добравшись до астероида, гравитационное поле на поверхности можно определить по ускорению свободного падения – например, регистрируя период колебаний маятника, см. раздел 2.2 в главе 2). Решение уравнений (3.49 а, б) с условиями $u|_\Omega=\varphi(x,y,z)$ на границе области Ω называется *задачей Дирихле*.

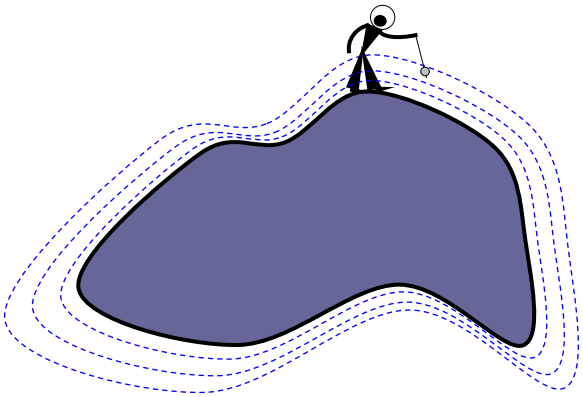


Рисунок 3.21. Как измерить гравитационное поле астероида

В одномерном случае уравнение Лапласа решается очень просто:

$d^2u/dx^2 = 0 \rightarrow du/dx = C_1$, то есть

$$u = C_1x + C_2\,,$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Если функция $u(x)$ задана на отрезке $[0, l]$, константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий

$$u(0) = C_2 = U_1$$

$$u(l) = C_1l + U_1 = U_2, \text{ или } \quad C_1 = \frac{U_2-U_1}{l}$$

(значения U_1 и U_2 в крайних точках отрезка постоянны). Таким образом,

(3.50) $$u = \frac{U_2-U_1}{l}x + U_1.$$

Формула (3.47) соответствует линейному изменению электростатического потенциала внутри плоского конденсатора либо линейному изменению температуры в стержне между торцами с фиксированной температурой U_1 и U_2 (рис. 3.22).

Точные решения уравнений (3.49 а, б) с несколькими переменными можно получить лишь в областях простой формы. Для двумерных систем (поля на поверхностях и в мембранах) характерна логарифмическая зависимость потенциала от расстояния (см. формулу (П7.6) в Приложении П 7). Потенциал поля, порожденного распределением масс либо электрических зарядов в замкнутой области Ω трехмерного пространства, на больших расстояниях убывает по обратному степенному закону: $u \sim -1/r$. В общем случае n-мерного пространства $u \sim -1/r^{\alpha}$, где $\alpha = n - 2$.

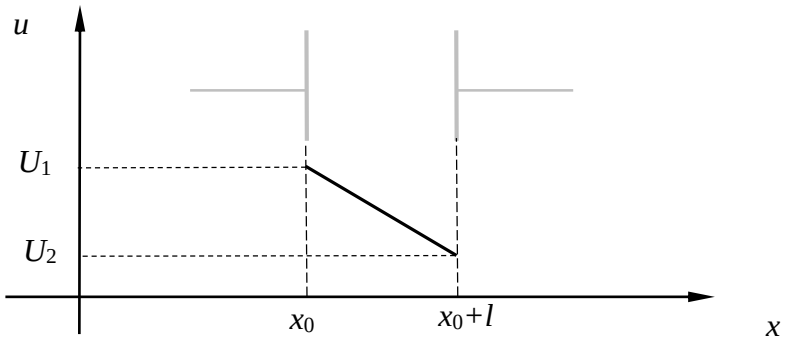


Рисунок 3.22. Электростатический потенциал внутри плоского конденсатора

3.2.5. Течение жидкости

Закономерности перемещения жидкостей и газов в заданных условиях имеют огромную практическую важность (гидротехника, водный и воздушный транспорт, реактивные двигатели, трубопроводы и многое другое). Большая и сложная область физики, посвященная этим проблемам, называется *гидродинамикой*. В ней используется весь математический арсенал, перечисленный выше: векторы и векторный анализ, матрицы, тензоры, уравнения в частных производных. Физические явления, впервые обнаруженные в течении жидкостей, имеют общенаучный характер. Они проявляются во многих нелинейных системах, включая динамические процессы в социуме.

Как и в других разделах *физики сплошной среды* (см. рис. 3.11), уравнения гидродинамики отражают эволюцию малого объема ΔV жидкости с течением времени. Отметим, что дискретная (атомно-молекулярная) структура элементов среды в классической физике не обсуждается: их рассматривают как очень малые участки непрерывной субстанции. Законы механики для элемента ΔV связывают его массу $\rho\Delta V$ (где $\rho(x, y, z, t)$ – плотность вещества, в общем случае переменная) и действующие на него силы с изменениями вектора скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z, t)$, который и требуется найти в уравнениях гидродинамики. «Траектории» движения малых фрагментов в потоке жидкости задают *линии тока*: ими визуально отображается *поле скоростей*.

Без влияния внешнего потенциального поля (например, для горизонтального течения) силы, действующие на малый объем жидкости ΔV, складываются из давления P на его границу и сил вязкого трения, направленных по касательной к этой границе (рис. 3.23).

(3.51) $$\rho \Delta V \, {d\boldsymbol{v}}/{dt} = \iint_{\Delta V} (\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{P}) dS - \gamma \boldsymbol{v}$$

Под интегралом стоит скалярное произведение вектора внешнего давления **P** на единичный вектор **n**, перпендикулярный к границе области ΔV, в каждой ее точке. Интегрирование проводится по граничной поверхности; γ – коэффициент трения в жидкой среде, или *динамическая вязкость*. В отличие от кристаллических и аморфных тел, сколь угодно малая сила, приложенная к элементу жидкости, приводит его в движение, которое сопровождается изменением формы.

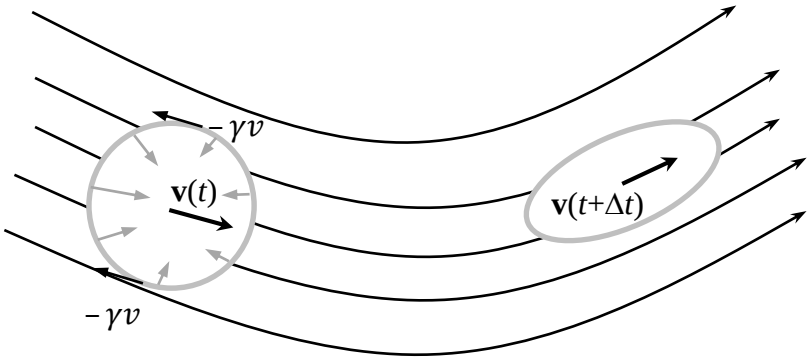


Рисунок 3.23. Перемещение элементарного объема ΔV в потоке жидкости. Линии со стрелками – поле скоростей. Серые стрелки – проекции давления P·n перпендикулярно элементу поверхности

Закономерности течения жидкости

Уравнение (3.51) соответствует второму закону Ньютона для движения элементарного объема жидкости. При моделировании различных видов такого движения обычно вводятся упрощения. Так, вязкое трение означает переход части кинетической энергии в тепловую, а значения γ и ρ зависят от температуры. Там, где это необходимо учитывать (аэродинамика, реактивные двигатели, турбины), гидродинамические формулы объединяют с термодинамическими и физико-химическими, что делает математическое описание очень сложным. При малых скоростях течения в нормальных условиях можно использовать модель *идеальной несжимаемой жидкости*, текущей без трения (*«сухой воды»*). Движение такой жидкости в горизонтальной трубе подчиняется *уравнению Бернулли*

(3.52) $$P_1 + \rho \frac{{v_1}^2}{2} = P_2 + \rho \frac{{v_2}^2}{2},$$

где давление P и скорость **v** заданы в участках трубы разного сечения, ρ – постоянная плотность жидкости (рис. 3.24). Таким образом, вдоль линии тока сохраняется сумма

$$P + \rho \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

Уравнение (3.52) – одна из многих форм закона сохранения энергии: разность кинетической энергии элементарного объема $\rho\Delta V(v^2/2)$ на участках трубы 1 и 2 равна работе давления между этими участками

$$E_к^{(2)} - E_к^{(1)} = S_2\Delta x_2\rho\frac{{v_2}^2}{2} - S_1\Delta x_1\rho\frac{{v_1}^2}{2} = P_1S_1\Delta x_1 - P_2S_2\Delta x_2 \text{ , или}$$

$$S_1\Delta x_1\left(P_1 + \rho\frac{{v_1}^2}{2}\right) = S_2\Delta x_2(P_2 + \rho\frac{{v_2}^2}{2}).$$

С учетом *условия неразрывности*

$$\Delta V = S_1\Delta x_1 - S_2\Delta x_2$$

множители перед скобкой слева и справа можно сократить, получив уравнение (3.52). Таким образом, на сужениях потока скорость жидкости *увеличивается*, а ее давление *уменьшается*. (Мы вспомним это во второй части книги при обсуждении транспортных потоков, где используется модель «сжимаемой жидкости», хотя поведение потока машин на сужениях дороги принципиально иное). При высокой скорости течения давление P_2 в узком участке трубы становится меньше атмосферного и в боковой патрубок на рис. 3.24 захватывается воздух. На этом основана работа водоструйных насосов, применяемых в лабораторной практике.

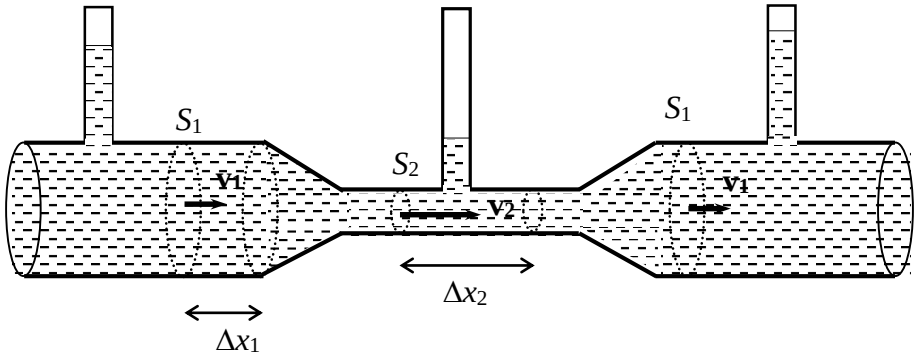
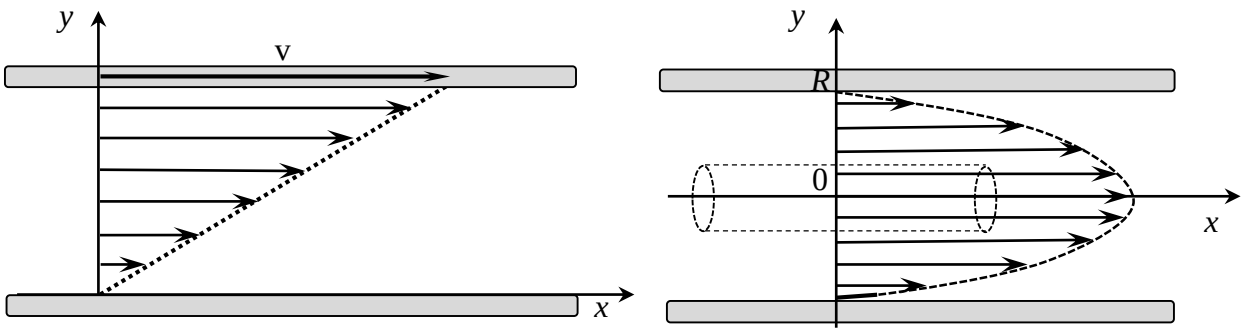


Рисунок 3.24. Течение жидкости по трубам разного сечения

Большинство жидкостей (например, вода или нефть) в обычных условиях практически несжимаемы, однако их вязким трением в большинстве случаев нельзя пренебречь. «Сцепление» малых элементов объема текущей жидкости с соседними элементами объема, вызванное взаимным притяжением молекул (которое в гидродинамике учитывается лишь косвенно), порождает распределение скоростей в потоке. В результате этого притяжения «бесконечно тонкий» (вернее, очень тонкий) слой жидкости, прилегающий к неподвижной стенке, покоится, а соседние слои смещаются со скоростью, возрастающей по мере удаления от стенки. В модельной системе из двух твердых пластин, разделенных слоем жидкости, при движении одной пластины относительно другой в жидкости возникает линейное распределение скоростей по расстоянию между пластинами (рис. 3.25 а).

Для потока в трубке прилипание ближайшего слоя к стенке приводит к квадратичной зависимости скорости течения от расстояния до стенки (рис. 3.25 б)*.

$$v = \frac{\Delta P}{4L\gamma}(R^2 - y^2)$$



(а) (б)

Рисунок 3.25. Распределение скоростей течения жидкости (а) между двух пластин, (б) в неподвижной трубке

Сила сопротивления движущийся жидкости с динамической вязкостью γ, которая действует на шар радиуса *R*, при небольшой скорости течения *v* равна

(3.53) $F = 6\pi\gamma R v$ *формула Стокса*.

Во всех этих случаях линии тока прилегают к твердым поверхностям и скорость жидкости плавно изменяется от точки к точке. Такое течение называется *ламинарным* (Рис. 3.26 а); оно хорошо поддается математическому описанию, но редко наблюдается в действительности. Более общее *турбулентное* течение с хаотическим образованием вихрей, показанное на рис. 3.26 в-д, мы обсудим далее. Соотношение (3.53) выполняется для сфер малого радиуса (1 мкм – 1 мм). Им описывают осаждение коллоидных растворов и движение броуновских частиц (см. гл. 4).

* При стационарном течении ($\partial v/\partial t = 0$) в трубке радиуса *R* на рис. 3.25 б сила давления $F_{давл} = \Delta P \cdot \pi y^2$ на цилиндрический элемент объема жидкости радиуса *y*, расположенный по оси трубы, уравновешивается силой вязкого трения $F_{тр} = \gamma L \cdot 2\pi y(dv/dy)$ (где *L* – длина цилиндра, $2\pi yL$ – площадь его боковой поверхности):

$$\pi y^2 \cdot \Delta P = 2\pi y \cdot \gamma L \cdot {}^{dv}/_{dy}.$$

Сокращая одинаковые множители, получим

$${}^{dv}/_{dy} = {}^{\Delta P y}/_{2L\gamma}\ ,\ \text{и после интегрирования}\ \ v = v_0 - \frac{\Delta P}{4L\gamma}y^2,$$

где ΔP – изменение («падение») давления вдоль цилиндра радиуса *y* и длины Δx. С учетом граничных условий $v(R) = v(-R) = 0$ получим параболическую зависимость.

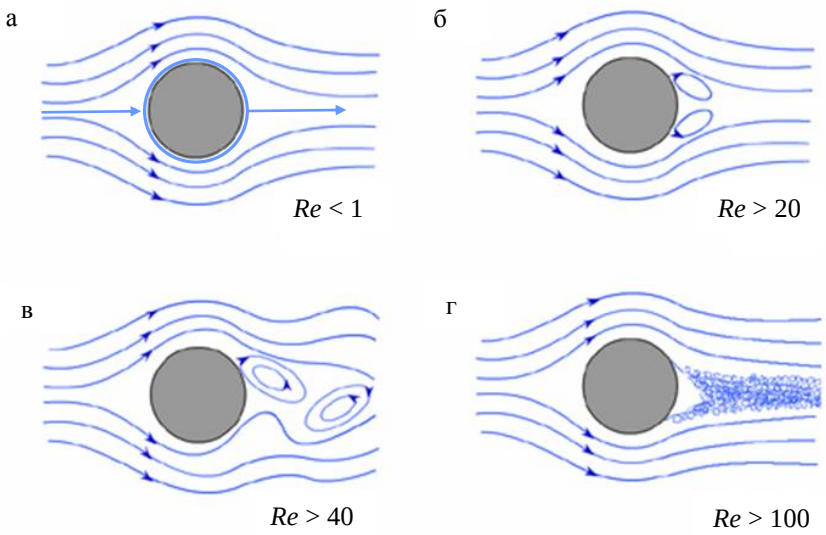


Рисунок 3.26. Режимы движения жидкости, обтекающей неподвижный шар: (а) ламинарное движение, (б–г) развитие турбулентности. Приведены значения числа Рейнольдса *Re*

Уравнение Навье-Стокса

Движение несжимаемой вязкой жидкости описывает дифференциальное *уравнение Навье-Стокса*. В операторной форме оно выглядит так:

(3.54) $$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + \frac{\gamma}{\rho}\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + f(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{v}$ – скорость жидкости, ρ – ее плотность, γ – динамическая вязкость, P – давление, $f(x, y, z)$ – поле внешних сил (например, гравитации), $\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ и $\Delta = (\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2)$ – дифференциальные операторы (см. разд. 3.1). Скорость – векторная величина; формуле (3.54) соответствуют три уравнения по ее компонентам (v_x, v_y, v_z).

В одномерном случае *«мелкой воды»* для плоской волны, перемещающейся в направлении x без потерь энергии на вязкое трение и без воздействия внешних полей, уравнение (3.54) упрощается:

(3.54 а) $$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

или, в ранее использованных обозначениях,

$$\rho\left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right] = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Эта форма уравнения (3.54 а) наглядно соответствует 2-му закону Ньютона для перемещения волны на «мелкой воде». В его левой части стоит ускорение единичного объема воды, движущейся под волной, и перемещения водяного гребня, а в правой части – действующая сила (рис. 3.27). В следующей главе мы увидим, что теория «мелкой воды» объясняет многие необычные явления в распространении волн, включая *солитоны* («уединенные волны», способные перемещаться на большие расстояния), а также волны цунами (см. лекции[3] и учебник [1] в гл. 2). В общем случае искомой функцией является

вектор скорости **v**(**r**, *t*); в гидродинамике уравнения Навье-Стокса записывают в векторной форме (3.54).

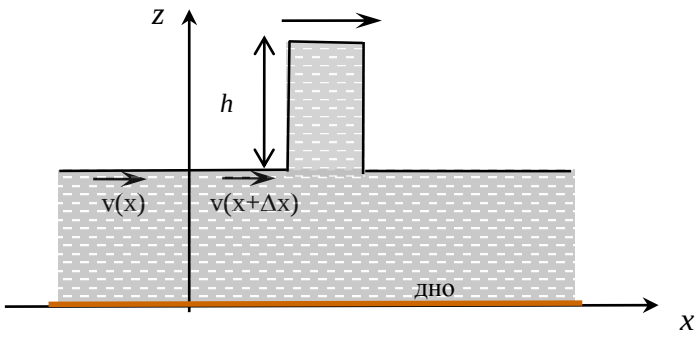


Рисунок 3.27. Плоская волна на мелкой воде (В.П.Крайнов, МФТИ, https://mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/courses/hydrodynamics/2018/Лекция%206.pdf)

В отличие от рассмотренных выше уравнений математической физики, (3.54) и (3.54 а) – нелинейные дифференциальные уравнения: в них содержатся произведения компонентов скорости (v_x, v_y, v_z) на их производные по координатам (градиент скорости). В общем случае решения уравнения Навье-Стокса с заданными краевыми условиями находят численным интегрированием. Условие несжимаемости хорошо соблюдается для большинства жидкостей и газов, если скорость течения мала по сравнению со скоростью звука[*]. В этом случае отношение $\eta = \gamma/\rho$ в (3.54) часто используют как единый параметр: *кинематическую вязкость*.

Нелинейностью жидкой среды порождаются качественно новые явления, впервые обнаруженные и исследованные именно в гидродинамике – такие, как *солитоны* (см. далее гл. 4). Одно из главных явлений с многочисленными аналогиями в биологических и общественных дисциплинах – переход течения жидкостей и газов в хаотический режим, в гидродинамике называемый *турбулентным*. Упрощенный вариант уравнения (3.54) будет обсуждаться в следующей главе: его решения – один из примеров перехода механической системы в состояние *детерминированного хаоса*.

Критерий Рейнольдса

Устойчивость ламинарного течения, при котором всю твердую поверхность облегает неподвижный тонкий слой жидкости (рис. 3.26 а), зависит как от «сил сцепления» молекул между собой и со стенками (см. раздел 2.3 в гл. 2), так и от вязкости, которая в свою очередь зависит от температуры. При повышении температуры вязкость большинства жидкостей уменьшается. Выше некоторой пороговой скорости прилегающий слой жидкости отрывается от поверхности тела и по следу движения тела в жидкости образуются вихри (рис. 3.26 б). Этот режим течения, называемый *турбулентным*, возникает внутри быстрого потока даже без обтекания препятствий.

[*] Это, в частности, относится к ветру (кроме ураганов) и к распространению звука в воздухе, так как колебания давления в звуковой волне обычно не превышают одной миллионной доли атмосферного давления.

Условием развития турбулентности является превышение определенного критического значения: *критерия Рейнольдса*

$$\frac{vL}{\eta} > Re_{\text{кр}} ,$$

где v – скорость течения жидкости, η – ее кинематическая вязкость, L – характерный размер, или гидравлический диаметр системы (ширина препятствия, диаметр трубы и т.д.). Безразмерная комбинация этих параметров *Re* называется *числом Рейнольдса*. Она показывает отношение инерционности потока жидкости или газа к силам вязкого трения (диссипации энергии) в системе. При близости чисел *Re* режимы течения разных жидкостей в одной и той же системе подобны.

Пороговое число Рейнольдса сильно зависит от геометрии системы. Для течения вдоль идеально гладких стенок переход к турбулентному режиму начинается выше $Re_{\text{кр}}$ = 2100-2300, а развитый турбулентный режим возникает при $Re > 10^4$. В случае $Re < Re_{\text{кр}}$ реализуется ламинарное течение. В турбулентном режиме образующиеся вихри уносят кинетическую энергию, способствуя ее рассеянию, и перемешивают жидкость, так что средний коэффициент вязкого трения возрастает.

Турбулентное течение существенно включает хаотические процессы (образование вихрей); в рамках классической физики его теории не существует. В гидродинамике используются полуэмпирические соотношения и критерии, позволяющих рассчитать течение жидкостей в тех или иных конкретных системах. С математической точки зрения турбулентный режим – следствие нелинейности дифференциальных уравнений гидродинамики. Возникновение динамического хаоса в нелинейных физических системах будет обсуждаться в следующей главе.

[3].В.П.Крайнов, Нелинейные задачи гидродинамики: учебное пособие, М.: МФТИ, 1996, см. также В.П.Крайнов, Качественные методы в гидродинамике, https://mipt.ru/education/chair/theoretical_physics/courses/hydrodynamics.php

3.3. Элементы квантовой механики

В се уравнения, рассмотренные выше, были основаны на постулатах классической физики. Они предполагают, что значение физической величины $u(x, y, z, t)$ можно рассчитать с любой точностью из значений ее аргументов. Пространственные координаты тел (x, y, z) и другие измеряемые параметры системы могут изменяться во времени, но переменная времени t не зависит от координат (x, y, z): она *ортогональна* пространству всех физических величин. При сдвиге тел, взаимодействующих через пространство (зарядов, масс и т.д.), силы их взаимодействия изменяются мгновенно: другими словами, поле сил распространяется гораздо быстрее, чем протекают процессы внутри системы. Хотя параметры физических систем регистрируются с некоторой погрешностью, эту погрешность можно уменьшить, улучшая методику измерений – и тогда экспериментальные данные неограниченно приблизятся к точным теоретическим величинам, которые дают решения уравнений.

Независимость координаты времени, мгновенное взаимодействие тел через пространство и возможность сколь угодно точно приблизить результаты измерений к предсказаниям теории лежат в основе классической механики. В разных разделах классической физики рассматриваются особые, специфические виды взаимодействий «тел» или частиц, однако сами эти взаимодействия подчиняются тем же принципам. Этот подход позволил физикам к концу XIX века произвести расчеты множества самых разных природных процессов в количественном согласии с экспериментом.

Во 2-й половине XIX века выяснилось, что классическая физика не может описать всё возрастающий ряд объективно наблюдаемых явлений. Так, например, теплоемкость $C_V = (s/2)R$ (где s – число степеней свободы молекулы) идеального газа, состоящего из двухатомных молекул A_2 (см. разд. 2.3 во 2-й главе), должна учитывать колебания молекул с растяжением и сжатием связи A–A. Число молекулярных степеней свободы s у таких газов составляет не 5 (три поступательные и две вращательные координаты), а 6 (плюс одна колебательная степень свободы). При этом экспериментально измеренные теплоемкости преобладающих в воздухе азота (N_2) и кислорода (O_2) при комнатной температуре соответствуют $s \approx 5$ (см. раздел 2.3 во 2-й главе). Нецелочисленная «примесь» колебательной степени свободы начинает проявляться лишь при 400-500 K и сильнее сказывается на теплоемкости газов из тяжелых молекул с меньшими частотами колебаний – таких, как газообразный иод (I_2). Это расхождение не удается объяснить в рамках кинетической теорий газов, основанной на классической механике.

Круг «неклассических» физических явлений в конце XIX века стал очень широким. В частности, ньютоновская механика частицы, перемещающейся в центральном поле, идеально предсказывает движение планет, однако не может объяснить существования атомов: электроны на замкнутых орбитах в кулоновском поле ядер, имея центростремительное ускорение, в рамках классической электродинамики должны излучать электромагнитные волны, терять кинетическую энергию и «упасть» на ядро. Даже в пренебрежении этим *радиационным трением* классическая механика не предсказывает устойчивых состояний электрона в поле двух сближенных ядер, то есть не объясняет химическую связь[*]. Также классическая теория не интерпретировала экспериментально установленный спектр теплового излучения тел. А в спектрах пламени газовой горелки при внесении туда различных веществ (например, поваренной соли NaCl), были обнаружены линии, отвечающие дискретным длинам волн (рис. 3.28)[**], что противоречит непрерывным решениям уравнений математической физики. На рубеже XIX и XX веков такое положение дел было названо *кризисом классической физики*.

В основу двух новых областей механики – квантовой и релятивистской – и их использования в описании физических явлений был положен *отказ* от «арифметической»

[*] Отсутствие устойчивых состояний при классическом движении электрона в поле двух протонов (то есть в молекулярном ионе H_2^+: простейшей системе с химической связью H–H) было доказано в кандидатской диссертации Вольфганга Паули (1921 г.), который затем стал одним из основателей квантовой механики.

[**] Во второй половине XIX века по линейчатому спектру солнечного света был определен химический состав атмосферы Солнца. Кроме водорода (H), азота (N), кислорода (O), магния (Mg) и ряда других элементов в этих спектрах был обнаружен новый «солнечный» элемент гелий (He), лишь затем найденный на Земле.

точности законов классической физики. Его можно выразить почти философским постулатом:

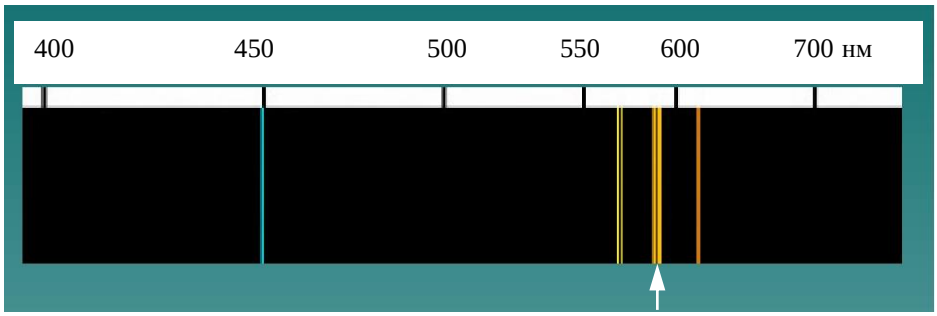


Рисунок 3.28. Линейчатый спектр испускания атомов натрия (в верхней части указана длина волны)

Даже самая лучшая теория не обязана точно и однозначно предсказывать результаты экспериментальных измерений.

Предполагается, что измерения абсолютно надежны, их результаты достоверны, а теория «идеальна» – то есть дает наилучшее *возможное* соответствие эксперименту.

Принципиальные расхождения теоретической модели и отображаемой ею реальности, не устранимые варьированием математических моделей и экспериментальных методик, в разных разделах новой физики имеют разную природу. В квантовой физике предсказания теории носят вероятностный, то есть статистический характер: они согласуются с результатами измерений не единственной системы (например, одного атома), а большого массива однотипных систем: например, атомов Na в пламени горелки. В релятивистской механике, элементы которой мы рассмотрим в конце этой главы, «размывается» (вернее, уточняется) само понятие *измерения*: в разных системах отсчета одинаковые измерения могут дать разные и при этом равноправные результаты. А физика стохастических явлений, с которой мы познакомимся в следующей главе, анализирует причины неустранимого разброса экспериментальных данных в таких процессах, как броуновское движение, а также факторы, определяющие его величину, и динамику физических систем в состоянии *детерминированного хаоса* (пример – турбулентное течение жидкости).

3.3.1. Волновая функция и уравнение Шредингера

В большинстве уравнений, встретившихся нам ранее, дифференцируемая функция $u(x,\ldots,t)$ представляла какую-либо измеряемую характеристику физической системы – и, соответственно, принимала действительные значения. Однако в решениях волнового уравнения (3.37) и (3.42) распространению волны соответствует ее *комплексная* амплитуда $u(\mathbf{r},t)$. Модуль $|u(\mathbf{r},t)|$ равен действительной амплитуде волны, а его квадрат $|u(\mathbf{r},t)|^2$ пропорционален интенсивности волны в точке пространства $\mathbf{r}$ в момент времени t. Комплексными функциями удобно представлять явления интерференции и дифракции волн. В XX веке область их применения существенно расширилась.

В основе квантовой механики лежит замена детального описания механической системы на *вероятностное*, или *статистическое* описание. В ее рамках

дифференциальные уравнения, по форме оставаясь классическими, позволяют найти не точную величину параметра системы как непрерывную дифференцируемую функцию $u(x, y, z, t)$, а непрерывную функцию вероятности тех или иных его значений, измеряемых экспериментально. Отсюда следует, что предсказания квантовомеханических расчетов надо сопоставлять не с результатом единственного измерения (статистически не значимого и потому не достоверного), а с массивами результатов измерений в одинаковых или как можно более близких системах. Тем не менее, *статистическая интерпретация* квантовой механики стала более или менее общепринятой лишь к концу XX века после серии экспериментов, в 1990-е годы подтвердивших ее корректность.

В квантовой механике постулируется, что значение измеряемого параметра системы u в точке (x, y, z) в момент времени t задано *плотностью вероятности* $\rho[u(x, y, z, t)]$. Эта функция является непрерывной и дифференцируемой в некоторой области значений переменных $(x, y, z) \in \Omega(t)$, определяющих состояния системы. Вероятность того, что в момент t_0 справедливо соотношение $u(x, y, z, t_0) = u_0$, вычисляется интегрированием по области Ω.

$$P(u = u_0|t_0) = \int_\Omega \rho[u_0(x, y, z, t_0)]dxdydz.$$

По определению вероятности, в любой момент времени t

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho[u(x, y, z, t)]dxdyxz = 1 \quad (\textit{условие нормировки}).$$

(см. главу 8 и приложение П 8).

Второй постулат квантовой механики утверждает, что действительная неотрицательная плотность вероятности $\rho \geq 0$ равна квадрату модуля комплекснозначной *волновой функции* $\Psi(x, y, z, t) = A(x, y, z, t) + iB(x, y, z, t)$:

$$\rho(x, y, z, t) = |\Psi(x, y, z, t)|^2 = A^2 + B^2,$$

где A и iB – соответственно действительная и мнимая части функции Ψ. Таким образом, волновая функция Ψ задает вероятность состояния системы. Будучи комплексной, она позволяет представить сумму состояний $\Psi_1 + \Psi_2$ не их наложением (как сумму $u_1 + u_2$ распределений температур в некоторой среде), а результатом интерференции, подобной интерференции волн. По этой причине в 1920-е годы квантовую механику также называли *волновой механикой* – ныне этот термин вышел из употребления.

Каждой измеримой физической величине f в квантовой механике соответствует *оператор* $\hat{F}$, действующий на волновую функцию. Среднему значению f в состоянии Ψ соответствует интеграл от произведения волновой функции, преобразованной оператором $\hat{F}$, на комплексно сопряженную функцию Ψ^*:

(3.55) $$\langle f\rangle = \int \Psi^*(\hat{F}\Psi)\, d\tau = \left\langle \Psi\middle|\hat{F}\middle|\Psi\right\rangle,$$

где треугольными скобками обозначено усреднение, а буквой τ – все переменные, от которых зависят значения волновой функции*.

Скобочные обозначения интегралов (3.55) и символы операторов в виде «буквы со шляпкой» широко используются в квантовой физике – а также в *квантовоподобных* моделях экономики и наук о человеке, которые будут обсуждаться в 8-й главе. Особенно компактно в таких обозначениях выглядит условие нормировки волновых функций:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle_{\Omega} = 1$$

(подстрочным индексом Ω обозначена область пространства, в которой задана волновая функция системы – по этой области вычисляется интеграл вероятности). Запомним, что символу $\langle\Psi|$ отвечает комплексно сопряженная волновая функция Ψ^* под знаком интеграла.

Таким образом, измеряемым физическим параметрам квантовой системы соответствуют операторы, которые преобразуют комплексную волновую функцию в действительные значения f по уравнению (3.55). В разных системах в роли $\hat{F}$ может выступать переменная величина, матрица, дифференциальный оператор либо иная математическая конструкция. Несмотря на обобщенный «символический» характер формулы (3.55), она накладывает на операторы строгие математические условия. Мы не станем пересказывать здесь этот достаточно сложный материал – лишь отметим, что в *квантовоподобных* моделях за пределами физики (в описании биржи, в когнитивистике и др.) фундаментальные постулаты квантовой механики обычно нарушаются.

Еще одним краеугольным квантовомеханическим постулатом является *принцип суперпозиции состояний*. Если в состоянии системы, заданном волновой функцией Ψ_1, физическая величина f принимает точное значение f_1, а в состоянии Ψ_2 – точное значение f_2, то любая линейная комбинация $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$ с положительными множителями $c_1, c_2 > 0$ и $c_1^2 + c_2^2 = 1$ соответствует такому состоянию системы, в котором измерение величины f с вероятностью c_1^2 даст значение f_1, а с вероятностью c_2^2 – значение f_2. Ранее мы уже встречались с суперпозицией решении дифференциальных уравнений: в предыдущей главе для гармонического осциллятора (формула (2.10)), в этой главе для распространения волн (разд. 3.2.3). Это значит, что дифференциальные уравнения квантовой механики и операторы физических величин $\{\hat{F}\}$, как и рассмотренные выше основные уравнения математической физики, *линейны* по Ψ – то есть не содержат произведений $\Psi_i\Psi_j$ и степеней Ψ^n с $n > 1$.

Состояния квантовой системы, в которых физическая величина f имеет точные значения, называются *собственными состояниями* соответствующего ей оператора $\hat{F}$. Наличие таких состояний – одна из главных особенностей квантовых систем. Через точные значения измеряемых величин в собственных состояниях системы можно выразить их средние значения. Для модельной системы с двумя состояниями можно записать:

* Абстрактную физическую величину, принимающую те или иные значения в квантовой системе, мы будем далее обозначать *f*, а не *u* (как принято в уравнениях математической физики), чтобы не запутаться в стандартных «квантовых» символах.

(3.56) $$\hat{F}\Psi_1 = \mathrm{f}_1\Psi_1,\ \ \hat{F}\Psi_2 = \mathrm{f}_2\Psi_2 \quad \text{и}$$
$$\hat{F}(\mathrm{c}_1\Psi_1 + \mathrm{c}_2\Psi_2) = \mathrm{c}_1 \cdot \mathrm{f}_1\Psi_1 + \mathrm{c}_2 \cdot \mathrm{f}_2\Psi_2$$

Формулам (3.56) соответствуют *собственные значения* $\{\mathrm{f}_i\}$ и *собственные функции* $\{\Psi_i\}$ оператора $\hat{F}$ (здесь i = 1, 2). Чтобы получить среднее $\langle f \rangle = c_1{}^2\mathrm{f}_1 + c_2{}^2\mathrm{f}_2$ из уравнения (3.55), функции Ψ_1 и Ψ_2 должны удовлетворять математическим условиям, которые удобно выразить в «скобочном» виде:

$$\langle c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 | c_1\mathrm{f}_1\Psi_1 + c_2\mathrm{f}_2\Psi_2 \rangle =$$

$$= c_1{}^2\mathrm{f}_1\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle + c_1c_2\mathrm{f}_1\langle\Psi_2|\Psi_1\rangle + c_1c_2\mathrm{f}_2\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle + c_2{}^2\mathrm{f}_2\langle\Psi_2|\Psi_2\rangle = c_1{}^2\mathrm{f}_1 + c_2{}^2\mathrm{f}_2$$

Отсюда следуют условия на волновые функции собственных состояний:

$$\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle = \langle\Psi_2|\Psi_2\rangle = 1, \qquad \langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \langle\Psi_2|\Psi_1\rangle = 0$$

Такие функции в математике называются *ортогональными*. В общем случае у оператора $\hat{F}$ имеется *спектр* собственных значений $\{\mathrm{f}_i\}$ и соответствующих им собственных волновых функций $\{\Psi_\imath\}$

$$\hat{F}\Psi_i = \mathrm{f}_i\Psi_i,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\langle\Psi_j|\Psi_i\rangle_{i\neq j} = 0 \text{ (}\textit{ортогональность}\text{) и } \langle\Psi_i|\Psi_i\rangle = 1 \text{ (}\textit{нормировка}\text{)}$$

Эти два условия вместе обозначают символом Кронекера (см. разд. 3.1):

$$\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Любое состояние квантовой системы Ψ можно представить в качестве *линейной комбинации* собственных волновых функций, которые соответствуют определенным значениям некоторого физического параметра системы

(3.57) $$\Psi = \sum c_i\Psi_i.$$

Коэффициенты $\{c_i\}$ – действительные числа; они могут быть положительными, отрицательными либо равными нулю. Линейные комбинации комплексных волновых функций отражают интерференцию квантовых состояний, которую горячо обсуждают философы. Для физиков операторы и волновые функции – это математический аппарат, позволяющий рассчитать параметры квантовых объектов и сопоставить расчет с экспериментальными данными.

Волновая функция частицы, находящейся в поле с потенциалом *U(x, y, z)*, является решением линейного дифференциального *уравнения Шредингера*:

(3.58) $$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z)\Psi = \hat{\mathcal{H}}\Psi\ ,$$

где $\widehat{\mathcal{H}} = -\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + U(x, y, z)$ – *оператор Гамильтона*, или *квантовый гамильтониан* исследуемой системы, m – масса частицы, i – мнимая единица, $\hbar$=1.055·10^{-34} дж·с – масштабный множитель, или *постоянная Планка*.

Если состояние системы не изменяется во времени, ее энергия E сохраняется и $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$. В этом случае (3.58) переходит в *стационарное уравнение Шредингера*

(3.58 а) $$(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U)\Psi = E\Psi$$

или, в символической операторной форме,

$$\widehat{\mathcal{H}}\Psi = E\Psi,$$

где E – энергия стационарной квантовой системы: например, атома или молекулы.

Оператор Гамильтона – квантовый аналог функции Гамильтона $H = E_{кин} + U$ классической механики, где U – потенциальная энергия (см. раздел 2.2 в главе 2). Его можно построить для системы из любого числа N частиц с заданными потенциалами межчастичных взаимодействий. В этом случае оператор Лапласа Δ, входящий в гамильтониан, содержит сумму вторых производных по $3N$ координатам всех частиц в системе: как говорят физики, он задан в конфигурационном пространстве. Геометрией квантовой системы в уравнениях (3.58) и (3.58 а) определяется зависимость ее потенциальной энергии U от координат всех частиц.

Решением уравнения Шредингера в виде (3.58) с оператором Гамильтона $\widehat{\mathcal{H}}$, не зависящим от времени, является волновая функция

(3.59) $$\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi,$$

где строчной буквой ψ обозначена волновая функция стационарной системы, т.е. решение уравнения (3.58 а). В стационарных системах выполняется закон сохранения энергии, которая имеет точное значение E=const. Системы взаимодействующих частиц, занимающие ограниченную область пространства, обладают дискретным набором состояний $\{\psi_n\}$ и собственных значений их энергии $\{E_n\}$. При свободном движении в пространстве суммарная энергия квантовой частицы может иметь любое положительное, однако всегда точное и постоянное значение.

Постоянная Планка $\hbar$=1.055·10^{-34} Дж·с (т.е. чрезвычайно малая величина) определяет масштаб явлений, для описания которых необходим аппарат квантовой механики. Это прежде всего взаимодействия атомов либо *субатомных частиц*, составляющих атомы – таких, как электроны, протоны и нейтроны[*]. На этом основании квантовую физику часто называют «физикой микромира», хотя с ее помощью объясняются и такие макроскопические явления, как сверхпроводимость, радиоактивный распад и химические реакции. В современной междисциплинарной физике квантовоподобными уравнениями на

[*] До второй половины XX века эти частицы назывались «элементарными» – но современная физика нашла в них еще более элементарные компоненты.

качественном уровне моделируют некоторые процессы в макроскопических социальных системах; примеры мы рассмотрим в части II.

3.3.2. Простейшие квантовые системы

Частица в потенциальной яме

Волновые функции ψ некоторых квантовых систем можно выразить через элементарные функции «школьной» алгебры. Вообразим движущуюся частицу массы m, пойманную в ловушку между двумя плоскими абсолютно упругими стенками. Также предположим, что сила тяжести отсутствует, а частица перемещается строго перпендикулярно стенкам. Ее потенциальная энергия на пути между стенками равна нулю, а кинетическая энергия постоянна. На стенках ловушки потенциал обращается в бесконечность, и при ударе частица отскакивает в обратном направлении. Эта модельная задача о движении в одномерном потенциале с условиями

$$U = 0 \ (0 < x < L)$$
$$U = \infty \ (x \le 0 \text{ и } x \ge L)$$

называется *частица в одномерном потенциальном ящике*.

Классическая частица в одномерном ящике будет неограниченно долго «биться» между стенками на отрезке $0 \le x \le L$ наподобие бильярдного шара, идеально точно пущенного перпендикулярно к борту стола[*]. В отсутствии трения между ударами о стенки ее кинетическая энергия $E = mv^2/2$ постоянна (система консервативна) и может быть любой в зависимости от скорости частицы v. Квантовая частица ведет себя иначе.

В одномерном потенциальном ящике с единственной координатой x (рис. 3.29) стационарное уравнение Шредингера (3.58 а) для волновой функции $\psi(x)$ переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi \tag{3.60}$$

с граничными условиями $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Математически оно совпадает с уравнением (3.45 а) в задаче о стоячих волнах в струне (см. разд. 3.2.3). Решения уравнения (3.60) – действительные тригонометрические функции

$$\psi_n(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right).$$

Условия нормировки $\int_0^L {\psi_n}^2(x)\,dx = 1$ дают $C_1 = \sqrt{2/L}$ (вторая константа интегрирования $C_2 = 0$, т.к. волновые функции обращаются в ноль на стенках ящика). Получается бесконечный набор *собственных функций*

[*] Это очень схематичное описание, поскольку при малейшем отклонении от перпендикулярной траектории классическая частица уйдет с отрезка и будет «метаться» между стенками, удаляясь от него – но здесь нас интересует поведение квантовой частицы в одномерном потенциале. Хаотическую динамику классических систем мы обсудим в следующей главе.

3(3.61) $$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right),$$

каждой из которых отвечает *собственное значение* энергии (см. рис. 3.29)

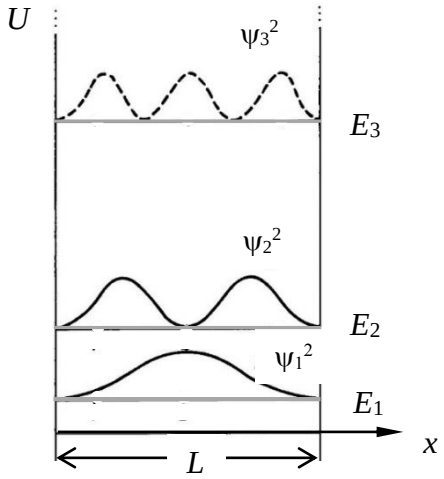


Рисунок 3.29. Уровни энергии и плотность вероятности распределение частицы вдоль отрезка («одномерного потенциального ящика») в низших квантовых состояниях

(3.61 а) $$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2.$$

Дискретные состояния с определенными значениями энергии имеются у квантовых систем с потенциалом притяжения U либо, как в данном примере, с непроницаемыми стенками. Все такие системы в квантовой механике имеют общее название «частица в потенциальной яме». Их стационарное уравнение Шредингера (3.58 а) с граничными условиями называется *задачей на собственные значения* оператора Гамильтона, его решения – набор дискретных состояний с определенными значениями энергии. Номер состояния и соответствующего ему уровня энергии называется *квантовым числом*. Состояние с низшей энергией (n = 1) называют *основным*, все остальные состояния – *возбужденными*.

Плотность вероятности обнаружить частицу в точке x внутри одномерного ящика в каждом из дискретных состояний задается квадратами соответствующих волновых функций $\psi_n^2(x)$. (Условно их можно назвать «стоячими волнами вероятности»). На рисунке 3.29 можно видеть, что в каждом состоянии возможные положения частицы «размазаны» вдоль координаты x. Точки внутри ящика, в которых волновые функции возбужденных состояний обращаются в ноль (в них квантовая частица «не присутствует»), по аналогии со стоячими волнами называются *узлами*. По мере роста энергии дискретных состояний E_n число узлов их волновых функций увеличивается.

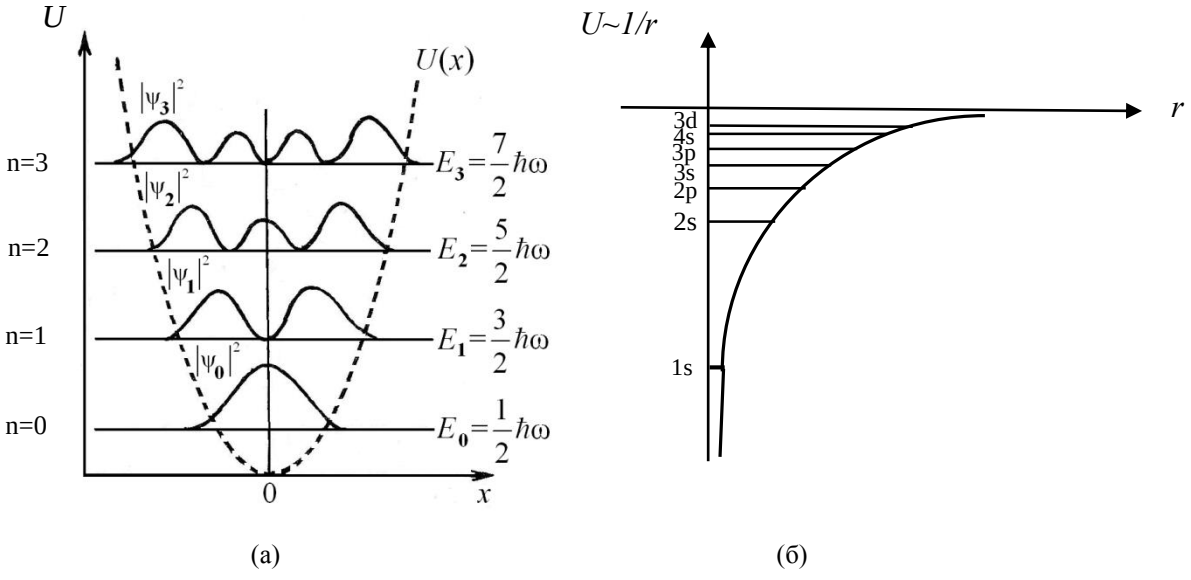
Волновые функции других квантовых систем с частицами в поле одномерного связывающего потенциала $U(x)$ имеют похожую форму. Так, у материальной точки массой m в квадратичном потенциале $U = kx^2$ (*квантовый линейный гармонический осциллятор*) имеется бесконечное число дискретных состояний с энергией $E_n = \hbar\omega(n+½)$, где n – *колебательное квантовое число*, а $\omega = \sqrt{k/m}$, как в классической механике, – круговая

частота колебаний. Квадратам волновых функций основного (в данном случае, по исторически сложившейся нумерации, $n = 0$) и возбужденных состояний ($n = 1, 2, 3, \ldots$) соответствуют «стоячие волны вероятности», имеющие n узлов (Рис. 3.30 а). В отличие от прямоугольного «ящика» с отвесными стенками на рис. 3.29, в квантовом гармоническом осцилляторе материальная точка с энергией E_n с некоторой вероятностью может находиться в области координаты x с $U(x) > E_n$, недоступной в классической механике.

Колебания двухатомных молекул A_2 можно преобразовать к движению материальной точки с *приведенной массой* $m = m_A/2$ также в квадратичном потенциале – то есть к модели линейного осциллятора. Разность энергий $\hbar\omega$ между основным и первым возбужденным колебательным уровнем для молекул O_2 и N_2 в десятки раз больше средней энергии их теплового движения $\frac{3}{2}kT$ при 300 K. При комнатной температуре возбужденные колебательные уровни этих молекул почти не заселены (другими словами, молекул в возбужденных состояниях очень мало), и колебательная степень свободы при нормальных условиях слабо сказывается на теплоемкости этих газов. При высокой температуре либо для молекул с меньшей константой жесткости связей и более тяжелыми атомами возбужденные колебательные состояния «размораживаются» и теплоемкость газа повышается.

Решениям уравнения Шредингера для состояний электрона в кулоновском поле положительно заряженного атомного ядра $U \sim Z/r$ (где r – расстояние до ядра, Z – *атомный номер*, т.е. число протонов в ядре) тоже соответствуют «стоячие волны вероятности», которые называются здесь *электронными оболочками* (Рис. 3.30 б). В атоме водорода (один электрон с отрицательным зарядом $e = -1.602\cdot10^{-19}$ Кл в поле неподвижного протона, имеющего положительный заряд той же величины, т.е. Z=1) энергия электронных оболочек определяется *главным* квантовым числом n:

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}.$$



(а) (б)

Рисунок 3.30. Нижние энергетические уровни (а) квантового линейного гармонического осциллятора, (б) электрона в атоме

Отрицательным значениям энергии соответствуют устойчивые *связанные* состояния электронов на оболочках в атоме. Тонкая структура электронных оболочек характеризуется набором квантовых чисел. На эмпирическом уровне обозначения электронных оболочек известны нам со школы (1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d…). Они широко используются в химии, потому что из заполнения оболочек электронами в атоме следуют свойства химических элементов (см. [7] в литературе к предыдущей главе).

Атомы, как «вероятностные» квантовые системы, не имеют четких внешних границ (рис. 3.31). Их радиусы, определяемые по кратчайшим межатомным расстояниям в молекулах и кристаллах, для большинства элементов лежат в интервале $1–2\times10^{-10}$ м*. Переход электронов с одной оболочки с энергией E_1 на другую оболочку с энергией E_2 сопровождается поглощением либо испусканием *фотонов*: «квантов света» с энергией $\Delta E = E_1 – E_2$. Надо отметить, что главные характеристики субатомных частиц – масса, заряд и *спин* (собственный момент импульса, благодаря которому частицы взаимодействуют с магнитным полем) в нерелятивистской квантовой механике ниоткуда не выводятся: они заданы на эмпирическом уровне. Физические основы мироздания объясняет только *квантовая теория поля* (см. последний раздел главы).

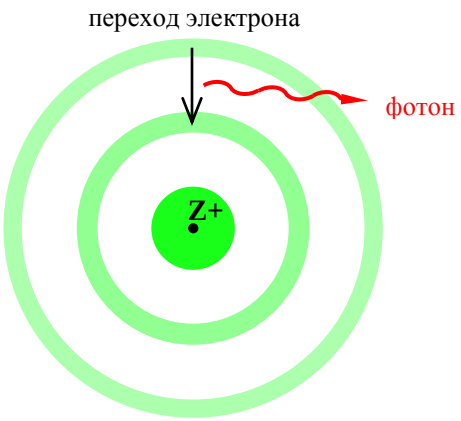


Рисунок 3.31. Ядро и электронные оболочки в атоме (схема); условно показан переход электрона из возбужденного состояния на верхней оболочке

Освоить квантовую механику как раздел физики не очень просто. Для этого надо знать основы классической механики, математического анализа, общей физики и уравнений в частных производных. Лучшим руководством, сочетающие строгость и понятное изложение, здесь является «Краткий курс теоретической физики» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица[4]. На описательном уровне строение атомов и их электронных оболочек обсуждается во многих руководствах по общей физике и по химии – например, в справочнике Е.А. Ереминой и О.Н. Рыжовой для школьников ([7] в гл. 2). Мы отсылаем читателя к этой литературе. Отметим бесспорный факт: одним из триумфов квантовой механики в 1920-е и 1930-е годы стало объяснение структуры таблицы Менделеева,

* Радиус атомного ядра, показанного точкой на рис. 3.31, составляет $\sim10^{-14}$ м: ядра в десятки тысяч раз меньше атомов. Они состоят из протонов и нейтронов, массы которых, соответственно, в 1836 и 1839 раз больше массы электрона. В ядре сосредоточено более 99.9% массы атома – поэтому в квантовой механике атом рассматривается как распределение электронов в поле неподвижного точечного ядра.

химических свойств элементов и механизмов реакций как перераспределения связей между атомами в реагирующих веществах. Далее нам понадобятся несколько простых квантовых моделей, имеющих аналогии с явлениями в обществе – хотя в междисциплинарной физике эти модели занимают скромное место.

Матрица оператора Гамильтона

Волновые функции квантовой системы можно рассматривать как векторы в абстрактном пространстве состояний. В этом случае волновую функцию Ф любого состояния системы представляют в виде линейной комбинации собственных функций этих состояний по заново воспроизводимой здесь формуле (3.57)

$$\Phi = \sum c_i \psi_i(q) = (c_1\psi_1, c_2\psi_2, \dots c_n\psi_n)$$

(буквой q условно обозначен набор координат системы, а собственные волновые функции $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$, отвечающие ее возможным состояниям, играют роль базисных векторов). Множители $\{c_i\}$ при этих функциях могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если волновые функции $\{\psi_k\}$ отвечают собственным значениям энергии $\{E_n\}$, квантовый оператор Гамильтона системы (гамильтониан) приобретает вид квадратной матрицы $||H_{ij}||$ с элементами

(3.62) $$H_{ij} = \langle \psi_j \left| \widehat{\mathcal{H}} \right| \psi_i \rangle = \int \psi_j{}^* \widehat{\mathcal{H}} \psi_i dq,$$

где интегрирование проводится по аргументам q волновой функции. Интегралы $\langle \psi_j \left| \widehat{\mathcal{H}} \right| \psi_i \rangle$, иногда обозначаемые $\langle j \left| \widehat{\mathcal{H}} \right| i \rangle$, называются *матричными элементами* гамильтониана.

В том случае, когда элементы матрицы гамильтониана известны, уравнение Шредингера переходит в хорошо известную *задачу на собственные значения и собственные векторы* этой матрицы (см. разд. 3.1.2 и Приложение П5). Их находят, решая вековое уравнение

(3.63) $$\det \begin{pmatrix} H_{11} - E & H_{21} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} - E & \cdots & H_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} - E \end{pmatrix} = 0$$

Корни этого алгебраического уравнения степени n – собственные значения энергии $\{E_n\}$ в дискретных состояниях квантовой системы. Собственные векторы – отвечающие им взвешенные суммы собственных функций. Подобные комбинации состояний рассматриваются во многих задачах квантовой механики и частично переносятся в общественные науки.

Эмиссионные спектры атомов и «социальный лазер»

Незанятые высокоэнергетические состояния атомов можно «заселить» электронами, сообщая образцу вещества тепловую энергию либо облучая его потоком света (фотонов). При возвращении атома из возбужденного состояния с энергией E_1 в основное состояние с

энергией E_0 испускается фотон с энергией $\hbar\omega = E_1 - E_0$ (рис. 3.31). Так, несколько миллиграммов поваренной соли NaCl окрашивают бледно-сиреневое газовое пламя в ярко-желтый цвет благодаря двойной эмиссионной D-линии натрия, которой соответствуют длины волн 589.0 и 589.6 нм (на рис. 3.28 она показана стрелкой). Расщепление линии в дублет объясняется более тонкими квантовыми эффектами, но само ее возникновение вызвано возбуждением *валентного электрона* в атомах натрия за счет тепловой энергии пламени с основного 3s-уровня (см. школьные курсы химии) на «пустой» (*вакантный*) уровень 3p с более высокой энергией и затем его возвращением на основной уровень с испусканием фотонов (рис. 3.32 а).

В особых условиях удается создать «инвертированную» заселенность электронных уровней, когда большинство атомов определенного элемента находятся не в основном, а в возбужденном состоянии. Для этого нужна прозрачная среда, где у атомов имеются два возбужденных уровня с разным временем жизни: нестабильный уровень B с высокой энергией и более устойчивый (*метастабильный*) возбужденный уровень C, обладающий чуть меньшей энергией (рис. 3.32 б). «Накачка» электронов с основного уровня A на неустойчивый уровень B при облучении мощной лампой и последующий *безызлучательный* переход на уровень C создает активную среду с высокой концентрацией атомов в возбужденном состоянии. При их возвращении в основное состояние A рождаются фотоны с энергией $\hbar\omega = E_C - E_A$, которые индуцируют лавину таких переходов, создавая интенсивный импульс *монохроматического* света.

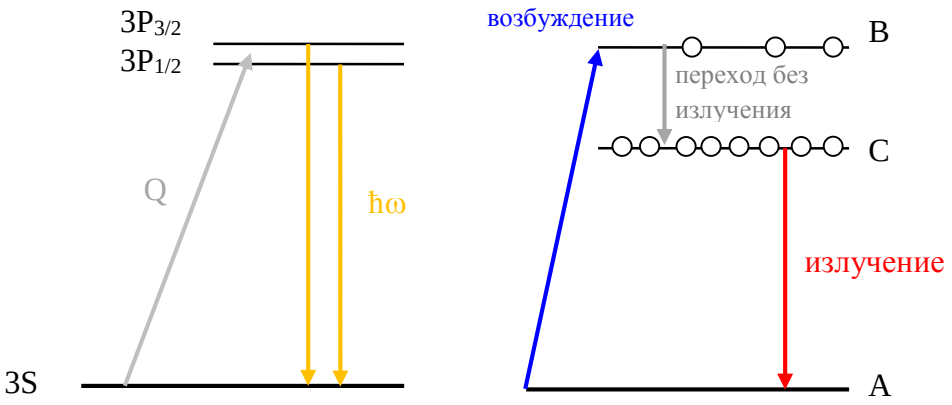


Рисунок 3.32. (а) Происхождение эмиссионного дублета в спектрах возбужденных атомов натрия. (б) Схема действия лазера

Указанные принципы лежат в основе действия *лазеров*: мощных источников света с разнообразными областями применения. Во второй половине 2010-х годов большой фактический материал по провоцированию социальных конфликтов («цветных революций») в ряде стран мира обсуждался на основе модели *«социального лазера»*[5]. В этой модели возбуждение массы людей через прессу и Интернет до готовности к протестам является аналогом «накачивания» энергии, а переход к активным действиям с лавинообразным ростом числа протестующих аналогичен «разрядке» активной среды. Следует отметить, что параллели массовых спонтанных акций с индуцированным лазерным излучением в основном обозначались на вербальном уровне; расчеты (или хотя бы оценки)

доли «возбужденных» индивидуумов в социуме и вероятностей протестов в тех или иных конкретных условиях не были представлены. Более детально эти вопросы будет обсуждаться во 2-й части.

Свободное движение квантовой частицы

Банкомат демонстрирует нам корпускулярную природу наличности, но любой финансист объяснит, что денежные потоки распространяются как волны прибыли и убытков.
Ян Диксон, «Квантовые финансы: новая методология экономики» (шуточный текст).

Волновые функции вида (3.59)

(3.64) $$\Psi = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}$$

соответствуют свободному движению квантовой частицы с определенными значениями кинетической энергии E и вектора импульса $\mathbf{p}$ в трехмерном пространстве: распространение «волн вероятности». Каждая такая волна имеет циклическую частоту $E/\hbar$. Квантовую частицу представляют в виде *волнового пакета*: суперпозиции волновых функций, слегка различающихся по длинам волн $\lambda = 2\pi/p$ и частотам. В случае одномерного движения такой пакет – наложение плоских волн, которые перемещаются вдоль направления x.

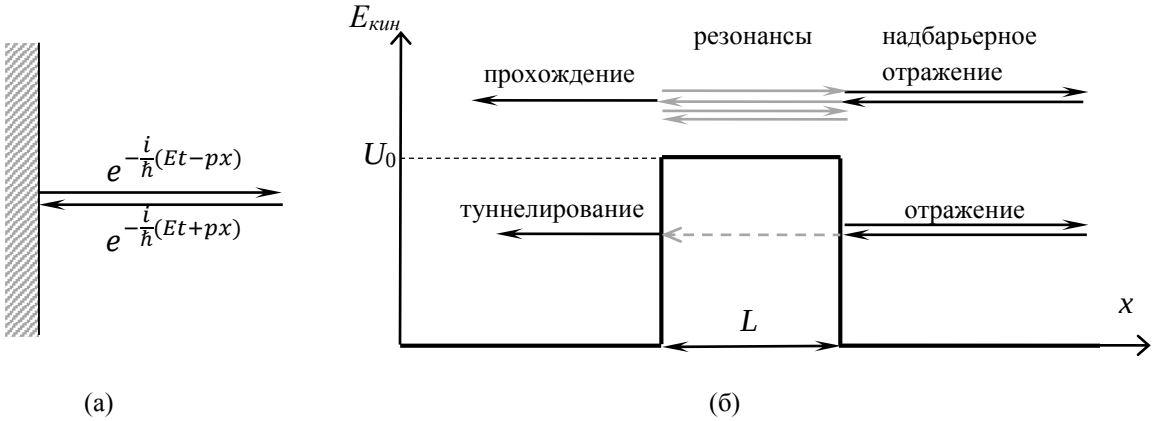


Рисунок 3.33. Одномерное движение квантовой частицы: (а) отражение от стенки, (б) прохождение потенциального барьера

Движение квантового волнового пакета имеет много общего с распространением упругих волн в струне на рис. 3.18 и 3.19. Как в классической механике, квантовая частица упруго отражается от бесконечно высокой «стенки» потенциала, на которой ее волновая функция обращается в ноль (рис. 3.33 а). Но при движении в ступенчатом потенциале классическая частица с кинетической энергией $E > U_0$ пройдет над «ступенькой», лишь уменьшив скорость движения (закон сохранения энергии) – а квантовая частица с некоторой вероятностью отразится от излома потенциала (*надбарьерное отражение*). При некоторых значениях энергии возникают *квазисвязанные надбарьерные состояния*, или *резонансы*. В них из-за отражений от двух границ барьера «волны вероятности» интерферируют, образуя подобие стоячих волн – иначе говоря, проходящие частицы захватываются барьером и некоторое время удерживаются в этой области пространства.

Кроме того. частица с кинетической энергией $E < U_0$ может пройти сквозь барьер. Вероятность этого процесса, называемого *туннельным эффектом*, повышается с уменьшением ширины барьера L и разности энергий $\varepsilon = U_0 - E$ (рис. 3.33 б).

Квантовые эффекты при прохождении частицами потенциальных барьеров играют большую роль в физике (*туннельный эффект* в теории α-распада ядер и в микроэлектронике, теория рассеяния и мн. др.). Аналогии с повседневной жизнью («туннелирование» как нарушение правил) способствовали распространению квантовоподобной терминологии в науках о человеке. На этом пути нередко возникали искаженные представления о принципах квантовой механики.

Волны де Бройля и соотношение неопределенностей

В рассмотренных нами квантовых системах частицы не имеют точного положения в пространстве. Распределению пространственных координат частицы внутри системы соответствуют «волны вероятности». Для свободной частицы с массой m и скоростью $\mathbf{v}$ (т.е. с импульсом $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) длина волны равна

(3.65) $$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{mv}$$ *соотношение де Бройля*

(где $h = 2\pi\hbar \approx 6.629 \cdot 10^{-34}$ дж·с – *старая постоянная Планка*, которую часто использовали в первой половине XX века).

Знаменитую формулу (3.65) в 1923-24 гг. предложил Луи де Бройль в качестве гипотезы. На ее основе так называемый *дуализм волна-частица* стал одним из основных атрибутов квантовой механики. В настоящее время волновые свойства потоков частиц (электронов, нейтронов, молекул газа) общеизвестны, на их дифракции и интерференции основаны многие физические методы исследования вещества. Так, изображения объектов в электронном микроскопе получают, направляя на них в вакууме *моноэнергетические* пучки электронов с длиной дебройлевской волны 5–6 пм и фокусируя рассеянные электроны магнитными линзами по законам геометрической оптики.

Видимый свет и другие формы электромагнитного излучения (рентгеновское, ультрафиолетовое, инфракрасное), обсуждаемые в курсах общей физики как электромагнитные волны, также представляют собой потоки частиц (фотонов). Они подчиняются геометрической оптике, если отвечающая потоку длина волны $\lambda << L$ много меньше размера объекта L, и волновой оптике при $\lambda \sim L$: в последнем случае наблюдаются явления интерференция и дифракция. Открытия «корпускулярных» свойств света на рубеже XIX и XX веков и волновых свойств электронов в 1927 г. показали, что волновые явления в потоках (*пучках*) квантовых частиц носят универсальный характер. Их разная интерпретация для частиц различной природы складывалась по историческим причинам.

Из-за «размазанного» положения квантовых частиц в пространстве их механические параметры нельзя определить точно с помощью волновых функций. Мы видели, что свободной частице, перемещающейся в трехмерном пространстве вдоль оси Ox с точным значением импульса $\mathbf{p}$, отвечает плоская волна вероятности (3.64). Вектор импульса задает направление этой волны, а плотность вероятности обнаружить частицу в данной точке x_0 в

момент времени t имеет одно и то же значение на всей бесконечной плоскости $x = x_0$, перпендикулярной этому направлению.

Экспериментальными методами импульс частицы определяется с некоторой погрешностью δp_x, а ее координата – с погрешностью δx. В показателе экспоненты волновой функции (3.64) присутствует скалярное произведение координаты и импульса

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r} = x p_x + y p_y + z p_z ,$$

где p_x, p_y, p_z – проекции импульса на координатные направления. Математически доказывается, что погрешности в значениях *сопряженных переменных* x и p_x (а также y и p_y, z и p_z) не являются независимыми величинами. Они связаны *соотношением неопределенностей «координата-импульс»*

(3.66 а) $$\delta x \cdot \delta p_x \geq \hbar,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка.

В показатель экспоненты волновой функции (3.64) также входит произведение двух скалярных величин E (энергии) и t (времени). Отсюда возникает *соотношение неопределенностей «время – энергия»*[*]

(3.66 б) $$\delta E \cdot \delta t \geq \hbar.$$

Следует подчеркнуть, что соотношения неопределенностей (3.66 а, б) *неприменимы* к единичному квантовому объекту: электрону, атому или молекуле. По вероятностному смыслу волновой функции, величины δx и δp_x следует сопоставлять с разбросом значений координат и сопряженных импульсов для большого числа («ансамбля») частиц, находящихся в одинаковых условиях, а «неопределенности» δE и δt – со средней шириной и средним временем жизни энергетических уровней, что вообще не имеет смысла для единичных атомов или молекул. Это, казалось бы, очевидное утверждение до сих пор остается не вполне общепринятым даже среди физиков.

При возникновении квантовой механики в первой половине XX века сформировались две альтернативные интерпретации ее уравнений: «точная» и «статистическая». В рамках «точной» интерпретации (которую правильнее назвать «буквальной») единичная квантовая система обязана строго соответствовать всем закономерностям квантовой механики. В рамках статистического представления волновая функция – это математический образ множества одинаковых квантовых систем (*ансамбля*), которой соответствует распределение их экспериментально измеряемых параметров. На основе «точного» представления соотношения неопределенностей (3.66 а, б) считают не связью дисперсий измеряемых величин, а фундаментальным законом, справедливым для единичной квантовой системы. Из этого рудимента классической физики (веры в то, что Природа строго соответствует выведенным для нее формулам) вытекает ошибочный *принцип дополнительности* («координаты и скорость квантовой частицы нельзя измерить

[*] Формула (3.66 б) связывает среднее время жизни δt дискретных возбужденных состояний квантовой системы (см. описание лазера) и ширину δE таких уровней, представляющих собой узкие полосы энергии. Значения δE задают *естественную ширину* спектральных линий (рис. 3.28).

одновременно с любой степенью точности», «всякое измерение, произведенное над квантовой системой, неконтролируемо изменяет ее состояние» и т.п.) с обилием философских построений.

Справедливость статистической интерпретации квантовомеханического формализма в конце XX века подтвердили специализированные эксперименты. Тем не менее, «точное» представление остается популярным. Порожденные им многочисленные парадоксы занимали умы основателей квантовой теории в первой половине XX столетия. В рамках статистического представления о волновой функции как образе ансамбля квантовых систем таких парадоксов не возникает[*].

Интерференция волн де Бройля при рассеянии потока частиц

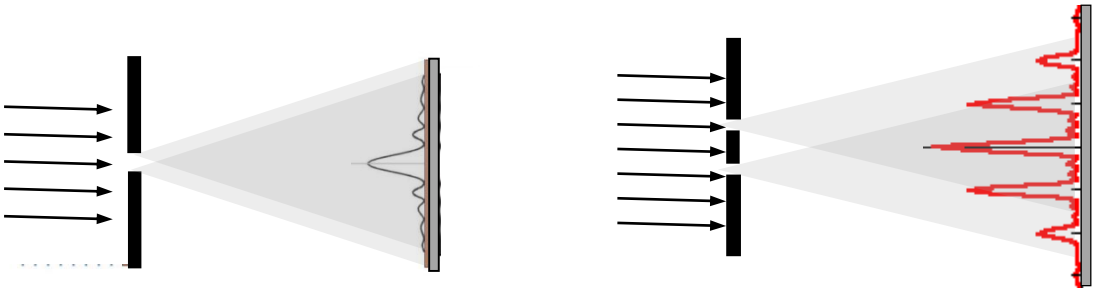
Канонические эксперименты по наблюдению дебройлевских волн состоят в рассеянии потока *нерелятивистских* частиц, обладающих одинаковой скоростью (много меньшей скорости света), на одной и на двух щелях. Ширина щелей и расстояние между ними по порядку величины соответствуют длине волны (3.65) для данной скорости частиц v. В обоих случаях[**] интерференция «волн вероятности» дает дифракционную картину, в схеме с двумя щелями более выраженную (рис. 3.34). Эта картина возникает даже при низкой плотности потока, когда частицы рассеиваются на щелях «по одной». Явление интерференции не согласуется с наличием классических траекторий у частиц. Схемы квантового рассеяния широко обсуждались в XX веке – в том числе представителями гуманитарных наук.

Различие «буквальной» и статистической интерпретаций квантовой механики в описании рассеяния частиц по существу сводится к разной трактовке неопределенности в их положениях, зафиксированных на экране или фотопленке. На основе статистического представления неопределенность Δx в положениях рассеянных частиц – это разброс точек их попадания в экран, т.е. размер дифракционной картины. Этот параметр, определяемый длиной волны де Бройля, в полном соответствии с экспериментальными данными связан с разбросом проекций скоростей (и, следовательно, импульсов) частиц, попадающих в плоскость экрана, соотношением неопределенностей (3.66 а)

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \ \Delta y \Delta p_y \geq \hbar.$$

[*] Частичное сохранение положений классической физики внутри квантовой теории, затормозившее ее развитие в первой половине XX века, обычно считают консервативной реакцией научного сообщества на обилие новых идей. Но если помнить, что одним из прорывных направлений физики в эти годы были исследования атомного ядра – можно предположить, что без такого торможения человечество вошло бы во Вторую мировую войну, располагая атомными бомбами. Круг вопросов, связанных с распределенным интеллектом социальных систем, будет обсуждаться в 3-й части книги.

[**] При вульгаризации квантовых эффектов (к несчастью, просочившейся в «Фейнмановские лекции по физике») рассеяние частиц на единственной щели объявляют классическим. Это заблуждение. Если ширина щели имеет порядок дебройлевской длины волны, интерференция волн от двух ее краев создает дифракционную картину с «почти классическим» центральным максимумом плотности прошедших частиц и слабыми максимумами-сателлитами на периферии (см. рис. 3.34 а). Детальное обсуждение этой задачи есть в «Курсе общей физики» Фриша и Тиморевой (т. III) и во многих других авторитетных учебниках.



(а) (б)

Рисунок 3.34. Рассеяние потока квантовых частиц (а) на одной щели, (б) на двух щелях

Неопределенностью положения индивидуальной частицы является размер области ее попадания в экран. Величины (δx, δy) на 2-3 порядка меньше (Δx, Δy) – в рамках «буквального» представления так же должны увеличиться неопределенности скорости и импульса (рис 3.35). Между тем в экспериментах по рассеянию атомов гелия на двух щелях, проведенных 1990-е годы, скорости и координаты частиц, достигших поверхности экрана (двухкоординатного детектора), регистрировались *одновременно с любой желаемой точностью*. В отличие от опытов первой половины XX века, авторы использовали импульсный источник атомов. «Выстрел» источника запускал часы, и детектор фиксировал как место, так и время попадания частиц в экран, т.е. их скорости. Тем не менее, в экспериментах была получена дифракционная картина, которая совершенно не пострадала от этого обстоятельства[*]. Так еще раз подтвердился объективный факт: вероятностные предсказания квантовой механики проверяются не на единичных измерениях, а на статистике данных.

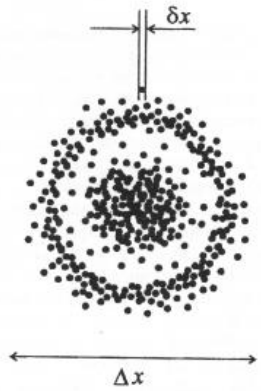


Рисунок 3.35. Погрешность единичного измерения δx и дисперсия результатов измерений Δx при регистрации дифракционной картины (условно)

Законы сохранения и «квантовая запутанность»

Благодаря инерции человеческого мышления в области квантовой физики продолжают существовать некоторые экспериментально опровергнутые представления и идеи, умножая умозрительные парадоксы. В дискуссии о невозможности точного измерения параметров

[*] C.H. Kurtsiefer, T. Pfau, J. Mlynek, Nature, 1997, **386**, 150. В цитируемой работе один атом гелия попадал в детектор за 10-100 «выстрелов» источника, т.е. атомы рассеивались на двух щелях «по одному». Полное время записи дифракционной картины достигало двух суток.

квантовой частицы без разрушительного воздействия измерительного прибора на ее состояние, или о «принципе дополнительности», в XX веке участвовали все ведущие физики. В этих дискуссиях Альбертом Эйнштейном был предложен мысленный эксперимент, положивший начало одному из знаменитых «квантовых» парадоксов.

Представим измерительный прибор в виде длинной трубы, из которой откачан воздух. В центре трубы расположена камера с радиоактивным изотопом, на равных расстояниях от него – регистрирующие детекторы (рис. 3.36). Ядро радиоактивного элемента распадается на два ядра, разлетающихся в противоположные стороны. Одно из ядер-осколков регистрируется детектором, показывающим его массу и скорость – следовательно, импульс. По закону сохранения импульса (см. задачу 2.4 в главе 2), тем самым регистрируется импульс и второго осколка, что подтверждают показания второго детектора. Зная массу распадающегося ядра, в таком эксперименте можно *точно* установить массу и скорость второго ядра-осколка, вообще не проводя над ним измерений. Как это согласовать с принципом дополнительности?

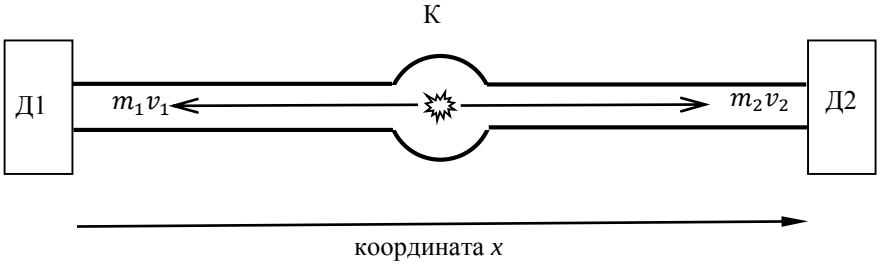


Рисунок 3.36. Мысленный эксперимент Эйнштейна: К – камера распада, Д1 и Д2 – детекторы

Правильного ответа «*принцип дополнительности ошибочен*» физика не знала до середины XX века, так как этот принцип обсуждали все основатели квантовой теории. На основе мысленного эксперимента Эйнштейна были разработаны и проведены реальные эксперименты, которые подтвердили незыблемость законов сохранения – но в них возникли новые околофизические парадоксы.

Предположим для простоты, что ядро в камере К на рис. 3.36 всегда распадается на два осколка с величинами импульса $p_1 = m_1v_1$ и $p_2 = m_2v_2$. По закону сохранения импульса для осколков, разлетевшихся в противоположные стороны, $p_1 = -p_2$ в проекции вдоль оси трубы x. До попадания осколков в детекторы состоянию системы в левой и в правой половинах трубы соответствует волновая функция

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2),$$

где цифрами «1» и «2» обозначены равновероятное приближение к детектору осколков с массами m_1 и m_2, дробь $\frac{1}{\sqrt{2}}$ перед скобкой – нормирующий множитель. При регистрации одним из детекторов осколка с определенной массой волновая функция изменится:

в левом детекторе $\Psi = \psi_1$, в правом детекторе $\Psi = 0$ – либо наоборот

Довольно очевидное следствие законов сохранения породило в квантовой физике много новых терминов: *квантовая запутанность* (англ. *quantum entanglement*) состояний до регистрации частиц, «редукция волновой функции» в момент регистрации и даже «квантовая телепортация»[*]. Эти игры разума прижились в междисциплинарных приложениях квантовой механики, которые будут кратко рассмотрены во второй части книги[**].

ЗАДАЧА 3.11. Рассчитайте длину волны де Бройля для следующих потоков частиц

(1) потока нейтронов (масса $1.675\cdot10^{-27}$ кг), летящих со скоростью 1 км/с;
(2) потока атомов гелия ^{4}He массой 4.0026 а.е. ($6.646\cdot10^{-24}$ г), летящих со скоростью 330 м/с;
(3) потока атомов аргона ^{40}Ar массой 39.9624 а.е. ($6.635\cdot10^{-23}$ г), летящих с той же скоростью;
(4) потока электронов (масса $9.109\cdot10^{-31}$ кг) в электронном микроскопе, обладающих кинетической энергией $4\cdot10^{-14}$ Дж.

[4] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Краткий курс теоретической физики, кн. 2. Квантовая механика*, М.: Наука, 1972.

[5] A. Khrennikov, *Social laser: Action amplification by stimulated emission of social energy*, Phil. Trans. Royal Soc. 2016, 374, N 2054, 20150094.

[6] А.В. Ланкин, Г.Э. Норман, *Новости, основания и проблемы квантовой механики. Неокопенгагенская парадигма,* М.: Физматлит, 2023.

3.4. Компьютерное моделирование многочастичных систем

3.4.1. Принципы статистической термодинамики

Квантовые представления о дискретных состояниях механических систем позволяют дать определение энтропии в рамках *статистической физики*. В этом разделе физической науки параметры макроскопической системы (*макросостояния*) и их изменение во времени рассчитывают из положений и импульсов (*микросостояний*) всех частиц, составляющих систему. На таком пути удается объяснить необратимость термодинамических процессов, которые складываются из множества микроскопически обратимых движений частиц (см. гл. 2).

[*] В современном варианте экспериментов регистрируется квантовый параметр единичных фотонов: *спиральность*, которая соответствует «правой» и «левой» поляризации света (см. курсы оптики). Для фотонов, возникающих попарно в некоторых физических процессах, если один из фотонов «правый», второй по законам сохранения обязательно «левый». В момент рождения фотонов этот параметр для них неизвестен. Состояния поляризованных фотонов до момента регистрации называют «запутанными», а попадание фотона с определенной поляризацией в детектор – «коллапсом волновой функции». Для достаточно длинной трубы показания детектора Д1 (у которого есть конечное время реакции δt) устанавливают состояние второго фотона в детекторе Д2 «со скоростью, превышающей скорость света»! Этот искусственно сконструированный парадокс и называют «квантовой телепортацией».

[**] Понятийный аппарат квантовой механики и интерпретация связанных с ним парадоксов остается предметом дискуссий, выводящих из физики в биологию, информатику, криптографию и другие трудные дисциплины. В качестве примера укажем недавно изданную книгу[6], сразу вызвавшую живой интерес научного сообщества (тж. см. раздел 8.7 главы 8 во второй части книги). К сожалению, эта тема требует очень глубокого знания всей теоретической физики, которым автор не может похвастать. Тем не менее, продолжение дискуссий через столетие после создания основ квантовой теории позволяет предположить, что в этих основах сохраняется некий фундаментальный дисбаланс. Его преодоление в будущем должно дать новый импульс развитию естественных наук.

Если состояния квантовой частицы, подчиняющейся соотношению неопределенностей, можно задать в малых интервалах координат $\delta\mathbf{r}$ и импульсов $\delta\mathbf{p}$ (с тремя проекциям каждого вектора в декартовых координатах), 6-мерное *фазовое пространство* одной частицы (см. раздел 2.2 главы 2) разбивается на «ячейки»: дискретные элементарные объемы $\delta\mathbf{p}\delta\mathbf{r}\sim\hbar^3$. Вероятность найти частицу в разных ячейках пространства зависит от ее энергии: она пропорциональна множителю $0 < \exp(-E/kT) < 1$, где E – энергия частицы, T – температура среды, а $k = 1.381\cdot10^{-23}$ Дж/К $= R/N_A$ – постоянная Больцмана (см. главу 2).

Для макроскопической системы из N частиц фазовое пространство имеет размерность $6N$. Всем возможным состояниям системы в этом пространстве соответствует *фазовый объем* $\Delta\Gamma = \Delta p \Delta q$, где q условно обозначает $3N$ координат всех частиц в системе, а p – их импульсы. (Мы предполагаем, что координаты и, соответственно, импульсы взаимодействующих частиц имеют близкие значения, так что область $\Delta\Gamma$, во-первых, непрерывна, а во-вторых занимает малую часть всего фазового пространства. Это справедливо для макроскопических систем с $N \sim N_A$, где доля «отдельно лежащих» возбужденных состояний пренебрежимо мала).

В статистической физике доказывается, что для большого числа частиц N фазовый объем теплоизолированной системы сохраняется во времени:

$$d(\Delta\Gamma)/dt = 0, \text{ или } \Delta\Gamma = \text{const}$$

(*теорема Лиувилля*, рис. 3.37; сравните с движением элементарного объема несжимаемой жидкости на рис. 3.23). Естественно предположить, что энтропия, как показатель «беспорядка» системы, растет с увеличением ее многомерного фазового объема, при котором увеличивается число доступных «элементарных ячеек» $\delta\mathbf{q}\delta\mathbf{p}$. Оттого, что число состояний в макроскопических системах (например, для $6\cdot10^{23}$ молекул одного моля газа) огромно, значения энтропии этих состояний вычисляют в логарифмической шкале (см. задачу 2.7 в гл. 2):

$$S = k \cdot \ln W \tag{3.67}$$

где W – число доступных микросостояний системы; коэффициентом пропорциональности служит константа Больцмана k.

Формула (3.67) фундаментальна для статистической термодинамики; она выгравирована на могильном камне основателя этой области Людвига Больцмана как его важнейший вклад в физику. Связь энтропии с числом W состояний системы из N одинаковых частиц, каждая из которых имеет s степеней свободы, задает формула

$$W = \frac{\Delta\Gamma}{N!h^F} = \frac{\Delta\Gamma}{N!h^{Ns}} \tag{3.68}$$

где h – «старая» постоянная Планка, $F = Ns$ – суммарное число степеней свободы всех частиц в системе. Число W (и, соответственно, энтропия) тем больше, чем больше дискретных уровней квантовой системы с энергией E_i могут заселяться при данной температуре T.

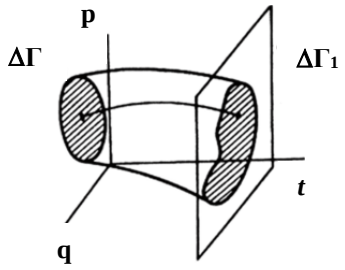


Рисунок 3.37. Теорема Лиувилля: постоянство фазового объема системы ΔΓ (схема)

Доступность микросостояния с энергией E_i отражает больцмановский множитель $e^{-\frac{E_i}{kT}}$, принимающий значения между 0 и 1. Термодинамические функции многочастичной системы в состоянии теплового обмена с окружающей средой выводятся из соотношения

(3.69) $$F = -kT \ln Z,$$

где F – изохорно-изотермический потенциал системы (термодинамический потенциал Гельмгольца, см. разд. 2.3 в главе 2), а

(3.69 а) $$Z = \sum_i g_i e^{-E_i/kT}$$

– *статистическая сумма*, или *сумма по состояниям* системы. Целочисленные весовые множители $\{g_i > 1\}$ вводятся для систем с *вырожденными* микросостояниями, в которых находится больше одной частицы.

Безразмерный числовой параметр (3.69 а) показывает, сколько состояний многочастичной системы с разными значениями энергии $\{E_i\}$ доступно в заданных условиях. Для поступательного и вращательного движения молекул разбиение фазового пространства настолько «мелкое», что квантовые эффекты не проявляются: энтропия, как в классическом случае, пропорциональна числу соответствующих степеней свободы. Число доступных дискретных колебательных и, тем более, электронных состояний оценивается по (3.69 а). При повышении температуры слагаемые в сумме увеличиваются, т.е. потенциал Гельмгольца системы понижается, а ее энтропия возрастает.

Определения (3.67) и (3.69) согласуются со стремлением изолированных термодинамических систем к равномерному распределению микросостояний по фазовому объему, то есть к максимуму энтропии (второе начало термодинамики, см. главу 2). Пусть, например, пять молекул распределены в некотором условном объеме по 20 микросостояниям (рис. 3.38). Число вариантов такого распределения равно количеству разных комбинаций пяти из 20 одинаковых объектов (чисел, точек, клеток и т.д.). В соответствующем разделе математики – *комбинаторике* – это называется *числом размещений m* объектов, выбираемых из совокупности *n* объектов

$$W_1 = \mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = \frac{20!}{5!\cdot 15!} = \frac{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 16 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 = 15504.$$

Если такое же число молекул (пять) занимает только «правую» или только «левую» половины объема (рис. 3.40), количество возможных вариантов равно

$$W_2 = 2 \times \mathrm{C}_{10}^5 = \frac{2\cdot 10!}{5!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3\cdot 4\cdot 5} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Вероятность того, что все пять молекул в результате их хаотических перескоков из одной клетки в другую окажутся в одной половине объема, равна $W_2/W_1 = 0.0325$, или чуть меньше 3.3%.

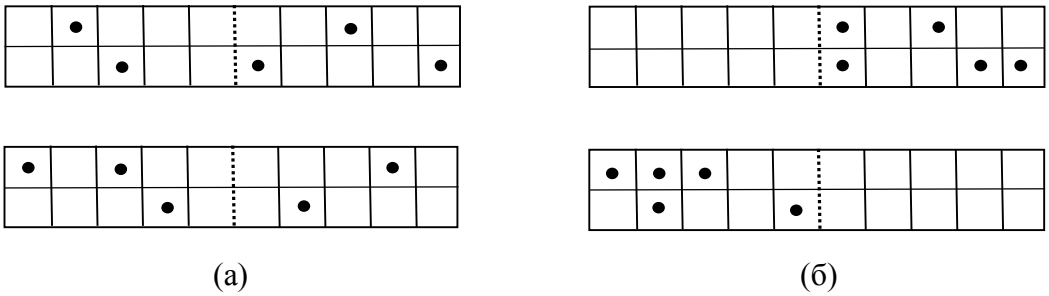


Рисунок 3.38. Варианты распределения пяти молекул по микросостояниям в условном объеме из 20 ячеек: (а) по всему объему, (б) в половине объема

С увеличением числа молекул вероятность их неравномерного распределения очень быстро уменьшается. Так, для 10 молекул, распределенных в условном объеме по 100 микросостояниям, вероятность собраться в половине объема равна 0.12%, а уже для 100 молекул и 1000 микросостояний такая вероятность $\sim 10^{-32}$, то есть исчезающе мала. Таким образом, стремление многочастичных систем к равномерному распределению по состояниям (и соответственно к максимуму энтропии) имеет статистическую природу. Необратимыми в этих системах являются такие процессы, для которых вероятность противоположного (обратного) процесса практически равна нулю.

3.4.2. Методы расчета состояний многочастичных систем

Соотношения (3.67 – 3.69) позволяют рассчитать средние параметры системы из N частиц и сопоставить их с измеряемыми параметрами макроскопического объекта. Если силы, действующие на каждую частицу, задаются потенциалами межчастичных взаимодействий (см. разд. 2.3 в гл. 2) и внешним полем, параметры состояния частиц можно найти численным расчетом на компьютере и затем усреднить. Этот подход, развитый в статистической физике, во второй половине XX века был распространен на мультиагентные модели экономики и социума, которые мы рассмотрим далее в этой книге.

Метод молекулярной механики (ММ)

Главным параметром неподвижной физической системы является ее потенциальная энергия U. При малых внешних возмущениях (низкой температуре) конфигурации частиц, отвечающие минимуму энергии в N-частичной модели, воспроизводят «плотные упаковки» атомов и молекул внутри макроскопических твердых тел. В простейшем алгоритме расчета таких упаковок положения частиц в пространстве $\{\mathbf{r_k}\}$ на каждом шаге поочередно изменяются случайным образом и для новой конфигурации вычисляется энергия $U^{(i)}(\mathbf{r_1}^{(i)}, \mathbf{r_2}^{(i)}, \ldots, \mathbf{r_N}^{(i)})$ (где вектору $\mathbf{r_k}^{(i)}$ соответствует положение в трехмерном пространстве частицы с номером k на i-м шаге). Варьируемые координаты атомов часто выбираются в направлении уменьшения градиента потенциальной энергии grad U (*градиентный спуск*). По цепочке последовательных конфигураций частиц с $U^{(i+1)} \le U^{(i)}$ расчет приводит к минимуму энергии.

Энергия системы зависит от координат всех N частиц, и указанная процедура называется поиском минимума *гиперповерхности энергии* в 3N-мерном конфигурационном пространстве. Но поскольку сама функция $U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_N, y_N, z_N)$ неизвестна, виртуальная траектория поиска на гиперповерхности может привести в *локальный*, а не *глобальный* (т.е. самый глубокий) минимум энергии (рис. 3.39 а) и таким образом предсказать неверную конфигурацию частиц в системе.

Метод Монте-Карло (МК)

Эффективный компьютерный метод поиска глобального минимума либо максимума на многомерной гиперповерхности был предложен в конце 1940-х годов; он широко применяется до настоящего времени. Метод состоит в особой процедуре выбора последовательных расчетных значений энергии $\{U^{(i)}\}$ – или же любой неизвестной непрерывной функции от большого числа переменных, вычисляемой только в дискретных точках. Метод получил свое название за использование генератора случайных чисел («рулетки») при выборе последовательных шагов поиска.

При простой минимизации энергии, также называемой «оптимизацией структуры», значения $U^{(i+1)}$ сравниваются с $U^{(i)}$ на предыдущем шаге расчета. В случае $U^{(i+1)} \leq U^{(i)}$ новая конфигурация принимается и далее изменяется на следующем шаге (см. выше). При $U^{(i+1)} > U^{(i)}$ пробная конфигурация отбрасывается и расчет повторяется с другими случайными сдвигами одной либо нескольких частиц из «i-й» конфигурации. Напротив, в *алгоритме Метрополиса* (названном по фамилии его автора) конфигурация с $U^{(i+1)} > U^{(i)}$ не отбрасывается «с порога». Для нее вычисляется разность энергий $\varepsilon = U^{(i+1)} - U^{(i)}$, подставляемая затем в аналог больцмановского веса конфигурации:

$$w = e^{-\varepsilon/\theta},$$

где параметр θ, задаваемый в начале расчета, играет роль температуры как меры случайных возмущений (*шума*). Далее программа сравнивает значение w, по определению лежащее в интервале между 0 и 1, со случайным числом $\omega \in (0, 1)$ из того же интервала. Алгоритмы «случайного» выбора чисел, или *генераторы случайных чисел*, в компьютерных дисциплинах хорошо разработаны. Если $w < \omega$, конфигурация отбрасывается, однако при $w > \omega$ она будет принята, несмотря на более высокую энергию. На следующем шаге поиска все операции повторяются.

В методе Монте-Карло моделируется способность *изображающей точки* (т.е. точки в конфигурационном пространстве, отвечающей состоянию системы) преодолевать потенциальные барьеры под действием случайного возмущения: «шума» или «температуры». Этот метод оказался очень полезным в поиске глобального минимума на многомерных гиперповерхностях. Целевой функцией, вместо энергии, могут быть термодинамические потенциалы либо другие энергоподобные характеристики: сумма затрат в сложных экономических системах, *функция приспособляемости* на «эволюционном ландшафте» в математических моделях эволюционной биологии и др. Для определения максимумов достаточно изменить знак целевой функции на противоположный. Многократное повторение поиска со специально подобранными

значениями θ и ω позволяет исследовать «форму» гиперповерхности, т.е. глубину и кривизну ее минимумов по числу попавших туда точек (рис. 3.39 б)

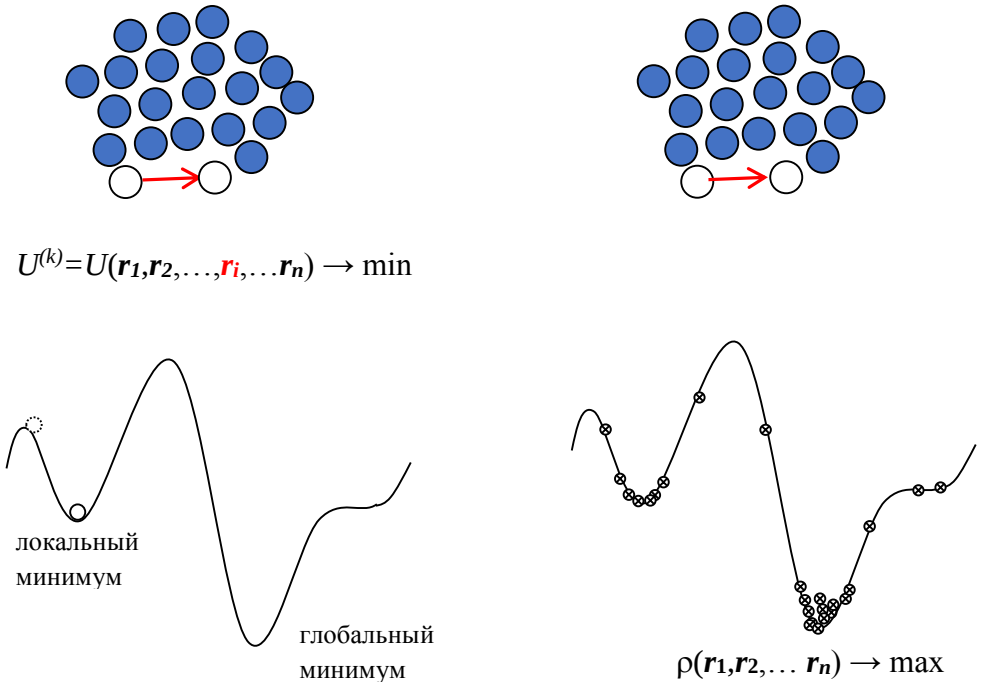


Рисунок 3.39. Анализ профиля энергии: (а) молекулярная механика (ММ), градиентный поиск минимума; (б) метод Монте-Карло (МК), стохастический поиск минимумов

Метод молекулярной динамики (МД)

В рамках классической механики состояние системы из N частиц получают усреднением (интегрированием) параметров по ее траектории в $6N$-мерном фазовом пространстве. Уравнения 2-го закона Ньютона для каждой точечной частицы в системе задают в «дискретной» форме

(3.70) $$\mathbf{r}_i(t+\Delta t) = 2\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(t-\Delta t) + (\Delta t)^2 a_i(t),$$

$$v_i = \frac{r_i(t+\Delta t) - r_i(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

(где $\mathbf{r_i}$ – вектор, задающий положение i-й частицы, v_i – ее скорость, $a_i = F_i/m_i$ – ускорение, m_i – масса частицы, F_i – сумма сил, действующих на частицу). Соотношения (3.70) – это *алгоритм Верле*, который переводит дифференциальные уравнения 2-го закона Ньютона в *разностные уравнения* с дискретными приращениями времени Δt. Значения скоростей придают частицам по распределению Максвелла (разд. 2.3 и формула (2.39) в гл. 2)

$$P(v_i) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{m{v_i}^2}{2kT}\right)$$

(где T – температура системы, удовлетворяющая соотношению

$$\langle \frac{m{v_i}^2}{2} \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

k – константа Больцмана). Силы взаимодействий между частицами вычисляют на каждом шаге из функций типа леннард-джонсовского (2.32 а), кулоновского (1.12) и других потенциалов, используемых в молекулярной физике.

Современные компьютеры позволяют проводить расчеты систем, содержащих от нескольких сотен до нескольких тысяч частиц. Но в таких системах сильно проявляются краевые эффекты. Так, в плотном агрегате из 1000 частиц, имеющем форму куба размером 10×10×10, 488 частиц (т.е. почти половина) находятся на поверхности, и их «усредненные» состояния будут отличаться от состояний частиц внутри куба. Чтобы компенсировать краевые эффекты, частицы модельной системы помещают в кубический ящик со сторонами длиной ~10 нм и «прозрачными» стенками. Если в процессе расчета одна из частиц выходит за границу ящика, из случайно выбранной точки противоположной стенки в систему входит частица с тем же вектором скорости. При расчете двумерных структур (частицы на поверхности) ящик заменяет прямоугольная область с «отождествленными» противоположными границами, геометрически эквивалентная поверхности тора (рис. 3.40). Взаимодействия частиц обычно учитываются внутри ограниченной сферы радиуса r_0 (стандартный английский термин *cutoff* в нашей литературе не имеет благозвучного аналога).

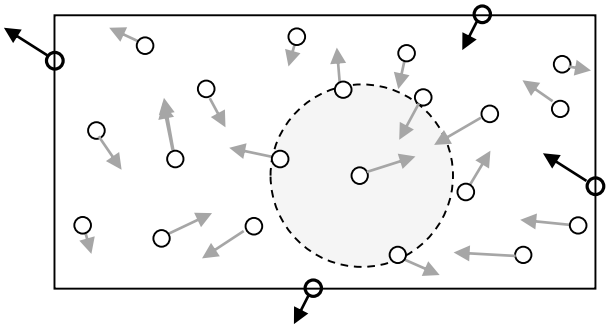


Рисунок 3.40. Ячейка в МК- и МД-расчетах (схема). Показана сфера взаимодействий одной частицы

Расчеты методом МД обычно охватывают до ~10^{10} циклов, или «тактов» дискретного времени. Примерно половину этой процедуры модельная система при T = const приходит в равновесное состояние с минимумом изохорно-изотермического потенциала F (то есть потенциала при постоянных температуре и объеме). Динамика выхода на равновесную фазовую траекторию позволяет воспроизводить эффекты релаксации при изменении внешних воздействий, а интегрирование по равновесному участку дает термодинамические характеристики системы.

Расчеты методом МК и МД позволяют проанализировать до 10^8 – 10^{10} конфигураций N-частичных систем. Оба метода могут применяться в квантовомеханических вариантах. Многочастичное компьютерное моделирование нередко называют *вычислительным экспериментом* или, употребляя кальку с английского термина, «компьютерной симуляцией». Современные методы компьютерного анализа многомерных

гиперповерхностей с имитацией распределенного интеллекта («роевые», «муравьиные» и др.) будут рассмотрены в части III.

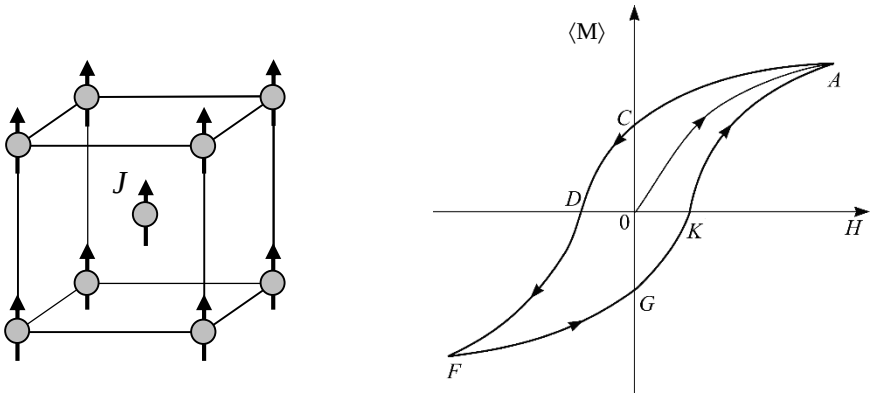
Модели Изинга и Поттса

Особый раздел статистической физики составляют многочастичные квантовые системы. На их основе в физике создано количественное описание тепловых, электрических и магнитных явлений в твердом теле. По величинам спинов, т.е. собственных моментов импульса (рис. 2.17 в гл. 2), все квантовые частицы подразделяются на *частицы Бозе*, или *бозоны* (целочисленный спин; пример – фотоны) и *частицы Ферми*, или *фермионы* (примеры – электрон, протон и нейтрон: спин $s = ½$). Фермионы и бозоны подчиняются разным типам *квантовой статистики*, которыми определяются, например, правила заполнения электронных оболочек в атомах (мы не станем углубляться в эту тему). Частицы с ненулевым спином s имеют магнитный момент $J \sim \hbar s$. Если в электронных оболочках атома есть *неспаренные электроны* (см. школьный курс химии), атом также приобретает магнитный момент.

Ориентация магнитного момента по магнитному полю – в том числе по полю соседней частицы при параллельных спинах – стабилизирует систему, понижая ее энергию. Большинство металлов *парамагнитны*: магнитные моменты их атомов в отсутствии внешнего поля расположены хаотически, а при его включении ориентируются по силовым линиям, усиливая поле внутри металла. Некоторые металлы *ферромагнитны*: магнитные моменты их атомов ориентированы параллельно даже без внешнего поля. Наиболее известным ферромагнитным металлом является железо при комнатной температуре, или α-Fe (*альфа-железо*, Рис. 3.41 а).

Ферромагнетик – это магнит в обычном смысле слова: он притягивает железные и стальные предметы. Параллельная ориентация атомных магнитных моментов создает макроскопическую среднюю *намагниченность* $\langle M \rangle > 0$ в образце ферромагнетика. При воздействии магнитного поля на образец ферромагнетика (например, на железный гвоздь) его намагниченность возрастает при увеличении напряженности поля **H** – и, подобно логистической функции, приближается к постоянной величине, которой соответствует ориентация магнитных моментов всех атомов по направлению поля (Рис. 3.41 б, кривая 0→A). Если изменить направление внешнего поля на противоположное, магнитные моменты атомов окажутся направленными против поля и увеличение напряженности **H** будет приводить к снижению $\langle M \rangle$, а затем к изменению знака намагниченности, или *перемагничиванию* образца (кривая ACDF). При повторном «переворачивании» внешнего поля можно вернуть систему в точку A по кривой FGKA, каждое точке которой, по сравнению с кривой ACDF, отвечает меньшая намагниченность при одинаковом внешнем поле.

Кривые зависимости намагниченности от напряженности внешнего поля для намагничивания и перемагничивания имеют похожий S-образный вид, однако они не совпадают. У «инерции намагниченности», или *гистерезиса* (см. Рис. 3.41 б) много аналогов в общественных явлениях – например, при оценке суммы затрат на переманивание к конкурентам клиентов лопнувшего банка или избирателей обанкротившейся политической партии.



(а) (б)

Рисунок 3.41. (а) Элементарная ячейка кристалла ферромагнитного α-Fe; *J* – магнитный момент атома. (б) Кривые намагниченности ферромагнетика при разных направлениях внешнего поля

Некоторые металлы и их соединения могут существовать как в парамагнитной, так и в ферромагнитной форме. Выше критической температуры T_c=770 °C (*точки Кюри*) металлическое α-железо становится парамагнитным (β-Fe); при охлаждении металл возвращается в ферромагнитное состояние. Это фазовый переход 2-го рода (см. разд. 2.5 в главе 2): атомы в металле остаются на своих местах, изменяется лишь ориентация их магнитных моментов. Для теоретического описания таких переходов в 1918 г. была предложена *модель Изинга*, которая до сих пор широко используется в моделировании не только магнитных, но также и социальных явлений.

В простейшем варианте модели Изинга атомы, имеющие спины ±½, расположены в узлах плоской квадратной решетки. Ориентация магнитного момента атома $J_i = \hbar s_i$ по внешнему полю H понижает энергию E, стабилизируя систему. Хаотическое тепловое движение случайным образом «переворачивает» спины. При фиксированной конфигурации магнитных моментов в решетке энергия i-го узла

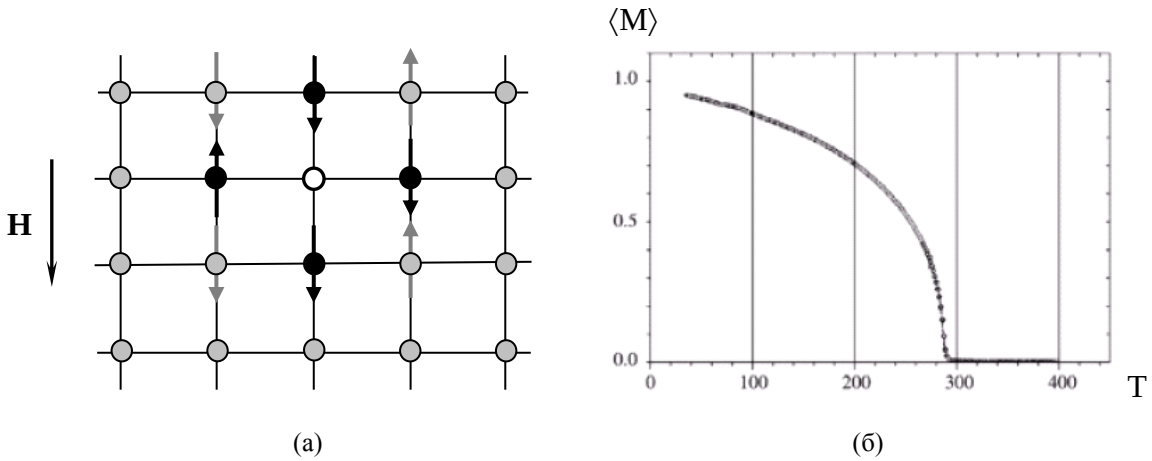
(3.71) $$E_i = -K \sum_j s_i s_j - H s_i$$

зависит от ориентации его спина s_i, параллельного либо противоположного внешнему полю H, и спинов ближнего окружения. Таким окружением для каждого узла в разных вариантах модели считается либо четыре, либо восемь ближайших узлов в решетке (рис. 3.42 а). Вероятность P_i переворота спина на n-м шаге дискретного времени определяется

изменением энергии узла $\Delta E_i = E_i(n) - E_i(n-1)$ и температурой T как мерой хаотического возбуждения системы:

(3.72) $$P_i = \frac{1}{1+e^{\Delta E_i/kT}}$$

(здесь kT - эмпирический параметр в показателе экспоненты).



(а) (б)

Рисунок 3.42. Модель Изинга: (а) расположение спинов в квадратной решетке, (б) зависимость средней намагниченности от температуры

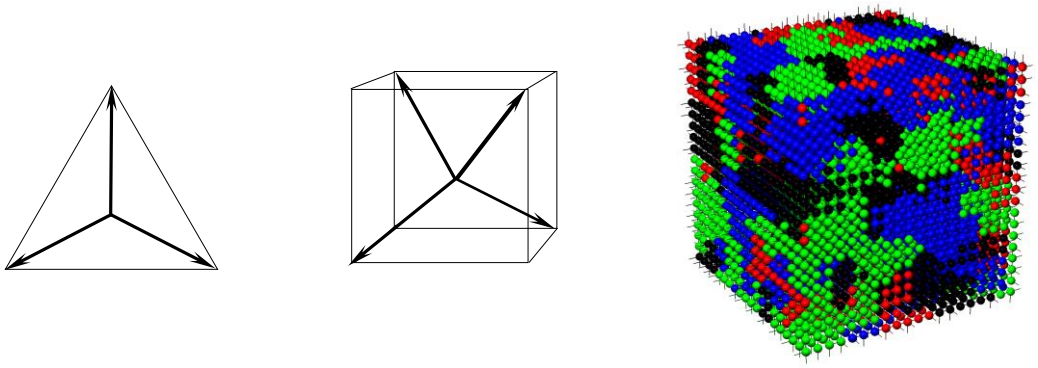
Зависимость намагниченности плоской квадратной решетки от температуры по модели Изинга рассчитывается точно. Ниже некоторой критической температуры T_0 спины на решетке (продолжая случайным образом переворачиваться либо оставаться неизменными на последовательных шагах дискретного времени) приобретают предпочтительную ориентацию и создают усредненную намагниченность системы $\langle M \rangle > 0$ (рис. 3.42 б). Так на качественном уровне воспроизводится фазовый переход из парамагнитного состояния кристалла в ферромагнитное состояние.

Как физическое описание магнитных явлений, модель Изинга весьма несовершенна. Выигрыш в энергии от простой ориентации магнитного момента атома по внешнему полю много меньше энергии тепловых колебаний; в реальности ферромагнетизм – более сложное, существенно многоэлектронное явление. Тем не менее, эта модель продолжает широко применяться для расчетов фазовых переходов. Ее развитием стала модель Поттса (1952 г.), в которой атомные спины могут иметь несколько ориентаций (рис. 3.43 а, б). Энергия взаимодействия магнитных моментов в этой модели рассчитывается по формуле, аналогичной (3.71), с учетом угла между моментами соседних атомов

$$E_{km} \sim J_k J_m \cos \varphi_{km}$$

для модели с тремя ориентациями спина (*трехвершинной*) на рис. 3.43 а, либо $E_{km} \sim J_k J_m$ при параллельных моментах и $E_{km} = 0$ в остальных ориентациях.

Модель Поттса позволяет рассчитывать сложные магнитные структуры, включая *спиновые стекла*: кристаллы с «жестким» неупорядоченным расположением магнитных доменов, напоминающим околокритическое состояние при фазовых переходах (рис. 3.43 в; см. раздел 2.5 в предыдущей главе). Схемы Изинга и Поттса также используют при моделировании принятия решений в экономике и общественных науках. Так, «бинарная» ориентация спина ±½ провоцирует аналогии с бинарным выбором в социальных системах: покупкой товара или отказом от покупки, голосованием «за» или «против» на выборах и т.д. В главе 9 будут рассмотрены модели современной политологии, развивающие этот подход.



(а) **(б)** **(в)**

Рисунок 3.43: Модель Поттса: (а) трехвершинная и (б) четырехвершинная ориентация спинов, (в) расчетное моделирование спинового стекла, цвет – разные магнитные моменты доменов (K.A. Hawick, M.G.B. Johnson. Technical Report CSTN-135, Augusr 2011, https://www.researchgate.net/publication/228453386)

3.5. Релятивистские представления в физике

Все перечисленные выше представления и модели теоретической физики (как классической, так и квантовой) еще не позволяют объяснить многие свойства материального мира. При всех огромных достижениях классической механики (см. предыдущую главу), вплоть до конца XIX века в ней не обсуждался «дуализм» инертной и гравитационной массы – входящей, соответственно, во 2-й закон Ньютона и закон всемирного тяготения. (Оба закона фундаментальны, но логически не связаны между собой). Также не подвергались сомнению однородное и изотропное, т.е. одинаковое во всех направлениях трехмерное пространство, в котором происходят физические явления, никак не зависящее от него *анизотропное* (текущее от прошлого к будущему) абсолютное время и ряд других фундаментальных постулатов классической физики. Вершина классической теории, дифференциальные *уравнения Максвелла* для электромагнитных явлений, возникли как описание колебаний и волн «мирового эфира» – когда же физики отказались от понятия эфира, теория электромагнитных волн в вакууме (где вектор напряженности электрического поля **E** порождается псевдовектором напряженности магнитного поля **H** и наоборот) стала выглядеть несколько схоластически[*]. В квантовой теории понятия пространства и времени также не анализировались. Такие важнейшие признаки микромира, как фундаментальные характеристики элементарных частиц (электрона, протона, нейтрона), включая их собственные моменты количества движения (спины), фотоны как переносящие энергию «кванты света» и два вида квантовой статистики, были введены в квантовую физику на феноменологическом уровне как экспериментальные факты.

Еще до зарождения квантовой теории, в физике конца XIX века возникли новые представления о структуре пространства и времени, которые в конечном счете позволили дать ответ на все перечисленные вопросы. В научно-популярной литературе эту область обычно называют *теорией относительности Эйнштейна*. В действительности Альберт Эйнштейн был одним из основателей релятивистской физики наряду с Хендриком

[*] Мы не рассматриваем здесь классическую электродинамику, которая пока не проникла в междисциплинарную физику общества, отсылая читателя к учебникам по общей и теоретической физике.

Лоренцем, Анри Пуанкаре и Германом Минковским, однако его схема построения этой области вызвала наибольший отклик у современников.

Релятивистские представления отнюдь не сводятся к расхожей сентенции «всё в мире относительно». На их основе был построен новый образ физического явления в особой математической конструкции, объединяющей пространство и время. Такой формальный аппарат позволил создать непротиворечивое описание самых разных явлений от астрофизики до превращений атомных ядер и элементарных частиц. Классическая физика и нерелятивистская квантовая механика вошли в него как частные теории процессов, протекающих много медленнее скорости света. На эмпирическом уровне релятивистские идеи проникли и в междисциплинарную «физику общества». Это и служит обоснованием настоящего раздела, где, почти не затрагивая математики, мы постараемся обсудить содержание релятивистских постулатов.

3.5.1. Инерциальные системы и преобразования Лоренца

Фундаментом классической механики является *принцип относительности Галилея*, ставший затем первым законом Ньютона. В наиболее общем виде (см. раздел 1.4 в 1-й главе) он утверждает существование *инерциальных систем отсчета*, где одни и те же физические процессы протекают совершенно одинаково. Главным «кинематическим» признаком таких систем является прямолинейное равномерное движение. Переход из одной инерциальной системы в другую систему, которая перемещается в пространстве относительно первой с постоянной скоростью **v**, не изменяет физических законов. Соответственно, равномерное прямолинейное движение системы отсчета или, как частный случай, покой (**v** = 0) можно определить лишь относительно некоторой другой системы отсчета: абсолютных скоростей движения, как и абсолютного покоя, не существует. Скорость системы отсчета может иметь любую величину и любое направление, поэтому инерциальных систем бесконечно много. Никакие физические измерения не позволяют определить вектор скорости **v** «изнутри» системы.

Первоначальная формулировка «галилеевской» относительности включала идентичность *механических* явлений (в частности, выполнение 2-го и 3-го законов Ньютона) во всех инерциальных системах. Однако оптические и астрономические измерения второй половины XIX века показали более глубокую (*абсолютную*) идентичность инерциальных систем отсчета. В частности, скорость света в вакууме во всех инерциальных системах имеет одну и ту же величину $c \approx 2.998 \cdot 10^8$ м/с – и это *предельная* скорость любого материального процесса. Данный опытный факт находится в явном противоречии с классическим сложением скоростей, по которому скорость распространения света должна равняться $c + v$ в направлении движения системы и $c - v$ в противоположном направлении. Чтобы согласовать его с законами динамики, потребовалось отказаться от классических представлений о неизменном физическом пространстве и равномерно текущем абсолютном времени.

Представим, что в трехмерном пространстве заданы две системы декартовых координат: условно «неподвижная» ($x\ y\ z$) и система ($x'\ y'\ z'$), которая перемещается относительно первой системы вдоль направления Ox с постоянной скоростью v (Рис. 3.44).

Будем считать, что направления осей x и x' совпадают и две другие координаты в обеих системах одинаковы:

$$y = y', \quad z = z'.$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ точки начала координат (0, 0, 0) этих систем также совпадают. Если в этот момент в точке (0, 0, 0) произойдет вспышка света, он станет распространяться в положительном направлении осей x и x'. Сделаем важное предположение: масштабы расстояний и времени в первой (неподвижной) и второй (движущейся относительно нее) системах *могут различаться*. В неподвижной системе свет, распространяясь со скоростью c, в момент времени t_1 придет в точку с координатой x_1. Начало координат движущейся системы в этот момент переместится в точку $x_0 = vt_1$. Для наблюдателя в неподвижной системе

$$x_1 = ct_1$$
$$x_1 - x_0 = (c - v)t_1.$$

В движущейся системе отсчета точка x_0 имеет координату 0, а передний фронт света прошел путь x_1' за ее «собственное» время t_1'. Если скорость света в обеих системах одинакова,

(3.73) $$c = x_1/t_1 = x_1'/t_1',$$

где t_1' – время прихода светового импульса в точку x_1' движущейся системы. Очевидно, что более короткий, *с точки зрения наблюдателя в неподвижной системе*, отрезок $x_1' < x_1$ свет с неизменной скоростью c должен пройти за меньшее время $t_1' < t_1$. Но скорость света в обеих системах одинакова. Равенства (3.73) можно добиться двумя способами: увеличивая числитель или уменьшая знаменатель в отношении x_1'/t_1'. С точки зрения неподвижного наблюдателя увеличение x_1' означает, что в движущейся системе *сокращается масштаб расстояний* (то есть «метр» становится короче, так что отрезок $0'x_1'$ внутри движущейся системы относительно удлиняется). Второе означает, что для неподвижного наблюдателя в движущейся системе *замедляется время*. Ниже мы увидим, что в релятивистской механике действуют оба этих фактора.

Изменения масштабов расстояний и времени в движущихся инерциальных системах задают *преобразования Лоренца*. Обозначим точку x_0 на оси Ox в неподвижной системе просто буквой $x = vt$. В движущейся системе на оси (Ox') в момент t_1 она имеет координату $x' = 0$, то есть

$$x - vt_1 = 0, \quad x' = 0.$$

Поскольку координаты $x - vt$ в первой системе и x' во второй системе в момент $t = t_1$ (по часам первой системы) обращаются в 0 в одной точке пространства, можно предположить, что в произвольный момент t первой системы и соответствующий ему момент t' второй системы они останутся пропорциональными друг другу. Для наблюдателя во второй системе первая система движется с постоянной скоростью v в «отрицательном» направлении; сумма $x' + vt'$ и координата x первой системы будут связаны аналогично

(3.74) $\begin{cases} x' = \alpha(x - vt) \\ x = \alpha(x' + vt') \end{cases}$ где $\begin{cases} x = ct \\ x' = ct'. \end{cases}$

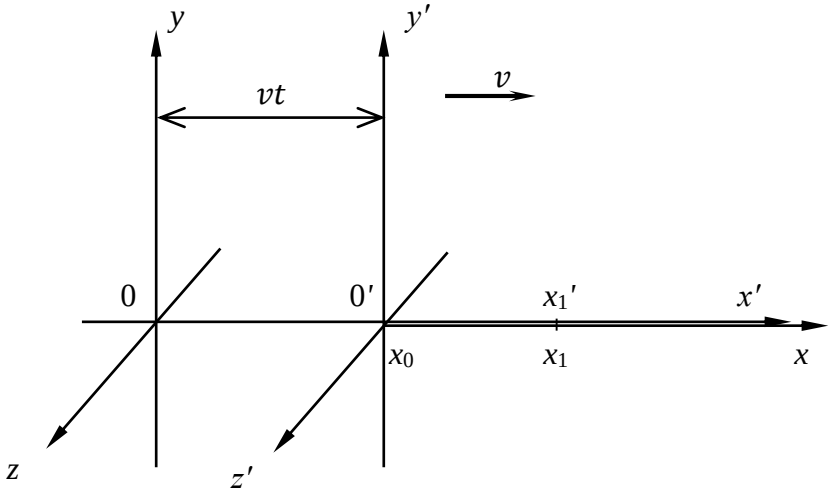


Рисунок 3.44. Система координат (*x' y' z'*) перемещается вдоль оси *x* системы координат (*x y z*) с постоянной скоростью *v*

Чтобы найти масштабный множитель α (без ограничения общности можно считать его положительным), перемножим левые и правые части в системе уравнений (3.74)

$$x \cdot x' = \alpha^2(x - vt)(x' + vt').$$

Выразим координаты *x* и *x′* через собственное время первой (*t*) и второй системы (*t′*) по соотношениям в правой половине формул (3.74):

$$c^2tt' = \alpha^2(ct - vt)(ct' + vt') = \alpha^2(c^2tt' - cvtt' + cvtt' - v^2tt') = \alpha^2(c^2 - v^2)tt',$$

то есть

(3.75) $$c^2 = \alpha^2(c^2 - v^2).$$

(На всякий случай напомним, что штрихами при символах *x* и *t* здесь снова обозначены не производные, а координата и время в движущейся «штрихованной» системе).

Из уравнения (3.75) легко найти положительные значения α:

(3.75 а) $$\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

(мы разделили числитель и знаменатель дроби на величину *c*, под знаком корня перешедшую в c^2). Отношение скорости системы к скорости света $\beta = v/c$ показывает, «насколько релятивистской» является инерциальная система. В случае $v << c$ (в масштабе скорости света система перемещается медленно) $\alpha \to 1$ и уравнения (3.74) переходят в обычную связь координат двух классических инерциальных систем, одна из которых перемещается относительно другой по направлению *x* с постоянной скоростью v:

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z.$$

Подставляя значение α, заданное формулой (3.75 а), в уравнения (3.76), получим

(3.76 а) $$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(3.76 б) $$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Формулы (3.76 а, б) – *преобразования Лоренца*. Они задают изменения масштаба расстояний и времени в инерциальной системе, которая движется относительно наблюдателя с постоянной скоростью v. Если, например, длина отрезка между точками x_1 и x_2 покоящейся системы равна $x_2 - x_1$, из (3.76 а) легко вывести длину $x_2' - x_1'$ этого же отрезка в движущейся системе *с точки зрения «неподвижного» наблюдателя*:

(3.77 а) $$x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)\sqrt{1-\beta^2}$$

(в движущейся инерциальной системе расстояния сокращаются) Аналогично из (3.76 б) можно вывести связь промежутка времени $\tau = t_2 - t_1$ в неподвижной и движущейся системах:

(3.77 б) $$\tau = t_2 - t_1 = (t_2' - t_1')\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \text{или} \qquad \tau' = t_2' - t_1' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(в движущейся системе время замедляется). Например, приборами на поверхности Земли регистрируются неустойчивые субатомные частицы (*мюоны*), которые возникают в верхних слоях атмосферы на высоте около 20 км под воздействием космического излучения. Время жизни мюонов ($2.2 \cdot 10^{-6}$ с), казалось бы, позволяет им пролететь даже со скоростью, близкой к скорости света ($3 \cdot 10^8$ м/с) лишь около 600 м. Ответ такой: при околосветовой скорости движения собственное время частиц «растягивается» по сравнению с временем неподвижного наблюдателя. Время жизни движущихся мюонов, в полном соответствии с формулой (3.77 б), увеличивается и они достигают земной поверхности на уровне моря.

Итак, из постоянства скорости света в инерциальных системах с помощью несложных алгебраических действий можно вывести преобразования Лоренца: фундаментальные соотношения релятивистской механики. При произвольном направлении относительного движения двух систем координаты y и z также преобразуются по аналогии с формулой (3.76 а). Из (3.76 а, б) можно видеть, что эти преобразования симметрично связывают значения координат и времени в неподвижной и движущейся системах. Обратно, из преобразований Лоренца следует постоянство скорости света во всех инерциальных системах: эти условия эквивалентны.

Преобразования (3.76 б) означают, что одно и то же событие (вспышка света, падение мяча на пол, распад атомного ядра) в «неподвижной» и движущейся относительно нее инерциальных системах отсчета будет зафиксировано в разные моменты времени – соответственно t_0 и t_0'. Из этого обстоятельства следует *относительность одновременности* событий, которая тоже зависит от скорости v относительного движения систем. Пусть, например, в разных точках x_1 и x_2 «неподвижной» системы в момент ее собственного времени t_0 синхронно вспыхивает свет. В движущейся системе, в

соответствии с формулой (3.76 б), эти вспышки произойдут в моменты t_1' и t_2', разделенные интервалом времени

$$t_1' - t_2' = \frac{t_0 - x_1 v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_0 - x_2 v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(x_2 - x_1) v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0.$$

Аналогично можно показать, что события, произошедшие в точке x_0 выбранной системы в моменты t_1 и t_2, в другой инерциальной системе произойдут в несовпадающих точках x_1' и x_2'.

Масса, энергия и импульс релятивистской частицы

Соотношения релятивистской динамики удобно выводить из 2-го закона Ньютона в форме

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

(выражение в скобках следует из определения скорости **v** = d**r**/dt и преобразований Лоренца). Если в начальный момент скорость материальной точки («частицы») **v** = 0, а ее *масса покоя* равна m_0, под действием постоянной силы F = const за время t частица приобретет импульс

(3.78) $$p = Ft = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Преобразуя выражение (3.78), можно найти скорость релятивистской частицы

(3.78 а) $$v = \frac{Ft/m}{\sqrt{1+(Ft/mc)^2}} = \frac{v_н}{\sqrt{1+v_н^2/c^2}}.$$

Числитель дроби в правой части формулы (3.78 а) соответствует «классической» скорости $v_н$ нерелятивистской частицы массы m, та же скорость входит в отношение $\beta = v_н/c$ под знаком корня в знаменателе. При неограниченном времени действия силы F эта скорость $v_н \to \infty$. Но для релятивистской частицы выражение в знаменателе в таком случае стремится к $\sqrt{v_н^2/c^2} = v_н/c$, и поэтому ее скорость $v \to c$. Таким образом, в релятивистской динамике скорость света – это максимальная скорость движения частиц и любых материальных объектов.

Выражение в правой части формулы (3.78) содержит *релятивистскую массу* частицы, перемещающейся со скоростью v:

(3.78 б) $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Энергия движущейся частицы при этом равна

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$ *формула Эйнштейна.*

Таким образом, массы и энергии релятивистских частиц прямо связаны. Для частицы с ненулевой массой покоя скорость света недостижима: при $v \to c$ неограниченно возрастает ее релятивистская масса (3.78 б). В современных ускорителях электронов их кинетическая энергия может в несколько тысяч раз превышать значение m_0c^2 для массы покоя. Такие электроны называются *ультрарелятивистскими*: их скорость очень близка к скорости света *c*, а инертная масса сравнима с массой покоя легких атомов (He, Li, B, C).

Фотоны, не имеющие массы покоя, перемещаются со скоростью света. Тем не менее, фотон всегда обладает релятивистским импульсом

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hc}{\lambda} \cdot \frac{1}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$$

(где h – старая постоянная Планка, λ – длина волны электромагнитного излучения). Перенос импульса потоком фотонов соответствует наличию у них ненулевой релятивистской массы. Им обусловлены световое давление, выбивание электронов из облучаемых атомов (*фотоэффект*) и другие проявления корпускулярной природы света, рассматриваемые в курсах общей физики.

Возводя в квадрат левую и правую части формулы Эйнштейна и выполняя алгебраические преобразования, получим:

$$E^2 - E^2v^2/c^2 = {m_0}^2c^4.$$

С другой стороны, из определения релятивистского импульса (3.78) следует

$$p = {E}/{c^2}\, v, \text{ то есть } p^2 = {E^2v^2}/{c^4}, \qquad \text{так что}$$

(3.79) $$ {m_0}^2c^4 = E^2 - (pc)^2.$$

Формулу (3.79) называют *основным кинематическим тождеством* релятивистской механики. Она связывает энергию и импульс релятивистской частицы, которые по отдельности могут принимать любые значения, через ее неизменную (*инвариантную*) характеристику: массу покоя.

3.5.2. Геометрия пространства-времени

В нерелятивистском трехмерном пространстве длину l отрезка, соединяющего заданные точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), можно найти как длину вектора (см. раздел 3.1 этой главы) из соотношения

(3.80) $$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Положение начала координат *O* и направления исходящих из него взаимно перпендикулярных осей (*Ox*, *Oy*, *Oz*) с заданными на них единичными отрезками (*декартову систему координат*) можно выбрать бесконечным множеством способов. Эти системы координат связаны *ортогональными преобразованиями*, матрицы которых удовлетворяют условию det C = ±1 (см. раздел 3.1). Во всех таких системах длина отрезка (или вектора), определяемая соотношением (3.80), останется неизменной (то есть

инвариантной к выбору системы координат), хотя сами координаты точек (x, y, z) имеют в них разные значения.

Другими словами, переход от одной системы декартовых координат, принятых в классической физике, к другой такой системе не изменяет расстояний между точками трехмерного пространства или плоскости (см. рис. 3.8). Их системы отсчета могут различаться сдвигом начала координат и поворотом осей, но не содержат изменений масштаба (сжатий либо растяжений вдоль выбранных направлений) и других деформаций пространства. Промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, характеризующий динамику процесса, в классической физике тоже инвариантен к выбору системы координат: шкала времени абсолютна и никак не связана с физическим трехмерным пространством.

С другой стороны, в преобразования Лоренца (3.76) и в формулу основного кинематического тождества (3.79) входят *разности* однородных физических величин: координаты x и пройденного пути $v_x t$, квадратов скорости света c^2 и релятивистской скорости движения v^2, квадратов энергии E и произведения импульса на скорость света pc. Знаки величин, связанных с пространственными координатами (x, y, z), и величин, связанных со временем t, в таких выражениях противоположны. Кроме того, релятивистские эффекты сокращения расстояний и замедления времени (3.77) – это как раз изменения масштаба по соответствующим переменным.

Таким образом, расстояния между точками пространства (3.77 а), а также интервалы времени (3.77 б) в релятивистской физике *не инвариантны*. Привычное нам сочетание «абсолютного» трехмерного пространства с декартовыми координатами и не зависящего от него «абсолютного» времени не отвечает перечисленным выше закономерностям. Релятивистский мир имеет другую геометрию.

Тем не менее, в релятивистской механике тоже существуют неизменные величины, напоминающие инвариантность расстояний в пространстве (3.80). Пусть из точки №1 в точку №2 трехмерного пространства за некоторое конечное время $t_2 - t_1$ доходит световой сигнал. Из-за постоянства скорости света в двух равноправных инерциальных системах («штрихованной» и «нештрихованной») расстояния между этими точками, заданные по аналогии с (3.80), и время прохождения сигнала связаны соотношениями

(3.81)
$$\begin{aligned} &[c\,(t_2 - t_1)]^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 = 0 \\ &[c\,(t_2' - t_1')]^2 - (x_1' - x_2')^2 - (y_1' - y_2)^2 - (z_1' - z_2')^2 = 0. \end{aligned}$$

Будем считать испускание светового сигнала в точке №1 и его прием в точке №2 частными случаями *событий*, происходящих в точке пространства (x, y, z) в момент времени t. Таким образом, каждое событие задается четырьмя параметрами (x, y, z, t), которые можно считать «координатами» в некотором четырехмерном пространстве, называемом *пространство-время*. Два произвольных события в таком пространстве разделены *пространственно-временным интервалом*

(3.81 а) $$[\,\Delta s^2 = -(ct)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \text{const},$$

длина которого Δs инвариантна к преобразованиям Лоренца (3.78), то есть одинакова в любых инерциальных системах. Соотношения (3.80) являются частными случаями (3.81 а) при $\Delta s^2 = 0$.

Фундаментальный постулат (3.81 а) позволяет построить логически непротиворечивую релятивистскую физику; все прочие соотношения теории относительности из него выводятся. Обратим внимание, что для произвольной пары событий квадрат длины интервала (3.81 а) может быть не только положительным или нулевым, но и *отрицательным*. В случае $\Delta s^2 < 0$ длина интервала Δs становится чисто мнимой величиной (см. раздел 3.1 в этой главе). Это показывает, что релятивистское пространство-время не похоже на встречавшиеся нам ранее (см. разделы 3.1 и 3.4) абстрактные многомерные пространства. В частности, это пространство нелинейно. Состояниям релятивистских систем соответствуют в нем четырехкомпонентные векторы, или *4-векторы*. Одним из них является вектор *энергии-импульса* $(E, p_x c, p_y c, p_z c)$, модуль которого одинаков во всех инерциальных системах (см. формулу (3.79)). Таким образом, в релятивистской физике закон сохранения энергии заменяется законом сохранения энергии-импульса.

Евклидовы и псевдоевклидовы пространства

Плоскость и трехмерное пространство с прямоугольной декартовой системой координат – частные примеры *евклидовых пространств*. В таких пространствах для любых двух векторов, задаваемых парой или тройкой чисел (координат), определено скалярное произведение, то есть число (см. раздел 3.1)

$$\mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \qquad \text{(в трехмерном пространстве)},$$

которое не изменяется при ортогональных преобразованиях координат. Два вектора, скалярное произведение которых равно нулю, *ортогональны*. Длина вектора **r** = (*x, y,...*) задается формулой, полностью аналогичной (3.80), например

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{(на плоскости)}$$

(если вектор **r** выходит из начала координат, в формуле (3.80) $x_1 = 0$, $x_2 = x$ и т.д.). Из $r^2 = 0$ однозначно следует $x = y = 0$ (*нулевой вектор*). В этом случае говорят, что в пространстве задана *евклидова метрика.* Евклидово *n*-мерное пространство в математике обозначается E(*n*) или E^n.

Понятие евклидовых пространств в XIX веке было расширено на пространства с *псевдоевклидовой метрикой*. В таких пространствах скалярные произведения двух векторов включают как суммы, так и разности произведений их координат. В частности, на псевдоевклидовой плоскости можно задать такую систему ортогональных координат (x_0, x_1), что квадрат длины вектора **r** = (x_0, x_1)

$$r^2 = -{x_0}^2 + {x_1}^2.$$

Векторы на псевдоевклидовой плоскости могут иметь вещественную (положительную) длину при ${x_0}^2 < {x_1}^2$ и *чисто мнимую* длину при ${x_0}^2 > {x_1}^2$. В случае ${x_0}^2 = {x_1}^2$ векторы нулевой длины ($r^2 = 0$) называются *изотропными*. Для *n*-мерного псевдоевклидова пространства

число l координат, входящих в скалярные произведения со знаком минус, называется *индексом*, а число оставшихся координат $s = n - l$ – *сигнатурой*; такое пространство обозначают *E(l, s)*. В пространствах индекса 1 «особую» координату обычно обозначают подстрочным либо надстрочным индексом «0» (т. е. x_0).

Четырехмерное пространство событий

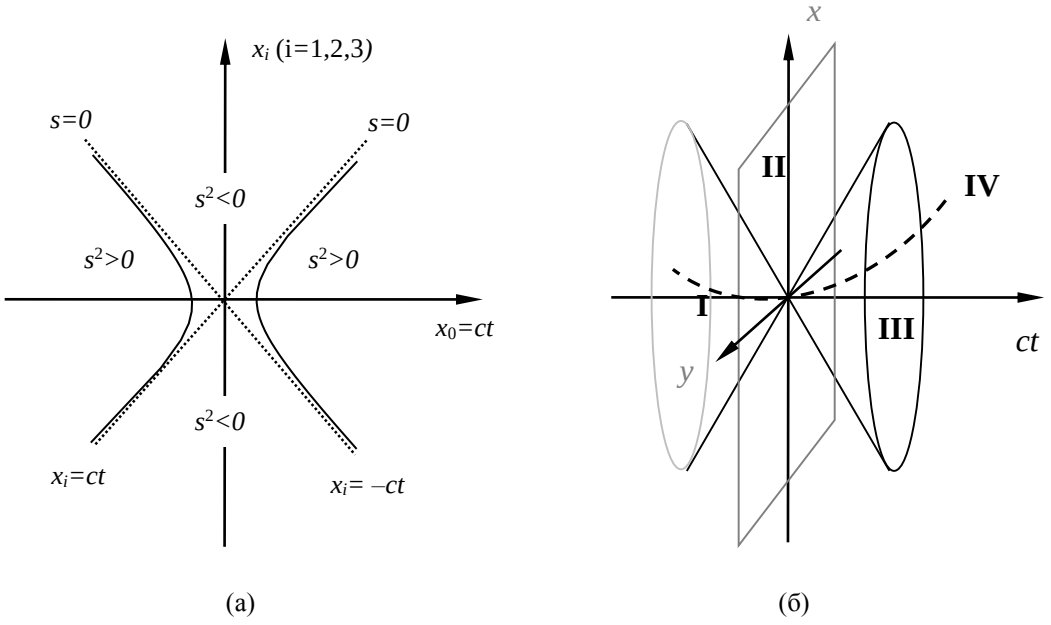
Время t и пространственные координаты (x, y, z) в формулах (3.83, 3.83 а) можно перевести в координаты четырехмерного псевдоевклидова пространства

$$x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z.$$

Это четырехмерное *пространство событий* также называется *пространством Минковского* M(1,3). Все его точки соответствуют наборам координат трехмерного пространства в некоторые моменты времени. «Траектория» в пространстве M(1,3), отвечающая эволюции системы (даже неподвижной), называется *мировой линией*. Бесконечно малому изменению состояния системы отвечает *дифференциальный интервал*

$$ds^2 = -dx_0^{\,2} + dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2}.$$

Оттого, что скорость света c является максимально возможной скоростью в материальном мире, пространство событий разбивается на области. Их разделяет *световой конус*, который образуют изотропные (т.е. по модулю равные 0) векторы с условием $\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2}} = r = \pm ct$. На рис. 3.45 а показано разбиение пространства M(1,1) для случая одномерного движения (см. рис. 3.44). Границы областей задают линии $x_i = \pm ct$, которым соответствует перемещение фотонов со скоростью света. В четырехмерном случае это гиперповерхности в пространстве M(1,3).



(а) (б)

Рисунок 3.45. Световой конус в пространстве Минковского M(1,3) (схема): (а) проекция на плоскость (x_0, x_i), (б) области пространства-времени, схема: I – абсолютное прошлое, II – настоящее, III – абсолютное будущее, IV – мировая линия

Во внутренней части области, примыкающей к оси $x_0 = ct$, два события разделены действительным численным интервалом $\Delta s_{12}^2 > 0$. Эта область называется *времениподобной*. Любую пару ее несовпадающих точек в произвольной инерциальной системе разделяет ненулевой интервал времени Δt_{12} – хотя среди бесконечного множества систем можно выбрать такую, в которой оба события происходят в одной точке трехмерного пространства. Во времениподобной области возможна причинно-следственная связь между двумя событиями, так как одно из них во всех системах отсчета происходит раньше другого. В *пространственно-подобной* области $\Delta s_{12}^2 < 0$, т.е. интервал Δs_{12} имеет мнимые значения. Здесь невозможно указать, какое из двух событий, разделенных интервалом Δs_{12}, происходит раньше: в частности, имеется инерциальная система, где они происходят одновременно. Переходу из одной инерциальной системы в другую, который задают преобразования Лоренца (3.76), на рис. 3.45 а соответствуют гиперболы

$$s^2 = -(ct)^2 + x_i^2 = \text{const}$$

(где i = 1, 2, 3 – пространственные координаты).

Области четырехмерного пространства-времени M(1,3) условно показаны на рис. 3.45 б, где изображены две из трех пространственных координат. Времениподобная область внутри светового конуса состоит из *абсолютного прошлого* ($t < 0$, обозначенного **I** на рис. 3.45 б) и *абсолютного будущего* ($t > 0$, **III**). Их разделяет гиперплоскость *настоящего* («наше» трехмерное пространство при $t = 0$; на рисунке это плоскость **II**). Все мировые линии **IV**, задающие эволюцию релятивистских систем, лежат внутри светового конуса. Его поверхности соответствуют «светоподобные» нулевые векторы – например, состояния фотонов, распространяющихся со скоростью c в трехмерном пространстве. За пределами светового конуса находится пространственно-подобная четырехмерная область, в которой нет причинно-следственных связей. Можно сказать, что световой конус в пространстве-времени разграничивает область принципиально возможных состояний или событий, познаваемых методами естественных наук, и других гипотетических состояний, для которых эти методы непригодны.

3.5.3. Достижения релятивистской физики

Релятивистская механика модифицировала аппарат теоретической физики в описаниях систем, где скорости процессов приближаются к скорости света c или составляют заметную ее долю (от ~1% и выше). Одним из ее первых фундаментальных результатов стало объяснение магнитных явлений как следствия существования электрических полей и неразрывность свойств единого электромагнитного поля. В течение XX-XXI веков релятивистская теория стала основой описания всех наиболее общих свойств физического мира.

Формализм пространства Минковского и преобразований Лоренца, впервые систематически развитый в работах Пуанкаре, составил затем основу *специальной теории относительности* Эйнштейна. Несмотря на название, эти представления лежат в основе большинства общих моделей современной релятивистской физики. Наоборот, *общая теория относительности*, предложенная А. Эйнштейном в 1915 г., посвящена более

частным проблемам «искривления» пространства Минковского под воздействием гравитационных масс (рис. 3.46). В ней доказывается, что инертная и гравитационная массы тел имеют единую природу. Предсказания общей теории относительности подтверждаются экспериментальными данными (отклонение света и снижение его частоты в сильных гравитационных полях; гравитационные волны, впервые обнаруженные международными экспериментами в 2015 г., и другие результаты астрономических исследований). На релятивистском математическом аппарате основаны астрофизика и современная *космология*: физическая дисциплина, изучающая строение, свойства и эволюцию Вселенной.

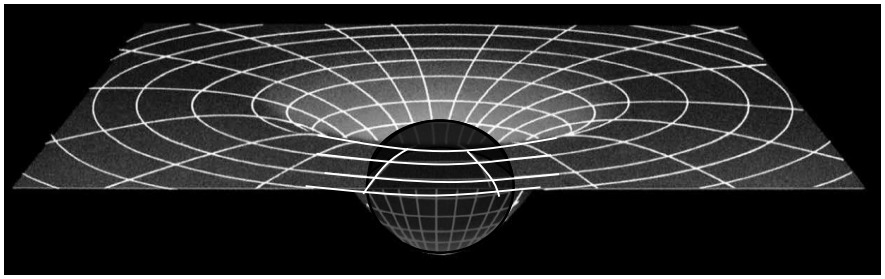


Рисунок 3.46. Метафора искривления пространства-времени массами планет и звезд (рисунок из Интернет)

Соотношения релятивистской физики принципиально изменили картину *микромира* на уровне взаимодействий и превращений субатомных частиц. Поправки на малые релятивистские эффекты в квантовой механике позволяют рассчитать спектры атомов и молекул, а также выделение и поглощение энергии при химических реакциях, в количественном согласии с результатами измерений. Но главным совместным достижением релятивистского и квантового формализма является *квантовая теория поля*. В ее рамках объясняются фундаментальные свойства микромира: происхождение заряда и спина квантовых частиц, два вида квантовой статистики (фермионы и бозоны), природа притяжения нейтронов и протонов в атомном ядре, фотоны как кванты электромагнитного взаимодействия и многое другое.

В междисциплинарных исследованиях социальных систем отмечаются такие эмпирические аналогии с соотношениями релятивистской физики, как сокращение воспринимаемых размеров объекта движущимися пешеходами и водителями автомашин, «искривление» пространства взаимодействий узлов в компьютерных сетях, предельные скорости распространения информации в сознании и в социуме. Математические модели этих явлений в настоящее время развиваются на основе релятивистского формального аппарата. Эти вопросы, как и квантовоподобные модели экономических и социальных процессов, будут рассмотрены во второй части книги.

Рекомендуемая литература

1. И.Н. Борковская, О.Н. Пыжкова, *Уравнения математической физики*, Минск: 2010.
2. С.В. Данилов, *Классическая и релятивистская механика: конспект лекций*. Омск : Изд-во ОмГТУ, 2008.

3. А.Д. Гладун, *Элементы релятивистской механики: учебно-методическое пособие по курсу Общая физика*. 2-е изд. М.: МФТИ, 2012.
4. К.А. Казаков, *Введение в теоретическую и квантовую механику*. – М.: Издательство МГУ, 2008.
5. М.Ю. Романовский, Ю.М. Романовский, *Математические начала эконофизики.* М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2019.
6. П.К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, главы 1 (тензоры), 3 (евклидовы и псевдоевклидовы пространства) 4 (математические основы специальной теории относительности), М.: Наука, 1967.
7. С.Э. Фриш, А.В. Тиморева, *Курс общей физики*, СПб.: Лань, 2017. т. III.
8. Л.И. Головина, *Линейная алгебра и некоторые ее приложения*, изд.5-е, М.: Наука, 1985.

Глава 4. Сложные системы

Зависимость состояний системы от микросостояний и структуры. Нелинейные системы, самоорганизация. Автоколебания, струна и смычок, маятник Фроуда. Модель Лотки-Вольтерра. Нелинейные уравнения химической кинетики. Брюсселятор, реакция Белоусова-Жаботинского, «мексиканская волна».

Качественное исследование решений дифференциальных уравнений. Уравнения Лоренца, странный аттрактор, динамический хаос. Бильярды Синая и люки Кирквуда.

Стохастические системы, броуновское движение. Уравнения Ланжевена, Фоккера-Планка, Фишера. Аномальная диффузия, «полет Леви». Стохастический резонанс.

Прогрессии, ряд Фибоначчи. Дискретные модели и разностные уравнения. Логистическое отображение, лестница Ламерея. Бифуркации, константа Фейгенбаума, детерминированный хаос.

Введение

О физических свойствах мира мы впервые узнаем в школе (глава 1), затем расширяем и уточняем свои представления в институтских курсах (главы 2 и 3). С позиций естествоиспытателя закономерности Природы (1) существуют объективно, независимо от нашего восприятия и (2) основаны на причинно-следственных связях, а потому поддаются изучению. Оба постулата подтверждаются огромным массивом технических, биологических, медицинских и социальных достижений, сопровождающих общественный прогресс. А поскольку основы всех технических и большинства иных открытий человечества, в конечном счете, сводятся к физике и математике – логично предположить, что любые науки, включая самые гуманитарные, в своем развитии стремятся, как к пределу, именно к теоретической и экспериментальной физике, постепенно изменяя содержание физики как «мета-дисциплины».

Предыдущий абзац способен возмутить коллег-гуманитариев, которые резонно укажут на неисчисляемость человеческой личности и принципиальную невозможность перевести слово «дискурс» в математические термины. Тем не менее, во второй части этой книги мы рассмотрим уже существующие методы физического описания экономики и социума. Подходы к формализации сознания, успешно развиваемые с середины XIX века, будут обсуждаться в третьей части. Здесь мы приведем лишь один аргумент в пользу адекватности «физики общества»: физические теории «неживых» систем непрерывно развиваются, делая возможным описание все более сложных объектов. Подобно другим эмоциональным характеристикам явлений природы (косность, сродство, превращение…), эпитет «сложный» в физике XX века стал официальным термином. В этой главе мы рассмотрим основные положения и идеи теории *сложных систем*, ставшей в последние десятилетия одним из главных инструментов междисциплинарной физики в биологии, экономике и науках о человеке.

Однозначность и точность предсказаний классической физики, с точки зрения математика, следует из использования непрерывных функций и дифференциальных

уравнений. При заданных краевых условиях (см. раздел 3.2) через любую точку фазового пространства (**x**, $d\mathbf{x}/dt$) (где **x** = (x_1, x_2, ... x_n) – обобщенные координаты системы) проходит только одна интегральная кривая – то есть классические траектории в фазовом пространстве не пересекаются. В этом случае внешние условия однозначно определяют динамику системы в интервале будущего времени Δt – и этот интервал тем длиннее, чем точнее уравнение соответствует реальности и чем лучше определены условия. Вера в предсказуемость явлений природы и возможность ими управлять, воздействуя на некоторые *управляющие параметры*, от классической физики распространилась на всё естествознание и инженерные науки. В конечном счете на ней основаны идеи неограниченного преобразования природы человеком (по-английски *rebuilding Nature*) и *линейного прогресса*, ставшие знаменем цивилизации.

В XX веке квантовая и релятивистская теории изменили физическую картину мира, оспаривая однозначность и полную предсказуемость природных явлений. Правда, области их действия (внутриатомные процессы, околосветовые скорости, колоссальные гравитационные поля) вначале казались далекими от обычной жизни, где, по умолчанию, царила классическая физика. Но в это же время в исследованиях фазовых переходов, в физике магнитных материалов, в гидродинамике, а затем и в механике были найдены и исследованы многочисленные процессы, не имеющие предсказуемых классических «траекторий». Эти примеры многократно умножились новыми приложениями физики в биологии, экономике, политологии и других междисциплинарных областях. Во второй половине XX века «непослушные» явления были объединены под названием *физики сложных систем*. Менее распространенным и несколько устаревшим названием этой области остается *синергетика*.

4.1. «Аномальные» физические системы

Вопрос о принципиальном соответствии сложных систем квантовым и релятивистским представлениям (или о возможности модифицировать эти представления до соответствия сложным системам) пока остается открытым. На феноменологическом уровне «сложными» называют несколько видов явлений природы[*], которые мы обсудим в этой главе:

1. Системы и явления с нелинейной связью параметров, кратко – *нелинейные системы*.
2. Системы *мезоскопического* масштаба (например, броуновские частицы), которые не подчиняются закономерностям статистической физики для макроскопических явлений.
3. Системы существенно *дискретного* строения и дискретной динамики, где процессы протекают «пошагово».

[*] Признаками сложных систем в физике (не обязательно проявляющимися вместе) считаются нелинейность, диссипация энергии и масштабная инвариантность (см. разд. 2.5 в гл. 2). Мы рассмотрим эти системы на описательном уровне с некоторыми необходимыми формулами.

Во многих случаях признаками «сложности» (1) – (3) может обладать один и тот же физический объект. Поскольку в мезоскопических системах флуктуации параметров в случайных процессах сравнимы со значениями самих параметров, эти процессы также называют *стохастическими*. В исследованиях «дискретной» динамики велика доля расчетного моделирования (см. раздел 3.4 предыдущей главы). Однако для них существуют и материальные прототипы: компьютерные и другие сети, биржа, осыпание кучи песка и др.

Сильные проявления межчастичных и межагентных взаимодействий

Перечень «нестандартных» физических объектов мы начнем с нескольких частных примеров, которые не обязательно обладают признаками сложных систем, но часто обсуждаются вместе с ними. Это системы (в том числе макроскопические), на интегральные параметры которых существенно влияют межчастичные взаимодействия. Так, «аномальным» физическим объектом нередко называют воду H_2O, плотность которой в кристаллическом состоянии 0.92 г/см^3, в противоположность большинству твердых веществ, существенно меньше плотности жидкой воды 1.00 г/см^3 при 4 ^oC (лед плавает на поверхности воды). Аномалия объясняется строением льда, в котором молекулы H_2O соединены прочными водородными связями лишь с четырьмя соседними молекулами (рис. 4.1) – тогда как, например, в большинстве твердых металлов и сплавов каждый атом окружен 12 или 14 соседними атомами. Плавление металла сопровождается уменьшением среднего числа ближайших атомов на 10-15% с соответствующим уменьшением плотности жидкости, а в жидкой воде молекулы H_2O имеют в среднем 4.4 – 4.5 соседей. Аналогично увеличивается плотность при плавлении кристаллических кремния и германия (это не металлы!), где каждый атом в «алмазоподобном» каркасе тоже образует ковалентные связями с четырьмя соседними атомами.

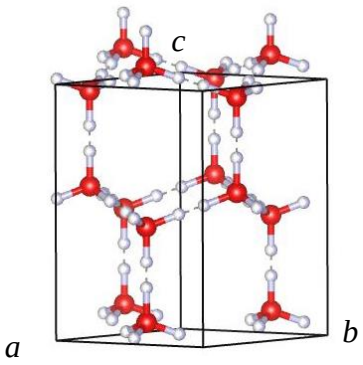


Рисунок 4.1. Кристаллическая структура гексагонального водного льда

В приведенных примерах «аномалией» называют не нарушение законов классической физики, а физически обоснованные отклонения от опытного факта «плотность жидкости обычно ниже, чем плотность соответствующего твердого тела». В естествознании можно найти немало подобных аномалий. Так, обычно тела при нагревании расширяются, но кристалл кальцита $CaCO_3$, расширяясь при нагревании

вдоль одной кристаллографической оси, сжимается в перпендикулярных направлениях (рис. 4.2). Металлическое олово (β-Sn) при охлаждении ниже 13 °C медленно переходит в другую кристаллическую форму (α-Sn) не с обычным увеличением, а с *уменьшением* плотности, отчего изделия из олова рассыпаются в порошок. (По мнению некоторых французских историков, именно эта *оловянная чума* погубила армию Наполеона зимой 1812 г. в России, уничтожив ее оловянные пуговицы – правда, уже после Березины). Кристаллическая сера, построенная из циклических молекул S_8, плавится при 113 °C, но подвижный желтый расплав выше 160 °C густеет и темнеет, переходя в вязкий коричневый полимер, а выше 300 °C опять превращается в подвижную и уже черную жидкость, состоящую из молекул S_2. Во всех этих примерах аномалией считается нарушение эмпирических «общепринятых законов» – то есть речь идет скорее о психологии научного сообщества. Причиной аномалий является сильное проявление межчастичных взаимодействий: образование, разрыв и перераспределение связей между атомами в образце, чего не наблюдается в большинстве фазовых переходов.

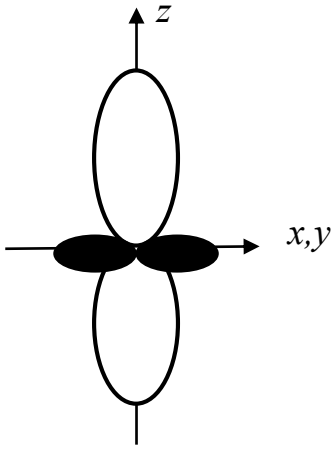


Рисунок 4.2. Указательная поверхность тензора термического расширения кальцита (см. Приложение П6). Белые «лепестки» соответствуют направлениям, по которым кристалл расширяется при нагревании, черные – направлениям его сжатия

Стремление называть аномалией отклонения от общепринятых представлений переносится с физики в общественные дисциплины. Так, основой неоклассических экономических теорий является модель *homo economicus*: индивидуума либо коллективного агента, стремящегося исключительно к повышению своего благосостояния. Этот тезис оспаривался, в частности, Джоном Гэлбрейтом, одним из крупнейших американских экономистов XX века. В книге «Новое индустриальное общество» (1967 г.) Гэлбрейт отмечал, что деятельностью молочной фермы в штате Висконсин и компании «Дженерал Электрик» управляют разные экономические законы. Важнейшими для крупных фирм являются не максимум прибыли, а стабильность и планирование – в классической микроэкономике капитализма аномальные понятия. В 1998 г. премию памяти Альфреда Нобеля по экономическим наукам получил индийский экономист Амартия Сен, который указывал в своих работах на важную роль национальных традиций в экономике. (Западная научная общественность окрестила это направление «экономикой нищеты»). Интересно, что Лев Толстой, которого

справедливо считают одним из предшественников «физики общества» (см. Введение), в романе «Анна Каренина» вложил Константину Левину такие мысли:

«В политико-экономических книгах… он нашел выведенные из положения европейского хозяйства законы; но он никак не видел, почему эти законы… должны быть общие».

(Как и Амартия Сен веком позже, Левин полагал, что экономические отношения в России должны учитывать, в нынешних терминах, менталитет крестьян). Примеры «аномального» поведения населения ряда стран мира в периоды кризисов показывают влияние традиционного общества на экономические взаимоотношения, восстановлению которых способствуют прочные межчеловеческие связи – в рамках неоклассических теорий архаические и иррациональные.

4.2. Нелинейные системы

Солитоны

Перечисленные выше особенности физических систем вполне объясняются на основе «школьных» представлений. Однако в нелинейных системах, где одной из простейших моделей служит логистическое уравнение (см. раздел 2.1 в главе 2), возникают такие явления, которых не существует в «линейной» классической физике. Так, плоские упругие волны в гармоническом приближении без учета вязкого трения, то есть перехода механической энергии в тепловую, распространяются неограниченно далеко. С учетом трения, линейно пропорционального скорости, их интенсивность затухает с увеличением пройденного пути x по экспоненциальному закону (см. разд. 2.1 в гл. 2)

$$I = I_0 e^{-\alpha x};$$

коэффициент затухания $\alpha \sim \eta / v^3$ пропорционален кинематической вязкости и обратно пропорционален кубу скорости звука в среде. Нелинейная же гидродинамическая среда даже при наличии трения в определенных условиях порождает *солитоны*: «уединенные волны», способные перемещаться на большие расстояния (см. формулу (3.54 а) и рис. 3.27 в предыдущей главе).

Первое документированное наблюдение солитона в речном канале Глазго-Эдинбург (при перевозке грузов барками на конной тяге) оставил в 1834 г. английский морской инженер Джон Скотт Рассел:

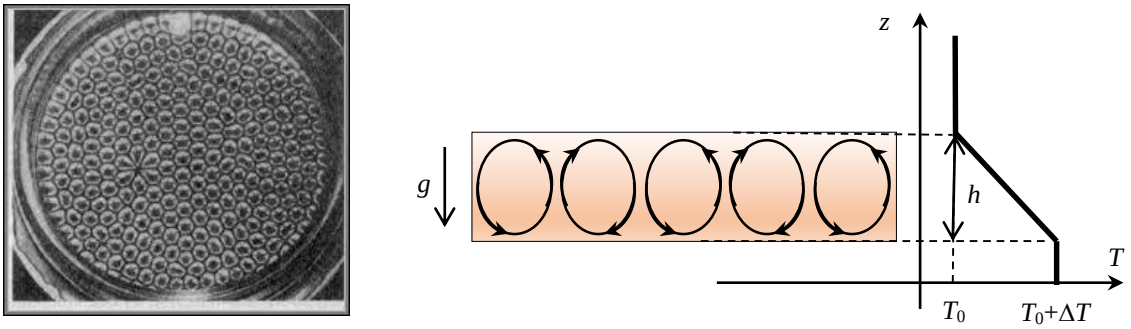
«Я наблюдал за движением лодки, которую быстро тащила по узкому каналу пара лошадей. Внезапно лодка остановилась. Но не остановилась масса воды в канале, которую лодка привела в движение: она неистово билась о нос лодки… Вдруг вода оставила лодку позади и покатилась вперед с большой скоростью, приняв форму большого одиночного поднятия – круглого, ровного, правильного водяного вала, который продолжал свое движение в канале, не изменяя сколь-нибудь заметно свою форму и скорость. Я бросился за ней в погоню на лошади и догнал ее по-прежнему движущейся

со скоростью 8 или 9 миль в час с сохранением своей первоначальной формы около 30 футов в длину и от фута до полутора в высоту. Её высота постепенно уменьшалась, и через милю или две я потерял ее среди ряби в канале»[*].

Доклад Рассела в Британской ассоциации развития науки, сделанный в 1844 г. (к тому времени его автор научился искусственно создавать уединенные волны), не привлек внимания ученых: законы классической гидродинамики не предполагали подобных явлений. Лишь разработанная в начале XX века *теория мелкой воды* (см. разд. 3.2.5 в гл. 3) предоставила их объяснение на основе нелинейных дифференциальных уравнений. К родственным явлениям относятся *бор* (приливная волна высотой до нескольких метров, распространяющаяся вверх по течению реки от ее устья), ударная волна при разрушении плотины и катастрофические волны *цунами*, которые возникают в океане при землетрясениях. Со второй половины XX века солитоны используют для передачи информации на большие расстояния по оптоволоконным кабелям в нелинейной оптической среде.

Ячейки Бенара

Одно из проявлений нелинейной связи между параметрами системы – спонтанное образование упорядоченных структур при поступлении энергии извне. Так, при равномерном нагревании тонкого слоя вязкой жидкости (например, растительного масла на большой сковороде с гладким дном) в определенных условиях образуются конвективные «валы» либо «соты» из ячеек шестиугольной формы (рис. 4.3 а). В центре каждой ячейки нагретая жидкость, имея меньшую плотность, поднимается от дна емкости к поверхности, а охлажденный воздухом более тяжелый слой опускается ко дну по внешней границе ячейки. Расположение и форма ячеек отвечает плотнейшей гексагональной упаковке[**]; их размеры определяются параметрами системы.



(а) (б)

Рисунок 4.3. (а) Конвективные ячейки Бенара, вид сверху (фотография взята из Интернет), (б) направления конвекции в валах и ячейках

[*] J. Scott Russel, *Report on waves*, 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844 (https://archive.org/details/reportonwavesma00russgoog).

[**] Шестиугольная форма ячеек в пчелиных сотах, хаотическим образом создаваемых насекомыми из воска, не свидетельствует об инженерных талантах пчёл: она соответствует плотнейшей упаковке шаров на плоскости, весьма распространенной в неживой природе.

Первоначально нагрев приводит к стационарному переносу теплоты от дна к поверхности без движения жидкости (конвекции); «тормозящим» фактором служит вязкость. Спонтанный переход к движению, характерный для нелинейных систем, называется *неустойчивостью Рэлея-Бенара*. Критерием возникновения конвективной структуры является *число Рэлея Ra* – подобно числу Рейнольдса *Re* (см. раздел 3.4 в гл. 3) являющееся безразмерным гидродинамическим параметром системы:

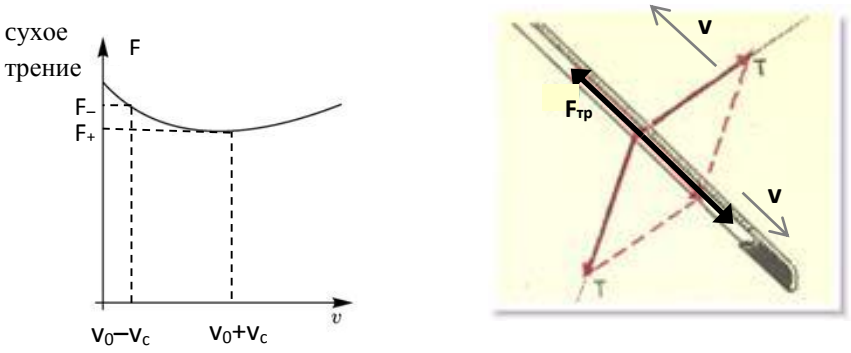
$$Ra = g\frac{\beta}{\eta\alpha}\Delta T h^3, \tag{4.1}$$

где g = 9.8 м/с^2 – ускорение свободного падения, α – *температуропроводность* (отношение теплопроводности к произведению плотности на теплоемкость) β – коэффициент теплового расширения, η – кинематическая вязкость, ΔT – перепад температур между нижней и верхней поверхностями, h – высота слоя жидкости (см. рис. 4.3 б). Выше пороговой величины Ra^* ~ 1000 (конкретное значение определяется геометрией системы и скоростью нагрева), в зависимости от условий опыта, возникает конвекционная структура из ячеек или валов.

Так как движущей силой конвекции является перенос и рассеяние тепла, поступающего в нижний слой жидкости, все подобные системы называют *диссипативными*. Образование ячеек Бенара – пример *самоорганизации диссипативных систем*. К этому широчайшему классу явлений можно отнести возникновение и развитие человеческой цивилизации на Земле под воздействием потока солнечной энергии.

Другие нелинейные системы

Перечисленные *неклассические* явления обусловлены нелинейностью взаимодействий в жидкой среде (см. уравнение Навье-Стокса (3.54) в предыдущей главе) и поэтому называются *нелинейными эффектами*. В повседневной жизни мы наблюдаем огромное число таких эффектов, в том числе в знакомых нам физических системах: «центробежные силы» при движении по искривленной траектории, фазовые переходы, химические реакции и многое другое. Известный со школы гистерезис намагниченности также возникает в ферромагнетиках благодаря нелинейной зависимости $M(H)$ (глава 3, рис. 3.41 б).



(а) (б)

Рисунок 4.4. Автоколебания струны при равномерном движении смычка: (а) зависимость силы сухого трения от скорости, (б) струна и смычок

Распространенным механическим нелинейным эффектом с многочисленными аналогами за пределами физики являются *автоколебания*: возникновение колебательного движения при поступлении энергии в систему извне без периодической вынуждающей силы. В частности, звук струны при движении смычка (возбуждение стоячих волн, разд. 3.2 в гл. 3) объясняется нелинейной зависимостью силы сухого трения смычка о струну от скорости их относительного движения. Из-за уменьшения трения с ростом скорости (рис. 4.4 а) работа сил трения при встречном движении смычка и струны меньше, чем на противоположной части цикла колебаний, где струна получает дополнительную кинетическую энергию (рис. 4.4 б). На том же принципе основано действие *маятника Фроуда*: физического маятника (см. рис. 2.9 в главе 2), подвешенного на вал, который вращается с небольшим трением (рис. 4.5). В этом случае при вращении «вдогонку» колебательному циклу сцепление вала с телом маятника также выше и маятник получает от вала кинетическую энергию. Автоколебания можно считать одним из примеров самоорганизации, свойственной сложным диссипативным системам: в данном случае это упорядочение динамики во времени.

Рисунок 4.5. Маятник Фроуда и величины вынуждающей силы трения с валом $F_{тр}^{(-)} > F_{тр}^{(+)}$, приложенной к его центру масс, в разных фазах качания

4.2.1. Модель Лотки-Вольтерра

Особенно часто нелинейные зависимости встречаются в химических и биологических системах. В 1924 г. итальянский математик Вито Вольтеррá, моделируя динамику численности взаимосвязанных видов «хищник-жертва», в возрасте 63 лет стал основоположником математической экологии. Близкую математическую модель динамики взаимосвязанных химических реакций предложил в 1923 г. американский физико-химик Альфред Лотка. В настоящее время модель Лотки-Вольтерра широко применяется в ряде наук от химической кинетики до экономики.

Модель Лотки-Вольтерра выражает динамику численности хищников («лисы») и их кормовой базы («зайцы») модифицированными уравнениями Ферхюльста (см. раздел 2.1 в главе 2). Если в исходном логистическом уравнении прирост численности особей одного вида dx/dt уменьшается нелинейным членом $-bx^2$, который отражает внутривидовую конкуренцию, в основе модели Лотки-Вольтерра лежит система двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx/dt &= a_1 x - b_1 xy \\ dy/dt &= -a_2 y + b_2 xy, \end{aligned} \qquad (4.2)$$

где x – численность «зайцев», y – численность «лис», $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ – постоянные коэффициенты. В отсутствии хищников первое уравнение в системе превращается в уравнение Мальтуса: «зайцы» размножаются экспоненциально. В отсутствии кормовой базы второе уравнение становится аналогом закона радиоактивного распада – хищники без пищи «экспоненциально» вымирают (см. гл. 2, разд. 2.1). Встреча особей двух видов снижает число «зайцев» и увеличивает число «лис»; вероятности этих последствий задаются коэффициентами b_1 и b_2.

Решение системы уравнений (4.2) легко найти вблизи точки равновесия ($x_0 = a_2/b_2$, $y = a_1/b_1$): подстановка $x = x_0$, $y = y_0$ обращает в ноль правые части уравнений. Вблизи этой точки линии производных $dx/dt = 0$, т.е. x = const, и $dy/dt = 0$, y = const (*изоклины*) показывают (рис. 4.6 а), что стационарные состояния системы – циклы на фазовой плоскости (x, y). (В междисциплинарной физике «фазовая плоскость» – довольно широкое понятие).

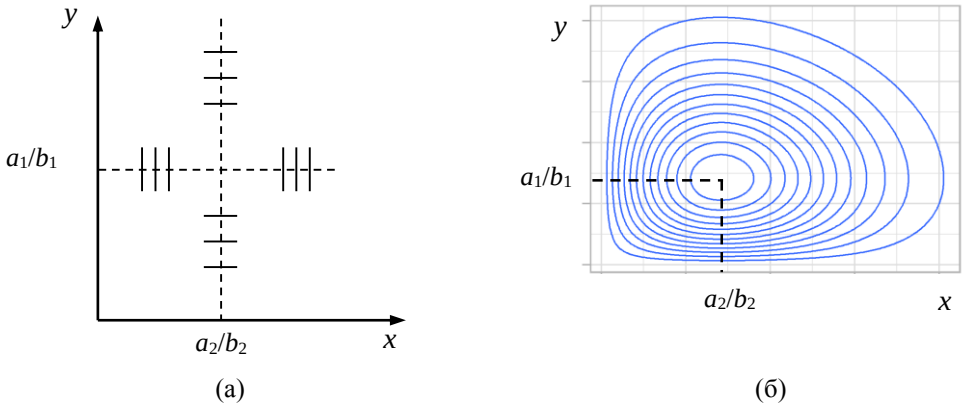


Рисунок 4.6. Фазовый портрет модели Лотки-Вольтерра: (а) изоклины, (б) циклы

В окрестностях точки равновесия (x_0,y_0) в уравнениях (4.2) можно произвести замену переменных:

$$x = x_0 - \xi, \quad y = y_0 - \eta\,,$$

после чего они превращаются в систему уравнений

$$-\frac{d\xi}{dt} = a_1(x_0 - \xi) - b_1(x_0 - \xi)(y_0 - \eta)$$
$$-\frac{d\eta}{dt} = -a_2\big(y_0 - \eta\big) + b_2(x_0 - \xi)(y_0 - \eta).$$

Раскроем скобки и подставим $x_0 = a_2/b_2$, $y_0 = a_1/b_1$. Множители при ξ в первом уравнении и при η во втором, а также свободные члены $a_1x_0 - b_1x_0y_0$ и $-a_2y_0 + b_2x_0y_0$ обратятся в 0. Пренебрегая вблизи (x_0, y_0) малым произведением $\xi\eta << \xi$, η, получим

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{a_2b_1}{b_2}\eta = -A\eta$$
$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{a_1b_2}{b_1}\xi = -B\xi\,. \qquad (4.3)$$

Интегральные кривые для системы *линеаризованных* уравнений (4.3) можно построить по аналогии с фазовыми траекториями гармонического осциллятора, разделив второе уравнение на первое (см. разд. 2.2 главы 2).

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{B}{A}\frac{\xi}{\eta}, \quad \text{т. е.} \quad \eta d\eta = -\frac{B}{A}\xi d\xi, \quad \text{или}$$

$$\eta^2 = -\frac{B}{A}\xi^2 + C^2 \tag{4.4}$$

(где C^2 – положительная константа интегрирования). Таким образом, вблизи точки равновесия фазовые траектории системы – концентрические эллипсы, которым соответствуют гармонические колебания численности «зайцев» и «лис». На всей фазовой плоскости систему нелинейных уравнений (4.2) решают численно; ее траектории, оставаясь замкнутыми, уже не эллиптические (рис. 4.6 б). Колебания численности видов также несинусоидальные; максимумы численности хищника, в согласии со здравым смыслом, несколько отстают от максимумов его кормовой базы. Реально наблюдаемые колебания численности взаимосвязанных видов на качественном уровне соответствуют модели, хотя их форма и период менее регулярны (рис. 4.7).

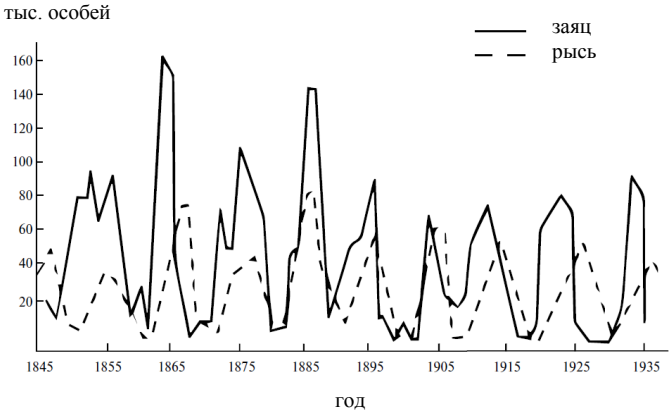


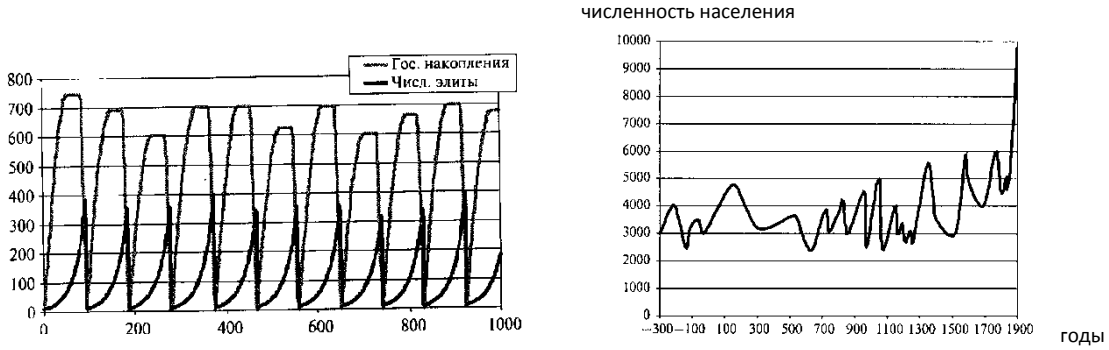
Рисунок 4.7. Колебания численн3Зости зайцев и рысей (см. [5] в списке литературы, рис.5.4)

Модель Лотки-Вольтерра обобщается на произвольное (хотя в действительности небольшое) число взаимодействующих видов. В этом случае системе из n видов соответствует система n дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \tag{4.5}$$

в которых коэффициенты $\{a_i\}$ – это константы собственных скоростей роста видов, $\{b_{ij}\}$ при $i \neq j$ – константы взаимодействия видов, и $\{b_{ii} < 0\}$ – константы самоограничения роста вследствие внутривидовой конкуренции. Помимо взаимодействия «хищники-жертвы», системы уравнений (4.5) позволяют описать такие отношения видов, как *симбиоз* (b_{ij},$b_{ji} > 0$), *комменсализм* и *аменсализм* ($b_{ij} \approx 0$, тогда как b_{ji}, соответственно, положителен либо отрицателен), межвидовая конкуренция (b_{ij}, $b_{ji}<0$), взаимодействие «хозяин-паразит» и другие (см. [5] в списке литературы).

Динамику популяций взаимосвязанных видов используют в науках об обществе, включая междисциплинарное направление *математической истории*. Так, численность населения средневекового Египта в I – XVIII в.в. н.э. претерпевала нерегулярные колебания с периодами от 40-50 до ~200 лет, далеко не достигая в максимумах предела «несущей способности» сельскохозяйственных земель. Эти колебания были интерпретированы А.В. Коротаевым[1] на основе модели Лотки-Вольтерра, в которой функцию хищника исполнял правящий класс: «перепроизводство элиты» вызывало политическую нестабильность, падение сельскохозяйственного производства, ухудшение условий жизни и голод (рис. 4.8). «Мальтузианские циклы» в истории ряда стран мира, включая Россию, рассматривались в книгах С.А. Нефедова[2] и в работах других авторов.



(а) (б)

Рисунок 4.8. (а) Колебания богатства государства и численности элиты средневекового Египта в модели Лотки-Вольтерра, (б) фактическая численность населения (см.[1])

4.2.2. Колебательные химические реакции

В химии на эмпирическом уровне давно было установлено, что некоторые процессы сопровождаются периодическими изменениями параметров системы. Еще алхимики наблюдали периодические вспышки и затухания холодного (без пламени) свечения белого фосфора на воздухе. В XX веке анализ дифференциальных уравнений химической кинетики (см. раздел 2.4 в главе 2) показал, что реакции, протекающие в растворах, могут включать упорядоченные колебания концентраций реагирующих веществ (*реагентов*). Этот эффект вызван тем же обстоятельством, что и колебания численности популяций: нелинейностью связей между параметрами.

В 1925 г. А. Лотка предложил аналог уравнений Вольтерра (4.3) при описании следующей цепочки превращений реагентов (заметим, что «превращение» – вполне официальный химический термин):

$$\begin{aligned} A + X &\xrightarrow{k_1} 2X \\ X + Y &\xrightarrow{k_2} 2Y \\ Y &\xrightarrow{k_3} B, \end{aligned} \qquad (4.6)$$

(над стрелками отмечены константы скоростей соответствующих реакций, см. раздел 2.4 главы 2). В этой цепочке реакций при взаимодействии вещества X с реагентом A, который присутствует в избытке (так что его концентрация постоянна), количество X в системе увеличивается. При взаимодействии X с Y оно уменьшается: реагент X переходит в Y. Промежуточный продукт Y (*интермедиат*), в свою очередь, превращается в конечный продукт B, который в дальнейших взаимодействиях не участвует. Нетрудно видеть, что первая стадия аналогична стадии размножения «зайцев» в модели Вольтерра (пища для них имеется в избытке), вторая стадия – фатальной встрече «зайца» с хищником, способствующей размножению хищников, а третья стадия – гибели хищника от голода, болезни или возраста: причин, выходящих за рамки модели.

По основному постулату химической кинетики скорость реакции пропорциональна количествам (для реакций в растворах – концентрациям) реагирующих веществ, так что

$$\frac{dX}{dt} = k_1 X - k_2 XY$$
$$\frac{dY}{dt} = k_2 XY - k_3 Y \qquad \text{(4.6 а)}$$

(постоянную концентрацию реагента A в произведении $k{\cdot}AX$ для первой стадии можно считать множителем, включенным в константу скорости k_1; заглавными буквами обозначены концентрации X и Y). Эти дифференциальные уравнения аналогичны уравнениям (4.2) с дополнительным условием $b_1 = b_2$. Итак, неравновесные химические процессы действительно могут сопровождаться колебаниями концентраций реагентов.

Брюсселятор

Далее в этой главе мы увидим, что разнообразие динамики непрерывной нелинейной системы и богатство ее фазового портрета возрастают с повышением «степени нелинейности» уравнений, то есть показателя степени переменных или их произведений. Модель Лотки-Вольтерра, где степень произведения *xy* равна двум, не считается «вполне сложной». В 1965 г. бельгийский физик-теоретик Рене Лефевр и физико-химик российского происхождения Илья Пригожин (впоследствии лауреат Нобелевской премии), работавшие в Брюсселе, предложили формальную кинетическую схему из цепочки модельных реакций, которая допускала разнообразные колебательные режимы. По месту рождения эту схему в научном сообществе окрестили «брюссельским химическим осциллятором» или, кратко, *брюсселятором*.

Кинетические уравнения брюсселятора, как и уравнения Лотки, не очень хорошо соответствуют реальным колебательным реакциям. (Реакцию Белоусова-Жаботинского, мы рассмотрим чуть ниже). Но механизмы химических реакций, т.е. последовательности их стадий, часто бывают сложными. Цепочка модельных стадий брюсселятора выглядит так:

(4.7)

$$A \xrightarrow{k_1} X$$
$$2X + Y \xrightarrow{k_2} 3X$$
$$B + X \xrightarrow{k_3} Y + C$$
$$X \xrightarrow{k_4} R$$

суммарно $A + B \rightarrow Y + C\downarrow + R\downarrow$

(стрелками, направленными вниз или вверх, в химических уравнениях обозначаются продукты, выходящие из зоны реакции в осадок (↓) либо в газовую фазу (↑)).

На первой стадии реагент A, присутствующий в избытке, переходит в «промежуточный» реагент (интермедиат) X. На третьей стадии интермедиат X, реагируя с веществом B (концентрация которого также постоянна), переходит в продукты реакции Y и C (последний выводится из системы), а на четвертой стадии он превращается в инертный продукт R, тоже выходящий из реакции. Ключевой во всей схеме является вторая стадия, где продукт реакции Y способствует увеличению концентрации интермедиата X. Теоретики называют ее *тримолекулярной* (это так) и *автокаталитической* – что уже может вызвать вопросы у химика-экспериментатора. Но именно эта стадия вводит в кинетические уравнения брюсселятора произведение переменных в третьей степени:

$$\frac{dX}{dt} = k_1 A + k_2 X^2 Y - (k_3 B + k_4) X$$
$$\frac{dY}{dt} = k_3 B X - k_2 X^2 Y.$$

Поскольку для модельной системы значения констант $\{k_i\}$ не важны, их приравнивают к единице, получая «канонические» дифференциальные уравнения брюсселятора:

(4.8)

$$\frac{dX}{dt} = A - (B + 1)X + X^2 Y$$
$$\frac{dY}{dt} = BX - X^2 Y.$$

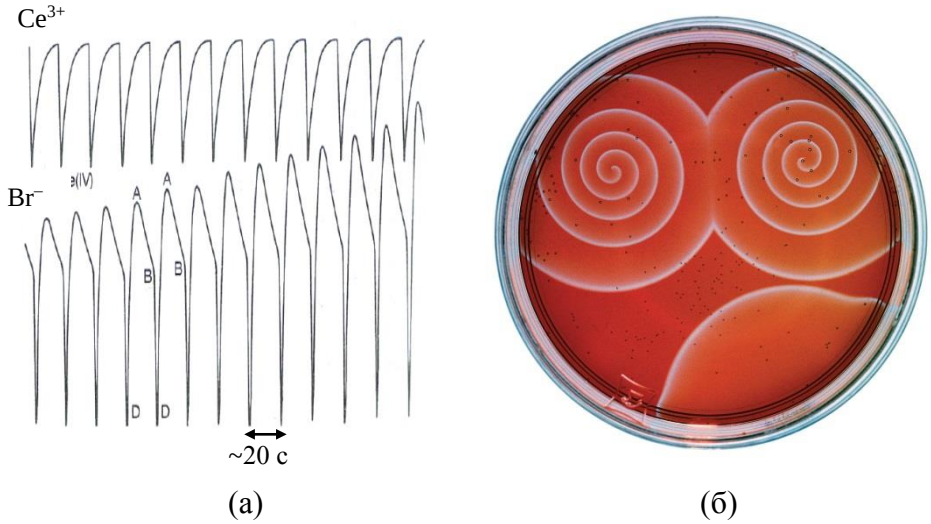
Решения таких уравнений мы рассмотрим в следующем разделе.

Реакция Белоусова-Жаботинского

Химическую реакцию легче изучать экспериментально, если она протекает в растворе либо в газовой фазе, где можно измерять концентрации всех веществ и управлять параметрами системы – такими, как температура. (Свечение белого фосфора при его окислении на воздухе – сложный *гетерогенный* процесс, в котором трудно моделировать ключевую стадию: диффузию (проникновение) кислорода в реагирующий приповерхностный слой твердого фосфора). Первая *гомогенная* колебательная система была открыта в 1951 г. московским военным химиком Б.П. Белоусовым: при окислении лимонной кислоты броматом калия в водной среде в присутствии солей церия (катализатора, ускоряющего процесс) цвет раствора периодические изменялся. Изменения были вызваны колебаниями концентрации окислителя (бромат-аниона BrO_3^-), в избытке которого бледно-желтый цвет ионов Ce^{3+} переходил в желтый цвет, свойственный ионам Ce^{4+}, до окисления всей лимонной кислоты в системе.

Подобно уединенной волне Скотта Рассела, концентрационные колебания Белоусова несколько лет игнорировались коллегами: равновесная химическая термодинамика того времени не предполагала автоколебаний. В 1958 г. реферат статьи Белоусова все-таки вышел в сборнике по радиационной медицине, впоследствии собравшем рекордное цитирование. В 1960-е годы биофизики стали изучать реакцию Белоусова; сам первооткрыватель одобрил эти работы, но в них не участвовал. Проводивший исследования А.М. Жаботинский в 1964 г. опубликовал первую математическую модель колебательной реакции, которая ныне носит имена обоих авторов.

Реакция Белоусова-Жаботинского (БЖ, в англоязычной литературе BZ) имеет сложный механизм и реализована в нескольких вариантах. Источником энергии в ней (подобно вращению вала в маятнике Фроуда) служит окисление органических соединений: лимонной, малоновой или броммалоновой кислот. Вдали от термодинамического равновесия этот процесс сопровождается автоколебаниями концентрации окислителя, которые регистрируют по цвету специальных индикаторов* либо электрохимически, измеряя потенциал водного раствора (рис. 4.9 а). В разных условиях реакции БЖ реализуется много колебательных режимов. В тонком слое раствора возникают *автоволны*: фронт реакции распространяется в активной среде, вызывая целый ряд неклассических явлений (рис. 4.9 б). К настоящему времени исследованы десятки колебательных реакций, которые особенно распространены в биохимических системах.



(а) (б)

Рисунок 4.9. Реакция Белоусова-Жаботинского: (а) колебания концентраций ионов Ce^{3+} (вверху) и Br^- (внизу) (P.Gray, S.K.Scott, *Chemical oscillations and instabilities*, Oxford: Oxford Sci. Publi., 1994), (б) автоволны концентрации окислителя (B.A.Awerill, P.Elredge, *Principles of General Chemistry*, Creative Commons, 2012, https://2012books.lardbucket.org/books/principles-of-general-chemistry-v1.0/index.html)

* Инертность химиков, которым Белоусов не раз демонстрировал свою реакцию, частично объяснялась относительно слабыми колебаниями цвета раствора (от желтоватого к желтому), различимыми лишь при хорошем цветовом зрении. В современном варианте реакции BZ индикатором служит фенантролиновый комплекс железа, в неокисленном состоянии (Fe^{2+}) имеющий красный цвет, а в окисленном (Fe^{3+}) – синий.

«Мексиканская волна»

Условия возникновения автоволн и их свойства мы будем обсуждать во второй части книги (гл. 5, разд. 5.1, «Бактериальные автоволны»). Похожие явления наблюдаются в коллективном поведении зрителей на массовых мероприятиях. Так, после чемпионата мира по футболу 1986 г. в Мехико болельщики всей планеты освоили «мексиканскую волну»: зрители на трибунах стадиона синхронно встают с мест и затем садятся, вслед за ними то же делают их соседи справа – и по трибуне со скоростью ~10 м/с прокатывается автоволна. Большой интерес к моделированию этого явления, как и других примеров «когерентного» поведения массы людей (ритмические аплодисменты, паническая эвакуация) с публикациями в престижных журналах[3] возник в начале 2000-х годов. За академическими исследованиями последовала разработка методик управления массовыми протестами (не все они попали в открытую печать), что вскоре проявилось в волне «цветных революций». Поскольку все биологические (включая человеческие) сообщества диссипативны, т.е. нуждаются в непрерывном потоке солнечной энергии, и многие процессы в них нелинейны, в моделировании явлений самой разной природы успешно применяются методы физики сложных систем.

О происхождении жизни на Земле

Необратимость таких физических процессов в макроскопических системах, как расширение газа в пустоту или рассеяние тепловой энергии, обосновывает статистическая термодинамика (см. разд. 3.4.1 в предыдущей главе). В замкнутых изолированных системах эти процессы сопровождаются повышением энтропии, то есть увеличением беспорядка. Этому очевидно противоречат приведенные выше примеры упорядочения и самоорганизации в открытых диссипативных системах под воздействием потоков энергии и вещества из окружающей среды. Несоответствие классической равновесной термодинамики огромному массиву научных данных ярко проявляется в биологической и, далее, социальной эволюции живых систем, протекающей с повышение сложности их структур и функций. Данную тенденцию выражает *стрела времени* – образ поступательного развития и совершенствования материи, введенный в научную литературу Ильей Пригожиным. Этот круг проблем непосредственно не связан с междисциплинарными физическими моделями, но знать о его существовании полезно.

Эволюцию систем вдали от термодинамического равновесия позволяет описать *неравновесная термодинамика*, построенная к середине XX века в работах Л. Онзагера, И. Пригожина, П. Гленсдорфа и других авторов. В самых общих терминах, эта дисциплина рассматривает *потоки* (энергии, энтропии, вещества) в открытых диссипативных системах, включая примеры сложных систем из данной главы. Для подобных систем характерны не состояния общего равновесия (при отсутствии потоков), а комбинации локальных динамических равновесий в их точках. Вместо дискретных состояний в сложных диссипативных системах при постоянстве потоков могут устанавливаться *стационарные режимы*. Не имея возможности рассматривать это большое и математически нелегкое направление, мы на качественном уровне обсудим физико-химию неравновесных процессов применительно к фундаментальной, еще не вполне решенной проблеме *возникновения жизни на Земле* из неорганических соединений. Для более полного ознакомления с этой областью можно рекомендовать работы Всеволода Александровича Твердислова[4,5] и цитированную в них литературу.

Зарождение *пре-биотических* компонентов гидросферы Земли в *архейскую эру* предположительно началось 3.8 – 3.9 млрд лет назад в условиях бескислородной атмосферы, горячего (~80 ºС) и мелкого водного океана почти по всей земной поверхности, интенсивной вулканической деятельности и подверженности всем видам космического излучения, включая потоки тяжелых частиц (*солнечный ветер*): планета тогда не имела магнитного поля. Многочисленные лабораторные исследования, начиная с работ

А.И. Опарина в 1920-е годы, воспроизводимо показали, что в указанных температурных и других физических условиях (воздействие электрических разрядов, ультрафиолетового облучения и радиации) простейшие неорганические компоненты атмосферы и гидросферы (вода H_2O, сероводород H_2S, аммиак NH_3, углекислый газ CO_2 и метан CH_4) вместе с неорганическими минералами в «случайных» неизбирательных химических реакциях частично преобразуются в достаточно сложные органические соединения, в том числе аминокислоты (строительные блоки белковых полимеров) и нуклеозиды (составные единицы полимерных молекул ДНК и РНК, переносящих наследственную информацию в живых организмах).

Таким образом, ключевым нерешенным вопросом зарождения жизни на Земле становится не экспериментально доказанная возможность синтеза биомолекул из неорганических веществ, а механизм отбора их *неравновесных* составов и структур, необходимых для функционирования живой клетки. Большую важность также представляет генезис самих клеток, по размерам (1-10 мкм, т.е. 0.001-0.01 мм) хорошо соответствующих микроскопическим каплям или аэрозольным частицам водяной пыли. Хотя общепринятое решение этой проблемы еще не найдено, неравновесные диссипативные процессы открывают здесь весьма обнадеживающий путь.

Химические составы клеток в живых организмах далеки от термодинамического равновесия; на этом основаны все биохимические процессы. В частности, обогащение внутриклеточной среды ионами калия K^+ по сравнению с морской водой, где преобладают соли натрия (Na^+), делает возможным перенос вещества сквозь клеточные мембраны под действием *осмотического давления* (см. учебники общей физики и справочник [3] в литературе к главе 1), а в многоклеточных организмах – распространение нервных импульсов. Перспективная гипотеза возникновения неравновесных составов «прото-клеток»[4,5] связывает их с весьма неравновесным *поверхностным микрослоем* древнего океана толщиной 0.1-0.3 мм, где благодаря испарению воды и потерям тепла в инфракрасном излучении* температура на 0.5 – 1 ^oC ниже, чем в более глубоких водных слоях. Из-за малой толщины микрослоя этой, на первый взгляд небольшой, разнице температур соответствует градиент $\Delta T/\Delta l \sim 1000$ град/м, достижимый не во всех современных химических реакторах. Неравновесным состоянием микрослоя, которое поддерживается потоком излучения Солнца, порождается его неравновесный химический состав с повышенной свободной энергией (см. разд. 2.3 в гл. 2). Поэтому в микроскопических каплях водно-солевой среды со сложной примесью органических соединений (*«первичном бульоне»*), отрываемых от поверхности океана ветром и вулканическими газами, могли протекать первые предшественники биохимических процессов – в частности, реакции полимеризация. «Статистически» синтезированные *поверхностно-активные* вещества при этом могли способствовать образованию мономолекулярных органических пленок на поверхности капель: прототипов клеточных мембран (рис. 4.10).

Важнейшей особенностью «живого» вещества является *оптическая чистота* ключевых биохимических компонентов. Усложнение состава и строения органических молекул предсказуемо сопровождаются понижением их *симметрии* (метан CH_4 – высокосимметричная молекула, а уже молекула фреона CHFClBr с четырьмя разными связями C–H, C–F, C–Cl и C–Br при центральном атоме углерода полностью асимметрична). Несимметричные *хиральные*** молекулы существуют в виде *оптических изомеров* одинакового состава, но с разным расположением их частей в пространстве; подобно правой и левой руке, их невозможно совместить (см. тот же справочник [3] в гл. 1). При объединении только «правых» D (лат. *dexter*) или только «левых» L (*laevus*) молекул аминокислот (рис. 4.11) образуются оптически чистые пептидные цепи и их более сложные комбинации, хиральность которых часто чередуется в иерархическом порядке …D→L→D→L…[5] Хиральность молекул живого вещества является

*Инфракрасное электромагнитное излучение, которым передается тепло во все стороны от горячих предметов, сильно поглощается водой и выходит лишь из поверхностного слоя толщиной менее 1 мм, унося с собой часть его тепловой энергии.

** От греч. χειρ – рука

важнейшим условием биохимических процессов, протекающих с эффективностью, недостижимой во всех других разделах химии.

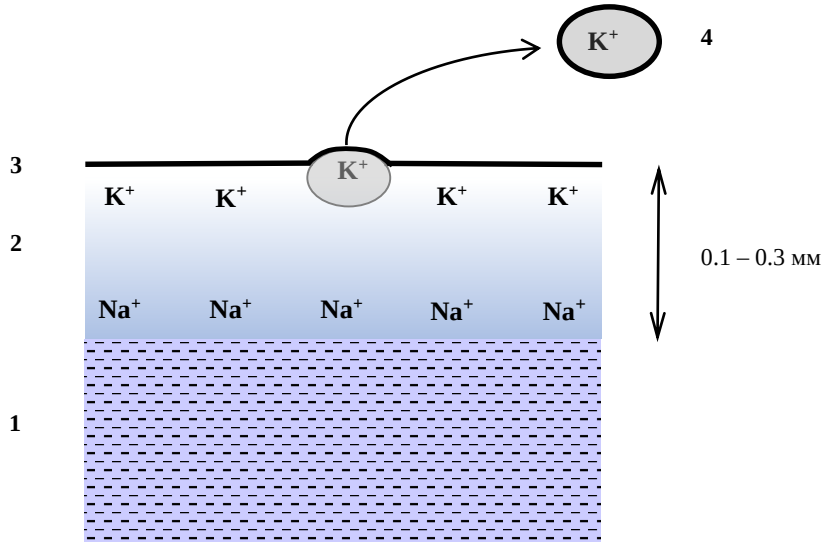


Рисунок 4.10. Схема образования прото-клеточных везикул: 1 – равновесная толща океана, 2 – неравновесный поверхностный микрослой, 3 – органический монослой, 4 – капля неравновесного состава в оболочке (по В.А. Твердислов и соавт., Вестн. Моск. Университета, , сер. 3, 2014, №6, 107)

Огромное количество органических молекул в живой природе существует в виде чистых оптических изомеров (*энантиомеров*), выбор которых (D или L) в ходе биологической эволюции представляется случайным. «Статистический» синтез сложных несимметричных молекул очевидно дает равные доли D- и L-изомеров, но преобладание одного из них в прото-клетках (*везикулах*) также может задаваться неравновесным составом поверхностного микрослоя в «первичном бульоне». При обогащении микроскопических капель, благодаря оболочке способных некоторое время существовать в горячей водной среде, одним из оптических изомеров аминокислот их молекулы могут *селективно* объединяться в хиральные фрагменты пептидных цепей: предшественников *белков*. Помимо возможности вступать в реакции с другими органическими компонентами «бульона», вырабатывая энергию, эти полимерные фрагменты могли сохраняться в водной среде после распада везикулы и переходить в новые капли как прототипы носителей генетической информации.

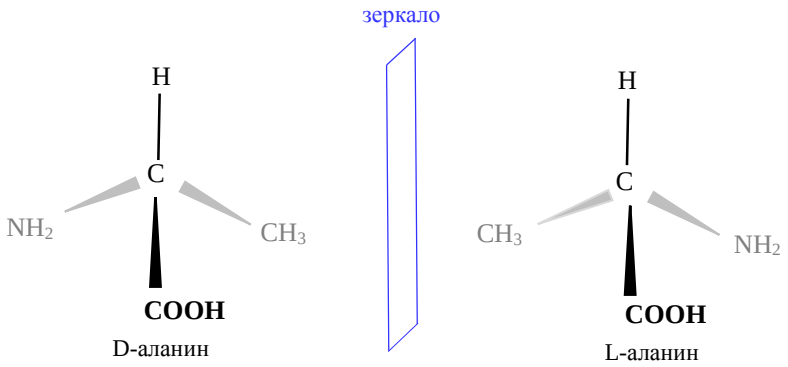


Рисунок 4.11. Оптические изомеры хиральной молекулы аминокислоты аланина. Серый цвет – химические связи, направленные под плоскость рисунка. «Правая» и «левая» молекулы совмещаются как зеркальные отражения

Лабораторные эксперименты подтвердили неравновесный ионный и энантиомерный состав поверхностного микрослоя водной среды, моделирующей древний океан[4]. Разумеется, случайные процессы, протекавшие внутри везикул, в подавляющем большинстве случаев давали отрицательный результат – но Природа в архейскую эру не торопилась. Первыми настоящими формами жизни на Земле предположительно стали *анаэробные* бактерии (не использующие кислород в жизненном цикле),

возникшие около 3.5 млрд. лет назад; их жизнедеятельность отразилась в химическом составе земных пород. Дальнейшее развитие древних организмов уже в рамках биологической эволюции привело к появлению сине-зеленых водорослей, вырабатывающих кислород, и *Кислородной катастрофе* (2.5 млрд. лет назад), обозначившей начало *протерозойской эры*.

Литература к разделу 4.2

[1]А.В. Коротаев, в кн. П.В. Турчин, *Историческая динамика: на пути к теоретической истории* (2-е изд.), М.: ЛКИ, 2010, с. 347.

[2] P. Turchin, S.A. Nefedov, *Secular cycles*, Princeton, 2009, см. также раздел 2.1 в главе 2

[3] T. Farkas, D. Helbing,T. Vicsek, *Simulating dynamic features of escape panic*, Nature 2000, **407**, 487.

[4] В.А. Твердислов (ред.), *Лекции по биофизике*, М.: Физический факультет МГУ, 2023, гл. 7, 8, 17.

[5] В.А. Твердислов, Е.В. Малышко, *О закономерностях спонтанного формирования структурных иерархий в хиральных системах живой и неживой природы*, Усп. физ. наук, 2019, **189** (4), 375.

4.3. Анализ нелинейных дифференциальных уравнений

Математическое описание процессов в нелинейных диссипативных системах стало развиваться в 1920-е годы в связи с созданием сложных электрических схем. (Становление термодинамики, которая кратко обсуждалась во 2–й главе, в начале XIX века в той же мере обязано изучению паровой машины – тогда уже изобретенной и используемой). В работах А. Пуанкаре, продолженных в СССР А.А. Андроновым и его школой, была создана математическая теория нелинейных колебаний – впоследствии обнаруженных также в химии, биохимии, биологии, экономике и социальных системах. Из-за широты приложений и разнообразия нелинейных связей между параметрами таких систем возник новый математический инструмент: качественный анализ *типов* решений дифференциальных уравнений и соответствующих им областей фазового пространства.

4.3.1. Особые точки нелинейных уравнений 2-го порядка

Простейший пример нелинейных зависимостей дает система двух дифференциальных уравнений первой степени с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y). \end{aligned} \qquad (4.9)$$

Его частными случаями являются уравнения Лотки-Вольтерра (4.2) и математическая модель брюсселятора (4.8). Если нелинейные правые части (4.9) не зависят от времени, уравнения называются *автономными*. Разделив второе из них на первое, мы получим уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости (x, y)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

Стационарные точки системы уравнений (4.9) $dx/dt = 0$ и $dy/dt = 0$ определяются видом нелинейных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. В окрестностях этих точек форму фазовых траекторий можно установить из анализа *линеаризованных* уравнений (см. линеаризацию модели Лотки-Вольтерра)

(4.9 а)
$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma x + \delta y\ ,$$

где $\alpha = \partial P/\partial x$, $\beta = \partial P/\partial y$, $\gamma = \partial Q/\partial x$, $\delta = \partial Q/\partial y$ (в любой стационарной точке это действительные числа).

Коэффициенты в правой части системы (4.9 а) можно объединить в квадратную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Решение уравнений (4.9 а) удобно искать в виде

$$x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}$$

с комплексными показателями степени λ. Подставив эти выражения для x и y в (4.9 а) и сократив все члены на общий множитель $e^{\lambda t}$, получим систему двух алгебраических уравнений 1-й степени относительно неизвестной λ

$$(\alpha - \lambda)A + \beta B = 0$$
$$\gamma A + (\delta - \lambda)B = 0.$$

По правилам алгебры эта система эквивалентна квадратному уравнению

(4.10) $$\det\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)(\delta - \lambda) - \beta\gamma = \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$$

(мы раскрыли детерминант и, выражаясь языком школьной математики, сгруппировали однородные члены с одинаковыми степенями неизвестной величины λ). Разность произведений коэффициентов в уравнении (4.10) – это детерминант матрицы M, а сумма в скобках при 1-й степени неизвестной λ – ее след (см. разд. 3.1 предыдущей главы и Приложение П5). Дадим им специальные обозначения и запишем с ними уравнение (4.10) в окончательном виде

$$\mathrm{tr\ M} = \alpha + \delta = \sigma,\ \ \det \mathrm{M} = \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$$
(4.10 а)
$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0.$$

Квадратное уравнение (4.10 а) в общем случае имеет комплексные корни λ_1 и λ_2, также называемые собственными значениями матрицы M:

(4.11)
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}).$$

С этими корнями решение системы дифференциальных уравнений (4.9 а) принимает вид

(4.12)
$$x = c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t}$$
$$y = c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t}$$

(где c_{ij} – константы интегрирования).

При разных значениях $\lambda_{1,2}$ возникают разные фазовые траектории. Мнимые части комплексных корней порождают колебания $\left(e^{it} = \cos t + i \sin t\right)$, тогда как для их действительных частей положительный знак отвечает расхождению траекторий с ростом функций $x(t)$, $y(t)$ (неустойчивой стационарной точке), а отрицательный – их сходимости в устойчивую точку либо затуханию колебаний. Не углубляясь в математику, приведем результаты:

Таблица 4.1

Стационарные точки системы уравнений (4.9 а)

тип корней λ_1, λ_2	знаки корней	тип особой точки
действительные числа одного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$)	отрицательные ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$)	устойчивый узел
	положительные ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$)	неустойчивый узел
действительные числа разного знака ($\lambda_1 > 0, \cdot \lambda_2 < 0$)		седловая точка
комплексные сопряженные числа ($\mathrm{Re}\ \lambda_1 = \mathrm{Re}\ \lambda_2 \neq 0$)	$\mathrm{Re}\ \lambda_1 = \mathrm{Re}\ \lambda_2 < 0$	устойчивый фокус
	$\mathrm{Re}\ \lambda_1 = \mathrm{Re}\ \lambda_2 > 0$	неустойчивый фокус
мнимые числа ($\mathrm{Re}\ \lambda_1 = \mathrm{Re}\ \lambda_2 = 0$)		центр

Фазовые траектории в окрестностях стационарных точек исходных нелинейных уравнений (4.9) соответствуют линеаризованной системе (4.9 а) с точностью до поворотов координатной системы (рис. 4.12), сдвига начала координат и деформаций фазовой плоскости наподобие растяжений и сжатий резиновой пленки (см. рис. 3.10 в предыдущей главе). Характер траекторий при этом остается неизменным, их «самопересечения» в простейших нелинейных системах отсутствуют.

Параболические траектории, сходящиеся в начале координат (корни λ_1, λ_2 действительны и имеют один знак), образуют особую точку *узел*. Сходящемуся движению изображающих точек по параболам ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$) соответствует *устойчивый узел*, движению в обратном направлении ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) – *неустойчивый узел*. В случае действительных корней с противоположными знаками ($\lambda_1 / \lambda_2 < 0$) фазовые траектории – гиперболы, окружающие неустойчивую *седловую точку* (см. рисунки 2.10 и 2.24 в гл. 2). Комплексно сопряженным корням ($\lambda_{1,2} = a \pm bi$) отвечают фазовые траектории в форме *логарифмических спиралей* с особой точкой *фокусом* (гл. 2, рис. 2.7 б,). При $a < 0$ траектории «наматываются» на точку, асимптотически приближаясь к ней (*устойчивый фокус*), при $a > 0$ изображающие точки с увеличением времени t удаляются на бесконечность (*неустойчивый фокус*). Наконец, чисто мнимым корням $\lambda_1 \cdot$и λ_2 ($a = 0$) соответствуют эллиптические траектории вокруг «нейтральной» особой точки *центра*: движение по ним происходит без асимптотического приближения или удаления.

Прочими комбинациями знаков корней и их мнимых частей задаются направления движения по эллипсам либо по «правой» и «левой» спиралям. Все особые точки уравнения (4.9) относятся к четырем перечисленным типам. При действительных корнях

$\lambda_1 = \lambda_2$ параболические траектории превращаются в прямые, задавая (устойчивый или неустойчивый) *дикритический узел*.

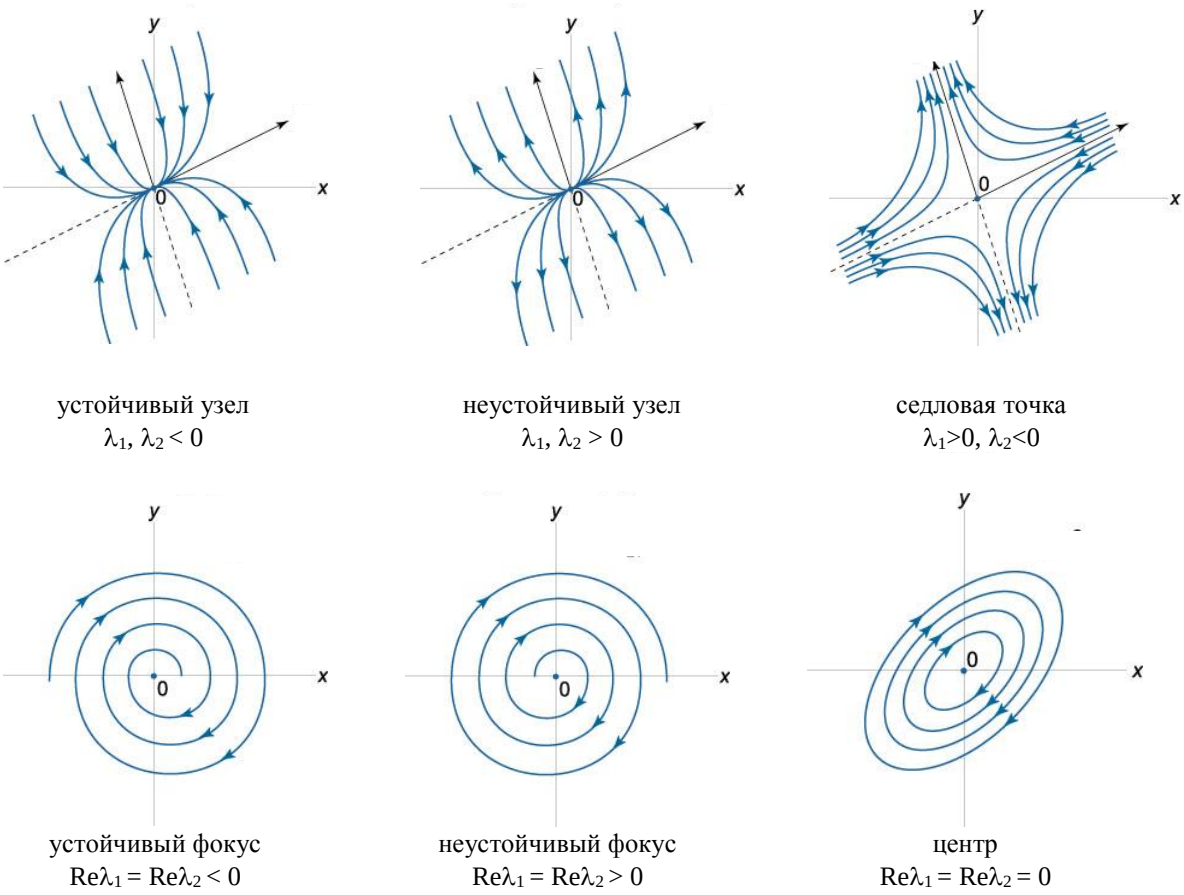


Рисунок 4.12. Фазовые траектории системы уравнений (4.9 а) в окрестностях стационарных точек

Соотношения (4.9) – (4.12) позволяют исследовать фазовую плоскость системы двух нелинейных уравнений 1-го порядка, не находя их точного решения. Так, в уравнениях модели Лотки-Вольтерра (4.2) и (4.3) имеются две стационарные точки ($dx/dt = dy/dt = 0$): «номинальная» ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$) и содержательная ($x_0 = a_2/b_2$, $y_0 = a_1/b_1$). Дифференцируя правые части в системе уравнений (4.2), получим

$$\alpha = {\partial P}/_{\partial x}\,(y_0) = a_1 - b_1 y_0, \qquad \beta = {\partial P}/_{\partial y}\,(x_0) = -b_1 x_0,$$
$$\gamma = {\partial Q}/_{\partial x}\,(y_0) = b_2 y_0, \qquad \delta = {\partial Q}/_{\partial y}\,(x_0) = -a_2 + b_2 x_0.$$

В точке начала координат матрица коэффициентов линеаризованных уравнений и ее инварианты имеют вид

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \mathrm{tr}\, M = a_1 - a_2, \qquad \Delta = \det M = -a_1 a_2$$

Корни квадратного уравнения (4.10 а)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a_1 - a_2 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 2a_1 a_2 + {a_2}^2 + 4a_1 a_2}\right) = \frac{1}{2}\left[a_1 - a_2 \pm (a_1 + a_2)\right],$$

или $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = -a_2$. Все коэффициенты в уравнении (4.2) положительны – значит, система (4.2) имеет два действительных собственных значения с противоположными знаками и (0, 0) – неустойчивая седловая точка. В *стационарной точке* (a_2/b_2, a_1/b_1)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_2 b_1}{b_2} \\ \frac{a_1 b_2}{b_1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \operatorname{tr} M = 0, \qquad \Delta = \det M = a_1 a_2 ,$$

так что квадратное уравнение (4.10 а) принимает вид

$$\lambda^2 + a_1 a_2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-a_1 a_2}.$$

Чисто мнимые корни показывают, что точка (a_2/b_2, a_1/b_1) действительно является центром.

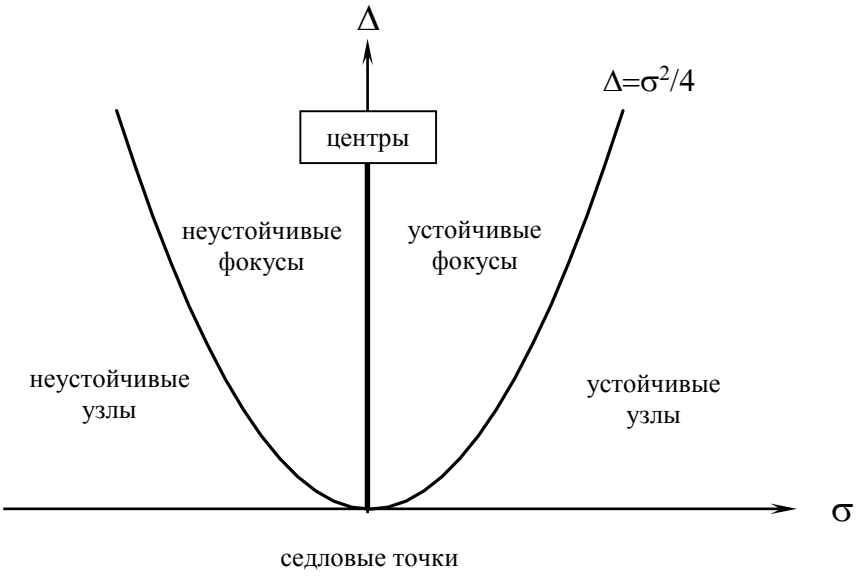


Рисунок 4.13. Бифуркационная диаграмма: типы стационарных точек

Характер особых точек и вид фазовых траекторий в их окрестностях в зависимости от характеристик матрицы M показаны на рис. 4.13. При положительном детерминанте парабола $\Delta = \sigma^2/4$ (сепаратриса) отделяет области фокусов, которым соответствуют возрастающие либо затухающие колебания, от неколебательных режимов с особыми точками типа узла. Области неустойчивых и устойчивых фокусов разделяет линия постоянных колебаний с нейтральными особыми точками – центрами. При отрицательных значениях детерминанта Δ под знаком корня в формуле (4.10) $\sigma^2 - 4\Delta > \sigma^2$, т.е. имеется два действительных корня с противоположными знаками. Поэтому всю нижнюю полуплоскость $\Delta < 0$ на рис. 4.13 занимают седловые точки, в окрестностях которых существуют расходящиеся фазовые траектории гиперболического типа.

Пересечению сепаратрис соответствует смена типа динамики при малых изменениях параметров системы, или *бифуркация* («раздвоение»). График на рис. 4.13 называется

бифуркационной диаграммой. Так, например, кинетическую схему, на которой были основаны уравнения Лотки (4.6 а), можно упростить, полагая первую стадию реакции не автокаталитической, а стационарной

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{k_0} X \\ X + Y &\xrightarrow{k_1} 2Y \\ Y &\xrightarrow{k_2} B \end{aligned} \qquad (4.13)$$

(промежуточный продукт X с постоянной скоростью образуется из вещества A, взятого в избытке; концентрация A в ходе реакции не изменяется). В этой упрощенной модели Лотки концентрацию реагентов X (переменная x) и Y (переменная y) описывают дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_0 - k_1 xy \\ \frac{dy}{dt} &= k_1 xy - k_2 y. \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Систему уравнений (4.14) легко линеаризовать и затем исследовать ее фазовый портрет по рассмотренной выше схеме. Ее стационарные точки лежат на гиперболе $xy = k_0/k_1$ (при этом обращается в ноль правая часть первого уравнения) и имеют координаты

$$k_1 \cdot \frac{k_0}{k_1} - k_2 y_0 = 0, \quad \text{т.е. } y_0 = {k_0}/{k_2}, \quad \text{и } x_0 = {k_2}/{k_1}$$

(заметим, что начало координат (0, 0) не является особой точкой, т.к. в ней $dx/dt \neq 0$). Линеаризуя уравнения (4.13), найдем матрицу M в точке $(k_2/k_1, k_0/k_2)$:

$$\alpha = -\frac{k_0 k_1}{k_2}, \quad \beta = -k_2, \quad \gamma = \frac{k_0 k_1}{k_2}, \quad \delta = 0;$$

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{k_0 k_1}{k_2} & -k_2 \\ \frac{k_0 k_1}{k_2} & 0 \end{pmatrix}$$

и ее собственные значения, т.е. корни уравнения (4.10)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}) = \frac{-k_0 k_1 \pm \sqrt{k_0 k_1 (k_0 k_1 - 4{k_2}^2)}}{2k_2}. \qquad (4.15)$$

Когда подкоренное выражение положительно ($k_0 k_1 > 4k_2^2$), уравнение (4.15) имеет два действительных отрицательных корня $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Особая точка – устойчивый узел: система стремится к ней без колебаний концентрации. Если же $4k_2^2 > k_0 k_1$, корни (4.14) – сопряженные комплексные числа с отрицательной действительной частью. В этом случае точка $(k_2/k_1, k_0/k_2)$ – устойчивый фокус, в системе будут наблюдаться затухающие колебания концентраций (рис. 4.14). При $4k_2^2 = k_0 k_1$ система переходит из одного динамического режима в другой.

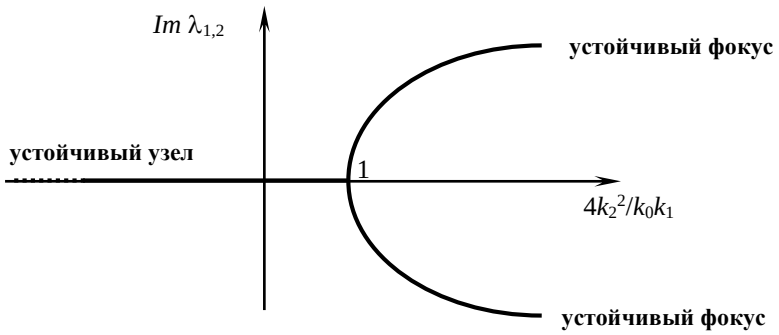


Рисунок 4.14. Точка бифуркации в стационарной модели Лотки (формула (4.6 а))

ЗАДАЧА 4.1. Проверить справедливость формулы (4.15), выполнив вычисления.

Колебания с возрастающей амплитудой из точки неустойчивого фокуса (см. рис. 4.12) называются также «движением с отрицательным трением». Примером может служить раскачивание маятника Фроуда при равномерном вращении вала. В реальных системах амплитуда колебаний без разрушения увеличивается лишь до определенного предела под действием ограничивающих факторов – например, повышения трения при возрастании скорости движения маятника (рис. 4.4 и 4.5). В этом случае на фазовой плоскости системы вокруг точки неустойчивого фокуса возникает *предельный цикл*, к которому стремится колебательный режим с течением времени (рис. 4.15).

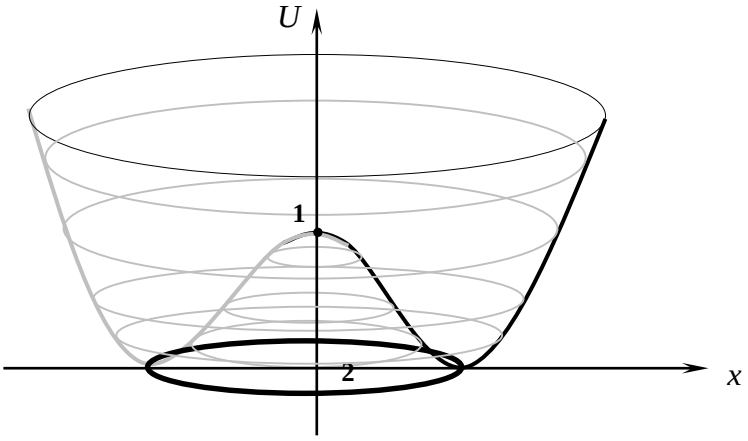
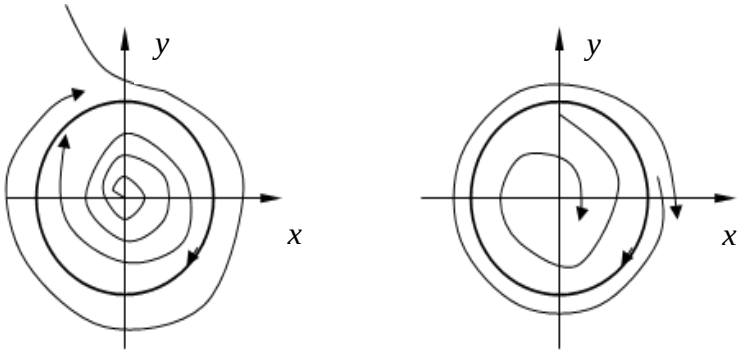


Рисунок 4.15. Неустойчивый узел 1 и устойчивый предельный цикл 2 в фазовом пространстве (схема)

Предельные циклы появляются в системе из двух нелинейных уравнений при «кубической» зависимости скоростей от произведения переменных (см. уравнения брюсселятора (4.7)). Подобно особым точкам узла или фокуса, предельные циклы могут быть устойчивыми и неустойчивыми (рис. 4.16). Устойчивый предельный цикл отличается от замкнутых фазовых траекторий вокруг точки центра тем, что все траектории, проходящие в некоторой окрестности, с течением времени неограниченно приближаются к нему.

Множество точек, «притягивающее» траектории в фазовом пространстве, называется *аттрактором*; область его притяжения – *бассейном аттрактора*. Примеры

точечных аттракторов – устойчивый узел и устойчивый фокус. «Нейтральный» центр аттрактором не является. Форма предельного цикла определяется параметрами нелинейной системы; ею задаются тип и динамика колебаний.



устойчивый неустойчивый

Рисунок 4.16. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы

4.3.2. Странный аттрактор и детерминированный хаос

И я подбросил монету, сказав себе: Зло и Добро.
Монета весело встала три раза подряд на ребро.
Сергей Калугин, «Туркестанский экспресс»

– А если в воздухе зависнет – всю получку домой принесем!
анекдот советского времени

Переход к системам трех нелинейных дифференциальных уравнений равносилен выходу из фазовой плоскости в трехмерное фазовое пространство. При этом возникают новые виды фазовых траекторий – в том числе *хаотические*, через определенный промежуток времени теряющие информацию о начальном состоянии системы. Такие нелинейные динамические системы возникают в прогнозировании погоды, а также транспортных потоков, состояния биржи и в других практических задачах. Подобную систему впервые обнаружил и исследовал в 1963 г. американский математик Эдвард Лоренц, занимавшийся компьютерными расчетами для метеорологии.

Лоренц анализировал фазовые траектории системы трех дифференциальных уравнений, возникших в задаче о конвективном переносе тепла в тонком слое жидкости или газа (см. раздел 4.2 в этой главе):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz = Q(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz = L(x,y,z) \end{aligned} \qquad (4.16)$$

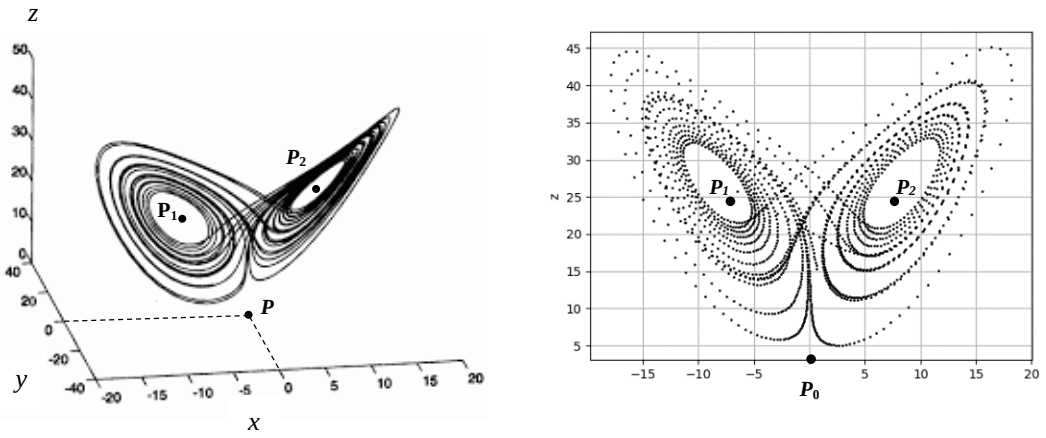
Система (4.16) была выведена на основе уравнений Навье-Стокса, теплопереноса и неразрывности (разд. 3.2.5 в гл. 3). В результате упрощений задача была сведена к трем переменным, характеризующим скорость вращения конвективных валов (x), разность температуры ΔT между восходящими и нисходящими потоками (y) и отклонение

вертикального температурного профиля от линейности (z; см. рис. 4.3 б). Параметр $r = Ra/Ra^*$ в уравнениях (4.16) – нормированное число Рэлея (см. раздел 4.2), где критическое значение Ra^* отвечает началу конвекции ($r = 1$), σ – *число Прандтля* Pr, или безразмерный критерий подобия тепловых процессов в жидкостях и газах (отношение коэффициентов динамической вязкости и *температуропроводности*); параметр b определяется геометрией конвективной ячейки.

Безразмерные уравнения (4.16) при $r < 1$ имеют устойчивый узел P_0 в начале координат (x=0,y=0,z=0) (среда неподвижна, тепло переносится по механизму теплопроводности). При $r > 1$ начало координат (0, 0, 0) становится неустойчивой седловой точкой. В системе возникают два равноправных аттрактора (P_1, P_2) типа устойчивый фокус, которым отвечают стационарные конвективные валы с двумя противоположными направлениями вращения. Фазовые траектории системы приходят в окрестности одного из них. До критического значения управляющего параметра r^* (пропорционального градиенту температуры) скорость вращения валов и разность температуры в них стремятся к постоянным значениям

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)},\ z = r - 1$$

При большой разности температуры ΔT конвективная структура полностью разрушается, движение жидкости становится турбулентным. На промежуточных значениях параметра $r > r^*$ возникают колебания скорости вращения и хаотические «переключения» направления вращения с перебрасыванием фазовых траектории между окрестностями особых точек P_1, и P_2 (рис. 4.17).



(а) (б)

Рисунок 4.17. Аттрактор Лоренца: (а) фазовые траектории, (б) проекция на плоскость *xz*. Показаны стационарные точки при $1 < r < r^*$

Протяженная область фазового пространства системы уравнений (4.16), охваченная хаотической динамикой, ныне называется *аттрактором Лоренца*. Аналогичные области притяжения «блуждающих» фазовых траекторий под общим названием *странных аттракторов* обнаружены в ряде нелинейных систем 3-го и более высоких порядков.

В отличие от консервативных (например, теплоизолированных) систем, фазовый объем которых не изменяется (теорема Лиувилля, рис. 3.37 в гл. 3), хаотическое поведение нелинейных диссипативных систем сопровождается «сжатием» области аттрактора в фазовом пространстве. Однако сжатие не приводит к стягиванию аттрактора в стационарную точку, предельный цикл или поверхность тора (это множество стационарных точек возникает при размерности фазового пространства $d \geq 3$). Одним из инструментов математического описания таких областей служат *фрактальные множества*, которые будут рассмотрены в главе 8.

В области странного аттрактора фазовые траектории, в начальный момент сколь угодно близкие, с течением времени расходятся. «Расстояние» между изображающими точками $\varepsilon(t) = |\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|$, определяемое наборами их фазовых координат, за интервал $\Delta t = t - t_0$ возрастает экспоненциально (рис. 4.18):

$$\varepsilon(t) \cong \varepsilon(t_0) e^{\lambda \Delta t},$$

где λ – *старший показатель Ляпунова* (или *экспонента Ляпунова*), показывающий скорость расхождения:

$$\lambda \cong \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)}.$$

С учетом усреднения по всем траекториям внутри аттрактора

(4.17) $$\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_0)}$$

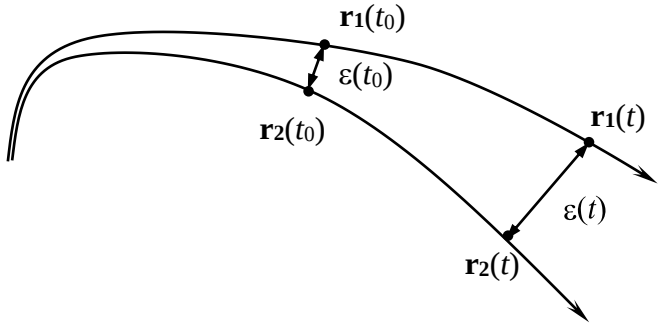


Рисунок 4.18. Расхождение фазовых траекторий

При $\lambda > 0$ близкие фазовые траектории расходятся и информация о начальном состоянии системы $\mathbf{r}_1(i_0) \approx \mathbf{r}_2(t_0)$ с течением времени теряется. Заметим, что условие $t \to \infty$ не следует понимать буквально, так как области аттракторов в фазовом пространстве ограничены и в пределе показатель обратится в ноль. Формулу (4.17) обычно используют в компьютерных расчетах динамики сложных систем (где непрерывную переменную t заменяет число тактов дискретного времени N), пока расхождение траекторий меньше размеров бассейна аттрактора (см. выше).

ЗАДАЧА 4.2. Линеаризуйте систему уравнений (4.16) и определите характер особой точки P_0, ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) в фазовом пространстве при $0 < r < 1$ и $r > 1$.

Решение

Составим квадратную матрицу 3×3 $||a_{ij}||$ из частных производных правых частей уравнений (4.16) по переменным *x*, *y* и *z*:

$$a_{11} = {\partial P}/{\partial x} = -\sigma, \qquad a_{12} = {\partial P}/{\partial y} = \sigma, \qquad a_{13} = {\partial P}/{\partial z} = 0$$
$$a_{21} = {\partial Q}/{\partial x} = r - z, \qquad a_{22} = {\partial Q}/{\partial y} = -1, \qquad a_{23} = {\partial Q}/{\partial z} = -x$$
$$a_{31} = {\partial L}/{\partial x} = y, \qquad a_{32} = {\partial L}/{\partial y} = x, \qquad a_{33} = {\partial L}/{\partial z} = -b,$$

то есть

$$M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

В точке ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) получаем характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Разложим детерминант по нижней строке (см. разд. 3.1 гл. 3):

$$(4.18) \qquad (\lambda + b)\begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma \\ -r & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + (1 - r)\sigma] = 0.$$

Кубическое уравнение (4.18) имеет три корня:

$$\lambda_1 = -b, \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}$$

При $r < 1$ все корни вещественны и отрицательны: точка (0, 0, 0) – устойчивый узел. В случае $r = 0$ получаем $\lambda_2 = -\sigma - 1$, $\lambda_3 = 0$ (бифуркация). Если же $r > 1$, то $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 > 0$: действительные корни имеют разные знаки. Это значит, что при $r > 1$ состояние покоя (0, 0, 0) становится неустойчивой седловой точкой в соответствии с тем, что $r = 1$ – условие начала конвекции (см. выше).

ЗАДАЧА 4.3. Показать, что уравнения Лоренца (4.16) задают нелинейную диссипативную систему, фазовый объем которой со временем уменьшается.

Решение

В теме «Тензоры» раздела 3.1 главы 3 вводилось понятие дивергенции векторного поля. Это скалярная величина (число), пропорциональная расходимости силовых линий поля $\mathbf{v} = (v_x, v_x, v_x)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = {\partial v_x}/{\partial x} + {\partial v_y}/{\partial y} + {\partial v_z}/{\partial z}.$$

Системой уравнений (4.16) задается поле «скоростей» (*dx/dt, dy/dt, dz/dt*). Его силовые линии – фазовые траектории. Дифференцируя первое уравнение по *x*, второе по *y* и третье по *z*, получим

(4.19) $$\partial^2 x/_{\partial t \partial x} = -\sigma, \quad \partial^2 y/_{\partial t \partial y} = -1, \quad \partial^2 z/_{\partial t \partial z} = -b.$$

Параметры r, σ и b в уравнениях (4.16) всегда положительны, поэтому сумма вторых производных (4.19)

$$div\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = -(\sigma + b + 1) < 0.$$

«Отрицательная расходимость» фазовых траекторий означает сжатие фазового объема нелинейной диссипативной системы с течением времени. Заметим, что изображающие точки на соседних траекториях при этом не сближаются, а расходятся. Одно другому не противоречит, потому что *фрактальная размерность* аттрактора Лоренца $d_{фр} \approx 2.06$ соответствует лишь доле трехмерного пространства (представим близкие траектории в пространстве, переходящие в далекие траектории на плоскости). Смысл нецелочисленной фрактальной размерности и правила, позволяющие ее рассчитать, мы обсудим в гл. 8.

Хаотическая динамика систем, заданных «классическими», то есть детерминистскими дифференциальными уравнениями с непрерывными дифференцируемыми функциями, стала одним из крупнейших открытий физики во второй половине XX века. Из-за расхождение фазовых траекторий для таких систем существует *горизонт предсказаний* t^*. На коротких промежутках времени $\Delta t \le t^* - t_0$, пока расстояние между близкими траекториями много меньше пройденного пути ($\varepsilon(\Delta t) << |\mathbf{\Delta r}_{1,2}(\Delta t)|$), состояние нелинейной диссипативной системы остается «условно детерминированным». При увеличении интервала Δt конечные состояния становятся крайне чувствительными к малым изменениям начальных условий (см. рис. 4.18), а также к стохастическому «шуму». Это делает прогнозы в области $t_0 < t < t^*$ вероятностными, а при $t > t^*$ невозможными. Непредсказуемость фазовых траекторий, заданных детерминистскими уравнениями, получила название *детерминированного хаоса*: явления, характерного именно для нелинейных систем.

Критическая зависимость траекторий от начальных условий была установлена и для консервативных систем, строго подчиняющихся законам классической механики. В *рассеивающих бильярдах* (или *бильярдах Синая*) небольшое отклонение первоначальной траектории шара уже после нескольких соударений с криволинейными стенками полностью изменяет его направление (рис. 4.19). Таким образом, информация о начальном состоянии системы почти сразу теряется: в пренебрежении трением шар неограниченно долго совершает хаотические перемещения по бильярду.

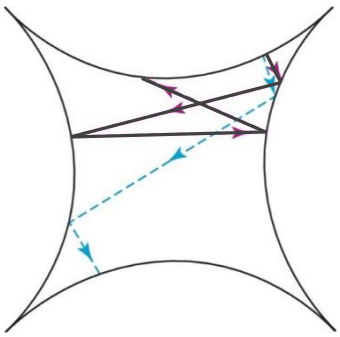


Рисунок 4.19. Траектории шаров в рассеивающем бильярде

Неустойчивые хаотические состояния также возникают в небесной механике. Уже *задача трех тел* (например, движение в системе Солнце-Земля-Луна) в классической механике нелинейна; в общем случае она не имеет аналитического решения. В строении Солнечной системы одним из следствий детерминированного хаоса являются *люки* (либо *щели*) *Кирквуда* в распределении астероидов по параметрам их орбит (рис. 4.20). В областях «люков» периоды обращения малых небесных тел вокруг Солнца относятся к периоду обращения Юпитера как небольшие целые числа (верхняя часть рисунка). В таких *резонансах* траектории астероидов неустойчивы из-за возмущений, вызванных притяжением к Юпитеру.

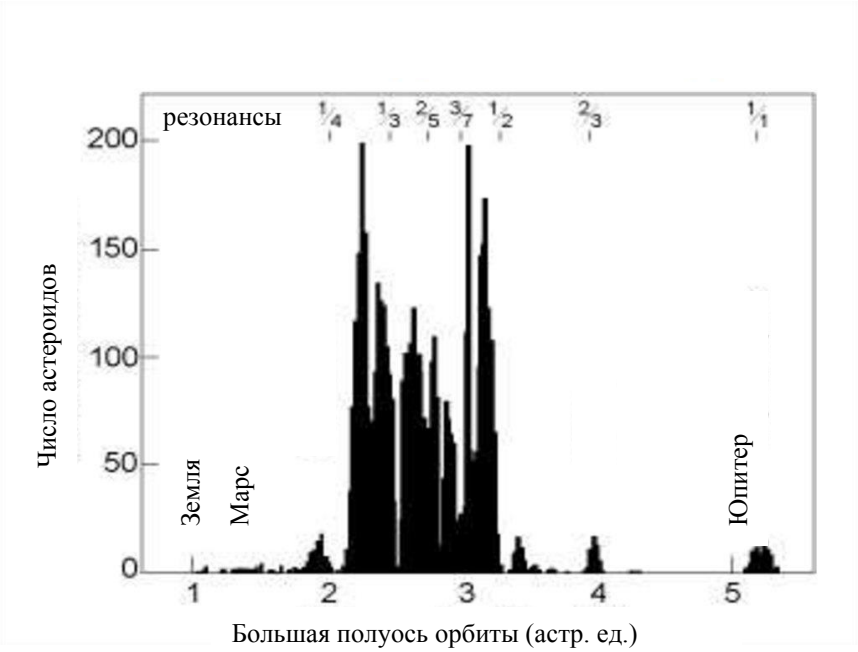


Рисунок 4.20. «Щели Кирквуда» в поясе астероидов Солнечной системы (К. Мюррей, С. Дермотт, *Динамика Солнечной системы* (пер. с англ.), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009).

Странные аттракторы и состояния детерминированного хаоса обнаружены не только в «неживых» физических и химических системах (брюсселятор, реакция БЖ и другие): они оказались весьма распространенными в биохимии, биологии, экологии, экономике, в общественных науках. Приложениям нелинейных математических моделей в биологических дисциплинах посвящена замечательная книга Г.Ю. Ризниченко ([5] в списке рекомендуемой литературы). «Нелинейное» моделирование социума мы рассмотрим в части II. Дискретные математические модели нелинейных систем, где особенно наглядно проявляется хаотическая динамика, будут обсуждаться в следующем разделе этой главы.

Энтузиазм исследователей в конце XX и начале XXI веков породил за пределами физики образ всемогущей «теории хаоса», якобы позволяющей перевести нелинейную систему (прежде всего общество) в любое нужное состояние малым внешним воздействием в «точке бифуркации». Эти суеверия могли внедриться в массовое сознание после геополитических перемен в конце XX века – однако они имеют не физический, а скорее манипулятивный смысл. Переход A→B и обратный переход B→A

в точке бифуркации равновероятны, а внешнее воздействие делает систему неавтономной и изменяет ее энергию, т.е. уничтожает хаос со всеми его свойствами. Так, наклонив бильярд Синая, мы сведем его хаотическую динамику к небольшим колебаниям шара в окрестностях нижнего угла. Подобно этому, хаотический аттрактор (по терминологии одного из создателей отечественной междисциплинарной физики Дмитрия Сергеевича Чернавского (1926–2016), *перемешивающий слой*) может возникнуть лишь в системах с «плоскими» участками многомерной гиперповерхности потенциальной энергии $U(x_1, x_2, ..., x_n) \approx$ const (см. раздел 3.4 в гл. 3).

Аналогия с бильярдом позволяет понять, почему странные аттракторы возникают лишь в фазовых пространствах размерности выше 2. Для достоверных предсказаний динамики нелинейных систем, помимо анализа фазовых траекторий, следует оценивать вероятность прихода системы в ту или иную область фазового пространства. Вероятность экзотических событий, наподобие упомянутых в эпиграфе, задается связанными с ними значениями энергии либо других энергоподобных функций: материальным выигрышем агентов (полезностью), приспособляемостью видов и т.д.

4.4. Стохастические системы

Термины «стохастический» и «случайный» – синонимы, но физики, как правило, используют их раздельно. В статистической физике случайными обычно называются микроскопические события (движение электронов в проводнике, столкновения молекул газа с поршнем), при усреднении которых можно вывести точные значения макроскопических параметров среды: газа, твердого тела или жидкости. Для того, чтобы считать средние значения «точными» без кавычек, стандартные отклонения, или *дисперсии*, средних величин должны быть на несколько порядков ниже ошибок их экспериментального измерения. Это возможно лишь при колоссальном числе событий (10^{20}–10^{23} и более в небольшую единицу времени), сравнимом с числом Авогадро ($N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ молекул в грамм-моле). Именно такие многочисленные и притом независимые «микро-события» в физике заслужили название случайных.

Отклонения измеряемых величин от их среднего по образцу вещества в физике называются *флуктуациями*. Если размеры флуктуаций составляют 10^{-3}–10^{-4} погрешностей измерения макроскопических параметров, зависимости этих параметров от координат и времени можно задавать непрерывными функциями и классическими дифференциальными уравнениями (см. разделы 3.2 и 3.3 в предыдущей главе). При этом предполагается, что очень малый объем вещества, в математической модели считающийся бесконечно малым, все еще остается однородным: его дискретная атомно-молекулярная структура не влияет на исследуемые процессы.

Тем не менее, на повседневном уровне мы постоянно сталкиваемся с проявлениями флуктуаций: голубой цвет дневного неба (рассеяние солнечного света на флуктуациях плотности воздуха), шорох в динамиках старой конструкции (флуктуации токов в электрических цепях), шум прибоя (флуктуации турбулентного движения воды) и многие другие. Процессы с неустранимым случайным изменением параметров системы,

превышающим погрешность их регистрации, в современной физике обычно называют *стохастическими*. Под это определение попадает и рассмотренная выше динамика макроскопических нелинейных систем: ее теория возникла как описание ламповых электронных устройств, изобретенных в первой половине XX века.

Существует область явлений, где флуктуации всегда имеют тот же порядок величины, что и параметры состояния системы. Это системы из большого, но много меньшего, чем число Авогадро N_A, количества частиц (примерно от 10^4–10^5 до 10^{14}–10^{15}, хотя границы условны). Подобные системы называются *мезоскопическими*; в них непосредственно проявляется дискретное строение вещества. Подавляющее большинство мезоскопических систем стохастические, хотя обратное утверждение неверно. Их важность для междисциплинарных приложений физики к социуму следует из того, что численность населения Земли ($\sim 8 \cdot 10^9$) позволяет назвать человечество, в физическом смысле, лишь мезоскопической, а никак не макроскопической системой. Поэтому описание социальных явлений средствами, перенесенными из «макроскопической» физики – это идеализация, которая в каждом конкретном случае требует проверки.

4.4.1. Мезоскопические системы и процессы в них

Броуновское движение

Самый известный стохастический процесс в «неживых» мезоскопических системах – *броуновское движение* инертных частиц размерами порядка нескольких мкм в жидкости или газе. Впервые его обнаружил и исследовал в 1827 г. английский ботаник Роберт Браун (Brown)[*], наблюдавший в микроскоп «дрожание» и перескоки частиц цветочной пыльцы в воде. В некотором смысле эти работы сформировали «золотой стандарт» междисциплинарной физики: несмотря на иную профессиональную принадлежность, Браун многочисленными наблюдениями (в том числе взвесей угольной пыли и других неорганических субстанций) доказал, что хаотические перемещения микрочастиц в жидкости не имеют отношения к живым организмам.

Причиной броуновского движения служат несбалансированные столкновения молекул окружающей среды с достаточно малыми частицами вещества. Если считать броуновскую частицу шаром радиуса $r = 1$ мкм, на её поверхности площадью $4\pi r^2 \sim 10^{-11}$ м^2 могут плотно разместиться 10^7–10^8 молекул H_2O либо иной низкомолекулярной жидкости: гептана, ацетона, толуола и т.д. (Предполагается, что каждая молекула занимает круг радиуса 3–4 Å (0.3–0.4 нм) с площадью $\sim 10^{-19}$ м^2 и соседние круги касаются.) Тогда перескоки молекул жидкости (для воды происходящие через $\sim 10^{-10}$ с: в каждый момент времени мигрирует около 1% всех молекул) равнозначны 10^5–10^6 ударам разной силы о поверхность частицы за указанный промежуток времени, т.е. более 10^{15} ударам в секунду. Нескомпенсированность этих ударов заставляет броуновскую частицу перемещаться. Микрочастицы, взвешенные в газе, будут испытывать сравнимое число

[*] В отечественной литературе закрепилась ошибочная транскрипция фамилии автора, как нередко происходило в указанное время (см. London).

столкновений с молекулами, средние импульсы которых выше, чем в жидкости (см. раздел 2.3 в гл. 2)*.

Траектории броуновских частиц, регистрируемые присоединенной к микроскопу видеокамерой, представляют собой хаотические комбинации линейных отрезков – смещений частицы между последовательными кадрами с промежутком времени Δt. Уменьшая Δt, т.е. ускоряя съемку, мы увидим на месте отрезка фрагмент нерегулярной траектории (рис. 4.21). Распределение длин отрезков при разных Δt при этом постоянны: броуновские траектории, как размеры капель жидкости в критическом флюиде (см. разд. 2.5 в гл. 2), обладают *статистической инвариантностью*.

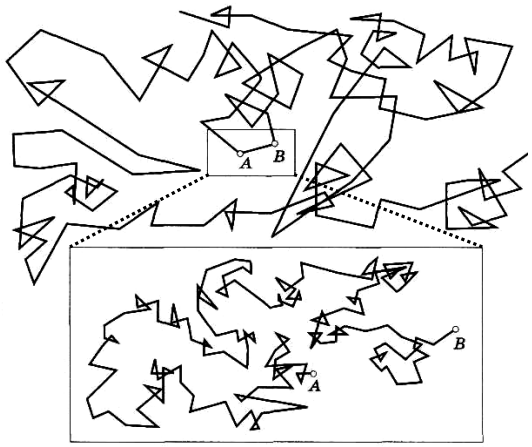


Рисунок 4.21. Траектория броуновской частицы. На врезке участок AB, записанный с меньшим шагом по времени

Движение броуновских частиц – пример случайного *марковского* процесса, также называемого *гауссовым* или *винеровским*. Суть этого процесса – независимость случайных сдвигов в последовательные промежутки времени Δt_i и Δt_{i+1}. Таким образом, информация о состоянии системы сводится только к положению частицы: «предыстория» движения стирается на каждом шаге. Марковские (или винеровские) траектории возникают в большом классе случайных процессов; они непрерывны, но обычных производных для них не существует.

Упрощенная модель случайных единичных сдвигов на квадратной решетке, на каждом следующем шаге по четырем равновероятным направлениям, включая возвращения назад (*«пьяный матрос»*) показана на рис. 4.22. Можно доказать, что среднее смещение от исходной точки в таком процессе возрастает пропорционально квадратному корню из числа сдвигов («шагов») N

(4.20) $$\Delta l = \text{const} \cdot \delta l \sqrt{N},$$

* Первое объяснение хаотической «пляски» пылинок в воздухе толчками невидимых частиц представил Тит Лукреций Кар в поэме «О природе вещей» (около 60 г. до н.э.). Гипотеза Лукреция выражала атомистические представления эпикурейской школы, хотя главный вклад в динамику частиц пыли дает микроскопическая турбулентность воздушных потоков.

где δl – смещение на одном шаге. Для броуновской частицы в жидкости или газе средний квадрат проекции смещения на любую ось за время t задает *формула Эйнштейна*

(4.20 а) $$\langle x^2 \rangle = 2Dt,$$

где D – коэффициент диффузии, который определяется природой среды и температурой:

(4.20 б) $$D = \frac{kT}{6\pi\eta r},$$

(здесь k – постоянная Больцмана, T – температура, r – радиус частицы, η – динамическая вязкость).

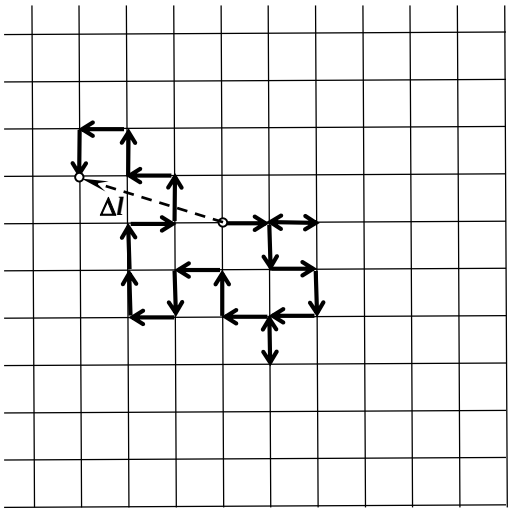


Рисунок 4.22. Случайные блуждания на квадратной решетке

Теорию броуновского движения и следующие из нее формулы (4.20 а, б) независимо вывели на основе кинетической теории А. Эйнштейн и М. Смолуховский в 1905-1906 г. Пятью годами раньше аналогичную математическую модель флуктуаций цены товара на бирже представил Луи Башелье в диссертационной работе «Теория спекуляций»; среди физиков она осталась незамеченной. На основании формулы (4.20 б) Жан Батист Перрен в 1908–1909 гг. впервые экспериментально измерил константу Больцмана и число Авогадро по распределению взвешенных микрочастиц в поле силы тяжести.

Стохастические дифференциальные уравнения

Одномерному движению броуновской частицы массой M и радиуса r в вязкой среде во внешнем поле с потенциалом U отвечает *уравнение Ланжевена*

(4.21) $$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \gamma\frac{\partial x}{\partial t} + F_\xi\ .$$

Здесь $\gamma = 6\pi\eta r$ – коэффициент вязкого трения (формула Стокса (3.53) в гл. 3; от дефицита греческих букв динамическая вязкость обозначена η); F_ξ – случайная (стохастическая) сила, возмущающая движение. На конечном промежутке времени Δt среднее значение стохастической силы $\langle F_\xi \rangle = 0$. Уравнению Ланжевена подчиняется, например,

осаждение микроскопических частиц в поле силы тяжести. Дифференциальные уравнения со случайными (стохастическими) переменными появились в математике в XX веке.

Уравнение (4.21) представляет собой запись 2-го закона Ньютона для частицы массой *M* с учетом вязкого трения и случайных ударов молекул среды. При движении броуновской частицы во внешнем поле ее скорость после каждого воздействия случайной силы изменяется лишь незначительно; в «стоп-кадрах» ее траектории отражаются изменения положения после многих столкновений. Плотность вероятности нахождения частицы в точке *x* в момент времени *t* можно задать непрерывной функцией $\rho(x,t)$, которой соответствует «концентрация» взвешенных частиц на единицу длины. В одномерном случае эта функция удовлетворяет дифференциальному *уравнению Фоккера-Планка*

(4.22) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,t)\rho(x,t)] + \frac{\partial}{\partial x}[\sigma^2(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)],$$

где $\mu(x,t) = \frac{1}{\Delta x}\int \rho(x,t)dx$ и $\sigma^2(x,t) = \frac{1}{\Delta x}\int[\mu(x,t) - \rho(x,t)]^2 dx$ – соответственно среднее значение и дисперсия (квадратичное отклонение от среднего) функции $\rho(x, t)$ в момент *t*. Если $\mu(x,t) = v = \text{const}$ и $\sigma^2(x, t) = D = \text{const}'$, уравнение (4.22) упрощается:

(4.22 а) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v\frac{\partial \rho}{\partial x} + D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

В этом случае v – скорость оседания взвешенных частиц под действием силы тяжести или, например, их «сноса» при ламинарном течении жидкости, *D* – коэффициент диффузии.

Очевидно, что (4.22 а) – уравнение параболического типа, родственное одномерному уравнению теплопроводности либо диффузии (формулы (3.28) в 3-й главе). С граничным условием $x(t = 0) = x_0$ решение этого уравнения – распределение Гаусса

(4.23) $$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left[-\frac{(x-x_0-vt)^2}{4Dt}\right].$$

Здесь среднее положение частиц $\langle x(t)\rangle = x_0 + vt$, а среднеквадратичное смещение распределения $\langle \xi^2\rangle = \langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2 = 2Dt$ (рис. 4.23).

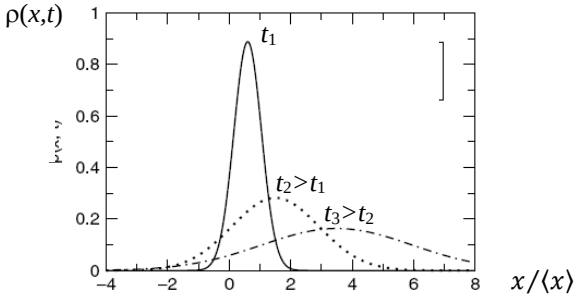


Рисунок 4.23. Плотность распределения микрочастиц в разные моменты времени в системе со сносом и диффузией

Распределениям на рис. 4.23 (сравните с рис. 3.14 в главе 3) отвечает расплывание капли чернил в ламинарном потоке воды. Для n независимых переменных (x_1 ,x_2 ,…, x_n) уравнение (4.22) принимает форму

(4.22 б) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left[D_i^{(1)}\rho\right] + \sum\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}\left(D_{ij}{}^{(2)}\rho\right)$$

где $\{D_i^{(1)}\}$ – *вектор сдвига*, $\{D_{ij}^{(2)}\}$ – *стохастический тензор диффузии*. В общем случае, который здесь не обсуждается, в уравнение Фоккера-Планка входит плотность вероятности $\rho(x_1, \dots x_n, v_1, \dots v_n, t)$ состояний системы в $2n$-мерном фазовом пространстве координат и скоростей, от которых также могут зависеть параметры $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$.

Уравнение Фоккера-Планка принадлежит к семейству дифференциальных уравнений физической кинетики. Подобными уравнениями, в частности, описывают эволюцию неравновесных систем, включающую процессы диффузии. Случаю $\langle\xi^2\rangle = \sigma^2 t^\alpha$ при $\alpha \neq 1$ (где t – время) отвечает *аномальная диффузия*:

$\alpha < 1$ – диффузия через поры
$\alpha > 1$ – «полет Леви».

Второй режим, порождающий негауссовы распределения плотности вероятности, возникает при более высоком коэффициенте диффузии «быстрых» частиц. Распределения случайных величин, включая распределение Леви, будут рассмотрены в части II, гл. 8.

Помимо хаотических блужданий и движения в детерминистском внешнем поле (сноса), уравнения типа (4.21) распространяются на процессы «реакция-диффузия»

(4.24) $$\frac{\partial c_i}{\partial t} = F_i(c_1, c_2, \dots, c_n) + D_i \Delta c_i$$

В системе n дифференциальных уравнений (4.24) $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ – концентрации реагирующих веществ, $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ – коэффициенты их диффузии, $\Delta = \partial^2/x^2 + \partial^2/y^2 + \partial^2/z^2$ – оператор Лапласа (см. разд. 3.2 главы 3). Нелинейные термы $\{F_i\}$ заданы уравнениями химической кинетики. В одномерном случае с единственной переменной концентрации c для автокаталитической квази-мономолекулярной реакции

(4.24 а) $$\frac{\partial c}{\partial t} = kc(1-c) + D\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}$$

соотношение (4.24 а) называется *уравнением Фишера*.

Уравнениями «реакция-диффузия» описывают распространение автоволн в активной среде, способной поддерживать химическую реакцию (брюсселятор, реакция БЖ, возбуждение нервного импульса). При распространении двумерных волн в тонком слое часто встречаются спиральные конфигурации, инициирующие возбуждение: *реверберато́ры* (см. рис. 4.9 б). Кинетические уравнения (4.24) и следующие из них автоволны на качественном уровне позволяют объяснить возбуждение и синхронизацию

колебаний сердечной мышцы и ряд других жизненно важных биологических процессов. В области популяционной экологии эти волны воспроизводят динамику распространения взаимосвязанных видов на основе модифицированной модели Лотки-Вольтерра (см. [5] в списке литературы). Автоволнами, отвечающими уравнению Фишера (продукт реакции ускоряет её движение), интерпретировались археологические данные по распространению земледелия на территории неолитической Европы со средней скоростью ~1 км в год [6].

Стохастический резонанс

Одним из специфических эффектов самоорганизации нелинейных диссипативных систем является *стохастический резонанс*. Это явление возникает в *бистабильных* системах с двумя энергетическими минимумами одинаковой либо близкой глубины, разделенными потенциальным барьером, при одновременном действии слабого периодического возбуждения и сильного «белого» шума. Слабое периодическое возбуждение, недостаточно интенсивное для того, чтобы перебросить систему через барьер, само по себе не вызывает вынужденных колебаний (рис. 4.24 а). Высокочастотный шум в этих условиях настолько повышает энергию системы, что возникает резонансное поглощение, связанное с осцилляцией между соседними минимумами (рис. 4.24 б). Вероятность колебаний зависит от мощности шума и достигает максимума при соотношении $\tau = \frac{1}{2}T$, где τ – среднее время между случайными переходами системы из одного минимума в соседний, T – период вынужденных колебаний (рис. 4.25).

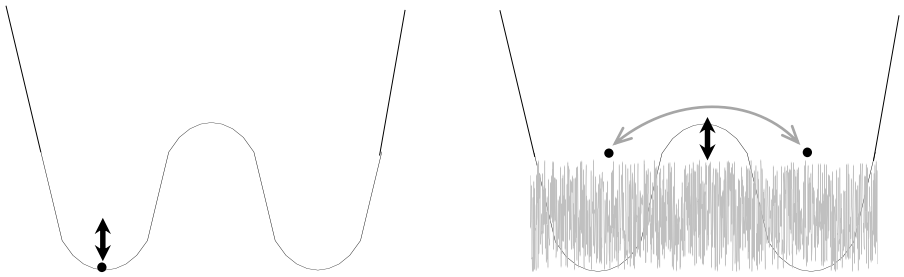


Рисунок 4.24. «Шумовое» возбуждение вынужденных колебаний в бистабильной системе: (а) нет шума и колебаний, (б) шум активирует колебания (стохастический резонанс)

Явление стохастического резонанса было впервые предложено в 1980-е гг. как геофизический механизм наступления ледниковых периодов и затем экспериментально обнаружено в широком классе нелинейных систем. «Контринтуитивной» способности шума повышать упорядоченность системы, улучшая соотношение «сигнал–фон», посвящен ряд публикаций[7]. Во второй части книги мы рассмотрим некоторые проявления этого эффекта в междисциплинарной физике.

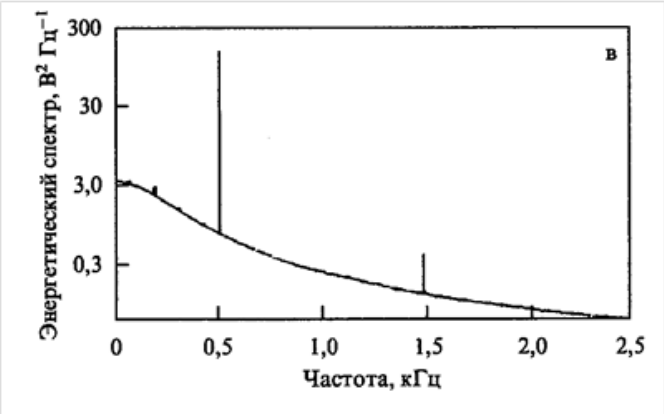


Рисунок 4.25. Стохастический резонанс: зависимость сигнала бистабильной системы от частоты «белого» шума. Максимум на ~1.5 кГц – первая нечетная гармоника (см. обзор[7])

4.4.2. Дискретные отображения

Функции вида $y = f(x)$ выражают зависимость измеряемой величины y от непрерывного аргумента x. В действительности величины x и y регистрируют в некоторых интервалах Δx, Δy как средние $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$; точность и ширина интервалов определяются методикой измерений. Поэтому в более реалистическом приближении надо рассматривать зависимость дискретных величин $y_n = f(x_n)$, где $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ – измеряемые значения аргумента, которым отвечают измеряемые значения функции $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$. При этом первая производная функции $f_n(x_n)$ принимает вид

(4.25) $$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}$$

Если переменная x пробегает дискретные значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_n = n$, …, формула (4.25) переходит в *разностное уравнение*

(4.25 а) $$f'(x_n) = y_{n+1} - y_n, \qquad \text{или} \qquad y_{n+1} = f'(x_n) + y_n$$

Соотношение (4.25 а) можно получить, разлагая непрерывную функцию $y = f(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = x_n$, отбрасывая высшие производные и принимая $\Delta x = 1$. Выразив значение x_n через обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, при $\Delta x = 1$ мы перейдем от непрерывной функциональной зависимости к *дискретному отображению*, удобному для компьютерных расчетов методом *итераций*

(4.25 б) $$y_{n+1} = f'(x_n) + y_n = f'[f^{-1}(y_n)] + y_n = F(y_n)$$

Примеры дискретных отображений, известные нам со школы – это *числовые ряды*

$x_{n+1} = x_n + A$ – *арифметическая прогрессия*,
$x_{n+1} = Bx_n$ – *геометрическая прогрессия*

(рис. 4.26). Пользуясь формулой (4.25 а), нетрудно найти их прототипы среди непрерывных функций

$x(t) = x_0 + at$ (где $A = x'(0) = a$) и, соответственно,

$x(t) = x_0 e^{bt}$ (здесь $B = x'(0) = x_0 b$; x_0 – начальное значение функций),

в которых непрерывный параметр t (время) заменяется целым числом n (номером шага).

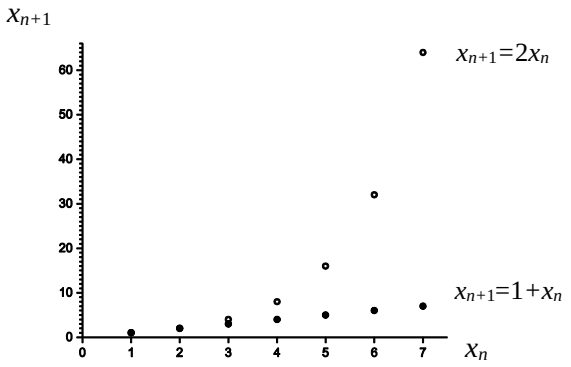


Рисунок 4.26. Арифметическая и геометрическая прогрессии

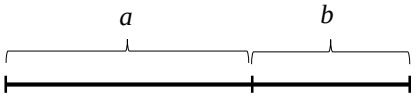
Простой вид (4.25 б) дискретных отображений обманчив. Для многих из них обнаружены сложные и необычные математические свойства, исследуемые до настоящего времени. Целым рядом таких свойств обладает, например, бесконечный *ряд Фибоначчи*, известный европейцам с XIII века, но значительно раньше открытый в Индии:

(4.26) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 19, … или $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$ для всех $n > 2$

Числа ряда Фибоначчи, обычно обозначаемые $\{F_n\}$, с увеличением номера n демонстрируют приближенно экспоненциальный рост* и асимптотическое отношение

$$\lim_{n\to\infty} {}^{F_{n+1}}\!/_{F_n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033\ldots$$

Иррациональное число φ – известное с античных времен *золотое сечение*, существующее в ряде геометрических фигур и во многих архитектурных пропорциях. Так называется разбиение отрезка на две части, при котором длины отрезка и его большей части относятся так же, как большая часть к меньшей (рис. 4.27). Это число является решением разностного уравнения $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Рисунок 4.27. Золотое сечение отрезка

Среди многих красивых и необычных свойств золотого сечения – возможность представить его в виде бесконечной *цепной дроби*

* $F_n \approx \frac{\varphi^{n-1}}{\sqrt{5}}$: ближайшее целое число

(4.27) $$\varphi = \frac{\varphi+1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \cdots.$$

Из формулы (4.27) следует *золотой прямоугольник*, изобретенный Евклидом в IV веке до н.э.: длины его сторон относятся как число φ. Построив внутри золотого прямоугольника квадрат на его меньшей стороне, мы получим в оставшейся части фигуры золотой прямоугольник меньшего размера, который можно преобразовать аналогичным образом. Если в полученной последовательности вложенных золотых прямоугольников во всех квадратах с общей стороной провести циркулем дуги окружностей, мы построим *золотую спираль* по методу Дюрера (рис. 4.28).

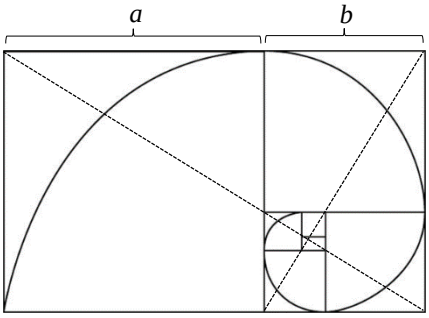


Рисунок 4.28. Золотой прямоугольник и золотая спираль (пересечение пунктирных диагоналей – точка фокуса)

ЗАДАЧА 4.4. Найдите число φ, преобразовав разностное уравнение в квадратное.

Логистическое отображение и его свойства

Многие процессы в биологических, экономических и социальных системах естественно представлять в виде разностных уравнений. Так, динамику биологической популяции в ограниченном ареале, которая в первом приближении отвечает логистической зависимости, следует сопоставлять с ее ежегодной численностью либо с данными за иной промежуток времени, кратный циклу воспроизведения особей. Разностный вариант уравнения Ферхюльста, называемый *логистическим отображением*, был исследован во второй половине XX века. Несмотря на простую форму, эта математическая конструкция, как и другие дискретные отображения, имеет серию необычных динамических режимов и обширную область хаоса.

Разностную форму логистического уравнения $dy/dt = ay - by^2$

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{1} = ay_n - by_n{}^2, \qquad \text{т.е.} \qquad y_{n+1} = (a+1)y_n - by_n{}^2,$$

можно упростить изменением масштаба переменных

$$y = \frac{a+1}{b}x, \text{ отсюда}$$

$$\frac{a+1}{b}x_{n+1} = \frac{(a+1)^2}{b}x_n - \frac{(a+1)^2}{b}x_n{}^2 = \frac{(a+1)^2}{b}(x_n - x_n{}^2) \qquad \text{или, сократив на } \frac{a+1}{b},$$

(4.28) $$x_{n+1} = (a+1)(x_n - {x_n}^2) = \lambda x_n(1 - x_n).$$

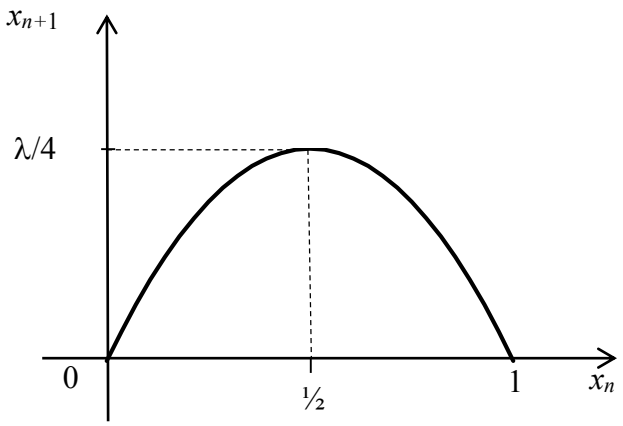


Рисунок 4.29. Непрерывная функция логистического отображения $F(x_n)=\lambda x_n(1-x_n)$

В уравнении (4.28) переменная $0 \le x \le 1$ соответствует численности популяции относительно ее максимального асимптотического значения $x_\infty = 1$ (см. рис. 2.2 во второй главе), λ – коэффициенты размножения и подавления, приведенные к единой шкале. Произведение $x(1–x)$ имеет максимум ¼ в центре отрезка [0, 1] (x = ½). По условию задачи, значения x положительны и не превышают 1, поэтому множитель λ может иметь значения от 0 до 4 (рис. 4.29). С увеличением λ в этом интервале поиск решения (4.28) методом последовательных приближений (итераций) дает очень разные результаты: сходимость к устойчивому предельному значению, осцилляции и затем сложные осцилляции. По мере приближения к предельной точке $\lambda_\infty \approx 3.57$ поведение приближенных решений усложняется; при $\lambda > \lambda_\infty$ оно становится хаотическим.

Решения разностных уравнений вида $x_{n+1} = F(x_n)$ находят графически методом итераций на *диаграмме Ламерея*. В этом алгоритме на координатную плоскость (x_n, x_{n+1}) наносят график зависимостей $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ (перевернутую параболу) и диагональ квадранта $x_{n+1} = x_n$. Первое приближение x_1 находят, проводя вертикальный отрезок из исходной точки x_0 до пересечения с логистической параболой (точка x_0') и затем горизонтальный отрезок из точки x_0' до пересечения с диагональю $x_{n+1} = x_n$ (штриховые обозначения не имеют отношения к производным!) На второй итерации так же определяют точку параболы x_1', соответствующую точке x_1 на оси абсцисс, проводят из нее горизонтальный отрезок до пересечения с диагональю (2-е приближение, x_2) и так далее. Полученная ломаная линия, звенья которой параллельны координатным осям, часто называется *лестницей Ламерея*. Приближенные значения $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ стремятся к неподвижной точке логистического отображения $x_{n+1}' = x_n'$ (рис. 4.30).

Множитель λ в логистическом отображении также называется коэффициентом воспроизводства. Для модельной популяции с циклом воспроизведения $\Delta t = 1$ (например, в год) коэффициент воспроизводства $0 < \lambda < 1$ означает уменьшение популяции на

каждом следующем шаге. В этом случае диагональ $x_{n+1} = x_n$ лежит выше логистической параболы, пересекаясь с ней лишь в начале координат и «лестница» итераций стремится к неподвижной точке $x = 0$: устойчивое состояние – отсутствие популяции (рис. 4.30 а). При $1 \leq \lambda \leq 2$ прямая $x_{n+1} = x_n$ пересекает параболу в точках $x^{(1)} = 0$ и $x^{(2)} = (\lambda-1)/\lambda$. В этом случае решение $x = 0$ становится неустойчивым: при $x = 0$ производная $dF/dx = \lambda(1-2x) > 1$, т.е. при малом сдвиге из начала координат значения x_n возрастают. Итерации приводят к устойчивой точке $x_{n+1} = x_n = (\lambda - 1)/\lambda$, которой соответствует асимптотическая относительная численность вплоть до $x = ½$ при $\lambda = 2$ (рис. 4.30 б).

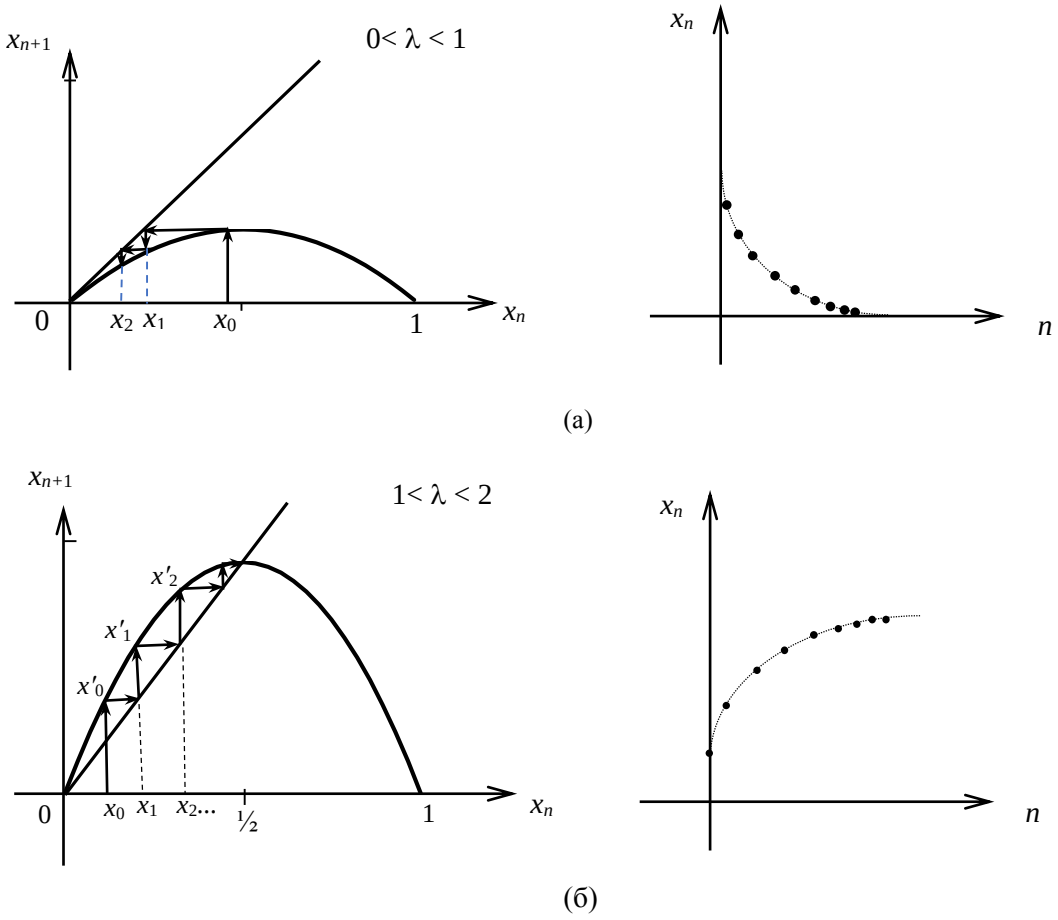
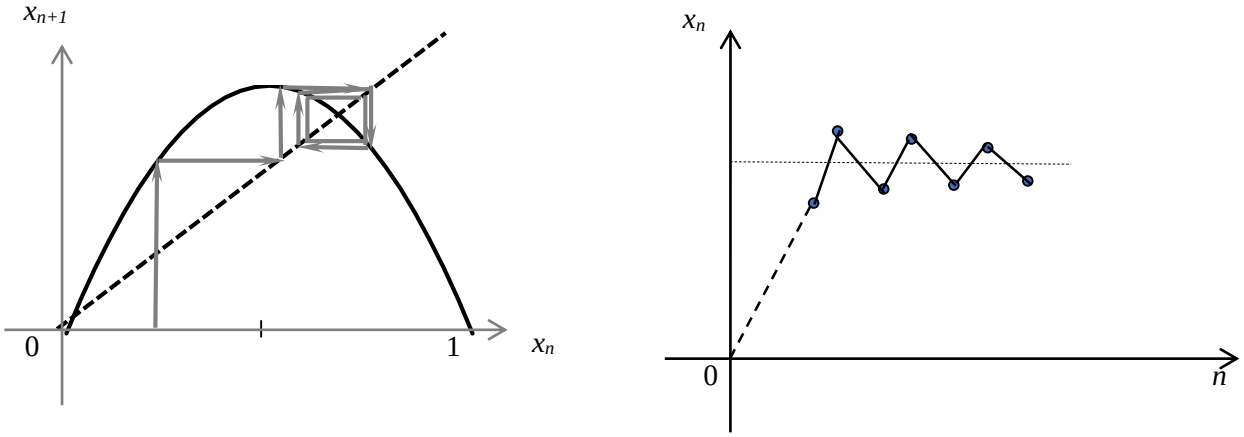


Рисунок 4.30. Сходимость лестницы Ламерея к стационарной точке: (а) $x_n \to x^{(1)}=0$, (б) $x_n \to x^{(2)}=(\lambda-1)/\lambda$

Заметим, что квадратное уравнение (4.26) имеет точные аналитические решения $x^{(1)} = 0$ и $x^{(2)} = (\lambda-1)/\lambda$ при любом параметре $\lambda \leq 4$; значению $\lambda = 4$ соответствует $x = ¾$. Но в интервале $2 < \lambda < 3$ «графические» решения, приближаясь к $x^{(2)}$, ведут себя иначе, чем при $\lambda \leq 2$: они демонстрируют затухающие осцилляции (рис. 4.31). В этой области особая точка $x^{(2)}$ логистического отображения имеет характер фокуса в том же смысле, что при $1 \leq \lambda \leq 2$ решение $x^{(2)}$ – устойчивый узел.



(а) (б)

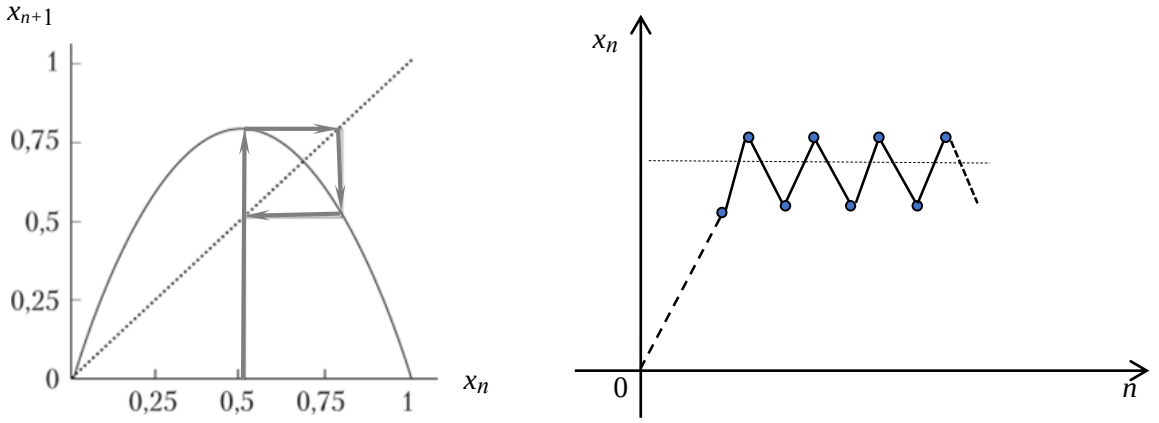
Рисунок 4.31. Стационарная точка $x^{(2)}=(\lambda-1)/\lambda$ при $2<\lambda<3$: (а) устойчивый фокус (*паутинная диаграмма*), (б) затухающие колебания $x_n(n)\to x^{(2)}$

При $3 \le \lambda \le 1+\sqrt{6}\ (\cong 3.449)$ точка $x^{(2)}=(\lambda-1)/\lambda$ теряет устойчивость: приближенные решения осциллируют в ее окрестностях. Иначе говоря, небольшое отклонение δx от $x^{(2)}$ в этом интервале приводит к незатухающим колебаниям приближенных значений $x_{n+1}(x_n)$ (Рис. 4.32 а). Особая точка $x^{(2)}$ становится здесь «точкой цикла 2».

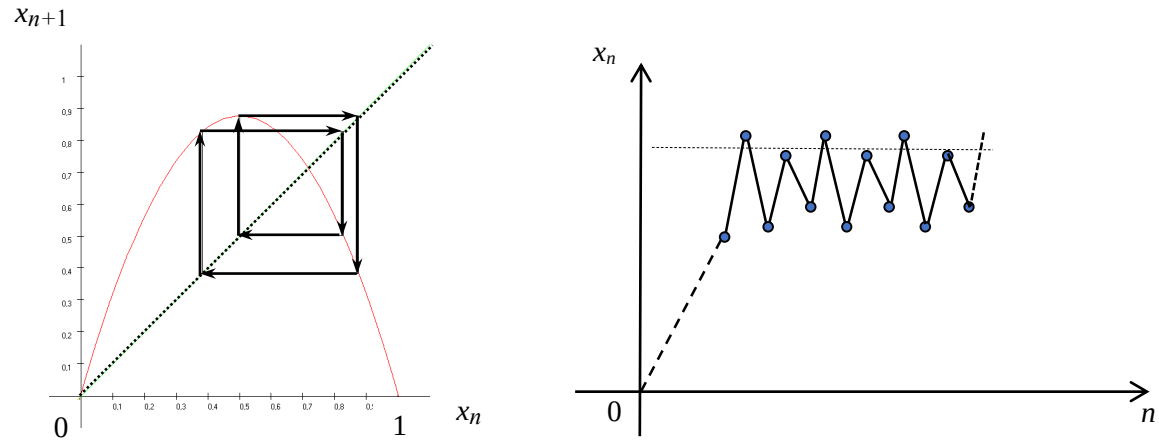
Из-за формы дискретных «фазовых траекторий» в области осцилляций диаграммы Ламерея также называют *паутинными диаграммами*. По мере возрастания параметра в области $\lambda > 1+\sqrt{6}$ приближенные решения в интервале $3.45<\lambda<3.54$ начинают осциллировать между четырьмя значениями *двойного цикла* или «цикла $2^2 = 4$», затем между 8, 16 и более значениями. Бифуркации удвоения цикла (2^3, 2^4 и т.д.) с увеличением λ сгущаются, отношение последовательных длин интервалов стремится к *константе Фейгенбаума*:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta\lambda_n}{\Delta\lambda_{n+1}} = \delta = 4.6692016\ldots$$

Наконец, при пороговом значении параметра $\lambda_\infty = 3.5699456\ldots$ «итерации» становятся хаотическими. На бифуркационной диаграмме (рис. 4.33) интервалу $\lambda_\infty < \lambda < 4$ соответствует область динамического хаоса.



(а)



(б)

Рисунок 4.32. Осцилляционная динамика: (а) $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$: устойчивый цикл, (б) $\lambda > 1 + \sqrt{6}$ удвоение цикла

Причины и механизм сложной динамики, присущей логистическому отображению (а также другим дискретным отображениям на основе непрерывных дифференцируемых функций с единственным максимумом – *унимодальных*) здесь не рассматриваются. Исследования этих проблем в XX веке способствовали возникновению *теории универсальности, теории хаоса* и других новых направлений математики. Заметим, что сложная и хаотическая динамика в нелинейных дискретных системах появляется «раньше», чем в системах нелинейных уравнений с непрерывными функциями. Действительно, «притягивающие» траектории в пространстве двух непрерывных переменных возникают при кубической нелинейности, а динамический хаос начинается с трехмерных фазовых пространств – тогда как их аналоги наблюдаются в дискретных сдвигах квадратичного логистического отображения. Помимо биологии и экологии, разностные уравнения возникают в задачах экономики (производственные циклы), стохастических организационных системах (биржа), политологии (электоральный цикл, политическая нестабильность) и других объектах междисциплинарного исследования. Примеры будут обсуждаться в следующей части книги.

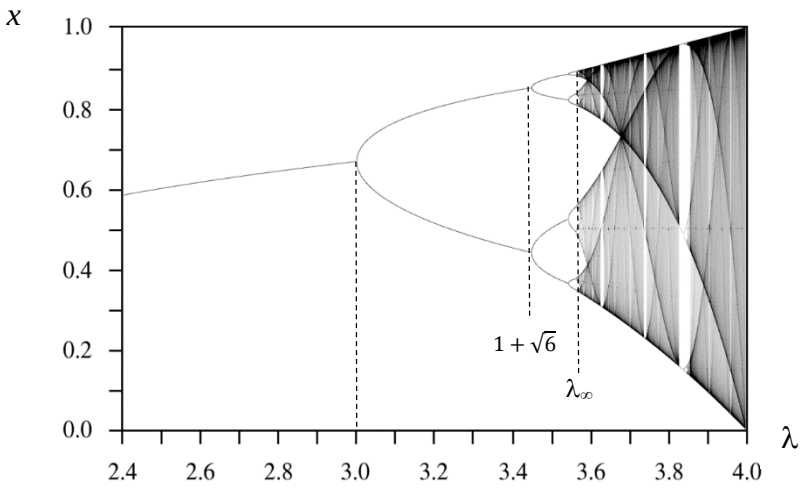


Рисунок 4.33. Бифуркационная диаграмма логистического отображения

Литература к разделу 4.4

[6] I. Fort, V. Mendes, *Reaction-diffusion waves of advance in the transition to agricultural economics*, Phys. Rev. E, 1999, **60**, 5894.

[7] В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер, *Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка*, Усп. физ. наук, 1999, **169** (1), 7.

Рекомендуемая литература

1. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин, *Теория колебаний*, 2-е изд., М.: Физматлит, 1959.

2. В.Т. Гринченко, В.Т. Мацыпура, А.А. Снарский, *Введение в нелинейную динамику: хаос и фракталы*, 3-е изд., М.: ЛКИ, 2010.

3. Ю.А. Данилов, *Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение*. 2-е изд., М.: КомКнига, 2006.

4. Г.Г. Малинецкий. *Математические основы синергетики*. 5-е изд. Москва: ЛКИ, 2007.

5. Г.Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии*, 2-е изд., Москва-Ижевск: R&C Dynamics, 2011.

6. Ю.Ю. Тарасевич, *Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс*. М.: УРСС, 2003.

ЧАСТЬ II. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этой части мы приступаем к обсуждению результатов, полученных в исследованиях социальных систем методами, в широком смысле слова принадлежащими к междисциплинарной физике. Необходимая оговорка («в широком смысле») вызвана двумя обстоятельствами. Во-первых, область физики огромна и разнообразна, она включает множество математических, теоретических, формально-логических, экспериментальных (и так далее) закономерностей, а также наблюдений, гипотез и просто полезных эмпирических рецептов. Многие такие приемы, формулы, а в последние десятилетия и программы успешно применяются за пределами физики. Но в первой части книги мы могли видеть, что простой перенос физических моделей в другие науки (например, в экономику) существенно ограничивает их общность и заставляет искать объективное содержание параметров – которого в новом контексте, возможно, и нет. По этой причине к физике в широком смысле слова приходится отнести лишь работы, основанные на анализе не вполне физической реальности максимально строгими эмпирически обоснованными методами.

А во-вторых, в междисциплинарных приложениях трудно разделить нестандартную физику и то, что называется *социальной инженерией*: методы управления объектами экономической и социальной природы, построенные по аналогии с физическими инженерными схемами. Примеры новых глав физики, выросших из практических задач, приводились в первой части. Поэтому расчетные модели городского хозяйства или, далее, технический анализ биржи, скорее относящиеся к инженерным приложениям, тоже будут нами рассматриваться. Главные критерии включения работы в «междисциплинарный» круг – логическая замкнутость, по возможности строгий подход к регистрации и обработке данных, сопоставление выводов модели с реальностью. Как мы увидим ниже, эти критерии действительно позволяют очертить круг задач современной междисциплинарной физики.

Из общих соображений легко привести примеры сильного влияния физических факторов на экономику и социум. Например, бесспорно, что любые социальные конструкции на Земле критически зависят от потока солнечной энергии. Влияние климата на историю и экономику в последние десятилетия не оспаривается; эти вопросы будут обсуждаться в гл. 9 вместе с математическим моделированием исторических явлений. Однако геофизические процессы, отвлекаясь от редких катастроф, в масштабе человеческих поколений протекают медленно (*адиабатически*): они помогают объяснить причину Великого переселения народов, но не динамику связанных с ним событий. Для понимания более быстрых изменений в социальных системах (включая биржевую торговлю, провоцирование политических конфликтов, военные действия и т.д.) надо учитывать иные объективные факторы.

Основой формализации общественных явлений в академических и прикладных дисциплинах служат три существенно разных обстоятельства.

1. Человек – объект материального мира: для его жизни и деятельности важны баланс энергии и связи с другими объектами и субъектами; в частности, с другими людьми. Это позволяет использовать в описании социума квазифизические параметры:

инерцию (пропорциональную количеству взаимосвязанных индивидуумов), силу связей между единицами-агентами, энергоподобные характеристики (например, полезность), а также аналоги корпускулярной структуры общества и действующих в ней «полей». Такое описание мультиагентных систем составляет основу современной *социофизики*, где формализм в основном заимствуется из физики «неживых» многочастичных систем. Мы увидим, что этот подход на качественном уровне позволяет объяснить многие социальные процессы, но для количественных прогнозов подобные аналогии, как правило, оказываются слишком прямолинейными.

2. Человек – биологическое существо, он участвует в конкуренции (если не живет в состоянии конкуренции) за лучшие жизненные условия как с другими индивидуумами, так и коллективно в составе социальных систем. Математическим аппаратом, позволяющим «исчислить» конкуренцию, является *теория игр*, широко применяемая в экономике, социологии, политологии, теории управления. Этот подход близок к социофизике, но их непосредственное пересечение невелико. Мы рассмотрим некоторые теоретико-игровые модели, используемые в общественных науках – и убедимся, что большинство объяснений и предсказаний здесь также работает лишь на качественном уровне. Разумно предположить, что и физическая, и биологическая стороны человеческой природы сами по себе не позволяют построить строгое описание социума, хотя учет этих факторов безусловно необходим.
3. Человек – существо социальное: все люди вовлечены в коллективный процесс получения, обработки и обмена информации внутри социальной системы. Не вполне очевидной, но неотъемлемой частью такого процесса является *распределенный интеллект* социальных систем. Данное направление, пока тоже развиваемое скорее на качественном уровне, будет обсуждаться в третьей части.

В начале этой части книги (главе 5 по сквозной нумерации) мы рассмотрим движение *живых частиц* – от микроорганизмов до автомобилей и пешеходов. Так как в пространстве перемещаются объекты с ненулевой массой, подверженные внешним воздействиям и направляемые собственным «мотором», данный круг вопросов близок к механике. Глава 6 будет посвящена анализу структурной основы социумов и экономики: *сетей*, а также процессов на сетях. Данное направление с 1990-х годов стало быстро растущей областью как самой физики, так и ее междисциплинарных приложений. В этой же главе приводится необходимый минимум сведений из теории графов. В главе 7 будут представлены основные положения теории игр и кратко рассмотрены ее разделы, применяемые в задачах экономики, планирования и разрешения конфликтов в социальных системах.

Результаты 6-й и 7-й глав – как теоретико-игровые, так и «сетевые» – будут использованы в главе 8, посвященной приложениям междисциплинарной физики в экономических науках. Математические модели экономики и физики пересекаются довольно широко. Мы обсудим не только стохастические модели биржи и методы *финансовой математики*, которые в 1990-х годы породили новое направление *эконофизики*, но и более традиционное формальное описание экономических процессов. Некоторое внимание мы уделим сложному и не вполне ясному вопросу о физическом содержании экономических теорий. Наконец, в 9-й главе будут рассмотрены приложения междисциплинарной физики в лингвистике, социологии, политологии и современной

математической истории – разнородных, но внутренне связанных областях. Здесь также пригодятся процессы на сетях и теоретико-игровые подходы. Систематическое обсуждение «коллективного разума» социальных и политических акторов, неотрывного от данного материала, будет представлено в третьей части.

Автор предполагает, что ознакомление читателей с разделами физики, используемыми в моделировании социума (часть 1 настоящей книги), в той или иной степени принесло пользу. В этой и следующей частях будет обсуждаться современное состояние (англ. *state of art*) междисциплинарной физики общества: новой и пока разнородной, возникающей у нас на глазах дисциплины. Необходимые сведения из математики (графы, фракталы, теория игр, энтропия по Шеннону, теория катастроф, а в третьей части элементы теории управления и математической логики) по-прежнему будут излагаться без доказательств на максимально простом прикладном уровне – как полезный и в конечном счете несложный рабочий инструмент. Некоторые вопросы и задачи для закрепления нового материала в последующих главах останутся, но их целью будет не повторение основ физики, а иллюстрации применения ее методов в общественных науках.

ГЛАВА 5. ДВИЖЕНИЕ «ЖИВЫХ» ЧАСТИЦ

Принципы динамики самодвижущихся частиц. Движение бактерий, тамблинг, хемотаксис, «турбулентность». Бактериальные автоволны и рост городов. Модели двумерного и трехмерного кооперативного движения «живых» частиц: рыбы, птицы и дроны. Клеточные автоматы, «Игра в Жизнь».

Режимы автомобильных потоков, свободное и стесненное движение, пробка. Фундаментальная диаграмма, макроскопическое и микроскопическое моделирование, модели клеточных автоматов. Прерывистое управление. Мониторинг и прогнозирование дорожного движения.

Динамика пешеходных потоков, модель социального поля. Принцип минимальных усилий. Безопасность массовых мероприятий, моделирование экстренной эвакуации и другие средства «управления толпой».

В этой главе мы рассмотрим механическое движение живых и искусственных объектов, не относящихся к канонической физике. Тем не менее, эти объекты обладают массой, подвержены воздействию внешних сил и перемещаются в соответствии с физическими законами благодаря собственному внутреннему источнику энергии. В научной литературе их называют *живыми* (англ. living particles), а также «моторными» (driven) либо «самодвижущимися» (self-propelled) частицами. Два последних термина позволяют описывать движение как живых существ, начиная с бактерий, так и технических устройств: групп (*формаций*) беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), автономных подводных аппаратов, колесных роботов. К «самодвижущимся» относятся также устройства, управляемые людьми – прежде всего автомобили на шоссе.

Во всех рассматриваемых нами случаях движущиеся единицы взаимодействуют как с окружающей средой, так и друг с другом. Благодаря взаимодействиям они объединяются в систему, динамика которой и является предметом исследования. При этом каждая мобильная частица перемещается к некоторой собственной цели (беспилотный аппарат – выполняя определенную программу). Подобные частицы иногда называют «мотивированными». По сложившейся традиции, мы будем называть все такие объекты *агентами* (от английского термина *agent*: действующий). Термин не несет оценочного содержания: он используется вместо физического понятия «частицы» в описании очень широкого круга динамических явлений в социуме.

Автономный агент в социальной системе обычно имеет некоторую схему действий для достижения цели: *стратегию*. Это справедливо для всех «частиц», способных воспринимать информацию о своем состоянии. Стратегии агентов и внешние воздействия на них определяют динамику системы. Но в случае механического движения стратегии имеют довольно простой вид: «переместиться из пункта А в пункт Б с минимальным риском». Таким стратегиям можно придать форму квазифизических потенциалов притяжения к целям с отталкиванием от препятствий и источников опасности. Поэтому перемещение «самодвижущихся» частиц обычно моделируют движением материальных объектов в совокупности физических и виртуальных силовых полей.

5.1. Движение бактерий и бактериальные автоволны

Бактерии – одноклеточные микроорганизмы, по размерам и массе близкие к броуновским частицам. Будучи живыми существами, бактерии способны перемещаться в

жидкой среде и размножаться в благоприятных условиях. Этим порождаются кооперативные процессы, имеющие аналогии в других динамических системах: корреляции движения частиц и распространение популяционных автоволн.

Наиболее изученным представителем движущихся жгутиковых бактерий является кишечная палочка *Escherichia coli* (рис. 5.1). Перемещение таких бактерий направляется кругообразным движением сплетенных жгутиков (*флагелл*), играющих роль мотора. При размере живой частицы L~1 мкм и скорости v ее перемещения в воде от 20 до 80 мкм/с число Рейнольдса $Re = vL/\eta$ (фактически – отношение «силы инерции» объекта mdv/dt к силе вязкого трения γv, см. разд. 3.2.5 в главе 3) на 10 порядков ниже, чем у плывущего в воде человека. Таким образом, водная среда для бактерий является очень вязкой, а их движение происходит «по Аристотелю», останавливаясь с прекращением действия вынуждающей силы. Мезоскопические перемещения бактерий возмущаются хаотическим броуновским движением, вызванным толчками молекул, окружающих частицу.

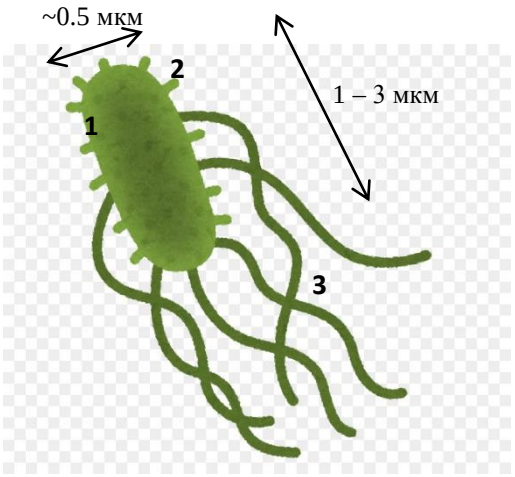


Рисунок 5.1. Бактерия кишечной палочки *Escherichia coli*: (1) оболочка, (2) выросты (фимбрии) (3) флагеллы

Траектории движения жгутиковых бактерий внешне напоминают динамику броуновской частицы (рис. 5.2; см. рис. 4.21 в гл. 4). Однако, в отличие от броуновских частиц, траектории жгутиковых бактерий действительно состоят из прямолинейных либо гладких отрезков протяженностью 10-100 мкм. В конце участка *ровного плавания* флагеллы бактерии расплетаются и в течение ~0.1 с происходит «кувырок» (англ. *tumbling*) с хаотическим изменением направления движения на следующем отрезке. В результате такого движения бактерии смещаются в сторону увеличения благоприятных факторов среды (концентрации питательных веществ, освещенности и др.) либо в сторону уменьшения неблагоприятных. Это результирующее смещение называется *таксисом* (хемотаксисом, фототаксисом и др.), а факторы притяжения и отталкивания (*эффекторы*) – соответственно аттрактантами и репеллентами. С повышением интенсивности эффекторов изменяются длина «пробега» и частотность тамблинга[1].

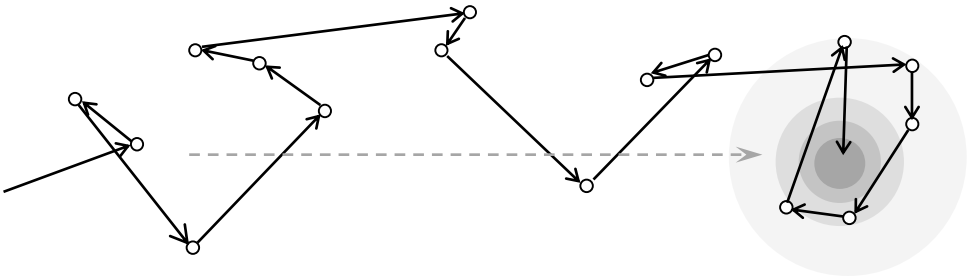
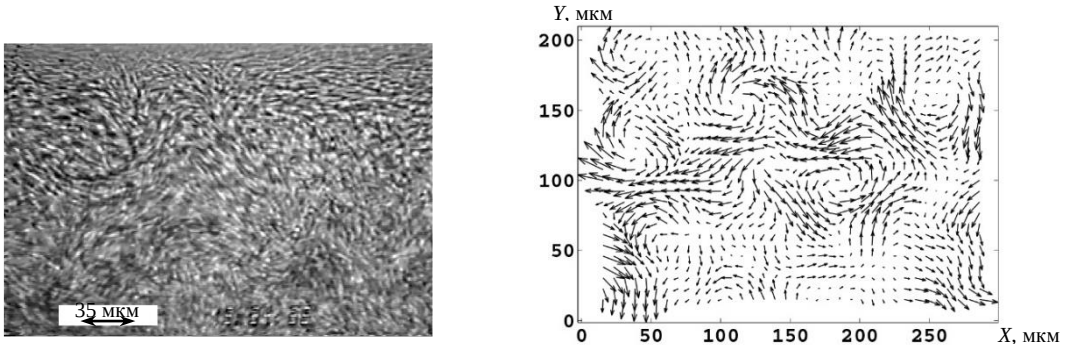


Рисунок 5.2. Схема движения жгутиковых бактерий по градиенту концентрации (серая стрелка). Белые кружки – точки тамблинга

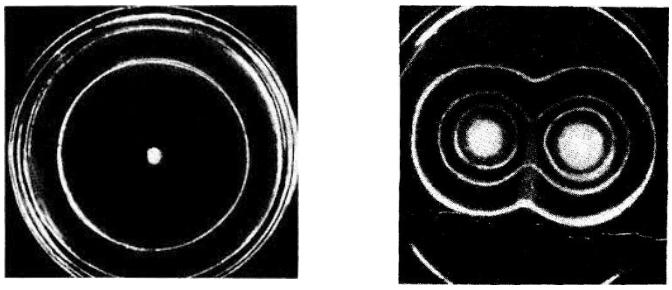
Коллективная динамика бактериальных взвесей в водной среде при высокой концентрации живых частиц включает беспорядочное «роение» (англ. swarming) и недавно обнаруженные элементы вихревого движения, или *бактериальную турбулентность*[2] (рис. 5.3). Последний вид динамики наблюдается несмотря на высокую вязкость среды и значения $Re \sim 10^{-4}$–10^{-5}, которое предполагает только ламинарное течение самой жидкости. Оба явления объясняются взаимодействием живых частиц (в случае бактерий гидродинамическим: благодаря вязкости среды бактерии разворачиваются и увлекаются за собой соседними движущимися частицами, образуя «бактериальные вихри») и имеют аналогии в коллективном движении высших организмов (см. далее).



(а) (б)

Рисунок 5.3. «Вихри» *Bacillus subtilis*: (а) фото, (б) распределение скоростей (C. Dombrowski, *et al.* Phys. Rev. Lett. 2004, 93 (9), –P. 098103)

Движение индивидуальных бактерий в биофизике практически не рассматривается. Коллективный хемотаксис и размножение бактерий на макроскопическом уровне проявляются как распространение *бактериальных автоволн*. Стационарные распределения плотности в колонии бактерий имеют вид концентрических колец (рис. 5.4 а). Промежутки между соседними кольцами отвечают сниженной концентрации «съеденных» питательных веществ и повышенной концентрации неблагоприятных продуктов метаболизма[1]. Столкновение автоволн одной природы в активной среде приводит к их гашению; интерференции не наблюдается (рис. 5.4 б; см. также рис. 4.9 б в главе 4).



(а) (б)

Рисунок 5.4. (а) Концентрические бактериальные автоволны, или кольца хемотаксиса (см обзор[1], рис. 11), (б) столкновение колец (там же, рис. 20)

Аналогами бактериальных автоволн удается описать динамику медленных процессов, протекающих в масштабах столетий и тысячелетий внутри человеческих сообществ (см. разд. 4.4.1 в гл. 4). В частности, концентрическую структуру, напоминающую колонию бактерий, имеет застройка средневековых городов. В роли максимумов плотности населения здесь выступают жилые массивы; минимумам плотности соответствуют рокадные улицы и крепостные укрепления. Аналогично структуре «сообщества» бактерий, компактное проживание и фортификация в человеческих сообществах формировались под воздействием внешней среды – необходимостью сократить объемы перевозок и нуждами обороны. Интересно, что археологические данные для такого вполне «концентрического» города, как Москва, свидетельствуют в пользу спиральных волн распространения ее застройки (рис. 5.5; см. рис. 4.9 б).

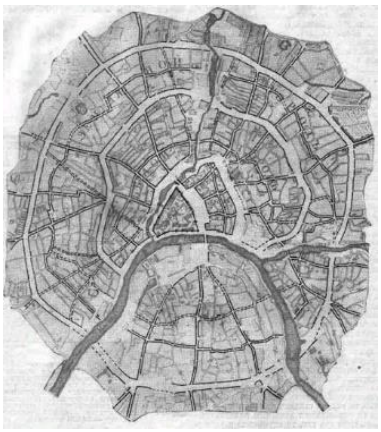


Рисунок 5.5. Схема Москвы по плану 1739 г. (Г.Я. Мокеев, Наука и жизнь, 1969, №9, с. 28)

Для моделирования вклада автоволновых процессов в динамику мегаполиса в характерной современной работе[3] использовались модифицированные дифференциальные уравнения Фицхью-Нагумо (см. книгу [1] в списке литературы к этой главе). Эти уравнения первоначально были предложены для описания распространения нервных импульсов и затем обобщены на другие системы «реакция – диффузия»:

(5.1)
$$\frac{du}{dt} = f(u) - uv + D_1\Delta u$$
$$\frac{dv}{dt} = \beta u - \gamma v + D_2\Delta v,$$

где u и v – количественные характеристики ускоряющего компонента (активатора) и замедлителя процесса (ингибитора), D_1 и D_2 – коэффициенты их распространения (диффузии). Нелинейным кубическим термом $f(u) = \alpha u^2 - u^3 - (\alpha - 1)u$ обусловлено возникновение предельного цикла. Произведение uv, введенное в уравнение авторами работы,[3] учитывает взаимосвязь активатора и ингибитора. В использованной модели функция u (площадь застройки) отражает антропогенные процессы, а функция v – компенсирующие их природные факторы: площадь зеленых насаждений. Модифицированные уравнения (5.1) задают бистабильную динамическую систему «развитие – деградация», при удачном подборе эмпирических множителей они обеспечивают количественное согласие с динамикой урбанизации (рис. 5.6).

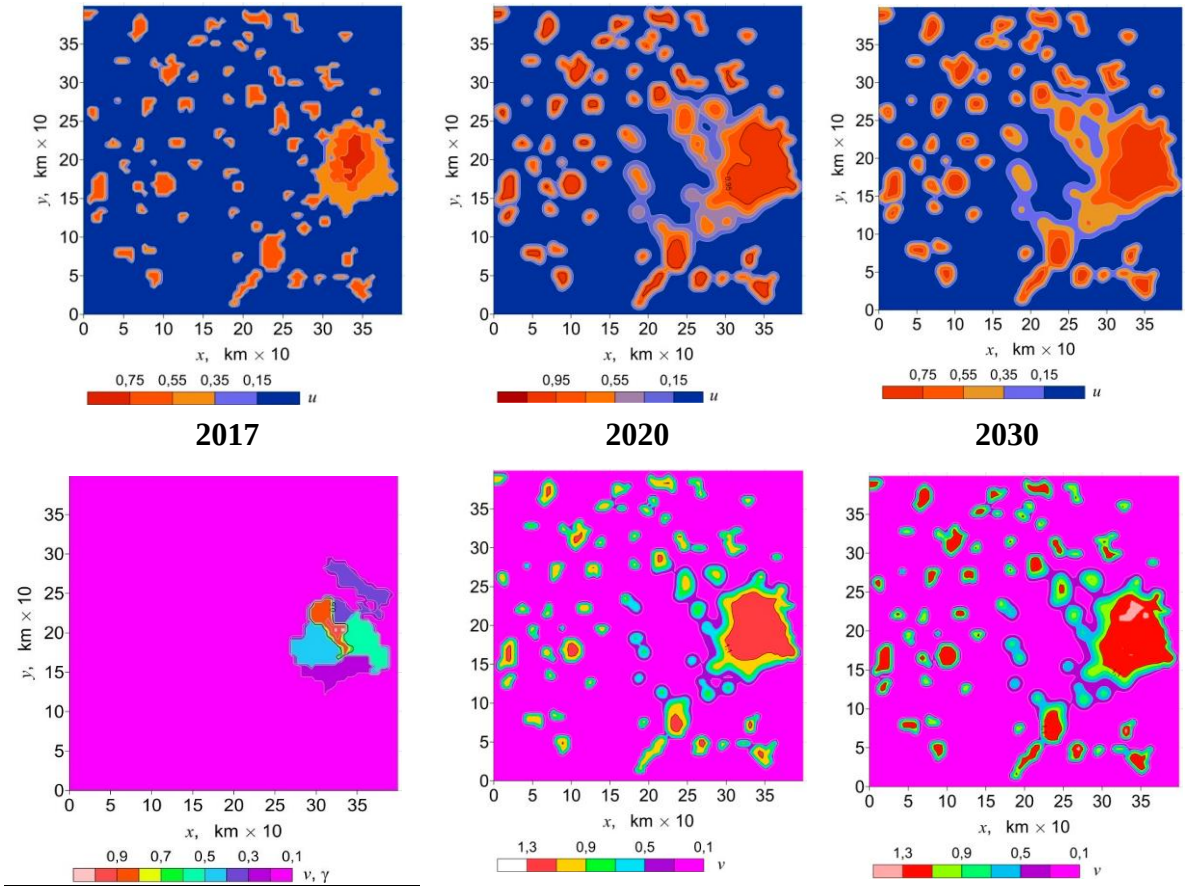


Рисунок 5.6. Современное (2017, 2020) и прогнозируемое (2030) распределение плотности застройки (вверху) и средней стоимости квадратного метра (внизу) в Шанхае, КНР (N. Levashova, A. Sidorova, A. Semina, Mingkang Ni, Sustainability, 2019, 11, 3658)

Моделирование движения «живых частиц»

Математические модели движения «живых частиц» с разнообразным практическим применением (транспортные и пешеходные потоки, посетители торгового центра при пожарной эвакуации, войсковые единицы на поле боя и т.д.), как и многие авторы таких моделей, в 1990-е годы переместились из биофизики в междисциплинарную физику социума. Первые компьютерные модели, воспроизводящие переход от беспорядочного к согласованному движению агентов, в указанное время представили основатели современной «физики общества» Дирк Хелбинг (ФРГ–Швейцария), Тамас Вишек (Венгрия), Ласло Барабаши (Румыния–США) и их соавторы.

В работе[4], положившей начало целому направлению исследований, рассматривались перемещения агентов между узлами квадратной решетки в дискретном времени $t_n = n\Delta t$ (рис. 5.7) – модель, весьма популярная у американских социологов с 1970-х годов. На каждом шаге $t = n$ (с точностью до условного интервала Δt) агенты корректировали направление своего единичного вектора скорости $\mathbf{v}^{(i)}_{n-1}$ на предыдущем такте дискретного времени с учетом среднего направления $\langle \mathbf{v}_{n-1} \rangle$ движения окружающих агентов внутри заданного «круга обзора» и случайного возмущающего вектора $\boldsymbol{\xi}_n$ по разностному уравнению

(5.2) $$\mathbf{v}_n{}^{(i)} = \mathbf{v}_{n-1}{}^{(i)} + \langle \mathbf{v}^{(i)}{}_{n-1} \rangle + \boldsymbol{\xi}_n$$

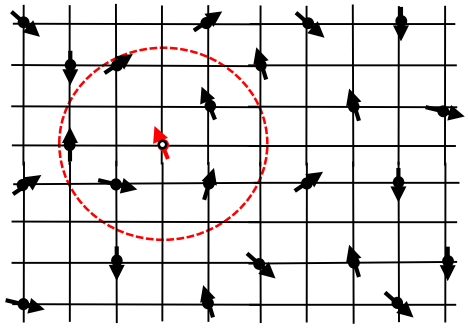
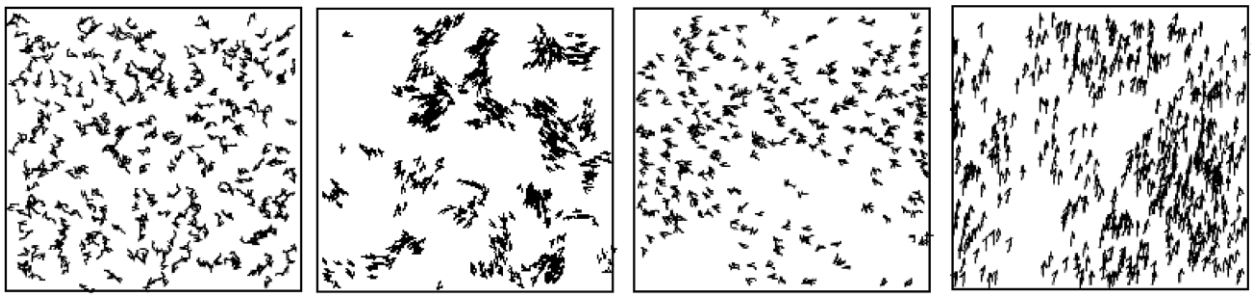


Рисунок 5.7. Движущиеся агенты на квадратной решетке[4]

Нетрудно видеть, что модель (5.2) близка к рассмотренной в 3-й главе модели Изинга (разд. 3.4 и рис. 3.42), в которой «бинарные» спины узлов заменены произвольно направленными единичными векторами скорости $\{\mathbf{v}_k{}^{(i)}\}$, а случайное возмущение $\boldsymbol{\xi}_n$ (шум) играет роль температуры. В соответствии с этим модель (5.2) предсказывала несколько видов динамики при разных соотношениях плотности агентов на решетке и интенсивности возмущений, включая согласованное движение при достаточно высокой плотности и низком шуме (рис. 5.8). Хотя результаты расчетов, в некотором смысле, были «заложены» в условия, эта статья остается одной из наиболее цитируемых в данной области.



а *б* *в* *г*

Рисунок 5.8. Режимы коллективного движения агентов на квадратной решетке при разных параметрах модели, см.[4]: (а) хаотические перемещения, (б) низкая плотность + слабый шум: движущиеся «сгустки» (swarms), (в) высокая плотность + сильный шум: частичная корреляция перемещений, (г) высокая плотность + слабый шум: согласованное движение

Литература к разделу 5.1

[1] Г.Р. Иваницкий, А.Б. Медвинский, М.А. Цыганов, *От беспорядка к упорядоченности – на примере движения микроорганизмов*, Усп. физ. наук, 1991, **161** (4), 13.

[2] A. Sokolov, I.S. Aranson, *Physical Properties of Collective Motion in Suspensions of Bacteria*, Phys. Rev. Lett., 2012, **109** (24), 248109.

[3] А.Э. Сидорова, Н.Т. Левашова, А.Е. Семина, *Автоволновая модель морфогенеза мегаполисов в представлениях неоднородный активных сред*, Изв. РАН, сер. Физ., 2019, **83** (1), 106.
[4] T. Vicsek, et. al**.,** *Novel type of phase transition in a system of self-driven particles,* Phys. Rev. Lett. 1995, **75**, 1226.

5.2. Коллективное перемещение в трехмерном пространстве: рыбы, птицы и дроны

Летят утки… Летят утки…И два гуся..
народная песня

За восемь лет до публикации Вишека и соавторов[4] в работе К. Рейнольдса, посвященной компьютерной анимации, была представлена механистическая модель движения взаимосвязанных агентов в трехмерном пространстве (рис. 5.9). Перемещения самодвижущихся «птицоидов» (англ. *boids*) с ненулевой массой направлялись вторым законом Ньютона с добавлением виртуальных сил притяжения к центру группы и отталкивания от препятствий – в том числе от соседних агентов. Этот подход позволил воспроизвести естественный полет стаи птиц и затем стал основой моделирования трехмерной динамики стаи.

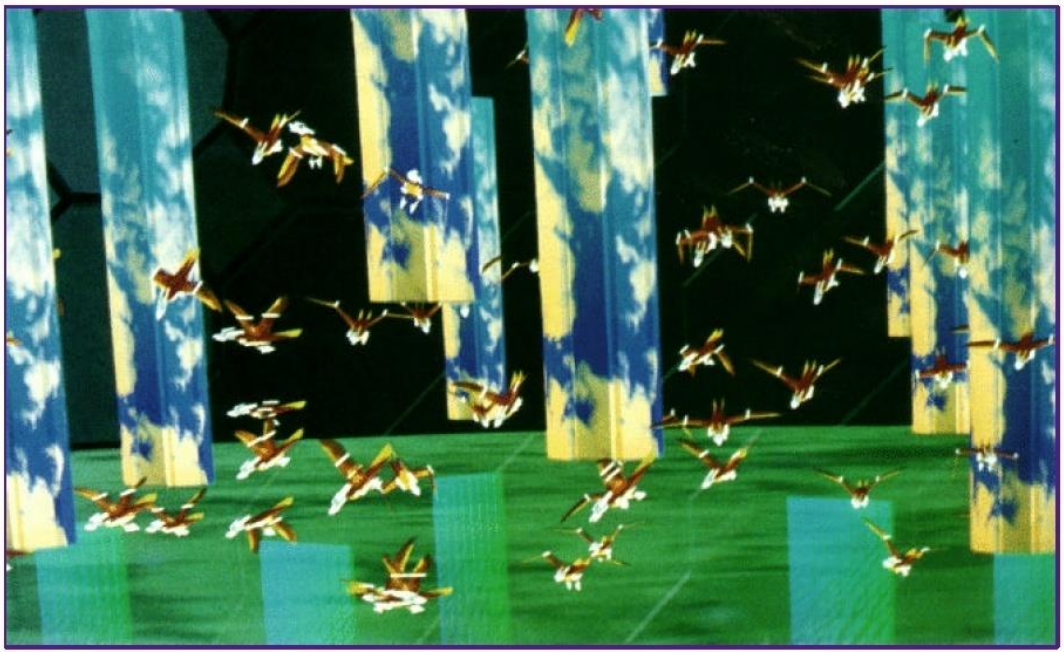


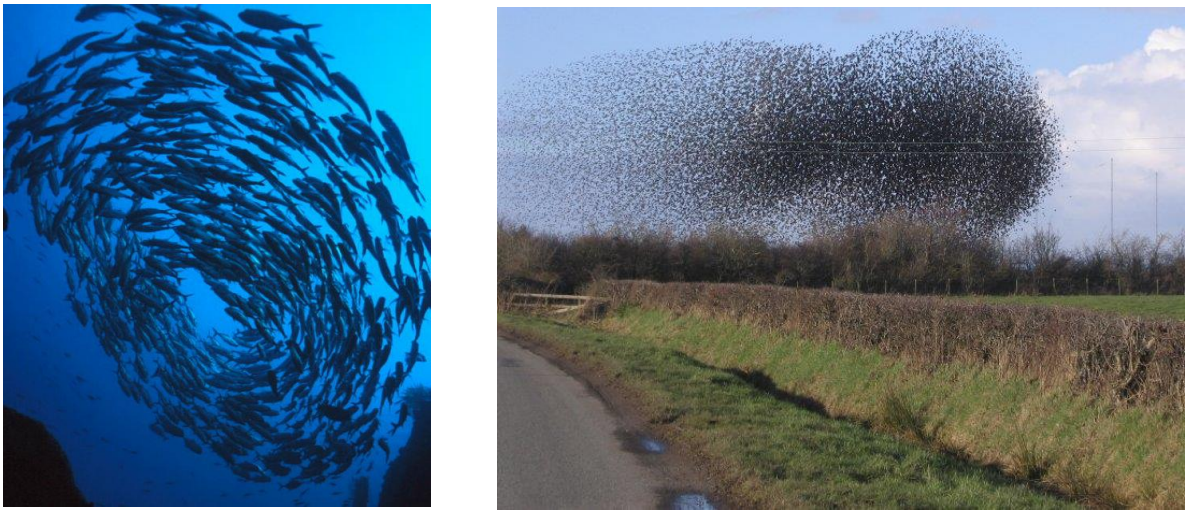
Рисунок 5.9. Анимационное движение птицоидов (C.W. Reynolds, Computer Graphics, 1987, 21(4), 25)

В другом важном исследовании[5] был проведен молекулярно-динамический расчет ансамбля агентов, на которых действовали силы

$$\mathbf{F}_i = \sum_j [a f_1(r_{ij})\mathbf{v}_j + b f_2(r_{ij})\mathbf{r}_{ij}] + \boldsymbol{\xi}_i, \quad (5.3)$$

где функция f_1 отвечает корреляции направления движения птицоидов (англ. alignment), f_2 отталкиванию от ближних агентов, a и b – масштабные множители, ξ_i – случайное возмущение; суммирование производится внутри сферы заданного радиуса (см. рис. 5.7). Модель (5.3) предсказывала динамические «фазовые переходы» между несколькими состояниями ансамбля: «покоящийся кристалл» (неподвижные агенты), «покоящаяся жидкость» (флуктуации агентов вокруг точек равновесия), «движущаяся жидкость»

(коррелированные перемещения) и «движущийся кристалл» (согласованное движение). В цитируемой работе структуру группы птицоидов отражал граф, ребрами которого соединялись положения соседних агентов (см. следующую главу).



(а) (б)

Рисунок 5.10. (а) «Тор» в движущемся косяке рыб (G.R. Cheng, Centre for Chaos and Complex Networks, City University of Hong Kong), (б) взлет стаи скворцов (D. Strõmbom, Ph.D. Thesis, Uppsala Univ., Sweden, 2013)

Квазифизические агентные модели позволяют воспроизвести *тороидальное* движение косяка рыб (рис. 5.10 а), аналогичное «вихревому» движению бактерий, вместе с неупорядоченным («рой») и упорядоченным перемещением («стая»). В подобных моделях по эмпирическим данным задаются три сферы расстояний между агентами, отвечающие разным виртуальным потенциалам их взаимодействий: отталкивания в ближней сфере, притяжения в дальней сфере и корреляции векторов скорости на промежуточных расстояниях (рис. 5.11). В зависимости от плотности агентов, их скоростей и уровня шума реализуются режимы беспорядочных смещений внутри «облака» (собственно *рой*), вихревого движения (*тор*) и согласованного перемещения агентов (*стая*). При изменении радиуса корреляции движения наблюдался гистерезис. В реальной динамике косяка рыб (англ. fish school) на корреляции перемещений влияет гидродинамическое взаимодействие с соседними особями благодаря наличию чувствительных элементов вдоль их туловища[*].

В больших стаях птиц, где вихревые структуры не образуются, богатую коллективную динамику задает механизм *распределенных временных лидеров*, также воспроизведенный в агентных моделях. При достаточном числе особей, примерно одинаково изменяющих направление своего полета, по ним корректируют свое движение соседние особи – и далее вся стая (рис. 5.12). Это делает возможной коллективную обработку информации, которую мы более подробно обсудим в 3-й части: синхронная реакция небольшого числа агентов на источник пиши, хищника или иное внешнее воздействие усиливается и передается далее по системе их ближним окружением. Механизмом следования за соседями хорошо объясняется лабильность «формы» и динамики трехмерной птичьей стаи (см. рис. 5.10 б).

[*] J. Deng, D. Liu, Bioinspiration & Biomimetics, 2021, **16** (4), 046013.

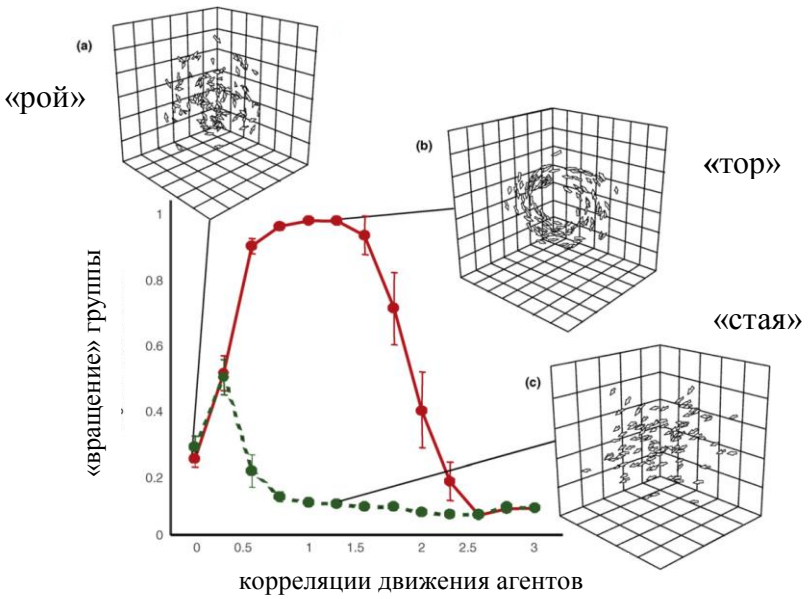


Рисунок 5.11. Режимы движения группы взаимосвязанных агентов (I.D. Couzin, Trends in Cognitive Sciences, 2009, 13, 36)

Распространение возбуждения (т.е. информации) в стае моделируется асинхронным процессом при последовательном локальном возбуждении близко расположенных агентов (см. рис. 5.7). Коллективное перемещение птиц при взлете стаи воспроизводилось на основе *принципа максимальной энтропии*, то есть наиболее неупорядоченного распределения параметров рассматриваемой системы, не противоречащего ее эмпирической динамике. В данном случае максимум *энтропии Шеннона* (она будет рассмотрена в гл. 8) для системы эквивалентен корреляции направления скоростей в некоторой минимальной окрестности движущегося агента[6]. Компьютерная модель описывала согласованное движение при взлете стаи по аналогии с распространением спиновой волны в ферромагнетике с заменой кристаллической решетки на трехмерную сеть взаимодействий агентов (графы и сети также будут рассмотрены далее, см. следующую главу). Расчеты хорошо соответствовали данным видеосъемки независимо от плотности стаи. Можно предположить, что сферу корреляции движения птиц задает не геометрическое расстояние, а число воспринимаемых движущихся объектов (10 – 20) в локальном окружении особи.

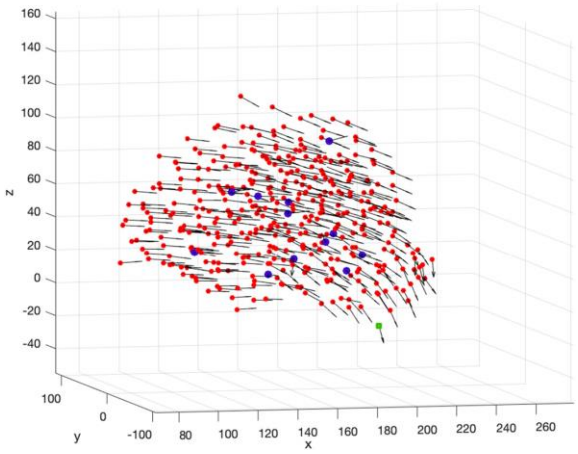


Рисунок 5.12. Перемещение агентов в компьютерной модели птичьей стаи, синий цвет – временные лидеры (E. Cristiani, *et al.*, J. Math. Biology 2021, 83, 45)

Динамика рыбьих косяков и птичьих стай интенсивно изучается в два последних десятилетия. Детальный обзор экспериментальных исследований и моделирования коллективного движения в неживых и живых системах был опубликован в 2012 г. (см. [2] в списке литературы). Помимо академического интереса, такие работы направлены на моделирование *стаи без лидера*, важного для автоматического управления формацией БПЛА (*дронов*) ([6] в списке литературы). Конструирование коллективной динамики военных БПЛА, способных заместить традиционное вооружение, в настоящее время быстро развиваются во всех крупных государствах мира – в том числе усилиями ведущих исследователей «живых частиц»[7]. Вопросы обмена информацией и распределенного интеллекта, тесно связанные с этой задачей, будут рассмотрены в третьей части книги.

Клеточные автоматы

При расчетном моделировании трехмерного движения и других видов эволюции живых частиц мультиагентные системы конструируют по аналогии с компьютерными моделями в методах Монте-Карло и молекулярной динамики, заменяя дифференциальные уравнения с непрерывным временем разностными уравнениями (разд. 3.4 в гл. 3). Во второй половине XX века было установлено, что многообразную динамику сложных систем (см. разд. 4.4.2 предыдущей главы) также могут воспроизводить сильно упрощенные «разностные» модели. Их наиболее распространенным вариантом являются *клеточные автоматы* (англ. *cellular automata*). В этих моделях состоянию агента в момент дискретного времени $n\Delta t$ (где Δt – произвольный инкремент, приравниваемый к единице) отвечает ячейка бесконечной плоской квадратной либо гексагональной решетки (иногда трехмерной кубической). Законы эволюции агента в системе задаются в форме правил перехода между ячейками на последовательных шагах дискретного времени. Так, прямолинейному равномерному движению вдоль направления x в клеточных автоматах отвечает алгоритм

$$x|_t \rightarrow (x+a)|_{t+1} \rightarrow (x+2a)|_{t+2} \ldots,$$

где x – номер клетки по координате x, t – номер шага во времени. Скорость перемещения определяется целочисленным инкрементом a. Другие эмпирические правила регулируют обход препятствий или остановку перед препятствием при отсутствии свободных ячеек на пути следования (рис. 5.13).

Преимущества моделей клеточных автоматов перед классическим моделированием многочастичных систем состоят в упрощенной расчетной схеме и свободном построении правил, ограниченных только фантазией автора. «Клеточные» алгоритмы, завоевавшие популярность, классифицированы и в этом смысле стандартизованы[8]. В расчетных моделях состояния ячеек выражаются целыми числами. «Бинарные» состояния (0, 1), в частности, соответствуют пустой и занятой ячейке при движении агентов на рис. 5.13. Изменения состояния ячейки на каждом шаге дискретного времени определяется ее окружением (рис. 5.14); их связь задают произвольные правила. Со второй половины XX века клеточные автоматы используют в моделировании физических процессов (например, распространения автоволн в активной среде), описании транспортных потоков, а также в математической социологии и других общественных дисциплинах.

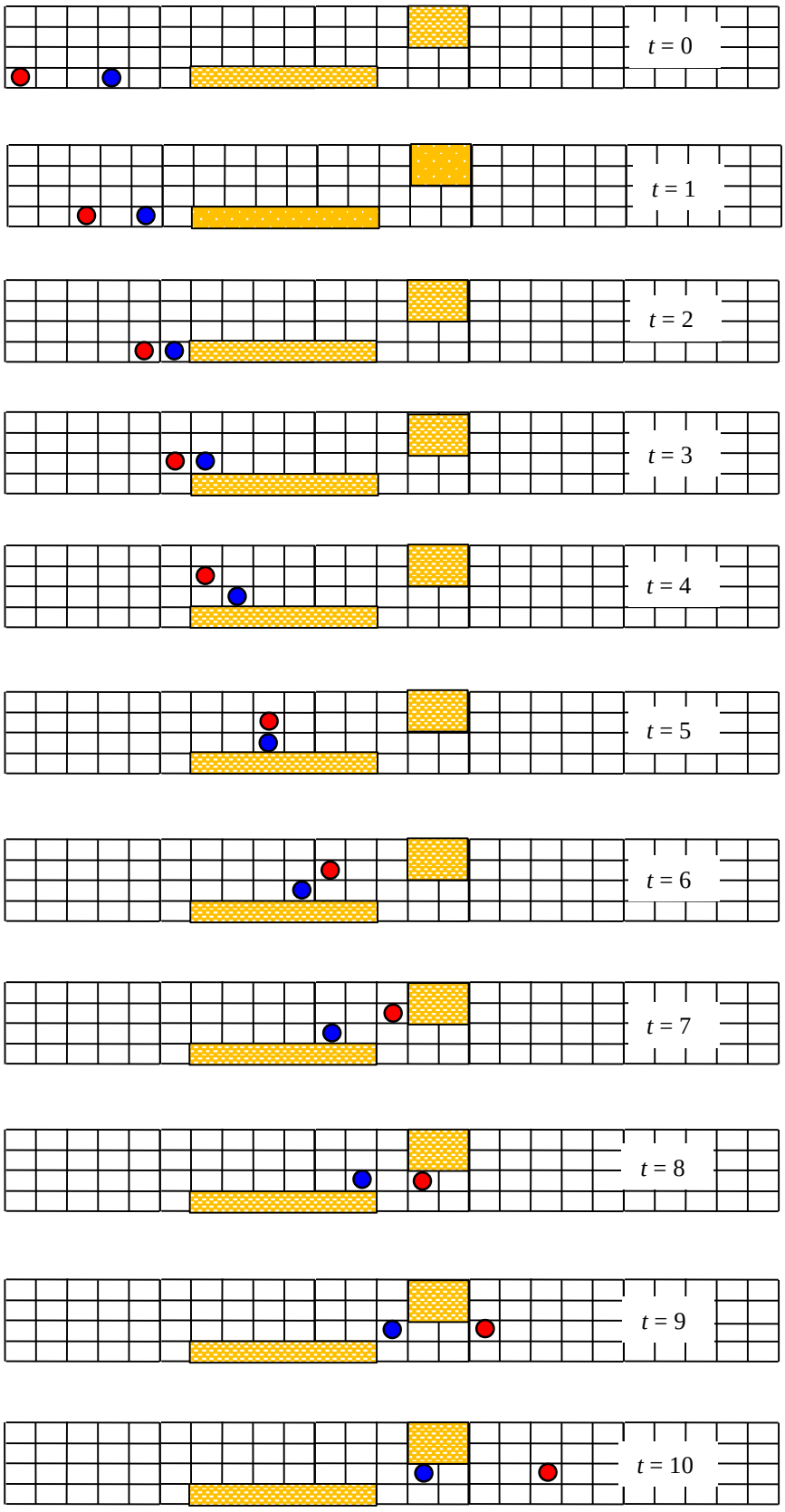
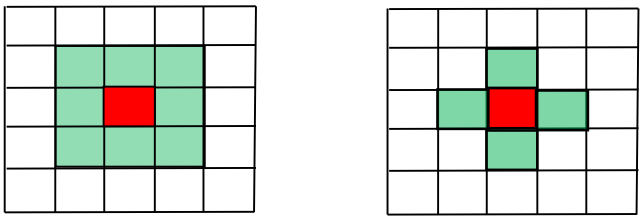


Рисунок 5.13. Перемещение «быстрого» красного *(a*=2) и «медленного» синего (*a*=1) агентов в коридоре с препятствиями в модели клеточных автоматов. При занятой клетке справа агенты сдвигаются по диагонали в направлении движения

Самым известным клеточным автоматом является «Игра в жизнь» (англ. Game of Life)*, изобретенная в 1970 г. английским математиком Джоном Конвеем. В ее алгоритме на бесконечной квадратной решетке моделируется биологический процесс, при котором в ячейках «зарождаются» и «отмирают» живые клетки. Эволюция каждой «клетки» на последовательных шагах дискретного времени определяется числом клеток в ее ближайшем окружении по Муру (8 соседних ячеек, см. рис. 5.14 а) по следующим правилам:

(1) живые клетки, имеющие 1 или 0 соседних живых клеток, гибнут от одиночества
(2) клетки, имеющие более 3 живых соседей, гибнут от перенаселенности,
(3) живые клетки с 2 или 3 живыми соседями сохраняются на следующем шаге,
(4) в пустой ячейке с 3 живыми соседями рождается новая клетка (рис. 5.15).



(а) (б)

Рисунок 5.14. Ближнее окружение квадратной ячейки в клеточных автоматах: (а) окрестность Мура, (б) окрестность Неймана 1-го порядка

«Игра в жизнь» реализована в ряде компьютерных программ, доступных в Интернет; клеточным автоматам посвящены многочисленные публикации[8]. По этой схеме построены динамические модели разнообразных физических, химических и биологических процессов. Различные варианты клеточных автоматов используют в междисциплинарном описании динамики социума – например, миграции населения[9].

Литература к разделу 5.2

[5] Y. Tu, *Phases and phase transitions in flocking systems,* Physica A, 2000, **281**, 30.
[6] W. Bialek, et al., *Statistical mechanics for natural flocks of birds,* PNAS, 2012, **109** (13), 4786.
[7] G. Vásárhelyi, et al., *Optimized flocking of autonomous drones in confined environments,* Sci. Robot., 2018, **3**, eaat3536.
[8] Т. Тоффоли, Н. Марголус, *Машины клеточных автоматов*, М.: Мир, 1991
[9] Е.Б. Олейник, Н.В. Ивашина, Ю.Д. Шмидт, *Моделирование процессов миграции населения: методы и инструменты (обзор)*, Компьютерные исследования и моделирование, 2021, **13** (6). 1205.

5.3. Динамика автомобильных потоков

Динамическое описание потока автомобилей как системы взаимодействующих движущихся агентов, очевидно, представляет собой задачу огромной практической важности. Движение в больших городах (в Москве свыше 3 млн. машин в день) происходит вблизи предела пропускной способности улиц; транспортные пробки, дорожный стресс и

* https://play.google.com/store/apps/details?id=com.baiels.gameoflife&hl=ru&gl=US

аварии – постоянные приметы городской среды. Из-за стремления водителей, как «мотивированных» самодвижущихся частиц, к лучшим дорожным условиям добавление новых маршрутов может ухудшать транспортную ситуацию (см. парадокс Браеса в разд. 1.3 гл. 1).

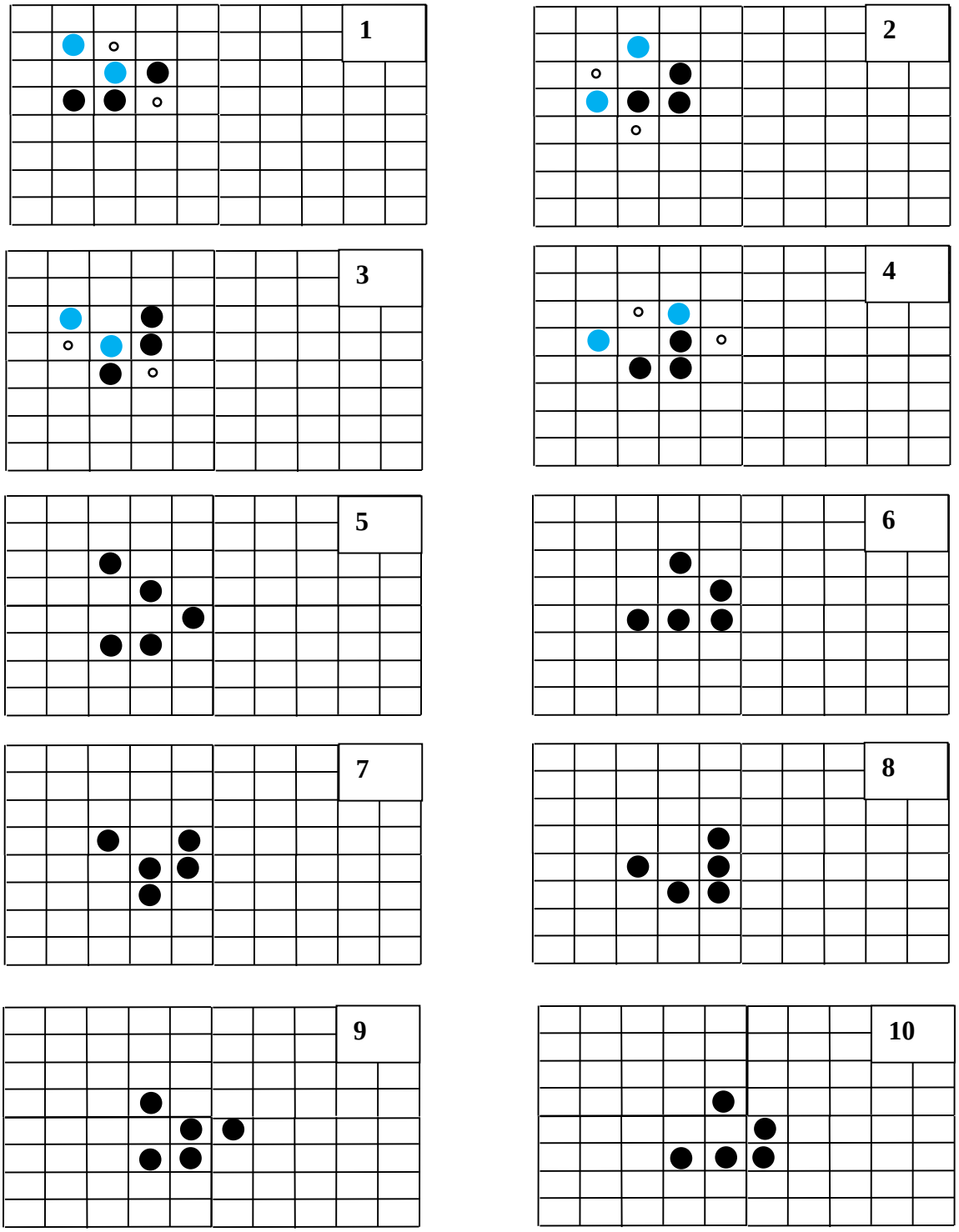


Рисунок 5.15. Перемещение устойчивой конфигурации «планера» на последовательных шагах клеточного автомата «Игра в Жизнь». На первом цикле обозначены «отмирающие» (голубые круги) и «зарождающиеся» клетки (маленькие белые кружки).

По всем этим причинам математическое моделирование автомобильного транспорта и прогнозирование его состояния, как раздел социальной инженерии, интенсивно развиваются в мире с первой половины XX века по настоящее время.

В этом разделе мы рассмотрим модели изолированных транспортных потоков (автомобили на шоссе); транспортные сети в городе будут обсуждаться в следующей главе. Автотранспортным средством (АТС) мы будем далее называть легковой автомобиль длиной ≈ 6 м. Хотя на дорогах и улицах действительно преобладает индивидуальный транспорт, такая упрощенная модель игнорирует крупногабаритные объекты, т.е. неоднородности потока – одну из причин заторов при перегруженном движении. Поток АТС может находиться в трех основных состояниях: *свободного движения* (условный «газ»), *стесненного движения* (congested movement, условная «сжимаемая жидкость») и неподвижной *пробки* (фрагмента «конденсированной среды»), перемещающейся против потока за счет динамического обмена входящих и выходящих машин (рис. 5.16).

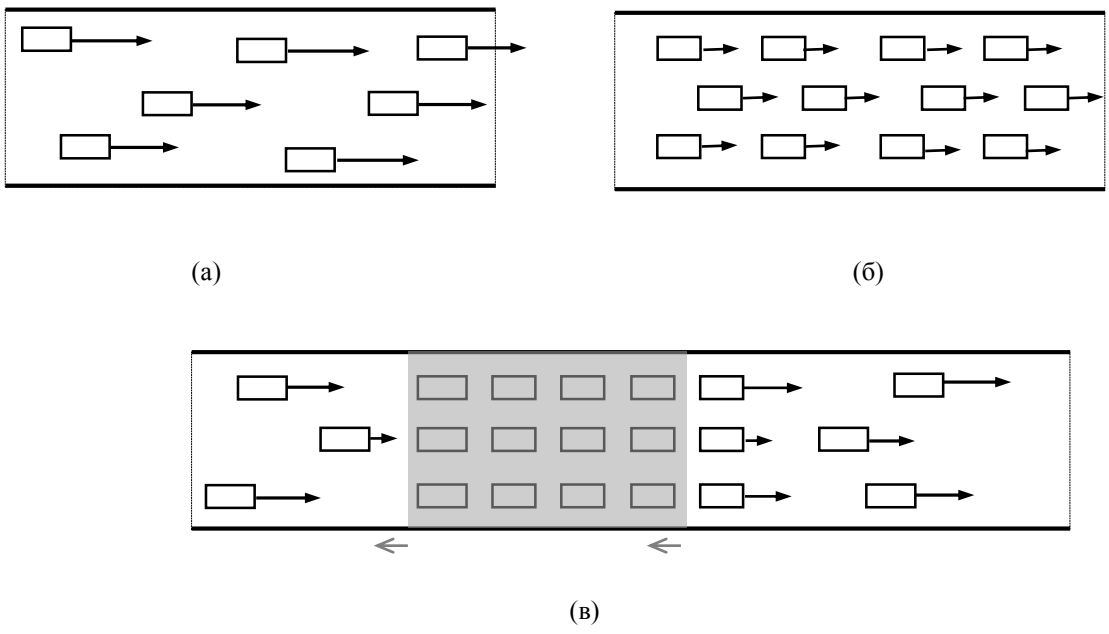


Рисунок 5.16. Состояния транспортного потока: (а) свободное движение, (б) стесненное движение в заторе, (в) пробка

Математические модели автомобильного трафика в литературе подразделяются на *макроскопические* и *микроскопические*. В первой группе моделей движение характеризуется средней скоростью $\langle v \rangle$ и линейной плотностью ρ (в единицах [км$^{-1}$], т.е. «штук» на 1 км шоссе) самодвижущихся частиц, их произведение $Q = \rho\langle v \rangle$ – собственно *поток* (число проезжающих машин в единицу времени: [мин$^{-1}$] или [час$^{-1}$]). В микроскопических моделях воспроизводится «одномерное» движение АТС, обладающих индивидуальными динамическими параметрами: скоростью и ускорением. Корреляцию движения частиц отражают квазифизические виртуальные силы, в разных моделях определяемые по-разному. Перспективным упрощенным вариантом микроскопических моделей являются клеточные автоматы. Промежуточное положение занимают более специальные кинетические модели, которые здесь не рассматриваются. Моделированию

транспортных потоков посвящен ряд книг и многочисленные журнальные публикации (см. [3, 4] в списке рекомендуемой литературы).

Заметим, что инженерные термины, используемые для описания транспорта, не вполне согласуются со строгой физикой. При свободном движении АТС по одной полосе шоссе со скоростью v = 120 км/час (33.3 м/с) их максимальная линейная плотность диктуется *правилом трех секунд*: расстояние до ближайшей машины впереди $L \geq 100$ м позволяет водителю затормозить при ее внезапной остановке. При плотности $\rho = 10$ км$^{-1}$ (10 движущихся АТС на 1 км шоссе) и потоке ρv = 1200 АТС в час (т.е. 20 мин$^{-1}$) даже на многополосной дороге мимо пункта регистрации (видеокамеры) проезжает не более 100 взаимосвязанных АТС в минуту, что никак не соответствует макроскопическому масштабу статистической физики. Регистрация АТС в навигационных системах и существующие вычислительные мощности позволяют в реальном времени точно предсказывать положения всех автомобилей на километровых участках шоссе на несколько секунд вперед. Однако из-за неустойчивости режима движения и сильного влияния флуктуаций расчетный прогноз транспортного потока на 1 час вперед сравним по сложности с прогнозом погоды на неделю[10] (см. также [3] в списке литературы).

Макроскопические модели

Моделирование средних параметров потока АТС основано на гипотезе о взаимно однозначной связи средней скорости и плотности потока в любой точке шоссе с координатой *x*. В простейшем случае («непрерывная» модель Гринфилда, 1935 г.) эту зависимость полагают линейной

(5.4 а) $$v = v_0 - a\rho$$

(5.4 б) $$Q = \rho v = \rho v_0 - a\rho^2$$

Дифференцируя (5.4 б), определим максимум функции

$$dQ/d\rho = v_0 - 2a\rho = 0, \text{ то есть } \rho = v_0/2a \text{ и } d^2Q/d\rho^2 = -2a < 0$$

(рис. 5.17 а, б). Формула (5.4 а) зависимости скорости от плотности называется *уравнением состояния*, график зависимости $Q(\rho)$ (5.4 б) – *фундаментальной диаграммой*.

Результаты регистрации автомобильного движения видеокамерами в разных городах мира показывают однотипные отклонения от линейной и, соответственно, параболической функций (5.4 а, б) в области средней плотности потока, где водители активно перестраиваются в соседний ряд движения (Рис. 5.17 в, г). Таким образом, в транспортных потоках проявляется специфический социальный фактор: конкуренция участников движения, не воспроизводимая в простых квазифизических моделях.

Для «макроскопического» описания потока АТС часто применяется модель «сжимаемой жидкости», или модель Лайтхилла-Уизема-Ричардса (LWR, 1955-1957 гг.). В ее рамках плотность $\rho(x,t)$ и среднюю скорость потока $v[\rho(x,t)]$ задают как функции двух переменных с условием непрерывности

(5.5 а) $$v(x,t) = v[\rho(x,t)]$$

(5.5 б) $$\partial\rho/_{\partial t} + \partial(\rho v)/_{\partial x} = 0$$

(сохранением количества автомобилей на дороге). Для движения по одной полосе зависимость скорости от плотности по-прежнему считается убывающей ($\partial v/\partial\rho < 0$), а функция потока $Q(\rho)$ «выпуклой вверх» ($\partial^2 Q/\partial\rho^2 < 0$). Фундаментальную диаграмму получают интегрированием уравнений (5.5) при эмпирически заданных начальных и граничных условиях; разрывы функции $\rho(x,t)$ (скачки плотности) соответствуют переходу от свободного к стесненному движению АТС. Расчеты позволяют найти оптимальный режим движения при заданном потоке и минимизировать возникновение пробок. Так, на фундаментальной диаграмме рис. 5.17 б поток Q_1 выгоднее поддерживать при меньшей плотности ρ_1 и соответственно большей скорости движения.

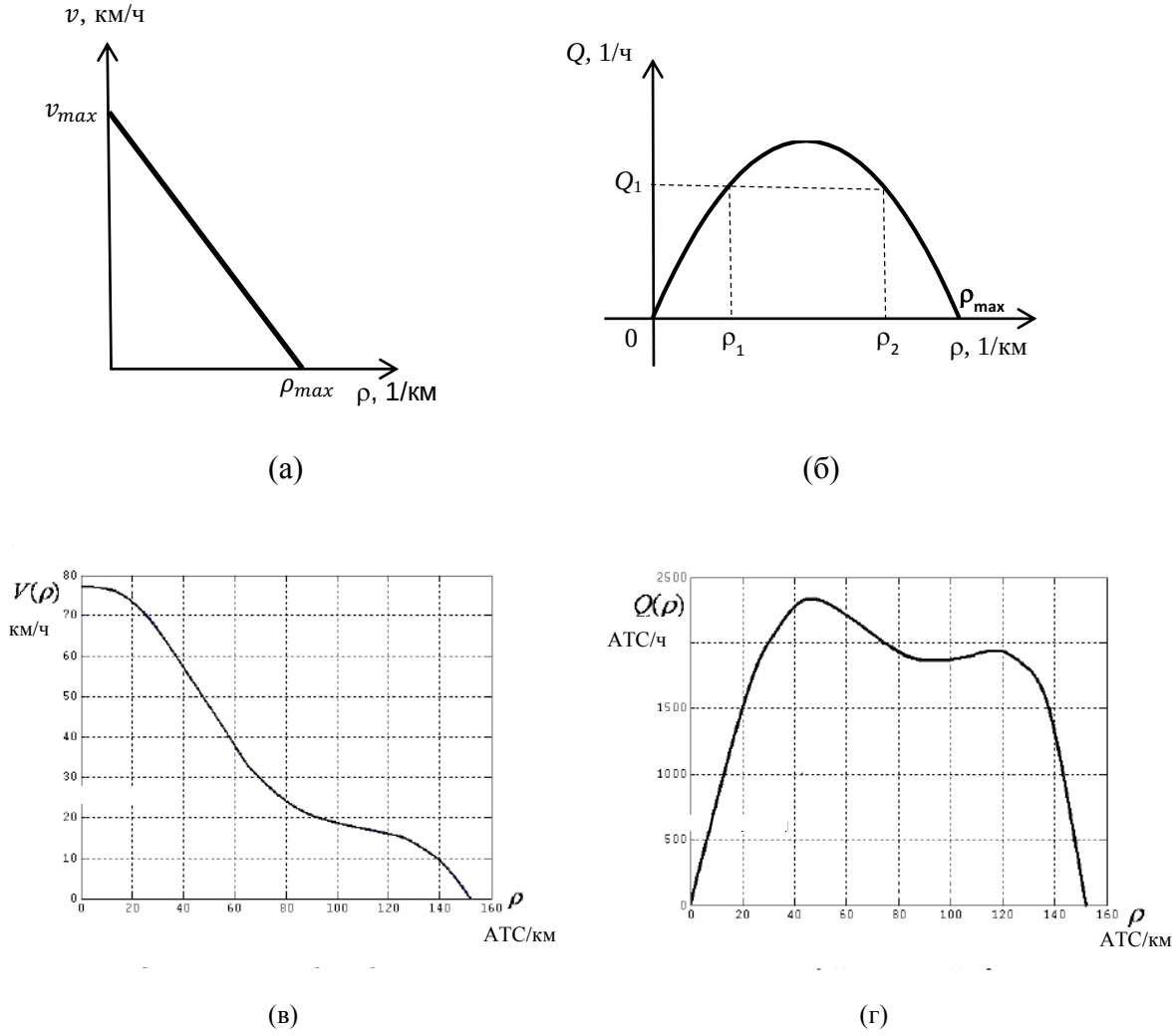


Рисунок 5.17. (а) Диаграмма состояния и (б) фундаментальная диаграмма потока АТС в модели Гринфилда; (в), (г) – экспериментальные данные (см. [3])

В различных версиях модели LWR вводятся дополнительные предположения, приводящие к разным уравнениям состояния (5.5 а). Например, в *модели Танака* (1962) плотность однополосного потока $\rho(v)$ при данной скорости определяется как обратная величина от безопасного расстояния $d(v)$ между соседними АТС: *динамического габарита*:

$$\rho(v) = \frac{1}{d(v)} = \frac{1}{L + c_1 v + c_2 v^2}.$$

В этой формуле L = 5.7 м – средняя длина АТС, c_1 = 0.5 с – время реакции водителя, а коэффициент c_2 зависит от состояния дороги (Таблица 5.1).

Таблица 5.1

Коэффициент c_2 в модели Танака

c_2, с^2/м	Состояние шоссе
0.0285	обычные условия
0.0570	мокрый асфальт
0.165	обледенелый асфальт

Зависимости $v(\rho)$, рассчитанные при разных значениях коэффициентов, далее подставляют в формулу (5.5 а). Макроскопические модели движения АТС с учетом условий движения на реальных участках шоссе («источников» и «стоков» на перекрестках, их пропускной способности – см. задачу о светофоре в главе 1) хорошо представлены в отечественной литературе [3].

Микроскопические модели

«Микроскопическое» агентное моделирование автомобильного движения близко к компьютерным расчетам многочастичных систем методом молекулярной динамики (см. раздел 3.4 в главе 3). В этих моделях динамику потока на участке дороги определяют, решая уравнения механического движения частиц с единичной массой и переменной скоростью, которая может содержать стохастические приращения на последовательных шагах дискретного времени. Самодвижущиеся «частицы» входят в моделируемый отрезок шоссе со скоростями (а при моделировании многополосного движения также с позицией на полосе), задаваемыми генератором случайных чисел. Простейшим вариантом этой схемы является движение частиц по окружности. Варьирование скорости АТС тоже задается случайным образом по аналогии с моделированием 2D- и 3D-движения живых частиц (разделы 5.1 и 5.2). Средняя амплитуда изменений скорости («шум») косвенно отражает дорожные условия и рассеяние внимания водителей. Фундаментальную диаграмму потока определяют численно, усредняя расчетные значения плотности и скорости машин на шоссе.

Варианты микроскопических моделей потока АТС в основном различаются видом квазифизических сил, действующих на самодвижущуюся частицу, которыми воспроизводится стратегия водителей. В *модели оптимальной скорости* (Ньюэлл, 1961) постулируется стремление к желаемой скорости $v_0^{(i)}$ (где i – номер частицы) с учетом расстояния $\Delta x^{(i)}$ до ближайшего АТС впереди по направлению движения (*лидера*) и времени реакции водителей τ

$$\begin{aligned} &dx^{(i)}(t+\tau)/_{dt} = v^{(i)}(t+\tau) = v_0^{(i)}[1/\Delta x^{(i)}(t)], \\ &d^2x^{(i)}/_{dt^2} = \frac{1}{\tau}[v_0(\Delta x^{(i)}) - dx^{(i)}/_{dt}] \end{aligned} \qquad \text{(5.6)} \quad \text{то есть}$$

Время реакции τ можно определить из результатов мониторинга потока по зависимости $Q(\rho)$ вблизи его максимума для свободного движения $Q < Q_{max}$, так как безопасное расстояние при торможении в этом случае

$$v(\rho)\tau < {}^{1}/_{\rho} - L = d_0$$

(где L – собственная длина АТС, d_0 – расстояние «между бамперами» соседних машин при стесненном движении с максимальным потоком). Полагая, что вблизи перехода к стесненному движению $v \approx const$ для всех АТС (см. рис. 5.17 б), получим оценку уравнения состояния потока (5.5 а) «слева» от его максимума

(5.7)
$$Q \approx v\rho, \text{ то есть } \partial Q/\partial\rho \approx v,$$
$$\tau = \frac{1/\rho - L}{v} \approx \frac{d_0}{v}.$$

Задавая распределения $\{v_0^{(i)}\}$ оптимальной скорости для индивидуальных частиц, можно численно рассчитать уравнение состояния и сопоставить данные расчета с результатами мониторинга.

В моделях *оптимальной дистанции*, или *моделях следования*, постулируется, что водители регулируют скорости своих АТС, стремясь к индивидуальной оптимальной скорости $v_0^{(i)}$ и к безопасной дистанции $\Delta x_0^{(i)}$ до ближайшего АТС впереди («лидера», рис. 5.18). В этом случае безопасная дистанция $\Delta x_0^{(i)} = L + c_0(v^{(i)})^2$ определяется скоростью i-го АТС так, чтобы при внезапной остановке i–1-го тормозной путь был меньше расстояния $\Delta x^{(i)} = x^{(i-1)} - x^{(i)}$. Это приводит к системе уравнений

(5.8) $$d^2x^{(i)}/t^2 = (k/\Delta x^{(i)})[-\left(\Delta {x_0}^{(i)}/\Delta x^{(i)}\right)^4 + \left(\Delta {x_0}^{(i)}/\Delta x^{(i)}\right)^2] + a_0(1 - v^{(i)}/{v^{(i)}}_0),$$

где последнее слагаемое отвечает ускорению для достижения оптимальной скорости. Выражение в квадратных скобках – виртуальный потенциал леннард-джонсовского типа (см. раздел 2.3 в гл. 2), который задает стремление водителя к оптимальной дистанции (рис. 5.19); k, a_0 и c_0 – эмпирические параметры.

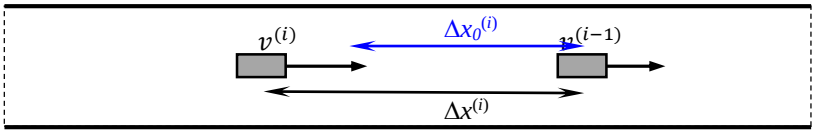


Рисунок 5.18. Микроскопические модели следования АТС, $\Delta x_0^{(i)}$ – оптимальная дистанция от i-й машины до лидера, нумерация АТС справа налево

Уравнения (5.8) (и аналогичные уравнения в других моделях) соответствуют 2-му закону Ньютона для частиц единичной массы. Отметим, однако, что первое слагаемое в (5.8) имеет смысл силы, корректирующей движение АТС в потенциале лидера, но эта сила действует лишь в направлении от лидера к следующему за ним агенту. Таким образом, в моделях следования, несмотря на их сходство с уравнениями классической механики, не выполняется 3-й закон Ньютона: по существу они являются имитационными.

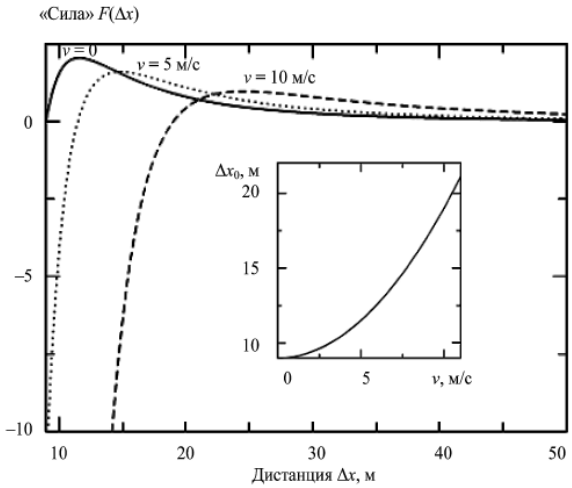
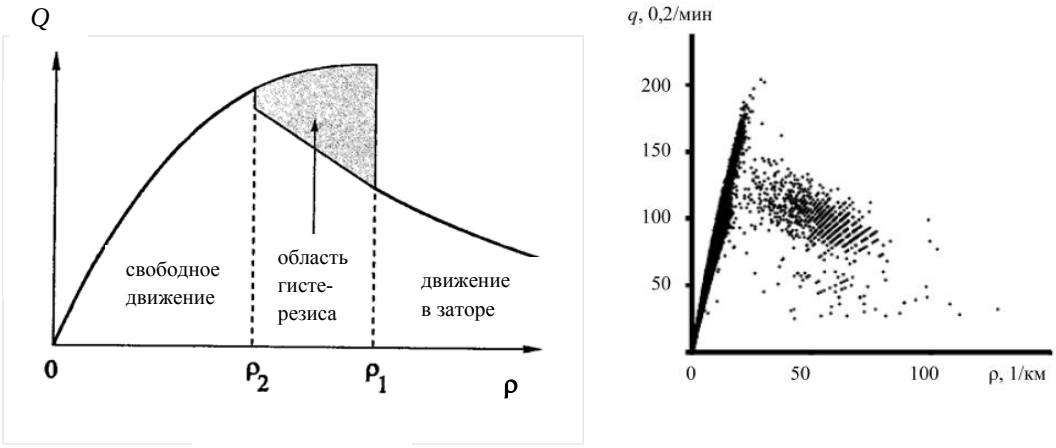


Рисунок 5.19. Зависимость корректирующей «силы» от расстояния до лидера в модели следования. На врезке – зависимость оптимальной дистанции от скорости движения (R Mahnke, J. Kaupuzs, I. Lubashevsky, *Physics of stochastic processes*, Berlin, Wiley-VCH, 2008, Figure 10.1)

Уравнения вида (5.6) и (5.8) в микромоделях автомобильного движения могут дополняться термом, отражающим стохастические изменения скоростей (см формулы (5.2) и (5.3)). Рассчитанная фундаментальная диаграмма, близкая к треугольной форме, содержит восходящую ветвь свободного «газоподобного» движения, область фазового перехода к стесненному движению с гистерезисом, т.е. разными значениями потока при возрастании и уменьшении плотности ρ, и нисходящую ветвь перегруженного потока (рис. 5.20 а). Достоверные прогнозы «замерзания» потока с образованием пробок остаются наиболее трудной задачей, но компьютерное моделирование воспроизводит такие хорошо известные явления, как нестабильное прерывистое движение (англ. stop-and-go), «волны плотности» движущихся машин и обширную область «рассеянных состояний» при стесненном движении на нисходящей ветви диаграммы в согласии с данными мониторинга (рис. 5.20 б). Это область «динамических ловушек» (англ. dynamic traps): квазистационарных состояний перегруженного потока, разброс которых в рамках микроскопических моделей вызван разным временем τ реакции водителей. Расчеты автомобильного трафика показывают сильное влияние флуктуаций в системах с малым числом агентов.

Клеточные автоматы в описании автомобильных потоков

Хотя уравнения движения АТС в микроскопических моделях имеют континуальный вид, компьютерные расчеты всегда выполняются в дискретном времени с заменой дифференциальных уравнений (5.6) и (5.8) разностными. В модели клеточных автоматов область движения (шоссе) также разбивается на участки-клетки, между которыми агенты перемещаются в дискретном времени (см. рис. 5.13). В простейшей модели Нагеля-Шрекенберга (1992 г., рис. 5.21) однополосное движение агентов с линейными координатами $\{x_i\}$ и целочисленными скоростями $\{0 \le v_i \le v_{max}\}$ (в оригинальной работе от 0 до 5) по окружности, разбитой на отрезки, определяли следующие правила:



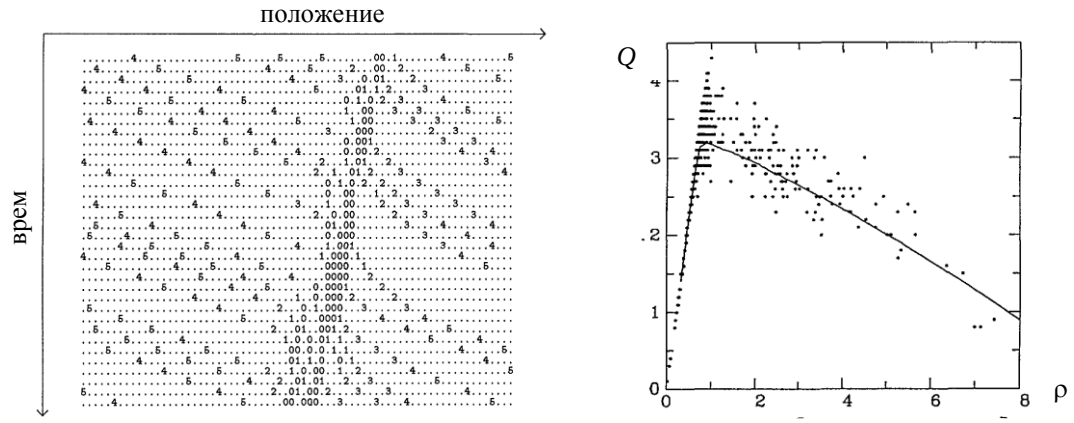
(а) (б)

Рисунок 5.20. (а) Общий вид фундаментальной диаграммы транспортного потока (И.А. Лубашевский, Н.Г. Гусейн-Заде, К.Г. Гарнисов, Труды ИОФАН, 2009, 65, 50), (б) данные видеомониторинга (Y. Sugiyama et al., N. J. Phys., 2008, 10, 033001)

1. Перемещение: $x_i(k) = x_i(k-1) + v_i(k)$,
2. Ускорение: $v_i(k) = v(k-1) + 1$ при условии $\Delta x_{i,i+1} > v_i + 1$
3. Замедление: $v_i(k) = v(k-1) - 1$ $v_i(k) = \Delta x_{i,i+1}(k-1) - 1$ при условии $\Delta x_{i,i+1} \leq v_i$,
4. Случайные изменения скорости: $v_i(k) = v(k-1) - 1$ с вероятностью $0<p<1$
   $v_i(k) = v(k-1)$ с вероятностью $1-p$

(Здесь i – номер агента, x_i – его положение (номер клетки), v_i – скорость, $\Delta x_{i,i+1}$ – расстояние до следующего агента на k–1-м и k-м шагах дискретного времени). Начальное распределение агентов по клеткам и их скорости авторы модели задавали случайным образом; динамику системы рассчитывали в многократных «прогонах» методом Монте-Карло с последующим усреднением.

Несмотря на простоту исходных допущений, модель Нагеля-Шрекенберга позволяет воспроизвести образование заторов и их перемещение против направления движения (см. рис. 5.16 в) в согласии с данными мониторинга. Ключевым фактором в образовании затора является случайное замедление агентов (рис. 5.21 а), т.е. п. 4 правил их перемещения. Расчетная фундаментальная диаграмма имеет треугольную форму и содержит область рассеянных состояний (рис. 5.21 б). Модели клеточных автоматов, предложенные к настоящему времени, воспроизводят многие существенные черты дорожного движения; их успешно используют для расчетных оценок и предсказаний.

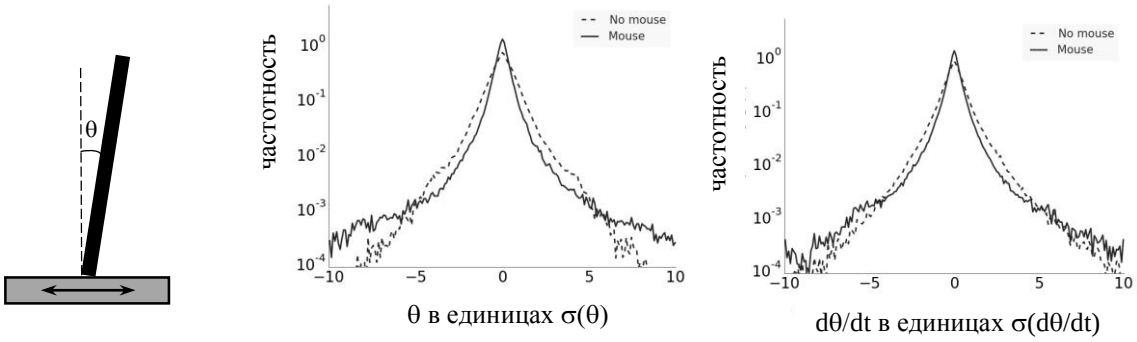


(а) (б)

Рисунок 5.21. (а) Эволюция клеточных автоматов при средней плотности ρ=0.1 на диаграмме «положение – время», цифры – скорости агентов. (б) Расчетная фундаментальная диаграмма (K. Nagel, M. Schreckenberg, J. Phys. I France, 1992, 2, 2221)

Прерывистое управление

Эксперименты на тренажерах, имитирующих управление АТС, в последнее десятилетие дали необычные результаты – тем не менее, вполне согласующиеся с практикой дорожного движения. Следуя на пустом шоссе за виртуальной машиной-лидером, перемещающейся с постоянной скоростью, испытуемые с опытом вождения выбирали постоянную скорость движения (фиксируя педаль «газа») и далее лишь корректировали его в короткие промежутки времени, поддерживая приблизительно одинаковое безопасное расстояние до лидера. Поскольку в программу тренажера была заложена потеря скорости при нейтральном положении педали (трение), стратегия водителей состояла в «прерывистом» возврате к оптимальным скорости движения и расстоянию до лидера в хорошем согласии с моделью следования. Испытуемые, имевшие малый опыт вождения, придерживались той же стратегии с меньшими интервалами времени между изменениями скорости («газ» и «тормоз»).



(а) (б) (в)

Рисунок 5.22. (а) «Балансирование» передемпфированного вертикального стержня на экране компьютера: распределения (б) угла отклонения от вертикали и (в) скорости его изменения, см.[11]

Прерывистое управление (англ. *intermittent control*) было исследовано на многих виртуальных устройствах. В большой серии экспериментов, где испытуемые перемещением мыши балансировали на экране компьютера виртуальный *передемпфированный* стержень (медленно отклоняющийся от вертикали в вязкой среде, рис. 5.22 а), были установлены негауссовы распределения управляющих параметров (угла отклонения θ и скорости его изменения $d\theta/dt$) с острым максимумом на вертикальном положении стержня. (рис. 5.22 б, в). Подобные им распределения скорости и ускорения (положения и нажима педали) были получены на стендах управления АТС. В схеме прерывистого управления испытуемый основную часть времени находится в ожидании, предпринимая новые действия лишь при существенном отклонении от желаемых параметров (скорости и расстояния для АТС либо отклонении стержня при балансировании). Такая стратегия движения автомобиля соответствует «динамической ловушке» на фундаментальной диаграмме (см. рис. 5.20 б).

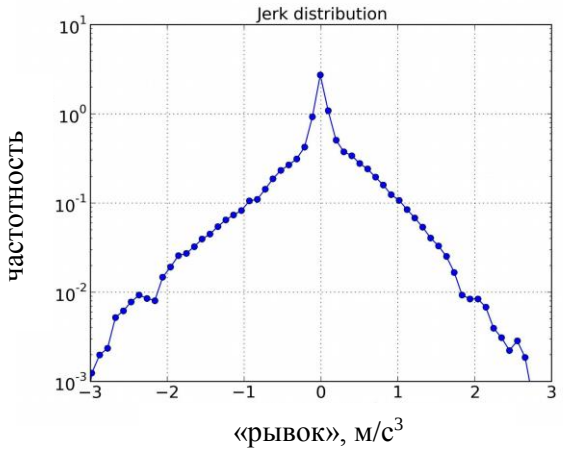


Рисунок 5.23. Распределение значений «рывка» (скорости изменения ускорения) у опытных водителей на тренажере[11]

Алгоритм прерывистого управления реализуется не только в движении автомобилей, но и в широком спектре деятельности людей: работе операторов, стратегиях биржевых игроков и многих других видах поведения. Для всех них характерно непрерывное наблюдение обстановки в сочетании с эпизодическими корректирующими действиями. «Остроконечные» распределения с обратной степенной асимптотикой отклонений от среднего весьма характерны для динамики цен на бирже и ряда других процессов в социальных системах (см. далее гл. 8 и 9). Прерывистые воздействия, по-видимому, являются эволюционно отобранным средством экономии ресурсов мозга: они также наблюдается у животных и, вероятно, тесно связаны с явлением *инсайта*, которое будет обсуждаться в части III.

При существенном отклонении от оптимального режима быстрая коррекция скорости приводит к ненулевой *производной ускорения da/dt* (*рывок*, англ. jerk), выводя динамику управления за пределы классической механики (Рис. 5.23). Математические модели прерывистого управления – одна из быстро развивающихся областей междисциплинарной физики, где теория автомобильного трафика соединяется с когнитивными науками[11].

Экономические потери из-за нарушения транспортных потоков могут составлять до 10-20% общей стоимости перевозок. По этой причине в современных системах управления автотранспортом[10,12] используются все доступные технические средства, включая спутниковую навигацию и модельные расчеты на суперкомпьютерах («компьютерные эксперименты»). Комплексный подход позволяет в реальном времени прогнозировать автомобильное движение по нескольким полосам и сложным транспортным развязкам, а также регулировать работу светофоров (рис. 5.24; см. задачу в разд. 1.3 главы 1). Положения АТС с точностью до нескольких метров устанавливается с помощью глобальных спутниковых систем GPS (США), ГЛОНАСС (РФ), Galileo (ЕС), Бэйдоу (КНР), которые получают сигналы от мобильных устройств на транспортных средствах: прежде всего смартфонов с бесплатно установленными системами навигации. Это делает возможным мониторинг состояния транспортных потоков с оценкой скорости и плотности движения, а также локализацию пробок и дорожно-транспортных происшествий (ДТП) (рис. 5.25).

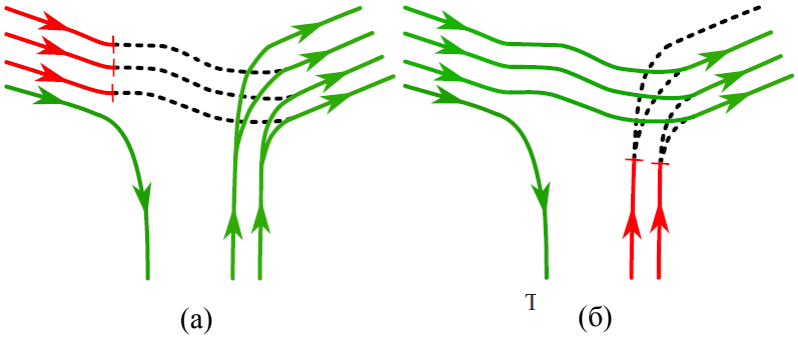


Рисунок 5.24. Фазы светофорного регулирования на Т-образном перекрестке: (а) – вход, (б) – транзит (И.Н. Калинин, К.К. Глухарев, Компьютерные исследования и моделирование, 2014, 6 (4), 523)

В интернет-навигации предусмотрена обратная связь системы с водителями АТС, которые могут сообщать о ДТП, пробках и иных нештатных ситуациях. На эмпирическом уровне это соответствует включению ее пользователей в систему *распределенного интеллекта* (РИ), что будет обсуждаться в ч. 3. Нанесение реальной обстановки на «электронные» карты местности, включая кварталы городов, осуществляется в *геоинформационных системах* (*ГИС*: Google maps, 2GIS, Яндекс Карты и др.), которые будут рассмотрены в главе 8.

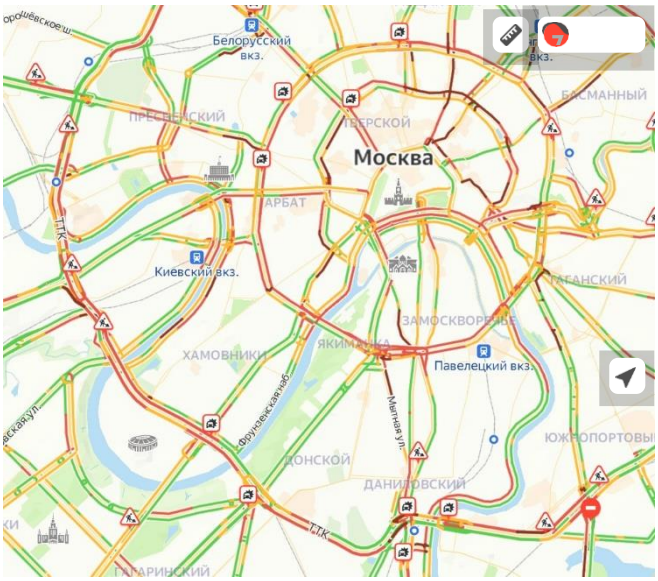


Рисунок 5.25. Состояние дорожного движения на Яндекс Картах, см. http://mosfo.ru/probki.htm

В последнее десятилетие к системам навигации подключаются интенсивно разрабатываемые беспилотные АТС[13]. Перспективные системы управления «автомобилей-роботов», способных безопасно функционировать в современных мегаполисах, относят к области *искусственного интеллекта* (ИИ), который также будет обсуждаться в 3-й части книги.

Литература к разделу 5.3

[10] И.И. Морозов и соавт., *Численное исследование транспортных потоков на основе гидродинамических моделей*, Компьютерные исследования и моделирование 2011 **3** (4), 389.
[11] I. Lubashevsky, K. Morimura, *Physics of mind and car-following problem*, in R. A. Meyers (ed.), Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer Science+Business Media LLC, 2018.
[12] А.М. Валуев, А.А. Соловьев, *Моделирование зависимостей, характеризующих динамику автотранспортных потоков*, Информатизация и связь, 2018, №2, 106.
[13] А.Г. Юзаева, В.В. Кукарцев, *Беспилотные автомобили: опасности и перспективы развития*, Актуальные проблемы авиации и космонавтики, 2016, **2**, 120.

5.4. Движение пешеходов

Динамику пешеходных потоков, с практической точки зрения не менее важную, чем автомобильный транспорт, рассчитывают методами, близкими к моделированию потоков АТС. В отличие от автомобильного трафика, при пешеходном движении скорость перемещения самодвижущихся частиц составляет лишь ~1–1.5 м/с (3–5 км/час), а их физические контакты между собой и с препятствиями допустимы, хотя с точки зрения пешехода и нежелательны. Это изменяет вид зависимостей $v(\rho)$ и $Q(\rho)$ («фундаментальными диаграммами» здесь нередко называют графики обеих функций) по сравнению с движением АТС. Плотность потока выражается числом агентов на единицу площади (1/м^2) с соответствующим изменением размерности $Q = \rho v$ [1/(м·с)].

Нелинейная функция $v(\rho)$ включает область стесненного движения с $v \approx const$, особенно выраженную в потоках «сильно мотивированных частиц» – таких как паломники или демонстранты (рис. 5.26 а). На графике зависимости $Q(\rho)$, по данным разных авторов, имеются «плато» либо второй максимум потока в области средних плотностей (рис. 5.26 б). Последующее резкое падение потока при достижении высокой плотности 5-6 чел/м^2 (при тесном физическом контакте люди останавливаются) отражает угрозу возникновения давки на открытом участке местности («Ходынское поле»). Основные типы фундаментальных диаграмм, предложенные в период с 1958 по 2017 гг., представлены в обзорах[14,15].

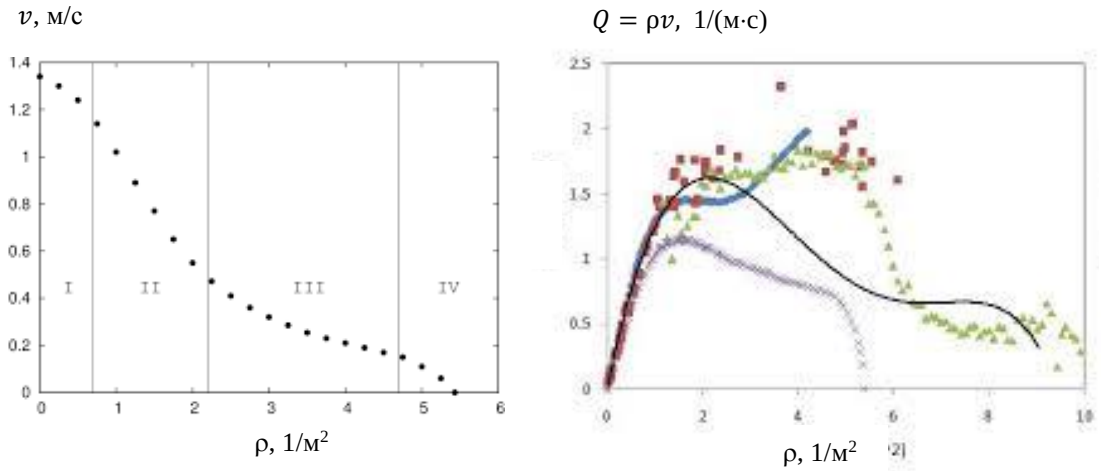


Рисунок 5.26. Диаграммы пешеходного движения: (а) график уравнения состояния $v(\rho)$ (A. Seifried, et al., Journal of Stat. Mech., 2005, P10002), (б) фундаментальная диаграмма $Q(\rho)$ по данным разных авторов (C.J.Jin, et al., arXiv:1710.10263 [physics.soc-ph])

«Микроскопическое» расчетное моделирование движения пешеходов обычно проводится в рамках *модели социального поля* (см. гл. 1, разд. 1.1.5). В этом случае двумерное движение агентов, в отличие от автомобильного трафика обладающих разными массами, предпочтительными скоростями и временем реакции (присутствие в потоке инвалидов, детей и др.), удовлетворяет уравнениям

$$
\begin{aligned}
& m_i \, d\mathbf{v_i}/dt = \mathbf{F_i}^{\text{инд}} + \mathbf{F_i}^{\text{общ}} + \boldsymbol{\eta}(t), \\
& \mathbf{F_i}^{\text{инд}} = (m_i/\tau)(v_i^{(0)}\mathbf{e} - \mathbf{v_i}), \\
& \mathbf{F_i}^{\text{общ}} = -\textstyle\sum_{\text{цели}} \mathbf{f_{ik}} + \sum_{\text{стены}} \mathbf{f_{ip}} + \sum_j \mathbf{f_{ij}},
\end{aligned}
\qquad (5.9)
$$

где m_i – масса агента, τ – время реакции, $\mathbf{e}$ – единичный вектор в направлении движения. По существу, формулы (5.9) представляют вариант уравнения Ланжевена (разд. 4.4.1 в гл. 4) с особыми формами вязкого трения $\mathbf{F_i}^{\text{инд}}$ и «детерминистского» потенциала $\sum \mathbf{F_i}^{\text{общ}}$; в них также включены стохастические возмущения движения (шум) $\boldsymbol{\eta}(t)$.

Стратегия движущегося агента в расчетных моделях задается в виде корректирующих виртуальных сил: внутренней $\mathbf{F_i}^{\text{инд}}$ и внешней $\mathbf{F_i}^{\text{общ}}$. Первая, перенесенная из моделей автомобильного трафика, отражает стремление агентов к своим оптимальным скоростям $\{v_i^{(0)}\}$. Внешние силы $\mathbf{F_i}^{\text{общ}}$ воспроизводят воздействие окружающей среды: притяжение к целевым объектам (переходам, магазинам и т.д.) и отталкивание от препятствий: как от стен

и иных предметов на улице и внутри зданий, так и от других движущихся частиц. Вид потенциала отталкивания с «твердым ядром» $U(r) = Ae^{-b(r-R_0)}$ заимствуют из молекулярной физики (потенциал Борна-Майера, формула (2.32 б) в гл. 2); здесь R_0 – радиус агента, r – расстояние до препятствия, A и b – эмпирические константы. Форма агента на двумерной карте участка движения в простейших моделях задается кругом или эллипсом (см. рис. 1.9 в главе 1).

Компьютерное моделирование пешеходных потоков с помощью уравнений (5.9) воспроизводит их главные особенности: обтекание препятствий, попеременное прохождение через узкий проход (англ. bottleneck), расслоение встречных потоков на противоположно движущиеся «полосы» (рис. 5.27 а, б). При высокой плотности противоположных потоков в коридоре конечной ширины увеличение шума $\boldsymbol{\eta}(t)$ приводит к росту виртуального радиуса агентов и образованию пробки с плотной упаковкой неподвижных частиц (рис. 5.27 в). Это довольно очевидное явление в моделировании пешеходного движения было названо «замерзанием при нагреве» (англ. freezing by heating, см. [2] в списке литературы).

Траектории движения пешеходов в ряде случаев удается вывести на основе аналога принципа наименьшего действия, рассмотренного в разд. 2.2.1 главы 2. Этот фундаментальный физический принцип с середины XX был распространен Дж. Ципфом на диссипативные социальные системы под названием *принципа наименьших усилий*. Подобно идее социального поля, сформулированной в это же время К. Левиным (см. выше), в современных исследованиях «физики пешеходов» данный принцип выражен математическими формулами.

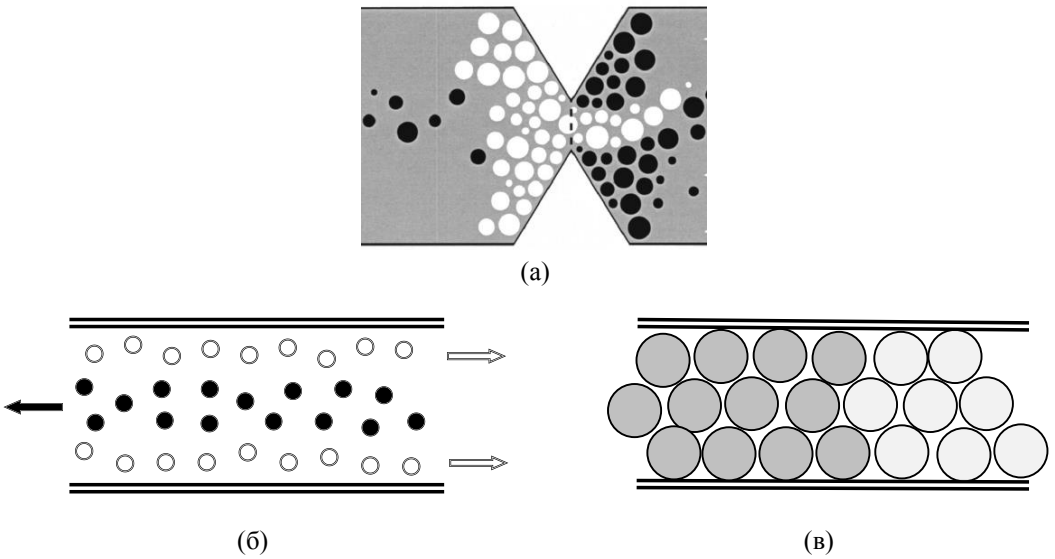


Рисунок 5.27. Расчетные режимы пешеходного движения: (а) попеременное прохождения сквозь узкую дверь, радиусы кругов пропорциональны скорости движения, (б) расслоение встречных потоков, (в) образование пробки при увеличении виртуальных размеров агентов (*freezing by heating*, см. D. Helbing, P. Molnar, Phys. Rev. E., 1995, 51 (5), 4282)

В характерной работе[16] усилия агента на пути П отражают интегральные затраты энергии

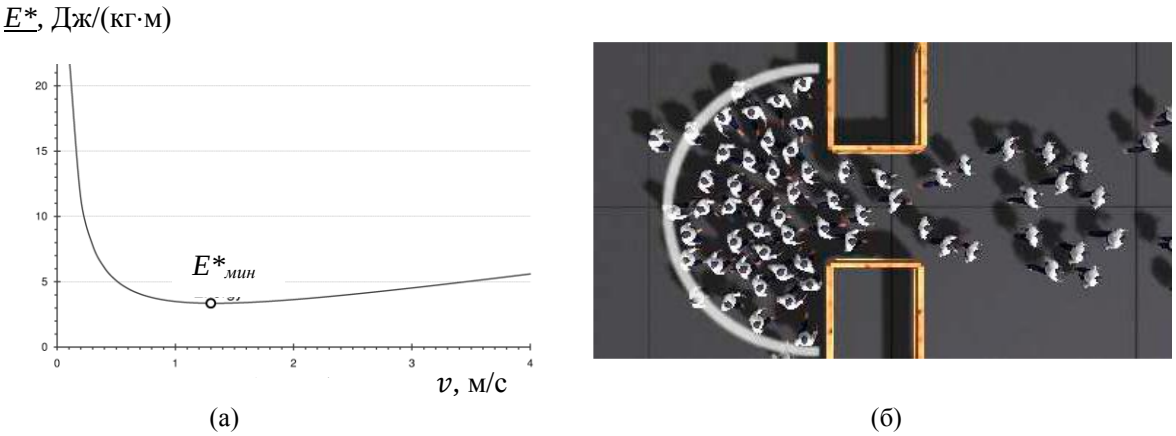
(5.10) $$E_i = m_i \int_{\Pi} (a v_i^2 + b)\, dt,$$

где m_i – масса агента, v_i – его скорость, а эмпирическими коэффициентами a и b, разными для разных типов пешеходов, задаются энергозатраты, соответственно, при движении и в состоянии покоя. Эффективные траектории, удовлетворяющие вариационному принципу

(5.10 а) $$\delta E_i = 0,$$

соответствуют перемещению с постоянной скоростью $v = \sqrt{a/b}$ на горизонтальном пути без препятствий с минимумом удельных энергозатрат (рис. 5.28 а). Усредненным коэффициентам a = 2.23, b = 1.26 для взрослого мужчины в этом случае отвечает оптимальная скорость 1.33 м/с. Для «толпы» агентов, избегающих столкновений с препятствиями и друг с другом, формулы (5.10, 5.10 а) позволяют воспроизвести реалистическую динамику перемещения (рис. 5.28 б).

Отмеченный выше имитационный характер уравнений «динамики пешеходов» проявляется и в принципе наименьших усилий: размерность коэффициентов a и b в формуле (5.10) не имеет убедительного физическое обоснования, эффективность энергозатрат E^* на рис. 5.28 а измеряется в единицах ускорения (м/с^2). Но существование аналога вариационного принципа (5.10 а) в динамике социальных систем, по-видимому, имеет общий характер. В последующих главах будут рассмотрены некоторые другие его проявления. Используемые варианты компьютерного моделирования пешеходных потоков включают, в том числе, гравитационные модели и различные варианты клеточных автоматов (см. [7] в списке литературы).



(а) (б)

Рисунок 5.28. (а) График эффективности энергозатрат E^*, (б) преодоление агентами суженного прохода[16]

Важной частью исследований пешеходных потоков и перемещения людей в местах общественного пользования с первой половины XX века являются эксперименты и полевые наблюдения [5, 6]. В настоящее время данные с видеокамер и инфракрасных датчиков служат как исследовательским инструментом, так и главным средством мониторинга состояния городской среды. Расчетные модели социального поля используют в «компьютерных экспериментах», направленных на поиск оптимальных режимов движения в элементах городской инфраструктуры: улицах, перекрестках, торговых центрах и т.д. В разных вариантах расчетов вводятся дополнительные виртуальные взаимодействия, которые отражают стремление к оптимальной дистанции между пешеходами, выравнивание направлений (alignment) и скоростей движения по ближнему окружению агента, перемещение группами и др. В современных методах компьютерной анимации воспроизводится перемещение антропоморфных агентов – нередко совместно с АТС (перекрестки, паркинги и др., рис. 5.29). Ряд коммерческих фирм выпускает программные продукты для таких расчетов[17-19].

Рисунок 5.29. Антропоморфные пешеходы в агентном моделировании. Источник: компания AnyLogic (https://www.anylogic.ru/)[19]

В последнее десятилетие на основе видеомониторинга пешеходных потоков в потенциал взаимодействия частицы с окружением была введена анизотропная угловая зависимость, которая отражает неравномерное восприятие движущимся агентом целей и препятствий в секторе обзора. Объекты, расположенные в стороне от направления движения агента, влияют на него слабее, чем близкие к желаемой траектории (рис. 5.30). Это явление в «физике пешеходов» интерпретируется как виртуальное сокращение размеров предметов, воспринимаемых боковым зрением агента – то есть тех, относительно которых угловая скорость его перемещения максимальна. В литературе обсуждались аналогии анизотропного восприятия препятствий и релятивистского сокращения «продольных» размеров с приближением скорости относительного движения к скорости света (см. разд. 3.5.1 в гл. 3). Конечная скорость человеческой реакции действительно затрудняет оценки размеров движущихся объектов, и релятивистские аналогии агентных моделей могут быть не только формальными.

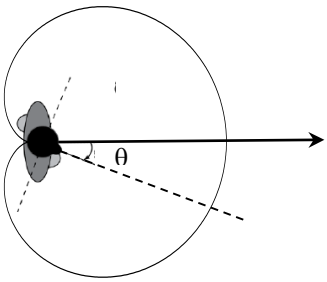


Рисунок 5.30. Модельная угловая зависимость воздействия «социального поля» на движущегося пешехода («вид сверху») $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ (D. Helbing A. Johansson, in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. 2009. N.Y.: Springer. P. 6476)

Литература к разделу 5.4

[14] L.D. Vanumu, K.R. Rao, G. Tiwari, *Fundamental diagrams of pedestrian flow characteristics: a review*, Eur. Transp. Res. Rev. 2017, **9**, 49.

[15] T. Kretz, *An overview of fundamental diagrams of pedestrian dynamics*, Technical Report, 2019, https://www.researchgate.net/publication/336286296_An_overview_of_fundamental_diagrams_of_pedestrian_dynamics, DOI :10.13140/RG.2.2.30070.96326

[16] S.J. Guy, et al, *Least-effort trajectories lead to emergent crowd behaviors*, Phys. Rev. E 2012, **85**, 016110.

[17] THUNDERHEAD: agent-based evacuation simulation
https://aecom.com/services/planning-consulting/pedestrian-modelling/,
см., также, https://www.thunderheadeng.com/pathfinder/

[18] AECOM: https://aecom.com/services/planning-consulting/pedestrian-modelling/

[19] Компания AnyLogic: https://www.anylogic.ru/company/about-us/

5.5. Управление толпой

Начальник тыла без резервов — уже не начальник тыла,
это беспомощный созерцатель нарастающей трагедии.
генерал-лейтенант Н.А. Антипенко, «На главном направлении»

Я вышел за ворота, и рёв толпы поглотил меня
Курбан Саид, «Али и Нино»

Расчеты динамики пешеходных потоков используются в оценках безопасности объектов массового посещения (кинотеатров, стадионов, супермаркетов) и массовых мероприятий. Под широким термином *управление толпой* (англ. *crowd control*) в литературе объединяют техническую организацию пешеходных потоков в городе, планировку мест массового посещения (торговых центров, вокзалов, театров, стадионов и т.д.), обеспечение пассажирских перевозок, вопросы безопасности массовых мероприятий, включая экстренные обстоятельства (пожарная эвакуация) – а также манипулирование поведением масс. Моделирование толпы тесно связано с изучением стихийных реакций человека в нестандартных условиях – паника, болельщики на трибуне, политический митинг и др. Из всего перечисленного круга проблем в этой главе мы рассмотрим прежде всего инженерное обеспечение повседневной жизнедеятельности города. Использование неосознанных действий людей в политтехнологиях, коллективная обработка информации и порождаемые ею элементы распределенного интеллекта будут рассмотрены в последующих главах.

Автору этих строк однажды довелось почувствовать угрозу, неотделимую от массы людей, в спокойной, но плотной толпе на станции метро у края платформы. Увеличение масштаба человеческих сообществ придает критическую важность всем сторонам нашей повседневной деятельности не только в военное, но также и в мирное время. Социальная инженерия ведет начало от первых больших городов (например, древнего Рима с его миллионным населением, шестиэтажными деревянными домами, рациональной планировкой улиц и водопроводом, но без канализации – и всеми сопутствующими эпидемиями и пожарами); в Европе урбанистика насчитывает тысячелетие непрерывного развития. Технические задачи снабжения, поставок, грузовых и пассажирских перевозок в этой области без преувеличения являются вопросами жизни и смерти. Современный мегаполис избегает возможных катастроф лишь благодаря постоянному контролю, прогнозированию негативных явлений (таких как резкое похолодание, штормовой ветер, гололед в системе городского транспорта и прочие угрозы жизни города) и проработке способов борьбы с ними (см. книгу [3] в списке литературы). Средства управления этими процессами включают, в том числе, компьютерные эксперименты и разрабатываемые для них агентные модели[17-19].

Расчеты человеческих потоков в местах общественного пользования – в частности, крупных торговых объектах – остаются важнейшей инженерной задачей с первой половины XX века. До появления компьютеров они выполнялись графически с помощью номограмм, построенных по натурным экспериментам. (Так, в натурных экспериментах, проведенных в Москве в конце 1940-х гг., модельные потоки состояли из людей разного роста и возрастов как в зимней, так и в летней одежде, см. [5] в списке литературы). В настоящее время оптимальные потоки рассчитывают по данным видеосъемки и экспериментальным измерениям плотности и скорости движения пешеходов в заданных условиях[20].

Актуальность «управления толпой» доказывают трагические случаи массовой давки на политических (похороны И.В. Сталина в Москве 9 марта 1953 г.), религиозных (гибель паломников на хадже в Саудовской Аравии в 2006 и 2015 гг.) и спортивных мероприятиях (Шеффилд, Англия, 1989 г. и другие инциденты). Особое внимание при планировании городской инфраструктуры уделяется предотвращению террористических актов, рассчитанных на панику в больших скоплениях людей[*]. Анализ факторов, угрожающих безопасности, меры профилактики трагических инцидентов и скорейшей ликвидации их последствий (в том числе доступность и оперативность медицинской помощи) составляют важную часть современной урбанистики[21,22].

Расчетное моделирование и компьютерные эксперименты в области управления толпой не ограничиваются режимами дорожного и пешеходного движения – они охватывают весь спектр угроз, связанных с компактным проживанием людей. (В соответствии с известным афоризмом «*все инструкции по технике безопасности написаны кровью и пеплом*»). Одним из главных источников пожарной опасности в зданиях массового пользования является переполнение помещений, давка при экстренной эвакуации и отравление токсичными продуктами сгорания. С 2000 г. в компьютерных расчетах подобных явлений привлекается модель социального поля, дополненная стремлением агентов к максимальной скорости,

[*] D. Helbing, A. Johansson, *Pedestrian, crowd, and evacuation dynamics*, in Encyclopedia of Complexity and Systems Science. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-0-387-30440-3_382.

потенциалами следования («стадное поведение») и физического отталкивания («турбулентность»), которые отражают действия людей в экстремальных условиях[23,24]. В таких расчетах была наглядно показана недопустимость расширений (проходных комнат) на путях эвакуации, где «быстрые» агенты обгоняют «медленных» с образованием затора на выходе (Рис. 5.31). Калибровка параметров модели социального поля, разработанной Д. Хелбингом и соавт. (см. выше), для обстановки панической эвакуации, в частности, позволила воспроизвести фактические цифры погибших (более 150 чел.) при компьютерных реконструкциях пожара в ночном клубе «Хромая лошадь» (Пермь, 5.12.2009 г.). По результатам расчета, ключевым фатальным обстоятельством стала полузакрытая дверь эвакуационного выхода: при открытой второй створке (не заблокированной, но не отворенной из-за массовой паники) большинство посетителей смогли бы покинуть помещение[23].

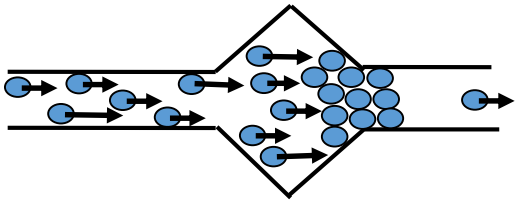


Рисунок 5.31. Образование затора при панической эвакуации (D. Helbing, I. Farkas, T. Vicsek, Nature, 2000, 407, 487)

Источником данных для моделирования упорядоченной и панической эвакуации служат, в том числе, модельные «живые» системы. В работе[25] параметры соответствующих агентных моделей калибровали по перемещению муравьев под воздействием репеллента из боксов со свободным и частично заблокированным выходом. Несмотря на принципиальную разницу в когнитивных возможностях индивидов, данные позволили воспроизвести основные черты панической эвакуации людей. Составной частью современного проектирования зданий является компьютерное моделирование катастрофических событий с варьируемыми параметрами (число и плотность агентов, расположение аварийных указателей, видимость при задымлении и др., см. [2, 6]). Важнейшей задачей здесь является создание систем, позволяющих управлять эвакуацией в реальном времени при быстрых и опасных изменениях обстановки. Модели и программные средства для решения таких задач обсуждаются в статье[24].

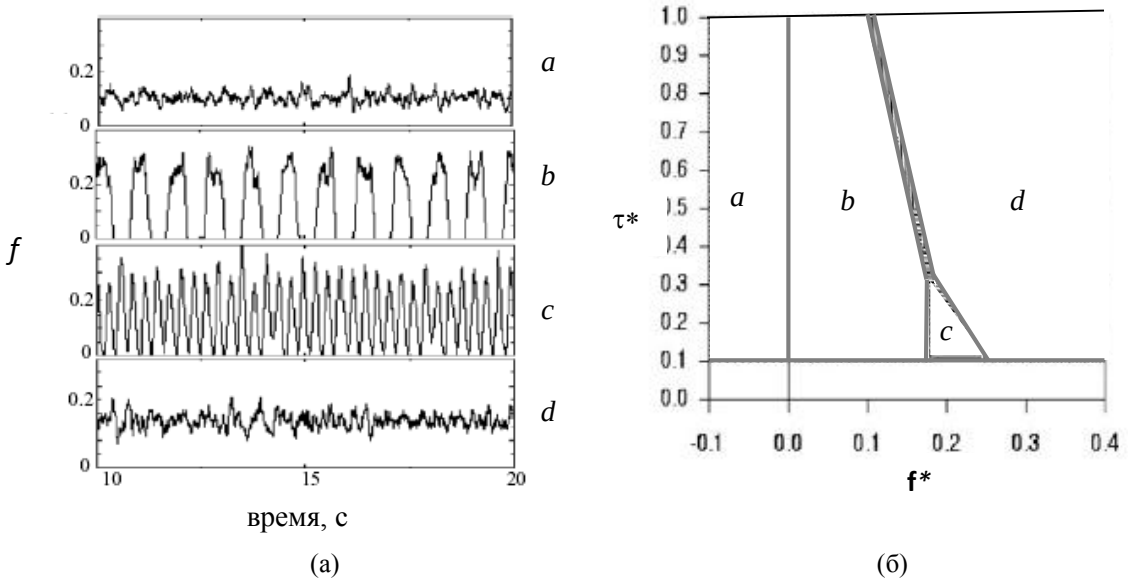
Для оценки пожарных рисков в жилых домах часто используется *модель рационального правонарушителя* (Беккер, 1968 г.). В рамках этой модели агенты нарушают правила безопасности (например, разводят открытый огонь в деревянном доме) лишь в том случае, если полезность правонарушения превышает оцениваемый ими риск. Данный подход[26] позволяет воспроизвести логарифмически нормальное распределение плотности вероятности $f(u)$ потерь домохозяйств от пожаров

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u u} \exp\left[-\frac{(\ln u - \ln \mu)^2}{2\sigma_u^2}\right],$$

где μ – медианное значение потерь, σ_u – дисперсия нормального распределения логарифма величины потерь $\ln u$. Исследования другого массового фактора риска в городской среде –

моделирование распространения инфекций, включая динамику эпидемий – будут обсуждаться в следующей главе.

Не менее важной, хотя и реже обсуждаемой в академической литературе областью применения агентных моделей является управление человеческими потоками на массовых мероприятиях. Сюда входят, с одной стороны, обеспечение безопасности участников демонстраций и уличных шествий, а с другой – средства выведения подобных мероприятий из-под контроля и провоцирования беспорядков. Организация «цветных революций», инициированных внешними силами в разных странах мира, а также нейтрализующие их меры безусловно опираются на масштабные расчетные исследования.



(а) (б)

Рисунок 5.32. Фазовая диаграмма аплодисментов: (а) частота и громкость *f*, (б) области моделируемых режимов (*a* – слабые несинхронные, *b* – синхронные, *c* – частые синхронные, *d* – сильные несинхронные (овация); *f – уровень шума, τ* – характеристическое время реакции агента (Z.Neda, et al., Physica A, 2003, 321, 238)**

Управление «автоматическим» поведением человеческих масс имеет многовековую историю. Классическим примером могут служить группы *клакеров*, возбуждающих аплодисменты аудитории на концертах и в театрах. В 2001 г. коллектив румынских и венгерских физиков провел в здании Бухарестской оперы экспериментальные исследования этого процесса. В экспериментах «группы поддержки», составленные из студентов, в ходе театрального действия старались перевести несинхронные аплодисменты публики в ритмические. Зависимость режима аплодисментов от численности и расположения групп, частоты хлопков и уровня шума регистрировались и далее воспроизводились в модельных расчетах (Рис. 5.32). Авторы не скрывали практической направленности своих исследований, в которых фактически определялись условия стохастического резонанса в зрительном зале. Моделирование «мексиканской волны» на трибунах стадиона, упомянутое в главе 4, также относится к разработке новых методов управления толпой.

В другой серии экспериментов в 2000-е годы европейские физики выясняли условия, позволяющие привести в движение группу из 200-300 испытуемых рассредоточенными в ней *скрытыми лидерами*, которые задавали направление следования[27]. В цитируемой статье, в согласии с результатами других работ по манипулятивному управлению массами,

было установлено, что доля скрытых лидеров, достаточная для решения такой задачи, составляет 3-5% от общей численности группы. Прикладные аспекты этих исследований вполне проявились в серии «цветных революций» (организация массовых протестов, возбуждение агрессии толпы, подпрыгивающие демонстранты и т.д.); они будут обсуждаться в главе 9 вместе с другими примерами использования физических моделей для политических манипуляций.

Литература к разделу

[20] X.L. Zhang, et al., *Empirical study of a unidirectional dense crowd during a real mass event*, Physica A, 2013, **392**, 2781.
[21] Д.В. Шихалев, *Проблемы управления обеспечения пожарной безопасности объекта. ч.1: Методы оценки*, Проблемы управления, 2022, №1, 3; *Методы мониторинга*, там же, 2022, №2, 3.
[22] L. Somaroo, V. Murray, *Disasters at mass gatherings: lessons from history*, PLOS Current Disasters, 2012, Jan. 31, Edition 1. doi: 10.1371/currents.RRN1301.
[23] А.М. Аптуков, Д.А. Брацун, А.В. Люшнин, *Моделирование поведения паникующей толпы в многоуровневом разветвленном помещении*, Компьютерные исследования и моделирование, 2015, **5** (3), 491.
[24] В.М. Колодкин, М.Э. Галиулин, *Программные алгоритмы, реализующие модель движения людских потоков в системе управления эвакуацией людей из здания*, Пожаровзрывобезопасность, 2016, **25** (10), 75.
[25] N. Shiwakoti, M. Sarvi, G. Rose, M. Burd, *Animal dynamics based approach for modeling pedestrian crowd egress under panic conditions*, Proc. Soc. Behav. Sci. 2011, **17**, 438.
[26] С.Н. Тростянский, Ю.Н. Зенин, *Модели для исследования факторов управления интегральными пожарными рисками в жилом секторе регионов России*, Вестник Воронежского института МВД России, 2014, №3, 58.
[27] J.R.G. Dyer, et al., *Leadership, consensus decision making and collective behaviour in humans*, *Phil. Trans. Royal Soc. B* 2009, **364**, 781.

Рекомендуемая литература

1. Г.Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии*, 2-е изд., Москва-Ижевск: R&C Dynamics, 2011.
2. T. Vicsek, A. Zafeiris, *Collective motion*, Phys. Rep., 2012, **517**, (3–4), 71.
3. А.В. Гасников (ред.) *Введение в математическое моделирование транспортных потоков,* 2-е изд. М.: МЦНМО, 2013.
4. В.И. Швецов, *Математическое моделирование транспортных потоков*, Автоматика и телемеханика, 2003, №11, 3.
5. В.М. Предтеченский, А.И. Милинский, *Проектирование зданий с учетом организации движения людских потоков*, 2-е изд., М.: Стройиздат, 1979.
6. В.О. Корепанов, *Модели рефлексивного группового поведения и управления*, М.: ИПУ РАН, 2011.
7. Urban Space AECOM (S.G. Barch, E.R. Beng, M. Didzys), *Modelling Pedestrian Movement*, ICE Publishing, London, UK, 2019, ISBN 978-0-7277-6381-5.

ГЛАВА 6. СТРУКТУРА СОЦИУМА: ГРАФЫ И СЕТИ

Основные понятия теории графов. Матрица корреспонденций. Задача о ранце, задача о коммивояжере. Когнитивные карты. Случайные графы Реньи, Уоттса-Строгаца, Барабаши-Альберт. Графы «тесного мира».

Сложные сети и их топологические характеристики, топологическая нагрузка узла. Сетевые структуры экономики и общества, ассортативность и диссортативность. Нейронные сети мозга. Сеть Интернет, трафик информации. «Неевклидова геометрия» сложных сетей.

Устойчивость сетей к случайным отказам узлов и целенаправленным атакам. Процессы на сетях: перколяция, модели эпидемиологии, каскады. Фазовые переходы в сетевых структурах. Синхронизация узлов, осцилляторы Курамото. Взаимодействие процессов на сетях, ко-эволюция.

6.1. Графы и их характеристики

Граф – это набор (*множество*) пронумерованных точек-*вершин*, соединенных *ребрами* (неориентированными отрезками) либо *дугами* (стрелками). На описательном уровне граф можно считать обобщением геометрической фигуры, хотя в действительности это более абстрактная конструкция *дискретной математики*: в отличие от фигур, заданных на плоскости или в пространстве, графы состоят *только* из точек и связей между точками. Совокупность вершин и ребер любого плоского многоугольника – частный случай графа, однако понятие графа гораздо шире. Именно поэтому графы используют в решении прикладных задач, связанных со структурой и функционированием человеческого общества.

Абстрактными графическими схемами (такими, как генеалогическое дерево) представляли отношения между объектами произвольной природы с античных времен. Родоначальником математической *теории графов* считается Леонард Эйлер (1707–1783): один из крупнейших математиков XVIII века, работавший в Швейцарии, Пруссии и Российской империи. С середины XIX века началось систематическое развитие теории графов в связи с задачами естественных и инженерных наук (электрические и технологические схемы, структуры молекул, соотношения математической логики и многое другое), хотя сам термин вошел в употребление лишь в конце века. Со второй половины XX века также быстро растет *теория сетей* – больших графов сложного строения – и процессов на сетях в рамках эпидемиологии, логистики, управления транспортом, развития коммуникаций и других приложений. Весь этот круг проблем в современной зарубежной литературе называется *network science*.

Важность теоретико-графовых подходов для экономических и общественных наук определяется тем, что многообразные формы отношений в социальных системах (взаимодействие людей в группе, хозяйственные связи предприятий, эволюционные процессы и др.) можно представить в виде графических схем. Таким образом, графами и сетями изображаются структуры социума в том же смысле, в каком строение вещества передается расположением атомов в молекулах и кристаллах.

Здесь следует оговориться. Подобно тому, как физические и химические свойства веществ зависят не только от их структуры, но и от силы связей между атомами и молекулами, свойства социума также определяются интенсивностью взаимодействия его составных частей – которая, в отличие от естественных наук, часто не поддается количественной оценке. Кроме того, структуры социальных систем обычно изменяются во времени; при всем этом они могут лишь слабо влиять на протекающие в них процессы. Тем не менее, «наука о сетях» представляет наиболее строгий современный подход в междисциплинарной физике, занимая солидную долю ее журнальных публикаций.

В простейших примерах графов длины ребер, соединяющих вершины i и j, а также направление этих ребер ($i \rightarrow j$ либо $i \leftarrow j$) не несут информации: имеет значение лишь факт связи между вершинами. Иными словами, любым треугольникам (прямоугольному, равностороннему, разностороннему, равнобедренному) отвечает один и тот же граф, а любым четырехугольникам (квадрату, параллелограмму, трапеции) – другой «безразмерный» циклический граф (рис. 6.1). Если вершины графа соединены только ненаправленными отрезками-ребрами, он называется *неориентированным*. В *ориентированных* графах вершины соединены «направленными» ребрами-стрелками (их обычно называют *дугами*). Существуют и *смешанные* графы – такие, например, как схема городского микрорайона, включающего улицы с односторонним и двусторонним движением.

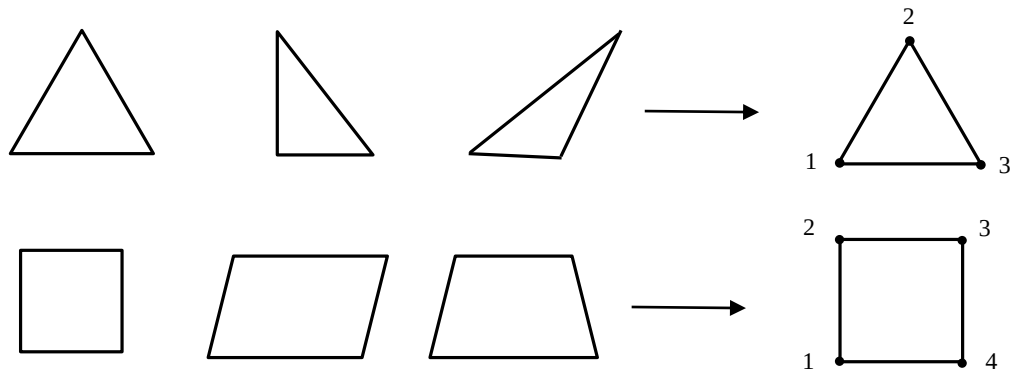
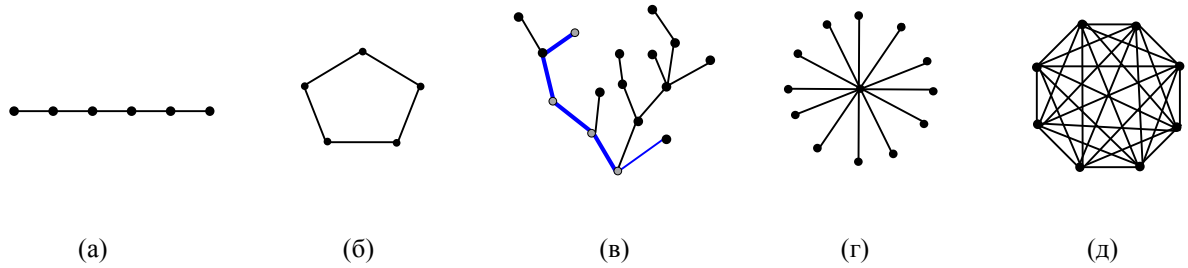


Рисунок 6.1. Простейшие «безразмерные» неориентированные графы

Разный виды графов (цепи, циклы, звезды, деревья) различаются порядком связывания вершин (рис. 6.2). Вершины и стороны любого плоского n-угольника образуют *цикл*. Граф, не содержащий циклов, называется *деревом*; частным случаем дерева является *звезда*. Граф с n вершинами, каждая из которых связана со всеми остальными, называется *полным графом* K_n. У полного графа $^1/_2\, n(n-1)$ ребер: в каждой из n его вершин сходятся n–1 ребер, и каждое ребро соединяет две вершины. (Очевидно, что одно из двух чисел n и n–1 четное, так что общее число ребер целое).

У всех графов на рисунках 6.1 и 6.2 любую пару вершин может соединять только одно ребро; кратные ребра отсутствуют. Такие графы называются *простыми*. Число ребер, сходящихся в вершине графа, называется *степенью вершины* k. На рис. 6.2 все вершины в цикле имеют степень $k = 2$, у всех вершин в полном графе $k = n - 1$, у центральной вершины звезды $k = n - 1$, а у всех остальных $k = 1$. Вершины с $k = 1$ называются висячими, с $k = 0$ (не

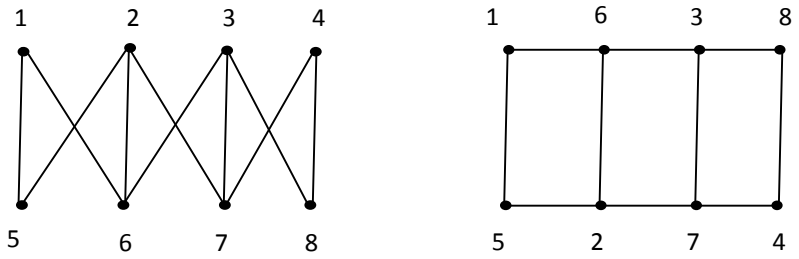
имеющие ребер) – изолированными. Две вершины, соединенные ребром, называют *смежными*; два ребра с общей вершиной – *инцидентными*. Граф, все вершины которого имеют одинаковую степень, называется *регулярным*. Среди графов, показанных на рис. 6.2, регулярными являются циклы и полные графы.



(а) (б) (в) (г) (д)

Рисунок 6.2. Некоторые виды простых неориентированных графов: (а) цепь, (б) цикл, (в) дерево (синим цветом показан подграф-цепь), (г) звезда, (д) полный граф

Один и тот же набор точек, соединенных ребрами, можно по-разному изобразить на плоскости. Такие графы называют *изоморфными*. Вершины изоморфных графов можно пронумеровать так, чтобы их соединяли одинаково обозначенные ребра $\{a_{ij}\}$ (рис. 6.3). С математической точки зрения (число вершин, их порядки, смежность и т.д.) все изоморфные графы одинаковы, но при большом числе вершин установить изоморфизм бывает непросто. Если граф можно изобразить на плоскости так, чтобы ребра не пересекались (как на рис. 6.3 б), его называют *планарным*.



(а) (б)

Рисунок 6.3. Пример изоморфных графов

Неполный набор (*подмножество*) вершин графа со всеми его ребрами, соединяющими вершины из этого набора, называется *подграфом*. (Так, на рис. 6.2 в синим цветом выделен подграф дерева: *цепь*). Если между двумя любыми вершинами графа имеется подграф-цепь, такой граф называется *связным*; все графы на рис. 6.2 – связные. Если граф не является связным, в нем присутствуют связные подграфы, называемые *компонентами* (среди них могут быть изолированные вершины). Так, дерево – это связный граф, не имеющий подграфов-циклов. «Висячие» вершины дерева степени $k = 1$ называются *листьями*, а многокомпонентный граф, составленный из деревьев, называется *лесом*. *Связность* графа – это минимальное число ребер, после удаления которых он становится несвязным. На рис. 6.2 связность цепи, звезды и дерева равна 1, связность цикла равна 2, связность полного графа с n вершинами равна $n - 1$.

Соединение вершин в простом неориентированном графе отражает квадратная *матрица смежности* A = {a_{ij}} размера $n \times n$. Ее элементы a_{ij} равны 1 если i-я и j-я вершины графа соединены ребром, и 0 в обратном случае (рис. 6.4). По рисунку можно видеть, что степень каждой вершины графа равна сумме элементов в соответствующей строке его матрицы смежности.

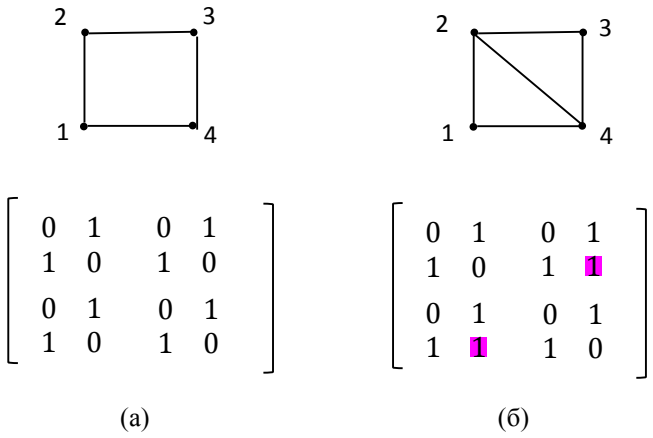


Рисунок 6.4. Матрицы смежности двух простых неориентированных графов; в матрице (б) цветом выделены элементы, порожденные диагональным ребром 2–4

Набор собственных значений (λ_1, λ_2,…,λ_n) матрицы смежности, т.е. корни ее характеристического (векового) уравнения $\det(\lambda E - A) = 0$ (где E – единичная матрица, см. раздел 3.1 в гл. 3), называется *спектром графа*: эти числа содержат много информации о его строении. Так, спектр простой цепи с n вершинами состоит из значений

$$\lambda_k = 2\cos\frac{\pi k}{n+1} \qquad (\text{где } k = 1, 2, \ldots, n),$$

а спектр простого n-членного цикла имеет вид

$$\lambda_k = 2\cos\frac{2\pi k}{n}$$

(в этом случае корни уравнения $\lambda_k = \lambda_{n-k}$, то есть *дважды вырождены*). Спектр полного графа состоит из двух корней: $\lambda_1 = n - 1$ и $(n-1)$-кратно вырожденного $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = -1$ (рис. 6.5).

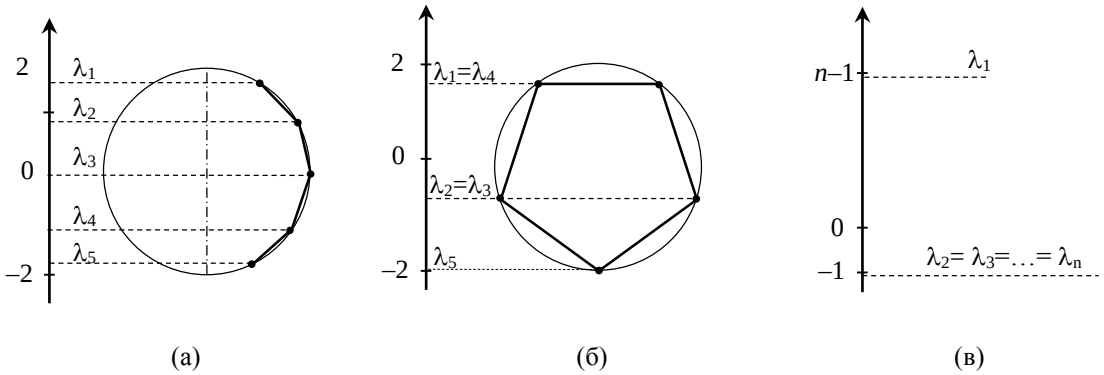


Рисунок 6.5. Спектры простых графов: (а) цепи, (б) цикла (построение на *круге Фроста*), (в) полного графа

Матрицы смежности всех простых неориентированных графов симметрические, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$. Собственные значения $\{\lambda_i\}$ таких матриц вещественны и связаны соотношением $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{Tr}\ A = 0$ (см. раздел 3.1 гл. 3 и Приложение 5). Однако между графом и его спектром нет взаимно однозначного соответствия: при достаточно большом числе вершин N неизоморфные, то есть разные графы могут иметь одинаковые спектры (рис. 6.6).

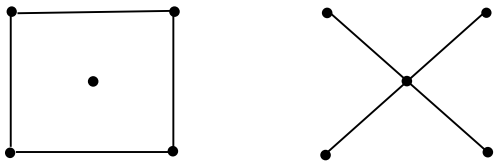


Рисунок 6.6. Простейший пример двух разных изоспектральных графов (см. [3] в списке рекомендуемой литературы)

Важным для приложений действием над графами является приписывание их вершинам определенных признаков, или чисел: *раскраска*. В *правильно раскрашенном* графе смежные вершины имеют разные цвета $m_i = 1, 2, \ldots, p$. Граф, который можно раскрасить двумя цветами ($p = 2$), называется *двудольным* (рис. 6.7). Спектр двудольного простого графа симметричен относительно нуля, то есть состоит из собственных значений $\{\pm\lambda_k\}$ и, возможно, содержит корень $\lambda_0=0$. Этими вопросами, в частности, занимается теоретическая химия, где умеют предсказывать спектры собственных значений энергии некоторых типов молекул, не находя решений уравнения Шредингера (разд. 3.3. и формула (3.63) в гл. 3).

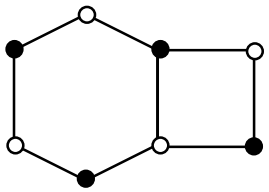
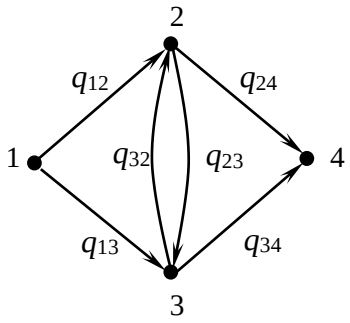


Рисунок 6.7. Пример двудольного графа

Во многих инженерных и социоинженерных задачах важны направления ($i \to j$) и интенсивности связей между вершинами графа. Примерами могут служить электрические схемы, последовательность этапов технологического процесса, хозяйственные связи предприятий и многое другое. Таким системам соответствуют *взвешенные ориентированные графы*, в которых «воздействие» одной вершины на другую изображает стрелка (в этом случае ее называют *дугой*), а «силу воздействия» выражает число, показывающее относительный вес дуги среди всех стрелок графа (рис. 6.8). Вершина в ориентированном графе имеет *полустепени* (k_i^+, k_i^-) по входящим и выходящим дугам, а также суммарную степень $k_i = k_i^+ + k_i^-$. На рис. 6.8 вершины 1 и 4 графа транспортных потоков имеют степени, соответственно, (0, 2) и (2, 0) и суммарные степени 2, а вершины 3 и 4 – степени (2, 2) и суммарные степени 4.

Элементами матрицы смежности $\{a_{ij}\}$ взвешенного графа могут быть любые положительные числа и 0. Для взвешенного ориентированного графа элемент a_{ij} равен весу ребра $i \to j$ (входящего из i–й вершины в j–ю), если такое ребро есть, и нулю во всех остальных случаях.

В структуре ориентированного графа (*орграфа*) могут присутствовать *петли*, отражающие влияние вершины на саму себя (например, частичное самофинансирование предприятия). Выше были рассмотрены только простые неориентированные графы без кратных ребер и петель. Граф, содержащий кратные ребра между парами вершин, называется *мультиграфом*.



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & 0 & q_{32} & 0 \\ q_{13} & q_{23} & 0 & 0 \\ 0 & q_{24} & q_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 6.8. Взвешенный ориентированный граф (см. парадокс Браэса, гл. 1, рис. 1.20 б) и его матрица смежности. Веса дуг $\{q_{ij}\}$ – транспортные потоки

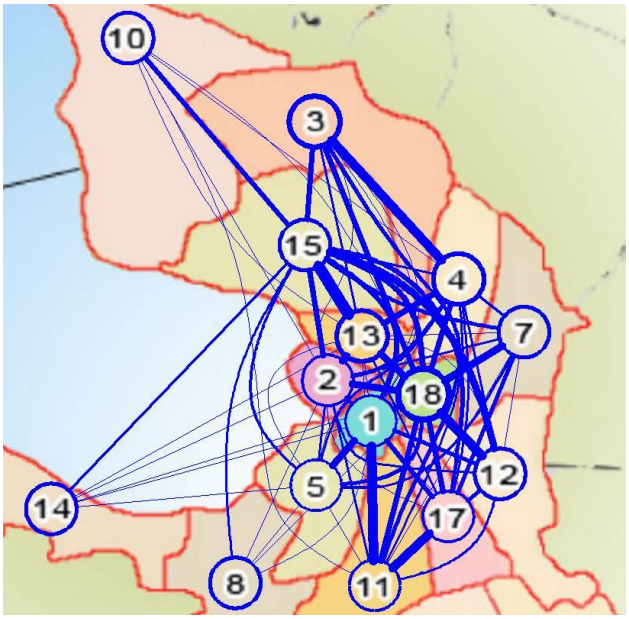
Последовательность ребер или дуг графа, без разрывов соединяющих его вершины, называется *маршрутом*. Маршрут, в котором все вершины (и соответственно ребра) различны, называется *путем*, в неориентированном графе – цепью. Путь или цепь, в которых конечная вершина совпадает с начальной, называются *контуром* и, соответственно, циклом. Длина пути (контура) во взвешенном ориентированном графе равна сумме весов его ребер с учетом расположения стрелок по направлению обхода или против этого направления. Так, на рис. 6.8 длина пути 2→1→3→4 равна $-q_{12}+q_{13}+q_{34}$. В простом неориентированном графе длина пути между двумя вершинами равна числу соединяющих их ребер. *Расстоянием* $d(i, j)$ между двумя связанными вершинами графа называется длина наименьшего пути между ними. *Диаметр* графа G – это максимальное расстояние между его вершинами:

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{i,j \in V(G)} d(i,j),$$

где $V(G)$ – множество всех вершин графа G.

Соотношения теории графов широко используют в задачах *дискретной оптимизации* – таких, как поиск кратчайшего пути между двумя вершинами заданной графической схемы (где длинами дуг могут служить затраты на перевозки, сроки реализации этапов сложного разветвленного проекта, зарплаты его участников и многое другое). Надо отметить, что, в отличие от планиметрии и стереометрии, математические соотношения для графов еще не вполне установлены, поэтому многие задачи на практике решают методом прямого перебора вариантов (или *методом грубой силы*, англ. *brute force*). И хотя применение компьютеров облегчает расчеты, требуемое время может оказаться слишком большим даже для не очень сложной схемы. Поэтому в теории графов распространены *эвристические* (т.е. предложенные без строгого обоснования) алгоритмы ускоренного поиска решений.

В расчетах транспортных потоков в городе (см. предыдущую главу) одну из главных ролей играют измерения и теоретические оценки элементов *матрицы корреспонденций*. Так называется матрица смежности $\| F_{ij} \|$ взвешенного ориентированного графа, отражающего перемещение населения по городу. Ее элементы F_{ij} – это оценки количества пассажиров, доставленных разными видам транспорта из пункта i в пункт j в заданный промежуток времени (рис. 6.9). Отправными пунктами (источниками) и пунктами назначения (стоками) служат элементы разбиения городского плана («сегменты»): районы, микрорайоны, кварталы. Потоки также детализируются по типу пассажиров (служащие, учащиеся, дети и т.д.), видам транспорта (личный автотранспорт, общественный транспорт, пешеходы), времени суток, целям (перемещения на работу и с работы, посещение мест общественного пользования и др.). Поскольку при изменении транспортной ситуации люди изменяют поведение, выбирая другие виды транспорта и пути следования, что в свою очередь изменяет потоки – расчеты матриц корреспонденций проводят методом итераций.



1. Адмиралтейский район
2. Василеостровский район
3. Выборгский район
4. Калининский район
5. Кировский район
6. Колпинский район
7. Красногвардейский район
8. Красносельский район
9. Кронштадтский район
10. Курортный район
11. Московский район
12. Невский район
13. Петроградский район
14. Петродворцовый район
15. Приморский район
16. Пушкинский район
17. Фрунзенский район
18. Центральный район

Рисунок 6.9. Взвешенный неориентированный граф межрайонных корреспонденций велосипедного движения в Санкт-Петербурге. Толщина связей пропорциональна числу проездов в сутки (https://textarchive.ru/c-2392394-pall.html)

Для оценки динамики пассажирских потоков используют ряд моделей. В *гравитационной модели* (см. разд. 1.5 в гл. 1) корреспонденции между i-м и j-м сегментами вычисляют по формуле

(6.1) $$F_{ij} = (a_i Q_i)(b_j D_j) C(t_{ij}),$$

где Q_i – суммарный объем отправления из i-го сегмента, D_j – суммарный объем прибытия в j-й сегмент разбиения R, и все $F_{ij} \geq 0$

(6.1 а) $$Q_i = \sum_{j \in R} F_{ij}, \qquad D_j = \sum_{i \in R} F_{ij}, \qquad \text{и}$$

(6.1 б) $$\sum_{i \in R} Q_i = \sum_{j \in R} D_j$$

Коэффициенты a_i и b_j в (6.1) вычисляют из условия нормировки (6.1 а). *Функция тяготения* $C(t_{ij})$ в формуле (6.1) зависит от *транспортного расстояния* t_{ij} между сегментами, которым выражается средняя «обобщенная цена» проезда из i в j. Этот показатель, в свою очередь, является взвешенной суммой «цен» $t_{ij}^{(k)}$ передвижения из i в j на каждом из K видов транспорта (личном, разным видам наземного общественного, метро, пешком)

(6.1 в) $$t_{ij} = \sum_{k=1}^{K} w^{(k)} t_{ij}^{(k)}$$

с условием на весовые коэффициенты $\sum_k w^{(k)} = 1$. В качестве обобщенной цены нередко выступает время проезда.

В практических расчетах обычно применяется экспоненциальная функция тяготения

(6.2) $$C(t) = \exp(-b\mathrm{t}^{\beta}).$$

Для трудовых корреспонденций, т.е. перемещений из дома на работу и обратно в больших городах, часто выбираются параметры функции (6.2) $b \approx 0.065$ и $\beta \approx 1$. Калибровка модели (определение коэффициентов на основе обследований) и расчеты матриц корреспонденции позволяют воспроизводить динамику пассажирских потоков в разное время суток и прогнозировать их изменения в результате модификаций транспортных маршрутов, ввода новых станций метро и других обстоятельств.

В рамках *энтропийной модели* поток пассажиров (6.1 а, б), по аналогии со статистической термодинамикой (см. разд. 3.4 в гл. 3), рассматривается как замкнутая макроскопическая система, а составляющие его *парциальные* потоки $f_{ij} = F_{ij}^{(k)}$ между сегментами i и j на k-м виде транспорта – как числа частиц в определенных «микросостояниях» (i, j, k). Наиболее вероятное состояние системы соответствует максимуму «транспортной энтропии»

(6.3) $$H = \sum_{i,j \in R} f_{ij} \ln \frac{\alpha_{ij}}{f_{ij}},$$

определяемой и обозначаемой по аналогии с энтропией Шеннона, которая будет рассмотрена в 8-й главе.

В формуле (6.3) числитель дроби под знаком логарифма соответствует детерминированным элементам матрицы $\| \alpha_{ij} \|$ *априорных предпочтений* пассажиров при отсутствии транспортных ограничений. Если $f_{ij} = \alpha_{ij}$ для всех $i, j \in R$, энтропия суммарного потока очевидно равна нулю ($\ln 1 = 0$). В этом случае

(6.3 а) $$\alpha_{ij} = c \cdot \exp(-\gamma t_{ij}),$$

где t_{ij} – цена проезда $i \to j$, c и γ – эмпирические положительные коэффициенты (чем выше затраты на проезд, тем ниже предпочтения пассажиров). Реальные величины f_{ij} соответствуют максимуму энтропии ($\delta H = 0$) при наложенных ограничениях (6.1 а-в). Их рассчитывают методом неопределенных множителей Лагранжа, который мы также рассмотрим в гл. 8 (разд. 8.4.2). Таким образом, энтропийная модель обосновывает выбор

функции тяготения (6.2) в гравитационной модели, при котором схемы расчета матрицы корреспонденций в обеих моделях становятся однотипными [1].

«Ценой» выбираемого маршрута в расчетах корреспонденций, помимо времени в пути, также могут быть стоимость проезда, безопасность, уровень комфорта, возможность совместить несколько задач на одном и том же маршруте и другие факторы (Табл. 6.1, см. также обзор В.И Швецова [4] в предыдущей главе). Отметим явную отрицательную корреляцию объема пассажирских перевозок между сегментами Санкт-Петербурга (верхняя половина таблицы) и средним временем проезда между ними (нижняя половина).

Таблица 6.1

Матрицы объемов пассажирских корреспонденций между сегментами Санкт-Петербурга и затрат времени на этих маршрутах[2]

Объем перевозок, тыс. пасс./час		Отправление						
		Центр	Северо-Запад	Север	Восток	Юг	Юго-Запад	**сумма**
Прибытие	Центр	100.3	30.3	34.0	25.5	29.1	27.5	
	Северо-Запад	5.4	81.0	17.6	1.7	1.4	3.4	**110.5**
	Север	11.3	19.7	95.9	11.9	3.9	2.9	**145.5**
	Восток	6.2	3.2	13.9	69.7	17.1	3.1	**113.3**
	Юг	15.5	4.3	6.3	21.7	230.1	33.5	**311.4**
	Юго-Запад	12.8	4.8	3.5	3.6	21.5	130.4	**176.6**
	сумма	**151.6**	**143.3**	**171.2**	**134.1**	**303.1**	**200.8**	**1104.0**

Среднее время в пути, мин.		Отправление						
		Центр	Северо-Запад	Север	Восток	Юг	Юго-Запад	**среднее на 1 пасс.**
Прибытие	Центр	29.4	56.8	55.5	53.1	62.1	63.3	**46.5**
	Северо-Запад	49.4	30.6	53.0	76.1	96.5	92.4	**38.5**
	Север	44.6	53.2	31.0	52.8	82.3	87.8	**39.3**
	Восток	52.5	76.0	54.5	27.7	60.9	85.1	**40.3**
	Юг	47.4	81.7	75.9	53.4	33.9	61.5	**40.4**
	Юго-Запад	44.7	76.8	78.2	71.9	61.5	33.6	**40.6**
	среднее на 1 пасс.	**35.3**	**43.3**	**42.7**	**40.7**	**41.0**	**44.9**	**41.5**

Ввиду отсутствия строгой и однозначной меры «цены» маршрута обычно предполагается, что для оптимального пути выполнены *условия равновесия по Уордропу* (Wardrop, 1952):

• все пути, соединяющие сегменты i и j, которые используются для движения представителями корреспонденции F_{ij}, имеют одинаковую цену;
• цена любого пути между сегментами i и j, который не используется для движения, превосходит цену используемых путей.

Это позволяет определять «равновесные» транспортные потоки методами теории игр, которые будут рассмотрены в следующей главе. Современные программы навигации (в том числе для компьютеров и смартфонов) позволяют построить на плане города *изохроны*: линии одинаковых затрат времени на перемещение в транспорте либо пешком из выбранной точки – например, от центра города (рис. 6.10).

Рисунок 6.10. Изохроны Дрездена: время достижения на определенном виде транспорта относится как 1:2:3 (S. Lammer, et al., Physica A, 2006 363 (1) 89)

Задача о ранце

Оптимизацией в математике называется поиск максимума целевой функции (в частности, функции полезности) или, например, минимума функции издержек при заданных ограничениях. Для непрерывных функций одной переменной $f(x)$ то и другое достигается дифференцированием ($df/dx = 0$ и, соответственно, $d^2f/dx^2 < 0$ либо $d^2f/dx^2 > 0$). В более сложных задачах дискретной оптимизации, где переменные могут принимать лишь значения из дискретного набора $\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$, $\{y_1, y_2,\ldots, y_m\}$ и т.д., широко используются графы.

Одна из классических задач дискретной (комбинаторной) оптимизации – поиск лучшей комбинации из ограниченного набора факторов. Исторически она получила название задачи о рюкзаке путешественника или о ранце пехотинца XVIII века. Дан набор из N предметов, каждый из которых обладает двумя признаками $\{w_i, u_i\}$, где w_i – вес предмета, u_i – его полезность, $i = 1, 2, \ldots, N$ – номер предмета. Требуется найти комбинацию предметов с наивысшей полезностью при весе, не превышающем максимально возможного веса ранца P_{max}. Формальная запись этой задачи в дискретной математике выглядит так:

(6.4)
$$\sum u_i \to max$$
$$\sum w_i \leq P_{max}$$

с очевидным условием $w_1 + w_2 + \ldots + w_N > P_{max}$, без которого задача теряет смысл.

Схема решения

Перепишем условия (6.4) в виде

(6.4 а)
$$\sum_{i=1}^{N} x_i u_i \to max$$
$$\sum_{i=1}^{N} x_i w_i \leq P_{max}$$

Переменная $x_i \in \{0, 1\}$ в суммах может принимать два значения: 0, если i-й предмет не включается в комбинацию, и 1, если мы его включаем («кладем в ранец»). В этом случае суммы вычисляются по набору признаков всех N предметов с множителями x_i. Для такой процедуры можно построить граф: *дерево решений* из всех возможных комбинаций предметов.

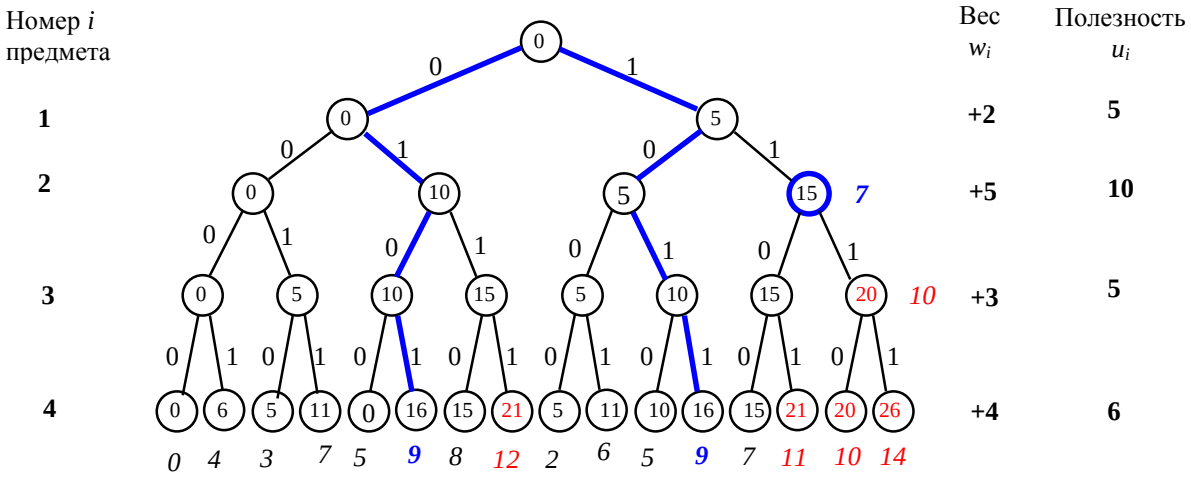


Рисунок 6.11. Задача о ранце: дерево решений для N=4. Курсив – суммарный вес

На рис. 6.11 показано дерево решений для очень небольшого числа предметов (N = 4) при ограничении веса P_{max} = 9 (см. далее табл. 6.2). Исходная вершина (*корень* дерева) соответствует состоянию перед выбором первого предмета, который помещают (x_1 = 1) либо не помещают в «ранец» (x_1 = 0). Из этих двух вариантов можно построить четыре комбинации двух предметов (x_1, x_2): (0, 0), (0, 1), (1, 0) (1, 1), восемь комбинаций (x_1, x_2, x_3) и 16 возможных сочетаний (x_1, x_2, x_3, x_4). Цифры 0 или 1 при ребрах дерева соответствуют значениям x_i, числа в вершинах графа показывают суммарную полезность набора взятых предметов. Веса комбинаций показан рядом с вершинами курсивом. Ясно, что все комбинации предметов из исходного набора или, правильнее, множества с $\sum w_i > 9$, т.е. 10 и более (их суммарные веса и полезности показаны на рис. 6.11 красным цветом) не дают решения задачи.

Общее число комбинаций из N предметов при бинарном выборе («берем или не берем») равно 2^N – то есть уже при N = 20 их будет больше миллиона (2^{10} = 1024 ≈ 10^3, так что 2^{20} = $(2^{10})^2$ ≈ 10^6 (если точно, 1024^2 = 1048576). Для ускорения расчетов используют *экономные*, или «жадные» алгоритмы (англ. greedy algorithms): схемы быстрого поиска оптимальных или близких в ним решений. Так, четыре предмета в нашем варианте задачи можно перенумеровать в порядке убывания их «удельной полезности» (на единицу веса) u/w (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Полезность и вес предметов в задаче о ранце

Номер предмета (i)	u_i	w_i	u_i/w_i
1	5	2	2.5
2	10	5	2
3	5	3	1.667
4	6	4	1.5

На дереве решений (рис. 6.11) номера предметов соответствуют табл. 6.2. Два первых предмета имеют суммарную полезность $u_1 + u_2 = 15$, близкую к максимуму, при общем весе $w_1 + w_2 = 7$ (выделенная вершина на рис. 6.11). Добавление к ним третьего по удельной полезности предмета дает вес $w_1 + w_2 + w_3 = 10$, превышающий P_{max}. Удалив из набора самый «тяжелый» предмет №2 и добавляя оставшиеся, мы получим суммы $w_1 + w_2 + w_3 = 9$ и $u_1 + u_2 + u_3 = 16$. Таким образом, мы нашли одну из двух наилучших комбинаций, выделенных на графе синими ребрами, за три «хода» вместо перебора всех 16 вариантов (рис. 6.12).

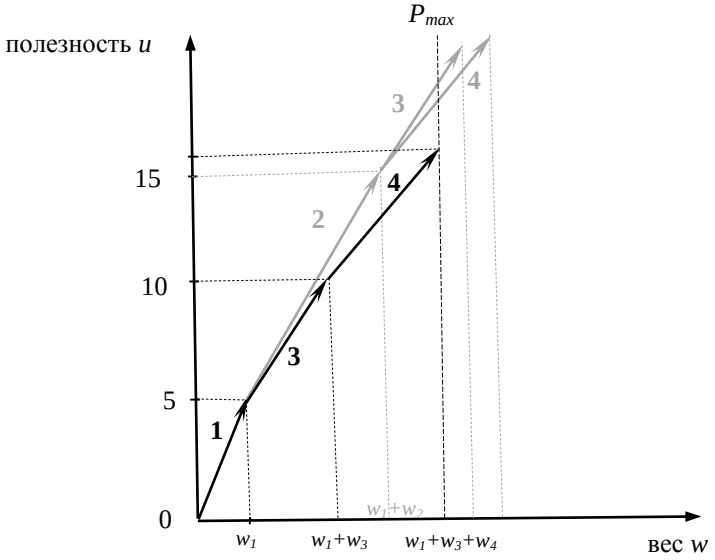


Рисунок 6.12. Диаграмма путей в задаче о ранце

Сравнивая наш «жадный» алгоритм с компьютерным поиском экстремума непрерывной функции $U(\mathbf{r})$ (глава 3, раздел 3.4), можно видеть, что он является дискретным аналогом простого градиентного спуска: в роли производной $dU/d\mathbf{r}$ выступает удельная полезность u_i/w_i. Удаление самого «тяжелого» предметов из набора соответствует возврату к предыдущему шагу оптимизации с выбором меньшего значения градиента. Подобно простой оптимизации, экономные алгоритмы в общем случае не обязательно приводят к наилучшему решению, т.е. глобальному минимуму или максимуму – но они позволяют найти *субоптимальную* (близкую к оптимальной) конфигурацию за меньшее время расчета.

Задача о коммивояжере

Связный граф называется *эйлеровым*, если в нем содержится цикл, проходящий по всем ребрам графа по одному разу. Во всех вершинах эйлерова графа есть хотя бы одна пара из «входящего» и «выходящего» ребер – то есть все вершины должны иметь четные степени.

Если же в графе можно выделить простой цикл, проходящий по одному разу через все его вершины, этот цикл и сам граф называются *гамильтоновыми*.

Оттого, что во многих экономических и производственных процессах многократно повторяются последовательности стандартных этапов, поиск эйлеровых и (или) гамильтоновых путей и циклов на заданном графе имеет большое практическое значение. Так, в *задаче о коммивояжере* (также «бродячем торговце» или «китайском почтальоне») требуется найти гамильтонов контур с наименьшей суммой весов на взвешенном ориентированном графе: коммивояжер должен побывать по одному разу во всех городах, соединенных дорогами, затратив на переезды минимум времени либо денег. В отличие от эйлеровых циклов, для гамильтоновых циклов нет простого критерия существования: они присутствуют в связных графах как с четным, так и с нечетным порядком вершин (среди которых, очевидно, не должно быть «висячих» вершин с $k = 1$). Например, в полном неориентированном графе с N вершинами имеется (N–1)!/2 гамильтоновых циклов (рис. 6.13). Задача о коммивояжере не имеет аналитического решения, однако для нее также найдены «экономные» эвристические алгоритмы (см. [1] в списке рекомендуемой литературы).

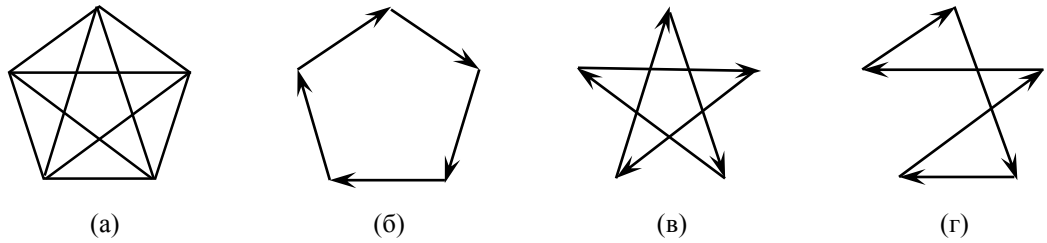


Рисунок 6.13. Полный граф K_5 (а) и некоторые его гамильтоновы контуры (б – г)

Когнитивные карты

Термин *когнитивная карта* имеет несколько значений в разных научных дисциплинах. В экспериментальной психологии (Толмен, 1948) так называется схема окружающей обстановки, которую мозг испытуемых животных и людей составляет на основании опыта и использует в планировании своих действий. Ее элементами, обсуждаемыми психологами на вербальном уровне, являются выработанные индивидом образы и представления об окружающем мире. Во 2-й половине XX века формализованные схемы обстановки и действий в ней стали использовать для описания сложных экономических и социальных процессов (Аксельрод, 1976). Блочные схемы, составляемые экспертами на основании их представлений о таких процессах и верифицируемые путем обсуждения в экспертных группах, в современных общественных науках и менеджменте также называют когнитивными картами.

С позиций математики когнитивная карта – это взвешенный ориентированный граф, вершины которого («блоки») соответствуют компонентам интересующей нас системы либо факторам, которые определяют течение исследуемого процесса. Дугами изображаются воздействия компонентов или причинно-следственные связи между факторами. В отличие от технических и технологических схем, множество блоков и соотношения между ними априори не заданы: они отвечают образу той или иной системы (процесса) в сознании исследователя. Относительные веса дуг когнитивной карты устанавливают по экспертным

оценкам и затем переводят в числа по упрощенной шкале (например, оценке «нет влияния» соответствует ноль, «слабому влиянию» – единица (1), «среднему влиянию» 2 и «сильному влиянию» 3). Формальная запись воздействий вершин на ребрах орграфа позволяет перейти от графической схемы к системе алгебраических либо дифференциальных уравнений, то есть построить математическую модель рассматриваемой системы или явления (рис. 6.14).

Когнитивные карты в 1990-е гг. приобрели большую популярность среди политологов, социологов и менеджеров, а также в информатике. Для их построения и верификации разработан ряд компьютерных программ. В задачах управления на основе таких схем создаются модели распространения *управляющих воздействий* («импульсов»: например, резкого изменения финансирования) по сети связей между субъектами региона, отрасли, группы предприятий и т.д.[3] Анализ процессов, протекающих на графах, является предметом интенсивных исследований как в современной физике, так и в ее приложениях к социуму (см. следующие разделы).

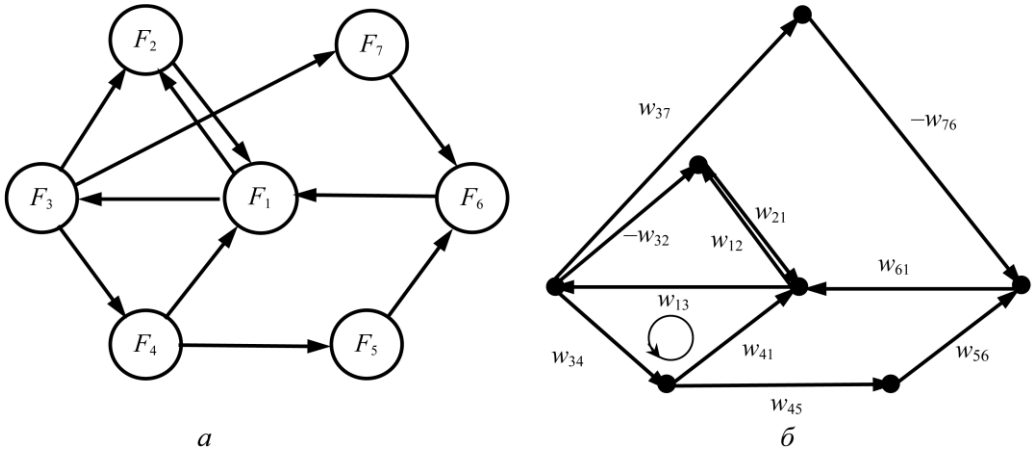


Рисунок 6.14. а) Блок-схема энергопотребления (F_1 – расход электроэнергии, F_2 – стоимость, F_3 – мощности, F_4 – число предприятий, F_5 – число рабочих мест, F_6 – население, F_7 – загрязнение окружающей среды). (б) Соответствующий взвешенный ориентированный граф (Н.А. Абрамова, С.В. Коврига, Проблемы управления, 2008 (6), 23)

Однако использование когнитивных карт в описании сложных и слабо структурированных систем и явлений сталкивается с рядом серьезных трудностей. Неполнота информации порождает неоднозначность в построении графов и математических моделей. Детализация описания увеличивает число уравнений, усложняя модель. В результате этого построенная система алгебраических уравнений может оказаться *несовместной* (не имеющей решения), а большие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых численно, имеют обширные области хаоса в фазовом пространстве (см. раздел 4.3.2 в гл. 4), где тоже нельзя получить содержательный результат. Поэтому в общественных науках и социоинженерии когнитивные карты чаще используют на качественном уровне[4].

Комплексное оценивание

Для создания принципиальной схемы сложного процесса большую важность имеет *агрегирование параметров*, что соответствует объединению вершин с упрощением графической схемы. На таком агрегировании основаны *комплексные оценки* эффективности

работы предприятий и отраслей, в которых объединяют (с эмпирически устанавливаемыми весами) разнородные количественные показатели: выработку, прибыль, численность персонала, энерговооруженность и прочие. Агрегирование оценок осуществляется с помощью графов-деревьев, листьям которых соответствуют численные параметры (критерии), а правила объединения задают матрицы, отражающие мнения экспертов.

Пусть, например, уровень социально-экономического развития региона отражают три показателя: средний уровень жизни ($П_1$), экологическая ситуация ($П_2$) и уровень социального развития ($П_3$). Каждый из этих показателей, не имеющий количественного выражения, по оценкам экспертов может принимать одно из трех значений: 0 (плохо), 1 (удовлетворительно) и 2 (хорошо). Показатели $П_1$ и $П_2$ агрегируют в критерий «качество жизни» ($П_{12}$) с аналогичной трехуровневой оценкой $П_{12}$ = 0, 1 или 2, который далее объединяется с $П_3$ в искомую комплексную оценку (КО, или $П_{123}$). Этому процессу соответствует *дихотомическое дерево* на рис. 6.15*.

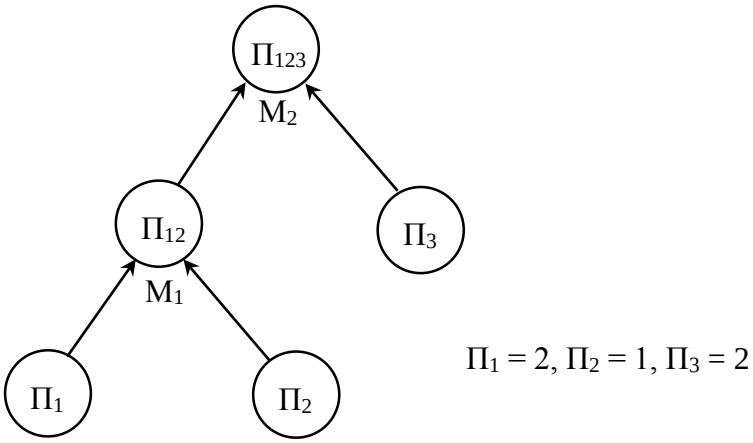


Рисунок 6.15. Дерево комплексной оценки, стрелки – направления агрегирования параметров, см. Д.А. Новиков (ред.), *Механизмы управления*, М,: УРСС, 2011, разд. 9.1

Правила объединения показателей задают матрицы, которые в этом случае особенно похожи на таблицы. Пусть матрицы отражают среднее мнение экспертов и имеют вид

$$M_1 = \begin{array}{c|ccc} & П_1 & & \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline П_1/П_2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad П_2$$

$$M_2 = \begin{array}{c|ccc} & П_{12} & & \\ 2 & 1 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline П_{12}/П_3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad П_3$$

(при агрегировании $П_1$ и $П_2$ эксперты полагают, что качество жизни с высоким доходом полностью определяется экологией, при объединении $П_{12}$ и $П_3$ – что при низком качестве жизни скверы и детские площадки будут использоваться не по назначению, и так далее). Если, как на рис. 6.15, $П_1$ = 2 и $П_2$ = 1, объединение этих показателей в соответствии с

*Пример адаптирован из книги[5], разд. 1.1.3

матрицей M_1 даст агрегированный показатель $П_{12} = 1$. В свою очередь, его объединение с $П_3 = 2$ дает итоговую комплексную оценку $П_{123} = 1$ (обведенные цифры в таблицах).

Матрицы свертки зависят от используемой экспертами градации оценок, в общем случае они прямоугольные. Агрегированные показатели, т.е. элементы матриц свертки $\{a_{ij}\}$, должны удовлетворять критерию *монотонности*: они должны быть *не меньше* ($\geq$) элементов $a_{i-1,j}$, $a_{i,j-1}$, здесь обозначенных ($П_i$, $П_j$). Методы построения матриц свертки, позволяющих использовать в процедуре комплексного оценивания матричную алгебру, интенсивно разрабатываются. По этому кругу задач прикладной математики и теории управления имеется учебная литература[5].

ЗАДАЧИ К РАЗДЕЛУ 6.1

6.1. Определите спектр циклического графа на рисунке 6.4 (а)

Решение

Решим вековое уравнение $\det\|xE-A\|=0$ с матрицей смежности A графа на рис. 6.4 а

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0,$$ Вычитаем третью строку из первой, получаем

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -x & -0 \\ -1 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Разложим детерминант по верхней строке, где осталось два ненулевых элемента;

$$x \cdot \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= x\left(x\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix}\right) =$$

$$= x^2\left(\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix}\right) + x\left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix}\right) = 0$$

В школе это называлось приведением подобных членов. Сумма двух одинаковых детерминантов во второй скобке равна $-2x$. Осталось раскрыть детерминанты в первой скобке

$x^2(x^2-1-1)-2x^2=0,$ т. е. $x^2(x^2-4)=0,$ отсюда

$x_{1,2}=0,\ x_3=2,\ x_4=-2.$

Внимательность и терпение вознаграждаются! А на *круге Фроста* (рис. 6.5 б) корни векового уравнения для цикла можно получить графически, без выкладок. Сделайте это!

6.2 (*лемма о рукопожатиях*). Докажите, что сумма степеней всех вершин в любом простом графе – четное число.

Доказательство: подобно тому, как в рукопожатии участвуют две руки, ребро графа соединяет две вершины – поэтому сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер:

$$\sum k_i = \sum k_i^{\text{четн}} + \sum k_i^{\text{нечетн}} = 2e,$$

где e – число ребер (англ. edges) в графе. Так как сумма четных степеней вершин при любом их числе $v^{\text{четн}}$ в графе (англ. vertex) четная, сумма степеней всех «нечетных» вершин тоже четная. Отсюда

Следствие: в любом простом графе число вершин $v^{\text{нечетн}}$ с нечетными степенями четно

6.3. Постройте гамильтонов цикл, проходящий через все вершины куба.

Литература к разделу 6.1

[1] Б.Я. Советов, А.В. Сикерин, *Гравитационная и энтропийная модели потоков при территориальном планировании развития транспортной системы*, Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016, № 8, 21.

[2] Я.А. Селиверстов, С.А. Селиверстов, *Методы и модели построения транспортных корреспонденций*, Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление, 2015, № 2-3 (217-222), 49.

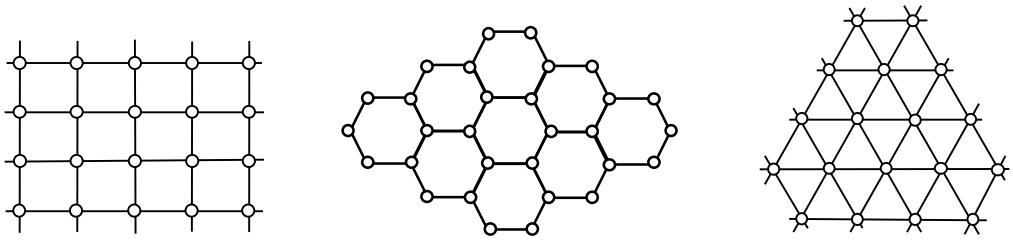
[3] В.Л. Шульц, В.В. Кульба, *Модели и методы анализа и синтеза сценариев развития социально-экономических систем*, М.: Наука, 2012.

[4] А.А. Кулинич, *Компьютерные системы анализа ситуаций и поддержки принятия решений на основе когнитивных карт: подходы и методы,* Проблемы управления, 2011, № 4, 31.

[5] В.Н. Бурков, Д.А. Новиков, *Как управлять проектами*, М.: СИНТЕГ-ГЕО, 1997

6.2. Сети и их характеристики

Сетями называются большие графы с числом вершин от тысяч до миллиардов (так, в сети Интернет 2020 г. состояло 4.5×10^9 пользователей). В прикладных исследованиях вершины сетей также называют *узлами*, а ребра – *связями*. Число связей узла, или степень узла в сети, также называют его *порядком*. Как и в других графах, связи между узлами могут быть ненаправленными (железнодорожные либо телефонные сети) или направленными (трубопроводы, экономические структуры и мн. др.).



(а) (б) (в)

Рисунок 6.16. Регулярные решетки: (а) квадратная, *k* = 4, (б) гексагональная, *k* = 3, (в) плотнейшая гексагональная («треугольная»), *k* = 6

Регулярные сети правильного строения называются *решетками* (рис. 6.16). Такие структуры встречаются в действительности (система шоссейных дорог в США), их часто используют социологи и политологи как простейшие «субстраты» в агентных моделях. Большинство же сетей реального мира, от взаимосвязанных «нервных клеток» (*нейронов*) в живом организме до *онлайновой социальной сети* (такой, как ВКонтакте) имеет сложное нерегулярное строение, в них можно выделить разнообразные фрагменты-подграфы. Описание таких сетей неизбежно становится усредненным, а их характеристики статистическими: распределение вершин по степеням $N(k)$, спектральная плотность $P(\lambda)$ и ряд других обобщенных параметров, которые мы рассмотрим ниже.

6.2.1. Случайные графы

Сетевые структуры в живой природе и социуме, как правило, имеют динамический характер: их вершины и ребра возникают (рождаются) и исчезают (гибнут). На уровне сети как целого подобные изменения «микроскопических» структурных фрагментов обычно протекают случайным образом. Поэтому главным инструментом вероятностного описания сетей являются *случайные графы*, при построении которых используется генератор случайных чисел. Вершины и (или) ребра таких графов в ходе построения могут появляться и исчезать с некоторой вероятностью на последовательных шагах моделирования по заданному алгоритму. Интегральные характеристики случайных графов позволяют выявить существенные черты реальных сетей и протекающих в них процессов.

Графы Эрдеша-Реньи

Этот классический тип случайных графов изобрели и исследовали в конце 1950-х гг. венгерские математики Пал Эрдеш и Альфред Реньи. В их модели простой неориентированный граф (V, E), как набор вершин (vertices) и ребер (edges), строят на заданном множестве из n точек $\{V_1, V_2, \ldots V_n\}$, на каждом шаге соединяя ребром пару точек (V_i, V_j) в последовательном переборе (V_1V_2, V_1V_3, …, V_1V_n, V_2V_3, и т.д.) с заданной вероятностью $p \in [0, 1]$ (т.е. $0 \le p \le 1$). Подобно алгоритму Метрополиса в методе Монте-Карло (см. разд. 3.4 главы 3), на каждом шаге построения значение p сравнивается с числом $x \in [0, 1]$, которое выдает генератор случайных чисел, и если $x \le p$, между выбранными вершинами устанавливается ребро E_{ij}. На следующем шаге выбирается новая пара точек (V_i, V_{j+1}) и процесс повторяется.

После перебора всех $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \frac{1}{2}n(n-1)$ пар в заданном множестве вершин цикл построения закончен. Его результат (рис. 6.17) называют *реализацией* случайного графа. Очевидно, что в разных циклах построения графов по заданному множеству вершин даже при одинаковой вероятности $p < 1$ возникают несовпадающие реализации. Это следует из главной особенности модели Эрдеша-Реньи: связывание ребром каждой пары вершин происходит в ней *независимо* от образования других ребер.

По алгоритму Эрдеша-Реньи современные компьютеры позволяют генерировать графы на большом множестве вершин (несколько тысяч) и проверять их свойства, которые авторы случайных графов вывели аналитически. Ясно, что при $p = 0$ между вершинами $(V_1, \ldots, V_n)$ не появится ни одного ребра, а при $p = 1$ будет построен полный граф K_n, в котором каждая

вершина соединена со всеми остальными*. Также интуитивно понятно, что при p = ½ все графы в процессе построения будут возникать с одинаковой вероятностью. Чтобы найти средние характеристики, надо лишь усреднить их при достаточно большом N по общему числу компонентов, построенных за один цикл либо за несколько циклов.

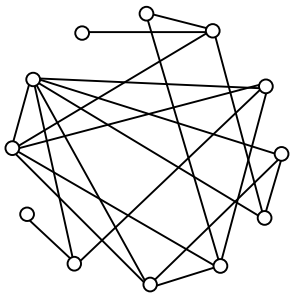


Рисунок 6.17. Реализация случайного графа Эрдеша-Реньи

Важной характеристикой связных компонентов в случайном графе служит *диаметр* $\langle L\rangle$, здесь обычно определяемый как *среднее* (а не максимальное) число ребер между произвольной парой вершин. Для графа Эрдеша-Реньи *с N* вершинами

(6.5) $$\langle L\rangle = \frac{\ln N}{\ln\langle k\rangle}, \quad \text{где } \langle k\rangle = p(N-1) \text{ – средняя степень вершины}$$

(каждое ребро «предельного» полного графа в случайном графе возникает с вероятностью p). При больших N и конечной средней степени вершин $\langle k\rangle$ (это достигается, если $p \sim 1/N$, т.е. вероятность связывания обратно пропорциональна числу вершин) относительное количество (частотность) вершин со степенью k приближенно соответствует *распределению Пуассона*

(6.6) $$P(k) = \frac{\langle N(k)\rangle}{N} \to \frac{\langle k\rangle^k}{k!} e^{-\langle k\rangle}$$

(см. разд. 8.2.2 в гл. 8 и Приложение П8). Например, диаметр случайной сети с N = 10000 и средней степенью вершин $\langle k\rangle$ = 5 по формуле (6.5) составит $\langle L\rangle \approx 5.7$ – то есть даже довольно разреженные сети имеют компактную структуру.

«Рыхлые» случайные графы с $\langle k\rangle \sim 1$ проявляют ряд необычных свойств, хорошо иллюстрируя экспериментальную сторону математики. Легко понять, что в таких графах имеются изолированные вершины с k = 0 и висячие вершины с k = 1. Доли тех и других, по формуле (6.6), составляют примерно по 1/3 (e^{-1} = 1/2.71828...≈0.368). Остальные вершины с $k \geq 2$ находятся в многочисленных связных компонентах: «фрагментах» случайной сети, в основном с конфигурацией дерева. Если же при связывании N вершин $p > p_c = 1/N$ и, в соответствии с (6.5), $\langle k\rangle > 1$, фрагменты начинают объединяться в преобладающий подграф: *гигантский связный кластер*. С увеличением p (и соответственно $\langle k\rangle$) этот подграф охватывает возрастающую долю вершин S; при $\langle k\rangle$ = 5 она приближается к 100% (рис. 6.18).

* С физической точки зрения полные графы *бесструктурны*. Если во всех вершинах графа K_n находятся одинаковые агенты, то каждый из них участвует в n–1 одинаковых взаимодействиях: в физике это называется *приближением среднего поля*.

Возникновение гигантского связного кластера в случайном графе выше критического значения вероятности p_c называется *фазовым переходом*: «конденсацией» изолированных компонентов в единое целое. Подобно фазовым переходам в физических системах (см. разд. 2.5 гл. 2), вблизи критической точки ($p_c = 1/n$) в графе присутствуют разнообразные фрагменты с распределением диаметров $P(\langle L\rangle) \sim \langle L\rangle^{-\gamma}$. При $\langle k\rangle \sim 2$ и выше доля компонентов, присутствующих наряду с гигантским кластером, экспоненциально уменьшается с увеличением их диаметра: $P \sim \exp(-\alpha\langle L\rangle)$. Так как функция e^{-x} с ростом x стремится к нулю гораздо быстрее, чем $1/x^p$ (где p – любое положительное число), реализации случайного графа вблизи значений p_c и $\langle k\rangle = 1$ можно считать аналогом околокритического состояния *флюида* вблизи точки конденсации газа в жидкость (см. главу 2).

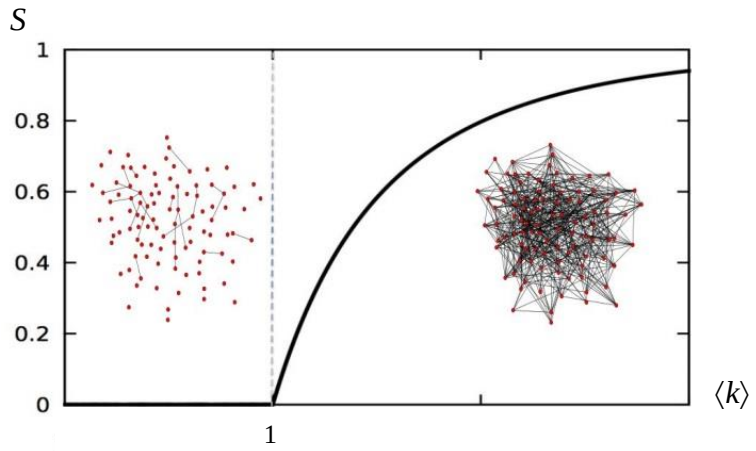


Рисунок 6.18. «Фазовый переход» в строении случайных графов; *S* – доля вершин, входящих к гигантский связный кластер (см. [6], Fig. 3.7)

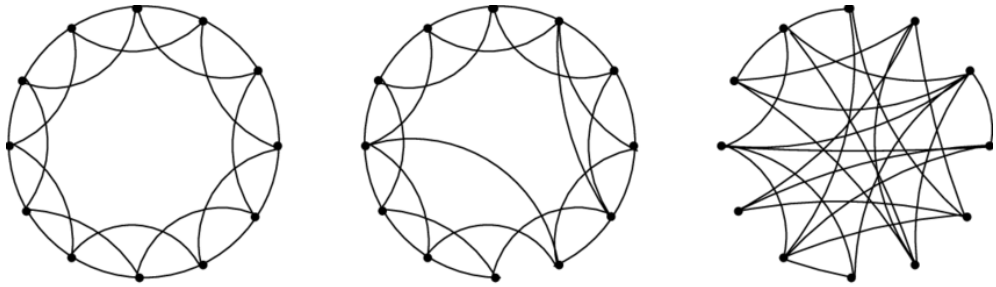
Случайные графы Эрдеша-Реньи воспроизводят такие черты реальных сетей, как сочетание разреженности (низкие значения $\langle k\rangle$) и компактности (малый диаметр, см. формулу (6.5)). Однако пуассоновское распределение порядков вершин (6.6) дает пренебрежимо малую долю узлов высокого порядка (*концентраторов*), которые в действительности весьма распространены (крупные вокзалы и аэропорты, логистические центры и т.д.). Кроме того, ими не воспроизводятся «плотные» регулярные участки сетей – такие, как схемы автомобильного движения по улицам города. Интерес физиков к сетевым структурам в конце XX века породил ряд новых моделей, генерирующих случайные графы с этими свойствами.

Графы Уоттса-Строгаца

В отличие от модели Эрдеша-Реньи, алгоритм построения графа по Уоттсу и Строгацу (рис. 6.19) начинается не с множества несвязанных вершин, а с регулярной *кольцевой решетки*, обладающей высокой плотностью при низком порядке узлов (на рис. 6.19 а $k = 4$) и большом диаметре. В последовательном переборе ребро графа (i, j) с вероятностью $0 < p < 1$ заменяется ребром между другой, случайно выбранной парой вершин (k, l). Такое перераспределение связей (англ. *rewiring*) сопровождается быстрым уменьшением

диаметра графа даже при малом числе новых ребер. (Так, первое новое ребро между противоположными участками кольца уменьшает диаметр решетки вдвое). После небольшого числа шагов в этой схеме возникают «частично случайные» графы со свойством *тесного мира* (английской идиоме *small world* лучше всего соответствует «тесен мир!»). В этих графах любую пару вершин соединяет путь из малого числа ребер (рис. 6.19 б). Так воспроизводится особенность сетей, отражающих контакты между людьми (знакомства), включая эмпирическое *правило шести рукопожатий*:

Между любыми двумя представителями человечества существует цепь, включающая не более пяти общих знакомых. Иными словами, диаметр сети знакомств обитателей Земли не превышает 6.



(а) (б) (в)

Рисунок 6.19. Алгоритм Уоттса-Строгаца: (а) $p = 0$ – кольцевая решетка (большой диаметр, высокая плотность), (б) $p < 1$ – граф «тесного мира» (англ. small world: малый диаметр, высокая плотность), (в) $p = 1$ – случайный граф (малый диаметр, низкая плотность) (по D. Watts, S. Strogatz, Nature, 1998, 393, 440)

Это парадоксальное правило было принято как гипотеза после опытов Стенли Мильграма (1968 г.) по установлению цепочек связей между произвольными адресатами в США. Неоднократные последующие эксперименты, а в последнее время прямые измерения параметров компьютерных сетей подтвердили его справедливость – во всяком случае по порядку величины ($\langle L \rangle \sim 10$ в ряде реальных сетей, включающих миллионы и миллиарды узлов).

Диаметр «сети человечества» можно оценить, подставив в формулу (6.5) численность населения Земли $N \approx 8$ млрд. человек и *число Данбара*: максимальное количество социальных связей, поддерживаемых индивидом (см. главу 9) $\langle k \rangle = D \approx 100$ чел.:

$$\ln(8 \cdot 10^9)/\ln(10^2) = 4.952 \ldots \approx 5.0.$$

Однако графы «тесного мира», построенные по модели Уоттса-Строгаца, как и графы Эрдеша-Реньи, не воспроизводит широкого распределения степеней вершин в реальных сетях, где средняя величина $\langle k \rangle$ весьма невелика, но присутствуют узлы-концентраторы с большим числом связей. При вероятности $p = 1$ либо при большом числе шагов модель генерирует классические случайные графы (рис. 6.19 в) с низкой плотностью вершин.

«Растущие» безмасштабные графы

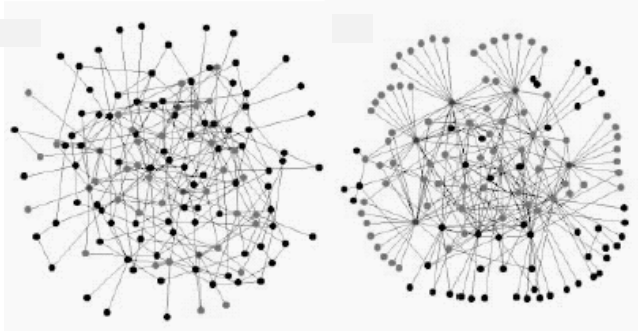
Во многих реальных сетях распределению степеней узлов с большим числом связей отвечает гиперболическая, или обратная степенная, функция

(6.7) $$P(k) \sim k^{-\gamma}.$$

Распределение (6.7) получили Ласло Барабаши и Река Альберт (2002 г.) в модели *растущих* случайных графов, или модели *предпочтительного связывания* (англ. preferential attachment). В этом алгоритме к первоначально заданному графу с n_0 вершин и m_0 ребер на каждом последующем шаге добавляется одна новая вершина с заданным числом ребер $m < m_0$. Вероятность соединения новой вершины с существующими вершинами графа пропорциональна степеням этих вершин

(6.8) $$P_i = \frac{{k_i}^{\alpha}}{\sum {k_j}^{\alpha}}$$

(где в знаменателе – сумма по всем вершинам графа). В случае $m = 1$ алгоритм генерирует деревья; при $m \geq 2$ возникают циклы, увеличивающие плотность графа (см. далее). При большом числе шагов параметры получаемых сетей не зависят от строения исходного графа.



(а) (б)

Рисунок 6.20. Реализации случайных графов: (а) классического, $P(k) \sim e^{-ak}$, (б) безмасштабного, $P(k) \sim k^{-\gamma}$ (R. Albert, A.-L. Barabasi Rev. Mod. Phys. 2002, 74 (1), 47)

Модель Барабаши-Альберт дает обратное степенное распределение (6.7); в случае $\alpha = 1$ в формуле (6.8) показатель степени $\gamma = 3$ (рис. 6.20 и 6.21). Подобные распределения называют *безмасштабными* (англ. *scale-free*, см. разд. 2.5 в гл. 2). В большинстве реально существующих сетей распределение (6.7) с показателем степени $2 \leq \gamma \leq 3$ справедливо лишь для небольшой части (~5%) узлов высокой связности (*broad-scale*, рис. 6.22). С начала XXI века были предложены алгоритмы построения, лучше соответствующие реальным сетям[6,7]. Средний диаметр «идеально безмасштабной» сети при $m > 1$ не больше, чем у других случайных графов:

(6.9) $$\langle L \rangle \cong \frac{\ln N}{\ln(\ln N)}$$

– то есть для сети из 1 млрд узлов составляет

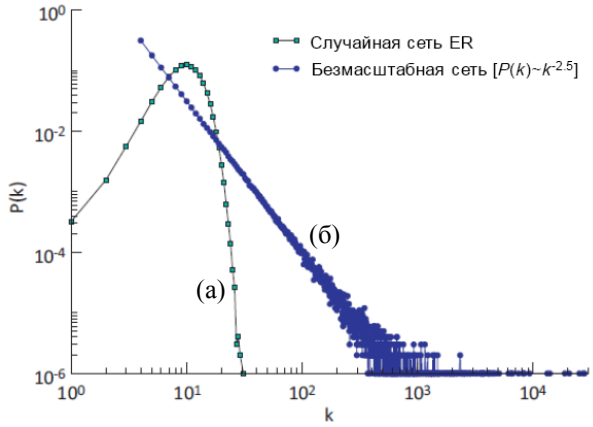


Рисунок 6.21. Распределение степеней вершин графов (а) Эрдеша-Реньи, (б) Барабаши-Альберт в двойном логарифмическом масштабе (см. [6] в списке рекомендуемой литературы)

$$\ln 10^9 / \ln(\ln 10^9) = 9 \cdot \ln 10 / \ln(9 \cdot \ln 10) \approx 20.72 / 3.03 \approx 6.8$$

Таким образом, сети Барабаши-Альберт относятся к графам «тесного мира».

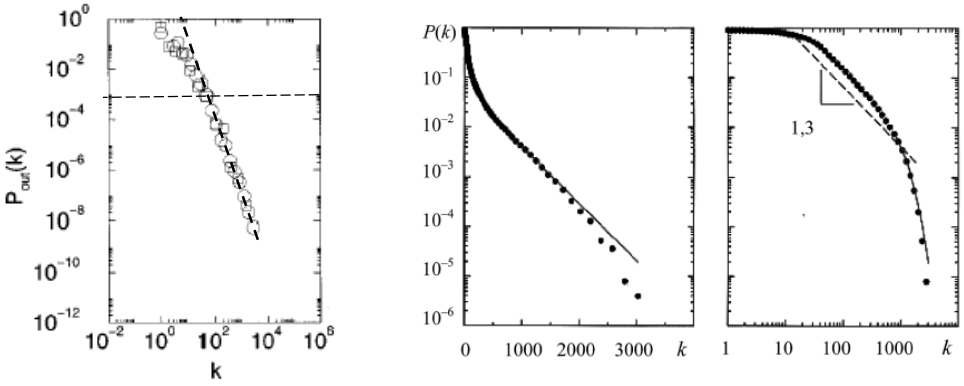


Рисунок 6.22. (а) Кумулятивное распределение узлов Всемирной паутины по порядку ([6] в списке литературы): 95% всех точек, лежащие выше горизонтальной штриховой линии, не соответствуют обратной степенной зависимости. (б, в) Аналогичное распределение для «сети киноактеров» (ребра – совместное участие актеров в фильме) в полулогарифмическом (б) и двойном логарифмическом (в) масштабах (см.[6])

6.2.2 Сложные сети

Сетевые структуры, окружающие нас в повседневной жизни, обычно построены из разнородных фрагментов, то есть *гетерогенны*; они отличаются сложностью и многообразием функций. Помимо биологических схем (метаболические сети, трофические и экологические системы и др.), представляющих собой образы взаимодействий индивидов в сознании исследователей и в этом смысле родственных когнитивным картам, в живых организмах объективно существуют сети нервных клеток (нейронов), кровообращения и др., а в рамках социума – транспорт, связь, электроснабжение, Интернет и прочие технические структуры, сети экономических, производственных и финансовых взаимосвязей, разнообразные схемы межчеловеческих отношений, складывающиеся из всех них политические и государственные конструкции и многое другое. У всех этих сетей

есть определенные количественные параметры (обычно динамические), которые можно измерить.

За пределами иерархических организационных систем с регулярной структурой и тесно связанной с ней функцией распределенного интеллекта (эти вопросы будут рассмотрены в последней части книги) большинство «человеческих» сетей не имеет единого строения и не сводится к графам определенного типа (рис. 6.23). Для них официально используется название *сложные сети*, под которым понимается некоторый аналог сверхкритического состояния конденсированной среды (см. [6] в списке рекомендуемой литературы). Подобно сверхкритическим флюидам как динамической совокупности переходящих друг в друга мезоскопических частиц-кластеров (разд. 2.5 главы 2), сложные сети социума состоят из разных структурных фрагментов – и, как правило, являются динамическими системами. В этом разделе мы перечислим геометрические и алгебраические характеристики сложных сетей, а далее рассмотрим процессы с их участием.

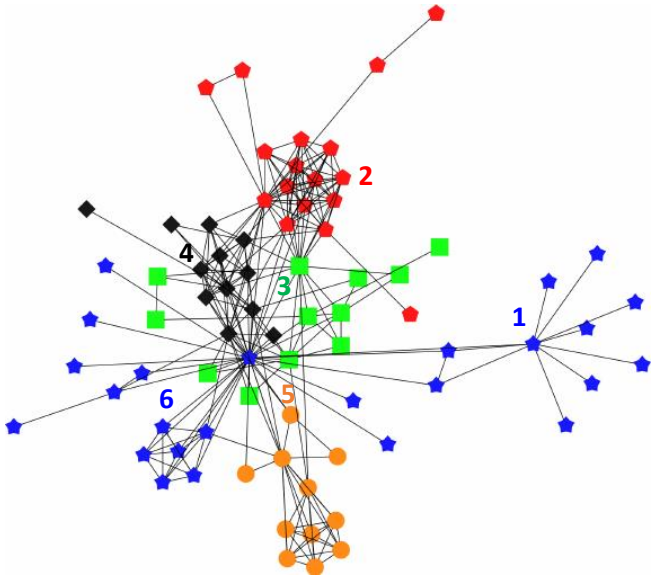


Рисунок 6.23. Сеть персонажей романа Виктора Гюго «Отверженные». Ребро – появление в одной сцене или в нескольких сценах. Кластеры названы по персонажам с максимальной связностью: 1 – епископ Мюриэль, 2 – Маурис, Гаврош; 3 – Жан Вальжан, 4 – Тенардье, 5 – Фантина, 6 – Козетта (http://konect.cc/networks/moreno_lesmis/

«Тесные» подграфы сложной сети, выделяющиеся в ней более высокой плотностью (см. ниже), по аналогии с физикой критических явлений называются *кластерами*. Наиболее плотные кластеры, близкие по строению к полному графу и связанные с остальной сетью разреженной системой ребер, называются *кликами* (англ. cliques). Менее плотные области, в которых, тем не менее, внутренние связи численно преобладают над внешними, называются *сообществами* (англ. communities). Вершины (или узлы) высокого порядка (степени), которые делают сеть компактной, называют *концентраторами* или, используя кальку с английского термина, «хабами» (hubs).

Благодаря наличию вершин-концентраторов сложные сети, объединяющие тысячи и миллионы узлов, имеют малый диаметр. (Напомним, что диаметром сети обычно называют не максимальное, а среднее расстояние между двумя произвольно выбранными узлами; см. формулу (6.9)). Порядки «максимально связанных» вершин подчиняются обратной

степенной зависимости $P(k) \sim k^{-\gamma}$ с разным показателем γ для разных сетей (обычно $1 \le \gamma \le 3$). Этому *масштабно-инвариантному* распределению степеней в неориентированных сложных сетях соответствует лишь небольшая доля узлов (см. рис. 6.22); степени остальных отвечают убывающей экспоненциальной зависимости $P(k) \sim e^{-ak}$. Средняя степень вершин $\langle k \rangle$ в таких сетях остается невысокой (менее 10) и не увеличивается с ростом их числа N. Количество связей $n_L \sim N$ характерно для *разреженной* сети (а не *плотной* с $n_L \sim N^2$, как в полном графе). Среди элементов матрицы смежности сложной сети $A = \|a_{ij}\|$ размера $N \times N$ (которая может быть огромной) преобладают нули.

Плотность отдельных участков и сети как целого выражают *коэффициенты кластеризации*. Локальный коэффициент C_i – это доля узлов в ближайшем окружении i-го узла, связанных также друг с другом. Если $m = k_i$ – степень i-го узла, $p_i = C_m^2$ – число всех пар узлов в его окружении, а b_i – число связей между этими узлами,

(6.10) $$C_i = {b_i}\Big/{C_m^2} = \frac{b_i}{m(m-1)/2} = \frac{2b_i}{k_i(k_i-1)}$$

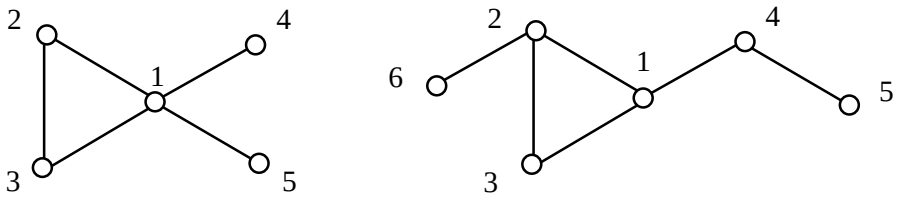
Так, на рис. 6.24 а степени пронумерованных вершин графа $k_1 = 4$, $k_2 = k_3 = 2$, $k_4 = k_5 = 1$, а из шести пар вершин в окружении первой (2–3, 2–4, 2–5, 3–4, 3–5, 4–5) только вершины 2 и 3 связаны между собой. По формуле (6.7) получим

$$C_1 = 1/6,\ C_2 = C_3 = 1,\ C_4 = C_5 = 0$$

Средний коэффициент кластеризации графа *с N* вершинами равен

(6.10 а) $$\langle C \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i,$$

для графа на рис. 6.24 а $\langle C \rangle = (1/6+1+1+0+0):5=13/30=0.433\ldots$.



(а) (б)

Рисунок 6.24. Два простых примера графов

Другим интегральным показателем компактности графа является *коэффициент триангуляции*, или *транзитивность T*: доля треугольных циклов в общем числе связных троек вершин M_{i-j-k} :

(6.10 б) $$T = \frac{3M(\Delta)}{M_{i-j-k}}$$

(множителю «3» в числителе соответствует наличие трех связных троек вершин в каждом треугольнике). Граф на рис. 6.24 а содержит один треугольник на 8 связных троек вершин; его коэффициент триангуляции по формуле (6.10 б) составляет 3/8.

Коэффициенты кластеризации отражают «плотность» расположения вершин в сети. Мы видим, что значения показателей (6.10 а) и (6.10 б) для одного и того же графа могут не совпадать. В регулярных графах с одинаковой степенью всех вершин $\langle k \rangle = k = \text{const}$ и $\langle C \rangle = T$. Для полных графов (и только для них) коэффициент равен 1, для деревьев и любых других графов без треугольных циклов $\langle C \rangle = T = 0$. В плотнейшей гексагональной решетке (в физической литературе ее нередко называют «треугольной») на рис. 6.16 в при каждом узле ($k = 6$) имеется $C_6^2 = 15$ пар вершин и шесть ребер, поэтому ее коэффициент кластеризации равен 0.4 (6/15 = 2/5). Среди сетей реального мира у транспортных коммуникаций обычно T < 0.1, тогда как *сети социальных взаимодействий*: (*CCB*), т.е. отношений между людьми, имеют коэффициент кластеризации в интервале 0.2 – 0.6.

Еще одним параметром узла является его «центральность», или «важность» (англ. centrality), определяемая положением в сети. Среди нескольких разных показателей с таким названием особое значение имеет *топологическая нагрузка*, для которой обычно используют английский термин *betweenness centrality* B_m. Для узла с номером m параметр B_m равен доле проходящих через него кратчайших путей между всеми парами узлов (i, j):

$$B_m = \sum_{i,j \neq m} n(m)_{ij} \Big/ n_{ij} \,, \tag{6.11}$$

где $n(m)_{ij}$ – число кратчайших путей $i–...–m–...–j$, проходящих через m-й узел, а n_{ij} – общее число кратчайших путей $i–...–j$ в сети. В графе на рис. 6.24 б такие пути, очевидно, не проходят через вершины 3, 5 и 6. Все кратчайшие пути через остальные вершины и мимо них легко найти по рисунку (Табл. 6.3)

Таблица 6.3

номер вершины	кратчайшие пути на графе		B_m
	через вершину	мимо вершины	
1	2–1–4 3–1–4 2–1–4–5 3–1–4–5 6–2–1–4 6–2–1–4–5	2–3 2–6 4–5 3–2–6	0.6
2	1–2–6 3–2–6 6–2–1–4 6–2–1–4–5	1–3 1–4 4–5 3–1–4 1–4–5 3–1–4–5	0.4
4	1–4–5 2–1–4–5 3–1–4–5 6–2–1–4–5	1–2 1–3 2–3 2–6 1–2–6 3–2–6	0.4

(очевидно, например, что пути 1–3–2 и 1–3–2–6 не кратчайшие, поскольку вершины 1 и 2 соединены ребром).

Показатели узлов $\{B_m\}$ в нагруженных транспортных сетях обычно пропорциональны проходящим через них потокам (корреспонденциям). Это обстоятельство используется в планировании транспорта. Так как при увеличении числа вершин N и ребер n_L в связном графе количество кратчайших путей в нем быстро возрастает, значения $\{B_m\}$ для городского транспорта разных лет неодинаковы и увеличиваются по мере ввода новых линий и станций. В прикладных исследованиях промежуточные станции (например, на линиях метро) с $k = 2$ и высокой, но не информативной «нагрузкой» (как вершина 4 на рис. 6.24 б) заменяют виртуальными ребрами, отчего величины $\{B_m\}$ для оставшихся узлов также изменяются. Параметры нагрузки часто нормируют на их сумму по всем узлам сети.

(6.11 а) $$B'_m = {B_m}/{\sum B_i}\,, \qquad \text{так что } 0 \le B_m' < 1$$

(очевидно, для конечных станций B_m=0). Это делает топологическую нагрузку качественным параметром, сопоставимым для разных узлов лишь при одинаковой методике расчета (рис. 6.25).

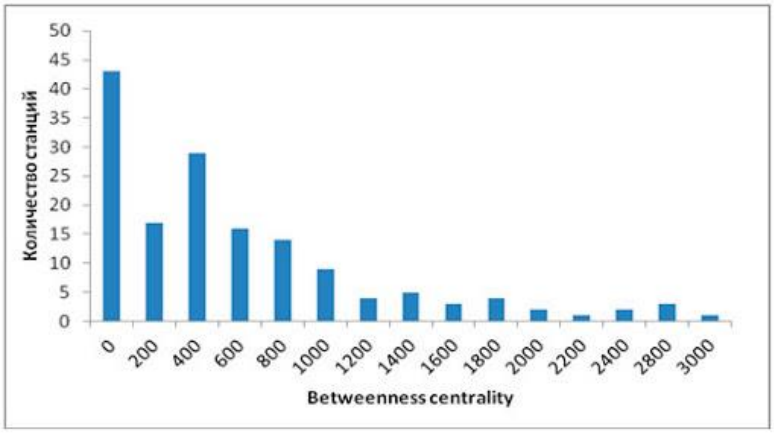


Рисунок 6.25. Распределение станций московского метро по параметру топологической нагрузки (Ш.Д. Яманов, И.А. Евин, А.А. Соловьев, Информация и связь, 2014, № 3, 90)

Значения $\{B_i\}$ позволяют на качественном уровне выявить «критические» узлы в структуре транспортной сети (Табл. 6.4, Рис. 6.26). При изменениях схемы эти узлы могут перемещаться. Отметим, что пассажирские потоки в первую очередь направляются объектами городской инфраструктуры (предприятиями, торговыми центрами, «спальными» районами), расположение которых отражается в транспортной системе. Исследования взаимного влияния конфигурации сетей и несущего их «ландшафта» (в широком смысле слова, в том числе как совокупности экономических факторов), называемые *co-evolution*, будут рассмотрены в последнем разделе этой главы.

ЗАДАЧА 6.4. Определите нагрузку узлов B_m графа на рис. 6.24 а.

ЗАДАЧА 6.5. По рис. 6.24 б рассчитайте коэффициенты кластеризации узлов и всего графа.

Рисунок 6.26. Карта-схема московского метрополитена (2009 г.). Выделены станции с максимальной топологической нагрузкой (см. Табл. 6.4)

Таблица 6.4.

Станции московского метро с наивысшей топологической нагрузкой на 2011 г.
(S. Derrible, *Network Centrality of Metro Systems*. PLoS ONE, 2012, **7**(7): e40575)

станции	B_m	B'_m
Александровский сад	177	0.080
Курская	177	0.080
Пушкинская	153	0.069
Марксистская	149	0.067
Охотный ряд	136	0.061

В классических случайных графах Эрдеша-Реньи порядки узлов некоррелированы, поскольку каждое ребро в них образуется независимо от других ребер. Напротив, случайные графы Барабаши-Альберт строятся по механизму предпочтительного присоединения новых вершин к вершинам с высокой степенью k, откуда возникают узлы-концентраторы («богатые становятся богаче»). Взаимную зависимость степеней k и k' вершин графа, связанных ребром, как пары случайных величин, задает *коэффициент корреляции Пирсона*

(6.12) $$r = \frac{\langle kk\prime\rangle - \langle k\rangle\langle k\prime\rangle}{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2},$$

где треугольные скобки соответствуют значениям, усредненным по всей сети. В формуле (6.12) числитель представляет собой *парную корреляционную функцию*: если величины k и

k' независимы (как в графах Эрдеша-Реньи), она равна нулю. В знаменателе формулы стоит *квадратичная дисперсия* (часто называемая просто *дисперсией*) степени вершин в сети.

Математическое отступление: характеристики случайных величин

В математической теории вероятностей дисперсия, или *среднеквадратичное отклонение* произвольной случайной величины X – это

$$\sigma_X^2 = \mathrm{M}[X - \mathrm{M}(X)]^2 = \mathrm{M}(X^2) - [\mathrm{M}(X)]^2,$$

где символом M обозначается *математическое ожидание* любой случайной величины. В физических измерениях вместо абстрактного («точного») математического ожидания используют *среднее значение* параметра x (например, показаний прибора) по результатам n его измерений

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Число $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, найденное по аналогичной схеме, часто называют *стандартным отклонением*: оно характеризует «разброс» измеряемой величины.

Поскольку случайные величины X и Y могут быть взаимосвязаны (как рост и вес человека), их распределение в теории вероятностей характеризует *ковариация* (дословно – совместные изменения): математическое ожидание произведения отклонений X и Y от их средних значений

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{M}[\big(X - \mathrm{M}(X)\big) \times (Y - \mathrm{M}(Y)] \tag{6.13}$$

Ковариация двух независимых случайных величин равна нулю. В математическом смысле коэффициент корреляции Пирсона (6.12) – это ковариация двух случайных величин, отнесенная к произведению их стандартных отклонений:

$$r_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{6.14}$$

Значения r всегда лежат в интервале от –1 до +1. При *положительной корреляции* параметров X и Y (увеличение одного параметра ведет к увеличению другого, как в случае роста и веса) $0 < r_{XY} < 1$, а область $-1 < \mathrm{r}_{XY} < 0$ отвечает *отрицательной корреляции* (увеличение X приводит к уменьшению Y, и наоборот). Как отмечено выше, для независимых случайных величин $r = 0$.

Базовые понятия и соотношения теории вероятностей представлены в Приложении П8 и будут кратко рассмотрены в главе 8. В математической статистике средние значения измеряемых параметров и их дисперсию определяют по выборкам из конечного числа результатов измерений.

В «коррелированных» случайных графах и сложных сетях роль параметра x играют степени вершин k. Сравнение формул (6.12) и (6.14) показывает, что статистическим аналогом ковариации является корреляционная функция степеней k и k' для всех пар вершин, соединенных ребром (числитель дроби). В то же время квадратичную дисперсию

степени вершин рассчитывают по всей сети, так что $\sigma^2(k) = \sigma^2(k') = \sigma(k)\sigma(k')$ (знаменатель в формуле (6.12)).

Сложные сети в реальном мире

Первые сетевые структуры экономики и социума были построены в 1990-х гг. по открытым источникам, сведены в базы данных и многократно проанализированы*. В этом смысле они повторяют судьбу кишечной палочки, мухи-дрозофилы и других стандартных объектов биологических экспериментов. В табл. 6.5 представлены примеры сетей реального мира и их теоретико-графовые («топологические») параметры.

Технические сети вполне материальны: так, в сетях электроснабжения вершинами служат генерирующие мощности (электростанции), распределительные узлы (подстанции) и конечные потребители, а ребрами – линии электропередач. Сеть Интернет отражает физическое соединение компьютеров. В экономических и финансовых сетях, а также в сетях социальных взаимодействий (ССВ, см. выше) вершинами обозначены агенты – люди и (или) организации; ребра соответствуют отношениям между ними.

Таблица 6.5.

Примеры неориентированных сетей реального мира (1 – социальные, 2 – технические, 3 – сети литературных героев) и их параметры (см. M.E.J. Newman, SIAM Review, 2003, **45**, 167 и ссылки)

	Тип сети	число вершин	число ребер	$\langle k \rangle$	$\langle L \rangle$	T	$\langle C \rangle$	r
1	актеры Голливуда	449913	25516482	113.43	3.48	0.20	0.78	0.208
	члены советов директоров	7673	55392	14.44	4.60	0.59	0.88	0.276
	соавторы-математики	253339	496489	3.92	7.57	0.15	0.34	0.120
	соавторы-физики	52909	245300	9.27	6.19	0.45	0.56	0.363
2	сегмент Интернет	10697	31992	5.98	3.31	0.035	0.39	-0.189
	электросети	4941	6594	2.67	18.99	0.10	0.080	-0.003
	железнодорожная сеть	587	19603	66.79	2.16		0.69	-0.033
	аэропорты мира (2002 г.)[1]	3880	18810	9.70	4.37	0.62		
	аэропорты в США (2005 г.)[1]	272	6566	48.28	1.9	0.73		0.06
3	Гомер, *Илиада*[2]	551	1566	5.68	3.33		0.41	-0.001
	Беовульф[3]	74	165	4.45	2.37		0.69	-0.10
	В. Гюго, *Отверженные*[4]	77	254	6.60	2.64		0.45	-0.165
	Л.Н. Толстой, *Анна Каренина*[5]	140	494	7.06				-0.350

[1] M. Zanin, F. Lillo, Eur. Phys. J. Special Topics. 2013, 215(1) DOI:10.1140/epjst/e2013-01711-9

[2] D. Kydros, P. Notopoulos, G. Exarchos, Int. J. Humanities & Art Computing, 2015, **9** (1), 115.

[3] P. MacCarron, R.Kenna, Europhys. Letters (EPL), 2012, **99**, 28002.

[4] S. Vairachilai1, M. K. Kavitha Devi, M. Raja, Appl. Math. Inf. Sci. 2017, **11** (1), 137.

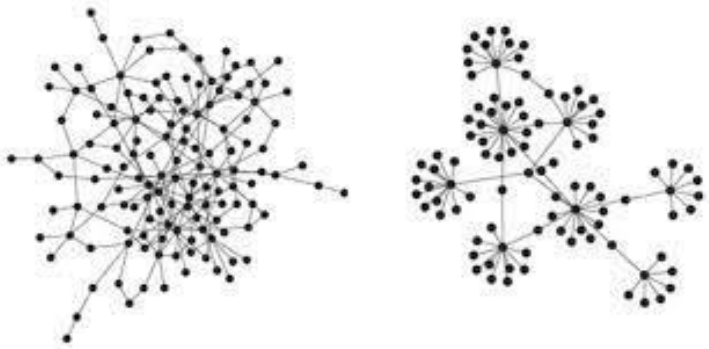
[5] И.А. Евин, Т.Ф. Хабибулин, Компьютерные исследования и моделирование, 2012, **4** (2), 423.

Сети реального мира могут иметь кратные и взвешенные ребра (например, совместные публикации двух авторов в журналах с разным рейтингом), быть ориентированными (например, финансирование или электроснабжение), содержать петли. Многие сложные сети проявляют свойство «тесного мира» (короткий средний путь между произвольной

* Одним из популярных объектов исследования является сеть персонажей романа Виктора Гюго «Отверженные» (см. рис. 6.23). Графы и сети, отражающие структуру произведений искусства, в XXI веке стали новым инструментом исследования в гуманитарных дисциплинах.

парой вершин). Сети в социуме обычно имеют высокий коэффициент кластеризации. Частотность узлов высоких порядков в реальных сетях нередко распределена по обратной степенной зависимости (формула (6.7)) с показателем степени $1 < \gamma < 3$.

Сети с положительным коэффициентом Пирсона r для степеней вершин k называют *ассортативными*, а с отрицательным – *диссортативными* (рис. 6.27). Многие ССВ ассортативны по принципу «подобные к подобным»: в них присутствует сильно связанное «ядро» из узлов-концентраторов (участие популярных актеров в одних и тех же фильмах, взаимные финансовые расчеты крупнейших банков, отношения ведущих политиков…). Напротив, технические сети чаще диссортативны: их узлы с максимальной нагрузкой более или менее равномерно распределены по «жесткому» географическому ландшафту. Исключение составляют сети авиационного сообщения, где крупнейшие аэропорты-«хабы» соединены рейсами: коэффициент Пирсона таких сетей близок к нулю. При детализации взаимодействия узлов возникают *многослойные сети* – например, такие, в которых подграфы-слои образованы рейсами крупнейших авиакомпаний между аэропортами всего мира. Интересно, что персонажи крупных литературных произведений (эпос, романы), создающих образ социума в сознании читателя, обычно объединены связями (общими эпизодами) в *диссортативную* сеть, характерную для «рукотворных» конструкций (табл. 6.5).



(а) (б)

Рисунок 6.27. Распределение узлов в (а) ассортативной и (б) диссортативной сети

Нейронные сети мозга

Нервные клетки не восстанавливаются
народная мудрость

Графы и сети широко используются в современной биологии. Мы рассмотрим лишь одно из многочисленных биологических приложений наук о сетях: структуры распространения электрических импульсов, или же сети нервных волокон (нейросети), в мозге живых существ. Эта «горячая» область исследований на границе физиологии, медицины, психологии и информатики в современной литературе часто называется *нейронаукой* (англ. neuroscience). В свою очередь, исследования нейросетей сами являются частью большой междисциплинарной области *когнитивных наук*, т.е. «наук о разуме». В этом подразделе мы поясним лишь некоторые термины, используемые в исследованиях нейросетей, отсылая интересующихся читателей к цитируемой нами литературе и

источникам в Интернет. Искусственные (компьютерные) нейронные сети, широко применяемые в обработке информации, будут обсуждаться в третьей части книги.

*Нейронные сети (*англ. *neural networks*) в живых организмах состоят из нервных клеток-*нейронов* (neurons), которые объединены в цепи, способные проводить нервные сигналы, то есть электрические импульсы (Рис. 6.28). Сама нервная клетка состоит из микроскопического (до 100 мкм) «тела», подобного другим живым клеткам, с многочисленными ответвлениями-*дендритами* и единственного длинного в этом масштабе волокна: *аксона*. Соседние нейроны соединяются через *синапсы*: контакты аксона с дендритами другого нейрона, которыми нервные клетки объединяются в сеть сложного строения. Один нейрон может иметь несколько тысяч синаптических контактов. Место контакта нейронов в синапсе называется *синаптической щелью*: здесь оболочки соседних клеток разделены зазором шириной 20-30 нм в межклеточной среде, в основном состоящей из воды (см. рис. 6.28). Как справедливо отмечено в эпиграфе, зрелые нейроны «не восстанавливаются»: они не способны к делению. Этим обусловлена тяжесть ряда заболеваний центральной нервной системы.

Электрический импульс распространяется в цепи соединенных нейронов по сложному электрохимическому механизму. В этой цепи синапсы играют роль конденсаторов (см. гл. 2, рис. 2.6 в), зарядка которых занимает время порядка 1 миллисекунды; заряженный конденсатор блокирует прохождение последующих импульсов. Этим может объясняться эффект «мигания внимания» (attentional blink), открытый в экспериментальной психологии в 1980-е годы: при быстром *предъявлении* здоровым испытуемым двух последовательных *стимулов* (звуков, изображений, цифр) второй стимул различается плохо, если время между ними составляет менее 0.5 с. Данный эффект, безусловно практически важный – например, для работы авиадиспетчеров – отражает наличие «узких мест» (bottlenecks) в механизме человеческого восприятия[8]; ими могут быть «заряженные» синапсы в проводящей цепи нейронов.

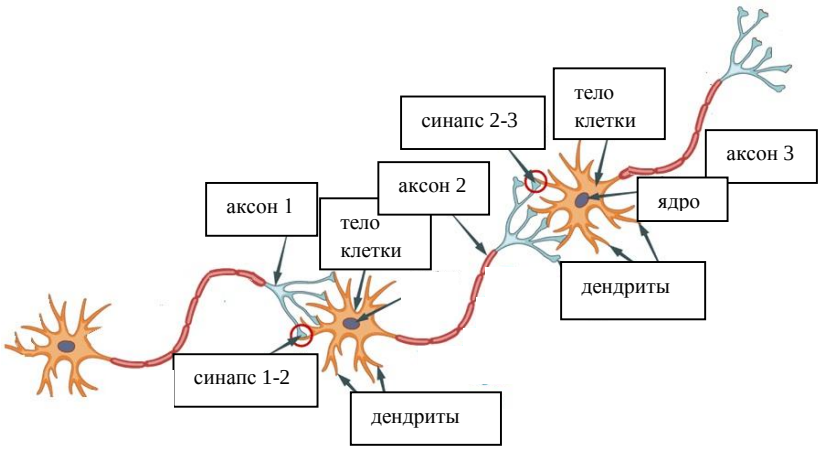


Рисунок 6.28. Фрагмент нервного волокна: три последовательных нейрона

Сети взаимосвязанных нервных клеток (в общем случае – огромные взвешенные орграфы), помимо биологии и когнитивных наук, вошли в экспериментальную основу «науки о сетях». Некоторые их примеры представлены в табл. 6.6. Простейшей среди нейросетей точно установленного строения обладает нематода (круглый червь)

Caenorhabditis elegans длиной около 1 мм – что хорошо показывает возможности современной электронной микроскопии. В более сложных живых организмах число нейронов значительно больше тех 307 (по более поздним данным 579[*]), которыми располагает круглый червь: в мозге человека ~10^{11} нейронов (больше численности населения Земли) и ~10^{14} синапсов. Поэтому точная структура сети связей всех нейронов мозга, называемая *коннектомом*, еще не установлена. Ее построение было главной задачей европейского мега-проекта Human Brain Project в 2013-2023 гг. с участием более 100 научных организаций из стран ЕС.

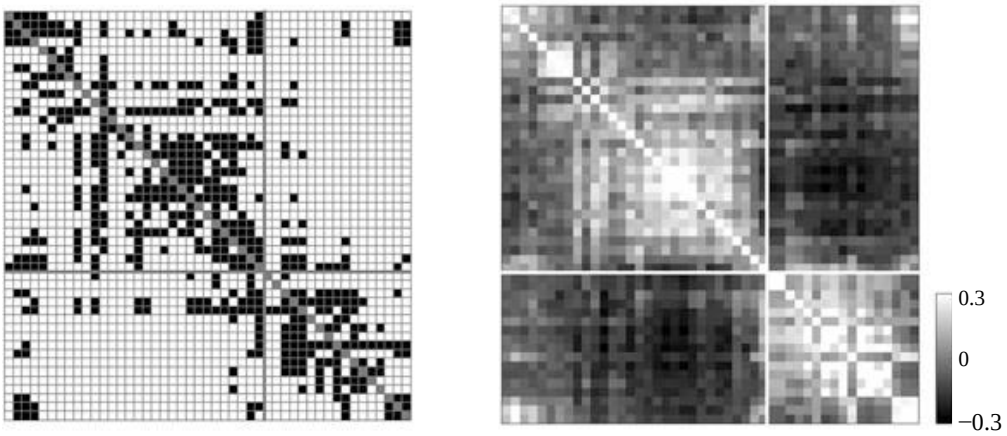
Таблица 6.6.

Фрагменты нейронных сетей и сетей взаимодействия участков коры головного мозга (R.A. Rossi, N.K. Ahmed, *The Network Data Repository with Interactive Graph Analytics and Visualization*, http://networkrepository.com/)

организм	число вершин	число ребер	$\langle k \rangle$	T	$\langle C \rangle$	r
Нематода *Caenorhabditis Elegans*	307	2359	7.68	0.18	0.28	-0.226
Муха *Drosophila-medulla-1*	18 тыс.	33.5 тыс.	37	0.084	3.873	-0.325
Мышь	213	21.7 тыс.	203	0.767	0.801	-0.041
Макака-резус	242	4.1 тыс.	33	0.362	0.533	-0.055
Человек (анатомические сечения, ребра – нервные волокна, разрешение ~20 мкм)						
BNU-1-0025886-session-1	780.2 тыс.	158.2 млн	405	0.312	0.512	0.424
BNU-1-0025890-session-2	723.9 тыс.	158.1 млн	436	0.294	0.514	0.419
Jung2015-M87102575	935.3 тыс.	87.3 млн	186	0.321	0.570	0.086
Jung2015-M87105849	850 тыс.	115.8 млн	272	0.319	0.544	0.257

Топологические характеристики «коннектомов» человека и животных, подобно характеристикам Интернет (со сравнимым количеством вершин), определяют по фрагментам участков (*полей*) коры головного мозга – в том числе используя биохимические данные *post mortem*. «Агрегированные» сети, отражающие взаимодействие анатомически связанных полей коры, устанавливают также на мезоскопическом уровне по данным функциональной магнитно-резонансной томографии (фМРТ, где можно видеть синхронный приток крови к участкам коры при выполнении испытуемыми психологических задач), трактографии (вариант МРТ, визуализирующий движение крови вдоль нервных волокон), электроэнцефалографии (ЭЭГ) и других методов с пространственным разрешением ~1 мм. Эти же методы позволяют установить схему функциональных связей между разными участками коры головного мозга. Сочетание всех имеющихся методик в принципе позволяет определить структуру коннектома до микроскопического уровня (~1 мкм), выявляющего положения клеток (см. [8] в списке рекомендуемой литературы).

[*] S.J Cook, et al., Nature, 2019, 571(7763), 63.



(а) (б)

Рисунок 6.29. Матрицы анатомических (а) и функциональных (б) связей участков коры головного мозга макаки по данным фМРТ (по O. Sporns, *Connectome networks: from cells to systems*, Fig. 2, in: H. Kennedy, D. Van Essen, Y. Christen (Eds.) Research and Perspectives in Neurosciences. Springer Cham: 2016, https://doi.org/10.1007/978-3-319-27777-6)

Сети нейронов головного мозга имеют динамическую структуру. Возбуждение внешним сигналом укрепляет определенную конфигурацию связей между группами нервных клеток и составленными из них участками коры. Ввиду огромного числа узлов сети их представление в виде графов теряет информативность. Анатомические и функциональные связи между участками коры на качественном уровне показывают матрицы смежности, в этой области называемые *матрицами связности*, с выделенными блоками нулевых и ненулевых элементов (рис. 6.29). Интегральные параметры коннектома человека показывают свойства «тесного мира», ассортативность и высокие коэффициенты кластеризации (см. табл. 6.6).

Литература к разделу 6.2

[6]. L.A.N. Amaral, et al. *Classes of small-world networks, PNAS*, 2000, **97**, 11149.
[7] М.М. Берновский, Н.Н. Кузюрин, *Случайные графы, модели и генераторы безмасштабных графов.* Труды Института системного программирования РАН, 2012, **22**, 419.
[8] М.В. Фаликман. *Парадоксы зрительного внимания. Эффекты перцептивных задач.* М: ЯСК, 2018.

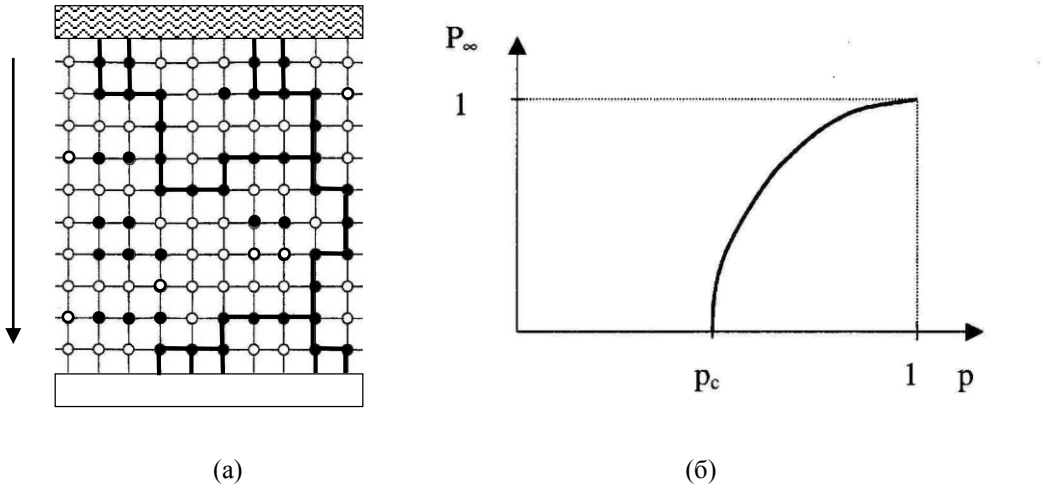
6.3. Процессы на сетях

Динамику процессов на сетевом «ландшафте» рассматривает статистическая физика сетей. Многие такие процессы (в частности, распространение эпидемий) сопровождаются локальными изменениями состояния узлов и связей сети; другие же приводят к перестройке всей сетевой структуры. В этом разделе мы рассмотрим динамические явления на неизменном или несущественно изменяющемся сетевом субстрате. Среди них наибольшую практическую важность имеют задачи эпидемиологии, исследование устойчивости, модели синхронизации узлов и распространения каскадов, а также инструменты поиска в сложных сетях – таких, как Интернет. Модели перестройки сетей, включая сети реального мира, и связанные с ними практические вопросы будут обсуждаться в последнем разделе этой главы.

Перколяция

Динамика сетевых процессов тесно связана с моделированием *перколяции*, или «протекания» больших многоцентровых структур. В соответствии с названием, в этом общем разделе математики, физики и компьютерных наук, возникшем во 2-й половине XX века, рассматривается неравновесное распространение некоторого абстрактного процесса в «жестких» неизменных структурах – такое, как просачивание воды сквозь плотину из песка. В простейшей модели узлы регулярной решетки на каждом шаге дискретного времени с вероятностью $0 < p < 1$ переходят из инертного «сухого» в проводящее воду «мокрое» состояние. Через некоторое большое число шагов на большой решетке возникнет случайный граф, родственный графам Эрдеша-Реньи: его компоненты будут состоять из соседних «мокрых» узлов решетки, соединенных ребрами. Доля узлов решетки, содержащихся в этом графе, очевидно равна p. «Протеканием» решетки называется возникновение гигантского связного компонента такого графа, который соединяет противоположные стороны решетки (рис. 6.30 а).

У задач перколяции много практических приложений: распад связных структур (где черным отмечаются удаленные узлы), образование гигантских полимерных молекул, электрический пробой изолятора, механическое разрушение изделий (где связный кластер возникает из микротрещин) и другие. Различаются задачи протекания узлов и протекания ребер; те и другие решены для многих графов методом компьютерного моделирования. Образование гигантского связного кластера происходит в том случае, если вероятность образования отмеченных узлов либо ребер (и, соответственно, их доля) превосходит пороговое значение p_c (рис. 6.30 б). Расчетами показано, что для узлов квадратной решетки этот порог составляет $p_c = 0.5927\ldots$, а в плотнейшей гексагональной («треугольной») решетке $p_c = 0.5$.



(а) (б)

Рисунок 6.30. (а) Перколяция квадратной решетки, черные кружки, соединенные жирными ребрами – пути «протекания»; направление показано стрелкой. (б) Зависимость доли вершин P_∞ в составе гигантского связного кластера от вероятности p (см. [9] в списке литературы, рисунки 1.12 и 1.5)

Для регулярного дерева любого размера с порядком вершин k (*дерева Кэли*, см. рис. 6.11) порог перколяции легко получить из элементарных соображений. В этом случае гигантский кластер начинается в корне дерева и содержит путь хотя бы до одной из его

вершин последнего «уровня». Связь каждой случайно выбранной вершины дерева с одной из k–1 вершин следующего уровня образуется с достоверностью, если $p(k–1) > 1$. Таким образом, порог перколяции, ниже которого гигантский связный кластер не возникает,

$$p_c = \frac{1}{k-1}$$

Для дерева из задачи о ранце на рис. 6.11 $k = 3$ и $p_c = ½$.

В расчетном моделировании путей протекания на различных двумерных и трехмерных решетках («компьютерных экспериментах») были получены разнообразные случайные графы нерегулярного строения (рис. 6.31). Тем не менее, их усредненные параметры подчиняются статистическим закономерностям. Так, при случайных блужданиях на двумерной квадратной сетке геометрическое расстояние между двумя узлами после N шагов $l \sim N^{1/2}$(см. разд. 4.4.1 и рис. 4.22 в главе 4). В трехмерных решетках аналогичный процесс дает $l \sim N^{1/3}$. Таким образом, для регулярных решеток размерности d

(6.15) $$l \sim N^{1/d}.$$

Для простых «перколяционных» графов на двумерных и трехмерных решетках расстояние между парой вершин, соединенных путем длиной N, также подчиняется формуле (6.15) – но с нецелочисленным параметром d, который зависит от вида опорной решетки и вероятности протекания p. Тем не менее, для всех пар вершин графа, построенного на одной бесконечной решетке при бесконечном числе шагов с фиксированной p, этот параметр одинаков. (Современные компьютеры позволяют построить очень большие графы, почти неограниченно приближающиеся к бесконечным). Кроме того, разные фрагменты таких графов в среднем «самоподобны» по общему виду, распределению порядка вершин $k(l)$ и другим статистическим параметрам.

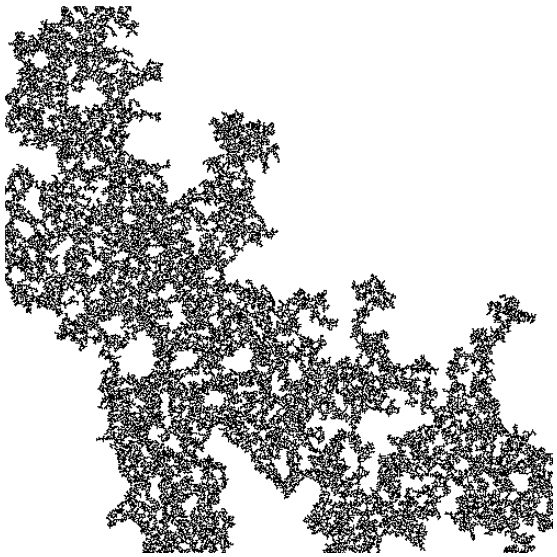


Рисунок 6.31. Фрактальная структура перколяционного кластера (см. https://ru.stackoverflow.com/questions/764580/)

Геометрические объекты, по своим статистическим свойствам родственные перколяционному графу на рис. 6.31, в современной математике называются

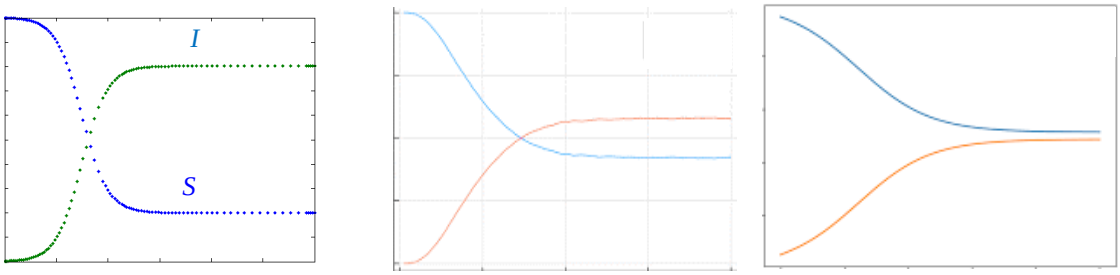
фрактальными множествами точек или, кратко, *фракталами*. Начальное описание фракталов, которые уже вошли в аппарат современной физики, будет дано в главе 8. Пока напомним, что самоподобное распределение размеров отмечалось в гл. 2 для картины кластеров и микроскопических капель жидкости в состоянии сверхкритического флюида (см. разд. 2.5). Подобно критическим параметрам веществ при их переходах в конденсированную фазу, параметры многокомпонентных случайных графов вблизи образования гигантского кластера подчиняются обратной степенной зависимости (формула (6.7)). Процесс перколяции в математике и теоретической физике нередко называют *геометрическим фазовым переходом*. Краткое введение в теорию и модели перколяции представлено в книге Ю.Ю. Тарасевича (см. [9] в списке рекомендуемой литературы).

Математические модели эпидемиологии

Модели перколяции применяются к описанию таких процессов, как распространение инфекции или лесного пожара на некотором неизменном ландшафте. В простейшей бесструктурной модели эпидемиологии изменения доли подверженных инфекции *S* (англ. suspected) и инфицированных *I* (infected) индивидов удовлетворяют системе дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned} dS/dt &= -\alpha SI + \beta I \\ dI/dt &= \alpha SI - \beta I, \end{aligned} \qquad \text{(6.16)} \qquad \textit{модель SIS}$$

где коэффициент α отражает вероятность передачи инфекции, а β – скорость выздоровления: величина 1/β показывает длительность заразительного периода. В модели SIS (suspected – infected – suspected), соответствующей уравнениям (6.16), «бессмертные» переболевшие остаются подверженными инфекции. В рамках этой модели доли здоровых и больных с течением времени асимптотически приближаются к равновесным значениям, которые зависят от соотношения коэффициентов α и β (рис. 6.32).



α/β = 5 α/β > 1 α/β < 1

Рисунок 6.32. Динамика доли подверженных инфекции (*S*) и инфицированных (*I*) в рамках модели SIS при разном отношении α/β (A. Dadlani, et al., arXiv:2004.04675 [q-bio.PE])

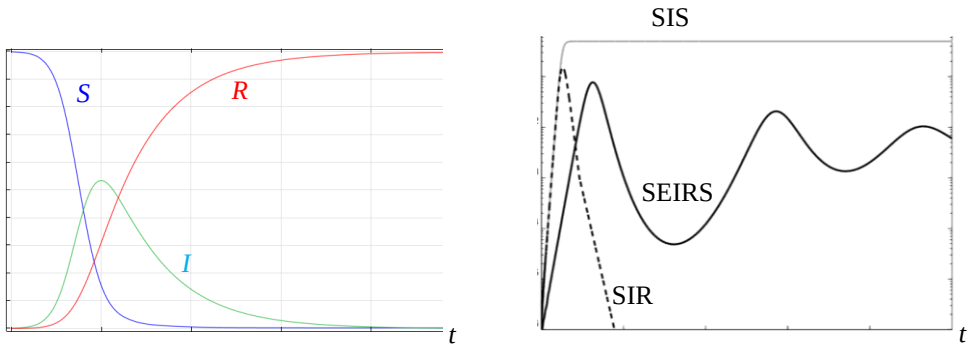
В альтернативной модели SIR (suspected – infected – recovered/removed), предложенной, как и SIS, в первой половине XX века, в ходе болезни инфицированные приобретают иммунитет (recovered) либо гибнут (removed), в обоих случаях уменьшая долю потенциальных распространителей инфекции:

(6.17)
$$\begin{aligned} dS/dt &= -\alpha SI \\ dI/dt &= \alpha SI - \beta I \\ dR/dt &= \beta I \end{aligned}$$
модель SIR

(здесь R – доля популяции, ставшая не подверженной инфекции вследствие смерти или иммунитета). В модели SIR количество зараженных с течением времени проходит через максимум, число подверженных инфекции асимптотически приближается к нулю, а доля переболевших и получивших иммунитет – к 1–R', где R' – доля умерших (Рис. 6.33 а).

Более детализированные модели учитывают инкубационный период у зараженных индивидов (E – exposed, SEIR), ослабление иммунитета с течением времени (SIRS: suspected – infected – recovered – suspected; SEIRS, см. рис. 6.33 б) и др. Все такие модели называются *компартаментальными*: популяции индивидов в них разделяют на категории, или «ящики» (англ. compartments). В классической форме эти бесструктурные модели не имеют отношения к задаче перколяции: массив индивидов в них можно считать расположенным на полном графе. В них также не учитывается перемещение носителей инфекции как фактор, способствующий ее распространению (например, в общественном транспорте). С моделью SIR неплохо согласуется историческая практика карантинов, при которых в инфицированном регионе запрещаются въезд и выезд.

Учет структуры массива агентов переводит эпидемиологические модели в задачи перколяции на сложных сетях. Возникновению эпидемии в этом случае соответствует образование гигантского связного кластера из зараженных узлов. Для случайных графов с экспоненциальным распределением степеней вершин $P(k) \sim e^{-\alpha k}$ существует *порог распространения эпидемии*: критическая доля зараженных узлов λ_c, с превышением которой они образуют гигантский кластер:



(а) (б)

Рисунок 6.33. (а) Динамика подверженных инфекции (*S*), инфицированных (*I*) и выздоровевших либо умерших (*R*) в модели SIR (A. Dadlani, et al., arXiv:2004.04675 [q-bio.PE]).
(б) Доли инфицированных в разных моделях; SEIRS: suspected–exposed–infected–recovered –suspected (https://docs.idmod.org/projects/emod-environmental/en/latest/model-seir.html)

(6.18 а)
$$\lambda_c^{SIS} = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$$

(6.18 б)
$$\lambda_c^{SIR} = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}$$

(где k – порядок вершин в сети, а треугольные скобки отвечают усредненным значениям). При $\lambda < \lambda_c$ доля инфицированных узлов в таких сетях с течением времени приближается к нулю. (Таким образом, наличие иммунитета повышает порог эпидемии). Заметим, что эпидемический порог в формулах (6.18 а, б) не зависит от «заразности» (*контагиозности*) и скорости распространения инфекции: это предельное значение ($t\to\infty$) определяется только топологией сети.

В то же время для безмасштабных бесконечных графов Барабаши-Альберт с распределением $P(k) \sim k^{-\gamma}$ и показателем степени $\gamma < 3$ (см. формулу (6.7)) $\lambda_c = 0$: порог эпидемии отсутствует, любое заражение сети становится хроническим. В реальных сложных сетях со свойством «тесного мира» эпидемический порог если и существует, то очень мал. Это важное обстоятельство определяет стратегию защиты от компьютерных вирусов (распространению которых хорошо соответствует модель SIS) и иных вредоносных воздействий на сетевые коммуникации.

Математический аппарат эпидемиологии не сводится к рассмотренным выше простейшим моделям распространения инфекций. Исследованию тяжелых (туберкулез, ВИЧ, инфекционный гепатит), опасных (оспа, холера, дизентерия) и массовых заболеваний (новые штаммы гриппа и ОРВИ) посвящены многие математические и агентные модели (см. [10] в списке рекомендуемой литературы). В таких моделях используются биохимические, фармакологические и статистические данные, учитываются социальные и сезонные факторы (рис. 6.34).

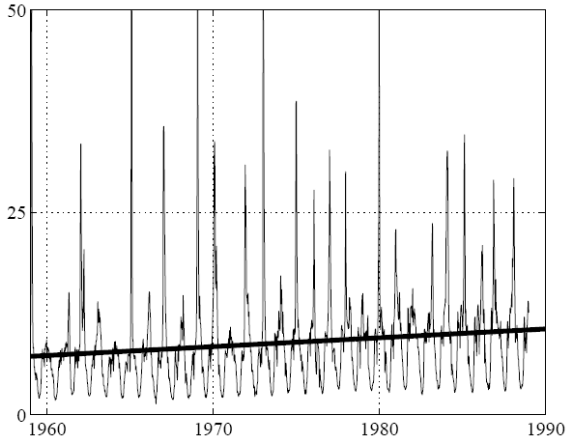


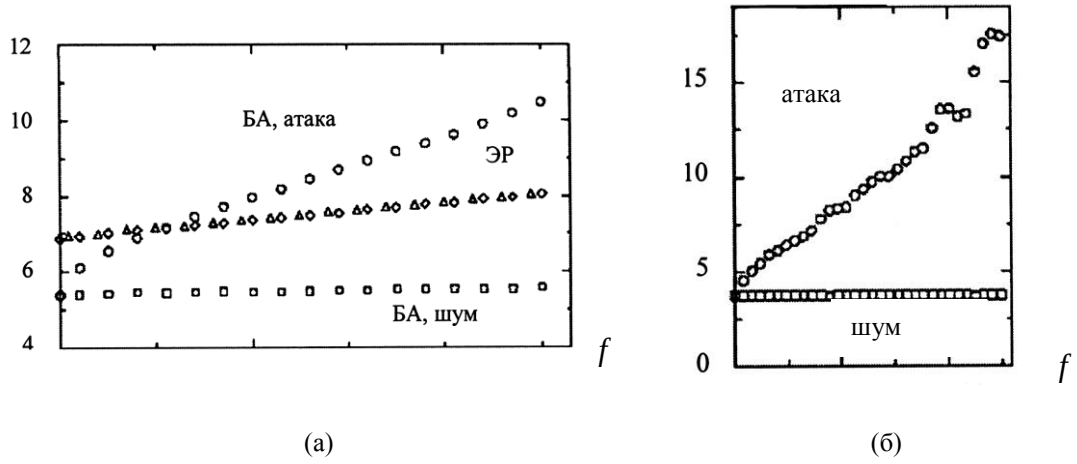
Рисунок 6.34. Заболеваемость ОРЗ в Москве (число случаев за неделю) с 1959 по 1989 г. Черная линия – рост средней заболеваемости (см. [10], стр. 214, рис. 5.6)

Устойчивость сетей

Модель «обращенной перколяции» применяется к исследованию устойчивости сетей к повреждениям. В этом случае субстрат имеет сетевую структуру, из которой изымаются «окрашенные» узлы. Разрушению исходной сети соответствует появление гигантского связного кластера из удаленных узлов. Наоборот, при сохранении такого кластера из оставшихся узлов сеть остается связной. Для случайных графов с распределением степеней вершин $P(k)$ гигантский связный компонент существует, если

(6.19) $$\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle > 2$$ *критерий Моллоя-Рида*

(если между любой парой вершин в бесконечном или очень большом графе имеется единственный путь, у всех его промежуточных вершин $k = 2$, так что неравенство (6.19) обращается в равенство).

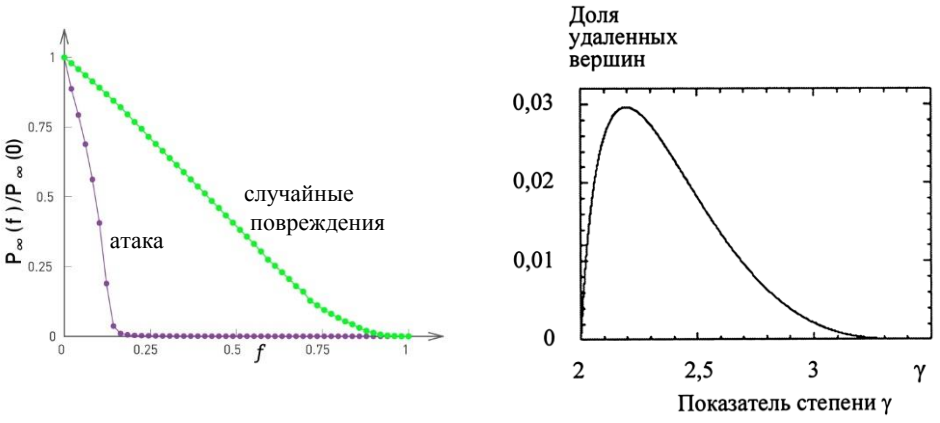


(а) (б)

Рисунок 6.35. (а) Уменьшение диаметра (%) графов Эрдеша-Реньи (ЭР) при «шумовом» удалении узлов (треугольники) и «атаке» на узлы максимальной степени (кружки); то же для графов Барабаши-Альберт (БА). (б) то же для узлов Интернет (R. Albert, H. Jeong, A.- L. Barabási, Lett. to Nature, 2000, 406, 378)

Мерой «стойкости» (англ. resilience) или «прочности» (robustness) сети служит зависимость относительного размера гигантского компонента $N(f)/N_0$ либо $P_\infty(f)/P_\infty(0)$ (см. рис. 6.30 б) от доли удаленных узлов f. В реальных сетях повреждения узлов могут быть стохастическими (тогда их вероятность не зависит от степени узла k) либо результатом целенаправленной атаки на «хабы» максимального порядка. В случайных кластерах типа Эрдеша-Реньи с экспоненциальной зависимостью $P(k) \sim e^{-\alpha k}$ оба вида повреждений дают одинаковый результат: линейное уменьшение диаметра гигантского связного компонента с ростом f. В безмасштабных кластерах с $P(k) \sim k^{-\gamma}$ гигантский связный компонент сохраняется при случайном удалении до 70-80% узлов. (Видимо, такой высокой устойчивостью, закрепленной эволюцией, и объясняется «безмасштабный» вид управляющего ядра в биологических и социальных сетях). Однако эти сети уязвимы к атакам по узлам-концентраторам: для их распада достаточно удаления 1 – 3% вершин наивысшего порядка (рис. 6.35 и 6.36).

Устойчивость Интернет и других сетей коммуникации также существенно зависит от распределения степеней узлов. Безмасштабные сети с низкой долей концентраторов ($\gamma>3$ в формуле (6.7)) распадаются выше пороговой доли случайных повреждений, тогда как при более равномерном распределении степеней оставшиеся узлы сохраняют связность сети и участвуют в перераспределении нагрузки (см. далее). Огромное практическое значение имеет устойчивость транспортных сетей в мегаполисах в случае аварий и террористических атак (рис. 6.37).



(а) (б)

Рисунок 6.36. Атаки на узлы максимальной связности в безмасштабной сети: (а) сравнение со случайным удалением узлов (см. [6], image 8.11), (б) доля удаленных вершин, приводящая к распаду сети, в зависимости от параметра γ (M.E.J. Newman, SIAM Review, 2003, 45, 167)

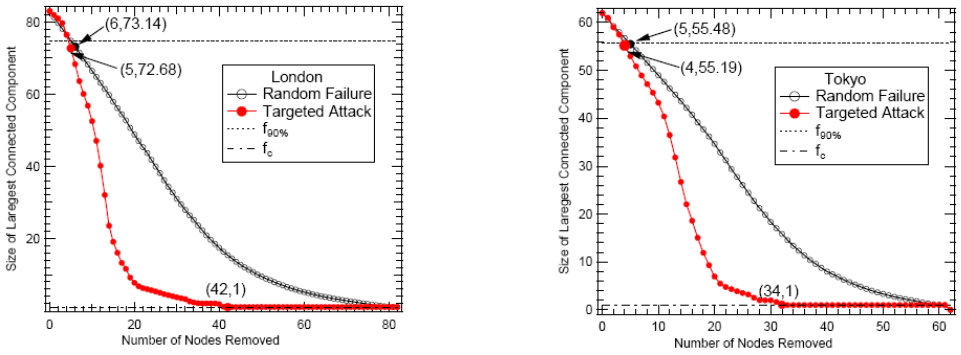


Рисунок 6.37. Размеры связного кластера в городских метрополитенах при блокировании станций (X. Wang et al., Physica A, 2017, 474, 19; рассмотрены 33 мегаполиса)

Каскадные процессы

Повреждения техногенных сетей могут распространяться лавинообразно, причиняя большой ущерб. Среди таких каскадных процессов общеизвестны «веерные» отключения в сетях электроснабжения (англ. blackouts), от которых могут страдать миллионы пользователей. В простейшей модели таких каскадов, предложенной в начале 2000-х гг., предполагалось, что предельная рабочая нагрузка узла сети C_i, с превышением которой узел выходит из строя, пропорциональна его топологической нагрузке B_i (см. разд. 6.2.2):

(6.20) $$C_i^{(0)} = (1+\alpha)B_i^{(0)},$$

где коэффициентом α определяется «запас прочности»; при $\alpha = 0$ сеть очевидно неработоспособна. Изъятие узлов из исходной сети с первоначальным набором параметров $\{B_i^{(0)}, C_i^{(0)}\}$ приводило к перераспределению топологических нагрузок $\{B_i^{(1)}\}$, с которыми по формуле (6.20) рассчитывались новые рабочие нагрузки $\{C_i^{(1)}\}$. Если нагрузки некоторых оставшихся узлов при этом превышали их предельные значения (т.е. возникали узлы с $C_j^{(1)} > C_j^{(0)}$), такие узлы тоже изымали из сети. Расчет повторялся до тех пор, пока в

сети не оставалось перегруженных узлов, т.е. для всех сохранившихся $C_j^{(k+1)} < C_j^{(0)}$, где k – число ступеней каскада. Глубина повреждения сети оценивалась по уменьшению числа узлов в ее гигантском связном компоненте N' по сравнению с первоначальным числом узлов N_0

$$G = N'/N_0$$

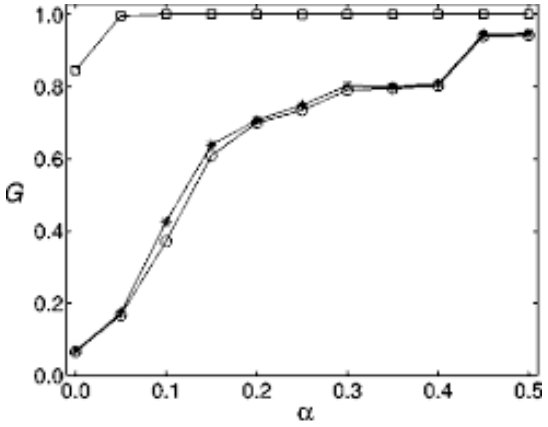


Рисунок 6.38. Зависимость размера гигантского кластера $G=N'/N_0$ от параметра α при каскадных отключениях в модельном фрагменте Интернет (N=6474 узлов, $\langle k\rangle$=3.88). Верхний график – случайное удаление узлов, совпадающие нижние графики –удалении узлов с максимальной степенью k_i либо максимальной топологической нагрузкой B_i. По A.E. Motter, Y.-Ch. Lai, Phys. Rev. E 2002, 66, 065102

Как и в других оценках устойчивости (см. выше), повреждения модельных и реальных безмасштабных сетей (см. формулу (6.7)) при стохастическом удалении узлов оказывались гораздо меньше, чем при целенаправленном удалении узлов с максимальной нагрузкой. (В последнем случае при «запасе прочности» $\alpha < 0.2–0.3$ каскады отказов фактически разрушали сеть, рис. 6.38). Случайные сети типа графов Эрдеша-Реньи и однородные сети с одинаковой степенью всех вершин более устойчивы к атакам. Крупные каскадные отключения, в частности, происходили в Западной Европе в первом десятилетии XXI века после перехода к управлению энергетическими сетями через Интернет.

6.3.1. Сеть Интернет и ее составные части

Между знакомыми домами устроены магнетические телеграфы,
посредством которых живущие на далёком расстоянии общаются друг с другом
князь В.Ф. Одоевский, 1837 г.

Архитектура сети Интернет

Интернет – это многоуровневая глобальная сеть, объединяющая компьютеры и другие технические средства передачи информации во всех странах мира[9]. Она обеспечивает доступ подключенных к ней пользователей к массивам данных и программам на других компьютерах. Обмен цифровыми данными всех подключенных устройств производится по единому набору алгоритмов (*протоколов*). Передача информации осуществляется через телефонные линии, оптоволоконные кабели, радиочастоты, спутниковую связь. Интернет не имеет (по крайней мере официального) собственника и единственного центра управления: его пользователи объединены в локальные сети стран, регионов, крупных корпораций и других организационных систем. Деятельность Сети координирует

Общество Интернет (англ. Internet Society, ISOC) с представительствами в США и Швейцарии, имеющая более 100 подразделений в 180 странах мира, включая Россию. В структуру ISOC входит ряд организаций с перекрывающимися полномочиями (таких, как Совет по архитектуре Интернет: Internet Architecture Board, IAB), которые вырабатывают стандарты для различных аспектов функционирования Сети и способствуют их внедрению.

Первые разработки компьютерных сетей были начаты во 2-й половине XX века в США и СССР*, прежде всего в технических и военных целях. Это обстоятельство определило устойчивость как главное требование к системе сетевых связей, обеспечив ее основные признаки: децентрализованную архитектуру, большое число путей между всякой выбранной парой узлов и передачу цифровой информации частями (пакетами) через варьируемые наборы маршрутов. Благодаря «эволюционному отбору», Интернет и ее составные части приобрели архитектуру сложных сетей; они имеют общие черты с нейронными и другими биологическими структурами живых организмов (см. выше).

Интернет, как «сеть сетей», объединяет меньшие по масштабу сети разного строения. Ее остов составляют высокоскоростные компьютеры и специализированные устройства: *серверы*, *роутеры* (*маршрутизаторы*) и *концентраторы*, которые обеспечивают пересылку больших объемов данных между узлами. В качестве узлов «остовной» структуры могут выступать сети следующего уровня, или автономные системы (Autonomous System, AS). К ним подсоединены местные, или локальные, сети (Local Area Network, LAN), объединяющие конечных пользователей: компьютеры и их блоки (сканеры, принтеры), мобильные телефоны, видеокамеры и мн. др. Региональные сети, в свою очередь, также имеют многоуровневую структуру (рис. 6.39).

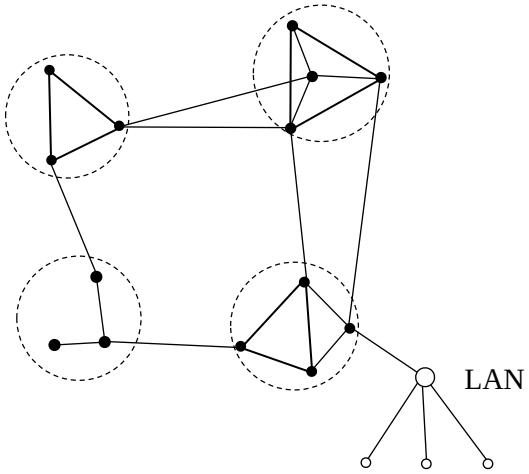


Рисунок 6.39. Схема многоуровневой сети: пунктир – автономные сети, черный цвет – роутеры, белый – пользователи (по [7], Figure 4.1)

* Так, например, сеть «интеллектуальных терминалов», оснащенных процессором и жестким диском – прототипов персональных компьютеров – с начала 1980-х гг. объединяла исследовательские установки в Институте ядерной физики Сибирского отделения АН СССР (новосибирский Академгородок). Сервером локальной сети служил польский компьютер, в тогдашних терминах электронно-вычислительная машина (ЭВМ) «Одра», поставленная в рамках Совета Экономической Взаимопомощи (СЭВ); пользователи называли терминал *Одрёнком*. В конце 1990-х гг. эту сеть терминалов постепенно заменили стандартной локальной сетью персональных компьютеров.

Взаимодействие сетевых устройств описывается в рамках «модели OSI» [https://en.wikipedia.org/wiki/OSI_model] как «стек протоколов» разного уровня: в разных задачах выделяют до семи уровней. Модель не вполне соответствует реальному устройству современной Интернет, но ввиду своей глубокой теоретической проработанности всё же применяется как язык описания сетей. Стандарты каждого уровня максимально абстрагированы друг от друга: приложение на компьютере не обязано «знать», каким образом ему доставляются данные из сети, а сетевой маршрутизатор, в свою очередь, не заботится о том, на каких физических принципах основан канал передачи данных. В частности, существует стандарт голубиной почты (https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc2549): написанный в шутку, он соответствует всем формальным требованиям и в принципе может быть реализован, только с очень низкой скоростью передачи данных.

Сеть Интернет на начало 2021 г. объединяла более 4.6 млрд. пользователей при населении Земли 7.8 млрд. (с распространением систем дистанционного контроля, «умной» бытовой техники, *Интернета вещей* и т.д., на одного жителя высокоразвитых стран приходится всё возрастающее число сетевых устройств). Среди всех подключенных средств свыше 90% составляют мобильные *клиенты*: смартфоны, GPS-навигаторы и др. Каждое устройство имеет в Интернет цифровой адрес: Internet Protocol, или IP-адрес – основной протокол третьего (сетевого) уровня. Его распространенная форма – группа из четырех чисел от 0 до 255, разделенных точками: так, 193.233.4.1 – это адрес сервера Института элементоорганических соединений (ИНЭОС РАН).

Число современных пользователей Сети намного больше числа существующих в ней IP-адресов. В наиболее распространенной версии «стека протоколов» Интернет IPv4 расширение «пространства адресов» достигается с помощью ряда дополнений (в IT-просторечии *костылей*) – прежде всего NAT (Network Address Translation), при котором всем пользователям локальной сети, для внешнего мира имеющей один IP-адрес, выдаются «виртуальные» (фиктивные) IP-адреса. В расширении протокола, известном как IPv6, длина адреса составляет 128 бит вместо 32 бит в IPv4, что позволяет радикально увеличить емкость Сети. Однако эта версия, предложенная в 2011 г., с трудом принимается пользователями заполненного адресного пространства IPv4, не имеющих программного обеспечения для современной версии. В начале 2020 г. доля протокола IPv6 в составляла 30%; наиболее распространено параллельное использование IPv4 и IPv6 (dual stack). В системе пользователей Интернет проявляются стандартные социальные факторы: инерционность, предпочтение устаревших, но работающих схем и настороженное отношение к новому.

Алгоритм IP отвечает за разбиение массива данных (например, файла с видеоинформацией) на независимо передаваемые части (*пакеты*) в узле-отправителе и его сборку из пришедших пакетов в узле-получателе. Передачу данных между двумя узлами Сети осуществляет протокол TCP (Transmission Control Protocol): один из основных протоколов четвертого (транспортного) уровня. Он управляет потоками пакетов, каждому из которых по стандарту IP приписаны адреса отправителя и получателя, по устанавливаемой программами комбинации нескольких маршрутов «из пункта А в пункт Б». Объединение TCP/IP (тоже называемое протоколом) обеспечивает устойчивость

потоков информации, сохраняющейся при повреждении отдельных узлов и связей. TCP/IP является главной схемой обмена данными в Интернет.

Каждый компьютер в Сети, который может служить центром локальной сети, обозначается английским термином host: в нашей документации термин обычно не переводится, а транслитерируется. Кроме «физического» цифрового IP-адреса, каждый «хост» имеет в Интернет постоянный «логический» адрес, или *доменное имя*: google.com (корпорация Гугл), yandex.ru (российская интернет-компания Яндекс), math.phys.msu.ru – кафедра математики физического факультета МГУ, и т.д. Совокупность компьютеров с общим признаком, который отражен в адресе, называют *доменом*. Домен верхнего уровня, указываемый справа от последней точки, показывает государственную (.us – США, .uk – Англия, .de – ФРГ, .ru – Российская Федерация) либо профессиональную принадлежность (.gov – правительственные, .ac – академические, .edu – учебные, .com – коммерческие организации). Далее справа налево, разделяемые точками, приводятся (однажды произвольно установленные) имена организаций или фирм внутри «старшего» домена, символы их подразделений в следующем домене и т.д. С появлением множества фиктивных адресов эта схема размывается произвольно установленными именами – например, такими, как *.рф (звездочка обозначает всю остальную часть адреса). Соответствие доменного имени и цифрового IP-адреса устанавливает постоянно пополняемая и редактируемая *система доменных имен* (Domain Name System, DNS) – один из неотъемлемых атрибутов Интернет.

Компоненты Сети

Интернет служит физической основой для большого числа глобальных сетевых конструкций, передающих разные виды информации. Его наиболее массовым «образом» является *Всемирная паутина* (*World Wide Web*, или *WWW*): совокупность электронных документов разнообразных форматов (включая изображения) и связей-ссылок между ними. Эта *гипертекстовая* схема размещения информации была разработана в 1990 г. для локальной сети Европейского центра ядерных исследований (франц. *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*, *CERN*) и затем внедрена в мировом масштабе. Роль узлов в WWW выполняют «страницы» (pages) гипертекста, содержащие ссылки на другие страницы (англ. hyperlinks, рис. 6.40 а).

Массив информации, относящейся к определенному пользователю, в WWW называется *домашней страницей* (homepage) или *сайтом* (site). В этом массиве присутствуют ссылки на документы и рисунки (например, на персональные страницы сотрудников организации, на публикации данного автора и прочие) в постепенно эволюционирующем наборе допустимых форматов: gif, jpeg, png, svg, pdf и др. (рис. 6.40 б). Интересно, что формат .doc средствами Интернет не поддерживается, но соответствующие файлы на браузерах открываются программой Word. Веб-страницы могут быть *пассивными* (рассчитанными только на просмотр содержания – например, прогноз погоды) и *активными*, или *интерактивными* – изменяющими содержание по запросу пользователя (например, интернет-магазины). В основе этого – разделение на статические (готовые файлы лежат на сервере) и динамические системы, создающие файл в момент запроса. На середину 2021 г.

во Всемирной паутине присутствовало более 1.8 млрд страниц, из которых менее 15% относились к активным.

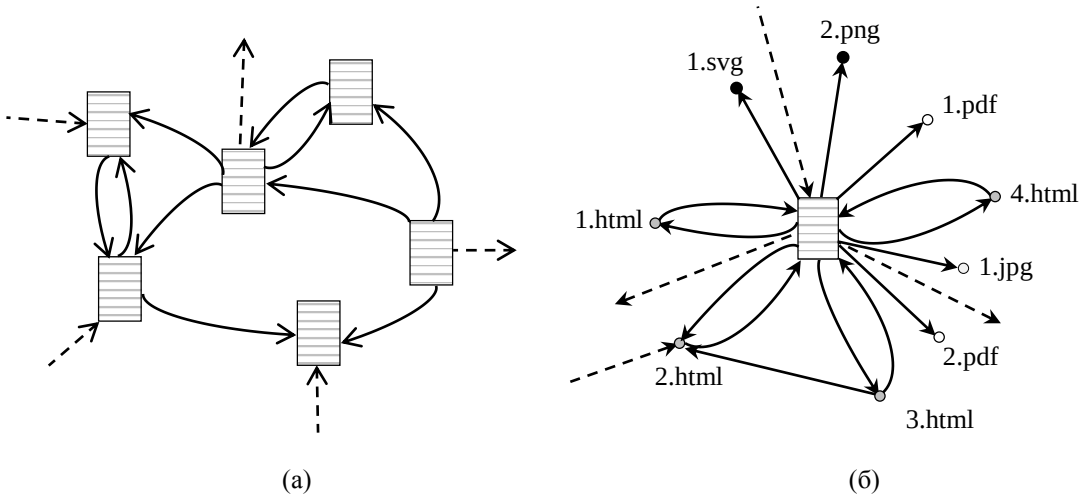


Рисунок 6.40. (а) Связи сайтов во Всемирной паутине. (б) Схема сайта: центральный прямоугольник – файл index.html, пунктир – внешние связи (по [7], Figures 4.5 и 4.6)

Компоненты страницы (сайта) могут храниться в памяти разных компьютеров – в том числе серверов, расположенных за сотни километров друг от друга. Для их сборки и просмотра используется алгоритмический язык разметки гипертекстов (HyperText Markup Language, HTML). Компьютерные программы, или *приложения* (applications), представляющие страницу в привычном виде текстов и изображений, называются «интернет-обозревателями» либо *браузерами*. Для разных способов наглядного представления информации в литературе используется другая калька с английского: *интерфейс*.

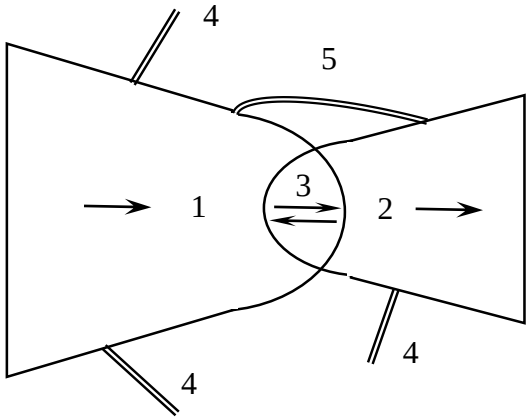


Рисунок 6.41. Гигантский слабо связанный компонент ориентированной сети: 1 – входящий кластер, 2 – выходящий кластер, 3 – сильно связанный компонент, 4 – «усики», 5 – «трубка» (по [7]. Figure 4.7)

Сеть Всемирной паутины опирается на Интернет, но не тождественна ей. В частности, физические связи между компьютерами и другими устройствами ненаправленны, тогда как ссылки представляют собой дуги в ориентированном графе (см. рис. 6.40 а). Архитектура WWW и других ориентированных сетей содержит *гигантский слабо связанный компонент* из узлов (страниц), соединенных маршрутами (последовательностями ссылок). Этот

компонент, который можно представить неориентированной сетью, в свою очередь является комбинацией «входящего» и «выходящего» гигантских ориентированных кластеров с областью их перекрывания – *сильно связанным гигантским компонентом*, а также с большим числом периферийных «труб» и «усиков» (рис. 6.41). В сильно связанном компоненте все пары узлов соединены (не обязательно напрямую) «входящими» и «выходящими» маршрутами. Сильно связанные компоненты сетевых организационных структур, где дуги соответствуют влиянию узлов на соседние узлы, обычно совпадают с управляющим ядром системы.

Любой однозначно указанный фрагмент информации (в частности, компьютер либо автономная сеть, а также веб-страница), подключенный к Интернет, обобщенно называется *ресурсом*. Его точный адрес в Сети задает *универсальный указатель ресурсов* (Universal Resource Locator, URL) со следующей структурой:

(6.21) method://host.domain[:port]/path/filename

Первая часть URL (method://) устанавливает метод, или снова «протокол», седьмого (прикладного) уровня, задающий доступ к ресурсу:

- http:// либо https:// – файл на сервере WWW
- ftp:// – файл на сервере FTP (File Transfer Protocol), обеспечивающем перенос программ между компьютерами
- pop:// (Post Office Protocol) – электронная почта,
- telnet:// – организация удаленного доступа к нужному ресурсу (TERminaL NETwork)
- и многие другие

Аббревиатуры HTTP (Hypertext File Transfer Protocol) и HTTPS (добавляется Secure) означают стандартную процедуру обработки гипертекстов. Более популярная схема HTTPS соответствует передаче кодированной информации. Блоку ‘host.domain’ в URL соответствует доменное имя ресурса, которое обсуждалось выше; перед ним могут приводиться логин и пароль, разрешающие доступ. Доменные имена серверов в Всемирной паутине часто начинаются с «префикса» www, например www.имя.ac.ru – типичный адрес сайта института Российской академии наук (в поле «имя» указывается институтский домен). В этом случае протокол HTTP или HTTPS поддерживается сайтом автоматически. Связь между сетями с разными протоколами обработки данных осуществляется через *шлюз* (англ. *gateway*): компьютер или компьютерную систему, обеспечивающие перекодировку информации.

Часть адреса [port] в (6.21) указывает номер входа, или «порт»: на сервере их может быть несколько (хотя ныне от этой практики отказываются). Далее в адресе URL указываются положение и имя файла на данном ресурсе. Так, например, URL

https://arxiv.org/pdf/physics/0603023.pdf

имеет препринт статьи P.Holme, M.E.J.Newmann *Nonequilibrium phase transition in the coevolution of networks and opinions*, депонированной в «социофизическом» разделе

чрезвычайно популярного электронного ресурса ArXiv* (arXiv:physics/0603023v3 [physics.soc-ph] 9 Mar 2006) и затем опубликованной в Physical Review (см. далее рис. 6.54). В современных браузерах URL конкретного ресурса часто заменяют *гиперссылки*: выделенные слова обычного текста, активация которых «кликом» (от англ. click: щелчок) вызывает требуемый адрес. В частности, такими гиперссылками служат адреса препринтов в ArXiv.

Среди многочисленных сетевых структур, включенных в Интернет, нельзя не упомянуть глобальные (такие как Microsoft Outlook и Gmail) и национальные (www.rambler.ru) службы новостей и электронной почты, универсальные поисковые системы (англ. search engines) и онлайновые социальные сети, которые обеспечивают общение пользователей на любых расстояниях «в реальном времени» – см. эпиграф к этому подразделу. Нередко все эти функции реализуются одними и теми же «интернет-гигантами»: *транснациональными корпорациями* (*ТНК*), которые получают доход с широкого спектра операций «в цифровом пространстве».

Экономический и политический аспекты деятельности ТНК будут рассмотрены в следующих главах; здесь мы лишь упомянем некоторые крупнейшие компании, которые работают с массой пользователей Сети. Так, объединение рекламы товаров в Интернет с возможностью их дистанционной покупки породило *интернет-магазины* Amazon (США), Alibaba (КНР) и множество сервисов меньшего масштаба, включая отечественные. Крупнейшими российскими корпорациями, которые обеспечивают бесплатный либо необременительный доступ к электронной почте – и параллельно предоставляют множество других коммерческих услуг – на 2023 г. являются Яндекс (https://yandex.ru) и почтовая служба Mail.ru Group (www.mail.ru). Наряду с ними в РФ функционирует ряд менее масштабных и локальных почтовых сервисов – таких, например, как электронная почта российских академических институтов с типовым адресом пользователь@институт.ac.ru.

Коммерческая деятельность «в киберпространстве» – весьма динамичная область, состояние которой существенно изменяется за несколько лет. Невозможно отрицать, что сеть Интернет и ее многочисленные ресурсы, обеспечивающие «глобализацию» повседневной жизни людей – это главное новшество для большей части населения Земли с начала XXI века. Влияние новой «сетевой реальности» на состояние экономики и общества будет рассмотрено в следующих главах; пока мы ограничимся техническими аспектами деятельности Сети.

Возможности современных суперкомпьютеров (Табл. 6.7) вполне позволяют создать динамическую «карту» Интернет масштаба 1:1 (где узлы соответствуют существующим пользователям) и редактировать ее в реальном времени. Это обстоятельство порождает сомнения в общечеловеческом характере «никем не управляемой» Сети на фоне ее многолетней устойчивой работы при возрастающих нагрузках. Сетевые модели

* Бесплатный банк электронных текстов ArXiv содержит более 2 млн. предварительных версий (препринтов) научных статей в областях физики, математики, компьютерных наук, математической биологии, финансовой математики, статистики, инженерных наук, кибернетики и экономики. Принятые им материалы, как правило, в течение 1-2 лет появляются в журнальной периодике. Банк позволяет копировать любой выставленный материал в форматах PDF, PostScript, TeX или html. Компьютерный ресурс ArXiv был создан в 1991 г. и поддерживается до настоящего времени в Корнельском университете (США) (см. https://arxiv.org/).

межчеловеческих контактов среди населения развитых стран масштаба 1:1 существуют и используются, по крайней мере, в эпидемиологии[*]. Однако конкуренция крупных государств и ТНК, интересы которых могут переплетаться и маскировать друг друга, в настоящее время действительно выглядит как деятельность немногих частных фирм планетарных размеров, влияющих на структуру и функции Сети.

Таблица 6.7

Крупнейшие суперкомпьютеры в мире и РФ, находящиеся в открытом доступе[*]

	название	Страна и организация	год	Быстродействие 10^{15}·операций/с (petaflops)	Потребляемая мощность, МВт	Оперативная память, Пбайт
1	Frontier	США, Oak Ridge Leadership Computing Facility (OLCF)	2022	1102	21.1	700
2	Фугаку	Япония, RIKEN Center of Comput. Sci.	2020	442	29.9	4.85
3	LUMI	ЕС, Финляндия	2022	550	6.0	1.75
4	Leonardo	ЕС, Италия	2022	240	6.0	2.8
5	Summit	США, Oak Ridge Nat. Lab.	2018	149	10.1	10
6	Sierra	США, Livermore Nat. Lab.	2018	94.6	7.4	2.4
7	Sunway TihuLight	КНР, National Supercomputing Centre, Wuxi	2016	93.0	15.4	1.3
8	Perlmutter	США, NERSC	2021	70.9	2.6	1.54
9	Selene	США, Nvidia	2020	63.5	2.6	—[**]
10	Tiahne 2A	КНР, National Supercomputer Center, Гуанчжоу	2013	61.4	18.5	1.38
	…					
22	Червоненкис	РФ, Яндекс	2021	21.5	0.58	199 ТБ
40	Галушкин	РФ, Яндекс	2021	16	0.33	136 ТБ
43	Ляпунов	РФ, Яндекс	2021	12.8	0.32	68.5 ТБ
46	Кристофари Нео	РФ, Сбербанк	2020	12.0	—[**]	2 ТБ

[*]состояние на ноябрь 2022 г.

[**] нет данных

Среди крупнейших мировых ТНК, формирующих структуру и динамику сети Интернет, выделяется компания Google[**] с характерным девизом: «Упорядочить *всю*

[*] В.Л. Макаров и др., Вестник РАН, 2016, **86** (3) 252.

[**] Словом (если не междометием) *google* (первоначально googol) обозначают число со ста нулями (10^{100}), на 20 порядков превышающее число элементарных частиц во Вселенной; в переносном смысле – несметное количество.

информацию в мире» (курсив автора). Эта корпорация, в 2016 г. реорганизованная в холдинг Alphabet, является одной из «большой четверки» американских компаний, которые определяют состояние мировой компьютерной сферы – наряду с Apple (разработка и производство компьютерной техники), Microsoft (производство программного обеспечения) и уже упомянутой Amazon (электронная коммерция, «облачные» вычисления). По размерам капитала (свыше 220 млрд. долл.), биржевой стоимости (1.37 трлн. долл.) и числу сотрудников (140 тыс.) на 2020 г. Google-Alphabet, как и остальные компании «большой четверки», входит в 20 крупнейших корпораций мира в рейтинге Forbes, возглавляемом китайским банком ICBC. Корпорация Google имеет более 1 млн. серверов, разрабатывает программное обеспечение для множества сетевых задач. Наиболее известна ее поисковая система, которая занимает 60% в этом сегменте мирового рынка. Другие многочисленные продукты включают популярную электронную почту GoogleMail (gmail), систему удаленного просмотра видеоматериалов (*видеохостинг*) YouTube и операционную систему для смартфонов Android.

В десятку главных Интернет-корпораций по версии Википедии 2023 г., помимо Amazon (первое место) и Google (2-е место), входят американская Meta*, разрабатывающая онлайновые социальные сети Facebook, WhatsApp и Instagram (4-е место), а также коммерческие китайские компании JD (3-е место), Tencet (5-е место) и Alibaba (6-е место). Аналогичные интересы имеют российские компании с более скромными позициями в мировом рейтинге: упомянутые Яндекс и Mail.ru, социальные сети ВКонтакте, многочисленные сетевые приложения Сбербанка и другие. Некоторые аспекты деятельности интернет-корпораций будут обсуждаться в главе 8.

Трафик информации и поиск в Интернет

Кликнул мышью добрый молодец…
фольклор

В сети Интернет на начало 2021 г., по разным оценкам, находились от 70 до 100 млн больших компьютеров-серверов. Общее число подключенных устройств, с учетом «интернета вещей», превышало 20 млрд. В течение суток через Сеть проходит около 7 экзабит ($7 \cdot 10^{18}$, или семь квинтиллионов бит) информации; половину этого трафика обеспечивают мобильные телефоны.

Каждый маршрутизатор осуществляет передачу пакетов в Сети к соседним компьютерам и серверам, выбранным его программой на основе IP-адресов отправителей и получателей, а также собственной, непрерывно редактируемой *таблицы маршрутов*. Серия «пакетов», передаваемых по определенном запросу пользователя (например: «отправить электронное письмо с прикрепленными фотографиями домашних животных») называется сеансом либо сессией (англ. session). Длительность сеансов и объемы передаваемый в них информации, подобно многим характеристикам процессов в социуме (см. далее гл. 8), распределены весьма неравномерно и обладают свойством *самоподобия*:

*Признана российским судом экстремистской организацией; ее деятельность запрещена на территории РФ, включая соцсети Facebook и Instagram.

$$f(t) = a^{-H} f(at),$$

где $f(t)$ – поток информации (англ. flow), т.е. число пакетов, передаваемых в интервал времени $t + \delta t$, a – масштабный множитель, $H \approx 0.8$ – *показатель Хёрста*. Таким образом, с физической точки зрения потоки информации в Интернет находятся в «околокритическом» состоянии (см. разд. 2.5 в главе 2). Как и для транспортных потоков, рассмотренных в предыдущей главе, такое состояние обеспечивает максимум пропускной способности сети, но угрожает образованием заторов, которые тормозят передачу информации. Во избежание заторов программы передачи данных перестраивают потоки данных: направляют их в обход узлов с максимальной связностью и топологической нагрузкой (ценой замедления процесса), проводят маршруты мимо узлов с наиболее длиной очередью из ожидающих обработки пакетов и т.д. Более детально этот вопрос обсуждается в гл. 12 исключительно ценной книги С.А. Дороговцева ([7] в списке рекомендуемой литературы).

Поиск информации в Интернет можно разделить на две существенно разные задачи:

(1) построить короткий путь от конкретного пользователя до узла с точно известными координатами (IP-адресом либо URL), или же
(2) определить адреса страниц WWW, содержащих нужную информацию (о товарах в интернет-магазинах, о доступных билетах из А в Б в сетевых транспортных агентствах и др.) и построить маршруты от данного компьютера к этим страницам.

Понятно, что первая задача гораздо проще второй – более того, она входит во вторую задачу как техническая часть. Решением этих задач занимаются специализированные программные продукты: браузеры (от англ. browse – просматривать, перелистывать) Google Chrome, Mozilla Firebox, Microsoft Edge, Safari, Yandex и другие. Их непродолжительный жизненный цикл обычно включает период массовой популярности с последующим выходом из употребления.

Во всех случаях предполагается, что структура сегментов Сети, где проводится поиск, браузеру не известна или известна неточно. Третьей и наиболее трудной задачей является как раз определение реальной структуры тех или иных фрагментов Интернет – например, связей пользователей социальной сети ВКонтакте. Эту задачу решают особые программы-*краулеры* (англ. crawling insects – ползающие насекомые): они просматривают сетевую структуру, распознают ее характерные фрагменты (клики, сообщества, концентраторы, корни деревьев) и маркируют узлы их признаками – например, личной информацией о себе, выставленной на публику наивным пользователем. Некоторые результаты таких исследований социальных сетей мы рассмотрим в главе 9.

Построение оптимальных путей между двумя узлами называют *навигацией* в Интернет. При неизвестной структуре сегмента находить кратчайший путь трудно, однако с учетом трафика данных и перестройки маршрутов (см. выше) это и необязательно. Среди эвристических экономных алгоритмов часто применяется просмотр всех узлов, соседних с исходным, выбор из них «ближайшего» к цели (например, по привязке IP-адреса), переход в этот узел и повторение процедуры: просмотр ближайших соседей, определение следующего узла в маршруте и другие. Найденный маршрут на некоторое время запоминается, что позволяет быстро вернуться к нему при повторном запросе. Такой алгоритм не всегда позволяет найти кратчайший путь к цели (рис. 6.42), но с высокой

вероятностью дает короткие пути. Его недостатком является возможность прихода в «тупиковые» узлы, не имеющие соседних узлов ближе к целевому – особенно при большом числе повреждений сети и перегруженном трафике. В этих случаях программа повторяет поиск с одной из предыдущих ступеней, исключая ранее выбранные узлы, либо переходит на другой случайно выбранный узел. Вероятность такого перехода может быть пропорциональна «расстоянию» до цели (числу ребер в маршруте): $P_{i+1} < P_i < P_{i-1}$ (<1). К настоящему времени разработан ряд эффективных алгоритмов навигации в Интернет.

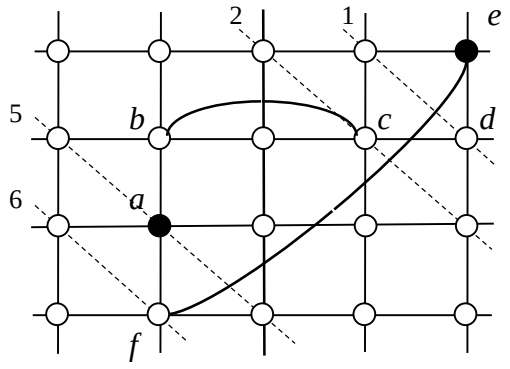


Рисунок 6.42. Решетка с перетяжками, пунктир – числа ребер до узла *e*. (по [7], Figures 11.2 и 11.3). Экономный алгоритм навигации (см. текст) найдет путь *a–b–c–d–e*, но не найдет более короткий путь *a–f–e*

Поиск сайтов в WWW, содержащих требуемую информацию, по запросу пользователей с помощью современных браузеров в последнее десятилетие стал эффективным, быстрым и успешным в подавляющем большинстве случаев. Текстовая строка запроса состоит из ключевых слов и цифр (например, «новые модели математической лингвистики 2023»). Программа поиска немедленно выдает длинный список ссылок, ранжированных по убыванию соответствия запросу, или «релевантности» (англ. relevance). Как правило, первые ссылки в таком списке действительно наиболее полезны и информативны. При редактировании запроса (изменении набора ключевых слов и даже их перестановке) браузер создает новый список. Если изменения ключевых слов невелики, наиболее «релевантные» ссылки в двух списках могут совпадать.

Успех поиска по Всемирной паутине обеспечивается непрерывной работой высокопроизводительных серверов, которые создают и постоянно редактируют «карту» содержания веб-сайтов, или *индексы WWW*: электронный аналог предметного указателя с адресами ресурсов. В массивах индексов, создаваемых по информации от программ-краулеров в ответ на конкретные запросы пользователей, накапливаются и ранжируются (по убывающему числу вызовов данной веб-страницы, числу и направленности ее связей с другими страницами и иным параметрам) адреса различных материалов в Интернет. Сервер, получивший запрос пользователя, передает его в компьютерную систему индексов, которая извлекает ссылки, соответствующие запросу. На последнем этапе сервер документации строит маршруты к найденным материалам и передает список пользователю.

Система поиска информации, разработанная в корпорации Google*, существенно использует «топологию» связей страниц в WWW и результаты предыдущих поисков.

* см. http://www.googleguide.com/google_works.html

Многие часто запрашиваемые сайты – например, новостные – целиком копируются в систему и регулярно обновляются; в ряде приложений (таких, как биржевые индексы, см. гл. 8) обновление происходит через несколько секунд. Не являясь полномасштабными моделями Сети или ее сегментов, индексы WWW создают подробную «карту» ее содержания – хотя при решении важных задач анонимные администраторы вряд ли отказываются от использования моделей масштаба 1:1.

Результаты поиска (материалы, выдаваемые браузером), ранжируются по убывающему числу обращений к ним в предыдущих поисках: список возглавляют наиболее информативные и полезные ресурсы. (Точные алгоритмы ранжирования составляют коммерческую тайну). По существу, в этой схеме учитывается распределенный интеллект (РИ) пользователей Сети, которые дают оценку найденным материалам (см. далее гл. 10). По ряду причин (падежные окончания, составные термины, опечатки и т.п.) ключевые слова в запросе и на целевой странице могут совпадать лишь частично. Для надежного распознавания нужных сетевых ресурсов во всех таких случаях в последние десятилетия применяется *нечеткая логика*: мощное средство свертки информации, также реализуемое в деятельности РИ и других видов интеллекта. Весь этот круг вопросов, связанных с социальными системами, будет обсуждаться в третьей части книги.

6.3.2. Сложные сети и неевклидова геометрия

«Расстояние» до узла-адресата в сложной сети при построении маршрутов (см. рис. 6.42) может быть неизвестно узлу-отправителю. Это вполне очевидно для нейронных сетей мозга, которые превосходят Интернет по числу узлов и при этом не оснащены поисковыми серверами. Локальные алгоритмы навигации обычно включают движение сигнала к узлам с максимальной связностью (а затем от них к адресату) и обращение к часто используемым связям, имеющим максимальный вес. На основе данного факта с начала XXI века быстро развивается новое направление *сетевой геометрии* (англ. *network geometry*), применяемое в анализе сложных сетей, компьютерном распознавании образов, машинном обучении и других разделах информационных технологий. В этой области графам и сетям соответствуют геометрические объекты в абстрактных *неевклидовых* пространствах.

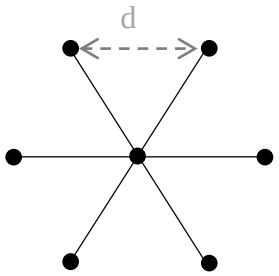


Рисунок 6.43. Звезду с шестью и более «лучами», не связанными ребрами, нельзя вложить в евклидову плоскость

Для некоторых графов – например, регулярных решеток на Рис. 6.16 – связи между узлами можно установить геометрически как расстояния между ними на плоскости, меньшие заданной величины. Однако уже для деревьев и звезд (т.е. простейших деревьев, состоящих из корня и листьев) это в общем случае невозможно (рис. 6.43). В решетках с «перетяжками» (англ. shortcuts, см. рис. 6.42), как простейших сетях «тесного мира», пару несоседних узлов можно сблизить, деформируя плоскость решетки в трехмерном евклидовом пространстве с образованием складок. Не позволяя построить произвольную сеть, такая деформация дает зрительный образ *вложения* (англ. *embedding*) вершин графа в некоторое абстрактное пространство, где вершинам, соединенным ребрами, отвечают близко расположенные точки (рис. 6.44).

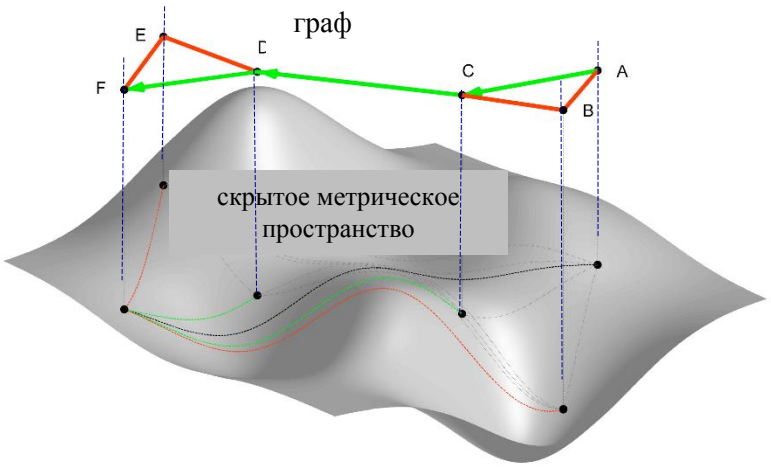


Рисунок 6.44. Сближение далеких узлов в результате деформации метрического пространства (M. Boguna, D. Kryukov, K.C. Claffy, Nature. Physics, 2009, 5, 74). https://www.caida.org/catalog/papers/2008_self_similarity/analysis/

В рамках сетевой геометрии узлам модельных или реально существующих сетей ставятся в соответствие точки в пространствах с заданной метрикой – то есть в таких пространствах, где для каждой пары точек с координатами $\mathbf{r_1} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots x_n^{(1)})$ и $\mathbf{r_2} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots x_n^{(2)})$ можно рассчитать число $d(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = d(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1})$: расстояние между точками. Как мы знаем, в n-мерном евклидовом пространстве E^n это расстояние определяется теоремой Пифагора:

$$d^2(r_1, r_2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2$$

Однако существуют и *неевклидовы* пространства, для которых расстояние между точками определено иначе либо имеет другой смысл.

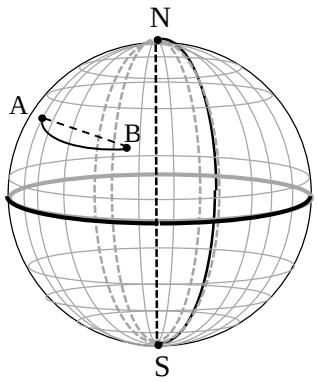


Рисунок 6.45. Линии на сфере

Наиболее известный пример неевклидова пространства – поверхность Земли в таких масштабах расстояний, где проявляется ее кривизна. В повседневной жизни мы считаем земную поверхность плоской: на расстояниях до десятков километров это не приводит к большим ошибкам. Для более удаленных точек А и В (сотни и тысячи км) земная поверхность аппроксимируется сферой – и это тоже приближение. Длина отрезка, соединяющего А и В под поверхностью сферы, уже заметно меньше длины дуги, проходящей между ними по поверхности (рис. 6.45).

В школьной стереометрии доказывается, что дуга на сфере, имеющая наименьшую длину, или отрезок *геодезической линии* – это часть *большого круга*, разрезающего сферу на две равные половины. Но такая дуга на сферической поверхности длиннее хорды, которая соединяет её концы – то есть у плоскости и у сферы разная *метрика*. Более того: если через две точки на плоскости можно провести только одну прямую линию (1-й постулат Евклида), то две противоположные точки сферы (например, северный и южный полюс Земли) можно соединить бесконечным множеством геодезических линий – в нашем примере меридианов.

Поверхность сферы единичного диаметра в трехмерном пространстве (см. разд. 2.2.2 главы 2) задается уравнением

(6.22 а) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Сфера – *выпуклая* геометрическая фигура: она лежит по одну сторону от касательной плоскости, проведенной в любой ее точке. Но помимо сферы (и ее обобщения – трехосного эллипсоида) в трехмерном пространстве существуют другие криволинейные поверхности 2-го порядка (гл. 2, разд. 2.2.2). В простейшем виде они задаются квадратичными формами:

(6.22 б) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ – однополостный гиперболоид вращения
(6.22 в) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ – двухполостный гиперболоид вращения
(6.22 г) $x^2 - y^2 = z$ – гиперболический параболоид (седло)

В отличие от сферы и эллипсоида, эти поверхности рассекаются любой касательной плоскостью на две части (см. Приложение П 3.2). В дифференциальной геометрии – разделе высшей математики, где геометрические объекты исследуют методами математического анализа – поверхности эллипсоидов имеют *положительную* кривизну. Кривизна сферы, заданной формулой (6.22 а), равна +1. Гиперболоиды вращения (6.223 б, в) и гиперболический параболоид (6.223 г) имеют переменную, в каждой точке отрицательную кривизну. Кривизна плоскости, как и любого n-мерного эвклидова пространства, равна нулю.

Кратчайшие линии на криволинейной поверхности называются *геодезическими линиями*. Длина отрезка геодезической линии – это и есть расстояние между ее концами, то есть двумя точками, в неевклидовом пространстве. Как из отрезков прямых на евклидовой плоскости, из отрезков геодезических линий можно составлять треугольники и другие геометрические фигуры. Угол между пересекающимся линиям (а также любыми пересекающимися кривыми) – это угол между касательными к этим линиям в точке пересечения. Для внутренних углов треугольника α, β и γ на произвольной поверхности справедливы соотношения

(6.23 а) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (т.е. 180°) на евклидовой плоскости
(6.23 б) $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ на эллиптической поверхности – в частности, на сфере
(6.23 в) $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ на гиперболической поверхности

В общем случае имеется три типа n-мерных пространств с заданными в них метриками: евклидовы E^n и два типа неевклидовых: *эллиптические пространства* S^n с положительной кривизной и *гиперболические пространства* H^n с отрицательной кривизной*. Как и в геометрии Евклида, в неевклидовых пространствах расстояние d_{12} между точками, заданными векторами $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ с координатами $(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})$ (где k = 1 или 2) определяется через скалярное произведение[10]

$$d_{12} = (\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = x_1^{(1)}x_1^{(2)} + x_2^{(1)}x_2^{(2)} + \cdots x_n^{(1)}x_n^{(2)}$$

(см. разд. 3.1 главы 3). На сфере единичного радиуса

(6.24 а) $$(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = \cos d_{12}$$

(откуда следует обычное выражение $(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) = r_1 r_2 \cos\alpha$ для евклидова пространства с нулевой кривизной). В гиперболическом псевдоевклидовом пространстве (гл. 3, разд. 3.5)

(6.24 б) $$(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}) = -x_1^{(1)}x_1^{(2)} + x_2^{(1)}x_2^{(2)} + \cdots + x_n^{(1)}x_n^{(2)} = -\mathrm{ch}\, d_{12}$$

Формула (6.24 б) может служить определением *гиперболических функций* (табл. 6.8):

* Гиперболические пространства также называются *пространствами Лобачевского* в честь одного из основателей неевклидовой геометрии. Российский математик Николай Иванович Лобачевский в 1829 г. первым в мире опубликовал систематический вывод новой геометрии, основанный на отказе от 5-го постулата Евклида, или *аксиомы параллельности*: через произвольную точку плоскости, не лежащей на заданной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную заданной. В пространствах Лобачевского через точку, не лежащую на заданной геодезической линии («прямой»), проходит бесконечное множество геодезических линий, не пересекающихся с заданной («параллельных» ей).

Таблица 6.8

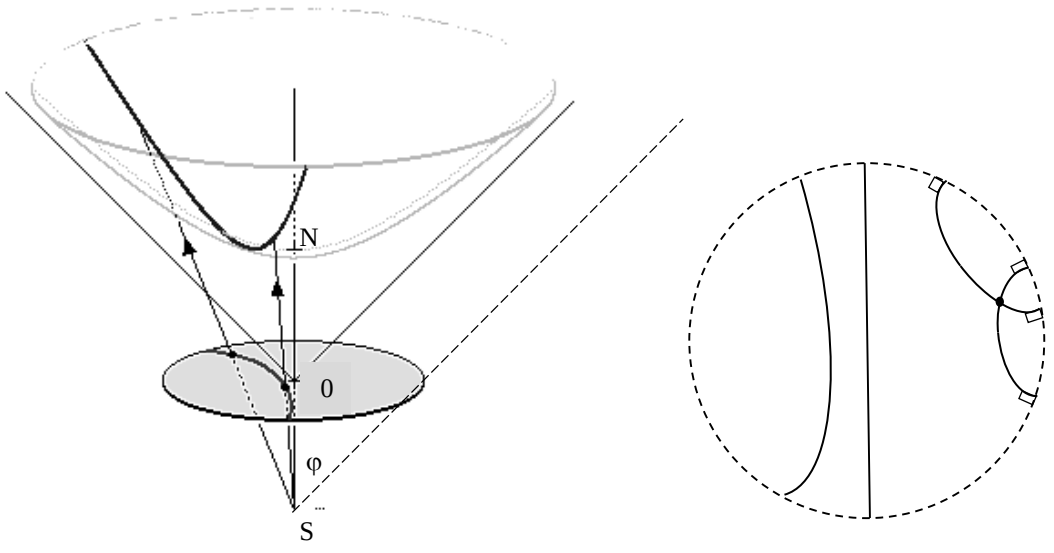
Гиперболические функции

Название	Обозначение	формула
гиперболический синус	sh *x*, sinh *x*	$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
гиперболический косинус	ch *x*, cosh *x*	$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
гиперболический тангенс	th *x*, tanh *x*	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
гиперболический котангенс	cth *x*, cotanh *x*	$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

(откуда следуют th x = sh x/ch x, ch^2 x – sh^2 x = 1 и другие соотношения гиперболической тригонометрии).

Из формулы (6.24 б) следует, что точки с почти равными, но большими значениями гиперболических координат могут находиться на большом расстоянии друг от друга, тогда как возле начала координат все точки гиперболического пространства сближены. Это позволяет описать наличие узлов-концентраторов и кластеризацию сложных сетей на естественном математическом языке. Для этого узлы сетей изображают точками в гиперболическом пространстве и устанавливают связи между точками, близкими в смысле «гиперболических» расстояний между ними. Так, регулярное дерево в порядком всех вершин, равным k, «вкладывается» в k-мерное гиперболическое пространство H^k. Примером гиперболического пространства, который нам уже встречался, служит пространство Минковского, на котором основаны соотношения релятивистской физики (разд. 3.5 в гл. 3).

Зрительным образом гиперболической плоскости H^2 служит *конформная модель* на круге, или *диск Пуанкаре* (рис. 6.46). Эту красивую геометрическую конструкцию создает *стереографическая проекция* точек одной из двух поверхностей двухполостного гиперболоида вращения в обычном трехмерном пространстве (см. Приложение П3) на плоскость $z = 0$. Каждой точке (x, y, z) гиперболической поверхности на этом круге соответствует точка, в которой отрезок, проведенный к ней из точки (0, 0, –1), пересекает плоскость $z = 0$ (рис. 6.46 а)*.



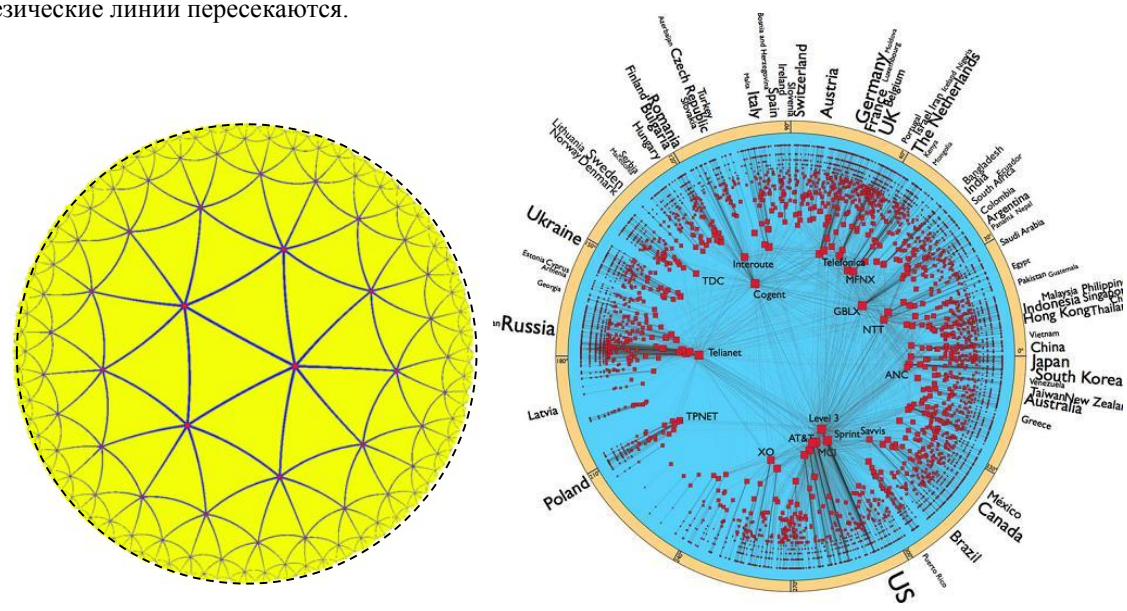
(а) (б)

Рисунок 6.46. Диск Пуанкаре: (а) построение через стереографическую проекцию поверхности двуполостного гиперболоида вращения, (б) абсолют (штриховая окружность) и линии на круге

* Описание стереографической проекции можно найти в руководствах по высшей математике, почти во всех учебниках кристаллографии или по запросу в сети Интернет.

По схеме построения конформной модели на рис. 6.46 а можно видеть, что прямые линии, образующие угол $\varphi > 45^o$ с осью z в обычном трехмерном пространстве, не пересекаются с гиперболической поверхностью. Образы точек гиперболоида на плоскости «сгущаются» с приближением к выделенному на рисунке кругу $\varphi = 45^o$, в который отображается асимптотический конус. На этом круге, который называется *абсолют*, лежат все бесконечно удаленные точки. Геодезические линии на поверхности гиперболоида проектируются на абсолют в виде его диаметров, то есть отрезков прямых (линии, проходящие через начало координат) и дуг окружностей, пересекающих абсолют под прямым углом.

На рис. 6.46 б видно, что через точку, не лежащую на геодезической линии, в геометрии Лобачевского проходит бесконечное множество других геодезических линий, перпендикулярных абсолюту, которые с ней не пересекаются. Так выглядят аналоги бесконечного множества прямых, параллельных заданной прямой и проходящие через не лежащую на ней точку (другой вариант 5-го постулата Евклида) на гиперболической плоскости. В пространствах с эллиптической геометрией – например, на поверхности сферы – все геодезические линии пересекаются.



(а) (б)

Рисунок 6.47. (а) Конформная проекция бесконечной «треугольной» решетки на гиперболической плоскости. (б) Схема Интернет в гиперболических координатах: узлы – автономные сети, связи – обмен данными (DKLab, Network Science Institute, Northwestern University, https://www.dk-lab.net/research.html?id=1). См. также M. Boguna, *et al.*, Nature Reviews Physics, 2021, 3, 114

На диске Пуанкаре изображают графы (рис. 6.47 а) и сети (рис. 6.47 б) в проекции из «естественного» для них k-мерного гиперболического пространства H^k на гиперболическую плоскость H^2. Корректное придание узлам реальных сетей *скрытых* гиперболических координат (алгоритм которого в литературе не представлен) может существенно упростить процедуру навигации. Хотя физический смысл неевклидовых метрик, лежащих в основе теории относительности, применительно к Интернет не обсуждается, наличие у сетей предельной (и не очень большой) скорости распространения информации неоднократно отмечалось в литературе. В работе* точками в пространстве-времени Минковского представляли ориентированные графы цитирования научных статей, где каждому узлу соответствует дата публикации.

Литература к разделу 6.3

[9] Е.Г. Алексеев, С.Д. Богатырев, *Информатика. Мультимедийный электронный учебник* – Саранск: Мор. Гос. Ун-т, 2009, https://inf.e-alekseev.ru/

[10] Д.В. Алексеевский, Э.Б. Винберг, А.С. Солодовников, *Геометрия пространств постоянной кривизны*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1988, т. 29, 5.

* J.R. Clough, T.S. Evans, PLoS ONE 2017, **12**(11): e0187301.

6.4. Фазовые переходы в сетевых структурах

«Фазовыми переходами» в математическом описании графов и сетей называют широкий класс явлений со значительными изменениями интегральных параметров графа. К ним нередко относят возникновение гигантского связного компонента в алгоритме построения графов Эрдеша-Реньи, перколяцию вершин или ребер, возникновение эпидемий и родственные динамические процессы на сетях – такие как распространение мнений или коррупции в обществе, которые также описывают эпидемиологическими моделями (см. далее главу 9). В этом разделе мы рассмотрим процессы на сетях, более близкие к физическим фазовым переходам: кооперативные изменения состояния узлов, разрыв и образование связей, а также сочетание этих процессов, называемое *коэволюцией* узлов и сетевых структур.

Термодинамические модели

При «термодинамическом» описании сетей каждому ребру, соединяющему вершины графа, приписывают определенную стабилизирующую (отрицательную) энергию ε_0. Внешнее шумовое воздействие, способное приводить к разрыву ребер, рассматривается как аналог температуры T. По аналогии с физической многочастичной системой, совокупность всех возможных структур с N вершинами и M ребрами (реализаций случайного графа) называется *каноническим ансамблем*. Для такого ансамбля при заданных ε_0 и T можно рассчитать *статистическую сумму* (в физической химии называемую *суммой по состояниям*)

$$Z(T) = \sum_\alpha n_\alpha \exp(-E_\alpha/T) = \sum_\alpha \exp(-F_\alpha/T), \tag{6.25}$$

где $E_\alpha = M\varepsilon_0$ – «энергия» графа, n_α – число структур с данной энергией, $F_\alpha = E_\alpha - TS_\alpha$ – потенциал Гельмгольца (см. разд. 2.3 главы 2), $S_\alpha = \ln n_\alpha$ – энтропия, с суммированием по всем неизоморфным графам в ансамбле (см. разд. 3.4 в главе 3).

Формула (6.25) соответствует термодинамическому потенциалу статистической физики с единичной константой Больцмана. Вероятность реализации определенного ансамбля с энергией E_α в этом случае равна

$$P(T) = (n_\alpha/Z)\exp(-E_\alpha/T)$$

Повышение «температуры», как стохастического дестабилизирующего воздействия, приводит к разрыву связей и уменьшению средней степени вершин. Для случайных графов Эрдеша-Реньи с приближением к $\langle k\rangle = 1$ происходит распад гигантского связного компонента, что и было заново названо фазовым переходом (см. п. 6.2.1 в этой главе) в термодинамических моделях сетей в начале 2000-х гг.

В безмасштабных графах и сложных сетях случайное удаление большой доли ребер, как отмечалось выше, не приводит к распаду структуры. Моделирование «охлаждения» классического случайного графа методом Монте-Карло (разд. 3.4 в гл. 3) с оценкой энергии $E = -\sum k_i \ln k_i$ воспроизвело фазовый переход 2-го рода в связную сеть из соединенных подграфов-звезд и затем переход 1-го рода в полный граф (рис. 6.48). Позднее интересы

исследователей сместились к целенаправленным воздействиям, сильно изменяющим интегральные характеристики («топологию») сетей.

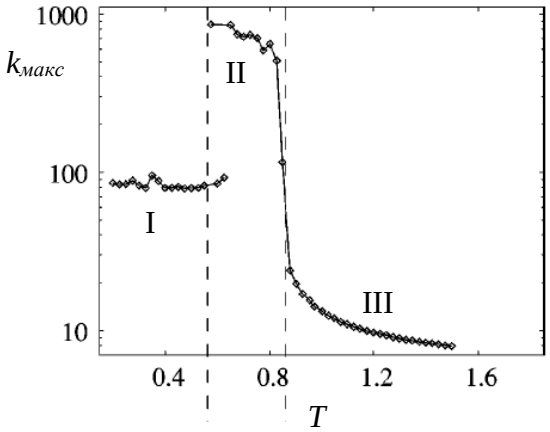


Рисунок 6.48. «Топологические» фазовые переходы в рамках термодинамической модели: I – полный граф, II – связный граф с подграфами-звездами, III – классический случайный граф (по G. Palla, et al., *Phys. Rev. E*, 2004, 69 (4), 046117)

Модель Изинга на сетях

В модели Изинга (разд. 3.4 главы 3) переходу из парамагнитной фазы в ферромагнитную соответствует предпочтительная ориентация спинов в узлах регулярной решетки. В рамках этой модели энергия решетки во внешнем магнитном поле H выражается суммой

(6.26) $$E = -J\sum_{i,j} s_i s_j - H\sum s_i,$$

где $\{s_i = \pm 1\}$ – «спины» атомов в узлах, J – константа обменного взаимодействия. Первое слагаемое соответствует суммарной энергии взаимодействия каждого узла с его ближайшим окружением (см. формулу (3.71) в главе 3).

На двумерной квадратной решетке модель Изинга имеет точное решение. Предпочтительная ориентация спинов достигается при температуре ниже критической точки T_c, когда энергия k_BT «теплового движения», переворачивающего спины (где k_B – константа Больцмана), становится меньше абсолютного значения суммы (6.26). Это пример фазового перехода 2-го рода, при котором средний магнитный момент $\langle M\rangle$ непрерывно возрастает с понижением температуры $T < T_c$. Значение $\langle M\rangle$, характеризующее состояние системы, называется *параметром порядка*. Вблизи критической точки $\langle M\rangle \sim (T_c - T)^{\alpha}$, где α – критический параметр (см. рис. 3.42 б).

Условия фазовых переходов и значения критических параметров в более сложных системах, начиная с трехмерных кубических решеток, получают компьютерным моделированием. При размещении «спинов» в вершинах графов в отсутствие внешнего поля формула (6.26) принимает вид

$$E = -\sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j = -J\sum A_{ij} s_i s_j,$$

где $\{A_{ij}\}$ – элементы матрицы смежности графа.

Результаты расчетов модельных систем показали сильную зависимость динамики перехода от структуры графа и распределения вероятностей степеней вершин $P(k)$. В частности, безмасштабные сети $P(k) \sim k^{-\gamma}$ с показателем степени $\gamma \leq 3$, то есть с широким распределением степеней узлов, при любой температуре «ферромагнитно упорядочены», тогда как при расположении спинов на деревьях упорядоченное состояние отсутствует: $T_c = 0$. Расположение спинов на сетях исследуется в физике аморфных магнитных материалов (*фаз Гриффитса*), а также при моделировании нейронных сетей мозга и других неоднородных сетевых структур. Различные модификации моделей Изинга и Поттса используют в исследованиях распространения мнений, которые будут обсуждаться далее в 9-й главе.

Синхронизация узлов сети

Переход агентов, занимающих вершины графа, к согласованным действиям в литературе также называется *динамическим фазовым переходом*. Примерами могут служить совместное движение «живых частиц», ритмические аплодисменты или возникновение «мексиканской волны» на трибунах стадиона, которые обсуждались в предыдущей главе. Еще одним его проявлением в «цветных революциях» 2010-х годов стали коллективные прыжки участников протестных митингов. Массовые синхронные действия, как инструмент манипуляции людьми, имеют многовековую историю (например, строевая подготовка в армиях всего мира, направленная на «укрепление коллективизма» – то есть на подавление индивидуального сознания). В серии физических исследований, начатых во второй половине XX века, был разработан единый механизм синхронизации в социальных, биологических, химических и даже механических системах, который не предполагает наличие сознания у агентов.

Примеры «бессознательной» настройки взаимозависимых периодических процессов включают синхронизацию маятниковых часов или метрономов на общей опоре, стрекот кузнечиков, пение цикад, электрические колебания (ритмы) коры головного мозга и многие другие кооперативные явления. Известное нам уравнение гармонического осциллятора (разд. 2.2 гл. 2) $\varphi = \sin(\omega t + \theta)$ содержит переменную фазу $\varphi(t)$ (которая отражает его состояние), постоянную угловую частоту ω и начальную фазу θ. Два независимых осциллятора с одинаковой частотой $\omega_1 = \omega_2$ и разными начальными фазами θ_1 и θ_2, очевидно, будут колебаться с постоянным фазовым сдвигом $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = \text{const}$. Если же антикварные часы-«ходики» с маятниками разной длины и массы, периоды колебаний которых несколько различны (а значит, $\omega_1 \neq \omega_2$ – см. главу 2), повесить рядом на стене, через некоторое времяня их маятники будут качаться «в фазе» ($\Delta\theta = 0$) – это экспериментальный факт. Из курса общей физики мы знаем, что частота вынужденных колебаний осциллятора может отклоняться от его собственной частоты (глава 2, рис. 2.8). Маятники с близкими собственными частотами, которые влияют друг на друга через колебания общей опоры, постепенно приходят к некоторой средней частоте: они *синхронизируются*.

Фазы двух независимых осцилляторов с разными частотами $\varphi_1 = \omega_1 t$ и $\varphi_2 = \omega_2 t + \Delta\theta$ (мы приравняли начальную фазу первого осциллятора к нулю) линейно зависят от времени. Они удовлетворяют простейшим дифференциальным уравнениям.

(6.27) $$d\varphi_1/dt = \omega_1 \quad \text{и} \quad d\varphi_2/dt = \omega_2$$

Если же колебания осцилляторов связаны, в уравнения (6.27) следует добавить их взаимодействие:

(6.27 а) $$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 + K\sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$
$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 - K\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \omega_2 + K\sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Мы предполагаем, что поправка на взаимодействие осцилляторов равна нулю «в фазе» ($\varphi_1 - \varphi_2 = 0$) и максимальна «в противофазе» ($\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$), а разность фаз действует на осцилляторы с противоположным знаком. Это и дает поправку в виде синусоидальной функции в уравнениях (6.27 а). Множитель K перед синусом отражает интенсивность взаимодействия осцилляторов: он называется *константой связи* (англ. coupling constant). Вычитая в (6.27 а) нижнее уравнение из верхнего и обозначая разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = \phi$, окончательно получим

(6.27 б) $$\frac{d\phi}{dt} = \omega_1 - \omega_2 - 2K\sin\phi.$$

Для синхронизации осцилляторов уравнение (6.27 б) должно иметь ограниченное решение $\phi(t\to\infty) = \text{const}$. Для этого его правая часть должна быть отрицательной, иначе решение $\phi(t\to\infty) \sim t$ будет расходящимся. А так как $-1 \le \sin\phi \le 1$, для согласованных колебаний осцилляторы должны быть достаточно сильно связаны:

(6.27 в) $$K = |\omega_1 - \omega_2|/2$$

Однако при $\omega_1 \approx \omega_2$ для синхронизации осцилляторов достаточно небольшой константы связи. Возвращаясь к практической задаче – среди участников демонстраций и митингов преобладает молодежь со средним физическим развитием и слабым критическим мышлением: заставить такую толпу дружно подпрыгивать не так уж трудно.

Модель Курамото, предложенная в 1975 г., состоит из N взаимосвязанных гармонических осцилляторов, частоты которых $\{\omega_i\}$ распределены вокруг среднего значения ω_0. Степень связи осцилляторов определяет константа K. Динамику колебаний отражает система N дифференциальных уравнений, очень похожих на уравнения (6.27 а):

(6.28) $$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\varphi_i - \varphi_j),$$

где $\{\varphi_i\}$ – фазы осцилляторов. Суммирование выполняется для всех пар осцилляторов. Распределение их собственных частот задает функция $f(\omega)$.

В пределе $N\to\infty$ функцию $f(\omega)$ можно считать непрерывной. В такой системе может происходить частичная синхронизация: некоторые осцилляторы будут колебаться с общей частотой, близкой к ω_0, тогда как другие останутся с собственными частотами. Степень синхронизации (*когерентности*) отражает комплекснозначный параметр порядка

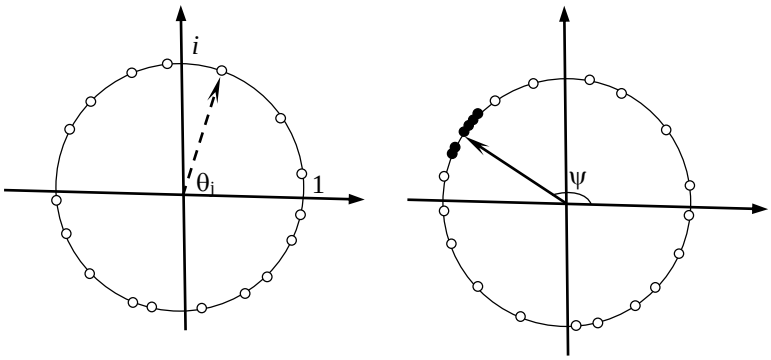
(6.29) $$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\varphi_j(t)}$$

Показатель степени $\psi(t)$ комплексного числа в левой части формулы (6.29) можно считать средней фазой системы осцилляторов, а его действительный модуль $r(t)$ показывает глубину их синхронизации.

Как мы знаем (см. разд. 3.1 в гл. 3), комплексные числа $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ в тригонометрической форме можно изобразить точками на окружности единичного радиуса в комплексной плоскости (рис. 6.49). Фазе φ_j каждого осциллятора соответствует угол между направлением на точку из начала координат и действительной осью. Если осцилляторы колеблются несинхронно (не когерентны), точки их фаз стохастически распределены по окружности (незакрашенные точки на рис. 6.49 а). Для бесконечно большого число точек N средняя фаза и параметр порядка равны нулю:

$$\psi = 0 \text{ и } r = 0, \text{ то есть } re^{i\psi} = 0.$$

Если же фазы некоторых осцилляторов $\{\varphi_i\}$ изменяются синхронно, их разности фаз можно приравнять к нулю. Эти осцилляторы, условно показанные черными точками на комплексной окружности (рис. 6.49 б), колеблются с одинаковой частотой: они когерентны. Таким образом, $0 < r(t) < 1$.



(а) (б)

Рисунок 6.49. Фазы осцилляторов Курамото на комплексной плоскости: случайные –незакрашенные точки, синхронизированные – черные точки (см. [7] в списке литературы)

Частичная синхронизация осцилляторов в модели Курамото достигается выше критической константы связи

$$K_c = \frac{2}{\pi f(\omega_0)}$$

Модуль параметра порядка r вблизи этого значения возрастает подобно среднему магнитному моменту (также параметру порядка!) для «бесструктурной» модели Изинга на полном графе:

$$r \sim \sqrt{K - K_c}$$

Модель Курамото также бесструктурна: осцилляторы в ней можно считать расположенными в вершинах полного графа, все связи между ними одинаковы. Для описания осцилляторов в узлах сети, аналогично модели Изинга (формула (6.26)), в уравнения (6.28) вводятся элементы матрицы смежности $\|A_{ij}\|$

(6.30) $$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\sin(\varphi_i - \varphi_j) + \eta(t)$$

В уравнениях (6.30) учитывается стохастическое возмущение (шум) $\eta(t)$. Расчеты с разными типами сетей, по аналогии с моделью Изинга, выявили сильное влияние узлов-концентраторов: на безмасштабных сетях когерентность устанавливается значительно быстрее, чем на классических случайных графах (Рис. 6.50). В то же время на регулярных бесконечных решетках, в отличие от модели Изинга, динамический фазовый переход отсутствует: осцилляторы с узким распределением частот не синхронизируются. Шумовой терм $\eta(t)$ способствует синхронизации по механизму стохастического резонанса (см. разд. 4.4.1 главы 4).

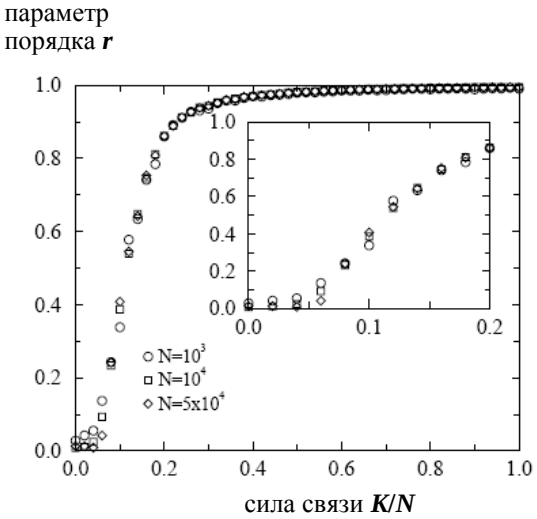


Рисунок 6.50. Синхронизация осцилляторов Курамото на модельных безмасштабных сетях: $P(k) \sim k^{-3}$, $\langle k\rangle$=6. Врезка: критическое значение K_c/N=0.05 (Y. Moreno, A.F. Pacheco , Europhys. Lett., 2004, 68, 603)

Обширные приложения модели Курамото включают энергетические и технологические сети, синхронизацию химических и биохимических осцилляторов, нейронные сети мозга. По осцилляторам Курамото на сложных сетях имеется подробный современный обзор[11].

6.4.1. Взаимодействие процессов в сетях. Ко-эволюция

Большое внимание в исследованиях сетей уделяется динамике параллельно протекающих и взаимно зависимых процессов, или *коэволюции* (англ. co-evolution; термин впервые появился в эволюционной биологии). В большой серии работ из этой области рассматривается распространение (перколяция) двух разных состояний узлов в неизменной сетевой структуре. Так моделируется распространение двух инфекций и другие динамические процессы, описываемые моделями эпидемиологии: распространение коррупции, моды или политических предпочтений в обществе.

В математическим моделях распространения инфекции на сетях (см. разд. 6.3) эпидемия возникает выше порога перколяции как рост гигантского связного кластера зараженных узлов (см. рис. 6.30). Этот процесс определяется вероятностью перенесения инфекции между узлами (*контагиозностью*) λ, которая, в свою очередь, зависит от вероятности заражения и выздоровления (формулы (6.16) и (6.17)). Подобно фазовым

переходам в моделях Изинга и Курамото, перколяция узлов является непрерывным фазовым переходом 2-го рода. Порог заражения $\lambda^{(c)}$ зависит от механизма (т.е. математической модели) и от строения сети.

При распространении двух инфекции на одном субстрате заражение узлов одной из них может как способствовать, так и препятствовать развитию второй эпидемии. В простейших *кооперативных* моделях обе инфекции одинаково распространяются по незараженным узлам ($\lambda_{II} = \lambda_I$) тогда как для узлов, зараженных одной из инфекций, контагиозность второй повышается ($\lambda'_{II} > \lambda'_I$). (Это соответствует снижению общего иммунитета у зараженных организмов, а также политизации населения под воздействием пропаганды, втягиванию подростков в криминальную деятельность и мн. др.). При этом узлы, «переболевшие» одной из инфекций в механизме распространения SIR (см. разд. 6.3), не приобретают иммунитета ко второй. В таких моделях на субстрате может протекать «разрывный» фазовый переход 1-го рода с появлением устойчивых связных компонентов из двукратно зараженных узлов. Тип перехода определяется величиной $\lambda'_{II}/\lambda'_I > 1$ и строением сети; кластеризация узлов и повышение их среднего порядка $\langle k \rangle$ облегчает переходы 1-го рода.

В *конкурентных* эпидемиологических моделях каждый узел сети может быть заражен только одной из двух инфекций (например, близкими штаммами ОРВИ, на которые организм вырабатывает совместный иммунитет). Таким образом, за счет уменьшения числа доступных узлов, заражение инфекцией I повышает устойчивость сети к инфекции II, и наоборот. Пороги распространения инфекций I и II оказываются взаимозависимыми. Это проявляется как увеличение порога перколяции при наличии «конкурирующей» инфекции в сети – а также, например, альтернативной идеологии в обществе.

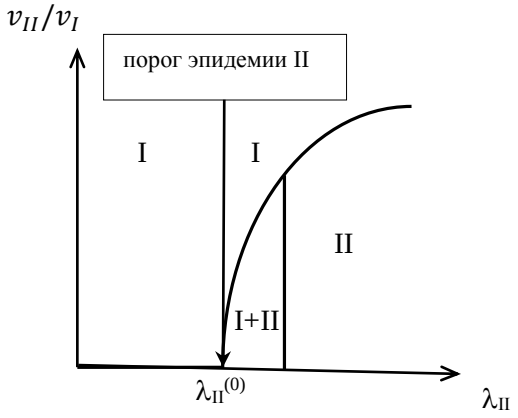


Рисунок 6.51. Две конкурирующие инфекции I и II на случайной сети, модель SIR, $\lambda_I = \text{const} > \lambda_I^{(0)}$ (B.Karrer, M.E.J.Newman, *Phys. Rev.* E 84, 2011, 036106)

Совместная динамика инфекций I и II определяется как их контагиозностью λ_i, так и скоростью распространения v_i. В характерном исследовании распространения двух инфекций (I, II) по схеме SIR (*модель Рида-Фроста*) все зараженные I или II узлы «выздоравливали», приобретая бессрочный иммунитет к обеим инфекциям. На рис. 6.51 показано сечение фазовых поверхностей в пространстве параметров (λ_I, λ_{II}, v_{II}/v_I<1) (инфекция II – более «медленная») плоскостью λ_I = const, проходящей выше порога эпидемии $\lambda_I^{(0)}$. Сечение имеет вид перколяционной кривой с критической точкой $\lambda_I^{(0)}$, слева от которой лежит область эпидемии «быстрой» инфекции I. Вертикальная линия $\lambda_{II} = \lambda_{II}^{(1)}$,

или *порог доминирования*, разделяет область под кривой на сосуществование инфекций I и II (ближняя область справа от линии) и преобладающей эпидемии II (дальняя область справа), где инфекция I занимает лишь малую долю узлов.

В более сложные эпидемиологических механизмах рассматривают *многослойные сети*, где разные инфекции распространяются по разным типам ребер в заданном множестве вершин. Так, в модельном фрагменте двухслойной сети $G(V, E_A, E_B)$ на рис. 6.52 множество вершин V соединяют «черные» ребра E_A и «красные» ребра E_B; каждый тип ребер пропускает лишь одну из двух инфекций. (Этот же граф можно изобразить, наложив множества черных и красных ребер на один набор вершин – но такое представление менее наглядно). Множествами $G_A(V, E_A)$ и $G_B(V, E_B)$ задаются подграфы, по которым, соответственно, распространяются инфекции I и II. В модели SI_1SI_2S (распространение двух конкурирующих инфекций I и II с относительной контагиозностью λ_I, λ_{II} по механизму SIS) порог эпидемии каждой из них в присутствии второй инфекции повышается. На перколяционных кривых каждой инфекции выделяются область ее подавления либо полного отсутствия (A), область преобладания, или эпидемии (C) и область сосуществования двух инфекций (B) (Рис. 6.53 а).

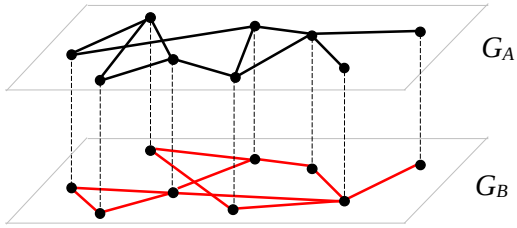
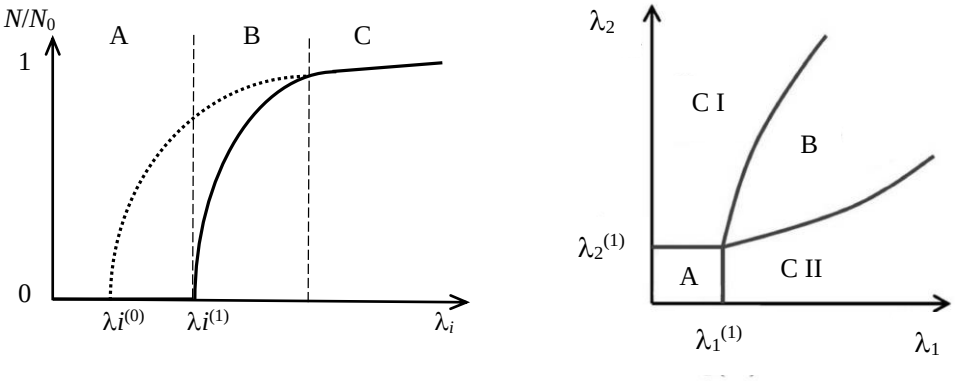


Рисунок 6.52. Схема двухслойной сети $G(V,E_A,E_B)$. Инфекция I распространяется только в слое G_A, инфекция II – только в слое G_B

Фазовая диаграмма распространения инфекций по двухслойной сети в рамках данной модели разбивается на четыре поля: A – отсутствие инфекций, C I и C II – преобладание (эпидемия) одной из двух и B – сосуществование двух инфекций (Рис. 6.53 б). На однослойной сети ($G_A = G_B$) в этих приближениях область сосуществования отсутствует. Процессы совместного распространения инфекций на сложных сетях детально рассмотрены в литературе, см. обзор[12].

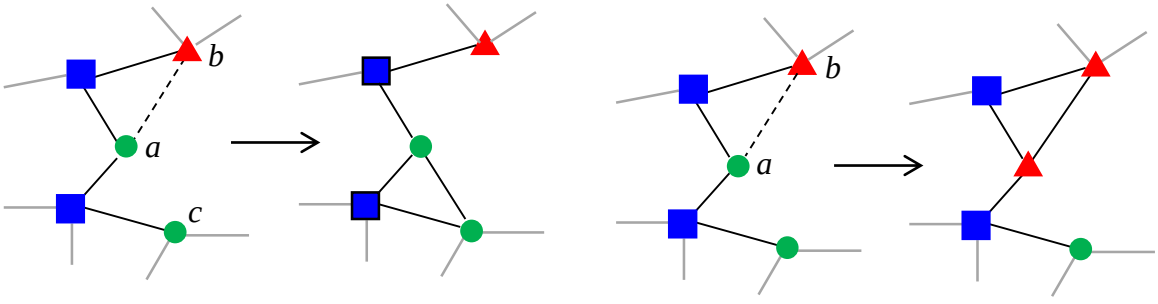
В другом классе моделей изменение состояний узлов сети с некоторой заданной вероятностью приводит к перераспределению ребер (rewiring). В этом случае перестройка графа («фазовый переход») происходит не из-за стохастического воздействия шума («температуры»), как обсуждалось выше, а в результате изменения параметров его вершин. Такие модели отходят от последовательной «статистической физики сетей» в сторону агентного моделирования по произвольным правилам. Так, в моделировании *диффузии инноваций* (см. разд. 2.1 главы 2) на сетях перераспределение связей внутри сети с их предпочтительным разрывом между разными агентами и соединением одинаковых агентов (англ. homophily) предсказуемо приводит к распаду сети на связные компоненты «новаторов» и «консерваторов». Тем не менее, модели коэволюции широко применяются в междисциплинарной физике – особенно в ее социологических и политологических приложениях.



(а) (б)

Рисунок 6.53. (а) Кривые заражения в отсутствие второй инфекции (порог $\lambda_i^{(0)}$, точки) и при совместном распространении I и II (порог $\lambda_i^{(1)}$, сплошная линия) в модели SI_1SI_2S, i = I, II. (б) Фазовая диаграмма SI_1SI_2S: A – отсутствие эпидемий, C I – эпидемия I, C II – эпидемия II, B – сосуществование инфекций I и II (по F.D. Sahneh, C.M. Scoglio, *Phys. Rev.* E 89, 2014, 062817)

Коэволюцией узлов и связей сети часто моделируют формирование общественного мнения. В одной из первых работ в этой области числовой параметр «мнений» ($g_i = 1, 2, \ldots, m$) случайным образом распределялся по N вершинам исходного графа Эрдеша-Реньи со небольшим средним порядком вершин K. Далее в последовательных шагах компьютерного моделирования у каждой вершины (имеющей параметр g_i) с вероятностью p удаляли случайно выбранное ребро и присоединяли ее новым ребром к другой вершине с тем же параметром g_i (rewiring). С вероятностью $1–p$ вместо перераспределения связей у вершин, соединенных ребром, устанавливались одинаковые параметры «мнений» (рис. 6.54). В возникающих динамических сетях KN связей стохастически перераспределялись между N узлами, а связанные узлы «выравнивали» свои параметры $\{g_i\}$.



(а) вероятность p (б) вероятность $1–p$

Рисунок 6.54. Процедура коэволюции вершин и ребер на фрагменте графа. «Внешние» ребра показаны серым цветом, узлы разной формы имеют разный параметр «мнения». (а) Выделенное ребро *a–b* между вершинами с разным параметром заменяется ребром *a–c* между одинаковыми вершинами. (б) Ребро *a–b* остается; вершина *a* приобретает тот же параметр, что и вершина *c* (по P. Holme, M.E.J. Newman, Phys. Rev. E74, 2006, 056108)

В случае $p = 0$ на неизменном графе перераспределяются только параметры вершин; при $p = 1$ перераспределяются ребра между вершинами с неизменными параметрами. В промежуточных случаях возникал набор не связанных друг с другом случайных кластеров

с одинаковым «мнением» в каждом узле. Вблизи $p = 0.5$ образуется гигантский связный компонент с одним преобладающим мнением, или состояние *консенсуса*.

В других исследованиях этой области использовались непрерывные параметры «мнений», взвешенные ориентированные графы (показывающие направление и силу влияний агентов), многослойные сети, перемещение агентов на географическом ландшафте и другие приближения. Бинарными параметрами ± 1 характеризовались состояния как узлов, так и ребер графа. Для состояний соединенных вершин «+ +» или «– –» «положительную» связь считают насыщенной, «отрицательную» ненасыщенной, или дестабилизирующей; насыщенная отрицательная связь соединяет разноименные вершины («+ –» или «– +»). Ко-эволюция в таких «расстроенных» сетях (англ. frustrated) фактически направлена к понижению энергии. Модели эволюции мнений и влияния агентов в сетевых структурах будут далее обсуждаться в главе 9.

Литература к разделу 6.4

[11] F.A. Rodrigues, *et al.*, *The Kuramoto model in complex networks,* Physics Reports, 2016, **610**, 1.
[12] W. Wang, *et al.*, *Coevolution spreading in complex networks*, Physics Reports, 2019, **820** (2) 1.

Рекомендуемая литература

1. Ф. Харари, *Теория графов* (пер. с англ.), 6-е изд. М.: URSS, 2023.
2. В.Н. Бурков, А.Ю. Заложнев, Д.А. Новиков, *Теория графов в управлении организационными системами*, М.: Синтег, 2001.
3. Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс, *Спектры графов: теория и применение* (пер. с англ.), Киев: Наукова думка, 1984.
4. Ю.М. Плотинский, *Теоретические и эмпирические модели социальных процессов*, М.: Логос, 1998.
5. Д.А. Губанов, Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*, 3-е изд., М.: МЦНМО, 2018.
6. A.-L. Barabasi, *Network Science*, Cambridge University Press, 2016.
7. S.N. Dorogovtsev, *Lectures on Complex Networks*, Oxford University Press, 2010.
8. A. Fornito, A. Zalesky, E. Bullmore, *Fundamentals of Brain Network Analysis*, Elsevier, 2016.
9. Ю.Ю. Тарасевич. *Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. Учебное пособие.* М: URSS, 2018.
10. А.А. Романюха, *Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний*, М.: Бином, 2012.

ГЛАВА 7. ТЕОРИЯ ИГР В ОПИСАНИИ СОЦИУМА

Смотрит Мальчиш-Кибальчиш: и всё бы хорошо, да что-то нехорошо!
Аркадий Гайдар, «Военная тайна»

Определение игры. Платежная матрица. Примеры: орлянка, перекресток, камень-ножницы-бумага, семейный спор, дилемма бандита. Предпочтение и полезность. Доминируемые стратегии. Осторожные стратегии, максимин и минимакс. Оптимум Парето и равновесие Нэша. Смешанные стратегии. Игра полковника Блотто. Игры с непрерывным множеством стратегий. Аукционы. Позиционные игры. Игры с неполной информацией, «игра в меньшинство». Рефлексивные игры. Эволюционные игры. Коалиции. Ядро игры, вектор Шепли. «Устойчивые браки».

Математические отступления: (1) дискретная оптимизация и линейное программирование, (2) группы, (3) алгебры. «Тропическая алгебра» и теория игр.

В начале второй части мы перечислили фундаментальные особенности социальных систем: (1) их материальный и мультиагентный характер (2) не менее материальная, то есть объективно существующая конкуренция между агентами за ограниченные ресурсы и (3) столь же объективный обмен информацией, часто неосознанный – как между хищниками и их кормовой базой – из которого рождается распределенный интеллект системы. Попытки взять за основу одну из этих характеристик социума и только на ней построить его логически замкнутое описание неоднократно предпринимались, но не привели к большим успехам.

В двух предыдущих главах был представлен *социофизический* подход, применяющий к мультиагентным системам формальный аппарат статистической физики. В этой главе мы кратко рассмотрим математическое описание конкуренции в рамках теории игр и модели таких процессов, где она служит главной движущей силой. Оба подхода далее будут использоваться применительно к экономике и общественным наукам (главы 8 и 9). «Коллективный разум» социума, а также попытки соединить его с «физикой» и конкуренцией в единое описание социальных систем станут предметом последней части книги.

7.1. Введение: конкуренция как игра

Эти элементы проникают во все детали ведения войны и делают руководство военными действиями по сравнению с другими видами человеческой деятельности более остальных похожим на карточную игру.
К. Клаузевиц, «О войне»

Одной из ярких и при этом весьма формализованных моделей конкуренции в человеческом обществе служат азартные игры. В них индивидуумы, действуя по заранее установленным правилам, стремятся получить максимально возможный денежный (то есть *количественно измеряемый*) куш; выигрыш одного из игроков означает проигрыш других. Внутренняя близость правил картежных и прочих азартных игр (например, с бросанием кубика) к математике в конце XVIII века стимулировала появление теории вероятностей;

ее основные положения мы перечислим в следующей главе. В первой половине XX века тот же неиссякаемый источник повлиял на становление математической теории игр, а затем, в форме биржевой игры (интересы физиков обратились к ней в 1980-е годы, но технический анализ биржи возник гораздо раньше) – на зарождение *экономофизики*, которую мы также обсудим в гл. 8. Однако главной основой теории игр как раздела математики стали не рецепты выигрыша в покер, а формализация противостояния политических и военных систем: после II мировой войны эта задача приобрела особую актуальность. Для ее решения потребовалось «исчислять» действия, выработанные человеческим сознанием, и очертить круг ситуаций, для которых такие исчисления возможны. Поэтому модели и методы теории игр непосредственно входят в инструментарий современной «физики общества».

Теорией игр называется раздел прикладной математики, исследующий взаимодействия людей и социальных систем – прежде всего конфликты, в том числе такие острые, как военные действия. Уже на бытовом уровне очевидно, что для каждого шага игры характерна неопределенность исхода благодаря разнонаправленным действиям игроков, каждый из которых преследует собственные цели[*]. Поэтому теорией игр в узком смысле слова называется математическая теория принятия решений в конфликтных ситуациях. Однако, ввиду разнообразия динамики в социальных системах, под играми с середины XX века понимаются любые упорядоченные взаимодействия агентов, стремящихся увеличить свой выигрыш – в том числе включающие кооперацию. Это сближает теорию игр с задачами дискретной оптимизации, кратко упомянутыми в предыдущей главе, хотя область игр шире – в частности, действия игроков могут выражаться непрерывными количественными параметрами.

Мы начнем с простейшего представления игры как *упорядоченной конфликтной ситуации*, в которой каждый игрок стремится получить выигрыш за счет других игроков, при этом следуя установленным правилам – например, не разрешающим убить и ограбить других участников игры (но иногда это неточно). В представлении игры как математического образа конфликта используют такие составляющие:

(1) Множество пронумерованных *игроков* $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$; мы начнем со случая $n = 2$.
(2) Множество *стратегий* игроков, или ходов, которые они могут сделать в игре для достижения собственных целей. Множество стратегий i-го игрока обозначим $\{x^{(i)}_1, x^{(i)}_2, \ldots x^{(i)}_m\} = X^{(i)}$. Наборы стратегий у каждого игрока не обязательно конечны, кроме того, варианты действий у разных игроков могут быть разными. В стратегиях $\{X_j^{(i)}\}$ отражаются правила игры, по которым, например, игроку разрешается лишь один раз подбросить монету или кубик.
(3) Множество исходов игры, или выигрышей $\{R^{(i)}_k\}$ (от англ. rewards), которые каждый игрок получает в результате определенной комбинации ходов. Если игра строго следует правилам, это множество детерминировано, хотя во многих случаях его анализ, как в шахматах или го, через небольшое число ходов по силам только гроссмейстерам и суперкомпьютерам. Выигрыш может быть положительным, отрицательным (тогда в обыденной жизни он называется проигрышем) или нулевым. Каждый игрок выбирает ходы, который увеличат его выигрыш – но

[*] Многие азартные игры (карты, нарды, рулетка) включают случайные процессы: бросание кубика, тасование колоды и т.д. Стохастические воздействия также могут быть частью «математической» игры (см. далее).

комбинации независимых ходов всех игроков могут привести к очень разным результатам. Математическая задача теории игр – предсказать результаты всех возможных комбинаций ходов и выявить среди них оптимальные по тем или иным критериям.

Мы видим, что игра – это специфический тип агентной модели, где каждый агент-игрок g_i располагает набором своих возможных ходов X_i, который обычно называется множеством стратегий*. Таким образом, любую игру можно формально представить как совокупность трех абстрактных множеств: игроков G = $\{g_i\}$, их стратегий X = $\{X_j^{(i)}\}$ и выигрышей R = $\{R^{(i)}{}_k\}$, связанных определенными правилами.

(7.1) $$\Gamma = \{G, X, R\}$$

Для начала предположим, что число игроков, а также количества их стратегий и выигрышей конечны.

Из-за почти философской общности определения (7.1) для его использования в описании конкретных взаимодействий агентов нужна серьезная детализация. Учебники начинают с примеров игр, которые завершаются после того, как игроки – в простейшем случае их всего два – независимо друг от друга сделали по одному ходу. Такие игры называются *играми в нормальной форме*. В этом случае выигрыши агентов выбирают из множества R по заданным правилам игры исходя из *результата*

(7.1 а) $$X^{(1)} = \prod_{i=1}^{n} X_i^{(1)} \to \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$$

где алгебраический символ $\prod$ означает *произведение стратегий* (в обычном смысле – совокупность ходов $\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\}$, сделанных всеми агентами), а символ $x_i^{(1)}$ – выбор i-м агентом своего первого и единственного хода. Многоходовые игры (шахматы, шашки, домино) называют *играми в развернутой форме*; мы рассмотрим их далее.

Задача теории игр – предсказать исход взаимодействия агентов в заданных условиях, в частности, выигрыши и проигрыши всех сторон конфликта в заданной конфликтной ситуации. По постановке задач и используемому математическому аппарату теория игр примыкает к области *исследования операций*: разделу прикладной математики, посвященному управлению организационными системами в самых разных, не обязательно конфликтных условиях. В этом смысле и теория игр, и исследование операций относятся к социоинженерии; во всяком случае, их результаты широко применяются на практике.

* В простых примерах игр, которые будут обсуждаться в следующем разделе, «стратегиям» соответствуют доступные агентам действия, то есть ходы. Но это лишь частный случай: в политических и военных приложениях теории игр стратегии понимаются в их общем смысле как варьируемые, не вполне определенные наборы действий, ведущие к определенной цели.

Первое математическое отступление: задачи оптимизации

Математическая задача исследования операций – достижение максимума целевой функции f (**X, Y**), которая выражает качество либо эффективность («успешность») данной системы в зависимости от переменных величин, определяющих ее состояние:

$\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ – управляемые переменные
$\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_m)$ – неуправляемые переменные

(так, размер урожая определяется площадью поля, количеством удобрений, объемом и качеством работ – и неконтролируемой погодой). Наборы переменных, определяющих значения f, в общем случае представляют в виде векторов. Максимум целевой функции рассчитывают при ограничениях, наложенных на ее параметры – которыми отражаются ограниченные объемы ресурсов, используемых системой.

Общую задачу исследования операций можно записать в виде

(7.2 а) $$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rightarrow \max$$

при заданных ограничениях

(7.2 б) $g_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \leq b_i$, где $i = 1, \ldots, p$ – номер параметра

В разделе 1.4.1 главы 1 обсуждалась функция Кобба-Дугласа, выражающая зависимость продукции от агрегированных переменных труда (L) и капитала (K) с учетом бюджетных ограничений. В расчетах максимумов целевых функций переменные **X** и **Y**, а также величины используемых ресурсов выражают в реальных цифрах (выделенные фонды, объемы сырья, численность войск и т.д.).

ЗАДАЧА 7.1. Представить положительное число a суммой двух чисел так, чтобы произведение этих чисел было максимальным.

Решение

Обозначим одно из двух искомых чисел x, второе $a–x$. В этом простом случае целевая функция зависит от единственной переменной:

$$f = x(a-x) = ax-x^2 \rightarrow max$$

Максимум перевернутой параболы найдем дифференцированием:

$$df/dx = a-2x = 0, \text{т. е. } x = a/2$$

Ответ: $a/2 + a/2$

Поиск оптимума целевой функции при заданных ограничениях относится к задачам *математического программирования* (этот раздел прикладной математики не следует путать с составлением компьютерных программ). В простейшем случае функция f(**X**) линейна, а неконтролируемых переменных **Y** нет. Тогда условия (7.2 а, б) преобразуются в задачу *линейного программирования*

(7.3 а) $$f(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to max$$

при условиях

(7.3 б)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2, \\ &\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m, \end{aligned}$$

и всех $x_i \ge 0$. В некоторых случаях неравенства (7.3 б) заменяются строгими равенствами.

Задачи линейного программирования хорошо исследованы, для многих из них найдены решения. Если же в условиях (7.2 а б) f (**X**,**Y**) и $\{g_i(\mathbf{X},\mathbf{Y})\}$ – нелинейные функции, они определяют задачу *нелинейного программирования*, а когда эти функции изменяются во времени, определение оптимума $f(\mathbf{X},\mathbf{Y},t)$ называется задачей *динамического программирования*. В том случае, когда известны только вероятности значений неуправляемых переменных **Y**, задача относится к области *стохастического программирования*. Если компоненты **X** и **Y** – дискретные величины (в примере 7.1 этому соответствуют целочисленные *а*), формулы (7.2) относятся к задачам *дискретной оптимизации*, которые прямо пересекаются с областью теории игр.

В исследовании операций разные типы технических, экономических и социально-экономических проблем, включая проблемы управления организационными системами, нередко имеют собственные названия: задача о назначениях, транспортная задача, задача массового обслуживания, теория управления запасами, теория расписаний и другие. В большинстве практических приложений целевую функцию оптимизируют по набору дискретных переменных. С математической точки зрения это сложнее, чем поиск минимума либо максимума непрерывной функции в непрерывной области ее аргументов (что достигается дифференцированием). Одной из фундаментальных проблем, не имеющих общего решения, является составление целевой функции, которая отражает состояние системы; здесь часто привлекают специалистов в экономике и психологии.

Второе математическое отступление: теория групп

Абстрактные соотношения (7.1) и (7.1 а) у читателей, не работающих в математике, могут вызвать естественный протест: в самом деле, что нового и полезного мы получаем из замены слов «агенты», «стратегии» и «выигрыши» буквами? Чтобы иллюстрировать смысл этого шага, рассмотрим одну формальную конструкцию современной алгебры (прежде ее называли *высшей алгеброй*), которую студенты-математики изучают на первом курсе: группу.

Группой в математике называют набор (множество) G = $\{g_i\}$ абстрактных объектов, называемых *элементами*. На этом множества задана тоже абстрактная операция *группового умножения*: она ставит в соответствие любой упорядоченной паре элементов g_i, g_j из множества G какой-либо элемент из того же множества:

$$g_i \cdot g_j = g_k \in \mathrm{G}$$

(вспомним, что символ «∈» означает «принадлежащий к множеству»). Таким образом, групповое умножение перебирает все элементы из замкнутого множества G – оттого и называемого группой. Перемножение той же пары элементов в другом порядке может дать другой элемент группы G: это умножение *некоммутативно* (см. разд. 3.2 в главе 3)

$$g_j \cdot g_i = g_m \in \mathrm{G};\ \text{в общем случае}\ g_k \neq g_m,$$

что значит «элементы $g_k = g_i \cdot g_j$ и $g_m = g_j \cdot g_i$ – разные».

Для того, чтобы множество G было группой в математическом смысле, его элементы должны удовлетворять трем *групповым постулатам* (вспомним постулаты Евклида и их развитие в геометрии Лобачевского, разд. 6.3.2 предыдущей главы):

(7.4 а) $(g_i \cdot g_j) \cdot g_m = g_i \cdot (g_j \cdot g_m)$ групповое умножение *ассоциативно*

(7.4 б) существует *единичный элемент* $e \in \mathrm{G}$ – такой, что $g_i \cdot e = e \cdot g_i = g_i$

для всех элементов $g_i \in \mathrm{G}$ (умножение с единичным элементом коммутативно). Единичный элемент также может называться *нейтральным элементом* – этот синоним далее нам пригодится.

(7.4 в) у любого элемента $g_i \in \mathrm{G}$ в том же множестве есть *обратный элемент* $g_i^{-1} \in \mathrm{G}$ – такой, что $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = e$

Число элементов (порядок группы) может быть как конечным, так и бесконечным. Так, множество действительных чисел является группой бесконечного порядка относительно сложения (при этом единичным элементом служит 0, а обратным к числу a является число $-a$) и относительно умножения – здесь единичным элементом служит 1, а обратным к числу $x \neq 0$ – число $x^{-1} = 1/x$.

Групповые постулаты, как и определение группы в целом, выглядят весьма абстрактно. Но если вспомнить, что свойствами (7.4 а–в) обладают квадратные матрицы, а также действительные и комплексные числа, для которых умножение еще и коммутативно (см. раздел 3.1 в главе 3) – окажется, что у *теории групп* имеется мощный математический аппарат, позволяющий формализовать преобразования пространства. Так, например, квадрат на плоскости (рис. 7.1) переводится сам в себя матрицами 2×2

(7.5)
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Эти матрицы, преобразующие векторы вершин квадрата, образуют группу «самосовмещений» (*автоморфизмов*) квадрата на плоскости, или *операций симметрии*: поворотов вокруг начала координат на 90º, 180º и 270º по часовой стрелке (верхний ряд матриц, кроме первой), а также отражений относительно координатных осей (x, y) и диагоналей квадрата (нижний ряд).

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}, \text{ и т.д.}$$

Первая матрица из (7.5) оставляет все вершины на их местах. Ей соответствует тождественное преобразование: умножение на единичную матрицу (см. разд. 3.1 в гл. 3).

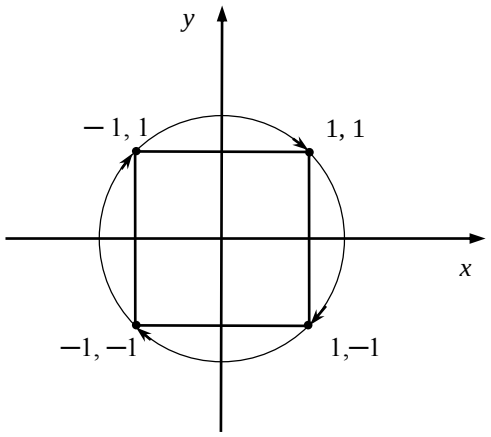


Рисунок 7.1. Квадрат на плоскости, цифры – координаты вершин. Дуги со стрелками соответствуют повороту фигуры действием матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

При преобразованиях симметрии, заданных матрицами (7.5), вершины квадрата переходят в другие вершины или остаются на месте. В данной группе восемь матриц. Операцией группового умножения служит обычное умножение этих матриц, единичным элементом – единичная матрица, стоящая в (7.5) первой.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{и т.д.}$$

Теория групп широко используется в исследованиях симметрии молекул, кристаллов и других физических объектов – в том числе при анализе дифференциальных уравнений. Но благодаря общей абстрактной форме, ее приложения шире вычислений с матрицами. На рис. 7.2 показан кусок бесконечной прямой с расставленными на ней точками:

0, 1, 2, 4, 8, 16, … 2n (где n – номер точки) в положительную сторону,
–1, –2, –4, –8, –16, … –2n в отрицательную сторону, и
1, 1/2 , 1/4 , 1/8, 1/16, …, 1/n,… на отрезке от 1 до 0, и аналогично
–1, –1/2, –1/4, –1/8, –1/16,… –1/n,… на отрезке от –1 до 0.

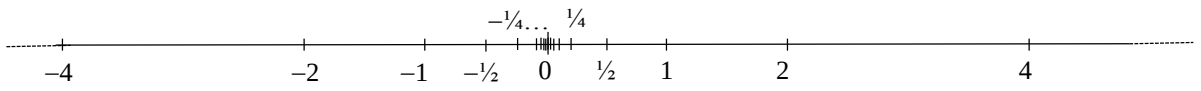


Рисунок 7.2. Масштабно-инвариантная бесконечная система точек на числовой прямой

Таким образом, в любой конечной окрестности нуля на этой прямой содержится бесконечное множество точек с координатами $\pm 1/2n$, где $n \to \infty$. Если координаты всех этих точек на (бесконечной) числовой прямой умножить на целое четное число – полученное множество совпадет с исходным! Это еще один вид симметрии: инвариантность относительно *преобразований масштаба*. Такие преобразования входят в *группу перенормировок*, используемую в описании фазовых переходов (см. разд. 2.5 в гл. 2).

В обсуждении групп мы ограничимся лишь теми определениями, которые встречаются в междисциплинарных приложениях физики. Из них можно видеть, что за абстрактными математическими терминами могут скрываться большие возможности для количественных расчетов. Абстрактные понятия есть и в теории графов: как мы видели в предыдущей главе, любой граф G = (V, E) с точки зрения математики является комбинацией двух множеств: множества вершин V и множества ребер E. У графов существуют и *группы автоморфизмов* (самосовмещений): их операции для цикла на рис. 7.1 задают матрицы (7.5). Поэтому определение игры как комбинации *трех* множеств (7.1) с точки зрения математика – не патология, а норма, открывающая путь к расчетам.

Сделаем серьезную оговорку. Если математический аппарат теории групп разработан очень глубоко, а аппарат теории графов интенсивно разрабатывается – в теории игр все не так хорошо. В этом разделе прикладной математики еще не найдены алгебраические либо геометрические объекты, которые так же идеально подошли бы к описанию игры, как квадратные матрицы соответствуют определению группы. Поэтому из абстрактной записи игры (7.1) пока не следует определенных математических операций. Правда, в их поиске уже получены важные результаты, и в этой главе мы с ними познакомимся. Вместо формул иногда будет использоваться описание «на словах» – хотя без матриц в теории игр обойтись невозможно. В этой главе мы рассмотрим простейшие примеры игр (в математическом смысле) и их приложения в конкурентных сферах человеческой деятельности.

7.2. Некоторые сведения из математической теории игр

Формальное определение игры (7.1) можно упростить. Множество агентов-игроков $\{g_i\}$ несет информацию только об их номерах, которые уже представлены в множестве стратегий $\{X_j^{(i)}\}$ как верхние индексы. Таким образом, игра сводится к «противоборству ходов», то есть к набору результатов от каждой их комбинации. При игре в нормальной форме все агенты делают ход одновременно, не зная ходов других агентов и независимо от них. На простейших примерах с двумя игроками рассмотрим приемы формального описания игры.

7.2.1. Простейшие игры двух лиц

Орел или решка

В этой почтенной игре, также называемой орлянкой, игрок A подбрасывает монету, а игрок B пытается угадать, какая сторона окажется наверху: гербовая («орёл») или номинальная («решка»). Угадавший получает от бросавшего некоторую сумму: например, 1 доллар США. Затем подбрасывает монету игрок B, игрок A пытается угадать, и т.д. При небольших суммах выигрыша (соответственно, проигрыша), большом числе повторений и исправной монете благосостояние игроков изменится мало. Нетрудно видеть, что игрок, бросающий монету, не делает хода в обычном смысле этих слов: он случайным образом выбирает одно из двух равновероятных состояний, которым можно приписать числа (орлу +1, решке –1); результат зависит от того, правильно ли угадал выпавшее число второй игрок.

Однократную игру можно записать в нормальной форме следующим образом.

Для B		факт			Для A		факт	
		орел	решка		гипотеза игрока B		орел	решка
гипотеза игрока B	орел	+1	–1			орел	–1	+1
	решка	–1	+1			решка	+1	–1

В левой половине таблицы приведены выигрыш или проигрыш угадывающего, в правой половине – бросающего монету. Эти половины объединяют в единую таблицу под названием *матрица платежей* (англ. *payoff matrix*):

(7.6)
$$\begin{array}{ccc} & \text{o} & \text{p} \\ \text{o} & +1,-1 & -1,+1 \\ \text{p} & -1,+1 & +1,-1 \end{array}$$

Таблица (7.6) не является матрицей в математическом смысле слова – она лишь представляет все возможные комбинации предположений угадывающего агента (левый столбец) и фактического результата (верхняя строка) вместе с выигрышем либо проигрышем для угадывающего (первая цифра) и бросающего монету (вторая цифра). Такое представление выигрышей и проигрышей называется *биматричным*. Заметим, что выигрыш одного агента здесь в точности равен проигрышу другого – отсюда знаменитый термин *игра с нулевой суммой*. Для таких игр платежную матрицу можно упростить

(7.6 а)
$$\begin{array}{ccc} & \text{o} & \text{p} \\ \text{o} & 1 & -1 \\ \text{p} & -1 & 1 \end{array}$$

Представление игры в *одноматричной* форме (7.6 а) подразумевает, что выигрыш второго игрока равен выигрышу первого по абсолютной величине и противоположен по знаку – обстоятельство, не вполне очевидное для начинающих.

На примере орлянки можно пояснить некоторые термины теории игр. Кроме нулевой суммы выигрышей, это игра с недетерминированным исходом, так как выпадение орла или решки – случайный процесс. Такие игры называются стохастическими или *играми с Природой*. Бросающий монету игрок исполняет роль генератора случайных чисел: он выбирает наугад одно число из множества $\{1, -1\}$ (с точки зрения математики это множество!). Такие же платежные матрицы (7.6) и (7.6 а) можно построить для детской игры «угадай, в какой руке конфета?» (воплощать ее в жизнь с реальными детьми автор не советует) и иными ситуациями бинарного выбора с нулевой суммой[*]. В общей форме матрица платежей представляет результаты всех комбинаций ходов (стратегий), возможных в рамках заданных правил игры, независимо от механизма их реализации.

[*] Знаменитые азартные карточные игры XIX века – банк, штосс, рокамболь и другие – по простоте правил мало отличались от орлянки: игрок угадывал карту, которую банкомет вслепую выбирал из колоды. В более интеллектуальных состязаниях (лото, преферанс, подкидной дурак) проигравшие тоже платили, но эти игры считались домашним времяпровождением. Огромные состояния проигрывали по элементарным алгоритмам (см. Ю.М. Лотман, Беседы о русской культуре. Быт и традиции русского дворянства (XVIII-начало XIX века), М.: Издательство АСТ, 2020).

ЗАДАЧА 7.2. В игре «камень-ножницы-бумага» два игрока по собственному выбору одновременно демонстрируют раскрытую ладонь («бумага»), кулак («камень») или два растопыренных пальца («ножницы»). Жесты сопоставляются по схеме:

бумага выигрывает у камня («заворачивает камень»),
камень выигрывает у ножниц («разбивает» их),
ножницы выигрывают у бумаги («режут бумагу»).

Одинаковые ходы обоих игроков дают ничью. Составьте платежную матрицу этой игры.

Решение. У каждого из двух игроков три возможных хода: К, Н, или Б. Примем, что выигрышу соответствует +1, проигрышу –1, ничьей 0. Матрицу платежей

	К	Н	Б
К	0	1, –1	–1, 1
Н	–1, 1	0	1, –1
Б	1, –1	–1,1	0

можно записать в более простом виде, так как это игра с нулевой суммой

	К	Н	Б
К	0	1	–1
Н	–1	0	1
Б	1	–1	0

(Не забудем, что для выигрышей второго игрока у всех единиц в матрице следует поменять знаки).

Этот пример наглядно показывает, что игра в нормальной форме – одноразовое сопоставление ходов; термин «стратегия», как образ последовательного плана, здесь вряд ли уместен. (Стратегии лучше соответствуют понятию игры в экономических, политических и военных противостояниях, где сравниваются результаты комплексных действий – см. далее). При увеличении числа игроков и повторяющейся игре ситуация усложняется. От сговора части противников (также см. далее) в подобных детских развлечениях можно проиграть большую сумму денег.

Перекресток

Неопределенность результата игры создают не только случайные процессы, но и свободный выбор ходов противоборствующими игроками (многие игры – модели конфликтных ситуаций!). Представим два автомобиля, которые на большой скорости приближаются к перекрестку «однополосных» дорог – например, проселочных, где нет светофоров и полиции (рис. 7.3). Из чувства самосохранения один из водителей должен пропустить другого – неопределенность лишь в том, что оба они торопятся. Платежная матрица этой опасной игры выглядит так:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s & g \end{array} \\ \begin{array}{c} s \\ g \end{array} & \begin{array}{cc} -1,-1 & -1,1 \\ 1,-1 & -10,-10 \end{array} \end{array} \qquad (7.7)$$

Здесь s означает «остановиться» (stop), g – «не останавливаться» (go). Водитель, которому уступили дорогу, экономит время (условно выигрывает единицу), уступивший дорогу эту условную единицу теряет. Два осторожных водителя потеряют время от остановки (и быстро решат, кому ехать первым – но эта реалистическая ситуация уже за пределами игры в нормальной форме). Два безалаберных гонщика не затормозят и попадут в аварию, что условно отражается в большом обоюдном проигрыше. Заметим, что в двух из четырех возможных исходов игры оба игрока терпят убыток, теряя время (s, s) либо нечто большее вплоть до жизни (g, g). Другими словами, «Перекресток» – *игра с ненулевой суммой*.

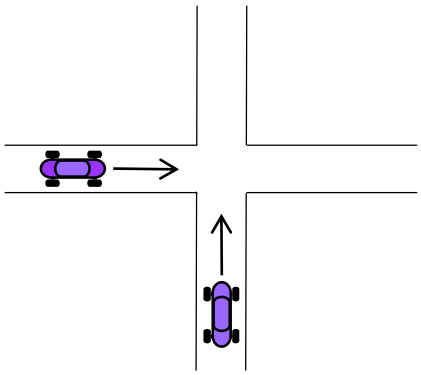


Рисунок 7.3. Игра «Перекресток»

Семейный спор

Вообразим семейную пару, которая обсуждает планы на субботний вечер. Нетрудно угадать, что муж желал бы пойти на футбол, а жена – в театр (возможно, оба с удовольствием пойдут в кино, но такой вариант не рассматривается). При этом супруги не только имеют собственные предпочтения: для них важнее провести вечер вместе. Если выигрыш от совместного выхода равен 2, свой приоритет оценивается в 1, а отказ от него в 0, это дает платежную матрицу

(7.8)

	ф	т
ф	3, 2	1, 1
т	0, 0	2, 3

(пошедший навстречу пожеланиям своей половины выигрывает 2 и дарит ей (ему) 3 балла, а вечер, проведенный порознь в соответствии с собственными предпочтениями, приносит обоим лишь по 1 баллу). В данной таблице строкам и первым числам соответствует выбор мужа, а столбцам и вторым числам выбор жены, и от замены строк столбцами суммы выигрышей не изменятся. Из вида (7.8) следует, что «Семейный спор», как и «Перекресток» – игра с ненулевой суммой.

Многие учебные руководства прямо предупреждают читателей: основы теории игр не помогут в домино или лотерее; теория игр занимается моделями столкновения интересов. «Решением» игры является детерминированный либо наиболее вероятный исход такого столкновения – для игры в нормальной форме это одна из клеток платежной матрицы, которую следует найти. Поиск решения часто сводится к преобразованию заданной таблицы, не предоставляя универсальных рецептов по выбору стратегий в реальной игре. В исследованиях абстрактных игр с середины прошлого века установлены их аналогии с

рядом задач экономики, политики и военного дела – к которым нередко переходит название соответствующей игры.

Дилемма бандита

Или говорить правду – или получше сговариваться.
Виктор Драгунский, «Денискины рассказы»

Название этой знаменитой игры (англ. Prisoner's Dilemma) чаще переводится как «дилемма заключенного» и даже «дилемма узника», подсознательно вызывая неуместное сочувствие. В легенде игры два бандита-подельника, подозреваемые в серьезном преступлении, за которое полагается 5 лет тюрьмы, арестованы полицией. Правда, у полиции нет веских доказательств вины «узников», кроме найденного у них оружия (за что дадут лишь 2 года тюрьмы). Поэтому каждому бандиту по отдельности предложена сделка со следствием. Сознавшийся и «сдавший» сообщника может выйти на свободу, если его контрагент станет упорствовать и запираться. В этом случае несговорчивый подельник получает 7 лет тюрьмы – два призовых года «прокурор добавит» © за обман следствия. Если же сознаются оба бандита – они получают по пять лет тюремного заключения: меньший срок за оружие поглощается большим, закон есть закон…

Эта криминальная история парадоксально вошла в золотой фонд исследований эгоизма и альтруизма, который здесь правильнее назвать круговой порукой. Эгоистическая сделка со следствием в описании игры называется предательством (подельника), а отказ от сделки – сотрудничеством с ним. Матрица платежей выглядит так:

(7.9)

	с	п
с	$-2,-2$	$-7,0$
п	$0,-7$	$-5,-5$

Здесь «с» означает сотрудничество (не со следствием, а с подельником), «п» – предательство подельника, а выигрыш бандитов разумно представлен как проигрыш в виде тюремного срока с обратным знаком. Подобно «Перекрестку» и «Семейному спору», это игра с ненулевой суммой. Свое название и легенду она получила у американских математиков уже после того, как была ими предложена для моделирования последствий гонки вооружений США и СССР во времена «холодной войны».

Суть дилеммы в том, что наиболее благоприятный исход (с, с) с минимальными сроками в 2 года для обоих подозреваемых побивается возможностью получить 7 лет, если сообщник предаст ((п, с) или (с, п)) – рациональнее самому предать сообщника. Математическое ожидание длительности срока (в данном случае среднее арифметическое, см. разд. 6.2.2 предыдущей главы) при выборе одной из двух стратегий в предположении, что подельник с вероятностью 50% запирается либо признается, для обоих бандитов равно

«сотрудничать с сообщником»: (2+7)/2 = 4.5 года
«предать сообщника»: (0+5)/2 = 2.5 года

Даже отвлекаясь от психологически бесценного шанса сразу выйти на волю, арифметика требует предавать. Но если оба бандита предадут сообщника (а они так и сделают!) – при

исходе (п, п) каждый получает 5 лет тюрьмы, в прототипе игры – тяжелые расходы сторон на новые вооружения.

«Дилемму заключенного-бандита» охотно стали использовать политологи, тем самым косвенно подтвердив реальное содержание своей деятельности. Помимо гонки вооружений, аналогичные формальные модели были составлены для других ситуаций: переговоров при отсутствии доверия сторон, совместной разработки конкурентами ограниченного ресурса и так далее – вплоть до сюжета оперы Пуччини «Тоска» (см. [2] в списке рекомендуемой литературы). В дальнейших разделах этой главы будут обсуждаться повторяющиеся игры, основанные на Дилемме бандита.

Отвлекаясь от произвольно назначенных выигрышей и сроков, платежные матрицы «Перекрестка» (7.7), «Семейного спора» (7.8) и «Дилеммы бандита» (7.9) можно представить в едином обобщенном виде

$$\begin{array}{cc} & \text{а} \quad \text{э} \\ \text{а} & a,a \quad b,c \\ \text{э} & c,b \quad d,d \end{array}, \tag{7.10}$$

где «а» означает альтруистическую стратегию (сотрудничество со вторым игроком), «э» эгоистическую (преследование собственных интересов), a, b, c и d – связанные с ними выигрыши. В разных играх на элементы матрицы накладываются разные условия:

(7.10 а) $c > a = b > d$ – «Перекресток»,
(7.10 б) $c > d > b > a$ – «Семейный спор»,
(7.10 в) $c > a > d > b$ – «Дилемма бандита».

Во всех трех играх существуют варианты с наибольшим суммарным выигрышем: в (7.10 а, б) это «а, э» либо «э, а», в (7.10 в) «а, а». Однако при однократном независимом выборе хода игроками они не реализуются (в «Семейном споре», где каждой стороне разумно пойти на уступки, комбинация «и тогда он пошел в театр, а она на футбол» приносит супругам по 0 баллов). Предсказание результата игры, соответственно, должно включать не только количественную оценку выигрышей, но и их достижимость.

ЗАДАЧА 7.3. Приведите матрицу платежей (7.8) в игре «Семейный спор» к виду (7.10).

7.2.2. Преобразования платежной матрицы

Предпочтения и полезность

В рассмотренных выше матрицах платежей выигрыши и проигрыши назначались произвольно. Если же, как в (7.10), мы переходим от цифр к буквам – важно знать, стоят ли за этими буквами измеримые величины. Иначе говоря, мы хотим перевести *предпочтения* (если не миражи), которыми направляется человеческая деятельность, в нечто более строгое и поддающееся математической трактовке.

В этом подразделе предпочтения будут выражаться действительными числами. Этот смелый шаг в XIX веке создал неоклассическую экономическую теорию с ее многими клонами в гуманитарных науках – и за прошедшее время все они оказались непригодными

для однозначных предсказа ний при очень неплохом качественном описании общественных явлений «в принципе». Другой путь формализации – так изменить математический аппарат, чтобы проводить строгие выкладки с предпочтениями – сформировался ближе к началу XXI века; мы рассмотрим его в конце главы.

Отношения предпочтения получаются при замене строгих понятий «больше, меньше, равно» расплывчатыми «лучше, хуже, безразлично», которыми мы легко оперируем в повседневной жизни:

(7.11)

в математике	в быту
$x > y$ (икс больше игрека)	$x \succ y$ (икс *лучше* игрека)
$x < y$ (икс меньше игрека)	$x \prec y$ (икс *хуже* игрека)
$x = y$ (икс и игрек равны)	$x \approx y$ (между x и y нет заметной разницы)

Те и другие виды символов в математике называются *реляционными операторами*. Бытовое сравнение очевидно субъективнее математического («кому хорошо, а кому и не очень»). В третьей части книги мы назовем эти соотношения *нечеткими* – но пока не будем забегать вперед.

Отношения предпочтения могут быть полезны (содержательны) лишь в том случае, когда на них распространяются математические аксиомы, дающие саму возможность сравнивать числа: если $x > y$, то $x \not\prec y$ (икс не меньше игрека), если $x \not\succ y$ и $x \not\prec y$, то $x = y$ и так далее. Для этого вводятся отношения $\not\succ$ («не лучше») и $\not\prec$ («не хуже»); из $x \not\succ y$ и $x \not\prec y$ следует $x \approx y$. Значительно труднее доказать *транзитивность* новых операторов, т.е. их переносимость от одного объекта к другому, без которой сравнение теряет смысл:

если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$; если $x > y$ и $y = z$, то $x > z$; если $x > y$ и $y > z$, то $x > z$ и т.д.

Пытаясь просто заменить в этой строке «равно», «больше» и «меньше» на «безразлично», «лучше» и «хуже», мы немедленно столкнемся с субъективностью этих отношений: они обусловлены конкретной ситуацией. В физическом смысле $x \approx y$ означает «x мало отличается от y, их разница несущественна» (с неизбежным вопросом «для кого и в какой обстановке?»). Легко представить ситуацию, когда $x \approx y$ и $y \approx z$, но $x \succ z$ – в частности, для еле различимых стимулов в психологическом эксперименте (см. раздел 1.5.2 в гл. 1). В девятой главе мы познакомимся с *парадоксом Малишевского*: одним из парадоксов голосования, где отношения предпочтения категорически не транзитивны. Но если в интересующих нас игровых ситуациях считать транзитивность предпочтений доказанной, это позволяет ввести числа в матрицу платежей.

На множестве событий $\{x_i\}$ (например, ходов в игре) с заданными в нем отношениями (7.11) вводится *функция полезности* $u(x)$ – такая, что

(7.12)

$$\text{из } x_i \succ x_j \text{ следует } u(x_i) > u(x_j),$$
$$\text{из } x_i \prec x_j \text{ следует } u(x_i) < u(x_j),$$
$$\text{из } x_i \approx x_j \text{ следует } u(x_i) = u(x_j)$$

Аналогично вводятся соотношения $x_i \succcurlyeq x_j \rightarrow u(x_i) \geq u(x_j)$ и т.д.

Правила (7.12) ставят в соответствие предпочтениям действительные числа: значения функции полезности $u(x)$. С этой энергоподобной функцией («больше» значит «лучше») мы уже познакомились в разделе 1-й главы, посвященном экономическим категориям. Там отмечалось, что функция полезности помогает описывать экономические процессы на качественном уровне, не предполагая количественных расчетов на ее основе. В теории игр принимается, что числа или другие символы в матрице платежей соответствуют полезности ходов (стратегий), поэтому с ними можно обращаться как с обычными числами.

Упрощение матрицы платежей

Пусть для игры с нулевой суммой двух игроков А и В задана платежная матрица

(7.13)

	B_1	B_2	B_3
~~A_1~~	~~5~~	~~2~~	~~4~~
A_2	4	8	9
A_3	7	3	6
~~A_4~~	~~1~~	~~5~~	~~3~~
~~A_5~~	~~7~~	~~3~~	~~6~~

Из этой матрицы следует, что игрок А выбирает любой из пяти ходов (стратегий) A_1, A_2, …A_5, тогда как игрок В имеет на выбор три хода: B_1, B_2 и B_3. Кроме того, игрок В всегда проигрывает, но размеры этого проигрыша (элемент матрицы со знаком минус) в разных комбинациях ходов неодинаковы. Результатам определенного хода игрока А при всех возможных ходах В соответствует строка матрицы (вектор), результатам В – столбец с обратным знаком всех чисел (тоже вектор). Можно видеть, что результаты ходов A_3 и A_5 одинаковы: их строки совпадают. В общем случае такие стратегии называются *дублирующими*; любую из них можно удалить из таблицы. Вычеркнем стратегию A_5 (сплошная линия). В оставшихся строках таблицы все элементы вектора A_3 больше соответствующих элементов вектора A_1. Это значит, что выигрыши от хода A_3 при любом ходе игрока В больше, чем от A_1, т.е. стратегия A_1 для игрока А невыгодна. Вектор A_2 в том же смысле лучше, чем A_4. Говорят, что для игрока А стратегия A_3 *доминирует над* A_1, а A_2 *доминирует над* A_4. Невыгодные стратегии тоже можно вычеркнуть из таблицы (штриховые линии), получая матрицу

(7.13 а)

	B_1	B_2	B_3
A_2	4	8	~~9~~
A_3	7	3	~~6~~

Для игрока В в этой оставшейся матрице столбец B_3 еще менее выгоден, чем B_2: он дает больший проигрыш при любом из двух оставшихся ходов игрока А. Вычеркнув доминируемую стратегию B_3 и заново перенумеровав строки, приходим к матрице

(7.13 б)

	B_1	B_2
A_1	4	8
A_2	7	3

Выбрать в матрице (7.13 б) клетку, наилучшую для обоих игроков, уже не так просто: игрока А больше всего устроила бы комбинация ходов (A_1, B_2), а игрока В – (A_2, B_2). По аналогии с оценками среднего тюремного срока в дилемме бандита, при равновероятном выборе игроком В любой из двух его стратегий средний выигрыш игрока А составит 6 (условных единиц) при стратегии A_1 и 5 при стратегии A_2. Поскольку матрица платежей (7.13) известна как А, так и В (является *общим знанием*), оба игрока выбирают ходы *рационально* и каждый знает о рациональности противника, игрок В понимает, что А выберет стратегию A_1, и поэтому выберет свою стратегию B_1. Однако хитрый игрок А, ожидая от В рационального выбора B_1, выберет ход A_2 и выиграет 7 вместо 4. Неоднозначность выбора при разных *уровнях рефлексии* будет обсуждаться нами далее; пока мы рассматриваем только удаление явно невыгодных стратегий.

В общем случае стратегия k-го игрока $X_i^{(k)}$ *слабо доминирует* над его стратегией $X_j^{(k)}$, если для всех элементов соответствующего ей вектора выигрышей $R_{im}^{(k)}=(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, \dots r_{im}^{(k)})$

(7.14) $$r_{ip}^{(k)} \geq r_{jp}^{(k)} \text{ при любых } p = 1, 2, \dots, m$$

и хотя бы для одного из них ($p = q$) неравенство (7.14) является строгим:

(7.14 а) $$r_{iq}^{(k)} > r_{jq}^{(k)}$$

При наличии неравенства (7.14 а) для всех $q = 1, 2, \dots, m$ стратегию $X_i^{(k)}$ называют *строго доминирующей*.

Удаление дублирующих и доминируемых стратегий называется *снижением размерности* игровой задачи. Обратим внимание, что в исходной матрице платежей (7.13 а) (см. [4] в списке литературы) стратегия B_2 не доминировала над 7_3: в отредактированных платежных матрицах отношения доминирования могут измениться. Итеративный процесс вычеркивания строк и столбцов продолжается до тех пор, пока в матрице не останется доминируемых стратегий.

ЗАДАЧА 7.4. Упростите матрицу платежей биматричной игры с ненулевой суммой (Подсказка: сначала можно составить отдельные таблицы для игроков А и В)

(7.15)

	B_1	B_2	B_3
A_1	5, 0	5, 4	0, 3
A_2	0, 4	0, 3	5, 2

7.3. Решения матричной игры

Решением игры называется такая комбинация ходов, которая дает каждому игроку наилучший возможный результат. Для игр в нормальной форме такое сочетание ходов

приносит игрокам наибольший «глобальный» выигрыш (при возможных дополнительных ограничениях) или, чаще, отвечает его «локальному» максимуму в том смысле, что любые отклонения игроков от решения не увеличивают либо уменьшают их выигрыши. В этом смысле решения игры называются *равновесными состояниями* или просто *равновесиями*.

Равновесие в доминирующих стратегиях

Один из практических способов поиска равновесия мы видели выше: это снижение размерности игры удалением дублирующих и доминируемых стратегий. В некоторых случаях, как в задаче 7.4, итерационный процесс дает единственное решение. Действительно, в правом столбце платежной матрицы (7.15) этой задачи, где приведены выигрыши обоих игроков, стратегия (или ход) B_3 менее выгодны игроку В, чем стратегия (ход) B_2 при любом из двух ходов игрока А. После удаления столбца B_3 в оставшейся части платежной матрицы стратегия A_1 явно доминирует над A_2 (где агент А вообще не выигрывает при любой из двух стратегий агента В). В оставшейся части таблицы

	B_1	B_2
A_1	5, 0	5, 4

для игрока В стратегия B_1 явно хуже, чем B_2. Вычеркивая ее, получим результат игры, то есть наилучшие стратегии и соответствующие им выигрыши:

игрок А: исходная стратегия A_1
игрок В: исходная стратегия B_2
выигрыши: r(А) = 4, r(В) = 5.

Поиск решения игры в нормальной форме вычеркиванием доминируемых стратегий подразумевает, что каждый игрок стремится к максимуму полезности (в данном случае максимальному выигрышу), правильно его определяет и полагает всех своих оппонентов столь же неограниченно рациональными. Иными словами, все игроки используют свои наилучшие стратегии и того же ожидают от оппонентов, не рассчитывая на их ошибки. Кроме того, матрица платежей – *общее знание* игроков.

Принципы полной рациональности и полной информированности агента, как и его стремление к максимальному выигрышу, пришли в теорию игр из неоклассических (то есть первых формализованных) экономических теорий XIX века. Эти постулаты логически оправданы: «численная» полезность – настолько сильное утверждение, что поведение агентов приходится считать как можно более разумным. Расхождения неоклассических моделей экономики с реальностью и попытки их исправить будут обсуждаться в главе 8.

Уже переход от строго доминирующих к *слабо доминирующим* стратегиям (знак “=” в некоторых неравенствах (7.14)) может приводить к неоптимальным равновесиям. Так, в платежной матрице

(7.16)

	B_1	B_2
A_1	1, 1	100, 0
A_2	0, 100	100, 100

вычеркивание слабо доминируемой стратегии A_2 (для игрока А) и затем B_2 (строго доминируемой для В в новой платежной матрице) либо вначале стратегии B_2 (слабо доминируемой для В в (7.16)) и затем A_2 дает решение (A_1, B_1) с выигрышами (1, 1). Это очевидно хуже решения (A_2, B_2) с выигрышами (100, 100) (см. [3] в списке рекомендуемой литературы, стр. 58). Поэтому размерность игровой задачи обычно снижают удалением сильно доминируемых стратегий. Но равновесие в доминирующих стратегиях не обязательно соответствует наилучшему варианту для игроков: в платежной матрице (7.9) «дилеммы бандита» стратегия «предать подельника» строго доминирует. Заметим, что в матрицах (7.7) («Перекресток») и (7.8) («Семейный спор») доминирующих стратегий нет (проверьте это самостоятельно!).

Удаление доминируемых стратегий в общем случае не приводит к равновесному состоянию, то есть к решению игры – так, матрица (7.13 в) далее «не сокращается». Для игр в нормальной форме при ряде дополнительных ограничений найдены несколько других типов равновесий. Во всех них отклонения игроков от равновесных стратегий приводят к уменьшению их выигрышей.

Равновесие в осторожных стратегиях

В антагонистических играх могут применяться *осторожные* стратегии. В них каждый игрок стремится получить максимальный выигрыш при том условии, что его противник выберет ходы, наихудшие для этого игрока. Платежная матрица является общим знанием:

(7.17)
$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1^{min} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2^{min} \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_m^{min} \\ \hdashline a_1^{max} & a_2^{max} & \dots & a_n^{max} & \end{array}\right]$$

В столбце справа от матрицы А собраны минимальные значения по строкам матрицы платежей, в строке под матрицей А – максимальные значения по ее столбцам. Значение a_i^{min} соответствует наихудшему результату игрока А при выборе им стратегии A_i, значение a_j^{max} – наихудшему результату игрока В (и соответственно наилучшему результату А) при выборе им стратегии B_j. Наилучший из наихудших результатов по строкам, который обозначается

(7.18 а) $$\max_i\{a_i^{min}\} = \max_i \min_j a_{ij} = \alpha:$$ *нижняя цена игры*,

соответствует лучшему результату А при наихудших для него действиях противника. Число α называется *максиминным выигрышем* или *максимином*. Наилучшее значение из наихудших результатов для В (или минимальный выигрыш А из всех максимальных)

(7.18 б) $\min\limits_{j}\{a_i^{max}\} = \min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij} = \beta$: *верхняя цена игры*

называется *минимаксным выигрышем* или *минимаксом*. В этом случае В имеет наилучший результат при наихудших для него действиях А. Напомним, что числа $\{a_{ij}\}$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для всех игр в нормальной форме $\beta \geq \alpha$. В случае $\beta = \alpha = \nu$ в платежной матрице имеется элемент a_{ij}* (мы выделили его звездочкой), одновременно минимальный в *i*-й строке и максимальный в *j*-м столбце. Такой элемент называется *седловой точкой* игры по аналогии с поверхностями в трехмерном пространстве, где седловая точка отвечает минимуму по одной координате и максимуму по другой координате (см. Приложение П3). Игры с седловой точкой имеют решение: *оптимальные стратегии* (A_i, B_j); число ν называется *чистой ценой* игры. При выборе игроком А оптимальной стратегии A_i все стратегии игрока В, кроме B_j, уменьшают его выигрыш. И наоборот: если В выбирает стратегию B_j, то А невыгодно отклоняться от стратегии A_i. Таким образом, (A_i, B_j) – равновесие, то есть решение игры.

ЗАДАЧА 7.5. Найдите седловую точку в антагонистической игре с матрицей платежей

	B_1	B_2	B_3	B_4	min A
A_1	3	1	0	5	0
A_2	5	–2	6	4	–2
A_3	4	**2***	3	3	2
max A	5	2	6	5	

Решение. Минимальные выигрыши А при любых стратегиях В показаны в последнем столбце таблицы. Максимальные выигрыши А (взятые с обратным знаком, они соответствуют максимальным проигрышам В) – в последней строке. Цена игры с точки зрения А это max(minA) = min(maxA) = 2. Для В это минимальный проигрыш в 2 единицы при любой стратегии А. Седловая точка игры – сочетание стратегий (A_3, B_2)

Рассмотрим еще одну игру. Два игрока независимо выбирают числа 1, 2 или 3 (например, показывая их на пальцах). Если эти числа у них совпадают, каждый получает их в денежных единицах. При несовпадении каждый игрок штрафуется на «свое» число. Платежная матрица игры:

(7.19)

	I	II	III	min A
I	**1, 1**	–1, –2	–1, –3	–1
II	–2, –1	2, 2	–2, –3	–2
III	–3, –1	–3, –2	3, 3	–3
min B	–1	–2	–3	

По таблице видно, что (7.19) – игра с ненулевой суммой и у нее нет седловой точки (т.е. в двух матрицах платежей, на которые можно расщепить таблицу (7.19), нет элементов, одновременно максимальных в строке и минимальных в столбце – проверьте это!). Выписывая минимальные выигрыши А (правый столбец) и В (нижняя строка), получим, что осторожными стратегиями обоих игроков является выбор стратегии I. Комбинация

ходов (1, 1) отвечает равновесию, от которого каждому игроку в отдельности (при условии, что второй выбрал свою стратегию I) невыгодно отклоняться. Притом выигрыши A и B в этой комбинации выше максиминных.

Равновесие Нэша и оптимум Парето

Равновесные ситуации, отклонение от которых невыгодно любому из вовлеченных в них агентов, не обязательно сопровождаются максимальным выигрышем. Так, например, в игре с матрицей платежей (7.16) при комбинации ходов (A_1, B_1) оба игрока получают выигрыш (1, 1), а если *один* из них выбрал другой ход, он получает 0 (что очень выгодно оппоненту, получающему 100). Такое положение, в повседневной жизни называемое «не то будет хуже», в теории игр называется *равновесием Нэша*. Для системы из N агентов, вооруженных наборами стратегий $\{X_i^{(k)}\}$, этому равновесию отвечает такой вектор «правильных» ходов

(7.20) $(x^{*(1)}, x^{*(2)}, \ldots, x^{*(N)})$ с набором выигрышей $(r^{*(1)}, r^{*(2)}, \ldots, r^{*(N)})$,

что любой другой ход $x_k^{(j)} \neq x^{*(j)}$ каждого (j-го) агента *при неизменных ходах остальных агентов* уменьшает (либо, по крайней мере, не увеличивает) его выигрыш:

(7.20 а) $$r^{*(j)} \geq r_k^{(j)}$$

(здесь в верхнем индексе показан номер агента, в нижнем – номер его стратегии, а равновесная «i-я» стратегия и соответствующий ей выигрыш j-го агента обозначены звездочкой). Иными словами, равновесием Нэша называется такой набор стратегий всех игроков, при котором ни один из них не может увеличить свой выигрыш *односторонним* изменением стратегии (выбором другого хода). Неравенство (7.20 а) вместе с определяющими его условиями часто записывают в виде

(7.20 б) $$r^{*(j)} = r_{i,-i}^{(j)} \geq r_{k,-i}^{(j)} \text{ при любом } k \neq i$$

Здесь подстрочный символ «$-i$» показывает, что N–1 остальных агентов используют те же стратегии, что и в равновесном положении, от которого j-й агент вздумал отклониться, заменяя свою равновесную i-ю стратегию на любую другую. Для антагонистических игр с седловой точкой равновесие Нэша – то же самое, что равновесие в оптимальных стратегиях.

Равновесие Нэша очень популярно в теории игр не только оттого, что материальные потери – самый доходчивый аргумент во многих сферах человеческой деятельности. Ниже мы увидим, что такое равновесие существует в любой конечной матричной игре при включении в нее случайной составляющей. Но в рассмотренных нами простейших детерминированных играх, где каждый игрок делает вполне определенный ход, равновесные ситуации могут вообще отсутствовать. Кроме того, «равновесие страха» часто бывает *неоптимальным*, то есть не дает агентам их максимальный возможный выигрыш.

Наилучшим состоянием в конкурентной системе (в частности, игре) является *оптимум Парето*: ситуация, при отклонении от которой уменьшается выигрыш хотя бы одного из входящих в нее агентов. Принцип стремления системы к такому оптимуму впервые высказал в XIX веке итальянский социолог и экономист Вильфредо Парето (1848–1923). В

терминах теории игр, ситуация *a лучше* ситуации b ($a \succ b$) «по Парето», если для всех игроков

(7.21) $$r^{(i)}(a) \geq r^{(i)}(b), \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, N,$$

и хотя бы для одного из них («j-го») неравенство (7.21) является строгим:

(7.21 а) $$r^{(j)}(a) > r^{(j)}(b)$$

В этом случае для рациональных игроков ситуация a выгоднее ситуации b.

Вильфредо Парето не был апологетом капитализма, как можно подумать от навязчивых упоминаний оптимума Парето в учебниках по неоклассической экономике. Его именем также названо чрезвычайно несправедливое обратное степенное распределение населения страны по доходам $N \sim W^{-\gamma}$ ($\gamma > 1$), постулированное Парето в 1897 г., но в чистом виде даже тогда не существовавшее (см. далее главу 8). В рассмотренных нами играх оптимуму Парето соответствует максимальная сумма выигрышей. Так, в платежной матрице (7.16) это комбинация (A_2, B_2) с выигрышами (100, 100). В данном конкретном случае оптимум Парето совпадает с одним из двух равновесий Нэша – отклоняться от него невыгодно любому из двух игроков. (Многие игры имеют более одного равновесия Нэша и даже несколько оптимумов Парето с одинаковой общей суммой выигрышей). Но оптимум Парето часто не является равновесием: отклонение от него увеличивает выигрыш некоторых игроков (в пределе – одного) за счет общего ухудшения ситуации. На обыденном уровне это вполне очевидно: мы можем вспомнить парадокс Браеса из гл. 1 (водители, проехавшие первыми, экономят свое время) или представить себе владельца фирмы, на фоне роста безработицы понизившего зарплату сразу всем своим сотрудникам.

Широко известный пример несовпадения оптимума Парето с равновесием Нэша представляет «Дилемма бандита». В платежной матрице (7.9) оптимум (–2, –2) (минимальная сумма тюремных сроков) разрушается возможностью любого из подследственных выйти на свободу, предавая более доверчивого подельника: (0, –7) либо (–7, 0). Равновесием Нэша является обоюдное предательство, хотя в этом случае платежи (–5, –5) дают как раз наибольший суммарный срок заключения. Напротив, в игре «Перекресток» комбинации ходов (s, g) и (g, s) являются как равновесиями Нэша, отклоняться от которого игрокам невыгодно, так и оптимумами Парето. Но такое совпадение в конкурентных ситуациях бывает не всегда. В игре «Семейный спор» комбинации «театр, футбол» и «футбол, театр» тоже являются как равновесиями Нэша (другая стратегия одного из игроков при неизменной стратегии второго уменьшает его, или ее, выигрыш), так и оптимумами Парето: сумма выигрышей для них максимальна. При этом важный вопрос «а кому достанется максимальный выигрыш?» для игры в нормальной форме не имеет ответа: здесь важна очередность ходов. В части III мы кратко обсудим теоретико-игровые взаимоотношения агентов с *управляющим центром*, который по определению обладает правом первого хода.

По аналогии с непрерывными функциями можно сказать, что оптимум Парето отвечает дискретному глобальному максимуму суммарной полезности. В отличие от равновесия Нэша, такое решение игры может быть неустойчивым относительно действий игроков. Так, игра в числа (1, 2, 3) с платежной матрицей (7.19) имеет три равновесия Нэша: (1,1), (2,2) и

(3,3); только последнее из них является оптимумом Парето. В антагонистических играх оптимум Парето отсутствует, так как сумма выигрышей всегда равна нулю. В орлянке, в игре «Камень-ножницы-бумага» и во многих других конкурентных ситуациях нет и равновесий Нэша, если каждый из агентов всегда делает определенный (детерминированный) ход.

Ход игрока в общем случае называется стратегией, и все встретившиеся нам до сих пор равновесия называются *равновесиями в чистых стратегиях*. Мы видим, что даже очень простые игры могут не иметь таких равновесий – то есть не иметь решения. Но американский математик Джон Нэш (1928–2015), один из основоположников математической теории игр, не только изобрел «равновесие страха», но и придумал способ установить его в любой конечной игре.

7.4. Равновесие в смешанных стратегиях

Чтобы объяснить смысл этого термина, надо перейти от игры в нормальной форме с однократными ходами агентов к повторяющейся игре. Правила, то есть матрица платежей, во всех повторениях игры одинаковы. (В этом случае последовательности ходов каждого игрока ближе к общепринятому понятию стратегии). Действительно, в многократно повторяющейся игре «камень-ножницы-бумага» каждый игрок волен выбирать любые ходы – например, всегда показывать только «камень», либо «камень» и «ножницы», либо последовательно все три варианта. Но такой игрок будет проигрывать: рациональный оппонент разгадает его стратегию и в каждом новом раунде выберет «побивающие» ходы. Единственный способ запутать противника – это *случайный* выбор хода. Рациональный противник сделает то же самое: в каждом раунде будет показывать К, Н или Б с вероятностью 1/3 (например, бросая кубик с условием: 1 или 2 – «камень», 3 или 4 – «ножницы», 5 или 6 – «бумага»)[*]. При достаточно большом числе повторений выигрыши распределятся примерно поровну и в ~1/3 всех «раундов» игра закончится вничью.

Случайный выбор хода (стратегии) из имеющихся вариантов называется *смешанной стратегией*. Вероятности выбора каждого из m ходов (p_1, p_2, …, p_m) могут быть разными с очевидным условием $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ (игрок обязательно выберет какой-либо ход).

Как и любое вероятностное описание, смешанные стратегии не имеют смысла для однократного события, т.е. игры в нормальной форме. Для повторяющихся матричных игр справедлива *теорема Нэша* (для игр 2×2 впервые доказанная фон Нейманом и Моргенштерном в 1947 г.):

(7.22) *Любая конечная игра имеет хотя бы одно решение в смешанных стратегиях*

(В новых разделах математики термины, не прошедшие проверку временем, следует воспринимать осторожно. «Конечная игра» здесь означает игру с конечным числом стратегий у каждого игрока.)

[*] Мы приводим здесь пояснения из книги В.Н. Колокольцова и О.А. Малафеева (п. [2] в рекомендуемой литературе).

Частным случаем смешанных стратегий в определении (7.22) являются чистые стратегии: в этом случае вероятность одной из них (k-й) $p_k = 1$, а у всех остальных $i \neq k$ $p_i = 0$. Однако мы видели, что многие игры не имеют решения в чистых стратегиях. Согласно теореме (7.22), в этих случаях решение все же существует в виде вероятностных стратегий

(7.22 а) $$\{X^{(j)*}\} = \sum p_i^{(j)} X_i^{(j)} ,$$

индивидуальные отклонения от которых невыгодны любому игроку (равновесие Нэша).

Рассмотрим игру 2×2 с нулевой суммой, где каждый из двух игроков А и В располагает парой стратегий (A_1, A_2) и (B_1, B_2). Платежная матрица такой игры, построенная из выигрышей 1-го игрока, в общем случае имеет вид

(7.23) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

где a_{ij} (i, j = 1 или 2) – действительные числа. (Напомним, что в игре с нулевой суммой выигрыши 2-го игрока равны $\{-a_{ij}\}$). Пусть игра не имеет равновесия в чистых стратегиях (см. выше), то есть седловой точки: ее нижняя (для первого игрока) цена α (7.18 а) и верхняя цена β (7.18 б) не совпадают. Найдем общий вид решения такой игры алгебраическим и графическим методами (см. [4] в списке литературы).

Алгебраическое решение

Предположим, что игрок А уже использует свою равновесную смешанную стратегию $p_A A_1 + (1-p_A)A_2$. Тогда при любой из двух стратегий (B_1, B_2) своего противника (как и при любой их комбинации) он получит одинаковый выигрыш: равновесную цену игры ν. (То же самое справедливо для игрока В). Запишем два уравнения

(7.24)
$$p_A a_{11} + (1-p_A)a_{21} = \nu \quad \text{выигрыш А при стратегии оппонента } B_1$$
$$p_A a_{12} + (1-p_A)a_{22} = \nu \quad \text{выигрыш А при стратегии оппонента } B_2.$$

В системе уравнений (7.24) можно вычесть второе уравнение из первого или просто приравнять их левые части. В обоих случаях получим одно и то же решение:

(7.24 а) $$p_A = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-(a_{12}+a_{21})}$$

(7.24 б) $$\nu = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-(a_{12}+a_{21})}$$

с естественными ограничениями на элементы платежной матрицы $a_{11} + a_{22} \neq a_{12} + a_{21}$, иначе знаменатели в формулах (7.21 а) и (7.21 б) обратятся в ноль. Для игрока В получим

(7.24 в) $$p_B = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-(a_{12}+a_{21})} .$$

Так, для антагонистической игры 2×2 с платежной матрицей

(7.25)
$$\begin{matrix} & B_1 & B_2 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(в которой $\alpha = \max(1, 2) = 2$ и $\beta = \min(5, 3) = 3$ – седловой точки нет)

$$p_A = \frac{2-5}{1+2-(3+5)} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

$$p_B = \frac{2-3}{1+2-(3+5)} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

$$\nu = \frac{1\cdot 2-3\cdot 5}{1+2-(3+5)} = \frac{-13}{-5} = \frac{13}{5}.$$

Таким образом, оптимальная (равновесная) стратегия А при многократном повторении этой игры – комбинация стратегий A_1 с вероятностью (частотностью) 3/5 (60%) и A_2 с вероятностью 2/5 (40%). В этом случае игрок А выиграет $\nu = 13/5$. Оптимальная стратегия В, приводящая к минимальному проигрышу ($-\nu$) при любых ходах А – это комбинация B_1 и B_2 с вероятностью 20% и 80% соответственно. В играх с матрицами платежей $n \times m$ вместо (7.24) записывают более сложную систему n уравнений и неравенств с m неизвестными ($n > m$), определяя вероятности $p_A^{(1)} + p_A^{(2)} + \ldots + p_A^{(m)} = 1$.

Графическое решение

Систему линейных уравнений (7.24) для игрока А можно представить графически в координатах a_{ij}/p_A (рис. 7.4). Отложим по оси абсцисс вероятность «смешивания» стратегий A_1 и A_2: при $p_A = 0$ реализуется чистая стратегия A_2, при $p_A = 1$ – стратегия A_1. Стратегиям оппонента B_1 и B_2 соответствуют прямые линии, соединяющие выигрыши А из матрицы платежей в его чистых стратегиях (соответственно a_{11} с a_{21} и a_{12} с a_{22}). Жирными отрезками выделены смешанные стратегии А. Максимальному выигрышу отвечает точка равновесия E: ее горизонтальная координата (абсцисса) показывает оптимальную для игрока А вероятность p_A^* (т.е. $1–p(A_1)^*$) а вертикальная координата (ордината) – его наибольший выигрыш, то есть решение игры ν. Горизонтальный отрезок MN позволяет найти вероятности равновесной стратегии $p(B_1)^* + p(B_2)^* = 1$ игрока В как отношение длин

$$p(B_1)^* = \frac{B_2M}{B_1B_2},\ p(B_2)^* = \frac{B_1M}{B_1B_2}\text{(слева)}\ \text{или}\ p(B_1)^* = \frac{B_2N}{B_1B_2},\ p(B_2)^* = \frac{B_1N}{B_1B_2}\ \text{(справа)}$$

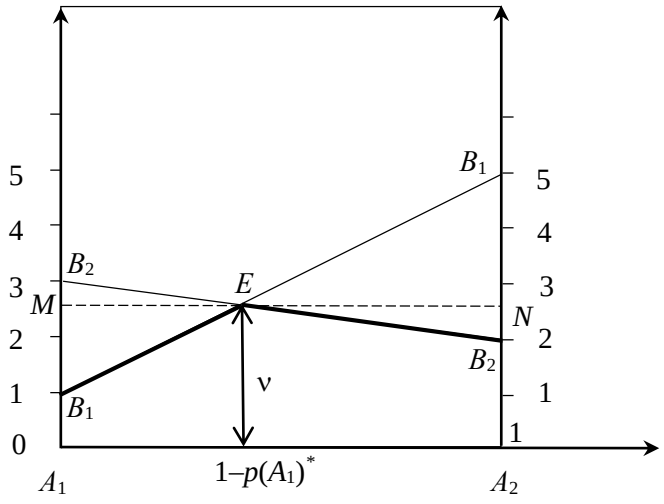


Рисунок 7.4. Графическое решение игры 2×2 в смешанных стратегиях: матрица платежей (7.25)

Наглядный графический метод решения можно распространить на антагонистические игры 2×n (и, соответственно, n×2), когда один из противников использует лишь две стратегии. Соответственно, на график с двумя вертикальными осями наносят несколько прямых линий, показывающих стратегии его оппонента (рис. 7.5). Если ломаная линия, отвечающая минимальному выигрышу A при разных вероятностях p_A смешивания двух его стратегий (она называется *минорантой*), имеет максимум, как на рис. 7.4 – те стратегии B, которые не пересекаются в точке максимума, можно исключить: задача сводится к равновесию Нэша в игре 2×2. Однако равновесие Нэша в смешанных стратегиях может отсутствовать (как на рис. 7.5) или соответствовать интервалу значений p_A, где при равновесной стратегии B выигрыш одинаков (отрезок миноранты параллелен оси абсцисс). Так, на рис. 7.5 цена игры ν соответствует равновесию Нэша в чистых стратегиях A_1 и B_1. Если же игрок A использует невыгодную для него смешанную стратегию (например, не зная матрицы платежей), в интервале $0 < p_A < p_A^{(1)}$ оптимальным ответом B будет чистая стратегия B_1, в интервале $p_A^{(1)} < p_A < p_A^{(2)}$ – стратегия B_2, а при $p_A^{(2)} < p_A < 1$ – стратегия B_3. На рис. 7.5 хорошо видно, что наименее выгодная для B стратегия B_4 не используется (доминируется).

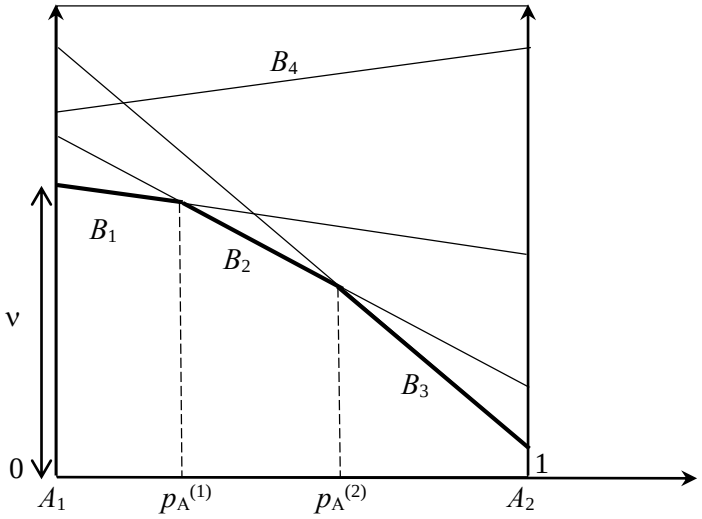


Рисунок 7.5. Графические решения игры 2×4

В ряде практических задач вероятности стратегий имеют смысл средних величин – например, транспортных потоков. Так, при расчете матриц корреспонденций *равновесие Уордропа* предполагает, что затраты на перемещение грузов или пассажиров по всем используемым маршрутам между двумя заданными пунктами одинаковы и меньше затрат на неиспользуемых маршрутах (гл. 6, раздел 6.1). Действительно, транспортную схему парадокса Браеса на рис. 7.6 (повторяющем рисунок 1.20 б в гл. 1) можно дополнить потоками машин между пунктами A и D по маршрутам с односторонним движением ABD (x_1), ACD (x_2) и ABCD (x_3), включающего бесплатный отрезок пути B→C, и задать цены перевозок на участках этой схемы:

$$P_{AB} = P_{CD} = \sum x_i$$
$$P_{AB} = P_{CD} = 1 \text{ (например, 1 тыс. руб.)}$$
$$P_{BC} = 0$$

Равновесию Нэша (Уордропа) соответствует система уравнений

$$x_1 + x_3 + 1 = x_2 + x_3 + 1 = x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad (7.26)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

где два первых – равновесные цены перевозок $P_{ABD} = P_{ACD} = P_{ABCD}$, а последнее – сумма всех долей потока (транспорт из A в D возможен лишь по этим трем маршрутам). Из первого равенства следует $x_1 = x_2$, из второго (в той же строке) $x_1 = 1 - x_3$. Подставив x_1 и x_2 в третье равенство, получим $2 - x_3 = 1$, то есть

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

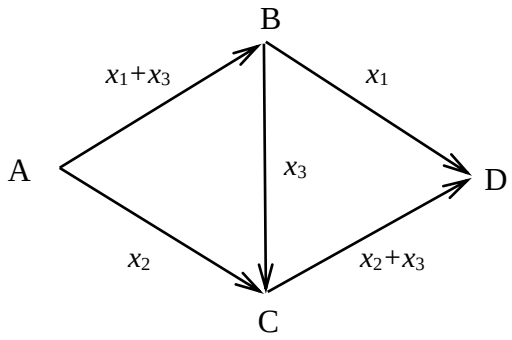


Рисунок 7.6. Потоки на транспортной схеме в парадоксе Браеса (см. гл. 1, рис. 1.20 б)

Итак, весь равновесный поток пройдет через бесплатную дорогу BC. Цена перевозок из A в D, в соответствии с (7.26), при этом составляет

$$P_{ABCD} = x_1 + x_2 + 2x_3 = 2.$$

Если же участок BC на рис. 7.6 перекрыт, остаются лишь два потока x_1 (ABD) и x_2 (ACD) с равновесной ценой $x_1 + 1 = x_2 + 1$. Учитывая $x_1 + x_2 = 1$, получим $x_1 = x_2 = 1/2$ и

$$P_{ABD} = P_{ACD} = 3/2$$

Таким образом, добавление пути B→C *ухудшает* транспортную ситуацию, увеличивая затраты на перевозки из A в D. В данном случае стратегиями игроков служат маршруты, а их вероятностям соответствуют потоки на ориентированном графе. Родственный класс задач, где игроки расположены в вершинах графа, а их взаимодействию соответствуют ребра (дуги), в литературе называются *играми на сетях*.

Игра полковника Блотто

Против лома нет приёма
пословица

Одна важнейших областей применения теории игр – военные науки. Здесь на большом эмпирическом материале установлены наиболее вероятные результаты столкновения сторон при различном соотношении их сил (прежде всего – численности и вооруженности армейских подразделений). Знаменитая игра апокрифического полковника Блотто, впервые представленная в литературе в 1921 г., рассматривает результаты противоборства сторон A

и B, которые могут распределить по N театрам военных действий фиксированные количества (соответственно X_A и X_B) одинаковых боевых единиц («полков»). При $X^{(i)}_A > X^{(i)}_B$ сторона A на i-м поле сражения уничтожает все выставленные против нее полки B, получая выигрыш $X^{(i)}_B + 1$ баллов (дополнительную единицу дает занятая позиция) – и наоборот. При $X^{(i)}_A = X^{(i)}_B$ столкновение заканчивается вничью и приносит сторонам по 0 баллов. Как принято у военных, собственные потери в случае победы «не считаются». Таким образом, это антагонистическая игра: выигрыш A равен проигрышу B.

В простейшем случае $N = 2$ легко проверить, что при $X_A \geq 2X_B$ игра имеет равновесие в чистых стратегиях, которому соответствует поражение слабейшей стороны. В самом деле, при $X_A = 6$, $X_B = 3$ и $N = 2$ сторона B может разместить три своих полка по участкам I и II четырьмя способами: (3, 0), (2, 1), (1, 2) и (0, 3). Любой из этих вариантов проигрывает размещению (3, 3) стороны A: ее выигрыш составит, соответственно, 0 + 1 = 1 (ничья на участке I и бескровная победа на участке II), (2 + 1) + (1 + 1) = 5 (уничтожение двух полков B на участке I и одного на участке II с победой в обеих точках), и аналогичные результаты (1 +1) + (2 + 1) = 5 и 1 + 0 = 1: возможные размещения полков A и B по участкам I и II симметричны. Минимальному проигрышу B (1 балл) отвечает комбинация стратегий (3, 3) стороны A и (3, 0) либо (0, 3) стороны B – это равновесие Нэша в чистых стратегиях. Другие размещения полков A не гарантируют победы (так, комбинация стратегий A (4, 2) и B (0, 3) дает результат (0 + 1) – (2 + 1) = –2: *выигрыш стороны B*), поэтому рациональный игрок не станет их использовать.

При $X_B < X_A < 2X_B$ равновесий в чистых стратегиях нет. Чтобы в этом убедится, построим матрицу платежей в случае X_A=4, X_B=3, N=2. Выпишем стратегии обеих сторон:

A: A_1 = (4, 0), A_2 = (3, 1), A_3 = (2, 2), A_4 = (1, 3) и A_5 = (0, 4)
B: B_1 = (3, 0), B_2 = (2, 1), B_3 = (1, 2), B_4 = (0, 3)

Выигрышам стороны A при всех возможных комбинациях стратегий двух сторон

A_1+B_1: 3 + 1 + 0 = 4, A_1+B_2: 2 + 1 – 1 = 2, A_1+B_3: 1 + 1 – 1 = 1, A_1+B_4: 1 – 1 = 0,
A_2+B_1: 0 + 1 = 1, A_2+B_2: 2 + 1 + 0 = 3, … и т.д.

соответствует прямоугольная платежная матрица 4×3:

Таблица 7.1

	B_1 = (3, 0)	B_2 = (2, 1)	B_3 = (1, 2)	B_4 = (0, 3)
A_1 = (4, 0)	4	2	1	0
A_2 = (3, 1)	1	3	0	–1
A_3 = (2, 2)	–2	2	2	–2
A_4 = (1, 3)	–1	0	3	1
A_5 = (0, 4)	0	1	2	4

Эта матрица не имеет седловой точки, то есть равновесие Нэша в чистых стратегиях отсутствует. Из табл. 7.1 видно, что интуитивное желание непрофессионала равномерно разделить превосходящие силы по двум участкам (стратегия A_3) дает наихудший результат: при одинаковой вероятности всех стратегий стороны B (по 25%) сумма выигрышей в строке

A_3 равна нулю. В случае равной вероятности распределений полков обеих сторон по всем позициям выигрыш A составит

$$2\cdot0.2\cdot(4\cdot0.25+2\cdot0.25+1\cdot0.25+0) + 2\cdot0.2\cdot(1\cdot0.25+3\cdot0.25+0-1\cdot0.25) + 0 = 0.4\cdot(1.75+0.75) = 1.0$$

Из точного решения системы линейных уравнений, заданных таблицей 7.1 (см. выше), которое мы не будем обсуждать, следует равновесие Нэша в смешанных стратегиях

$$A^* = \frac{4}{9}A_1 + 0\cdot A_2 + \frac{1}{9}A_3 + 0\cdot A_4 + \frac{4}{9}A_5$$

с более сложным набором оптимальных стратегий стороны B и ценой игры

$$\nu \approx 1.556$$

Таким образом, в рациональных условиях игры превосходящие силы гарантируют победу.

Антагонистические игры полковника Блотто с разнообразными способами оценки сил сторон и итогов их противоборства широко используют в военном и государственном планировании. На их основе разработаны *стратегические*, или *штабные игры*, где недетерминированное поведение противоборствующих сторон моделируют эксперты. В общем случае такие игры называются *играми разбиений*. В них решается задача о распределении ограниченных ресурсов по заданному набору позиций в условиях противодействия противников, которые решают ту же задачу. Многочисленные приложения таких игр, помимо военных наук, включают рыночную экономику, маркетинг, политические кампании и иные аспекты человеческой деятельности.

7.5. Непрерывные игры

Множества $\{X^{(i)}\}$ стратегий игроков не обязательно конечны. Например, в игре в нормальной форме на совпадение чисел (см. матрицу (7.19)) стороны A и B могут записать любые целые числа n_A и n_B: при их совпадении обе стороны получают выигрыш $n_A = n_B$. В этом случае у A и B бесконечно много возможных ходов; такие дискретные множества называются *счетными*. Нетрудно понять, что вероятность случайного совпадения двух чисел строго равна нулю, так как возможных несовпадающих комбинаций (n_A, n_B) бесконечно много. Но поскольку это не антагонистическая игра, рациональные и осторожные игроки сразу найдут решение в чистых стратегиях (0, 0). В этом случае игроки ничего не приобретают и ничего не теряют. Хотя все иные решения (n, n) тоже являются равновесиями Нэша, для игры в нормальной форме они недостижимы с практической точки зрения.

В других случаях ход игрока может соответствовать любой точке на отрезке числовой оси [a, b], на плоскости или в пространстве заданной размерности. Здесь тоже бесконечно много стратегий – притом они выбираются из непрерывного, или *континуального*, множества, мощность которого выше, чем у счетного множества чисел (см. разд. 3.1 главы 3). Тем не менее, игры с непрерывным множеством стратегий (часто называемые *непрерывными играми*, что может вызвать ошибку восприятия: сюда относятся и «одношаговые» игры в нормальной форме) в математическом смысле бывают «лучше»

конечных или дискретных. В этих играх можно ввести непрерывные алгебраические функции, максимумы и минимумы которых находят дифференцированием.

«Горизонтальная конкуренция», или мороженое на пляже

Два продавца мороженого А и В устанавливают свои лотки на пляже длиной в 1 км. Покупателей много, они равномерно распределены по длине пляжа. Каждый отдыхающий готов купить одну порцию мороженого в ближайшем к нему лотке; цена порции у А и В одинакова. Где должны поставить свои лотки продавцы А и В, чтобы получить максимальную выручку?

Мы видим, что это ситуация игры, в которой ходы А и В – точки X_A и X_B, в которых они устанавливают свои лотки. Таким образом, оба игрока выбирают свои ходы из непрерывного множества точек по всей длине пляжа $X_i \in [0, 1]$ (i = А, В). Выигрыш каждого из них равен той части пляжа, с которой к продавцу придут покупатели. Продавец А обслужит всех покупателей слева от своего лотка и тех, кто расположен между его лотком и средней точкой $\frac{1}{2}(X_A+X_B)$; к продавцу В придут все отдыхающие справа от средней точки (рис. 7.7).

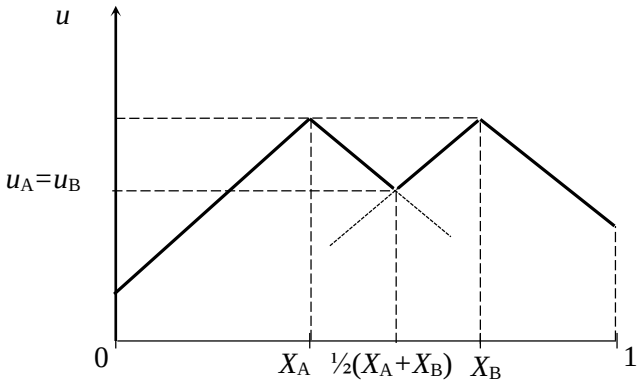


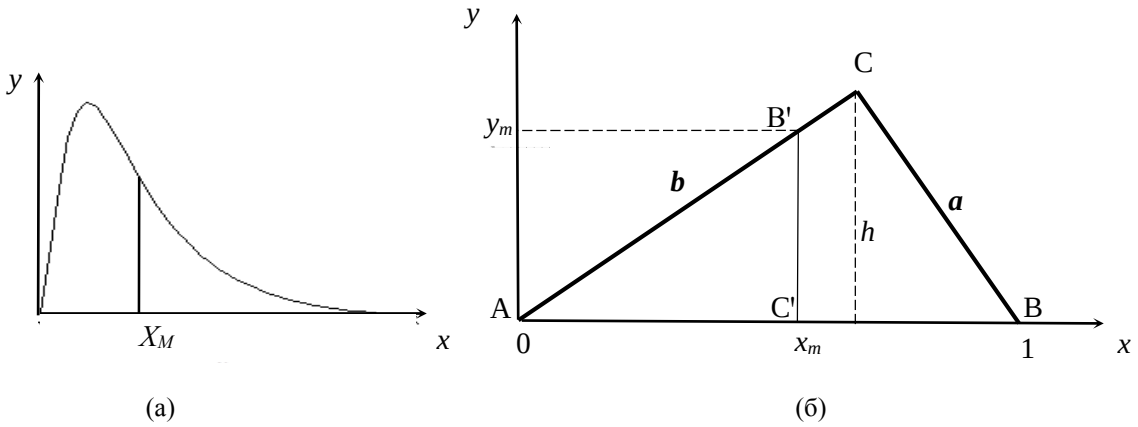
Рисунок 7.7. Расположение лотков с мороженым (X_i) и их полезность для покупателей $u(x)$

На рис. 7.7 доля пляжа у продавца В меньше – но он может ее увеличить, сдвинув свой лоток ближе к конкуренту А; средняя точка $\frac{1}{2}(X_A + X_B)$ при этом сместится. Повторяя смещения, легко убедиться, что оба продавца получат максимум выручки, установив свои лотки строго в центре пляжа. Любой сдвиг из этой точки уменьшит продажу мороженого. Таким образом, ситуация $X_A = X_B = \frac{1}{2}$ – равновесие Нэша в игре с непрерывным множеством ходов.

Этот несколько парадоксальный вывод позволяет понять, почему магазины конкурирующих фирм или разные автозаправки часто располагаются вплотную друг к другу. Заметим, что для покупателей мороженого гораздо удобнее «равномерное» распределение лотков по пляжу $X_A = \frac{1}{4}$, $X_B = \frac{3}{4}$ – полезность лотка тем выше, чем меньше до него идти (см. рис. 7.7). Таким образом, «общественный оптимум» в результате конкуренции устанавливается далеко не всегда. Оптимумом для продавца является положение в точке «медианного покупателя», в обе стороны от которой интегральное количество покупателей одинаково. В рассмотренном случае отдыхающие распределены по пляжу равномерно – но если это не так, медианная точка сместится от центра и именно в ней расположатся продавцы. Задача о мороженом на пляже имеет многочисленные

приложения в экономике, политологии, моделировании избирательных кампаний и др.; некоторые мы рассмотрим в 9-й главе.

ЗАДАЧА 7.6. Установите положение медианного покупателя, если распределению отдыхающих соответствует прямоугольный треугольник (рис. 7.8 б: предположим, что в точке максимума C установлены кабинки для переодевания). Заметим, что на рис. 7.8 по оси ординат отложена плотность покупателей на единицу расстояния вдоль пляжа, а не полезность расположения для них лотков с мороженым, как на рис. 7.7.



(а) (б)

Рисунок 7.8. Медианная точка X_M распределения покупателей по пляжу: (а) общий случай, (б) в условиях задачи 7.6, см. текст

Решение. Для произвольного распределения покупателей по пляжу $f(x)$, где $x \in [0, 1]$, медианная точка X_M определяется равенством интегралов

$$\int_0^{x_m} f(x)dx = \int_{x_m}^1 f(x)dx$$

(то есть равны площади под кривой $f(x)$ слева и справа от точки x_m, рис. 7.8 а). В нашем случае (рис. 7.8 б) распределению $f(x)$ соответствует прямоугольный треугольник ABC с длинами сторон $l_{AB}=1$, $l_{BC}=a$ и $l_{AC}=b$ и высотой h. Обозначим медианную точку с координатой X_M буквой C'. Линия B'C' разрезает треугольник ABC на прямоугольный треугольник AB′C′ и неправильный четырехугольник BCB′C′, имеющие одинаковую площадь:

$$S_{AB'C'} = S_{BCB'C'} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Чтобы найти x_m, надо решить задачу по планиметрии.

(7.27 а) $$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}h \cdot 1$$

(7.27 б) $$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}x_m y_m = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{h}{4}$$

с условием $a^2 + b^2 = 1$ по теореме Пифагора. Прямоугольные треугольники ABC и AB'C' подобны, длины их соответственных сторон (AB:AB', BC:B'C' и AC:AC') относятся как $\sqrt{2}:1$. Поэтому $x_m^2 + y_m^2 = ½$. Из (7.23 б) следует $x_m y_m = h/2$, то есть $y_m = h/(2x_m)$. Тогда теорема Пифагора для треугольника AB'C' принимает вид

(7.27 в) $$x_m^2 + \frac{h^2}{4x_m^2} = \frac{1}{2},$$ откуда следует $$4x_m^4 - 2x_m^2 + h^2 = 0$$

Биквадратные уравнения вида (7.27 в) входят в школьную программу. Заменой переменных $z = x_m^2$ (7.27 в) приводится к квадратному уравнению

$$4z^2 - 2z + h^2 = 0,$$

корни которого дают координату медианной точки x_m:

(7.27 г) $$x_m^2 = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{1-4h^2}}{4}.$$

Правая сторона равенства (7.27 г) всегда положительна, так как $h \le ½$ (все прямоугольные треугольники ABC можно вписать в круг: они *опираются на диаметр* единичной длины). Имеют смысл только два положительных корня x_m, которые отвечают медианным точкам справа и слева от середины отрезка [0, 1]: в условиях задачи положение вершины C относительно этой середины не было указано.

ЗАДАЧА 7.7. Полезность лотка в точке X_i (i = A, B) для покупателя в точке x пляжа $u(x) = 1–|X_i–x|$ (см. рис. 7.7). Найдите положения лотков, отвечающих максимуму полезности для покупателей.

Борьба за ренту

Два конкурента A и B стремятся получить доступ к неделимому источнику дохода (ренте) размером R. Средства, выделенные ими для достижения этой цели, составляют r_A и r_B. Вероятность выигрыша каждого из них равна

(7.28) $$P_i = \frac{r_i^\alpha}{r_A^\alpha + r_B^\alpha},$$

где i = A, B; $\alpha > 0$ – параметр модели. В реалистическом примере две фирмы хотят открыть свои магазины в поселке, администрации которого нужен лишь один магазин, и готовы потратить суммы r_A и r_B на «лоббирование» – иначе говоря, на подкуп администрации. Следует определить оптимальные размеры этих сумм.

Это еще один пример игры с непрерывным множеством ходов $r_i \in [0, R]$ (обоим игрокам невыгодно тратить больше, чем размер самой ренты). Поскольку вероятность выигрыша игроков одинаково зависит от затрат, их оптимальные затраты тоже будут одинаковы. Оценка выигрыша (полезности) для каждого из них

(7.29) $$u_i = P_i R - r_i = \frac{r_i^\alpha}{r_A^\alpha + r_B^\alpha} R - r_i$$

(игрок получает ренту R с вероятностью P_i, достоверно затратив r_i своих средств).

Чтобы не запутаться в подстрочных индексах, назовем r_A переменной x, а r_B – переменной y. Уравнения (7.29) приобретут более простой вид:

(7.29 а) $$u_x = \frac{x^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha} R - x$$

(7.29 б) $$u_y = \frac{y^\alpha}{x^\alpha + y^\alpha} R - y$$

В точке равновесия Нэша (x^*, y^*) выигрыши u_x и u_y достигают максимума по «своим» переменным. Если x и y непрерывные величины, первые производные в максимуме равны нулю:

$$\partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial y = 0$$

Дифференцируя (7.29 а) по переменной x, получим

(7.30) $$\partial u_x / \partial x = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\alpha}{(x^\alpha + y^\alpha)^2} R - 1 = 0$$

(для производной $\partial u_y/\partial y$ надо в (7.30) поменять местами x и y). Решению уравнения отвечает равновесие Нэша:

(7.30 а) $$(x^*, y^*) = (\frac{\alpha R}{4}, \frac{\alpha R}{4})$$

Мы пришли к обескураживающему результату. При $\alpha = 1$ рациональные игроки безвозвратно отдают по четверти стоимости искомой ренты, после чего могут ее получить с вероятностью 50% – см. формулу (7.28). Здравый смысл подсказывает, что конкурентам выгоднее разыграть приз в орлянку или как-то иначе договориться между собой до обращения к администрации поселка. Более того: с увеличением степени α «плата за ренту» возрастает, так что ожидаемый выигрыш (7.29 а, б) при $\alpha = 2$ становится нулевым, а при $\alpha > 2$ отрицательным. С увеличением числа игроков $N > 2$ сумма их непроизводительных выплат приближается к R. В неоклассических учебниках «борьбой за ренту» иллюстрируют экономический вред коррупции. Не в меньшей степени эта схема позволяет утверждать, что жесткие условия конкурсов способствуют сговору конкурентов (см. следующий раздел).

Потенциальные игры

В ситуациях «борьбы за центр» и «борьбы за ренту» выигрыши одного из игроков (x_1) или (x_2) при фиксированном ответе второго (y_0) определяются только положениями точек (x_1, x_2) на отрезке [0, R] (в задаче о продавцах мороженого $R = 1$) и не зависят от других обстоятельств. Иначе говоря, непрерывная функция выигрыша (полезности) $u(x, y_0)$ при $y_0 = \text{const}$ однозначно зависит от переменной x наподобие зависимости потенциальной энергии частиц от их координат $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в гравитационном или электростатическом поле

$$U = \alpha\varphi(\mathbf{r}),$$

где множителем α обозначены, соответственно, масса или заряд частицы, а функция $\varphi(\mathbf{r})$ задается природой поля и геометрией физической системы (см. часть 1). На этой аналогии основано определение *потенциальной игры*, в которой изменение выигрыша i-го игрока при изменении его стратегии (хода) определяется как

(7.31) $$r_i(s_i, s_{-i}) - r_i(s_i', s_{-i}) = P(s_i, s_{-i}) - P(s_i', s_{-i})$$

(в формуле (7.31) s_i и s_i' - разные ходы i-го игрока, а s_{-i} – одинаковая совокупность ходов остальных N–1 игроков). В этом случае функция $P(s_1, s_2, \ldots, s_N) = P(\mathbf{s})$ называется

потенциалом игры. Подобно неопределенному интегралу, ее можно задать лишь с точностью до произвольной постоянной: если $P(\mathbf{s})$ – потенциал, то потенциалом является и любая функция $P(\mathbf{s})+C$. Если же функции выигрыша $r_i(\mathbf{s})$ и, соответственно, потенциал $P(\mathbf{s})$ – непрерывные функции, то, аналогично физическому потенциалу

(7.32) $$\frac{\partial r_i}{\partial s_i} = \frac{\partial P}{\partial s_i}$$

Во всех конечных играх с континуальным множеством ходов S и непрерывными функциями выигрыша $\{r_i(\mathbf{s})\}$ существует равновесие Нэша. Ему соответствует максимум потенциала

$$\frac{\partial P}{\partial s_1} = \frac{\partial P}{\partial s_2} = \cdots = \frac{\partial P}{\partial s_N} = 0.$$

В частности, это распространяется на равновесие в смешанных стратегиях, где непрерывной переменной служит вектор значений вероятностей (p_1, …, p_k). Большинство уже рассмотренных нами игр – потенциальные.

Дуополия Курно

Важное место в математических моделях экономики занимает «несовершенный рынок» с малым числом конкурирующих экономических агентов: *олигополия*. В модели Курно[*] конкурирующие фирмы – в простейшем случае их две (дуополия) – выпускают разные количества (Q_1 и Q_2) одинаковой продукции и продают ее по одинаковой цене, которая зависит от суммарного количества товара на рынке. Прибыль каждой фирмы определяется соотношением «выручка от продажи товара минус расходы на его производство»

(7.33) $$r_i = P(Q_1 + Q_2)Q_i - c_i Q_i,$$

где $i = 1, 2$, $P(Q_1 + Q_2)$ – зависимость цены от предложения, или кривая спроса, одинаковая для обеих фирм (см. разд. 1.5.1 в гл. 1), и $c_i > 0$. В рамках неоклассических экономических теорий $P(Q)$ – убывающая функция. Полагая для простоты эту функцию линейной и заменяя (с той же целью) обозначения переменных $Q_1 = x$, $Q_2 = y$, перепишем уравнения (7.33) в виде

(7.33 а) $$r_x = [a - (x + y)]x - c_1 x = (a - y - c_1)x - x^2$$
$$r_y = [a - (x + y)]y - c_2 y = (a - x - c_2)y - y^2.$$

Уравнения (7.33 а) соответствуют потенциальной игре, где выигрыши r_x и r_y задаются одной из двух непрерывных переменных при фиксированной второй переменной по формуле (7.33). Точка равновесия определяется дифференцированием

(7.34) $$\frac{\partial r_x}{\partial x} = a - y - 2x - c_1 = 0$$
$$\frac{\partial r_y}{\partial x} = a - x - 2y - c_2 = 0.$$

[*] Решение этой задачи было опубликовано французским математиком Антуаном Курно в 1838 г., то есть почти за столетие до возникновения теории игр.

Решая систему линейных уравнений (7.34) относительно переменных x и y, получим равновесные величины выпуска продукции

(7.34 а)
$$x^* = Q_1{}^* = \frac{a-2c_1+c_2}{3}$$
$$y^* = Q_2{}^* = \frac{a+c_1-2c_2}{3}$$

Решение (7.34 а)* имеет смысл только в том случае, если $Q_1{}^*$ и $Q_2{}^*$ положительны (рис. 7.9 а). Если же издержки производства на выпуск единицы продукции $c_1 \geq (a + c_2)/2$ или $c_2 \geq (a+c_1)/2$ – производство первой либо, соответственно, второй фирмы нерентабельно и прямые линии зависимостей $Q_1(Q_2)$ и $Q_2(Q_1)$ на графике не пересекаются. В этом случае для неконкурентоспособной фирмы равновесной стратегией является $Q_i = 0$, то есть уход с рынка (рис. 7.9 б).

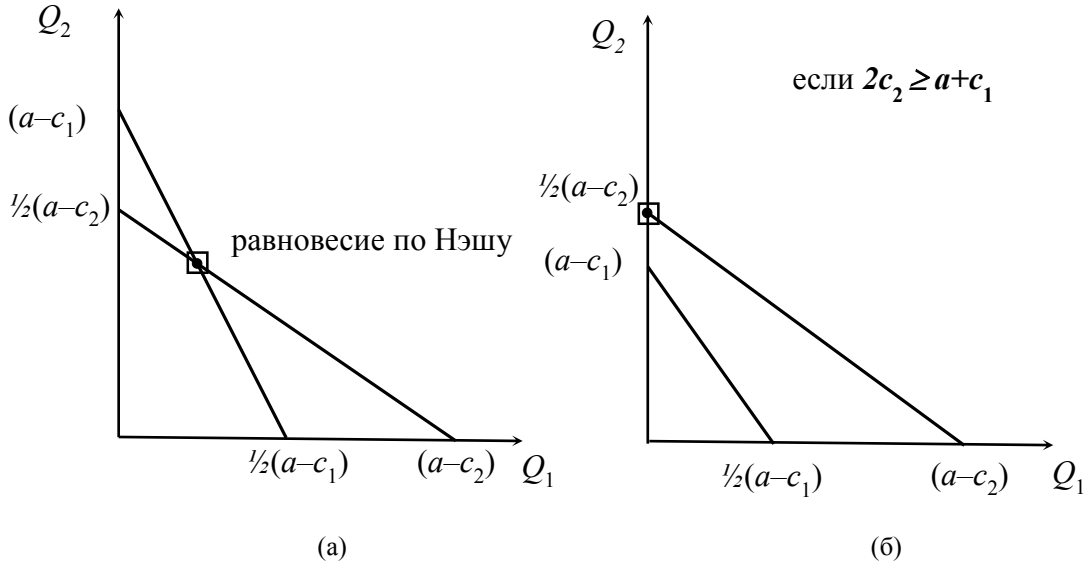


Рисунок 7.9. Дуополия Курно: (а) «внутреннее» равновесие по Нэшу для конкурентоспособных фирм; (б) уход с рынка неконкурентоспособной фирмы

ЗАДАЧА 7.8. Решите систему уравнений (7.34).

7.6. Другие виды некооперативных игр

До сих пор мы рассматривали только игры в нормальной форме, где все агенты одновременно делали однократные ходы – либо их неограниченное повторение, при котором становятся возможными смешанные стратегии. Но такие общеизвестные игры, как шахматы, шашки или домино, проходят иначе: они завершаются через конечное число туров (т.е. действий игроков). По существу эти игры протекают в дискретном времени, на каждом шаге которого один из агентов делает свой ход в обстановке, ставшей результатом

* В левой части формул (7.34 а) стоит валовый выпуск товара (например, штук в день), в правой – удельные затраты (например, руб./шт.). Это несоответствие размерности и масштаба величин возникает из-за использования модельной функции цены $P(Q) = a – b(Q_1+Q_2)$ без необходимого уточнения $b = 1$ (руб.×день)/(шт.^{2}). «Стилизованные» переменные в математических моделях экономики и политологии могут не соответствовать размерности задачи.

всех предыдущих ходов. Они называются *позиционными играми*, или *играми в развернутой форме*.

Наглядный образ подобной игры двух агентов А и В дает *дерево игры*: граф, каждая вершина которого соответствует определенной комбинации ходов. Начальная вершина, т.е. корень дерева, соединена со всеми вариантами первого хода первого игрока (А), а конечные вершины-листья показывают результаты игры (выигрыш А, выигрыш В либо ничью) при всех возможных сочетаниях предшествующих ходов. Путь от корня дерева до его листа называется *партией*. Учитывая, что на i-й ход игрока А его оппонент В может дать n^{B}_{i} ответных ходов и принимая для простоты $n^{A}_{i} = n^{B}_{i} = 4$ при любом i, получим, что всего лишь пять ходов А и ответов на них В порождают более миллиона ($4^{10}=(1024)^2=1048576$) игровых ситуаций. Рассмотрим один из простейших примеров подобной игры.

Крестики-нолики на доске 3×3

В этом популярном развлечении школьников на уроке побеждает сторона А («крестики») либо В («нолики»), которой удалось поставить в пустых клетках доски три одинаковых символа по горизонтали, вертикали или диагонали. В центральной клетке (поле *a* на рис. 7.10) пересекаются четыре такие «тройки» клеток, в угловых клетках (поле *b*) три, а на боковых клетках (поле *c*) – только две «тройки». Каждый игрок стремится занять наиболее перспективные клетки; главной из них, как в шахматах, является центр, т.е. клетка *a*. Если же противник уже поставил на прямой линии два крестика либо нолика, от проигрыша спасает единственный ход: разрушить «тройку», занимая своим символом ее свободное поле. Поэтому из 765 геометрически различных вариантов заполнения клеток на доске 3×3 имеется лишь 24 комбинации рациональных ходов, каждая из которых – шаг на пути к ничьей.

b	***c***	
	a	

Рисунок 7.10. Поле игры «крестики-нолики»

Дерево оптимальных ходов в игре, начинающихся с «крестика» в поле *a* и «нолика» в поле *b,* показано в правой часть рис. 7.11. При ошибочном первом ответе «нолик в поле *c*» (левая часть дерева) «нолики» проигрывают, при ответе в поле *b* и последующих правильных ходах удерживают ничью. Таким образом, игра несимметрична: «крестики» имеют сильное преимущество первого хода. Подобное (но более слабое) преимущество есть у белых в шахматах (*темп*) и у той стороны военного конфликта, которая первой открывает огонь.

В математических терминах «крестики-нолики» – детерминированная конечная игра с полной информацией и нулевой суммой. В некоторых популярных играх используют разные варианты случайных процессов: тасуют колоду карт, бросают кубик при игре

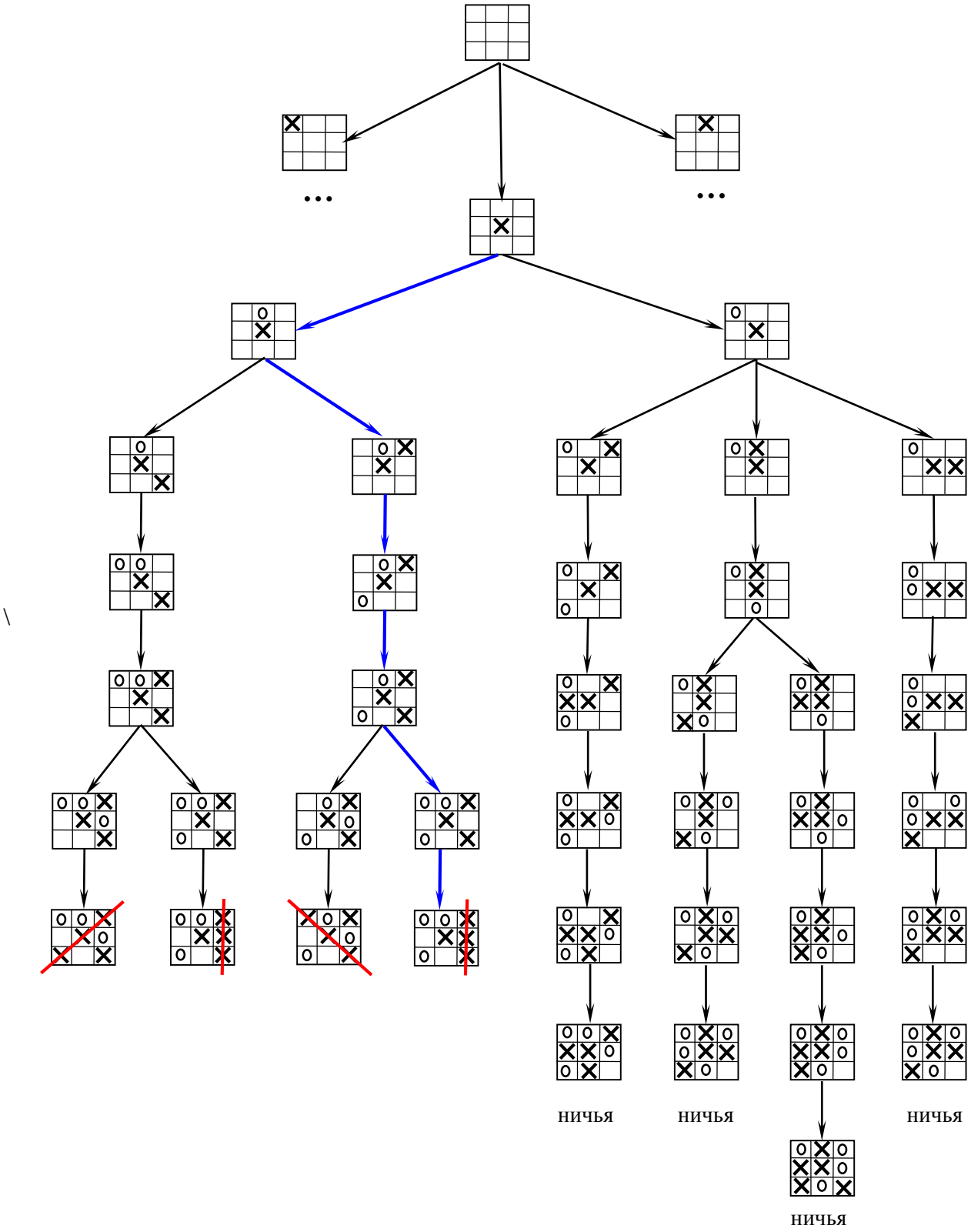


Рисунок 7.11 Дерево игры «крестики-нолики», правая часть – в рациональных ходах. Синими стрелками выделена одна из партий

в нарды и т.д. Дерево решений в принципе содержит все возможные исходы игры, но его построение перебором вариантов может оказаться сложной задачей даже для суперкомпьютеров (шахматы). В таких случаях часто применяют эвристики, позволяющие найти субоптимальные решения при меньших вычислительных затратах.

– По правилам аукционного торга – звонко выкрикнул аукционист – лицо, отказавшееся уплатить полную сумму за купленный им предмет, должно покинуть зал… Па-апрашу вас! Остап все-таки не вставал. Таких ударов он не испытывал давно.
И. Ильф, Е. Петров. «Двенадцать стульев»

Главный плутовской роман советского времени, процитированный в эпиграфе, рисует аукцион как маргинальный пережиток капитализма в нэповском СССР 1920-х годов. Тем не менее, продажи на аукционе «незапланированных» товаров, не имеющих твердо установленной цены – например, конфискованных государством либо изъятых у должника кредиторами – проводились с античных времен; в частности, они существовали во всех странах с социалистической экономикой. В настоящее время многочисленные варианты аукционов (товарные, валютные, аукционы ценных бумаг, тендеры, конкурентные закупки и др.) широко используются для заключения сделок по товарам и услугам. Участники аукциона соревнуются в праве приобрести либо продать некоторый заданный *лот*, предлагая за него свою цену. В соревновании побеждает предложивший максимальную сумму денег за товар – либо, как в розыгрыше тендера, минимальную сумму за определенную работу, затем выполняемую с соответствующим качеством.

Известны многие виды аукционов, которые различаются правилами торга; некоторые из них считаются классическими. В *открытых аукционах* участникам известны все заявки (ставки), сделанные конкурентами. В *закрытых аукционах* (например, на продажу крупной собственности) ставки участников не разглашаются. В *аукционе первой цены* побеждает предложивший самую высокую цену за выставленный лот. *Английским аукционом* называется открытый аукцион первой цены, в котором конкуренты повышают ставки; именно в нем потерпели фиаско герои романа «12 стульев». В *аукционе второй цены* победитель платит за лот следующую за максимальной сумму – т.е. меньшую той, которую он предложил.

Открытый аукцион второй цены, где используется эта схема, также называется *голландским аукционом*: так, в частности, продают партии тюльпанов в Голландии. В его начале продавец (аукционист) назначает несообразно высокую цену лота, а затем постепенно снижает ее до появления первого покупателя. Закрытый аукцион второй цены называется *аукционом Викри* в честь американского экономиста Уильяма Викри, который предложил его теоретическое описание. Используются и многие другие схемы аукционной торговли – в частности, американский *злой аукцион*, где сделанные ставки участникам не возвращаются. В чистом виде он применяется редко, хотя его элементы присутствуют в большинстве конкурсов (например, на получение гранта): расходы на составление заявок не компенсируются.

В математическом смысле аукцион – это игра с непрерывным множеством стратегий, где ходами участников служат предлагаемые ими числа (ставки). В классическом английском аукционе участники могут делать некоторое заранее не определенное, но всегда конечное число ходов. В закрытых аукционах и конкурсах у каждого игрока лишь один ход: указанная им цена заявки. Игрок выбирает свой ход из множества чисел, ограниченного сверху той максимальной суммой, которую он (допустим, рационально)

устанавливает для себя. Настоящая стоимость лота неизвестна; нередко ее и не существует. Участнику торга не известны и оценки лота другими покупателям, а в «одноразовом» закрытом аукционе – размеры поданных ими заявок. Иными словами, в аукционах велика роль неопределенности.

Как впервые показал У. Викри, участникам аукциона второй цены невыгодно предлагать ставку выше собственной оценки стоимости лота. Действительно, оценка этой стоимости i-м участником торга v_i (от англ. value) может быть выше или ниже сделанной им ставки b_i (от англ. bid). Если эта ставка окажется максимальной ($b_i = b_1$), лот достанется i-му участнику по цене $b_2 < b_1$, следующей по убыванию ставки. Субъективно оцениваемый выигрыш победителя

$$r_i = v_i - b_2 > v_i - b_i$$

может быть положительным или отрицательным (т.е. проигрышем); в любом случае выигрыш тем меньше, чем больше сделанная ставка b_i (рис. 7.12 а). Таким образом, выигрыш победителя положителен ($r_i > 0$) только в том случае, если его ставка

$$b_i \le v_i$$

– но при строгом неравенстве этот выигрыш может отобрать другой («j-й») конкурент, предложив $b_j > b_i$ (рис. 7.12 б). Если же «наш» i-й участник проигрывает торг ($b_i < b_1$), этот исход возможен при любом размере его заявки. Таким образом, для всех участников голландского аукциона доминирующей стратегией является их субъективная оценка стоимости лота

(7.35) $$\{b_i = v_i\} \text{ для всех } i,$$

которая оставляет надежду на выигрыш $v_i - b_2 > 0$ и создает иллюзию объективного определения разыгрываемой стоимости.

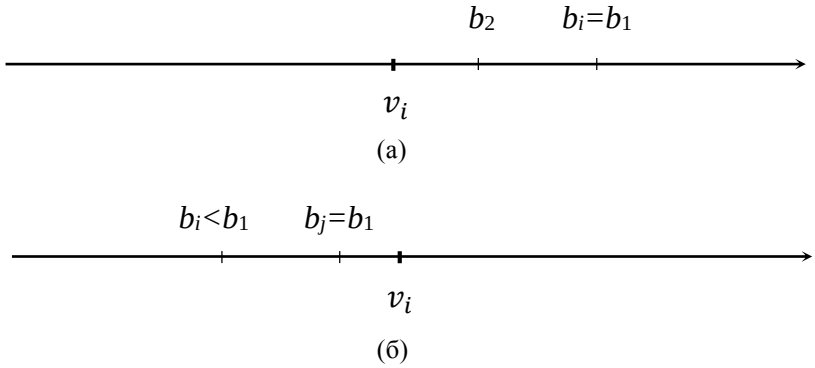


Рисунок 7.12. Результаты аукциона второй цены для i-го игрока, v_i – его оценка стоимости лота: (а) $b_i = b_1 > v_i$, $v_i < b_2 < b_1$ – проигрыш в цене $r_i = v_i - b_2 < 0$; (б) $b_i < v_i$ и $b_i < b_j < v_i$ – проигрыш аукциона, лот достается j-му игроку по цене b_i

Более общее утверждение, которое мы здесь не доказываем, распространяет оптимальные размеры заявок (7.35) на любой аукцион с однотипными оценками стоимости лота всеми участниками $\{b_i\}$, их достаточной платежеспособностью ($v_i < m_i$, где m_i – сумма, имеющаяся у i–го участника) и отсутствием духа азартной игры. Во всех таких

аукционах *ожидаемый доход аукциониста*, ради которого и устанавливают правила торга, оказывается одинаковым.

Повседневный здравый смысл тоже подсказывает, что участникам аукциона невыгодно как завышать собственную цену лота (в случае выигрыша эту сумму придется заплатить), так и ее занижать, уменьшая конкурентоспособность своей ставки. Тем не менее, разработкой правил торгов, которые увеличивают доход от продаж, препятствуя искажению информации и сговору участников, с начала XXI века занимались многие видные экономисты. Данное направление, в настоящее время называемое *дизайном механизмов* и подкрепленное серией премий им. Альфреда Нобеля по экономике, имеет серьезную материальную основу.

Приватизация государственной собственности, происходившая в 80-е и 90-е годы XX века во всем мире (а не только в бывших социалистических странах), сопровождалась массовым заключением торговых сделок через биржи и аукционы – т.е. отходом от рыночного ценообразования. В отличие от «идеального» неоклассического рынка, на котором продавцы конкурируют за покупателя, аукционы, как конкурсы покупателей, способствуют не снижению, а завышению цен – и, как следствие, возрастанию социальной поляризации. Новые биржевые и аукционные механизмы фактически создаются для того, чтобы хозяйственная деятельность после внедрения в нее элементов казино оставалась планируемой и управляемой. Кризисные явления современной экономики будут нами рассмотрены в следующей главе.

7.6.1. Игры с неполной информацией

Закрытый аукцион – лишь один из примеров игры, в которой агенты не имеют полной информации о действиях соперников. В реальной жизни противоборствующие стороны практически никогда не обладают полной информированностью (как и абсолютной рациональностью – это мы обсудим в конце раздела). Недостаток информации агенты вынуждены восполнять вероятностными оценками состояния и исхода игры. Подобные *игры с неполной информацией* называются *стохастическими* или *байесовскими* играми либо *играми с Природой*. Одним из виртуальных игроков в них фактически является генератор случайных чисел, который (как в игре «Орел или решка») определяет выигрыши агентов.

Полицейский и подозреваемый

Американская уголовно-правоохранительная фактура в теории игр не исчерпывается «Дилеммой заключенного». В другой модельной ситуации вооруженный полицейский пытается задержать подозреваемого, который с вероятностью p может быть вооруженным бандитом, а с вероятностью $1–p$ – добропорядочным гражданином (тоже вооруженным), случайно оказавшимся на пути правосудия. В этом случае параметром $0 < p < 1$ объединены две биматричные игры 2×2 со стратегиями (действиями) «стрелять» (с) и «не стрелять» (н). Действиям и выигрышам подозреваемого в обеих матрицах отвечают строки из первых чисел в матрице, действиям и выигрышам полицейского – столбцы из вторых чисел

(7.36 а)

преступник		с	н
	с	0, 0	2, −2
	н	−2, −1	−1, 1

(7.36 б)

невиновный		с	н
	с	−3, −1	−1, −2
	н	−2, −1	0, 0

Величины выигрыша в матрицах отражают приоритеты сторон. Полицейский предпочтительно обходится без стрельбы даже при задержании преступника, тогда как в матрице бандита (7.36 а) строго доминирует строка «стрелять», а в матрице невиновного гражданина (7.36 б) – строка «не стрелять». Вероятность p того, что задерживаемый окажется бандитом, не только известна полицейскому; она является *общим знанием*: оба типа задерживаемых тоже знают это число, а также знают, что об их знании осведомлен полицейский, и т.д. ad infinitum. Кроме того, не вполне информированные игроки неограниченно рациональны – что тоже является общим знанием. Правда, эти обстоятельства, важные для общего случая стохастической игры, здесь несущественны: в соответствии с доминирующими стратегиями преступник обязательно выстрелит, а невиновный стрелять не будет. Выстрелит ли полицейский?

Этот интересный вопрос решается вычислением сумм ожидаемых выигрышей от обеих стратегий полицейского при доминирующих стратегиях двух типов подозреваемых с вероятностями p и $1–p$ в качестве весовых множителей:

«стрелять»: $R = 0\cdot p + (–1)\cdot(1–p) = p–1$

«не стрелять»: $R = (–2)\cdot p + 0\cdot(1–p) = –2p$

Оба значения ожидаемого выигрыша отрицательны, но это не главное. Из них можно составить неравенство, определяющее, при какой вероятности встречи с бандитом полицейскому выгоднее стрелять:

$p–1 > –2p$, то есть при $p > 1/3$

(это не универсальный закон: пороговую вероятность определяют платежные матрицы (7.36 а, б)).

Мы видим, что в матричной неантагонистической игре 2×2, дополненной вероятностной оценкой, решение полицейского «стрелять» или «не стрелять» в обоих случаях порождает четыре (а не две) возможные ситуации, каждой из которых соответствует своя комбинация выигрышей у сторон конфликта. В общем случае в игре с неполной информацией наборы стратегий n игроков $\{X_i\}$ и соответствующих им выигрышей $\{R_i\}$ оказываются больше, чем в аналогичной детерминированной игре. Чтобы это учесть, в абстрактное определение игры (7.1) добавляют *множество типов* каждого игрока $T=\{t^{(i)}_1, t^{(i)}_2, \ldots, t^{(i)}_k\}$, известных лишь с некоторой вероятностью $p(t^{(i)}_1)$, … $p(t^{(i)}_k)$ (с условием $\sum p^{(i)}_j = 1$).

Γ = {G, X, T, R} + набор *априорных* и всем известных вероятностей $\{ p(t^{(i)}_k) \}$.

Выигрыши $\{r^{(i)}[t_i,\ x^{(i)}_j,\ X^{(-i)}]\}$ теперь зависят не только от выбора каждым игроком определенного хода, а еще и от типа игрока – как в приведенном выше примере два типа подозреваемых (преступник и невиновный) по-разному используют свой шанс выстрелить в полицейского. На основе известных вероятностей можно вычислить ожидаемый выигрыш i-го игрока, имеющего тип t_i, при его ходе $x^{(i)}_j$ и комбинации ходов всех остальных игроков $X^{(-i)}$

$$\tilde{r}^{(i)}_j = \sum_{(\text{все } T_{-i})} p(t_i|T_{-i}) \cdot r^{(i)}(t_i, x^{(i)}_j, X^{(-i)}) \tag{7.37}$$

(мы обозначили t_i тип i-го игрока, T_{-i} – совокупность (*профиль*) типов остальных игроков, о которых i-й игрок знает лишь их вероятности). Если известны выигрыши каждого игрока при всех его типах, каждом ходе и всех ответах остальных игроков ($X^{(-i)}$), а также *условные вероятности* (см. далее главу 8) $p(t_i|T_{-i})$ реализации типа t_i при всех возможных профилях T_{-i}, формула (7.37) дает вероятностные оценки результатов стохастической игры. Благодаря наличию непрерывных переменных (вероятностей) в стохастической игре всегда имеется равновесие, называемое *равновесием Байеса-Нэша*. Это справедливо и для игр с непрерывными множествами ходов (стратегий).

Дуополия Курно с неполной информацией

В разделе 7.5 были найдены условия «внутреннего» равновесия в дуополии Курно: как поделят рынок две конкурентоспособные фирмы, выпускающие одинаковую продукцию (формула (7.34 а)). При этом предполагалось, что их затраты на производство единицы продукции c_1 и c_2 (формула (7.33)) известны руководству обеих фирм. Теперь предположим, что первая фирма не знает затрат второй фирмы, которые могут принимать два значения, низкое (c_2') либо высокое (c_2'') – она может лишь оценить их вероятности:

низкие затраты c_2' – с вероятностью p
высокие затраты $c_2'' > c_2'$ – с вероятностью $1–p$

(«встретить или не встретить динозавра на улице»). При этом вторая фирма точно знает затраты первой c_1 вместе с ее оценкой вероятности p, и исходя из них планирует свой выпуск Q_2. Обе фирмы стремятся к максимуму своей оцениваемой прибыли (ее *математического ожидания*)

Фирма №1: $[a - (Q_1 + \langle Q_2\rangle)]Q_1 - c_1Q_1 \to \max,$
Фирма №2: $[a - (Q_1 + \langle Q_2\rangle)]\langle Q_2\rangle - \langle c_2\rangle\langle Q_2\rangle \to \max,$

(см. формулы (7.33 а)), где треугольными скобками обозначены средние значения затрат и выпуска второй фирмы. Снова обозначим $Q_1 = x$, $\langle Q_2\rangle = y$ и

$$\langle c_2\rangle = pc_2' + (1–p)c_2''$$

и повторим расчет по формулам (7.33) и (7.34). Для равновесных объемов выпуска получим

$$\begin{aligned} x^* &= {Q_1}^* = \tfrac{a-2c_1+pc_2'+(1-p)c_2''}{3} \\ y^* &= {Q_2}^*(c_2') = \tfrac{a+c_1-2c_2'}{3} - \tfrac{1-p}{6}(c_2'' - c_2') \\ y^* &= {Q_2}^*(c_2'') = \tfrac{a+c_1-2c_2''}{3} + \tfrac{p}{6}(c_2'' - c_2') \end{aligned} \tag{7.38}$$

Таким образом, равновесный выпуск первой фирмы в условиях неполной информации соответствует формуле (7.34 а) с подстановкой в нее средних ожидаемых издержек конкурента $\langle c_2\rangle$. Равновесный выпуск второй фирмы, учитывающей, что конкурент оценивает себестоимость ее продукции лишь на уровне вероятностей, при низкой себестоимости c_2' будет меньше, а при высокой себестоимости c_2'' – больше, чем

при полной информированности сторон (формула (7.34 а)). Тем не менее, выпуск второй фирмой продукта с низкой себестоимостью c_2' в этих условиях будет выше, чем для высокой себестоимости c_2'':

$$Q_2{}^*(c_2') - Q_2{}^*(c_2'') = \frac{1}{2}(c_2'' - c_2')$$

(чтобы в этом убедиться, достаточно в (7.33) вычесть третье уравнение из второго)*. Это общий результат: неопределенность на рынке сдвигает равновесие от оптимума и увеличивает долю дешевых продуктов.

Рефлексивные игры

Я оглянулся посмотреть – не оглянулась ли она,
Чтоб посмотреть, не оглянулся ли я?
Максим Леонидов

Условие полной информированности игроков можно ослабить другим способом, разрывая на одной из промежуточных ступеней бесконечную цепь их взаимной осведомленности о стратегиях конкурентов, платежных матрицах (фактически – о бухгалтерских документах) и всеобщего «знания о знании» (см. разд. 7.3). В *рефлексивных играх* знания агентов ограничены определенным *уровнем рефлексии*: например, агент А точно знает возможные ходы агента В (а не оценивает их вероятности), но агенту В не известно, что А располагает этой информацией, либо агенту В известна информированность агента А, но сам А об осведомленности В на сей счет не знает, и так далее. В реальных противоборствах предсказания намерений оппонента, основанные на оценке его информированности, играют важнейшую роль в выборе стратегий сторон.

Пенальти в футболе

При профессионально выполненном одиннадцатиметровом мяч оказывается в сетке ворот через 0.4–0.5 с после удара: это меньше времени реакции любого вратаря. Чтобы отразить удар, вратарь должен угадать намерение исполняющего пенальти (далее *форварда*) и заранее прыгнуть в тот угол ворот, куда будет отправлен мяч. Практика и математическое моделирование (которое используется во всех коммерческих областях, не исключая футбола) показывают, что даже в этом случае вероятность отразить удар в угол составляет лишь несколько процентов – но другой рациональной стратегии у вратаря нет.

Пусть форвард особенно хорошо бьет с левой ноги – соответственно, мяч летит в левый угол от вратаря. Знающий об этом вратарь, не показывая своих намерений, приготовится для прыжка именно в левый угол ворот. А форвард, знающий о знании вратаря, будет бить в правый угол. Но и вратарь может броситься в правый угол, разгадав коварство форварда. Если же пенальти исполняет не известный вратарю футболист, вратарь заранее (человеческая реакция запаздывает!) выберет для прыжка левый или правый угол ворот с вероятностью 50%. Перенумеровав уровни рефлексии форварда и вратаря (ноль отвечает полному неведению), получим таблицу 7.2. Поскольку емкость памяти у всех нас весьма ограничена, уже через малое число уровней рефлексии как форвард, так и вратарь не смогут уверенно предсказать действий оппонента. В этих условиях по *поведенческим реакциям* они

* О несоответствии размерности левой и правой части этого равенства см. примечание к формулам (7.34 а) в разд. 7.5.

будут неотличимы от неинформированных игроков: оба выберут один из двух углов ворот с вероятностью 50%.

Таблица 7.2.

Стратегии вратаря при разных уровнях рефлексии

уровень рефлексии		вероятность прыжка вратаря	
вратарь	форвард	влево	вправо
0	любой	½	½
1	0	1	0
2	1	0	1
…		…	
много		½	½

Формальная запись как стохастических, так и рефлексивных игр основана на добавлении виртуальных агентов. В стохастических играх таким агентом является Природа, на «нулевом» шаге задающая типы игроков. В матрицу платежей рефлексивной игры могут вводиться фантомные агенты «B в представлении A» (AB), «A в представлении B» (BA) и далее (см. [8] в списке литературы). Рефлексивными могут быть и позиционные игры (они же игры в развернутой форме), в которых все возможные ходы соперника игроку не известны (домино) или даже не поддаются прогнозу из-за огромного числа вариантов (шахматы).

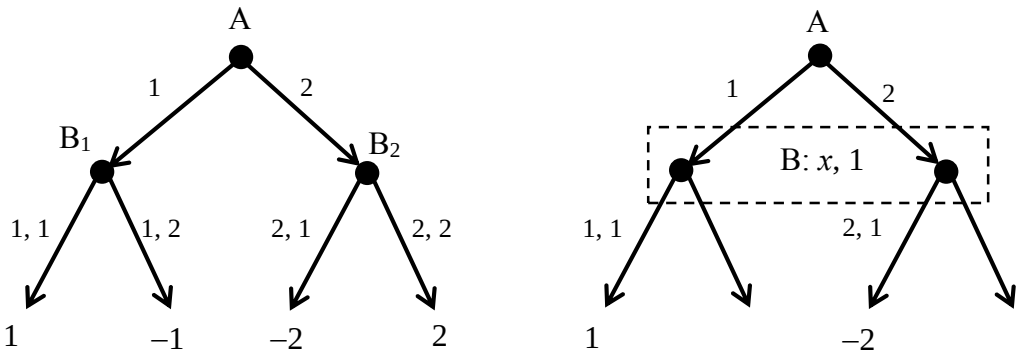


Рисунок 7.13. Дерево игры в числа

Для игр в развернутой форме неполная информация заставляет объединять вершины дерева игры, неразличимые для агента, в *информационное множество*. В каждой вершине такого множества агенту доступен одинаковый набор ходов. Так, в антагонистической «игре в числа» два игрока (A и B) называют число 1 или 2. При совпадении этих чисел B платит игроку A, соответственно, 1 или 2 тыс. р. При несовпадении чисел B получает от A 1 тыс. р. за комбинацию (1, 2) и 2 тыс. р. за комбинацию (2, 1). Если A называет свое число первым, B легко выигрывает (рис. 7.13 а). Если же A и B называют числа одновременно (тогда это игра в нормальной форме), вершины дерева B_1 и B_2 для игрока B неразличимы и его рациональный ход – число 1: при равных вероятностях ходов A $p(1) = p(2) = ½$ игрок B

получает средний выигрыш +0.5 (рис. 7.13 б). Дерево игры на рис. 7.13 показывает, что игру в нормальной форме можно перевести в развернутую форму и наоборот.

ЗАДАЧА 7.9. Составьте матрицу платежей для игры на Рис. 7.13 б.

7.6.2. Ограниченная рациональность

Особую область образуют игры, где агенты могут иметь всю информацию о состоянии системы, но неспособны на ее основании принять взвешенное решение: выбрать наилучшую стратегию или сделать лучший ход. В этом вполне реалистическом случае (азартные участники аукционов, «стадное поведение» игроков на бирже или людей при экстренной эвакуации) агентов называют *ограниченно рациональными* (англ. bounded rationality). Хотя одной из причин нерационального поведения людей может быть недостаток информированности, в классических теориях чересчур идеальной, и эти два фактора на практике трудно разделить, модели с ограниченной рациональностью игроков с последних десятилетий XX века приобрели большую популярность в науках об обществе. Мы рассмотрим лишь две близкие по содержанию игры, которые широко обсуждаются в литературе по междисциплинарной физике.

«Игра в меньшинство»

Одним из наиболее популярных пересечений статистической физики с теорией игр является «Игра в меньшинство» (Minority Game) с многочисленными приложениями в моделировании системы ограниченно рациональных агентов, теориях принятия решений и описании динамики биржи. Первая математическая модель в этой области, предложенная в 1994 г., отталкивалась от житейской ситуации: посещения учеными всемирно известного междисциплинарного Института Санта Фе (США, Нью-Мексико) еженедельных вечеров ирландской музыки в ресторане El Farol[1]. Ограниченная площадь ресторана не позволяла присутствовать на этих вечерах всем желающим, так что число посетителей в разные недели претерпевало нерегулярные колебания (флуктуации). Прогнозы посещаемости на основании данных за предыдущие недели, не имея строгого обоснования, расходились с реальностью даже у математиков и физиков. Кроме того, между прогнозами и фактами существовала обратная связь: ожидая переполненный бар, потенциальные посетители в основном оставались дома, так что заведение оказывалось недозаполненным – и наоборот, при прогнозируемом малом наплыве число любителей ирландской музыки, явившихся в ресторан, могло превысить его вместимость. Бинарный выбор («идти – не идти», «покупать – продавать», голосовать «за» или «против» и т.д. с суммой вероятностей $p_+ + p_- = 1$) характерен для многих процессов в социуме, поэтому ресторан El Farol заложил основу целого направления в теории стохастических игр.

В «задаче El Farol» $n(t) \le N$ агентов стремятся заполнить xN мест ($0 < x < 1$; в первоначальной формулировке $N = 100$ и $x = 0.6$, т.е. $xN = 60$) в моменты дискретного времени t, соответствующие последовательным вечерам. Не имея надежного прогноза, каждый агент использует произвольные правила (звристики), которые предсказывают число посетителей $n(t) = f(n_{t-1}, n_{t-2},\ldots n_{t-M})$ по M его предыдущих значений: *предыстории*, например

$$
\begin{aligned}
&n(t)^{\text{прог}} = n(t-1)^{\text{факт}},\\
&n(t)^{\text{прог}} = n(t-2)^{\text{факт}},\\
&n(t)^{\text{прог}} = \tfrac{1}{M}\textstyle\sum_{t-M}^{t-1} n(t)^{\text{факт}} \text{ при разных } M \text{ и т.д.}
\end{aligned}
\qquad (7.39)
$$

Заметим, что все ученые почти гарантированно могли бы посетить комфортно заполненный бар ($\langle N\rangle \approx 50$) в среднем один раз в две недели, если бы они договорились каждый раз принимать решение «пойти или остаться дома» с вероятностью 50% (например, бросая монету) и честно выполняли этот уговор. Изменяя вероятности p_+ (пойти) и p_- (не ходить), данный оптимум Парето в смешанных стратегиях можно приблизить к $\langle N\rangle \approx 60$, для чего отдельно – и произвольно – оценить неудовольствие «жертв флуктуаций». Сами же флуктуации в таком случае будут распределены по *нормальному* (или *гауссову*) закону, который мы рассмотрим в следующей главе. К сожалению, оптимум Парето не будет равновесным, т.е. устойчивым состоянием: ученый-эгоист, нарушая договоренность о бросании монеты, сможет наслаждаться ирландской музыкой каждую неделю – пока от нашествия эгоистов бар не переполнится. (Эта ситуация, в литературе называемая *проблемой безбилетника*, активно обсуждается и моделируется в науках об обществе). Использование произвольных эвристик наподобие (7.39) делает прогнозы *ограниченно рациональными*, а последовательность значений $\{n(t)^{\text{факт}}\}$ плохо предсказуемой.

В «игре El Farol» конечные наборы правил, или *стратегий предсказаний* $s_i \in S$, случайно извлекаются из банка S и различны у разных агентов. При прогнозе $n_i(t) < xN$ i-й агент присоединяется к множеству «посетителей бара». На каждом шаге дискретного времени t каждый агент выбирает из своего набора правило с минимальным отклонением от фактического числа посетителей $|N_i^{\text{прог}}(t-1) - N_i^{\text{факт}}(t-1)|$ на предыдущем шаге. Результатом являются нерегулярные колебания $n(t)$ вокруг среднего значения xN: амплитуды и динамика колебаний зависит как от правил, так и от алгоритма их выбора (рис. 7.14).

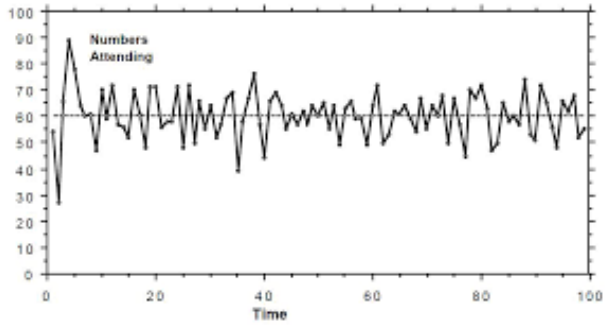


Рисунок 7.14. Динамика числа «посетителей бара El Farol» в компьютерном моделировании (см.[1])

Сама «игра в меньшинство» (1997 г.)[2] переводит условия «игры El Farol» в более абстрактную форму. В ее условиях агенты, присутствующие в достаточно большом нечетном числе $N = 2k+1$ (>>1), на каждом шаге дискретного времени t выбирают бинарную переменную $a_i(t) \in \{-1, 1\}$, разделяясь на группы $N^-(t)$ и $N^+(t)$. Выигрывает группа с меньшей численностью. Каждый (i-й) агент имеет s_i стратегий прогноза, случайно выбранных из банка S. Для прогноза используется M предыдущих результатов игры (память агентов ограничена!). Стратегии далее ранжируются по их успешности в *скользящем окне* предыдущих M циклов. Примеры эвристических стратегий с M=3 представлены в Табл. 7.3.

Результатом каждого тура игры является сумма чисел $A(t)$, выбранных всеми агентами, и дисперсия σ^2: среднеквадратичные отклонения этой суммы от идеального среднего значения $\langle A\rangle = 0$. В этой игре дисперсия называется *волатильностью;* совпадение с биржевой терминологией не случайно.

Таблица 7.3.

Прогнозы выигрышей «игры в меньшинство» при $M = 3$

предыдущие выигрыши			прогноз
−1	−1	−1	−1
−1	−1	+1	−1
−1	+1	−1	−1
+1	−1	−1	−1
−1	+1	+1	+1
+1	−1	+1	+1
+1	+1	−1	+1
+1	+1	+1	+1

$$A(t) = \sum a_i(t)$$
$$\sigma^2(t) = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = \langle A^2\rangle$$

(среднее значение $\langle A\rangle$ при бесконечном числе игроков строго равно нулю). Дисперсия суммы A прямо зависит от глубины памяти M (в английских терминах *размера мозга*, brain size): при $M = 2$ наблюдаются регулярные колебания, но с увеличением M процесс становится стохастическим (рис. 7.15).

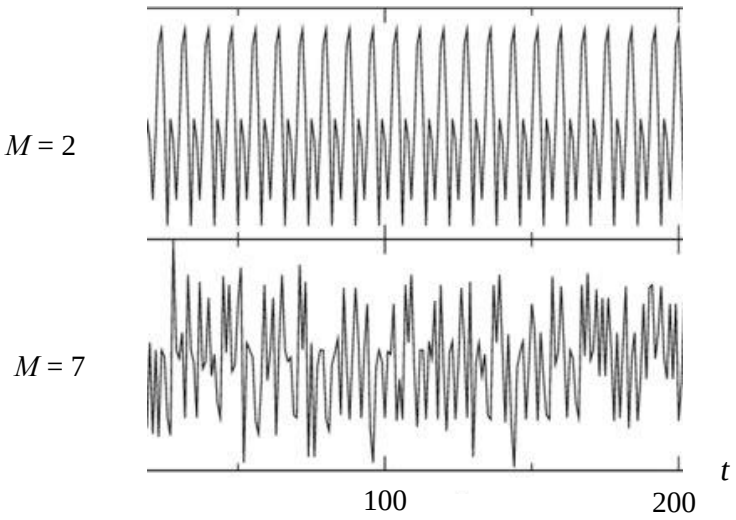


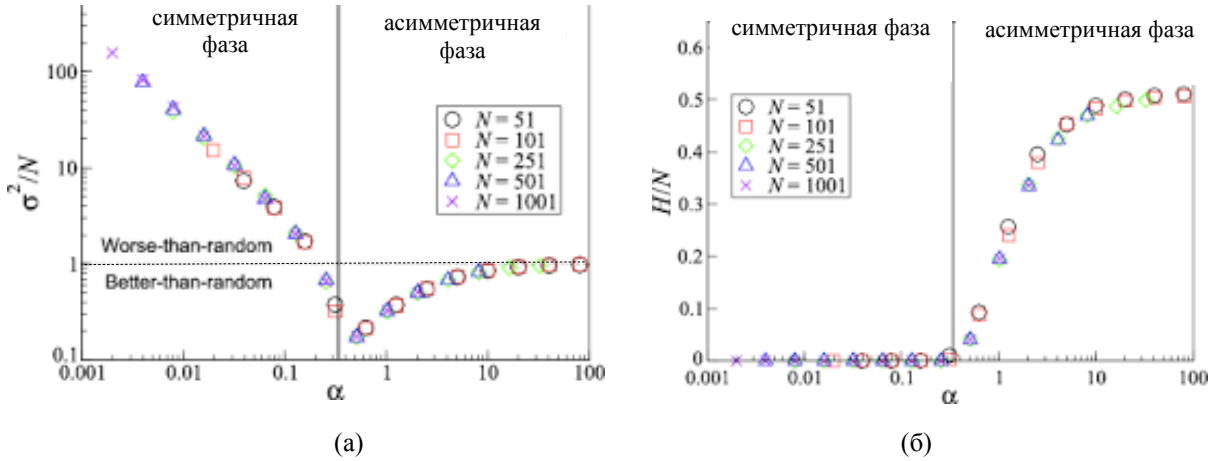
Рисунок 7.15. Дисперсия суммы $\langle A^2\rangle$ при игре в меньшинство с разной глубиной памяти [2]

Режимы игры зависят от управляющего параметра $\alpha = P/N$, где N – число игроков, а $P=2^M$ – объем доступной информации, на основании которой они делают прогнозы (так, в табл. 7.3 $P = 8$). Ниже критического значения $\alpha_c < 1$, которое зависит от числа стратегий и глубины памяти и не зависит от количества игроков, игра протекает в *хаотическом режиме*: флуктуации суммы A возрастают пропорционально N^2. Рассматривая область параметров (α, σ^2/N) как фазовую плоскость (см. главы 2 и 4), хаотический режим называют

симметричной фазой: вероятность выигрыша в момент t_n ней не коррелирует с последовательность выигрышей в моменты $t_{n-1}, \ldots, t_{n-M}$ (рис. 7.16 а). При $\alpha > \alpha_c$ реализуется *асимметричная фаза*, или *частично прогнозируемый режим*, где выигрыш коррелирует с последовательностью M предыдущих исходов (далее обозначаемой μ). Степень корреляции отражает *параметр предсказуемости*

$$H = \frac{1}{2^M}\sum_{\mu=1}^{2^M}\langle A|\mu\rangle^2,$$

где в треугольных скобках стоит дисперсия суммы выбора агентов при всех последовательностях результатов из множества P. В асимметричной фазе $H > 0$ (рис. 7.16 б). Динамика состояний системы при игре в меньшинство воспроизводит существенные особенности флуктуаций цен на биржах, которые будут рассмотрены в следующей главе.



(а) (б)

Рисунок 7.16. Хаотический и прогнозируемый режим игры в меньшинство[2]
(а) по дисперсии суммы *A*, (б) по параметру предсказуемости *H*. На врезках число агентов *N*

7.6.3. Эволюционные игры

До сих пор мы рассматривали повторяющиеся игры лишь как воспроизведение одной и той же ситуации при неизменных условиях (платежной матрице). На этом пути возникли смешанные стратегии, которые позволяют найти равновесие Нэша в любой конечной игре (см. раздел 7.4). Наличия памяти и способности к обучению (или, например, к поощрению и наказанию противника) у игроков не предполагалось. Между тем стороны экономических, политических и прочих социальных конфликтов иногда способны к разумным действиям – включая замену или модификацию своих стратегий. Круг вопросов, связанных с изменением индивидуальных действий агента, исследуют в играх с многократным (в том числе бесконечным) числом повторений и памятью у игроков. Мы кратко рассмотрим их в этом подразделе. В следующем разделе будут представлены *кооперативные игры*, где взаимодействие агентов непосредственно учитывается. Оба эти вида игр ближе к реальному содержанию процессов в организационных системах и, как мы увидим в 3-й части, косвенно отражают наличие распределенного интеллекта у таких систем.

«Дилемма бандита», как одна из наиболее изученных игровых моделей, рассматривалась также в многократно повторяющемся варианте. В этих работах, призванных исследовать возможность позитивного взаимодействия рациональных эгоистических агентов (например, в международной политике), были продемонстрированы определенные перспективы стратегии *условного сотрудничества* до первого предательства и симметричного ответа предательством до возврата оппонента к сотрудничеству. Такая стратегия «око за око, зуб за зуб» (англ. tit-for-tat) при многократном повторении обеспечивает больший суммарный выигрыш – пусть она и далека от схем возникновения альтруизма, декларируемых в статьях данного направления. Хотя при любом числе повторений «дилеммы бандита» единственным равновесием Нэша является предательство (см. [3] в списке литературы), стратегия «око за око» была тестирована в вычислительных экспериментах и массовых испытаниях с добровольцами – после внедрения компьютеров и интернет такие работы стали важной частью «экспериментально-игровых» исследований.

С 1970-х годов методы теории игр плодотворно используются в математических моделях эволюционной биологии. Разработанные здесь *эволюционные игры* применяются во многих науках; с начала XXI века их все шире используют в моделях экономики, социологии и политологии. В таких играх агенты объединены в большие динамические популяции (что позволяет применять дифференциальные уравнения) и обладают своеобразной «генетической памятью»: стратегии агентов наследуются их потомством. Элементы платежной матрицы отражают успешность каждой стратегии в размножении популяции агентов (*приспособляемость*). Результатом эволюционной игры служит соотношение численности долей популяции, вооруженных разными стратегиями. Равновесию Нэша соответствуют *эволюционно устойчивые стратегии*, успешность которых не изменяется, в том числе, при стохастическом варьировании стратегий у некоторой части агентов («мутациях»).

Ястребы и голуби

Данная игра, как и большинство уже рассмотренных здесь, относится к базовым теоретико-игровым конструкциям; она объединяет разные случаи бинарного выбора стратегий («Перекресток», «Дилемма бандита» и другие). В эволюционных играх ее используют для выявления связи наследуемого признака – в исходном варианте агрессивности особей – с приспособляемостью вида. Особи *одного вида* подразделяются на агрессивных («ястребов») и неагрессивных («голубей»). При столкновении за некоторый ресурс r (территорию, добычу, брачного партнера и т.д.) два ястреба дерутся до победы одного, нанося друг другу увечий на сумму c, а два голубя мирно делят ресурс пополам. При встрече с ястребом голубь ретируется, оставляя противнику весь ресурс. Платежная матрица этой игры такова:

(7.40)

	я	г
я	$\frac{r}{2}-c,\ \frac{r}{2}-c$	$r, 0$
г	$0, r$	$\frac{r}{2},\ \frac{r}{2}$

В ее левой верхней клетке стоят ожидаемые выигрыши при столкновении двух ястребов, каждый из которых с вероятностью 50% получит r (ресурс) и в любом случае получит увечья ($-c$); в остальных клетках реальные выигрыши сторон при других столкновениях.

При условии $r > 2c$ разность $r/2-c$ положительна. Тогда таблица (7.40) соответствует платежной матрице в Дилемме бандита (7.10 а), где доминирует стратегия ястреба. В случае $r-2c < 0$ она отвечает игре «Перекресток», где ястребом служит невменяемый водитель, а голубем осторожный. В этой игре имеется два симметричных равновесия Нэша: «я – г» и «г – я».

Чтобы в том и другом случае оценить эволюционную устойчивость стратегий, следует рассчитать приспособленность каждого типа в смешанной популяции, где x – доля голубей, $1-x$ – доля ястребов. Величины приспособленностей a_1 (ястребов) и a_2 (голубей) легко найти из платежной матрицы (7.40) с учетом доли тех и других агентов в популяции:

$$a_1 = (1-x)(\frac{r}{2} - c) + xr$$
$$a_2 = (1-x)\cdot 0 + \frac{1}{2}xr \qquad (7.41)$$

Очевидно, что при $r > 2c$ и любом $0 \le x \le 1$ приспособленность ястребов выше: $a_1 > a_2$. А так как численность потомства пропорциональна приспособленности, доля ястребов в популяции будет увеличиваться при всяком их ненулевом начальном количестве – и ястребы вытеснят голубей. Этот результат показывает, что стратегия «предавать» в Дилемме бандита эволюционно устойчива.

В случае $r < 2c$ при разной доле типов x возможны два варианта: $a_1 > a_2$ (ястребов становится больше) и $a_1 < a_2$ (растет доля голубей). Точке равновесия соответствует равенство $a_1 = a_2$

$$xr - (1-x)(c - \frac{r}{2}) = \frac{xr}{2}, \text{ то есть}$$

(перенесем $xr/2$ в левую часть уравнения, а произведение со знаком «минус» - в правую)

$$\frac{xr}{2} = (1-x)(c - \frac{r}{2})$$

(сократим знаменатели и раскроем скобки)

$$xr = (1-x)(2c - r) = 2c - 2cx - r + xr, \text{ или}$$
$$x^* = \frac{2c-r}{2c}$$

(слагаемые xr в левой и правой части уравнения взаимно уничтожились). Таким образом, равновесной здесь является смешанная популяция. Доля голубей x^* в ней тем больше, чем дороже ястребу здоровье по сравнению с ресурсом. В частности, при $r=c$ в равновесной популяции оба типа агентов будут представлены поровну (рис. 7.17).

В общем случае эволюционная игра задается набором стратегий $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ в популяции агентов, каждый из которых использует какую-то одну стратегию из этого набора. Доля x_i агентов, использующих i-ю стратегию, в последовательных поколениях (т.е. в дискретном времени) может увеличиваться или уменьшаться пропорционально

выигрышам при случайных столкновениях стратегий на предыдущем шаге; они образуют симметрическую матрицу выигрышей A={a_{ij}} (a_{ij} = a_{ji}). Изменения значений {x_i} во времени задает *уравнение репликаций*. В простейшем случае линейных зависимостей и случайных встреч агентов оно имеет вид

(7.42) $$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\right)$$

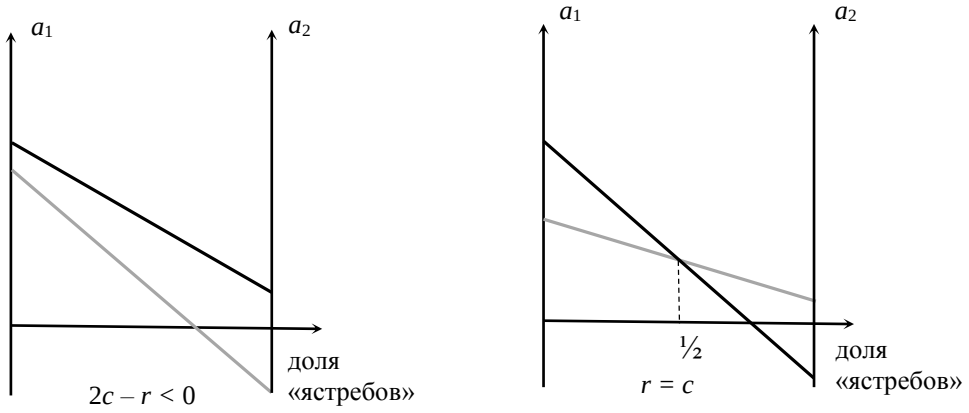


Рисунок 7.17. Приспособляемость «ястребов» a_1 (черная линия) и «голубей» a_2 (серая линия) при разных $2c–r$

В соответствии с (7.42), частотность каждой стратегии в популяции агентов изменяется пропорционально разности среднего выигрыша этой стратегии и среднего выигрыша по всей популяции (разности сумм в скобках). Эволюционно устойчивым стратегиям соответствуют равновесия Нэша.

Система дифференциальных уравнений (7.42) определяет динамику n стратегий в популяции агентов. Благодаря дополнительному условию $\sum x_i = 1$ она сводится к *обобщенной модели Лотки-Вольтерра* с меньшим числом переменных (n–1), для которой все особые точки и типы траекторий в фазовом пространстве известны (см. главу 4). Так, к эволюционной игре стратегий ястреба и голубя можно добавить агентов со стратегией «необходимой обороны» (англ. *retaliator*, или «дающий сдачи»), которые действуют зеркально при встрече с ястребом (драка с потерями) и голубем (дележ ресурса). Матрицей выигрышей в этой игре задается область фазовой плоскости внутри треугольника с вершинами (100) (только ястребы), (010) (только голуби) и (001) (только «зеркальные» агенты) (рис. 7.18 а).

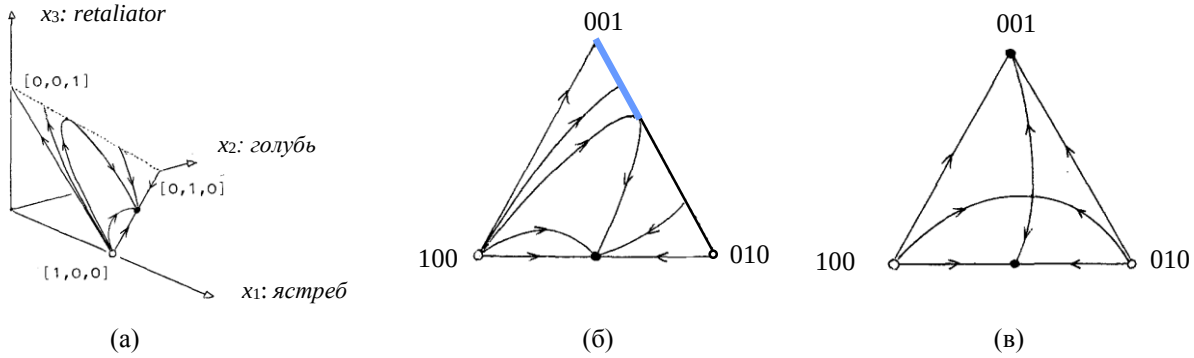
(7.43)

	я	г	о
ястреб	$\frac{r}{2} - c$	r	$\frac{r}{2} - c$
голубь	0	$\frac{r}{2}$	$\frac{r}{2}$
«оборона»	$\frac{r}{2} - c$	$\frac{r}{2}$	$\frac{r}{2}$

Полагая, как в предыдущем примере ястребов и голубей, $r < 2c$, зададим $r = 2$ и $c = 2$. Матрицы выигрышей принимает вид

(7.43 а)
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

На середине стороны (100) – (010) фазового треугольника имеется притягивающая точка-узел, которой отвечает смешанная популяция с равными долям голубей и ястребов (рис. 7.18 а). Смешанным популяциям голубей и «зеркальных» агентов в соотношении не менее 1:2 отвечают нейтральные точки равновесий (голубой отрезок на стороне (010) – (001), рис. 7.18 б). Третья стратегия в этих случаях исчезает. Вершины треугольника (100) (ястребы) и (010) (голуби) – неустойчивые узлы: бесконечно малые отклонения от множества агентов одного типа (в биологии называемого *мономорфным*) увеличивают долю примесных типов, в конечном счете приводя к одному из двух *диморфных* равновесий. Все точки внутри треугольника седловые – им соответствуют эволюционно неустойчивые комбинации типов агентов, то есть наследуемых стратегий.



(а) (б) (в)

Рисунок 7.18. Фазовая плоскость эволюционной игры с тремя типами агентов (см.[3])

Заметим, что наиболее разумная, с житейской точки зрения, стратегия необходимой обороны при наличии существенных долей голубей и ястребов в популяции в рамках этой модели эволюционно неустойчива: появление иных агентов в результате мутаций уменьшает долю «оборонцев» – при подходящем соотношении параметров до нуля. Как подсказывает и повседневный опыт, вторжение неумных, но агрессивных «ястребов» способно разрушить самое разумное сообщество; в эволюционных играх это доказывается математически. Если же ввести в платежную матрицу (7.43 а) небольшое преимущество «оборонцев» над голубями ($\varepsilon > 0$ в матрице A'), «зеркальная» стратегия становится одной из двух притягивающей точек фазового пространства наряду со смешанной популяцией ястребов и голубей состава 1:1 (рис. 7.18 в). Таким образом, стратегия необходимой обороны может победить, если ее носитель станет «немного ястребом» по отношению к мирным голубям.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1-\varepsilon \\ -1 & 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Равновесиям в эволюционных играх отвечают *притягивающие множества* точек (аттракторы) в фазовых пространствах, для определения которых имеется развитый математический аппарат (глава 4). Кроме того, эти игры легко преобразуются в компьютерные агентные модели. Так, например, в эволюционной игре «Камень-ножницы-

бумага» при разных схемах «мутаций» агентов имеется единственная устойчивая точка – в зависимости от соотношения элементов матрицы выигрышей, это узел или фокус (⅓, ⅓, ⅓) в центре треугольника, то есть равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Фазовые траектории в окрестности этой точки, соответственно, задают спуск к равновесию либо предельные циклы, что на качественном уровне воспроизводит динамику численности взаимозависимых видов (рис. 7.19). Аппарат эволюционных игр также применяется в математических моделях наук о человеке и обществе, которые будут рассмотрены в главе 9.

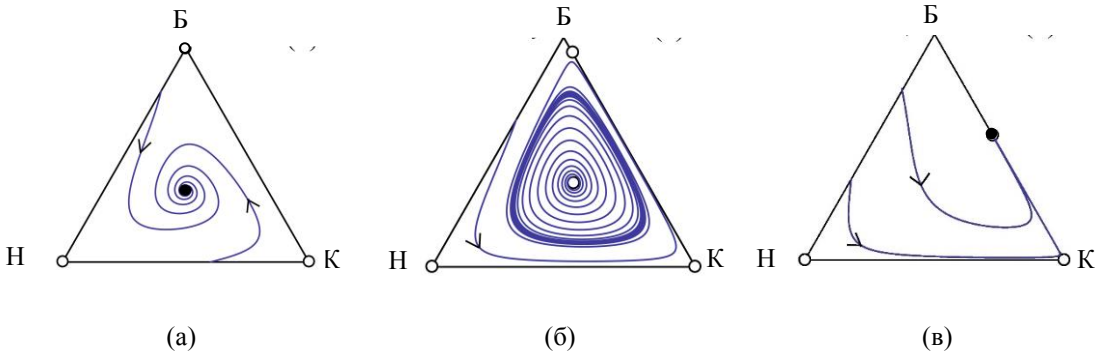


Рисунок 7.19. Фазовые портреты эволюционной игры «камень-ножницы-бумага»: (а) фокус, (б) предельный цикл, (в) равновесие камень–бумага с «вымершими» ножницами (D.F.P. Toupo, S.H. Strogatz, Phys. Rev. 2015, E 91, 052907)

Литература к разделу 7.6

[1] W.B. Arthur, *Inductive reasoning and bounded rationality*, Amer. Econ. Rev., 1994, 84 (2), 406.
[2] E. Moro, *The Minority Game: an introductory guide*, arXiv:cond-mat/0402651 [cond-mat.dis-nn] (26 Febr. 2004).
[3] I.M. Bomze, *Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classifications*, Biol. Cybern., 1983, **48**, 201.

7.7. Кооперативные игры

Видно, ему стало не до фишек –
И хваленый пресловутый Фишер
Тут же согласился на ничью!
Владимир Высоцкий

Игры в нормальной и развернутой форме не предполагают ни целенаправленного обмена информацией между агентами (абсолютно осведомленным и рациональным игрокам всё известно), ни заключения договоренностей – кроме упомянутого в эпиграфе согласия закончить игру. Между тем в экономике и политике, где собраны основные приложения теории игр, переговоры и соглашения – важнейший атрибут конкурентной борьбы. Как и в других играх, стороны переговоров, преследуя собственные цели, совсем не заинтересованы в бескорыстной помощи своим контрагентам. (В моделях возникновения альтруизма, которые будут упомянуты в части III, альтруистические стратегии агентов, подобно только что рассмотренной «голубиной» стратегии, приходится постулировать). Однако во многих практически важных случаях цели и действия сторон не антагонистичны – что делает договоренности не только возможным, но и неизбежным механизмом.

Пусть владельцы трех садовых участков желают подключиться к газопроводу с единственным выходным вентилем (рис. 7.20). При независимом подключении их затраты (в тыс. руб.) составят

$$c_1 = c_2 = 25,\ c_3 = 50.$$

При совместном подключении к газопроводу двух из трех участков (третий подключается отдельно) и при общем подключении всех трех участков затраты соответственно равны

$$c_{12} = 30,\ c_{13} = c_{23} = 60,\ c_{123} = 70.$$

Очевидно, совместное подключение по сумме платежей лучше индивидуального, а самый выгодный вариант – общее подключение, при котором хозяева участков вместе сэкономят $c_1 + c_2 + c_3 - c_{123} = 30$ тыс. руб. При этом взаимовыгодное разделение платы в 70 тыс. руб. – непростая задача. Вклад в неё хозяина дальнего участка x_3 должна быть меньше 50 тыс. (иначе он подключится индивидуально), а доли каждого из ближних участков $x_1 = x_2$ (положим их равными) – меньше 15 тыс., чтобы их хозяева не выбрали вариант (б).

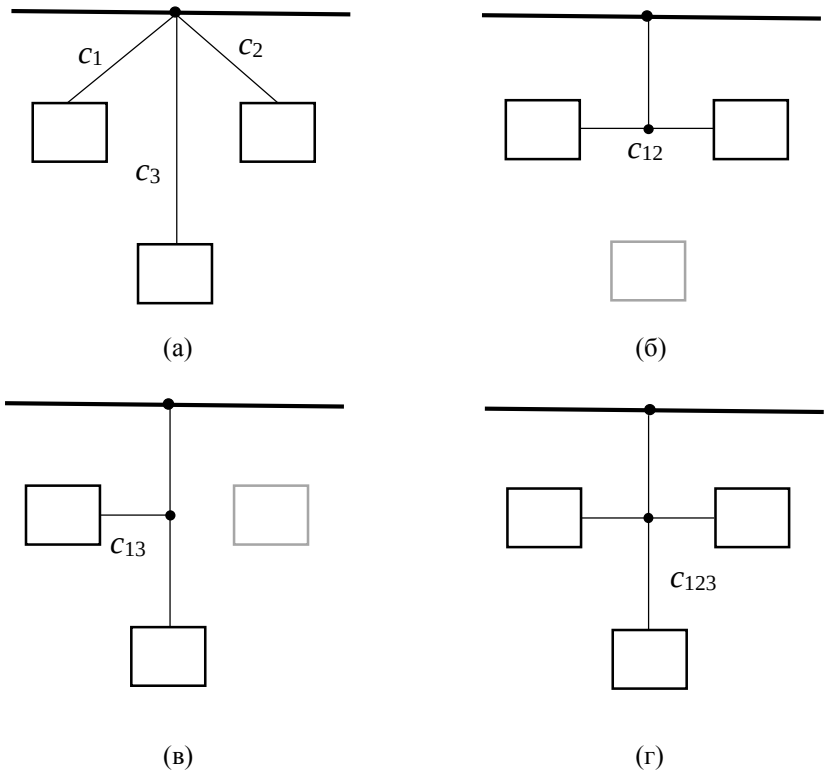


Рисунок 7.20. Схемы разводки газа на садовые участки, { c_i } – цены

Оптимальным затратам хозяев участков на газификацию $\{x_i\}$ (i = 1, 2, 3) в нашей задаче соответствует уравнение

(7.44) $$x_1 + x_2 + x_3 = c_{123}$$

с ограничивающими условиями

(7.44 а) $x_1 < c_1,\quad x_2 < c_2,\quad x_3 < c_3$

(7.44 б) $x_1 + x_2 < c_{12},\ x_1 + x_3 < c_{13},\ x_2 + x_3 < c_{23}$

(см. задачу линейного программирования (7.3 а, б) в разд. 7.1). Чтобы найти значения $\{x_i\}$, перейдем от них к переменным *дохода*, который каждое хозяйство получит при общем подключении к трубе по сравнению с индивидуальным подключением

$$y_1 = c_1 - x_1, \quad y_2 = c_2 - x_2 \quad y_3 = c_3 - x_3,$$

и выразим через них неравенства (7.44 б)

(7.45 а) $$y_1 + y_2 = 25 - x_1 + 25 - x_2 = 50 - (x_1 + x_2) > 20$$

(так как в (7.44 б) $x_1 + x_2 < 30$);

(7.45 б) $$y_1 + y_3 = 25 - x_1 + 50 - x_3 = 75 - (x_1 + x_3) > 15$$ (т.к. $x_1 + x_3 < 60$)

Неравенству $y_1 + y_2 > 20$ удовлетворяют все точки, лежащие в четверти координатной плоскости (квадранте), заданной неравенствами $y_1 \geq 0$ и $y_2 \geq 0$, правее и выше прямой линии $y_2 = 20 - y_1$ (рис. 7.21). В неравенстве (7.41 б) можно выразить y_3 через y_1 и y_2, поскольку переменные $\{y_i\}$ связаны равенством (7.44):

$y_1 + y_2 + y_3 = (c - x_1) + (c_2 - x_1) + (c_3 - x_3) = c_1 + c_2 + c_3 - c_{123} = 30$, т.е.
$y_3 = 30 - y_1 - y_2$, поэтому
$y_1 + 30 - y_1 - y_2 = 30 - y_2 > 15$, то есть
$y_2 < 15$

Так же преобразовав неравенство $y_2 + y_3 > 15$, получим $y_1 < 15$. На графике на рис. 7.21 этим двум неравенствам соответствуют точки, лежащие левее вертикальной линии $y_1 = 15$ и ниже горизонтальной линии $y_2 = 15$.

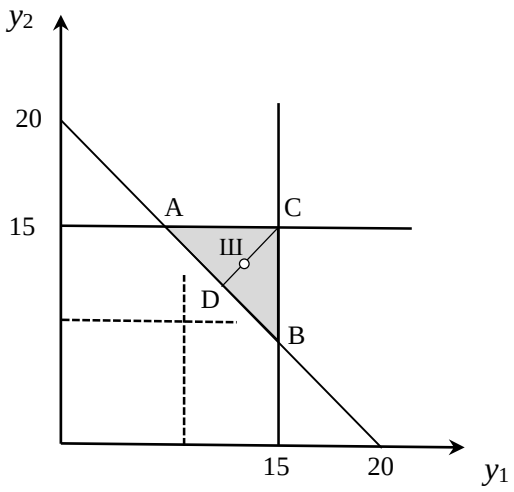


Рисунок 7.21. Ядро «игры в газификацию» выделено серым цветом

Пересечение трех множеств точек, заданных неравенствами $y_1 + y_2 > 20$, $y_1 < 15$ и $y_2 < 15$ – это все точки внутри треугольника ABC на рис. 7.21. Эта область называется *ядром игры*, а сама игра – *игрой распределения доходов*. Во всех точках, принадлежащих к ядру игры, коллективное присоединение трех участков к газовой трубе выгоднее любых других вариантов. Как разделить эту выгоду между участниками соглашения – сложный вопрос; далее мы увидим, что на него нет общепринятого ответа.

При точном выводе вместо знаков строгого неравенства «>» и «<» надо использовать «≥» и «≤»; тогда к ядру игры добавятся все точки на сторонах треугольника ABC. Параметры c_1, c_2, … c_{123} в условиях (7.44 а, б) можно подобрать и так, что множество точек ядра окажется *пустым*: например, при $y_1, y_2 < a$, где $a < 10$ (пунктирные линии на рис. 7.21) с сохранением условия $y_1 + y_2 > 20$. В этом случае задача не имеет решения.

Положение точки равновесия внутри ядра игры – болезненная проблема экономической теории. В ее неоклассических версиях агент рассматривается как *homo economicus*: предельно жадное и глупое создание, согласное на всё ради сиюминутной выгоды и неспособное предвидеть на один шаг вперед. Среди таких агентов возможен, например, сговор двух «ближних» соседей, каждый их которых готов потратить на совместное подключение только по 10001 руб., предлагая третьему заплатить остальные 49998 руб.: homo economicus будет согласен «удавиться за два рубля»! На рис. 7.21 такому соглашению отвечает точка на медиане треугольника, очень близкая к точке D. Более реалистическим результатом торга (англ. bargaining – официальный экономический термин) мог бы стать центр ядра Ш. Далее мы увидим, что эта точка (*вектор Шепли*) действительно существует в теории кооперативных игр. Пока отметим, что в отсутствии строгих критериев наилучшее решение игры приходится задавать аксиоматически исходя из нечетких и конкурирующих человеческих понятий справедливости либо эффективности.

Эффективное разделение доходов игроков называется *утилитарным*, справедливое *эгалитарным*; имеются и другие подходы к решению этой, в общем виде нерешаемой, задачи. Утилитарный дележ доходов (полезностей $\{u_i\}$) отвечает их максимальной сумме по всем участникам игры

(7.46 а) $$max \sum_{i=1}^{n} (u_i - u_i^0),$$

где $\{u_i^0\}$ – выигрыши (или платежи) агентов без образования коалиции. В неоклассических экономических теориях суммы, подобные (7.46 а), называют «общественным благосостоянием» – обычно не уточняя, кому в обществе они принадлежат. Упомянутое выше распределение дохода от совместного подключения газа при сговоре между двумя из трех хозяев участков (практически 15+15+0 тыс. р.) – вполне утилитарное. Впрочем, таким же будет любое распределение в ядре этой игры, где $\sum u_i = \text{const}$.

При эгалитарном дележе все участники коалиции получают одинаковый доход:

(7.46 б) $$u_1 = u_2 = \ldots = u_n$$

В рассматриваемом нами случае это соответствует затратам $x_1 = x_2 = 15$ и $x_3 = 40$, при которых на каждый участок приходится по 10 тыс. руб. экономии средств. Но хозяин дальнего участка может резонно возразить: на общем подключении он экономит лишь 20%, тогда как его соседи – по 40% «индивидуальной» платы. Пропорциональное распределение доходов – еще один из множества вариантов, вообще говоря бесконечного. Род компромисса предлагает *квази-эгалитарное* распределение выигрышей (т.е. дохода), при котором больше всех получает беднейший участник коалиции

(7.46 в) $$\max[\min(u_i - u_i^0)]$$

Вопрос о характере дохода (абсолютный либо относительный, в надежных или ненадежных ценных бумагах и тому подобное) при этом остается открытым. Для абсолютных выигрышей при подключении к газовой трубе условию (7.46 в) удовлетворяет, например, экономия ближних участков в 9999 руб. (на один рубль меньше, чем при эгалитарном распределении) и экономия дальнего участка в 10002 руб. (на два рубля больше). Сдвиг фокуса дискуссии от количественных соотношений к качественным и предпочтение формул цифрам – стандартный прием экономических теорий: деньги способствуют ангажированности*.

ЗАДАЧА 7.10 «Свидание» (см. [3], стр. 182)

Джордж и Мэри (Жора и Маша) живут в крайних точках отрезка [–1, 1] на числовой прямой. Обычно они назначают свидание у фонтана в точке x_0, которая в условиях задачи может находиться либо внутри отрезка, либо за его пределами (рис. 7.22). Если им срочно понадобилось встретиться для важного разговора – какую точку на числовой оси они выберут? Как относятся к выбору места свидания оптимум Парето, равновесие Нэша, утилитарное и эгалитарное распределение выигрышей?

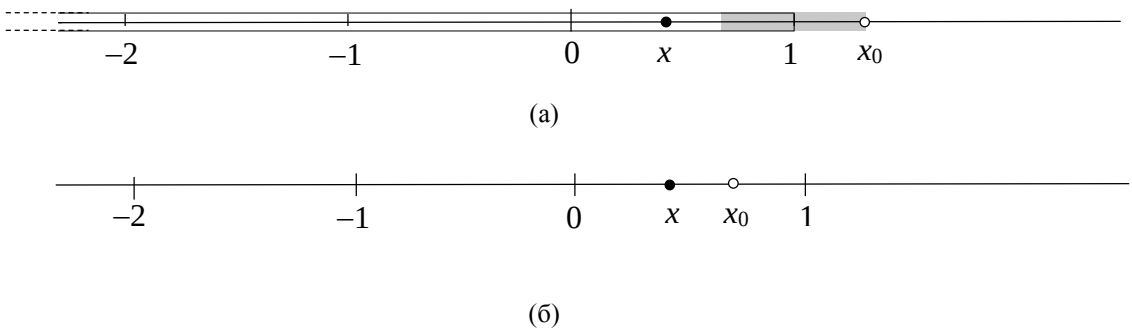


Рисунок 7.22. Задача о свидании

Решение

Единственный по-человечески верный ответ «да никак не относятся!» лежит вне тематики этой главы. Мы предполагаем, что полезность выбранной точки x равна расстоянию до нее от места жительства каждого из наших героев, взятому с обратным знаком. Это справедливо и для обычного места свидания у фонтана. Если фонтан находится за пределами отрезка [–1, 1] ($x_0 > 1$) и $-1 \le x \le 1$ (рис. 7.22 а)**, полезность составляет

(7.47)
$$u_{\text{Жора}} = u_1 = -(x + 1),\ u_1^0 = -(x_0 + 1)$$
$$u_{\text{Маша}} = u_2 = -(1 - x),\ u_2^0 = 1 - x_0$$

Поэтому выигрыш каждой стороны (положительный или отрицательный) от переноса места свидания в точку x равен

(7.47 а)
$$y_1 = u_1 - u_1^0 = x_0 - x$$

* Это относится и к «политэкономии социализма», где деньги играли меньшую роль, но стремление людей к неравномерно распределенным жизненным благам оставалось неизменно сильным.

** В случае $x_0 < -1$ достаточно поменять номера агентов и не запутаться со знаками «+» и «–».

$$y_2 = u_2 - u_2^0 = x_0 + x - 2$$

Если обычная условленная точка рандеву Жоры и Маши лежит за пределами интервала [–1, 1], мы даже без вычислений согласимся, что лучшее новое место встречи – это $x = 0$. Правда, при линейной зависимости (7.47) перемещение этой точки $x \in [-1, 1]$ внутри интервала не изменит суммы выигрышей

$$y_1 + y_2 = x_0 - x + x_0 + x - 2 = 2(x_0 - 1) = \text{const}$$

Таким образом, оптимуму Парето и утилитарному решению отвечает любая точка на отрезке [–1, 1]. При этом ядром игры, отвечающим условиям $y_1, y_2 \geq 0$, будет область положительного выигрыша Маши $2 - x_0 \leq x \leq x_0$, на рис. 7.22 а показанная серым цветом. Для Жоры выгодно множество точек левее фонтана $-2 - x_0 \leq x \leq x_0$, выделенное рамкой.

Попробуем детализировать оптимум Парето, взяв вместо суммы полезностей (7.47) их произведение:

$$u_1 u_2 = (1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$$

Здесь даже необязательно находить производную, хоть это и очень просто – достаточно школьной алгебры. Максимум произведения достигается при $x = 0$, минимум при $x = \pm 1$: встрече на квартире одного из наших героев. А лучшее эгалитарное решение – равенство выигрышей сторон по сравнению с обычной встречей у фонтана: $y_1 = y_2 \to \max$, т.е.

$x_0 - x = x_0 + x - 2$, или $x = 1$ – рандеву на квартире Мэри-Маши.

Если же обычное место встречи $x_0 \in [-1, 1]$ лежит внутри отрезка, то $y_1 = x_0 - x$, $y_2 = x - x_0$, и произведение выигрышей

$$v = y_1 y_2 = -(x - x_0)^2,$$

а его максимуму отвечает ноль производной

$$v' = -2(x - x_0) = 0, \qquad \text{то есть } x = x_0:$$

оптимальным будет обычное место встречи.

Задачи распределения доходов – один из примеров *кооперативных игр*, в которых выигрыши агентов зависят от заключаемых между ними соглашений. Название «кооперативные» не подразумевает взаимопомощи игроков: каждый из них по-прежнему рационально преследует только собственную выгоду. (Более точное название этих игр – *коалиционные*). В неантагонистических ситуациях выгода агента может зависеть не только от заданных внешних условий, но и от возможности образовать в этих условиях коалицию с другими агентами. Суть совместных действий игроков в таких играх обычно не рассматривают (её формализация исключительно сложна). Предполагается, что при некоторых условиях выигрыш коалиции превышает сумму выигрышей входящих в нее агентов, если бы они действовали независимо. Решением кооперативной игры как раз и является определение таких условий. И математические исследования в последние десятилетия показали, что выгоду совместных действий, при выведении за скобки их мотивов и механизмов, удается глубоко и успешно формализовать. Описание коалиций –

одно из наиболее продуктивных и строгих направлений современной теории игр, поэтому обратим некоторое внимание на формулировки.

Математическое пояснение: выпуклые множества

Пример математического понятия *выпуклой функции*, контринтуитивного для не-математиков, хорошо показывает, куда может завести строгая логика. *Выпуклым телом* в трехмерном пространстве, в полном соответствии со здравым смыслом, математики называют такую область пространства, которой принадлежат все отрезки, соединяющие любую пару точек этого тела. Шар, куб, эллипсоид вращения – выпуклые тела. Всякий выпуклый многогранник лежит по одной сторону от плоскости, проведенной через любую его грань. Граница выпуклого тела называется *выпуклой поверхностью*: она лежит по одну сторону от любой своей касательной плоскости (рис. 7.23). Сфера и эллипсоид – выпуклые поверхности, тогда как гиперболический параболоид (см. главу 2 и приложение П3) выпуклой поверхностью не является.

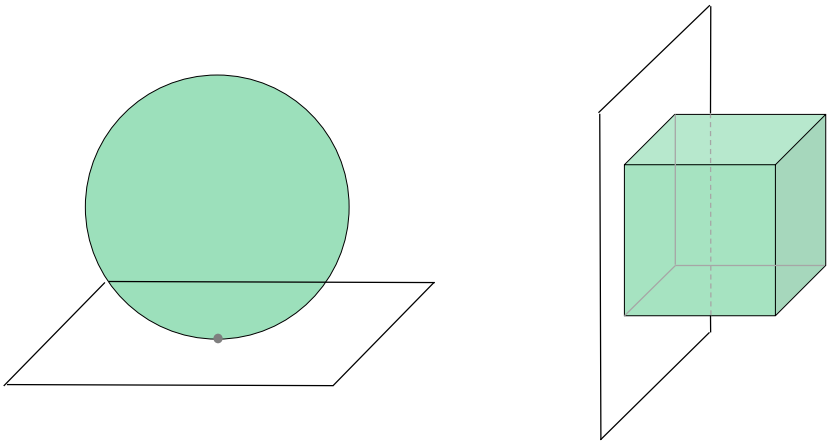


Рисунок 7.23. Выпуклые трехмерные тела

Эти вполне логичные и очевидные рассуждения начинают расходиться с нашим повседневным опытом, когда мы переходим от пространства к плоскости. Бесконечную область плоскости, лежащую над параболой, мы уверенно назовем выпуклой (рис. 7.24 а). Но тогда границу этой области – саму параболу – с математической точки зрения приходится считать выпуклой кривой, хотя в обычной жизни такие кривые и поверхности – например, параболоид вращения – чаще называют вогнутыми («вогнутое параболическое зеркало»). Больше того: функция $f(x)$, заданная на интервале (a, b), в математике называется выпуклой, если для любой пары точек x_1, x_2 из этого интервала

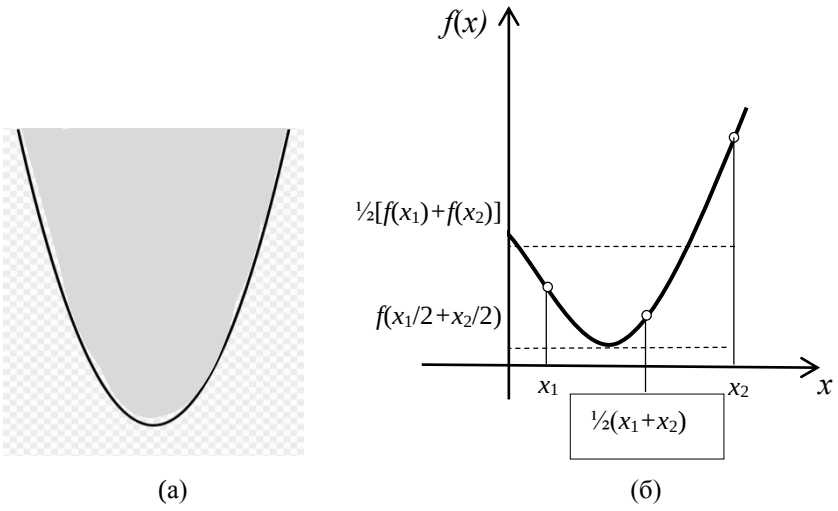
(7.48) $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

В быту такие кривые, не имеющие максимума на интервале (a, b), обычно называются «вогнутыми» (рис. 7.24 б). Чтобы сгладить возникающий дискомфорт, в некоторых учебниках математики выпуклые функции $f(x)$ называют «выпуклыми вниз», а функции с максимумом (например, перевернутую параболу) «выпуклыми вверх». Этот терминологический казус приходится пояснять потому, что в теории игр широко используют понятие выпуклого множества. Для областей в n-мерном пространстве,

включая многоугольник на плоскости, данное понятие совпадает с нашим жизненным опытом – а для кривых всё наоборот.

Формальные соотношения кооперативных игр

Кооперативная (она же коалиционная) игра {N, S, $v(S)$} задается двумя множествами и одной числовой функцией:



(а) (б)

Рисунок 7.24. (а) Выпуклая область над параболой (серый цвет), (б) выпуклая функция

- *Множеством игроков* N (буквой N обозначим как само множество, так и число образующих его агентов)
- *Множеством коалиций* S ⊂ N, образуемых игроками (где S – также число игроков в коалиции). Если игроки, оставшиеся за пределами коалиции, будут «дружить против нее», эта противостоящая коалиция обозначается N \ S. Число разбиений множества N на пары коалиций равно 2^{N-1} (при N = 2 два варианта, при N = 3 четыре, при N = 4 восемь, и т.д.), если в разбиение включать предельную коалицию S = N, которой «противостоит» *пустая* (не включающая ни одного агента) коалиция N \ S = ∅.
- *Функцией выигрышей*, или *характеристической функцией* $v(S)$, задающей выигрыши коалиций в данном множестве N. Эта функция имеет действительные значения – то есть она определена на множестве действительных чисел $v(S) \in \mathbf{R}$ (а не на множестве комплексных чисел или каких-либо иных математических объектов – другими словами, это простая и понятная функция). Для математической строгости надо отметить, что выигрыш без игроков равен нулю: $v(\emptyset) = 0$.

Мы видим, что теория коалиционных игр занимается не поиском решения игры или размера выигрышей агентов, а проблемой дележа выигрыша (предполагается, что он уже получен или гарантирован). Для рациональных и полностью информированных игроков (см. хозяев дачных участков) возникает проблема выбора коалиций, где им выгодно участвовать при заданной функции выигрышей.

Кооперативная игра и ее характеристическая функция называются *супераддитивными*, если для любой пары непересекающихся коалиций S и T ($S \cap T = \emptyset$, т.е. пересечение множеств S и T пусто – см. далее разд. 8.2.1 в главе 8)

$$v(\mathrm{S}) + v(\mathrm{T}) \leq v(\mathrm{S} \cup \mathrm{T}).$$

Другими словами, объединение двух коалиций в такой игре не уменьшит их суммарный выигрыш – а возможно, его увеличит.

Кооперативная игра называется *выпуклой*, если для выигрышей любой пары коалиций S, T ⊂ N справедливо неравенство

$$v(\mathrm{S}) + v(\mathrm{T}) \leq v(\mathrm{S} \cup \mathrm{T}) + v(\mathrm{S} \cap \mathrm{T})$$

то есть пересекающиеся коалиции S и T по отдельности выиграют меньшую сумму, чем их «полная комбинация»: объединение плюс пересечение (рис. 7.25).

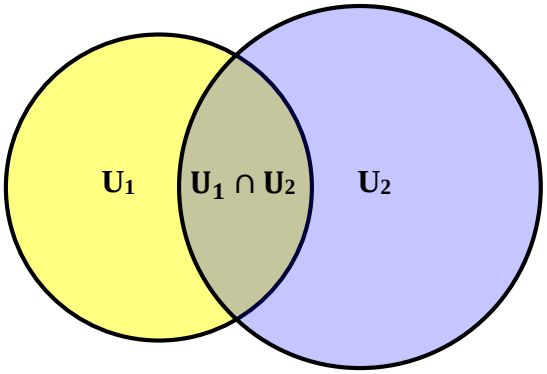


Рисунок 7.25. Объединение и пересечение множеств; внешняя граница – объединение $\mathbf{U_1 \cup U}$, затененная область – пересечение $\mathbf{U_1 \cap U_2}$

Максимальный выигрыш в выпуклой игре, соответственно, дает коалиция N из всех игроков*

Дележом кооперативной игры с *N* игроками, которые могут входить в коалиции {S}, называется *эффективное* распределение их выигрышей $\{x_i\}$ – такое, что сумма всех выигрышей соответствует значению характеристической функции («закон сохранения денег») и выигрыш каждого игрока в составе коалиции не меньше того, что он получил бы при независимых индивидуальных действиях («индивидуальная рациональность»).

(7.49 а) $\sum_{i \in \mathrm{N}} x_i = v(\mathrm{N})$

(7.49 б) $x_i \geq v(i) \ \ (i \in \mathrm{N}).$

Каждый дележ можно представить в виде *N*-мерного вектора **x** = (x_1, x_2, …, x_N). Между разными векторами дележей устанавливаются отношения предпочтения (см. раздел 7.2). Дележ **x** *доминирует над дележом* **y** по коалиции K ⊂ N ($\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$), если для всех $i \in$ K

$$x_i > y_i$$
$$\sum_{i \in K} x_i \leq v(\mathrm{K})$$

* При отсутствии *нулевых* игроков, вклады которых в функцию выигрышей равны нулю.

(рациональным игрокам, входящим в коалицию K, невыгодно участие в коалициях, которые дадут им меньший выигрыш). Также K называется *блокирующей коалицией* для дележа **y**.

В любой выпуклой кооперативной игре существует непустое множество векторов дележей вида (7.49 а), не доминируемых любыми другими дележами. Это множество называется *C-ядром* игры. Непустое C-ядро существует, если в кооперативной игре отсутствуют блокирующие коалиции. Однако наилучший дележ в ядре игры отсюда не следует: его можно определить только из дополнительных соображений.

Пример игры с пустым ядром

Три коммерсанта держат на складе по одному носку одинакового размера и цвета. Пару носков можно продать за 100 руб., но непарный носок никто не купит. Если коммерсанты организуют совместный бизнес, их суммарный доход задает уравнение

(7.50) $$x_1 + x_2 + x_3 = 100,$$

а условия рационального дележа – неравенства

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 50$$
$$x_1 + x_3 \geq 50$$
$$x_3 + x_3 \geq 50$$

Складывая три последних неравенства, получим

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 150,$$

что явно противоречит условию (7.50). Значит, множество недоминируемых дележей пусто: коалиция любых двух из трех агентов – блокирующая. Другими словами, эта игра не выпуклая: присоединение третьего агента к коалиции не увеличивает выигрыша. Не имеют ядра и любые игры с нулевой суммой.

Вектор Шепли

«Справедливый» выигрыш кооперативной игры, удовлетворяющий условиям (7.49 а, б), называется *вектором Шепли*. Схему его вычисления показывает еще один модельный пример.

ЗАДАЧА 7.11 (см. [4]). Три студента A, B и C вместе могут продать поношенную пару ботинок за 1000 р. Студенту A принадлежит левый ботинок, B – правый; C владеет шнурками. Пару ботинок без шнурков соседи по общежитию согласны купить за 800 р.; непарный ботинок никому не нужен. Шнурки отдельно от ботинок могут купит за 50 руб. Продажа пары ботинок со шнурками определенно выгоднее. Как разделить вырученные деньги?

Решение

Так же, как в задаче о газификации, выпишем условие рационального дележа и ограничивающие его неравенства (буквами обозначены коалиции агентов)

(7.51) $v(\mathrm{ABC}) = x_1 + x_2 + x_3 = 1000$

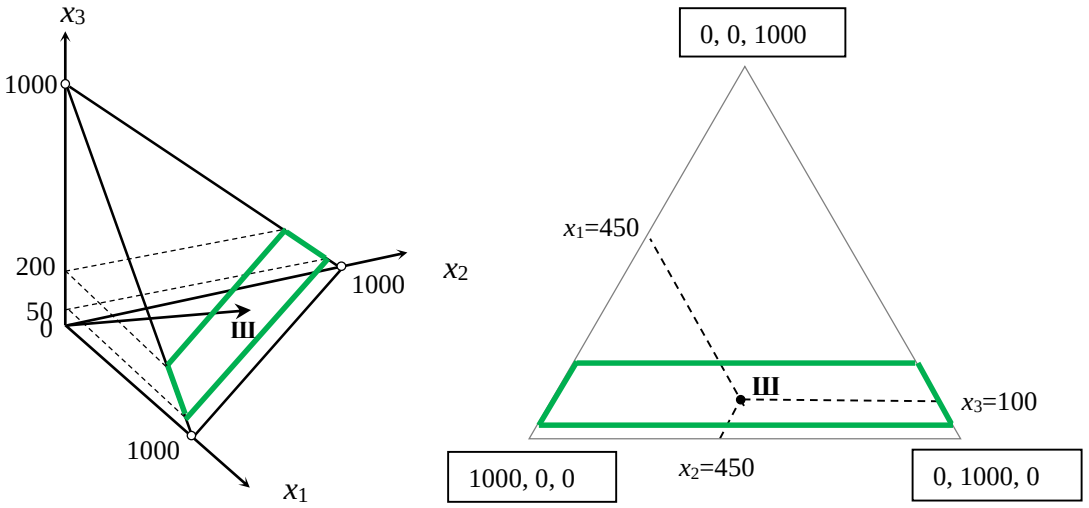
(7.51 а) $v(\mathrm{A}) = v(\mathrm{B}) = 0$, то есть $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

(7.51 б) $v(\mathrm{C}) = 50$, т.е. $x_3 \geq 50$

(7.51 в) $v(\mathrm{AB}) = 800$, т.е. $x_1 + x_2 \geq 800$

(7.51 г) $v(\mathrm{AC}) = v(\mathrm{BC}) = 50$, т.е. $x_1 + x_3 \geq 50$, $x_2 + x_3 \geq 50$.

В пространстве координат (x_1, x_2, x_3) уравнение (7.51) и неравенства (7.51 а, б) задают треугольник в положительном октанте с вершинами на координатных осях x_1, x_2, x_3 = 1000 (рис. 7.26 а). Условию (7.51 б) соответствует плоскость x_3 = 50, параллельная координатной плоскости $x_1 0 x_2$; она пересекает треугольник по отрезку $x_1 + x_2$ = 950. Подставив в (7.51) неравенства (7.51 б) и (7.51 в), легко убедиться, что ядро игры ограничено отрезками $x_1 + x_2 \leq 950$ и $x_1 + x_2 \geq 800$ – «следами» от плоскостей x_3 = 50 и x_3 = 200. В проекции на плоскость треугольник ядро игры – трапеция, выделенная цветом (рис. 7.26 б).



(а) (б)

Рисунок 7.26. Дележ дохода (а) в декартовых координатах, показана область $x_1+x_2+x_3$=1000 и ее сечение плоскостями x_3 = 50 и x_3 = 200; (б) в проекции на эту область. Цветом выделено С-ядро; Ш –вектор Шепли

На проекции (рис. 7.26 б) следу от каждой плоскости x_i = const отвечает линия, параллельная той стороне треугольника, которая лежит против i-й вершины. Заметим, что неравенства (7.51 г) не отвечают рациональному дележу: коалиции агента С с агентами А или В не увеличивают выигрыша. Поэтому границы ядра по боковым сторонам трапеции* – это отрезки x_1 = 0 и x_2 = 0.

Каждой точке в ядре игры с ботинками отвечает эффективный недоминируемый дележ дохода в 1000 руб.; в этом смысле все такие дележи одинаковы. Чтобы сравнивать их

* В общем случае ядро игры трех лиц – выпуклый n-угольник, имеющий от трех до шести вершин, а для игры n агентов – выпуклая область в n–1-мерном пространстве – отсюда название «выпуклые игры».

качество, нужны дополнительные критерии. Наверно, мы согласимся, что дать разные суммы хозяевам правого и левого ботинка будет нечестно, а 200 рублей за вложенные в дело шнурки – это слишком много. Но чтобы все признали оптимальность дележа, его параметры должен быть формализованы.

Хороший, но не единственный показатель качества дележа дают относительные вклады агентов в выигрыш коалиции. Для оптимального дележа их нужно усреднить по всем способам образования этой коалиции. При продаже пары ботинок коалиция трех агентов могла сложиться шестью разными способами: ABC (агент A пригласил агента B, затем оба пригласили агента C), BAC (B, затем A, затем C). BCA (B, затем C, затем A) – и еще три варианта. В каждом варианте новый участник коалиции по-разному увеличивает суммарный выигрыш:

ABC: $v(A) = 0, v(AB) = 800, v(ABC) = 1000$ – агент B увеличивает выигрыш от 0 до 800, затем агент C еще на 200;
BCA: $v(B) = 0, v(BC) = 50, v(BCA) = 1000$ – агент C увеличил выигрыш от 0 до 50, затем агент A еще на 950 и так далее. Вклады агентов в выигрыш коалиции представлены в таблице.

Таблица 7.4

Расчет вектора Шепли для дохода от продажи пары ботинок

коалиция	вклад A	вклад B	вклад C	сумма
ABC	0	800	200	1000
BAC	800	0	200	1000
BCA	950	0	50	1000
CBA	950	0	50	1000
CAB	0	950	50	1000
ACB	0	950	50	1000
сумма вкладов	2700	2700	600	6000
доля	0.45	0.45	0.1	1
вектор Шепли	450 р.	450 р.	100 р.	1000 р.

Компоненты вектора Шепли представлены в нижней строке таблицы, сам вектор показан на рис. 7.26 а, б. Вектору Шепли соответствует утилитарное распределение выигрышей. В выпуклых играх его точка находится в центре ядра. Оптимальные распределения платежей способствуют устойчивости коалиции при случайных возмущениях (не рассматриваемых здесь), они имеют много приложений в экономике и политике.

Устойчивые браки

Как и во многих других прикладных задачах, легкомысленное название не должно нас дезориентировать. В кооперативной теории игр *устойчивый брак* (англ. *stable marriage*) – это двухсторонний либо многосторонний оптимум в многофакторном распределении ресурсов, определяемый, при невозможности количественного сравнения факторов, на основе предпочтений. Такая задача по сложности лежит у границ современной математики, а по важности (стратегическое планирование, политика, военное дело) превосходит

большинство проблем оптимизации. Общеизвестные более частные примеры некоммерческих *двусторонних рынков*, где сделка объединяет агентов из двух непересекающихся множеств, включают подбор персонала на предприятиях, зачисление абитуриентов в университеты по американской рейтинговой системе и другие практические вопросы – в том числе работу брачных агентств.

Устойчивые семейные пары образуются по обоюдному добровольному выбору – по крайней мере, такой выбор способствует их стабильности. Нередко обе стороны соглашения (в терминах этой главы – коалиции) изначально рассматривают несколько вариантов партнера (в тех же терминах) для своей супружеской пары, ранжируя их по предпочтительности. Это тем более справедливо при выборе деловых партнеров руководством фирмы или политических союзников правительством страны (правда, здесь не запрещена «полигамия»). Если же коалиция заключается вопреки интересам сторон, она может оказаться неустойчивой – особенно если для нее есть альтернатива.

В простейшем модельном примере двое мужчин (Денис и Вадим) и две женщины (Оля и Катя) выбирают спутников жизни строго в этих двух множествах кандидатур, имея собственные предпочтения (Табл. 7.5). Нетрудно видеть, что среди четырех возможных комбинаций только одна (Оля+Денис) полностью соответствует лучшим вариантам для невесты и жениха. В трех остальных возможных парах нарушаются предпочтения одной из сторон (Оля+Вадим и Катя+Денис) либо обеих сторон (Катя+Вадим). что нередко бывает и в жизни (материальное положение, диктат родителей, династические браки…). Из четырех персон можно образовать две комбинации пар: (Оля+Денис, Катя+Вадим) и (Оля+Вадим, Катя+Денис). Используя обозначения из табл. 7.5, представим их в формальном виде как $[(m_1w_1), (m_2w_2)]$ и $[(m_1w_2), (m_2w_1)]$. Будут ли устойчивы пары с нарушенными предпочтениями?

Таблица 7.5

Предпочтения при выборе пары

Денис (m_1)	Оля, Катя	$w_1 \succ w_2$
Вадим (m_2)	Оля, Катя	$w_1 \succ w_2$
Оля (w_1)	Денис, Вадим	$m_1 \succ m_2$
Катя (w_2)	Денис, Вадим	$m_1 \succ m_2$

Условия табл. 7.5. соответствуют кооперативной *игре размещения* четырех лиц с ограничением числа агентов в коалиции: только 2. Если предпочтения сторон выразить номерами кандидатур в рейтинге, игру нетрудно представить в биматричной форме:

$$\begin{array}{cc} & w_1 \quad w_2 \\ m_1 & 1,1 \quad 1,2 \\ m_2 & 2,1 \quad 2,2 \end{array}$$

Эта матрица платежей, где числа соответствуют неудовольствию сторон, не дает ответа: суммы рейтингов в комбинациях $[(m_1w_1), (m_2w_2)]$ и $[(m_1w_2), (m_2w_1)]$ равны 6, то есть одинаковы. Несоответствие пары наилучшим предпочтениям сторон в зарубежной литературе называется frustration (разочарование, неудовлетворенность, расстройство;

также «фрустрация»). По этому признаку худшей парой является (m_2w_2) – однако, в отличие от пар во второй комбинации, она не распадется.

Блокирующей парой в задаче об устойчивых браках называется такая, где предпочтения партнеров удовлетворяются лучше, чем в любых других парах с их участием. В нашем случае это пара Оля+Денис (m_1w_1) с минимальной суммой рейтингов сторон. В комбинации («паросочетании») [(m_1w_2), (m_2w_1)] она может образоваться при разрыве обеих пар, тогда как в сочетании [(m_1w_1), (m_2w_2)] у разочарованных Вадима и Кати в заданных условиях нет альтернатив (рис.7.27).

Решением игры служат комбинации агентов, в которых нет пар, противоречащих спискам предпочтений – в том числе разлученных блокирующих пар. Найти устойчивые паросочетания позволяет *алгоритм Гейла-Шепли*, или *отложенного согласия* (англ. deferred acceptance). Мы продемонстрируем его на примере системы из восьми агентов (4×4), представленной в Табл. 7.6 в формальном виде.

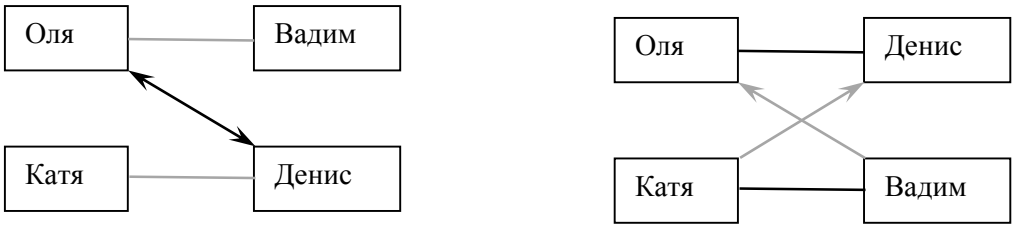


Рисунок 7.27. Неустойчивые (слева) и устойчивые (справа) паросочетания при предпочтениях из таблицы 7.5

Таблица 7.6

Предпочтения агентов в задаче 4×4 (см. [5])

m_1: $w_1 \succ w_2 \succ w_3$	w_1: $m_3 \succ m_1$
m_2: $w_3 \succ w_4$	w_2: $m_1 \succ m_2 \succ m_4$
m_3: $w_3 \succ w_1$	w_3: $m_1 \succ m_4 \succ m_2 \succ m_3$
m_4: $w_2 \succ w_4 \succ w_3$	w_4: $m_2 \succ m_4$

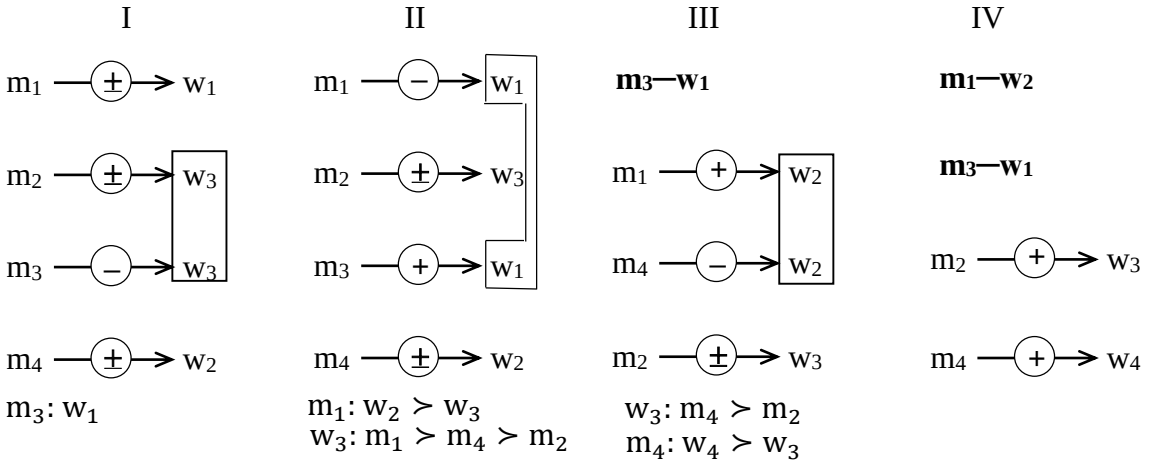


Рисунок 7.28. Поиск стабильных паросочетаний по табл. 7.6: «мужской» алгоритм

Алгоритм Гейла-Шепли реализуется как в «мужском», так и в «женском» вариантах в зависимости от того, какому типу агентов предоставляется первый ход. В «мужском» алгоритме (рис. 7.28) на первом шаге агенты $\{m_i\}$ делают предложения (обозначенные стрелкой) $m_1 \to w_1$, $m_2 \to w_3$, $m_3 \to w_3$ и $m_4 \to w_2$ избранницам, занимающим первую позицию в их рейтинге. Дальнейшие действия разворачиваются так:

1. Если соискатель возглавляет список предпочтений, предложение принимается (+)
2. Если соискатель отсутствует в списке, предложение отвергается (–)
3. Если соискатель занимает в списке не первое место, предложение не отвергается (±)
4. При нескольких соискателях принимается (+, т.е. «да») либо не отвергается (±, «может быть») агент, лидирующий среди всех них по предпочтению, остальные отвергаются (–, то есть «нет»)
5. Отвергнутый соискатель вычеркивает неуступчивую даму из своего сердца (списка). На следующем ходе он делает предложение следующей кандидатуре в его рейтинге. Также вычеркиваются из всех списков агенты, образовавшие пару.
6. При точном повторении конфигурации «не отвергнутые» (±) кандидатуры принимаются.

В соответствии с указанной схемой на первом ответном ходе агент(ка) w_3 не отвергает соискателя m_2 с лучшим рейтингом и отвергает m_3. Соискатели m_1 и m_4, которые входят в список предпочтений, соответственно, w_1 и w_2, но не занимают там первых мест, не отвергаются. На втором шаге агенты m_1, m_2 и m_4 повторяют свои предложения, а агент m_3 вычеркивает w_3 из своего списка и делает предложение w_1, теперь занимающей там первое место. Как иногда происходит и в жизни, m_3 занимает первое место в списке предпочтений w_1, так что его предложение принимается – а обнадеженный в первом туре агент m_1 получает отставку и корректирует свой список предпочтений. В третьем туре w_2 получает предложение от агента m_1, занимающего первое место в ее списке – и принимает его. В четвертом туре m_2 повторяет свое предложение w_3, а отставленный w_2 агент m_4 делает предложение w_4, к которой на предыдущих турах предложений не поступало – но теперь она лучшая в его рейтинге. И хотя в парах m_2w_3 и m_4w_4 каждый соискатель больше устроил бы чужую из двух оставшихся невест, конфигурация предложений останется неизменной при любом числе последующих туров – значит, эти предложения принимаются. Таким образом возникают четыре пары:

(7.52 а) m_1w_2 (2,1), m_2w_3 (1,3), m_3w_1 (2,1) и m_4w_4 (2,2)

Приведенные в скобках рейтинги партнеров на качественном уровне отражают степень их удовлетворения. Мы видим (и так бывает), что не все вступившие в брак достигли полного счастья – но эти браки устойчивы, поскольку в размещении агентов нет разделенных блокирующих пар.

Явные аналогии алгоритма Гейла-Шепли с действиями людей и многих других живых существ при выборе спутника жизни отмечены не только для развлечения читателя. На основании этих аналогий можно предположить, что сам алгоритм выбора, эффективность которого математически доказана, выработан на основе тысячелетнего опыта, то есть имеет эволюционную природу – см. предыдущий подраздел. Поскольку оба типа агентов равноправны, а их списки предпочтений не совпадают, «женский» алгоритм может

привести к другой устойчивой комбинации пар. Действительно, если предложение делают дамы, а их желаемые партнеры в основном отвечают «ну, может быть…» (что тоже случается), на первом ходе возникнет конфигурация предложений $w_1 \to m_3$, $w_2 \to m_1$, $w_3 \to m_1$ и $w_4 \to m_2$. В соответствии с той же таблицей предпочтений 7.6, агент m_1 отвергнет w_3 и обнадежит w_2, которая занимает более высокое, хоть и не первое место в его рейтинге избранниц. Процедура приводит к другому размещению агентов, также устойчивому – т.е. без разделенных блокирующих пар:

(7.52 б) m_1w_2 (2,1), m_2w_4 (2,1), m_3w_1 (2,1) и m_4w_3 (3,2)

ЗАДАЧА 7.12. Выведите паросочетания (7.52 б) из предпочтений табл. 7.6 по «женскому» алгоритму (в тексте это уже почти сделано).

Различные варианты задачи об устойчивых браках – одно из популярных направлений современной междисциплинарной физики. Ходы агентов часто представляют в виде двудольного графа с белыми и черными вершинами (см. главу 6). В общем случае рейтинги агентов включают разное число кандидатур, а некоторые агенты могут в них отсутствовать и оставаться одинокими – как фирмы, не получившие государственный контракт. При низком рейтинге потенциального партнера стороны могут предпочесть одиночество. Сумма «фрустраций» всех одиноких агентов и невыгодных сочетаний в большом ансамбле служит энергоподобным показателем его неустойчивости (подобно разориентации магнитных моментов атомов в спиновом стекле, см. разд. 3.4 в главе 3). В таких вариантах игры, очень близких к статистической физике, обычно вводятся случайные разрывы пар как аналог воздействия температуры.

Литература к разделу 7.7

[4]С.И. Доценко, *Вектор Шепли как способ справедливого распределения*, Журнал обчислювальної та прикладної математики (Journal of Computational & Applied Mathematics), 2014, №3 (117), 111.
[5] С.И. Доценко, *Математические модели стабильных размещений*, там же, 2013, №2(112), 3.

7.8. Игры и тропическая алгебра

Из рассмотренного выше материала можно видеть, что теория игр исследует математические модели взаимодействий, в которых стороны стремятся получить выигрыш, используя заданный набор стратегий. Размеры выигрышей и проигрышей игроков задает матрица платежей; вычисление ее элементов выходит за рамки теоретико-игровых конструкций. Задача теории игр – поиск устойчивых равновесий Нэша, от которых стороны конфликта не могут отклониться без увеличения собственных потерь. При введении в модель непрерывных параметров (как для смешанных стратегий) у этой задачи всегда есть решение.

Декларируемая «общественная» сверхзадача – устойчивые равновесия с максимальной суммой выигрышей всех противоборствующих сторон, или оптимум Парето – имеет решение отнюдь не всегда. Локальное равновесие тоже можно рассчитать не в любых играх: при отсутствии аналитического решения объем вычислений с перебором всех вариантов при увеличении числа игроков возрастает экспоненциально, то есть в геометрической прогрессии. (Если при удвоении числа агентов *m* время расчета возрастает

в 2^2 раз, для N агентов в $2^{N/m}$ раз и расчет системы из m=10 агентов занимает 5 минут, на 100 агентов потребуется 5120 мин., или 85.333… ч. (чуть более 3.5 суток), а на 200 агентов – почти 10 лет компьютерного времени).

В математической теории игр до сих пор не найдено общее решение основной задачи: определить максимум целевой функции при произвольно установленных ограничениях (см. раздел 7.1). Уже при конечном наборе ходов предсказать результат игры в аналитическом виде обычно не удается (см. задачу о ранце в гл. 6). Практические способы уменьшения числа неизвестных – удаление доминируемых стратегий, равновесие в осторожных стратегиях – не всегда позволяют определить равновесное состояние. Наиболее строгие результаты получены в кооперативных и эволюционных играх – где, соответственно, используются алгебра векторов в N-мерных пространствах и качественный анализ нелинейных дифференциальных уравнений (см. выше).

Тем не менее, математические соотношения вида $\mathrm{A}\mathbf{x} = b\mathbf{x}$, (где $\mathbf{x}$ – *собственный вектор* состояния системы, A – матричный оператор, изменяющий систему, b – собственное значение этого оператора, то есть новый масштаб состояний, см. разд. 3.2 в главе 3) для теоретико-игровых задач в общем случае не определены, хотя для линейных операторов A они хорошо известны. Поэтому одна из нерешенных задач математики в области теории игр – перевести соотношение между исходным ($\mathbf{x}$) и конечным ($\mathbf{y}$) состояниями исследуемой нелинейной системы

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

в линейный вид

$$\mathrm{B}\mathbf{x} = b\mathbf{x},$$

что сводится к преобразованию A→B оператора A (который, например, может включать слагаемые $\alpha\mathbf{x}^2$, $\beta\mathbf{x}^3$,… и т.д.) к линейному оператору B.

Третье математическое отступление: группы и алгебры

В начале этой главы мы познакомились с математическим понятием группы как конечного или бесконечного набора некоторых абстрактных элементов, переводимых друг в друга тоже абстрактной операцией группового умножения. Абстрактными мы называем такие элементы и операции, которые в математических соотношениях теории групп можно заменить числами, векторами или матрицами (элементы) и сложением, умножением либо изменением масштаба (операции), но эти соотношения справедливы и для других объектов и действий над ними – даже если, не будучи математиками, мы их не знаем. В разделе 7.1 приводились примеры групп бесконечного порядка: множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с операцией сложения (единичным элементом служит 0) и множество действительных чисел с «выколотым» началом координат $\mathbb{R}\backslash 0$, где операцией служит обычное умножение, а единичным элементом – число 1. И все-таки: если группы так фундаментальны, что к ним можно свести другие математические конструкции (а нас интересуют игры) – зачем в одной и той же конструкции нужны две несовпадающие операции?

В школьной «алгебре чисел» тоже есть две разные операции: *сложение* и *умножение*. В институтских курсах физики (в том числе и в этой книге) они лишь распространяются на новые математические объекты: комплексные числа, векторы, матрицы и тензоры. Отвлеченно рассуждая, можно предположить, что двух разных действий достаточно для любых или почти любых расчетов со всеми известными математическими объектами. И это правильное предположение.

Множество абстрактных элементов A = $\{a_i\}$ называется *алгеброй*, если на нем можно ввести *две* несовпадающие операции (с двумя разными единичными элементами), по отношению к которым A является группой. Одна из этих операций называется (абстрактным) *сложением* $\oplus$, другая – (абстрактным) *умножением* $\otimes$, а их единичные элементы – *обобщенным нулем* (0) и *обобщенной единицей* (1). По крайней мере одна из этих операций («сложение») коммутативна – в школе это называлось *переместительным законом*:

$$a_i \oplus a_j = a_j \oplus a_i\,.$$

Кроме того, для обоих действий справедлива *ассоциативность*, которую в школьном курсе математики называли *сочетательным законом*: теперь мы знаем, что это первое из трех условий существования группы

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$
$$a \otimes (b \otimes c\,) = (a \otimes b) \otimes c,$$

а для комбинации сложения и умножения справедлива *дистрибутивность* (или *распределительный закон*)

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

при любых $a, b, c \in$ A.

Математическому определению алгебры полностью соответствует та алгебра, которую все мы проходили в школе и подразумеваем под этим словом. Но математики обобщают и создают абстрактные понятия не хуже философов – поэтому у «алгебры в общем виде» много конкретных воплощений, которые выходят далеко за рамки нашей книги. Правда, все «математические алгебры» (где элементы и операции могут быть довольно причудливыми) обладают одним общим свойством: множество элементов в алгебре бесконечно и даже непрерывно – иначе от такой формальной конструкции мало толку в прикладных вычислениях. Мы рассмотрим лишь одну нестандартную алгебру, которая переводит сложный вопрос о предпочтениях сторон конфликта не в сопоставление численных полезностей (что не всегда помогает), а в их сравнение – тоже в математическом смысле.

Тропическая алгебра

...среди биндюжников считавшийся грубияном.
Исаак Бабель, «Одесские рассказы»

Зададим на непрерывном множестве действительных чисел такие действия:

1. «Умножение» $a \otimes b = c = a + b$: это просто всем известное сложение – но мы назовем его умножением (на что, по формальному определению алгебры, имеем полное право).
2. «Сложение» определяется хитрее: это *сравнение*, которое показывает, какой из двух элементов в бинарной операции больше (лучше, «круче», жизнеспособнее и т.д.):

$$a \oplus b = a, \text{ если } a > b, \text{ и } a \oplus b = b, \text{ если } a < b$$

(при этом «$>$» можно заменить на «$\succ$» либо какое-то другое реляционное отношение). В таком случае операция «сложения» нелинейна – точнее, *очень* нелинейна, ибо конкретные значения слагаемых не влияют на результат. Тем не менее, это коммутативная операция: если $a > b$, то $a \oplus b = b \oplus a = a$

$$100 \oplus 1 = 100,\ 1 \oplus 100 = 100,\ 3 \oplus 998 = 998,\ 998 \oplus 3 = 998,\ 501 \oplus 499 = 501 \text{ и т.д.}^*$$

У подобной алгебры есть ряд названий: *экстремальная* (Н.Н. Воробьев, СССР, Ленинград, 1960-е годы), *тропическая* (Имре Саймон, Бразилия, 1980-е), *идемпотентная* и некоторые другие. Чаще ее называют *тропической алгеброй* – не только в честь Бразилии, где, как и в ряде других стран, были сформулированы ее основы, но также и от нетипичного изобилия ярких нестандартных соотношений. Существует два равноправных вида тропической алгебры: *минимальная* ($a \oplus b = a$, если $a < b$) и *максимальная*, которую мы только что определили ($a \oplus b = a$, если $a > b$). Если максимальная алгебра задана на множестве действительных чисел, то единичный элемент e по сложению, который здесь называется *нейтральным*, для любого числа $a \in \mathbb{R}$ обязан удовлетворять условию

$$a \oplus e = e \oplus a = a$$

– то есть он должен быть меньше любого конечного числа. Таким образом, нейтральный элемент $e = -\infty$ (равен минус бесконечности). В минимальной тропической алгебре $e = +\infty$.

Название *идемпотентная алгебра* возникло из-за соотношения

$$a \oplus a = a$$

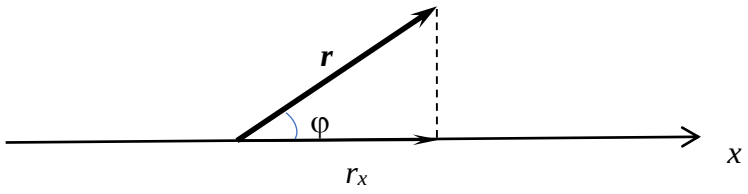


Рисунок 7.29. Проектирование вектора на ось как идемпотентная операция: $(r_x)_x = r_x$

---

* Если присмотреться к действию сравнения, можно заметить, что обратного действия у него нет, и значит, по операции $\oplus$ множество действительных чисел не является группой. Это именно так: множество элементов, на котором задана алгебра, по одному из двух действий в математическом смысле может быть *полугруппой* или, точнее, *моноидом* – в нем должен быть единичный элемент, но существование обратных элементов необязательно. В нашей обычной алгебре на множестве действительных чисел есть обратные элементы как по сложению, так и по умножению: полугруппа и моноид – более широкие понятия, чем группа. Мы дали здесь лишь приблизительное определение алгебры. Строгое введение в эту область есть, например, в учебнике[6] для первокурсников мехмата МГУ.

Идемпотентными в математике называются операции вида $A^2 = A$. Простой пример – проекция вектора на прямую: $r_x = r\cos\varphi$: повторная «проекция проекции r_x» снова даст r_x, поскольку для вектора r_x угол $\varphi=0$ (см. рис. 7.29).

Соотношения тропической алгебры (см.[7]) распространяются на матрицы и другие математические объекты. При этом они сильно отличаются от соотношений классической алгебры. В частности, в новой алгебре нет операции вычитания $a - b = a + (-1)b$, потому что в ней не определено понятия множителя:

$$a \oplus (-1) \otimes b = a \oplus (b-1) = a \text{ (если } a > b - 1) \text{ или } b - 1 \text{ (в противном случае).}$$

Соответственно, у «тропической» матрицы не существует детерминанта как альтернированной суммы произведений ее элементов (раздел 3.1 в гл. 3). Простая сумма таких произведений, или *перманент* матрицы, вычисляется по правилам тропических «сложения» и «умножения»:

в обычной алгебре

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} = (1\cdot 5) - (2\cdot 3) = -1$$

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} = (1\cdot 5) + (2\cdot 3) = 11$$

в тропической максимальной алгебре

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} = (1 \otimes 5) \oplus (2 \otimes 3) = (1 + 5) \oplus (2 + 3) = 6$$

Так как скалярных множителей в тропической алгебре нет, число 1 не является здесь единичным элементом относительно тропического умножения (его нейтральным элементом служит 0) – это просто одно из чисел.

Тропическая алгебра и *тропическая геометрия* – бурно развивающиеся области современной математики. Этот формализм позволяет привести нелинейные уравнения к «линейному» (в рамках данной алгебры) виду, что упрощает вычисления во многих разделах исследования операций и теории игр. Сравнение по предпочтениям, рассмотренное выше в задаче об устойчивых браках, также приобретает строгость и однозначность:

$$\text{если } a \succ b, \text{то } a \oplus b = a$$

(вся неопределенность перекочевывает в выработку предпочтений). Не исключено, что в близком будущем соотношения идемпотентной алгебры распространятся в теории игр и превратят ее в строгий раздел фундаментальной математики, подобный теории групп или теории графов.

Литература к разделу 7.8

[6] А.И.Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2004,

[7] А.Г.Лукашенко. Тропическая алгебра.
https://kpfu.ru/portal/docs/F906146129/VKR_2015_N_AML_Lukashenko_AG.pdf

Рекомендуемая литература

1. Ю.П. Зайченко, *Исследование операций*, «Вища школа», Киев, 1975.
2. В.Н. Колокольцов, О.А. Малафеев, *Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех)*, СПб: Лань, 2012.
3. Г.В. Колесник, *Теория игр с приложениями к моделированию экономических систем*, М: ЛЕНАНД, 2017.
4. Л.В. Колобашкина, *Основы теории игр*, М.: БИНОМ, 2012.
5. М.В. Губко, Д.А. Новиков, *Теория игр в управлении организационными системами*, М.: Синтег, 2002.
6. А.В. Захаров, *Теория игр в общественных науках*, М.: ИД ВШЭ, 2015.
7. А.А. Васин, В.В. Морозов, Теория игр и модели математической экономики, М.: Макс Пресс, 2005.
8. С.А. Вартанов, Е.А. Ивин, *Прикладная теория игр для экономистов*, Вологда: ВолНЦ РАН, 2020.
9. Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили, *Рефлексия и управление: математические модели*, 2-е изд. , М.: ЛЕНАНД, 2022.

ГЛАВА 8. ФИЗИЧЕСКИЕ ИДЕИ В ЭКОНОМИКЕ

Экономика и физика. Основные понятия. Формальные основы экономики. Равновесие Вальраса. Многокритериальная оптимизация, фронт Парето.

Распределения случайных величин: равномерное, биномиальное, Пуассона, нормальное, лог-нормальное, Коши, Парето. Моменты распределения. Центральная предельная теорема.

«Экономическая термодинамика», энтропия Шеннона. Функция Лоренца, коэффициент Джини. Кинетическая теория денег. Неопределенные множители Лагранжа и энтропия распределений случайной величины. Монетаристские теории, инфляция, денежные агрегаты. Криптовалюты.

Сетевые структуры экономики. Сеть мировой торговли, сеть транснациональных корпораций. Игры и агент-ориентированные модели на сетях.

Физические модели в экономике и эконофизика. Биржевые индексы, временные ряды, корреляции. Распределение Леви. Биржа как стохастическая система, фракталы. Технический анализ. Понятие о финансовой математике, теорема Такенса. Алгоритмическая торговля. Мировые экономические кризисы.

Экспериментальная (поведенческая) экономика. Квантовоподобные модели биржи, «квантовые игры». «Квантовая когнитивистика» и механика Бома. Нейрофизиология, колебательные потенциалы коры головного мозга.

Деньги счет любят.
пословица

Словом *экономика* в научной литературе обозначают три существенно разные области: (1) хозяйственную деятельность, которая обеспечивает существование людей и социальных структур, (2) систему отношений между участниками этой деятельности и (3) совокупность академических и прикладных дисциплин, изучающих как хозяйственную деятельность, так и связанные с ней отношения. В нашей книге там, где это не приводит к путанице, мы называем «экономикой» прежде всего экономические науки (англ. *Economics*), но будем помнить о многозначности этого слова. Нечеткость терминологии и отсутствие единых общепринятых определений даже у фундаментальных понятий характерны для *наук о Человеке* (англ. *Human sciences*); по данному признаку «науки об экономике» приходится отнести к гуманитарной сфере.

Тем не менее, среди наук о человеческом обществе экономические дисциплины выделяются интенсивным использованием математического аппарата и неоднократными попытками аксиоматического построения. В этом смысле экономика находится между естественными и гуманитарными предметами, а некоторые ее разделы (эконометрика, математическая экономика, финансовая инженерия) особенно близки к физике и математике. С другой стороны, интенсивная формализация экономической науки, начатая во второй половине XIX века, к настоящему времени превратила ее в «герметичную» область знания со своими аксиомами, теоремами и методами, где вторжение извне вызывает сильный коллективный отпор[*]. При этом ряд идей, моделей и методов в разное

[*] Стандартную реакцию на вхождение физиков в экономические науки иллюстрирует, например, статья известных специалистов в области математической экономики «Тревожные тенденции в эконофизике» (M. Gallegati, S. Keen, T. Lux, P. Ormerod, Physica A, 2006, **370** (1), 1). Возможные причины такого «цехового отторжения» мы обсудим далее.

время были перенесены в экономические дисциплины из теоретической физики и, особенно, математики (некоторые примеры приводились в предыдущих главах) – хотя разделом физической «мета-науки» экономика до сих пор не стала.

В этой главе обсуждается использование физических и *физикалистских* (т.е. формально заимствованных у физики, но по сути подозрительных) методов современной экономики. Помимо ее разделов, примыкающих к междисциплинарной физике, будут затронуты математические модели и методы, уже вошедшие в основы экономических теорий. На этом пути мы попытаемся ответить на естественно возникающий вопрос: отчего сильный приток идей извне еще не сделал экономику частью физики – и можно ли добиться этого теми приемами, которые используются в настоящее время.

Очень краткий исторический очерк

В социально-экономической литературе экономику иногда называют «физикой общественных наук». В этом метком определении отражаются как более глубокая, по сравнению с другими науками о человеке и обществе, математизация экономических дисциплин и их сильное влияние на сопредельные области, так и «гуманитарная» неопределенность ключевых положений и выводов экономической теории. По интенсивности использования абстрактных понятий и математического аппарата экономическая наука весьма неоднородна; в этом отношении она меньше напоминает физику. А их принципиальное различие заключается в том, что основой физики служат экспериментальные результаты – тогда как экономика, подобно классической натурфилософии, многие годы лишь описывала и трактовала хозяйственную реальность. Словосочетание «экономические эксперименты» (по крайней мере в СССР) обычно имело негативный оттенок, а отношение к массивам цифровых данных как результатам измерений возникло лишь в последние десятилетия в пограничных разделах эконометрики, финансовой математики и эконофизики. В целом экономику как науку отличает отсутствие фундаментальных строгих теорий (таких, как ньютоновская или квантовая механика в физике) при обилии частных математических моделей, включая сложные и весьма успешные.

Материальная основа экономических категорий обсуждалась в период *классической экономики*, начиная с работ Адама Смита во второй половине XVIII века по середину XIX века (см.[1]). Основатели экономической теории считали, что *стоимость* (англ. *value*) товара, участвующего в обмене (ее случайным конкретным выражением является цена), пропорциональна или, по крайней мере, симбатна количеству труда, затраченного на его выработку. По сути, *трудовая теория стоимости* (Давид Рикардо) декларировала определенное «энергетическое» содержание предметов обмена, что на качественном уровне будет обсуждаться ниже. Понятие *прибавочной стоимости* (Карл Маркс) как части дохода, которую присваивает собственник средств производства (капиталист), детализировало механизм распределения энергии в социуме и прямо указывало на его асимметрию. Все ведущие экономисты классического периода полагали количественные параметры хозяйственной деятельности (цены, зарплаты, ренту, процентные ставки) статистическими средними по экономике государства, ее отраслям и регионам. На такой основе во второй половине XIX в. сформировалась *политическая экономия*; конфликтный

характер этой дисциплины отражал внутриполитическую нестабильность европейских государств того времени.

Возникшая в тот же период *неоклассическая экономическая теория* (У. Джевонс, Л. Валрас, И. Фишер и др.) перенесла центр своих интересов от проблемы стоимости товаров на исследование механизма ценообразования как баланса спроса и предложения. Главным средством «стихийного» регулирования экономических отношений в ее рамках стал *рынок*: неопределенный надгосударственный институт, обеспечивающий оптимальное распределение ограниченных ресурсов общества. В первой половине XX в. формальные неоклассические модели были построены практически для всех аспектов капиталистического хозяйства. Однако статистический и «интуитивно физический» подход классического периода в таких моделях был заменен механистическим равновесием с единственным значением равновесной цены в довольно искусственной конструкции идеального рынка (см. далее разд. 8.1). Надо отметить, что работы Больцмана и Клаузиуса также появились во второй половине XIX века, но стали общепринятыми *среди физиков* лишь через несколько десятилетий – поэтому они не оказали влияния на становление новой экономики. Ее основные положения и результаты представил Альфред Маршалл в шеститомных «Принципах экономической теории» (1890 г.).

В начале и середине XX века, наряду с развитием и формализацией неоклассических положений, в экономической науке возникли течения, оспаривавшие фундаментальную ценность рыночного равновесия (которым, по справедливому замечанию Джона Гэлбрейта, замещалось ставшее непопулярным слово *капитализм*). Кризис мировой политико-экономической системы, начиная с 1-й мировой войны, вызвал необходимость регулирования экономики. Работы английского экономиста Дж. М. Кейнса в межвоенный период обосновали необходимость регулирования государством макроэкономических параметров внутри капиталистической экономической модели; в них возникла макроэкономика как самостоятельное направление. Во второй половине XX века уже упомянутый Дж. К. Гэлбрейт (США) в книге «Новое индустриальное общество» (1967) и других работах утверждал необходимость экономического планирования в рамках крупных корпораций и государства в целом (*техноструктур*), заявляя о конвергенции капиталистической и социалистической (ныне чаще называемой «командно-административной») общественных систем.

Стабилизация мировых экономик (как систем производства и присвоения продукта, основанных на частной либо государственной собственности) во второй половине XX века сопровождалась возрождением интереса к неоклассическим экономическим принципам в рамках *монетаризма* (Милтон Фридман, США). В этом теоретическом и практическом направлении влияние государства на экономическую деятельность предлагалось ограничить контролем денежной массы и регулированием инфляции; в следующих разделах мы вернемся к этому вопросу. До конца XX века монетаристские подходы к управлению экономикой применялись во многих странах – в том числе, с остро негативными результатами, в России 1990-х годов. Однако переход к «однополярному» миру под руководством США и сопровождавший его взрыв биржевых спекуляций так изменили мировую экономическую систему, что ныне ее вряд ли можно считать

управляемой, так как сравнимые по размерам производительный и спекулятивный сегменты преследуют в ней весьма разные цели.

В современной экономической науке неоклассические схемы равновесия и представления о рынке как главном стихийном оптимизаторе экономической деятельности остаются *магистральным* направлением микро- и макроэкономики (англ. mainstream economy), а также других областей. К нему примыкают математические и компьютерные модели многочисленных экономических процессов (включая рассмотренные в предыдущих разделах леонтьевские матрицы ввода-вывода, методы математического программирования и теории игр, многокритериальной оптимизации и мн. др.), лишь формально связанные с рыночной идеологией. Количественный подход к экономике, в частности, представляет *эконометрика*, где используются методы статистической обработки данных (многомерные регрессии, факторный анализ, кластерный анализ и т.д.), применяемые во многих науках. Одной из задач эконометрики является статистическая проверка гипотез – которые, как отмечается в учебниках, экономисты обычно конструируют для каждой исследуемой системы[2]. В последние десятилетия внутри магистрального направления возродилась наследственно ангажированная область *политэкономии* (англ. *political economy*), где рассматривается взаимосвязь экономических и политических явлений.

Разрыв между формальными теориями «магистральной» экономической науки и ее прикладными моделями подвергается критике в современных неортодоксальных (англ. heterodox) экономических течениях. Далее в этой главе мы рассмотрим примеры использования физических идей как в работах экономистов, так и в примыкающих к ним исследованиях физиков.

8.1. Основы экономики и физика

Фундаментальные понятия физики – пространство, масса, энергия, сила, поле, статистика, флуктуации – и вытекающие из них многочисленные измеряемые величины обсуждались в первой части книги под разным углом зрения. От «физической экономики» (в предположении, что она существует) интуитивно можно ожидать перевода экономических категорий в эти термины и применения формального аппарата физики к экономическим переменным[*]. Но категории экономической науки редко сводятся к физике. Фундаментальными понятиями экономики служат *производство, распределение, потребление* и *обмен* (структурированный в виде *рынка*) внутри человеческих сообществ. Это расхождение следует объяснить.

С физической точки зрения, которую трудно оспорить, все социальные структуры на Земле существуют благодаря внешнему притоку энергии Солнца и ее трансформациям в земной оболочке (ветрам, океану, почвам, полезным ископаемым, растительности…) –

[*] Мы не обсуждаем концепцию *редукционизма*, декларировавшую построение любой естественной науки *bottom–up* (снизу вверх) от физики микромира. В ее рамках объективные законы экономики должны определяться цепочкой «молекулярная физика – химия – биохимия – нейрофизиология – психология – экономическое поведение людей». Редукционизм был модным течением в середине XX века на фоне грандиозного проникновения физики в химию и биологию. С тех пор он показал свою непродуктивность, вполне ясную из общих соображений: неизбежные эмпирические поправки на огромном числе промежуточных стадий такого пути обесценивают конечный результат.

таким образом являясь диссипативными системами. В этих предельно общих терминах экономика, как хозяйственная деятельность социумов, и связанные с ней отношения между людьми (включая научные) – пример *самоорганизации диссипативных систем* (см. гл. 4). Главный признак всех индивидуумов в социуме, с такой общефизической точки зрения – потребление энергии из внешнего источника. В этом процессе можно выделить несколько стадий:

1. Затраты собственной энергии при получении *продукта*, как «овеществленной» внешней энергии в большем объеме – условный *труд*.
2. *Присвоение* продукта труда (в том числе чужого) для выживания и улучшения условий жизни.
3. *Потребление* присвоенного продукта с той же целью.
4. *Обмен* присвоенным продуктом между индивидуумами в социуме.

Не следует искать в п.п. 1–4 строгого экономического или философского содержания: это лишь попытка переложить экономические понятия на язык энергообмена. «Труд» волчьей стаи или осиного гнезда может рассмешить представителей гуманитарных наук – но произвольно взятые термины здесь не главное. Важно, что для абстрактного сообщества людей 1-й и 4-й этапы неявно предполагают некоторую социальную структуру, включающую кооперацию. Также важно, что п. 2 и 3 «индивидуальны» – а так как у разных людей разные возможности, отсюда возникает *неравенство* как фундаментальный признак социума. (Присвоение и потребление тоже подразумевают наличие социальной структуры, удерживающей от «войны всех против всех» при дележе добычи или продуктов труда). Наконец, сообщества людей отличает от других биологических сообществ на Земле лишь п. 4: обмен «обобщенным продуктом»[*].

У перечисленных выше этапов потребления энергии людьми, как единицами социальной системы, есть общее свойство: непригодность для декларированной выше задачи «непосредственно внедрить физику в экономику». Зато они показывают, что *обмен* действительно фундаментален: среди всех экономических понятий он первым появляется в процессе потребления энергии социумом. Кроме того, сообщество людей подразумевает *социальную структуру* как результат самоорганизации диссипативной системы. Этой структурой непосредственно определяются условия труда, присвоения и обмена, хотя в популярном изложении основ экономики такую связь нередко игнорируют[**]. Также неявно допускается способность коллективного труда создавать *излишки* продукта, без чего обмен как фундаментальная категория теряет смысл. При достаточно сложной социальной

[*]Это явление тоже распространено в природе (обмен продуктами жизнедеятельности у общественных насекомых, выкармливание потомства). Но у всех видов, кроме *homo sapiens*, такие процессы ограничены объективной целью выживания, они не усиливают неравенства – которое приходится признать одним из главных признаков человеческой цивилизации.

[**] Абстрактные «мужи» Ж.-Ж. Руссо, к обоюдной выгоде обменивающие собранные ими плоды в тропическом лесу[1], столь же далеки от действительности, как «тропический рай» европейской литературы XVIII века далек от реальностей сельвы. В этом процессе выносится за скобки полиция – хотя бы в виде племенных табу. При отсутствии сдерживающих факторов обмен между невооруженным «мужем», собравшим корзину плодов, и «мужем» из другого племени, вместо плодов несущим копье, выглядел бы иначе. Утверждение Руссо «человек по своей природе добр» не имеет отношения к экономике – скорее оно отражает деградацию общественного сознания в предреволюционной Франции (см. следующую главу и часть III этой книги).

структуре (что тоже чаще подразумевается, чем утверждается в экономических науках) схему «кооперативного потребления энергии» наполняет новое содержание: пункту 1 соответствует *производство товаров*, п. 2 *распределение*, включающее п. 4 (*обмен* и *рынок*) – и только п. 3 формулируется без изменений, хотя он тоже определяется состоянием социума. Главным количественным инструментом экономики тогда становятся *деньги* как всеобщий эквивалент обмена, или же мера содержания энергии в разных видах товаров (сегодня следовало бы добавить «и услуг»).

Таким образом, отсутствие прямых физических аналогов у базовых экономических категорий не должно нас расстраивать: эти категории *уже* так близки к физике, как это только возможно в описании общественных процессов. Поиск их особого физического содержания – невыполнимая и, главное, бессмысленная работа. Это никак не исключает понятий физики из экономических соотношений – их использованию и посвящена настоящая глава. При этом необходимо помнить, что разные стороны одних и тех же явлений в социуме, которыми занимаются разные общественные дисциплины (включая экономику), взаимосвязаны гораздо сильнее, чем, например, неорганическая химия и биохимия: часто они неразрывны. Кроме того, количественные параметры экономических и других процессов, с точки зрения физики протекающих в микро- и мезоскопических системах, могут сильно изменяться во времени, что затрудняет их сравнение. Возможные пути к «синтезу» общественных и естественных наук мы обсудим в последней части книги.

Серьезнейшее отличие экономики от физики вытекает из разной природы частиц, составляющих социум и физические объекты. В отличие от бессмертных и бесстрастных атомов и молекул, «человеческие частицы» смертны, мотивированы и наделены инстинктом самосохранения. Динамическим процессам, которые составляют основу физики (см. часть I), в обществе соответствуют кризисы, революции, войны и другие виды катастроф. Основу наук об обществе как устойчивой жизнеспособной конструкции составляет фундаментальная идея *равновесия*, к которому в каждый момент времени объективно стремится всякая социальная система.

В физике «неживых» систем равновесию соответствует значительно более узкий круг задач: статика в механике, классическая термодинамика, стационарные потоки в кинетике и нек. др. В диссипативных общественных системах нормальным состоянием является динамическое равновесие – а его нарушение грозит переходом в хаотический режим (см. гл. 4), способный разрушить систему. В некотором смысле все общественные науки носят инженерный характер: существование общества как такового обеспечивают только медленные и в этом смысле равновесные изменения его экономической и политической структуры.

Экономика и физические принципы

Итак, аппарат физики можно переносить в экономику лишь в той мере, в которой совокупность экономических агентов остается стационарной, а отношения спроса к предложению в ней – преобладающими. «Физический смысл» таких соотношений в этом случае сводится к балансу некоторых сохраняющихся величин при переходе между состояниями A→B. Чтобы сравнивать состояния A и B, они должны (1) мало изменяться в рассматриваемый нами интервал времени, и (2) допускать введение некоторой

количественной «меры» M(A) и M(B) (*денег*), что позволит написать для них *уравнения состояния*.

В масштабе веков и тысячелетий государства и их социумы безусловно нестационарны: они постоянно претерпевают изменения, в том числе катастрофические (военные и революционные). Кроме того, экономические явления и закономерности – это составные части неравновесных, а иногда и нестационарных процессов в диссипативной системе «человеческие сообщества в биосфере Земли». Поэтому первым условием построения экономических теорий является *разделение масштабов времени*. Экономика рассматривает «быстрые» равновесные процессы (установление цены при обмене) в стационарных условиях либо относительно небольшие и «плавные» изменения условий, когда государство, обеспечивающее хозяйственную деятельность, продолжает существовать и средства его воздействия на процессы обмена принципиально не изменяются (см. [1] в списке рекомендуемой литературы к этой главе).

Наименьшему масштабу времени в экономических дисциплинах соответствует *микроэкономика*, следующему – *макроэкономика*. Микроэкономика анализирует закономерности обмена в денежном или натуральном выражении для дискретных производителей («фирм») и потребителей («домохозяйств»). Здесь существенно, что динамическое равновесие спроса и предложения (см. разд. 1.5.1 в гл. 1, а также разд. 2.4 и рис. 2.36 в главе 2) устанавливается при неизменных правовых нормах, регулирующих экономические отношения – а такие нормы, невзирая на неоклассическую теорию, есть во всех государствах. В макроэкономике агентами служат крупные отрасли хозяйства, экономические системы государств и всего мира, а количественными параметрами – численность населения, валовый внутренний продукт (ВВП), денежная масса и другие интегральные показатели. Известны еще более медленные (технический и социальный прогресс, демография) и «промежуточные» процессы (займы, модернизация отраслей и предприятий), но для наших целей достаточно двух масштабов времени в экономических науках.

Еще одно отличие «живых» экономических систем от «неживых» физических – это принципиальная неоднородность экономических субъектов, а также создаваемой и обмениваемой ими продукции. Прямое усреднение динамики условной молочной фермы с динамикой промышленной корпорации (и даже условной ремонтной мастерской, по-другому встроенной в экономические отношения), как и количественное сравнение результатов их деятельности, вряд ли возможны. Поэтому в микроэкономике преобладают *стилизованные* параметры и соотношения между ними (например, производственная функция Кобба-Дугласа, см. главу 1), а в макроэкономике – *агрегированные* переменные (см. далее). Это очевидно способствует ангажированности экономических наук, на что справедливо указывают их критики начиная с Карла Маркса – но «честное» усреднение по образцу молекулярно-кинетической теории в системе разнородных экономических агентов невозможно и непродуктивно.

Как неизбежное следствие, фундаментальные закономерности экономики имеют слишком общий характера и *не используются* в реальном управлении предприятиями, отраслями и государствами. У сферы хозяйственного управления есть отдельное название *менеджмент*, в приблизительном прямом переводе – искусство справиться с поставленной

задачей. Отсюда происходит небеспочвенное мнение о том, что экономические науки, строго говоря – не науки, а разновидности господствующей капиталистической идеологии. (Во времена СССР *политэкономия социализма* зеркально соответствовала такому мнению). Тем не менее, иные способы построить непротиворечивую экономическую теорию на нынешнем уровне развития математики неизвестны. Поэтому аппарат теоретической и экспериментальной физики принципиально не является основой экономических наук: его применяют либо к частным соотношениям между «экономическими» переменными, либо к обработке данных до их перевода в экономические термины.

Несмотря на двусмысленность теорий (если не благодаря ей), закономерности микро- и макроэкономики на удивление мало зависят от конкретных значений измеряемых параметров – таких, как ВВП или среднее благосостояние некоторой общности экономических агентов. Мерой, обеспечивающей сравнение, служат деньги: всеобщий эквивалент, или «энергетическое содержание»[*] обмениваемых товаров (см. далее). На коротких промежутках времени деньги в некотором государстве можно считать сохраняющейся величиной ($\sum M_i = \text{const}$), однако известная всем *инфляция* даже в бескризисный период заставляет вносить поправки в зарплаты и цены уже при их сравнении через несколько лет. В этом разделе мы используем «бытовое» понятие денег; методы его физической и физикалистской детализации будут рассмотрены далее.

Экономическое равновесие

Главная идея, которую неоклассическая экономика заимствовала во второй половине XIX века из классической физики – это равновесие. На рис. 8.1, повторяющем рис. 1.28 а из гл. 1, показана микроэкономическая схема равновесия спроса D (англ. demand) и предложения S (supply) в условиях регулярного свободного обмена товаров на деньги, то есть рынка. По основному предположению микроэкономики, покупатели готовы платить за единицу некоторого абстрактного, но необходимого товара тем больше, чем меньшее количество Q этого товара предлагают производители (убывающая кривая спроса $P_D(Q)$). В то же время производители поставляют на рынок тем больше товара, чем выше его цена, по возрастающей функции $Q_S(P)$. При перестановке осей Q и P этой функции соответствует кривая предложения $P_S(Q)$; точке (Q_0, P_0) пересечения двух кривых отвечает *равновесие спроса и предложения*.

[*] * «Энергетический эквивалент» предметов обмена иногда сам критически зависит от внешних условий – как, например, предметы роскоши и денежные знаки в осажденном городе или в другой катастрофической обстановке.

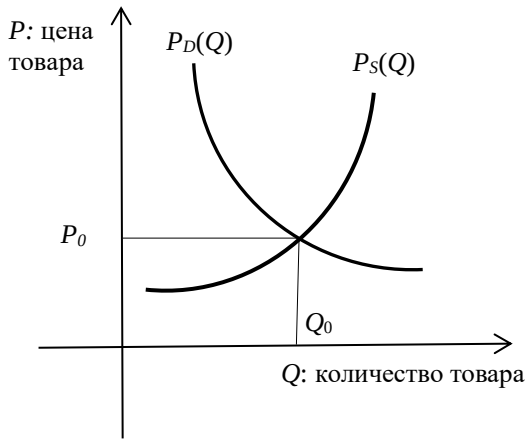


Рисунок 8.1. Равновесие спроса (D) и предложения (S) в неоклассической экономике

В действительности цены, отражающие спрос, изменяются вслед за изменением предложения (как и предложение вслед за ценой) не мгновенно, а с некоторой задержкой во времени (*лагом*), что делает время системы дискретным, а уравнения состояния разностными. Динамику спроса и предложения с такой системе отражают диаграммы Ламерея (см. разд. 4.4.2 и рисунки 4.30 – 4.32 в гл. 4), в экономике называемые *паутинными диаграммами* (рис. 8.2). Изображая графики функций $P_D(Q)$ и $P_S(Q)$ отрезками прямой (например, касательными в точке пересечения), из этой схемы можно вывести зависимость равновесия спроса и предложения от наклона кривых $P_D(Q)$ и $P_S(Q)$. Пусть в начальный момент времени продавцами установлена цена P_1, при которой спрос покупателей Q_1 оказался меньше предложения Q_2. В этом случае $P_D(Q_2) = P_2$: цена уменьшится до величины, при которой продавцы поставят меньше товара (Q_3). В свою очередь, это увеличит цену спроса до $P_D(Q_3) = P_3$. В полученной последовательности цен

$$P_i = P_D(Q_i)$$

спрос покупателей на товар определяется ценой, установленной продавцами исходя из спроса покупателей на предыдущем шаге.

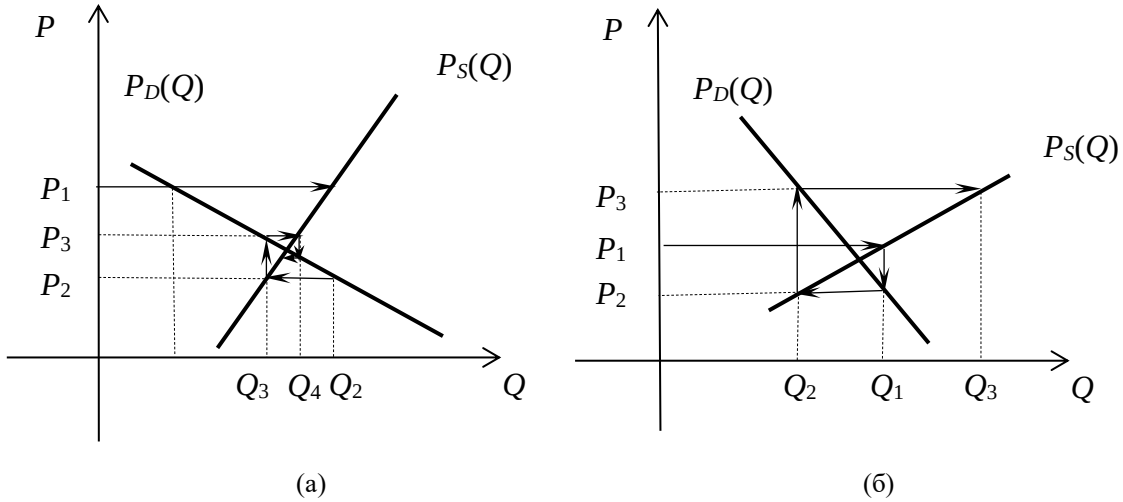


Рисунок 8.2. «Паутинные диаграммы»: (а) достижение равновесия (P_0, Q_0) при $|dP_D/dQ| < |dP_S/dQ|$, (б) дестабилизация равновесия при $|dP_D/dQ| > |dP_S/dQ|$

При более крутом наклоне кривой предложения $P_S(Q)$ по сравнению с кривой спроса $P_D(Q)$ ($|dP_D/dQ| < |dP_S/dQ|$) последовательность $P_1 - Q_1 - P_2 - Q_2 - P_3\ldots$ сходится к точке равновесия (Q_0, P_0) (рис. 8.2 а): это устойчивый фокус (см. гл. 4). Наоборот, при $|dP_D/dQ| > |dP_S/dQ|$ точка (Q_0, P_0) становится неустойчивой, последовательности $P_1 - P_2 - P_3\ldots$ и $Q_1 - Q_2 - Q_3\ldots$ расходятся и равновесие не достигается: «рынок дестабилизируется» (рис. 8.2 б). При одинаковом наклоне кривых $P_S(Q)$ и $P_D(Q)$ возникнут незатухающие колебания вокруг точки равновесия (центра). Условием достижения равновесия является *сглаживающая* реакция цены на изменение предложения ΔQ_S – меньшая, чем реакция предложения на изменения цены спроса ΔP_D (см. [2] в списке рекомендуемой литературы).

Экономический агент-покупатель в микроэкономике называется «домохозяйством»: теории капитализма не распространяются на бездомных и нищих. Набор товаров, приобретаемых агентом на имеющиеся у него деньги, в согласии с идеями физики, представляет вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Разные наборы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ранжируются агентами по отношениям предпочтения: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. Как обсуждалось в разделе 7.2 предыдущей главы, предпочтения в неоклассической экономике отражает скалярная энергоподобная *функция полезности*:

$$\text{если } \mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ то } u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y}) \text{ и т.д.}$$

Сравнение по значениям полезности (не обязательно товаров) характерно для *кардиналистского* подхода в экономике. При *ординалистском*, или *порядковом* подходе рассматриваются лишь отношения предпочтения для тех или иных предметов выбора. Так как количественное содержание функции полезности не вполне ясно, оба подхода на практике мало различаются, хотя в микроэкономических исследованиях преобладает ординалистский. Предполагается (см. главу 7), что участники рынка стремятся к выгоде (продавцы к максимуму выручки, покупатели к максимальному удовлетворению потребностей) и рационально планируют свои действия – в данном случае объемы предложения и спроса. Абстрактный индивидуум, который имеет полную информацию о состоянии рынка и на ее основе рационально стремится получить максимальный выигрыш при заданных ограничениях на ресурсы – например, наличные средства либо запасы товара – в XIX веке получил название *homo economicus*. При всем несоответствии сложному человеческому поведению это была первая, сначала сформулированная на вербальном уровне агентная модель в общественных науках [2].

Наборы приобретаемых товаров (и услуг) с учетом эластичности спроса, т.е. возможного замещения одного товара другим (разд. 1.5.1 в гл. 1), соответствуют оптимальному выбору покупателей, располагающих фиксированными суммами денег M_i. Усредняя эти наборы по множествам агентов с разной покупательной способностью, по аналогии с макроскопическими параметрами системы в статистической физике, можно было бы надеяться оценить «интегральный» спрос и сопоставить его с макроэкономическими параметрами. К сожалению, эта логически стройная схема ограничена весьма условным соответствием стилизованных микроэкономических переменных реальному массиву цен и товаров на фактически существующих рынках.

Из гипотезы о равновесных ценах на рынке следует *закон Вальраса*:

(8.1) $$\sum P_i(Q_i^S - Q_i^D) = 0,$$

где P_i – цена i-го товара, а в скобках – разница его предложения и спроса. Формула (8.1) выводится в *теории общего равновесия*, согласно которой сумма избыточного спроса и избыточного предложения всех товаров внутри экономики как совокупности рынков в денежном выражении равна нулю. В (8.1) подразумевается суммирование по всем рынкам, число которых предполагается большим. Стремление монополиста увеличить свою прибыль или, например, более высокая стоимость товаров в магазинах для богатых («налог на тщеславие») не вполне соответствуют закону Вальраса – но предельно обобщенный вид (8.1) затрудняет конкретные возражения.

На практике устойчивое равновесие предложения и спроса возможно либо при бесконечно большом числе однотипных агентов (чего не бывает), либо при государственном регулировании, которое порицается в неоклассических теориях. Рынок, удовлетворяющий закону Вальраса, называется *идеальным* либо *совершенным*. В нем участвуют очень большое количество продавцов и покупателей, цены устанавливаются по соглашению, а любое принуждение участников (например, требование предъявить сертификат качества товара) отсутствует.

Нетрудно видеть, что «идеальный рынок», по сравнению с идеальным газом – гораздо более абстрактное и узкое понятие. Именно для такого рынка математически доказана *эффективность*: равенство цен спроса и предложения, то есть оптимальное распределение ресурсов (товаров) по платежеспособному спросу участников. Несоответствия теории и действительности в неоклассической экономике объясняется *несовершенным* рынком. Это согласуется с практикой естественных наук (идеальный и реальный газ, гармонические и ангармонические колебания и т.д.), хотя в физике не принято называть идеальный газ «хорошим», а реальный газ «несовершенным».

Еще одним фундаментальным постулатом неоклассической экономики является возрастающая, непрерывная, дважды дифференцируемая и вогнутая («выпуклая вверх», см. предыдущую главу) по всем переменным функция полезности $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (рис. 8.3)

(8.2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} > 0,$$

где x_i – предложение i-го товара на рынке. Это определение позволяет построить по аналогии с (8.2) непрерывные функции спроса товаров $Q_i(P_i)$, допускающие агрегирование эконометрических данных[*]. Так как полезность не имеет строгого определения, в экономических науках для нее используется несколько равноправных эмпирических формул (см. [2] в списке литературы):

[*] По утверждению одного из ведущих специалистов в области математического моделирования экономики чл.-корр. РАН И.Г. Поспелова (1950-2022), многократно цитированному в отечественной экономической литературе, перечень выпускаемых в СССР продуктов и изделий насчитывал свыше 1 млн. наименований, среди которых лишь около 1-2% всех товаров (несомненно, наиболее массовых) подлежали плановому регулированию. Это хорошо показывает размер «экономической стихии», не поддающейся количественной обработке без привлечения суперкомпьютеров, и необходимость агрегирования данных.

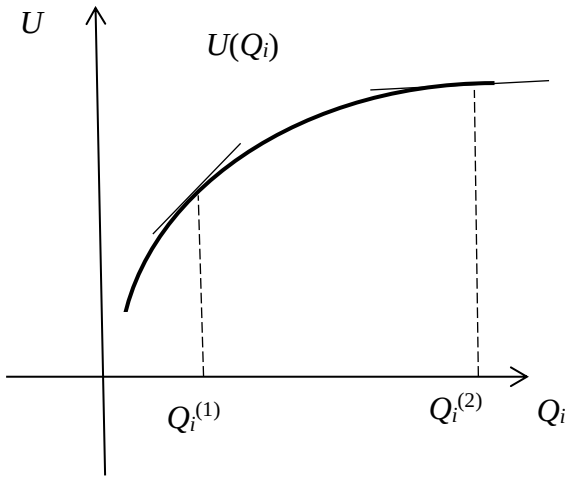


Рисунок 8.3. Общий вид функции полезности

(8.3)

аддитивная	$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^{\beta_i}$ (все a_i>0, 0<β_i<1)
квадратичная	$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_i x_j$
мультипликативная	$u(\mathbf{x}) = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i}$
логарифмическая	$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i$

Стремление каждого («*j*-го») экономического агента, располагающего суммой денег M_j, к максимуму выгоды математически представляется в виде

(8.4) $u(\mathbf{x}^{(j)})\rightarrow\max$ при $\sum P_i x_i^{(j)} \le M_j$ (бюджетном ограничении)

Агрегирование товаров основано на свойствах их цен. Именно, если в группе товаров функции спроса удовлетворяют соотношению

$$Q_1(P_1):Q_2(P_2):Q_3(P_3)\ldots = Q_1(\lambda P_1):Q_2(\lambda P_2):Q_3(\lambda P_3)\ldots ,$$

то есть не зависят от *масштаба цен* λ, эта группа товаров называется *отделимой*. В этом случае цены («полезности») всей группы товаров можно выразить одним скалярным *индексом цен* $F(\mathbf{x}) > 0$, а спрос на них – *индексом спроса* $q(\mathbf{P})$ (см. [1]). В результате агрегирования получают *макроэкономическое уравнение баланса* (в денежном выражении), которое можно считать уравнением состояния экономики государства:

(8.5) $Y = C + J + (E - I)$, где

$Y = \sum Y_i$ – *валовый внутренний продукт* (ВВП), или суммарный доход всех агентов внутри экономики,

$C = \sum C_i$ – сумма расходов всех агентов, или *фонд потребления*,

$J = \sum J_i$ – сумма инвестиций агентов в экономику, или *фонд накопления*,

$E = \sum P_{ij}^{in}$ – *экспорт*, или средства, полученные агентами извне экономики

$I = \sum P_{ij}^{out}$ – *импорт*, или выплаты агентов за пределы экономики

В данном случае экономикой называется система производственных и финансовых («экономических») отношений внутри государства. Злоупотребления собственников (например, личные приобретения за границей), криминальные доходы и расходы и другие

нарушения постулатов идеального рынка распределяются по статьям уравнения (8.5), осложняя количественные оценки. Компоненты формулы (8.5) определяются объективно по данным государственных и коммерческих структур (налоги, отчеты предприятий, банковские операции и др.). Формула (8.5) выражает «закон сохранения» потоков товаров, услуг и денег внутри и вовне экономики [1]; она выполняется тем точнее, чем лучше работают плановые и контролирующие органы государства.

Управление экономикой: многокритериальная оптимизация

В практических задачах планирования экономических процессов и управления ими широко используются математические модели. Они отражают баланс факторов производства (сырья, энергии, труда работников) в количественном, т.е. *натуральном* выражении, и денежных потоков, выраженных в текущих ценах, для конкретных задач. Одним из инструментов для расчета материального баланса служат леонтьевские матрицы ввода-вывода, рассмотренные в разд. 3.2 главы 3. Обобщенные переменные неоклассической экономики, в силу их абстрактного характера, прямо не присутствуют в балансовых уравнениях. По мнению ряда ведущих экономистов, современные теории создают *идеологическую основу* при построении расчетных моделей.

Выбор наилучших вариантов действий на основе используемой модели сводится к задаче оптимизации, т.е. к определению максимума или минимума целевой функции агента $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ варьированием ее переменных при некоторых наложенных ограничениях. В этом смысле управление экономическими процессами относится к области исследования операций (см. разд. 7.1 предыдущей главы). Однако в большинстве случаев желаемый результат представляет собой оптимум по *нескольким* разнородным и нередко конфликтующим критериям (например: «получить максимум продукции при минимуме затрат»).

Предположим, что некоторая фирма стремится получить максимальную прибыль при минимуме расходов. Обозначим экономию расходов фирмы переменной x_1, а ее прибыль переменной x_2. Исходя из самых общих соображений, цена продукции фирмы, а значит и ее максимальная денежная выручка, возрастают пропорционально себестоимости выпускаемого товара – а экономия средств при этом уменьшается. С другой стороны, чрезмерная экономия средств приведет к ухудшению качества или (и) снижению выпуска товара, так что разность выручки от продажи продукции и расходов на ее производство, то есть прибыль x_2, с ростом экономии x_1 уменьшится. (рис. 8.4). Можно ли определить максимум прибыли предприятия как функции расходов $x_2(x_1)$?

Это задача *многокритериальной оптимизации*; в нашем примере всего два критерия: расходы и прибыль. В задачах линейного программирования (см. главу 7) требуется найти максимум (или минимум) скалярной линейной функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow max \text{ (или } min)$$

при заданных ограничениях. При многокритериальной оптимизации имеется набор целевых функций, представляемых вектором $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Каждый компонент вектора $\mathbf{f}$ по-разному зависит от набора переменных $\{x_i\}$ и подчиняется ограничениям – в общем

случае тоже разным. Таким образом, многокритериальная оптимизация является обобщением оптимизации по единственному параметру.

Достижение оптимума одновременно по всем компонентам $\{f_i\}$ обычно невозможно. Однако во многих случаях требуется найти решения, в некотором (заданном) смысле максимально близкие к такому оптимуму. Ввиду важности этих задач в теории многокритериальной оптимизации выработаны алгоритмы поиска и ранжирования приближенных решений – в том числе с использованием теории игр (глава 7).

Обозначим через X *множество допустимых решений* $\{\mathbf{x}\in X\}$, каждому из которых соответствует набор (вектор) переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ и некоторый вектор вещественных целевых функций $(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$. Пусть, для определенности, решение тем лучше, чем больше значения $\{f_k(\mathbf{x})\}$. Тогда решение $\mathbf{x}$ *лучше* решения $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$), если хотя бы некоторые целевые функции $f_j(\mathbf{x}) > f_j(\mathbf{y})$ (больше), а у всех остальных $f_k(\mathbf{x}) \geq f_k(\mathbf{y})$ (не меньше). Если же для некоторых функций $f_j(\mathbf{x}) > f_j(\mathbf{y})$, а для других $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{y})$, решения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ *несравнимы*. На рисунке 8.4 для точек, обозначенных строчными буквами, по соотношению экономии расходов x_1 и прибыли x_2

$$b \succ a;\ \ c \succ a;\ \ d \succ b;\ d \succ c;\ \ e \succ c\ ,$$

при этом точки b и c, а также d и e несравнимы. Заметим, что точка d *строго лучше* точки a (обозначается $d \succ\succ a$), если оба неравенства $x_1(d) > x_1(a)$ и $x_2(d) > x_2(a)$ – строгие. Целевые функции $\{f_k(\mathbf{x})\}$ аналогичны функции полезности – с той разницей, что в оптимизируемой модели они имеют численные значения.

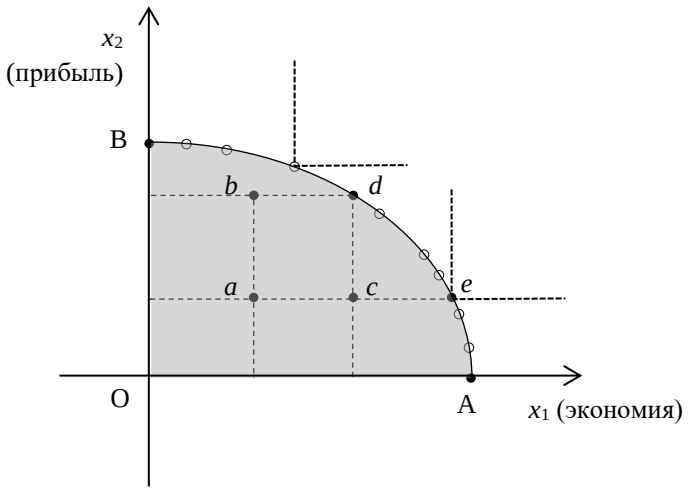


Рисунок 8.4. Фронт Парето

Решение $\mathbf{x}^* \in X$ называется *доминирующим*, или *оптимальным по Парето*, если для любого другого решения $\mathbf{x}\in X$ выполняются соотношения

(8.6) $$f_k(\mathbf{x}^*) \geq f_k(\mathbf{x}),\ (k = 1, 2, \ldots, m),$$

и хотя бы для одного компонента f_j неравенство (8.6) является строгим:

(8.6 а) $$f_j(\mathbf{x}^*) > f_j(\mathbf{x})$$

Другими словами, в области X нет таких допустимых решений $\mathbf{x}\in X$, чтобы $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}^*$. На рис. 8.4 доминирующим решениям отвечают точки, «выше» и «правее» которых в области возможных решений OAB точек нет. Геометрически это изображают переносом координатных осей: в реально существующих *дискретных* множествах точек границу OAB образуют те из них, у которых нет соседний точек внутри прямого угла, заданного пунктирными линиями, и на его границах.

Совокупность всех доминирующих точек, образующих границу множества допустимых решений, называется *эффективным множеством,* или *фронтом Парето*. Решениям задач многокритериальной оптимизации соответствуют точки из этого множества – прочие возможные комбинации целевых функций хуже. Число таких точек может быть бесконечным – на рис. 8.4 это все точки на кривой AB.

В реальных задачах эффективное множество может не соответствовать непрерывной функции и для выбранной модели определяться лишь численно. При большом числе целевых функций в (8.6) и (8.6 а) ($n > 3$) геометрическое представление невозможно, а для сложной формы границы оно теряет наглядность. Поэтому в задачах многокритериальной оптимизации используется эмпирические методы выбора решений, уменьшающие размерность вектора целевых функций.

В простейшем случае из компонентов вектора $\{f_k(\mathbf{x})\}$ выбирают одну «главную» целевую функцию f_1. Требования оптимума остальных функций тогда заменяются (в той или иной форме) ограничениями на их значения при оптимизации «главной» функции. Другим методом является расчет взвешенной суммы целевых функций

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} w_j f_j(\mathbf{x}),$$

где вектор $\mathbf{x}$ по-прежнему соответствует набору варьируемых переменных, а весовые множители $\{w_j\}$ подбираются эмпирически. Оба подхода сводят «многокритериальную» систему к оптимизации единственной скалярной функции. Разработаны и другие алгоритмы поиска эмпирических решений, которые мы здесь не рассматриваем (см.[3]); большинство из них нацелены на снижение размерности задачи. Точки фронта Парето в современных программных средствах обычно представляют двумерным или трехмерным графиком на экране компьютера.

Создание программных *систем поддержки принятия решений* (СППР) – одна из важных областей современной технологии управления. Такие программы представляют в наглядной графической форме небольшое число принципиальных решений многокритериальной задачи, выбранных по тем или иным эмпирическим правилам, для *лиц, принимающих решения* (ЛПР) – например, для руководства предприятия – и рассчитывают их изменения, получаемые при варьировании параметров системы. Многокритериальная оптимизация распространена в задачах социологии, политологии и практической политики – таких, как выборы. Эти вопросы мы рассмотрим в следующей главе.

Литература к разделу 8.1

[1]А. Аникин, *Юность науки. Жизнь и идеи мыслителей-экономистов до Маркса*. М.: Политиздат, 1975.
[2] Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий, Эконометрика. Начальный курс. М.: «Дело», 2004.
[3] В.Д. Ногин, *Множество и принцип Парето, учебное пособие*. СПб: 2020.

8.2. Некоторые соотношения теории вероятностей

Реальная экономическая деятельность – это взаимодействие агентов, которые руководствуются собственными, обычно конкурирующими стратегиями. Для ее описания часто используют методы теория игр (см. предыдущую главу). В большинстве экономических и родственных им задач действия агентов точно не известны: в лучшем случае можно оценить их вероятности. Некоторые соотношения *теории вероятностей* как области математики кратко представлены в этом разделе и в Приложении П8.

8.2.1. Вероятности случайных событий

В отличие от обыденной жизни, в математике «случайным» называется не непредвиденное происшествие, а любой акт («событие»), результат которого заранее не вполне известен. В этой книге упоминались многие процессы, недетерминированность («случайность») которых интуитивно понятна: хаотическое движение молекул и броуновских частиц, перемещение «пьяного матроса» на квадратной решетке, бросание монеты либо игральной кости (кубика). Результаты всех таких процессов предсказывает *вероятность*: неотрицательное число $0 \le P \le 1$, или $P \in [0, 1]$. В простейшей форме это оценка $P(i)$ доли событий, в которых величина X случайным образом принимает значение i в бесконечной серии испытаний:

(8.7) $$P(X = i) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(i)}{n}$$

Здесь $n(i)$ – число испытаний, в которых случайная величина принимает значение i, а n – общее число испытаний. Так, при большом числе бросаний монеты «орел» и «решка» выпадают примерно в половине случаев (P = 0.5), а при бросаниях игральной кости число «5» выпадает приблизительно в 1/6 всех случаев (P = 0.16666…). Приписывая вероятности всем возможным значениям случайной переменной X, по формуле (8.7) можно оценить долю испытаний, в которых эти значения будут получены. Если число исходов (т.е. возможных значений X) конечно,

(8.7 а) $$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1:$$

какой-либо из возможных результатов испытания обязательно будет получен.

В предыдущих главах мы неоднократно пользовались понятием вероятности на полу-интуитивном уровне, принятом в курсах общей физики. В *теории вероятностей,* как разделе математики, определение (8.7) не считается строгим. Математики используют несколько равноправных и даже конкурирующих определений вероятности – что затрудняет усвоение основ этой дисциплины по учебникам разных авторов (см. [4] в списке литературы).

В *классическом определении* вероятностью случайного события A называется отношение числа m *равновозможных* и *несовместимых* элементарных событий, составляющих A, к общему числу n элементарных событий:

(8.7 б) $$P(A) = \frac{m}{n}$$

Элементарные события несовместимы, если при наступлении одного из них другие события точно не происходят. Так, выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6 на игральном кубике – несовместимые события. Термин «равновозможные», подозрительно похожий на «равновероятные», в частности означает, что возможности выпадения всех граней кубика одинаковы. Поэтому, например, вероятность выпадения грани с числом, кратном 3 (3 или 6)

$$P(3n) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Определения (8.7) и (8.7 б) эквивалентны, если предельная и идеальная оценки вероятности одинаковы.

ЗАДАЧА 8.1. В квадратном уравнении

$$x^2 + px + q = 0$$

коэффициенты p и q – случайные величины, принимающие любые значения между 0 и 1. Найти вероятность того, что уравнение имеет действительные корни ([4], стр. 44).

Решение. Приведенное квадратное уравнение имеет действительные корни, если $p^2/4 > q$ (см. разд. 3.1 в гл. 3). Среди всех равновозможных значений p и q, лежащих внутри квадрата со стороной единичной длины, эти точки расположены ниже параболы $q = p^2/4$ (рис. 8.5). Искомая вероятность равна отношению площади под кривой к единичной площади квадрата:

$$P = \frac{\int_0^1 \frac{p^2}{4} dp}{1} = \frac{p^3}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} = 0.08333\ldots$$

В этой задаче использовано *геометрическое определение вероятности* как отношения площади заданной области к площади всей области параметров. В общем случае области параметров многомерны и сравниваются их многомерные «объемы». Наиболее строгим является *алгебраическое определение вероятности* А.Н. Колмогорова. Оно основано на математической *теории множеств*, которая еще не обсуждалась в этой книге.

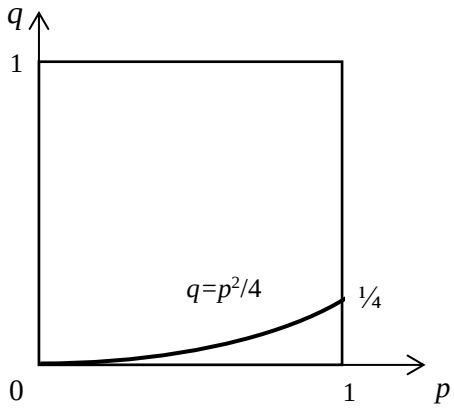


Рисунок 8.5

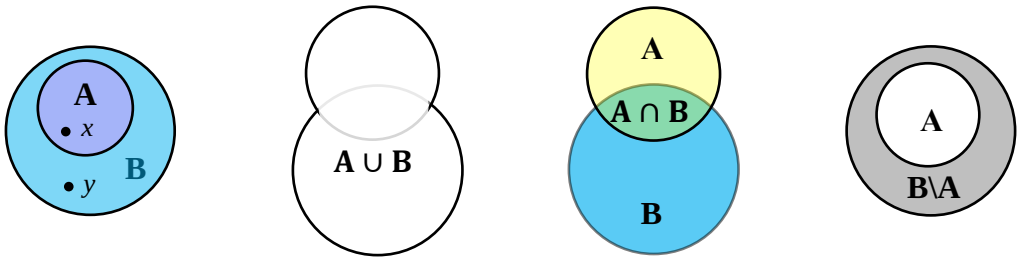
Математическое отступление: некоторые сведения о множествах

Множество (англ. *set*: в прямом переводе «набор, совокупность») – одно из наиболее общих математических понятий: совокупность *элементов* произвольной природы,

обладающих некоторым общим свойством. Множествами являются бесконечный ряд натуральных чисел и любой их конечный набор, включая набор из двух чисел $\{0, 1\}$, совокупность всех точек линии, плоскости, пространства и их «частей»: отрезка, круга, квадрата и вообще любой области на плоскости или в пространстве, точек геометрической фигуры и т.д. Группы и алгебры, упомянутые в гл. 7, основаны на множествах с дополнительными условиями на связи между их элементами. Рассмотренные в гл. 6 графы с формальной точки зрения являются комбинациями (V, E) множества вершин V и множества ребер E, соединяющих заданные пары вершин (v_i, v_j). Фундаментом теория игр (глава 7) являются комбинации множества агентов-игроков, множества стратегий и множества выигрышей с установленными связями между ними.

Математическую теорию множеств создал во второй половине XIX века великий немецкий математик Георг Кантор и развивали многие другие выдающиеся математики. По числу элементов множества подразделяются на конечные и бесконечные. Бесконечные множества, в свою очередь, разделяют на *счетные* (натуральный ряд чисел, множество рациональных чисел) и *несчетные*. У последнего типа множеств выше *мощность* (все точки отрезка или области пространства, действительные числа, комплексные числа, см. разд. 3.1.1. в главе 3). Непрерывные множества – например, множество всех точек плоскости – также называются пространствами. По аналогии с числом 0 в математике определено *пустое множество*, не содержащее ни одного элемента: его часто обозначают символом $\varnothing$.

Фундаментальные операции с множествами хорошо иллюстрируются наложениями геометрических областей на плоскости. Если элемент x принадлежит множеству A (например, x – точка некоторой фигуры), это обозначается $x \in A$. Множество A *включено* в множество B ($A \subseteq B$), если все элементы A принадлежат B. В том случае, если одновременно справедливы нестрогие соотношения включения $A \subseteq B$ и $B \supseteq A$, множества A и B одинаковы ($A = B$). Если же множество A включено в B и существуют такие элементы $y \in B$, которые не принадлежат A ($y \notin A$), включение A в B называют строгим и A – *подмножеством* B ($A \subset B$) (рис. 8.6 а).



(а) (б) (в) (г)

Рисунок 8.6. Отношения множеств: (а) включение ($x \in A$, $y \in B$, $y \notin A \Rightarrow A \subset B$), (б) объединение $A \cup B$, (в) пересечение $A \cap B$, дополнение («разность») $B \setminus A$ или $B - A$

Объединением множеств A и B является множество $C = A \cup B$, все элементы которого принадлежат множеству A либо множеству B (рис. 8.6 б). *Пересечением* A и B называется множество $C = A \cap B$, в котором все элементы одновременно принадлежат A и B

(рис. 8.6 в). Также используют обозначения $A \cup B = A + B$ («сумма») и $A \cap B = AB$ («произведение множеств»). Исключение элементов A из множества B, или множество $C = B \setminus A$, все элементы которого одновременно $y \in B$ и $y \notin A$, также называется *разностью* множеств B – A или *дополнением* A на множестве B (рис. 8.6 г).

В *алгебраическом определении вероятности* рассматривается множество (пространство) случайных событий Ω. Это пространство преобразуется в алгебру (см. разд. 7.8 предыдущей главы) введением обобщенных действий сложения и умножения. Суммой событий $A + B$ называется их объединение (происходит хотя бы одно из них), произведением AB – пересечение (происходят оба события). В качестве обобщенного нуля выступает *невозможное событие* Ø (пустое множество), обобщенной единицей служит *достоверное событие* Ω, т.е. все заданное пространство событий полностью. Необходимый для алгебры обратный элемент $\bar{A}$ относительно «сложения», или *противоположное* событие $\Omega \setminus A$ (см. рис. 8.6 г), означает, что событие A *не происходит*.

На множестве случайных событий вводится *мера*: такая скалярная функция *P*, что

(8.8 а) $0 \le P(A) \le 1, \quad P(\Omega) = 1, \qquad P(\varnothing) = 0,$

(8.8 б) $P(A) + P(\bar{A}) = 1,$

(8.8 в) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$

(объединение множеств $A \cup B = A \setminus (A \cap B) + B \setminus (A \cap B) + A \cap B$, см. рис. 8.6 в, поэтому

$P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB)$).

(8.8 г) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, если события A и B *независимы* (см. ниже)

Формулы (8.8 а-г) – это *аксиомы теории вероятностей*.

Если события A и B происходят последовательно (сначала A, потом B), вероятность наступления события B *при условии* наступления A называется *условной вероятностью*

(8.9) $$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} \qquad \text{и} \qquad P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Например, вероятность вслепую вынуть черный шар из закрытого ящика, где находятся пять черных и пять белых шаров, $P(B_1) = 1/2$. Если шары не возвращаются в ящик, вероятность того, что второй вынутый шар тоже окажется черным $P(B_2|B_1)=4/9$. Если же первым вышел белый шар ($P(W_1)=1/2$), вероятность вынуть вторым черный шар $P(B_2|W_1)=5/9$ (B – black, W – white). Вероятности двух последовательных исходов B_2B_1 и B_2W_1, как произведения вероятностей двух этапов, соответственно равны 4/18 (т.е. 2/9) и 5/18 в согласии с формулами (8.9).

События A и B *независимы* в том случае, если

$$P(A|B) = P(A),$$

из чего по (8.9) следует $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ и $P(B|A) = P(B)$ (события A и B независимы *взаимно*).

Пусть событие B может совместно осуществиться только с одним из *n несовместимых* событий ($A_1, A_2, \ldots, A_n$), т.е. $P(A_iA_j) = 0$ для любых $i, j = 1, 2, \ldots, n$), и

$$B = \sum_{i=1}^{n} BA_i, \qquad \text{поэтому} \qquad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$$

(события BA_i и BA_j при $i \neq j$ не пересекаются). Из формул (8.9) можно выразить вероятность B через условные вероятности

(8.10) $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$ *формула полной вероятности*

На основании (8.10) можно определить вероятности событий $\{A_i\}$, если известно, что событие B наступило:

(8.11) $$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$ *формула Байеса*

Формула (8.11) используется при проверке гипотез. Если «механизм» события B нам не известен, мы можем предложить для него n взаимоисключающих гипотез, или попарно несовместных событий (A_1, A_2, …, A_n), и оценить их *априорные вероятности* $P(A_1)$, …, $P(A_n)$, а также условные вероятности $\{P(B|A_i)\}$ «событие B в случае A_i». Тогда формула Байеса (8.11) позволяет рассчитать *апостериорные вероятности* всех гипотез. Этот подход широко используется в вероятностных оценках – например, в поведенческой экономике (см. далее).

8.2.2. Распределения вероятностей

Переменная величина X называется *случайной*, если в результате испытаний она принимает значения $\{x_i\}$ с некоторыми вероятностями $\{P_i\}$. При конечном наборе из n значений и соответствующих им вероятностей

значения X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
их вероятности	P_1	P_2	P_3	…	P_n

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = 1$$

(величина X достоверно принимает одно из значений). Множество возможных значений X также может быть бесконечным: *дискретным* (если количество чисел $\{x_n\}$ не ограничено) или *непрерывным* (*континуальным*) – например, множеством точек отрезка $x \in [a, b]$. Набор чисел (X, P_X) обозначают $P(X)$ и называют *функцией распределения* вероятностей по значениям случайной переменной. Функции распределения дискретных и непрерывных случайных величин X задаются по-разному, хотя они логически связаны.

Дискретные случайные величины

Простейший вид дискретной случайной величины – конечное *равномерное распределение*, при котором все возможные значения X равновероятны.

значения $X=x_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
их вероятности P_i	$1/n$	$1/n$	$1/n$	…	$1/n$

Условие $\sum P_i = 1$ при этом автоматически выполняется (рис. 8.7 а). Помимо $P_n(m)$, используются *кумулятивные распределения* вероятностей $F_n(X \leq m)$ (рис. 8.7 б)

$$F_n(X \le m) = P_n(0) + P_n(1) + \cdots + P_n(m)$$

Действия над случайными величинами $f(X)$ приводят к другим распределениям $P[f(X)]$.

ЗАДАЧА 8.2. Кубик, грани которого помечены числами 1, 2, 3, 4, 5 и 6, бросают дважды. Как распределена сумма выпавших чисел?

Решение

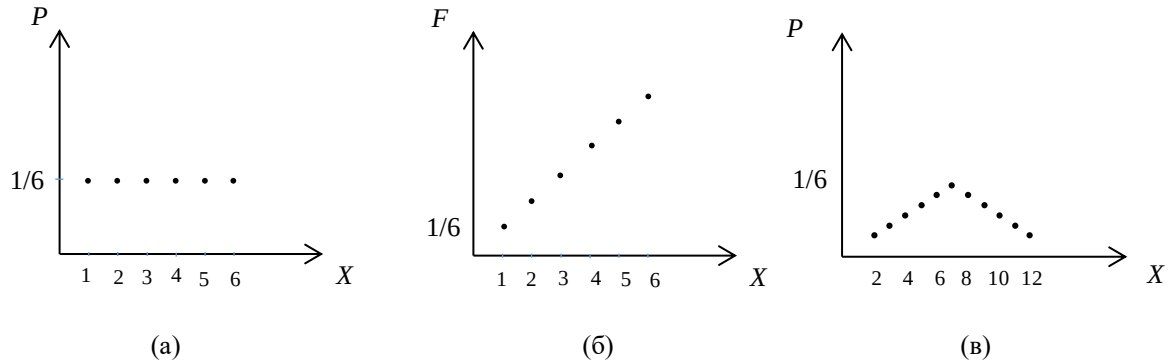
Вероятности выпадения каждого из шести чисел на грани кубика одинакова и равна 1/6, т.е. это равномерное распределение. Если бросать кубик дважды, сумму выпавших чисел 2 можно получить единственным способом (1+1). Сумма 12=6+6 тоже получается единственным способом. Но сумму 3 можно получить двумя способами: 1+2 либо 2+1 – значит, число выпавших вариантов для нее больше и ее вероятность выше, чем у суммы 2=1+1. Составим таблицу всех вариантов, дающих суммы от 2 до 12.

Таблица 8.1

Распределение суммы «равномерных» случайных величин

сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
варианты	1+1	1+2 2+1	1+3 2+2 3+1	1+4 2+3 3+2 4+1	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	3+6 4+5 5+4 6+3	4+6 5+5 6+4	5+6 6+5	6+6
число вариантов	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
вероятность	1/36	1/18	1/12	1/8	5/36	1/6	5/36	1/8	1/12	1/18	1/36

Итак, сумма двух равномерно распределенных случайных величин распределена уже не равномерно. У распределения случайной величины $X + X$ есть максимум (рис. 8.7 в).



(а) (б) (в)

Рисунок 8.7. (а) Равномерное распределение $P(X) = 1/n$ (n=6), (б) его кумулятивное распределение $F(X \le m)$, (в) распределение $P(X+X)$

Другой важный пример конечной случайной величины – *биномиальное распределение*. Пусть некоторое измерение («испытание») с вероятностью p дает положительный результата («приводит к успеху»), а с вероятностью $1–p$ – отрицательный. Положительным результатом может считаться широкий круг событий: успешная сдача экзамена, попадание пули в мишень, обнаружение бракованного изделия, тест на инфекцию и мн. др. Вероятность получить m положительных результатов при n одинаковых независимых испытаниях (естественно, $n > m$) задает *формула Бернулли*

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \tag{8.12}$$

Смысл формулы (8.12) вполне прозрачен: вероятность получить m положительных результатов пропорциональна произведению их вероятностей p^m на вероятность того, что остальные $n–m$ результатов отрицательны: $(1 – p)^{n–m}$. Множитель C_n^m нам уже встречался (разд. 3.4 гл. 3): он равен числу разных сочетаний (комбинаций) m объектов, выбранных из n объектов – в данном случае комбинаций успешных испытаний (01010…, 10011… 00101… и т.д.). По одной из формул *комбинаторики*,

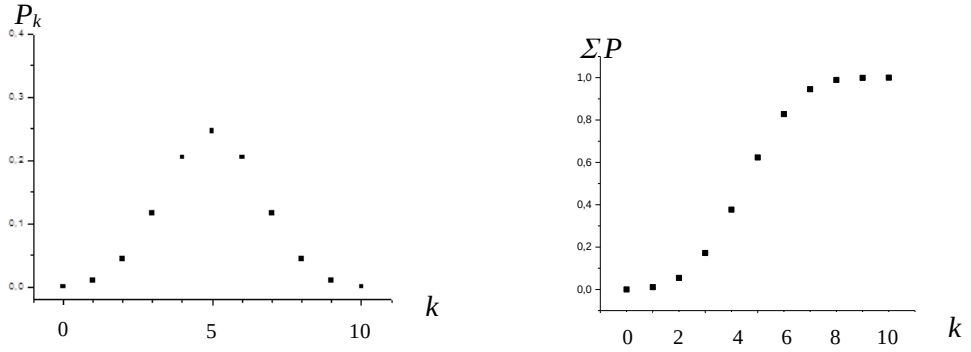
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

где $n!$ («эн факториал») означает произведение целых чисел $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n–1)\cdot n$, и по определению 0!=1. Числа C_n^m называются *биномиальными коэффициентами*: они присутствуют в знаменитом *биноме Ньютона*

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

которому в школьной алгебре соответствуют квадрат и куб суммы двух чисел.

Формула (8.12) задает распределение вероятностей, симметричное при p=½ и «скошенное» в остальных случаях (рис. 8.8 а). Ее *кумулятивное распределение вероятностей* $\{P(X \le m)\}$ показано на рис. 8.8 б.



(а) (б)

Рисунок 8.8. Биномиальное распределение (8.12) при p=0.5, n=10: (а) вероятности, (б) кумулятивная функция распределения

ЗАДАЧА 8.3._Монету подбрасывают четыре раза. Определите вероятности 0, 1, 2, 3 и 4 выпадений «орла». Постройте графики распределения вероятностей $P_4(m)$ и кумулятивного распределения $F_4(X \le m)$.

ЗАДАЧА 8.4. В офисе четыре сотрудника, каждый из них с вероятностью 20% опаздывает к началу рабочего дня в 9.00. Определите распределение вероятностей присутствия сотрудников в офисе в 9.00 и найдите их среднее число.

Решение. В предыдущей задаче положительный («орел») и отрицательный («решка») результаты испытания выпадали с одинаковой вероятностью ½. Поэтому произведение вероятностей $p^m(1–p)^{n–m} = (½)^4 = 1/16$ при любом числе появлений «орла»; симметричное распределение $P_4(m)$ определяли биномиальные коэффициенты C_4^m. В данном случае это не так. Будем считать положительным результатом выход сотрудника на работу к 9.00, т.е. $p = 0.8$. Вооружившись калькулятором, составим таблицу результатов испытаний: m – число сотрудников в офисе в 9.00 (табл. 8.2). В отличие от выпадений «орла» и «решки», это несимметричное распределение. Для проверки подсчитаем сумму всех вероятностей в последнем столбце таблицы: она равна 1. Среднее число сотрудников, находящихся на рабочем месте в 9.00, составляет

$$0×0.0016 + 1×0.0256 + 2×0.1536 +3×0.4096 +4×0.4096 = 3.2$$

(т.е. $\langle m\rangle = np = 4×0.8$). Нецелое число сотрудников в офисе, конечно же, соответствует среднему по большому числу рабочих дней – например, за календарный год.

Таблица 8.2

Распределение результатов испытаний

m	C_4^m	$(0.8)^m(0.2)^{m–1}$	$P_4(m)$
0	1	0.0016	0.0016
1	4	0.0064	0.0256
2	6	0.0256	0.1536
3	4	0.1024	0.4096
4	1	0.4096	0.4096

Если число испытаний n очень велико, вероятность успеха p мала и среднее $\langle m\rangle = np = \lambda$ постоянно, биномиальное распределение асимптотически переходит в *распределение Пуассона* (рис. 8.9)

(8.13) $$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \frac{(at)^m}{m!}e^{-at}$$

В правой части формулы (8.13) a – среднее число редких событий в единицу времени, t – интервал времени. Несмотря на то, что дискретное распределение вероятностей (8.13) задано на бесконечном множестве целых чисел,

(8.13 а) $$\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = 1$$

В главе 6 распределению Пуассона соответствовали степени вершин в случайных графах Эрдеша-Реньи (см. формулу (6.6) в разд. 6.2.1).

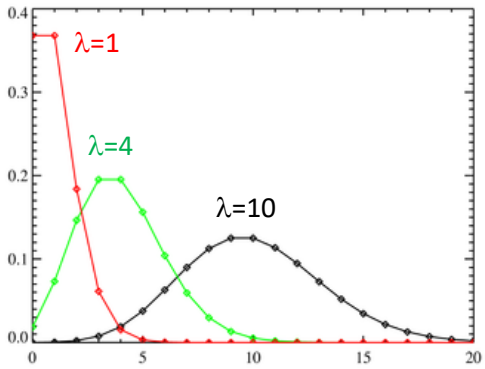


Рисунок 8.9. Распределение Пуассона $P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

Непрерывные распределения

Если случайная величина X распределена непрерывно, легко доказать, что вероятность ее любого дискретного значения x_0 равна нулю. Действительно, пусть $X \in [0, 1]$. Тогда по геометрическому определению вероятности (см. выше) вероятность того, что значения X попадают в интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, лежащий внутри этого отрезка, равна отношению $2\varepsilon/1$ длины интервала к длине всего отрезка 1, где ε – малое положительное число (рис. 8.10). В пределе

$$P(X = x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\varepsilon = 0.$$

Поэтому при описании распределения непрерывной случайной величины дискретные распределения вероятностей $P(m)$ (8.12), (8.13) и др. заменяют непрерывной функцией *плотности вероятности* $f(x)$, а в условиях нормировки наподобие (8.13 а) следует заменить суммы интегралами. (В разделе 3.3, посвященном знакомству с квантовой механикой, мы забежали вперед и уже вводили плотность вероятности как квадрат модуля волновой функции $\rho(\mathbf{r})=|\Psi(\mathbf{r})|^2$ – в междисциплинарной физике логические разрывы почти неизбежны, хоть и нежелательны).

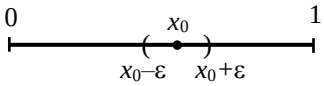


Рисунок 8.10. К соотношению $P(x_0) = 0$ для непрерывной случайной величины $X \in [0,1]$

А. Нормальное распределение

Наиболее распространенным непрерывным распределением является *нормальное распределение*, или *распределение Гаусса*. Ему соответствуют процессы с независимыми приращениями случайной переменной. В теории вероятностей нормальное распределение играет особо важную роль как предел «суммарных» распределений вероятностей во многих случаях – правда, как мы далее убедимся, явления в социальных системах обычно к ним не относятся.

Пусть нас интересует изменение цены некоторого биржевого актива (товара, акций либо ценных бумаг) с течением времени. Предположим, что время дискретно, ($t_{n+1} = t_n+\delta t$),

т.е. его можно представить числом n одинаковых приращений δt. Также предположим, что на каждом шаге дискретного времени цена актива с вероятностью 50% увеличивается или уменьшается на одну и ту же величину Δ:

(8.14) $$w_{n+1} = w_n \pm \Delta,$$

а «снос» среднего значения отсутствует: $\langle w \rangle = w_0$. Случайный процесс (8.14), при всей формальной простоте его записи, в переходе к непрерывному времени и произвольному случайному приращению ξ дает гауссову функцию плотности вероятности.

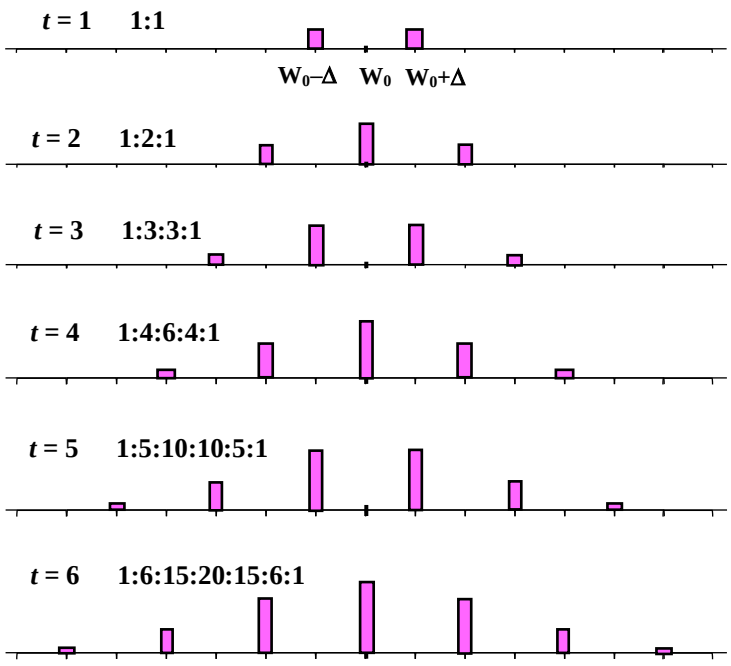


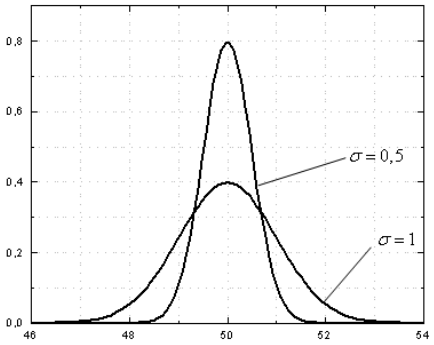
Рисунок 8.11. Распределение цены актива при постоянном случайном приращении $w_{n+1} = w_n \pm \Delta$

На рис. 8.11 показаны изменения цены актива от исходной цены w_0 на нескольких первых шагах при постоянном сдвиге $\pm\Delta$. Видно, что вероятности значений $\{w_i\}$ отвечают биномиальному распределению в форме «колокола» (см. рис. 8.8 а). В пределе очень большого числа точек $\{t_n\}$ и (в отличие от перехода к распределению Пуассона) при постоянной *конечной* вероятности изменения цены $\{w_i\}$ распределение $P_n(m)$ переходит в непрерывную плотность вероятности

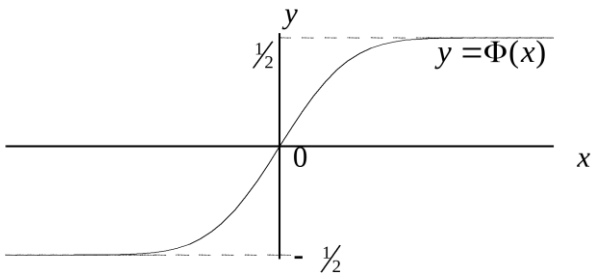
(8.15) $$f(x) = C \cdot \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right],$$

заданную на всей числовой оси x (рис. 8.12 а). Точка $x = a$ является центром распределения, знаменатель определяется условием нормировки функции (см. ниже). В главе 3 мы видели, что функция вида (8.15), называемая функцией Гаусса* – решение дифференциального уравнения теплопроводности (см. разд. 3.2.2).

*Функции вида (8.15) и (8.16) впервые описал в 1733 г. А. Муавр; их свойства детально исследовали Гаусс и Лаплас.



(а)



(б)

Рисунок 8.12. (а) Нормальное распределение плотности вероятности непрерывной случайной величины (функция Гаусса) $f(x) = C\exp[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}]$. (б) Функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$

Для интеграла функции (8.15) нет аналитической формулы, но его значения вычислены точно. При $C = 1$ и $a = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Поэтому нормирующий множитель в формуле (8.15)

$$C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

где σ – показатель «ширины» распределения Гаусса (см. рис. 8.12 а). Его интегральная функция

$$F(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]dx = \frac{1}{2} + \Phi(y), \qquad \text{где}$$

(8.16) $$\Phi(X \le y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-z^2/2}dz$$

называется *функцией Лапласа* (рис. 8.12 б) и $y = (x–a)/\sigma$. Нормированная S-образная функция ($\Phi(\infty) = 1$) соответствует кумулятивной вероятности распределения Гаусса для конкретных значений y при его «ширине» $\sigma = 1$.

Б. Логарифмически нормальное распределение

Гауссово распределение выигрышей и проигрышей биржевых игроков вывел в 1900 г. Луи Башелье из предположения о случайном аддитивном изменении цены актива. Далее мы увидим (раздел 8.6), что реальные «биржевые» распределения негауссовы. В 1953 г. М. Кендал из предположения о мультипликативном изменении цены вывел асимметричное *логнормальное* распределение – но асимптотические свойства этого распределения тоже не вполне соответствуют ценам биржевых активов.

Поскольку в биржевой игре вырученные суммы могут использоваться для дальнейших покупок акций, прирост и убыль цены актива, вместо аддитивной формулы (8.14), можно оценивать иначе: по *мультипликативной* формуле

(8.17) $$w_{n+1} = \delta \cdot w_n\ ,$$

где случайный множитель $0 < \delta < 1$ отвечает снижению, а $\delta > 1$ – повышению цены. Перепишем эту формулу в виде

(8.17 а) $$\ln w_{n+1} = \ln w_n + \Delta .$$

Здесь $\{w_i\}$ – по-прежнему цены актива в разные моменты дискретного времени, а $\Delta = \ln \delta$ – изменения масштаба цены (на разных шагах они могу быть разными). Таким образом, аддитивные случайные приращения, аналогичные (8.14), претерпевает не сама цена, а ее масштаб. При $\delta = \text{const}$ условиям (8.17) и (8.17 а) отвечает нормальное распределение логарифма цены актива, которое называется *логарифмически нормальным* или, кратко, *логнормальным* (рис. 8.13).

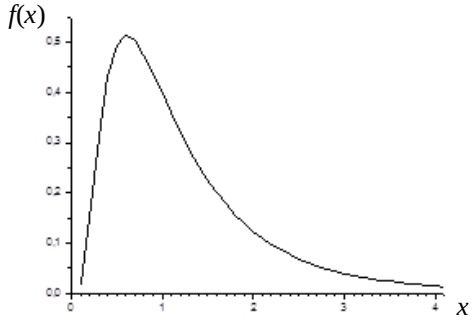


Рисунок 8.13. Логарифмически нормальное распределение плотности вероятности непрерывной случайной величины

(8.18) $$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Благодаря переменной x в знаменателе из (8.18) следует интегральное распределение

(8.18 а) $$F(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left[\frac{-(y-a)^2}{2\sigma^2}\right] dy,$$

где $y = \ln x$ и $dy = dx/x$.

В. Распределение Коши

Непрерывное *распределение Коши* в зарубежной научной литературе называется *функцией Лоренца* или *функцией Брейта-Вигнера*. Его образует отношение двух нормально распределенных случайных переменных $X = Y/Z$. Плотность распределения Коши (Cauchy)

(8.19) $$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma}\left[\frac{\gamma}{(x-a)^2+\gamma^2}\right],$$

где a – параметр сдвига, γ – параметр масштаба (рис. 8.14). Интегральная функция распределения вероятности (см. Приложение П8)

(8.19 а) $$F(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma dx}{(x-a)^2+\gamma^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-a}{\gamma}\right).$$

Как большинство таких функций, она строго возрастает с ростом x и имеет S-образную форму, по виду напоминая логисту (разд. 2.1 главы 2). Само распределение Коши $f_C(x)$,

подобно функции Гаусса $f_G(x)$, имеет симметричную колоколообразную форму, но отличается от нее более «медленным» асимптотическим убыванием: при x→±∞

$$f_G(x) \sim e^{-x^2} \text{ (если } \sigma = {}^{1}/_{\sqrt{2}}\text{) и}$$

$$f_C(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

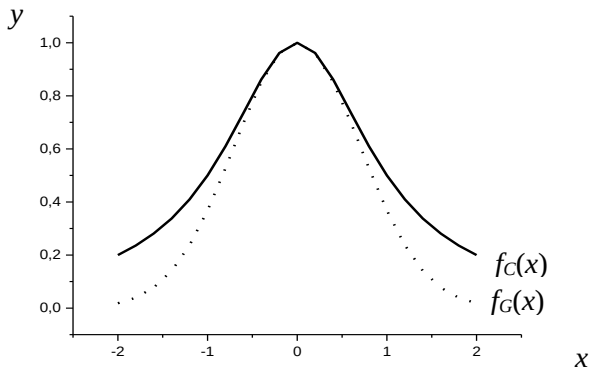


Рисунок 8.14. Распределения Коши $\pi f_C = \frac{1}{x^2+1}$ при $a = 0, \gamma = 1$ (сплошная линия) и Гаусса $f_G = \exp(-x^2)$ при $\sigma = 1/\sqrt{2}$ (пунктир)

Пусть мы проверяем серию одинаковых изделий (например, микрочипов), которые при правильном изготовлении должны иметь электрическое сопротивление $\underline{R_0}$. Для этого можно использовать электрическую схему с амперметром и вольтметром; их вкладами в сопротивление можно пренебречь (рис. 8.15). Эти приборы, соответственно, измеряют ток, проходящий через изделие, и напряжение на нем. Сопротивления изделий R – случайная величина, симметрично распределенная вокруг R_0 по некоторому закону. Измеренные значения тока I и напряжения U – случайные величины, распределенные по гауссову закону; в их разброс внесут вклад шумы измерительных приборов. Сопротивления изделий R вычисляется по закону Ома $R = U/I$ – и это случайная величина, подчиняющаяся распределению Коши (см. [4]). Подобным распределением («функцией Лоренца») аппроксимируют профили спектральных линий в спектроскопических и дифракционных исследованиях*.

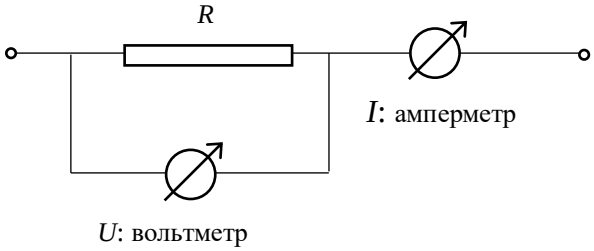


Рисунок 8.15. Схема измерения электрического сопротивления R

*Значительно чаще для подгонки формы линии используют «смешанную» функцию $A[xL+(1–x)G]$ (где $0<x<1$ – весовой коэффициент, L – функция Лоренца, G – функция Гаусса, A – нормирующий множитель). Эта функция не имеет строгого теоретического обоснования, но дает хорошие практические результаты.

Г. Распределение Гиббса

В «неживых» многочастичных физических системах, наряду с нормальным распределением (скорости молекул газа, см. формулу (2.38) в гл. 2) не менее часто встречается распределение Больцмана, также называемое распределением Гиббса. Это распределение возникает при аддитивном увеличении переменной w по формуле (8.14)

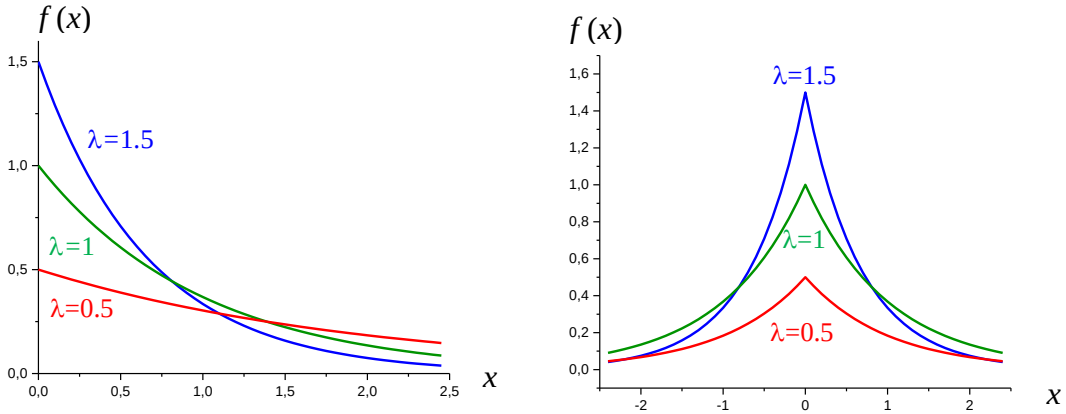
$$w_{n+1} = w_n + a \cdot \text{grad}\, U(w_n) + \Delta_n,$$

если приращение переменной на каждом шаге времени зависит не только от случайного процесса, но и от детерминистского внешнего поля U (глава 4, осаждение микроскопических частиц в центрифуге). Плотность вероятности имеет вид

(8.20) $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

(рис. 8.16 а). Эта функция определена для положительной случайной переменной ($X > 0$). В начале XXI века было установлено, что функции (8.20) соответствует распределение доходов в основной части населения богатых стран (см. далее).

Если в показателе степени (8.20) заменить переменную x на ее модуль $|x|$, мы получим симметричное *распределение Лапласа* (рис. 8.16 б), определенное на всей числовой оси. Подобно эмпирическим распределениям ряда «биржевых» параметров – например, логарифмической доходности – оно имеет остроконечный максимум. Однако при $x \to \pm\infty$ распределение Лапласа не проявляет обратной степенной асимптотики, типичной для биржи и других социальных систем (см. далее разд. 8.6).



(а) (б)

Рисунок 8.16. (а) Экспоненциальное распределение Гиббса $\lambda e^{-\lambda x}$, (б) распределение Лапласа $\lambda e^{-\lambda|x|}$ (не путать с функцией Лапласа на рис. 8.12 б!)

Д. Распределение Парето

До начала XXI века, когда данные по размерам налогов в высокоразвитых странах стали доступны через Интернет, распределения населения по доходам были известны лишь приблизительно. Одна из модельных функций распределения названа именем Вильфредо

Парето – итальянского экономиста и социолога, который в конце XIX века декларировал (без точного обоснования) обратную зависимость доли населения от принадлежащего ей богатства. В современной форме *распределению Парето* (рис. 8.17) отвечает плотность вероятности

(8.21) $$f(x) = \alpha {x_0}^{k-1} x^{-k} \quad \text{при } x \geq x_0$$
$$f(x) = 0 \quad \text{при } x < x_0,$$

где x_0 – произвольно выбранная граница. Поскольку беднейшая часть населения все-таки существует, в более реалистическом описании $f(0 < x < x_0) = \text{const}$ (криминальные источники доходов в общих курсах экономики игнорируются). Из (8.21) следует интегральное распределение вероятности

(8.21 а) $$F(X < x) = 1 - \alpha \left(\frac{x_0}{x}\right)^{k-1} .$$

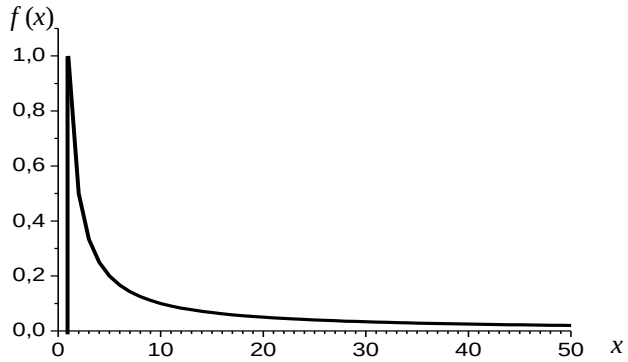


Рисунок 8.17. Распределение Парето , x_0 = 1

Формуле (8.21) соответствует асимптотический «обратный степенной» вид многих распределений социальных систем $f(x) \sim x^{-\beta}$, где показатель степени β чаще всего нецелый. По такой зависимости распределены порядки вершин в модельных «растущих» сетях, где вероятность добавления нового ребра к вершине пропорциональна ее порядку, а также высокие порядки вершин в существующих сложных сетях (см. главу 6, разд. 6.2.1).

Далее мы увидим, что распределение населения богатых стран по доходам в настоящее время не является ни гауссовым, ни логнормальным. Ему отвечает комбинации распределения Гиббса для большинства населения (~95%) с обратным степенным распределением Парето его небольшой богатейшей части (разд. 8.4). График экспоненциального распределения (8.20) в координатах $(x, \ln[f(x)])$ переходит в прямую линию, или «спрямляется», в полулогарифмическом масштабе (см. рис. 6.22 б в главе 6). Распределение Парето спрямляется в двойном логарифмическом масштабе ($\ln x$, $\ln[f(x)]$) (рисунки 2.41 б и 2.42 в главе 2, рис. 6.21 и 6.22 а, в в главе 6).

Особое положение нормального распределения в теории вероятностей следует из *центральной предельной теоремы* (*ЦПТ*), сформулированной в 1901 г. А.М. Ляпуновым:

При достаточно большом числе независимых либо слабо зависимых случайных величин ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) с одинаковыми или близкими функциями распределения, где по порядку

величины все $X_i \sim X_j$, распределение их суммы ($X_1+X_2+\ldots+X_n$) с увеличением n *приближается к нормальному.*

На основании ЦПТ, также называемой *законом больших чисел*, сложные многокомпонентные случайные процессы в первом приближении обычно сравнивают с нормальным (гауссовым) распределением. Далее мы увидим, что статистика для социальных систем далеко не всегда соответствует ЦПТ. Тем не менее, стандартная обработка эмпирических данных в общественных науках обычно включает их подгонку под параметры нормального распределения – что может приводить к ошибочным выводам. Сложный «неклассический» характер статистики для ряда социальных систем твердо установлен; его возможные объяснения будут рассматриваться далее.

8.2.3. Моменты распределений и статистические параметры выборок

В разделе 6.2.2 главы 6 при обсуждении случайных графов и сложных сетей мы уже вводили такие статистические параметры, как дисперсию, стандартное отклонение и ковариацию (формулы (6.12) – (6.14)). Представим их более полную сводку.

Моментом k-го порядка, или *k*-м моментом непрерывной дифференцируемой функции $f(x)$, заданной на всей числовой оси x, называется интеграл

(8.22) $$m_k[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$$

Это также распространяется на дискретные величины $f(x_n)$ и на функции многих переменных – в частности, используемые в физике. Так, электрическое поле, создаваемое произвольным трехмерным распределением $\rho(\mathbf{r})$ плотности зарядов электронов и атомных ядер в молекуле, можно представить в виде бесконечной суммы полей, создаваемых моментами распределения

(8.22 а) $$\mu_k = \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}^k \rho(\mathbf{r})\, dxdyxz$$

($\mathbf{r} = (x\ y\ z)$ – вектор, соответствующий точке в трехмерном пространстве), где
$\mu_0 = Q$ ($k = 0$) – общий заряд молекулы ($Q = 0$) либо многоатомного иона, который может быть как положительным, так и отрицательным,
μ_1 ($k = 1$) – *дипольный момент* молекулы, который может быть ненулевым при $Q = 0$ – например, для молекул воды H_2O,
μ_2 – *квадрупольный момент* молекулы,
μ_3 – *октупольный момент*, и т.д.

Каждое из полей $\{\mu_k\}$ диполя, квадруполя, октуполя и высших электрических моментов имеет аналитическое выражение $U \sim 1/r^{k+1}$. Вклады высших моментов с увеличением расстояния r быстро стремятся к нулю. Другими словами, произвольную непрерывную функцию поля полностью определяет бесконечный набор ее моментов аналогично разложению функции $f(x)$ в бесконечный ряд Тейлора (см. разд. 1.4 в главе 1).

Если функция $f(x)$ – плотность вероятности непрерывной случайной величины X с максимумом на $x = 0$, ее моменты несут такую информацию:

$m_0[X]$ – интеграл вероятности $F(X<x) = 1$ (см. формулы (8.16), (8.19 а), (8.21 а))
$m_1[X]$ – *математическое ожидание* случайной величины (обозначается $M[X]$ или $E[X]$).

Оператор математического ожидания M[…] либо E[…] переводит распределение случайной величины, заданной в скобках, в число: ее «идеальное» среднее значение. Такое число в литературе нередко обозначают $M_1(X)$ либо $M(X)$ (курсивом с круглыми скобками), что может запутать читателя.

Эти моменты называются *начальными*. Если же случайная величина X распределена вокруг некоторого среднего $\mathrm{M}[X] = a$ (см. (8.15), (8.18) и (8.19)), распределение ее отклонений от среднего $\{X – \mathrm{M}[X]\}$ называется *центральным*. Для центрального распределения

$$\mathrm{M}[X–a] = \mathrm{M}[X] – a$$

Найдем математическое ожидание числа, выпадающего на грани кубика (игральной кости). Составим таблицу

число X	1	2	3	4	5	6
вероятность P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

По формуле (8.22) для дискретной случайной величин*ы* X (сумма вместо интеграла),

$$\mathrm{M}[X] = \sum x_i P_i = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

Второй центральный момент распределения случайной величины называется *дисперсией*

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{M}[(X – \mathrm{M}[X])^2] = \mathrm{M}[X^2] – (\mathrm{M}[X])^2$$

Размерность дисперсии – квадрат переменной x. «Линейной» мерой отклонения случайных значений X от математического ожидания служит *стандартное отклонение*

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}}$$

Для распределения двух случайных величин X и Y, если эти величины независимы,

$$F(X, Y) = F(X)F(Y) \quad \text{и} \qquad f(x, y) = f(x)f(y)$$

«Степень взаимной зависимости» (корреляции) двух случайных величин показывает второй смешанный момент их распределения, или *ковариация*:

(8.23) $$\mathrm{cov}(X, Y) = \mu_{XY} = \mathrm{M}\{[X – \mathrm{M}(X)] \cdot [Y – \mathrm{M}(Y)]\},$$

где $\mathrm{M}(X)$ и $\mathrm{M}(Y)$ – математические ожидания этих величин. Для независимых величин X и Y $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$. *Коэффициентом корреляции* называется безразмерная величина

(8.23 а) $$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_X}, \quad \text{где } \sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}(X)},\ \sigma_Y = \sqrt{\mathrm{D}(Y)},$$

а $\mathrm{D}(X)$, $\mathrm{D}(Y)$ – соответствующие дисперсии. Коэффициент корреляции принимает значения

$$–1 \le r_{XY} \le 1,$$

$r_{XY} > 0$ соответствует *положительной* корреляции (при увеличении X возрастает Y), а $r_{XY} < 0$ – *антикорреляции* (с возрастанием X величина Y уменьшается). При $r_{XY} = \pm 1$ величины X и Y связаны линейно: $Y = aX + b$, где $a > 0$ при $r_{XY} = 1$ и $a < 0$ при $r_{XY} = -1$. Для независимых случайных величин X и Y $r_{XY} = 0$ (см. разд. 6.2.2. гл. 6). Для пары любых случайных величин

(8.24 а) $$\mathrm{M}(\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y}) = \mathrm{M}(\mathrm{X}) \cdot \mathrm{M}(\mathrm{Y}) + r_{XY}\sigma_X\sigma_Y$$

(8.24 б) $$\mathrm{D}(\mathrm{X} \pm \mathrm{Y}) = \mathrm{D}(\mathrm{X}) + \mathrm{D}(\mathrm{Y}) \pm 2r_{XY}\sigma_X\sigma_Y.$$

Статистические средние величины

В статистике результатов измерений математическому ожиданию соответствует среднее значение переменной. Набор $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ результатов измерений неизвестной величины X называется *выборкой*. Предполагается, что среднее значение по выборке

(8.25) $$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

в пределе $n \to \infty$ стремится к математическому ожиданию M[X]. Отклонения от среднего значения характеризует *выборочная дисперсия*

(8.26) $$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2$$

Стандартное отклонение данных в выборке от среднего

(8.26 а) $$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x \rangle)^2}.$$

Пусть, например, случайная величина X принимает значения

1, 1, 2, 4, 3, 0, 8, 5, 2, 4.

Тогда ее среднее значение

$$\langle x \rangle = (1/10)(1+1+2+4+3+0+8+5+2+4) = 30/10 = 3.0,$$

сумма квадратов отклонений от среднего

$$\Sigma(x_i - 3)^2 = 4+4+1+1+0+9+25+4+1+1 = 50,$$

а «выборочное» стандартное отклонение

$$\sigma = \frac{1}{3}\sqrt{50} \approx 2.357, \text{ то есть } \langle x \rangle = 3.0 \pm 2.4,$$

(стандартное отклонение – это разброс случайной величины вокруг ее среднего значения; десятичные дроби округляем по школьным правилам до первого знака после запятой).

При статистической обработке данных «крайние» значения переменной, в данном случае выделенные маркером 0 и 8, обычно отбрасывают. Тогда в выборке останется восемь значений $\{x_i\}$, с которыми

$$\langle x \rangle = (1/8)(1+1+2+4+3+5+2+4) = 22/8 = 2.75,$$

$$\Sigma(x_i - 2.75)^2 = 3.0625+3.0625+0.5625+1.5625+0.0625+5.0625+0.5625+1.5625 = 15.5,$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{7}}\sqrt{15.5} \approx \frac{3.937}{2.646} \approx 1.488 \approx 1.5.$$

Таким образом получаем «исправленные» среднее и выборочную дисперсию

$$\langle x \rangle = 2.8 \pm 1.5$$

Мы видим, что среднее значение изменилось на 8%, тогда как стандартное отклонение уменьшилось в 1.6 раз. Отбрасывание «крайних» значений, в особенности далеко отстоящих от основной выборки (здесь это $x = 8$), уменьшает разброс данных и улучшает получаемые статистические характеристики. Их приближенные значения должны содержать одинаковое число значащих цифр, сопоставимое с точностью измерений.

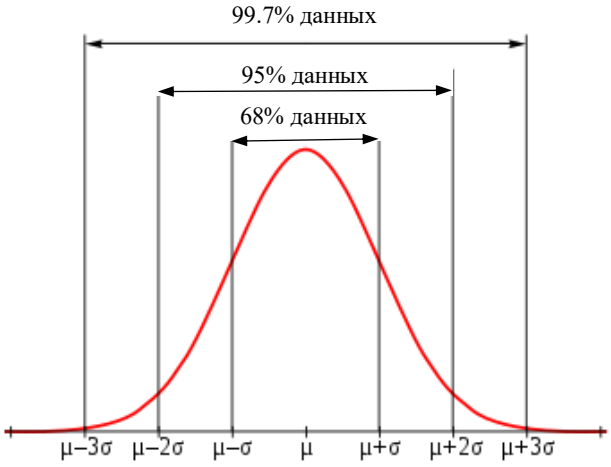


Рисунок 8.18. «Правило трех сигм»

Для нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

центральные моменты $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$. Значения интеграла этой функции (см. формулу (8.16)) сведены в таблицы, в интервалах $(-n\sigma, n\sigma)$ (n = 1, 2 и 3) они показаны на рис. 8.18. Если случайная величина X имеет нормальное распределение, из величины интеграла

$$\int_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} f(x)dx \approx 0.997 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

следует, что вероятность ее отклонения от среднего M(X) на величину $|x|$ более $3\sigma_X$ близка к нулю. Этот эмпирический критерий (*правило трех сигм*) широко используется в анализе статистических данных.

ЗАДАЧА 8.5. Чему равно математическое ожидание распределения Коши (8.19)?

Решение

Упростим формулу (8.19) до $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

и найдем ее начальный первый момент

(8.27) $$M_C(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dx^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^{\infty} = \infty.$$

Таким образом, первый момент распределения Коши математически не определен, так как соответствующий интеграл *расходится*. Можно показать, что $D_C(X) = \infty$, то есть дисперсия этого распределения бесконечна, как и другие его высшие моменты. Моменты m_p распределения Парето (8.21) $f(x) \sim 1/x^k$ расходятся при $p < k–1$. Таким образом, при $f(x) \sim 1/x$ и $x \geq 0$ у этого распределения бесконечны все моменты, начиная с математического ожидания, а при $f(x) \sim 1/x^2$ – начиная с дисперсии.

Для распределений с расходящимися моментами в статистической обработке данных вместо средних используют *медианное значение* (см. рис. 7.8 в гл. 7), которое для функции Коши строго определено*. «Ширину» распределения в статистике часто характеризуют эмпирически как *ширину на половине высоты*, или «полуширину» (распространенный жаргонный термин)

$$\Delta = x_2 - x_1, \quad \text{где } f(x_2) = f(x_1) = \frac{1}{2} max\, f(x)$$

Отметим, что «полуширина» нормального распределения не совпадает со стандартным отклонением: $\Delta \approx 2.355\sigma$, тогда $x_2 – x_1 = 2\sigma$ при $f(x_{1,2}) = 0.607 max\, f(x)$ (см. рис. 8.18).

Помимо математического ожидания и дисперсии, для плотностей вероятности рассчитывают высшие центральные моменты:

$M_3 = m_3[X–M[X]]$ – показатель асимметрии распределения. Коэффициент асимметрии обычно представляют в виде

(8.28) $$a = \frac{M_3}{\sigma^3},$$

где σ – стандартное отклонение (если оно существует).

$M_4 = m_4[X–M[X]]$ – показатель формы распределения. Для нормального распределения $M_4 = 3$. Для других распределений этот показатель, обычно называемый *эксцессом*, имеет вид

(8.29) $$C_x = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3$$

Графики функций с $C_x > 0$ называются *остроконечными* (англ. leptokurtic), отчего эксцесс C_x либо сам 4-й момент распределения иногда обозначают транслитерацией «куртозис». Моменты распределений неправильной формы, в том числе *полимодальных*

* Определенный интеграл (8.27), как разность площадей под кривой слева и справа от максимума, на любом симметричном интервале с конечными пределами $\pm c$ равен 0, а для распределения (8.19) – центральному значению $x = a$.

(имеющих несколько максимумов), уже не характеризуют функции распределения: они теряют информативность.

Распределения рассмотренных нами случайных величин собраны в Табл. 8.3. Полезный набор сведений об основных распределениях случайных величин, используемых в теории вероятностей и математической статистике, представлен в Интернет[4].

Таблица 8.3

Некоторые распределения случайных величин

название	формула	моменты			
		матожидание $M[X]$	дисперсия $M[X^2]–(M[X])^2$	асимметрия M_3/σ^3	эксцесс $M_4/\sigma^3–3$
биномиальное	$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$	np	$np(1–p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	$\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$
Пуассона	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$\frac{1}{\lambda}$
нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$	a	σ^2	0	0
логнормальное	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right]$	$e^{a+\sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2}-1)e^{2a+\sigma^2}$	**	***
Коши	$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{(x-a)^2+\gamma^2}$	a^*	—	—	—
Гиббса	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	2	6
Парето	$\alpha {x_0}^{k-1} x^{-k}$	****	****	****	****

* медианное значение (см. текст)

** $(e^{\sigma^2}+2)\sqrt{(e^{\sigma^2}-1)}$

*** $e^{4\sigma^2}+2e^{3\sigma^2}+3e^{2\sigma^2}-6$

**** см. текст.

Литература к разделу 8.2

[4] В. Архипов *Правда, чистая правда и статистика, или 15 распределений вероятности на все случаи жизни*, 2016. https://habr.com/ru/post/311092/

8.3. Экономика и энтропия

8.3.1. Термодинамическая энтропия и экономика

Сложность понятия энтропии проявляется в точных науках как существование нескольких разных определений этой физической величины. В термодинамическом определении (Клаузиус) энтропия рассматривается как макроскопический параметр

состояния системы: экстенсивная мера «связанной» энергии, которую нельзя перевести в полезную работу и уменьшить без дополнительного подведения энергии извне (что увеличит суммарную энтропию взаимодействующих систем, см. раздел 2.3 в гл. 2). В статистическом определении (Больцман, Гиббс) энтропия служит мерой неупорядоченности макроскопического состояния многочастичной системы как суммы ее *микросостояний*, т.е. различных комбинаций возможных состояний составляющих частиц (разд. 3.4 в гл. 3). В теории информации близкое понятие *информационной энтропии* (Шеннон) отражает меру *порядка* (содержания информации) в заданной комбинации символов. Ниже мы рассмотрим некоторые примеры применения этих понятий в экономических моделях. Кроме них, имеется ряд определений *неэкстенсивной энтропии* (энтропия Реньи, энтропия Цаллиса и др.) для систем с сильным межчастичным либо межагентным взаимодействием. Эти варианты энтропии будут обсуждаться в следующей главе. Краткое введение в круг вопросов, связанных с применением энтропии в экономике, можно найти в интересном и современном учебном пособии[5].

Феноменологическая энтропия в экономике

Термодинамическая, или феноменологическая энтропия вводится как экстенсивная функция теплового состояния системы («фактор емкости», или «обобщенная координата»). Если объем V идеального газа в сосуде разделить теплопроницаемой перегородкой на две произвольные части V_1 и V_2, при P, T = const

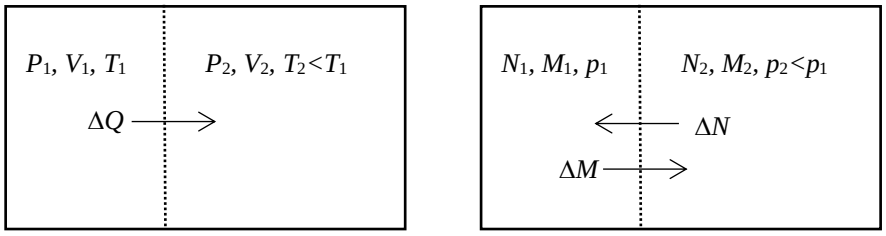
$$S(V) = S_1(V_1) + S_2(V_2)$$

Энтропия определяется через ее приращение ΔS с точностью до произвольной постоянной интегрирования

(8.30) $$\Delta S_{1,2} = \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} > 0,$$

где Q – переданное количество теплоты, T_1 и T_2 – температура, соответственно, горячего и холодного тела, приведенных в контакт между собой. Так как $T_1 > T_2$, при передаче тепла энтропия *возрастает*, при этом температура тел выравнивается: $T_1' = T_2'$ (рис. 8.19 а). «Постоянную интегрирования» S_0 определяет *теорема Нернста*, или *3-й закон термодинамики*: при абсолютном нуле температуры (0 K) энтропия любых тел равна нулю:

$$S_0(T = 0) = 0$$



(а) (б)

Рисунок 8.19. (а) Теплообмен в объеме газа с неподвижной перегородкой ($P_{1,2}$=const). (б) Товарообмен в двух экономиках, $p_1 \neq p_2$ – цены на товар (см. рис. 2.34 в гл. 2)

В феноменологической термодинамике температура – сопряженная с энтропией интенсивная переменная, одинаковая во всех точках равновесной системы: «фактор действия», или «обобщенная сила». Другой экстенсивной обобщенной координатой для газа является объем V, с которым сопряжена другая обобщенная сила: давление P. Подвижная перегородка между двумя объемами газа (рис. 8.19 а) при $P_1 \neq P_2$ будет смещаться до выравнивания давления ($P_1' = P_2'$; штрихи соответствуют равновесным величинам) При изотермическом и изобарическом (то есть бесконечно медленном) расширении газа

$$P\Delta V = Q - T\Delta S\ ,$$

где $P\Delta V = \Delta W$ – работа, совершённая газом при расширении, Q – переданное ему количество теплоты и $T\Delta S$ – «связанная энергия».

Соотношения феноменологической термодинамики заманчиво перенести на абстрактное описание двух взаимодействующих экономик (N_1, M_1) и (N_2, M_2), характеризуемых числом агентов $N = N_1 + N_2 = \text{const}$ и денежными суммами, способными к переходу между экономиками в процессе торговли $M = M_1 + M_2 = \text{const}'$. При этом числа агентов в системе N_1 и N_2 будем считать аналогами объема газа, M и ΔM – аналогами энергии системы и переданного в ней количества теплоты, а аналогом давления $P = -\left(\partial M/\partial N\right)_S$ – среднее благосостояние агентов. Эта схема рассуждений, представленная во 2-й главе (см. разд. 2.3), выглядит подходящей для взаимодействия стран ЕС с близкими уровнями благосостояния и отсутствием «односторонней» миграции (т.е. $N_1, N_2 \approx \text{const}$). В этом случае термодинамические аналогии предсказывают переток денег от «горячей», т.е. богатой, к «холодной» экономике до выравнивания «температуры» (не определенной здесь величины) и увеличение их суммарной «энтропии», т.е. повышение «диссипации благосостояния» в результате международной торговли. Среднее благосостояние агентов в двух экономиках при этом должно сблизиться (но не обязательно сравняться) за счет ΔM: перетока денег *от богатых стран к бедным*. Реальные последствия перехода к «открытым» экономикам и миграции людей через границы в странах бывшего СССР, не получавших стратегической помощи от западных государств, были близки к катастрофе – хотя «термодинамическая» модель медленных равновесных изменений их не предполагала.

Схему рассуждений придется изменить, если принять во внимание двусторонний характер потоков при торговле: обмен товара на деньги (см.[6]). Пусть N_1 и N_2 – запасы определенного товара в двух взаимодействующих экономиках, M_1 и M_2 – присутствующие в них деньги, p_1, p_2 – цены на этот товар (англ. price) и $p_1 > p_2$ (рис. 8.19 б). В этом случае аналогом температуры будет служить цена товара: при отсутствии ограничений возникнет переток $\Delta N_{21} > 0$ товара из экономики 2 в экономику 1 и встречный отток денег $\Delta M_{12} > 0$ из экономики 1 в экономику 2 до выравнивания цен $p_1' = p_2'$. В этой более реалистической схеме «богатство» экономик M_1 и M_2 не учитывается (по сравнению с абстрактной стоимостью одного товара оно бесконечно велико), а выравнивание цен опять-таки сопровождается увеличением энтропии. К сожалению, смысл энтропии как экономического понятия в обоих примерах приобретает «гуманитарную неопределенность».

Аналогии соотношений термодинамики и моделей обмена в экономике неоднократно обсуждали физики, экономисты и математики начиная с Джона Неймана – одного из создателей теории игр в 1920-е годы. (см. гл. 7). Такие аналогии до сих пор остаются на качественном уровне: в отличие от физики и химии, их не используют для расчетов. Это объясняется, с одной стороны, определенным сходством макроскопических и мультиагентных систем, содержащих множество взаимодействующих автономных единиц, а с другой – огромным различием масштаба этих систем (см. главу 1) и, следовательно, разными результатами усреднения (главы 2 и 4).

Другая важнейшая причина – принципиальная неоднородность системы экономических агентов. Присутствие «горячих» молекул газа в широком интервале их кинетической энергии при тепловом равновесии способствует протеканию эндотермических реакций уже при комнатной температуре (см. разд. 2.4 главы 2). В то же время «богатые» и «сверхбогатые» экономические агенты не просто доминируют на рынке: они способны изменять в свою пользу его механизм, что затрудняет формальное описание и не рассматривается в неоклассической политэкономии. В этом проявляется реальная немакроскопическая природа экономических отношений, где миллиардер – не просто флуктуация богатства, а (благодаря его размеру) главный субъект экономики.

Равновесные термодинамические величины можно использовать лишь для «быстрых» процессов ценообразования (см. [1]). В общем случае экономические явления неравновесны. Для них характерны потоки денег и ресурсов (включая «человеческий капитал»), аналогии для которых следует искать в *неравновесной термодинамике*, концептуально и математически особенно сложной (см.[6]). «Равновесные» и «неравновесные» экономические модели разрабатываются в зависимости от решаемых задач, объективного критерия их разделения не существует. Это превращает «термодинамическую экономику» в систему качественных рассуждений, не проверенных (и часто непроверяемых) на основе количественных данных. Так, в популярной экономической литературе встречается словосочетание *температура рынка*, что подразумевает заметные и быстрые изменения цен товаров в выбранном масштабе времени. Низким ценам, которые по объективным показателям способны повышаться, соответствует «холодный» рынок, тогда как ценам, близким к верхней границе своих возможных значений – «горячий». Эта терминология используется в спекулятивной биржевой торговле (см. далее раздел 8.6).

Одним из современных направлений «вербальной термодинамики» является *экологическая* (или *биофизическая*) *экономика*. Она основана на аналогии неравновесных явлений макроэкономики с диссипативными процессами в живых организмах и биоценозах. По ее основному постулату, сформулированному в 1970-е годы Н. Георгеску-Рёгеном*, главным термодинамическим результатом хозяйственной деятельности людей является преобразование низкоэнтропийного сырья в высокоэнтропийные отходы. Переработка отходов сопровождается дополнительным рассеиванием энергии, и следствием экономических процессов является повышение энтропии биосферы как один из факторов, угрожающих человечеству. Такая точка зрения не противоречит неравновесному

*Николае Георгеску-Рёген (1906-1996) – румынский экономист предвоенного и военного времени. С 1948 г. жил и работал в США.

диссипативному характеру всех аспектов жизни социумов (см. начало главы) и поддерживает обоснованное стремление ограничить вредные выбросы. Но без объективных показателей степени опасности, которые вряд ли поддаются оценке, «энтропийное загрязнение планеты» нередко используют как политическое клише в алармистских недобросовестных прогнозах «близкого конца света», в последние годы обильно поставляемых транснациональными структурами.

8.3.2. Статистическая энтропия в экономических моделях

В статистической термодинамике энтропию многочастичной системы можно рассчитать по числу доступных *микросостояний* W, из которых складывается *макросостояние* системы с определенными экстенсивными и интенсивными параметрами – например, один моль газа, занимающий объем V при определенных давлении P и температуре T

(8.31) $$S = k \ln W \ .$$

Масштабным множителем $k = 1.381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К служит константа Больцмана, равная отношению (R/N_A) универсальной газовой постоянной $R = 8.31$ Дж/(моль·К) к числу Авогадро $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ («молекул в моле») – см. формулу (3.67) в разд. 3.4 главы 3. Эта очень маленькая величина обеспечивает согласие расчетов с данными калориметрических измерений (см. формулу (8.30)). Так, небольшое «макроскопическое» повышение энтропии вещества на 1 Дж/К, которое примерно соответствует нагреву 0.25 г воды на 1 градус, предполагает увеличение $\ln W$ в $\sim 10^{23}$ раз.

Главная идея статистической физики состоит в том, что измеряемые параметры макроскопического тела возникают в результате усреднения параметров огромного числа его микроскопических частиц (молекул и атомов). В этом случае энтропия показывает «мощность» набора состояний, доступных для микрочастиц при заданных макро-параметрах системы. В распределениях частиц по энергии, условно показанных на рис. 8.20, медиане унимодальной функции (ее положению) отвечает температура T, или «обобщенная сила». Тогда энтропия S, как сопряженная «обобщенная координата», отражает дисперсию и остальные моменты – то есть характеризует форму распределения.

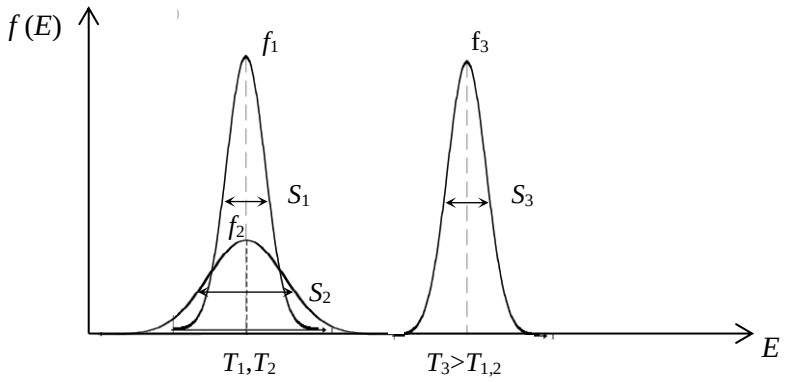


Рисунок 8.20. Распределения молекул по энергии (условно): $T_1 = T_2$, $S_2 > S_1$; $T_3 > T_{1,2}$, $S_3 = S_1$

В экономической реальности количественные данные (цены товаров, доходы производителей, зарплаты наемных работников, капитализация фирм, проценты

банковских вкладов и т.д.) на множестве экономических агентов распределены вокруг своих средних значений. Но «магистральная» экономическая наука подобные распределения не анализирует, объявляя отклонения результатом недостаточного развития и несовершенства рыночных механизмов в конкретной отрасли хозяйства либо в «не вполне рыночных» странах.

В неоклассической экономике постулируется, что при балансе спроса и предложения на идеальном рынка каждый экономический агент автоматически получает свою оптимальную долю ограниченных ресурсов. В этой парадигме равновесные цены товаров содержат максимум возможной информации о состоянии экономики. (Критики неоклассической теории иронически добавляют: «бесплатной информации», справедливо отмечая крупные расходы фирм-производителей и продавцов на анализ торговой конъюнктуры, маркетинг и промышленный шпионаж на фоне принципиально меньшей информированности индивидуальных покупателей).

Динамические процессы в экономике не отрицаются неоклассической теорией. Однако нарушенное равновесие рассматривают в ней лишь как точку на траектории, ведущей к новому равновесию – а не одно из множества сосуществующих «микросостояний» системы (вразрез с идеями экономической науки в ее классический период). С середины XX века в неортодоксальные экономические направления стали проникать методы статистической физики. Обращение к феноменологической энтропии (см. выше) отражает этот процесс, ибо при равновесных ценах всех товаров энтропия идеального рынка *равна нулю*, а любые (пусть стилизованные) значения $\Delta S>0$ подразумевают распределение состояний экономических агентов.

Формализм статистической термодинамики, позволяющий проводить расчеты на основе создаваемых моделей, в последние десятилетия все чаще применяется в анализе экономических явлений. Одним из первых примеров стала вышедшая в 1983 г. книга Ф. Фарджуна и М. Макговера «Законы хаоса: вероятностный подход в политической экономии»[*]. Ее авторы, апеллируя к закону больших чисел, оценили параметры нормального распределения цен на товары в Англии 1980-х гг., в традициях марксистской политэкономии приведенных к средней стоимости рабочего времени, затраченного на их производство. Хотя гауссово распределение численных параметров в макроэкономике встречается редко (см. далее), эти результаты совпали с аналогично обработанными позднейшими статистическими данными.

Энтропия Больцмана-Гиббса и вероятность

Пусть N частиц, составляющих макроскопическую систему, распределены в ней по дискретным микросостояниям (1, 2, …, K) в соответствии с некоторым микроскопическим параметром ν: для нашего вывода не важно, каким именно. Такому распределению отвечает дискретная функция распределения (см. предыдущий раздел) (N_1, N_2, …, N_K) с условием

[*] F. Farjoun, M. Machover, *Laws of Chaos: A Probabilistic Approach to Political Economy*, 2nd ed., 2020, Verso, 272 p.; см. также W.P. Cockshott, A.F. Cottrell, в книге R. Bellofiore (ed.), *Marxian Economics: A Reappraisal*, Palgrave Macmillan 1998, Vol. 2, pp. 70–85.

$$N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_K = N$$

Число N_i частиц в i-м микросостоянии с параметром ν_i называется *заселенностью состояния*. Общее число микросостояний системы соответствует *полиномиальному распределению*

(8.32) $$W = \frac{N!}{(N_1!)\cdot(N_2!)\cdot\ldots\cdot(N_K!)}$$

Энтропия системы пропорциональна логарифму от правой части уравнения (8.32). Если число частиц в каждом микросостоянии достаточно велико, «логарифмы от факториалов» больших целых чисел $\{N_i\}$ приближенно задает *формула Стирлинга*

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

Таким образом,

$$\ln W \approx N \ln N - N - \sum_{i=1}^{K}(N_i \ln N_i - N_i) = N \ln N - N - \sum_{i=1}^{K} N_i \ln N_i + \sum_{i=1}^{K} N_i$$

(логарифм дроби a/b равен $\ln a - \ln b$, логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей – этот раздел школьного курса алгебры почему-то плохо запоминается). Последняя сумма в правой части равна N; слагаемые $-N$ и $+N$ взаимно уничтожаются. Остается равенство

(8.33) $$\ln W = N \ln N - \sum_{i=1}^{K} N_i \ln N_i = N(\ln N - \sum_{i=1}^{K} \frac{N_i}{N} \ln N_i)$$

(мы вынесли за скобки общее число частиц N, поэтому в сумме состояний заселенность каждого состояния N_i надо разделить на N). Для макроскопической системы из очень большого числа частиц равенство можно считать точным.

Множители (N_i/N) в сумме логарифмов равны вероятностям того, что частицы находятся в i-м состоянии

$$p_i = \frac{N_i}{N}$$

Если внести эти вероятности под знак логарифма, получим

$$\sum_{i=1}^{K} p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{N_i}{N}\right) \ln \left(\frac{N_i}{N}\right) = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{N_i}{N}\right) \ln N_i - \ln N \cdot \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{N_i}{N}\right) = \sum_{i=1}^{N} p_i \ln N_i - N \ln N,$$

Поэтому сумму логарифмов заселенностей состояний в (8.33) можно выразить через сумму логарифмов их вероятностей

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \ln N_i = \sum_{i=1}^{K} p_i \ln p_i + N \ln N$$

– а так как перед этой суммой в (8.33) стоит знак «минус», члены $N \ln N$ и $-N \ln N$ взаимно уничтожаются. Поэтому

(8.34) $$S = -kN \sum p_i \ln p_i = kN \sum p_i \ln \frac{1}{p_i},$$

где суммируются вероятности всех доступных микросостояний системы. Разделив левую и правую часть на *N*, получим удельную энтропию системы, приходящуюся на одну частицу:

(8.34 а) $$S/_N = -k\sum p_i \ln p_i = -kM[\ln p] = k\sum p_i \ln \frac{1}{p_i},$$

где $-k\mathrm{M}[\ln p]$ соответствует математическому ожиданию (среднему значению) энтропии всех микросостояний. Знак «минус» перед суммами в (8.34) и (8.34 а) не должен нас дезориентировать: вероятности $0 < p_i < 1$ под знаком суммы меньше единицы, так что их логарифмы отрицательны, а $\ln(1/p_i) > 0$ – соответственно, энтропия положительна (рис. 8.21). Если все частицы с вероятностью $p = 1$ находятся в единственном состоянии, $S = 0$. Можно доказать, что для дискретной случайной величины, заданной на отрезке, максимум энтропии достигается при равномерном распределении.

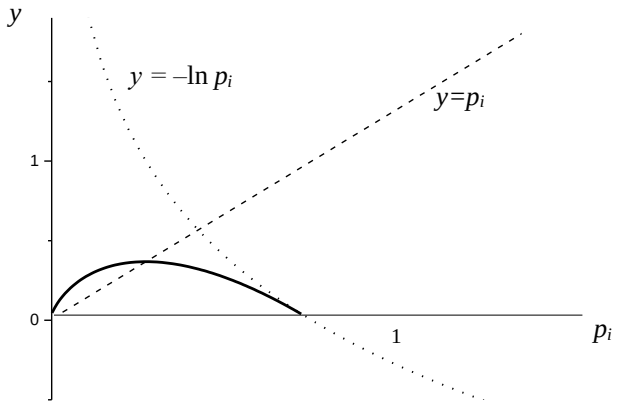


Рисунок 8.21. Произведение $-p_i \ln p_i$ (сплошная линия) и его сомножители

Энтропия Шеннона

В 1948 г. американский математик Клод Шеннон предложил количественно оценивать информативность сообщений по величине энтропии в распределении составляющих их символов. *Информационная энтропия Шеннона*, чаще всего обозначаемая *H*, соответствует удельной энтропии (8.34 а) в системе *N* частиц, распределенных по *n* состояниям:

(8.35) $$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

Для непрерывных случайных величин, заданных на всей числовой оси, дискретные значения вероятностей $\{p_i\}$ следует заменить плотностью распределения $f(x)$. Их *дифференциальная энтропия* имеет вид

(8.36) $$H = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log_2 f(x)\, dx$$

По аналогии с формулой (8.34 а), «энтропия Шеннона» (8.35) дискретной случайной величины выражается суммой по *n* символам, из которых построены сообщения (например, по всем буквам алфавита). Вместо натурального логарифма ($\ln x = \log_e x$, рис. 8.22) в формуле (8.25) чаще всего используют логарифм по основанию 2, поскольку компьютерные программы и средства связи оперируют информацией *в двоичном коде*, т.е. в виде комбинаций из нулей и единиц. «Атом информации», служащий для измерения ее

количества, в этом случае называется *битом* (англ. *bit*). В массиве информации произвольную позицию двоичного кода могут занимать 0 или 1 с вероятностью 50% (т.е. p = ½). По формуле (8.35) такому «атому информации» соответствует энтропия

$$H = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}\log_2 2 = 1$$

– то есть именно 1 бит*. (Так, энтропия единичного бросания монеты равна 1 бит). Если же в определенной позиции массива символ 0 (либо 1) присутствует с вероятностью 1, энтропия этой позиции $H = -1\cdot\log_2 1 = 0$. Позиции с фиксированным значением кода, очевидно, не изменяют числа возможных комбинаций символов в кодированном тексте – в этом смысле их «информационная емкость» равна нулю.

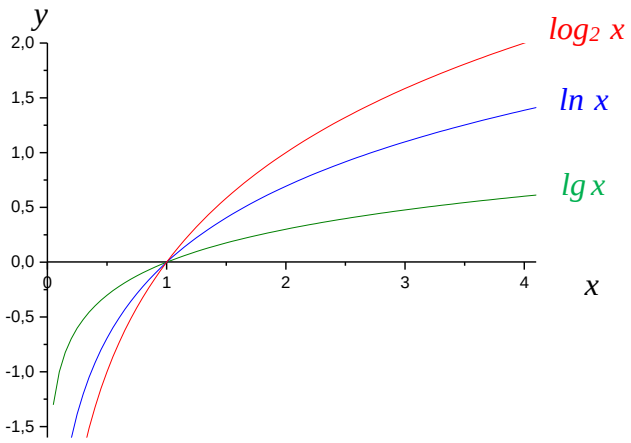


Рисунок 8.22. Графики логарифмических функций $y=\log_a x$ по основаниям a = 2, e и 10

Выражаемую энтропией неопределенность в комбинации символов, также называемую «неожиданностью» (см. теорию Фристона в разд. 2.3 2-й главы), в информационных технологиях с общемировой английской аббревиатурой IT используют как меру *количества информации*, никак не связанного с ее фактическим содержанием. По формуле (8.35) «удельную информацию» символа выражают в битах, а при замене в ней логарифма по основанию 2 на натуральный логарифм ln (то есть $\log_e$) – в *натах*.

В математической лингвистике энтропией Шеннона оценивают удельную информацию алфавита. В нулевом приближении любой из 26 букв английского алфавита и пробелу, разделяющему слова, можно приписать одинаковые вероятности появления в любой позиции текста, что отвечает равномерному распределению. По формуле (8.35) получим

$$H_0 = -\frac{1}{27}\log_2\frac{1}{27} - \frac{1}{27}\log_2\frac{1}{27} - \ldots - \frac{1}{27}\log_2\frac{1}{27} = 27\cdot\frac{1}{27}\log_2 27 \approx 4.755 \text{ бит.}$$

В действительности буквы алфавита любого языка имеют разную частотность появления в тексте (рис. 8.23 и табл. 8.4). Подставляя в (8.35) значения частотностей вместо вероятностей, в этом (первом) приближении получим $H_1^{(E)}$ = 4.194 бит. В русском алфавите

*Группу из трех последовательных двоичных символов, которой отвечают 2^3=8 возможных комбинаций нулей и единиц, называют *байтом* (англ. *byte*); 1 байт = 8 бит. Объемы информации, содержащиеся в компьютерных файлах, выражают числом таких «информационных молекул»: в килобайтах, мегабайтах, терабайтах и др., см. разд. 1.2 в 1-й главе.

33 буквы, что дает $H_0^{(R)} = 5.087$. Частотности букв в русском языке тоже различны, а некоторые буквы (ъ, ё, э) употребляются редко. С учетом этого $H_1^{(R)} = 4.36$ бит.

При более точных оценках «информационного содержания» букв учитываются фонетически либо грамматически запрещенные пары и тройки («фщ», «жы», «шы» и т.д.), а также устойчивые комбинации («пр + гласная», что повышает вероятность сочетания до 1/10 по числу гласных букв в русском языке). При последовательном учете частотностей двухбуквенных, трехбуквенных и следующих сочетаний энтропийное, а значит информационное содержание букв английского (и любого другого) алфавита H_n уменьшается до предельной оценки $H_\infty \sim 1$ бит, сделанной Шенноном. Снижение энтропии в буквенных символах на 70-80% при учете их комбинаций показывает первостепенную важность грамматической структуры языка в передаче информации. Некоторые математические модели лингвистики мы рассмотрим далее в главе 9.

Таблица 8.4

Частотности букв английского алфавита*

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0.064	0.014	0.027	0.035	0.100	0.020	0.014	0.042	0.063	0.003	0.006	0.035	0.020	0.056
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	пробел или пунктуация	
0.056	0.017	0.004	0.049	0.056	0.071	0.031	0.010	0.018	0.003	0.018	0.002	0.166	

* https://lektsii.net/1-74682.html

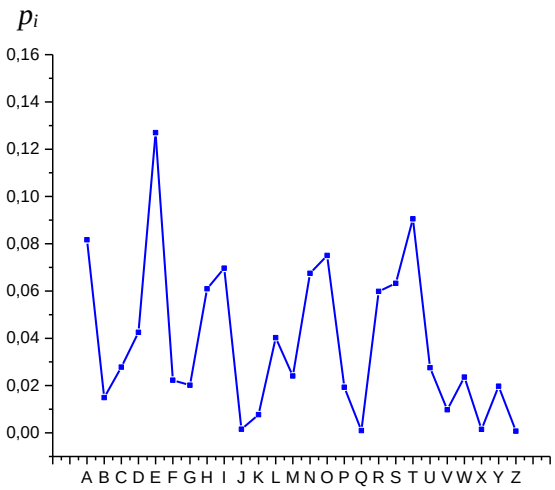


Рисунок 8.23. Частотности букв в письменном английском языке, $\sum p_i = 1$

Шенноновские определения энтропии (8.35) и дифференциальной энтропии (8.36) используются для расчета энтропии случайных величин, с которыми мы познакомились в разделе 8.2 (табл. 8.4). Для дискретных величин на отрезке [1, n] максимальную энтропию $S = \log_2 n$ имеет равномерное распределение $p(x) = 1/n$ (см. рис. 8.7 а).

В отличие от больцмановской энтропии, которая предполагает усреднение по огромному числу микросостояний, «удельную» энтропию Шеннона можно рассчитать для

любого – и даже небольшого, как буквы алфавита – набора «микросостояний» системы. Поэтому информационную энтропию используют в статистических моделях экономики, где число агентов (в популярной экономической литературе представляемое «миллионами») несравнимо меньше числа частиц в макроскопической системе – например, одной миллионной доли числа Авогадро ($6{\cdot}10^{17}$). В этих условиях шенноновская энтропия теряет смысл стабильной «диссипированной энергии», но сохраняет свое исходное содержание: наборы агентов стремятся к наиболее равномерному распределению по всем доступным микросостояниям при заданных ограничениях.

Таблица 8.5

Энтропия некоторых случайных величин*

распределение	вероятность (плотность вероятности)	энтропия
равномерное	$1/N$	$\log_2 N$
биномиальное	$C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$	$\frac{1}{2}\log_2[2\pi enp(1-p)] + O\left(\frac{1}{n}\right)$
Пуассона	$\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$	$\lambda(1-\ln\lambda) + e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k \ln(k!)}{k!}$
нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$
логнормальное	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\frac{1}{2}\ln(2\pi e\sigma^2) + a$
Коши	$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\gamma}{(x-a)^2+\gamma^2}$	$\ln(4\pi\gamma)$
Гиббса	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1-\ln\lambda$
Парето	$\alpha {x_0}^{k-1} x^{-k}$	$\ln\left(\frac{x_0}{k-1}\right) + \frac{k}{k-1}$

*см. https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_entropy

Энтропию, определяемую формулами (8.35) и (8.36), используют в выводе дискретных и, соответственно, непрерывных распределений интегральных параметров в экономических задачах[7]. В мультиагентных математических моделях (не обязательно экономических), где агенты могут занимать большой набор состояний, шенноновская энтропия системы, по предположению, достигает максимума (см. табл. 8.5). Искомое распределение можно найти, решая задачу нелинейного программирования: как максимум целевой функции – в данном случае энтропии – при связях, наложенных на параметры распределения: математическое ожидание, дисперсию и т.д. Эта схема, перенесенная из статистической физики, действительно воспроизводит статистику реальных параметров экономики (см. следующий раздел).

Литература к разделу 8.3

[5] О.Л. Королев, М.Ю. Куссый, А.В. Сигал, *Применение энтропии при моделировании процессов принятия решений в экономике*, Симферополь: «ОДЖАКЪ», 2013.

[6] А.М. Цирлин, *Оптимизационная термодинамика экономических систем*, М.: Научный мир, 2011.

[7] E. Scharfenacker, J. Yang, *Maximum entropy economics*, Eur. Phys. J. Special Topics 2020, 229, 1577.

8.4. Деньги и физика

Я буду смотреть, как вы работаете, а вы будете смотреть, как я ем.
Карел Чапек, «Разделение труда»

Одним из главных понятий экономической науки, если не важнейшим, безусловно являются *деньги*. «Всеобщий эквивалент» любых товаров, как посредник при их обмене (*средство обращения*, включая функцию *единицы счета*) и количественная мера богатства (*средство сохранения*), возник во всех человеческих цивилизациях. Это заставляет искать в денежных ценах общенаучный смысл – и первым кандидатом является энергетическое содержание стоимости товара как среднее значение, вокруг которого распределены конкретные цены (см. выше).

Над «энергетическим содержанием доллара» потешались многие именитые экономисты – возможно, не вполне усвоившие университетский курс физики. Тем не менее, словосочетание «энергия денег» в популярной экономической литературе используется не реже «температуры рынка», «энтропии отходов производства» и других физикалистских оборотов. За пределами относительно коротких периодов острого экономического кризиса функция денег действительно напоминают потенциальную энергию – это мера физической работы, которую способны совершить (или оплатить) располагающие ими индивидуумы и социальные системы. Нечеткость такой меры и расходы денег на множество целей, включая деструктивные, не отменяют аналогии, а лишь объединяют общественные системы с живыми организмами, где энергетический аспект не оспаривается («в бутерброде с колбасой содержится 150 килокалорий»). Другими словами, деньги выражают и «персонализируют» *энергию социума* – и в этом сочетании одинаково важны оба слова. Поэтому деньги – приблизительный энергетический эквивалент, ибо общество состоит из людей с разными возможностями, по-разному выполняющих одну и ту же работу за одинаковую оплату. Они многообразны и полифункциональны, поскольку имеют хождение внутри многообразных социальных систем с многими механизмами обмена между агентами. Сохранение, несохранение или уничтожение денег определяется динамикой их «социальных оболочек»; эти термины имеют смысл лишь для конкретных систем в определенных масштабах времени.

Выделение денег как всеобщего эквивалента ценности товаров при их обмене описано во всех учебниках экономики. Необходимость в таком эквиваленте исторически возникла по мере расширения производства с повышением количества и разнообразия его продуктов. По предположению Д.С. Чернавского (см. гл. 4), деньги породила объективная необходимость уменьшить объемы информации, требуемой при обмене возрастающего количества товаров – то есть понизить энтропию этого процесса[8]. Действительно, прямой бартерный обмен N товаров можно представить полным графом, каждое ребро которого соответствуют обмену в конкретной паре товаров (i, j), а денежный обмен – звездой с N вершин степени 1 (товары) и центральной вершиной степени N (деньги; рис. 8.24). Суммы состояний обмена W_B (бартер) и W_M (деньги) соответственно равны числу ребер полного графа и удвоенному числу ребер звезды (схема обмена «товар – деньги – товар»)

$$W_B = \frac{1}{2}N(N-1) \text{ и } W_M = 2N$$

Определяя энтропию стандартным образом как $S = k' \ln W$ (где масштабный множитель k' несуществен для вывода), в двух типах обмена получим

$$S_B = k'\,[\ln N + \ln(N-1) - \ln 2]\ \text{и}$$

$$S_M = k'\,(\ln N + \ln 2)$$

При очень большом числе товаров $\ln N \approx \ln (N–1) >> \ln 2$, поэтому

$$S_B/S_M \approx 2\ln N/\ln N = 2.$$

Таким образом, у экономики с денежными расчетами энтропия примерно вдвое ниже, чем у бартерной экономики. В данном случае феноменологическая энтропия, как «связанная энергия», наглядно отражает объем непроизводительных усилий при рутинных экономических операциях – в памятные 1990-е годы, оживившие бартер, многие столкнулись с этим явлением. Графы любых комбинированных схем обмена, очевидно, содержат больше ребер, чем звезда на рис. 8.24 б – т.е. денежный обмен является самым эффективным. Возникновение «всеобщих эквивалентов» товаров в разных, не связанных друг с другом человеческих цивилизациях в этом смысле имеет прочную физическую основу.

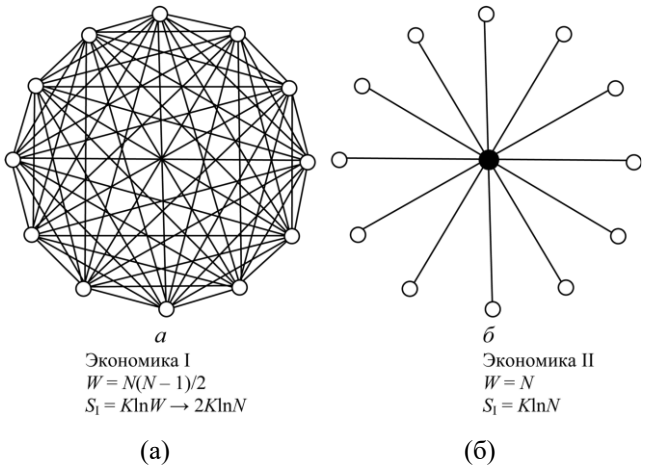


Рисунок 8.24. Состояния обмена товаров (ребра графа): (а) в бартерной экономике, (б) в экономике с деньгами

Тем не менее, прямая аналогия «деньги = энергия» слишком упрощает роль и многообразие как денег, так и других видов капитала в хозяйственной жизни. Постепенное снижение покупательной способности денежных единиц с параллельным увеличением *денежной массы*, или одновременный рост цен и заработной платы, то есть *инфляция,* не позволяет придавать денежным единицам определенное энергетическое содержание уже в пределах календарного года[*]. Неконтролируемые изменения цен, амортизация производства, флуктуации курсов валют и многие другие факторы в совокупности лишают «энергию денег» основного преимущества энергии в физике: *сохранения*. (В отличие от трения, рассеяния тепла и иных поддающихся оценке каналов диссипации энергии в

[*] Ситуацию не спасает приведение денежных единиц к средним ценам энергоносителей («нефтедоллар»): последние сами определяются на биржах, различны для разных сроков контракта, претерпевают циклические колебания и конъюнктурные флуктуации. Для сравнения состояния экономики страны в разные годы используют денежные единицы, приведенные к ценам определенного года (амер. *chain dollars*). Алгоритм такого пересчета устанавливается по соглашению.

«неживых» физических системах, покупательная способность денег и цены товаров могут непредсказуемо изменяться во времени).

С физической точки зрения корректнее называть деньги «сверхтекучим» переносчиком энергии в социуме, обеспечивающим ее передачу с минимумом потерь. Эта аналогия не представлена в эконофизической литературе, но в экономических дисциплинах, где деньги называют «кровью экономики», с ней согласуется термин *ликвидность* (от англ. *liquid*: жидкость) как легкость продажи или покупки некоторого объекта. В каждой национальной экономике деньги данной страны имеют максимальную ликвидность, относительно которой количественно выражаются ликвидности товаров и других объектов купли-продажи[*]. Таким образом, в бухгалтерской терминологии стихийно отражается материальное содержание финансовых процессов.

При всех оговорках деньги – главный численно измеряемый объект в экономике. Их количество сохраняется на коротких промежутках времени: в микроэкономике при установлении баланса спроса и предложения, в текущих бюджетах производителей товаров и домохозяйств, а также (но уже «как правило») в макроэкономическом годовом бюджете страны. Самым продуктивным можно считать фактически принятое в экономических науках определение денег как особой энергоподобной субстанции M (англ. money), для которой возможны измерения и количественные расчеты в специально оговариваемых условиях. Далее мы рассмотрим содержание этой переменной в разных экономико-физических моделях.

8.4.1. Кинетическая теория денег

В начале 2000-х гг. в работах Виктора Яковенко (США) и соавторов была предложена расчетная модель экономического обмена, в которой деньги рассматривались как прямой эквивалент энергии, включая сохранение их общего количества M внутри множества N экономических агентов. В отличие от «встречных» потоков товаров и денег в описании феноменологической энтропии экономических процессов (см.[6]), любым видам обмена между агентами отвечал переход некоторого количества «денег» $\Delta m_{ij} > 0$ в произвольно выбираемой паре $(i\ j)$ от i-го агента к j-му на заданном этапе дискретного времени:

$$m_i(n+1) = m_i(n) + \Delta m_{ij} \qquad (8.37)$$
$$m_j(n+1) = m_j(n) - \Delta m_{ij}$$

При компьютерном моделировании со случайными изменениями Δm_{ij} суммы «денег» у агентов изменялись. Их любое исходное распределение, в том числе равномерное (где все агенты имели одинаковые суммы m_0), переходило в равновесное распределение Больцмана-Гиббса (рис. 8.25)

[*] Коэффициент абсолютной ликвидности А/П предприятия равен отношению его активов – имеющихся в кассе денег и краткосрочных финансовых вложений, т.е. средств, отданных в долг – к текущим пассивам, или краткосрочным долговым обязательствам. Нормальное значение А/П > 0.2, вычисленное по бухгалтерскому балансу компании, означает ее возможность немедленно погасить не менее 20% своих краткосрочных долговых обязательств. Ликвидности товаров и рынков пропорциональны возможности продавать и покупать по ценам, близким к фактической стоимости актива. Объекты, не удовлетворяющие этому условию – например, незавершенное строительство – относятся к *неликвидам*.

(8.38) $$f(m) = \frac{1}{T} e^{-m/T},$$

где по условиям нормировки функции распределения

(8.39 а) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(m)dm = 1,$$

(8.39 б) $$\int_{-\infty}^{\infty} mf(m)dm = {}^{M}/_{N} = T$$

Роль температуры T в распределении (8.38) играет среднее количество «денег» в системе, приходящееся на одного агента. Математически эта модель эквивалентна распределению потенциальной энергии молекул газа во внешнем поле (см. разд. 2.3 главы 2). Виктор Яковенко назвал свою модель *кинетической теорией денег*, хотя в уравнениях (8.37) скорее фигурируют потери и приобретения агентами благосостояния (*капитала*) при сделках. Этим полемическим названием, отсылающим к широко известной книге М. Фридмана «Количественная теория денег», в два последних десятилетия обозначают работы физиков, посвященных описанию процессов в рыночной экономике средствами статистической физики.

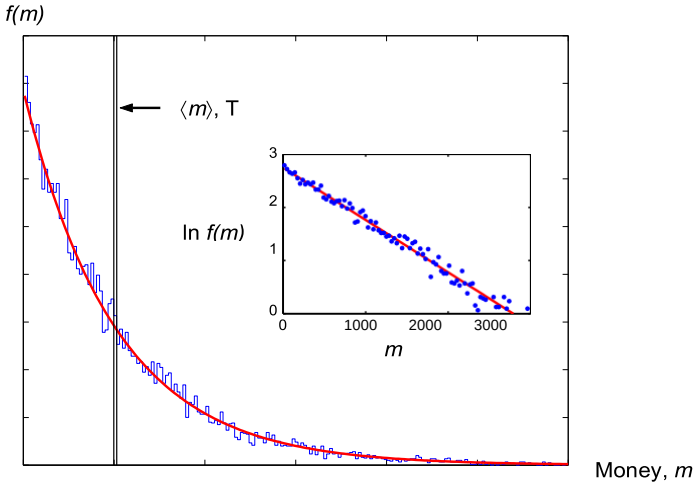


Рисунок 8.25. Стационарное распределение «денег» *m* по результатам компьютерного моделирования. Вертикальная полоса – исходное равномерное распределение (все $m_i = \langle m \rangle$). На врезке распределение в полулогарифмическом масштабе (A. Dragulesku, V.M. Yakovenko, Eur. Phys. J. B, 2000, 17, 723)

Эмпирическую основу цитируемых работ составили данные по благосостоянию населения США, Англии и других высокоразвитых стран, которые стали доступными через Интернет в конце 1990-х гг. Вместо нормального (гауссова) распределения, неоднократно постулированного в экономических моделях (см. разд. 8.3.2), эти данные соответствуют убывающему экспоненциальному распределению Больцмана-Гиббса (8.38) для 95% населения с обратной степенной зависимостью $f(m) \sim m^{-\gamma}$, где $\gamma \sim 1.5$–3.0, в его наиболее богатой части («хвост Парето», рис. 8.26). Богатство населения оценивалось по величинам подоходного налога и налога на имущество. В Российской Федерации, где таких сведений нет в общем доступе, более косвенные оценки распределения $f(m)$ по числу продаж новых автомобилей дали аналогичный результат (см. [10] в списке литературы).

Экспоненциальное распределение (8.38) и «хвост Парето» с формальной точки зрения легко получить из уравнения Фоккера-Планка (формула (4.22), гл. 4) в стационарных условиях

$$(8.40) \qquad {\partial f(r,t)}/{\partial t} = {\partial}/{\partial r}\,[A(r)f(r,t)] + {\partial^2}/{\partial r^2}\,[B(r)f(r,t)] = 0,$$

где r – аналогичная «деньгам» стохастическая переменная дохода (англ. revenue), непрерывно распределенного в системе между агентами. Аналоги фактора сноса $A(r)$ и фактора диффузии $B(r)$ уравнения (4.22) в (8.40) определяются через средние изменения переменной r за промежуток времени Δt:

$$A = -{\langle \Delta r \rangle}/{\Delta t}, \quad B = {\langle (\Delta r)^2 \rangle}/{2\Delta t}$$

Для низкооплачиваемых 95% населения, получающих фиксированный доход (зарплаты и пособия), сдвиг и дисперсия предположительно не зависят от r. $A = A_0$, $B = B_0$. В этом случае решение уравнения (8.40) совпадает с (8.38):

$$(8.41\text{ а}) \qquad f(r) \sim \frac{1}{T} e^{-r/T},$$

где $T = B_0/A_0$. Богатая часть населения может получать ренту со своего капитала или вкладывать его в бизнес; для нее $\Delta r \sim r$, то есть $A = ar$, $B = br^2$. Тогда уравнение (8.40) имеет решение

$$(8.41\text{ б}) \qquad f(r) \sim r^{-\gamma}, \text{ где } \gamma = \frac{a+b}{b}$$

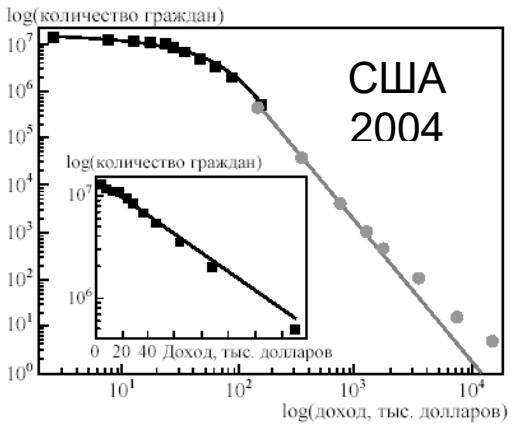
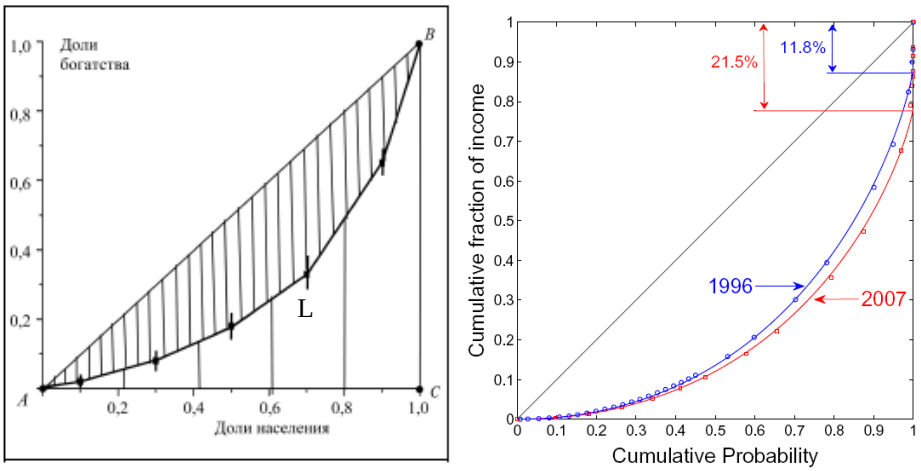


Рисунок 8.26. Распределение дохода по населению США в двойном логарифмическом, на врезке в полулогарифмическом масштабе. Сплошная линия – «больцмановские» 95% населения, серый цвет – богатейшие 5% («хвост Парето») [10]

В экономической литературе с начала XX века распределение благосостояние принято выражать *кривой Лоренца*: кумулятивным распределением годового дохода по долям населения страны (рис. 8.27 а). Идеально равномерному («уравнительному») распределению на рисунке соответствует гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC. «Степень неравенства» распределения выражает *коэффициент Джини G*: отношение площади заштрихованной фигуры ABL к площади треугольника ABC. Очевидно,

$0 < G < 1$; при уравнительном распределении G=0, а его увеличение отвечает возрастанию неравенства.

В первой половине XX века доходы оценивали выборочно по налоговым документам в равных долях населения – например, *квинтилей* (1/5) либо *децилей* (1/10). По объективным данным Яковенко и соавт. (рис. 8.27 б), коэффициент Джини в США G = 0.57–0.62 оказался значительно выше официальных оценок (0.40–0.45) и показал тенденцию к увеличению неравенства в XXI веке. Этим частично объясняется острая критика «кинетической теории денег» профессиональными экономистами, указавшими на отсутствие сохранения денег в макроэкономическом масштабе времени – хотя, как отмечено выше, «деньги» в кинетической теории скорее соответствуют более инерционному *благосостоянию*. Заметим, что, вопреки модели случайного обмена, «гауссовы» 95% населения в основном имеют фиксированные доходы (заработная плата) и расходы (покупки в магазинах), помещают деньги в банк под процент, сравнимый с инфляцией, и редко участвуют в торге со свободно устанавливаемой ценой. Альтернативной причиной наблюдаемых распределений благосостояния может быть структура экономических отношений: сложная масштабируемая сеть с безмасштабным ядром (гл. 6; также см. следующий раздел).



(а) (б)

Рисунок 8.27. (а) Стилизованная кривая Лоренца, (б) кривая Лоренца для США по данным Яковенко и соавторов (A. Banerjee, V.M. Yakovenko, *New J. Phys.*, 2010, 12, 075032)

Убывающее экспоненциальное распределение богатства экономических агентов одними из первых постулировали в 1970-е гг. Л.И. Розоноэр и А.В. Малишевский. В их работе, посвященной аналогиям экономики с термодинамикой, хозяйственная деятельность в СССР интерпретировалась как хаотический обмен ресурсами*. К настоящему времени установлено, что распределению Больцмана-Гиббса отвечает максимум энтропии при сохранении суммарного энергоподобного «благосостояния» экономической системы.

ЗАДАЧА 8.6. Выведите распределение (8.41 а) из дифференциального уравнения (8.40) при A_0,B_0 = const.

*А.В.Малишевский, Качественные модели в теории сложных систем, М.: Физматлит, 1998, с. 63.

Решение

В стационарных условиях $\partial f/\partial t=0$ при постоянстве A_0 и B_0 уравнение Фоккера-Планка (8.40) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению

$$A_0 \, {df}/{dr} + B_0 \, {d^2 f}/{\partial r^2} = 0$$

Обозначим $y = df/dr$ и перепишем уравнение в виде

$$A_0 y + B_0 \, {dy}/{dr} = 0, \text{ то есть } \quad {dy}/{dr} = -\alpha y,$$

где $\alpha = A_0/B_0$. Это уравнение Мальтуса (разд. 2.1 в гл. 2) с решением

$$y = C_1 e^{-\alpha r}, \text{ то есть } \quad df = -\frac{C_1}{\alpha} de^{-\alpha r}, \text{ поэтому}$$

$$f(r) = -\frac{C_1}{\alpha} e^{-\alpha r} + C_2$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определим из граничных условий

$f(\infty) = 0$, т.е. $C_2 = 0$
$f(0) = f_0$, поэтому $C_1 = -\alpha f_0$

(в реальных условиях область $0 < r \le r_0$ занимает фракция f_0 населения, живущего на пособие r_0). Полагая $T = B_0/A_0$, окончательно получим

$$f(r) = f_0 e^{-r/T}, \text{ где } r \ge r_0.$$

Метод неопределенных множителей Лагранжа и максимум энтропии

Максимумы и минимумы (*экстремумы*) непрерывно (для всех значений аргументов) дифференцируемой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при наложенных ограничениях

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ &\ldots \\ &\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{aligned} \tag{8.42}$$

находят методом *неопределенных множителей Лагранжа*[9]. Для этого по исследуемой функции и ограничениям на ее переменные составляют *функцию Лагранжа*

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [\, b_i - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)] \tag{8.43}$$

и приравнивают к нулю ее производные

$$\begin{aligned} &{dL}/{dx_i} = {df}/{dx_i} - \lambda_i \sum_{j=1}^{m} {d\varphi_j}/{dx_i} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \\ &{dL}/{d\lambda_1} = b_1 - \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ &\ldots \\ &{dL}/{d\lambda_m} = b_m - \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{8.44}$$

Нетрудно заметить, что последние m условий – это просто ограничения (8.42). Решение системы $n+m$ уравнений с $n+m$ неизвестными (8.43), если оно есть, дает значения

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*),$$

которые и соответствует экстремуму $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ функции при наложенных ограничениях.

Пусть уравнением $z = x^2 + y^2$ задан параболоид вращения с точкой минимума (0, 0). Условию $y = x + 2$ соответствует плоскость, параллельная оси Oz и пересекающая поверхность параболоида по параболе с вершиной в точке (x^*, y^*) (рис. 8.28). Чтобы определить координаты этой точки, составим функцию Лагранжа с учетом ограничения на переменные x и y

$$z = x^2 + y^2$$
$$x - y + 2 = 0$$
$$L = x^2 + y^2 + \lambda(x - y + 2)$$

и запишем ее производные

$$\partial L/\partial x = 2x + \lambda = 0$$
$$\partial L/\partial y = 2y - \lambda = 0 \qquad (8.45)$$
$$\partial L/\partial \lambda = x - y + 2 = 0$$

Система уравнений (8.45) имеет решение

$$x = -\frac{\lambda}{2},\ y = \frac{\lambda}{2},\ -\lambda = -2\ (\text{т. е. } \lambda = 2),$$

отсюда $x^* = -1$, $y^* = 1$, $z(-1, 1) = 2$. Так как $\partial^2 L/\partial x^2 = 2 > 0$, $\partial^2 L/\partial y^2 = 2 > 0$ и $\partial^2 L/\partial x \partial y = 0$ (см. разд. 2.2.2 в главе 2), это действительно точка минимума сечения: вершина параболы.

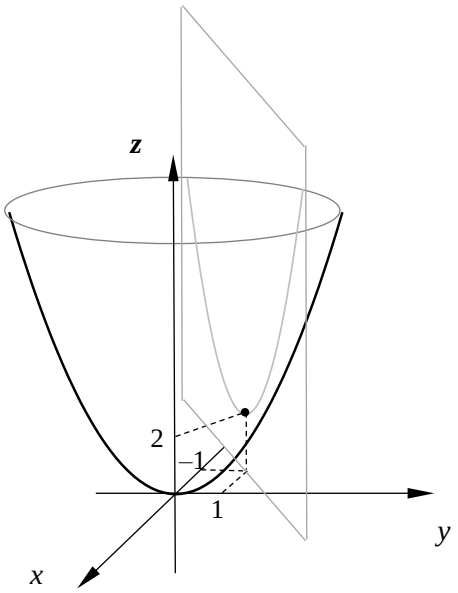


Рисунок 8.28. Условный экстремум: сечение параболоида вращения плоскостью $y = x+2$

Метод Лагранжа позволяет найти распределения случайной величины, отвечающие максимуму энтропии при наложенных ограничениях. Для дискретной величины X следует определить условный максимум информационной энтропии (8.35), где варьируемыми переменными служат вероятности $\{p_i\}$. Так, если $X \in [a, b]$ и других условий нет, при единственном ограничении на вероятности

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \text{ (условие нормировки)}$$

построим функцию Лагранжа

$$L = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} p_i - 1\right)$$

(Мы используем натуральный логарифм и, соответственно, выражаем энтропию H в *натах*). Дифференцирование L по N независимым переменным $\{p_i\}$ дает N одинаковых уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = -\ln p_i - \left(\frac{1}{p_i}\right) p_i + \lambda = 0, \quad \text{или}$$
$$-\ln p_1 = \lambda - 1$$
$$-\ln p_2 = \lambda - 1$$
$$\dots$$
$$-\ln p_N = \lambda - 1$$

Таким образом, при отсутствии условий на значения дискретной случайной величины $X \in [a, b]$ она будет распределена равномерно с вероятностями

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_N = \frac{1}{N},$$

$\lambda = \ln N + 1$ и «удельной» энтропией

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \ln \frac{1}{N} = \ln N$$

Распределение непрерывной случайной величины отвечает максимуму дифференциальной энтропии (8.36). В результате наложения дополнительных ограничений получаются разные распределения: при заданном среднем (математическом ожидании) обратное экспоненциальное распределение Гаусса, при заданных матожидании и дисперсии нормальное распределение, и др. (Табл. 8.6).

Можно видеть, что «сохранение денег» (8.39 б) вместе с условием нормировки (8.39 а) эквивалентны заданному матожиданию $1/\lambda$, при котором максимуму энтропии отвечает распределение Гиббса $\lambda e^{-\lambda x}$ (см. табл. 8.3). Таким образом, называть деньгами распределенную «субстанцию» в модели Яковенко, как и детализировать механизм ее обмена между агентами, необязательно – вид распределений следует из условий на их средние параметры. Тем не менее, распределенная величина должна сохраняться в некотором масштабе времени – и для суммарного благосостояния населения страны в течение года при отсутствии кризисов это разумное допущение.

Таблица 8.6*

условия на случайную величину X	распределение с максимальной энтропией
$X \in [a, b]$	равномерное на отрезке $[a, b]$
$X \in \{0, 1\}$	распределение Бернулли
$X \in [0, \infty)$ + среднее	экспоненциальное, для дискретной величины — геометрическое
$X \in [x_m, \infty)$ + среднее геометрическое**	распределение Парето (степенное)
$X \in [0, \infty)$ + среднее + среднее геометрическое	гамма-распределение***
$X \in [0, \infty)$ + среднее геометрическое + дисперсия для среднего геометрического	лог-нормальное
$X \in (-\infty, \infty)$+ среднее + дисперсия	нормальное

* см. С. Самойленко, *Теория счастья. Термодинамика классового неравенства* (14.10.2018) https://habr.com/ru/post/424071/

** Среднее геометрическое двух величин $G = \sqrt{a_1 a_2}$, n величин $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$, непрерывной положительной функции $f(x) > 0$: $G = \exp\left(\frac{1}{L}\int_0^L \ln f(x)dx\right)$.

*** Гамма-функция: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, где в общем случае z – комплексное число с $\mathrm{Re}\, z > 0$

8.4.2. Монетаристские теории

Одним из парадоксов «магистральной» экономической науки является отсутствие общепринятого определения денег. Вероятно, так проявились логические дефекты неоклассической теории, которая абстрагируется от производства, предполагает нулевую энтропию равновесных цен на идеальном рынке и не требует прямого участия денег в установлении этого равновесия[10]. Закону Вальраса (8.1), утверждавшему суммарное равенство спроса и предложения товаров в денежном выражении на идеальном рынке, предшествовал *закон Сэя** (1803 г.), согласно которому при полной занятости (т.е. в бескризисной экономике) спрос на товары порождается их предложением и полностью его поглощает. В этом случае деньги капиталиста служат лишь средством временного хранения произведенного богатства в схеме обмена «товар – деньги – товар». Как в классической, так и неоклассической теориях роль государства сводилась к поощрению производства товаров при минимальном вмешательстве в экономические процессы: принцип *laissez faire,* т.е. «позвольте делать» (франц.), или *свобода предпринимательства*.

С возникновением *количественной теории денег* (И. Фишер, А. Маршалл и др.) в конце XIX – начале XX в.в. были предложены первые уравнения состояния экономики, по форме напоминающие газовые законы, в которых фигурируют общее количество денег и (или) «спрос» на них:

(8.46 а) $M_D = kPY$ *кембриджское уравнение,*

где M_D – суммарная потребность в деньгах (спрос), Y – реальный национальный доход либо объем произведенной продукции, P – «средняя» цена товаров. Коэффициент

* Жан Батист Сэй (1767–1832) – французский экономист, один из основоположников классической экономической теории.

пропорциональности $0 < k < 1$ соответствует доле денежной массы, которую экономические агенты хранят в форме наличных денег. В аналогичной формуле

(8.46 б) $M_S V \approx PY$ *уравнение Фишера*

$V = 1/k$ – скорость обращения денег, M_S – количество денег в экономике (*предложение*).

В макроэкономических соотношениях (8.46 а, б) деньги впервые появились в качестве особого товара с собственными предложением M_S и спросом M_D. При точном равенстве цены стабильны, при $M_S V < PY$ снижаются, в случае $M_S V > PY$ цены растут. В этой модели деньги в первую очередь служат средством обращения и *нейтральны*: изменение их количества в обращении приводит к эквивалентному изменению цен.

Точку равновесия спроса и предложения денег, или *«крест Хикса»,* в соответствии с кейнсианской теорией, определяет модель *IS-LM* как пересечение кривых «предложения» (наличия) денег в динамических системах инвестиций и сбережений (investment – savings, *IS*) и спроса на них (liquidity preference – money supply, *LM*; рис. 8.29). Обе кривые в агрегированной форме отражают зависимость денежной массы от национального дохода Y и «бюджетной политики» в форме ставки банковского процента r (revenue). Понижение ставки ($r_1 \to r_2$) уменьшает привлекательность сбережений (savings) в пользу инвестиций (investment) и увеличивает предложение денег, что сдвигает кривую спроса *LM* в сторону роста национального дохода ($Y_1 \to Y_2$) (см. главы 9 и 10 в [5]).

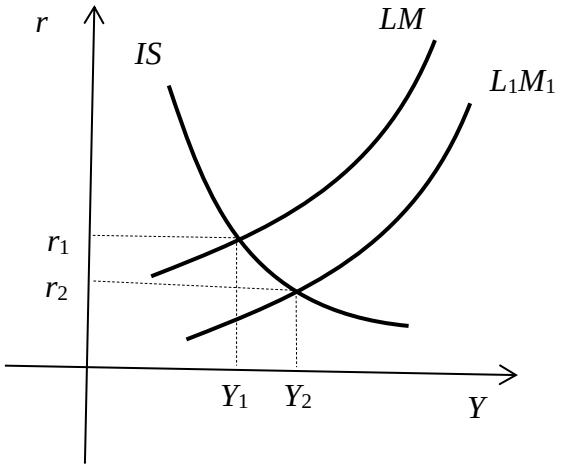


Рисунок 8.29. Крест Хикса и сдвиг равновесия спроса (*LM*) и предложения денег (*IS*)

Аналогию формул (8.46 а, б) с газовыми законами (см. раздел 1.2.2 главы 1) нельзя считать полной. Уравнение состояния 1 моля идеального газа $PV = RT$ (где $R = 8.31$ Дж/град – газовая постоянная) – одна из форм закона сохранения энергии: его левая часть отвечает механической энергии, а правая – тепловой. Однако в общественных науках, включая экономику, энергоподобные параметры можно считать постоянными лишь в определенный, обычно небольшой промежуток времени. Прежде всего это касается денег. Предоставление денег в долг (банковский вклад) уменьшает их сумму, находящуюся в распоряжении экономического агента – поэтому требует денежной компенсации. Деятельность банков даже с небольшой положительной процентной ставкой означает

увеличение общего количества денег (снимаемых вкладчиками по мере надобности) при неизменном производстве товаров. На макроэкономическом уровне это эквивалентно постепенному снижению покупательной способности денежных единиц в результате параллельного роста цен и количества денег у населения – то есть *инфляции*.

Инфляция как экономическое явление, универсальное для всех стран, не имеет прямого аналога в физике. Ее основой служит стремление агентов получать прибыль в каждой сделке, устанавливая цены продаваемых товаров и услуг выше собственных затрат. Это приводит к асимметричным распределениям реальных цен каждого товара, включая рабочую силу, относительно его стоимости: рациональные агенты не заключают сделки себе в убыток (рис. 8.30). Вследствие такой асимметрии денежные суммы, получаемые на всех звеньях цепочки от производства до конечного потребления, превышают созданную стоимость и компенсируются эмиссией недостающей части денег с последующим ростом цен ($MV > PY$ в уравнении 8.46 б). В результате инфляции относительная покупательная способность денежных единиц с течением времени уменьшается (таблица 8.7)

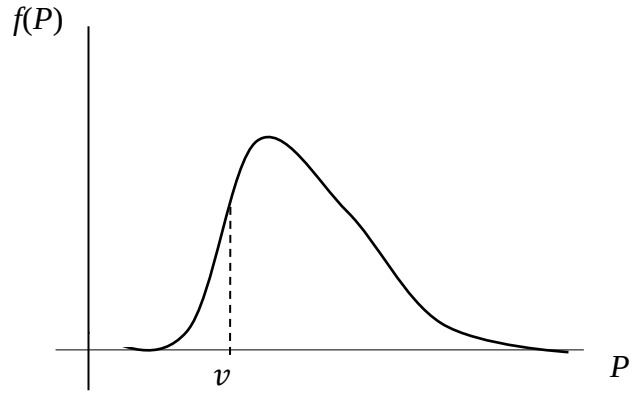


Рисунок 8.30. Асимметрия распределения цены товара *P* относительно его стоимости v (схема)

Таблица 8.7

Относительная покупательная способность (ПС) доллара США с 1913 г. *

год	ПС, %	год	ПС, %	год	ПС, %
1913	100	1995	6.43	2010	4.48
1918	64.90	2000	5.67	2011	4.33
1923	56.98	2001	5.51	2012	4.27
1928	57.31	2002	5.43	2013	4.19
1930	59.04	2003	5.32	2014	4.10
1933	74.81	2004	5.16	2015	4.10
1940	70.00	2005	5.00	2016	4.06
1950	40.66	2006	4.80	2017	3.99
1960	33.11	2007	4.69	2018	3.88
1970	25.13	2008	4.44	2019	3.81
1980	11.85	2009	4.54	2020	3.77
1990	7.52				

* Калькулятор инфляции в США:
https://www.statbureau.org/ru/united-states/inflation-calculators?dateBack=1913-7-1&dateTo=2019-7-1&amount=1000

Связь инфляции с банковским процентом отражает другая *формула Фишера*:

(8.47) $$r = \rho + i_e,$$

где r – *номинальная* процентная ставка (от англ. revenue), ρ – *реальная* процентная ставка, i_e – ожидаемый уровень инфляции $i = dp/dt$. Так, при номинальной годовой процентной ставке на сберегательном счете 5% и инфляции 4% реальный доход от вклада составляет 1% в год. Уравнениям (8.46 а, б), заново приводимым здесь в форме

(8.46 в) $$MV = PT,$$

где P – *уровень цен*, а T – суммарный объем сделок, соответствует модель «растущего» идеального газа. В ее рамках денежная масса M и число сделок T являются экстенсивными переменными с дополнительным условием $dM/dt > 0$ в макроэкономическом масштабе времени. Сопряженные им интенсивные переменные (скорость обращения денег V и уровень цен P с дополнительным условием $dP/dt > 0$) удовлетворяют уравнению (8.46 в) тоже лишь в своих текущих значениях, которым отвечает равновесие спроса и предложения в «быстром» микроэкономическом времени. Осложняющим фактором служат случайный характер процессов на микроуровне и небольшое число агентов (тысячи), отчего не только «мгновенные», но и усредненные данные подвержены большим флуктуациям.

После экономических кризисов межвоенного периода в XX веке деньги и процент по банковским вкладам стали объектами макроэкономического регулирования, нацеленного на устойчивый рост производства и низкую безработицу. В *теории Кейнса* состояние экономики определяется равновесием на четырех взаимосвязанных агрегированных рынках: товаров, денег, ценных бумаг и рабочей силы. Помимо средства обращения, деньги признаются средствами сбережений (в терминах Маркса *образования сокровищ*) и спекуляций; спрос на них пропорционален доходу. При экономическом спаде простое увеличение количества денег, по аналогии со «связанной энергией» в термодинамике, увеличивает объемы сбережений домохозяйств и разгоняет инфляцию, не совершая полезной работы – т.е. не стимулируя спрос на товары. В рамках кейнсианской экономики задачей государства является повышение совокупного спроса за счет координированного увеличения денежной массы, снижения доходности банковских вкладов (что стимулирует переток капиталов в производство, см. выше) и создания новых рабочих мест на государственных предприятиях.

Между 1970-ми годами и мировым финансово-экономическим кризисом 2008-2010 гг. *кейнсианство*, как практическое направление макроэкономики, в высокоразвитых капиталистических странах было вытеснено *монетаризмом*, ограничивающим действие государства контролем денежной массы и регулированием (*таргетированием*) инфляции. Тем не менее, сокращение государственных программ и приватизация ряда отраслей госсектора в этих странах в указанный период сопровождались выплатами пособий по безработице, по размеру сравнимых с заработной платой. Монетаристские средства стабилизации экономики, не поддержанные такими мерами, в 1990-е гг. привели к обнищанию населения в ряде государств, включая РФ.

Рост государственных расходов вызывает бюджетный дефицит, а его компенсация за счет денежной эмиссии – инфляцию национальной валюты (см. табл. 8.7). Связь инфляции

с безработицей показывает эмпирическая *кривая Филлипса* (рис. 8.31): с повышением занятости трудоспособного населения объем денег в экономике предположительно увеличивается без соответственного увеличения количества товаров. Со 2-й половины XX века такие процессы происходили во всех ведущих капиталистических экономиках. В настоящее время (2023 г.) в высокоразвитых странах оптимальными считается годовой уровень инфляции до 5-6% при уровне безработицы 4-5%.

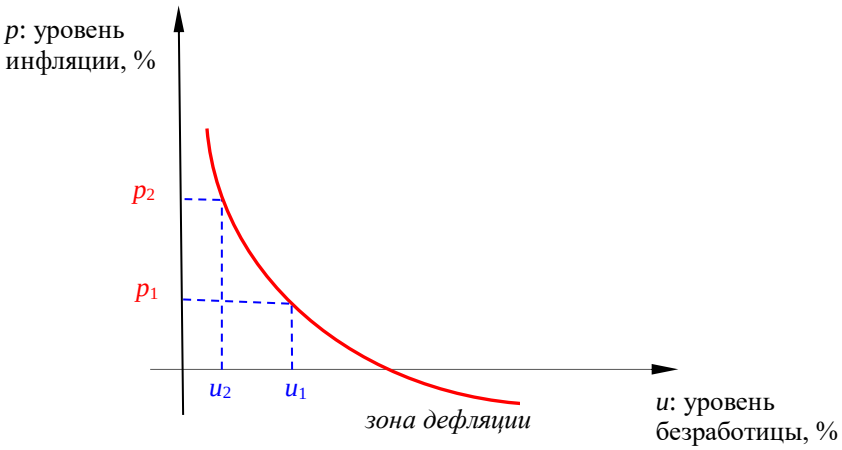


Рисунок 8.31. Кривая Филлипса

Денежные агрегаты

В противоположность основным принципам физики «неживых» систем, общим свойством денег как экономической категории является их подвижность и несохранение общего количества в макроэкономическом масштабе времени (несколько лет). Количество денег в экономике государства (*денежная масса*) включает как наличные средства в обращении и деньги на вкладах (депозитах) в банках, так и ценные бумаги, способные выполнять функции денег. Документы, фиксирующие долг экономического агента либо государства (долговые расписки, облигации, акции) сами становятся предметом купли-продажи – и, соответственно, средствами расчета и накопления.

В современной классификации денежная масса подразделяется на четыре агрегата, компоненты которых различаются степенью ликвидности, т.е. объемом усилий, требуемым для их перевода в наличные деньги. Эти агрегаты (рис. 8.32) образуют иерархическую систему:

(8.48)

M0 – наличные деньги в обращении за вычетом сумм в кассах банков,
M1 – агрегат M0 + чеки и вклады (депозиты) до востребования + остатки на расчетных счетах организаций – резидентов национальной экономики,
M2 – агрегат M1 + срочные вклады (т.е. возвращаемые банком с процентами лишь в определенный срок) и краткосрочные ценные бумаги государства,
M3 – агрегат M2 + акции, кредитные обязательства и долгосрочные займы.

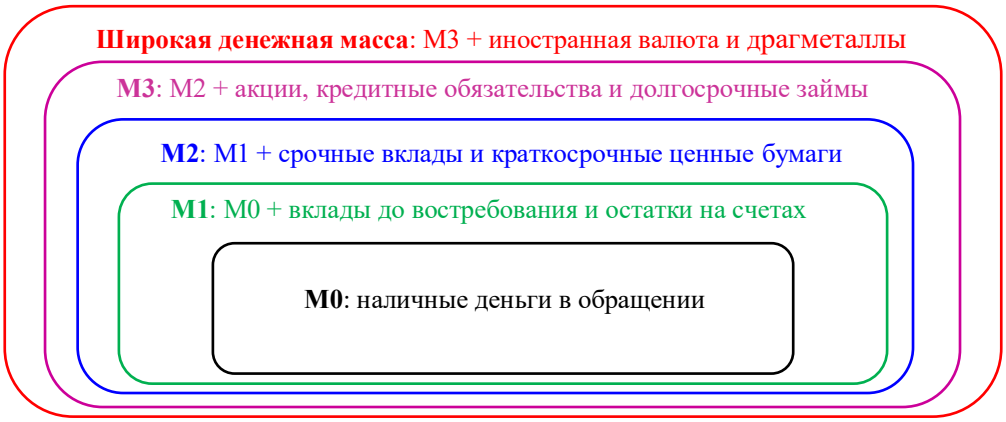


Рисунок 8.32. Агрегаты в структуре денежной массы

Все агрегаты M0 – M3 выражаются в единицах национальной валюты. Добавление к M3 ценных бумаг и вкладов в иностранной валюте и драгоценных металлах преобразует ее в *широкую денежную массу*. В разных странах определения агрегатов могут различаться, однако M0 всегда обозначает наиболее ликвидные наличные деньги, а основу M1 составляют безналичные деньги на вкладах, получаемые по первому требованию. К этому агрегату по определению относятся еще более ликвидные безналичные *электронные деньги*, которыми в настоящее время вытесняются торговые операции за наличный расчет.

Иерархическая «матрешка» (8.48) из вложенных друг в друга агрегатов с точки зрения естественных наук выглядит причудливо – но она отражает сложившуюся в мире систему учета финансов. На начало 2022 г. российский денежный агрегат M0 составлял 13 трлн. руб, или 15.5% от широкой денежной массы (84 трлн. руб.), агрегат M1 35.9 трлн. руб. (42.7%), M2 65.3 трлн. руб. (77.8%). Отношение агрегата M2 к валовому внутреннему продукту (ВВП, также в денежном выражении) называется *коэффициентом монетизации*. Его величина в РФ в последнее десятилетие увеличивалась и в 2021 г. достигла 50% – ниже этого порога возникает недостаток денег в экономике. В крупнейших экономиках мира коэффициент монетизации составляет от 93% (США) до 224% (КНР) и 291% (Япония) (см. [10]).

Отношение M2/M0 денежной массы к *денежной базе* называется *денежным* или *банковским мультипликатором*. Эта величина характеризует умножение количества денег в обороте за счет кредитных операций. Ее максимально возможное значение равно 1/R, где R – *норма резервирования*: установленная государством доля средств, которую банки обязаны хранить в наличных деньгах либо иметь соответствующий депозит в Центральном банке. Устойчивость банковской системы обеспечивает норма R в 5–6 %; предельное значение M2/M0=1/R обычно не достигается. Так, в российской экономике 2021 г. (см. выше) отношение M2/M0 составляло 5.0. Денежный мультипликатор увеличивает объем средств в распоряжении экономических агентов: он возрастает в периоды экономического подъема и снижается во время рецессии (см. [6] в списке литературы). Расчеты динамики средств на депозитах и *потоков платежей* при разных видах процентной ставки и уровнях инфляции составляют предмет *финансовой математики* (см.[11]).

Современная монетаристская теория

В отличие от объективных физических закономерностей, даже самые успешные экономические теории носят временный характер: они теряют объективное содержание через несколько десятилетий. В основе этого лежит динамическая природа макросистемы «человечество на Земле»: рост населения, технический прогресс и распределенный интеллект социума (см. 3-ю часть книги). Отражение макроэкономических параметров (таких, как *ожидаемый* уровень инфляции) в сознании людей создает положительную обратную связь, постепенно модифицируя поведение экономических агентов. Появление новых товаров изменяет предпочтения покупателей, делая долгосрочное планирование невозможным. Кроме того, современная автоматизация («роботизация») производства снижает долю населения, создающего материальные ценности, а развитие компьютерных технологий облегчает управление экономикой и обществом. В результате действия этих факторов современная экономическая наука располагает большим числом математических моделей и эффективными средствами «локального» регулирования – однако, не имея общей теории, не предсказала наступление мировых кризисов в 2008 и 2020 годах.

Благодаря улучшению мониторинга экономической деятельности и прогрессу в прогнозировании и управлении, со 2-й половины XX века инфляция стала частью нормальной хозяйственной жизни, а допустимый размер бюджетного дефицита радикально увеличился. С начала XXI века в экономической науке распространяется *современная монетаристская теория* (*Modern Monetary Theory, MMT*), предлагающая еще больше возможностей – в частности, по увеличению денежной массы[*] – для финансовых регуляторов экономики.

Основу MMT составляет идея *секторального баланса*, или нулевой суммы дефицитов внутреннего частного, государственного и внешнего (мирового) секторов экономики

$$S - I = (G - T) + (I - E), \tag{8.49}$$

где S – накопления (savings) и I – расходы (investments) частного сектора, $G–T$ – бюджетный дефицит, или разность сумм государственных расходов G (governmental spending) и собранных налогов T (taxes), а $I–E$ – дефицит внешнеторгового баланса: разность импорта (I) и экспорта (E), см. формулу (8.5) в начале главы. По (8.49), чистые сбережения частного сектора (левая часть уравнения) равны сумме финансовых дефицитов государственного и внешнего секторов. В соответствии с этой идеей, при сбалансированной внешней торговле накопления частного сектора увеличиваются с ростом дефицита бюджета, а превышение бюджетных доходов над расходами (профицит), наоборот, способствует накоплению задолженностей частного сектора, что угрожает финансовым кризисом[12].

Финансово суверенные страны, выпускающие собственную валюту и осуществляющие в ней расчеты, в идеологии MMT могут покрывать дефицит почти неограниченной эмиссией денег, которые исполняют прежде всего балансовую (учетную) функцию как «обобщенные долговые расписки». Такие идеи частично согласуются с результатами

[*] В настоящее время приемлемым считается уровень инфляции до 10% в год (*ползучая инфляция*). Уровень до 100-200% (*галопирующая инфляция*) осложняет функционирование экономики, а *гиперинфляция* (свыше 200%) угрожает существованию хозяйственной системы страны (см[10]).

антикризисных мер в США и ряде других стран, которые нарастили денежную массу в 2008-2012 и 2020-2021 гг. без существенного повышения инфляции. Надо заметить, что долговременные последствия этих мер пока неизвестны – и к ним может относиться стагнация западных экономик в период 2012-2018 гг. (см. следующие разделы). Так или иначе, с 1998 г. потребительскую инфляцию в США рассчитывают не в рамках традиционного подхода по ценам условной корзины товаров, а по агрегированным параметрам, снижающим этот показатель в 2 - 2.5 раза (рис. 8.33).

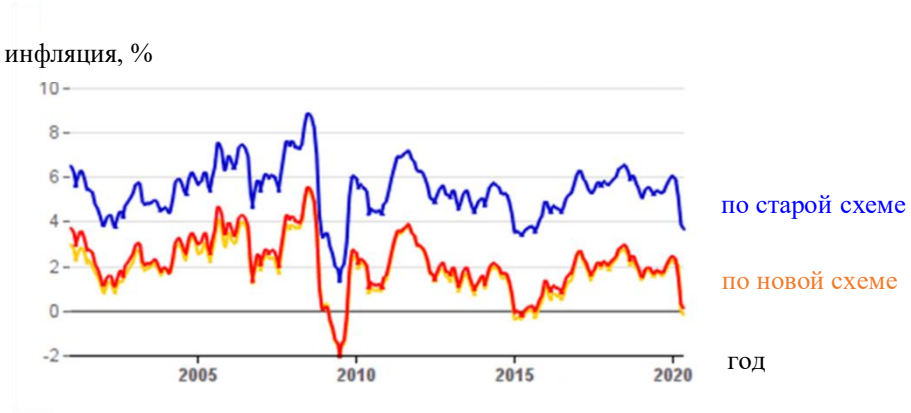


Рисунок 8.33. Инфляция доллара США, рассчитанная по схемам, принятым до и после 1998 г. (L. Roberts, *The theory of MMT falls flat when faced with reality (Part I)*, 29.06.2020, https://realinvestmentadvice.com/the-theory-of-mmt-falls-flat-when-faced-with-reality-part-i/)

Криптовалюты

Криптовалютами называются цифровые электронные платежные средства, эмитируемые анонимными центрами без участия банков и государственных структур («частные деньги»). Мониторинг эмиссии и переводов (транзакций) таких средств осуществляется на основе методов криптографии, прежде всего *блокчейна* (англ. block chain): связной шифрованной цепи из последовательных блоков со списками транзакций. В каждом блоке цепи записан код содержащейся в нем информации (*хэш-сумма*) и аналогичный код предыдущего блока: отсюда термин «криптовалюта». Копии цепочек блоков хранятся на всех компьютерах, включенных в систему, в виде реплицированной распределенной базы данных, обеспечивая защиту информации от внешних изменений.

Техника блокчейна используется для защиты информации в широком спектре задач кибербезопасности в финансах, банках и государственных структурах. Однако впервые блокчейн появился в 2008 г. именно как средство кодировки первой криптовалюты *биткойна*, позволившее исключить из гарантов его безопасности официальные органы: государства и банки. Таким образом, криптовалюты возникли в противовес системе *электронных денег* (см. выше), полностью контролируемых эмитентом. Этим объясняется как популярность «частных денег», возвращающих владельцам анонимность и средневековую автономию, так и их повсеместное использование в криминальной сфере деятельности.

Эмиссия биткойна, или его «добыча» (англ. mining), осуществляется анонимно и децентрализованно как плата за создание новых кодированных блоков, пригодных к заполнению информацией, в системе блокчейна. Выработка кодов случайным перебором для получения гарантированного дохода требует крупных вычислительных мощностей и

большого расхода электроэнергии. Другие виды криптовалют также выпускаются в виде вознаграждения организациям и частным лицам за решение объемных математических задач кодировки и оптимизации по заказу анонимных центров, скрытых распределенной структурой кибербезопасности.

Рисунок 8.34. Обменный курс биткойна к доллару США. Выделен период 1.02 – 31.03.2020 (St. Louis Federal Reserve Bank, https://fred.stlouisfed.org/series/CBBTCUSD)

По плану, обнародованном в 2008 г. (под псевдонимом Сатоси Накамото) разработчиками первого программного обеспечения биткойна, его эмиссия будет ограничена 21 млрд. виртуальных «монет»; к 2022 г. в обороте находятся 18 млрд. биткойнов. Этим объясняется как высокие обменные курсы биткойна и других криптовалют, так и их экстремальная волатильность (рис. 8.34). В отличие от официальных денежных средств, криптовалюты обеспечены только спросом пользователей, что придает их рынку сходство с биржевыми пузырями и финансовыми пирамидами (см. далее раздел 8.6.4).

К времени завершения нашей книги (2023 г.) мировой оборот криптовалют, уменьшившийся за 2022 г. на 17.5%, составлял около 1.1 трлн. долл. США, или более 1% общемирового ВВП. Наиболее популярными к началу 2022 г. являлись биткойн (46% мирового рынка криптовалют), *эфир* (Ethereum, 18.5%), *тезер* (Tether, или *стейблкойн*, номинально привязанный к курсу доллара США: 1 USDT ≈ 1$, 7.6%), BNB (3.6%) и USD Coin, также привязанный к доллару США (2.6%). Эти денежные единицы используются в расчетах, системах безналичных платежей и на специализированных биржах. Правовое состояние криптовалют сильно различается в разных странах мира от включения в официальную денежную систему наравне с ценными бумагами до ограничений и запрета на операции. Система криптовалют в ее современном виде отражает постепенную криминализацию финансовой деятельности, которая негативно влияет на состояние мировой экономики.

Литература к разделу 8.4

[8] Д.С. Чернавский, *Синергетика и информация. Динамическая теория информации*, 3-е изд.,М.: Либроком, 2009. Нашей теме соответствует глава 8 «Информационная сущность денег».

[9] В.И. Бахтин, И.А. Иванишко, А.В. Лебедев, О.И. Пиндрик, *Метод множителей Лагранжа*, Минск, БГУ, 2012.

[10] Н.Н. Мокеева, А.Е. Заборовская, В.Э. Фрайс, *Деньги и платежно-кредитная система: учебное пособие*, Екатеринбург, Уральский университет, 2019.
[11] В.И. Ширяев, *Финансовая математика: потоки платежей, производные финансовые инструменты*, 2-е изд., М.: Либроком, 2009.
[12] В. Грищенко, В. Остапенко, В. Ткачев, В. Тунёв, *Современная денежная теория (MMT): новая парадигма или набор рекомендаций для макроэкономической политики?* Экономическая политика 2021, **16**, № 3, 8.

8.5. Сетевые структуры экономики

В популярной литературе *сетевой* (либо *цифровой*) *экономикой* называют современный тип общественного производства с высоким удельным весом информационных технологий (таких, как Интернет и иные глобальные цифровые платформы), распределенными горизонтальными связями экономических агентов, новыми компьютерными средствами координации их деятельности и взаимных расчетов. Становление новых, в том числе децентрализованных экономических взаимоотношений сопровождается развитием сетевых структур в обычном смысле этого термина (глава 6), где узлам отвечают экономические агенты от индивидуумов до национальных экономик, а ребрам и дугам – отношения между агентами. Анализ таких сетевых структур с высокой долей публикаций в физических журналах – одно из основных приложений междисциплинарной физики в экономических науках.

К главным типам сетей экономики в настоящее время относятся[13]

1. Сети корпоративного управления, где узлы обозначают менеджеров высшего звена (членов совета директоров), а ребра – их совместное участие в управлении фирмами. (Это один из старейших видов сетей, впервые построенных и анализированных в конце XX в., см. табл. 6.5 в главе 6),
2. Сети предприятий, в которых дуги соответствуют производственным и коммерческим связям,
3. Банковские сети, где узлам отвечают банки, а ребрам или дугам – их иерархические и деловые отношения (например, кредитование),
4. Финансовые, или инвестиционные, сети, где дуги отвечают участию агента (фирмы, банка, корпорации) в капитале других фирм,
5. Товарные сети, где узлы могут обозначать как индивидуальных, так и корпоративных агентов, а ребрам отвечает совместное производство либо совместное приобретение определенных товаров,
6. Сети торговли, объединяющие организационные единицы вплоть до государств

– и другие сетевые структуры. Вместе с рассмотренными в предыдущих главах транспортными сетями, логистическими и организационными схемами этот перечень иллюстрирует разнообразие и сложность современных экономических взаимоотношений. В XX веке таким взаимодействиям в основном соответствовали иерархические конструкции; в настоящее время они приобретают вид гетерогенных сложных сетей. Топологические характеристики сетей из взаимосвязанных агентов широко используются в описании как экономических, так и иных социальных явлений.

Принципиальным вопросом в изучении динамики сетей является разделение влияния параметров узлов и структуры (топологии) их связей на протекающие процессы. Одним из популярных направлений в последние десятилетия здесь остаются исследования зависимости распределения благосостояния в системе взаимодействующих агентов от ее сетевой структуры. Эмпирически установленные обратно-экспоненциальные (гиббсовы) либо логнормальные распределения для доходов большинства (условно 95%) населения стран, городов и других административных единиц, с обратно-степенным «хвостом Парето» для богатейших 5% (разд. 8.4.1) на качественном уровне согласуются с аналогичным видом распределений степени узлов в сложных сетях реального мира (см. главу 6). В серии работ подобные распределения воспроизводились для сетевых структур в рамках моделей ко-эволюции с учетом взаимного влияния «богатства» узлов системы и связей между ними[*].

Корреляция степени связанных узлов в динамических сетях с их «энерговооруженностью» (богатством) из самых общих соображений должна существовать. Но перераспределение богатства, направляемое связностью узлов, возможно и на сетях фиксированной структуры. В простейшей модели такого обмена каждая из M вершин графа на одном такте дискретного времени передает одну единицу благосостояния случайно выбранной соседней вершине. В этом случае математическое ожидание изменения благосостояния i-го узла

$$\Delta w_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{k_j} - 1 \,, \tag{8.50}$$

где суммируются все ожидаемые вклады соседних узлов со степенями $\{k_j\}$, связанных с i- м. Если у всех окружающих узлов $k_j < k_i$, при добавлении извне 1 единицы w всем вершинам *жесткой* сети с фиксированной структурой на каждом такте дискретного времени

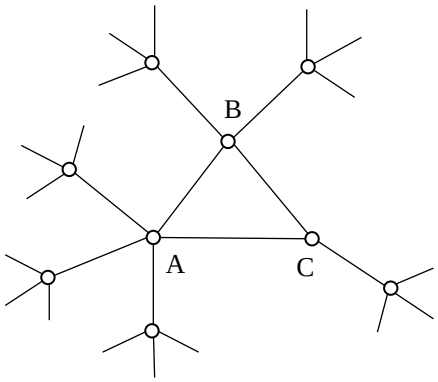


Рисунок 8.35. Модельный фрагмент сети со степенями узлов k_A=5, k_C=3 и k_j=4 (все остальные, см. текст). Математическое ожидание изменений «благосостояния» Δw_A=1/4·4+1/3–1=1/3, Δw_B=1/4·2+1/3+1/5–1 = –1/2+8/15=1/30 и Δw_C=1/4·2+1/5–1= –3/10

$\sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{k_j} > \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{k_i} = k_i \cdot \frac{1}{k_i} = 1$, то есть $\Delta w_i^{(n)} > 0$:

[*]J.-P. Bouchaud, M. Mezard, Physica A 2000, **282**, 536–545.

благосостояние узлов более высокого порядка возрастает за счет его уменьшения у узлов меньшего порядка (рис. 8.35). Полученное распределение $\{w_i > 0\}$ воспроизводит основные черты распределения степеней $\{k_i\}$ узлов «несущей» сети (рис. 8.36). Таким образом, распределение доходов населения в масштабах национальных экономик (рис. 8.26) аналогично распределению порядка узлов в сложных сетях –возможно, они порождаются единым комплексом причин.

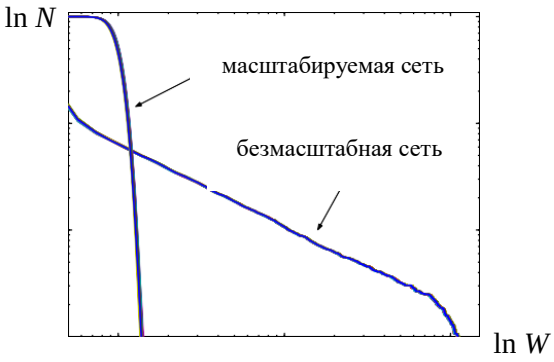


Рисунок 8.36. Модельное распределение богатства в узлах жестких сложных сетей. (T. Di Matteo, T. Aste, S. T. Hyde, Proc. Internat. School of Physics "Enrico Fermi", 2004, 155, 435; https://ebooks.iospress.nl/volume/the-physics-of-complex-systems-new-advances-and-perspectives)

Сеть мировой торговли

По данным ООН, оборот мировой торговли в предкризисном 2018 г. приблизился к 30% от суммарного ВВП всех стран мира. Сетевая структура международной торговли, в зарубежной литературе называемой International Trade Network (ITN), World Trade Network (WTN) и World Trade Web (WTW), представляет собой взвешенный ориентированный граф; ее активно исследуют методами «науки о сетях». Общее число узлов, т.е. стран мира, в этой сети относительно невелико (196 на 2020 г.), но веса вершин, пропорциональные ВВП, и «силы» дуг (объемы торговли) варьируют в широких пределах и изменяются во времени.

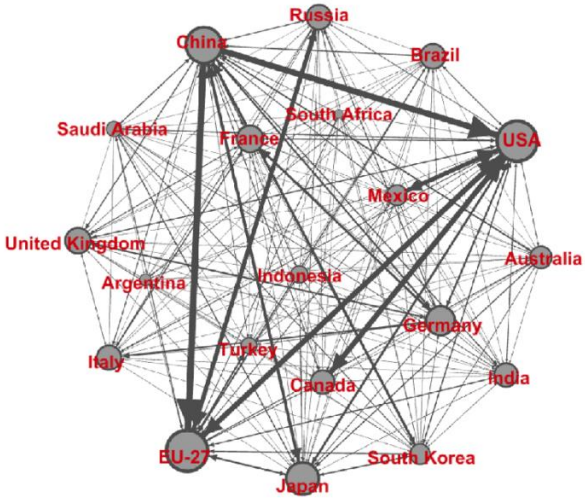
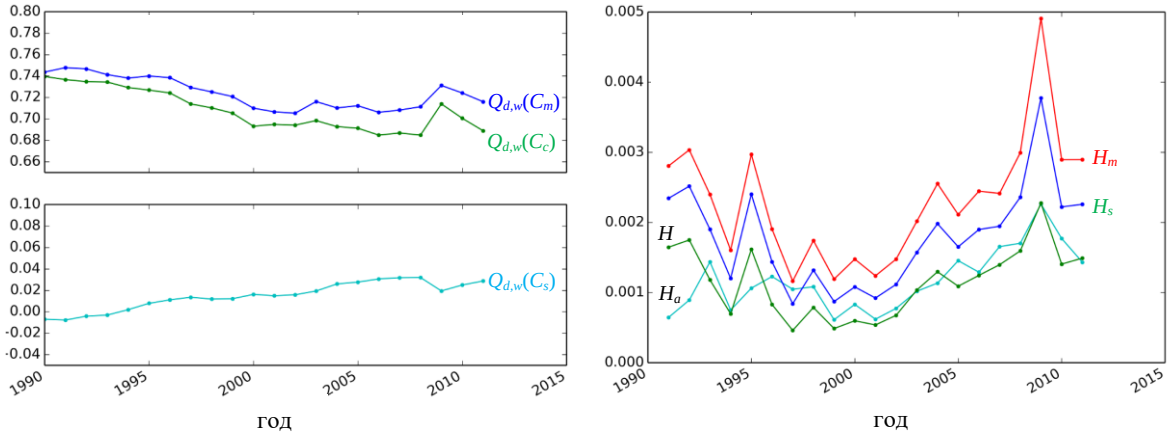


Рисунок 8.37. Граф торговых связей в странах G20. Диаметры вершин ~ln (ВВП), толщина ребер – объемам торговли. Двойным стрелкам соответствуют пары дуг с несовпадающими весами (A. Joseph, I. Vodenska, E. Stanley, G. Chen, arXiv:1403.0848, 2014)

Управляющим ядром WTN можно считать подграф, куда входят 20 крупнейшим экономик мира (G20), объединяющих свыше 80% мирового ВВП и 75% объема мировой торговли. Этому ядру соответствует неориентированный полный граф с сильно различающимися весами ребер и несколькими доминирующими вершинами и связями (США, КНР, Евросоюз, Япония, рис. 8.37).

Для анализа топологии WTN вначале конструируют ее упрощенную структуру, выделяя по эвристическим алгоритмам сообщества и кластеры взаимосвязанных государств. Спецификация связей по экономическим агентам и секторам производства порождает многослойную сеть, или «сеть сетей» (см. рис. 6.52 в главе 6). Изменение топологических характеристик в слоях этой сети* с течением времени отражает эволюцию сетевой структуры.



(а) (б)

Рисунок 8.38. Рисунок 8.38. (а) Динамика степени модулярности слоев WTN с 1990 по 2011 г. по странам мира ($Q(C_c)$, верхняя панель) и по взаимосвязанным производственным секторам этих стран ($Q(C_s)$, нижняя панель); «Геометрическая» модулярность $Q(C_m)$, определяемая топологией сети, воспроизводит торговые связи между странами (верхняя панель). (б) Варианты расстояния Хэмминга (см. текст) для изменений связей WTN этих слоев в два последовательных года за тот же период (J. Maluck, R.V. Donner, PlosOne, 2015, 10 (7), e0133310).

Анализ многослойной WTN и ее компонентов по странам и типам товаров показало, что внутригосударственные и географически либо исторически обусловленные торговые связи до сих пор преобладают над внутриотраслевыми глобальными связями, хотя доля последних до начала современного кризиса в 2019-2020 гг. постепенно увеличивалась (рис. 8.38 а). Таким образом, роль национальных государств в системе мировой торговли остается существенно выше, чем у наднациональных структур. Общемировой экономический кризис 2008-2009 гг. сопровождался существенным изменением

** * *Степень модулярности*: отношение суммы фактических связей внутри сообщества к сумме связей внутри того же набора вершин в случайном графе с аналогичным распределением степеней вершин. *Расстояние Хэмминга* (функция Хэмминга) для неориентированных графов G и G* с N вершин – мера расхождения элементов их матриц смежности

$$H(G, G^*) = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j}\left|a_{ij} - {a_{ij}}^*\right|$$

Для взвешенных графов H показывает относительные расхождения весов $\{w_{ij}\}$.

«топологии» системы мировой торговли с повышением доли связей внутри государств (рис. 8.38 б).

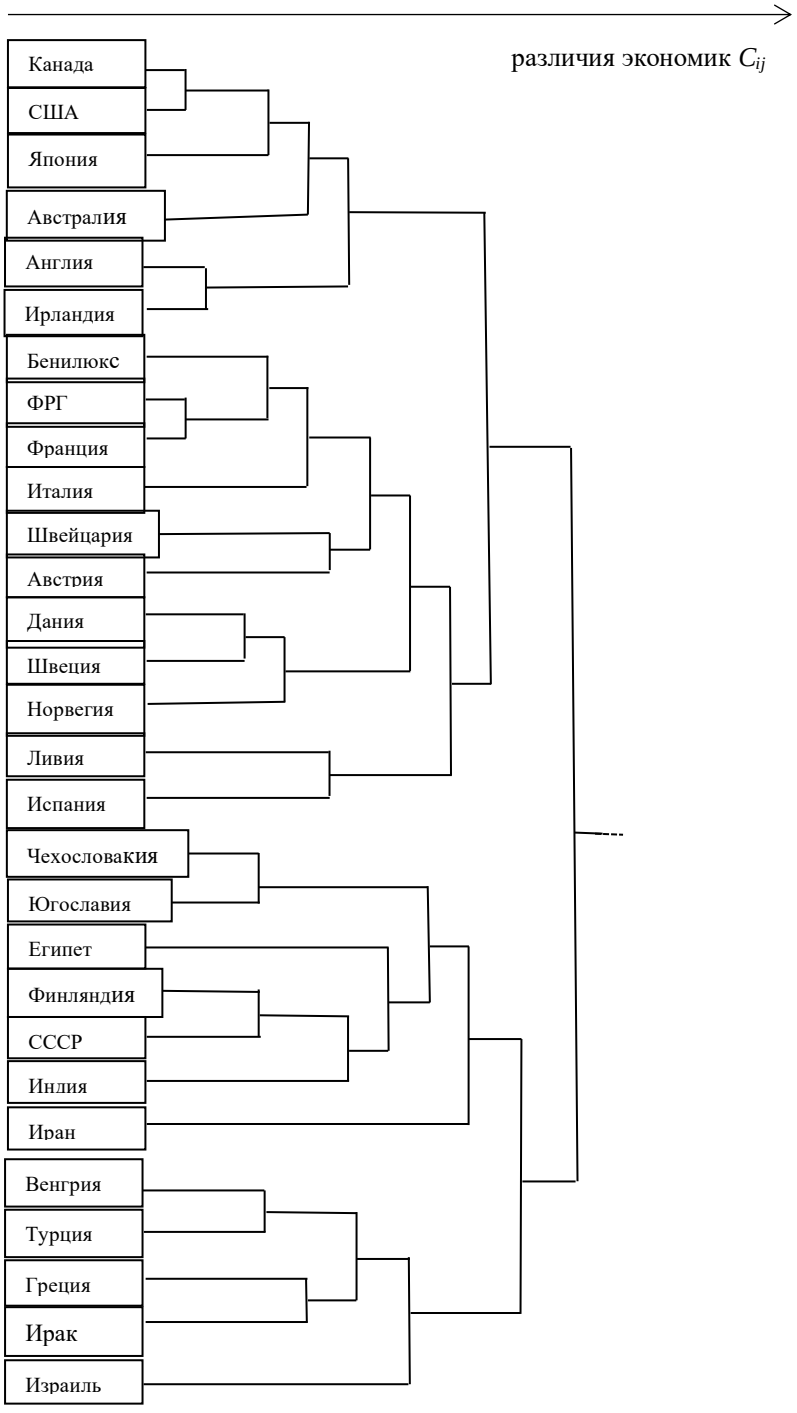


Рисунок 8.39. Фрагмент иерархического дерева мировой торговли в 1969 г. (по[14])

В цитируемой работе данные по объемам торговли между странами мира с 1962 по 2007 г. методами кластерного анализа были преобразованы в иерархическое дерево, вершинами которого служат страны и группы стран, объединенные торговыми связями (рис. 8.39). Обобщенные расстояния между вершинами графа, как мера различия его связей (*коэффициенты кофенетической корреляции*), в указанный период в целом уменьшались, «уплощая» иерархию, тогда как в результате экономических рецессий расхождения национальных экономик локально увеличивались[14]. Авторы показали, что «размывание»

модульной структуры мировой торговли, как следствие глобализации, сопровождается углублением рецессий и удлинением периодов восстановления вплоть до мирового кризиса 2008-2009 г. Хотя в модели не учитывались «веса» экономик (ВВП), этот эмпирический вывод согласуется с экономической динамикой 2010-2019 г. и текущим кризисом 2020-?? годов. Древовидные графы (*дендрограммы*), отражающие корреляцию количественных параметров агентов в системе, часто используются в междисциплинарных исследованиях экономики и общества (см. [10] в списке рекомендуемой литературы).

Сеть транснациональных корпораций

Транснациональной корпорацией (компанией), или ТНК, по определению Конференции ООН по торговле и развитию (United Nation Conference on Trade and Development, UNCTAD), называется компания с *существенной* (но количественно не определенной) долей международного бизнеса, имеющая филиалы в двух и более странах помимо того государства, где зарегистрирован ее главный офис. В 2020 г. в мире насчитывалось свыше 80 тыс. ТНК, которые контролировали до половины общего промышленного производства и 2/3 мировой торговли, объединяя до ¼ мирового ВВП[*]. Крупнейшие ТНК (табл. 8.8), также называемые глобальными корпорациями, играют ведущую роль в мировой экономике. Крупнейшими российскими ТНК, которые входили в 200 самых богатых компаний мира на начало 2022 г., являлись Газпром, Лукойл, Роснефть и Сбербанк; их конкретные позиции в рейтингах зависят от методики оценки.

Таблица 8.8

10 крупнейших ТНК по размеру дохода на начало 2022 г.[*]

название	доход, млн. долл.	прибыль, млн. долл.	персонал, чел.	область деятельности	страна[**]
Walmart	560000	14880	2.2 млн.	сеть супермаркетов	США
State Grid	386600	5600	900 тыс.	энергетика	КНР
Amazon.com	386000	21300	1.3 млн.	интернет-торговля	США
China National Petroleum	284000	4575	1.2 млн.	нефть и нефтепродукты	КНР
Sinopec Group	283700	6200	550 тыс.	нефтехимия	КНР
Apple	274500	57400	147 тыс.	электроника	США
CVS Health	268700	7180	257 тыс.	здравоохранение	США
UnitedHealth Group	257100	15400	330 тыс.	здравоохранение	США
Toyota	256700	21200	370 тыс.	автомобилестроение	Япония
Volkswagen	254000	10100	660 тыс	автомобилестроение	Германия

[*]И.А. Родионова, Д.А. Дирин, Крупнейшие транснациональные корпорации мира: сдвиги в страновой и секторальной принадлежности, Географический вестник, 2023, **1** (63), 53.
[**]государство, в котором находится головной офис компании.

При ряде преимуществ перед мононациональными фирмами (свободном обмене информацией и продукцией между филиалами, прямом участии в глобальном хозяйстве, меньшей зависимости от официальных структур и др.), деятельность ТНК создает угрозу мировой экономической системе. Уклонение от налогов и социальных обязательств (таких,

[*] Transnational Corporations, UN Library, https://www.un-ilibrary.org/content/journals/2076099x

как организация профсоюзов и нормы оплаты труда), игнорирование законов, подкуп местной администрации и т.п. криминализуют новые экономические структуры и разрушают механизмы защиты населения в периферийных странах. Это возвращает глобальные ТНК к практике «дикого» капитализма XIX века, увеличивая социальную поляризацию мировой хозяйственно-политической системы и таким образом снижая ее устойчивость.

Взвешенная ориентированная сеть глобального корпоративного управления в сообществе из 43 тыс. ТНК (многие из которых, в свою очередь, включали фирмы-компоненты) была построена и проанализирована в 2011 г.[15] Корпорации были выбраны из 30 млн. коммерческих фирм в базе данных Orbis 2007* на основе классификационных признаков ТНК. Степень управления фирмы B фирмой A (вес дуги A→B) рассчитывалась пропорционально доле W_{AB} фирмы A в капитале B и соотношению капиталов C_A/C_B с учетом всех маршрутов от A к B.

Построенная сеть ТНК охватывала более 600 тыс. экономических агентов (вершин) и состояла из 23825 кластеров, включая гигантский связный компонент (ГСК) из 463006 вершин и 889601 дуг. (Следующий по размеру связный кластер содержал 230 вершин, 90% всех кластеров имели менее 10 вершин). В ГСК входили 15491 ТНК из 83 стран, или 36% от общего количества корпораций, на которые приходились 94.2% их суммарного дохода. Гигантский кластер имел строение «галстука-бабочки» (рис. 8.40), характерное для сложных ориентированных сетей (см. рис. 6.41 в главе 6). В его управляющем ядре с высокой связностью узлов содержалось менее 300 корпораций, из них ¾ финансовые. Крупнейшие держатели их акций (737 фирм) контролировали около 80% ТНК во всем мире.

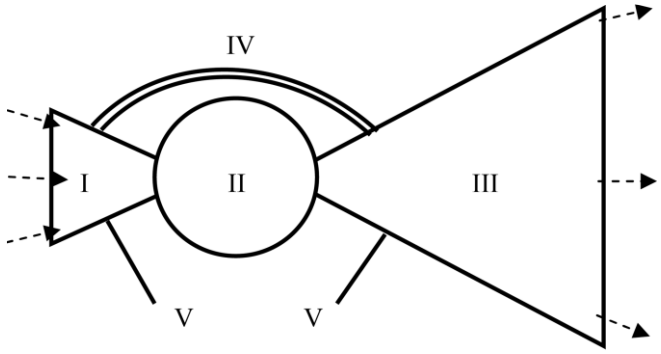


Рисунок 8.40. Части максимального связного компонента сети управления ТНК[15]: I – входящий конус (0.6%, 2.2%), II – ядро (0.7%, 18.7%), III – выходящий конус (15.1%, 59.8%), IV – «трубы», V – «усики» (вместе 19.6%, 13.5%). В скобках доли от общего числа ТНК и их операционных расходов

Другие модели сетевых структур

Сетевые структуры дают интегральное описание системы торговых связей, позволяя установить корреляции экономических параметров агентов с такими их топологическими характеристиками, как *важность*, или *центральность*, то есть доля всех путей графа A→…→B, проходящих через вершину C (см. раздел 6.2.2 в главе 6). При заданном наборе узлов сети направления и веса дуг определяются гравитационной моделью (разд. 1.1.5 в

* https://credinform.ru/en-GB/Partnership/Orbis

гл. 1 и 6.1 в гл. 6) в хорошем соответствии с эмпирическими данными. Саму топологию сетей, включая веса связей, диктуют как экономические, так и политические факторы – для WTN это действия Всемирной торговой организации (ВТО)[*]. При объединении экономических «масс» государств с другими параметрами, определяющими интенсивность торговых связей, были построены «карты» мировой торговой системы с 1870 по 2013 г., за вычетом двух мировых войн, в гиперболической метрике (см. разд. 6.3.2 главы 6)[**].

Формализации конкурентных и иных взаимодействий экономических агентов на сетевых структурах соответствует один из разделов теории игр: *игры на сетях*[16,17]. В типичной постановке задачи платежная функция i-го агента, занимающего определенный узел сети, зависит не только от его хода $x_i \in X$, но и от ходов агентов в соседних узлах:

$$u(x_i) = u\left(x_i, \{x_j\}\right),$$

где $\{x_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$ – множество ходов соседних агентов, k – степень узла. Динамика суммы выигрышей и наличие равновесий определяются строением сети и «силой» взаимодействия узлов. Игры на сетях применяются к исследованию как экономических, так и других социальных систем.

Пусть, например, стратегии агентов состоят в выборе одного из двух целых чисел {0, 1}. Выигрыш i-го агента на n-м шаге дискретного времени положителен, если его выбор $x_i = 1$ совпал с выбором ≥50% агентов в ближайшем окружении, и отрицателен в противном случае (*игра в большинство*):

$$u(x_i, n) = \delta > 0, \qquad \text{если} \quad \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j \geq \frac{1}{2}$$

При неполной информации о строении сети (каждый агент знает число соседних вершин и лишь оценивает их порядки) наборы устойчивых стратегий и равновесий, связанных с ее фактическими параметрами, отражают динамику многих общественных процессов[17].

Агент-ориентированные модели

К моделированию социальных процессов методами теории игр примыкает агентное, или *агент-ориентированное* моделирование (АОМ; англ. agent-based modeling). В его рамках динамику агентов определяют априорно установленные правила; параметры мультиагентных систем получают усреднением состояний агентов на некотором интервале дискретного времени. Этот подход, переносящий на социум компьютерные методы расчета многочастичных систем (см. разд. 3.4 в гл. 3), в настоящее время широко используется в экономике и других общественных науках [7].

Мультиагентное моделирование экономических и социальных процессов – часть широкой области социального моделирования (англ. social simulation), где действуют международные научные организации – такие как European Social Simulation Association (ESSA)[***] – и издаются специализированные журналы, среди которых широко известен

[*] L. De Benedictis, L. Tajoli, The World Economy, 2011, 34 (8), 1417.

[**] G. Garcia-Perez, M. Boguna, A. Allard, M.A. Serrano, Sci. Rep., 2016, 33441.

[***] http://www.essa.eu.org/

Journal of Artificial Societies & Socials Simulations (JASSS)*. В 2023 г. в Глазго (Англия) прошла 18-я Европейская конференция по социальному моделированию (SSC2023). В России это направление развивают, в частности, Лаборатория искусственных обществ ЦЭМИ РАН (www.artsoc.ru, см. [7] в списке литературы к этой главе), Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, Самарский технический университет и некоторые другие организации**.

В агентном моделировании экономики и социума в настоящее время широко используются суперкомпьютеры (см. табл. 6.7 в гл. 6). Это позволяет создавать модели масштаба 1:1, где в параметрах агентов учитывается информация о реально существующих людях. Такие модели, впервые построенные в начале XXI века для задач эпидемиологии, в настоящее время распространяются на моделирование транспортных потоков (см. гл. 5) и социально-экономических явлений. Другой современной чертой этой области является интегрирование мультиагентных моделей с *географическими информационными системами* (ГИС), объединяющих карты (городов, районов, стран и прочих территориальных единиц) с цифровой информацией о находящихся в них объектах (рис. 8.41). Мультиагентные модели на основе ГИС используются в стратегическом прогнозировании экономических, демографических и других социальных процессов (см. [7]).

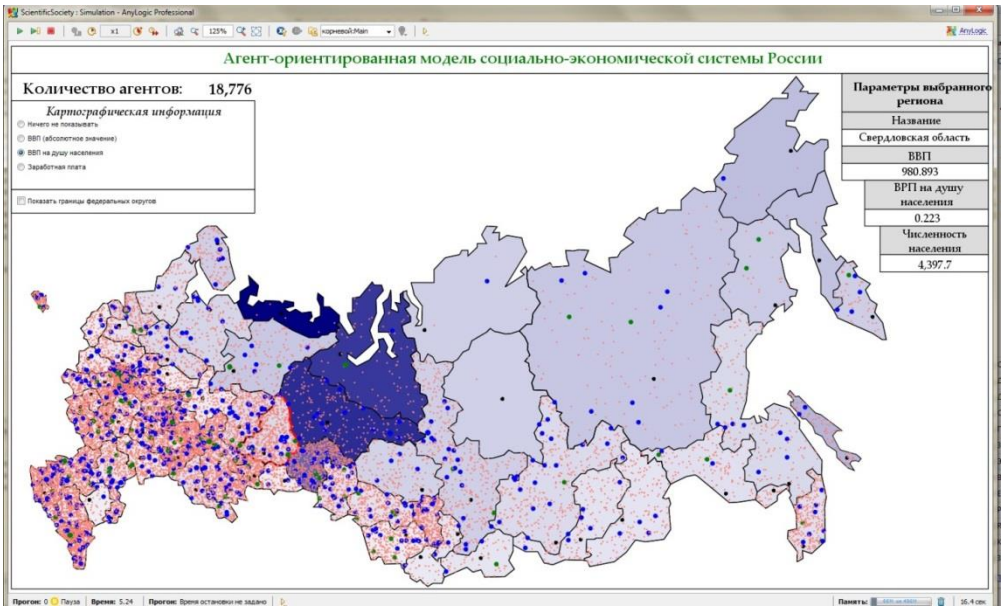


Рисунок 8.41. Рабочее окно агентной модели социально-экономической системы России (см. [7], рис. 2.6)

Литература к разделу 8.5

[13] F. Emmert-Streib, et al., *Understanding the world economy in terms of networks: a survey of data-based network science approaches on economic networks*, Front. Appl. Math. Stat., 2018**, 4**, Article 37.

[14] J. He, M.W. Deem, *Structure and response in the world trade network***,** Phys. Rev. Lett., 2010, 105, 198701.

[15] S. Vitaly, J.B. Glattfelder, S. Battiston, *The network of global corporate control*, PLoS One, 2011, **6** (10), e25995.

[16] Д.А. Новиков, *Игры и сети*, Математическая теория игр и ее приложения, 2010, **2** (1), 107.

[17] A. Galeotti, et al., *Network games*, Rev. Econ. Studies (2010), **77**, 218.

* https://www.jasss.org/JASSS.html

** Rzevski G., Skobelev P., Zhilyaev A. *Emergent intelligence in smart ecosystems: conflicts resolution by reaching consensus in resource management*. Mathematics, 2022, **10**, 1923.

8.6. Биржа и эконофизика

Встает купец, идет разносчик,
На биржу тянется извозчик,…
А.С. Пушкин, «Евгений Онегин»

Биржами исторически назывались площадки и здания, отведенные для оформления сделок (например, здание Биржи на Стрелке Васильевского острова в Санкт-Петербурге). В XVI-XVII веках в Европе возникли первые фондовые биржи, осуществлявшие торговлю ценными бумагами. Старейшая из действующих бирж (фондовая и товарная) была основана в Амстердаме в 1608 г. В XVIII веке биржи были организованы в крупнейших городах Европы, включая Санкт-Петербург (1703 г.). В 1801 г. была официально основана Лондонская фондовая биржа (к тому времени уже существовавшая два века как частное предприятие), в 1792 г. – фондовая биржа в Нью-Йорке.

Современные биржи чаще всего являются акционерными обществами закрытого типа (ЗАО)[*]. Они организуют и контролируют торги товарами, валютой, ценными бумагами, фьючерсными контрактами (см. разд. 3.2.2 в гл. 3) и другими рыночными инструментами. Биржи устанавливают правила торговли, регулируя ее через типовые контракты, котировки, арбитраж и другие виды деятельности с участниками торгов. По видам обращающихся на них финансовых инструментов биржи подразделяются на универсальные и специализированные. За право проведения биржевых операций их участники выплачивают определенный взнос, поступающий в доход биржи. Помимо собственных правил, деятельность бирж регулируется законами государства.

8.6.1. Биржевые индексы

Колебания цен товаров и прочих активов, т.е. предметов торга, позволяет биржевым игрокам извлекать спекулятивную прибыль из флуктуаций цены за счет перепродажи подорожавшего актива. Этим обусловлена массовость биржевых операций и роль биржи как «барометра экономики», а также рыночного регулятора спроса и предложения. Значимость финансовых факторов отражается в численных показателях состояния фондовых рынков и количественных методах их мониторинга, которые применяются в биржевой торговле со второй половины XIX века.

Состояние отраслей экономики и их динамику на бирже отражают *фондовые индексы*: взвешенные суммы текущих цен в определенной группе активов. Старейшим показателем, используемым до настоящего времени, является *индекс Доу-Джонса*, предложенный в 1884 г. как среднее арифметическое цен акций девяти железнодорожных и двух промышленных компаний США. В настоящее время *средний промышленный индекс Доу-Джонса* (Dow Jones Industrial Average, DJIA), как один из серии родственных индексов DJ, представляет собой *масштабируемое среднее* цен акций 30 крупнейших американских компаний, не обязательно связанных с промышленным производством: American Express, Coca-Cola, McDonalds, Microsoft, Procter&Gamble и др. Список компаний вместе с

[*] То есть распространяющее свои ценные бумаги (акции) среди небольшого установленного круга лиц, которые несут материальную ответственность за деятельность общества только в размере собственного денежного вклада.

масштабными множителями редактируется по мере изменения ситуации в экономике. Кроме индексов Доу-Джонса, к основным американским фондовым индексам относятся *Standard and Poor* (S&P) и *Nasdaq*, рассчитываемые по аналогичным схемам с акциями, соответственно, 500 крупных компаний во всех отраслях экономики и 100 компаний в высокотехнологичном секторе электроники, программного обеспечения и IT. Аналогично построены биржевые индексы, отражающие состояние других национальных экономик: DAX (Германия), FTSE (Англия), CAC (Франция), Nikkei (Япония) и др. Динамику цен российских акций показывают индексы Московской биржи (ранее Московской межбанковской валютной биржи, ММВБ) и Российской товарно-сырьевой биржи (РТС).

Помимо агрегированных показателей, состояние экономики государства отражают цены акций его крупнейших корпораций (см. предыдущий раздел), а также курсы национальной валюты на валютном рынке. Формальное прогнозирование динамики цен на основе имеющихся данных составило предмет *технического анализа*: прикладной области рыночной торговли (в первую очередь биржи), направляющей решения торгового агента (*трейдера*) покупать или продавать находящиеся в его распоряжении активы. Эти прогнозы наиболее широко используются в биржевой торговле высоколиквидными активами: акциями и ценными бумагами.

Основу технического анализа составляют эмпирические корреляции движения цен активов (*трендов*) с количеством участников торгов, объемами покупок и продаж, волатильностью (флуктуациями) цен и другими показателями, обычно не связанными с экономическим содержанием активов. В этом смысле технический анализ ориентирован на поиск объективных, то есть физических закономерностей в системе взаимодействующих участников рынка. Динамика биржевой цены отражает как стремление агентов к максимуму прибыли, так и неполноту имеющейся у них информации, следование за действиями большинства участников торгов («стадное поведение»), вспышки ажиотажного спроса либо массовые «панические» продажи.

Методы технического анализа, одним из инструментов которого являются фондовые индексы, разрабатывались с начала XX века. В 1970-80-е годы они получили дополнительный стимул благодаря применению компьютерных и сетевых технологий. Параллельно развивающийся *фундаментальный анализ* нацелен на методики определения объективных цен товаров и предсказание флуктуаций рыночных и биржевых цен в окрестностях их вероятных значений – таким образом, он ближе к «магистральной» экономической теории.

Цены активов, выставленных на бирже, и значения фондовых индексов с 80-х гг. XX века стали регистрироваться в открытой электронной системе и депонироваться в компьютерных базах данных, что позволило составлять и обрабатывать ряды их значений во времени (*временно́й ряд*, англ. time series) как результаты измерений. Однако цифровые характеристики биржи во многих отношениях отличаются от измеряемых параметров физической системы: они выражены в нефизических денежных единицах, подверженных колебаниям курсов и инфляции, а их агрегаты (фондовые индексы) определены произвольно. Это затрудняет количественное сравнение. Предметом анализа обычно является динамика цен, обменных курсов валют и биржевых индексов на качественном уровне.

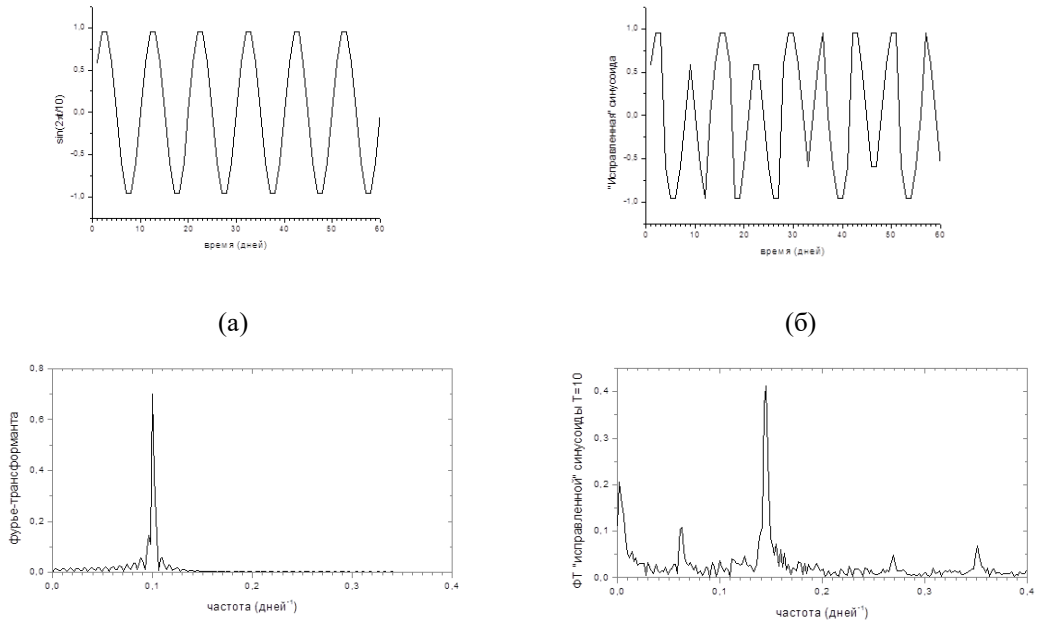


Рисунок 8.42. Вверху: (а) функция $\sin\frac{2\pi t}{10}$ (t – дни) в неискаженном виде и (б) ее значения по дням работы NYSE в 2007 г. Внизу (в, г) соответствующие периодограммы

Биржевые данные фиксируются лишь в рабочие дни и часы, что вносит разрывы в поток параметров, отражающих состояние экономической системы. На рис. 8.42 б показан график модельной периодической функции $\sin\frac{2\pi t}{10}$, где t – время в сутках, по ее значениям в 257 рабочих дней Нью-Йоркской фондовой биржи (NY Stock Exchange, NYSE) в 2007 г. Фурье-преобразование полученной функции (см. разд. 3.2.3 в гл. 3), или ее *периодограмма*, из-за разрывов синусоиды содержит ложные периоды (рис. 8.42 в, г). Таким образом, объективное содержание динамики финансовых рядов можно надеяться установить лишь в интервале их непрерывной регистрации (несколько часов) либо на больших масштабах времени (рис. 8.43).

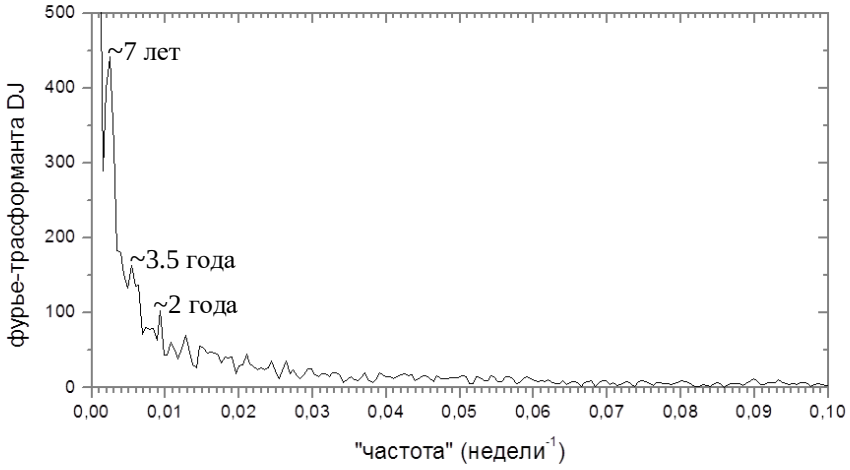


Рисунок 8.43. «Длинные» периоды колебаний в непрерывной серии индекса Доу-Джонса 1980–2008 гг. по средним значениям за неделю

График значений индекса Доу-Джонса DJIA в 1985 – 2020 гг. представлен на рис. 8.44. При всей явно нерегулярной форме, которая будет обсуждаться ниже, этот график отражает общие черты динамики фондовых индексов:

- Чередование локальных максимумов и минимумов, которым отвечают «кооперативные» повышения и падения цен разного масштаба в группах связанных активов
- Общая тенденция к росту
- Долговременные (несколько лет) превышения индекса над линейным трендом с последующим снижением, обычно совпадающим с «обвальным» падением рынка акций: финансовым кризисом, нередко переходящим в общий экономический кризис.

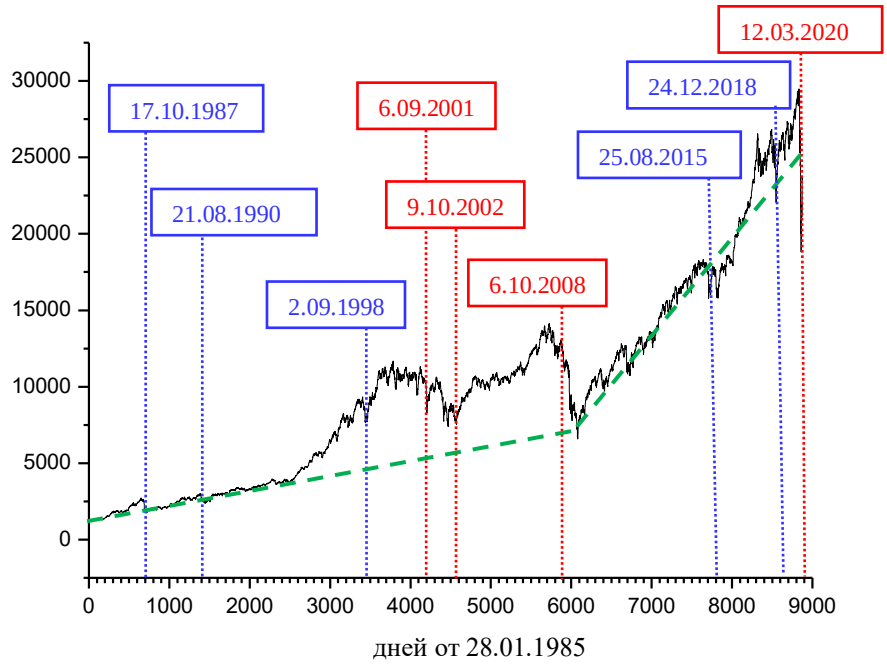


Рисунок 8.44. Динамика индекса Доу-Джонса (DJIA, средние по рабочим дням биржи NYSE) в 1985 – 2020 гг. Синий цвет – падения курсов акций (редукции), красный – обвальные падения (биржевые крахи)

После возникновения общемировой системы электронных торгов и валютного обмена динамика американских, а с середины 2000-х гг. и всех ведущих мировых индексов синхронизировалась в пределах 1-2 дней. Рост биржевых индексов отражает, в том числе, увеличение численности человечества – в частности, линейный рост населения США с начала XX века по настоящее время (рис. 8.45). Рост населения страны сопровождается повышением ВВП*, инфляцией национальной валюты (см. табл. 8.7) и увеличением числа рыночных агентов и биржевых игроков.

* E.W.F. Peterson (2017) *The Role of Population in Economic Growth*, SAGE Open Oct.-Dec. 2017: 1. https://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/2158244017736094

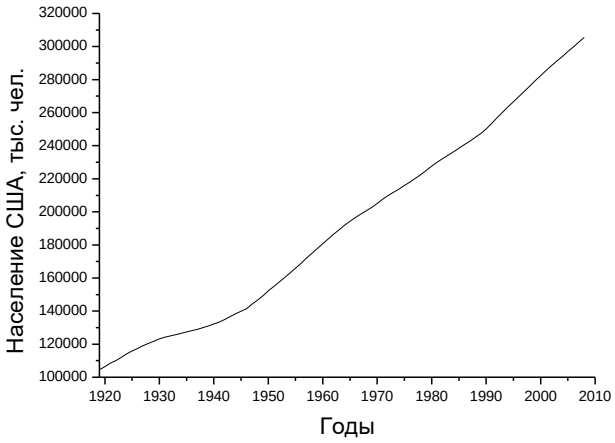


Рисунок 8.45. Рост населения США с 1919 по 2007 г. Источник: US Census Bureau, см. https://www.multpl.com/united-states-population/table/by-year

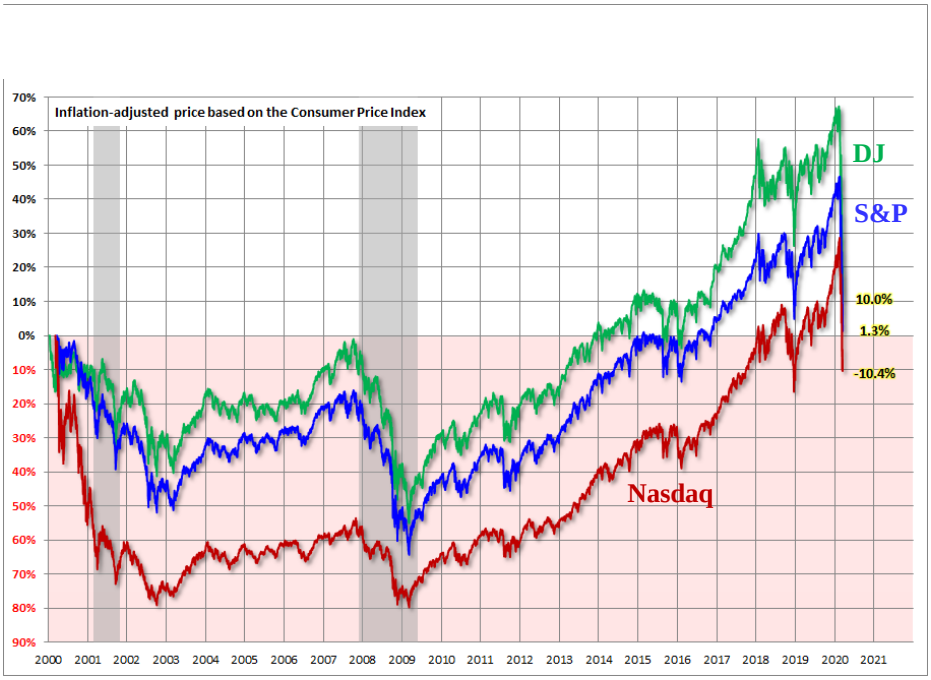


Рисунок 8.46. Главные фондовые индексы США в 2000 – 2020 гг. с поправкой на инфляцию: Dow Jones (DJ), Standard and Poor (S&P) и Nasdaq; значения в 2000 г. приняты за 100 %. Серые вертикальные полосы – периоды рецессий (J. Mislinski, Advisor Perspectives, 3/18/20, https://www.advisorperspectives.com/dshort/updates/2020/03/18/the-s-p-500-dow-and-nasdaq-since-their-2000-highs)

Для периодов с подъемом индексов выше линейного тренда, наиболее выраженных в 1995-2001 и 2003-2008 гг., характерны завышенные оценки отдельных видов финансовых инструментов и целых отраслей экономики с ажиотажным увеличением объема сделок, или *биржевые пузыри*. В конце таких периодов происходят обвальные снижения цен и «панические» распродажи. В зависимости от глубины снижения, различают *редукцию* цен акций и товаров (на 5–10 %) и *обвал рынка* (биржи), или *финансовый кризис*, с падением цен большинства активов на 20-30%. Три финансовых кризиса в XXI веке (2001-2002 гг., 2008-2009 гг. и текущий кризис, начавшийся в 2020 году) перерастали в мировую *экономическую рецессию*. «Усиление» линейного тренда с 2009 г. (штриховые линии на

рис. 8.44) коррелирует с увеличением денежной массы в экономике США в рамках *количественного смягчения* с 2009 г. по 2015 и, по-видимому, выявляет неучтенную инфляцию доллара.

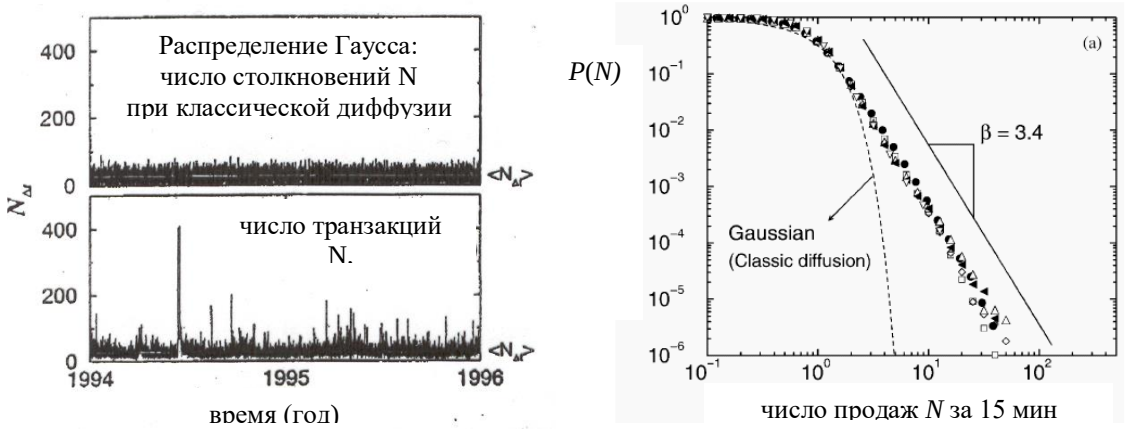
Таким образом, биржевые индексы ведущих стран мира косвенно отражают изменения состояния мировой экономики. Вплоть до середины 2023 г. (далее публикуемая биржевая динамика потеряла информативность) их резкое падение указывало на наступление кризисов и рецессий. При введении поправки на инфляцию значения главных индексов США показывают сильное снижение в 2000 – 2010 (рис. 8.46), а их рост с 2010 по 2020 г. (и с 2021 г., см. далее) может также порождаться неучтенной инфляцией из-за увеличения денежной массы. Динамика основных биржевых индексов крупных стран оставалась синхронной до развития глобальных кризисных процессов в 2021-2022 гг.

8.6.2. Биржевые данные и эконофизика

Под «экономической физикой», или *эконофизикой*, в широком смысле слова понимают междисциплинарные приложения методов экспериментальной и теоретической физики к задачам экономики – как правило, в работах физиков. В этом случае к эконофизике, помимо анализа биржевой динамики, относятся такие направления, как *кинетическая теория денег*, моделирование экономических и торговых сетевых структур, применение теоретико-игрового аппарата (включая наиболее формализованные эволюционные и кооперативные игры) в экономике, а также анализ кризисов и квантовоподобные модели экономических процессов, которые будут рассмотрены ниже.

В узком смысле эконофизикой называют обработку биржевых данных и интерпретацию их распределений методами статистической физики. Основавший эту область в 1990-е годы Юджин Стенли (США) и его соавторы сформулировали принципы применения физики в экономике в ряде обзорных статей и в книге ([8] в списке рекомендуемой литературы). Некоторые зарубежные статьи этого героического периода были переведены на русский язык и вошли в монографию [9] (в том же списке). Лучшим отечественным руководством в данной области, в широком смысле термина, остается книга Ю.М. и М.Ю. Романовских «Математические начала эконофизики», впервые вышедшая в 2007 г. под названием «Введение в эконофизику» и затем дважды переизданная в дополненных вариантах [10].

Экспериментальную основу эконофизики составили данные о динамике цен биржевых активов и курсах валют в масштабах времени от нескольких минут (между последовательными операциями, или *транзакциями*, на бирже) до десятков лет. Статистика их значений существенно отличается от статистики результатов измерений в «неживых» макроскопических системах. Для биржевых рядов характерны большие флуктуации и неклассические распределения с обратной степенной асимптотикой («тяжелыми хвостами»: рис. 8.47; см. главу 6). Флуктуации цен биржевых активов, т.е. их волатильность, неравномерно группируются во времени, увеличиваясь в периоды неопределенности их прогнозов (*кластеризация волатильности*, рис. 8.48). Таким образом, эмпирические данные показали, что гипотеза о нормальном распределении численных параметров, преобладавшая в экономике с начала XX века (см. разд. 8.2.2), во многих случаях не соответствует действительности.



(а) (б)

Рисунок 8.47. Особенности статистики биржевых данных: (а) сравнение числа транзакций N и гауссова процесса с тем же средним ⟨N⟩, (б) кумулятивная плотность продаж акций компаний Exxon, General Electric, Coca-Cola и AT&T (точки разной формы) в 1994-95 гг., двойной логарифмический масштаб (H. Stanley, Physica A, 2000, 287, 339, также см. [8, 10])

Изменение цены актива $Y(t)$, выраженной достаточно большим числом (например, в долларах за 1000 акций) на промежутке времени Δt в финансовой математике часто характеризуется *логарифмической доходностью*

(8.51) $$r(t,\Delta t) = \ln\frac{Y(t+\Delta t)}{Y(t)} = \ln Y(t+\Delta t) - \ln Y(t).$$

Таким образом, доходность (8.51) зависит как от интервала времени Δt, на котором изменяется цена, так и от момента его отсчета t; при $r > 0$ цена актива увеличивается, а при $r < 0$ уменьшается. Динамику совместного изменений цен показывает корреляция доходности двух активов как случайных величин

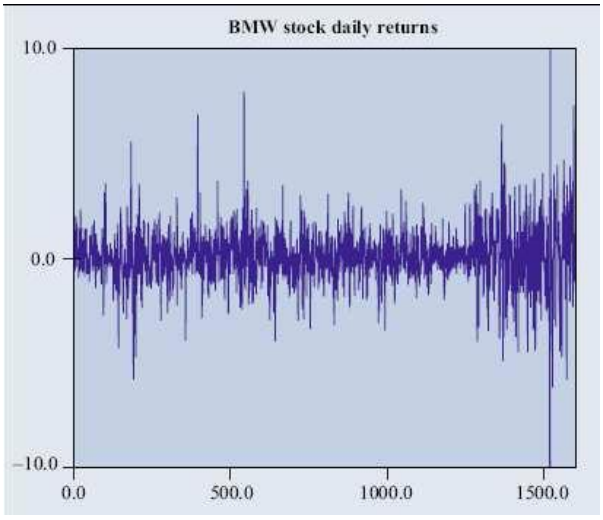
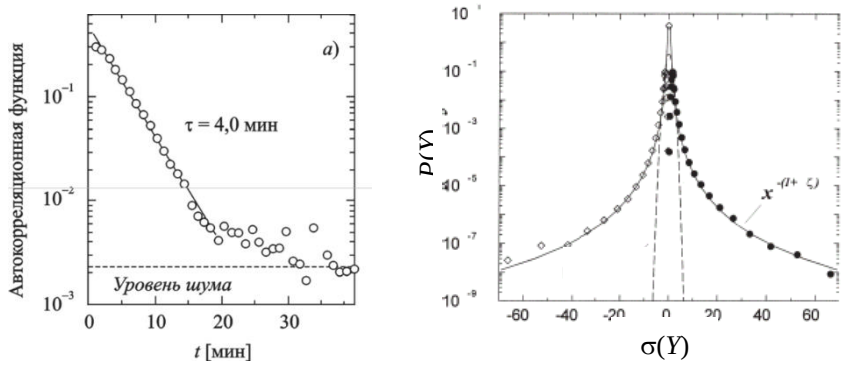


Рисунок 8.48. Кластеризация волатильности дневной доходности акций BMW на Франкфуртской бирже в 1992-1998 гг. (R. Cont, Quant. Finance 2001, 1, 223). См. также [8], рис. 5.7

(8.52) $$B(r_1, r_2) = \iint r_1 r_2 p\,(r_1, r_2, t_1, t_2) dr_1 dr_2,$$

где плотность распределения $p(r_1, r_2, t_1, t_2)$ показывает вероятность совместного появления значений $r_1(t_1)$ и $r_2(t_2)$. Если же r_1 и r_2 – значения одной и той же случайной величины в моменты времени t_1 и t_2, функция (8.52) называется *автокорелляционной*.

Автокорреляции «биржевых» переменных экспоненциально затухают на малых интервалах в несколько минут («короткая память биржи», рис. 8.49 а). Распределения доходности активов на большом числе торговых сессий обычно имеют остроконечный (leptokurtic) вид и обратную степенную асимптотическую зависимость (рис. 8.49 б). При увеличении интервала Δt в формуле (8.51) до часов и дней распределения доходности постепенно приближаются к нормальным.



(а) (б)

Рисунок 8.49. (а) Автокорреляции изменений индекса S&P500 в зависимости от интервала времени $\tau=\Delta t$ ([8], рис. 3.9, также см. [10], рис. 5.3 а). (б) Распределение нормализованной доходности (8.51) как функция ее дисперсии $n\sigma$ (полулогарифмический масштаб, штриховая линия – функция Гаусса, [9])

Неклассические распределения «биржевых» параметров в годы рождения эконофизики как нового направления науки* были интерпретированы в традициях физических теорий: их посчитали проявлением универсальных закономерностей, частными видами которых являются распределения Гиббса, Гаусса и Максвелла-Больцмана (см. главу 2). В качестве обобщенной функции распределения, вслед за Бенуа Мандельбротом (см. следующий раздел), Стэнли и соавторы предложили *распределение Леви*, или «полет Леви», которым описывают аномальную диффузию с возрастанием коэффициента диффузии D для быстрых частиц (разд. 4.4.1 в главе 4).

Распределение Леви не имеет аналитической формы. Его можно выразить через *характеристическую функцию* $\varphi(x) = \exp(-\kappa|x|^{\alpha})$ при $0 < \alpha \leq 2$ ([8, 10] в списке литературы)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(qx)\, e^{-\kappa|q|^{\alpha}} dq = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \cos(qx)\, e^{-\kappa q^{\alpha}} dq. \quad (8.53)$$

* Секция эконофизики по инициативе Ю. Стенли была впервые организована в 1995 г. на конгрессе по статистической физике в Калькутте, в 1997 г. состоялся первый эконофизический симпозиум в Будапеште. В России, помимо ряда школ и секций на междисциплинарных конференциях, в 2009 г. прошел первый и пока единственный конгресс по эконофизике в Финансовой Академии (Москва), а в 2010 г. состоялась научная сессия РАН, материалы которой опубликованы в специальном выпуске журнала «Успехи физических наук» (2011, т. **181**, №7).

Распределение с плотностью вероятности (8.53) *устойчиво*: сумма случайных величин (в том числе с множителями (±1), для двух величин соответствующая разности) также распределена по Леви. При $\alpha = 1$ (8.53) переходит в распределение Коши

$$p(x) = \frac{\kappa}{\pi(\kappa^2 + x^2)}$$

(формула (8.19) при $a = 0$ и $\kappa = \gamma$), а при $\alpha = 2$ в нормальное распределение

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa}\right)$$

(формула (8.15) при $a = 0$ и $\kappa = \sigma^2/2$).

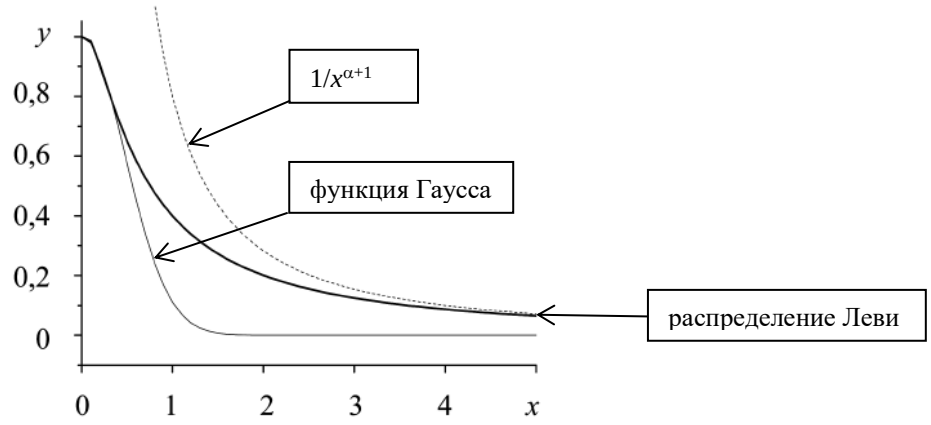


Рисунок 8.50. Распределение Леви и его асимптотические приближения

Распределение Леви при больших значениях переменной x приближается к обратной степенной зависимости $|x|^{-(1+\alpha)}$, а при малых x – к гауссовой функции (рис. 8.50). В этом смысле оно лучше соответствует статистике биржи, позволяя учитывать «длинные прыжки» доходности финансовых инструментов как случайных величин [10] – но хуже воспроизводит остроконечную форму их распределений при малых значениях r. Кроме того, эмпирические распределения доходности *не соответствуют* регулярной функции Леви: при хорошей подгонке в области малых r они оказываются на 1-2 порядка ниже ее асимптотических «крыльев» и наоборот (рис. 8.51). Форму таких распределений воспроизводит *усеченная функция Леви* (англ. *truncated Lévi distribution*), которая выводится численно уменьшением размера «длинных прыжков».

Обоснованию различных вариантов усеченного распределения Леви и обсуждению их аналогов в других разделах физики посвящены многочисленные эконофизические работы (см. [8] и [10] в списке литературы). При этом трудно спорить, что несоответствие наиболее общего статистического распределения (8.53) эмпирическим данным сильно обесценивает саму идею эконофизики как обобщения теории сложных «неживых» физических систем. Еще одним плохо интерпретируемым и редко обсуждаемым фактом является широкий интервал показателей степени β (от <1 до 4) в асимптотических приближениях «биржевых» распределений $\sim x^{-\beta}$ – в том числе вне условий существования функции (8.53). При этом биржевые «тяжелые хвосты» на качественном уровне согласуются с распределениями

узлов сложных сетей высоких порядков $N \sim k^{-\gamma}$, где значения γ находятся в аналогичном интервале (глава 6).

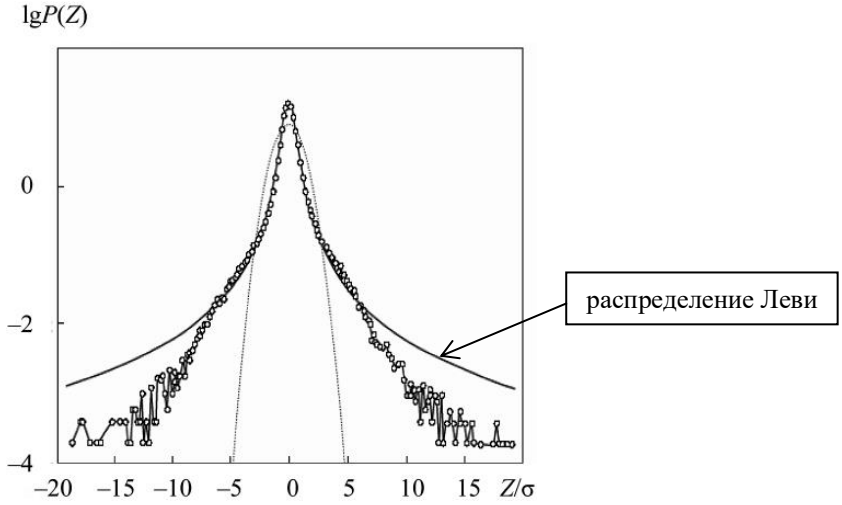


Рисунок 8.51. Усеченное распределение Леви: индекс S&P; серая линия – нормальное распределение (см. [8], рис. 9.1)

Многие неклассические особенности обсуждаемых распределений вполне объяснимы на уровне здравого смысла. Так, быстрое снижение автокорреляций цены активов (рис. 8.49 а) с разным характеристическим временем на разных биржах может отражать исполнение выставленных заявок – при том, что следующие выставленные заявки очевидно не коррелируют с исполненными (см. [10]). «Остроконечный» вид распределений доходности акций вблизи нуля аналогичен распределению времени ожидания в экспериментах по *прерывистому управлению* (раздел 5.3 и рис. 5.22, 5.23 в главе 5). Поведению водителей в этих экспериментах, корректирующих движение автомобиля на дороге лишь при сближении с другими АТС либо при отставании от потока (см.[11] в главе 5), хорошо соответствует стратегия трейдеров на торгах: покупать или продавать актив после выхода его цены за границы «интервала безразличия». Степенным асимптотическим зависимостям при больших модулях доходности в этом случае отвечают крупные сделки индивидуальных и корпоративных игроков, по благосостоянию относящихся к «хвосту Парето» (рис. 8.26): именно богатая часть населения активно участвует в биржевой игре. Наконец, «усеченные» распределения (рис. 8.51), могут быть вызваны неоднородностью системы биржевых игроков – где наряду с любителями и индивидуальными брокерами выставляются заявки крупных фирм, сильно изменяющие состояние всей биржи (англ. *market impact*). Заметим, что число участников торгов (на главных площадках от тысяч до десятков тысяч с преобладанием мелких сделок) и размеры их капитала биржами не разглашаются – что безусловно способствует разнообразию теоретических моделей.

Проявление «человеческих» особенностей в динамике торгов (в частности, кластеризация волатильности), усиленное относительно малым числом агентов и событий (транзакций), которые лишь условно позволяют считать биржи даже мезоскопическими системами, приводит к их наиболее нефизическому качеству: *нестационарности случайных процессов*. В этом случае средние значения, дисперсия и другие моменты «биржевых» рядов (см. выше раздел 8.2.3) не сохраняются во времени, то есть не характеризуют распределения и без дополнительного исследования не могут переноситься

между однотипными системами. Это относится и к другим типам социальных систем, где действуют разнородные агенты, выбор которых осложнен неполнотой информации. Предсказания динамики таких систем методами стохастической физики возможны лишь на весьма ограниченных интервалах времени, пока процесс остается условно стационарным (см. следующий раздел).

8.6.3. Прогнозирование биржевой динамики

В рамках «магистральной» экономической теории предсказать флуктуации цен на бирже невозможно. Биржа (и, шире, «идеальный рынок»), по предположению, эффективно обрабатывает информацию о состоянии экономики, представляя ее в ценах товаров. Отклонение активов от «экономически обоснованной» цены позволяет некоторым игрокам получить спекулятивную прибыль, что изменяет цены, приближая их к равновесным (*арбитраж*, см. [10] в списке литературы). В этом случае биржи служат «барометром экономики» и действуют по принципу казино с нулевой суммой прибыли игроков: выигрыш продавца подорожавших акций компенсируется проигрышем тех, кто вынужден продать дешевеющие акции. Устойчивый доход имеют только корпоративные владельцы биржи за счет взносов участников торгов. Но данная версия, тиражируемая в популярной экономической литературе и СМИ, очень далека от действительности. На практике она опровергается «биржевым перекосом» современных экономических отношений, в последнее десятилетие породившим в обществе мнение о *терминальной фазе капитализма*.

Увеличение стоимости биржевых активов с течением времени отражается в росте мировых фондовых индексов (см. рис. 8.44). Поэтому крупномасштабные покупки активов с их последующей перепродажей являются источником спекулятивных доходов для игроков, допущенных к таким операциям. Суммарная цена активов, обращающихся на главных мировых биржах (*рыночная капитализация* бирж) со времени кризиса 2009 г. возросла в три раза и в предкризисном 2019 г. сравнялась с суммарным ВВП всех стран мира (соответственно 85 трлн. и 87 трлн. долл. США). В 2022 году капитализация каждой из 16 крупнейших мировых бирж превышала 1 трлн. долларов: это Нью-йоркская фондовая биржа NYSE (25.5 трлн.), биржи Nasdaq (свыше 11 трлн.), Шанхайская (4.7 трлн.), Гонконгская (4.2 трлн.) и другие[*]. Государственные банки к началу 2020-х годов размещали на биржах от 10 до 20% своих активов (российские банки в 2019 г. 13.9%). С учетом производных ценных бумаг весь объем средств, обращавшихся на мировых биржах, уже в 2008 г. *на порядок* превысил мировой ВВП.

Таким образом, биржевая динамика сильно и в целом деструктивно влияет на экономику и финансы всех стран. Это не объясняется склонностью руководства ТНК и национальных банков к азартным играм. В реальности современные биржи служат источником гарантированной спекулятивной прибыли «из воздуха» для высокоразвитых государств и крупных фирм (что обостряет всемирное неравенство), а кроме того, глобальным ускорителем инфляции – поскольку растущие цены активов компенсирует денежная эмиссия.

[*]Рыночная капитализация крупнейшей в России биржи ММВБ в 2019 г. составила 447 млрд. долл. США.

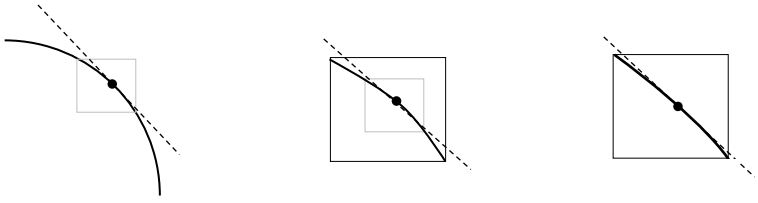
В биржевой игре, аналогично «добыче биткойнов», используются весьма современные математические инструменты, которые будут обсуждаться ниже. Одной из причин прохладного отношения ведущих экономистов к эконофизике мог стать сам факт вторжения физиков в практическую область получения и распределения прибыли от «глобальной» финансовой деятельности бирж.

Математическое отступление: фрактальные множества

Графики индексов, «зашумленные» флуктуациями, отличаются от обычных геометрических фигур. На основании такого графика биржевой цены на хлопок американский математик Бенуа Мандельброт (1924–2010) в 1975 г. предложил идею *фрактального множества точек*, или *фрактала,* как «самоподобного» геометрического объекта, части которого имеют одинаковую с целым или близкую к нему форму, а также отвечающие ей математические характеристики.

В предыдущих главах мы уже встречались с примерами фракталов. Некоторые фрактальные объекты, как множество точек на рис. 7.2 в предыдущей главе, могут обладать строгой масштабной инвариантностью. У других объектов, как у нерегулярных графиков на рис. 8.46 и 8.48, увеличенные части подобны общему графику. В определенных физических пределах масштабной инвариантностью обладают совокупность кластеров и «капель» в сверхкритическом состоянии при переходе газа в жидкость (разд. 2.5 в гл.2) и регистрируемая траектория броуновской частицы (рис. 4.21 в гл. 4). Обычные геометрические фигуры не самоподобны: так, половина треугольника не подобна целой фигуре, а участок непрерывной кривой линии, рассматриваемый с неограниченным увеличением, «выпрямляется», приближаясь к отрезку касательной в его средней точке (рис. 8.52).

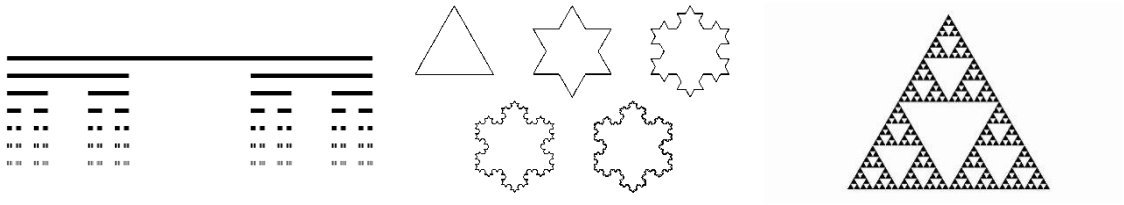
Фрактальные множества точек были известны математикам уже в XIX веке как «паталогические», или «монструозные», геометрические объекты. Так, *множество точек Кантора*, или *канторову пыль*, можно построить за бесконечное число шагов из отрезка прямой [0, 1], удаляя на каждом шаге внутренние трети всех последовательных отрезков (рис. 8.53 а). Суммарная длина удаленных отрезков в пределе равна 1 – тем не менее, множество оставшихся точек не пусто. Более того: между оставшимися точками канторовой пыли и всеми точками непрерывного отрезка [0,1] можно установить взаимно однозначное соответствие – то есть *мощности* этих множеств равны. Другую фрактальную функцию Кантора – *чертову лестницу* $f(x)$, заданную на отрезке [0, 1] и имеющую производную $f'(x) = 0$ почти во всех его точках, мы рассмотрим в разделе 9.5 следующей главы.



(а) (б) (в)

Рисунок 8.52. Непрерывная кривая и касательная к ней в точке с разным увеличением

Замкнутую ломаную линию бесконечной длины, или *снежинку Коха*, строят преобразованием границы правильного треугольника (трех единичных отрезков), заменяя в каждом отрезке фигуры внутреннюю треть на два «выступающих» отрезка длиной ⅓ – и далее до бесконечности (Рис. 8.53 б). Удаляя из правильного треугольника центральную часть, занимающую ¼ его площади, и повторяя эту операцию бесконечное число раз для всех остающихся треугольных частей, получим другой знаменитый фрактал: *салфетку Серпинского* (Рис. 8.53 в). Суммарная площадь бесконечного набора «отверстий» в этой геометрической фигуре равна площади исходного треугольника (иными словами, площадь салфетки равна нулю), а суммарная длина периметров отверстий бесконечно велика. Аналогичные фракталы (*ковры Серпинского*) можно построить из правильного квадрата либо шестиугольника. Существуют алгоритмы построения «губчатых» фракталов из трехмерных фигур и многих других фрактальных объектов.



(а) (б) (в)

Рисунок 8.53. Схемы построения фрактальных фигур, в скобках размерность по Хаусдорфу: (а) канторова пыль (D=0.6309), (б) снежинка Коха (D=1.2618), (в) салфетка Серпинского (D=1.5850)

Обычные метрические параметры не дают определенной характеристики фрактального множества. Так, на n-м шаге построения снежинки Коха длина ее границы составит

$$L = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Таким образом, при бесконечном увеличении числа шагов длина периметра снежинки Коха стремится к бесконечности – при том, что все ее точки не выходят за окружность радиуса $1/\sqrt{3}$. (При составлении географических карт выяснилось, что изрезанные линии морского побережья не имеют определенной длины: сумма длин отрезков приближающей ломаной линии возрастает с увеличением масштаба). Во второй половине XX века фрактальные объекты были обнаружены практически во всех аспектах жизни: микроструктуре материалов, «протекании» пористой либо зернистой среды (см. разд. 6.3 и рис. 6.31 в главе 6), в биологии и медицине (система кровеносных сосудов, внутренняя поверхность легких), в некоторых сетях и так далее – включая биржевые ряды данных. Для рассмотренного в 4-й главе хаотического поведения динамических систем *(детерминированного хаоса)* область «притяжения» траекторий системы в фазовом пространстве, или *странный аттрактор,* также представляет собой фрактальное множество (рис. 4.17).

Характеристикой фрактала является *фрактальная размерность*. Ее оценивают, покрывая фрактал одинаковыми правильными фигурами и вычисляя предел, к которому стремится суммарный объем покрытия (в частных случаях длина или площадь) при

неограниченном уменьшении размера фигур. Предел площади покрытия плавных кривых, как одномерных объектов, равен нулю (рис. 8.54). Однако график *функции Вейерштрасса* – непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке

(8.54) $$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$$

– нельзя покрыть непересекающимися квадратами так, чтобы их суммарная площадь при «измельчении» покрытия стремилась к нулю (рис. 8.55).

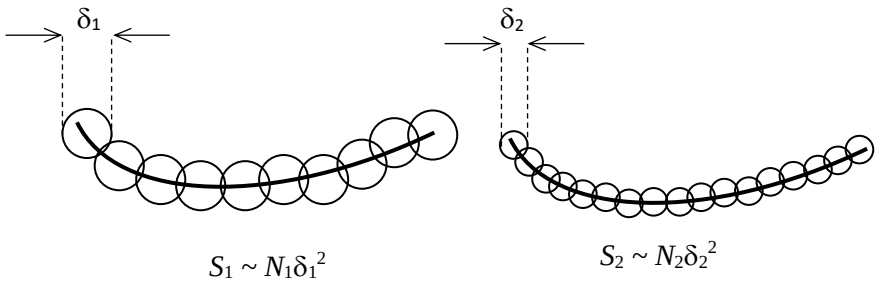


Рисунок 8.54. Покрытие гладкой кривой: $\lim\limits_{\delta\to 0}\sum \delta_i \to L$; $\lim\limits_{\delta\to 0}\sum S_i = 0$

Функция (8.54), изобретенная в 1872 г. Карлом Вейерштрассом (1815-1897) – одно из первых фрактальных множеств, задаваемых аналитической формулой. При $a < 1$, $b > 1$, $ab > 1$ эта функция не дифференцируема ни в одной точке и обладает свойством самоподобия (врезка на рис. 8.55).

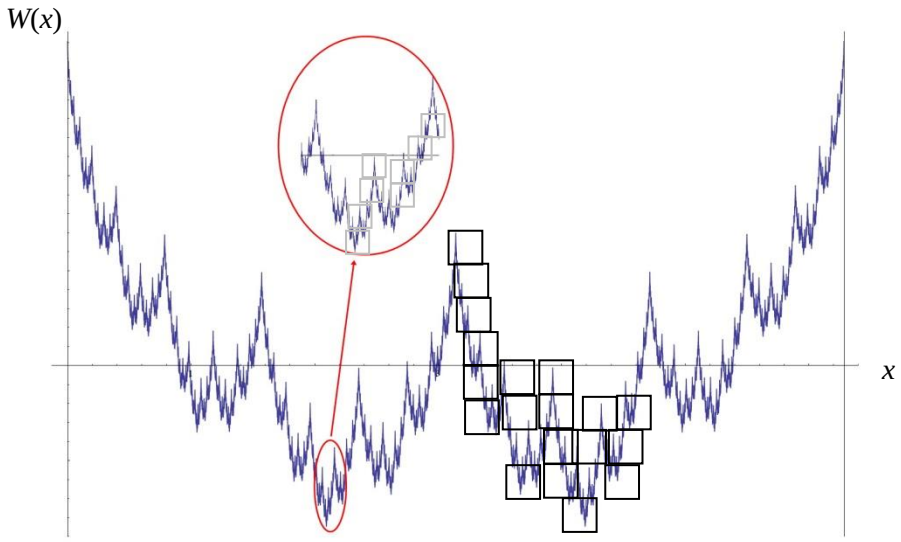


Рисунок 8.55. Фрагменты покрытия функции Вейерштрасса: $\lim\limits_{\delta\to 0}\sum S_i \neq 0$

Из нескольких существующих определений фрактальной размерности в техническом анализе биржи чаще всего используется *размерность Хаусдорфа*

(8.55) $$D = -\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta},$$

где $N(\delta)$ – число элементов покрытия («кубов»), δ – характеристический размер элемента. На рис. 8.53 были приведены размерности фрактальных множеств; у непрерывных объектов («фрактальных кривых») обычно $1 < D < 2$. Для кривой Вейерштрасса

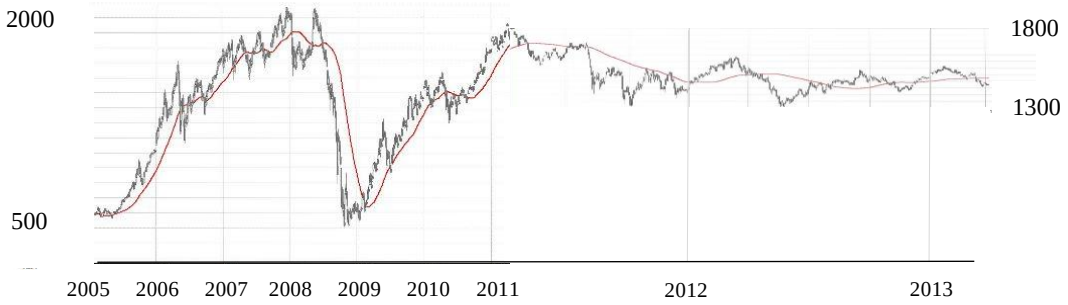
$$D = 2 + \frac{\ln a}{\ln b}$$

(при $0 < a < 1$ и $b > 1$ дробь отрицательна и $D < 2$).

Фрактальный анализ биржевых рядов стал частью технического анализа благодаря работам Мандельброта. Различные оценки устойчивости тренда к повышению или понижению цены (*персистентности* ряда) включают сравнение с модельной функцией Вейерштрасса, динамикой «игры в меньшинство» (см. разд. 7.6.2), а также вычисление приближенной фрактальной размерности ряда как множества точек. Динамику ряда характеризует *показатель Херста*

$$H = 2 - D,$$

где D – его фрактальная размерность по Хаусдорфу. Таким образом, «повышение фрактальности» D, то есть рост волатильности, приводит к уменьшению H. Виды динамики включают



(а) (б)

Рисунок 8.56. Динамика индекса ММВБ (а) с 2005 по 2011 гг., (б) в 2011-2013 гг.

$H \approx 0.5$ – случайные блуждания
$H > 0.5$ – устойчивый повышающий либо понижающий тренд (рис. 8.56 а)
$H < 0.5$ – устойчивое среднее значение, или «боковой тренд» (рис. 8.56 б)

Тенденция к росту или снижению цены актива проявляется сильнее с увеличением H. Однако для расчета фрактальной размерности нужны длительные промежутки времени, на которых динамика цены успевает сильно измениться. Лучшую сходимость приближенных значений размерности удалось получить с минимальным прямоугольным покрытием (рис. 8.57)*. На участках с сильно выраженным трендом график ряда теряет самоподобие: мелкомасштабные флуктуации подавляются. Это одна из реализаций хорошо известной закономерности: согласованного («стадного») поведения участников рынка при быстром падении или росте цен активов.

* М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко, *Экономфизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов*, Усп. физ. наук, 2011, 181, 779.

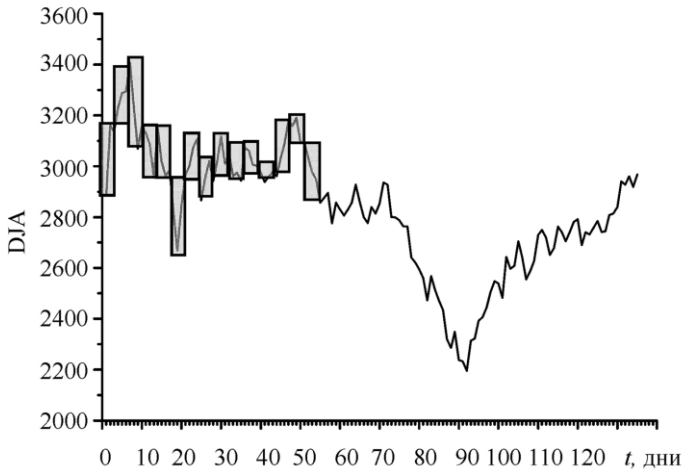


Рисунок 8.57. Прямоугольное покрытие ряда индекса Доу-Джонса с 27.10.2008 по 8.05.2009, минимум – вторая волна кризиса в марте 2009 г. (см. М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко, УФН, 2011, 181, 779)

Алгоритмическая торговля

Фрактальные индексы биржевых рядов в хорошем случае позволяют прогнозировать их динамику в достаточно длинных (дни и недели) интервалах времени с достоверностью на уровне прогноза погоды. В этом смысле они не дают практических рекомендаций, используясь лишь для ориентировки трейдеров либо при составлении «аналитических обзоров» для СМИ. В практике биржи, напротив, используются схемы, предоставляющие игрокам (почти) гарантированный выигрыш. В их основе – *краткосрочные* предсказания хаотического поведения динамических систем с использованием стохастических дифференциальных уравнений (см. [11]).

Варьирование переменной цены актива $Y(t)$ в финансовой математике представляют в виде суммы приращений, задаваемых функциями тренда («сноса») μ и волатильности σ

$$dY = \mu(Y, t, \boldsymbol{q})dt + \sigma(Y, t, \boldsymbol{q})dW, \tag{8.56}$$

где t – время, dW – случайное «броуновское» смещение, а вектор $\boldsymbol{q}$ – набор параметров модели. При ряде дополнительных допущений динамику плотности вероятности цены $\rho(Y, t, \boldsymbol{q})$ представляют уравнением Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Y}[\mu(Y,t)\rho(Y,t)] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\sigma^2(Y,t)\frac{\partial}{\partial Y}\rho(x,t)\right] \tag{8.57}$$

(см. формулу (4.22) в гл. 4). Удачная калибровка параметров модели по ряду наблюдаемых значений цены позволяет предсказывать ее ближайшие будущие значения и соответственно направлять поведение трейдера (покупка, продажа, ожидание). Из уравнений (8.56) и (8.57) видно, что в моделировании биржи эконофизика и финансовая математика оказываются прямыми конкурентами.

Возможность краткосрочного прогнозирования хаотической динамики системы устанавливает *теорема Такенса* (1981 г.). На основе этой теоремы состояние динамической материальной системы, определяемое m переменными $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)\}$, в момент t_0

можно восстановить по значениям одной из этих переменных в M предыдущих моментах времени [11]

$$x_1(t_0–M\tau),\ x_1(t_0–(M–1)\tau),\ x_1(t_0–(M–2)\tau),\ \ldots,\ x_1(t_0–2\tau),\ x_1(t_0–\tau),$$

где τ – время задержки (лаг). Таким образом, точку $2m$-мерного фазового пространства, в которую динамическая система с m степенями свободы (см. главы 2 и 4) придет в момент времени t_0, удается предсказать по M наблюдаемым значениям проекции ее фазовой траектории на одну из координат (рис. 8.58).

Собственно теорема Такенса посвящена *реконструкции аттрактора*: она утверждает, что для этого (при выполнении ряда необходимых условий) число наблюдаемых значений переменной должно быть больше удвоенной размерности аттрактора системы в фазовом пространстве

$$M \geq 2d+1,$$

где d – фрактальная размерность странного аттрактора, или множества точек, притягивающего хаотические траектории. Состояние сложной динамической системы, «управляющие» координаты которой $\{x_1, \ldots, x_m\}$ точно не известны (как это обычно и бывает), можно установить по M значениям ее измеряемого параметра $\{p(t_0–M\tau),\ldots,p(t_0–\tau)\}$. В данном случае состоянию в момент $t = t_0$ соответствует значение параметра $p(t_0)$.

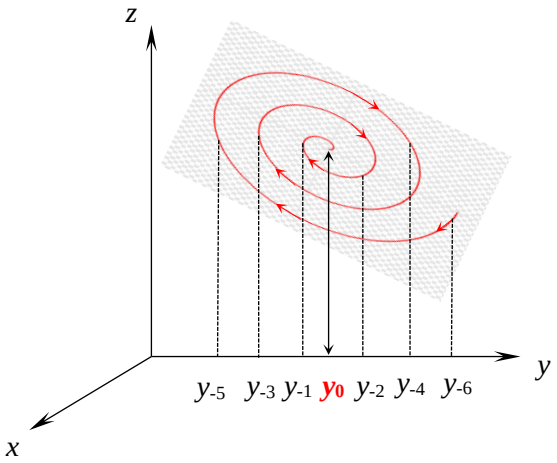


Рисунок 8.58. Реконструкция аттрактора по одномерному ряду (схема)

Теорема Такенса позволяет предсказывать значение параметра сложной динамической системы по серии его предыдущих значений. На достоверность прогноза влияют как правильность оценки длины серии, так и точность измеренных данных и степень их искажения шумом. На этой основе были разработаны практические «гусеничные» алгоритмы пошагового прогноза – в частности, *сингулярный спектральный анализ*[18]. Они применяются к мониторингу динамики сложных механических конструкций, сейсмическим наблюдениям и другим хаотическим процессам, включая состояния биржи.

Цены биржевых активов изменяются за минуты и секунды. Для извлечения прибыли из их краткосрочных флуктуаций используются компьютерные программы:

автоматизированные торговые системы, или *торговые роботы*. Компьютерная *алгоритмическая торговля* (включающая разбиение заявок и их распределение во времени, «самообучающиеся» алгоритмы) в настоящее время составляет до 80% всех операций на фондовых рынках США.

Торговые роботы повышают эффективность биржевой игры, однако вносят риск разорения игрока из-за ошибок в программе – что со временем будет исправлено, как любые риски от технических нововведений. Но, кроме того, при использовании коммерческих программ алгоритмической торговли функционирование биржи становится полностью непрозрачным. Масштаб биржевых операций и внедрение искусственного интеллекта в финансовые инструменты (см. [11] в списке литературы) опровергает тезис об ограниченном влиянии биржи в современной экономике. В действительности это влияние велико и быстро возрастает в последние десятилетия, угрожая дестабилизацией всей мировой экономической системы.

8.6.4. Мировые финансово-экономические кризисы

Религиозная вера основана на чуде, несовместимом с физическими
и биологическими законами – таком, как непорочное зачатие,
устойчивое развитие или безграничные творческие способности человека.
Джинг Чен, канадский экономист

Деструктивные фазы экономических циклов наблюдались в экономике Европы с возникновением капиталистического уклада в начале Нового времени (XVII век). В XIX веке *кризисы перепроизводства* происходили в европейских странах с периодичностью в 8-12 лет. Их характерными признаками были дисбаланс спроса и предложения, накопление нереализованных товаров (часто с их уничтожением), снижение цен, остановка производства, банкротства предприятий и банков, рост безработицы и общее падение уровня жизни.

Особый тип кризисных явлений составляют *биржевые пузыри* (ажиотажное повышение спроса на определенные активы, рост их цен и многократное увеличение выпуска необеспеченных бумаг, обычно с последующим резким падением) и *финансовые пирамиды*: криминальные схемы изъятия средств вкладчиков в искусственно созданных «пузырях». Спекулятивные «биржевые лихорадки» известны с XVII века (*тюльпановая лихорадка* 1636-37 гг. в Голландии, одна из первых финансовых пирамид *Компании Южных морей* 1720 г. в Англии[*] и другие). В XIX веке обвальное падение цен на биржах стало одним из признаков начала экономического кризиса.

Разрушение производительных сил общества в периоды кризисов отмечали все критики капиталистического строя[**]. При этом «магистральные» классические и неоклассические теории не объясняли кризисных явлений: они представляли рынок идеальным безынерционным инструментом, обеспечивающим самонастройку хозяйственных процессов, и призывали свести к минимуму участие государства в управлении экономикой. В основу теорий экономического кризиса, формулируемых на

[*]Исаак Ньютон, в 1720 г. потерявший три четверти своих вложений в акции Южных морей (23 тыс. фунтов стерлингов), так определил специфику социальных явлений: «Я могу исчислить движение небесных тел, но не безумие толпы».
[**]«Буржуазия выковала оружие, несущее ей смерть» (К. Маркс, Ф. Энгельс, *Манифест коммунистической партии*).

вербальном уровне, разные авторы в XIX-XX вв. обычно помещали его отдельные признаки, выбранные скорее случайно: недопотребление населения, перепроизводство товаров, анархию производства, дисбаланс спроса и предложения, недостаток денежной массы и прочие вплоть до психологических факторов.

В XX веке экономические кризисы приобрели всемирный характер (табл. 8.9), переплетаясь с политическими и военными потрясениями. Масштаб ущерба от Великой депрессии 1929-32 гг. в развитых капиталистических странах и их опыт экономического управления в мировых войнах создали в послевоенное время фундамент государственного регулирования капиталистических экономик (*кейнсианства*). Основной идеей этого периода стало сохранение экономических циклов при смягчении негативных последствий кризисов. Плановая экономика социалистических стран, теоретически защищенная от «рыночной стихии», на практике была связана с мировой экономикой (период коллективизации в СССР 1929-1933 гг., падение цен на нефть и газ в 1975 г. и др.). В конце 1980-х годов плановые экономики вошли в тяжелейший кризис, для большинства социалистических стран означавший потерю суверенитета.

Таблица 8.9

Крупнейшие мировые экономические кризисы в XX и XXI веке

1920-1921	Экономическая депрессия в Европе и США после I мировой войны
1929-1932	Мировой экономический кризис («Великая депрессия»)
1957-1958	Первый мировой экономический кризис после II мировой войны
1974-1975	Мировой энергетический и экономический кризис
1987	Мировой биржевой кризис
1997-1998	Азиатский финансовый кризис и финансово-экономический кризис в РФ
2001-2002	Мировой финансовый кризис
2008-2009	Мировой финансово-экономический кризис («Великая рецессия»)
с 2020 г.	Всесторонний мировой экономический и политический кризис

После распада социалистического блока в 1989-90 гг. и СССР в 1991 г. глобальная гегемония США сопровождалась переходом от государственного к монетарному экономическому регулированию. На фоне глобализации финансовой деятельности многократно возросла роль банков и негосударственных *финансовых регуляторов*, т.е. крупнейших ТНК, которые приобрели политические полномочия*. Распространение биржевой игры на фундаментальные ресурсы (полезные ископаемые, строительство, энергетику, сельское хозяйство и др.) предсказуемо привело к их удорожанию и дальнейшей поляризации доходов: обогащению частных «хозяев биржи» и крупнейших игроков за счет большинства человечества.

Технический и социальный прогресс в 1990-е годы позволял поддерживать высокий уровень жизни в богатейших странах мира, декларировавших бескризисное *устойчивое развитие* (англ. *sustainable growth*). Однако с начала XXI века на экономическое процветание западных стран накладывается возвращение и углубление глобальных финансово-экономических кризисов. Несмотря на декларируемую важность их предвидения и наличие явных эмпирических маркеров (см. ниже), «магистральная»

* Одной из характерных тем экономических дискуссий в то время стала «смерть кейнсианства».

экономическая наука в XXI веке не предсказала ни одного из трех последовательных мировых кризисов (табл. 8.9).

В современной западной политэкономической литературе кризис 2001-2002 годов, сопровождавшийся американским вторжением в Афганистан и Ирак, чаще называют «рецессией в США», кризис 2008-2009 объявляется финансовым, а текущий всесторонний кризис, начавшийся в 2020 г. – «вызванным пандемией Covid-19». Эта удивительная слепота обусловлена главным негативным свойством «терминальной фазы капитализма»: приватизацией и криминализацией глобальной финансовой сферы, а затем и всего мирового хозяйства. Следствием этого процесса являются сокрытие и препарирование объективных данных, что сильно изменило академические общественные науки в последние десятилетия.

В официальной экономической науке кризисы считаются результатом накопления ошибок в системе экономических агентов и распространения в ней «шоковых» воздействий финансовых регуляторов. В соответствии с этим постулатом, после кризисов 2001-2002 гг. и, особенно, 2008-2009 гг. во многих публикациях на теоретическом и эмпирическом уровне рассматривалась динамика сетевых экономических структур при неблагоприятных изменениях внешних условий. Большое значение придавалось возникновению каскадов (см. главу 6), моделирующих массовый выход их строя узлов мировой экономики.

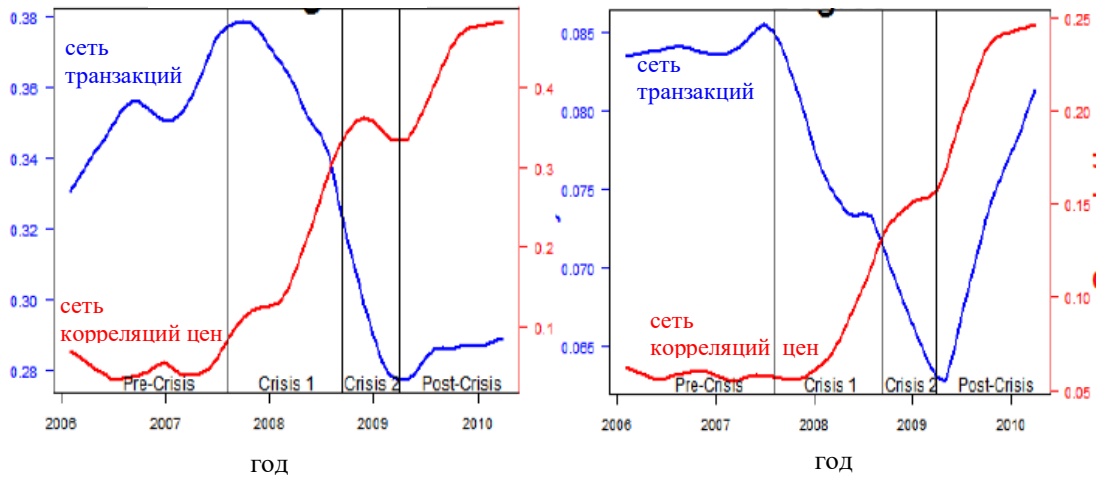


Рисунок 8.59. Фазы кризиса 2007-2009 гг. по динамике топологических индексов «физической» сети транзакций европейских банков и сети корреляций цен их активов: (а) коэффициент кластеризации, (б) доля средней степени узлов от максимальной (см. [19])

В многократно цитированной американской работе данного направления[19], опубликованной в 2019 г., рассматривались топологические характеристики сети взаимодействий (транзакций) европейских банков (авторы не располагали данными для банков США) и формальной сети корреляций цен на их активы в 2007-2009 гг. В работе было показано, что топологические параметры обоих типов сетей в период кризиса сильно изменяются: связность «физических» межбанковских сетей уменьшается, а связность в сетях корреляций увеличивается (рис. 8.59). (Это нетрудно объяснить согласованным падением цен биржевых активов в начале кризиса и их согласованным ростом при

восстановлении экономики). Существенно, что параметры этих сетевых структур начали изменяться с лета 2007 г., т.е. за год до официального признания мирового финансового кризиса руководством ведущих стран, и восстановились к концу 2009 г. Использования этой схемы для предсказания мирового финансового кризиса 2020 г. нами в литературе не найдено.

С конца 1990-х гг., в работах Д. Сорнетта и соавторов развивалось описание кризисов на основе аналогий с фазовыми переходами[20] (см. раздел 2.5 главы 2). «Надэкспоненциальный» рост цены активов и биржевых индексов $Y(t)$, наблюдаемый при возникновении биржевых пузырей, воспроизводился в рамках теории фазовых переходов Ландау разложением параметра порядка $F(x)=Y(t)–Y(t_0)$ в комплексозначный ряд по переменной $x = t_0 – t$ вблизи точки перехода t_0

(8.58) $$d\ln F/d\ln x = (\alpha + i\omega)F(x) + (\beta + i\varphi)F(x)^2 + \cdots,$$

где α, β, ω и φ – параметры модели. Нулевому приближению $d\ln F/d\ln x = \text{const}$ (ω=0) отвечает гиперболический рост цены актива, или «степени риска», а первому приближению – модулирующие его логарифмически-синусоидальные колебания (рис. 8.60)

(8.58 а) $$F(x) \approx A(t_0 - t)^{-\alpha} + B(t_0 - t)^{-\alpha}\cos[\omega\ln(t_0 - t) + \theta].$$

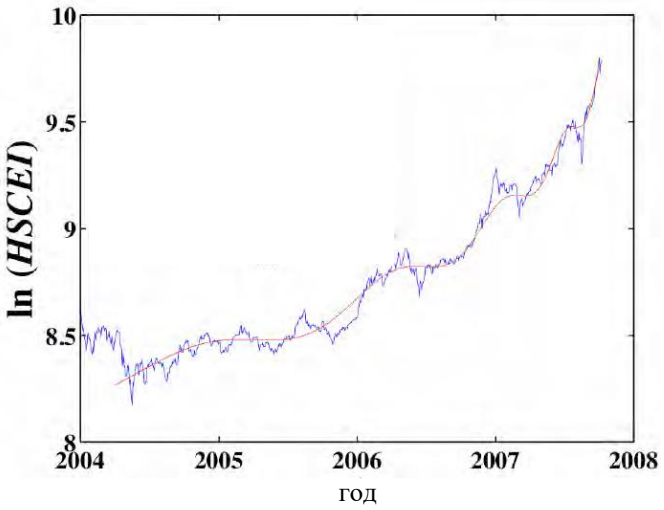


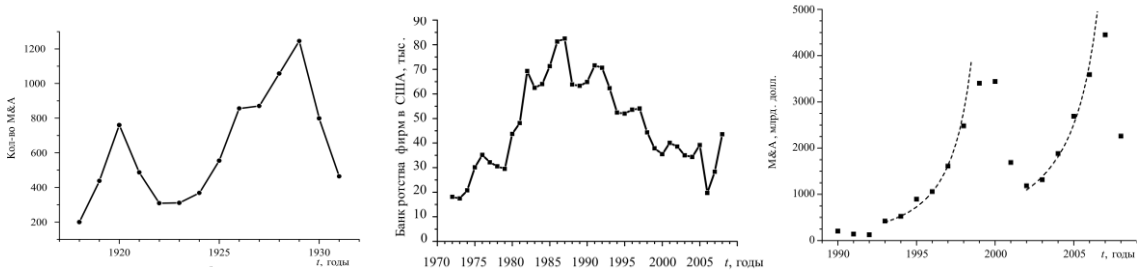
Рисунок 8.60. Изменение логарифма индекса Гонконгской биржи HSCEI с 2004 по 2008 г. Сплошная линия – гиперболический рост с лог-периодической модуляцией (D. Sornette, SSRN Electronic Journal, 2009, 2, 09-36).

По модели Сорнетта, нестабильность биржи *эндогенна* (а не возникает, как в большинстве экономических теорий, от воздействия внешних факторов). В ее основе – подражание и *стадное поведение*, которые характерны для большинства игроков, воспринимающих биржу как «денежный вечный двигатель». Это создает положительную обратную связь, увеличивающую цену актива – «самоорганизацию» биржевого пузыря*. Разрыв пузыря, то есть кризис, происходит в случайный момент, однако лог-периодические колебания сходятся к точке сингулярности t_0. Подбор параметров модели,

* «Современные люди в среднем наделены теми же качествами, что и в семнадцатом веке»[20].

воспроизводящих динамику актива, позволяет оценить вероятное время кризиса за 2-3 месяца до его наступления с точностью до нескольких недель.

Моделирование кризисов как фазовых переходов вместе с кинетической теорией денег, сетевым описанием экономики и другими применениями физических моделей в экономических науках обычно относят к эконофизике в широком смысле этого термина. Надо отметить, что кризисы 2001, 2008 и 2020 гг. в таких работах не были предсказаны. В 2008 г. в одном из ведущих университетов мира ЕНТ Zurich был организован центр мониторинга биржевых кризисов (Financial Crisis Observatory, FCO) под руководством Д. Сорнетта. В ежемесячных открытых прогнозах FCO* вероятность мирового биржевого краха не упоминалась вплоть до марта 2020 г.



(а) (б) (в)

Рисунок 8.61. (а) (а) Годовые количества крупных M&A в США с 1919 по 1931 г. (б) Число банкротств фирм США в год в 1970 – 2008 гг. (U.S. Census Bureau, Statistical Abstract of the United States, 2009, http://www.census.gov/compendia/statab/). (в) Годовые объемы сделок M&A в США с 1990 по 2008 гг. (U.S. Census Bureau, Thomson Reuters Financial Advisers, Mergers and Acquisitions Reviews, 2005-2008, http://www.reuters.com) и приближающие их гиперболы. (Ю.Л. Словохотов, Компьютерные исследования и моделирование, 2010, 2 (2), 202)

В XX веке биржевым и экономическим кризисам в США предшествовали волны *слияний и поглощений* (англ. *mergers and acquisitions, M&A*)**. Крупнейшие волны совпадали с периодами экспансии американской экономики: в 1920-е годы в Европу после 1-й мировой войны, а в 1990-2000-е годы в бывшие социалистические страны. По аналогии с расширением газа в пустоту, этот процесс сопровождался «снижением температуры» (ослаблением конкуренции) и «конденсацией капитала» по гиперболической динамике (рис. 8.61). Неконтролируемое укрупнение фирм, угрожающее *предельной дезорганизацией* (по формулировке англо-американского экономиста Эдит Пенроуз, подробно исследовавшей динамику роста капиталистических предприятий***), могло быть одним из факторов, ухудшавших функционирование мировой экономики. Начало кризисов в 2001 и 2008 гг. совпадало с падение объемов сделок по слиянию и поглощению в США и в мире.

* https://er.ethz.ch/financial-crisis-observatory.html

** A.J. Auerbach (Ed.) *Mergers and Acquisitions*, Chicago: Univ. Chicago Press, 1988.

***E. Penrose, *The theory of the growth of the firm*, 3rd Ed. — Oxford: Oxford University Press, 1995.

Современный мировой кризис 2020-?? гг.

В мировой экономической статистике, с начала 2010-х годов монопольно поставляемой информационным агентством Thomson Reuters, объемы M&A отражают не реальные цены сделок, а препарированная *справедливая цена акций*, искажающая гиперболическую динамику. Однако и в этом представлении суммарные объемы сделок M&A по кварталам снижались с конца 2000 г. и с середины 2007 г., указывая на приближение кризисов. Подобное снижение началось в 2018 г. (рис. 8.62). Кризисам 2001 и 2008 гг. предшествовали более локальные «предкризисы» на американской бирже – соответственно «пузырь» dot-com в 2000 г. и ипотечный кризис 2007 года Аналогичным предкризисным маркером стало глубокое (на 10-15%) падение мировых фондовых индексов в декабре 2018 г. (см. рис. 8.44) Тем не менее, рутинная деятельность мировых бирж как «денежного вечного двигателя» еще продолжалась более года.

Рисунок 8.62. Динамика слияний и поглощений в США с 1990 по 2019 гг. (J. Kengelbach, et al., 2019 M&A Report: https://www.bcg.com/ru-ru/publications/2019/mergers-and-acquisitions-report-shows-downturns-are-a-better-time-for-deal-hunting.aspx)

Быстрое снижение основных фондовых индексов большинства стран мира* началось в феврале 2020 г. и вскоре сменилось падением (рис. 8.63). На последней трети этого интервала Всемирная организация здравоохранения (ВОЗ) 12 марта 2020 г. объявила о начале пандемии короновирусной инфекции (Covid-19) в нарушение собственных критериев массовости заболеваний. Глобальное сокращение экономической деятельности («локдаун») под предлогом пандемии было первым согласованным действием всех государств планеты и ТНК в мирное время. Принудительное «охлаждение» экономик в течение 2020-2021 гг. сменилось быстрым восстановлением их параметров в ряде богатейших стран (рис. 8.64). Главные американские фондовые индексы в апреле 2022 г. превысили докризисный уровень на 22% (Dow Jones), 38% (S&P) и 51% (Nasdaq), хотя доля их инфляционной составляющей неясна на фоне интенсивной кредитной эмиссии

* Фондовые индексы КНР продемонстрировали высокую управляемость: их падение началось в январе и закончилось в конце марта 2020 г. сразу по окончании двухмесячного карантина по Covid-19.

(*количественного смягчения*). Но карантинные меры спровоцировали политическую нестабильность в высокоразвитых странах, включая США, привели к ослаблению хозяйственных и общественных связей, нарушили экономическое и политическое равновесие в мире и открыли фазу всестороннего глобального кризиса.

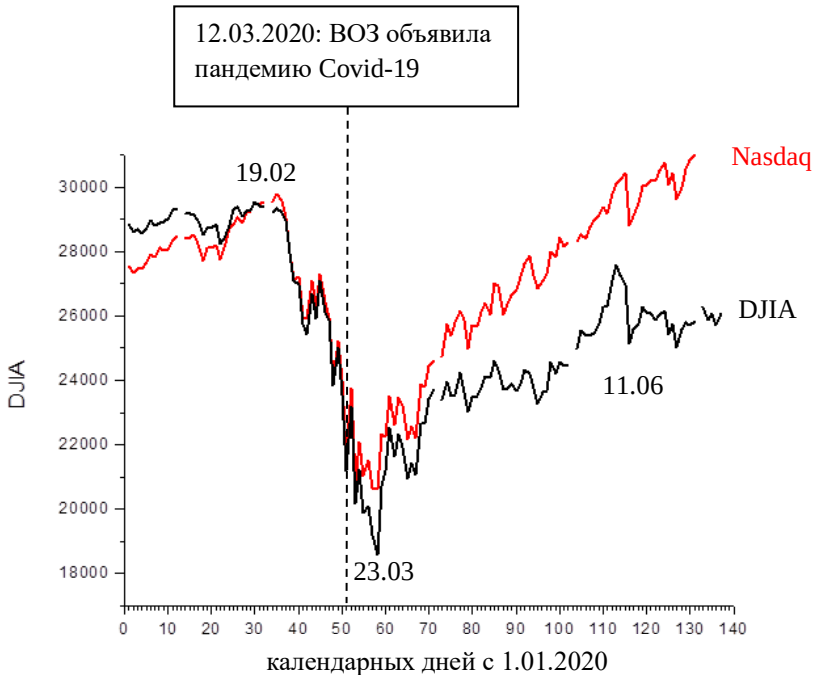


Рисунок 8.63. Динамика индексов Dow Jones Industrial Average и Nasdaq в первой половине 2020 г.

Литература к разделу 8.6

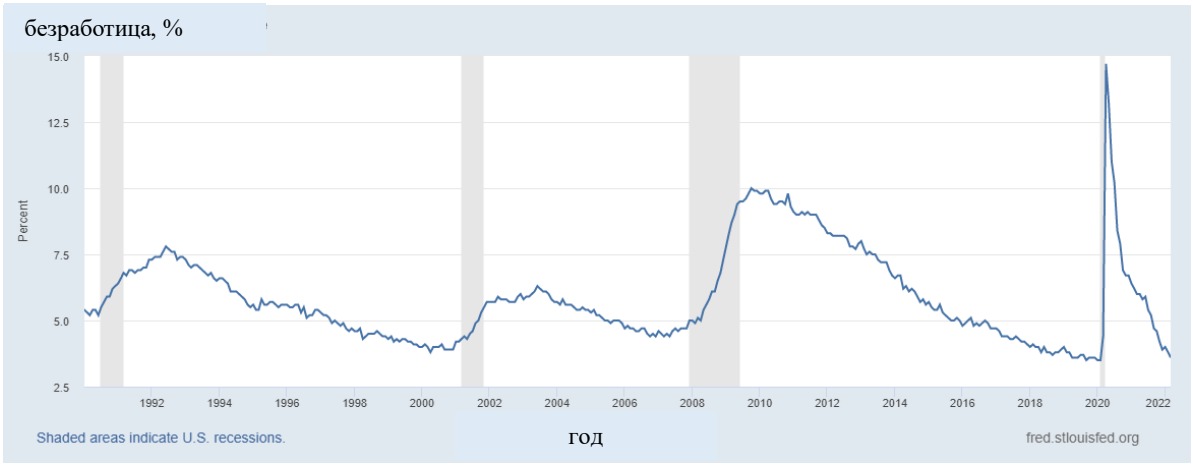
[18] Д.Л. Данилов, А.А. Жиглявский (ред.), *Главные компоненты временных рядов: метод "Гусеница"*, СПб., Пресском, 1998.
[19]C. Brunetti, J. Harris, S. Mankad, G. Michailidis, *Interconnectedness in the interbank market,* J. Financial Econ., 2019, **133** (2), 520.
[20] D. Sornette, *Dragon-kings, black swans and the prediction of crises*, SSRN Electronic Journal, 2009, **2**, 9.

8.7. Экспериментальная экономика и квантовоподобные модели

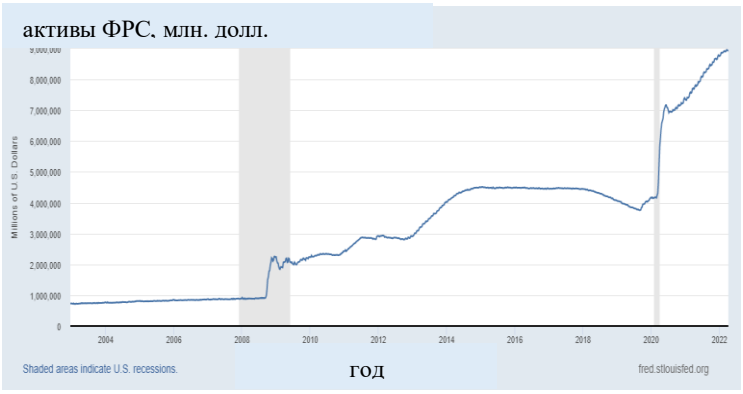
Основной постулат неоклассической экономической теории о рациональном стремлении агентов к максимуму полезности был экспериментально опровергнут во второй половине XX века. В экспериментах психологов по имитации экономической деятельности людей в условиях неопределенности были выявлены принципиальные отклонения испытуемых от рационального поведения:

1. Ограниченность информации, в том числе игнорирование информации, противоречащей установкам субъекта (например, предупреждений о скором крахе спекулятивного пузыря)
2. Инерционность мышления, консерватизм
3. Ориентация на большинство (*стадное поведение*)
4. Важность коллективной оценки, или *социального рейтинга* – в том числе при сильных отклонениях от средней нормы («все будут завидовать моему богатству»)

5. Асимметрия восприятия потерь и приобретений: материальный убыток воспринимается острее, чем приобретение такой же суммы
6. Стремление к цели: на начальном этапе сил и средств обычно расходуется меньше, а ближе к достижению цели больше, чем необходимо
7. Предпочтительность быстрого и наглядного результата перед более выгодным отложенным («лучше синица в руке, чем журавль в небе»)
8. «Переполнение памяти»: многочисленные варианты парализуют действие субъекта, предпочтительны простые решения.



(а)



(б)

Рисунок 8.64. (а) Уровень безработицы в США с января 1990 по март 2022 г., (б) активы Федеральной резервной системы, выкупленные на эмиссию «безналичных» денег в программе количественного смягчения. Серые полосы – периоды рецессий. Источник: Federal Reserve Economic Data (FRED), St. Louise, https://fred.stlouisfed.org/

Перечисленные положения окончательно перевели неоклассические постулаты в область идеологии, составив основу *экспериментальной*, или *поведенческой экономики* (англ. *behavioral economy*). Одним из ее основных принципов является *ограниченная рациональность* (англ. *bounded rationality*) экономических агентов. Их описание было основано на *бихевиоризме*: психологической теории, предполагающей жесткую связь реакции индивидуума на вызывающий стимул по аналогии с безусловными и условными рефлексами И.П. Павлова (см. разделы 1.1.5 и 1.5.2 в главе 1). Новую область на стыке

экономики, психологии и теории принятия решений сформировали работы в области *когнитивных наук* (Тверски, Шафир, Канеман и др.)[21]. Большой фактический материал предоставила биржевая деятельность (англ. *behavioral finance*), с 1970-80-х годов вступившая в фазу гипертрофированного развития.

Большое значение в поведенческой экономике придается *имитационным играм*, где испытуемые принимают решения по правилам, заданным экспериментатором или компьютерной программой – например, в повторяющейся «дилемме бандита» (см. гл. 7). Имитационные игры, воспроизводящие разнообразные стороны человеческой деятельности (штабные учения, военные и деловые игры, другие имитационные эксперименты) – стандартное современное средство прогнозирования экономической и социальной динамики[22].

В настоящее время крупномасштабные имитационные эксперименты (до тысяч участников) проводятся на основе Интернет в рамках *массовых многопользовательских онлайн-игр*. В характерном исследовании статистика достижений участников фантастической онлайн-игры Pardus использовалась для вывода распределения их виртуального богатства (совпавшего с реально наблюдаемыми распределениями, см. выше разд. 8.4.1) и динамики «экономических» взаимодействий[*]. Использование таких игр в имитационном моделировании социальных и военных конфликтов будет обсуждаться в следующей главе.

Нельзя не отметить, что ролевая игра в ограниченной группе участников (часто студентов) с символическими суммами бонусов и штрафов либо MMOG как форма досуга сильно отличаются от реальности, где люди, по необходимости рационально, конкурируют за средства к существованию. Построение экономики «снизу вверх» как экспериментальной науки сдерживается еще и тем, что многие стандартные психологические испытания с позиций экспериментальной физики выглядят неоправданно усложненными[**]. Так или иначе, имитационное моделирование широко используется в экономических дисциплинах – в том числе как исследовательский инструмент. В современном компьютерном моделировании экономических и финансовых процессов ограниченная рациональность агентов учитывается в случайном выборе хода, стадном поведении (корреляции ходов агентов) и т.д. Примером может служить выбор из ограниченного набора эвристик при «игре в меньшинство», рассмотренной в предыдущей главе (разд. 7.6.2).

В ряде работ последних десятилетий стохастическое поведение агентов описывают соотношениями, заимствованными из квантовой механики. В этом строго не обоснованном, но популярном разделе междисциплинарной физики можно выделить три направления: (1) квантовомеханические модели динамики биржевых активов, (2) развитие квантовой теории игр и (3) квантовоподобное моделирование принятия решений.

---

[*] B.Fuchs, S.Turner, PLoS ONE, 2014, **9** (8), e103503

[**] В психологии выше ценятся те экспериментальные результаты, которые можно использовать на практике для классификации и диагностики состояния индивидуумов (докт. биол. наук А.В. Курганский, частное сообщение).

Квантовомеханические модели биржи

За исключением уравнения Блэка-Шоулза, воспроизводящего динамику цены опциона в точно заданных условиях (см. разд. 3.2.2 в гл. 3), большинство физических формул и моделей переносится в экономику без серьезного обоснования. Главным требованием к модели, заимствованной из физики, является ее удовлетворительное согласие с серией данных и возможность улучшить это согласие варьированием «подгоночных» параметров. Поэтому принципиальная возможность или невозможность переносить закономерности физики атомов и молекул на такой безусловно макроскопический объект, как биржа, в финансовой математике не обсуждается: здесь главным достоинством теоретической модели является ее гибкость.

Стандартные модели квантовой механики хорошо изучены, некоторые из них обсуждались в разделе 3.3 главы 3. Состояния «неживых» квантовых систем заданы волновыми функциями и ограничены физическими условиями – в частности, законом сохранения энергии, действительными собственными значениями операторов (только в этом случае им соответствуют наблюдаемые величины), нормировкой комплексных волновых функций, квадраты которых задают положительную плотность вероятности, правилами отбора и др. Если же рассматривать модели квантовой механики как подгоночные схемы без сохраняющихся величин и иных ограничений, эти имитационные модели действительно оказываются очень гибкими. Именно такие модели, построенные по формальной аналогии с квантовой механикой, но нацеленные прежде всего на получение спекулятивной прибыли, используются в современном описании биржи.

Наглядный пример представляет описание динамики активов на основе квантового гармонического осциллятора. Эта модель подробно разбирается в начальных курсах квантовой механики, для нее уравнение Шредингера решается точно. У одномерного (т.е. линейного) гармонического осциллятора имеется бесконечный набор дискретных состояний с *эквидистантными* уровнями энергии $\{E_i\}$ (одинаково отстоящими от соседних уровней). В каждом дискретном состоянии квантового осциллятора распределение положений материальной точки на пружинке по координате x задает стоячая волна плотности вероятности $\rho_i(x) = |\psi_i(x)|^2$, где ψ_i – волновая функция i-го состояния (рис. 8.65 а, также см. рис. 3.30 а в гл. 3).

Если координату x отождествить с логарифмической доходностью актива

$$x = \ln Y(t + \Delta t) - \ln Y(t)$$

(см. формулу (8.51) в разделе 8.6 этой главы), плотность вероятности ее распределения ρ при энергии «осциллятора» E задается суммой по n заселенным состояниям

(8.59) $$\rho_E = \sum_1^n c_i \rho_i , \qquad E = \sum_1^n E_i$$

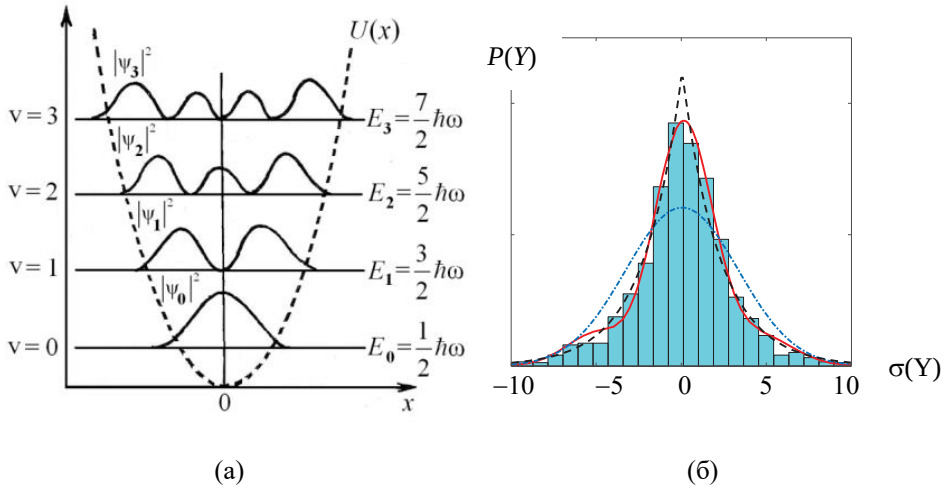
Функции $\{\rho_i\}$ в каждом дискретном состоянии точно известны. Положительные числа $\{c_i \in [0, 1]\}$ – это заселенности состояний, или вероятности их реализации, так что

(8.59 а) $$\sum c_i = 1$$

Суммирование в (8.59) и (8.59 а) проводится по всем состояниям с энергией $E_i < E$. Зависимости заселенностей $\{c_i\}$ от энергии состояний естественно придать вид

(8.59 б) $$c_i = e^{-\theta E_i},$$

(у состояний с более высокой энергией заселенность ниже). Множитель θ имеет смысл «обратной температуры»: его подбирают так, чтобы выполнялось равенство (8.59 а). Если мы знаем «температуру биржи» и «энергию актива» $E = \Sigma E_i$, формулы (8.59) и (8.59 а, б) позволят нам рассчитать распределение логарифмической доходности актива и сравнить его с фактическими данными.



(а) (б)

Рисунок 8.65. (а) Распределение плотности вероятности координаты *x* в квантовых состояниях гармонического осциллятора. (б) Флуктуации логарифмической доходности *Y* индекса FTSE в 2007-2014 гг., красная линия – «квантовая» подгонка (K. Ahn, et al., Europhys. Lett., 2017, 120 (3), 38003)

Представленная логичная схема имеет один недостаток: у биржевых активов *нет* ни «температуры», ни «энергии», это лишь метафоры из популярных обзоров рынка. Квантовый гармонический осциллятор – *консервативная* система (см. часть I), его соотношения основаны на законе сохранения энергии. Напротив, «энергия биржи» (если пытаться ее связать с ценами активов – а других энергоподобных параметров там нет) безусловно не постоянна; более того, в период кризиса она злостно переменна. Таким образом, уравнение (8.59), которое в рамках квантовой механики было строгим и точным, превращается в эмпирическую формулу с подгоночным параметром E – и мы даже не можем определенно сказать, что означает этот параметр. Зато для набора волновых функций осциллятора легко заметить, что с увеличением энергии уровня максимумы плотности вероятности смещаются от центра ($x = 0$) к периферии, т.е. большим $|x|$ (рис. 8.65 а). Именно это и нужно. Заменим эмпирический параметр E, физический смысл которого все равно неясен, максимальным номером уровня n в суммах (8.59), рассчитаем суммарную плотность состояний при разных n и сравним ее с распределением доходности актива. И тогда окажется, что мы, даже не поставив такой задачи, воспроизвели одну из особенностей биржевого распределения: *тяжелые хвосты* (рис. 8.65 б).

К настоящему времени в физических журналах опубликовано немало статей, посвященных «квантовой механике биржи». Наиболее последовательно и успешно

квантово-имитационный подход развит в статьях и книгах Билала Бааки[23] – профессора физики в Национальном университете Сингапура, после выхода в отставку в 2016 г. полностью посвятившего себя анализу финансов. В этих работах аппарат квантовой механики последовательно применялся к описанию динамики цен активов, включая квантование уравнений Блэка-Шоулза и Фоккера-Планка, вывод операторов Гамильтона и Лагранжа для финансовых моделей, исследование биржи методами релятивистской квантовой физики (фейнмановские интегралы по траекториям) и мн. др. Книги Бааки начинаются с краткого и понятного изложения основ квантовой механики и финансовой математики, а затем вводят в «квантовые финансы»; в отечественной литературе такого руководства пока нет. Построенные в них расчетные схемы хорошо воспроизводят стохастическую динамику цен и индексов.

Квантово-имитационный подход подвергается критике за нарушение фундаментальных принципов собственно квантовой физики – в частности, за действительные волновые функции, комплексные собственные значения гамильтониана или «мнимое» время *it*. В большинстве «квантовых» исследований биржи анализируются и преобразуются дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V(x,t)u, \tag{8.60}$$

где $u(x, t)$ – некоторая действительная функция «экономической переменной» x (в более сложных моделях – нескольких переменных ($x_1, x_2, \ldots, x_n$)) и времени t, а функции A и V выполняют роль модифицирующих множителей. Уравнение (8.60) напоминает уравнение Шредингера для одномерного движения

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi, \tag{8.60 а}$$

где ψ – волновая функция системы, $\mathcal{H}$– ее оператор Гамильтона (*гамильтониан*), $\hbar$ – постоянная Планка, i – мнимая единица: $i^2 = -1$ (см. формулу (3.58) в главе 3). Если забыть про мнимую единицу i, которая делает волновую функцию ψ комплекснозначной, оператор $A\partial^2/\partial x^2+V$ в правой части уравнения (8.60) можно назвать «гамильтонианом», $u(x, t)$ – «экономической волновой функцией», а формулу (8.60) – ее «уравнением Шредингера».

В одной из работ[*], посвященной критике «квантовых финансов», обоснованно утверждалось, что успешные финансовые прогнозы квантово-имитационных методов и, шире, «квантовой эконофизики» объясняются именно нарушениями фундаментальных физических постулатов, отчего уравнения квантовой механики переводятся в модифицированные уравнения стохастической физики. Действительно, чтобы решить дифференциальное уравнение (8.60), необходимо задать начальные и граничные (краевые) условия – иначе ему удовлетворяет множество разных функций $u(x, t)$ (гл. 3, разд. 3.2). Если «экономическая» функция u (например, полезность) и ее переменные (например, величины спроса) принципиально не определены, модель позволяет конструировать условия, подгоняющие уравнение под любые гипотезы. Кроме того, главные качества квантовой механики – это интерференция состояний (тогда функция u в общем случае должна быть

[*]G. Arioli, G. Valente, Philosophy of Science, 2021, **88** (4), 665.

комплексной, а $\rho(x,t) = |u(x,t)|^2$ – плотностью вероятности состояния системы) и «зернистое» фазовое пространство, разделенное на ячейки $\delta x \cdot \delta(dx/dt) \geq \hbar$ (принцип неопределенности). Если же отождествить u с положительной плотностью вероятности ρ и считать квантовую неопределенность δx просто стохастическим шумом, (8.60) превратится в уравнение параболического типа, родственное уравнению диффузии (см. разд. 3.2.1). Такие уравнения – например (8.56) и (8.57) – давно и успешно применяются в моделировании биржи.

Квантовая теория игр

Многие экономические системы и процессы исследуются методами теории игр (см. предыдущую главу). С начала XXI века растет популярность *квантовых игр*, где в построении платежных матриц и стратегий используются соотношения, перенесенные из квантовой механики. Физическая обоснованность такого подхода еще менее очевидна, чем у «прямого» квантовомеханического описания экономики. В литературе этот вопрос не рассматривают: квантовые игры обсуждаются только в теоретико-игровых рамках.

Вычислительный аппарат квантовой механики – решения уравнения Шредингера, гамильтонианы и лагранжианы различных нерелятивистских и релятивистских систем, спектры их собственных значений, интегралы по траекториям и прочие конструкции – при «квантовании» игр не используется. В отличие от классических игр с точно заданными состояниями, в квантовых играх разрешены смешанные состояния вида

$$\Psi = \sum c_i \psi_i, \tag{8.61}$$

где $\{\psi_i\}$ – набор базисных классических состояний системы либо стратегий игроков, $\{c_i\}$ – их вероятности. В отличие от обычных смешанных стратегий, «волновым функциям» $\{\psi_i\}$ могут соответствовать комплексные числа в матрице платежей.

В одной из первых работ этого направления* был предложен наглядный пример *повторяющейся игры в орлянку*, где два игрока в каждом из N раундов вслепую переворачивают либо не переворачивают монету: выигрывает получивший «орла» в последнем раунде. Если «классический» игрок мог только переворачивать монету, то «квантовый» игрок мог конструировать *суперпозиции*, т.е. комбинации состояний ψ_o («орел») и ψ_p («решка»):

$$\Psi = c_1\psi_o + c_2\psi_p \tag{8.61 а}$$

Квантовый игрок имеет континуальное множество ходов и очевидно обыгрывает классического игрока, имеющего всего два хода: перевернуть монету или не переворачивать. Так, квантовому игроку достаточно на своем первом ходе перевести стороны монеты в комбинацию $\Psi = (1/\sqrt{2})(\psi_o + \psi_p)$, далее выжидать и на N-м шаге перевести $\Psi \rightarrow \psi_o$, поскольку оба хода классического игрока оставляют монету в неизменном состоянии Ψ. Хотя для квантового и классического игроков в этом случае явно

* D.A. Meyer, Phys. Rev. Lett, 1999, **82**, 1052

различаются правила игры – построение игр, в которых «классические» стратегии являются частным случаем «квантовых», стало быстро развивается с конца 1990-х годов.

Вторым базовым постулатом квантовых игр стала *запутанность* (англ. *entanglement*) стратегий игроков (см. раздел 3.3 в гл. 3). Стратегии (ходы) игроков в этой логике представляются как измерения параметра квантовой системы[*]. Количество информации в квантовой системе, в отличие от классических единиц *бит* (|0⟩ или |1⟩), выражается в «квантовых битах», или *кубитах* (англ. *qubit*). Так, обозначая в (8.61 а) состояния «орел» $\psi_o = |0\rangle$ и «решка» $\psi_p = |1\rangle$, мы представим суперпозицию состояний Ψ кубитом $c_1|0\rangle + c_2|1\rangle$. Если ходам двух «классических» игроков с бинарными стратегиями отвечают четыре варианта {00, 01, 10, 11}, для двух кубитов возможна комбинация

(8.62) $$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

которую нельзя разложить на два изолированных кубита. Измерению квантового параметра ($P = \psi \cdot \psi^*$) соответствует перевод комплексных чисел в положительные значения вероятностей для компонентов смешанных стратегий, или, на квазифизическом языке, «редукция волнового пакета»

В *квантовой дилемме бандита*, построенной на основе этого формализма, агенты выбирают смешанные стратегии вида (8.61 а), где состояние |0⟩ – предательство сообщника, а |1⟩ – сотрудничество с ним. Напомним (разд. 7.2), что в этой игре с ненулевой суммой и платежной матрицей

(8.63)

	I	II
I	a, a	b, c
II	c, b	d, d

с условием на ее элементы

$$c > a > d > b$$

имеется равновесие Нэша в чистых стратегиях |00⟩ «предавать». В классических смешанных стратегиях ожидаемые выигрыши первого и второго игроков равны

(8.64) $$Y_1 = aP|11\rangle + bP|10\rangle + cP|01\rangle + dP|00\rangle$$

$$Y_2 = aP|11\rangle + cP|10\rangle + bP|01\rangle + dP|00\rangle$$

(где $P|ij\rangle$, $i,j \in [0, 1]$ – вероятности комбинаций ходов двух агентов). Задавая матрицу платежей как в цитированной выше работе Эйзерта и соавторов

(8.63 а)

	I	II
` I	3,3	0, 5
II	5,0	1,1

[*] J. Eisert, M. Wilkens, M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. 1999, **83**, 3077.

при P|11⟩ = P|10⟩ = P|01⟩ = P|00⟩ = ¼ (все четыре исхода равновероятны) получим ожидаемые выигрыши

$$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{4}(a + b + c + d) = 2.25$$

а при P|01⟩ = P|10⟩ = ½ (каждый бандит с вероятностью 50% предает верного сообщника)

$$Y_1 = Y_2 = \frac{1}{2}(b + c) = 2.5.$$

Если P|00⟩ = 1 и вероятности других исходов равны нулю

$$Y_1 = Y_2 = d = 1,$$

т.е. ожидаемые выигрыши (1, 1) (равновесие Нэша). Если же P|11⟩ = 1, то

$$Y_1 = Y_2 = a = 3$$

с выигрышами (3, 3) (оптимум Парето, не являющийся решением игры).

В случае «квантовых» смешанных стратегий вероятности исходов вычисляются как квадраты комплексных волновых функций $\psi|ij\rangle$, где $i,j \in \{0, 1\}$. Вид функций определяется степенью «запутанности» (т.е. взаимной обусловленности) кубитов. Непрерывному множеству этих функций, в зависимости от числового «параметра запутанности» $0 < \gamma < \pi/2$, отвечает множество стратегий от независимых ($\gamma = 0$) до полностью коррелированных ($\gamma = \pi/2$). Решением игры с независимыми стратегиями является классическое равновесие Нэша (d, d). При полной корреляции стратегий в квантовой игре равновесие Нэша (a, a) совпадает с оптимумом Парето. В промежуточных точках равновесию (q, q) отвечают выигрыши $d < q < a$.

Напомним (раздел 3.3.2 в гл. 3), что с точки зрения физики запутанность волновых функций не является самостоятельным явлением: «запутанным» функциям конечных состояний в *парадоксе ЭПР* соответствует сохранение спина в системе частиц: $s_1 = -s_2$. В общем случае запутанность состояний физической квантовой системы соответствует сохранению некоторого ее параметра: суммарной энергии, суммарного импульса или суммарного спина. Поскольку сохранение может быть только точным, «коэффициент запутанности» в физической системе может принимать лишь два значения – например, $\alpha=1$ (параметр сохраняется) и $\alpha=0$ (параметр не сохраняется). «Частично запутанные» системы выходят за пределы физики и в этом смысле не являются квантовомеханическими, однако для них возможны комплекснозначные смешанные стратегии, отсутствующие в классических играх. Для полной «квантовой корреляции» стратегий в дилемме бандита нетрудно найти материальный аналог: если сообщники держат в банке крупную сумму, которую могут получить только вместе – у них не возникнет и мысли о предательстве, т.е. реализуется оптимум Парето. Но такая корреляция, изменяя платежную матрицу ($a > c$), соответствует переходу к другой игре.

Итак, «квантование» игр соответствует их изменению и поиску смешанных стратегий в модифицированных играх с использованием комплексных функций для вычисления вероятностей. Несмотря на отсутствие физического обоснования, формализм квантовых

игр быстро развивается; исследуются его возможные приложениями к задачам экономики. Своим возникновением новые игры обязаны *квантовой теорией информации*, проектам *квантовых компьютеров* и реально существующим методам защиты информации: *квантовой криптографии*. Последнее обстоятельство неплохо соответствует весьма запутанным объяснениям квантовых игр в отечественной литературе. Некоторые их начальные положения представлены в гл. 8 книги Колокольцова и Малафеева ([1] в списке литературы к гл. 7).

Квантовоподобные модели принятия решений

Первые 15 лет своей семейной жизни он и не подозревал, что в пылесосах есть мешочки: он думал, что пыль как-нибудь сама уходит по проводам в стену.
Дэвид Барри, американский юморист

Рассмотренные выше приложения формального аппарата квантовой механики к экономике и финансам трудно назвать теоретически обоснованными. Главной, если не единственной аналогией между «неживыми» физическими и «живыми» социальными системами в них служит вероятностное описание, а критерием успеха – воспроизведение некоторого ряда числовых параметров социума, изменяющихся во времени, с помощью квантовоподобных уравнений. Подразумевается, что модели, хорошо воспроизводящие реальные данные, впоследствии можно будет объяснит в рамках физики. Таким образом, «квантовые» междисциплинарные работы физиков до сих пор в основном сводятся к использованию математических конструкций, заимствованных из квантовой теории – таких, как гамильтонианы и волновые функции – для подгонки результатов измерений в общественных науках. Особенности измерений в социальных системах, прежде всего воспроизводимость и достоверность их результатов, в работах физиков обычно не обсуждаются. Исключение из этого эмпирического подхода составляют «квантовые» модели человеческого поведения, которые физики и математики конструируют с начала XXI века вместе с психологами и другими представителями когнитивных наук.

Возможные аналогии социальных явлений с квантовомеханическими закономерностями основатели квантовой теории обсуждали на качественном уровне с 1930-х годов. В этих дискуссиях Бора, Борна, Эйнштейна и других ведущих теоретиков была высказана гипотеза о квантовом характере человеческого восприятия, обусловленном микроскопическим масштабом передачи электрического сигнала в синапсах (см. разд. 6.2.2 в главе 6). По предположению основоположников новой физики, квантовые процессы переноса зарядов должны *как-нибудь* проявляться в особенностях сознания и мышления – то есть, в отличие от позднейших теорий, у этих особенностей предполагался объективный физический механизм. Поскольку деятельность людей в обществе основана на восприятии и переработке информации, квантовые эффекты индуцируются в психологию, а через нее – в экономику, политику и другие стороны общественной жизни[*].

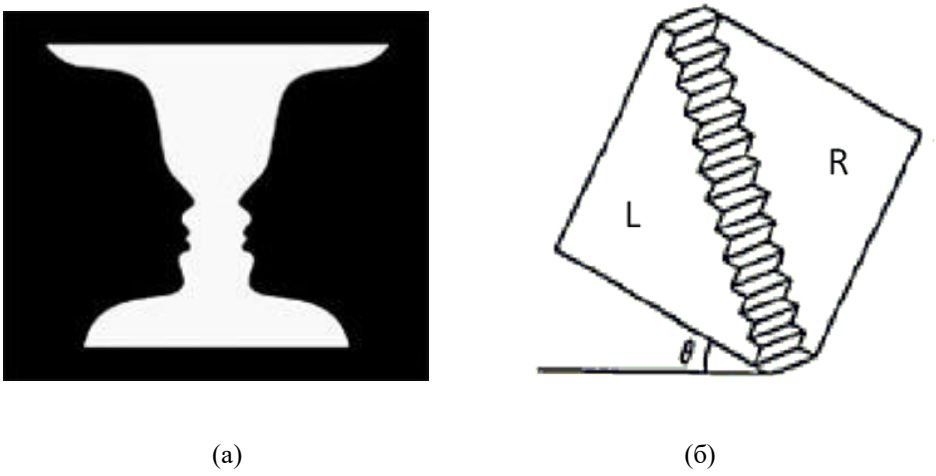
Квантовоподобные психологические модели XXI века, подобно другим современным приложениям квантовомеханического аппарата в общественных науках, не имеют

[*] Статья талантливого итальянского физика-теоретика Этторе Майорана, в 1938 г. пропавшего без вести в возрасте 32 лет, о подобии статистических закономерностей общественных наук законам статистической физики и квантовой механики вышла в Италии в 1942 г. В XXI веке ее английский перевод стал одним из манифестов новой междисциплинарной физики (Quant. Finance, 2005, **5**, 133).

физического обоснования. В них на качественном уровне декларируются аналогии амбивалентного человеческого поведения с такими аспектами квантовой механики, как принцип неопределенности (иногда превратно истолкованный), «принцип дополнительности» (прямо ошибочный, см. разд. 3.3 в гл. 3) и интерференция при рассеянии квантовых частиц – также нередко вульгаризированная в стиле «Фейнмановских лекций»*. Во многих работах, посвященных иллюзиям восприятия, состояние воспринимаемого объекта предлагалось описывать волновой функцией, задающей две альтернативные интерпретации изображения

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2),$$

как, например, разные восприятия изображения на рис. 8.66 а: ψ_1 – белый профиль («ваза»), ψ_2 – черные контуры («поцелуй»). Выбор испытуемым той или иной интерпретации при этом характеризовался как «редукция волнового пакета» или «коллапс волновой функции» – т.е. в терминах, относящихся не столько к квантовой физике, сколько к ее преломлению в сознании ученых (см. разд. 3.3 в гл. 3). В психологических опытах по разрешению визуального парадокса регистрировалась частотность выбора альтернатив – таких, как расположение ступеней *лестницы Шредера* «выше» либо «ниже» линии ее наклона в зависимости от угла поворота рисунка θ (рис. 8.66 б).



(а) (б)

Рисунок 8.66. Оптические иллюзии. (а) белый контур – ваза, черные профили – поцелуй; (б) лестница Шрёдера: ближайшая к зрителю сторона – левая (L) или правая (R)?

* Ричард Фейнман – безусловно, один из крупнейших физиков-теоретиков второй половины XX века – в 1961-63 гг. прочел новаторский курс общей физики для студентов Калифорнийского технологического института (Caltech, США). Книга Р. Фейнмана, Р. Лейтона и М. Сэндса «Фейнмановские лекции по физике» (М.: Мир, 1978), составленная по конспектам этих лекций, была переведена на многие языки и способствовала модернизации физических дисциплин в крупнейших университетах мира, включая МГУ и МФТИ. Аудиторию Фейнмана составляли студенты 1-2 курсов, то есть недавние выпускники американских школ, по уровню физико-математической подготовки отставшие не только от советских, но и от нынешних российских абитуриентов. В «Фейнмановских лекциях», как первом современном руководстве, имеется ряд неоправданных упрощений – в том числе в абсолютно новом для общей физики того времени разделе «Квантовая механика». Последующие знаменитые американские учебники – такие, как шеститомный «Берклеевский курс физики» (М.: Наука, 1972-1986 гг.) – свободны от этих недоработок.

Толчком к построению квантовых моделей стали упомянутые выше экспериментальные исследования Канемана, Тверски, Шафира и других авторов. В них было показано, что вероятности решений испытуемых в условиях неопределенности отклоняются от формулы Байеса

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1)P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2)P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2), \tag{8.65}$$

где $P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)$ и $P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)$ – условные вероятности бинарного выбора, соответственно, «В при условии A_1» и «В при условии A_2», а $P(\mathrm{B})$, $P(\mathrm{A}_1)$ и $P(\mathrm{A}_2)$ – полные вероятности выбора В и сопровождающих его событий A_1 и A_2. Вероятность события В, отвечающая (8.65) (см. тж. формулу (8.11) в разд. 8.2.1) подразумевает полностью рациональный выбор альтернатив. Эксперименты же показали сильную зависимость принятия решений от контекста – в частности, от предыдущего выбора испытуемых. Вытекающая отсюда ограниченная рациональность интерпретировалась как случайный выбор агентом одного из двух либо из нескольких компонентов комплексных «амплитуд вероятностей», которые соответствуют разным вариантам. Вероятности выбора пропорциональны весовым множителям, которые тоже могут различаться – см. формулу (8.61 а). «Запутывание» испытуемых при выборе объяснялось интерференцией «амплитуд вероятностей», подобной интерференции при рассеянии потока квантовых частиц.*

В психологических науках имеется собственное понятие *интерференции* (означающей деструктивное вмешательство посторонних факторов в эксперимент), и рассуждения о «квантовом механизме принятия решений» вызвали большой интерес психологов. Квантовоподобные конструкции продолжают обсуждаться при анализе разных форм человеческого поведения в психологии, политологии, экономике и финансах.

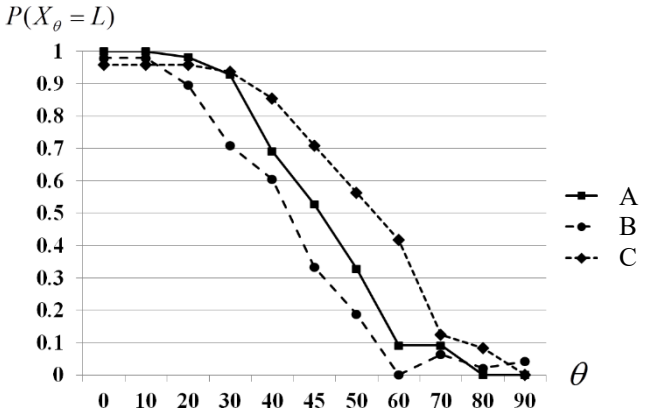


Рисунок 8.67. Частотность ответов «ближайшая сторона – левая» в зависимости от угла θ поворота лестницы Шрёдера (см. рис. 8.66 б): сплошная линия (А) – случайная последовательность предъявляемых ориентаций, пунктирная линия (В) – увеличение угла поворота θ от 0 до 90º, штриховая линия (С) –уменьшение угла θ от 90º до 0º (A.Khrennikov, Front. Psychol. 2015, 6, art. 997)

Стоит отметить, что в указанных экспериментах не были обнаружены дискретные «выбросы» результатов либо аналоги интерференционных «биений» при непрерывном изменении параметров опыта – т.е. именно квази-квантовые эффекты (см. рисунки 3.28 и

*A. Khrennikov, Front. Phys., 2015, **3**, Article 77.

3.34 в главе 3). В этих работах были установлены лишь статистически значимые отклонения от классических вероятностей испытаний (рис. 8.67), интерпретируемые на качественном уровне в рамках квантовых моделей. В отличие от квантовоподобного описания биржи, в «квантовой когнитивистике», при большом числе работ за два последних десятилетия, не предложены методы количественных расчетов. Тем не менее, квантовоподобное описание человеческого восприятия и попытки его применить в задачах экономики, финансов и общественных наук остаются популярным направлением междисциплинарной физики.

Перспективный, хотя и не вполне обоснованный метод формально квантового описания экономических и социальных явлений представляет *механика Бома*. Этот «неортодоксальный» (но до настоящего времени не отвергнутый физиками) вариант квантовой теории, предложенный Луи де Бройлем в 1920-е и Дэвидом Бомом в 1950-е годы, остается одной из нескольких альтернативных интерпретаций квантовой механики, не оспаривающей ее общих положений. В рамках механики Бома волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$ в уравнении Шредингера (8.60 а), где вектор $\mathbf{r}$ обозначает координаты частицы или системы частиц, представляют в виде

(8.66) $$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi \cdot e^{iS/\hbar}, \text{ то есть } |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2,$$

где $S(\mathbf{r}, t)$ – *функция действия*, определяемая в механике через функцию Лагранжа (разность кинетической и потенциальной энергий $L = E_{кин} – V(\mathbf{r})$, см. формулы (2.18 б) и (2.19) в гл. 2)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt,$$

а $\varphi(\mathbf{r}, t)$ – *направляющая волновая функция* (англ. *pilot wave*), задаваемая уравнением Шредингера. Перемещение частицы в пространстве рассматривается как ее детерминистское движение в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla}[V(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}, t)]$$

в совместном поле «классического» потенциала $V(\mathbf{r})$ и *квантового потенциала*

(8.66 а) $$U(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar^2}{2m\varphi}\nabla^2\varphi(\mathbf{r}, t)$$

(где $\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, см. главу 3). Таким образом, движущаяся частица в момент времени t находится в определенной точке пространства $\mathbf{r}$, а ее дальнейшее перемещение задается комбинацией детерминистского потенциала $V(\mathbf{r})$ и потенциала (8.66 а), выражаемого в каждой точке $\mathbf{r}$ через направляющую волновую функцию $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Хотя физическая природа квантового потенциала в теории де Бройля – Бома не раскрывается (что в основном и вызывает ее критику), этот подход позволяет перейти от «волн вероятности» стандартной квантовой теории к описанию движения одиночных частиц. Направляющая волновая функция обычным образом связана с плотностью вероятности обнаружить частицу в пространстве, поэтому «квантовые возмущения» преобразуют классическую траекторию частицы во фрактальное множество (см. разд.

8.6.2), сохраняя возможности интерференции пересекающихся либо частично перекрывающихся траекторий (рис. 8.68).

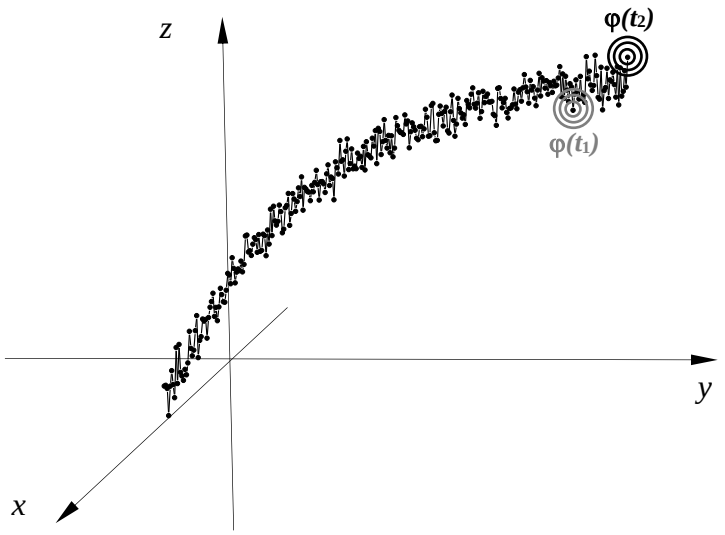


Рисунок 8.68. Бомовская фрактальная траектория частицы (схема). Условно обозначена направляющая волновая функция φ(*t*) в моменты времени t_1 и $t_2 > t_1$

В работах *школы Векше* (по названию города *Vaxjö*, где расположен международный Университет им. Линнея), развиваемой в Швеции А.Ю. Хренниковым[24] и соавторами, бомовская механика применяется к описанию динамики макроскопических социальных систем. В частности, бомовскими траекториями было предложено описывать эволюцию финансовых рынков под воздействием детерминистского потенциала $V(Q, t)$, где набору координат Q отвечают объективно действующие ценовые факторы, и направляющей волновой функции, которая отражает психологию участников рынка. В одной из статей этого направления* совокупный рыночный потенциал, изменяющийся под влиянием крупных сделок, разделялся на «жесткий» (V) и «мягкий» (U) компоненты: при ограниченных ресурсах реализуется «жесткий» детерминированный рынок, тогда как «мягкими» являются спекулятивные рынки, сильно зависящие от психологии игроков. Хотя квантовое описание биржи в этих работах тоже ограничивалось качественным уровнем, использование механики Бома для интерпретации фрактальной динамики цены актива может привести к новым содержательным обобщениям.

Ограниченная рациональность, зависимость выбора от контекста и взаимное влияние воспринимаемых образов могут объяснятся без привлечения квантовой механики интерференционными явлениями макроскопического масштаба, протекающими в человеческом мозге. Нейрофизиология головного мозга включает ряды непрерывных колебаний электрического потенциала его коры с амплитудами от 10 до 100 микровольт (мкВ), регистрируемые методом электроэнцефалографии (ЭЭГ) с помощью стандартной системы электродов, наложенных в специальной шапочке на кожную поверхность головы

*O. Shoustova, Inf. Sci. 2009, **179**, 478.

(*скальп*)[25]. По частоте, амплитуде и физиологической роли эти колебания подразделяются на α-*ритм* (8-13 Гц, почти синусоидальная форма, характерны для спокойного бодрствования), β-*ритм* (14-30 Гц, возникает при интенсивной умственной деятельности), γ-*ритм* (свыше 30 Гц, ~10 мкВ, при максимальной концентрации внимания), высокоамплитудный δ-*ритм* (1-4 Гц, сотни микровольт; сон), θ-ритм (4-8 Гц; поиск) и другие. Мозг и череп – единая электропроводная среда, поэтому в разных областях скальпа и, соответственно, коры головного мозга могут проявляться разные, в том числе нестационарные серии колебаний (рис. 8.69), что неизбежно сопровождается их физической интерференцией. Связь формы электрофизических ритмов мозга с процессами в сознании до настоящего времени точно не установлена.

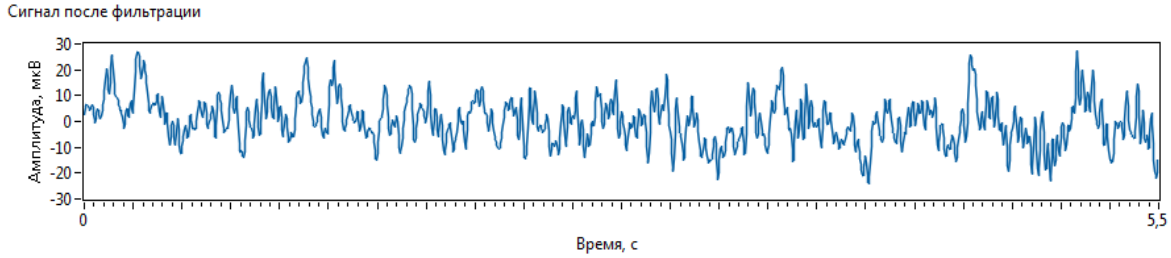


Рисунок 8.69. Участок электроэнцефаллограммы (ЭЭГ), отфильтрованной от шума (П.И. Сотников, Инж. вестник МГТУ им. Баумана, 2014, №10, 612; http://engbul.bmstu.ru/doc/739934.html)

В психологических экспериментах было найдено, что при предъявлении испытуемым определенных воздействий, или *стимулов* (вспышек света, звуков, фигур на экране компьютера и т.д.), на электрические ритмы мозга накладываются слабые нерегулярные затухающие колебания амплитудой до 10 мкВ и продолжительностью 1-2 с: *вызванные потенциалы* (*ВП*, англ. *event-related potentials*, *ERP*). Форма этих воспроизводимых ВП, которые регистрируются на фоне биоэлектрических ритмов при многократном предъявлении одинакового стимула, различна в разных точках скальпа, но в каждой из них воспроизводима для определенного воздействия. Экспериментально установлено, что при наложении двух разных стимулов вызванный потенциал не совпадает с суммой ВП каждого из них в отдельности (Рис. 8.70).

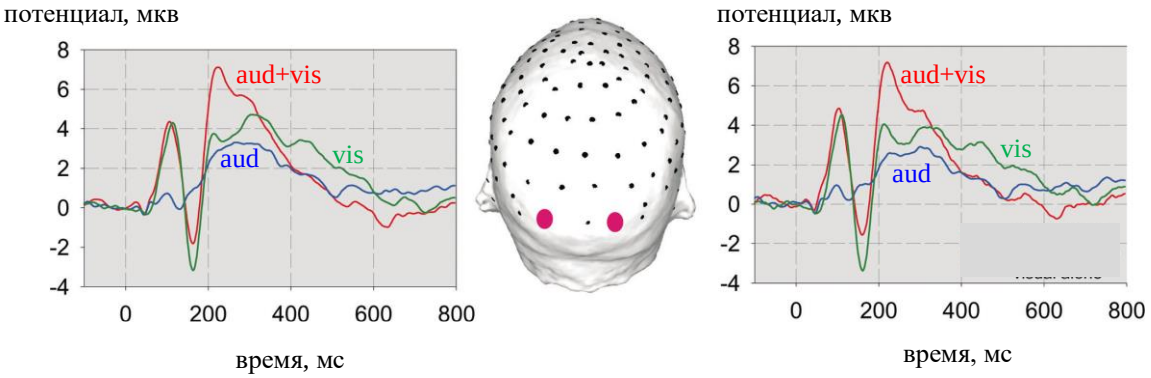


Рисунок 8.70. Вызванные потенциалы слухового (aud), визуального (vis) и совместно предъявляемых стимулов (aud+vis) в затылочной области. Средняя часть – расположение электродов при съемке ЭЭГ, выделены электроды, с которых регистрировались ВП (S. Molholm, et al., Cogn. Brain Res. 2002, 14, 115)

Таким образом, помимо «адресного» распространения электрических сигналов по нейронам, на все участки коры головного мозга воздействуют разнообразные внутренние колебательные процессы, вызванные потенциалы от внешних источников и биоэлектрические «отпечатки» других физиологических явлений (движения глазных яблок, мигания и т.д.). Поскольку мозг прозрачен для всех электрических импульсов, этим создаются условия интерференции сигналов как в физическом (наложение), так и в психологическом смысле слова (помехи). Это может быть альтернативной причиной указанных особенностей восприятия и принятия решений. Представленные выше положения «квантовой когнитивистики», за два десятилетия ее развития не подтвержденные надежными нейрофизиологическими данными, пока не являются серьезной академической гипотезой.

Литература к разделу 8.7

[21] Д. Канеман, *Карты ограниченной рациональности: психология для поведенческой экономики*, Психологический журнал, 2006, №2, 5.
[22] В.Н. Бурков, Д.А. Новиков, А.В. Щепкин, *Механизмы управления эколого-экономическими системами*, М.: Физматлит, 2008; см. также А.В. Щепкин, *Имитационные игры*, http://www.mtas.ru/about/smartman/mechanism/MU15.pdf
[23] B. Baaqi, *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest rates*, Cambridge University Press, 2004.
[24] A. Khrennikov. *Ubiquitous quantum structure: from psychology to finance*. Springer, 2010.
[25] Ю.И. Александров (ред.), *Основы психофизиологии. Учебник*. М.: Инфра-М, 1997.

Рекомендуемая литература

1. А.А. Петров, *Об экономике языком математики*, 2-е изд., М.: ЛЕНАНД, 2021.
2. О.А. Волгина, Г.И. Шуман, *Математическое моделирование экономических процессов и систем*, М.: КНОРУС, 2019.
3. В.В. Подиновский, В.Д. Ногин, *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. — 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. Б.В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, М.: ЛИБРОКОМ, 2011.
5. Н.Г. Мэнкью, *Макроэкономика*, пер. с англ., М.: МГУ, 1994.
6. В.К. Бурлачков, *Макроэкономика, монетарная политика, глобальный кризис: анализ современной теории и проблемы построения новой модели экономического развития.* М.: ЛИБРОКОМ, 2019.
7. В.Л. Макаров, А.Р. Бахтизин, *Социальное моделирование — новый компьютерный прорыв (агент-ориентированные модели)*, М.: Экономика, 2013.
8. Р.Н. Мантенья, Г.Ю. Стенли, *Введение в эконофизику. Корреляции и сложность в финансах (пер. с англ.).* М., URSS, 2009.
9. В.В. Харитонов, А.А. Ежов (ред.). *Эконофизика. Современная физика в поисках экономической теории*. М.: МИФИ, 2007.
10. М.Ю. Романовский, Ю.М. Романовский, *Математические начала эконофизики.* М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2019.
11. В.И. Ширяев, *Финансовые рынки: нейронные сети, хаос и нелинейная динамика*, 5-е изд., М.: ЛИБРОКОМ, 2013.

ГЛАВА 9. ПРИНЦИПЫ ФИЗИКИ В ГУМАНИТАРНЫХ НАУКАХ

Социум как физическая система. Измерения и эксперименты: воспроизводимость, достоверность, сигнал и шум. Специфика социальной статистики: неоднородность выборок, корреляции результатов. Влияние социальных факторов на структуру информации в банках данных.

Индивидуум как «атом» и группа как «молекула». Моделирование семантического пространства. Лингвистика. Закон Ципфа. Динамика значений слов, «игра в имена». Нейролингвистическое программирование.

Основные положения социологии. Иерархия и группы. Число Данбара. Сетевые структуры социума, блочное моделирование. Пороговые модели. Сетевые модели распространение мнений и культурных признаков. Формирование консенсуса, модель де Гроота. Социальный конфликт, модель Эпштейна.

Основные понятия политологии. Выборы как многокритериальная оптимизация. Принцип Кондорсе и теорема Эрроу. Многомерная модель избирательной кампании. Парадоксы голосования. Статистика выборов, законы Бенфорда. Влияние фракций в парламенте, индекс Банцафа. Политические технологии.

Модели конфликтов и войн. Уравнения Ланчестера, закон Ричардсона. Теория торга. «Самоорганизованная критичность». Модель Бака-Снеппена. Теория катастроф.

Физические факторы и исторические процессы. Историческая демография. Солнечная активность, климат и история. Моделирование Пелопонесской войны. Клиометрика и клиодинамика. Агентные ГИС-модели государств и регионов.

В этой главе мы рассмотрим методы исследования, перенесенные из физики в науки о человеке и обществе. Английское название Human & Social Sciences определяет область точнее, чем просто «общественные науки», среди которых еще не все настигла математизация. С другой стороны, практика управления жизнью и деятельностью человеческих масс – одно из главных условий существования современного социума. Многие методы здесь основаны на моделях и расчетах – включая такой постоянный спутник человечества, как войны. Некоторые примеры социальной и политической инженерии будут обсуждаться в этой главе.

Основу нашего материала составят математические модели социологии и политологии – близких, практически важных и весьма формализованных общественных дисциплин. Также мы кратко рассмотрим некоторые модели лингвистики как науки, изучающей языковое «поле» социальных взаимодействий. Модели конфликтов и войн с их неуничтожимой практикой будут обобщаться в контексте *математической истории* – возникающей на наших глазах синтетической дисциплины, где используют методы целого ряда наук. За пределами главы останутся ранние ступени формализации гуманитарных предметов (такие как сети героев литературных произведений – см. рис. 6.23 в гл. 6) и большая область *этологии*: науки о поведении животных, многое объясняющей в поведении людей. Некоторые характерные черты «социума» общественных животных и примыкающая к ним область *биополитологии* будут рассмотрены в третьей части книги.

9.1. Общественные науки и методы физики

Среди выдающихся ученых первой половины XIX века, которых современники считали математиками, исследовать общество методами точных наук впервые предложили Адольф Кетле и Огюст Конт (см. Введение). Отметим, что физика того времени еще не вполне выделилась из естествознания. За пределами небесной механики многие ее закономерности – например, закон Ома – были эмпирическими формулами, а существование атомов и молекул оставалось не вполне признанным вплоть до первого международного химического конгресса в Карлсруэ (1860 г.). Тем не менее, именно Конт предложил строить науки об обществе на фундаменте всех физических теорий – «положительном» (*позитивном*; в нынешних терминах *объективном*) знании об окружающем мире. В области философии отсюда возник *позитивизм*, а в обществоведении – *социология*, первоначально названная *социальной физикой*.

Современная социология сохраняет многие признаки физической дисциплины: использование теории вероятностей, статистическую обработку данных, понимаемых как результаты измерений, а с XX века – проведение и интерпретацию *экспериментов* (прежде всего опросов), математическое моделирование, а также использование методов теории игр. Примерно тот же путь за два последних столетия прошла *психология* как наука о восприятии человеком реального мира, о его реакциях и поведении в этом мире. Весь сложный комплекс проявлений многообразной человеческой личности, называемый психикой (см. раздел 1.5.2 в первой главе), в равной степени исследуют психология и медицина.

Наметившийся в XVIII-XIX веках постепенный переход от традиционного деспотического правления к различным процедурам выборов и необходимость сохранить господство богатых классов в новых условиях привели к возникновению *политологии*: области знаний, исследующей и оправдывающей структуры государственной власти. Основы классической описательной политология восходят к таким античным мыслителям, как Платон и Аристотель; они были развиты в фундаментальных трудах Нового времени: «Государе» Никколо Макиавелли, «Левиафане» Томаса Гоббса и других. В XX веке политология, взаимодействуя с неоклассической экономической теорией, стала создавать собственные формальные модели, в том числе заимствованные из физики.

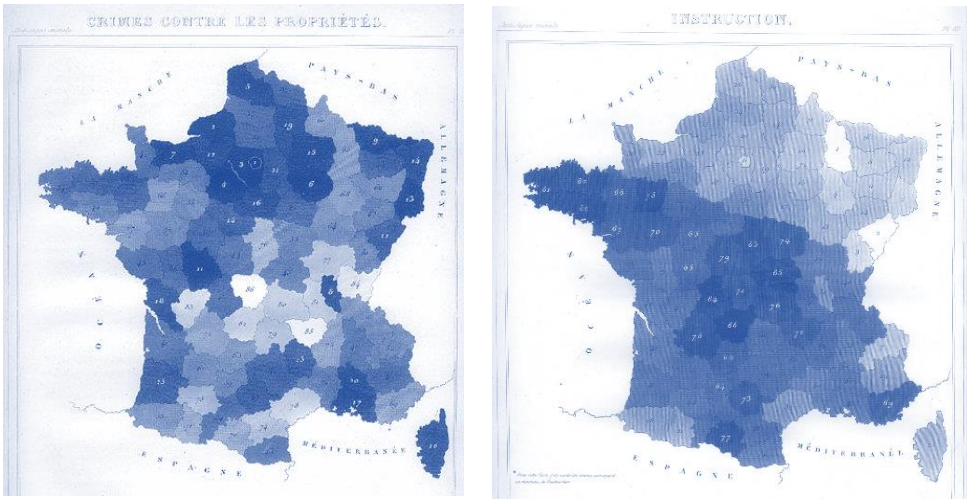
Математические конструкции современной политологии оперируют результатами опросов и голосований, размерами финансирования политических партий, экономическими и демографическими параметрами государств и регионов и т.д., смыкаясь с практикой государственного управления. Свои особые массивы информации (расходы на вооружение и боевые действия, численность армий, размеры потерь и многое другое) используют военные науки. Во всех этих дисциплинах анализ и прогноз основаны на численных данных, регистрируемых по возможности точно. Таким образом, оспаривать внедрение физических методов в общественные дисциплины несвоевременно: по крайней мере с начала XX века физика *уже здесь*.

Предметом обсуждения служит, однако, «качество» получаемых данных: степень их объективности, воспроизводимость и источники искажений. В основе всей экспериментальной физики лежит разделение результатов измерений на содержательный

сигнал и случайные помехи (шум). Но, как отмечалось в предыдущей главе, перенесение стандартных методов математической статистики (регрессионный анализ, поиск корреляций, факторный и кластерный анализ, см. [1] в списке рекомендуемой литературы к этой главе) на «живые» системы уже в задачах экономики может приводить к ложным выводам. Негауссовы распределения, топология сложных сетей и другие черты неклассической статистики в полной мере проявляются в социологии и политологии – где, кроме того, многие процессы порождаются комбинацией разнородных факторов, лишь весьма условно воспроизводимы и несут отпечаток *свободы воли* вовлеченных в них индивидуумов.

Трудность чистых экспериментов в социальных системах и сильное влияние методики на получаемый результат помогают понять, отчего психология и обществоведение первой половины XX века возлагали большие надежды на квантовую и релятивистскую физику. Однако с тех пор выяснилось (см. последний раздел предыдущей главы), что прямой перенос «квантовой» терминологии на общественные системы малопродуктивен; здесь более полезны модифицированные уравнения физики сложных систем. Строгие универсальные соотношения, подобные законам Ньютона, в динамических социальных системах редки, если вообще существуют – а для построения частных моделей необходим гибкий математический аппарат.

Создание работающих феноменологических моделей – одна из практических целей социального прогнозирования и управления. В области политологии это часто приводит к разделению дисциплины на «стилизованные» идеологические теории и практические приложения, информация о которых не разглашается. В этом смысле общественные науки подобны теориям экономики и особенно финансов, рассмотренным в предыдущей главе. Количественное описание и моделирование процессов в обществе – безусловно трудная задача, но необходимость ее решения диктуется всей историей общественных наук.



(а) (б)

Рисунок 9.1. Статистические данные А.-М. Герри по департаментам Франции 1829 г. (карты взяты из Интернет). Интенсивность окраски пропорциональна (а) числу имущественных преступлений, (б) уровню грамотности населения (А. Петухова, *Физика аморальности*, Коммерсант-Наука, 30.04.2021, https://www.kommersant.ru/amp/4791762?stamp=637553997632746100)

Начиная с Уильяма Петти (XVII век), первым методом точных наук в социологии, еще не имевшей такого названия, стала статистика. Усреднение численных данных и построение их распределений, в том числе «бумажные» аналоги ГИС (разд. 8.5 предыдущей главы), развивались с первой половины XIX века. На рис. 9.1 показаны фрагменты атласа *моральной статистики* Андре-Мишеля Герри, построенного в 1829 г. по архиву министерства юстиции Франции, с хорошо заметной отрицательной корреляцией уровней преступности и образования. Добавим, что математической статистики с ее формулами в то время не существовало, основатели социологии делали свои выводы «на глаз» – и редко ошибались.

Хотя среди первых приложений теории вероятностей и статистики большую долю составляли массивы тех или иных параметров общества, по формальным характеристикам они сильно отличаются от выборок физических величин. Существующие общности людей, как правило, неоднородны не только по благосостоянию, но и по другим параметрам, распределения которых в выборке нельзя считать случайными: антропометрии представителей одного рода или этноса, владению языками жителей одного государства и т.п. Параметры индивидуумов в таких выборках не просто коррелируют: они зависят от «скрытых переменных», которые могут быть не известны исследователям[*].

«Чистый» пример объективных количественных результатов, полученных под воздействием социальных факторов, предоставляют компьютерные базы данных о параметрах веществ и материалов, установленных физическими методами. Так, распределения химических соединений с одинаковым многоатомным фрагментом по его структурному параметру (например, расстоянию между определенной парой атомов)[**] часто имеют нерегулярную псевдо-полимодальную форму (рис. 9.2). Выборки при этом могут содержать сотни и тысячи вполне достоверных чисел. На форму таких распределений влияют социальные факторы внутри научного сообщества. В них обычно преобладают результаты небольшого числа (десятков или сотен) ведущих исследовательских групп, которые работают в узких классах финансируемых (либо актуальных по иным параметрам) задач с объектами, близкими по составу и свойствам, при этом соревнуясь между собой и активно используя публикации конкурентов. В терминах междисциплинарной физики научные и профессиональные сообщества – это мультиагентные системы с сильным взаимодействием между агентами. Поэтому данные в выборках коррелируют: каждое индивидуальное значение в них нельзя считать ни независимым, ни случайным.

Полимодальный вид распределений физических параметров в базах экспериментальных данных, полученных научным сообществом, хорошо иллюстрирует просеивание сырого песка через крупное сито. Если сухой песок, проходя сквозь мелкое сито, образует правильный конус (см. далее предпоследний раздел главы), из падающих комков мокрого песка складываются неустойчивые нерегулярные структуры (рис. 9.3). Эта

[*] Так, увеличение среднего роста и веса жителей Японии в XX веке с 157 см/52 кг до 171 см/64 кг (мужчины) и с 145 см/46 кг до 158 см/52 кг (женщины) было вызвано как общемировым повышением жизненного уровня, так и региональным фактором: изменением рациона с увеличением доли мяса и жиров (Y.Yonei et al., Anti-Aging Medicine, 2008, **5** (6), 63).

[**] Количество атомных структур кристаллов, найденных методом *рентгеноструктурного анализа* и внесенных в базы данных, на 2022 г. приближалось к 1.5 млн.

особенность воспроизводится и в других системах с сильной корреляцией – например, в электоральной статистике. Для всех таких систем центральная предельная теорема (см. разд. 8.2.2 в гл. 8) остается в силе – но переход к гауссовым распределениям наблюдается лишь при значительно бо̀льших объемах данных, чем для результатов независимых испытаний.

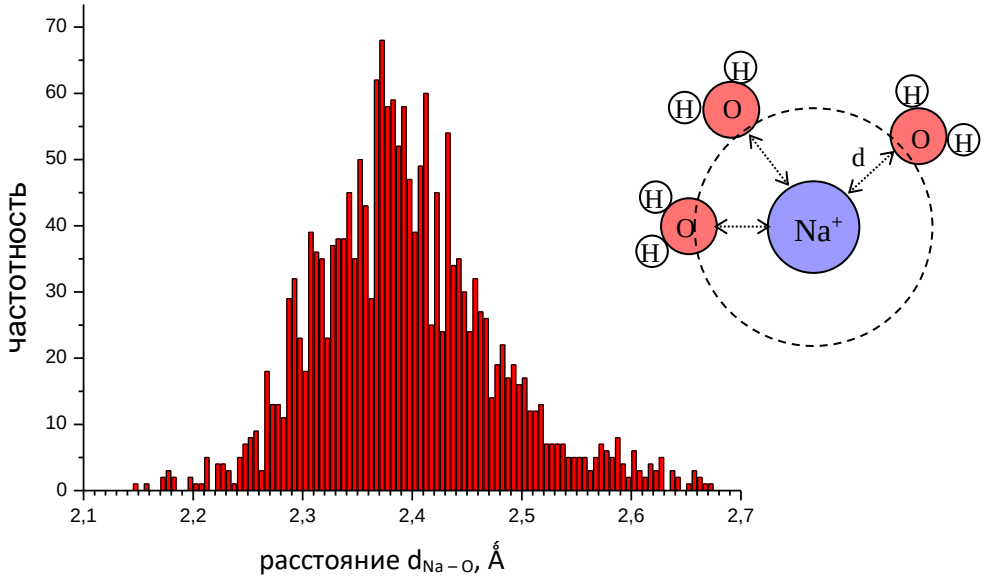


Рисунок 9.2. Гистограмма распределения расстояний d(Na↔OH_2) от иона натрия до связанной с ним молекулы воды в кристаллических структурах, содержащих гидратированные ионы Na^+, по Кембриджскому банку структурных данных (https://www.ccdc.cam.ac.uk/solutions/csd-core/components/csd/): 1907 точек, шаг 0.005 Å

При работе с данными, отражающими состояние социальных систем, даже полный массив значений некоторого количественного параметра (*генеральная совокупность*) с сильной корреляцией результатов измерений при стандартной статистической обработке может давать искаженную информацию. Гораздо лучше обоснованы средние параметры и их дисперсии в малых однородных выборках. Такие выборки широко используются в социологии, экспериментальной психологии и медицине – но они дают мало сведений о крупномасштабных закономерностях.

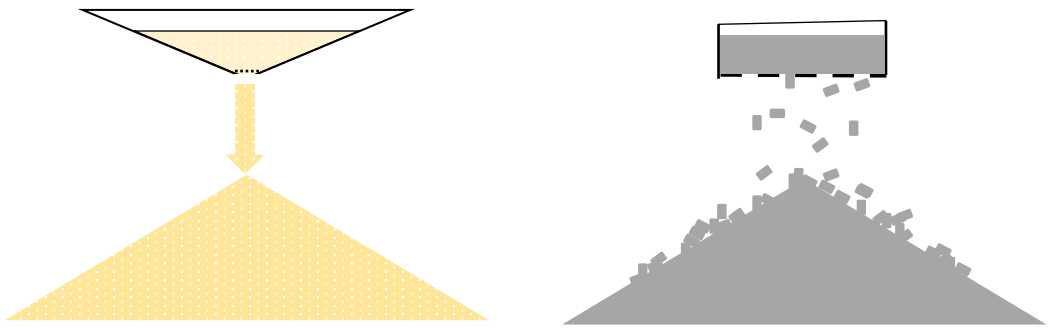


Рисунок 9.3. Просеивание сухого и мокрого песка

9.2. Методы точных наук в психологии и лингвистике

«Атомами» в социальных системах служат индивидуумы, а «молекулами» – малые совокупности взаимодействующих индивидуумов: *группы*. При последовательном построении обществоведения *снизу вверх* его фундаментом естественно считать психологию, а наукой следующего уровня обобщения (усреднения взаимодействий) – социологию. Такие дисциплины, как социальная психологи или психология коллективов, занимают промежуточное положение. В более крупных организационных структурах, изучаемых политологией и экономическими науками, тоже можно выделить «молекулярные» группы: мелкие фирмы, подразделения и отделы в организациях, отделения во взводе… Этим путем психологические и социологические закономерности проецируются в следующий уровень обобщений – например, в поведенческую экономику. А поскольку почти все взаимодействия людей основаны на речи и языке, роль «теории социального поля» выполняет *лингвистика*. Среди наук о человеке и обществе перечисленные дисциплины выделяются математизацией и наиболее широким использованием физических моделей.

Необходимо оговориться: реальные приложения физики в разных общественных науках не вполне соответствуют такой простой схеме. В психологии и примыкающих к ней разделах медицины широко применяются физические измерения: электроэнцефалография (ЭЭГ), *функциональная магнитно-резонансная томография* (фМРТ), *трактография* и другие схемы регистрации и обработки данных (см. книгу[25] в предыдущей главе) – в том числе при исследовании сетевых структур мозга (*коннектома*, разд. 6.2.2 в гл. 6). Математических моделей в психологии гораздо меньше, чем в политологии, что неудивительно: формализовать поведение человеческой личности принципиально сложнее, чем динамику человеческих масс. Математическая лингвистика исследует не столько взаимодействия людей через «языковое поле», сколько структуру и динамику самих языков – а воздействием языковой среды на людей на эмпирическом уровне занимается *медиапсихология*[*]. В социологии больше распространены приложения математической статистики ([1, 2] в списке литературы к данной главе) и такие средства анализа сложных систем, как агентные модели, нелинейные дифференциальные уравнения и *теория катастроф* (см. далее). Теория игр и агентное моделирование, помимо экономики, более всего применяются в политологии и военных науках.

Среди разнородных формальных конструкций математической психологии, математической политологии, математической лингвистики и других современных направлений мы рассмотрим модели, близкие к физическим. Еще раз подчеркнем, что прямой перенос фундаментальных понятий и законов физики на общество, порождавший большие надежды в первой половине XX века[1], как и рассмотренные в предыдущей главе конструкции «квантовой когнитивистики», дает лишь *метафорическое* описание социальных явлений. Для классификации данных и прогнозирования наиболее полезными оказываются имитационные компьютерные модели, не имеющие (возможно, пока) твердого физического обоснования. Кроме того, науки о человеке и обществе заимствуют

[*]Д.В. Алексеев, Политические медиа-влияния: опыт изучения. М.: Культурная революция, 2014.

некоторые принципы из экономических теорий, тоже плохо сводимых к физике – но и они обычно создают лишь качественное и не всегда объективно проверяемое описание социума.

9.2.1. Математические модели семантики

Так, есть величины, с изменением которых синий цвет василька (я беру чистое ощущение), непрерывно изменяясь и проходя через неведомые нам, людям, области разрыва, превратится в кукование кукушки или в плач ребенка, станет им.
Велимир Хлебников

Раздел лингвистики, изучающий смысловое содержание единиц языка (слов и их грамматических форм, словосочетаний, предложений), называется *семантикой*. При классификации составных частей лексики (т.е. всего словарного запаса языка) уже на описательном уровне используются квази-физические (физикалистские) термины. Например, лексическое множество, построенное из слов с общим смысловым признаком, называется *семантическим полем*. Внутри семантических полей слова, связанные отношениями как сходства, так и взаимного противопоставления, объединяются в субъединицы меньшего масштаба: тематические и лексико-семантические группы. Сложная иерархическая структура семантического поля, которая соответствует отражению окружающего мира в человеческом сознании, включает другое квази-физическое понятие: *ассоциативные поля*. Хотя полем здесь называется не континуальный переносчик воздействий (или «сил», как в физике), а большой набор дискретных лексических единиц с некоторым общим признаком, физическая терминология уже присутствует в гуманитарном языкознании и в соответствующем междисциплинарном направлении *психолингвистики*.

Следующей ступенью обобщения является непрерывное многомерное *семантическое пространство*, координатами которого служат усредненные индивидуальные оценки некоторого объекта (в частности, значений определенного слова). В методе *семантического дифференциала*[*] по результатам опросов испытуемых численно оценивают «силу» ассоциаций предъявленного им слова с определенным набором парных качеств-антонимов (табл. 9.1). Крайние значения в строках (в табл. 9.1 это 3 и –3) отвечают сильной ассоциации с одним из «полярных» качеств, 2 и –2 средней, 1 и –1 слабой ассоциации, 0 – отсутствию ассоциаций с данными качествами. Числа в каждой строке таблицы, усредненные по группе испытуемых, далее рассматриваются как координаты вектора $\mathbf{r} = \{x_i\}$ в пространстве, образованном набором качеств: в табл. 9.1 $i = 1, 2, \ldots, 12$.

В семантическом пространстве содержанию слов отвечают n-мерные векторы $\mathbf{r_1} = \{x_i\}$, $\mathbf{r_2} = \{y_i\}$ и так далее, которые можно обрабатывать методами линейной алгебры (см. главу 3, раздел 3.1.2). В частности, степень близости двух понятий характеризует *метрическое расстояние* между точками, заданными векторами $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$

(9.1 а) $$d = |\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}| = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

или же *косинусная мера*: величина косинуса угла между этими векторами

[*]Впервые предложенном в 1952 г. американским психологом Чарльзом Осгудом (1916-1991).

(9.1 б) $$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{r_1}\cdot\boldsymbol{r_2}}{|\boldsymbol{r_1}|\cdot|\boldsymbol{r_2}|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)}}\,.$$

(В формуле (9.1 б) числитель дроби – скалярное произведение векторов $\mathbf{r_1}\cdot\mathbf{r_2} = r_1 r_2 \cos\varphi$, знаменатель – произведение длин этих векторов). Используют и другие алгебраические меры близости векторов в семантическом пространстве; единой и даже предпочтительной формы «расстояния» между значениями слов не существует.

Таблица 9.1

Пример бланка семантического дифференциала к заданному слову†

	3	2	1	0	–1	–2	–3	
легкий								тяжелый
радостный								печальный
слабый								сильный
плохой								хороший
большой								маленький
темный								светлый
активный								пассивный
противный								приятный
горячий								холодный
хаотичный								упорядоченный
гладкий								шершавый
простой								сложный

†В.П. Серкин, *Методы психосемантики: учебное пособие для студентов ВУЗов*, Аспект Пресс, 2004.

Длины, или модули, векторов в n-мерном «пространстве качеств», заданных по таблице 9.1, равны

$$r_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad r_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

и так далее. Чтобы расстояние (9.1 а) между точками $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r}_2$ было корректной мерой близости соответствующих им понятий, длины всех векторов должны быть одинаковы:

$$r_1 = r_2 = \ldots = 1.$$

Изменение масштабов координат $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, …, которые по результатам опросов могут оказаться произвольными, называется *нормировкой*. Косинусная мера (9.1 б) показывает только различие направлений векторов; в этом случае их длины не нормируют. При $\cos\varphi = 1$ направления векторов $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ (т.е. значения соответствующих им слов) совпадают, при $\cos\varphi = -1$ они противоположны, а $\cos\varphi = 0$ отвечает максимальному несовпадению: векторы ортогональны, см. разд. 3.1.

Математическое отступление: главные компоненты и сингулярное разложение матриц

Некоторый институт набирает студентов на первый курс в соответствии с результатами экзаменов по математике, русскому языку и физкультуре. Экзамены сдали 500

абитуриентов, оценки выставлены по десятибалльной шкале. Как установить проходной балл по каждому предмету?

В этой модельной задаче дано распределение результатов экзаменов: «облако» точек в трехмерном пространстве с координатами x (оценка по математике), y (по русскому языку) и z (по физкультуре). Размер и форма области «хороших» точек в этом облаке зависят от числа бюджетных мест. А как выделить ту часть облака, где расположены нужные точки?

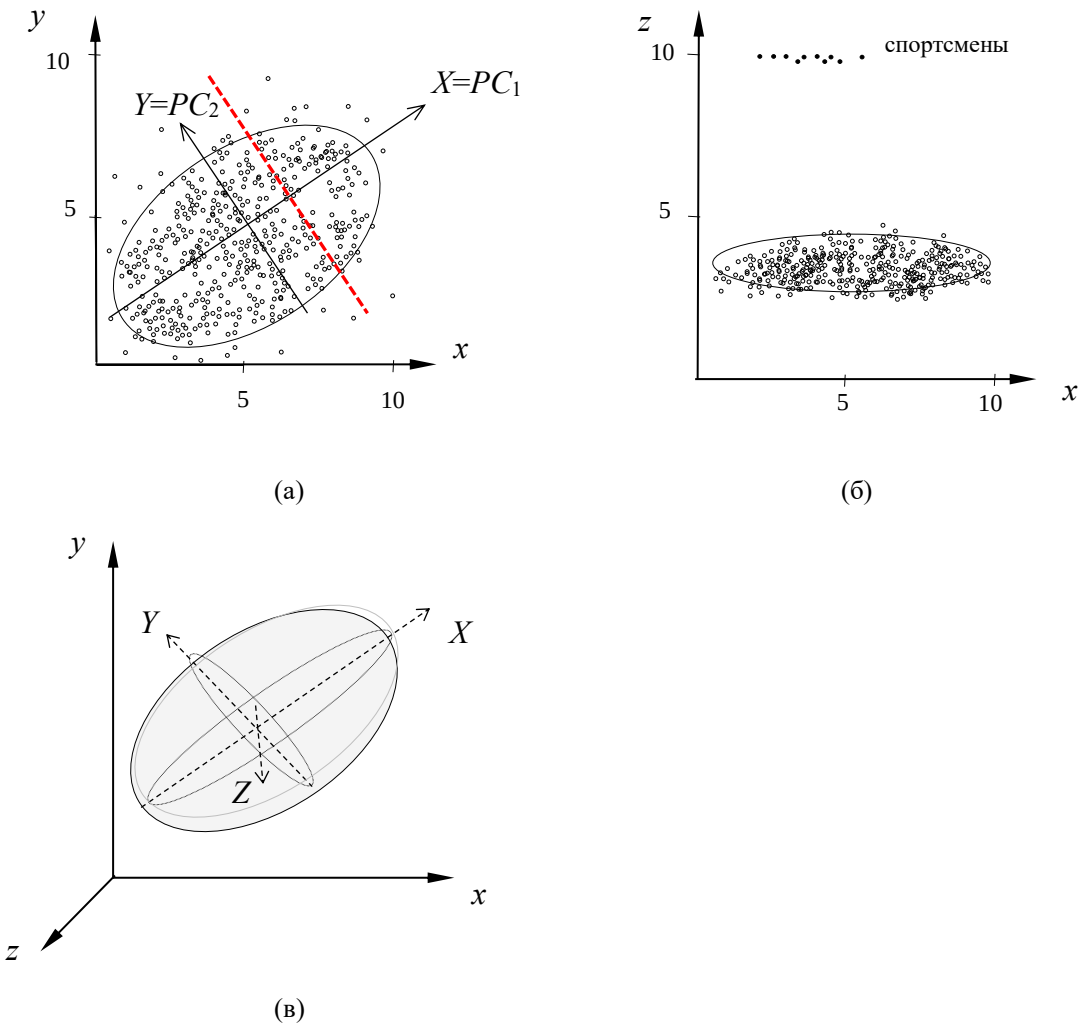


Рисунок 9.4. Распределение оценок на экзамене: (а) в проекции на плоскость *xy*, (б) в проекции на плоскость *xz*, (в) в пространстве координат *xyz*

Методы решения этой задачи средствами математической статистики предоставляет *факторный анализ*. Результаты экзаменов можно наглядно представить в проекциях точек на координатные плоскости (xy) и (xz). На этих проекциях видно, что результаты экзаменов по математике и русскому языку (рис. 9.4 а) коррелируют: успешные школьники обычно имеют хорошие и отличные оценки по большинству учебных предметов. В то же время оценки по математике и физкультуре для абитуриентов связаны гораздо слабее (рис. 9.4 б): они почти равномерно распределены в области $2 < x < 10$ (математика) и $3 < z < 5$ (физкультура). В реальной жизни на графике 9.4 б, скорее всего, в небольшом количестве будут присутствовать точки со значениями z, близкими к 10: это абитуриенты-спортсмены

с хорошей физической подготовкой. Примерно так же выглядит распределение результатов экзаменов в координатах (*yz*). Разбиения распределений на группы точек, близких друг к другу по некоторому заданному критерию (*кластеры*), рассматривает другой метод математической статистики: *кластерный анализ* (см. [1] в рекомендованной литературе).

Не занимаясь судьбой спортсменов, способных поддержать престиж учебного заведения, рассмотрим форму облака точек из результатов всех остальных абитуриентов. В проекции на плоскость *xy* с помощью компьютера легко построить эллипс, внутри которого, по нашему выбору, будут находиться 95%, 98% или 99% точек (рис. 9.4 а). Этот эллипс, вытянутый примерно в диагональном направлении квадранта ($x,y > 0$), окажется тем больше, чем большую долю всех точек мы хотим им охватить. При каждом заданном проценте его границы определяются не вполне однозначно, но они будут близкими. Наклон большой оси эллипса соответствует степени корреляции переменных *x* и *y* (то есть оценок за математику и русский язык), а длины большой и малой осей – интервалам *совместного распределения* двух оценок. В сечениях *xz* и *yz* эллипсы «сжаты» вдоль оси z, а их большие оси параллельны координатным осям (рис. 9.4 б).

В пространстве трех координат (x,y,z) большинство точек можно заключить в трехосный эллипсоид, оси которого *X*. *Y* и *Z* называются *главными компонентами* распределения (англ. principal components, *PC*, см. рис. 9.4 в). На плоскости *xy* этот эллипсоид проектируется в эллипс, показанный на рис. 9.4 а. Задачу математической обработки данных в этом примере можно сформулировать так:

Если заменить трехосный эллипсоид на рис. 9.4 в эллипсом на рис. 9.4 а, т.е. пренебречь «толщиной» эллипсоида по координате z – какую часть информации о распределении точек в пространстве мы сохраним и какую часть утратим?

В общем случае имеется набор из *m* объектов одинаковой природы, где состояние каждого объекта задают *n* значений его параметров: рабочие характеристики изделий в контрольной выборке, химический состав загрязнений в пробах грунта, «координаты» набора слов в семантическом пространстве и т.п. Состояние *k*-го объекта в этом множестве характеризуется *n*-мерным вектором его параметров

$$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).$$

В математической статистике такие векторы называются *случайными*, поскольку составляющие их числа заранее не заданы: их определяют в результате испытаний, как оценки на экзамене. Компоненты всех векторов $\{\mathbf{x_k}\}$ образуют прямоугольную матрицу $A = ||x_{ij}||$ размера $m \times n$, которой отвечает «облако» из *m* точек-значений в *n*-мерном пространстве параметров. Для результатов экзаменов в нашем примере это матрица 500×3. Можно ли с помощью этой матрицы построить такие $p < n$ *линейных комбинаций* параметров

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} x_i$$

(9.2)
$$X_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i} x_i$$

…

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ni} x_i,$$

которые задают все множество измеренных значений почти с такой же точностью, что и сама матрица A? Другими словами, можно ли выделить в *n*-мерном пространстве параметров такое *p*-мерное подпространство, чтобы все *m* точек лежали в нем или «недалеко» от него – как точки внутри эллипсоида на рис. 9.4 в не сильно отстоят от эллипса в плоскости *xy* на рис. 9.4 а? Если можно – то по какой схеме?

Вычисление преобразованных координат (9.2) в математической статистике обычно называют *методом главных компонент* (хотя правильнее *компонентов*). На первом шаге в пространстве параметров определяется направление с максимальным разбросом положений точек (*дисперсией* λ_1). В нашем примере это направление *X* большой оси эллипса на рис. 9.4 а. Затем среди всех перпендикулярных ему направлений выбирается такое, по которому разброс точек λ_2 больше, чем по всем, кроме первого (*Y* на рис. 9.4 а). На следующем шаге из всех направлений, ортогональных *X* и *Y* (для *n*-мерного вектора с $n > 3$ таких направлений бесконечно много!) выбирают то, по которому максимален разброс точек λ_3, и так далее.

В случае *n*-мерного пространства векторы $\{\mathbf{X_k}\}$, рассчитанные по формулам (9.2), располагаются в порядке убывания объясняемых ими долей дисперсии $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$. Процедуру завершают, когда суммарная дисперсия $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p$ по направлениям X_1, X_2, …, X_p превысит заданный порог (обычно 90% от общей дисперсии) либо будут выполнены другие эмпирически заданные условия. Полученные векторы и называются главными компонентами: это линейные комбинации параметров, которые дают более экономное и наглядное описание распределения точек.

Расчет множителей $\|\alpha_{ij}\|$ в (9.2) и соответствующих им значений $\{\lambda_k\}$ производится на компьютере методами линейной алгебры (см. разд. 3.2 в главе 3). По прямоугольной матрице результатов испытаний A размера $m \times n$ (где $m > n$) можно построить две квадратные матрицы:

(9.3) $$U = A \cdot A^T \text{ и } V = A^T \cdot A,$$

где A^T – транспонированная матрица, в которой строки и столбцы матрицы A поменялись местами, точка – знак умножения матриц по обычной схеме «строка на столбец».Так как умножение матриц некоммутативно, $U \neq V$. Квадратная матрица U имеет размер $m \times m$, матрица V – размер $n \times n$ (рис. 9.5).

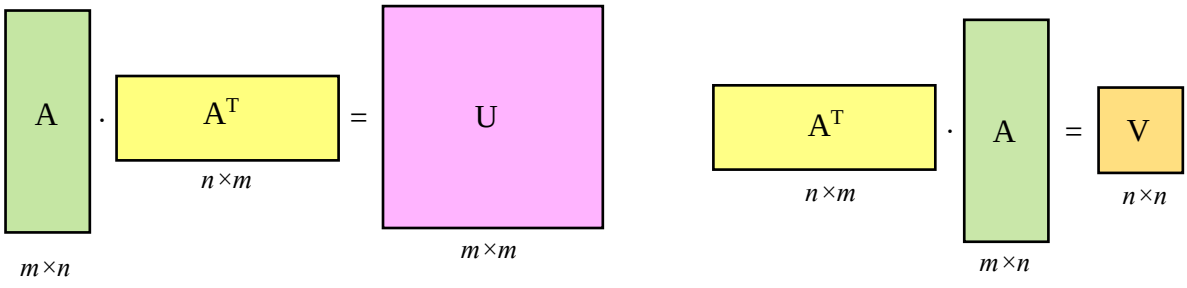


Рисунок 9.5. Схема перемножения матриц A и A^T (см.[2])

В разделе 3.1 главы 3 было показано, что для квадратных матриц U и V можно найти *собственные значения* как решения уравнений

$$\det(U - \alpha E) = 0$$
$$\det(V - \beta E) = 0$$

(где det означает детерминант, а символом E условно обозначены квадратные единичные матрицы, соответственно, размеров $m \times m$ и $n \times n$) и затем вычислить их *собственные векторы*. Этим собственным векторам соответствуют ортогональные «направления» в многомерных пространствах с максимальным разбросом точек; их собственные значения – квадраты величин разброса (*квадратичные дисперсии* σ^2_i).

Поскольку в заданных условиях $m > n$, некоторые из собственных значений $\{\alpha_i\}$ «большой» квадратной матрицы U ($m \times m$) будут равны нулю. Для меньшей квадратной матрицы V ($n \times n$) число ненулевых собственных значений $\{\beta_i\}$ равно числу *линейно независимых* (гл. 3, разд. 3.1) столбцов нашей исходной матрицы A – то есть числу независимых измеряемых параметров. Такое число $r \leq n$ в линейной алгебре называется *рангом* прямоугольной матрицы A. Эти же r ненулевых собственных значений имеет и «большая» квадратная матрица U.

Из линейной алгебры известно, что любую прямоугольную матрицу $m \times n$ можно представить как произведение трех матриц:

(9.4) $$A = U \cdot \Lambda \cdot V^T,$$

где A – исходная прямоугольная матрица, U и V – «большая» и «малая» квадратные матрицы (9.3) ее произведений с транспонированной матрицей A^T, и матрица V, в свою очередь, транспонирована. «Среднее» место в произведении (9.4) занимает прямоугольная ($m \times n$) *матрица собственных значений* Λ, все элементы которой – нули, кроме диагональных элементов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ в ее верхней части (рис. 9.6). Эти числа – квадратные корни из ненулевых собственных значений матриц U и V, расположенные в порядке убывания. Ими заданы максимальные дисперсии элементов матрицы A (т.е. результатов измерений параметров) вокруг центра их распределения по новым координатным направлениям $X_1, X_2, \ldots, X_r$ в n-мерном пространстве.

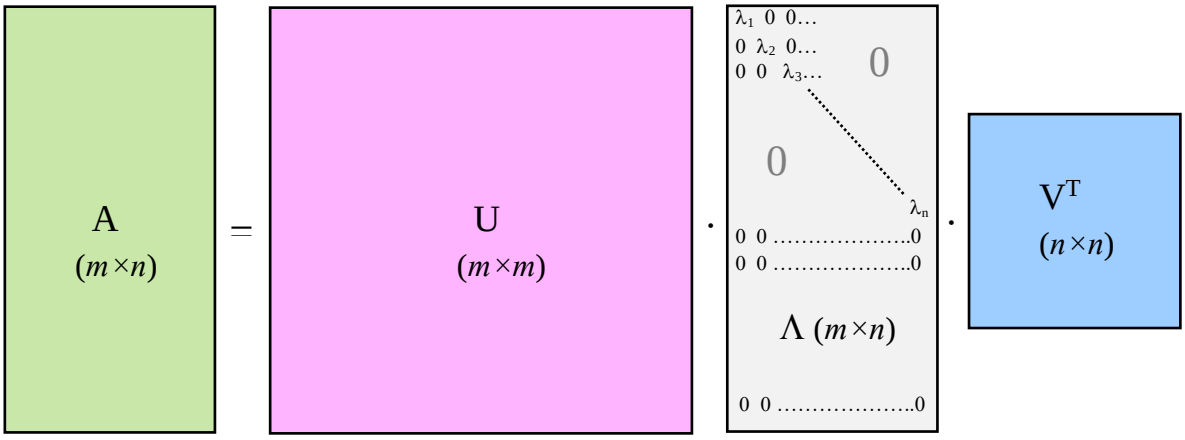


Рисунок 9.6. Схема сингулярного разложения матрицы (см. [2])

Произведение (9.4) называется *сингулярным (векторным) разложением* матрицы A (англ. *singular vector decomposition*, SVD). Если ранг прямоугольной матрицы $r = n$, векторы-столбцы в матрице A линейно независимы и все ее собственные значения положительны

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0.$$

При $r < n$ ненулевыми остаются только первые r диагональных элементов в матрице Λ. Для остальных собственных значений

$$\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_n = 0$$

Это значит, что в n-мерном пространстве параметров имеется r-мерное подпространство, в котором находятся все элементы матрицы A – подобно набору таких точек трехмерного пространства, которые все лежат в одной плоскости.

Если все собственные значения, следующие по убыванию за λ_p ($\lambda_p > \lambda_{p+1} > \ldots > \lambda_n > 0$) положительны, но невелики, их можно приближенно приравнять к нулю. В этом случае мы заменяем матрицу A приближенной матрицей

$$\tilde{A} = U \cdot \bar{\Lambda} \cdot V^T,$$

вычисленной с матрицей $\bar{\Lambda}$, в которой $n - p$ последних диагональных элементов заменены нулями. Построение таких приближенных матриц, понижающих размерность пространства точек и упрощающих расчеты, и составляет суть метода главных компонент.

Алгоритмы расчета собственных значений и собственных векторов матриц с выделением главных компонент входят в компьютерные программы статистической обработки данных. В нашем модельном примере результаты вступительных экзаменов образуют прямоугольную матрицу размера 500×3, которая имеет три собственных значения. Пусть программа выдает собственные значения

$$\lambda_1=4.01,\ \lambda_2=1.60,\ \lambda_3=0.54,$$

и соответствующие им собственные векторы *X, Y* и *Z* , показанные на рис. 9.4 в. Это значит, что компоненту *X* отвечает 65% дисперсии результатов вступительных экзаменов

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = 0.653 \ldots \approx 0.65$$

Компонент *Y* по той же схеме объясняет 26% наблюдаемой дисперсии, компонент *Z* – оставшиеся 9%. По эмпирическому «правилу 90%» мы можем считать вклад компонента *Z* несущественным – то есть зачислять абитуриентов на основе суммы их баллов по русскому языку и математике (все точки правее штриховой линии на рис. 9.4 а).

Этот условный пример показывает, почему физкультура не входит в приемные испытания большинства учебных заведений, помимо спортивных и военных. В реальных задачах статистической обработки объемы данных и размеры соответствующих матриц могут быть очень большими. В этих случаях отбрасывание малых собственных значений не просто упрощает расчеты: без такой процедуры расчеты могут оказаться

неосуществимыми. Развернутое и понятное обсуждение математической обработки социологических данных представлено в книге [1] (см. рекомендуемую литературу).

Латентный семантический анализ

Выделение главных компонент(ов) позволяет уменьшить размерность семантического пространства и построить проекцию его точек на плоскости в любой паре из четырех стандартных обобщенных «лингвистических координат» Осгуда: *оценка* («хороший – плохой»), *сила* («сильный – слабый»), *активность* («активный – пассивный») и *структура* («упорядоченный – хаотичный»). На рис. 9.7 представлена подобная проекция понятия *толерантность* и более традиционных нравственных ценностей по результатам опросов студентов МГИМО.

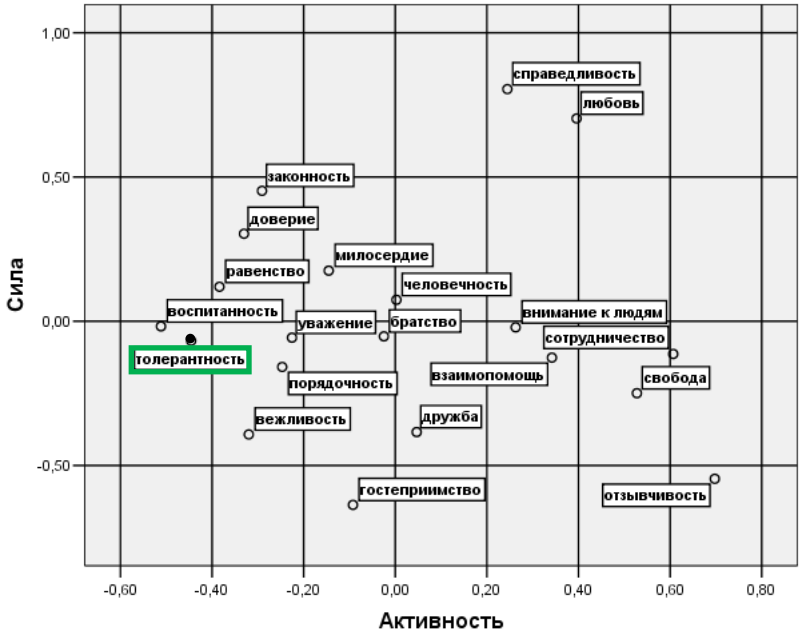


Рисунок 9.7. Расположение (точки) понятий-ценностей в семантическом пространстве магистрантов МГИМО, приведенные к факторам «активность» и «сила» в произвольных относительных единицах[3]

Степени близость понятий в заданном наборе качеств также можно определить методами кластерного анализа (см. [1] в списке литературы). В этом случае их изображают *дендрограммами*: графами-деревьями, где длине пути между вершинами соответствует обобщенное «расстояние» между значениями слов (см. главу 6 и рис. 8.39 в главе 8). Дендрограмма на рис. 9.8 отражает положение понятия «толерантность» относительно кластера наиболее близких к нему понятий (взаимопонимание – милосердие – сотрудничество – внимание к людям) и других ценностей, установленное по результатам опросов.

Подобно когнитивным картам, которые обсуждались в главе 6, семантические пространства дают геометрическое представление системы образов (в данном случае ассоциаций), вызванных в человеческом сознании заданным явлением или понятием. Однако неопределенная размерность пространства (она может быть как угодно велика), субъективность оценок в опросах и отсутствие надежных методов проверки делают выводы таких работ сугубо качественными. Как мы увидим дальше, похожие модели используются

и в других общественных науках (например, *многомерный анализ* избирательных кампаний в политологии); их выводы не обязательно согласуются с реальными данными.

Из-за бурного развития вычислительной техники, внедрения Интернет во все области жизни и распространения компьютерных баз данных в XXI веке возникла острая необходимость автоматического поиска информации по запросам пользователей, сформулированных на реально существующих (а не алгоритмических «машинных») языках. Для этого требуются компьютерные программы, которые определяют значения слов и других лексических единиц, то есть положения их точек в векторном семантическом пространстве, без обращения к экспертным оценкам. Такие программы не «читают» текстовый материал в нашем понимании этого действия: они классифицируют содержащиеся в нем слова по заданным контекстам и оценивают близость их значений по статистике совместного присутствия в предложениях или их составных частях (*токенах*).

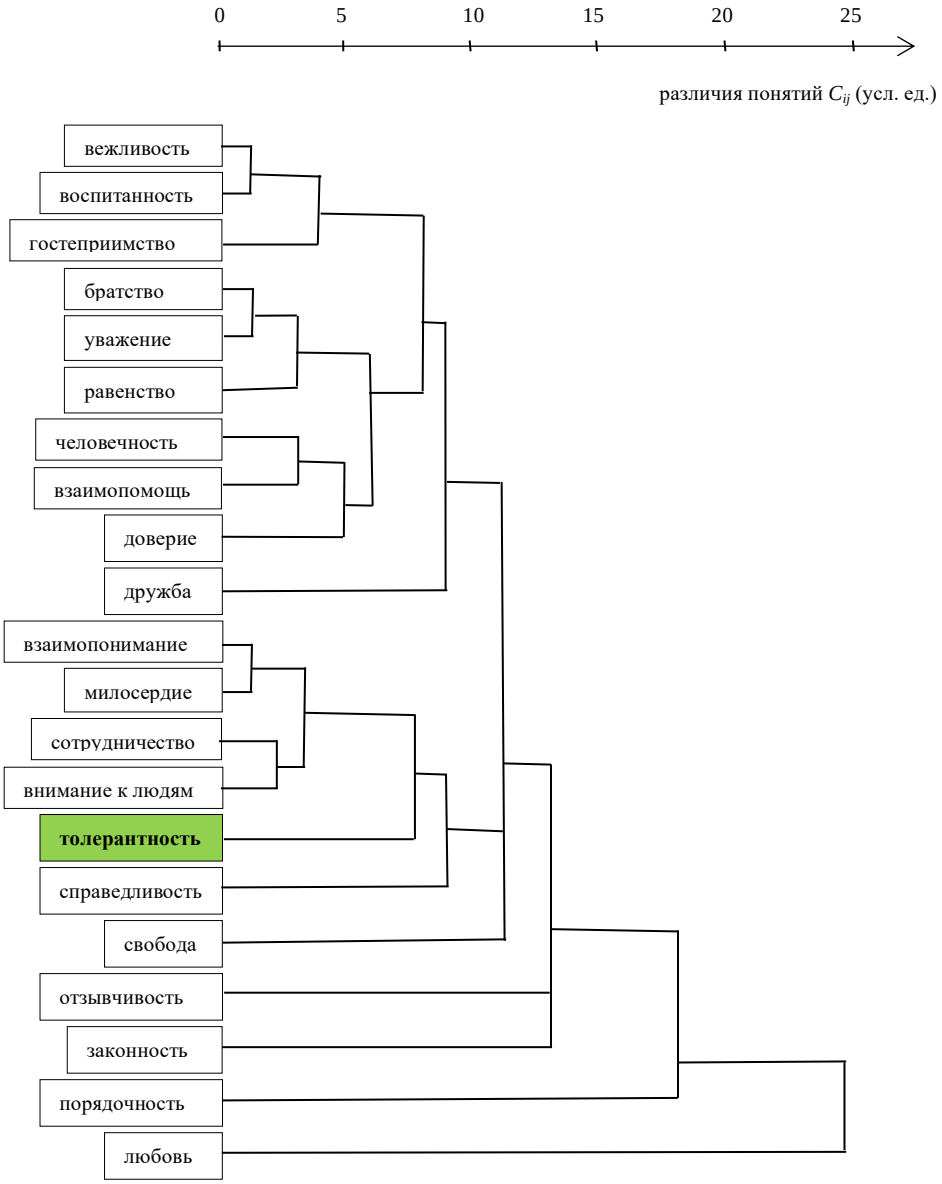


Рисунок 9.8. Дендрограмма кластеризации ценностей в семантическом пространстве по результатам опросов магистрантов МГИМО (см. [3])

В простейших схемах компьютерного поиска контекстами, образующими семантическое пространство, служат документы (например, веб-страницы), а точками в этом пространстве – входящие в них слова естественного языка и другие признаки текста (например, год, том и номер страницы для статьи в журнале). Всему семантическому пространству соответствует *матрица семантических отношений*. Это прямоугольная матрица размера $m \times n$, где m – число терминов, n – число документов; каждый ее элемент a_{ij} равен либо пропорционален числу употребления i-го слова в j-м документе (рис. 9.9). Строки матрицы соответствуют векторам слов в «координатах» контекстов, столбцы – векторам контекстов в «координатах» слов.

Поисковый запрос содержит часть требуемого текста (например, фамилию автора и название статьи) и добавляется в матрицу как «квази-документ» в виде последнего столбца. В примере на рис.9.9 запросу соответствует вектор **q** = (0 2 0 0 2 0 0 1 3 0 0 0 1). Программа находит столбцы матрицы с наборами элементов, близкими к содержащимся в запросе, и выдает на экран ссылки на их документы в порядке уменьшения соответствия запросу (*релевантности*), то есть увеличения суммы

$$R = \sum_{i=1}^{k} |q_i - x_{ij}|,$$

где **q** = $\{q_i\}$ – вектор запроса (англ. query), а расхождения суммируются по всем его компонентам.

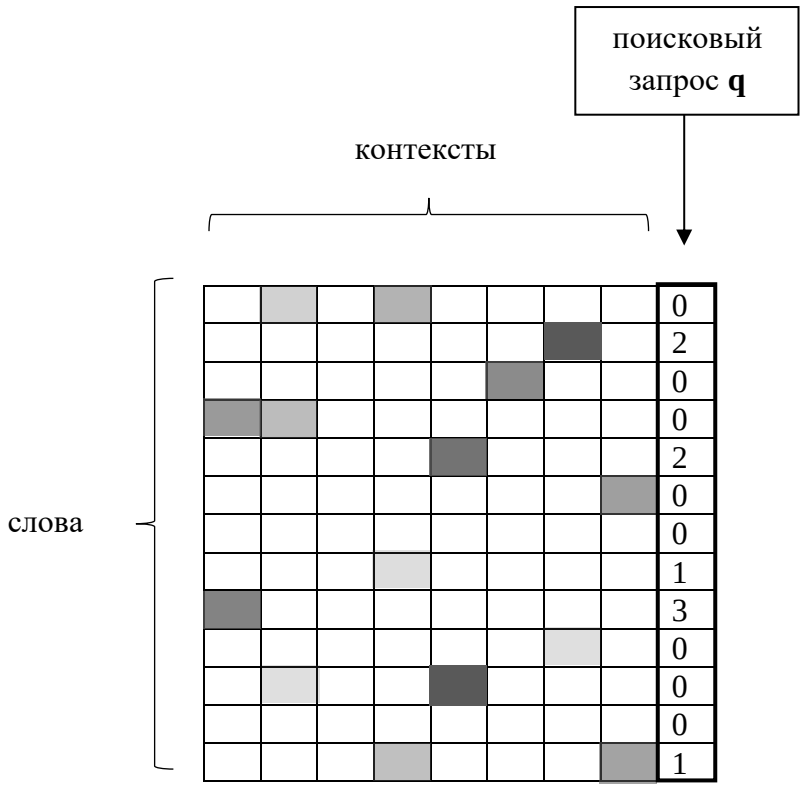


Рисунок 9.9. Фрагмент семантической матрицы, рассчитанной по статистике употребления слов в заданных контекстах (схема). Строки – векторы слов, столбцы – векторы контекстов. Частотность употребления слова в заданном контексте показана оттенком серого цвета, незакрашенные клетки – нули (см. P.D. Turney, P. Pantel, J. Artif. Intel. Res. 2010, 37, 141)

В реальных задачах числа m и n могут достигать сотен тысяч и миллионов. Среди элементов матрицы семантических отношений преобладают нули. Для ускорения обработки таких *разреженных* матриц в матричной алгебре разработаны специальные методы, включающие сингулярное разложение (9.4). Упрощение матриц с сохранением их основного содержания соответствует понижению размерности семантического пространства. В этой процедуре слова с близким значением (*самолет* и *аэроплан*) заменяются одним наиболее распространенным (*самолет*); соответствующие им векторы-строки в матрице складываются с последующей перенормировкой и другими математическими операциями.

Алгоритмические оценки смысла слов основаны на *дистрибутивной гипотезе*: контекстные векторы (столбцы матрицы) со сходным содержанием предположительно имеют близкие распределения элементов, то есть частотностей входящих в них слов. (Так, два разных документа, составленных на одну и ту же тему, скорее всего будут содержать немало одинаковых терминов). Кроме того, семантически связанные слова (*летательный аппарат*) с высокой вероятностью располагаются в текстах рядом. *Латентно-семантический анализ* (одно из приложений анализа главных компонент, см. [1] в рекомендуемой литературе), использует эти закономерности для упрощения матрицы семантических отношений, позволяя выделить в ней преобладающие контексты и образующие их слова.

Контекстом появления слова, в частности, можно считать соседнее слово в предложении. В этом случае квадратная матрица семантических отношений размера $n \times n$ называется *матрицей совместной встречаемости* (калька с англ. *co-occurrence matrix*). Ее элементы, найденные эмпирически в заданном наборе (*корпусе*) текстов, далее используются для автоматического поиска комбинаций слов, связанных общим смыслом (синонимов, антонимов и др.) – а также в «машинном» определении значений слова на естественном языке[4].

Обработка текста для компьютерного семантического анализа включает выделение *лексем* (единиц лексического уровня языка, определяемых как совокупность всех форм и значений одного слова), ликвидацию разночтений (заглавные буквы заменяются строчными, дефисы пробелами), кавычек и знаков препинания, удаление служебных слов: предлогов, междометий, артиклей. Слова текста обычно сокращаются до *лемм*: неизменных частей, сохраняющих значение слова. (Так, в словосочетаниях «Нобелевская премия», «Нобелевский комитет», «нобелевские лауреаты» выделяется лемма *нобелевск*). Неизбежные искажения смысла и трудности восприятия человеком полученной последовательности «квази-слов» компенсируются уменьшением объема расчетов, что повышает их предсказательную способность. Соседние слова в тексте находят методом *скользящего окна* (Рис. 9.10). Кроме одиночных слов, или «юниграмм», в анализе могут использоваться *биграммы* (пары последовательных слов), а в общем случае *n-граммы*, которые сохраняют последовательность слов в тексте и таким образом косвенно учитывают структуру языка. (Слова внутри скользящего окна на рис. 9.10 – пример «пентаграмм»).

Элементы матрицы совместной встречаемости, вычисленные по заданному тексту или корпусу текстов, рассчитывают с поправкой на разные частотности слов и распространенности синонимов (*безвозмездно – даром*) и другие лингвистические

закономерности. В них чаще всего используют различные варианты энтропии по Шеннону. Так, «сглаженные» элементы матрицы в алгоритмическом поиске синонимов слов английского языка* рассчитывались по формуле

(9.5) $$a_{ij} = \ln(1 + f_{ij}) \cdot (-\sum_k^N p_{ki} \ln p_{ki}),$$

Рисунок 9.10. Два последовательных положения скользящего окна «слово±2» в тексте

где f_{ij} – число совместных появлений i-го и j-го слов в текстах, N – общее число слов в словаре. Частотности («вероятности») p_{ki} совместного появления слов вычисляются как отношение количества совместных появлений k-го и i-го слов к общему количеству c_j появлений j-го слова в корпусе текстов

$$p_{kj} = \frac{f_{kj}}{c_j}.$$

В формуле (9.5) второй множитель – шенноновская энтропия в «натуральных» единицах (*натах*, см. разд. 8.3.2 в главе 8). Она максимальна ($\ln N$) при случайных комбинациях i-го слова с любым другим словом из словаря и минимальна (0), если это слово сочетается с единственным другим словом. В расчетах используют несколько эмпирических формул, родственных (9.5); степень их обоснованности пока не установлена. Если матричные элементы оказываются меньше некоторого эмпирически заданного порогового значения a_0, их считают статистически не значимыми и заменяют нулями.

В цитированной работе компьютерный поиск синонимов к словам из заданного набора дал впечатляющий положительный результат: 92.5% «попаданий». Хотя полностью автоматические и безошибочные алгоритмы определения значения слов еще не предложены, векторное представление семантического пространства позволяет их построить. Так, если по вычисленной матрице совместной встречаемости два нормированных слова-вектора $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ единичной длины не совпадают с заданным словом **X**, но их косинусные меры (9.1 б) отклонений от этого слова близки по абсолютной величине, средствами линейной алгебры нетрудно задать в многомерном пространстве прямую линию, ортогональную **X**, и рассчитать «координаты» всех векторов по этому направлению (рис. 9.11). (Подобные векторы могут отвечать альтернативным смыслам двузначных слов: например, *команда* как приказ и *команда* в футболе).

Заметим, что семантически связанным нормированным векторам, одинаково ориентированным к выбранному слову, не обязательно соответствуют противоположные

* R. Rapp, *Word sense discovery based on sense descriptor dissimilarity,* 9th MT Summit Proceedings.—New Orleans, LA, 2003. 315.

понятия – для примера на рисунке это черный и белый хлеб или «черная» и «белая» зарплата. Пары понятий к заданному слову либо набору слов можно определить компьютерным перебором всех слов-векторов в словаре и построить по ним «координатные направления» в семантическом пространстве. Безусловно, результаты применения такой схемы должны проверять лингвисты – но она показывает один из возможных путей «от частотности слова к его смыслу» (см. ссылку в подписи к рис. 9.9).

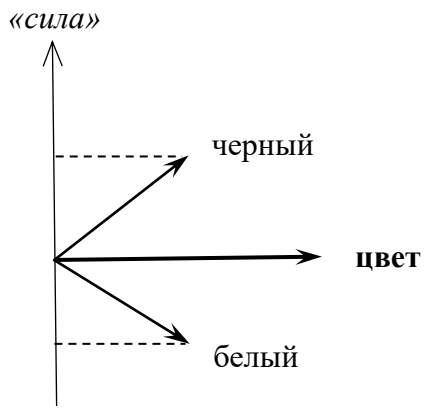


Рисунок 9.11. Схема выбора координатных осей в семантическом пространстве по косинусной мере близости значений слов из статистических оценок (см. R. Rapp, 9th MT Summit Proceedings. New Orleans, LA, 2003. 315)

Обработка естественных языков (англ. *natural language processing*, NLP) – «горячая» область в компьютерных дисциплинах. На ее результатах основаны такие яркие современные достижения, как машинный перевод, распознавание речи, аудио-помощники и многое другое. В третьей части мы вернемся к этому вопросу при обсуждении искусственного интеллекта. К построению семантических пространств примыкают методы *тематического анализа*, которые позволяют определить с помощью компьютера главные темы текстовых сообщений по статистике входящих в них слов. Некоторые из них мы обсудим далее при анализе распространения мнений по социальным сетям.

9.2.2. Формальные модели лингвистики

Как и в других науках, упомянутых выше, мы не ставим целью последовательный обзор методов и моделей математической лингвистики, отсылая читателя к учебникам[5]. Мы рассмотрим лишь несколько характерных работ, в которых лингвистические задачи сформулированы на языке дифференциальных уравнений, а их решения обсуждаются в терминах междисциплинарной физики. Чтобы такой подход был возможен, анализируемые величины должны быть количественно измеримыми и допускать представление в виде непрерывных переменных – хотя любые характеристики социальных систем, строго говоря, принимают дискретные значения.

Одним из измеряемых численных параметров государства или региона является доля жителей, говорящих на определенном языке. К началу XXI века в мире насчитывалось около 6.5 тысяч языков, большинство из которых находится под угрозой исчезновения. «Вымывание» местных языков и наречий – объективный, но потенциально опасный

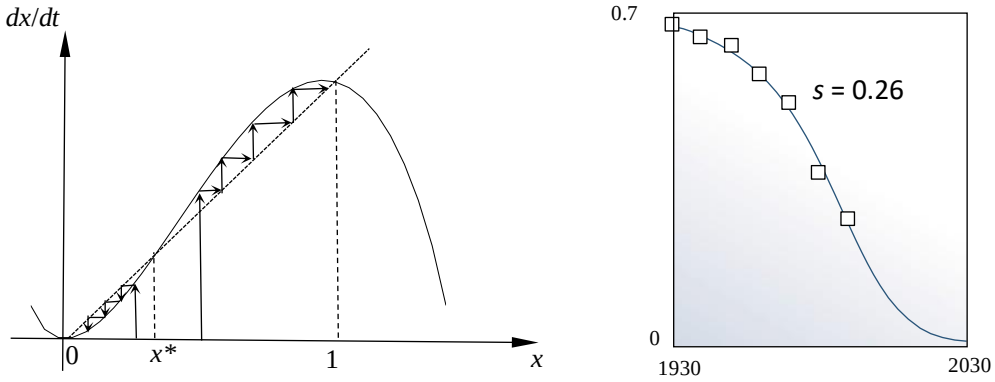
процесс, который сопровождается утратой региональной культуры и угрожает всплеском сепаратизма.

В простейшей квазифизической модели систему из двух конкурирующих языков I и II описывает уравнение

(9.6) $$dx/dt = A[x^{\alpha}(1-x)s - x\,(1-x)^{\alpha}(1-s)],$$

где $0 < x < 1$ – доля носителей языка I в населении региона, $0 < s < 1$ – относительный статус языка I, отражающий перспективы его носителей, $(1–x)$ и $(1–s)$ – то же для языка II. Первое слагаемое в квадратных скобках пропорционально вероятности перехода агента из языка II в язык I (в рамках модели агенты бессмертны и их число постоянно), второе – вероятности обратного перехода. Масштабный множитель A, показатель степени α и статус языка s – эмпирические параметры; по данным для 42 регионов $\alpha=1.31\pm0.25$ (см статью[6] и подпись к рис. 9.12).

Уравнение (9.6) по форме соответствует уравнениям химической кинетики (см. часть I). Построив лестницу Ламерея на фазовой плоскости (x, dx/dt) (гл. 4, разд. 4.4.2), можно видеть, что это уравнение имеет три стационарные точки $dx/dt = 0$: неустойчивую $x = x^*$, положение которой зависит от параметров уравнения, и два устойчивых состояния $x = 0$ и $x = 1$, в которые система приходит, соответственно, при $x < x^*$ и $x > x^*$ (Рис. 9.12 а).Таким образом, присутствие двух языков с различным социальным статусом приводит к вытеснению менее конкурентоспособного языка, если он не доминирует в регионе. Уравнение (9.6) количественно воспроизводит динамику исчезновения местных языков (рис. 9.12 б) – что неудивительно при наличии трех варьируемых параметров. Более точные модели, учитывающие прирост населения и миграцию, переводят (9.6) в уравнение диффузионной кинетики (разд. 4.4.1 в гл. 4), где одному из устойчивых решений отвечает сосуществование языков в двух разных регионах[6].



(а) (б)

Рисунок 9.12. (а) Стационарные точки уравнения (9.6) при A=1, α=1.3 и s=0.4. (б) Уменьшение доли носителей языка чекуа на архипелаге Гуануко (Перу) в XX – XXI веках. Квадраты соответствуют доверительным интервалам (D.M. Abrams, S.H. Strogatz, *Modelling the dynamics of language death*, Nature, 2003, 424, 900)

Из-за относительно небольшого числа слов и иных лексических единиц в языке (порядка миллиона) по сравнению с настоящими макроскопическими системами, размеры флуктуаций переменных могут быть сравнимы с их средними значениями. Для описания

таких систем используются стохастические дифференциальные уравнения наподобие уравнения Ланжевена (см. разд. 4.4 главы 4), в которых одна или несколько переменных – а значит и решение – случайные величины, распределенные вокруг их средних значений. Этот подход был использован в 2011 г. В.В. Поддубным и А.А. Поликарповым в построении стохастической динамической модели эволюции языковых знаков. Модель позволила воспроизвести эволюцию многозначности слов (*полисемию*): возникновение новых, более абстрактных значений и параллельно протекающий выход некоторых значений слова из употребления. В результате двух конкурирующих процессов зависимость числа актуальных значений слова (полисемия знака) в языке с течением времени проходит через максимум (рис. 9.13 а).

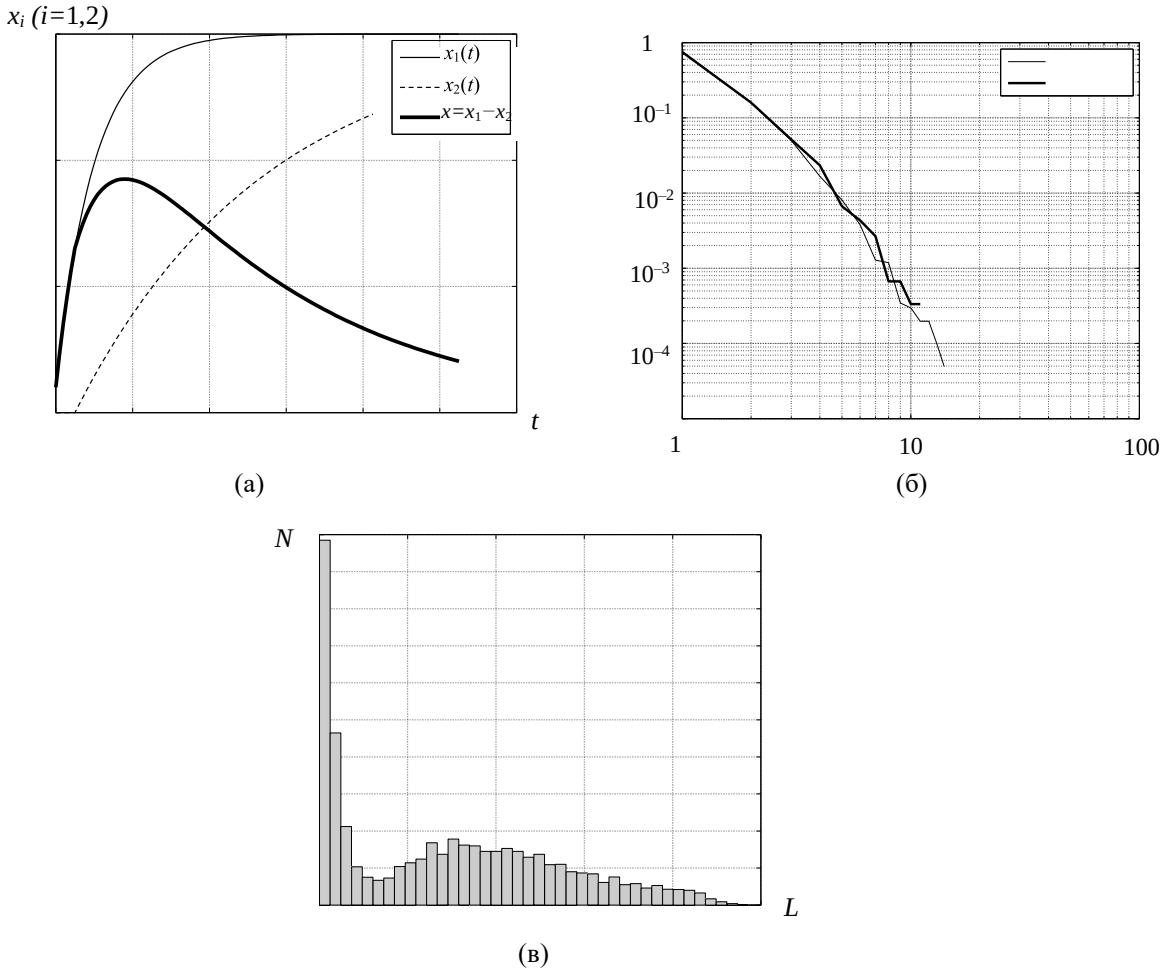


Рисунок 9.13. (а) Динамика полисемии знака: $x_1(t)$ – появление новых значений, $x_2(t)$ – выход значений из употребления (t – модельное время). (б) Сравнение результатов расчета с распределение полисемии слов в *Словаре языка Пушкина в 4-х томах* (2-е издание, М.: Азбуковник, 2000, 4598 с.), двойной логарифмический масштаб. (в) Распределение числа знаков N по длительности их жизни L в модели (В.В Поддубный, А.А. Поликарпов, Компьютерные исследования и моделирование, 2011, 3 (2), 103)

В цитируемой работе динамику полисемии слов моделировали на основе *принципа наименьшего действия*. В соответствии с этим фундаментальным физическим принципом эволюция любой системы во времени соответствует минимуму интеграла действия

(9.7) $$S = \int_0^\infty L(x(t), dx(t)/dt)dt = \int_0^\infty [T(t) - U(t)]dt\,,$$

где L – функция Лагранжа системы, $T(t)$ и $U(t)$ – соответственно ее кинетическая и потенциальная энергия (см. разд. 2.2.1 в главе 2). Условие минимума*

(9.7 а) $$\delta S = 0$$

позволяет построить «траекторию» изменения квази-непрерывного параметра: числа значений слова $k(t)$ с модельными функциями *ассоциативно-семантического потенциала* $G = U(t=0)$ и «кинетической энергии» процесса $T = C(dk/dt)^2$, где C – параметр инерции.

Хотя эволюции языковых знаков протекает в «коллективном сознании», физические характеристики которого не исследованы, построенная модель дает количественное согласие с распределениями полисемии слов в русском и английском языках (Рис. 9.13 б). Распределение знаков по длительности «жизни» (использования) в ее рамках (Рис. 9.13 в) соответствует динамике существования социальных систем, которая будет рассмотрена в конце этой главы. Принцип наименьшего действия и его аналоги для социальных систем будут обсуждаться далее.

Исследование жизненного цикла слов в трех языках (английском, испанском и иврите) было проведено Ю. Стенли и соавторами на основе *n-грамм Гугла*: базы данных из ~10^7 слов, составленной корпорацией Google по 4% всех книг, изданных в мире с 1800 по 2008 гг.[7] В этом исследовании частотность употребления i-го слова

$$f_i(t) = u_i(t)/\sum u_j(t)$$

(отношение числа всех его употреблений к общему числу употреблений слов в корпусе текстов в год t) переводилась в величину, аналогичную логарифмической доходности биржевого актива (см. формулу (8.51) в гл. 8):

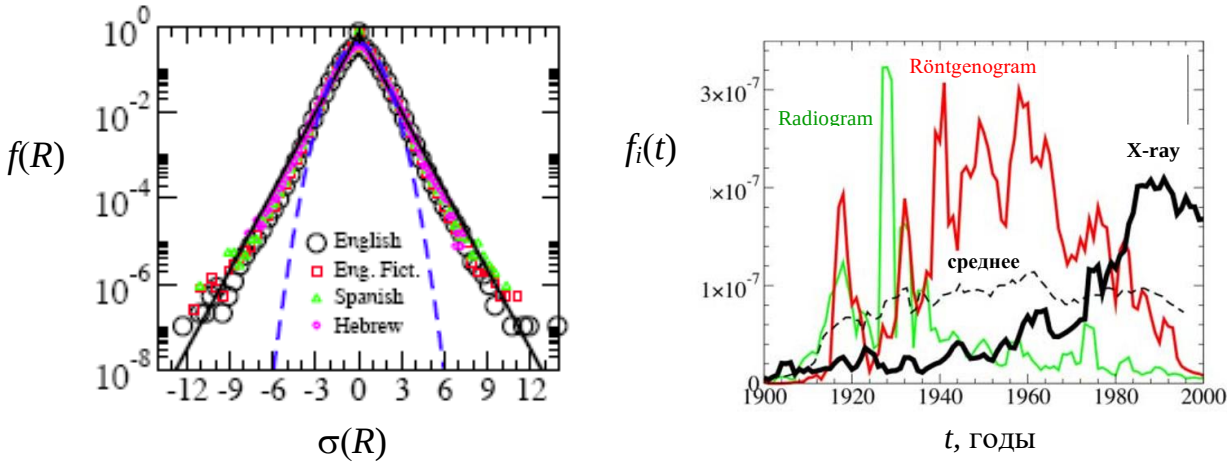
$$r_i(t) = \ln f_i(t + \Delta t) - \ln f_i(t)$$

при $\Delta t = 1$ (год). Авторами были рассчитаны динамика частотности слов, нормированная на ее дисперсию («волатильность») $r'_i(t)/\sigma[r_i]$, динамика самой дисперсии $\sigma_i(t)$ и ряд других показателей. Это позволило визуализировать статистику изменения распространенности слов – в разных языках практически одинаковую (рис. 9.14).

Создатель эконофизики Юджин Стенли (см. главу 8) использовал развитый им подход на основе вполне экономической гипотезы о «конкуренции» слов для обозначения объекта (предмета, явления, понятия) за ограниченный ресурс: сознание носителей языка. Этот процесс хорошо иллюстрирует динамика «имен» рентгеновского излучения (называемого так в отечественной литературе) в англоязычной среде (Рис. 9.14 б). Кроме «борьбы терминов», полимодальная форма графиков (см. тж. рис. 9.2) обусловлена сложными и многопараметрическими социальными процессами: мировыми войнами, волнами

* Функция Лагранжа в интеграле действия (9.7) для разных физических систем имеет разный вид и может не выражаться в аналитической форме. Тем не менее принцип минимума S – один из наиболее фундаментальных физических законов. Обобщенные зависимости, в которых роль переменных выполняют произвольные функции, в математике называются *функционалами*, а их бесконечно малые приращения *вариациями*. В формуле (9.7 а) δS – вариация функционала действия, в минимуме равная нулю. В 3-й части мы обсудим применение вариационного принципа (9.7 а) несколько более подробно – в той мере, чтобы понимать его приложения к описанию социума.

внедрения рентгеновских лучей в медицину, науку, технику и многими другими факторами, которые неизбежно остались за рамками лингвистического исследования. По аналогии с биржевыми графиками, статистика изменения частотности слов (рис. 9.14 а) оказалась близкой к остроконечному распределению Лапласа, но не имела типичной для биржи обратной степенной асимптотики.



(а) (б)

Рисунок 9.14. (а) Распределение вероятностей возрастания и убывания частотностей слов *R* в единицах дисперсии, полулогарифмический масштаб. Сплошная линия – распределение Лапласа, штриховая линия – распределение Гаусса. (б) Динамика частотности терминов Radiogram, Röntgenogram и X-ray, а также их среднего (штриховая линия) для обозначения изображений в рентгеновских лучах с 1900 по 2000 г. (см.[7])

«Игра в имена»

Другой способ исследования процессов в социальных системах методами статистической физики – агентное моделирование с усреднением параметров агентов. В последние десятилетия в зарубежной литературе широкое распространение получила *игра в имена*, или же «в наименования», первоначально возникшая в лингвистике. Ее название – дословный перевод английского *Naming Game*; в российской прессе так чаще называют развлечения наподобие «игры в города» либо поиски товарных брендов.

В междисциплинарной физике данным термином обозначают класс моделей, которые воспроизводят возникновение консенсуса в наборе агентов без централизованного управления. Такие модели, впервые предложенные в 1990-е годы, непосредственно не относятся к теории игр. Первоначально они воспроизводили *семиотическую динамику*: гипотетический механизм возникновение знаков (слов), обозначающих определенные объекты реального или воображаемого мира в человеческом сознании*. Благодаря широте

*В гуманитарных науках *семиотикой* называется область, посвященная исследованиям – как формальным, так и содержательным – знаков и знаковых систем, включая языки. Таким образом, семантика как наука о значениях символов (слов) является частью семиотики, которая охватывает также разделы языкознания, литературоведения, культурологии и других «чисто гуманитарных» дисциплин – и вместе с тем примыкает к математизированным реализациям искусственного интеллекта (см. 3-ю часть книги).

понятия «консенсус» такие модели распространились на задачи обществоведения, социальной психологии и когнитивных наук.

В простейшей *минимальной игре в имена* в наборе из N агентов устанавливаются «общепринятые» обозначения M объектов из некоторого фиксированного набора. Без ограничения общности можно положить $M = 1$. В алгоритме поиска таких обозначений среди агентов случайным образом выбираются пары из «информатора» и «слушателя». На каждом шаге дискретного времени информатор «называет» слушателю некоторое формальное имя объекта, случайно выбранное из имеющегося у него списка имен, а слушатель сравнивает это имя со своим списком. При наличии предложенного имени в списке слушателя фиксируется успешное сообщение и имя закрепляется за объектом у обоих агентов; прочие варианты стираются. В противном случае слушатель добавляет новое имя объекта в свой список. Далее процедура повторяется с новой парой агентов.

На первом шаге моделирования в списке каждого агента нет ни одного имени. Новые имена создаются из букв случайным образом (возможно, с соблюдением правил грамматики определенного языка). Таким образом, вероятность совпадения синтезированных имен у двух агентов исчезающе мала – комбинации букв можно заменить случайными числами. Однако добавление нового имени от «информатора» в список «слушателя» создает ненулевую вероятность последующего успешного сообщения в той же паре. В отличие от *игры в меньшинство* (близкой к статистическим моделям междисциплинарной физики, см. разд. 7.6.2 главы 7) список эвристик каждого агента не фиксирован, а создается и редактируется в дискретном времени.

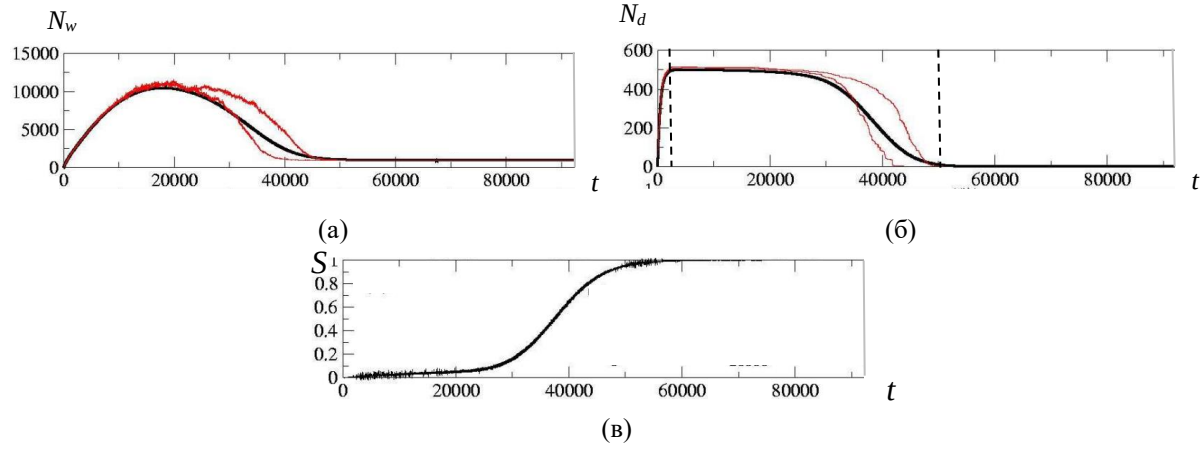


Рисунок 9.15. Динамика игры в имена на полном графе при $N = 1000$, $M = 1$: (а) общее число имен N_w, (б) число разных имен N_d, (в) доля успешных сообщений S. Цвет – индивидуальные прогоны, черные линии – усреднение (A. Baronchelli, et al., J. Stat. Mech., 2006, P06014)

На первом этапе моделирования по такому алгоритму синтезированные «имена» у разных агентов не совпадают: общее число имен объекта у всех агентов N_w и число его разных имен N_d в системе увеличиваются. На последующих шагах, благодаря совпадениям имен в списках агентов, доля успешных «сообщений» постепенно возрастает до 100%, а число имен в системе уменьшается вплоть до единственного имени в случае $M = 1$ (рис. 9.15). Таким образом, установление общих «знаков» (условный консенсус) в рамках модели не предполагают разумной деятельности: они возникают в результате хаотического обмена в системе агентов с ограниченным объемом памяти.

Динамика «игры в имена» сильно зависит от топологии связей между агентами. На сложных сетевых структурах (разделы 6.2.1 и 6.2.2. в главе 6) на первой стадии обмена знаками возникают кластеры, в которых агенты с конечным числом соседей располагают конечным набором общих знаков. Когда размеры кластеров достигают среднего расстояния между соединяющими их «мостами», происходит быстрое усреднение библиотек всех агентов в сети. Скорость «достижения консенсуса» также зависит от размеров памяти агентов (т.е. максимальной длины их списков) и других параметров, но сам процесс устойчиво воспроизводится[*]. При этом форма зависимостей $N_w(t)$, $N_d(t)$ и $S(t)$ в конкретных реализациях расчета (прогонах) может отличаться (см. рис. 9.15 а, б). Приложения «игр в имена» примыкают к динамике распространения мнений в социальной среде, исследуемой социологами и политологами (см. следующие разделы).

Нейролингвистическое программирование

Аббревиатуре NLP соответствуют несколько смежных понятий: рассмотренное выше распознавание текстов на естественном языке (Natural Language Processing), программирование на естественном языке в системах взаимодействия «человек-компьютер» (Natural Language Programming), которое будет затронуто в части III, и *нейролингвистическое программирование* (НЛП; англ. *Neuro-Linguistic Programming*). Последнее направление имеет преимущественно прикладной характер. В учебной и прикладной литературе НЛП туманно расшифровывается как «модель человеческих коммуникаций и поведения, которая может быть эффективно использована для организации и описания взаимодействий в психотерапии, педагогике, менеджменте с целью их оптимизации». Представление о методах, используемых в этой области, дает процитированное нами учебное пособие[8].

Популярная литература по НЛП не ссылается на математические модели; официальные источники нередко трактуют это направление как псевдонаучное. Тем не менее, мы включили его в данный раздел не только для полноты охвата темы (в любом случае весьма фрагментарного), но и потому, что нейролингвистическое программирование на практике предоставляет собой наиболее радикальный среди ненасильственных методов управления человеческой личностью: внедрение в сознание индивидуумов заданных целей и установок, т.е. именно программирование. Для этого используются такие фундаментальные положения:

- наличие у каждого индивидуума *карты мира*, задающей поведение человека
- возможность редактирования этой карты – в том числе косвенного, не затрагивающего индивидуального сознания
- комплексные воздействия на личность (зрительные, слуховые, информационные и т.д.) и организм (*тело*) индивидуума, с помощью которых формируется *внутренний опыт* и референтные ассоциации (*якори*), вызывающие нужные поведенческие реакции.

[*] D. Lipowska, A. Lipowski, *Phase transition and fast agreement in the Naming Game with preference for multi-word agents,* J. Stat. Mech. (2014) P08001.

Наличие у индивидуумов «карты» окружающей действительности, или *когнитивной карты*[*], как руководства к действию, декларировалось психологами с первой половины XX века. Во второй половине века НЛП сформулировало задачу ее изменения.

Официально нейролингвистическое программирование применяют в психотерапии и в обучении персонала лишь при согласии людей на проведение манипуляций («упражнений»). На практике мы ежедневно сталкиваемся с «программирующими» внешними воздействиями (громкая музыка на улицах, телевизионные шоу, эстрадные концерты, спортивные зрелища, массовые политические мероприятия, синхронные прыжки участников протестных акций и мн. др.) без своего согласия. Большинство таких воздействий направлено на редукцию сознания, которая упрощает поведение людей до соответствия простым агентным моделям. Среди наиболее невинных примеров назовем футбольных болельщиков, «зомбирование» покупателей в супермаркете музыкой и навязчивую рекламу, включая политическую агитацию (*нейромаркетинг* – вполне официальный термин[**]).

Более сложную идеологическую нагрузку несут *торгово-развлекательные центры* (ТРЦ), как «храмы потребления»,[***] где используют целый спектр комплексных воздействий на сознание посетителей. Строительство ТРЦ в XXI веке осуществляется во всем мире ударными темпами: их общая арендуемая площадь в США с 2000 по 2014 г. увеличилась вдвое, в КНР с 2005 по 2014 г. в пять раз (рис. 9.16). Элементы программирования сознания людей мы рассмотрим далее в этой главе в контексте политической борьбы и далее в части III, посвященной распределенному интеллекту социума.

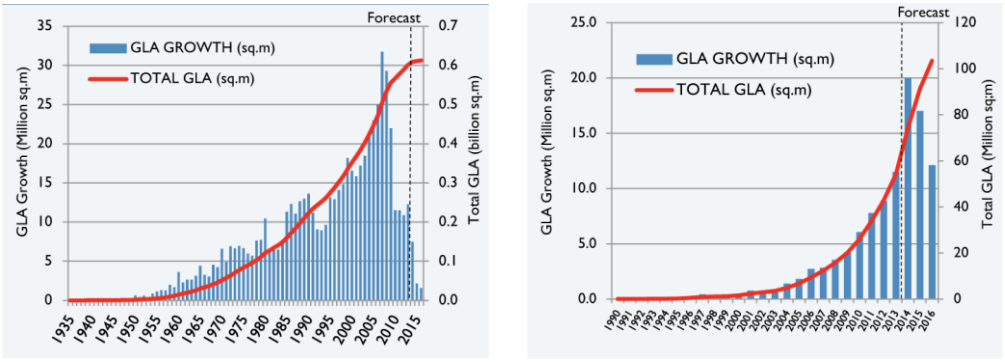


Рисунок 9.16. Динамика ввода арендуемых торговых площадей (gross leasable area, GLA, млн кв. м) в США (слева) и КНР (справа) с 1990 по 2016 г. *Global shopping center development report: spring 2014 Cushman & Wakefield Research Publication*, www.cwglobalretailguide.com

[*] Термин «когнитивная карта действительности» не следует путать со схемами ситуации или проблемы в виде графа под тем же названием, которые обсуждались в гл. 6.

[**] А. Трайндл, *Нейромаркетинг: визуализация эмоций*. Альпина Пабл., 2009.

[***]Е.А. Тарасенко, *Шоппинг как специфический вид потребительского поведения: поиск удовольствия или «храмы» нового времени* Вестник РГГУ. 2007. № 2-3. 215

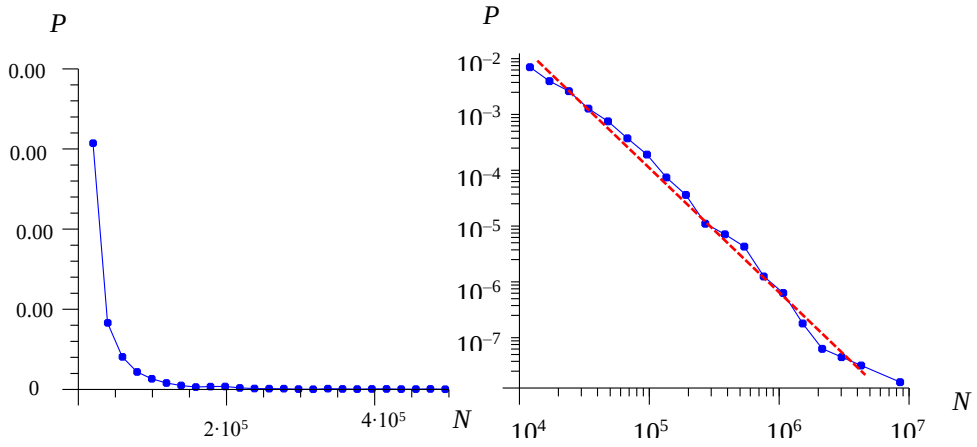
9.2.3. Закон Ципфа

Ибо кто имеет, тому дано будет и приумножится,
а кто не имеет, у того отнимется и то, что имеет
Мф. 13:12

Одной из общих закономерностей лингвистики является приближенная обратная степенная (т.е. гиперболическая) *ранг-размерная* зависимость частотности слов естественного языка, упорядоченных по убыванию их распространенности в словаре или в однородном корпусе текстов – например, составленном из литературных произведений одного автора

(9.8) $$f(r) \approx Cr^{-\alpha}$$

Здесь $f(r)$ – относительная частотность употребления слова, r – номер этого слова в общем списке, или *ранг* ($r = 1$ для наиболее распространенного, т.е. самого частотного слова, $r = 2$ для следующего по распространенности и т.д.), α – безразмерный показатель степени, C – масштабный множитель. В координатах «x=ранг (r) – y=размер (f)» точки, связанные зависимостью (9.8), расположены вблизи гиперболы (рис. 9.17 а). В двойном логарифмическом масштабе «ln x – ln y» они лежат возле прямой линии с отрицательным наклоном $-\alpha$ (рис. 9.17 б).



(а) (б)

Рисунок 9.17. Распределение доли городов США *P* (ордината) по численности населения *N* (абсцисса), (а) в линейном масштабе *P*(*N*), (б) в двойном логарифмическом масштабе ln*P*(ln*N*) (см[9], Fig. 2)

Соотношение (9.8) впервые установил в 1908 г. генеральный секретарь Института стенографии Франции Жан-Батист Эсту как статистическую закономерность в «корпусе» стенограмм. В 1913 г. немецкий физик Феликс Ауэрбах опубликовал аналогичный по форме *закон концентрации населения*, где в качестве $\{f(i)\}$ выступала численность населения городов. В предыдущей главе мы видели, что ту же форму имеет распределение Парето, в котором $\{f(i)\}$ – доли населения, ранжированного по возрастанию богатства (формула (8.21) в гл. 8). В 1949 г. американский лингвист Джордж Ципф в своей книге «Поведение человека и принцип наименьшего усилия» на вербальном уровне обосновал все подобные закономерности проявлением аналога принципа наименьшего действия (гл. 2, п. 2.2.1), названного им *принципом наименьших усилий*.

В настоящее время формулу (9.8) под наиболее объективным названием «закон Эсту-Ципфа-Мандельброта» (Б. Мандельброт тоже анализировал ее в 1950-е годы в рамках теории кодирования информации) считают универсальной приближенной закономерностью, которая справедлива для систем из большого числа однородных объектов, взаимосвязанных через некоторое сложное общее «поле». Разными формами обратной степенной зависимости описывают физические параметры веществ в околокритическом состоянии и динамику роста населения Земли во втором тысячелетии н.э. (разд. 2.5 главы 2), распределение порядков вершин в безмасштабных сетях Барабаши-Альберт и их аналогов в реальном мире (глава 6), благосостояние богатейшей части общества (разд. 8.4 в предыдущей главе) и многое другое.

В этом разделе мы рассмотрим лишь несколько проявлений закона Ципфа на эмпирическом материале. Так как (9.8) – одно из немногих универсальных соотношений, установленных для социальных и экономических систем, пределы его применимости имеют особую важность. Не менее важный вопрос об использовании вариационного принципа в описании экономики и общества мы оставим до следующей части.

Ранг-размерная зависимость частотности (9.8) математически связана с обратным степенным распределением плотности вероятности (формула (8.21) в главе 8). Пусть непрерывная случайная величина x распределена с плотностью вероятности

(9.8 а) $$p(x) = ax^{-\gamma},$$

где $p(x)$ – вероятность того, что она находится в бесконечно малом интервале $(x, x+dx)$. С увеличением x плотность вероятности (9.8 а), очевидно, уменьшается. Чтобы перевести (9.8 а) в измеримые величины, найдем интегральную вероятность $P(x)$ того, что наша случайная величина не меньше заданного значения x_0 – т. е. лежит в интервале от x_0 до $+\infty$

$$P(x > x_0) = \int_{x_0}^{\infty} p(x)dx = a\int_{x_0}^{\infty} x^{-\gamma}dx = \frac{a}{-\gamma+1}\int_{x_0}^{\infty} d(x^{-\gamma+1}) = -\frac{a}{\gamma-1}\left(0 - x_0^{-(\gamma-1)}\right),$$

то есть

(9.8 б) $$P(x \le x_0) = \frac{a}{\gamma-1}x_0^{-(\gamma-1)}$$

(см. разд. 1.3 в главе 1 и приложение П8). Таким образом, табличный интеграл от плотности вероятности (9.8 а) – это функция (9.8), в которой место частотности $f(r)$ занимает вероятность $P(x_0)$, $\alpha = \gamma - 1$ и $C = a/(\gamma-1)$.

Формула (9.8 б) имеет смысл только в том случае, когда $\gamma > 1$, то есть $\alpha > 0$. Но поскольку точка x_0 была задана произвольно, соотношение справедливо при любом значении переменной x: это *кумулятивное распределение* вероятности $P(x)$. Вспомним теперь, что реальная переменная $x = r$ дискретна, хотя может иметь много значений: это ранг, или место слова, города либо интервала (*квантиля*) в распределении – соответственно по частотности, численности населения или благосостоянию. Тогда формулы (9.8) и (9.8 б) эквивалентны, а показатели степени в них связаны простым соотношением

$$\gamma = \alpha + 1.$$

Итак, ранг-размерное распределение (9.8) эквивалентно кумулятивному распределению вероятности (9.8 б) для дискретной переменной x. Такие распределения, построенные по данным налоговой статистики, интерпретировала кинетическая теория денег, рассмотренная в разд. 8.4.1. Там же отмечалось, что вид распределений следует из принципа максимума энтропии при ограничениях, наложенных на случайную величину.

С (9.8) тесно связана другая эмпирическая закономерность лингвистики: *закон Хипса*

$$N = KM^{\beta}, \tag{9.9}$$

где M – общее число слов в тексте или корпусе текстов, N – число содержащихся в нем разных («уникальных») слов, $\beta \approx 0.5$, а множитель K обычно лежит в интервале от 10 до 100. Проверка (9.9) на больших выборках, включая n-граммы Гугла (см. выше), установила, что показатель степени β с ростом выборки уменьшается и в пределе $M \to \infty$ стремится к нулю ($\lim N = \text{const}$). В разных корпусах текстов или других словарных выборках (лексиконах) параметры в формуле (9.9) различаются (рис. 9.18). Кроме того, они изменяются с течением времени, отражая эволюцию языка.

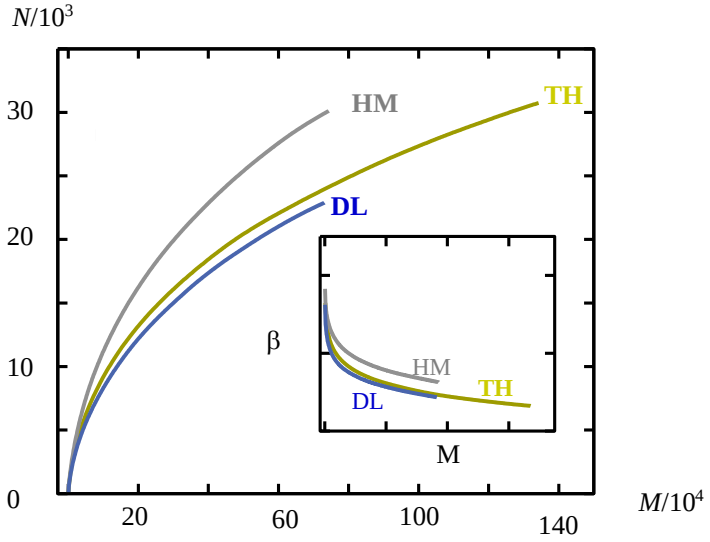
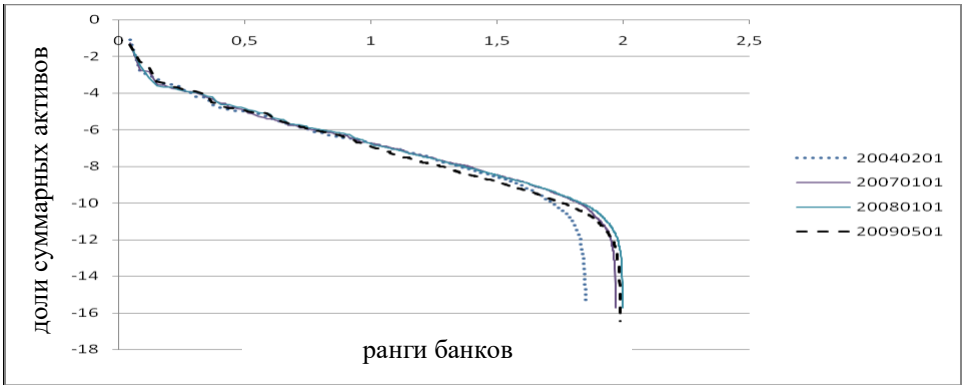


Рисунок 9.18. Закон Хипса $N = KM^{\beta}$ (9.9) в корпусах текстов Томаса Харди (TH), Германа Мелвилла (HM) и Дэвида Лоуренса (DL). На врезке зависимость показателя степени β от размера корпуса M (S. Bernhardsson, L.E.C. Rocha, P. Minnhagen, *The meta book and size-dependent properties of written language*, New J. Phys., 2009, 11, 123015)

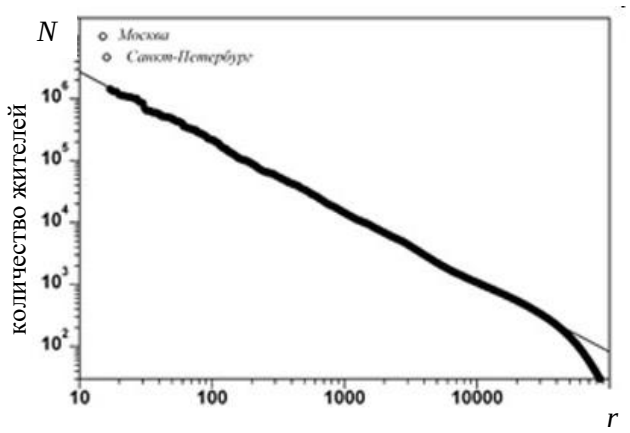
В первоначальном варианте закона Ципфа (9.8) предполагалось $\alpha = 1$. В реальных «гиперболических» распределениях для разных социо-экономических систем показатели степени α находятся в довольно широком интервале от 0.5 до 2. С учетом уменьшения показателя степени кумулятивного распределения на единицу это согласуется со статистикой порядка вершин в безмасштабных фрагментах сложных сетей (см. главу 6). Для различных показателей «размера» (включая частотность слов, численность населения городов, популярность киноактеров и мн. др.) участок ранг-размерной зависимости, спрямляемый в двойном логарифмическом масштабе, может занимать разные части графика, а на малых интервалах r (десятки и сотни точек) вовсе отсутствовать[9].

Более мощные выборки в десятки и сотни тысяч значений демонстрируют соответствие закону Ципфа в основной (средней) части данных с отклонениями для наиболее «богатых»

и наиболее «бедных» областей (рис. 9.19). Отклонения от (9.8) для низких рангов (больших r) легко объяснить недостаточностью статистики в «бедном» интервале данных. Так, академические словари содержат существенную долю редких и выходящих из употребления слов, которые не попадают в толковый словарь соответствующего языка – и соответственно имеют очень низкую частотность.[10] Выбросы в области высоких рангов (малых r) отражают изменение правил формирования размера объектов: дополнительное притяжение капиталов в доминирующие банки и фирмы (рис. 9.19 а) либо населения в крупнейшие мегаполисы (рис. 9.19 б).



(а)



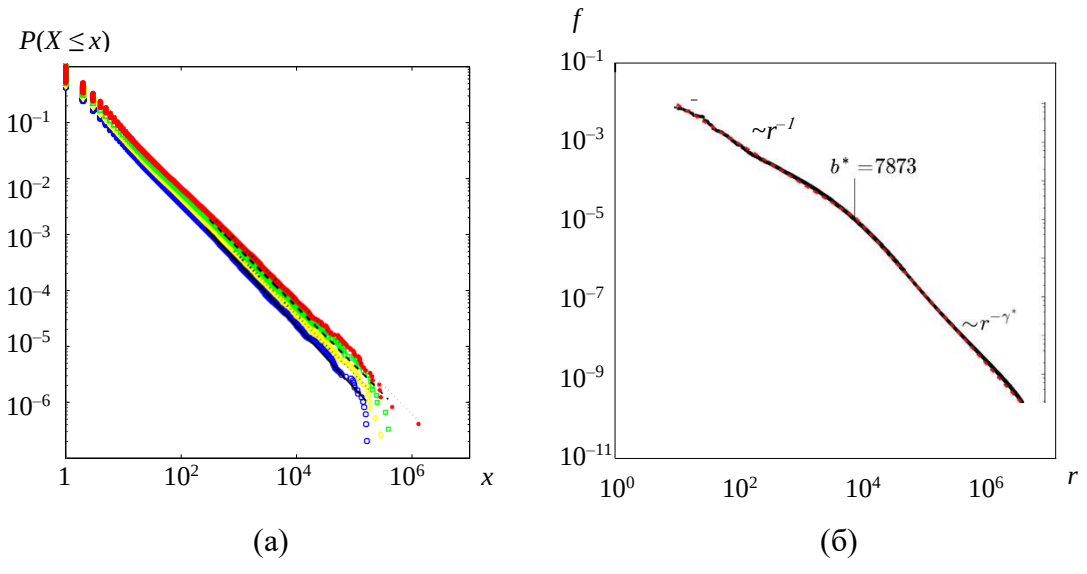
(б)

Рисунок 9.19. Ранг-размерные распределения по большим выборкам в двойном логарифмическом масштабе: (а) активы российских банков в 2004-2009 гг. (М.Ю. Андреев, Н.П. Пильник, И.Г. Поспелов, *Эконометрическое исследование и модельное описание деятельности современной российской банковской системы*, ВЦ РАН, 2008, с. 79, рис. 2.3.3), (б) население городов РФ (А.В. Подлазов, *Закон Ципфа и модели конкурентного роста,* в сб. Новое в синергетике. Нелинейность в современном естествознании. Ред. Г.Г. Малинецкий. Синергетика: от прошлого к будущему. –М.: ЛИБРОКОМ, 2009, с.229)

Духовная литература предостерегает от буквального толкования цитаты Евангелия от Матфея, поставленной нами в эпиграф: ее следует понимать аллегорически. Тем не менее, обратная степенная зависимость закона Ципфа в области сложных сетей (глава 6) лучше всего воспроизводится в алгоритме *предпочтительного присоединения*: вероятность образования новой связи с вершиной сети пропорциональны ее порядку, или «богатые становятся богаче». Этот принцип охватывает не только экономику и урбанистику, но и

«неживые» физические системы. Так, обратная степенная зависимость параметров критического состояния при конденсации газа (разд. 2.5 в гл. 2) следует из того, что вероятность слияния хаотически перемещающихся микро-капель возрастает с увеличением их объема. В пользу такого объяснения свидетельствует широкий интервал показателей степени в распределениях вида (9.8) и (9.8 а) – их конкретные значения определяет механизм взаимодействия в той или иной многочастичной или мультиагентной системе.

«Плавающие» параметры в уравнениях (9.8) и (9.9) вместе с явными отклонениями статистики для больших и малых частотностей от гиперболического тренда (см. рис. 9.19) отражают фундаментальную неоднородность социальных систем, включая естественные языки, а также обусловленность их динамики широкой и не вполне определенной совокупностью факторов. Сопоставление закона Ауэрбаха с данными по населению всех городов США выявило зависимость параметров уравнения (9.8) от алгоритма выделения «естественного города» в агломерации районов и населенных пунктов при сохранении «наклона» $\alpha \approx -1$ в двойном логарифмическом масштабе (рис. 9.20 а). Исследования частотности слов английского языка (а также других языков, включая русский) по большим лексиконам показали наличие не менее двух разных компонентов словаря: ограниченного устойчивого набора наиболее употребительных слов (англ. core words) с показателем степени $\alpha \approx 1$ и более лабильной совокупности «прочих» слов, где показатель $\alpha > 1$ изменяется с течением времени (рис. 9.20 б). В лабильной части лексикона, то есть в его подавляющем большинстве, слова имеют низкую частотность; рождение нового слова здесь снижает вероятность употребления уже существующих слов. Статистика закона Хипса (9.9) в двойном логарифмическом масштабе показывает аналогичную «надломленную» линейную зависимость.



(а) (б)

Рисунок 9.20. (а) Вид распределения Ципфа-Ауэрбаха при разных пределах выделения городских агломераций (B. Jiang, T. Jia, Internat. J. Geogr. Inf. Sci., 2010, 25 (8), 1260). (б) «Надломленное» ранг-размерное распределение частотности слов английского языка по *n*-граммам Гугла (M. Gerlach, E.G. Altmann, Phys. Rev. X, 2013, 3, 021006)

Итак, обратная степенная ранг-размерная зависимость, или закон Ципфа (9.8), в обобщенном виде действительно соблюдается для широкого набора весьма разных социо-экономических систем. Степень ее соответствия эмпирическим данным и значения

параметров (прежде всего показателя степени α) при этом сильно зависят от конкретного вида системы и процессов в ней. Как соответствие формуле (9.8), так и отклонения от нее лучше всего выявляются в больших однородных выборках из десятков и сотен тысяч точек. Физическую основу такой зависимости составляет динамика формирования системы: предпочтительное увеличение «размера» (во многих смыслах этого термина) у объектов с более высоким «рангом». Научная литература и житейский опыт свидетельствуют о том, что в человеческом обществе эта динамика почти универсальна.

Многообразие проявлений в сочетании с нечеткостью параметров делают закон Ципфа характернейшим примером «количественного закона» для социальных систем. (В социально-экономических дисциплинах советского периода такие соотношения назывались *закон-тенденция*). Вместе с тем, хорошего количественного согласия с формулой (9.8) в ряде случаев удается добиться выделением подходящей выборки данных, объединенных некоторым латентным общим признаком. Один из первых исследователей этого направления в СССР Ю.К. Орлов (1936–2005), в частности, высказал гипотезу о *точной* обратной степенной зависимости частотности слов в законченном литературном произведении, существующем в сознании его автора. На основании этой гипотезы им были предложены оценки объема словаря писателей и поэтов из оптимума «подгонки» к закону Ципфа по их индивидуальным произведениям, а также по корпусам текстов. (В XXI веке такой подход был заново открыт в зарубежной лингвистике под названием *meta-book*, см. рис. 9.18). Некоторые результаты работ Орлова и сформулированные в них положения см.[10] в литературе к данному разделу.

Литература к разделу 9.2

[1] В.М. Бехтерев, *Коллективная рефлексология*, Петроград: Колос, 1921.

[2] *Записная книжка Утешева Алексея Юрьевича. Сингулярное разложение матрицы* http://vmath.ru/vf5/algebra2/svd

[3] В.В. Матюшина, *Психолингвистический анализ содержания ценности «толерантность» (на материале русского языка)*, дисс. на соискание ученой степени канд. филол. наук, М.: Институт языкознания РАН, 2017.

[4] Ю.И. Морозова, *Построение семантических векторных пространств различных предметных областей*, Информатика и ее применения, 2013, **7** (1), 90.

[5] Т.В. Батура, *Математическая лингвистика и автоматическая обработка текстов*, Новосибирск, РИЦ НГУ, 2016.

[6] M. Patriarca, T. Lappanen, *Modeling language competition*, Physica A, 2004, **338**, 296.

[7] A.M. Petersen1, J. Tenenbaum, S. Havlin, H.E. Stanley, *Statistical laws governing fluctuations in word use from word birth to word death*, Sci. Rep., 2012, **2**, 313.

[8] Е.В. Драпак, *Нейролингвиситческое программирование: учебное пособие*. 2014: ЯрГУ, http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20140501.pdf

[9] M.E.J. Newman, *Power law, Pareto distribution and Zipf's law*, Contemporary Physics, 2005, 46 (5), 323.

[10] Ю.К. Орлов, *Динамика ранговых распределений и проблемы статистики редких событий*, в кн. Математическое описание ценозов и закономерности технетики. Философия и становление технетики.– Абакан: Центр системных исследований, 1996. С.79-93, http://www.kudrinbi.ru/modules.php?name=Biblio&&Authors=46

9.3. Физические модели в социологии

Социология, как наука, в середине XIX века сохраняла тесные связи с другими гуманитарными дисциплинами, включая психологию, экономику и философию. Однако с самого начала в ней был четко обозначен предмет исследований: строение и динамика

человеческого общества, понимаемого как совокупность взаимодействующих индивидуумов. «Атомистический» взгляд на социум складывался в борьбе с теологическими и мистическими представлениями о божественном надчеловеческом характере власти – следовательно непознаваемой и не подлежащей реформированию людьми. В соответствии с идеологией капитализма, в экономически развитых государствах Европы от времени Просвещения двигателем социальных процессов объявлялся разум, а главной целью общества – удовлетворение человеческих потребностей, пусть и понимаемых широко, включая право на индивидуальное совершенствование и развитие. Разрыв с традиционным мировоззрением, которое в фантастической форме («жизнь за Царя») выражало моральные категории социума, с одной стороны, приблизил социологию к естественным наукам, а с другой – к началу XX века вывел за пределы ее интересов *общественное сознание*. Несоответствие между постоянно совершенствуемыми методами исследования частных проблем и целями «общественного прогресса», чаще всего формулируемыми на уровне благих пожеланий, остается родовым признаком всех современных социально-экономических наук.

Первым объектом анализа социологии стала статистика криминальных явлений и связанных с ними показателей – таких, как уровень бедности, масштаб употребления алкоголя и др. (см. Рис. 9.1). Помимо того, что полицейские архивы в первой половине и середине XIX были одним из немногих массовых и относительно надежных источников количественных данных, научный и общественный интерес к *язвам капитализма* (официальный термин того времени) был обусловлен тяжелым состоянием эксплуатируемых классов в ведущих государствах Европы (Табл. 9.2). В наиболее передовой стране того времени Англии ожидаемая продолжительность жизни для новорожденного ребенка у фабричных рабочих в первой половине XIX века составляла 15 лет (за счет высокой младенческой смертности и детского труда), а у представителей аристократии 46-48 лет. Средний рост взрослых мужчин середины XIX века в этих общественных классах оценивается в 166 и 174 см соответственно[*]. Успехом английского рабочего движения 1830-40-х годов (чартизма) стал закон 1847 г., установивший в промышленности 10-часовой рабочий день для женщин и детей: низкооплачиваемой части заводских рабочих, которая достигала половины их общей численности.

Таблица 9.2

Показатели качества жизни в промышленно развитых странах Европы (без учета колоний) в конце XIX века[11]

	Англия, 1891-1900	Франция, 1898-1903	Германия, 1891-1900	Бельгия, 1891-1900
население, млн. чел.	38	40	56	6.5
городское, %	72%	55	60	55
фабричные рабочие, %	45	35	40	38
средний рабочий день, ч.	10	10	10	10
ожидаемая продолжительность жизни при рождении, лет	43	47	42	47

[*]J. Komlos, Research in Economic History, 2007, **25**, 117; J. Komlos, J. Baten, Social Science History, 2004, **28** (2), 191.

В Российской империи с населением 126 млн. чел. (по результатам первой всеобщей переписи 1897 г.) данные экономической и социальной статистики стали систематически регистрироваться и обсуждаться ближе к началу XX века. Средняя продолжительность рабочего дня на заводах и фабриках[*] в середине и второй половине XIX века составляла 12 ч.; в деревне труд не нормировался. Ожидаемая продолжительность жизни при рождении в Европейской России, имевшей 87% сельского населения, к концу XIX века составляла 31 год для мужчин и 33 года для женщин. У детей в возрасте 10 лет, до которого доживали 52% мальчиков и 56% девочек, она по разным оценкам находилась в интервале от 49 до 52 лет. Таким образом, средняя продолжительность жизни у пережившей детство части российского населения достигала 60-61 года, приближаясь к аналогичной характеристике европейских стран – где показатели детской смертности были ниже, но по современным меркам тоже запредельно велики[11].

Экстремальное, с нынешней точки зрения, общественное неравенство[**] в XIX веке отражалось в особенностях социологических теорий. Представители европейского *социального дарвинизма* (вслед за античными философами, не считавшими рабов полноценными людьми) обосновывали законность неравенства биологическими дефектами эксплуатируемых классов. На этом фоне не вызывают удивления ни радикальные критики капитализма, которые считали единственным средством от общественных пороков пролетарскую революцию, ни культивируемый в то же время расизм. Многие *расовые теории* XIX века, особенно популярные у немецких социологов, утверждали неполноценность всех людей, не относящихся к белой нордической расе, и обосновывали необходимость захвата чужих территорий дефицитом жизненного пространства для молодой германской нации. Такие концепции, весьма отрицательно воспринимаемые нами с учетом происшедших в XX веке истребительных войн, тем не менее, расширяли предмет общественных наук, добавляя в них антропологические, географические и экономические инструменты, а также обсуждая на описательном уровне массовое сознание и дух народа.

Историю возникновения и развития социологии можно найти в учебниках (см. [3] в списке рекомендуемой литературы). Мы рассмотрим лишь некоторые современные агентные модели общества и его субъединиц, построенные по аналогии с компьютерным моделированием конденсированной среды как совокупности взаимодействующих частиц: молекул и атомов (разд. 3.4 в главе 3). В таких моделях каждому «социальному атому» приписываются некоторые эмпирические параметры, способные изменяться по априорно заданному алгоритму. На динамической совокупности агентов вычисляют средние параметры и анализируют их эволюцию. По этой общей схеме к настоящему времени исследованы разнообразные социальные процессы:

- возникновение иерархий и групп
- распространение мнений в социальных системах, включая их поляризацию либо достижение консенсуса

[*] До реформ Александра II продолжительность рабочего дня в России не ограничивалась законом.

[**]Соотношение доходов крестьянина и крупного феодала в средние века, рабочего и банкира в XIX веке, а также современного рядового служащего и «глобальных» руководителей ТНК вряд ли сильно отличается – даже возможно, что это мировая константа. Но благодаря техническому прогрессу сверхпотребление нынешней «элиты» пока не ставит под вопрос физиологическую допустимость уровня жизни населения в развитых странах. В XIX веке это было не так.

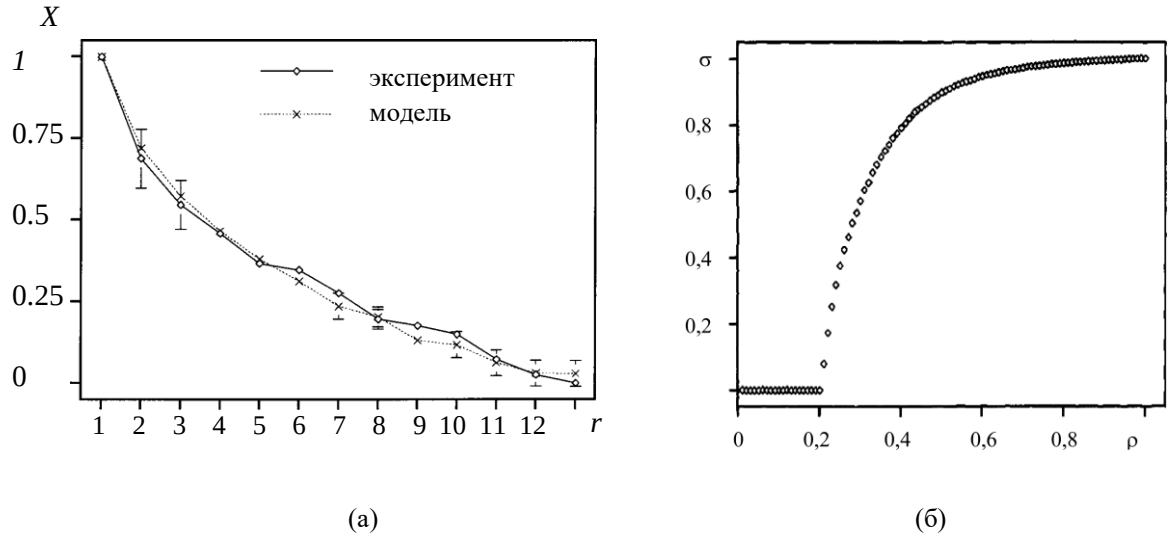
- коллективное поведение людей
- структурные изменения в социуме

9.3.1. Иерархии и группы в социальных системах

Всеобщим эмпирическим законом Природы можно считать предпочтительно групповое существования живых организмов в неблагоприятной внешней среде (колонии кораллов, стаи рыб и птиц, разнообразные общественные животные и люди). Борьбой за ограниченные ресурсы внутри групп порождаются *иерархии*, ранжирующие доступ индивидов к жизненным условиям. В случае *линейной иерархии* особи доминируют в последовательности $\alpha \succ \beta \succ \gamma$ ..., где знаку предпочтения отвечает лучший доступ к пище и другим средствам существования – в том числе отнятым у особей низшего ранга. Существенно, что иерархии, начиная с общественных насекомых, в большинстве случаев устанавливаются и поддерживаются в нелетальных столкновениях особей – и таким образом представляют собой наиболее общую социальную закономерность. Особенности социума общественных животных будут обсуждаться в третьей части книги; в этом разделе мы рассмотрим его формальное моделирование.

Первую и наиболее популярную на сегодня математическую модель возникновения иерархий предложил в 1995 г. Эрик Бонабё в совместной работе с биологами по исследованию социальной структуры колонии ос *Polistes dominulus*[12]. В этих *полигинных* колониях иерархия перезимовавших самок (до 10-15 особей в гнезде) устанавливается в стычках, в результате которых доминирующая α-особь, в бытовых терминах, становится осиной маткой, откладывающей яйца, а прочие самки приближаются к положению рабочих ос (отложенные ими яйца α-самка поедает). Индекс доминирования самок X устанавливался в наблюдениях над колониями ос по простой формуле

$$X = \frac{D}{D+S},$$



(а) (б)

Рисунок 9.21. (а) Индекс доминирования $X(r)$ у ос *Polistes dominulus*. (б) Фазовый переход в модели Бонабё: возникновение иерархии выше критической плотности агентов ρ_0 [12]

где D –число побед (dominance), S – число поражений (subordinate) особи в столкновениях. Ранг особей по убыванию X соответствует линейной иерархии; зависимость $X(r)$ (рис. 9.21 а) напоминает распределение Ципфа на рис. 9.17 а.

В первоначальной модели Бонабё агенты, оснащенные энергоподобным параметром $\{F_i\}$ («мощью» как запасом сил), случайным образом перемещались по квадратной решетке, вступая в столкновение («драку») с агентами, оказавшимися на их пути. Вероятность победы i-го агента над j-м соответствовала логистической зависимости (см. разд. 2.1 в главе 2)

$$P_i = \frac{1}{1+\exp\left[\eta\left(F_j - F_i\right)\right]} \tag{9.10}$$

В результате столкновения сила победившего агента возрастала на 1, повышая его шансы в последующих столкновениях, а сила побежденного агента уменьшалась. Множитель η, имеющий смысл обратной температуры 1/T в модели Изинга (см. разд. 3.4 главы 3), отражал неопределенность в исходе столкновения. При $\eta = 0$ ($T = \infty$) агенты побеждали с равной вероятностью $P_i = P_j = 0.5$ независимо от соотношения сил, тогда как при $\eta = \infty$ ($T = 0$) с вероятностью 1 побеждал сильнейший. В первоначальном варианте модели на первом такте расчета все агенты обладали равными силами, а в блужданиях без столкновений параметр F_i постепенно стремился к нулю.

Постулаты модели Бонабё соответствуют кинетической теории денег Яковенко (разд. 8.4.1 в главе 8), дополненной перераспределением «денег» в столкновении от бедного агента к богатому с вероятностью (9.10) и условием релаксации $\{F_i\}$. Компьютерные эксперименты показали, что при заданном параметре η ниже критической плотности ρ_0 агентов на решетке распределение $\{F_i\}$ остается «эгалитарным»: для подавляющего большинства агентов $F_i = 0$, т.к. возникающее в столкновениях неравенство постепенно «забывается». При $\rho > \rho_0$ возникает иерархия агентов с ненулевой «мощью», что отражается в их рангах по индексу доминирования (X_i).

Параметром порядка в модели служит дисперсия распределения вероятности победы в столкновении агентов

$$\sigma^2 = \langle P_{ij}^2 \rangle - \langle P_{ij} \rangle^2 > 0$$

(рис. 9.21 б). Подстановка дисперсии в формулу (9.10) ($\sigma = \eta$, или «охлаждение» системы с увеличением неравенства) задает положительную обратную связь, обостряя фазовый переход. Различные варианты модели, в том числе на сложных сетях, воспроизводили возникновение иерархии с разными начальными условиями и варьированием параметров. При стартовом неравенстве агентов первоначальное гауссово распределение $\{F_i\}$ переходило в ранг-размерное распределение гиперболического вида, в котором доминировали агенты с исходным максимумом «сил».

Иерархия в биологических социумах от колонии моллюсков до «дикого» капитализма, очевидно, угрожает жизни индивидов низкого ранга, ограниченных в доступе к средствам существования. Стремление ослабить неравенство выражается в усложнении социальной структуры с образованием *коалиций*. Такие коалиции, позволяющие совместно

противостоять доминирующим особям, хорошо известны для приматов – а в форме брачных пар для многих видов животных. Ранг-размерные распределения в реальных общественных системах обычно сопровождаются наличием внутри системы компенсирующих *групп*, что также является общим свойством социума.

Рассмотрим модельную иерархию из двух уровней: одного доминирующего агента и n агентов второго ранга (рис. 9.22). На каждом шаге дискретного времени «младшие» агенты получают из внешней среды по одной единице условной энергии $\varepsilon = 1$, а доминирующий агент отбирает у одного из них $\Delta\varepsilon = k$ единиц. Для простоты положим, что k – целое число и все агенты низшего ранга подвергаются реквизиции по очереди. За полный цикл из n последовательных реквизиций приращения энергии агентов составят

(9.11)
$$\Delta\varepsilon_0 = kn \text{ (доминирующий агент)}$$
$$\Delta\varepsilon_i = n - k \text{ (остальные агенты)}$$

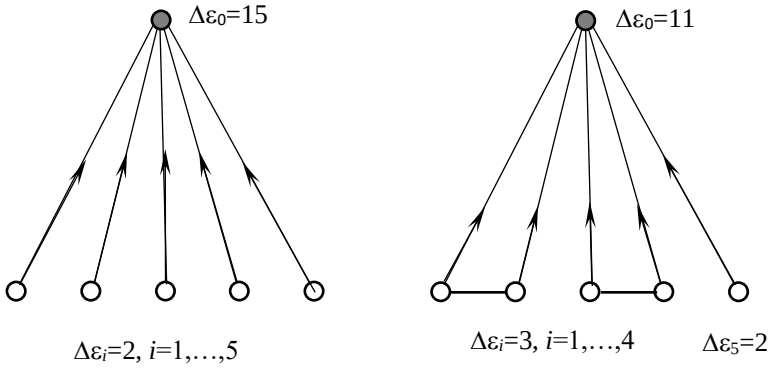


Рисунок 9.22. Приращения «энергии» у агентов за один цикл в двухуровневой иерархии без коалиций «младших» агентов (слева) и с парными коалициями (справа) для k=3, n=5, см. формулы (9.11 а)

Очевидно, что система устойчива (все приращения энергии положительны и $\Delta\varepsilon_i < \Delta\varepsilon_0$) при

$$\frac{n}{n+1} < k < n.$$

Пусть теперь m из n агентов второго ранга образуют коалицию, установив между собой связи. Доминирующий агент, обратившись к коалиции, может получить с каждого из входящих в нее агентов лишь по 1 единице энергии на одном шаге дискретного времени, то есть суммарно m единиц с коалиции на одном шаге. При обходе всех «младших» агентов приращения энергии за цикл составляют

$$\Delta\varepsilon_0 = m^2 + k(n - m) \text{ (доминирующий агент)}$$
(9.11 а)
$$\Delta\varepsilon_i = n - m - bn(m - 1) \text{ (агенты в коалиции)}$$
$$\Delta\varepsilon_j = n - k \text{ (агенты вне коалиции)}$$

В чуть более реалистической модели сохранение связей в коалиции на каждом такте времени требует расхода энергии агента b на одну связь. Если предположить, что каждый агент в коалиции связан со всеми остальными (т.е. связям в коалиции соответствует полный граф), энергия агента за цикл дополнительно уменьшится на $bn(m-1)$: слагаемое, выделенное в (9.11 а) серым цветом. Однако при $b << 1$ таким уменьшением можно пренебречь, считая связи агентов бесплатными. В этом случае объединение всех

«младших» агентов невыгодно: за полный цикл $\Delta\varepsilon_0 = n^2$ и $\Delta\varepsilon_i = 0$. Но при промежуточных размерах коалиции у входящих в нее агентов останется больше энергии, чем у одиночных агентов:

$$\Delta\varepsilon_i > \Delta\varepsilon_j \text{ при условии } n - m > n - k, \text{ то есть } 1 < m < k$$

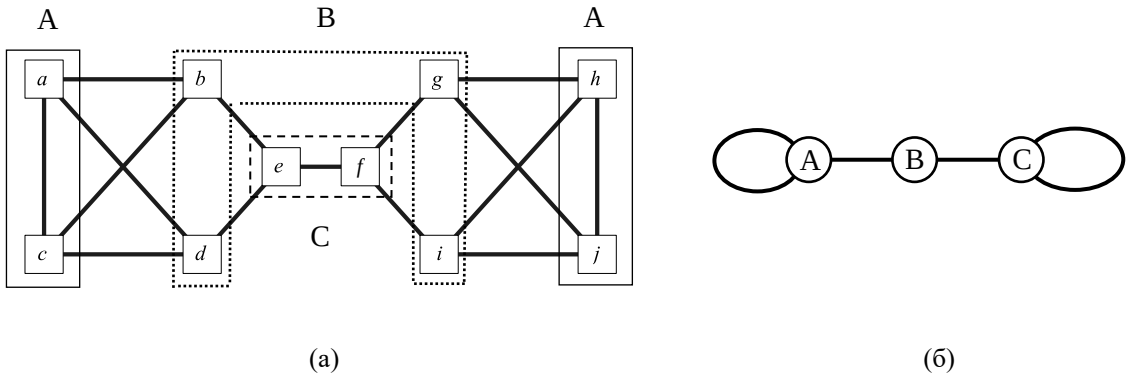
Так, при $n = 5$ и $k = 3$ образование двух парных коалиций дает их участникам выигрыш по одной единице энергии на цикл – тогда как приобретение доминирующего агента соответственно уменьшается (см. рис. 9.22).

Предельно упрощенная модель (9.11 а), тем не менее, воспроизводит наблюдаемое усложнение социальной структуры, которое снижает давление иерархии на входящих в нее индивидов. На метафорическом уровне этот пример позволяет понять неоднородное сетевое строение реальных социальных систем, в которых присутствуют сообщества и клики из сильно связанных между собой вершин (см. главу 6).

С точки зрения реализации, структуры социальных иерархий ограничены конечной способностью агентов поддерживать связи. Оценка максимального порядка вершин, занятых индивидами в «живых» сетевых структурах*, называется *числом Данбара D*. Его величина, установленная по наблюдениям за группами общественных приматов и данным о простейших человеческих сообществах, лежит в интервале примерно от 100 до 200 с условной оценкой $D \approx 150$. Управление из единственного центра группой людей, превышающей по численности этот критерий, становится неэффективным, а при ее неограниченном увеличении невозможным. Этим, в частности, иллюстрируется неизбежность иерархии в больших организационных системах, состоящих из людей.

Классификация агентов в социальной системе: блочное моделирование

Для классификации групп в математических моделях социологии с середины XX века используются графы. В этом случае агентам, как «социальным атомам» в группе-«молекуле», отвечают вершины графа, ненаправленному взаимодействию агентов произвольного характера соответствуют ребра, а направленному – дуги (стрелки). Детализация взаимодействий заставляет переходить к взвешенным графам, описание многофакторных процессов – к многослойным графам и сетям (см. главу 6). На качественном уровне ребра графа показывают наличие взаимодействия между агентами (рис. 9.23 а). Для таких графов строят квадратную матрицу смежности, в которой недиагональными элементами $\{a_{ij}\}$ являются единицы и нули.



(а) (б)

Рисунок 9.23. (а) Граф Эверетта, выделены блоки, (б) его блочная модель

* к которым безусловно не относятся компьютерные и иные техногенные сети

При анализе сложных социальных конструкций необходимо их упростить, выделяя наиболее существенные характеристики вершин и связей. Метод «агрегации» вершин на основе матриц смежности в математической социологии называется *блочным моделированием* (англ. *blockmodeling*). Этот подход был предложен в 1970-е годы. В моделях социальных систем расположение вершины (агента, или *актора*) в графе межагентных связей называется *позицией*, функция, обусловленная позицией – *ролью*, а набор вершин с однотипной ролью, одинаково связанных с между собой и (или) с другими вершинами – *положением* или *статусом*. Так, в графе на рис. 9.23 а вершины *e* и *f* занимают положение в роли «моста»: при удалении любой из них граф распадается на две части.

Первой задачей блочного моделирования является разбиение графа на кластеры или *блоки* в нестандартном понимании термина: наборы вершин с одинаковой ролью в исходной модели. Следующей задачей, неотделимой от первой, является построение связей между блоками, которое упрощает исходный граф, выделяя в нем наиболее существенные фрагменты: такие, которые состоят из вершин, одинаково связанных с их ближайшим окружением, либо имеют одинаковую внутреннюю конфигурацию ребер. (Так, на рис. 9.23 а две половины графа – связные блоки одинакового строения, а вершины *b, d, g* и *f*, не связанные между собой, одинаково соединены с остальной частью графа; по этому признаку их можно отнести к одному кластеру).

Алгоритмическое выделение блоков и их связей в графе производится на основе его матрицы смежности, в математической социологии называемой *реляционной* (англ. relation matrix). Для графа Эверетта на рис. 9.23 а это матрица размера 10×10

(9.12)

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
a	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
c	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
d	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
e	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
f	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
g	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
h	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
i	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
j	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

(9.12 а)

		A				B				C	
		a	*c*	*h*	*j*	*b*	*d*	*g*	*i*	*e*	*f*
A	*a*	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
	c	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	h	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
	j	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
B	*b*	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
	d	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
	g	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
	i	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
C	*e*	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
	f	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Перестановка строк и столбцов преобразует таблицу (9.12) в блочный вид (9.12 а). Ее блоки соответствуют наборам вершин, одинаково связанных с окружающими вершинами. Каждому из таких трех блоков A, B и C можно поставить в соответствие элемент *матрицы-образа* (англ. image matrix) (9.12 б). В этой

матрице размера 3×3 элементы 0 соответствуют блокам, состоящим из одних нулей, а 1 – блокам, содержащим единицы (связи) во всех строках и столбцах.

(9.12 б)

	A	B	C
A	1	1	0
B	1	0	1
C	0	1	1

По матрице-образу (9.12 б) можно построить граф, вершинами которого служат блоки исходной модели (рис. 9.23 б). Таким образом, выделение блоков упрощает модель, сохраняя ее «топологические» свойства: связи либо отсутствие связей между группами вершин. Наличие связей между вершинами внутри одной группы обозначается петлей в полученном графе. Заметим, что симметричный вид матрицы (9.12 б) и соответствующий ей граф на рис. 9.23 б непосредственно не следуют из структуры исходного графа: они отражают объединение его вершин в эквивалентные блоки в модели «позиция – роль»[13].

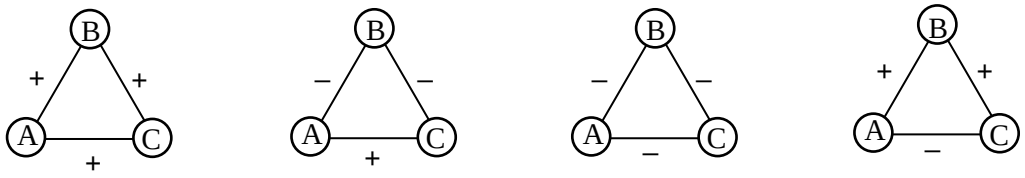
Подобно математическим моделям экономики, блочное моделирование представляет собой «автономную» область математической социологии с собственными терминами и весьма непростым формализмом. В последние десятилетия это направление становится частью более последовательной и логичной *науки о сетях*, созданной физиками (глава 6). Сети реального мира из связанных индивидуумов (например, социальные сети в Интернет), содержащие тысячи и миллионы узлов, обычно имеют сложную и нерегулярную структуру, поэтому выделение блоков в них – приближенная операция. Подобно упрощению семантических матриц (см. предыдущий раздел), качество блочной модели характеризуется суммами отклонений ее элементов от идеального вида матрицы – например, долей ненулевых элементов в блоках, состоящих преимущественно из нулей. Одним из популярных комплексов программ для анализа больших сетей, включая блочное моделирование, является Pajek[14] («паук»), разработанная в Словении в конце 1990-х годов. Созданы аналогичные комплексы на современных языках программирования*.

Моделирование малых групп

Группа, как составная часть социума, называется *малой*, если каждый входящий в нее индивидуум информирован о всех остальных членах группы и сформировал отношение (положительное, нейтральное или отрицательное) к каждому из них. Схему отношений в малой группе передает полный граф. Очевидно, такая группа лучше всего соответствует понятию «социальной молекулы». Мы будем считать группы *замкнутыми* (число индивидуумов в группе не изменяется), а отношения *взаимными*: если А считает Б другом или врагом, то Б относится к А точно так же. Нейтральные (*нулевые*) отношения рассматривать не будем, хотя они важны для психологии коллектива. Как в других разделах этой книги, индивидуумов в группе мы будем называть агентами, а их взаимодействия – связями.

Связи между агентами в группе на качественном уровне изображает граф со знаками «плюс» (позитивное отношение, *друг*) или «минус» (негативное отношение, *враг*) на его ребрах. Граф является *структурно сбалансированным*, если во всех его тройках взаимосвязанных агентов (*триадах*) знаки отношений подчиняются логическим аксиомам

*D. Zinoviev, *Complex network analysis in Python: recognize - construct - visualize - analyze – interpret*, Pragmatic Bookshelf, 2017.



(а) (б) (в) (г)

Рисунок 9.24. (а, б) Сбалансированные и (в, г) несбалансированные взаимодействия в группе из трех взаимосвязанных агентов (триаде)

(9.13.1) *друг моего друга – мой друг*
(9.13.2) *враг моего врага – мой друг*
(9.13.3) *друг моего врага – мой враг*
(9.13.4) *враг моего друга – мой враг.*

Конфигурации связей в триадах на рис. 9.24 (а, б) соответствуют этим правилам, т.е. сбалансированы, а на рис. 9.24 (в, г) им противоречат. Состояние агента с несбалансированными взаимодействиями в психологии называется *когнитивным дисбалансом*. Если правила (9.13.1-4) справедливы, то любая группа из *n* агентов, в которой присутствуют негативные отношения, разделяется на две антагонистические коалиции (рис. 9.25).

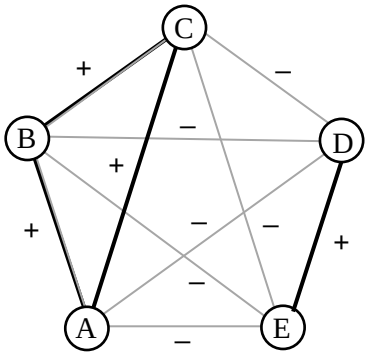


Рисунок 9.25. Коалиции (A, B, C) и (D, E) в группе из пяти агентов

Менее логичный, но более реалистический набор аксиом получается, если к (9.13.1-4) добавить возможность

(9.13.5) *враг моего врага – также и мой враг.*

Правила (9.13.2) и (9.13.5) очевидно противоречат друг другу, однако вместе они лучше соответствуют богатству и сложности человеческого поведения. Если, в зависимости от ситуации, в триадах агентов выполняется одно из них, группа из *n* агентов может разделиться на любое число враждующих коалиций, не превышающее *n*. В частности, возможна конфигурация «каждый за себя», как на рис. 9.24 в. Отметим, что конфигурация на рис. 9.24 в остается несбалансированной и относительно правил (9.13.1-5).

Определению малой группы, в частности, соответствуют фирмы на одном рынке и государства в некотором регионе мира. Этим объясняется большой интерес к подобным моделям в экономических и общественных науках. Несбалансированные группы, как ясно

уже на интуитивном уровне, менее стабильны, но могут существовать в составе более крупной и сложной конфигурации (см. задачу об устойчивых браках в разделе 7.7 главы 7).

Для групп с заданными конфигурациями связей, по аналогии с анализом когнитивных карт, баланс переменных могут задавать дифференциальные уравнения. Такими переменными в некоторых моделях могут обозначаться весьма нематериальные понятия: интенсивность действий и взаимодействий индивидуумов, степень эмоциональности или уровень дружелюбия (см. [4]). В математических моделях гуманитарных наук подобные параметры довольно распространены (см. семантический дифференциал в разд. 9.2), хотя в наиболее формализованных разделах экономики, исследованиях сетей и теории игр редко прибегают к «умножению сущностей».

Трудно определимым, но важным параметром группы является интенсивность взаимного влияния агентов. Обычно она не сводится к физическому понятию «силы» как меры взаимодействия, хотя во многих случаях может быть пропорциональной измеримому параметру: например, доле акций у совладельцев предприятия. «Силами влияния» агентов в группе определяются, в том числе, количественные аспекты групповой деятельности. Для их предсказания ребрам или дугам графа группы из n агентов по экспертным оценкам приписывают численные веса влияния, затем строят из них матрицу* $W = \|w_{ij}\|$ и находят ее собственный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$ (если такой вектор есть):

(9.14) $$W\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Если все компоненты матрицы влияния положительны (то есть агенты не поступают наперекор друг другу), относительные значения $\{x_i\}$ можно нормировать на единицу:

(9.14 а) $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

В этом случае компонентами собственного вектора (9.14 а) определяются соотношения *влиятельности* агентов. Строки матрицы W также нормируют на единицу: недиагональные элементы $(w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in})$ в них пропорциональны силам влияния i-го агента на остальных агентов, а диагональный элемент w_{ii} – «самовлиянию» агента, то есть относительной устойчивости его намерений:

(9.14 б) $$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1.$$

Расчет собственных значений квадратной матрицы, т.е. корней векового уравнения, и ее собственных векторов обсуждался в разделе 3.1.2 главы 3. Здесь мы рассмотрим только его применение. Матрицы с положительными элементами, удовлетворяющие условию (9.14 б), всегда имеют единичное собственное значение и отвечающий ему вектор (9.14).

Пусть взаимное влияние трех агентов задается матрицей

*Матрица взаимного влияния – частный случай *социоматрицы* (социометрической матрицы), элементами которой выражают характер и глубину взаимоотношений индивидуумов в группе, см. главу 3 в [4].

(9.15) $$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

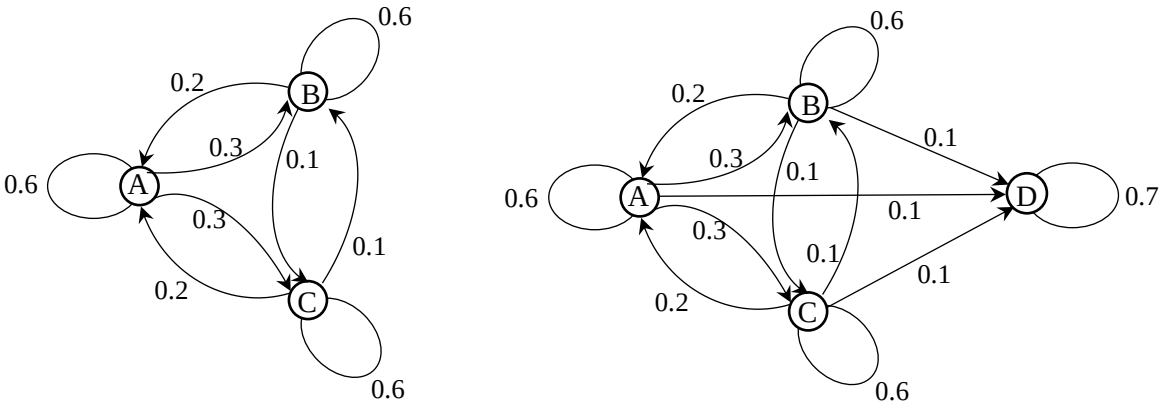
Ей соответствует взвешенный ориентированный граф на рис. 9.26 а; диагональным элементам матрицы («влиянию агентов на самих себя») отвечают петли при его вершинах. Чтобы убедиться, что эта матрица имеет собственное значение $\lambda = 1$, достаточно его подставить в вековое детерминантное уравнение

$$\begin{vmatrix} 0.6-1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6-1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & -0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & -0.4 \end{vmatrix} = -0.4 \begin{vmatrix} -0.4 & 0.1 \\ 0.1 & -0.4 \end{vmatrix} -$$

$$-0.2 \begin{vmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & -0.4 \end{vmatrix} + 0.2 \begin{vmatrix} 0.3 & -0.4 \\ 0.3 & 0.1 \end{vmatrix} = -0.4[(0.16 - 0.01) - (0.03 + 0.12)] = 0$$

(мы переставили строки в последнем детерминанте 2×2, отчего он изменил знак, и выполнили действия). Искомый вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – это собственный вектор транспонированной матрицы W^{T}, в которой строки и столбцы матрицы (9.15) поменялись местами

(9.16) $$\mathrm{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 \\ 0.2x_1 + 0.6x_2 + 0.1x_3 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



(а) (б)

Рисунок 9.26. Графы влияния, соответствующие (а) матрице (9.15), (б) матрице (9.18) (см. текст)

Соотношение (9.16) эквивалентно системе трех линейных уравнений

(9.16 а)
$$\begin{aligned} -0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 &= 0 \\ 0.2x_1 - 0.4x_2 + 0.1x_3 &= 0 \\ 0.2x_1 + 0.1x_2 - 0.4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Если умножить второе уравнение на 2 и сложить его с первым, получим

$$-0.5x_2 + 0.5x_3 = 0, \text{ т.е. } x_2 = x_3.$$

Подставляя $x_2 = x_3$ во второе и третье уравнения, получим один и тот же результат:

$$0.2x_1 - 0.3x_2 = 0, \text{ то есть } 2x_1 = 3x_2 = 3x_3.$$

Иначе говоря, компоненты вектора **x** относятся как

$$x_1 : x_2 : x_3 = 3:2:2.$$

Нормируя компоненты на единицу ($x_1 + x_2 + x_3 = 1$), получим вектор относительных влияний агентов:

$$\mathbf{x} = (3/7, 2/7, 2/7)$$

Таким образом, если f_1 – позиция первого агента, f_2 – позиция второго и f_3 – третьего, общая позиция группы – это

$$\langle f \rangle = \frac{1}{7}(3f_1 + 2f_2 + 2f_3), \tag{9.17}$$

то есть влияние первого агента на «мнение» группы в полтора раза больше, чем у второго и третьего. (Мы не обсуждаем здесь тонкий вопрос о «векторах-строках» и «векторах-столбцах», так как для наших целей достаточно простого умножения матриц. Но в математике эта градация есть; ее плодотворно используют в алгебре тензоров, лишь слегка затронутой нами в разд. 3.1.2 главы 3).

Теперь добавим в систему, которой соответствует матрица (9.15) и граф на Рис. 9.26 а, четвертого агента, который не влияет на агентов №№ 1–3, но сам находится под их влиянием (рис. 9.26 б). Матрица этой системы

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

имеет те же три собственных значения (1, 1, 0.6), что и матрица (9.15), и четвертое собственное значение $\lambda = 0.7$. (Чтобы в этом убедиться, достаточно записать вековое уравнение $\det(W_1 - \lambda E) = 0$, где E – единичная матрица 4×4, и разложить детерминант по последнему столбцу, см. разд. 3.1.2 гл. 3). Вклады позиций агентов в общую позицию группы в этом случае равны

$$\langle f \rangle = \frac{1}{7}(3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 0f_4)$$

Таким образом, 4-й агент не влияет на остальных агентов в группе и его мнение не учитывается в общей позиции группы.

Разные виды матриц влияния отвечают разным вариантам взаимодействий внутри группы. Так, матрице

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

соответствует «диктатура» первого агента, на которого второй и третий агенты не имеют влияния (как не влияют и друг на друга). В этом случае позиция группы $\langle f \rangle = f_1$. Если же матрица имеет блочный вид

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}, \tag{9.19}$$

взаимодействиям агентов отвечают ненулевые блоки. Вековое уравнение в этом случае сводится к произведению двух детерминантов 2×2:

$$\det(W_3 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0.6-\lambda & 0.4 \\ 0.3 & 0.7-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0.8-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

с ортогональными собственными векторами $\mathbf{x}^{(1)}$=(3/7, 4/7, 0, 0) и $\mathbf{x}^{(2)}$=(0, 0, 1/3, 2/3). В этой группе присутствуют две независимые коалиции агентов (A, B) и (C, D), не влияющие одна на другую; единой позиции в данном случае нет (см. [4] в списке литературы к этой главе).

9.3.2. Распространение мнений в социуме

Но знаешь ли, чем сильны мы, Басманов?
Не войском, нет, не польскою подмогой,
А мнением: да! мнением народным.
А.С. Пушкин, «Борис Годунов»

Настроения и мнения в обществе создают основу для массовых действий. Проблема распространения мнений в социальных системах в ее академических и прикладных аспектах интенсивно исследуется современной социологией и политологией. В этом разделе мы рассмотрим модели динамики мнений, заимствованные из физики и адаптированные для соответствия социологическим представлениям. В таких моделях мнение агента выражается числовым параметром, принимающим значения из априорно заданного множества и распределенным по некоторой социальной структуре. С этими моделями тесно связана задача *выявления* мнений в потоке информации, проходящей через ТВ, прессу, компьютерные сети и мобильную связь. Огромный объем эмпирических данных, подлежащих анализу, выводит проблему далеко за возможности человеческих экспертных оценок и сближает ее с математическими задачами семантики. Мы обсудим некоторые методы компьютерной обработки корпуса текстов, которые позволяют установить их преобладающее содержание (*тематический анализ*).

Модели с расположением и перемещением агентов на квадратной решетке или на другом регулярном ландшафте развиваются в науках об обществе со второй половины XX века. В простейшем случае каждому агенту приписывается бинарный признак $\sigma_i \in \{1, -1\}$, характеризующий его состояние (мнение, намерение): покупать либо не покупать определенный товар, голосовать «за» или «против» на выборах и так далее. Система из N неподвижных агентов, распределенных в узлах квадратной решетки и способных индуцировать «намерения» в соседних узлах, весьма похожа на модель Изинга, разработанную в начале XX века для описания магнитных фазовых переходов в кристалле (см. разд. 3.4 в гл. 3). На этом основании бинарные признаки $\{\sigma_i\}$ в агентных моделях междисциплинарной физики нередко называют *спинами*, целенаправленное внешнее

воздействие на мнения агентов (рекламу товара, политическую агитацию и др.) *полем*, а стохастический шум, способствующий изменению мнений («переворачиванию спинов») – *температурой*. Задачей моделирования является определение области параметров, в которой на множестве агентов возникает преобладающее мнение (*консенсус*), аналогичный возникновению намагниченности при преимущественной ориентации спинов в модели Изинга на рис. 3.42 главы 3[*].

Отличие моделей распространения «бинарного» мнения от модели Изинга состоит в замене строгого соотношения для вероятности переворота i-го спина при изменении на шаге дискретного времени энергии ΔE_i в сумме внешнего поля H и поля спинов в соседних узлах

$$E_i = -K \sum_j s_i s_j - H s_i$$
$$P_i = \frac{1}{1+e^{\Delta E_i / kT}} \qquad (9.20)$$

(формулы (3.71) и (3.72) в гл. 3) набором эвристических правил изменения мнения агента под воздействием его ближнего окружения. Таким образом, модели распространения мнений являются имитационными и, в терминах предыдущей главы, *квантовоподобными*. Отметим, что сама модель Изинга тоже не отражает физический механизм обменного взаимодействия спинов в магнитных фазах и в этом смысле является имитационной моделью, воспроизводящей фазовый переход.

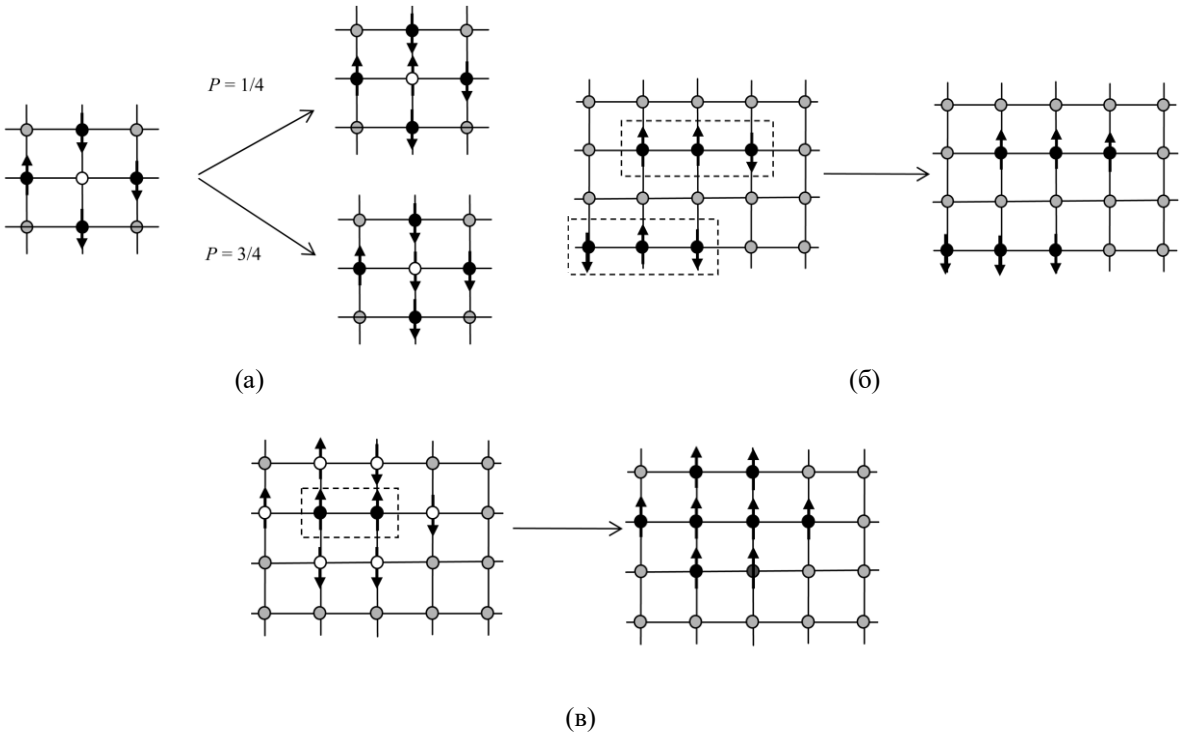


Рисунок 9.27. Индуцирование мнений агентов их окружением на квадратной решетке[15]: (а) модель избирателя, (б) модель большинства, (в) шнайдовская модель

[*] Сходство графиков на рисунках 3.42 б и 9.21 б объясняются использованием логистической функции вероятности в глауберовой динамике (формулы (9.20)) и в модели возникновения иерархий (9.10).

Некоторые схемы индуцирования бинарного «мнения» на квадратной решетке показаны на рисунках 9.27 и 9.28 а (см.[15]). В *модели избирателя* (англ. *voter model*), перенесенной вместе с названием из эволюционной биологии, агент случайным образом принимает мнение одного из своих ближайших соседей (рис. 9.27 а). В *модели большинства*, предложенной в 1999 г. С. Галамом, из нечетного числа соседних узлов решетки случайным образом выделяются «дискуссионные группы», в каждой из которых все агенты принимают мнение большинства (рис. 9.27 б). В *шнайдовской модели*, названной так по фамилии авторов, которые предложили ее в 2000 г., на решетке случайным образом выбирается «референтная группа» из двух соседних агентов, при наличии у них единого мнения индицирующая его на все соседние узлы (рис. 9.27 в); далее процесс повторяется с другими парами агентов. Различные модели взаимодействия «мнений» агентов на решетке рассмотрены в обзоре[15].

При отсутствии шума и внешнего поля конечная совокупность агентов в модели избирателя с произвольным стартовым распределением мнений $\{\sigma_i = \pm 1\}$ всегда приходит к полному консенсусу с вероятностью $P(+1) = (M + 1)/2$ и $P(-1) = 1 - P(+1) = (1 - M)/2$, где $M = \langle\sigma\rangle$ – усредненный «спин» в исходной конфигурации. В модели большинства N агентов с долей «спинов» +1, равной p_0^+, за $\sim N \ln N$ шагов приходят в единое состояние $\{\sigma_i = +1\}$ при $p_0^+ > 1/2$ и в состояние $\{\sigma_i = -1\}$ при $p_0^+ < 1/2$. Дискуссионные группы из четного числа агентов, где при разделении поровну мнения не изменяются, в определенных условиях дают победу исходному мнению меньшинства. (Начиная с 2000-х годов, в моделировании общественной динамики такой ситуации уделяется особое внимание). В шнайдовской модели при отсутствии шума всегда побеждает преобладающее мнение. В случае $M = 0$ с вероятностью ¼ система приходит в «ферромагнитные» состояния консенсуса $\{\sigma_i = +1\}$ или $\{\sigma_i = -1\}$, а с вероятностью ½ – в «антиферромагнитное» состояние, где противоположные «спины» чередуются в соседних узлах.

Ненулевой шум, или температура $T > 0$, разрушает состояние консенсуса (в модели большинства – после превышения порогового значения T_0), создавая локальные области с противоположной ориентацией спинов («поляризация мнений»). Тот же результат дает модель избирателя на решетках размерности выше 2 в отсутствие шума. На сетях сложного строения в этой модели возникают «поляризованные» метастабильные области единого мнения с медленным приближением к консенсусу. Сильное внешнее поле при слабом или нулевом шуме индуцирует единогласие.

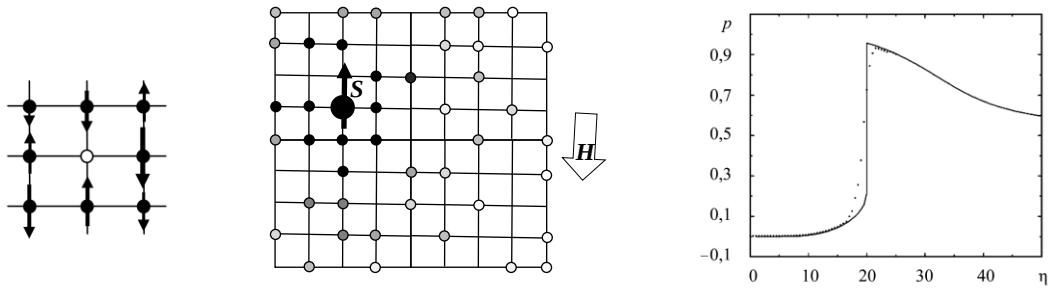
Согласие «спиновых» схем с социологическими данными достигается лишь на качественном уровне за счет отказа от физических постулатов модели Изинга. Гораздо более гибкой оказывается *модель социального воздействия* (англ. *social impact*), наиболее далекая от физики магнитных явлений. В этом варианте модели социального поля (см. гл. 5) позиции агентов в узлах решетки отражают их расположение в абстрактном *общественном пространстве*; расстояние между узлами d_{ij} называется *социальной дистанцией.* На мнение каждого (i-го) агента влияет вся совокупность занятых узлов решетки. Интенсивности их влияния $\alpha_j\sigma_j\sigma_j/d_{ij}$, обратно пропорциональные d_{ij}, определяются знаками «спинов» σ_i и σ_j (см. формулы (9.20)) и «убеждающей способностью» j-го агента α_j (рис. 9.28 а). Непрерывный числовой параметр $\{\alpha_j\}$, случайным образом распределяемый между агентами на первом шаге расчета, фактически заменяет целочисленный спин, демонстрируя

окончательный разрыв модели с постулатами квантовой теории (см. раздел 8.7 предыдущей главы).

Модель социального воздействия воспроизводит достаточно тонкие детали распространения мнений, представляющие практический интерес для политологии и политических технологий. Так, при введении в систему *лидера оппозиции*, неизменный «спин» которого по модулю много больше, чем у всех остальных агентов ($|S_L| >> \alpha_i$) и направлен противоположно «полю пропаганды» H, вокруг занимаемого им узла устанавливается область «оппозиционно настроенных» агентов (рис. 9.28 б). Вероятность переворачивания спина «рядовых» агентов в рамках модели определяется полем социального воздействия

$$I_i = -S_L\sigma_i + H\sigma_i + \sum_j(\alpha_i\sigma_i\sigma_j/{d_{ij}}^{\beta}), \tag{9.21}$$

(где β – подгоночный параметр, а разные знаки у $S_L\sigma_i$ и $H\sigma_i$ отражают противоположность поля лидера L полю пропаганды) и повышается с увеличение шума (*социальной температуры*). При низком уровне пропаганды мнение, противоположное полю $H << S$, с усилением шума становится преобладающим среди агентов: «неопределенность способствует революции» (Рис. 9.28 в). При интенсивной пропаганде $H \approx S$ устанавливается неупорядоченное «парамагнитное» состояние либо возникают разделенные домены с поляризацией мнений. Разнообразные модели распространения мнений, представляющие очевидный прикладной интерес, широко обсуждаются в социофизической литературе (см.[15]).



(а) (б) (в)

Рисунок 9.28. Модель социального воздействия[15]: (а) «спины» $\{\alpha_j\sigma_j\}$ в окружении узла, (б, в) модель с мнением лидера *S*, направленным против внешнего поля *H*: область «оппозиции» и рост доли *p* «оппозиционных» узлов с усилением шума η (K. Kacperski, J.A. Holyst, Physica A, 2000, 287, 631)

Системы, в которых параметр агента принимает три («за–против–воздержался») и больше значений, иногда описывают в рамках модели Поттса с соответствующим числом ориентаций спинов (разд. 3.4 в главе 3). Этот подход позволяет в качественной форме воспроизводить на сложных сетях комбинации разноименных доменов наподобие фаз Гриффитса (см. рис. 3.43 в). В частности, так моделировали распространение изменяющихся слухов в цепи агентов на решетке[*]. Но модель Поттса, при всем ее имитационном характере, является математически строгой («жесткой») и для

[*]C.G. Shao, et al., Phys. Rev. E, 2003, 68, 016120

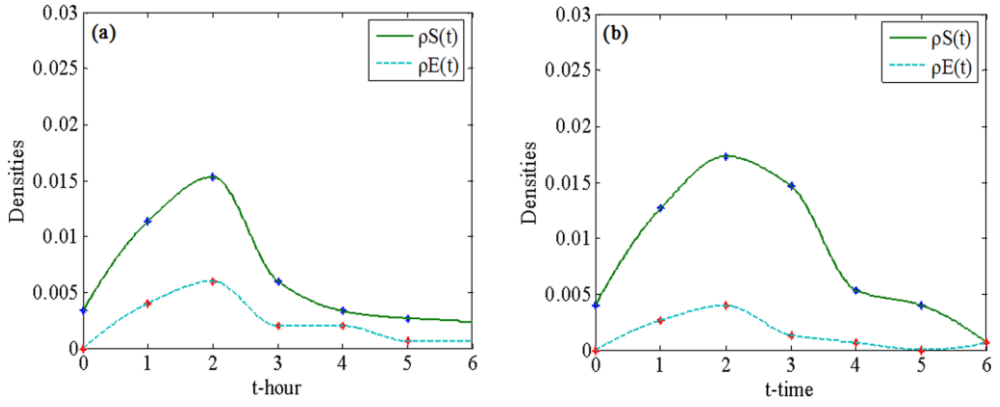
реалистического числа агентов требует больших вычислительных мощностей. Распределения n-значных параметров в сети в большинстве междисциплинарных работ рассчитывают по более гибким эмпирическим схемам.

Динамика распространения слухов в социуме – одна из популярных тем современных исследований. В отличие от устойчивых мнений, слухи теряют новизну и рассеиваются на коротком интервале времени, однако на этом интервале могут иметь сильные последствия (например, вызвать панику). В простейших моделях распространения слухов агенты подразделяются на три категории: активные распространители X, конечные потребители Y (которые усваивают информацию, но не распространяют ее дальше) и скептики Z, игнорирующие слух. Передача информации между этими категориями агентов аналогична стадиям химической реакции

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{X}} + \mathrm{X} &\xrightarrow{k_1} 2\widetilde{\mathrm{X}} \\ \widetilde{\mathrm{X}} + \mathrm{Y} &\xrightarrow{k_2} \widetilde{\mathrm{X}} + \widetilde{\mathrm{Y}} \\ \widetilde{\mathrm{X}} + \mathrm{Z} &\xrightarrow{k_3} \widetilde{\mathrm{X}} + \mathrm{Z} \end{aligned} \qquad (9.22)$$

где волнистой линией обозначен агент, воспринявший информацию, а k_1, k_2, k_3 – эмпирические «константы скорости» соответствующих стадий (см. гл. 2, разд. 2.4).

Соотношения (9.22) позволяют построить кинетические дифференциальные уравнения распространения слухов. Кроме того, слухи подвержены «мутациям», изменяющим их содержание. Их динамику обычно воспроизводят в рамках моделей эпидемиологии, рассмотренных нами в разделе 6.3 главы 6. Рассчитанные зависимости плотности информированных агентов $\widetilde{\mathrm{X}}$ и $\widetilde{\mathrm{Y}}$ от дискретного времени на идеализированных сетях Эрдеша-Реньи, Уоттса-Строгаца и Барабаши-Альберт (глава 6) сопоставляются с реальными данными о динамике появления сообщений в социальных сетях после резонансных событий (рис. 9.29).



(а) (б)

Рисунок 9.29. Динамика распространения сообщений о расстреле редакции Charlie Hebdo (Париж, 7.02.2015) в сети Twitter. Слева реальные данные (*банк слухов* Pheme), справа модель распространения инфекции на безмасштабной сети Барабаши-Альберт. Кривые ρS и ρE – плотности агентов, воспринявших (Y) и распространяющих сообщения (X) (X.Chen, N.Wang, Sci. Rep. 2020, 10, 5887)

Признак агентов, принимающий n значений, обычно представляют в виде n-мерного вектора $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. В отличие от модели Поттса, на его координаты не накладывается жестких ограничений. Такой подход был использован в *моделях культурологии*, где векторами $\mathbf{s}^{(i)}$ обозначены «культурные признаки» агентов. Взаимодействие агентов, занимающих соседние узлы решетки (в более современных исследованиях – узлы сложной сети) приводит к сближению их векторов $\mathbf{s}^{(i)}$, $\mathbf{s}^{(j)}$ в соответствии с «расстоянием» между ними

$$\omega_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta(s_k^{(i)}, s_k^{(j)}). \qquad (9.23)$$

Под знаком суммы в (9.23) находится аналог тензора Кронекера (разд. 3.2 главы 3), компоненты которого равны 1 при $s_k^{(i)} = s_k^{(j)}$ и 0 в противном случае. Сумма $0 \le \omega_{ij} \le 1$ равна вероятности того, что произвольно выбранный признак двух агентов $s_m^{(i)}(t) \ne s_m^{(j)}(t)$ на следующем шаге дискретного времени $t+1$ станет одинаковым – например, средним арифметическим. Далее такая процедура, напоминающая сближение словарей агентов в «игре в имена», повторяется с другими парами агентов и их признаков.

«Культурологическая» модель, предложенная американским политологом Робертом Аксельродом*, предсказывает «сближение культур» ($\{\mathbf{s_k}^{(i)}\} \to \{\mathbf{s_k}^{(j)}\}$) при отсутствии шума, малой размерности n векторного пространства и небольшом интервале возможных значений компонентов векторов $0 < s_k^{(i)} < m$ (для простоты целочисленных). В этом случае компьютерный эксперимент дает одно из m^n состояний *консенсуса*, или *глобализации*, с одинаковыми векторами культурных признаков у всех агентов. Однако влияние шума и внешнего поля (*пропаганды*), а также простое увеличение размерности векторного пространства $\{\mathbf{s_n}\}$** во многих случаях приводят к неупорядоченным состояниям. Надежность этих предсказаний еще предстоит проверить. Общий тон культурологических исследований XX-XXI веков определенно показывает, что основная практическая цель таких работ – это не только прогнозирование и предотвращение этнического сепаратизма в многонациональных государствах, но и его инициирование в странах-конкурентах.

Непрерывный параметр мнения агентов $x \in [0, 1]$ также использовался в моделях достижения консенсуса внутри группы экспертов. В приближении *условного доверия* (*bounded confidence*) на каждом шаге дискретного времени случайно выбранная пара агентов в соседних узлах сети сближает свои позиции (x_i, x_j), если разница между ними не превышает некоторого заданного *порога доверия*

---

* R. Axelrod, *The dissemination of culture: a model with local convergence ang global polarization*, J. Conflict Resolution, 1997, **41** (2), 203.

** Многомерные агентные модели «разреженны»: взаимодействие агентов в них ослабляется с увеличением числа измерений. Средняя «линейная» плотность для 100 точек, случайно распределенных внутри квадрата со стороной 1 (в любых единицах), составляет 10/ед («10 точек на единицу длины»), а для 100 точек внутри четырехмерного куба с единичной длиной ребра ($\sqrt[4]{100}$ =3.16)/ед. При увеличении размерности пространства d линейная плотность точек $\sqrt[d]{100}$ внутри многомерного *гиперкуба* с единичной стороной стремится к единице. При d = 100 она уменьшится до 1.05, т.е. среднее расстояние между ближайшими точками, по сравнению с точками внутри плоского квадрата, возрастет на порядок. Случайное распределение 10000 точек в единичном квадрате (d = 2) даст среднюю линейную плотность 100/ед., а при d = 100 она уменьшится на два порядка – до 1.10/ед., делая взаимодействия агентов маловероятными. Метрические соотношения в многомерных пространствах плохо соответствуют нашим интуитивным представлениям: в моделях с большим числом независимых параметров-«координат» состояния агентов располагаются у границ области.

$$\Delta x_{ij} = |x_i - x_j| < \delta$$

В этом случае при $x_i > x_j$ на следующем шаге

$$x_i(t+1) = x_i(t) - \mu\Delta x_{ij}$$
$$x_j(t+1) = x_j(t) + \mu\Delta x_{ij} ,$$

где μ – параметр сходимости. При $|x_i - x_j| > \delta$ мнения агентов не изменяются. Очевидно, что для достижения сходимости требуется $0 < \mu < 1$. В случае $0.25 < \delta < 1$ система приходит в состояние консенсуса $\{x_i = ½\}$ независимо от строения сети. При $\delta \leq 0.25$ мнения разделяются на $1/(2\delta)$ альтернативных групп (рис. 9.30)

Рисунок 9.30

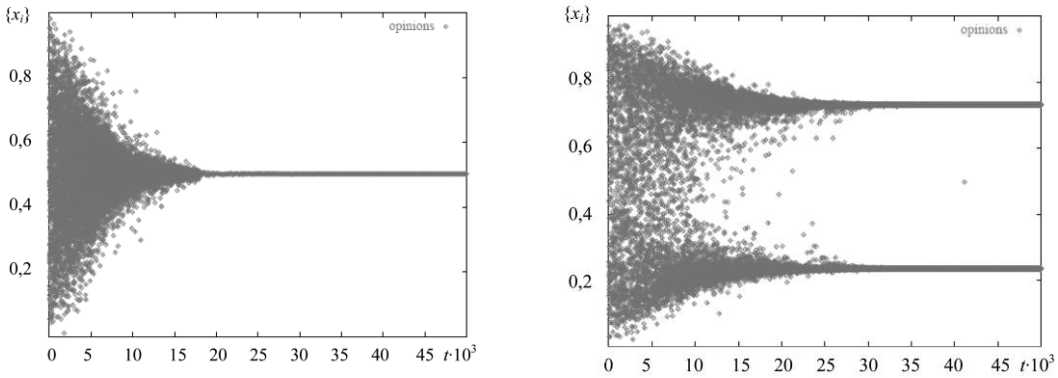


Рисунок 9.30. Сходимость непрерывного параметра мнения N = 2000 агентов в модели условного доверия при пороге согласия δ = 0.5 (слева) и δ = 0.2 (справа) (G.Deffuant, et al., *Mixing beliefs among interacting agents*, Adv. Complex Systems, 2000, 3 (4), 87).

На основе механизма условного доверия были предложены алгоритмы, позволяющие формировать общественное мнение. Так, присутствие в сети агентов-*манипуляторов*, на первом шаге принимающих усредненное мнение $\langle x \rangle$ своего ближнего окружения и затем постепенно сдвигающих его в нужную сторону, в рамках модели позволяет достигнуть консенсуса на заданной величине x_0. Доля манипуляторов, достаточная для сдвига общественного мнения (в цитированной работе 3%)*, оказалась близкой к доле «скрытых лидеров» (3-5%) в экспериментах по манипулятивному управлению движением толпы (см. разд. 5.4 в гл. 5). В литературе по междисциплинарной физике солидная доля публикаций посвящена задачам, связанным с формированием общественного мнения.

Модель де Гроота

Установление консенсуса среди n агентов с непрерывным параметром мнения в отсутствии шума описывает *модель де Гроота* (1974 г.)[16]. В ее рамках мнениям всех агентов в каждый момент дискретного времени t соответствует n-мерный вектор $\mathbf{x(t)} = \mathbf{x^{(t)}} = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)}\}$ с компонентами $\{0 \leq x_i^{(t)} \leq 1\}$. Начальный вектор $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x^{(0)}} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\}$ переводится в вектор $\mathbf{x}(t=1) = \mathbf{x^{(1)}}$ в следующий момент времени матрицей влияния $W=||w_{ij}||$, все элементы которой $0 \leq w_{ij} \leq 1$.

* M.Afshar, M. Asadpour *Opinion formation by informed agents,* J. Artific. Soc. Soc. Simul. 2010, 13, 5

(9.24) $$\mathbf{x}^{(1)} = \mathrm{W}\mathbf{x}^{(0)}.$$

Сумма элементов в каждой строке матрицы W равна единице

(9.25) $$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1$$

Такие матрицы называются *стохастическими* или *марковскими* (в честь российского математика А.А. Маркова, впервые использовавшего их в 1906 г. при описании цепей случайных процессов). Так, рассмотренные нами выше матрицы (9.15), (9.18) и (9.19) – стохастические.

Условие (9.25) позволяет сопоставить элементам $\{w_{ij}\}$ вероятности перехода компонентов системы из состояния i в состояние j. В теории вероятностей также используются матрицы, стохастические по столбцам

(9.25 а) $$\sum_{i=1}^{n} w_{ij} = 1$$

и *дважды стохастические* матрицы, для которых одновременно справедливы соотношения (9.25) и (9.25 а).

Модель де Гроота воспроизводит динамику сближения мнений индивидуумов, даже если содержание их мнений неизвестно, а поведение вариативно. В ряде случаев она позволяет установить, возможно ли достижение консенсуса в заданной конфигурации агентов. Так же, как было выше для малых групп, недиагональные элементы $\{w_{ij}\}$ $(i \neq j)$ матрицы W отражают «силу» взаимного влияния агентов, а диагональные элементы $\{w_{ii}\}$ пропорциональны «инерции» их мнений. При $w_{kk} = 0$ соответствующий агент не имеет собственного мнения и изменяет его исключительно под воздействием окружения – то есть ненулевых элементов матрицы влияния в соответствующей ему (k-й) строке. Уравнение (9.24) связывает два любых последовательных «вектора мнений» $\mathbf{x}^{(n+1)}$ и $\mathbf{x}^{(n)}$. Если на каждом следующем шаге расчета разность этих векторов уменьшается, модель де Гроота позволяет найти конечное равновесное состояние системы методом последовательных приближений (итераций).

Пусть система состоит из двух агентов с изначально противоположными мнениями $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0)$ и матрицей влияния

$$\mathrm{W} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix},$$

стохастической по строкам. Последовательные действия матрицы W на векторы мнений агентов дадут такие результаты:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 + 0.03 \\ 0.07 + 0.09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.52 \\ 0.16 \end{pmatrix},$$

и далее. Продолжая вычислять векторы, нетрудно получить их последовательность: с точностью ±0.001

(9.26)
$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0)\\
&\mathbf{x}^{(1)} = (0.7, 0.1)\\
&\mathbf{x}^{(2)} = (0.52, 0.16)\\
&\mathbf{x}^{(3)} = (0.412, 0.196)\\
&\mathbf{x}^{(4)} = (0.347, 0.218)\\
&\mathbf{x}^{(5)} = (0.308, 0.231)\\
&\dots
\end{aligned}$$

Для стохастической матрицы W последовательность (9.26) сходится к консенсусу, при котором компоненты вектора равны: $x_1 = x_2$. Предположим, мы угадали этот «предельный» вектор

(9.26 а) $$\mathbf{x}^{(\infty)} = (0.25, 0.25)$$

Догадку легко проверить, подставив (9.26 а) в (9.24):

$$\mathbf{x}^{(\infty+1)} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.175 + 0.075 \\ 0.025 + 0.225 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{(\infty)}$$

В реальных задачах компоненты предельных векторов, как собственных векторов матрицы влияния, отвечающих собственному значению $\lambda = 1$ (корню детерминантного уравнения, см. разд. 3.2 гл. 3) определяют методами линейной алгебры. Обычно агентов много и связи между ними довольно разреженные: их значительно меньше числа ребер полного графа $n(n–1)/2$. Поэтому матрицы влияний тоже разреженные, многие их элементы равны нулю.

Модель де Гроота позволяет рассчитать равновесные состояния агентов в системе с заданной матрицей влияния. Расчет проводится методами линейной алгебры, анализ возможных решений – методами теории графов. Консенсус существует, если в ориентированном графе, отражающем взаимные влияния агентов (см. рис. 9.26), можно выделить подграф-дерево с единственной позицией-корнем, из которого при движении «по стрелкам» достижимы все положения агентов (на гуманитарном языке – если все агенты имеют единую систему ценностей либо управляются из одного центра). «Предельная» матрица

$$\mathrm{W}^{(\infty)} = \lim_{t \to \infty} \mathrm{W}^{(t)}$$

называется *матрицей управления*. Компьютерные расчеты распространения мнений, основанные на модели де Гроота и ее модификациях, до настоящего времени разрабатываются в социологии и междисциплинарной физике[16] (см. тж. [5] в списке литературы к гл. 6).

9.3.3. Содержательный анализ общественного мнения

Все рассмотренные выше модели воспроизводили динамику распространения мнений и слухов в социуме *независимо от их содержания* под воздействием объективных факторов: структуры взаимодействий агентов и их постулируемого механизма. Для управления реальными системами, безусловно, необходимо анализировать преобладающие мнения в обществе по существу. Главные методы исследований решения этой проблемы – опросы и анкеты, «внедренный наблюдатель» (например, социолог или журналист, на

своем опыте познающий условия жизни тех или иных слоев населения[*]), анализ газетных публикаций, статистика правонарушений и политической деятельности – были разработаны в XIX веке и применяются до сих пор. Повсеместное внедрение компьютеров и информационных технологий в современную жизнь, с одной стороны, вывело объем генерируемой и распространяемой информации далеко за пределы человеческих возможностей проанализировать ее «вручную» – а с другой стороны, создает новые технические средства сбора, обработки и интерпретации данных.

Огромное поле возможностей в анализе общественного мнения открывают *онлайновые социальные сети*: новые средства массового общения людей в Интернет. По данным Википедии, их аудитория во всем мире сравнима с численностью населения Земли: в 2022 году она превысила 4 млрд. пользователей. Наиболее популярная российская социальная сеть ВКонтакте к этому времени привлекала до 100 млн. пользователей в месяц, генерируя в сутки до 15 млрд. сообщений и свыше 10 млрд. просмотров записей и видеоматериалов. Ведущие мировые социальные сети (*платформы*) Facebook[**], YouTube и WhatsApp, созданные в США, в 2022 г. охватывали, соответственно, 2.9, 2.6 и 2 млрд. пользователей. Следующее место по популярности занимали сети WeChat (1.3 млрд) и TikTok (1 млрд. пользователей), базирующиеся в КНР. Платформа ВКонтакте в 2022 г. занимала в мировой иерархии достойное 15-е место.

Онлайновые сети, как феномен XXI века, сильно влияют на повседневную жизнь населения всех развитых стран и воздействуют на мировое общественное сознание[***]. Основная доля их информации (тексты, фото, видео и музыка) находится в открытом доступе, предоставляя богатый материал для исследований и манипулирования. Архитектуры онлайновых сетей тоже частично открыты и не защищены от целенаправленных воздействий. Поэтому результаты мониторинга сетей можно сопоставлять с агентными моделями на реальной структуре их фрагментов, что дополнительно расширяет возможности научных исследований.

Простую и практичную относительную оценку настроений социума дает сравнение частотностей употребления ключевых слов в социальных сетях. Выбор таких слов или лемм (см. предыдущий раздел) остается прерогативой социологов и специалистов по маркетингу (рис. 9.31). Для конкурирующих фирм с близкой популярностью среди покупателей отставание в интенсивности рекламы означает уменьшение продаж, а в перспективе – вытеснение с рынка.

В политической области частотность ключевых слов отражает интенсивность дискуссий, возрастающей в период кризиса. Популярность наиболее распространенных лемм, даже без связи с контекстом их употребления, коррелирует в разных сетевых ресурсах, позволяя на качественном уровне оценить «общественную температуру». Данные

[*] см. Джек Лондон, *Люди бездны* (1903).

[**] Признана российским судом экстремистской организацией на территории РФ.

[***] Разделив число сообщений в сети ВКонтакте на число пользователей, мы получим «в среднем» число Данбара ~150 (см. выше). Так как в социальных сетях преобладают индивидуальные пользователи, у которых число контактов обычно меньше, наиболее продуктивные и популярные узлы-акторы в сети – анонимные редакции и компьютерные программы.

о пользователях социальных сетей позволяют калибровать модели распространения мнений и прогнозировать результаты голосования.

Политические предпочтения в социальных сетях оценивают по заявленной позиции пользователя, которая может иметь эпатажный или юмористический оттенок («монархист»), а также по результатам интернет-опросов и по связям пользователя с аккаунтами, имеющими явную идеологическую окраску – например, с блогами политических деятелей и партий. Достаточно надежную оценку предпочтений, не обнародованных пользователями, удается построить по графу их связей в сети в качестве подписчиков-*последователей* (*followers*) и *друзей* (*friends*, обоюдная подписка) с другими пользователями, предпочтения которых ими заявлены либо установлены в опросах. Старый натурфилософский принцип «подобное тяготеет к подобному» позволяет извлечь из социальных сетей большой объем не декларированной в них информации, начиная с вероятного возраста владельца аккаунта[*].

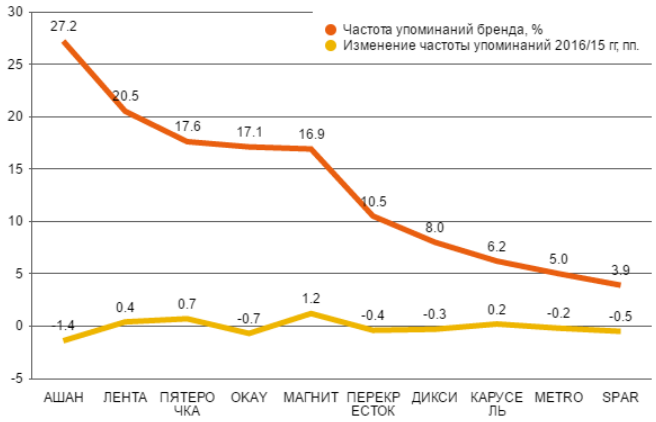


Рисунок 9.31. Доли упоминаний систем продуктовых магазинов (%), как ведущих, в анкетах покупателей в 2016 г. (Online Market Intelligence, https://www.shopolog.ru/news/top-20-proekta-lyubimye-brendy-rossiyan-kompanii-online-market-intelligence/)

Лабильность мнений, распространяемых в Интернет, и их способность к «мутациям» позволяют формализовать распространение информации в социуме на основе математических моделей генетики. По аналогии с геном, как единицей наследственной информации, минимальную и вариабельную единицу смысла, переносимую словом, словосочетанием или графическим символом, называют *мемом* (англ. meme)[**]. Одной из характеристик мема, пока не поддающейся априорным теоретическим оценкам, является его *контагиозность* (заразительность), которой соответствует динамика распространения и изменений короткоживущих новостей, слухов, моды, символов-«хэштегов» и др[***]. В

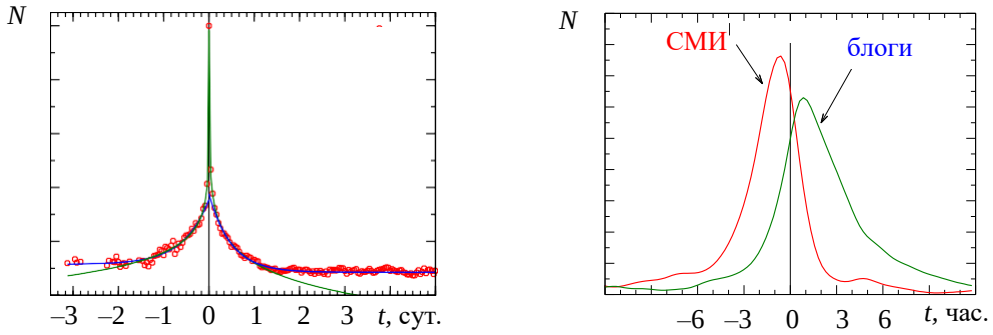
---

[*] А.Г.Гомзин, С.Д.Кузнецов, *Методы построения социо-демографических профилей пользователей сети Интернет*, Труды ИСП РАН, 2015, **27** (4), 129.

[**] Термин *мем* был впервые введен и обоснован в 1976 г. Р. Докинзом в его популярной книге «Эгоистичный ген» (пер. с англ.: М.: АСТ:CORPUS, 2013).

[**] Яркие примеры «вирулентных» мемов, внедренных в сознание людей во всемирном масштабе задолго до возникновения Интернет, дают искусственные слова *кодак* и *робот*. Первое из них (Kodak) было придумано в 1880-е годы как «заумная» торговая марка массового пленочного фотоаппарата организатором фирмы Джорджем Истменом (США) и существовало более века в названии всемирно известной компании. Вторым словом, производным от чешского robotnik (крепостной, каторжник), в пьесе Карела Чапека «R.U.R.» (1920 г.) были названы искусственные человекоподобные существа, которые обслуживали людей, а затем восстали и уничтожили человечество. За прошедшее столетие роботами стали называть любые автономно действующие технические устройства и компьютерные программы (см. *торговые роботы* в гл. 8).

частности, динамике повторений и изменений фраз-клише в выборке из 1.6 млн. СМИ и блогов на протяжении 3 месяцев (90 млн. текстовых сообщений) отвечали остроконечные распределения с отставанием максимума цитирований в блогосфере от СМИ на ~2.5 часа (рис. 9.32). Хотя междисциплинарное направление под неблагозвучным названием «меметика» пока не достигло больших успехов, эволюции мемов в общественном сознании и попыткам управлять такой эволюцией посвящен ряд статистических исследований и математических моделей.



(а) (б)

Рисунок 9.32. Динамика повторений ключевых фраз в СМИ и блогах: (а) суммарная (*t*=0 – максимум), (б) раздельная (J.Leskovec, L.Backstrom, J.Kleinberg, *Meme-tracking and the dynamics of the news cycle,* Proc. 15th ACM SIGKDD Int. Conf. on Knowlegde Discovery & Data Mining, 2009, 495-506, https://doi.org/10.1145/1557019.1557077)

9.3.4. Тематический анализ

Хотя динамика частотности ключевых слов и лемм несет информацию об изменениях настроений в обществе, наборы слов для таких исследований составляются по экспертным оценкам и не дают полного представления о семантическом пространстве дискуссии. В рамках другого направления, активно развиваемого в последние десятилетия, наиболее частотные темы обсуждения в средствах массовых коммуникаций определяются алгоритмическим поиском. Помимо социологических и политологических задач, компьютерный *тематический анализ* текстов активно используется *новостными агрегаторами*: интернет-ресурсами, которые выделяют в информационном потоке актуальные новости, способные вызвать массовый интерес, и предоставляют ссылки на их источники: структурированную новостную ленту. Наиболее известны агрегаторы мировых (глобальных) информационных агентств Bloomberg, Thomson Reuters, Associated Press, Reddit и др, а также основных интернет-корпораций (Google, Apple) и СМИ (CNN, BBC и ряд других). В России агрегированием новостей занимаются ведущие агентства Interfax, ТАСС, РИА Новости, новостные ресурсы платформ Яндекс, Mail.ru, Рамблер и др., телевидение и некоторые СМИ. В последнее десятилетие компьютерный анализ содержания распространился на социальные сети, блоги и другие рекреационные платформы как новые массовые источники информации.

Разделение корпуса текстов на близкие по смыслу подмножества, или *кластеризация текстов*, является составной частью обработки естественных языков (NLP, см. раздел 9.2.1). Этот прием используют во многих прикладных направлениях, включая поиск в Интернет и извлечение нужной информации, случайным образом распределенной во

множестве источников: «просеиваиванием» больших массивов данных (Data Mining). Первичная обработка текстов для таких задач (*токенизация*, т.е, выделение слов или *n*-грамм, удаление служебных слов, определение лемм, введение поправок на частотность) была рассмотрена в разделе семантического анализа. Затем по корпусу текстов рассчитывают семантическую матрицу (см. рис. 9.9), где в роли контекстов выступают документы – например, новостные сообщения. Векторы-столбцы этой матрицы с близкими наборами координат позволяют кластеризовать соответствующие документы, предположительно близкие по содержанию. Среди векторов-строк с максимальными суммами компонентов, которым отвечают наиболее часто встречающиеся слова либо *n*-граммы, содержатся популярные темы, обсуждаемые в «информационном пространстве».

Простой вариант семантического анализа, в котором игнорируется порядок слов в предложениях, в литературе называется *моделью мешка слов* (англ *bag of words*). Его недостатками является большой объем обрабатываемой информации и разреженные матрицы с преобладанием нулей, что требует много вычислительных ресурсов, а также отсутствие критерия, который позволял бы без помощи экспертов отнести наиболее частотные слова к определенным темам. В методе *латентного семантического анализа* (англ. *LSA*) для уменьшения размерности матриц используют сингулярное разложение, оставляя лишь блоки с максимальными собственными значениями$\{\lambda_i\}$ (см. рис. 9.6). Методы компьютерного анализа текстов рассмотрены в обзоре[17].

Перспективные алгоритмы определения предметов дискуссии разработаны в рамках *тематического моделирования* (англ. *topic modeling*), где обширные наборы *M* слов и *N* документов дополняются связывающим их «латентным множеством»: небольшим набором *K тем*, или «кластеров слов» в документах, определяемых методами кластерного анализа ([1] и [4] в списке литературы). В этом подходе большую семантическую матрицу A «слова – документы» размера $M \times N$ аппроксимируют произведением двух более компактных модельных матриц «слова – темы» $\Phi = \|\varphi_{wt}\|$ ($M \times T$) и «темы – документы» $\Theta = \|\theta_{td}\|$ ($T \times N$, рис. 9.33).

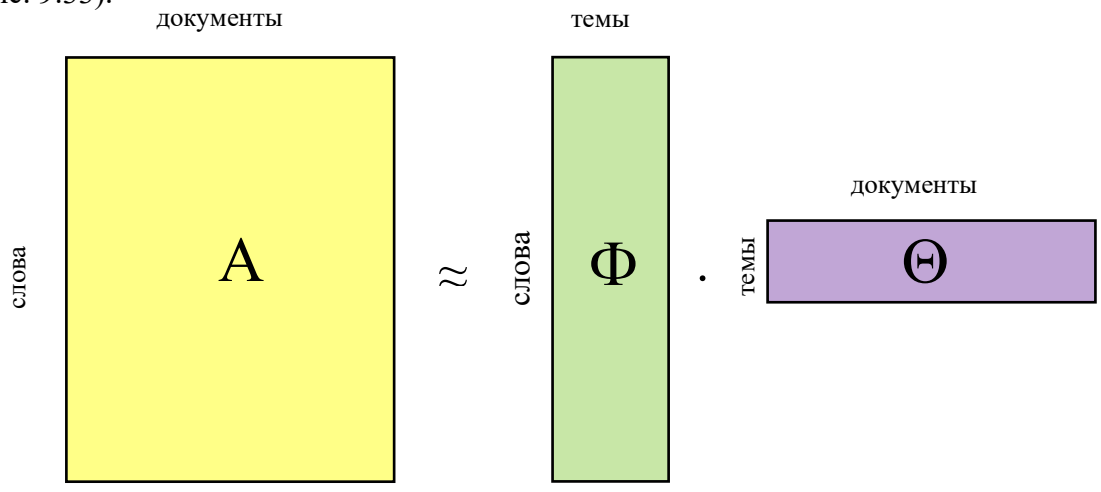


Рисунок 9.33. Представление семантической матрицы как произведения в тематическом моделировании (см.[19], а также С.Н. Кольцов, *Введение в тематическое моделирование*, https://linis.hse.ru/data/2014/08/26/1312840271/Data_mining_3.pdf).

Ранг стохастической матрицы $\widetilde{A}$, приближенно представляющей распределение слов по документам, не превышает числа тем K. Элементы матриц распределения слов по темам и тем по документам оценивают из априорно заданных распределений вероятностей $\{\varphi_j\}$ с весами $\{w_j\}$, варьируемыми в процессе подгонки:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{m} w_j \varphi(x, \theta_j), \qquad \sum_j^m w_j = 1,$$

$$p(w|d) = \sum_{t=1}^{K} p(w|t)p(t|d) = \sum_{t=1}^{K} \varphi_{wt}\, \theta_{td},$$

где x – дискретная координата слова в j-й теме или темы в j-м документе, θ_j – параметр функции распределения. Схемы расчета обсуждаются в обзорах[18] и учебной литературе[19].

Математическое отступление: неклассические виды энтропии

Энтропия – мера неопределенности состояния многокомпонентной системы, в которой у каждого компонента есть свое собственное множество доступных ему *микросостояний*. В предыдущих главах нам встречались несколько схем расчета энтропии для разных, но статистически подобных систем с нулевым или слабым взаимодействием между компонентами. Простейший вид имеет *больцмановская* энтропия термодинамической системы, с равной вероятностью занимающей любое из W состояний

(9.27 а) $$S_B = k_B \ln W,$$

где k_B=1.38·10^{-23} Дж/К– константа Больцмана (формула (3.63) в главе 3). Систему из N одинаковых частиц, каждая из которых может занимать одно из состояний 1, 2, …, n с вероятностью, соответственно p_1, p_2, …, p_n ($\sum p_i = 1$), в статистической термодинамике характеризует *энтропия Гиббса*

(9.27 б) $$S_G = -k_B N \sum p_i \ln p_i = k_B N \sum p_i \ln \frac{1}{p_i},$$

(знак «минус» перед первой суммой возникает оттого, что все вероятности $0 < p_i < 1$, т.е. их логарифмы отрицательны). «Удельная» энтропия Гиббса, приходящаяся на одну частицу, соответственно равна

(9.27 в) $$S_G/_N = -k_B \sum p_i \ln p_i$$

(формулы (8.34) и (8.34 а) в гл. 8). Отсюда легко перейти к *информационной энтропии Шеннона* для распределения дискретной случайной величины x, принимающей значения $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с вероятностью $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

(9.27 г) $$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

– надо только приравнять к 1 масштабный множитель k_B и заменить основание логарифма, что тоже изменит лишь масштаб рассчитанной величины (формула (8.35) в гл. 8). В описании статистических свойств многокомпонентных систем (9.27 в) и (9.27 г) нередко объединяют под общим названием *энтропии Гиббса-Шеннона*.

Информационную энтропию можно рассчитывать не только для макроскопических многочастичных «тел» (как в статистической термодинамике), но и для любых

многокомпонентных или мультиагентных систем с заданным набором состояний. Максимуму энтропии с наложенными дополнительными условиями (фиксированное множество значений, фиксированные математическое ожидание, дисперсия и др.) соответствуют основные распределения случайных величин в теории вероятностей (таблицы 8.5 и 8.6 в главе 8). Было бы естественно предположить, что в компьютерном анализе текстов справедливы те же соотношения: случайному распределению слов по столбцам семантической матрицы соответствует максимум энтропии, а их повторяющиеся группы в определенных темах порождают информацию, снижая энтропию. Тем не менее, расчеты показали, что энтропия Гиббса-Шеннона не может служить критерием «автоматического» выбора тем дискуссий, т.е. осмысленных кластеров слов: с увеличением числа кластеров она монотонно возрастает[*].

Классические формы энтропии (9.27 а-г) не соответствуют задачам тематического анализа текстов оттого, что в естественных языках слова связаны между собой правилами построения фраз (как грамматическими, так и композиционными) и их содержанием – что не учитывается в модели «мешка слов». В таких физических системах, где существенны лишь взаимодействия частиц с ближайшими соседями, классическая энтропия позволяет рассчитать термодинамические потенциалы (разд. 2.4 гл. 2) и связанные с ними параметры. В социальных же системах каждый агент взаимодействует с многими агентами и со всей системой в целом. Чтобы модели таких систем соответствовали реальности, вместо ансамбля N независимых частиц, для которого применима энтропия Гиббса-Шеннона, следует определить энтропию системы из N частиц с сильной корреляцией их динамики.

«Неживые» системы с дальними взаимодействиями частиц (электронный газ, магнитные фазы, плазма, турбулентное движение жидкостей) в XX веке стали предметом исследования физики сложных систем, которая во многом определила вид современной междисциплинарной физики. Первый вариант неклассической энтропии для сильно коррелированных систем предложил в 1960 г. Альфред Реньи (1921-1970): венгерский математик; среди других его достижений – случайные графы Эрдеша-Реньи (см. гл. 6). *Энтропия Реньи* обобщает классическую энтропию Гиббса-Шеннона (9.27 г): в нее добавляется дополнительный параметр q (*порядок*), отражающий глубину корреляции состояний системы:

$$S_R = \frac{1}{1-q}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i{}^q\right) \tag{9.28}$$

При $q = 0$ корреляции отсутствует, все состояния равновероятны (равномерное распределение) и $S_R = \ln n$. При $q \to 1$ (9.28) асимптотически переходит в энтропию Шеннона в натуральных единицах[**]. Для остальных значений q энтропия Реньи положительна, так как сумма вероятностей всех состояний $\sum p_i$ по определению равна 1, и

[*]Мы не будем здесь обсуждать сильно математизированную теорию тематического моделирования текстов, а лишь перечислим его общие принципы. Детальное описание можно найти в литературе[18,19].

[**] Чтобы в этом убедиться, достаточно продифференцировать по q числитель и знаменатель дроби, так как при $q \to 1$ они обращаются в 0, т.е. раскрыть неопределенность по правилу Лопиталя (см. разд. 1.4 в главе 1).

- при $q > 1$ $\sum {p_i}^q < 1$, поэтому логарифм суммы и множитель $\frac{1}{1-q}$ перед ним отрицательны
- при $0 < q < 1$ $\sum {p_i}^q > 1$, оба положительны

При q = 2 сумма квадратов вероятностей в (9.28) характеризует «самовзаимодействие», т.е. *автокорреляцию* состояний системы. Энтропия Реньи 2-го порядка также называется *корреляционной энтропией*.

В случае |1 – q| << 1 логарифм в формуле (9.28) близок к нулю. Разлагая его в ряд Тейлора и оставляя только первую производную по сумме вероятностей, можно перевести (9.28) в *линеаризованную* энтропию, или *энтропию Цаллиса*

(9.29) $$S_{Ts} = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n} {p_i}^q - 1\right)$$

Бразильский физик греческого происхождения Константино Цаллис (Tsallis), предложивший эту форму энтропии в 1988 г., и его последователи используют (9.29) с любыми значениями параметра q от $-\infty$ до $+\infty$ для описания сильно коррелированных неравновесных систем. При q = 1 энтропия Цаллиса, как и энтропия Реньи, переходит в энтропию Шеннона-Гиббса.

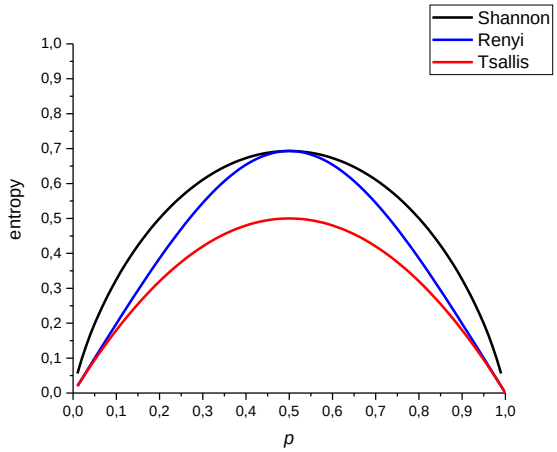


Рисунок 9.34. Энтропия Шеннона и энтропии Реньи и Цаллиса при q = 2 в двухкомпонентной системе (n = 2, $p_1 = p$, $p_2 = 1–p$)

Неклассические формы корреляционной энтропии (q = 2) для двухкомпонентной системы, где $p_1 = p$ и $p_2 = 1–p$, сопоставлены с энтропией Шеннона на рис. 9.34. Из формул (9.28) и (9.29) следует, что при больших значениях q наибольший вклад как в энтропию Реньи, так и в энтропию Цаллиса вносят компоненты с сильными автокорреляциями, для которых вероятности $0 < p_i < 1$ максимальны. В отличие от классических видов энтропии и от энтропии Реньи, энтропия Цаллиса *неэкстенсивна*: ее величина для системы не равно сумме значений для частей системы:

$$S_{Ts}(A+B) \neq S_{Ts}(A) + S_{Ts}(B)$$

При подстановке энтропии в формах (9.28) и (9.29) в соотношения статистической термодинамики возникают обратные степенные распределения параметров (*тяжелые*

хвосты), характерные как для сильно коррелированных физических, так и для многих общественных систем.

В физике сложных систем и в междисциплинарных физических моделях социума используют разные виды неклассической энтропии, включая неэкстенсивные. В тематическом моделировании минимум энтропии Реньи обозначает граничное число кластеров из совместно встречающихся слов, ниже которого наиболее употребительные кластеры осмысленны и соответствуют популярным темам дискуссий (рис. 9.35). Многочисленные неклассические виды энтропии рассмотрены в обзорах и учебной литературе (см. [5] в рекомендуемой литературе). Тематическому анализу подвергаются, в том числе, дискуссии в социальных сетях (см.[18]).

Несмотря на все достижения, тематическое моделирование текстов ко времени завершения этой книги (2023 г.) не достигло уровня полностью автоматизированных компьютерных алгоритмов: его результаты все еще требуют экспертной оценки. Более распространенную альтернативу представляет эмпирический *контент-анализ*, возникший в первой половине XX века. В его современном варианте компьютерные программы сопоставляют исследуемый текст со словарями терминов и словосочетаний, несущих явную информационную либо эмоциональную нагрузку – например, *«так называемые ученые»* («сентимент-анализ»). По частотности ключевых слов и связанных с ними оценочных суждений исследуемые тексты классифицируют, выделяя общественно опасные категории – призывы к насилию, распространение наркотиков и т.д. В анализе текстов используются специализированные программы и словари[20].

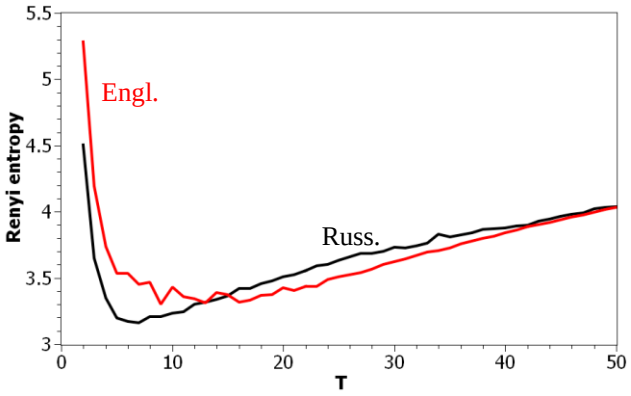


Рисунок 9.35. Зависимость энтропии Реньи от числа тем *T* в корпусе новостных текстов на русском (черная кривая, почти 700 тыс. текстов с сайта Lenta.ru) и английском языках (красная кривая, сайт 20 Newsgroups, 15400 статей)[18]

9.3.5. Моделирование коллективных действий

Жук-буржуй и жук-рабочий
гибнут в классовой борьбе
Николай Олейников

Переход от настроений в обществе к коллективным действиям – ключевой момент любого общественного процесса. Этот особый вид фазовых переходов по понятным причинам интенсивно исследуют социологи и политологи. Также вполне понятно, почему главное внимание общественные науки уделяют массовым деструктивным действиям – от

образования социально неблагополучных анклавов и их криминализации в городах до восстаний и войн, угрожающих государственной власти.

Мы рассмотрим некоторые модели коллективного поведения, основанные на «атомистическом» описании социума как совокупности взаимодействующих агентов. Весьма зыбкую границу между социальными и политическими явлениями мы проведем как разделение спонтанных коллективных акций, понимаемых абстрактно (переход людей от скрытого недовольства к его явным проявлениям), и действий в рамках определенных политических структур. Такие политические события, как избирательные кампании и войны, будут обсуждаться в следующих разделах.

Надо заметить, что подобное разделение следует из квазифизической модели «атомизированного» общества, неспособной описать коллективное восприятие и обработку информации (см. часть III). Поэтому реальные структура и динамика проявления общественного недовольства – массовые демонстрации, организация профсоюзов, стачечных комитетов, боевых дружин, другие коллективные действия – в принципе не воспроизводится моделями из «бинарных» агентов. Структуры, которые возникают и изменяются в этих процессах, в политологических моделях принимаются как данность или внешние условия.

Основным средством анализа спонтанных массовых действий являются *пороговые модели*. В простейшем варианте такой модели задана система из N агентов, каждый из которых может иметь два состояния: нейтральное с параметром $x = 0$ и возбужденное ($x = 1$). Агент переходит в возбужденное состояние, если число «возбужденных» агентов во всей системе либо в его заданном окружении превышает пороговый уровень:

$$x_i = 1, \text{ если } \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} x_j \geq \theta_i \text{ или}$$
$$x_i = 0, \text{ если } \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} x_j < \theta_i \,, \tag{9.30}$$

Пороги возбуждения $0 \leq \theta_I \leq 1$, взятые из непрерывного множества $[0, 1]$, приписываются агентам на первом шаге моделирования. В терминах теории игр, которая широко применяется в таких задачах, состояния всех агентов, влияющих на i-го, называют *обстановкой* x_{-i} и обозначают $n - 1$ – мерным вектором из нулей и единиц (см. главу 7). Если агенты образуют бесструктурную «толпу», в которой на каждого из них воздействуют все остальные, их взаимному влиянию соответствует полный граф и суммы (9.30) вычисляют по всем агентам в системе. В других вариантах модели агенты располагаются в узлах решетки или сложной сети, где взаимодействие ограничено ближним окружением, которое можно задавать разными способами.

В разных вариантах модели пороги $\{\theta_i\}$ могут быть одинаковыми для всех агентов или заданными для них статистически в соответствии с тем или иным распределением. Они могут изменяться по определенным правилам и зависеть от окружения агента. Вместо детерминированного правила (9.30) переход $x_i = 0 \leftrightarrow x_i = 1$ по может происходить с вероятностью $0 \leq p_i \leq 1$, пропорциональной близости суммы возбуждений $\sum x_j$, действующих на i-го агента, к пороговому значению:

$$1 - p_i \sim \left(\frac{\sum_{j=1}^{n-1} x_j - \theta_i}{\theta_i} \right)^a$$

с $a = 1$ (линейные модели) или $a \neq 1$ (нелинейные модели). Сам переход может быть как обратимым, так и необратимым; наборы состояний и порогов могут задаваться любыми целыми числами, а также непрерывными переменными.

В простейшей пороговой *модели Грановеттера* (рис. 9.36) в начальный момент дискретного времени $t = 0$ в системе имеется n_0 «возбужденных» агентов. На следующем шаге ($t = 1$) их число n_1 может увеличиться или уменьшиться в зависимости от распределения порогов $\{\theta_i\}$ и структуры межагентных взаимодействий. Рассчитываемые числа n_i, как в модели де Гроота, изменяются, стремясь в равновесию. Состояние системы характеризует равновесное количество n^* возбужденных агентов в системе и (или) средний уровень возбуждения

$$x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Данная схема в приближении *среднего поля* (каждый агент «видит» всех остальных, т.е. систему их взаимного влияния отражает полный граф) была предложена в 1978 г. для формального описания уличных беспорядков. Возбужденное состояние агентов, как и размер наносимого ими ущерба, в ней не детализировались. Один из главных мотивов подобного моделирования – предотвращение деструктивных массовых акций (а в последнее десятилетие и их организация). В этом агентные модели смыкаются с задачами обеспечения безопасности в городе и управления толпой, которые обсуждались в 5-й главе.

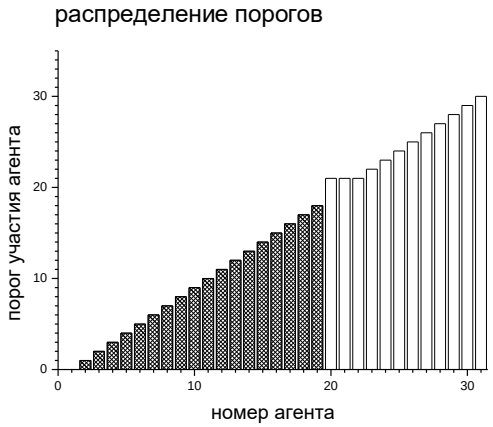


Рисунок 9.36. Возбуждение агентов в модели Грановеттера (закрашенные прямоугольники) при равномерном распределении порогов со «ступенькой»: (0, 1, 2, 3,…, 18, 20, 20, 20, 21, 22,…) (M. Granovetter, *Threshold model of collective behavior,* Amer. J. Sociology, 1978, 83, 1420)

Если в обсуждаемой модели у каждого агента $\theta_I \neq 0$ и все агенты находятся в нейтральном состоянии $\{x_i = 0\}$, при отсутствии «шумовых» воздействий их состояния не изменятся. Однако при наличии «зачинщиков» с $\{x_j = 1\}$ либо $\{\theta_j = 0\}$ в толпе распространится возбуждение. Равновесное состояние, которое можно рассчитать по (9.30) прямым перебором агентов, определяется распределением их порогов $\{\theta_i\}$. В цитированной работе Грановеттера был приведен искусственный, но яркий пример: при равномерном распределении порогов среди 100 агентов (у первого $\theta_1 = 0$, второй примкнет к беспорядкам

при наличии одного возбужденного агента, третий при наличии двух и так далее) зачинщик с нулевым порогом активации возбудится сам, а вслед за ним «восстанут» остальные 99 агентов. Если же увеличить порог у второго агента с одного участника беспорядков до двух, оставив пороги остальных агентов неизменными – зачинщик останется в одиночестве (рис. 9.36).

Когда агентов много, распределение их порогов $\{\theta_i\}$ можно представить непрерывной кривой $F(y)$, где переменной $y \in [0, 1]$ соответствует номер агента i/N, приведенный к их общему числу N. Кумулятивному равномерному распределению $F(y) = y$ на координатной плоскости отвечает диагональ квадрата со сторонами $0 \le y \le 1$ и $0 \le F(y) \le 1$. Равновесную долю «бунтующих» агентов, или стационарную точку y^*, легко определить по итерационной схеме $y_{n+1} = F(y_n)$, построив лестницу Ламерея (глава 4, раздел 4.4.2). Если вся кривая $F(y)$ лежит выше диагонали, т.е. функция $F(y)$ «выпуклая вверх», при любой начальной доле бунтующих y_1 в конечном состоянии восстанут все агенты (Рис. 9.37 а). Наоборот, если график $F(y)$ лежит ниже диагонали, число восстающих на каждом шаге дискретного времени будет уменьшаться и стремиться к нулю (рис. 9.37 б). Если график $F(y)$ при увеличении y пересекает диагональ «сверху», равновесная доля восставших совпадает с точкой пересечения y_0 (рис. 9.37 в), а если «снизу» – то при любом начальном положении $y < y_0$ волнения затихнут, а при $y > y_0$ охватят всех агентов (рис. 9.37 г).

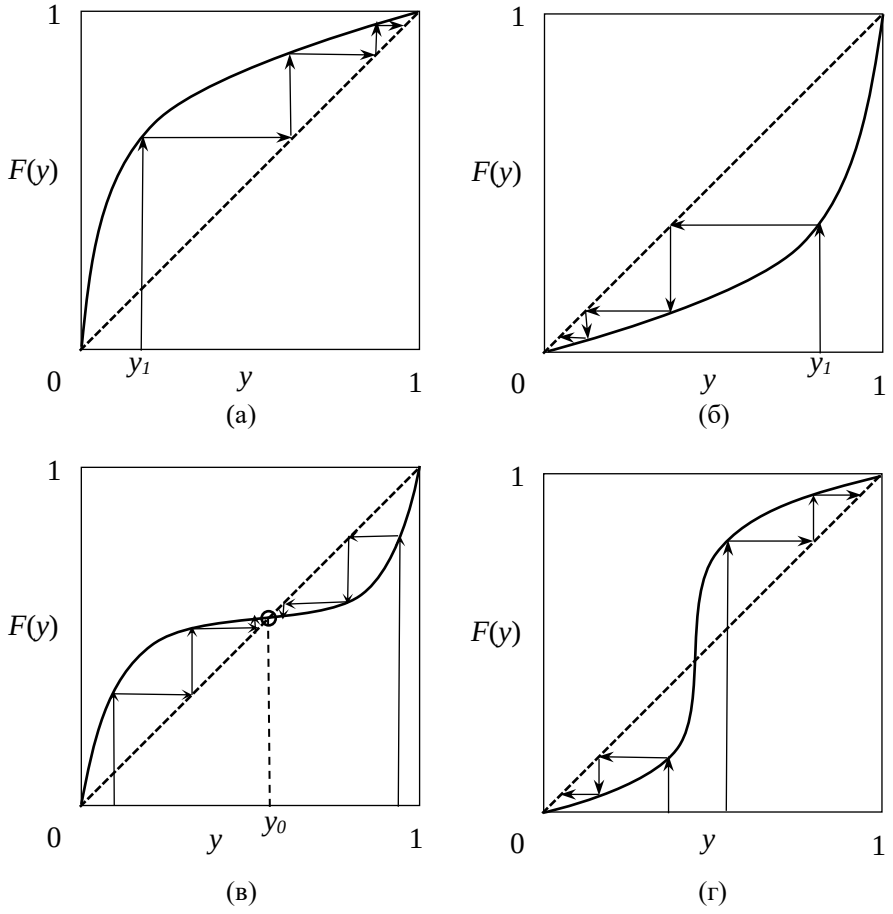


Рисунок 9.37. Влияние распределения порогов на равновесную долю возбужденных агентов y^* в модели Грановеттера: (а) $y^* = 1$, (б) $y^* = 0$, (в) $y^* = y_0$, (г) $y^* = 0$ при $y_1 < y_0$ и $y^* = 1$ при $y_1 > y_0$.

При всей простоте допущений предсказания модели Грановеттера согласуются со здравым смыслом и житейским опытом. На ее основе продолжают разрабатывать расчетные схемы. Однако коллективные действия, как правило, сопровождаются перемещением человеческих масс, что тоже отражается в агентных моделях. В 1970 г. Томас Шеллинг (1921-2016), один их основателей математической политологии в США, впервые предложил схему с подвижными агентами для моделирования расовой сегрегации в американских городах. В модели Шеллинга белые и черные фишки случайным образом распределялись (в первых работах вручную) по клеткам квадратной решетки. На каждом шаге моделирования случайно выбранная фишка-«агент» переносилась в произвольную свободную клетку с $n^{(-)} < b$, если на восьми клетках ее окружения число фишек другого цвета $n^{(-)} > b$ превышало «порог толерантности». Таким образом, в нейтральном состоянии агент оставался на месте, а в возбужденном перемещался в случайно выбранную благоприятную позицию (рис. 9.38).

Возникающее разделение «черных» и «белых» областей, на жаргоне представителей точных наук, было «заложено в модель» – однако оно возникало даже при уровне толерантности $b = 6$ из 8. В действительности модели Шеллинга и Грановеттера математически эквивалентны[*]; равновесие в первой из них соответствует полной сегрегации. Схемы «условной переносимости соседей» (англ. bounded neighborhood) до сих пор используют в урбанистическом моделировании; результаты сопоставляются с реальными данными (рис. 9.39).

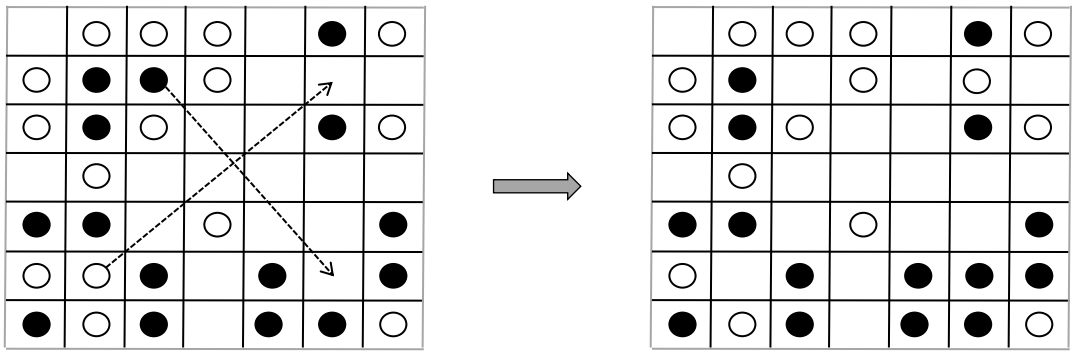


Рисунок 9.38. Фрагмент решетки в модели Шеллинга с порогом толерантности $b = 4$. Пунктирные стрелки – перемещения агентов на двух последовательных шагах. Штриховая линия – возможное перемещение на третьем шаге.

Пороговыми моделями, в частности, воспроизводятся *каскадные процессы* – еще одна разновидность фазовых переходов. В них взаимодействующие агенты с набором возможных состояний $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ синхронно приходят в одно состояние x_k. При этом энтропия системы, вопреки законам термодинамики, уменьшается. (На рис.9.36 при равномерном распределении порогов ($n_1 = 0$, $n_2 = 1$, …, $n_k = k–1$, …, $n_{100} = 99$) возбуждение первого «зачинщика» передается всем агентам, но на малом локальном увеличении барьера ($n_{k–1} = k–2$, $n_k = n_{k+1}=k$, $n_{k+2} = k+1$, …) каскад обрывается). С 1990-х годов пороговыми

[*] [*]В.В.Бреер, *Модели толерантного порогового поведения (от Т.Шеллинга к М.Грановеттеру)*, Проблемы управления, 2016, №1, 11.

моделями описывают *информационные каскады*: лавинообразное распространение информации по некоторому структурированному субстрату[*].

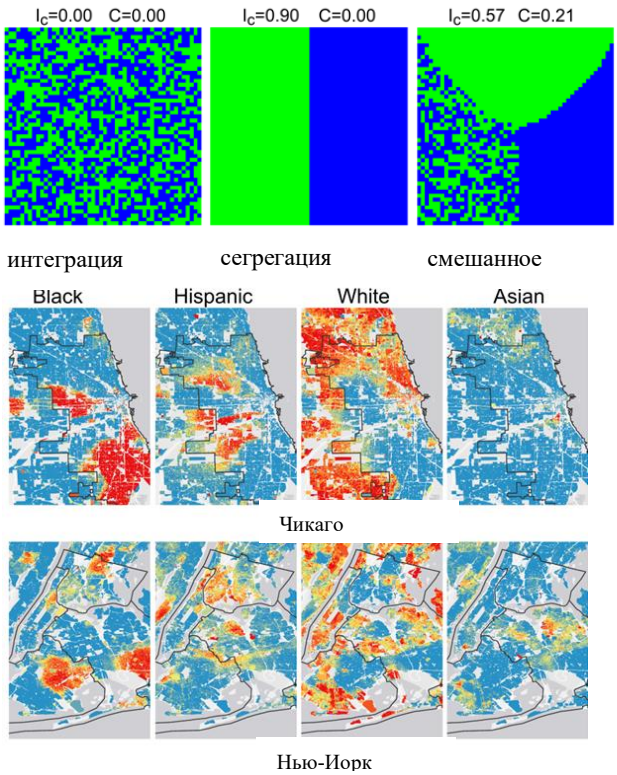


Рисунок 9.39. Вверху: результаты компьютерного моделирования по модели Шеллинга с разными параметрами взаимодействия агентов. Внизу: этническая сегрегация в городах США (E. Hatna, I. Benenson, *Combining segregation and integration: Schelling model dynamics for heterogeneous population*, J. Artific. Soc. Social Simul., 2015, 18 (4), 15, http://jasss.soc.surrey.ac.uk/18/4/15.html)

Литература по пороговым моделям со 2-й половины XX века включает тысячи публикаций (см. обзор[21]). К этому направлению близки модели эпидемиологии, где порогом служат величина иммунитета или (и) вероятность заражения соседних узлов сети, и исследования устойчивости сетей (см. главу 6). В более сложных моделях агенты, состояние которых определяется внешними условиями, порогами и ближним окружением, могут перемещаться по решетке либо по сети. Такими моделями воспроизводят динамику активного противостояния: уличных акций, политической борьбы, партизанской войны и других подобных явлений.

В компьютерной *модели Эпштейна*[22] по клеткам квадратной решетки перемещаются агенты двух типов: *активисты* с числовым *параметром недовольства* G_i (grievance), которые могу находиться в двух состояниях: нейтральном синем либо «восставшем» красном, а также *полицейские*. Полицейский приближается к восставшему (красному) активисту в своем поле зрения и «арестовывает» его, фиксируя на клетке в синем состоянии

[*] S. Bikhchandani D. Hirshleifer I. Welch, *A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades*, J. Polit. Economy, 1992, **100**, 992.

на заданное число шагов дискретного времени. Возбуждение активиста определяется условием

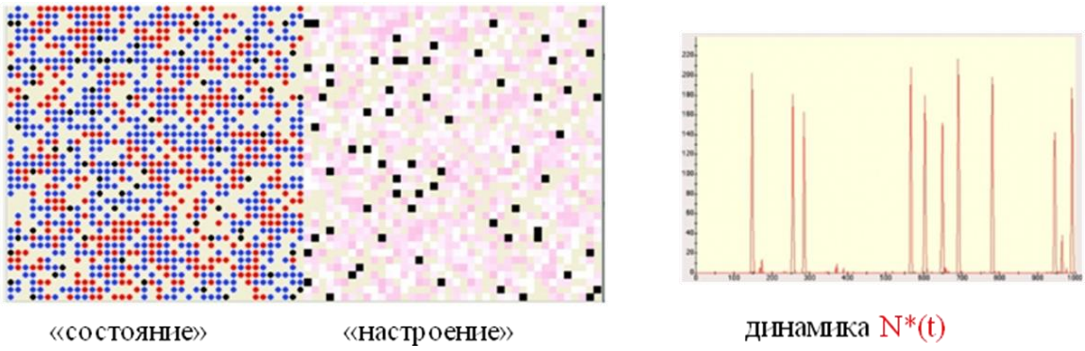
$$H_i(1–L) – p_i r_i = G_i > G_0,$$

где H_i (hardship) – «тяжесть положения» i-го активиста, $L \in [0, 1]$ – «легитимность власти», $p_i = 1 – \exp(–kP_i/N_i^*)$ – «вероятность ареста», N_i^* и P_i – соответственно числа «восставших» активистов и полицейских в поле зрения агента, k и r_i – подгоночные параметры (рис. 9.40 а). В программной реализации модели в начале расчета «активисты» и «полицейские» хаотически распределяются по квадратной решетке, числа H_i, $r_i \in [0, 1]$ приписываются агентам случайным образом, задаются общий параметр $0 < L < 1$, радиус обзора и порог G_0. Состояние системы на шаге t характеризуется суммарным недовольством активистов $G(t) = \sum G_i(t)$ и числом восставших $N^*(t)$.

Вероятность избежать ареста для активиста $1–p_i$ в этой модели с точностью до предэкспоненциального множителя $A \in [0, 1]$ эквивалентна уравнению Аррениуса, используемому в химической кинетике (формула (2.52) в главе 2)

$$k = Ae^{-E_A/RT},$$

где E_A – энергия активации, T – температура, R – универсальная газовая постоянная. Энергии активации, затрудняющей переход x_i от 0 к 1, здесь соответствует число полицейских, а произведению RT – число восставших в поле зрения агента.



(а) (б)

Рисунок 9.40. (а) Расположение «активистов» (красные и синие точки) и «полицейских» (черные точки) на квадратной решетке в модели Эпштейна, (б) динамика перехода «активистов» в возбужденное (красное) состояние (см.[22])

Хотя модель Эпштейна похожа на компьютерную игру, она позволяет воспроизвести некоторые существенные черты политического кризиса: покраснение активистов при их сближении в «толпу» и при отдалении полицейских, хаотические всплески $N(t)$, предваряемые ростом недовольства $G(t)$ (рис. 9.41 б), и увеличение N^* в результате «либерализации», т.е. уменьшения числа P полицейских на поле. Менее тривиальны сохранение $N^*(L) \approx$ const при постепенном снижении «легитимности власти» почти до нуля и всплески N^* при небольшом, но резком падении L. Современные версии этой модели используются для описания динамики забастовок, распространения организованной преступности и других социально-политических явлений. В частности, моделировалось

соприкосновение толпы протестующих и толпы их оппонентов (на нескольких уровнях агрессивности), разделенных полицейской цепью[*].

Исследования на основе пороговых агентных моделей широко представлены в интернет-издании *Journal of Artificial Societies and Social Simulations* (*JASSS*) и в электронной библиотеке препринтов *ArXiv* (раздел physics.soc-phys). Область их использования включает «поведенческие» модели экономики и финансов, компьютерное моделирование в социологии и политологии, анализ больших массивов данных (Big Data) и другие IT-направления. Информационными каскадами, в частности, моделировалось распространение протестных настроений в социальных сетях Twitter[23] и Facebook[**] в ходе «цветных революций» 2011-2014 гг., а также координация участников политических акций через эти сети[***]. Архитектура распространения протестов в Twitter оказалась аналогичной сети влияния ТНК, рассмотренной в предыдущей главе (см. рис. 8.40): в ней существовало управляющее ядро примерно из 1000 *VIP-аккаунтов*[23]. С применением пороговых моделей анализировали условия образования и взаимного усиления каскадов на эволюционирующих сетях, «инфекционную» динамику распространения мнений и другие процессы. В исследованиях ко-эволюции сетей (раздел 6.4.1 в гл. 6) нередко моделируют их перестройку под воздействием распространяющейся информации («новаторы» разрывают связи с «консерваторами»). Такие расчеты с широкими возможными приложениями проводят и на реально существующих сетевых структурах, взятых из открытых источников (рис. 9.41).

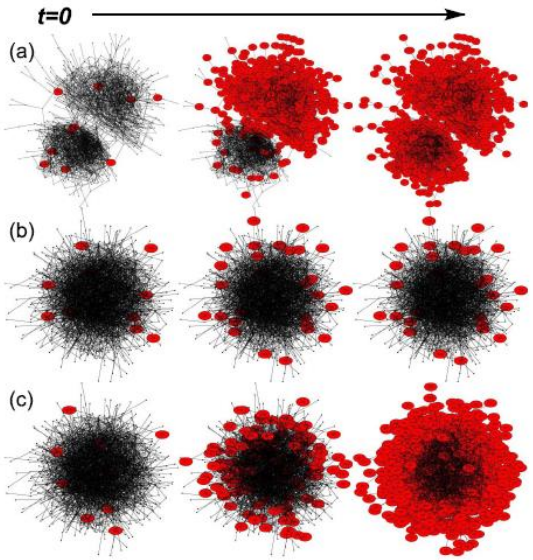


Рисунок 9.41. Моделирование информационных каскадов с множественными инициаторами на сети контактов американских школьников (a) и ее рандомизованных вариантах (b, c) с разными режимами распространения; ось *t* обозначает время (P. Singh, *et al.*, Sci. Rep. 2013, 3. 2330)

Литература к разделу 9.3

[11] С.А. Новосельский, *Смертность и продолжительность жизни в России*, Петроград, 1916.

[*] см. T.E.Lee, *The thin blue line between protesters and their counter-protesters*, JASSS 2018, **21** (2), 10 (http://jasss.soc.surrey.ac.uk/21/2/10.html) и цитированную там литературу.

[**] Признана российским судом экстремистской организацией на территории РФ.

[***] S. Gonzalez-Bailon, et al., *The dynamics of protest recruitment through an online network*, Sci. Rep., 2011, **1**, 197.

[12] E. Bonabeau, G. Theraulaz, J. L. Deneubourg, *Mathematical models of selforganizing hierarchies in animal societies. Bull. Math. Biol.* 1996, **58**, 661.

[13] Т.Е. Щеглова, Д.В. Мальцева, А.В. Ким, *Блокмоделинг для анализа социальных структур: методологические основания*, Социология: 2021, № 52, 7.

[14] A. Mvar, V. Batagelj, *Pajek: Program for analysis and visualization of very large networks.* https://pajek.software.informer.com/

[15] Ю.Л. Словохотов, *Физика и социофизика*, Проблемы управления, 2012, №3, 2.

[16] Д.А. Губанов, Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*, 3-е изд., М.: МЦНМО, 2018.

[17] П.А. Пархоменко, А.А. Григорьев, Н.А. Астраханцев, *Обзор и экспериментальное сравнение методов кластеризации текстов*, Труды ИСП РАН, 2017, **29** (2), 161.

[18] S. Koltsov, V. Ignatenko, O. Koltsova, *Estimating topic modeling performance with Sharma–Mittal entropy*, Entropy, 2019, **21**, 660.

[19] К.В. Воронцов, *Вероятностное тематическое моделирование: теория регуляризации ARTM и библиотека с открытым кодом BigARTM*, М: URSS, 2023.

[20] А.А. Иудин, М.М. Рюмин, *Контент-анализ текстов: компьютерные технологии,* Н. Новгород, ННГУ, 2010. 37 с., http://window.edu.ru/resource/004/74004/files/Ctt_3.pdf

[21] R.L. Goldstone, M.A. Janssen, *Computational models of collective behavior*. Trends Cogn. Sci. 2005, **9** (9): 424.

[22] J.M. Epstein, *Modeling civil violence: an agent-based computational approach*. Proc Natl Acad Sci USA. 2002, 99, Suppl. 3, 7243.

[23] K.M. Frahm, D.L. Shepelyansky, *Google matrix of Twitter*, Europ. Phys. J. B, 2012, **85**, 355

9.4. Математические методы политологии

Рассмотренные выше агентные модели в равной степени можно отнести как к социологии, так и к практическим задачам управления, поскольку массовое недовольство, протестные настроения и сегрегация провоцируют восстания, расшатывая государственную власть. В этой книге к области интересов социологов мы отнесли стихийные действия людей, вызванные их общественным положением и благосостоянием. Тогда к политологии, как науке о государстве и структурах власти, относится анализ более осознанных действий, направленных на сохранение или изменения этих структур.

В большинстве стран мира государственные институты частично или полностью формируются в результате голосования, т.е. выборов. Соответственно, среди главных задач политологии как науки – оценка устойчивости государственных и общественных механизмов в заданных условиях, а также влияния выборов на их деятельность. Практической задачей политологов является выработка рекомендаций для сохранения действующей власти (для которой оппозиционные исследователи социума – не ученые, а опасные экстремисты) и мониторинг того, как рекомендации воплощаются в жизнь. По этим причинам политология в каждый конкретный период времени – одна из наиболее ангажированных и провластных научных дисциплин, в данном отношении превосходящая даже неоклассические теории экономики. Тем не менее, в любые времена были исследователи, которые создавали объективное описание политических систем и нелицеприятно предсказывали их динамику. Именно они заложили научный фундамент политологии.

В этом разделе мы рассмотрим некоторые современные политологические модели, разработанные в рамках прикладной математики и междисциплинарной физики. В основном они относятся к планированию избирательных кампаний, прогнозированию их результатов, контролю проведения – и, кроме того, к формальному описанию конкуренции социальных структур, включая государства (где широко применяется теория игр, см. гл. 7).

Как и в предыдущей главе, обсуждаемые примеры не сводятся исключительно к работам физиков: мы рассмотрим и некоторые другие теоретические и практические схемы, где используют количественные данные. Такие радикальные средства политической конкуренции, как вооруженные конфликты и войны, будут обсуждаться в следующем разделе.

9.4.1. Системы голосования

Выборы представителей власти путем голосования – пример многокритериальной оптимизации (см. разд. 8.1 предыдущей главы) без четко установленного набора качеств соискателей выборной должности (*кандидатов*). От оптимизации в технических и экономических системах их отличают как отсутствие единых параметров, которые позволили бы голосующим (*избирателям*) объективно ранжировать кандидатуры, так и неоднородность множества избирателей, отдающих свои голоса под влиянием ряда факторов, среди которых не все относятся к рациональному принятию решений. При этом единственным показателем успеха каждого кандидата служит число поданных голосов. В масштабах страны, избирательного округа и даже большой организации это снижает ценность голосования для большинства избирателей (обычно не участвующих в выдвижении кандидатур), провоцирует их инертность и способствует манипулированию выборами. С другой стороны, повсеместное использование голосования (в том числе в малых группах) и огромный опыт электоральных процедур заставляют изобретать такие схемы, которые приближают результаты коллективного выбора к консенсусу избирателей и препятствуют манипулированию. Современные избирательные системы формировались в противоборстве этих двух противоположных тенденций.

В наиболее распространенных схемах прямого, равного и тайного голосования предполагается, что индивидуум отдает свой голос в соответствии с его (её) порядком предпочтения кандидатов, постоянным в рамках одной избирательной кампании. Неинформированность избирателей, их *ограниченная рациональность* и нарушения процедуры выборов играют роль «шума», который искажает коллективные предпочтения электората, но, в соответствии с идеями классической физики, при адекватной методике «измерения» предпочтений общества может быть снижен (почти) до нуля. Тем не менее, в разных организационных системах результаты голосования обрабатываются и интерпретируются по-разному.

Простейшие схемы коллективного выбора – *простое большинство голосов* и *диктатура*. В первом случае на выборах побеждает тот кандидат (в широком смысле слова – например, как один из вариантов ответа на вопрос референдума), за которого проголосовало больше избирателей, чем за других кандидатов[*]. При выборе из двух

---

[*]Схемы подсчета голосов в такой процедуре вырабатывались столетиями: так, на новгородском вече побеждала сторона, *перекричавшая* своих оппонентов[24].

[**] В республиканскую эпоху Древнего Рима назначения региональных диктаторов, не подлежащих судебной ответственности, постановлением сената на срок от 6 месяцев до 1-2 лет были обычной процедурой в чрезвычайных ситуациях, при постоянных войнах Рима почти непрерывных. На этой юридической основе Гай Юлий Цезарь в 48 г. до н.э. стал диктатором на неопределенный срок, фактически установив свою единоличную власть, но сохранил выборные процедуры на других уровнях государства.

[***]Уникальность электоральной традиции *homo sapiens* не следует переоценивать. В критических ситуациях – таких как поиск нового участка питания при засухе – стадо обезьян может перестать подчиняться вожаку и разделиться на группы,

альтернатив эта схема работает неплохо, но даже здесь она не идеальна: при массовой неявке на избирательные участки или доле голосов «воздержался» выше 50% электората в итогах выборов не отражаются усредненные общественные предпочтения. В сложных условиях при быстром изменении обстановки (например, на войне) определить предпочтения людей голосованием бывает невозможно. В таких случаях решения принимает *диктатор*[**]: индивидуум, узурпировавший личную власть, получивший ее на определенный срок от государственных структур по установленной законом схеме[***] либо занимающий соответствующую должность (например, командир полка). Выборы лиц с диктаторскими полномочиями (в том числе разными вариантами голосования в административном совете, среди богатых граждан либо в войске) и (или) его пассивная поддержка большинством социума исторически были преобладающим механизмом установления власти в *политиях*: любых структурированных общностях людей, контролирующих территорию и ресурсы, начиная с общин и родоплеменных формирований.

Более сложные процедуры голосования и подсчета голосов разработаны для выборов с числом кандидатов $n > 2$. В предреволюционной Франции XVIII века их создавали математики маркиз Жан-Антуан де Кондорсе (1743-1794) и Жан-Шарль шевалье де Борда́ (1733-1799), поставившие целью точный и неманипулируемый учет «среднего» народного мнения. Последовавшая затем Великая Французская революция для коррекции мнений чаще использовала гильотину и стрельбу картечью по демонстрантам, но в условиях гражданского мира эти схемы до сих пор применяются на практике.

По *принципу Кондорсе* (1785 г.) победителя при выборе из нескольких кандидатов следует определять не относительным большинством голосов, а попарным сопоставлением всех кандидатур в *профилях предпочтений* избирателей. Простой модельный пример из девяти избирателей (далее агентов) и трех кандидатов A, B и C показан в табл. 9.3 а. Здесь N_i – число агентов, проголосовавших за того кандидата, который занимает первое место в списке их предпочтений.

Таблица 9.3 а

предпочтения	N_i	доля
$A \succ B \succ C$	4	45%
$B \succ C \succ A$	3	33%
$C \succ B \succ A$	2	22%

По относительному большинству голосов побеждает кандидат A, однако более половины проголосовавших считаю его наихудшей из трех кандидатур – следовательно, этим результатом не отражаются предпочтения большинства. «Среднее» мнение показывают числа агентов, одобряющих попарные сравнения кандидатов:

обозначающие разные направления перехода. В том случае, если численность групп примерно одинакова (приматы, как и некоторые другие виды животных, умеют считать не вполне точно), стадо следует за старейшим самцом с максимальным опытом выживания (R.I.M. Dunbar, *Primate social systems*, Springer New York, NY. 1988, Part 3, Survival strategies, p.p 33-54).

$A \succ B$: 4 – 3 – 2 = –1, т.е. в действительности $B \succ A$ с перевесом в 1 голос

(9.31) $B \succ C$: 4 + 3 – 2 = 5

$A \succ C$: 4 – 3 – 2 = –1, т.е. $C \succ A$.

Предполагается, что отношения предпочтения транзитивны: если «*A* лучше *B*» и «*B* лучше *C*», то «*A* лучше *C*» (см. раздел 7.2 в главе 7). Отрицательное число агентов, одобряющих сравнение, означает противоположное предпочтение. Мы видим, что по усредненному мнению агентов кандидат *B* лучше *A* и *C*, а кандидат *C* лучше, чем *A*. При заданных предпочтениях агентов такими будут результаты выборов, в которых кандидаты сравниваются попарно. Таким образом, *победителем по Кондорсе* является кандидат *B*.

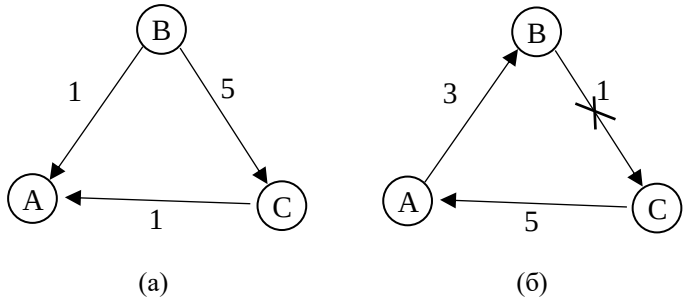


Рисунок 9.42. Графы сравнений кандидатов в таблицах 9.3 а и 9.3 б

Парные отношения предпочтения между кандидатами наглядно показывает взвешенный ориентированный граф, в котором направление стрелки означает «лучше» (рис. 9.42 а). Отметим, что транзитивные предпочтения неаддитивны: кандидат *B* «много лучше», чем *C*, но на сравнениях *B* и *C* с *A* это не отражается.

К несчастью, такой простой и логичный способ определения победителя не всегда дает результат. Вместе с одноименным принципом был сформулирован *парадокс Кондорсе*: для ряда профилей предпочтений и соответствующих им результатов голосования победителя по Кондорсе не существует. Пример, тоже для трех кандидатов и 9 агентов, показан в следующей таблице

Таблица 9.3 б

предпочтения	N_i	доля
$A \succ B \succ C$	2	22%
$B \succ C \succ A$	3	33%
$C \succ A \succ B$	4	45%

По аналогии с попарными соотношениями (9.31), из табл. 9.3 б найдем числа поддерживающих агентов

$A \succ B$: 2 – 3 + 4 = 3

(9.31 а) $B \succ C$: 2 + 3 – 4 = 1

$C \succ A$: –2 + 3 + 4 = 5.

Таким образом, в парных отношениях (9.31 а) нет победителя: стрелки графа на рис. 9.42 б образуют цикл. В подобных случаях Кондорсе предлагал заменить точные соотношения

предпочтения приближенными: в данном примере убрать ребро $B \to C$, имеющее наименьший вес. Оставшаяся цепь $C \to A \to B$ отвечает отношениям предпочтения $C \succ A \succ B$; победителем является C, получивший относительное большинство голосов. Но если в табл. 9.3 б все N_i=3, веса всех стрелок в цикле станут одинаковыми: здесь не будет даже «приблизительного» победителя по Кондорсе.

Принцип Кондорсе позволяет проверить сбалансированность и справедливость результатов в десятках разнообразных процедур голосования, предложенных к настоящему времени. В массовых выборах используется простая и эффективная *схема абсолютного большинства*, также называемая *относительным большинством с выбыванием*. Голосование с несколькими кандидатами осуществляется в два тура. Кандидат, набравший в первом туре абсолютное большинство голосов (то есть больше половины от всех проголосовавших), объявляется победителем. Если же такого победителя не оказалось, во втором туре по схеме простого большинства соревнуются два кандидата, которые получили наибольшую поддержку избирателей – то есть заняли в первом туре первое и второе места. В частности, так организованы президентские выборы во Франции и России. В модельном примере из Табл. 9.3 а во второй тур выходят кандидаты A и B, из которых, в соответствии в (9.31), побеждает B. Таким образом, победитель согласуется с принципом Кондорсе (*состоятелен по Кондорсе*). Заметим, что эта схема дает результат и при отсутствии «точного» победителя по Кондорсе (табл. 9.3 б): во второй тур выходят B и C, и в соответствии с (9.31 а) побеждает кандидат B (а не C, как в приблизительных парных сравнениях на рис. 9.42 б).

Парным отношениям предпочтения среди n кандидатов соответствуют ребра полного графа с n вершинами. Если ребер больше, чем вершин,

$$½n(n–1) > n, \to n^2 – n > 2n, \text{ то есть для всех } n > 3,$$

эти соотношения нельзя установить только из числа голосов, поданных за кандидатов. Этим объясняется популярность *рейтингового голосования*, при котором каждый избиратель ранжирует всех кандидатов по образцу таблиц 9.3 а, б. Однако на выборах в масштабах страны, региона или большого города многие избиратели попросту не имеют детальных предпочтений, классифицируя кандидатов как $A \succ B \approx C \approx D \approx \cdots$, где A – «их» кандидат, $B, C, D, \ldots$ – прочие кандидаты, «≈» – отношение безразличия (см. разд. 7.2 гл. 7). В этом случае ранги «прочих» кандидатов окажутся неинформативными, даже если все избиратели добросовестно заполнят свои бюллетени.

В малых группах, решающих серьезные практические задачи (экспертный совет, парламентская комиссия, совет директоров фирмы) предпочтения голосующих четко установлены и весьма важны. Для их корректного учета используется ряд процедур.

Правило де Бордá – это ранжирование по баллам. Из отношений предпочтения кандидатам приписывают рейтинги: последний в списке получает 0, предпоследний 1 и т.д. Затем рейтинги умножают на число агентов с данным списком предпочтений. Полученные баллы складываются с баллами тех же кандидатов во всех списках. Для примера из табл. 9.3. а

Таблица 9.3 в

		N_i
предпочтения	$A \succ B \succ C$	4
рейтинг	2 1 0	
баллы	8 4 0	
предпочтения	$B \succ C \succ A$	3
рейтинг	2 1 0	
баллы	6 3 0	
предпочтения	$C \succ B \succ A$	2
рейтинг	2 1 0	
баллы	4 2 0	

Суммы баллов каждого из трех кандидатов:

$$\sum A = 8 + 0 + 0 = 8$$
$$\sum B = 4 + 6 + 2 = 12$$
$$\sum C = 0 + 3 + 4 = 7.$$

Ранжируя кандидатов по сумме баллов, получаем $B \succ A \succ C$: последовательность, не встречавшуюся в таблицах 9.3 а, в. Лучшим кандидатом снова является B – этот результат состоятелен по Кондорсе. Однако в других случаях принцип Кондорсе и правило де Борда могут дать разные результаты. Например, нетрудно подсчитать, что для трех агентов и четырех кандидатов с отношениями предпочтений

$$\begin{array}{ll} A \succ B \succ C \succ D & 1 \\ D \succ A \succ B \succ C & 1 \\ D \succ A \succ C \succ B & 1 \end{array} \qquad (9.32)$$

по суммам поддержки кандидатов в парных сравнениях побеждает D (рис. 9.43)

$$\begin{array}{llll} A \succ B & 3 & B \succ C & 1 \\ A \succ C & 3 & B \succ D & -1 \\ A \succ D & -1 & C \succ D & -1 \end{array}$$

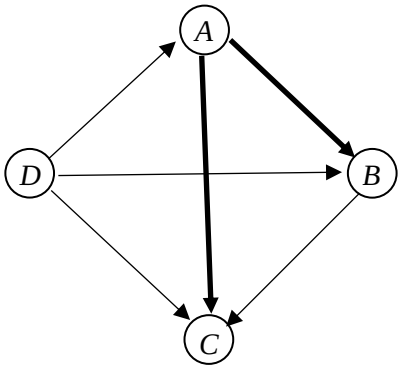


Рисунок 9.43. Граф парных сравнений для списков предпочтений агентов (9.32). Тонкие стрелки – вес +1, жирные стрелки – вес +3

В то же время сумма баллов по де Борда дает победу кандидату A:

$$\sum A = 3 + 2 + 2 = 7$$
$$\sum B = 2 + 1 + 0 = 3$$
$$\sum C = 1 + 0 + 1 = 2$$
$$\sum D = 0 + 3 + 3 = 6$$

Если голосующим надо принимать много решений за ограниченный срок, процедуры Кондорсе и де Борда упрощают, стараясь сохранить их объективное содержание. Так, при рассмотрении многочисленных законов и поправок в конгрессе США используют *парные сравнения по списку с выбыванием* (англ. *sequential majority comparison*). Голосование проводится в некоторой заданной последовательности объектов *abcde*…: на первом шаге *a* сравнивают с *b*, далее победителя (предположим, что это *a*) сравнивают со следующим объектом (*c*), и так до конца списка:

$$(ab)cde\ldots \rightarrow (ac)de\ldots \rightarrow \ldots$$

Эта схема экономит время: например, для выбора лучшего из шести кандидатов требуется голосовать 5 раз вместо полного набора из 15 сравнений. Победителя определяют простым большинством, а если голоса разделяются поровну, выигрывает кандидат (объект), расположенный ближе к началу списка. Для успешного отбора желательно иметь такой список, где последовательность объектов примерно соответствует их рейтингу. В конгрессе США список предлагает председатель.

Манипулируемость выборов и теорема Эрроу

Манипулируемостью избирательной процедуры называется возможность агентов достигать нужного им результата, предоставляя ложные сведения о своих предпочтениях. Хотя рейтинговое голосование с честными избирателями позволяет объективно определить победителя по Кондорсе или по де Борда, оно плохо защищено от манипулирования. Пусть, например, три агента определяют лучший из четырех объектов по упрощенной рейтинговой процедуре, последовательно вычеркивая худших кандидатов в своих списках:

агент I: $a \succ b \succ c \succ d$
агент II: $b \succ d \succ a \succ c$
агент III: $b \succ c \succ a \succ d$

в порядке I→II→III (см. [3] в гл. 7, стр. 110). Если списки предпочтений всех агентов им известны, в честном сравнении победит объект b:

агент I: $a\ b\ c\ \underline{d} \rightarrow$ агент II: $b\ \underline{d}\ a\ \underline{c} \rightarrow$ агент III: $b\ \underline{c}\ \underline{a}\ \underline{d}$

Серым цветом показаны объекты, вычеркнутые в соответствии со списком предпочтений агента I, затем агента II и затем III. Предположим теперь, что агентам II и III неизвестны предпочтения агента I, а он знает их предпочтения и очень ими недоволен, так как они обеспечивают победу b вместо его фаворита a. В этом случае агент I, имея первый ход, может исключить из рассмотрения b – и тогда побеждает a:

$$a\ \underline{b}\ c\ d \rightarrow \underline{b}\ d\ a\ \underline{c} \rightarrow \underline{b}\ \underline{c}\ a\ \underline{d}$$

Манипулирование упрощается при нарушении принципа Кондорсе. Так, если предпочтения трех агентов относительно трех кандидатов образуют цикл

$$a \succ b \succ c$$
$$b \succ c \succ a$$
$$c \succ a \succ b$$

(табл. 9.3 б при равном числе голосов) и голосование проводится по «американской» схеме с выбыванием, его результат полностью определяет председатель: в последовательности кандидатур *a b c* победит *a*, в порядке *b c a – b*, а в порядке *c a b* побеждает *c*. Процедуры и результаты рейтингового голосования (например, в конкурсах научных работ или проектов) нередко критикуют именно за имеющиеся в них лазейки для манипулирования.

На протяжении двух столетий юристы и законодатели во многих странах продолжают разрабатывать схемы коллективного выбора, при которых агентам, подобно участникам голландского аукциона второй цены (см. разд. 7.6 гл. 7), было бы невыгодно скрывать свои предпочтения. Обилие предложенных процедур, ни одну из которых на практике не признали безупречной, заставляет думать, что у этой задачи нет общего решения.

В середине XX века реализуемость «идеальной» избирательной системы, формирующей согласованный список предпочтений n кандидатов среди N избирателей, исследовали математическими методами. Требования к такой системе переводились в постулаты:

1. *универсальность*: искомый список всегда существует,
2. *полнота*: в его построении учитываются все комбинации предпочтений,
3. *монотонность*: если в согласованном списке N_1 избирателей $A \succ B$, при добавлении N_2 избирателей с таким же индивидуальным предпочтением в согласованном списке N_1+N_2 избирателей $A \succ B$,
4. *независимость от посторонних альтернатив*: если $A \succ B$ в некотором списке кандидатов с фиксированным числом избирателей N, этот порядок сохранится во всех их списках кандидатов, содержащих A и B,
5. *преобладающее мнение*, или эффективность по Парето: если $A \succ B$ в индивидуальных списках всех избирателей, то $A \succ B$ в согласованном списке

и ряд других допущений. Расхолаживающую несовместимость перечисленных постулатов утверждает *теорема Эрроу* (1951 г.):

При N≥2 и n≥3 систем голосования, удовлетворяющих всем условиям 1 – 5, не существует

Одним из постулатов Эрроу было довольно очевидное отсутствие *диктатора*: агента, профиль предпочтений которого всегда совпадает с коллективным выбором и таким образом делает голосование ненужным. Поэтому теорему Эрроу иногда называют «теоремой о диктатуре» или «теоремой о невозможности демократии». В реальности она утверждает, что для демократических выборов, где диктатора нет, условия (4) и (5) несовместимы – то есть предпочтения избирателей могут измениться при изменении списка кандидатов. Эмпирически это понятно: при сравнении разных кандидатов отсутствует единый набор параметров – поэтому, например, во втором туре президентских выборов по схеме относительного большинства с выбыванием может победить кандидат B, занявший

второе место в первом туре ($A \succ B$), если его поддержат все противники кандидата A^*. На этом основаны многочисленные схемы манипулирования с добавлением *фиктивных* кандидатов, призванных отобрать голоса у определенных политических фигур или партий[**]. Некоторые процедуры голосования рассмотрены с позиций теории игр в книге Колокольцова и Малафеева (см. [2] в списке рекомендуемой литературы к гл. 7). Голосование в малых группах обсуждается в обзоре В.И. Вольского[***], а на историческом материале – его в учебном пособии[24].

9.4.2. Парламентские процедуры

Как ты безнравствен, право! –
В сердцах сказала дева, –
Ступай себе направо,
А я пойду налево!
А.К. Толстой

Со второй половины XVI в. по начало XIX в. парламенты, столетиями существовавшие в ряде государств Европы, под давлением исторических процессов переродились из кастовых совещательных органов при монархе (Боярская Дума) в новаторский политический инструмент: *перенастраиваемый генератор случайных чисел* на элементной базе эпохи Просвещения. Стохастические управленческие решения, принимаемые парламентом, состав которого регулярно обновлялся на выборах, оказались намного эффективнее «командного» управления в государствах с единоличной властью. Критика хаотичности парламентской деятельности длилась с момента возникновения *буржуазного парламентаризма* (других тогда не было) до изобретения метода Монте-Карло, позволяющего достичь оптимума целевой функции за счет случайных блужданий (разд. 3.4 в гл. 3), но это открытие никак не повлияло на критику: она продолжается до сих пор.

Однако парламент, как эффективное средство баланса интересов богатейших классов и групп, в развитых европейских государствах середины XIX века действовал при наличии избирательного права лишь у нескольких процентов взрослого населения: наиболее состоятельных и лояльных к власти. Значительно более демократичная политическая система США, где доля избирателей достигала 20% (права голоса не имели женщины, цветные, а также иммигранты, прожившие в Америке менее 5 лет, применялся и имущественный ценз) породила массовые примеры подкупа избирателей и газет, очернения «внесистемных» кандидатов[****], расстрелов демонстрантов и других технологий, в разных странах мира используемых до сих пор.

Современные парламенты, формируемые на основе всеобщего избирательного права, заняты не столько выработкой оптимальных решений (для этого существует технический управленческий аппарат), сколько поддержкой действующей системы власти с возможной периодической сменой «правоцентристов» «левоцентристами» и наоборот. Однако, несмотря на пропорционально возросшие масштабы обмана и коррупции, в большинстве

---

[*] Из-за того, что существенная часть избирателей безразлична к результатам выборов (см. далее), при интенсивной обработке общественного мнения через СМИ кандидат *A* во втором туре может получить меньше голосов, чем в первом.

[**] Пример – разделение голосов российского протестного электората между КПРФ и ЛДПР.

[***] В.И. Вольский, *Процедуры голосования в малых группах*, Проблемы управления, 2016, №2, 1.

[****] См., например, Марк Твен, *Как я баллотировался в губернаторы* (1870 г.).

развитых стран законы утверждаются и корректируются именно парламентами. Манипулятивный аспект политических процедур будет рассмотрен ниже в специальном разделе. Здесь мы обсудим механизм принятия решений на основе конкуренции коллективных акторов: парламентских партий и фракций. Деятельность парламента непосредственно влияет на внутреннюю и внешнюю политику государства и поэтому заслуживает серьезной объективной оценки.

Индекс Банцафа

ЗАДАЧА

Парламент небольшого демократического государства состоит из двух палат. В нижней палате 19 депутатов, в верхней палате (сенате) 9 депутатов. Законы в обеих палатах утверждают простым большинством голосов. Некая корпорация выделяет на лоббирование полезного ей закона 3 млн. условных денежных единиц (у.е.). Как распределить сумму взяток между народными избранниками? (по [3], гл. 7, стр. 226).

Решение

Эта задача близка к определению вектора Шепли в кооперативных играх (разд. 7.7 гл. 7) и решается аналогично. Чтобы принять закон, требуется простое большинство: 10 депутатов нижней и 5 депутатов верхней палаты. Справедливое распределение суммы между ними учитывает равные вклады обеих палат в утверждение закона. Соответственно, общую сумму в 3 млн. у.е. надо разделить пополам между палатами, а суммы по 1.5 млн у.е. в каждой палате – разделить на число депутатов, необходимых для принятия закона. Таким образом, на подкуп одного депутата нижней палаты приходится

$$b_1 = 1500000/10 = 150 \text{ тыс. у.е.}$$

а на одного сенатора

$$b_2 = 1500000/5 = 300 \text{ тыс. у.е.}$$

Если же закон должен утверждать президент государства, выделенную сумму следует разделить не на две, а на три равные доли пропорционально вкладам всех ветвей власти. Тогда президенту следует выделить $b_0 = 1$ млн. у.е., голосующим за законопроект депутатам нижней палаты по 100 тыс. у.е., а сенаторам по 200 тыс. у.е. Поскольку органы власти – монополисты в деле принятия законов, ставки могут возрасти; детально этот вопрос мы не рассматриваем.

Индекс влияния партий в парламенте, или *индекс Банцафа*, вычисляется по похожей схеме. Фракции многопартийного органа власти влияют на его коллегиальные решения не только пропорционально своей численности, но и путем образования парламентских коалиций, непосредственно относящихся к области теории и практики коалиционных игр (разд. 7.7. гл. 7). В «идеальном» (в том числе для манипуляций) законодательном собрании ни одна из представленных там политических партий не имеет ни парламентского (50% всех депутатов + 1 голос), ни тем более конституционного большинства (2/3 депутатов + 1 голос). Нестабильную политическую жизнь страны в этом случае определяют коалиции партий, нередко сформированные вопреки декларированным партийным программам для

совместного получения парламентского большинства, которое позволяет принимать законы. Предполагается, что все депутаты фракций, составивших коалицию, голосуют одинаково и их коррупционные интересы в первом приближении отсутствуют.

Коалиции, достаточные для достижения парламентского большинства, называются *выигрывающими*. Фракция (в том числе небольшая) в составе коалиции называется *ключевой*, если в случае ее выхода коалиция перестает быть выигрывающей. «Сила» каждой партии определяется числом возможных для нее решающих коалиций, в которых она является ключевой фракцией.

Пусть в некотором стилизованном парламенте представлены пять партий: левые (Л, 27 чел.), левоцентристы (ЛЦ, 175 чел.), центристы (Ц, 156 чел.), правоцентристы (ПЦ, 72 чел.) и правые (П, 20 чел.). Всего в парламенте 450 депутатов – таким образом, для парламентского большинства необходимо 226 голосов. Мы видим (Табл. 9.4), что ни одна фракция не имеет парламентского большинства. В то же время любые две из трех крупных фракций (левоцентристы, центристы и правоцентристы) могут образовать выигрывающую коалицию, в которой обе фракции – ключевые. Три эти фракции вместе, а также с участием меньших фракций, могут образовывать коалиции, в которой ни одна из них не является ключевой. Две меньшие фракции Л и П не являются ключевыми ни в одной из коалиций, в которые они могут войти.

Таблица 9.4

Выигрывающие коалиции партий в парламенте. Знаком ⊕ выделены ключевые фракции (по [4])

	Партийные фракции и число депутатов					f_{ij}
	Л (27)	ЛЦ (175)	Ц (156)	ПЦ (72)	П (20)	
		⊕	⊕			0.41
		⊕		⊕		0.35
			⊕	⊕		0.74
		+	+	+		
	+	⊕	⊕			0.29
		⊕	⊕		+	0.41
	+	⊕		⊕		0.23
		⊕		⊕	+	0.35
	+		⊕	⊕		0.23
			⊕	⊕	+	0.57
	+	+	+	+		
		+	+	+	+	
	+	⊕	⊕		+	0.29
	+	⊕		⊕	+	0.23
	+		⊕	⊕	+	0.23
	+	+	+	+	+	
индекс Банцафа	0	1/3	1/3	1/3	0	
α-индекс	0	0.29	0.37	0.34	0	

Влиятельность партийной фракции пропорциональна доле выигрывающих коалиций, которые эта фракция в состоянии разрушить (предпоследняя строка в табл. 9.5)

(9.33) $$\beta(i) = \frac{b(i)}{\sum b(j)}$$ *индекс Банцафа*

Здесь $b(i)$ – число решающих коалиций, в которых i-я фракция является ключевой, а в знаменателе общее число решающих коалиций. Индексы фракций нормированы на единицу, т.е. $\sum \beta(i) = 1$.

$$\sum \beta(i) = 1$$

Число голосов во фракции Ц+ПЦ (228, третья строка фракций в таблице) лишь незначительно превышает порог (226) необходимый для большинства. Если три депутата любой из этих двух партий выйдут из коалиции и образуют независимую фракцию, коалиция перестанет быть выигрывающей. Это вызовет парламентский кризис, требующий образования новой коалиции. Тогда значения индекса Банцафа перераспределятся: для левоцентристов он увеличится до 36.4%, а для центристов и правоцентристов уменьшится до 31.8%, оставаясь равным нулю для крайне левых и крайне правых. Если же эти три депутата перейдут, например, в правую фракцию, ее индекс останется нулевым несмотря на увеличение численности. В политической практике известны случаи, когда влияние партии при увеличении ее фракции уменьшалось, если депутаты-перебежчики способствовали образованию новых выигрывающих коалиции, увеличивая знаменатель в формуле (9.33).

Более реалистическая оценка влиятельности фракций учитывает их разную склонность к солидарному голосованию по внутриполитическим, внешнеполитическим и экономическим вопросам (левые чаще блокируются с левоцентристами, чем с правыми, в вопросах внешней политики распространен консенсус и т.д.). По статистике голосований для каждой коалиции вычисляют *индекс согласованности* фракций c_{ij}, равный 1, если фракции i и j всегда голосуют одинаково, и 0, если они никогда не солидаризуются. *Мера предпочтения* f (правый столбец в Табл. 9.4) вычисляется как наименьший индекс согласованности для входящих в коалицию партий. Сумма этой меры для партий по всем выигрывающим коалициям с их участием

$$a(\text{ЛЦ}) = 2.56,\ a(\text{Ц}) = 3.17,\ a(\text{ПЦ}) = 2.93,\ a(\text{Л}) = a(\text{П}) = 0$$

точнее отражает их влиятельность. Заменой $b(i)$ на $a(i)$ в (9.33) получают *альфа-индекс*

(9.33 а) $$\alpha(i) = \frac{a(i)}{\sum a(j)}$$

(последняя строка табл. 9.4*)*. Влиятельность парламентских фракций в Государственной думе Российской империи I – IV созывов (1906-1916 гг.), а также в ГД РФ начала XXI века, на основе перечисленных индексов была проанализирована в работах Ф.Т. Алескерова и соавторов (см., например, статью[25]).

9.4.3. Некоторые математические модели политологии

Методы оценки предпочтений избирателей и влиятельности фракций в парламенте относятся к классической политологии. В ней также конструируют и обсуждают математические модели массовых избирательных кампаний. В отличие от рассмотренных выше процедур голосования в комитетах и экспертных комиссиях (т.е. в малых группах),

выборы в масштабах страны проводятся по небольшому числу законодательно утвержденных схем, обычно основанных на принципе простого большинства. Теории выборов в политологии направлены на формализацию действий кандидатов, стремящихся получить как можно больше голосов избирателей, и на предсказание результатов массового голосования.

Цель политической партии в ходе избирательной кампании – достижение оптимального результата с использованием ограниченных ресурсов – формально совпадает с целью экономического агента. Поэтому в моделях классической политологии и возродившейся в конце XX века *политической экономии* часто используются постулаты неоклассических экономических теорий. В их рамках два вида агентов, *избиратели* и политические акторы (индивидуумы либо партии, т.е. *кандидаты*) стремятся достигнуть максимума полезности, различного у разных избирателей и у разных кандидатов. Результаты голосования определяются, с одной стороны, стремлением избирателей выбрать «своего» кандидата, а с другой – амбициями кандидатов, способных изменять свою позицию, т.е. предоставлять ложную информацию в ходе кампании.

В неоклассической модели демократических выборов предполагается, что их результат определяют только рациональные предпочтения избирателей. Иными словами, стремление кандидатов к повышению своего социального статуса, которое допускает обман избирателей в ходе кампании и (почти всегда) в случае победы, перевешивается небольшим и скоротечным удовлетворением голосующих от победы своего кандидата, умноженным на число поданных голосов. Разные «масштабы полезности», не оцениваемой количественно, в этих задачах, как и эмпирические известная нерациональность поведения избирателей в ряде ситуаций (например, *протестное голосование* против массово неодобряемой кандидатуры либо партии, которое может принести победу случайным акторам) показывают, что модели с полностью рациональными агентами лишь ограниченно применимы к реальным выборам.

В классических моделях политологии конкурирующие политические субъекты (кандидаты или партии) в ходе избирательной кампании стремятся увеличить число сторонников, провозглашая и корректируя свою *платформу*, которой соответствует точка в *пространстве политических координат*. Каждый избиратель имеет в этом пространстве точку собственных предпочтений, или *позицию*, и голосует за кандидата с наиболее близкой к ней платформой. В простейшем случае политическая координата x всего одна, а функция распределения на ней позиций избирателей $F(x)$ («левые – правые») определяется в опросах общественного мнения. Тогда перспективы кандидатов соответствуют задаче о торговле мороженым на пляже (см. разд. 7.5 главы 7): максимальные шансы имеет платформа, наиболее близкая к медиане распределения (рис. 9.44).

В рамках *медианной модели* умеренность политических деклараций главных конкурентов в ходе избирательной кампании объясняется «борьбой за центр». Полному сближению их декларируемых платформ препятствует здравый смысл: у кандидатов и партий, политически неразличимых в глазах избирателей, резко возрастают расходы на самоидентификацию по другим параметрам (патриотизм, семейные ценности, отношение к массовой культуре, группировкам в составе общества и т.п.). Это не только свидетельствует о недостаточности одномерной модели для описания избирательных кампаний,

проводимых в форме многодневного массового шоу, но и показывает, что четко обозначать свою политическую платформу (т.е. говорить правду) – проигрышная тактика для их участников.

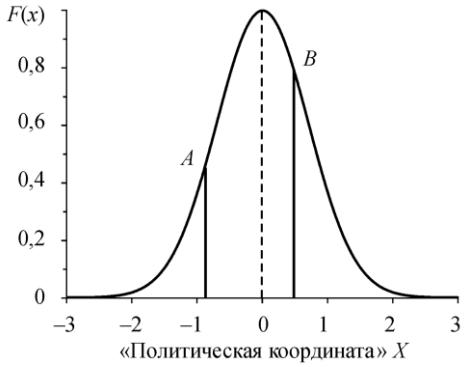


Рисунок 9.44. Медианная модель политической конкуренции. Побеждает кандидат *B*

В *многомерной модели* предвыборной конкуренции, также называемой «пространственной моделью» (англ. *spatial model*) базисными векторами политического пространства служат основные темы предвыборных дискуссий: безработица, зарплаты, налоги, отношение кандидата к основным группам населения, внешняя политика и так далее. Функция полезности *k*-го кандидата для *i*-го избирателя имеет вид

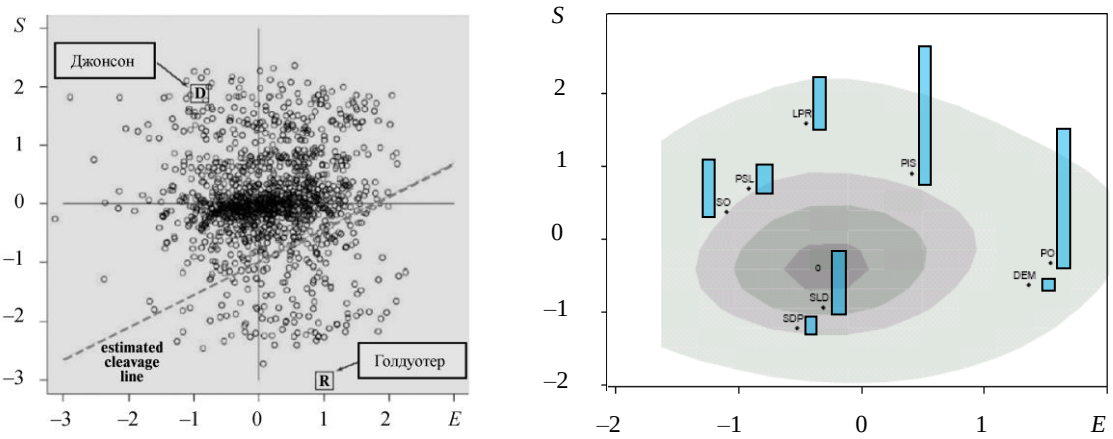
$$u_{ik} = -\sum_{j=1}^{n} s_{ij}\left(x_j^{(i)} - X_j^{(k)}\right)^2 + \xi_k + v_k \qquad (9.34)$$

Здесь $x_j^{(i)}$ – позиция *i*-го избирателя по *j*-й теме дискуссии, $X_j^{(k)}$ позиция (платформа) *k*-го кандидата по этому вопросу, $s_{ij} \in [0, 1]$ – степень заинтересованности избирателя *j*-й темой и суммирование проводится по всем темам дискуссий. В уравнение (9.34) могут входить случайный терм ξ_k («шум») и показатель v_k безотчетного *сродства* (англ. *valency*) избирателей к данной партии или кандидату.

Распределение позиций избирателей $F(x_1, \ldots, x_n)$ устанавливается по опросам общественного мнения, платформы кандидатов – по экспертным оценкам. То и другое обычно проектируют на плоскость двух агрегированных переменных: экономической *E* и социальной *S* (рис. 9.45). При нулевом шуме и отсутствии *сродства* избиратели могут всегда голосовать за кандидата с наивысшей полезностью (детерминистская модель) либо отдавать голоса с вероятностью $P(u_{ik})$, пропорциональной полезности кандидата, например

$$P(u_{ik}) = \frac{u_{ik}}{\sum u_{ij}},$$

где в знаменателе – сумма полезностей всех кандидатов (вероятностная модель). Модели, учитывающие шум, называются стохастическими. Поиск максимумов функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ может проводиться методом Монте-Карло (гл. 3, разд. 3.4); при этом «температура» отражает неопределенность в стратегиях партий и избирателей.



(а) (б)

Рисунок 9.45. (а) Позиции избирателей и кандидатов на президентских выборах в США 1965 г. (б) Результаты выборов в сейм Польши 2005 г., высота столбиков пропорциональна доле полученных голосов: DEM – Partija Demokeaticzna+Demokraci Polski, 2,5 %; LPR — Liga Polskich Rodzin, 8 %; PiS — Prawo i Sprawedliwosč, 27 %; PO — Platforma Obywatelska, 24,1 %; PSL — Polskie Stronnictwo Ludowo, 7 %; SDP — Socjaldemokracja Polska, 3,9 %; SLD — Sojuz Lewicy Demokratycznej, 11,3 %; SO — Samoobrona Rzeczpospolitej Polski, 11,4 % (см[15])

Многомерная модель политической конкуренции имеет много общего с математическими моделями семантики (см. разд. 9.2.1). Однако место семантического пространства – не вполне определенного, но безусловно существующего, сформированного поколениями носителей языка – в ней занимает весьма лабильное пространство предвыборных дискуссий, формируемое прежде всего средствами массовой информации. Возможно, поэтому предсказания модели могут не совпадать с реальными результатами выборов. Так, фактические результаты выборов в сейм Польши 2005 г. плохо согласуются с проведенным для них многомерным анализом (рис. 9.45 б). В распределении предпочтений избирателей, показанных оттенками серого цвета, из пяти примерно равноудаленных от центра партий партия «Право и справедливость» (PiS) вместе с еще более радикальной «Гражданской платформой» (PO), находившейся за пределами выделенной области, получили соответственно 27% и 24% голосов и заняли почти 2/3 мест в сейме, тогда как более центристская социал-демократическая партия (SDP, 3.9%) туда вообще не попала. При весьма физикалистском виде многомерной модели конкуренции, поправки $\{v_k\}$ на «сродство» в формуле (9.34) показывают ее ограниченную пригодность для прогнозирования результатов выборов. По моделям политической конкуренции имеется ряд обзорных статей[26]. Некоторые другие модели обсуждаются в обзоре[15].

Большинство политологических работ основаны на понятии равновесия, заимствованного из неоклассических моделей экономики. В стандартном варианте они предполагают полное знание избирателями состояния всей системы и лишь эгоистические мотивы участия в выборах: голосование за наиболее выгодного кандидата. При включении

в функцию полезности (9.34) издержек избирателей (личного времени, потраченного на голосование, стоимости бензина для проезда…) и учете снижения их заинтересованности в результатах массовых выборов, где вес одного голоса пренебрежимо мал, модели предсказывают невыгодность и, следовательно, *невозможность* массового голосования. В политологии такое расхождение практики с теорией называется не неудовлетворительной теорией, а *парадоксом выборов*.

Во второй половине XX века были предложены и другие модели избирательной конкуренции, а также инструменты политического прогнозирования. Одним из альтернативных средств прогноза служат «рынки политического анализа» или «биржи политических прогнозов». В этом особом типе тотализатора ставки, сделанные на наступление того или иного политического события (например, на определенный исход выборов), вплоть до времени его наступления могут покупаться или перепродаваться игроками как фьючерсные контракты на бирже. Мерой вероятности события служит биржевая цена его прогноза.

«Биржа прогнозов» основана на гипотезе (которую лучше назвать верой) о том, что рынок – идеальный инструмент коллективной обработки информации. Эта гипотеза является важнейшей для неоклассических экономических конструкций и служит фундаментом идеологии капитализма. В последнее десятилетие биржевые прогнозы политических событий перешли из научной периодики в СМИ и рекламируются на коммерческих интернет-ресурсах.

При всех недостатках конкурентных моделей политологии они логически связны и основаны на проверяемых постулатах, тогда как биржа – непрозрачный инструмент, позволяющий крупным игрокам устанавливать «ценовой прогноз» заданных результатов (см. разд. 8.6.3 предыдущей главы). Экспериментальный «рынок выборов» при Iowa State University предсказывал победу Джорджа Буша на президентских выборах 2000 г. в США вопреки большинству опросов, но в согласии с конечным результатом (см. следующий раздел). Поскольку политологические теории смыкаются с политической агитацией и другими методами формирования общественного мнения, в этой области особенно много идеологизированных работ. Обзор истории «рынка прогнозов» и его нынешнего состояния можно найти в недавней книге[*], где представлены все основные политологические и идеологические схемы западной науки, касающиеся избирательных процессов.

Методы обработки данных, принятые в физике, проникают в общественные дисциплины. Показатели экономических и политических систем разных стран в современной политологии часто анализируют методами математической статистики (см. [1] в списке рекомендуемой литературы). На таком анализе основан, в частности, *Политический атлас современности* (М.: МГИМО-Университет, 2007), созданный авторским коллективом МГИМО под руководством проф. А.Ю. Мельвиля. В этом атласе и дополняющей его книге ([6] в том же списке) были обработаны численные *индексы политического развития* в странах мира, составляемые агентствами при ООН и других

[*] A. Graefe, *Political markets*, в кн. K. Arzheimer, J. Evans, M.S. Lewis-Beck, *The SAGE handbook of electoral behavior*, SAGE Publications, 2017.

международных структурах. Хотя существенная часть таких индексов призвана обосновать доминирование богатых стран, авторы отвлеклись от их идеологической составляющей и провели статистический анализ, который дал нетривиальные результаты. В этом анализе эмпирические показатели, характеризующие политическую систему («число лет демократической традиции», «включенность граждан в избирательный процесс», «доля женщин в нижней палате парламента» и др.), степень независимости государства (доля внешних заимствований в государственном долге, наличие иностранных военных контингентов на территории страны и др.) и иные стратегические факторы, собранные для 192 стран мира, были агрегированы в пять индексов: *государственности, внешних и внутренних угроз, институциональных основ демократии, качества жизни* и *потенциала международного влияния*. Методом главных компонент (см. разд. 9.2.1) эти индексы были сведены в четыре линейные комбинации, объясняющие 100% их дисперсии (табл. 9.5).

Таблица 9.5

Главные компоненты индексов состояния стран мира

компонент	доля дисперсии	описание
X_1	55.4%	национальное выживание и его качество
X_2	26.4%	государственный базис демократии
X_3	11.2%	«человеческая цена» государственности
X_4	7.0%	международное влияние

Несколько расплывчатое содержание факторов $\{X_i\}$ отражает соединение в них индексов, традиционно рассматриваемых как противоположные: суверенитета и качества жизни (X_1), развития государственных и демократических институтов (X_2), государственности и личных ценностей (X_3). Распределение стран мира по полученным факторам позволило создать «четырехмерную» картину мировой политической системы по состоянию в начале XXI века. Так, в координатах X_1 («суверенитет») и X_2 («государство vs. демократия») большинство стран мира находятся вблизи границы эллипса (Рис. 9.46), что следует из нормировки главных компонент

$$\sum X_i^2 = 1$$

и того, что X_1 и X_2 вместе объясняют 81.8% дисперсии. Это значит, что для большинства народов мира суверенитет – не абсолютная ценность, а фактор, взаимозаменяемый с качеством жизни и государственного устройства. В графике на рис. 9.46 можно выделить «левый полюс» благополучных стран и правую «дугу неблагополучия», которая объединяет наиболее бедные государства[*]. С другой стороны, для группы самых влиятельных стран, включающей США, Германию, Японию, Китай, Индию и Россию, наиболее содержательны значения X_4 (международное влияние), тогда как параметры X_1 и

[*]Присутствие в «полюсе неблагополучия» Индонезии, Азербайджана и Грузии, имеющих не самые низкие мировые показатели ВНП (на 2020-21 г. соответственно 3920, 5380 и 4250 долл. США *per capita*), помимо несовершенства модели, можно объяснить как политизированностью обработанных индексов, так и инерционностью международных оценок. Так, после 2003 г. руководство Азербайджана успешно использовало находящиеся на его территории стратегические запасы нефти СССР для подъема экономики и повышения уровня жизни населения.

X_2 для большинства из них объясняют менее 40% дисперсии пяти «стратегических» индексов. Мы видим, что математические подходы в современной политологии распространяются не только на построение моделей, но и на обработку данных.

Рисунок 9.46. Распределение стран мира по факторам «качество национального выживания» (X_1) и «государственный базис демократии» (X_2; см. [6])

Законы Бенфорда

Честное проведение выборов подразумевает контроль за подсчетом голосов и проверку адекватности его результатов. Помимо стандартных организационных мер и присутствия иностранных наблюдателей на избирательных участках, для этого используются методы статистики и статистические закономерности. Так, для больших выборок из разнородных численных данных («выборок из выборок») справедливы *законы Бенфорда*: логарифмическое падение частотности первой значащей цифры d1 в больших числовых массивах при увеличении этой цифры от 1 до 9 (*первый закон Бенфорда*) и аналогичное, но более медленное снижение частотности второй значащей цифры d2 (*второй закон Бенфорда*). В десятичных логарифмах

(9.35) $$P(d1) = \lg\left(1 + 1/d1\right)$$

(9.35 а) $$P(d2) = \sum_{d1=1}^{9} \lg\left(1 + 1/[d1d2]\right),$$

где $P(d1)$ и $P(d2)$ – соответственно доли чисел с первой цифрой $d1 = 1, 2, \ldots, 9$ (рис. 9.47 а) и чисел со второй цифрой $d2 = 0, 1, 2, \ldots, 9$ в общем объеме данных, а символом $[d1d2]$ обозначено составленное из этих цифр двузначное число. Частотности последующих цифр di с $i > 2$ близки к равномерному распределению.

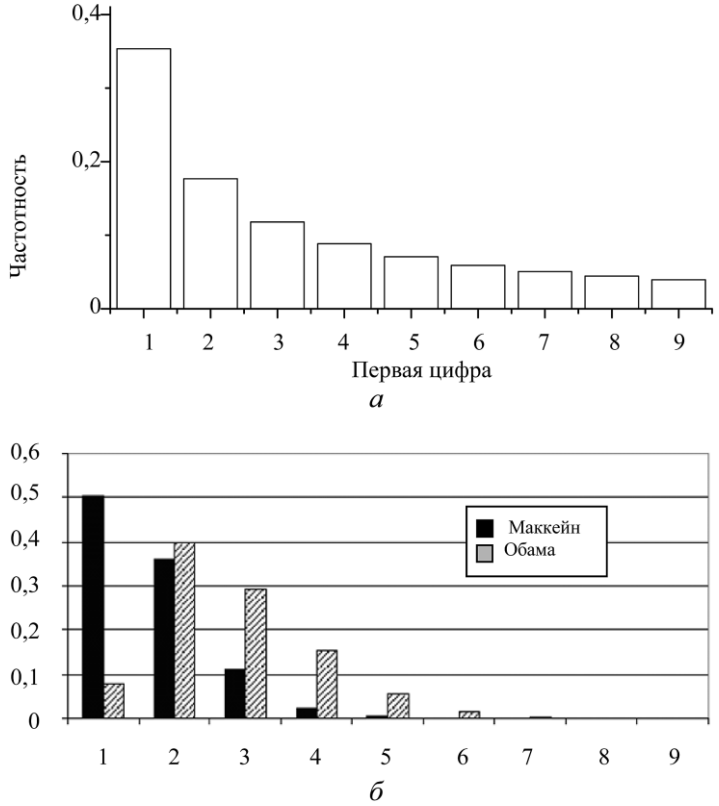


Рисунок 9.47. (а) Распределение Бенфорда (9.36). (б) Распределение первой цифры в числе голосов, поданных за кандидатов в президенты США (выборы 2008 г.) на избирательных участках округа Cuyahoga в штате Огайо (см. обзор[15])

Неравноценность первых цифр в больших разнородных выборках n-значных чисел с постоянным n на качественном уровне объясняется их разной «емкостью» в передаче информации. Так, между числами 1000 и 2000 выражаемая ими величина возрастает вдвое, а между 8000 и 9000 – лишь на 12.5%.

Первый закон Бенфорда (9.35), как эмпирическое правило, известен с XIX века*, однако строгое математическое доказательство соотношений (9.35) и (9.35 а) было опубликовано лишь в 1995 году (см.[15]). Законы Бенфорда справедливы для массивов численных данных с равномерным распределением логарифма и не соблюдаются в наборах случайных чисел, подчиняющихся определенному распределению – например, нормальному.

Отклонение распределений первой и второй цифры от законов Бенфорда в финансовой отчетности либо в числе поданных голосов на выборах по территориальным единицам может указывать на фальсификацию данных. При проверке результатов голосования распространен тест по второй цифре, распределение которой труднее подделать. Однако

*Поводом для его открытия послужило наблюдение: края страниц в логарифмических таблицах, которые использовались для объемных «ручных» расчетов, сильнее засалены с той стороны, где расположены мантиссы (дробные части десятичного логарифма) чисел, начинающихся с единицы и двойки.

закон Бенфорда не универсален, а несовпадение распределений может быть вызвано другими причинами. Так, малая доля чисел голосов, поданных на избирательных участках за Барака Обаму на президентских выборах 2008 г. в США, с первой цифрой 1 (рис. 9.47 б), вероятно, объясняется «срезанным» распределением: в отличие от его соперника Джона Маккейна, за Обаму на большинстве участков проголосовали свыше 2000 избирателей. Зависимость результатов теста от конкретных условий хорошо иллюстрирует трудности объективного контроля избирательной кампании.

Статистические тесты широко применяются в анализе адекватности выборов и выявлении фальсификаций – в том числе как средство политической борьбы. Неоднородность предпочтений и традиций в больших многонациональных государствах приводит к региональным корреляциям поведения избирателей, которые выражаются в неоднородности распределений (рис. 9.48; см. также рис. 9.2). Стандартные методы статистической обработки (например, постулированное нормальное распределение) для таких выборок могут дать искажать результаты, что нередко используется в борьбе с политическими оппонентами.

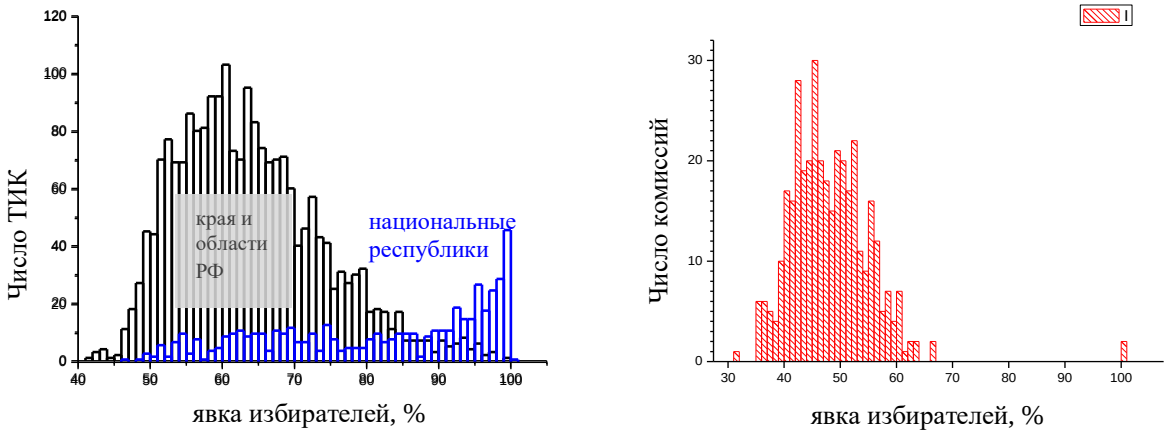


Рисунок 9.48. (а) Распределение 2745 территориальных избирательных комиссий (ТИК) РФ по явке избирателей на выборах в Государственную Думу 2007 г. (http://www.cikrf.ru/banners/elect_duma/protocol_data/index.html). (б) Распределение явки избирателей в 375 региональных комиссиях на выборах президента Польши 2005 г. (www.wybory2005.pkw.gov.pl)

9.4.4. Политические технологии

На дурака не нужен нож,
Ему с три короба наврешь –
И делай с ним что хошь…
Булат Окуджава

Сегодня на Западе для среднего университетского профессора совершенно недоступен тот политический язык, которым владел грамотный рабочий начала XX века
С.Г. Кара-Мурза, «Манипуляция сознанием»

Для населения страны главным преимуществом политической системы объективно является ее *устойчивость к возмущениям*, понимаемым в математическом смысле – как случайные изменения параметров системы. Политическая нестабильность всегда

сопровождается увеличением числа погибших в столкновениях между враждующими группировками и ростом преступности – см. выше пример «либерализации» как уменьшения числа полицейских в рамках модели Эпштейна. Интересы правящих групп каждой страны в этом смысле совпадают с интересами большинства населения, и сохранение действующей власти – одна из главных практических задач, успешно решаемых во всех политических системах.

Проникновение методов физики в науки об обществе не могло не отразиться на прикладном аспекте междисциплинарных моделей, по своей значимости ныне сравнимых с ролью ядерной физики в середине XX века. Примеры использования методов, перенесенных из физики, в управлении общественными структурами упоминались во всех главах этой книги. Мы не станем рассматривать здесь эти вопросы в объеме, пропорциональном масштабу их практического применения – приведем лишь несколько характерных иллюстраций.

Под политическими технологиями будем понимать средства манипулирования общественным мнением и социальными процессами в интересах узких групп – обычно входящих в государственную власть или (и) доминирующих в мировой политике. Военные действия, как наиболее радикальный путь к доминированию, будут обсуждаться в следующем разделе. В мирное время манипулятивные технологии в большинстве стран нацелены на «почти ненасильственное» завоевание либо удержание политической власти без формального нарушения законов – прежде всего процедур выборов, преобладающих в современном мире. Фальсификация результатов голосования обсуждаться не будет: мы рассмотрим более тонкие инструменты манипулирования.

Как отмечалось выше, избирательные и парламентские механизмы в настоящее время направлены не столько на оптимизацию функционирования государства, сколько на обеспечение его устойчивости – прежде всего через традиционные (администрация, СМИ) и новые (Интернет) средства воздействия на общественное сознание. Целью современных выборов, в которых могут участвовать все взрослые граждане страны, признанные медициной вменяемыми, не является создание работоспособного *комитета по делам буржуазии* (© К. Маркс, Ф. Энгельс, *Манифест коммунистической партии*, 1848 г.): они легитимизируют на установленный срок в 4 – 5 лет действующую систему власти, которая сама подбирает кандидатуры для голосования. Разные государства решают эту задачу разными способами; мы рассмотрим только демократические процедуры. Но поскольку нынешняя западная политическая система складывалась в первой половине и середине XX века в условиях глобальной нестабильности и кризисов, в ней сохраняются возможности кардинальной смены правительств и проводимой ими политики – с соответствующим приоритетом для политтехнологий.

Простота управления «атомизированным» электоратом, где каждый субъект преследует лишь узкие корыстные интересы, вполне осознавалась уже в середине XX века. В *парадоксе Малишевского* (одном из многочисленных «парадоксов выборов»)[*] рассматривается система из трех агентов *A*, *B* и *C*, располагающих по 1000 у.е. денег. Предложение «отобрать у агента *X* 1000 у.е. и выдать по 1 у.е. двум остальным агентам»

[*]А.В. Малишевский, *Качественные модели в теории сложных систем*, М.: Наука, Физматлит, 1998.

среди *homo economicus* принимается квалифицированным большинством голосов: два агента против одного. Три последовательных тура демократического голосования ($X = A, B$ и затем C) приводят агентов в состояние, невыгодное всем голосовавшим. В этом случае предпочтения агентов оказываются нетранзитивными: в каждом туре, по коллективному выбору,

$$(1000,\ 1000,\ 1000) \prec (0,\ 1001,\ 1001) \prec (1,\ 1,\ 1002) \prec (2,\ 2,\ 2),$$

но несомненно $(2,\ 2,\ 2) \prec\prec (1000,\ 1000,\ 1000)$. Алгоритм обобщается на любое число эгоистических агентов $N > 2$. В более практическом случае некий *управляющий центр* корректирует результат случайного перераспределения денег в группе из N агентов в сторону его выравнивания и при одобрении большинством голосов оставляет себе «за коррекцию» небольшой процент от общей суммы – постепенно аккумулируя почти все средства группы.

Политические манипуляции, не сводящиеся к прямой подмене результатов голосования, практически всегда используют неоднородность электората. Довольно невинный и при этом вполне действенный способ сохранения власти состоит в том, чтобы вывести на избирательные участки «молчаливое большинство»: инертных консервативных граждан, которые стараются уклониться от голосования, но при его неизбежности всегда поддерживают существующий порядок. С другой стороны, 1-2% «вольнодумного меньшинства», критически настроенного к любой власти, независимо от содержания своих взглядов образуют ядро оппозиции, которая необходима для жизнеспособного государства – и мнения этой части общества, многократно усиленные СМИ, используются для разрушения государств в «цветных революциях»[27]. Незатейливость агитации, вовлекающей в политическую жизнь «социальный порох» в лице молодежи и несовершеннолетних[*], определенно восходит к работам Ле Бона и других авторов XIX века, создавших первые модели *психологии толпы* (см. [3] в списке рекомендуемой литературы).

Хотя глобализация мировой экономики еще не достигла декларируемых масштабов (см. рис. 8.38 в предыдущей главе), она более всего затронула СМИ и массовые развлечения как инструменты, формирующие сознание народа. «Мировые» информационные агентства и масс-медиа почти всех стран находятся в частной собственности, облегчающей анонимное внешнее управление. Инициирование протестов в ряде стран мира, начиная с *бархатных революций* 1989 г. в Восточной Европе, где главную роль играет «независимая пресса», основано на выводе части населения страны из негласного общественного договора с действующей властью.

Социальная иерархия и неравномерное распределение благосостояния порождают в любом обществе латентное недовольство, которое правительство, как коллективный агент, компенсирует созданием у граждан страны *положительного самоощущения*. Средствами его достижения служат денежные пособия, доступ к общественным фондам, крупные национальные проекты, массовая культура, спортивные зрелища, образ изобилия в

[*] Хрестоматийный пример – *хунвейбины*, силами которых Мао Цзедун уничтожил своих политических противников в ходе «культурной революции» 1964-66 гг. в КНР; они набирались преимущественно из старшеклассников и студентов. Более близкий по времени пример – карантинная изоляция наиболее опытной и здравомыслящей части населений всех стран мира в возрасте «65+» во время пандемии Covid-19 2020-21 гг.

супермаркетах и торгово-развлекательных центрах (см. выше), а также иные общественно одобряемые явления, ассоциирующиеся с действиями властей. Неравномерное и несправедливое распределение денег в обществе частично уравновешивается ограниченным обзором «социальной дистанции», при котором люди сравнивают свой уровень жизни с уровнем жизни других прежде всего внутри своего социального слоя; тогда чужим богатством недовольны в основном богатые (рис. 9.49). Простым, но верным средством разрушения общественного согласия, испытанным в СССР во времена перестройки, служит *информационная революция*: в ее ходе всё общество информируют о жизни богатого слоя, на который большинство людей прежде не обращало внимания, и недовольным становится все население страны (жирная стрелка ΔX на рис. 9.49).

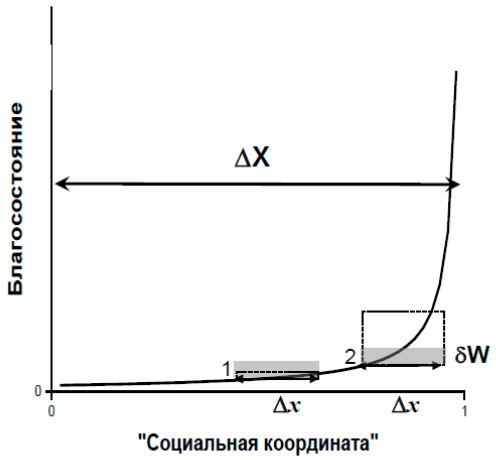


Рисунок 9.49. Стилизованное распределение богатства W по «социальной координате». При одинаковой глубине обзора Δ*x* << 1 видимое неравенство (прямоугольник) в точке 1 меньше порога безразличия δW (серый фон), а в точке 2 больше порога. Жирная стрелка: ΔX = 1

Как уже обсуждалось в этой главе, увеличению социальной нестабильности, помимо контролируемых извне СМИ, способствует агитация в Интернет и социальных сетях. Так называемые «информационные пузыри», где пользователям в первую очередь предлагают часто запрашиваемые ими темы (обычная практика Яндекса и других информационных систем) и «эхо-камеры», достигающие единогласия по политическим вопросам (см. разд. 9.3.2), создают основу для манипулируемых протестных сообществ. Пороговые модели *управления толпой* (разд. 9.3.5) в последнее десятилетие адаптируются для актуальных практических задач противоборства в информационном пространстве и на городских улицах[28].

Современные избирательные системы, действующие в большинство стран, сами по себе создают большие возможности манипулирования для скрытых акторов, включая ТНК, которые способны конструировать нестабильные правительственные коалиции и управлять их деятельностью (см. выше). В последние десятилетия кризисные явления в глобальной политической системе сопровождаются серьезными изменением электоральной динамики. Начиная с выборов президента США 2000 г., на которых Альфред Гор по результатам опросов опережал Джорджа Буша, но уступил ему по числу выборщиков в весьма архаичной двухступенчатой системе голосования, в ряде западных государств наблюдается

феномен *разделения голосов пополам* (президентские выборах в США 2016 и 2020 гг., некоторые другие избирательные кампании). Разделение воспроизводилось в расчетных моделях общественного мнения (разд. 9.3.2) введением «неуступчивых» агентов (так, в *модели избирателя* на рис. 9.27 а один агент с неизменным «спином» индуцирует его на всю решетку), «неуступчивого меньшинства», «протестного голосования» (англ. contrarians) и ряде других*. В таких упрощенные моделях (см. обзор[15]) не отражаются глубинные изменения политических систем мира, происходящие в XXI веке.

В книге «Происхождение и природа общественного мнения» (1992 г.)[29] американский политолог Джон Цаллер, в некотором противоречии с декларациями о демократии, разделил американский электорат на категории, различающиеся по степени осознанности своих предпочтений и готовности их реализовать на избирательном участке. По мнению автора, независимую политическую позицию имеют 1-2% взрослого населения США – наиболее образованные и богатые. Все остальные избиратели в той или иной степени (возрастающей по мере уменьшения дохода) голосуют под воздействием агитации. С этим академическим мнением согласуются расходы на кампании по выборам президента США, с поправкой на инфляцию возросшие в шесть раз с 1984 по 2008 г. Их увеличение сопровождалось сближением долей голосов, поданных за конкурирующих кандидатов с начала 1990-х годов (рис. 9.50). При высокой интенсивности агитации, примерно одинаковой за обоих кандидатов, в длительной (более полугода) президентской кампании многие избиратели забывают свои первоначальные предпочтения и отдают голоса под воздействием баланса внешних факторов. Эта сконструированная неопределенность, как и сама возможность проводить дорогостоящий выборный марафон, опирается на высокий жизненный уровень населения и отсутствие массовых социальных проблем. Развитие кризиса способно серьезно изменить избирательную практику и, шире, стратегию государственного управления даже в самых благополучных странах.

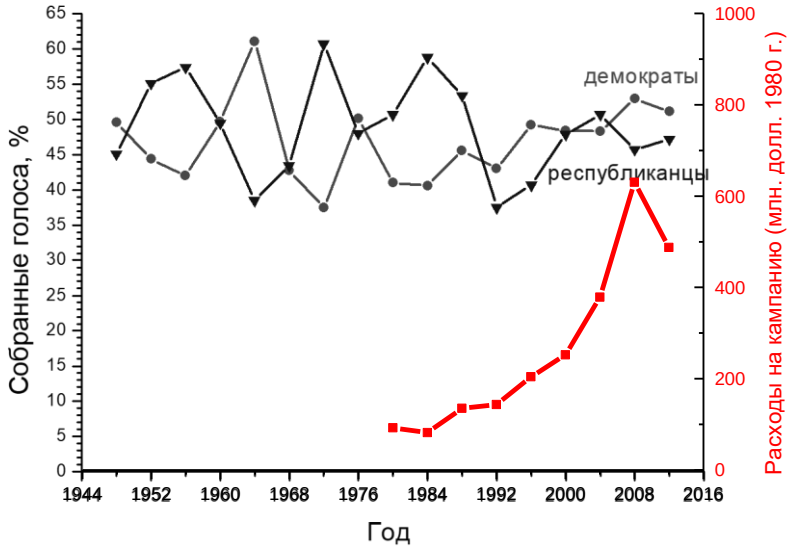


Рисунок 9.50. Результаты выборов президента США в 1948 – 2012 гг. Красный цвет – расходы на избирательную кампанию в млн. долл. 1980 года (U.S. Federal Election Commission, www.fec.gov)

*S. Galam, *From 2000 Bush-Gore to 2006 Italian elections: voting at fifty-fifty and the contrarian effect*, Qual. Quan. J., 2007, **41** (4), 579.

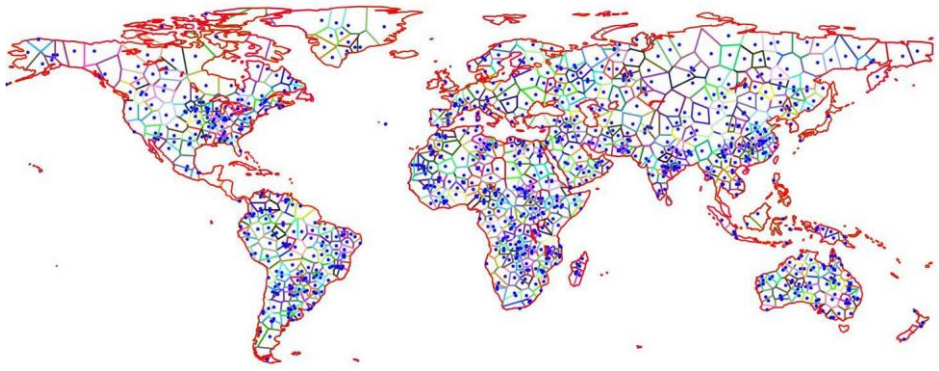
Литературе к разделу 9.4

[24] В.И. Вольский, *Процедуры голосования в малых группах с древнейших времен до начала XX века*. М.: Изд. дом ВШЭ, 2014.
[25] Ф.Т. Алескеров, А.С. Кравченко, *Распределение влияния в Государственных думах Российской империи*, Полития, 2008, **3** (50), 154.
[26] А.В. Захаров *Модели политической конкуренции: обзор литературы*, Экономика и математические методы, 2009, **45** (1), 110.
[27] А.Б. Ананченко и соавт., *Что надо знать о цветных революциях*, 2018, М.: МГПУ.
[28] В.В. Бреер, Д.А. Новиков, А.Д. Рогаткин, *Управление толпой: математические модели порогового коллективного поведения.* – М.: ЛЕНАНД, 2016.
[29] Дж. Цаллер, *Происхождение и природа общественного мнения*, Институт фонда «Общественное мнение», М.: 2003,

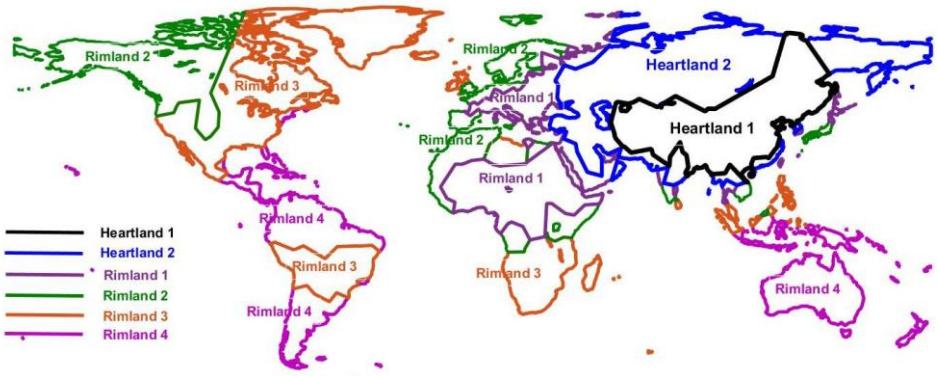
9.5. Моделирование конфликтов и войн

Принципиально антагонистический, экспансионистский характер межгосударственных отношений с неотделимыми от них войнами стал предметом научного исследования уже в античности (Платон, Аристотель, Фукидид и другие авторы). В книге Томаса Гоббса «Левиафан, или материя, форма и власть государства церковного и гражданского» (1651 г.), фундаментальной для современной политологии, межчеловеческая агрессия (по определению Гоббса, «война каждого против всех») выводилась, в современных терминах, из борьбы людей за ограниченные ресурсы. Для сохранения жизни и имущества абстрактный свободный человек, по Гоббсу, в рамках объективно возникающего общественного договора (англ. *covenant*) передает часть своих прав и свобод государству как могущественной надчеловеческой структуре-Левиафану – вероятно, делегируя вместе с ними существенную долю своей агрессивности. С XIX века анализ конфликтов и войн стал одним из складывающихся направлений общественных наук. Экспансия крупных государств обосновывалась как традиционными экономическими аргументами (борьбой за природные ресурсы, рынки сбыта, выход к морю и иным торговым путям), так и фундаментальными категориями *жизненного пространства* (нем. *Lebensraum*) и национального духа, реализуемого в вооруженных столкновениях (см. [3] в списке рекомендуемой литературы).

В XX веке экономическая и политическая экспансия крупных государств была систематизирована на эмпирическом уровне в рамках *геополитики* («географической политики») и *цивилизационного подхода* (Фридрих Ратцель, Карл Хаусхофер, Николай Данилевский, Сэмюэль Хантингтон и другие авторы). Разделение народов и, шире, цивилизаций на *приморские* (*Rimland*) и континентальные *срединные* (*Hearthland*), изначально возникшее в британской политологии, обосновывало борьбу планетарно-географическими факторами. Хотя геополитические тексты, превозносящие собственную гуманную цивилизацию в противовес враждебным ей антигуманным, нередко отличаются крайней ангажированностью даже на фоне официальной политологии, в них косвенно отражаются объективные причины антагонизма в международных отношениях.



(а)



(б)

Рисунок 9.51. (а) Разбиение земной суши на области Вороного-Дирихле вокруг 1000 точек, «засеянных» случайным образом с вероятностью, пропорциональной емкости среды обитания. (б) Результат расчетного агрегирования областей (К.Э. Плохотников, *Математическая модель геополитики*, Мировая политика, 2017. № 3, 23)

Современное состояние «математической геополитики», примыкающей к моделированию мировой экономики, можно найти в работах К.Э. Плохотникова вместе с рядом оригинальных идей автора (рис. 9.51). Разделение человечества на стратегические регионы с разным хозяйственным укладом и, соответственно, разным менталитетом населения воспроизводится в имитационных моделях, учитывающих климатические и логистические параметры в расселении людей по Земле, как *емкость среды обитания*. Исходное разбиение населенной части суши на *области Вороного-Дирихле*[*] вокруг случайно заданных точек «городов» (рис. 9.51 а) вместе с эмпирическим балансом движения товаров между ними (наиболее выгодного по морю) сопровождается перемещением центров областей к прибрежной полосе и укрупнением регионов с образованием континентального «Хартленда» на территории Евразии (рис. 9.51 б). Такие результаты моделирования, как отнесение к «Римленду» всей территории Южной и Северной Америк, Австралии и центральной части Африки с пустыней Сахара, можно объяснить несовершенством параметризации. Но объединение произвольно заданных экономических ячеек при компьютерном моделировании с учетом географических факторов в агрегаты, воспроизводящие границы государств и регионов, является

[*]Этим термином, перенесенным из кристаллографии, обозначается окрестность «города» (в кристалле – узла решетки), все точки которой расположены ближе к данному узлу, чем к любым другим узлам. Области Вороного-Дирихле задают математически строгое разбиение пространства; они используются в междисциплинарной физике (см. обзор[15]).

расчетным результатом, который был получен в ряде междисциплинарных работ (см. следующий раздел).

Войны как особая форма политической динамики и их связь с другими общественными явлениями рассматривались учеными во всех земных регионах. Среди них (возможно, как дань моде) в настоящее время чаще всего упоминаются военный стратег древнего Китая Сунь Цзы (предположительно IV в. до н.э.) и арабский историк и философ Ибн Хальдун (1332-1406 н.э.). В трактатах Сунь Цзы[*] впервые среди сохранившихся источников рассматриваются вопросы стратегии и тактики на войне как предмет планирования и управления. Ибн Хальдун связывал жизнеспособность государства с «народным духом», или *асабией* – в современных терминах коллективной солидарностью и способностью народа переносить военные лишения. Угасание народного духа в благополучные периоды далее порождает кризис, который приводит либо к гибели государства, либо к возрождению асабии в новом «военном» поколении.[**] (Сунь Цзы особо рекомендовал насаждать гедонизм в стане врага для ослабления его боеспособности). Во всех случаях, включая античные источники, научный анализ представлял войну не катастрофой, нарушающей законы и правила мирной жизни, а естественным историческим процессом с собственными обычаями и законами.

В европейской военной науке связь войн, как *продолжения политики другими, насильственными средствами*, с общей политикой и экономикой государств вместе с многочисленными наблюдениями о тактике, стратегии, военной психологии, «тумане войны» и др., вплоть до «игрового» характера военных действий (см. эпиграф к гл. 7) в XIX веке впервые сформулировал Карл Клаузевиц.[***] «Встраивание» войн в общий контекст межгосударственных отношений на практике осуществлялось со времени возникновения государств, несмотря на миролюбивую дипломатическую риторику. В политологии XX века его отразила, в частности, *теория торга* Томаса Шеллинга (1960 г.). В рамках этой теории (в терминах естественных наук – скорее концепции) противостояние государств рассматривалось как торг (англ. bargaining) за ограниченные или неделимые ресурсы в дестабилизирующей обстановке (неполная искаженная информация, низкий уровень доверия), который провоцирует боевые действия, продолжается в их ходе и завершается сделкой, т.е. заключением мира[****]. Вооруженное противостояние США и СССР в период «холодной войны» рассматривалось Шеллингом в рамках теории игр как равновесие Нэша, не совпадающее с оптимумом Парето (взаимным разоружением) и способное привести к обмену «упреждающими» ядерными ударами (*ловушке Гоббса*)[*****].

В этом разделе мы будем считать эмпирическим фактом межгосударственный антагонизм, при изменении баланса сил порождающий войны. Здесь будут кратко рассмотрены некоторые математические и компьютерные модели военных действий вместе с родственными им идеями междисциплинарной физики. Общую интерпретацию военных

---

[*] Сунь Цзы «Искусство войны», М.: АСТ, 2019.

[**] *Асабия* по Ибн Хальдуну близка к *пассионарности* в теории этногенеза Л.Н. Гумилева (1912-1992), которая будет обсуждаться в следующем разделе.

[***] К. Клаузевиц, *О войне*, М.: Госвоениздат, 1934: переиздание Эксмо 2021.

[****] T.C. Shelling, *The strategy of conflict (revised edition)*, Harward Univ. Press, 1980.

[*****] Сторонниками «превентивного» применения атомного оружия против СССР были, в частности, Нэш, фон Нейман и ряд других известных американских ученых.

конфликтов мы оставим до обсуждения распределенного интеллекта социальных систем в части III.

9.5.1. Количественные данные о конфликтах и войнах

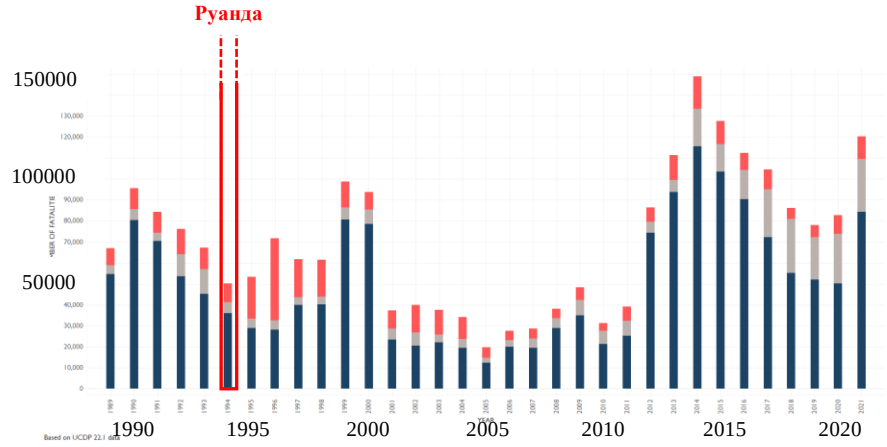


Рисунок 9.52. Число погибших в межгосударственных войнах (черный цвет), внутренних конфликтах (бледно-серый цвет) и репрессиях против гражданского населения (красный цвет) с 1989 по 2021 г. Для соблюдения масштаба не показаны жертвы геноцида в Руанде (1994 г., около 600 тыс. погибших). Источник: USDP (https://www.pcr.uu.se/research/ucdp)

Данные о военных конфликтах и вовлеченных в них странах, включая продолжительность военных действий, число жертв, военные расходы и мн. др. доступны на интернет-ресурсах: Correlates of War (CoW, США, военные конфликты с 1816 г по настоящее время)*, Uppsala Conflict Data Program / Peace Research Institute Oslo (UCDP, Швеция, с 1946 г. по настоящее время)**, The Armed Conflict Location & Event Data Project (ACLED, США) и ряде других. На достоверность содержащейся в них информации влияют как ее источники, так и конъюнктурные политические соображения – например, заставлявшие декларировать снижение числа войн с началом «эры глобализации» во второй половине 1990-х годов (см.[15]). В частности, этим можно объяснить отсутствие официальных данных о потерях в т. наз. *Африканской мировой войне* 1998-2002 гг. которая складывалась из 17 гражданских и межгосударственных войн, унесла от 3 до 4 млн. жизней (точное число неизвестно из-за отсутствия централизованной статистики в ряде затронутых государств) и почти не освещалась мировыми СМИ***. В XXI веке интенсивность военных конфликтов в мире достигла максимума в 2014-2015 году (более 50 войн, свыше 100 тыс. погибших) и, после некоторого снижения в 2018-2019 (70-80 тыс. погибших в год), с 2019 г. вновь стала увеличиваться (рис. 9.52).

Количественные соотношения в военных науках

Главным параметром, характеризующим силы противников в боевом столкновении, являются численности их войск *x* и *y* в момент времени *t*. В детерминистской модели боя,

* https://www.correlatesofwar.org.
** https://ucdp.uu.se
*** G. Prunier, *Africa's World War: Congo, the Rwanda genocide, and the making of continental catastrophe*, Oxford: 2009.

не учитывающей маневрирования (вывода подразделений и ввода резервов), потери сторон задаются дифференциальными *уравнениями Ланчестера* (1916)

(9.36) $$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{b}x^{2-m}y \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{b}{a}xy^{2-m},$$

где a и b – боевая эффективность сторон. Для древних войн, сводившихся к множественным столкновениям, $m = 1$*. При использовании тактики и огнестрельного оружия $m = 2$ и уравнения (9.36) приобретают вид

(9.36 а) $$\frac{dx}{dt} = -k_1 y, \qquad \frac{dy}{dt} = -k_2 x$$

(потери каждой стороны в единицу времени пропорциональны численности противника; k_1 и k_2 – *коэффициенты поражающей скорострельности*). Уравнения (9.36 а) впервые предложил в 1915 г. российский генерал М.П. Осипов[30]. Решение уравнений (9.36 а) задает поражающую силу войск

$$k_1[x_0^2 - x(t)^2] = k_2[y_0^2 - y(t)^2]$$

в *квадратичной модели боя*, где x_0 и y_0 – исходная численность сторон: для борьбы с противником, численно превосходящим вдвое, требуется вчетверо более эффективное оружие. Коэффициенты k_1 и k_2 могут изменяться в зависимости от текущей численности войск и других условий. Обзор дифференциальных уравнений ланчестерского типа, используемых в моделировании военных операций, представлен в книге Н.В. Митюкова (см. [7] в списке рекомендуемой литературы).

При планировании военных операций необходимо определить численность войск, которая с заданной вероятностью обеспечит победу. В простейшей оценке используют число выставляемых боевых единиц, предположительно имеющих одинаковую поражающую силу (см. игру полковника Блотто в разд. 7.4 главы 7). Более детальные оценки методами теории игр включают учет технических (качество и количество вооружений, умение ими владеть) и психологических факторов (в военных терминах *моральной упругости*). Среди последних главным количественным параметром является доля потерь убитыми и ранеными (в терминах первой половины XX века *кровавых потерь*), выше которого подразделение теряет боеспособность; в российской военной науке распространена ее оценка в 20 – 25%.

Для оценки вероятности победы в бою применяются эмпирические *функции противоборства* (англ. contest functions), перенесенные из теории игр с континуумом стратегий. В *модели Таллока*(см. формулу 7.28), также используемой в описании аукционов,

(9.37) $$P_x = \frac{x^\mu}{x^\mu + y^\nu}$$

* Уравнения (9.36) при $m = 1$ также описывают динамику взаимного истребления муравьев (N.J.L. Plowes, E.S. Adams, *An empirical test of Lanchester's square law: mortality during battles of the fire ant Solenopsis invicta* Proc. Roy. Soc. B, 2005, **272**, 1809.

выделяемые сторонами ресурсы обозначены x и y, P_x – вероятность выигрыша стороны x, μ, $\nu > 0$ – эмпирические параметры «решительности сторон». Полагая $\mu = \nu$, вероятности победы (9.37) можно преобразовать к виду

(9.37 а)
$$P_x = \frac{(\beta x)^\mu}{(\beta x)^\mu + y^\mu} = \frac{q^\mu}{q^\mu + 1},$$
$$P_y = \frac{y^\mu}{(\beta x)^\mu + y^\mu} = \frac{1}{q^\mu + 1},$$

где $q = x/y$ – соотношение сил сторон. Параметр β боевого превосходства стороны x над y (он может быть меньше 1) определяется как отношение предельных выдерживаемых потерь убитыми и ранеными $0 < \lambda_x < 1$, $0 < \lambda_y < 1$, умноженное на коэффициент технического превосходства α:

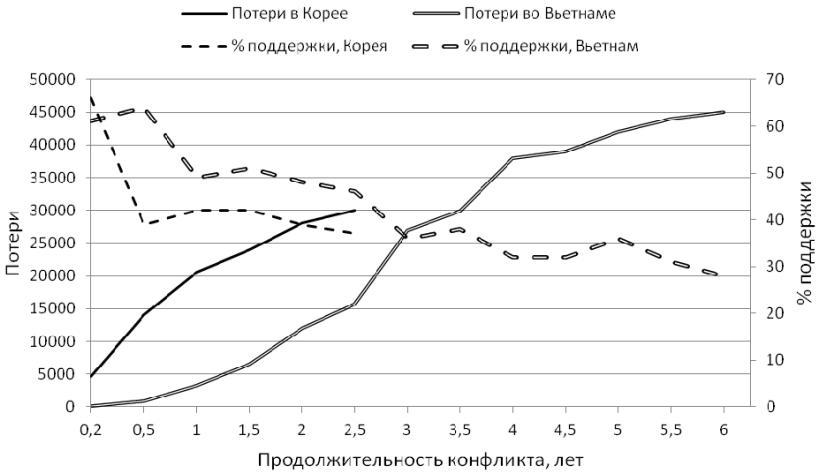
$$\beta = \frac{\lambda_x}{\lambda_y}\alpha.$$

Коэффициент α, в свою очередь, вычисляется из набора эмпирических параметров, характеризующих ведение боя противоборствующими сторонами.

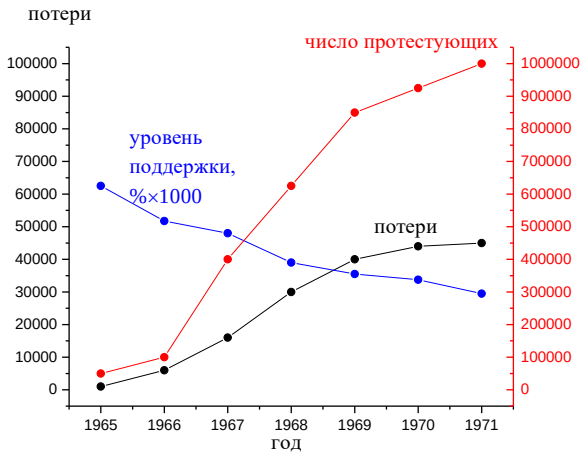
Сопоставление оценок с данными о численности войск в операциях различного масштаба, или верификация параметров в формулах (9.37 а), показывает убывающую зависимость соотношения сил, необходимого для достижения победы, от масштаба операции. В контртеррористических действиях против небольших профессионально подготовленных групп требуется численное превосходство в 8–10 раз, на тактическом уровне (действия рот и батальонов) в 3-4 раза, на оперативно-стратегическом уровне (дивизии, корпуса, армии) для победы достаточно двукратного превосходства в силах. С увеличением масштаба операций роль флуктуаций снижается и количественные прогнозы становятся все более точными[30]. Современные средства поддержки принятия решений в вопросах безопасности (многокритериальные оценки, теоретико-игровые модели, искусственный интеллект) рассмотрены в книге[31].

На стратегическом уровне психологические показатели характеризуют способность населения воюющих стран выдерживать военную обстановку, включая потери своей армии. Психологическая и политическая неустойчивость неоднократно приводила к поражению объективно сильнейшей стороны конфликта; хрестоматийной иллюстрацией служит русско-японская война 1904-1905 гг. Также, например, участие США во II мировой войне в 1941-1945 гг. сопровождалось людскими потерями в 7.2% от численности вооруженных сил (более 400 тыс. убитыми, 670 тыс. ранеными), но поддерживалось американской общественностью и не вызвало внутриполитического кризиса. Значительно меньшие военные потери в Корее 1950-1953 гг. (36570 убитыми, 103284 ранеными, 2.4% от численности ВС) и во Вьетнаме 1964-1973 гг. (58198 убитыми, 153363 ранеными, 2.4% ВС) сопровождались падением поддержки правительства (рис. 9.53 а), поражением правящей демократической партии на выборах и в конечном итоге выходом США из войны. Особенностью вьетнамской войны стали массовые антивоенные протесты (рис. 9.53 б). Чувствительность общества благополучных стран к военным потерям способствовала переходу западных государств во второй половине XX века от всеобщей воинской обязанности к контрактным армиям, а в настоящее время – массовому внедрению

беспилотных дронов и минимизации прямого соприкосновения с противником на театре военных действий.



(а)



(б)

Рисунок 9.53. а) Падение уровня общественной поддержки войн США в Корее (1950 – 1953) и Вьетнаме (1964 – 1973) по мере роста потерь. (б) Увеличение числа антивоенных выступлений в США с ростом потерь во время войны во Вьетнаме (В.В. Шумов, Компьютерные исследования и моделирование, 2014, 6 (1), 167)

Эмпирически установлено, что размеры военных потерь L на больших интервалах времени приближенно подчиняются обратному степенному распределению

(9.38) $$P(L) \sim L^{-\alpha}$$ *закон Ричардсона (1948),*

где $P(x)$ – кумулятивная частотность потерь $(x \le L)$[*]. В этом варианте закона Ципфа (см. разд. 9.2. и формулу (9.8)) показатель степени α лежит в широком интервале от 0.4–0.6 по суммарным потерям во всех документированных войнах[**] до 2.5-3.0 для потерь в ходе одного военного конфликта. Приближенной обратной степенной зависимости

[*] L.F. Richardson, *Variation of the frequency of fatal quarrels with magnitude*, J. Amer. Stat. Assoc. 1948, **43** (244), 523.

[**] L.-E. Cederman, *Modeling the size of wars: from billiard balls to sandpiles*, Amer. Polit. Sci. Rev., 2003, **97** (1), 135: степенное распределение потерь в 97 войнах 1820-1997 гг. (Fig. 1) построено по базе данных CoW.

соответствуют потери как в межгосударственных, так и в гражданских войнах и, кроме того, в террористических актах (рис. 9.54).

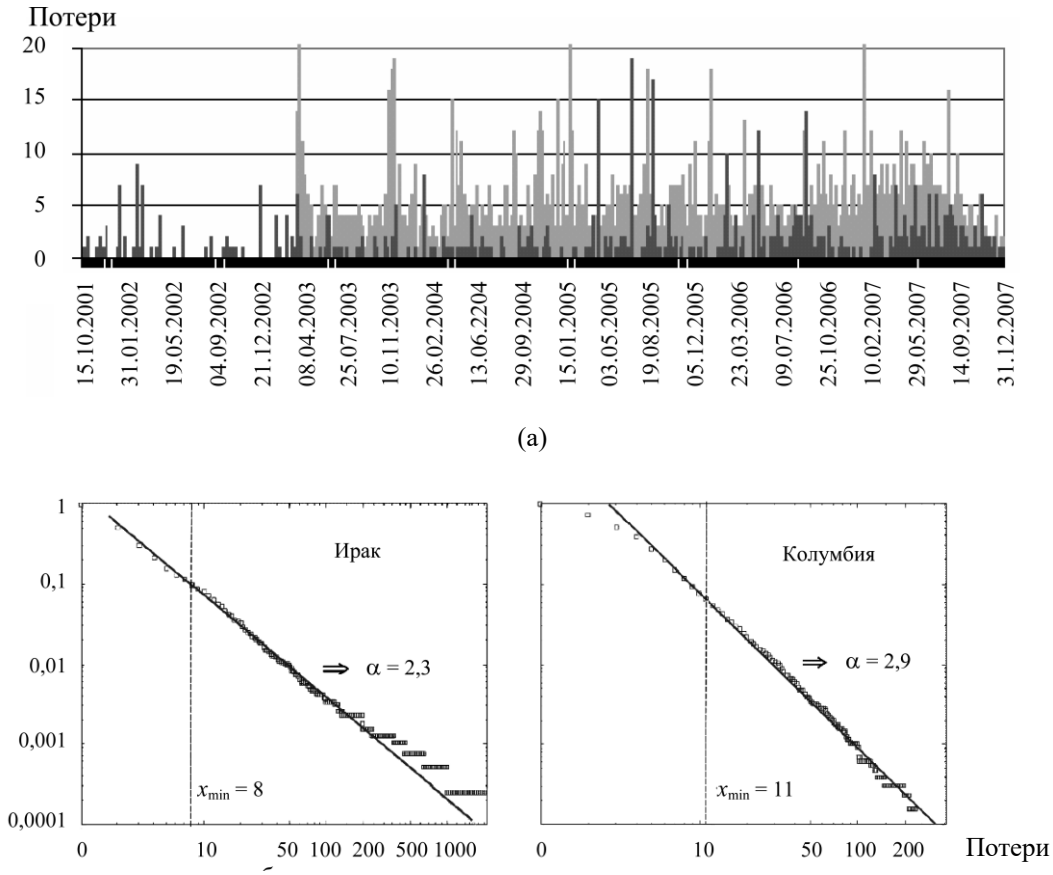


Рисунок 9.54. (а) Динамика потерь союзной коалиции в Ираке (серый цвет) и Афганистане (темно-серый цвет) в 2001-2007 гг. (б) Кумулятивные распределения частотности потерь при боевых столкновениях в Ираке, 2003-2005 гг. (слева) и для гражданской войны в Колумбии, 1988-2004 гг. (справа), двойной логарифмический масштаб (см. M. Spagat, N.F. Johnson, S. van Weezel, PLoS ONE 2018, 13(10): e0204639 и приведенные там ссылки, также обзор[15]).

Затяжной характер современных гражданских войн (на 1999 г. их средняя продолжительность составляла 16 лет) и большое число жертв (16.2 млн. чел. с 1945 по 1999 г.)[*] определяются партизанской тактикой слабейшей стороны, которая осуществляет диверсии против армии и других государственных структур. Для динамики потерь в действиях против партизан характерны нерегулярные «выбросы» и разделяющие их периоды затишья (см. рис. 9.54 а). Частотность потерь и продолжительность интервалов между столкновениями, подобно многим статистическим характеристикам социальных систем, распределены по обратному степенному закону $P(x) \sim x^{-\alpha}$ с близкими показателями степени для войн в разных странах (рис. 9.54 б). Отметим, что в рассмотренной выше модели Эпштейна «выбросы» численности восставших агентов N^*/N (см. рис. 9.40 б) подчиняются не гиперболическому, а затухающему экспоненциальному распределению.

[*] M.G. Findley, *Agents and conflict: adaptation and the dynamics of war,* Complexity, 2008, **14** (1), 22.

Упрощенные модели (англ. *toy models*) экономических и социальных процессов используются для их имитации в экспериментальной экономике (см. разд. 8.7 предыдущей главы), и, в значительно большей степени, в военной науке. Оперативно-штабные военные игры, имитирующие бой и более масштабные операции на картах реальной местности, практикуются в армиях европейских государств с первой половины XIX века. В настоящее время компьютерное моделирование боевых действий стало частью военного обучения во многих странах мира (см. [7] в рекомендуемой литературе)*. Его отражением в массовой коммерческой среде служат военные игры на персональных компьютерах и в Интернет в режиме реального времени. Последние, благодаря доступности информации из сети, в свою очередь используются для решения реальных военных и политических задач**.

В коммерческом секторе компьютерных военных игр, завоевавшем большую популярность во многих странах, сражаются армии неких фантастических существ, однако переход к моделированию с реально существующими боевыми единицами на основе этих платформ вполне очевиден. Изменение обстановки виртуального боя или военной кампании после каждого ходя участников игры рассчитывается по уравнениям ланчестерского типа и другим эмпирическим соотношениям. Стратегические игры в реальном времени (англ. Real-Time Strategy, RTS) требуют от их участников создания виртуальной военной экономики на заданной местности и ее функционирования в ходе боевых действий (рис. 9.55). Оппонента игроков в подобных играх нередко называют «искусственным интеллектом», хотя в большинстве случаев это детерминистский компьютерный алгоритм, ходы которого модифицирует генератор случайных чисел.

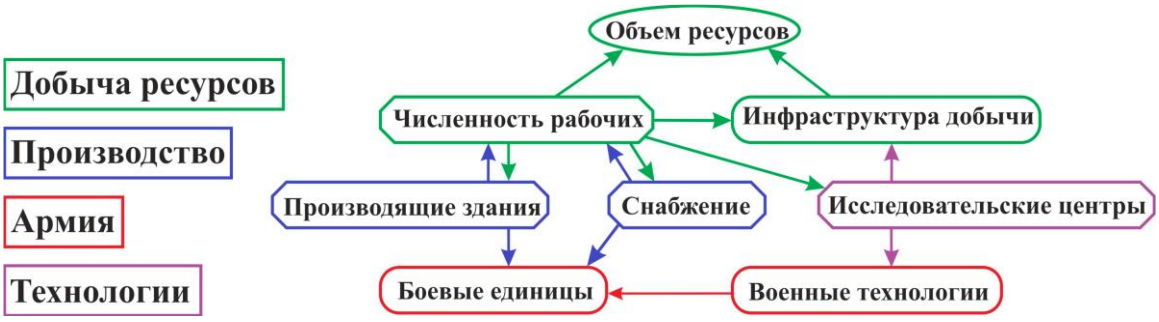


Рисунок 9.55. Блок-схема организации военного производства в «стратегической» компьютерной игре (I.D. Laryushin, *Advanced Lanchester combat model for inhomogeneous armies in RTS games,* 2022, IEEE Transactions on Games PP(99):1-1, *DOI: 10.1109/tg.2022.3149275*)

Массовые многопользовательские онлайн-игры, или *массовые ролевые игры* (англ. Massive Multiplayer Online (Role-Playing) Games, MMOG, MMOPRG) с участием сотен и тысяч игроков в сети Интернет используются для компьютерных экспериментов по моделированию политических и военных событий. Участие в игре на актуальную тему (разделение Судана в 2011 г., война в Сирии с 2011 г. по н/вр., противостояние «майдана»

*Обзор компьютерных средств военного обучения в армиях США и КНР представлен в статье K. Yao, Sh. Huang, *Simulation technology and analysis of military simulation training*, J. of Phys.: Conference Series, 2021, 1746, 012020.

** см., например, *Combat mission Black Sea* https://store.steampowered.com/app/1502380/Combat_Mission_Black_Sea/

и силовых структур в Киеве 2013-2014 гг. и мн. др.), которое представляется их игрокам-«геймерам» лишь не вполне здоровой формой досуга, для анонимных организаторов игры выполняет важную функцию *краудсорсинга*: вспомогательного и почти бесплатного имитационного эксперимента. Исследовательские комплексы программ политического и военного моделирования включают, например, Geographic Research on War Laboratory (GROWLab, ETH Zurich), позволяющий моделировать этнические конфликты в любой стране мира*.

Модели прерывистого равновесия

Стационарные диссипативные процессы, подобно гражданским войнам протекающие в «самоподдерживающемся» прерывистом режиме, в междисциплинарной литературе относят к проявлениям *самоорганизованной критичности*. Эту дословную кальку с английского термина *self-organized criticality* хорошо иллюстрирует коническая куча сухого песка (sand pile), на вершину которой постоянно добавляются песчинки (рис. 9.56). С достижением склоном кучи критического угла ξ_0 каждая новая песчинка с некоторой ненулевой вероятностью может скатиться вниз, увлекая за собой другие песчинки, и тем самым вызвать лавину. Размеры лавин, или числа скатившихся вместе песчинок J, в такой системе подчиняются обратному степенному распределению: $P(J) \sim J^{-\alpha}$.

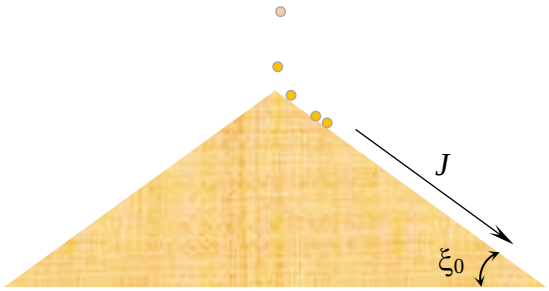


Рисунок 9.56. Модель кучи песка (см. [8] в списке рекомендуемой литературы)

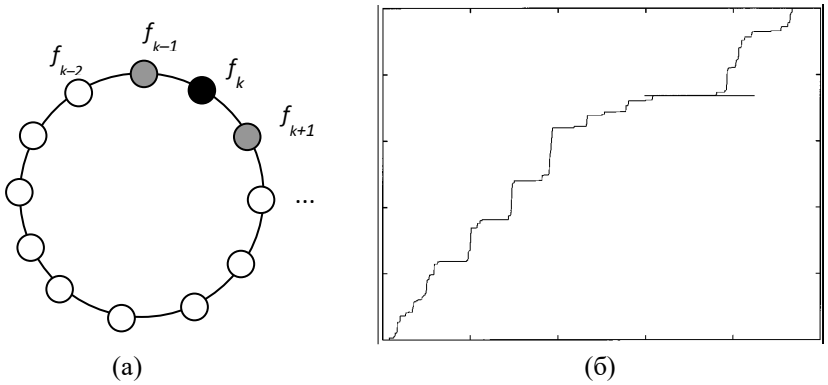
В математической модели «самоорганизованной критичности» задается квазистационарная совокупность N структурных единиц (частиц), обладающих двумя состояниями: метастабильным (1) и стабильным (0). Каждая метастабильная частица с вероятностью p_1 может переходить в стабильное состояние ($1 \to 0$) и с вероятностью p_2 индуцировать такой переход в соседних метастабильных частицах. Возникающий каскад (осыпание лавины) возвращает систему в квазистационарное критическое состояние, от которого она далее отклоняется при добавлении новых метастабильных частиц. В родственной модели *лесного пожара* на узлах квадратной решетки случайным образом возникают «деревья» и, с меньшей вероятностью, «очаги возгорания», уничтожающие кластеры деревьев в соседних узлах; в этом случае размеры кластеров также распределены по обратному степенному закону (9.38).

Квазиравновесное околокритическое состояние, в которое диссипативная система возвращается случайными каскадными процессами («осыпанием лавин» либо

*https://icr.ethz.ch/research/growlab/

«пожарами»), в политической публицистике называется состоянием *управляемого хаоса*. Хрупкие социально-политические системы, где через нерегулярные интервалы времени происходят поддержанные извне кризисы, возвращающие систему в неустойчивое равновесие, действительно характерны для стран «третьего мира». Некоторые американские политологи в 1990-е годы обосновывали необходимость перевода всего человечества в состояние «самоорганизованной критичности», поскольку таким состоянием легко управлять*.

Термин *self-organized criticality* впервые (1987 г.) предложили датский физик Пер Бак (1947-2002) и его соавторы Ч. Танг и К. Визенфельд в статье о разработанной ими «околокритической» модели клеточных автоматов с обратной степенной статистикой параметров. В 1993 г. П. Бак и К. Снеппен предложили другую модель, которая тоже воспроизводит нерегулярные каскады в диссипативных системах. Эта *модель нарушенного* (или *прерывистого*) *равновесия* (англ. *punctured equilibrium*) была впервые использована в эволюционной биологии и затем распространилась во многие разделы междисциплинарной физики.



(а) (б)

Рисунок 9.57. (а) Трофическая цепь в модели Бака-Снеппена. (б) Динамика числа «мутаций» *N* выбранного узла на последовательных шагах дискретного времени *t* (см. [8])

Эволюцию вида в математических моделях биологии отражает движение изображающей точки по энергоподобной гиперповерхности *адаптационного ландшафта* в пространстве признаков. При малом влиянии каждого отдельного вида на состояние всей системы движение к адаптационному максимуму (например, в методе Монте-Карло, где температуре отвечает интенсивность мутаций) происходит на «жестком» ландшафте; достижение равновесия означает прекращение эволюции. Другое предельное состояние системы с сильным влиянием мутаций на адаптационный ландшафт делает эволюцию невозможной из-за постоянного изменения гиперповерхности. В *модели Бака-Снеппена*, лучше соответствующей эволюционным данным, допускаются редкие катастрофические события, которые приводят к каскаду вымирания видов и изменению адаптационного ландшафта на фоне движения системы к относительно устойчивым максимумам адаптации.

В простейшем варианте модели набор взаимозависимых видов (*трофическая цепь*) представляется совокупностью агентов на кольце с численным «признаком адаптированности» $f_i \in [0, 1]$, который приписывается им на первом шаге случайным образом из равномерного распределения (рис. 9.57 а). На каждом последующем шаге

* S.R. Mann, *Chaos theory and strategic thought*, Parameters (US Army War College Quarterly), 1992, **22**, 54.

моделирования признаки агента с минимальным $f_k = \min\{ f_i \}$ и двух его соседей (один из них – условная кормовая база k-го агента, второй – питающийся им хищник) заменяются на другие случайные числа. Это соответствует вымиранию либо мутациям (в рамках простой модели они неразличимы) наименее приспособленного вида, которые влияют на состояние других видов в системе.

На первом этапе моделирования мутации в разных участках цепи происходят независимо друг от друга. Средняя приспособленность агентов $\langle f \rangle$ при этом увеличивается, так как наименьшие параметры агентов $\{f_i\}$ в большинстве случаев возрастают. В дальнейшем признаки адаптированности выравниваются и в системе развиваются корреляции, так как «благополучные» звенья цепи с высоким параметром f_i теряют его из-за соседства с «неблагополучным» звеном. В результате этого возникают лавины мутаций, локализованных в определенных участках цепи: модели катастрофических эволюционных изменений наподобие вымирания динозавров.

Динамику мутаций выбранного «вида» (агента) отражает фрактальный график, напоминающий *чёртову лестницу* (англ. *Devil's staircase*), построенную в XIX веке Георгом Кантором (см. раздел 8.6.3 в гл. 8). По оси ординат этого графика (рис. 9.57 б) отложено количество изменений признака (мутаций) выбранного узла в цикле, по оси абсцисс – число тактов дискретного времени. Почти вертикальные участки графика изображают «прерывистую» эволюцию биологического вида – его быстрые изменения либо вытеснение другим видом. Горизонтальные «ступени» соответствуют квази-стационарным состояниям, которые сменяются лавинами мутаций при новом нарушении равновесия. Размеры лавин (числа последовательных изменений признака выбранного узла, или высота ступеней) и длительности стационарных периодов между ними (длина ступеней) подчиняются обратному степенному распределению.

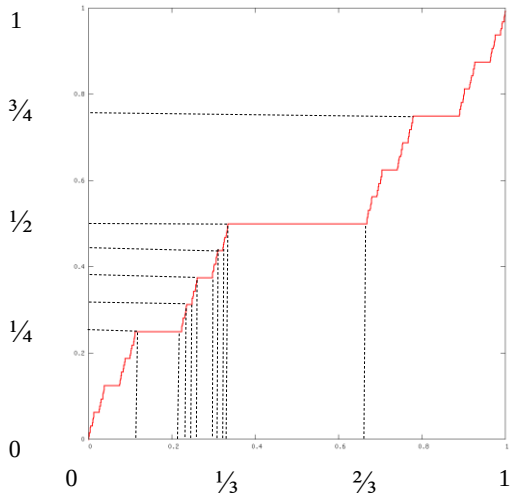


Рисунок 9.58. Лестница Кантора (рисунок взят из сети Интернет)

Алгоритм построения самой функции Кантора (рис. 9.58) состоит в разделении отрезка [0, 1] на равные трети (см. рис. 8.53 а в предыдущей главе), задании $f(x) = ½$ на среднем отрезке $x \in [⅓, ⅔]$ и повторении этой процедуры на оставшихся отрезках [0, ⅓] и [⅔, 1]: $f(x) = ¼$ для $x \in [1/9, 2/9]$, $f(x) = ¾$ для $x \in [7/9, 8/9]$ (штриховые линии на рис. 9.58) и далее

до бесконечности. Полученная непрерывная функция $f(x)$ имеет производную $df/dx = 0$ «почти по всех точках» отрезка [0, 1]. Из-за детерминированного алгоритма построения лестницы Кантора ее ступени симметричны относительно точки $x = ½$ в противоположность стохастической динамике мутаций на рис. 9.57 а.

На качественном уровне модель Бака-Снеппена воспроизводит динамику вымирания видов по палеонтологическим данным (рис. 9.59). Также, несмотря на разницу масштабов времени, ей соответствует динамика потерь в современной партизанской войне и другие примеры «нарушенного равновесия» (см. рис. 9.54). Идею «самоорганизованной критичности» используют в описании широкого спектра физических, биологических и социальных явлений (см. [8]).

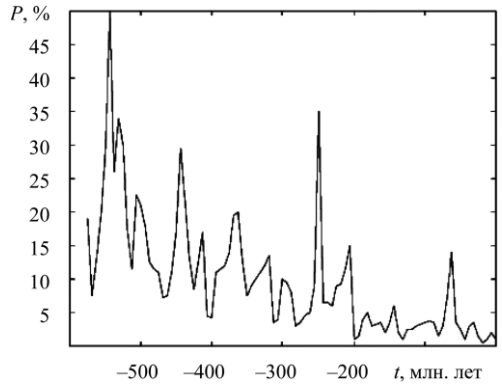
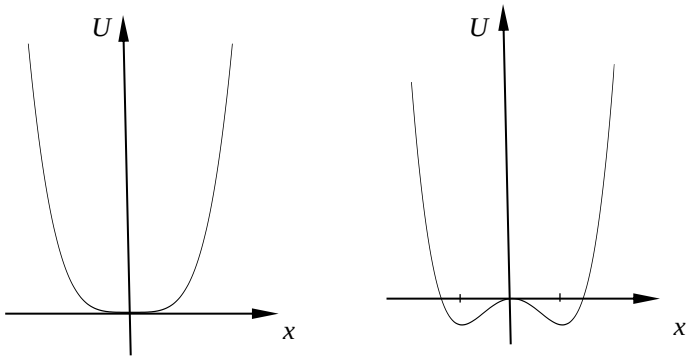


Рисунок 9.59. Динамика исчезновения видов морских животных по палеонтологическим данным, *P* – доля видов, вымерших на 5 млн. лет (J.J. Sepkoski, Paleobiology, 1993, 19 (1), 43)

9.5.2. Теория катастроф в применении к социальным системам

Рассмотренные нами модели прерывистого равновесия не выводятся из фундаментальных физических либо математических соображений. Это удачно угаданные схемы (эвристики); несмотря на многолетний поиск, для них еще не найдено общего аналитического описания. С другой стороны, нелинейные дифференциальные уравнения, которые интенсивно исследуются математиками начиная с работ Анри Пуанкаре в XIX веке, дают много примеров бифуркаций как «прерывистых» зависимостей решения от параметров уравнения (см. гл. 4).

(



(а) (б)

Рисунок 9.60. Графики потенциалов (а) $U = x^4$, (б) $U = x^4 - ax^2$

Скачкообразные *разрывные явления*, или *катастрофические* изменения вида решений уравнений при варьировании их параметров, начинаются с изменения числа действительных корней квадратного уравнения

при уменьшении его дискриминанта от D > 0 к D < 0 (гл. 3, рис. 3.2), Их исследует *математическая теория катастроф*, которая возникла во второй половине XX века в работах Рене Тóма, Кристофера Зимана, Владимира Арнольда и других авторов. В ее рамках *катастрофой* называется резкое («внезапное») изменение состояния системы, вызванное малым изменением параметров. К этому определению близко понятие бифуркации решений уравнения (гл. 4); часто они обсуждаются вместе.

Рассмотрим физическую частицу в одномерном поле с потенциалом

(9.39) $$U(x) = x^4 - ax^2$$

(этот *квартичный* потенциал с квадратичной поправкой часто используется в молекулярной физике). Устойчивое состояние системы в минимуме потенциальной функции $U(x)$ легко найти, приравнивая к нулю ее производную:

(9.39 а) $$dU/dx = 4x^3 - 2ax = 2x(2x^2 - a) = 0.$$

Если параметр $a = 0$, минимум потенциала $U(x)$ находится в точке $x = 0$ (рис. 9.60 а). Но при малом увеличении параметра ($a > 0$) профиль потенциала (9.39) качественно изменяется: у уравнения (9.39 а) вместо одного возникают три действительных корня: $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm\sqrt{a/2}$. Первый корень отвечает максимуму потенциала, т.е. неустойчивому равновесию, второй и третий – симметрично расположенным устойчивым состояниям в минимумах энергии (рис. 9.60 б). При этом любым значениям $a < 0$ по-прежнему отвечает единственный действительный корень с минимумом потенциала в начале координат. Рассматривая параметр a как дополнительную переменную, мы можем построить график $x^*(a)$ зависимости корней уравнения от параметра и увидеть на нем точку бифуркации (0, 0) (рис. 9.61).

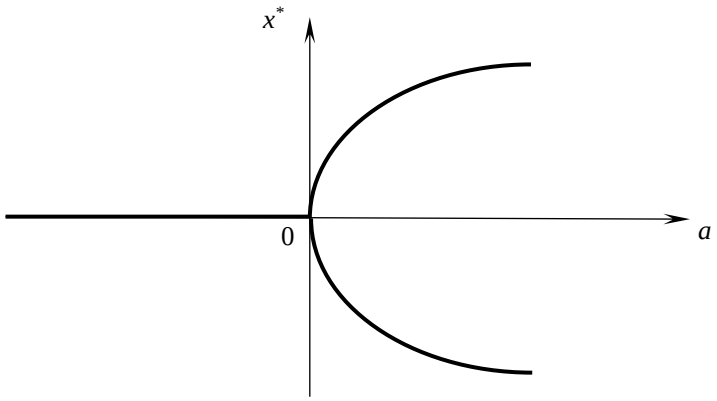


Рисунок 9.61. Бифуркационная диаграмма для стационарных точек уравнения (9.39)

Теория катастроф в ее общей форме посвящена асимптотическому исследованию нелинейных уравнений вида

(9.40) $$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\nabla U(\mathbf{x}, \mathbf{a}),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор, задающих состояние динамической системы (ее координат в пространстве переменных), $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ – другой вектор, составленный из k параметров уравнения. Действие потенциала U выражается градиентом

$$\text{grad}\, U = \nabla U = (\partial U/\partial x_1, \partial U/\partial x_2, \ldots . \partial U/\partial x_n)$$

(см. главу 3). Для функции одной переменной в правой части уравнения (9.40) находится обычная производная $dU(x,a)/dx$. В особых, или стационарных, точках ($x^*(\mathbf{a})_1$, $x^*(\mathbf{a})_2$, ..., $x^*(\mathbf{a})_p$) производная $dx/dt = 0$, поэтому

(9.40 а) $$\partial U(x^*, \mathbf{a})/\partial x_1 = \partial U(x^*, \mathbf{a})/\partial x_2 = \cdots = \partial U(x^*, \mathbf{a})/\partial x_n = 0$$

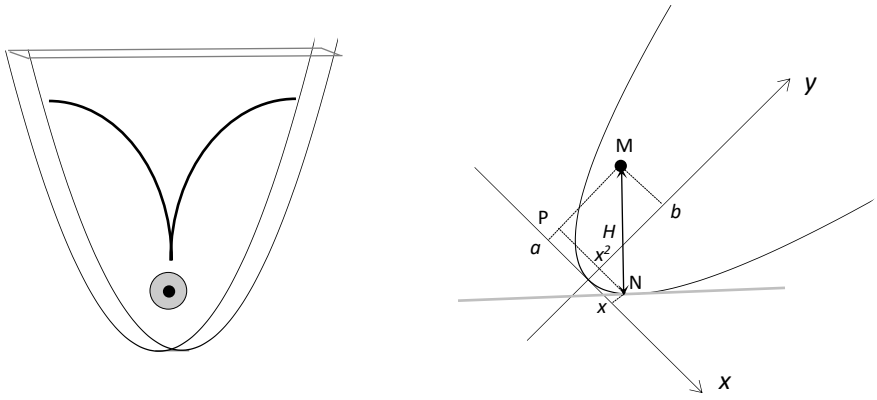
Задачей теории катастроф является построение множеств особых точек данной системы уравнений $\{x^*_i\}$ и исследованию их зависимости от изменения параметров $\{a_j\}$. Множество значений *внутренних переменных* **x**, характеризующих состояние системы, называется *пространством состояний*. Множество параметров **a** уравнения (9.40), или *внешних переменных*, называется *пространством управляющих параметров*.

Пример: остойчивость корабля

> *Представим себе кого-либо в лодке эллиптического сечения… Для простоты пусть это будет математик, вес которого, вместе с весом лодки, сосредоточен у него в голове.*
> Т. Постон, И. Стюарт, *Теория катастроф и ее приложения*, М.: Мир, 1980.

Остойчивостью в морском деле называется способность судна, отклоненного внешними воздействиями ветра и волн, возвращаться в положение равновесия. На остойчивость сильно влияет положение центра тяжести (правильнее – центра масс) корабля и расположенных на нем грузов в соотношении с точкой приложения выталкивающей силы Архимеда. Низкая остойчивость повышает вероятность катастрофы уже в общепринятом смысле: переворачивания судна и массовой гибели находящихся на нем людей. Требования к конструкции корабля, позволяющие предотвратить такие события, были выработаны в инженерных науках задолго до появления математической теории катастроф.

«Игрушечной моделью» (toy model) устойчивости корабля на поверхности воды служит качалка из двух одинаковых сегментов параболы $y = x^2$, вырезанных из картона и соединенных легкими распорками либо жесткой лентой вдоль их параболических границ. Роль груза выполняют небольшой металлический предмет (например, гайка или шайба), который можно перемещать внутри качалки, и закрепляющий его магнит на внешней стенке (рис. 9.62 а). Качалка стоит на ровной горизонтальной поверхности; от небольшого толчка, имитирующего воздействие волн и ветра, она приходит в колебательное движение.



(а) (б)

Рисунок 9.62. (а) Качалка Постона, черный кружок – положение центра масс, (б) ее положение равновесия: (a, b) – координаты центра масс, (x, x^2) – точка касания поверхности

При расположении груза вблизи нижней параболической границы качалка совершает колебания вокруг единственного положения равновесия (наклонного, если масса сдвинута в сторону от ее центральной линии). В других положениях груза у качалки имеется два равновесных положения, и от небольшого толчка она может перейти из одного в другое либо, по инерции, опрокинуться. В этой *машине катастроф Постона* легко определить условия перехода системы от стабильного к опасному бистабильному состоянию.

В математической модели качалки состоянию системы отвечает координата $-x_0 \leq x \leq x_0$ точки касания параболы с горизонтальной поверхностью. Поскольку парабола задается уравнением $y = x^2$, при совпадении оси Oy с осью параболы ее точка касания (x, x^2) определяется единственной переменной x. Пространством состояний системы является отрезок $[-x_0, x_0]$, заданный верхней границей стенок. Пространством управляющих параметров является множество точек $\{a, b\}$ параболического сегмента, в каждой из которых можно разместить массу качалки m (рис. 9.62 б). В точке равновесия качалки горизонтальная поверхность

(серая линия) совпадает с касательной к параболе, а линия, соединяющая центр масс (a, b) с точкой касания (x, x^2), перпендикулярна этой поверхности: вдоль нее вес груза mg уравновешивается реакцией опоры.

Потенциальная энергия груза в поле сил тяжести $U = mgH$. Высоту H (гипотенузу прямоугольного треугольника MNP) найдем по теореме Пифагора:

$$H = \sqrt{(a-x)^2 + (b-x^2)^2}$$

(мы учли, что на рис. 9.62 б $a < 0$, а длина второго катета $b–y = b–x^2$).

Точка равновесия качалки должна отвечать минимуму потенциальной энергии: $dU/dx=0$. Чтобы не мучиться с производной по переменной x под знаком корня, продифференцируем квадрат потенциальной энергии: поскольку H – непрерывная функция x, положения минимумов U и U^2 по координате x совпадают

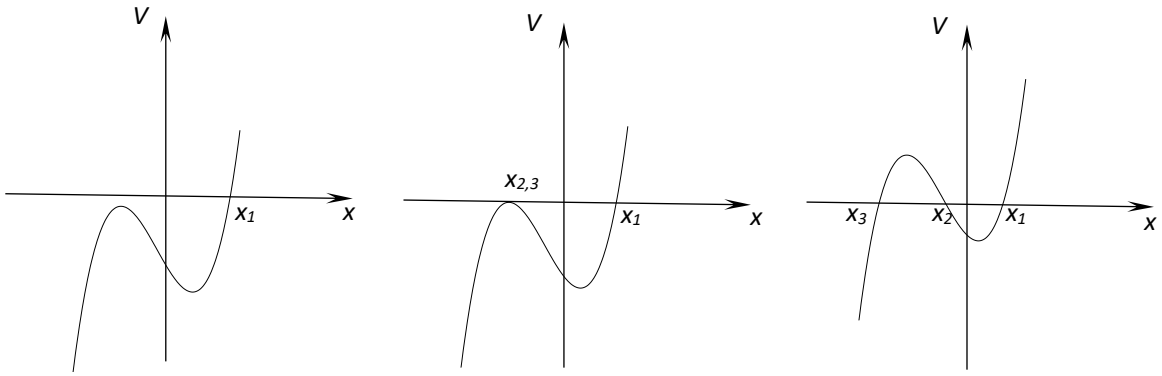
(9.41) $$U^2 = m^2g^2[(a-x)^2 + (b-x^2)^2] = m^2g^2[x^4 + (1-2b)x^2 - 2ax + a^2 + b^2]$$

(мы выполнили действия в квадратных скобках и, как говорили в школе, привели подобные члены). Разделим (9.41) на постоянный множитель m^2g^2 и продифференцируем то, что осталось в квадратных скобках

(9.42) $$\frac{1}{m^2g^2}\frac{d(U^2)}{dx} = 2V(x) = 4x^3 + 2(1-2b)x - 2a = 0$$

Сокращая правую часть на постоянный множитель 2, получим условие равновесия качалки.

Таким образом, положения равновесия (x, x^2) выражаются через параметры (a, b) как действительные корни кубического уравнения (9.42 а), то есть точки пересечения графика функции (9.42 а) с осью Ox. Если такая точка только одна (рис. 9.63 а), качалка имеет единственное устойчивое положение. При пересечении оси Ox в трех точках (рис. 9.63 в) имеется два разных положения устойчивого (x_1, x_3) и одно – неустойчивого равновесия (x_2). На границе опасной области бистабильности график пересекает ось Ox в точке x_1 и касается ее в точке x_{23}, что соответствует нулю производной V' (рис. 9.63 б). Таким образом, сепаратрису, разделяющую стабильную и бистабильную области, задает система двух уравнений



(а) (б) (в)

Рисунок 9.63. Вещественные корни уравнения (9.42 а) как точки пересечения кубической кривой с осью абсцисс: (а) один корень (устойчивое состояние), (б) два корня (переходное состояние), (в) три корня (два устойчивых и одно неустойчивое состояние: бистабильная система)

(9.42 а) $$V = 2x^3 + (1-2b)x - a = 0$$
(9.42 б) $$V' = 6x^2 + (1-2b) = 0$$

Если набраться терпения и выразить переменную x через параметры a и b, мы получим уравнение сепаратрисы. Сразу приведем результат:

(9.43) $$(2b-1)^3 = \frac{27}{2}a^2 \text{ или}$$
$$b - \frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{a^2}$$

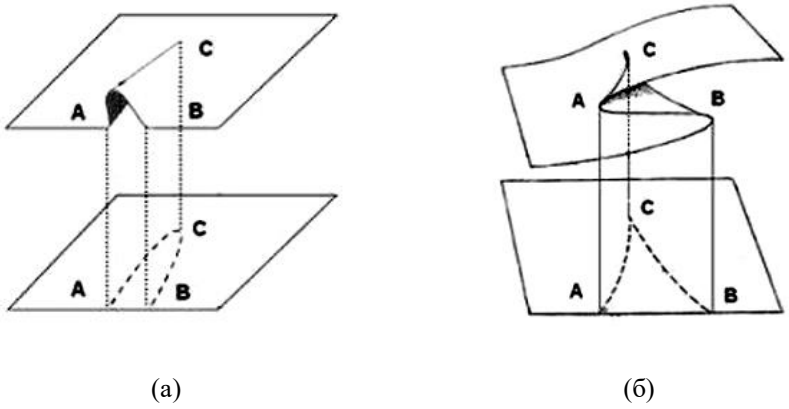
Искомая кривая имеет форму «клюва»; две ее ветви $b \sim a^{2/3}$ выходят из точки ($a = 0$, $b = ½$). Вид кривой показан на рис. 9.62 а. Во всех точках, лежащих ниже сепаратрисы, качалка имеет одно устойчивое положение равновесия, выше кривой – два. Переход центра масс в бистабильную область не приводит к немедленному опрокидыванию качалки, но при внешнем воздействии (толчке) она может перевернуться в другое устойчивое положение.

Особенности потенциальных функций и классификация катастроф

Существование катастроф и их виды определяются формой *потенциальной поверхности*, которой соответствуют все состояния нелинейной системы в пространстве переменных и управляющих параметров. При кубической нелинейности и одном управляющем параметре a на потенциальной поверхности имеется *складка* (англ. *fold*, рис. 9.64 а). Потенциальная функция V и ее производная V' имеют вид

$$V = x^3 + ax \qquad V' = 3x^2 + a$$

Линия особых точек $V'=0$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$ определена при $a \le 0$; (0, 0) – точка бифуркации. При отрицательном управляющем параметре a система может находиться в двух стационарных состояниях: неустойчивом x_1 и устойчивом x_2; $V(x_2) < V(x_1)$.



(а) (б)

Рисунок 9.64. Потенциальные поверхности в катастрофах типа (а) складки и (б) сборки

Кубическая нелинейность с двумя управляющими параметрами порождает катастрофу типа *сборки* (как детали пошива ткани, англ *cusp*, рис. 9.64 б). Потенциальная функция $V = x^3 + a_1x + a_2$ с точностью до множителей соответствует функции качалки (9.42 а).

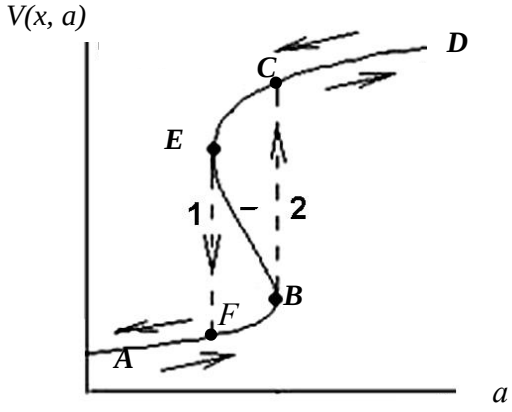


Рисунок 9.65. Область бистабильности в катастрофах типа двойной складки и сборки

В обоих случаях система в области бистабильности при изменении параметров может перескочить с «низкой» ветви потенциала на «высокую» и наоборот (рис. 9.65). При этом наблюдается гистерезис: разные

пути прямого и обратного переходов между двумя состояниями с противоположным изменением управляющих параметров. Так, на рис. 9.65 с увеличением параметра *a* система проходит путь A→(F)→B→C→D с «вертикальным» переходом 2, а в обратном направлении с уменьшением *a* – путь D→(C)→E→F→A, включающий «вертикальный» переход 1.

Типы катастроф, возможных для нелинейных систем с разными видами потенциала, классифицировал Рене Том; простейшие из них представлены в табл. 9.6. Число *k* управляющих параметров $\{a_i\}$, которые следует добавить к *n* независимым переменным для полного описания системы, называется *коразмерностью* задачи. При $n + k > 3$ описание потенциальных гиперповерхностей становится абстрактным, а графики их сечений – менее наглядными. Тем не менее, основные типы катастроф дают качественную картину асимптотических разрывных явлений в ряде нелинейных систем, потенциальные функций которых выражены полиномами (многочленами). Состояния системы, заданные другими функциями, можно приближенно представить полиномами в окрестностях их особых точек (линий, областей) по аналогии с разложением непрерывных дифференцируемых функций в ряд Тейлора.

Таблица 9.6

Семь элементарных катастроф в нелинейных системах по Р. Тому (см. [1])

n	*k*	потенциал	название
1	1	$x^3 + ax$	*складка*
1	2	$x^4 + a_1x^2 + a_2x$	*сборка*
1	3	$x^5 + a_1x^3 + a_2x^2+a_3x$	*ласточкин хвост*
1	4	$x^6 + a_1x^4 + a_2x^3+a_3x^2+a_4x$	*бабочка*
2	3	$x^3 + y^3 +a_1xy + a_2x+a_3y$	*гиперболическая омбилическая точка*
2	3	$x^3 – xy^2 + a_1(x^2 + y^2) + a_2x+a_3y$	*эллиптическая омбилическая точка*
2	4	$x^2y + y^4 + a_1x^2 + a_2y^2 + a_3x+a_4y$	*параболическая омбилическая точка*

Катастрофы в междисциплинарных задачах

Для описания системы в рамках теории катастроф, очевидно, следует выразить ее потенциал через некоторые непрерывные переменные. В биологии и общественных науках фундаментальные законы, позволяющие составить уравнение состояния системы, как правило, неизвестны, хотя имеются часто используемые модели (такие, как логистическая функция или модель Лотки-Вольтерра). Именно поэтому теорией катастроф в основном занимаются математики, а в междисциплинарных исследованиях чаще используют другие подходы – например, теорию игр. Но если нелинейное уравнение состояния исследуемой системы в некоторых переменных и параметрах (возможно, изобретенных специально для данного случая) приводится к стандартному типу катастрофы, можно предсказать детали поведения системы и сравнить их с реально наблюдаемой динамикой.

Пусть плотность преступности *x* в некотором городе моделируется дифференциальным уравнением

(9.44) $$\frac{dx}{dt} = (a - x^2)x - b = ax - x^3 - b$$

Первый член *ax* в правой части уравнения соответствует «самовоспроизведению» преступной среды, в отсутствие ограничений способной расти экспоненциально по закону Мальтуса. Ограничения роста вызваны конкуренцией преступных сообществ (более жесткой, чем в логистическом уравнении, поскольку индивидуумам противостоят консолидированные группы с «поражающей силой», предположительно пропорциональной квадрату численности) и деятельностью полиции (*–b*). Представляя правую часть уравнения (9.44) в виде градиента некоторой потенциальной функции, легко привести его к форме (9.40)

(9.44 а) $$\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}ax^2 + bx\right)$$

В правой части (9.44 а) – производная потенциала нелинейной системы с катастрофой сборки (табл. 9.6). В соответствии с этим, эволюция системы в области бистабильности (см. рис. 9.64 б и рис. 9.65, на котором ось

абсцисс соответствует параметру b) при варьировании параметров a и b может приводить к парадоксальным следствиям: небольшое увеличение a при *уменьшении* b приводит к скачкообразному спаду преступности, тогда как увеличение b при $a \approx \text{const}$ вызовет ее скачкообразный рост, или *криминальную катастрофу* (см. [1]).

Элементы теории катастроф представлены в отечественной междисциплинарной литературы, включая книги А.К. Гуца и Ю.В. Фроловой ([1] в списке литературы к этой главе), Г.Г. Малинецкого, Г.Ю. Ризниченко (соответственно [4] и [5] в литературе к гл. 4). Для углубленного ознакомления с этой областью можно рекомендовать большую, но хорошо и понятно написанную книгу Т. Постона и И. Стюарта «Теория катастроф и ее приложения» (процитированную выше в эпиграфе), а также учебное пособие для студентов-физиков[32]. На «промежуточном» уровне в Интернет доступен учебный материал И.Н. Бекмана[33]: небольшого объема и тоже очень ясно изложенный.

Литература к разделу 9.5

[30] В.В. Шумов, В.О. Корепанов, *Математические модели боевых и военных действий*, Компьютерные исследования и моделирование, 2020, **12** (1), 217; В.В. Шумов, *Исследование функции победы в бою (сражении, операции)*, Проблемы управления, 2020, №6, 19.
[31] А.В. Макаренко, А.Г. Чхартишвили, В.В. Шумов, *Системный анализ и прогнозирование безопасности*, М.: ЛЕНАНД, 2022.
[32] Ю.К. Алексеев, А.П. Сухоруков, Введение в теорию катастроф, М.: ЛЕНАНД, 2022.
[33] И.Н. Бекман, Катастрофы: курс лекций (43 стр.) . http://profbeckman.narod.ru/NPT/BUM_katastrof.pdf

9.6. Физическая и математическая история

Жили-были три японца: Як, Як-Цедрак, Як Цедрак-Цедрак-Цедрони
Жили-были три японки: Цыпа, Цыпа-Дрыпа, Цыпа-Дрыпа-Дримпомпони.
Вот они переженились: Як на Цыпе, Як-Цедрак на Цыпе-Дрыпе…
детская скороговорка

Простое изложение фактов и событий, относящихся к прошлому, перестало удовлетворять профессиональных историков уже в начале XIX века. Зарождение и становление социологии, в этот период еще не отделившейся от философии и других гуманитарных наук, безусловно влияло на общее понимание исторического процесса. Основатели дисциплин о строении и динамике человеческого общества – Огюст Конт и Эмиль Дюркгейм во Франции, Герберт Спенсер в Англии, Карл Маркс и Макс Вебер в Германии, многие другие авторы (см. [3]) – в подтверждение своих идей приводили исторические данные; с нынешней точки зрения их работы относятся к историческим исследованиям. Теории *одного фактора* (т.е. определяющего воздействия биологических, психологических, экономических, расовых или иных сторон общественной жизни на государство и социум), распространенные в XIX веке, породили в истории ряд направлений (эволюционное, мальтузианское, марксистское, цивилизационное и другие), перешедшие в XX век. Таким образом, подбор и интерпретация материала на основе тех или иных фундаментальных теоретических постулатов заменили его «пересказ» еще в рамках классической истории, остававшейся в то время полностью гуманитарной дисциплиной.

Стоит заметить, что отношение к предмету истории как пространству эмпирических фактов в противовес истории как жизнеописания царей, полководцев и других великих деятелей прошлого означало победу позитивизма над пристрастным изложением событий в традиционных письменных источниках. Объективность исторических исследований вплоть до второй половины XIX века сдерживалась фундаментальным постулатом о *свободе воли,* которая, вместе с преимущественно единоличными формами правления,

сводила основное содержание исторических работ к описаниям жизни и деятельности монархов. Опровержению этого тезиса и трактовке исторических событий как следствия «волевой суммы» массы людей посвящена, например, главная часть историко-философской аргументации Льва Толстого в романе «Война и мир» (см. Введение)[*].

Связи исторических событий с объективно существующими, познаваемыми процессами в экономике и обществе заложили основу для их последующего количественного описания и моделирования. Вместе с тем перенос центра интересов от действий и мыслей исторических личностей к более материальным факторам, как и «атомизм» в описании социальных систем, вплоть до конца XX века вывел за пределы научного анализа «коллективный разум», т.е. *распределенный интеллек*т государств и других социальных систем – который особенно ярко проявляется в динамике исторических событий.

Внедрение идей и методов точных наук в гуманитарное знание в области истории протекает параллельно тем же процессам в социологии и политологии (лишь с определенным отставанием во времени) и до сих пор выражается преимущественно в «локальном» моделировании частных явлений. Тем не менее, это отставание вполне может закончиться благодаря синтетическому характеру истории, что позволяют испытывать на документированном материале почти все идеи и модели современной междисциплинарной физики.

Использование физических и математических методов в современных исторических дисциплинах можно разделить на три направления:

1. Верификация данных и их статистическая обработка
2. Выявление связей исторических процессов с геофизическими и космофизическими факторами, или *физическая история*
3. Компьютерное моделирование исторической динамики: *математическая история*.

Эти направления мы рассмотрим в настоящем разделе. Новые методы обработки численных данных заставили ввести в учебные планы студентов-историков соответствующие главы математики, информатики и математической статистики. Работы, в которых используются математические методы, получили название *количественной* (в зарубежной литературе *квантитативной*) *истории* либо *клиометрии* (*клиометрики*); распространен и термин *историческая информатика*. О возникновении этих направлений рассказано в небольшой статье[**].

Объективные факты, зарегистрированные в разных странах или (и) в разное историческое время, трудно привести к системе ценностей исследователя, личность которого сформировалась совсем в другую эпоху. Автоматическое перенесение своего жизненного опыта и порожденной им этики на иные периоды времени искажает

[*]При этом против «свободной воли» в романе приводятся удивительно слабые доводы. Причина, скорее всего, в том, что идеи статистической механики, позволяющие обосновать «усредненную» динамику общественных систем, во время написания романа развивались лишь несколькими нестандартно мыслящими физиками и не были общепринятыми в естествознании – тем более за его пределами.

[**]Н.С. Гусева, *Математизация исторической науки: становление клиометрии в исторической науке во второй половине XX в.*, Вестн. Томского ГУ, 2013, №372, 87, https://cyberleninka.ru/article/n/matematizatsiya-istoricheskoy-nauki-stanovlenie-kliometrii-v-istoricheskoy-nauke-vo-vtoroy-polovine-xx-v

восприятие, а следовательно и объективное описание событий даже относительно недавнего прошлого. Так, например, традиционную русскую печь и избу-пятистенку начали внедрять в деревенский быт лишь в XVIII веке вместе с картофелем, который оставался малораспространенным до последней трети XIX века. До этих усовершенствований в русских деревнях преобладали полуземлянки и курные избы (в деревнях центральной России – вплоть до начала XX века), отапливаемые «по черному»: дым выходил через дверь либо через отверстие в крыше с соответствующими пожарными, легочными и онкологическими последствиями. Сходные последствия имело освещение комнат газовым пламенем в богатых городских домах XIX века: продукты неполного сгорания светильного газа канцерогенны, и желтые лица на портретах того времени могут объясняться не только нестойкостью красок. По данным археологии, массовая кустарная выплавка металлов в средневековье столетиями загрязняла специализированные регионы сильнее, чем металлургические предприятия XIX-XX веков – поэтому прототипами сказочных гномов, кобольдов и троллей вполне могли быть дети-мутанты, находившие себе место при печах и шахтах Европы.

В более отдаленной, но и более превозносимой античности греческим театральным трагедиям сопутствовали реальные человеческие жертвоприношения[*] – которые, впрочем, просуществовали на Земле до середины, а кое-где и до конца XX века н.э. в форме публичных казней. В Древнем Риме театры сменились цирками, где многотысячную аудиторию развлекали гладиаторские бои и состязания колесниц, мало различавшиеся по уровню травматизма участников. В независимых от государства человеческих сообществах всех стран (на недоступных землях, в военных экспедициях, на островах, кораблях и т.д.) автоматически возрождались нравы и обычаи палеолита. В частности, в испанских колониях Карибского бассейна и в английских колониях, впоследствии ставших Североамериканскими Штатами, рабами были не только черные невольники, но и некоторые белые европейцы, так оплатившие свой путь через Атлантику; торговля рабами из коренного населения существовала и в колонизируемой русскими Сибири XVII века[**]. Перечень несоответствия современных штампов общественного сознания историческим фактам можно долго продолжать.

Из стремления объяснить психологические установки жителей прошлых эпох (а первоначально – солдат вермахта на Восточном фронте и персонала лагерей смерти во II мировой войне) в середине XX века возникло направление *психоистории*, представленное и в отечественной литературе[***]. В его основе лежит очевидное соображение о том, что «болельщики» римского боя гладиаторов либо средневековые зрители казней, аплодировавшие палачу (тем более солдаты и крестьяне того времени, которые постоянно рисковали жизнью), вряд ли соответствовали современным психиатрическим нормам. Пластичность человеческого сознания, исследуемая этой дисциплиной, открывает новые возможности для интерпретации исторических фактов. Надо только не забывать, что информация о древних и средневековых зверствах людей дошла до нас из наиболее

[*] см. Еврипид, *Ифигения в Тавриде.*

[**] Т.В. Игнатьева, в книге под ред М.В. Холиной и Л.Н. Шимохиной *Очерки истории г. Енисейска и Енисейского уезда (XVII-XIX в.в.)*, Енисейск, 2009.

[***] А.В. Громов, *Цивилизация Древнего Рима: психология и ментальность*, СПб: Евразия, 2018.

цивилизованных в те времена стран и регионов. О некоторых обычаях в соседних с ними государствах также см. книгу А.В. Громова.

9.6.1. Верификация и математическая обработка исторических данных

Состояние народов и государств характеризуют такие количественные параметры, как площадь занимаемой территории, численность населения и его классов (включая армию), средняя продолжительность жизни, размеры военных и эпидемических потерь, объемы производства важнейших видов продукции, объемы торговли и другие. Исходя из общих соображений, изменение этих параметров во времени позволяет построить их эмпирическую динамику и аппроксимировать ее теми или иными «функциями состояния». К сожалению, для большинства стран мира объективные данные, помимо границ государств, ранее XVII-XVIII веков в основном отсутствуют, а для нескольких наиболее высокоразвитых цивилизаций (Китай, Индия, Древний Рим) они неполны и не всегда надежны. Математическая обработка массивов чисел, которыми располагают историки, начинается с их *верификации*, т.е. проверки достоверности – без которой, например, суммарное количество убитых в текстах Ветхого Завета (как и в официальных сообщениях двух сторон ирано-иракской войны 1980-1988 гг.) означало бы полную депопуляцию региона. Отсутствием надежных количественных данных, в том числе о фундаментальных событиях в истории человечества, объясняются фантомы наподобие «новой хронологии», подрывающие авторитет точных наук в гуманитарном сообществе.

Оценкой демографических параметров прошлого (численности населения, средней продолжительности жизни и репродуктивного периода, который у женщин в неолитическом социуме начинался в 9-10 лет, «брачности» – т.е. наличия пар с детьми, либо промискуитета с заботой всего племени об оставленном жить потомстве, либо их комбинаций – а также среднего числа детей на взрослого индивидуума, вероятности уничтожения «избыточных» детей и стариков и других родоплеменных показателей) занимается *историческая демография*[34]. Хотя численность населения Земли и ее регионов в разные эпохи, как и его динамика, остаются предметом оценок (см. разд. 2.5 и табл. 2.2 в главе 2), важность демографических факторов не оспаривается современной исторической наукой[*].

Быстрый рост человечества, увеличившегося в течение XX века почти в четыре раза, служит основой для гипотезы *ускорения истории*[**], согласно которой плотность исторических событий в единицу времени в XIX-XX веках непрерывно возрастала. Если принять, что скорость процессов в системе из N индивидуумов пропорциональна числу контактов между ними (ограниченному сверху числом ребер полного графа $N(N–1)/2$), такое предположение можно считать обоснованным. С другой стороны, рост численности населения благодаря улучшению жизненных условий (см. разд. 2.5 в гл. 2) в рамках этой

[*] Давление «избыточного» населения Европы как причина крестовых походов XI – XIII веков (с практической точки зрения иррациональных), а затем развития мореплавания с XV в. и последующей колонизации заморских территорий – хороший пример физической по своей сути гипотезы историков. Как и другие материалистические объяснения исторических событий, в крайней форме она игнорирует «духовный фактор», или «коллективное сознание» – иными словами, существование распределенного интеллекта у человеческих масс.

[**] С.П. Капица. *Общая теория роста человечества*. М: Наука, 1999, глава 5.

простой модели должно сопровождаться усложнением межчеловеческих отношений – что на уровне государств может сделать систему неустойчивой.

Один из наиболее достоверных и проверяемых количественных параметров в истории государств – численность их армий и размеры военных потерь. Сопоставление данных о военных кампаниях показало, например, что до начала XX века потери всех армий в войнах были преимущественно *небоевыми*: заболевшими, умершими, дезертировавшими и погибшими от несчастных случаев в полевых лагерях, в разграбленных населенных пунктах и на изнурительных пеших переходах. В начале XIX века небоевые потери армии в походе достигали 500% в год от ее первоначальной численности[*]. К началу XX века, благодаря успехам медицины и военной организации, они снизились до 50% в год. Верификации событий военной истории, включая характеристики использованного в них оружия и компьютерное моделирование сражений, в отечественной исторической науке посвящены исследования Н.В. Митюкова и соавторов (см. [7] в списке рекомендуемо литературы).

Статистический анализ количественных данных и использование междисциплинарных подходов более всего распространены в археологии[**] – где, например, интенсивность хозяйственной жизни города оценивают по плотность *артефактов* (монет, керамических черепков, фрагментов других изделий) в датированном *культурном слое* раскопа. Количественное измерение *коррелятов* исторического процесса и выделение их наиболее существенных комбинаций методами факторного и кластерного анализа, а также другие виды статистической обработки данных – один из важных рабочих инструментов современного историка[***]. Российские исследования в этой области хорошо представлены в публикациях Леонида Иосифовича Бородкина[35] и соавторов.

В некоторых случаях количественные закономерности в эмпирических данных позволяют строить гипотезы о механизме исторических явлений. Так, в статье Джозефа Салеха (2019 г.) сроки правления императоров Древнего Рима были аппроксимированы *распределением Вейбулла*, или комбинацией двух *растянутых экспоненциальных функций* (англ. *stretched exponent*), используемого в инженерных науках для оценки вероятности поломок изделий (см. Приложение П8)

---

[*] Характерный пример – российский поход Наполеона в 1812 г. Французская армия вместе с союзниками к началу вторжения в Россию (23 июня 1812 г.) насчитывала более 600 тыс. человек, а ее численность в занятой Москве при начале отступления (19 октября 1812 г.) составляла 110 тыс. чел. (Половина наполеоновской армии в России находилась на других направлениях). Общая численность войск, вышедших из России в январе 1813 г., оценивается в 60 тыс. чел. При этом потери французов убитыми и ранеными в Бородинском сражении, по разным источникам, составили от 30 до 50 тыс., а за всю войну 60-70 тыс. убитыми. Таким образом, небоевые потери (включая отставших и пленных) лучшей европейской армии в кампании 1812 г. превышали боевые потери в 3-4 раза. Последующие действия Наполеона Бонапарта и возглавляемой им Франции в 1813-1815 гг. могут выглядеть логичными только от их хрестоматийной известности – на деле они составляют предмет психоистории.

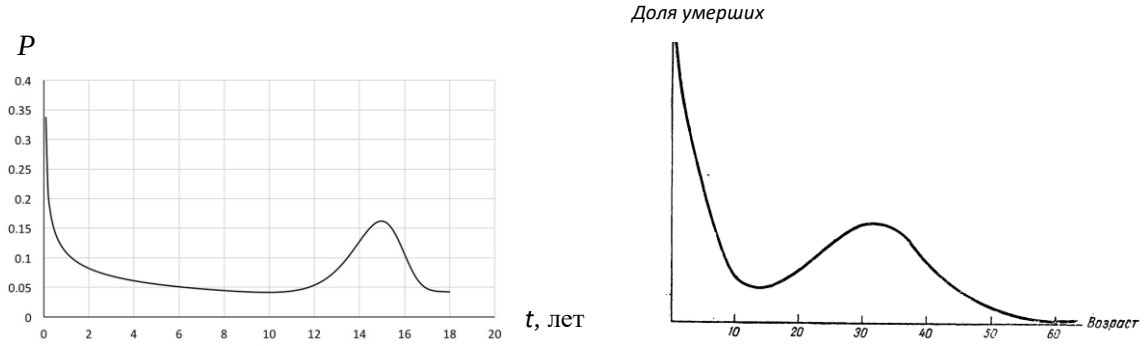
[**] см., например, Д.В. Шмуратко, *Статистические методы в археологических исследованиях: история развития (конец XIX – 60-е гг. XX в.),* https://www.gramota.net/materials/3/2013/5-1/51.html , а также Д.В. Шмуратко, *Статистические методы в археологических исследованиях: история развития (70-е гг. XX в. – начало XXI в.*), https://www.gramota.net/articles/issn_1997-292X_2013_5-2_54.pdf.

[***] Е.Б. Белова, Л.И. Бородкин, И.М. Гарскова, Г.Ф. Изместьева, В.В Лазарев, А.И. Тихонов, *Компьютеризованный статистический анализ для историков. Учебное пособие*, под ред. Л.И. Бородкина и И.М. Гарсковой. М., 1999.

(9.45) $$P(t) = A \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_1}\right)^{\alpha}\right] + B \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta_2}\right)^{\beta}\right],$$

В формуле $P(t)$ – вероятность поломки изделия в момент времени t, $A > B$ и $\beta >> \alpha$ (рис. 9.66 а). Отправной точкой исследования стали большое число и незавидная участь так называемых *солдатских императоров* Рима, средний срок правления которых после провозглашения войском составлял менее одного года. Вероятность насильственной смерти единоличного правителя была удивительно высокой: 43 (62%) из всех 69 императоров единого Рима (до 395 г. н.э.), утвержденных Сенатом, были убиты (большинство), погибли в бою или окончили жизнь самоубийством.

В технических науках распределением (9.45) характеризуют вероятность поломки изделий: максимум при малых t соответствует отказу бракованных деталей, или *приработке*[*], рост вероятности отказа при больших t – поломкам в результате износа; горизонтальный участок между ними – рабочая область эксплуатации изделия. Для римских императоров, переживших два первых критических года «приработки», «максимум износа» приходился на 14-15 лет правления.



(а) (б)

Рисунок 9.66. (а) Вероятность «поломки» *P*(*t*) в зависимости от срока правления римских императоров (J.H. Saleh, *Statistical reliability analysis for a most dangerous occupation: Roman emperor,* Palgrave Communications 2019, 5, 155). (б) Общий вид кривой смертности в эпоху неолита (Б.Ц. Урланис, *Эволюция продолжительности жизни*, М.: Статистика, 1978)

Аналогии правления римских императоров с эксплуатацией техники и вероятностное ограничение его срока вызвали большой интерес у представителей гуманитарных наук. На качественном уровне близкую форму имеют демографические распределения вероятного возраста смерти человека (рис. 9.66 б): разные периоды истории различаются положением основного максимума. Гистограммы продолжительности единоличного правления в ряде стран, включая древний и средневековый Китай[**], а также русские княжества, действительно похожи: для них характерны высокая частотность «поломок» в первый год правления и локальный подъем частотности его окончания в интервалах от 12 до 17 лет и,

[*]В англоязычной технической литературе поломки в результате брака называются *infant mortality*, т.е. «детской смертностью».

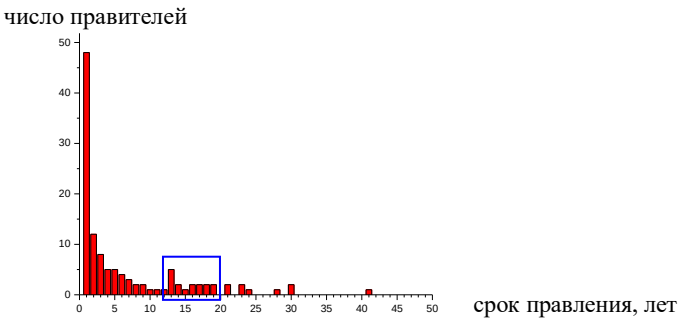
[**]Единоличное правление в Китае тоже было сопряжено с высоким риском. Средняя продолжительность жизни китайских императоров составляла 38 лет (источник – Википедия).

возможно, 21-25 лет (рис. 9.67). В странах с устойчивыми монархическими режимами (средневековая Европа, Российская империя) ранние «отказы» почти отсутствуют*.

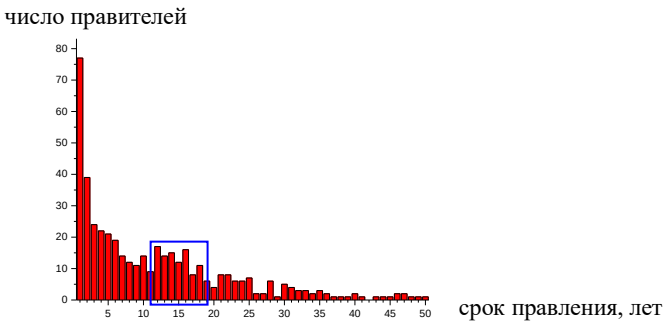
Зависимость вероятности гибели («поломки») общественных и живых организмов, условно показанную на рис. 9.66 а, б, на качественном уровне можно представить суммой двух распределений:

$$P(t) = A \cdot t^{-\alpha} + B \cdot \exp[-\beta(t - t_0)^2],$$

где t_0 – среднее время жизни; A, B, α и β – эмпирические параметры. Первое слагаемое отражает уменьшение вероятности поломки с течением времени, хотя распределение срока жизни вокруг ее средней продолжительности t_0 не обязательно гауссово. В этом смысле «кривые смертности» столь же универсальны для социальных систем, как и закон Ципфа. «Детская смертность» монархических режимов отражает высокий риск при захвате власти в условиях политической турбулентности, а их средний срок жизни может определяться средним временем функционирования поддерживающих структур, т.е. *двора*. Такие структуры при единоличных правителях, близкие по численности (см. число Данбара), существовали у всех народов.



(а)



(б)

Рисунок 9.67. Гистограммы распределений продолжительности правления (а) 117 императоров Древнего Рима и (б) 449 монархов древнего и средневекового Китая (источник: Википедия). Выделена область повышенной частотности окончания срока правления

*Продолжительность правления Октавиана Августа в Древнем Риме (45 лет), Жень-ди и Чунь-ди в средневековом Китае (династия Цин, по 61 году), Людовика XIV (72 года) и Людовика XV (58 лет) во Франции или Ивана Грозного на Руси (50 лет) могут рассматриваться как редкие флуктуации. Монархи-долгожители более характерны для устоявшейся системы власти, но за их длительным царствованием часто следовал тяжелый политический кризис.

9.6.2. «Физическая история»

Это словосочетание редко употребляется в работах историков. По аналогии с термином *физическая география,* мы будем так обозначать влияние климата и рельефа местности на историческое процессы. Воздействия изменений климата на общественную динамику (например, Великое переселение народов в IV – VII веках н.э.) признаны в современных гуманитарных науках. Тем не менее, масштабы таких воздействий еще не вполне установлены, а их механизм не имеет общей интерпретации.

Поток солнечной энергии и климат

С физической точки зрения «живая» оболочка Земли (биосфера) и все ее компоненты, включая человечество в историческом времени, являются *диссипативными структурами*, которые существуют только благодаря внешнему притоку энергии от Солнца и критически зависят от его небольших изменений. Количество лучистой энергии Солнца, падающей на единичную площадь поверхности планеты в единицу времени в точках земной орбиты, или *солнечная постоянная* (англ. *total solar irradiance, TSI*) приблизительно равна 1367 Вт/м^2, то есть 1367 джоулей в секунду на квадратный метр поверхности, перпендикулярной световым лучам. Таким образом, сечению Земли как кругу радиусом 6370 км сообщается примерно $1.74 \cdot 10^{17}$ джоулей солнечной энергии в секунду, или $5.5 \cdot 10^{24}$ Дж в год. Вся энергия, в настоящее время вырабатываемая за год человечеством, составляет $5.1 \cdot 10^{20}$ дж, т.е. примерно 0.01% от потока солнечной энергии (часть которого отражается и рассеивается). Это заставляет усомниться в добросовестности версий об антропогенном характере нынешнего глобального потепления. Благодаря наклону оси вращения Земли к плоскости земной орбиты и сохранению ее ориентации в пространстве (см. школьные курсы географии), суточная освещенность каждого участка земной поверхности в разных точках орбиты неодинакова, чем обусловлена смена времен года.

Варьирование потока солнечной энергии, достигающего поверхности Земли, вызвано космофизическими факторами. В порядке уменьшения масштаба времени им соответствуют

1. Палеоклиматические *циклы Миланковича*, порождаемые *прецессией* и *нутацией* оси вращения планеты (см. разд. 2.2.1 в гл. 2), а также возмущением ее орбиты другими планетами,
2. Нерегулярные *вековые* изменения солнечной постоянной в пределах 0.2-0.3% TSI, протекающие в масштабах столетий,
3. «Быстрые» квазипериодические изменения магнитной активности Солнца, или *циклы солнечной активности.*

Палеоклиматические циклы протекают в масштабах десятков тысяч лет. Для них разработано строгое математическое описание, подтверждаемое содержанием химических элементов-*маркеров* (концентрация которых зависит от среднегодовой температуры) в донных осадках морей и озер, а также в других долговременных отложениях на земной поверхности. Циклы Миланковича, в частности, проявляются как *ледниковые периоды* с сильными изменениями состава земной биосферы – однако эти процессы находятся вне масштабов исторического времени.

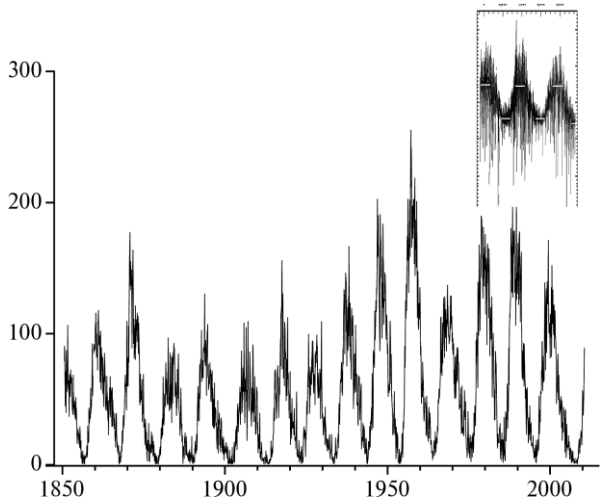


Рисунок 9.68. Циклы активности Солнца в 1850—2010 гг. по среднемесячному количеству солнечных пятен. Адаптировано из http://solarscience.msfc.nasa.gov. На врезке результаты прямых измерений солнечной постоянной космическими аппаратами (см. обзор[36])

Циклы солнечной активности продолжительностью от 8-9 до 16-17 лет (в среднем 11 лет) тоже хорошо изучены. Для них разработаны математические модели *солнечного динамо*[*], которыми воспроизводятся относительные изменения числа солнечных пятен в согласии с результатами прямых измерений интенсивности излучения Солнца с помощью космических аппаратов (рис. 9.68). В этих циклах солнечная постоянная колеблется в пределах 0.1%, но они не влияют на среднегодовую температуру Земли из-за большой тепловой инерции водно-воздушно-континентальной оболочки планеты.

Наибольшим потенциалом воздействия на человеческую историю обладают относительно медленные вековые изменения солнечной постоянной, способные приводить к варьированию среднегодовой температуры Земли в интервалах до 1° с сильными локальными изменениями климата. Эти изменения безусловно влияли на сельскохозяйственное производство, от которого зависели все основные социальные и политические процессы в традиционных обществах. (В наиболее экономически развитых европейских государствах такая зависимость – то есть постоянная угроза голода – была ослаблена лишь благодаря промышленной революции XVIII-XIX веков). Историей зафиксировано множество погодных и климатических катастроф наподобие июльского снега 1604 г. в Московском царстве, который сокрушил экономику и власть Бориса Годунова[**].

Некоторые «медленные», в масштабах исторического времени, флуктуации климата и их влияние на исторические события признаны современной наукой. Но поскольку историки не имеют единого мнения по этому вопросу, дополнительно политизированному из-за заявлений об антропогенном глобальном потеплении (см. обзор[36]) – автор, как и еще в нескольких местах этой книги, представит собственную точку зрения.

---

[*]В.И. Макаров, А.Г. Тлатов А.Г. *Крупномасштабное магнитное поле Солнца и 11-летние циклы активности,* Астрономический журнал. 2000. **77** (11), 858.

[**]Глобальное похолодание XVII-XVIII веков, или *малый ледниковый период*, зафиксировано в картинах голландских мастеров как зимнее катание на коньках по льду каналов, ныне незамерзающих.

Маркером солнечной активности в масштабе столетий служит концентрация космогенных изотопов: ^{10}Be и дейтерия (^{2}H) в ледниках Гренландии и Антарктиды, ^{14}C («радиоуглерода») в годичных кольцах деревьев, а также датированные археологические находки. Корреляцию этих данных с оценками среднегодовой температуры предоставляют физические модели климатологии – которые, однако, требуют калибровки по достоверным температурным рядам. Из-за того, что регулярные метеорологические наблюдения (с середины XIX века) с измерениями температуры насчитывают лишь полтора столетия, подгонка параметров модели к числам не дает однозначных результатов: по одному и тому же ряду *прокси-данных* о концентрации изотопов можно получить существенно разные температурные ряды (рис. 9.69). Из этой неоднозначности возник, например, алармистский график *хоккейной клюшки*, на котором среднегодовая температура Земли быстро повышалась с середины XX века – и это действительно так, – но ее флуктуации в предыдущие столетия, включая «малый ледниковый период» (минимум Маундера), были сглажены (см.[36]). Информацию об активности Солнца содержат годовые числа солнечных пятен, регистрируемые с появления телескопов в начале XVII века (т.е. более 300 лет) и северных сияний, которые фиксировали метеорологи.

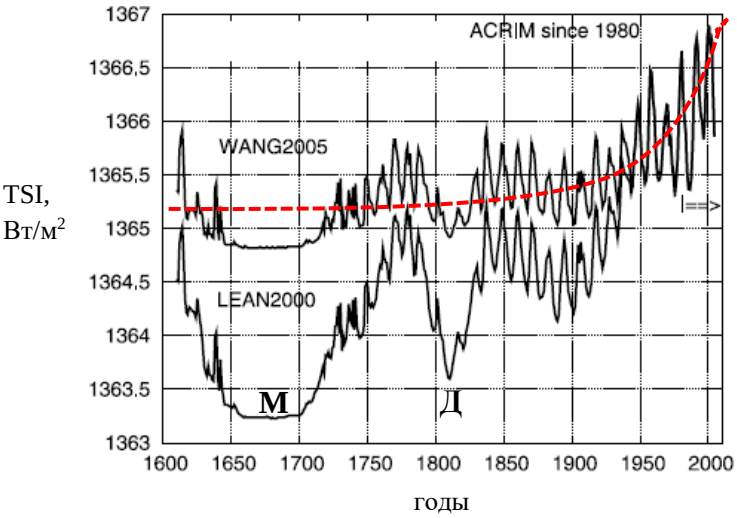


Рисунок 9.69. Вековые изменения солнечной постоянной в двух моделях физической климатологии (по N. Scafetta, B.J. West, *J.Geophys.Res.*, 2007, 112, D24S03). Отмечены минимумы Маундера (М) и Дальтона (Д). Штриховая линия – «хоккейная клюшка»

В русскоязычной литературе одной из первых работ, связавших ход истории с климатическими данными, стал перевод статьи американского астронома Дж. Эдди (1931-2009), где на качественном уровне приводился гипотетический график минимумов и максимумов активности Солнца за пять последних тысячелетий. Максимумы солнечной активности, по предположению автора, сопровождались повышением среднегодовой температуры, способствуя повышению урожайности и развитию локальных сельскохозяйственных цивилизаций; минимумы провоцировали их крушение[*]. Названия температурных экстремумов нашей эры (*римский максимум* в I веке, *римский минимум* IV-VI веков, далее см. Рис. 9.70) стали общепринятыми в физической климатологии. Спуски от максимумов в минимумы совпадают с революциями, крушением династий и

[*]Дж. Эдди, *История об исчезнувших солнечных пятнах*, Усп. физ. наук, 1978, **125**, 315.

разрушительными войнами. Таким образом, «климатический фатализм» в описании исторических событий вплоть до начала XX века вполне может иметь объективную основу.

Солнечная активность и историческая динамика

Историки не оспаривают влияния климата на глобальный социально-политический кризис IV-VI веков н.э. Но климатический подход позволяет объяснить и другие события, пока не имеющие общепринятой интерпретации. Так, период средневекового температурного максимума (или *оптимума*) в X-XII вв. (подтвержденного, в том числе, археоботаническими данными по растительному разнообразию Европы[*]) совпадает по времени как с расцветом городов и ремесел в период Высокого средневековья (англ. *High Middle Ages*), так и с усилением феодальной раздробленности и ослаблением центральной власти. Этим процессом также были охвачены географически далекие от Европы русские княжества X-XII веков, где феодальные отношения были развиты гораздо слабее.

В Западной Европе децентрализация средневековых государств, или *феодальная революция*, сопровождалась интенсивным строительством военных укреплений (замков; англ. *encastellation*). Разобщенность русских княжеств способствовала их поражению от монгольских армий в XIII веке. Надо отметить, что популярное объяснение феодальной раздробленности разделением крупных владений между наследниками неубедительно: наследование существовало задолго до феодальной революции, а майорат (передача всего наследства старшему сыну), препятствующий такому разделению, возник в Европе уже в VIII веке н.э.

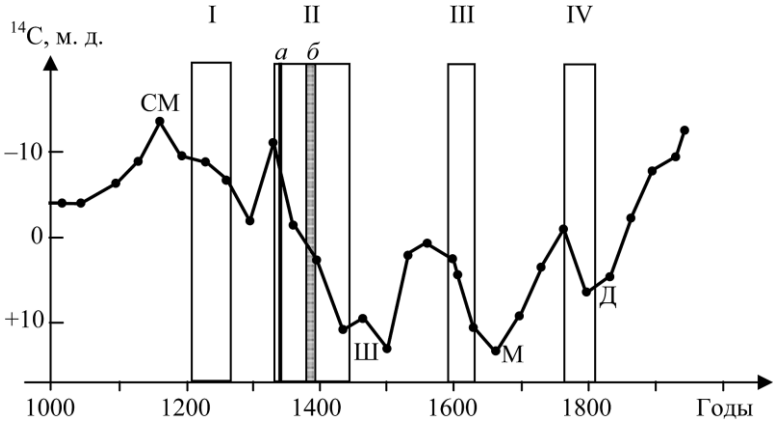


Рисунок 9.70. Ход содержания изотопа ^{14}C в годичных кольцах деревьев (снижается при росте солнечной активности) и экстремумы активности во 2-м тысячелетии: средневековый максимум (СМ), минимумы Шпорера (Ш), Маундера (М) и Дальтона (Д). Полосы: I — монгольские завоевания, II — Столетняя война, эпидемия чумы (а) и крестьянские войны (б) в Европе, падение Византии, III — Смутное время на Руси, Тридцатилетняя война, Английская революция, падение династии Мин; IV — война за независимость США, Великая французская революция, наполеоновские войны (см.[36]).

Упадок государственной власти в средневековом климатическом оптимуме может объясняться ростом доходов местных феодалов, уменьшавшим их зависимость от монарха,

[*] P. Poschlod, *The origin and development of the Central European man-made landscape, habitat and species diversity as affected by climate and its changes – a review*, Interdisciplinaria Archaeologica: Natural Sciences in Archaeology, 2015, **VI**, 197.

в результате бесплатного («от Солнца») повышения продуктивности сельского хозяйства. В компьютерной модели, имитирующей этот процесс, конкуренция агентов-«феодалов» за поступающую извне «ренту» от бесструктурного источника («крестьян») с разумными допущениями о результатах их столкновений, подобно другим моделям конкуренции (см. разд. 9.3.1), воспроизводила стационарное иерархическое распределение доходов (рис. 9.71 а). Одномоментное удвоение потока ренты приводило к метастабильному выравниванию благосостояния «феодалов» (рис. 9.71 б) с постепенным восстановлением иерархии на дальнейших шагах дискретного времени.

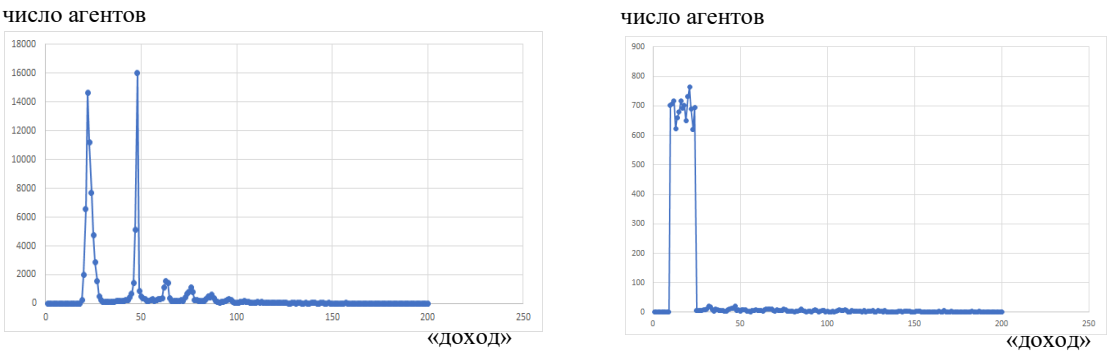


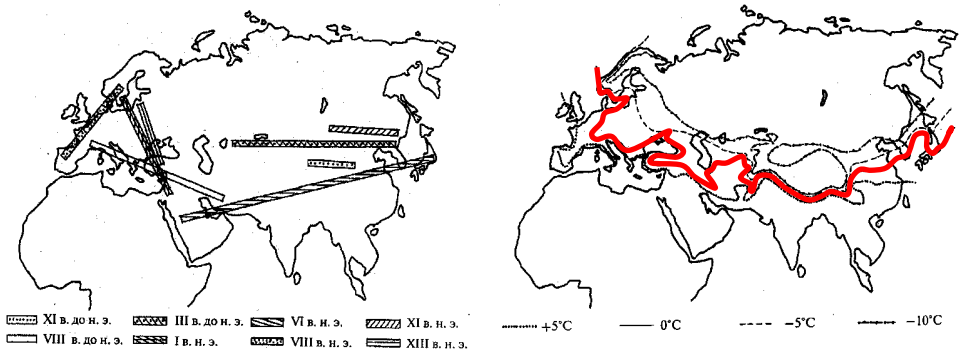
Рисунок 9.71. Распределение по «доходу» в системе *N* конкурирующих агентов: (а) стационарное иерархическое, (б) нестационарное выравненное после удвоения внешнего потока (И.С. Неретин, Ю.Л. Словохотов, Труды 15-й межд. конф. MLSD'2022, с. 970)

Таким образом, усиление феодальной раздробленности может иметь климатическое обоснование. Строительство феодалами военных укреплений стало возможным благодаря увеличению их доходов и необходимым ввиду аналогичного обогащения агрессивных соседей. Последовавшая затем длительная пауза до возрождения централизованных государств в XVI-XVII в.в. могла быть результатом перехода в серию климатических минимумов с сопутствовавшими деструктивными процессами (см. рис. 9.70).

Внутреннюю динамику национально-государственных образований (*этносов*), предположительно направляемую эволюцией «национального духа», с позиций классической исторической науки рассматривал, в частности, Л.Н. Гумилев (1912-1992). В его работах этот процесс объяснялся массовым рождением индивидуумов-лидеров (*пассионариев*) в период формирования этноса и постепенной утратой «гена пассионарности» в его дальнейшем существовании. Весьма фантастической причиной появления лидеров считался *пассионарный толчок*: внешнее воздействие предположительно внеземной природы.

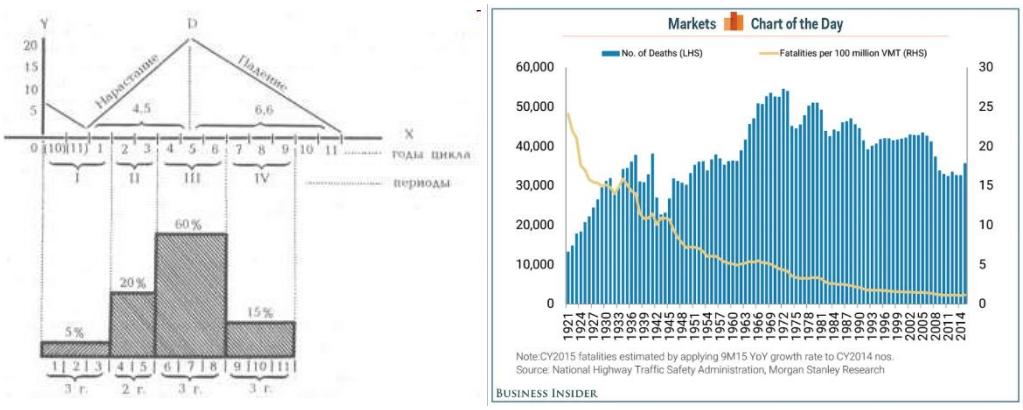
Расположению *зон пассионарных толчков* на карте Евразии, построенному Гумилевым по данным о войнах и восстаниях в XI-XIII веках н.э. (рис. 9.72 а), было дано вполне реалистическое объяснение С.Ю. и А.С. Малковыми ([9] в списке рекомендуемой литературы, с. 228). Географическое расположение этих зон близко к современной нулевой изотерме января (рис. 9.72 б), поэтому сельскохозяйственные цивилизации проживавших там народов должны быть особенно чувствительны к неблагоприятным изменениям климата, отвечая на них стандартным образом: войнами. Этот пример хорошо показывает как перспективность физического подхода к интерпреЗтации исторических фактов, так и

«ограниченную рациональность» научного сообщества: многовековые прицельные воздействия из космоса – совершенно неправдоподобные, учитывая вращение Земли и ее движение по орбите – все же они были зафиксированы в коллективном сознании ученых как неклассическая гипотеза.



(а) (б)

Рисунок 9.72. (а) Расположение «зон пассионарных толчков» XI-XIII в.в. н.э. на карте Евразии по Л.Н. Гумилеву. (б) Ход современной нулевой изотермы января ([9], с. 228, см. также[15])



(а) (б)

Рисунок 9.73. (а) Доли исторических событий в фазах солнечного цикла, средние за 500 лет (А.Л. Чижевский, *Физические факторы исторического процесса*, Калуга: 1924, 76 с.). (б) Число автомобильных катастроф со смертельным исходом в США с 1921 по 2014 г.; сплошная линия – число смертельных исходов на 100 млн. машино-миль проезда (E. Holodny, Business Insider, 20.04.2016, https://www.businessinsider.com/traffic-fatalities-historical-trend-us-2016-4)

Циклы солнечной активности с малыми, в масштабах изменений среднегодовой температуры Земли, периодами в 8–16 лет не оказывают прямого влияния на земной климат. Однако максимумы пятнообразования на Солнце в 1850-2010 гг. на рис. 9.68 совпадают по времени с крупнейшими событий европейской и мировой истории: франко-прусской войной 1870-71 гг., первой русской революцией 1905-06 гг., началом мирового экономического кризиса в 1929 г., началом Второй мировой войны и «холодной войны», крушением колониальных империй, распадом СССР. По данным *историометрических таблиц*, опубликованных в 1924 г. А.Л. Чижевским по результатам своей кандидатской диссертации, на трехлетние промежутки максимальной активности в солнечных циклах приходится около 60% всех зафиксированных исторических событий за 500-летний период

(рис. 9.73 а). В 1930-е годы Чижевский и его зарубежные коллеги установили достоверные корреляции магнитной активности Солнца с подъемом заболеваемости и всплеском психических расстройств[37], объясняющие повышенную массовую возбудимость в максимумах солнечных циклов. С этими максимумами совпадают максимальные годовые количества автомобильных аварий со смертельным исходом в США во второй половине XX века (рис. 9.73 б). Таким образом, циклы солнечной активности могут вносить (и, по-видимому, вносят) квазипериодическую модуляцию в историко-экономическую динамику: они провоцируют кризисные явления в социальных системах, которые по своей природе большую часть времени находятся в околокритических состояниях (см. разд. 2.5 главы 2).

9.6.3. Математическое моделирование исторических процессов

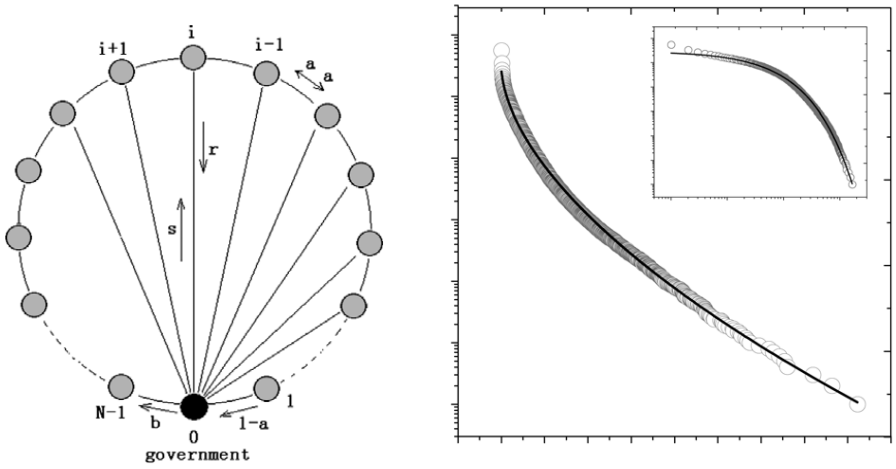
– Я историк, – подтвердил ученый…
– Сегодня вечером на Патриарших будет интересная история!
Михаил Булгаков, «Мастер и Маргарита»

Рассмотренные в этой и в предыдущей главах методы «естественнонаучного» моделирования экономических, социальных и политических явлений применяются также к исследованиям исторических процессов. Хотя эти работы существенно ограничены дефицитом достоверных численных данных (см. разд. 9.6.1), в последние десятилетия здесь наблюдается серьезный прогресс. Термин *математическая история* постепенно становится официальным названием междисциплинарного раздела исторической науки, где используются, в том числе, методы математической физики. Наиболее серьезным (и не всегда декларируемым) практическим аспектом таких работ, по-видимому, является проверка работоспособности существующих схем экономического, политического и военного моделирования на обширном историческом материале разного объема и полноты.

Одним из примеров применения математических моделей для интерпретации исторических событий может служить анализ статистики войн между политическими субъектами Китая при династиях Мин и Цин (1007 войн в период с 1363 по 1911 г. н.э.) на основе модифицированной модели Бака-Снеппена (см. рис. 9.57 а). По данным историков, распределение длительности межвоенных периодов, вместо обратной степенной зависимости, имело вид «растянутой экспоненты» (см. (9.45)), не спрямляемой в двойном логарифмическом масштабе

$$P(x) = A\ exp(-Bx^{\alpha}), \tag{9.46}$$

где $P(x)$ – частотность интервала $x = \Delta t$; A, B и α – параметры модели. Такое распределение удалось воспроизвести в «трофическом цикле» агентов, изображавших политических субъектов, часть которых была дополнительно связана с центральным правительством (рис. 9.74 а). Агентам случайным образом приписывался параметр *готовности к войне* $v_i \in [0, 1]$. На каждом шаге дискретного времени агент с максимальным параметром $v_j = \max\{v_i\}$ «вступал в войну» с одним из связанных с ним агентов, в результате чего на следующем шаге их параметры v_i, v_j, тоже случайным образом принимали другие значения из отрезка [0, 1], Модель воспроизводила распределение (9.46) частотности межвоенных интервалов (Рис. 9.74 б). При удалении «центра силы» восстанавливалось обратное степенное распределение модели Бака-Снеппена.



(а) (б)

Рисунок 9.74. (а) Модифицированная модель Бака-Снеппена. (б) Статистика войн между политическими субъектами Китая в 1363-1911 гг.: распределение частотности *P*(*t*) (ордината) продолжительности межвоенного периода в полулогарифмическом масштабе, на врезке в двойном логарифмическом масштабе. Прозрачные круги – фактические данные (D.-H. Tang, X.-P. Han, B.-H. Wang, *Stretched exponential distribution of recurrent time of wars in China*, Physica A, 2010, 389, 2637).

Еще одним источником относительно достоверной информации об историческом прошлом служит экономическая и бухгалтерская документация. Анализ экономических параметров предприятий и общественных слоев с 1960-х годов называется *клиометрией*, или экономической историей. Математическое моделирование иногда позволяет здесь по-новому интерпретировать хорошо известные факты. Так, анализ производительности сельского хозяйства в США середины XIX века привел одного из американских основателей клиометрии Роберта Фогеля (1926-2013) и его соавторов к выводу, полностью противоречившему их личным убеждениям: хозяйства плантаторов Юга, применявших массовый рабский труд, оказались существенно эффективнее, чем у свободных фермеров Севера[*]. Анализу динамики цен на российских биржах в начале XX века посвящена серия работ Л.И. Бородкина и соавт., выполненных на кафедре исторической информатики МГУ.[**] К обработке данных в экономической истории примыкают анализ и моделирование в исторической демографии и в военной истории (см. [7] в рекомендуемой литературе), где тоже имеется достаточно много достоверной информации.

Одним из первых отечественных исследований в области математической истории стало компьютерно-игровое моделирование *Пелопонесской войны* 431–403 гг. до н.э.: наиболее разрушительного внутреннего конфликта в Древней Греции между Делосским союзом городов-государств, возглавляемом Афинами, и Пелопонесским союзом, которым руководила Спарта (рис. 9.75). Эта война, в которой Афины потерпели поражение, истощила ресурсы всех ее участников; последовавший за ней длительный период

[*] R.W. Fogel, S.L. Engerman, *Explaining the relative efficiency of slave agriculture in Antebellum South,* Amer. Econ. Rev. 1977, **67** (3), 275.

[**] А.Ю. Андреев, Л.И. Бородкин, А.В. Коновалова, *Динамика котировок нефтяных бумаг на Петербургской фондовой бирже в начале XX века: хаос или предсказуемость?* Инф. бюлл. ассоциации «История и компьютер», 2003, №31, 207.

политической нестабильности завершился подчинением греческих полисов Македонии в IV веке до н.э.

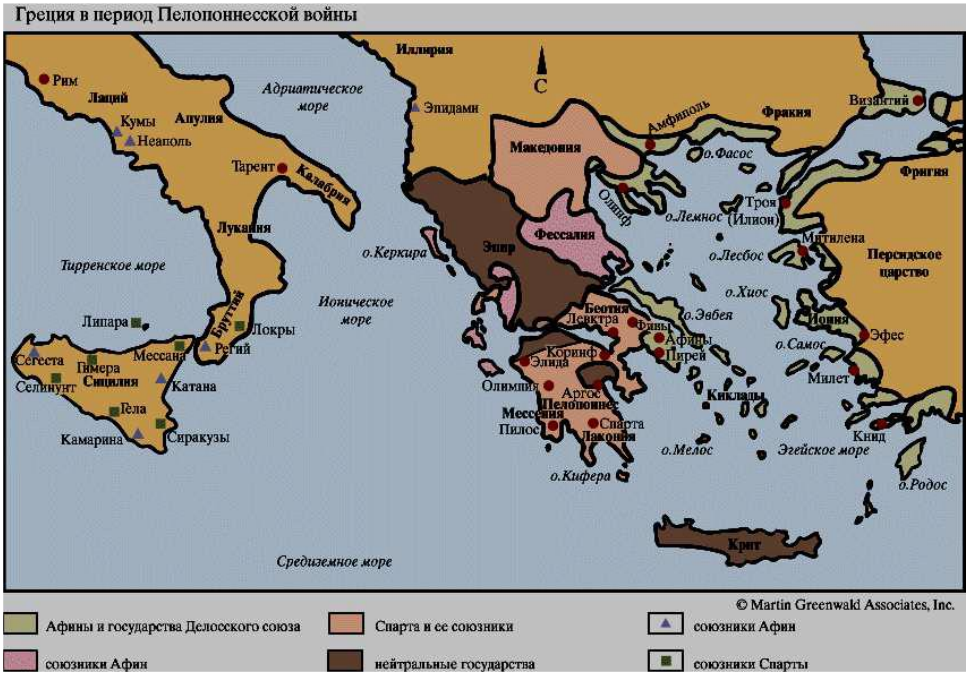


Рисунок 9.75. Противоборствующие стороны в Пелопонесской войне 431-403 г. до н.э. (по кн. Н.В. Белотелов, Ю.И. Бродский, Ю.Г. Павловский, *Сложность. Математическое моделирование. Гуманитарный анализ: исследование исторических, военных, социально-экономических и политических процессов*, М.: ЛИБРОКОМ, 2009; стр. 59-90).

В 1970-е годы в совместном исследовании Вычислительного центра АН СССР и исторического факультета МГУ была построена развернутая математическая модель системы «агрегированных» древнегреческих полисов (условная Аттика против условных Спарты, Коринфа и Фив) и на ее основе проведена серия компьютерных экспериментов. В базисном упрощенном варианте модель воспроизводила динамику произведенного продукта и благосостояния (денег) у населения n полисов, состоявшего из трех категорий: государственной (включая армию), ремесленников и крестьян. Рабы приравнивались к имуществу – требующему, однако, расходов на питание; произведенный ими продукт включался в общий продукт ремесленников. Для каждого (k-го) полиса и каждой (i-й) категории населения составлялись балансовые разностные уравнения по двум видам обобщенного продукта Z, сельскохозяйственному и ремесленному, которые имели вид

$$(9.47)\quad Z_{ik}(t+1) = Z_{ik}(t) + U_{ik}(t) - N_k(t)P_{ik}(t) - N_k{}^{(s)}(t)P_{ik}{}^{(s)}(t) + B_{ik}(t) - S_{ik}(t),$$

где $Z(t+1)$ и $Z(t)$ – соответственно запасы продукта в t+1-й и в предыдущий год,
$U(t)$ – продукт, произведенный в год t; для государственной категории населения $U_{1k} = 0$,
$N_k(t)$ и $N_k{}^{(s)}(t)$ – число жителей и число рабов в k-м полисе в год t, $P_{ik}(t)$ и $P_{ik}{}^{(s)}(t)$ – соответственно их нормы потребления,
$B_{ik}(t)$ и $S_{ik}(t)$ объемы купленного и проданного в полисе продукта в год t.

К системе уравнений вида (9.47), где $i = 1, 2, 3$ и $k = 1, 2, \ldots, n$, добавлялись балансы произведенных (из серебра, добытого на рудниках), вырученных и потраченных денег,

погибшего на войне и родившегося населения, умерших, захваченных на войне рабов и т.д. Учитывались потери от военных действий в виде ущерба производительности полиса и плодородию земли.

В основной модели производство и торговля были детализированы по нескольким видам продукции. Данные для многих параметров этих уравнений отсутствовали; их значение устанавливали по экспертным оценкам историков. Решения экономического, политического и военного характера также принимали *эксперты* на основании результатов расчетов по каждому году – что сближало схему исследований с деловыми и военными штабными играми.

Компьютерные эксперименты с моделью, состоящей из более 2 тыс. уравнений, предсказывали нарастание кризиса системы древнегреческих полисов, который привел к войне, вследствие растущей ремесленной продукции Афин при стабильном сельскохозяйственном производстве (после того, как были заняты все земли, пригодные к обработке), а также из-за положительной обратной связи войн с увеличением числа рабов, производством ремесленных товаров и спросом на сельскохозяйственную продукцию. Надо заметить, что в системах из большого числа составленных *ad hoc* взаимозависимых уравнений, как правило, имеются положительные обратные связи, приводящие к расходимости результатов расчета (см. обсуждение рис. 6.14 в главе 6). Расчеты показали, что материальные потери Афин в первые 5 лет войны были тяжелее потерь противника[38].

Результат моделирования (победа Афин или Спарты) в имеющейся у автора литературе не приводился. Главной целью компьютерных экспериментов ВЦ АН СССР была, вероятно, не сама Пелопонесская война, а возможность испытать крупномасштабные расчетно-игровые модели, создаваемые прежде всего для управления экономикой и военными действиями, на описании периода древней истории с большим числом плохо определенных переменных. Эта практическая необходимость лежит в основе большинства, если не всех работ по моделированию исторических процессов и систем, в которых они протекают.

В современной области математической истории обычно выделяют три рода моделей: *статистические, аналитические* и *имитационные*. Статистическое моделирование исторических процессов проводится после верификации и обработки эмпирических данных, как обсуждалось выше в разд. 9.6.1. Этот подход, основанный на математических методах многомерной регрессии, позволяет реконструировать некоторые отсутствующие данные методом *линейной интерполяции* (либо его более сложными аналогами), методом факторного анализа выделять комбинации измеряемых параметров, объясняющие большую часть данных, выявлять сильно коррелирующие параметры, которые могут быть взаимозаменяемы при реконструкции того или иного процесса – а в некоторых случаях, как в примере со статистикой продолжительности правления императоров, получать новую информацию о возможном механизме исторических явлений. Имитационное моделирование состоит в численном решении большой системы алгебраических и разностных уравнений с набором «подгоночных» параметров, что позволяет связать между собой разные массивы данных и воспроизвести динамику системы в дискретном времени. Наконец, при аналитическом моделировании исторический процесс переводят в небольшое число дифференциальных уравнений, решаемых аналитически либо численно. Для этого в

настоящее время используют компьютерные программы и платформы – такие как Mathcad, MATLAB, Mathematica и другие.

Исследование конкретных исторических процессов часто бывает комплексными: в работах используют многие или все доступные методы анализа данных. Прежде всего это вызвано неполнотой (а то и отсутствием) массивов достоверной информации для некоторых событий и эпох, обсуждаемых классической исторической наукой. По той же причине выбор переменных и составление уравнений при моделировании исторических процессов является весьма сложной задачей. Так в компьютерную эру проявляется специфика интуитивной работы историка.

Отечественные работы по математическому моделированию исторической динамики были продолжены в 1990-х годы Д.С. Чернавским, С.Ю. Малковым, А.В. Коротаевым и другими авторами. Систематические исследования в области математической истории, или *клиодинамики*, проводит американский математик российского происхождения Петр Валентинович Турчин, основатель и главный редактор научного журнала Cliodynamics[*]. Также с его участием создан банк данных Seshat[**] (по имени древнеегипетской богини мудрости), где содержится археологическая и историческая количественная информация о независимых политических единицах (*политиях*) за 10 тысячелетий документированной истории человечества. В 2022-23 гг. на этой основе заявлен проект CrisisDB, посвященный анализу *поликризисных* явлений в истории человечества, динамики их развития и, в ряде примеров, успешного преодоления кризисов в историческом прошлом[***]. Современное состояние математической истории хорошо отражает книга П.В. Турчина «Историческая динамика» ([9] в списке рекомендуемой литературы), где представлены обзор зарубежных публикаций и его собственные результаты, а также некоторые статьи российских авторов.

Ключевыми переменными в математической истории обычно служат численность населения, цены и объемы производимых и перемещаемых товаров, численность воюющих армий, размер военных потерь и некоторые другие параметры социальных систем в историческом прошлом (см. также [7] в рекомендованной литературе). Взаимодействие экономических и политических компонентов государств, по обычной практике имитационного моделирования и деловых (военных) игр, воспроизводят блок-схемы, подобные показанной на рис. 9.55, но обычно более сложные. Результаты модельных расчетов сопоставляются с историческими данными.

Компьютерные моделирование, в частности, использовали при анализе динамики образования средневековых государств Европы как результата «борьбы» малых доменов произвольной формы[****] (рис. 9.76 а) с учетом миграции населения[39]. В модели, заимствованной из описания конкуренции видов в экологической нише, изменение относительных «сил» $\{u_i\}$ доменов определялись системой дифференциальных уравнений

[*] *Cliodynamics: The Journal of Quantitative History and Cultural Evolution,* https://escholarship.org/uc/irows_cliodynamics

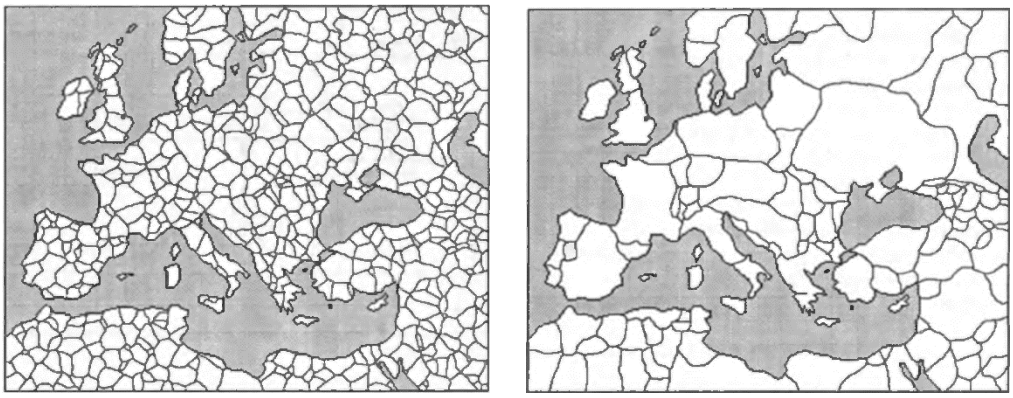
[**] P. Turchin, et al., *Seshat: The Global History Databank*, Cliodynamics, 2015, **6** (1), 77.

[***] https://seshatdatabank.info/seshat-projects/crisis-and-recovery-database/exploring-polycrises/

[****] В более ранней модели европейских авторов, также перенесенной из математической биологии, территория Европы была разбита на квадраты 40×40 км с аналогичным конечным результатом (см. [9], рис. 2.4).

(9.48) $$\frac{\partial u_i}{\partial t} = G_i(u_i, x, y) - A_i(u_i, x, y) - \sum B_{ij}(u_i, u_j) + D_i(u_i, x, y),$$

где слагаемое $G_i(u_i, x, y)$ отвечает воспроизводству населения, $A_i(u_i, x, y)$ – его убыли, сумма $B_{ij}(u_i, u_j)$ – конкурентной борьбе, $D_i(u_i, x, y)$ – миграции (*диффузии*) между доменами с учетом «проводимости» ландшафта. В отличие от моделирования Пелопонесской войны, динамика системы задавалась алгоритмически: при достижении порогового значения $u_i/u_j = \delta > 1$ j-й домен поглощался i-м и их население суммировалось. Компьютерное моделирование воспроизводило слияние доменов в области, близкие к границам средневековых государств, подтверждая географическую обусловленность этих границ (рис. 9.76 б, также см. рис. 9.51).



(а) (б)

Рисунок 9.76. Моделирование борьбы политико-хозяйственных доменов на ландшафте Европы (А.С. Малков, Г.Г. Малинецкий, Д.С. Чернавский, [9], с.с 304-316, см. текст). Границы (а) после 300 и (б) после 4000 тактов дискретного времени

Системой дифференциальных уравнений описывали динамику производства и распространения товаров в Евразии при заданных фактических границах средневековых государств в разные периоды времени. В модели предполагалось, что поток товаров J направлен по градиенту цены p

$$J = k \cdot \mathrm{grad}\, p.$$

где k – «товаропроводность» ландшафта, вводились потери на *транспортное трение* и другие квазифизические параметры. Эта модель позволила реконструировать *Великий Шелковый путь*, существовавший более тысячелетия, как пучок близких траекторий между источником товара в Китае и точками потребления в Европе, и воспроизвести его деградацию при снижении относительной товаропроводности из-за конкуренции морских перевозок с наступлением Нового Времени.[39]

Другая переменная, допускающая проверку на историческом материале – численность $N(t)$ населения в государствах. Простейшие виды динамики, рассмотренные нами ранее – мальтузианская

$$N(t) = N_0 e^{kt},$$

логистическая

$$N(t) = \frac{2N_0}{1 + e^{-kt}}$$

и обратная степенная (гиперболическая)

$$N(t) = N_0(t_0 - t)^{-\gamma}$$

(где $N_0 = N(t{=}0)$, см. модель Кремера в разделе 2.5 в гл. 2) лишь весьма приблизительно воспроизводят динамику численности населения. Модель Лотки-Вольтерра, которая описывает численность двух связанных популяций

$$dX/dt = a_1X - b_1XY$$
$$dY/dt = -a_2Y + b_2XY,$$

предсказывает регулярные колебания X и Y, что на количественном уровне плохо согласуется с наблюдаемыми нерегулярными циклами в системах «население + правящий класс» (см. рис. 4.8 в гл. 4).

«Базисная» экономико-демографическая модель Турчина для докапиталистических аграрных государства состоит из двух дифференциальных уравнений

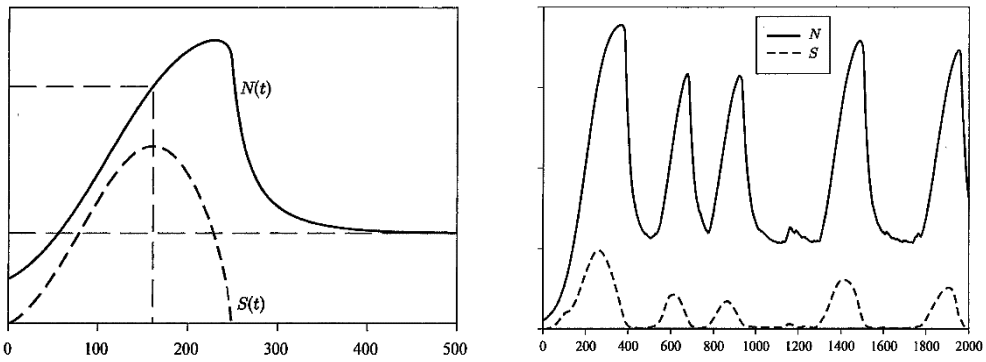
(9.49 а) $$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{N}{k(S)}\right)$$

(9.49 б) $$\frac{dS}{dt} = N\left(1 - \frac{N}{k(S)}\right) - bN,$$

где N – численность населения, S – ресурсы государства, $k(S)$ – «емкость среды», или равновесная численность населения при S = const:

(9.49 в) $$k(S) = k_0\left(1 + c\frac{S}{d+S}\right),$$

k_0 – емкость среды в отсутствие государства, a, b, c, d – другие параметры модели.



(а) (б)

Рисунок 9.77. Динамика модели (9.49 а-в) (а) в детерминистском и (б) в стохастическом вариантах. По абсциссе – число тактов дискретного времени ([9], гл. 7, раздел 7.2.1)

Уравнение (9.49 а) при $N/k = 0$ предсказывает экспоненциальный рост, а при k = const логистическую кривую. В уравнении (9.49 б) параметр b соответствует норме расходов ресурсов на одного жителя. Поскольку $k(S)$ – возрастающая функция, увеличение S увеличивает производную в (9.49 а), т.е. способствует росту населения, но прирост ресурсов с увеличением N замедляется, снижая их объем на душу населения N/S. Начиная с определенной критической численности населения N_c, производная dS/dt в (9.49) становится отрицательной, т.е. ресурсы государства уменьшаются. Далее государство

гибнет ($S = 0$), а численность населения N приближается сверху к логистическому пределу (см. рис. 2.2 в гл. 2) для «первобытных» условий (рис. 9.77 а). Если к N и S добавляется случайная составляющая, государство затем «самозарождается», на первом этапе увеличивая население, и модель предсказывает стохастические циклы (рис. 9.77 б).

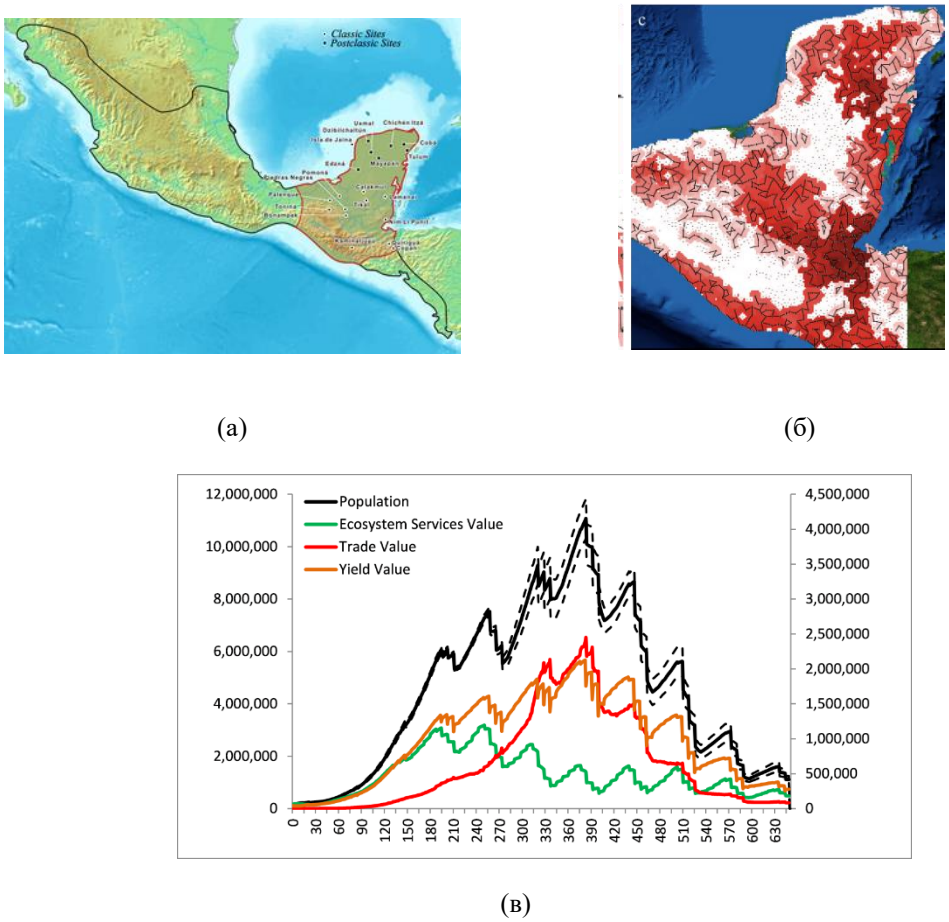
В 70-е годы прошлого века автору этой книги, тогда студенту химфака МГУ, сообщили в курсе физической химии, что феноменологические модели, содержащие более трех произвольно подбираемых параметров, непригодны для работы. Хотя многие модели междисциплинарной физики не выдерживают этого требования, рис. 9.77 б воспроизводит «стилизованную» динамику традиционных обществ, из-за аграрного перенаселения проходящих через периоды кризисов.

Реальные циклы численности населения на примере средневекового Египта можно видеть в гл. 4 на рис. 4.8 б, заимствованном из статьи А.В. Коротаева ([9], стр. 347-365). Для нелинейных уравнений, подобных (9.49 а-в) и более сложных (с дополнительными параметрами) в работах по математической истории определяют стационарные точки, аттракторы и типы решений (см. книгу [9], главы 7 и 8). Результаты моделирования сопоставляются с количественными данными в описании «вековых» демографических циклов (см. [9], гл. 9 и стр. 339-346, а также книгу[40]).

В некоторых моделях математической истории непрерывные переменные могут не иметь физического и даже какого-либо количественного обоснования. Так, в политико-экономической модели Турчина выживаемость государства определяется *асабией* по ибн Хальдуну (см. начало разд. 9.5), включенной в дифференциальные уравнения в качестве переменной (книга [9], главы 3 и 6). С физической точки зрения этот подход выглядит парадоксально, однако он используется в социологии малых групп (см. разд. 9.3.1), где в уравнения входят такие «гуманитарные» параметры, как уровень сотрудничества, доброжелательность и сплоченность группы. Введение переменных, не имеющих количественной меры, не обязательно свидетельствует о несовершенстве моделей: эти переменные косвенно отражают распределенный интеллект социальных систем, который в науках об обществе пока не умеют достоверно оценивать (см. далее часть 3).

Компьютерные эксперименты в математической истории к настоящему времени достигли уровня, позволяющего моделировать основные аспекты динамики стран и регионов во всем историческом времени. Одним из первых комплексных исследований в этой области стал американский проект «искусственных индейцев» (*artificial Anasazi*) 2002-2008 гг.: реконструкция исторической динамики индейского народа анасази, проживавшего в средние века на территории США, с применением данных климатологии, археологии и агентных моделей*. Эти исследования были продолжены комплексной компьютерной моделью *MayaSim*, которая воспроизвела динамику древней цивилизации майя в рамках географической информационной системы (ГИС, см. разд. 8.5 и рис. 8.41 в главе 8).

* M.A. Janssen, *Understanding artificial Anasazi*, J. Artific. Soc. Social Simul., 2008, **12** (4), 13.



(а) (б)

(в)

Рисунок 9.78. (а) Географическое положение государств майя. (б) Интенсивность торговли (цвет) между территориальными агентами, объединенными в сеть, в модели MayaSim. (в) Изменения глобальных параметров модели в компьютерных экспериментах (650 тактов, 1 такт = 2 года) (S. Herbert, *MayaSim: An agent-based model of the ancient Maya social-ecological system*, J. Artific. Soc. Social Simul., 2013, 16 (4), 11)

История цивилизации майя, занимавшей в Центральной Америке полуостров Юкатан и прилегающие территории (Рис. 9.78 а), насчитывает более двух тысячелетий, подразделяясь на три периода: доклассический (XI в. до н.э. – III в. н.э.), классический (III – X в.в. н.э.) и постклассический (X – XVI в.в. н.э). Классический период расцвета цивилизация майя оставил множество памятников архитектуры, письменности, астрономии и искусства. В X веке н.э. он сменился упадком, который разрушил единую социально-политическую систему майя задолго до появления испанских конкистадоров в 1524 г.

Расчет динамики цивилизации майя проводился на основе агентной модели в программной среде NetLogo и соответствующей ГИС с разбиением территории на ячейки площадью 20 км^2. Расчет включал моделирование гидрологической и экологической среды, на фоне которой в ячейках возникали агенты, производящие сельскохозяйственную продукцию и объединенные в сеть обмена товаров (рис. 9.78 б). Компьютерные эксперименты показали циклическую динамику с кризисами, повторяющимися через 150-200 лет, которая завершилась упадком производства и сокращением населения от совокупного воздействия истощения почв, снижения урожайности и деградации инфраструктуры (рис. 9.78 в). Компьютерные реконструкции древних цивилизаций являются частью *синтеза популяций*: области агентных моделей и программного

обеспечения, которые позволяют моделировать как исторические, так и современные социальные процессы[41].

Литература к разделу 9.6.

[34]Я.Г. Риер, *Историческая демография*, Могилев: Гос. Университет им. А.А.Кулешова, Республика Беларусь, 2006; https://libr.msu.by/handle/123456789/695.

[35] Л.И. Бородкин, *Моделирование исторических процессов: от реконструкции реальности к анализу альтернатив*, СПб: Алетейя, 2016.

[36] Ю.Л. Словохотов, *Физика и социофизика*, Проблемы управления, 2012, №1, 2.

[37] А.Л. Чижевский, *Космический пульс жизни: Земля в объятиях Солнца. Гелиотараксия*. М.: Мысль, 1995.

[38] А.С. Гусейнова, Ю.Н. Павловский, В.А. Устинов, *Опыт имитационного моделирования исторического процесса,* М:: Наука, 1984.

[39] А.С. Малков, Г.Г. Малинецкий, Д.С. Чернавский, *О математическом моделировании исторических процессов: аграрные общества*, в кн. [9], с. 304.

[40] П.В. Турчин, С.А. Нефедов, *Вековые циклы* (пер. с англ.), https://www.academia.edu/10033674/, также см. [9], с. 339.

[41] K. Chapuis, P. Taillandier, A. Drogoul, *Generation of Synthetic Populations in Social Simulations: A Review of Methods and Practices*, J. Artific. Soc. Social Simul., 2022, **25** (2), 6.

Подводя итог обширному материалу этой главы, следует отметить, что математизация и проникновение физических методов – объективный процесс в эволюции современных гуманитарных наук за возможным исключением философии. Глубина проникновения и плодотворность результатов различны в разных дисциплинах, но сближение наук о человеке и обществе с естественными науками безусловно происходит начиная со второй половины XIX века. Такие области традиционно гуманитарного знания, как лингвистика, социология, политология и примыкающие к ним направления, по глубине формализации и широте применения математического аппарата уже сравнимы с экономическими и инженерными дисциплинами, образуя область *социоинженерии*. Прикладной аспект междисциплинарных исследований, восходящих к экспериментальной и теоретической физике – прогнозирование экономических и социальных процессов для управления ими – подчеркивает важность «физики общества» в современном мире и обещает дальнейшее развитие этой области знаний.

Трудности реализации физического подхода в науках о человеке и обществе состоят как в необходимости новых методов регистрации и обработки эмпирических данных – а во многих случаях в отсутствии достоверных количественных параметров (история) – так и в новых интегральных факторах, которые проявляются в мультиагентных социальных системах, отличая их от «неживых» многочастичных систем. Одним из таких факторов является распределенный интеллект мультиагентной системы, для которого пока не предложены методы непосредственного измерения и прямого учета в моделях. Косвенно это выражается в использовании «гуманитарных переменных» в моделировании общественных систем и в разработке новых математических инструментов для формализации подобных объектов. По нашему мнению, именно на таком пути описание социоэкономических и других социальных явлений станет по-настоящему физическим, то есть способным строить количественно обоснованные модели и давать сбывающиеся прогнозы. Менее ясны перспективы распространения квантовой и релятивистской теории на гуманитарное знание, хотя подобные работы тоже относятся к междисциплинарной физике. Все эти вопросы будут рассмотрены в третьей части.

Рекомендуемая литература

1. А.К. Гуц, Ю.В. Фролова, *Математические методы в социологии*, М.: ЛКИ, 2007.
2. Ю.М. Плотинский, *Модели социальных процессов*, 2-е изд., М.: Логос, 2001.
3. В.П. Култыгин, *Классическая социология*, М: Наука, 2000.
4. А.П. Михайлов, А.П. Петров, *Математические модели системы «человек-общество»*, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022.
5. О.В. Чумак, *Энтропии и фракталы в анализе данных*, М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011.
6. А.Ю. Мельвиль и соавт., *Как измерить и сравнить уровни демократического развития в разных странах?* М.: МГИМО-Университет, 2008.
7. Н.В. Митюков, *Имитационное моделирование в военной истории*, М.: ЛКИ, 2007.
8. П. Бак, *Как работает природа: теория самоорганизованной критичности*, М.: ЛИБРОКОМ, 2014.
9. П.В. Турчин. *Историческая динамика: на пути к теоретической истории*, 2-е изд., М: ЛКИ, 2010.

ЧАСТЬ III. РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В предыдущих главах этой книги неоднократно отмечалась способность «живых частиц» и образуемых ими систем к автономной обработке информации и ее использованию для достижения некоторых собственных целей – то есть *интеллект* в широком смысле данного весьма расплывчатого понятия. В квазифизических моделях эту особенность социальных систем учитывают косвенно: через виртуальные силы социального поля (глава 5), введением графов и сетей, где ребра или дуги отвечают взаимодействиям между агентами (главы 6, 8 и 9), стремлением агентов и мультиагентных систем к максимуму абстрактной полезности (главы 7 и 8) и др. Во всех случаях *целеполагание* агентов, как одно из важнейших проявлений интеллекта, принимается как эмпирический факт, выраженный формулами – нередко произвольными либо заимствованными из курсов физики. Почти на таком же эмпирическом уровне в теории игр (глава 7) «исчисляются» стратегии взаимодействующих сторон: сами по себе они безусловно выработаны с участием интеллекта, но их фиксированный набор задается в начальных условиях для нахождения стратегии или комбинации стратегий, наилучшей по некоторому параметру – снова полезности в той или иной форме. Возникновение новых, или *эмерджентных*, качеств системы (англ. *emergent*: спонтанно возникающий, рождающийся) – роение пчел, круговая оборона копытных при появлении хищника, модернизация производства на предприятии и многие другие хорошо известные явления – такими расчетами не воспроизводятся: выбираемые стратегии должны быть изначально «заложены» в модель.

В этой, последней части книги будут обсуждаться такие формальные схемы описания социальных систем, где интеллект непосредственно учитывается или моделируется. В 10-й главе мы дадим рабочее определение интеллекта и обсудим его простейшие «кооперативные» проявления в биологических системах, частично уже рассмотренные в гл. 5. Здесь же будут представлены основные положения инженерной *теории автоматического управления (ТАУ)*, задающей динамику автономных технических устройств, и используемый в ней инструмент свертки, или «сжатия», информации: *нечеткие множества*. В главе 11 мы кратко рассмотрим современные версии искусственного интеллекта (ИИ): искусственные нейронные сети и схемы, основанные на математической логике (для чего понадобится знакомство с ее основными понятиями), а также виды распределенного интеллекта (РИ) в разных социальных системах и методы его компьютерной имитации. В 12-й главе будут обсуждаться возможности синтеза качественных представлений об интеллекте (как индивидуальном, так и коллективном) с положениями ТАУ, которые позволяют анализировать структуру образов физической реальности в *пространстве представлений*, открывая путь к полноценному моделированию работы человеческого ума. Как и во всех предыдущих главах, наше изложение иллюстрируют примеры социальных систем и процессов – особенно таких, где словосочетание «коллективный разум» имеет определенное положительное содержание.

Прежде чем обсуждать коллективный интеллект, необходимо охарактеризовать его носителя: *социальные системы*. Общее определение «социальная система – это динамическая совокупность автономных взаимодействующих индивидов» было дано во

Введении, далее «социальные» характеристики разных мультиагентных систем использовались как общеизвестные термины с интуитивно понятным содержанием. Постараемся его детализировать.

Мультиагентной социальной системой (МСС) мы будем называть динамическую совокупность автономных агентов, которые в процессе своей деятельности воспринимают информацию, взаимодействуя с внешней средой и с другими агентами. Взаимодействия и взаимосвязи агентов могут быть сложными и многоуровневыми: они не исчерпываются связями хищника с его кормовой базой (см. модель Лотки-Вольтерра в гл. 4) и всегда включают обмен информацией. Биологические существа одного вида (пчелы, приматы, люди) составляют социальную систему в узком смысле слова. «Неживые» программируемые агенты с взаимосвязанной динамикой (роботы, беспилотные аппараты) образуют *искусственную МСС*.

Автономность агентов в МСС предполагает наличие у них собственных целей. В большинстве систем цели индивидов определяются их биологической природой и социальной (системной) функцией, но для взаимодействующих технических устройств (или, например, армейского подразделения) цель задается извне. Индивидуальные агенты (сообщество живых организмов, автомобили на шоссе и т.д.) составляют МСС *1-го уровня*. Взаимодействующие МСС (экономические субъекты, организационные системы, политические партии) сами могут выступать в роли агентов в системах более высокого уровня.

Методы и приемы математического моделирования МСС различной природы, в том числе перенесенные из физики, рассматривались во всех предыдущих главах. В большинстве таких моделей обработку и использование информации индивидами учитывают косвенно: введением виртуальных потенциалов отталкивания движущихся агентов от препятствий и их притяжения к целям, стремлением агентов к максимуму полезности и другими формальными приемами. Этот подход позволяет воспроизводить и предсказывать динамику многих МСС (например, транспортных потоков, гл. 5) на коротких горизонтах прогнозирования. В общем же случае модели, основанные на балансе изначально заданных факторов (включая выигрыши, влияния, интересы) и поиске максимума энергоподобной целевой функции при воздействии случайных помех («шума») дают лишь качественное описание, или *имитацию*, реальных общественных систем и процессов.

Фундаментальной характеристикой МСС, не воспроизводимой в стандартных квазифизических моделях, является *распределенный интеллект* (РИ): еще одно общеизвестное понятие, которое мы далее постараемся детализировать. Из-за наличия РИ динамика социальной системы не сводится к простой сумме динамик ее агентов: она включает «эмерджентные» явления – в частности, системное целеполагание. В этой части будут рассмотрены проявления РИ в различных видах МСС, элементы его качественного описания в гуманитарных дисциплинах и подходы к математическому моделированию «интеллектуальных» объектов.

ГЛАВА 10. ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ИНТЕЛЛЕКТА И АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Что такое интеллект, его отличительные признаки. Общественные насекомые: осы, пчелы, муравьи, термиты. Иерархия и анархия у общественных насекомых, запись информации, роевой интеллект. «Порядок клевания» и иерархия у животных. Примеры роевого РИ, рыбы и птицы. «Разум толпы».

Определение протоинтеллекта и робот-пылесос. Признаки искусственного интеллекта (ИИ) в теории автоматического управления (ТАУ). Робототехника, фильтр Калмана. Физическое пространство состояний и информационное пространство представлений. РИ формации роботов.

Математические сведения о нечетких множествах. Нечеткие числа и функции. Свертка информации и нечеткий контроллер.

Первое удивительное обстоятельство для вступающих в область исследований интеллекта – это отсутствие его общепринятого определения. Анализом проявлений интеллекта и интеллектуальных качеств индивидуумов, индивидов и технических устройств плодотворно занимаются десятки дисциплин от информационных технологий (IT) до философии. Центр тяжести всей этой большой области располагается в *когнитивных науках* (англ. *cognitive science*), куда входят психология, нейрофизиология и (отдельно) *когнитивистика*, а также многие другие автономные отрасли знаний с собственными терминами, достижениями и научными школами. Неудивительно, что для английского слова *intelligence* (попросту способность думать) в русском языке имеет несколько очень разных вариантов перевода.

Главным объектом исследований и анализа в когнитивных науках, безусловно, является индивидуальный интеллект человека (*human intelligence, HI*). Однако многими авторами такой термин оспаривается как неточный – действительно, интеллект человека неотделим от общества – и слишком расплывчатый. Уровни интеллектуальной деятельности в философии (и не только в ней) принято подразделять на сознание, мышление и лишь затем разум как высшее проявление человеческого ума. И даже если, не погружаясь в споры о терминах, ограничиться интеллектом человека – в научной литературе обсуждается длинный ряд его несовпадающих характеристик: аналитические способности, умение решать задачи, эрудиция, способность к творчеству («креативность»), успешная «социализация» (т.е. умение жить в коллективе, в том числе им руководить) и многое другое.

Широко известны и иные виды индивидуального интеллекта: *animal intelligence*, в отечественной литературе осторожно называемый элементами мышления животных (в этой области есть прекрасная книга[1]), *искусственный*, или машинный, *интеллект* (*ИИ*, англ. *artificial intelligence, AI*; в области его исследований и конструирования ежегодно выходит сотни тысяч новых публикаций[2]), комбинированные интеллектуальные системы *человек + компьютер*. Отдельно и независимо от них существуют и изучаются несколько разновидностей коллективного, или *распределенного интеллекта* (*РИ*; англ. *distributed intelligence, DI*), который и будет основной темой в этой части. Заметим, что термином *интеллектуальный* в смысле «передовой и гибкий» нередко злоупотребляют в рекламных целях: «интеллектуальный интерфейс», «интеллектуальная парковка» и т.п. Иначе говоря, интеллект как реально существующее и интуитивно понятное явление в научной литературе отражается весьма многозначно.

Аморфность понятия «интеллект» с большим числом разных интерпретаций, безусловно, вносит неопределенность в основы обсуждаемого явления – но одновременно увеличивает свободу в его обсуждении. Общими (в некоторых источниках подразумеваемыми) качествами интеллектуальных объектов или субъектов обычно считают способность к самостоятельным действиям (автономность), взаимодействие с внешними объектами и стремление к некоторой цели – прочие признаки могут варьироваться. Подобно множеству толкований термина «общество» (см. Введение), такая неопределенность позволяет сконструировать почти любое определение интеллекта, которое не будет противоречить его эмпирически установленным характеристикам.

В большинстве описаний интеллекта человека и животных отмечается способность индивидуума или индивида – далее агента – ставить и преследовать определенную цель, используя ограниченную информацию, извлекаемую из окружающей среды. Целью, или же существенным качеством интеллектуального агента, часто называют адаптацию к изменяющимся внешним условиям. Соответственно, наше рабочее (не академическое и возможно, неказистое, но полезное) определение интеллекта, принятое в этой части книги, таково:

(10.1) *Интеллект – это способность автономного агента стремиться к определенному состоянию (цели), воспринимая, обрабатывая и используя внешнюю информацию для ее достижения.*

Термин *информация* здесь понимается не в математическом смысле (например, как изменение энтропии Шеннона, см. разд. 8.3.2 главы 8), а *наивно*: как некоторый объем сведений, извлекаемых агентом из внешних воздействий-«сигналов»[*].

Весьма широкое определение (10.1) выходит за пределы объектов и процессов, традиционно относимых к проявлениям интеллекта. Ему, в частности, удовлетворяют фототропия зеленых растений и хемотаксис бактерий (см. гл. 5) – а также действия робота-пылесоса, в общепринятом смысле неинтеллектуального устройства. Однако в когнитивистской литературе два первых явления действительно относят к прототипам интеллектуальной деятельности, а в робототехнике интеллект понимают еще шире: как способность машины выполнять заданную ей программу действий в переменных, заранее не запрограммированных внешних условиях.

Мы будем пользоваться определением (10.1) именно потому, что оно не противоречит большинству существующих характеристик интеллекта и захватывает пограничные области – такие, как автоматическое управление. Благодаря широте, это определение распространяется на любые живые существа и на созданные человеком устройства (ИИ); ему удовлетворяют как индивидуальные, так и коллективные агенты (РИ). С необходимыми оговорками в том же контексте будет обсуждаться *протоинтеллект* систем автоматического управления и оснащенных ими роботов. Ниже мы увидим, что эти системы действительно проявляют такие фундаментальные качества, присущие всем видам

[*] Поскольку наша книга относится к учебной литературе, мы не станем принимать во внимание тонкое различие между внешними сигналами, информацией и знанием, важное для специализированных дисциплин.

интеллекта, как *отражение реальности* и *свертывание информации* в формальные конструкции, для интеллекта более высоких уровней называемые *образами*.

В соответствии с литературой, к главным функциям интеллекта относятся

1. создание образов реальности (*отражений*)
2. целеполагание
3. обучаемость
4. запись и свертывание внешней информации
5. создание новой информации

Как почти всегда в гуманитарных науках, эти свойства не поддаются точному разделению – например, отражение реальности (п. 1), запись информации (п. 4) и обучаемость (п. 3). Свертывание информации (п. 4), или замена больших массивов данных меньшими массивами, сохраняющими их главное содержание – единственный способ анализа внешних сигналов, параметры которых образуют континуальные множества, ограниченными средствами человеческого мозга (~10^{11} нейронов, см. разд. 6.2.2 главы 6) и иных материальных субстратов. Создание агентом новой информации (п. 5) в форме «эмерджентности» и «креативности» широко обсуждается на качественном уровне, но непопулярно в информационных технологиях именно потому, что существующие виды ИИ еще не умеют «придумывать новое» и самостоятельно определять свои цели – возможно, и к лучшему для нас.

К интеллекту человека примыкает большая разнородная область когнитивных способностей животных. В последние десятилетия здесь было установлено, что «ум» наиболее высокоразвитых млекопитающих (высших обезьян, дельфинов) и птиц (врановых, попугаев) по ряду параметров отличается от человеческого скорее в количественном отношении, обусловленном строением мозга и нервной системы (см.[1]). Экспериментально доказаны способности таких животных к изготовлению орудий, счету, выработке образов действительности и абстрактных представлений (в частности, геометрических), а также к целенаправленному использованию *языков-посредников*. Кроме попугаев, которые могут употреблять в этом качестве до нескольких сотен слов обычного языка, молодые шимпанзе, обученные языку глухонемых (*амслену*) или специально разработанным компьютерным средствам общения (языку *иеркиш*), в исследованиях американских биологов осваивали до 2 тысяч понятий и оперировали ими на уровне человеческого ребенка в возрасте 2 – 2.5 лет.

Учитывая вариативность интеллектуальных способностей людей и животных, можно предположить отсутствие резкой границы между техническими возможностями индивидуального человеческого и не-человеческого видов интеллекта. Когнитивные способности современного *homo sapiens,* выделяющие нас из всей живой природы, не существуют вне человеческого общества, неразрывно связаны с его РИ и должны рассматриваться как составная часть интеллектуального социума. Более детально мы обсудим эту связь в главе 11.

Характерной чертой интеллекта человека и животных, связанной с решением нестандартных задач, является приход к правильному ответу путем *инсайта* («озарения») вместо последовательного логического вывода даже в тех случаях, когда такой вывод возможен и необходим (математика, точные науки). Данный механизм, вероятно, тоже

выработан Природой для компенсации ограниченной технической базы интеллекта живых существ. В случае умственной деятельности людей условиями инсайта являются возможно более широкая база знаний, концентрация индивидуума на решении задачи и *расшатывание образа*, облегчающее поиск нестандартных ответов. Подобная схема не вполне признана в когнитивных науках, но она успешно используется в творческой деятельности[3]: как индивидуальной, так и коллективной (см. следующую главу).

10.1. Роевой интеллект

Одной из самых интригующих областей биологии являются исследования общественных насекомых. Их адаптационные достижения (муравьи, возникшие на Земле 80-85 млн. лет назад, насчитывают более 20 тыс. видов и по биомассе намного превышают позвоночных животных, среди беспозвоночных они являются главными хищниками), сложные социальные структуры и огромное разнообразие коллективной динамики находятся в резком контрасте с весьма малыми когнитивными возможностями индивидуальных особей. Наблюдения за многочисленными параллелями деятельности муравьев и пчел с жизнью человеческого общества, начиная с античности, привели многих авторов к выводу о наличии разума у этих созданий. К настоящему времени такая гипотеза скорее принята, чем отвергнута – но с рядом принципиальных уточнений.

Научно-популярное отступление: общественные насекомые

Кто нас поместил сюда,
таких разных?
Ты шел по тропе труда,
а мы – праздно!
Олжас Сулейменов, «Муравей»

Разнообразные стороны жизни ос, пчел, муравьев, термитов и некоторых других общественных насекомых подробно рассмотрены в замечательной книге В.Е. Кипяткова ([1] в списке рекомендуемой литературы). Весьма сложные и изощренные нормы поведения, охоты, строительства гнезда и заботы о потомстве, отобранные эволюцией, не обязательно свидетельствуют об интеллекте насекомых. Они встречаются как у одиночных, так и у общественных видов с многочисленными промежуточными формами (например, у некоторых пауков). К «истинно общественным», или *эусоциальным,* насекомым примыкают несколько ступеней *парасоциальных* и *субсоциальных* – в частности, среди ос и пчел, где также есть и одиночные виды. Важнейшими признаками эусоциальности являются проживание в общем гнезде, как минимум, двух поколений, разделение репродуктивных функций и специализация деятельности, у высокоразвитых общественных видов приводящая к существованию *каст* со значимыми различиями формы и размеров особей: *кастовым диморфизмом* либо полиморфизмом.

На низкой ступени эусоциальности находятся знакомые всем дачникам осы-веспины, куда относятся и шершни. Жизненный цикл *моногинного* осиного гнезда, порождающий многочисленные ассоциации, основан на способности перезимовавших оплодотворенных самок откладывать яйца в течение нескольких теплых месяцев: в средних широтах с мая по сентябрь. На первом этапе осиная матка сооружает бумажное гнездо из пульпы

пережеванной древесины, помещает туда несколько яиц и сама выкармливает личинок, добывая и пережевывая для них насекомых. От недостаточного питания на свет появляются рабочие осы: бесплодные самки, по размерам в полтора-два раза меньше матери. Примерно через месяц осиная матка перестает вылетать, продолжая откладывать яйца. Расширением растущего гнезда, уходом за «царицей» и плотоядными личинками занимаются рабочие особи. (Взрослые осы в основном питаются нектаром, но молодь выкармливают насекомыми – чем приносят большую пользу саду и огороду).

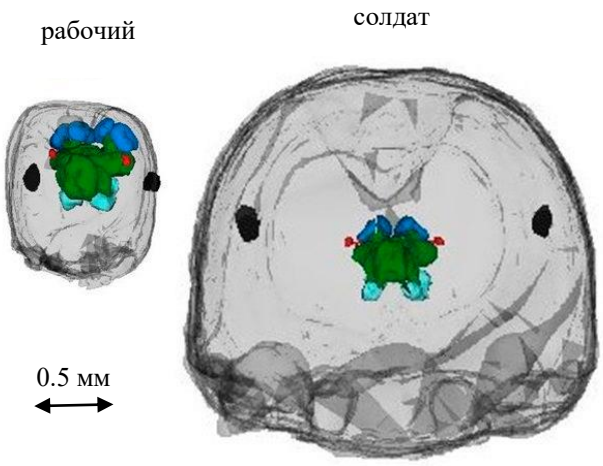
Благодаря увеличению числа рабочих ос, ближе к концу лета питание личинок становится достаточным для того, чтобы самые жизнеспособные из них развивались в полноценных, способных к размножению самцов и самок. Это молодое пополнение колонии не делает в гнезде ничего полезного – лишь отбирает пищу у рабочих и личинок, озабоченное исключительно будущей «настоящей жизнью»: копуляцией вне стен родного дома. И хотя рабочие особи (отнюдь не забитые: агрессивные и вооруженные жалом) вполне могут убить и съесть наименее расторопных отпрысков-паразитов, в конце теплого сезона происходит распад гнезда. Уцелевшие половозрелые осы покидают колонию, а старая царица вместе с уменьшающимся количеством рабочих заканчивают свои жизни, обрекая на гибель оставшийся приплод. В новом поколении самцы, которые играют скромную роль у общественных насекомых, после периода интенсивных спариваний погибают, оплодотворенные самки зимуют – и выжившие с наступлением тепла начинают новый коллективный жизненный цикл.

Для разных видов и в разной обстановке данная схема может значительно усложняться. Несколько оплодотворенных самок могут основать общую *полигинную* колонию – что повышает вероятность ее выживания, однако приводит к стычкам осиных маток с образованием иерархии (см. разд. 9.3.1 в гл. 9). Способными к оплодотворению и оплодотворенными «на стороне» могут также оказаться некоторые рабочие осы; вместе с субдоминантами они создают резерв выживания гнезда в случае гибели матки. Некоторые виды ос из зоны умеренного климата, завезенные в субтропики, образуют многолетние гнезда. Во всех случаях разделение на рабочую и репродуктивную касты в сложных колониях поддерживается через иерархию, устанавливаемую силовым путем в стычках оплодотворенных самок (нередко убивающих конкуренток) между собой и с рабочими особями – где, из-за неравенства сил, конфликт чаще ограничивается позами доминирования и подчинения. Поскольку масса, размеры и индивидуальная приспособленность у живых существ одного вида изменчивы, некоторое подобие иерархии складывается и внутри рабочей касты.

Высшими эусоциальными насекомыми являются медоносные пчелы (ниже которых по сложности социальной структуры помещаются шмели), многие виды муравьев и термиты. Для них характерны многолетние колонии (гнезда шмелей однолетние), полная репродуктивная специализация (для пчел почти полная: некоторые рабочие особи способны откладывать яйца, так как самцы-*трутни* постоянно присутствуют в улье) и большое разнообразие рабочих функций: строительство гнезда и его чистка, выращивание молоди, разведка, фуражировка, наблюдение, защита гнезда. У некоторых видов муравьев и большинства термитов последняя функция приводит к выделению подкасты крупных рабочих, или «солдат»: лучше вооруженных, но с меньшими когнитивными способностями

(рис. 10.1). Более обучаемые малые рабочие особи в течение жизненного цикла (у муравьев в теплое время обычно 1-2 месяца, у одомашненных пчел до нескольких месяцев; перезимовавшие насекомые могут прожить больше года) несколько раз меняют род занятий. В нормальной ситуации около трети всех рабочих особей в гнезде не выполняют никаких функций, тем не менее получая питание от других членов колонии; эта «резервная армия труда» переменного состава мобилизуется в экстренных обстоятельствах.

(а)



(б)

Рисунок 10.1. (а) «Солдат» (указан стрелкой) и малые рабочие особи муравья-кочевника *Eciton burchellii parvispinum* (фотография из Интернет). (б) Расположение мозга в головах муравьев: темно-зеленый цвет – протоцеребральная масса, красный – зрительные доли, синий – области памяти и обучения, голубой – химические сенсоры (O'Donnell et al. BMC Zoology, 2018 3:3; https://doi.org/10.1186/s40850-018-0028-3)

Структура колонии у высших эусоциальных видов поддерживается преимущественно химическим путем благодаря выделению *феромонов*-аттрактантов, которые делают царицу привлекательной для остального населения гнезда и бескровно подавляют его репродуктивные возможности. Химический канал передачи информации среди насекомых является первостепенным: в частности, возбуждение и мобилизация против внешней угрозы (например, вспышка агрессивности ос и пчел при приближении постороннего

существа к гнезду) также вызывается выделением феромонов. Другим общим признаком таких видов является постоянный обмен продуктами жизнедеятельности между всеми особями (*трофаллаксис*), для термитов перерастающий в коллективное пищеварение. На трофаллаксисе основан механизм распознавания «своих» по запаху – в том числе проживающих в гнезде насекомых другого вида либо, в опытах биологов, неодушевленных предметов. Явные аналогии в структуре и функционировании существенно разных колоний – пчел, муравьев (бескрылых родственников ос, у которых способны летать лишь половозрелые особи в короткий брачный период) и родственных тараканам термитов (где также имеет временные крылья лишь каста, способная к размножению) – свидетельствуют об их эволюционном, а не целенаправленном генезисе.

Видимые параллели коллективных процессов в человеческом обществе и «социумах» насекомых – строительство жилища, «сельское хозяйство» (муравьи опекают тлей, употребляя в пищу как их богатые сахарами выделения (*падь*), так и самих тлей; муравьи и термиты устраивают плантации грибницы, питаясь *мицелиями*, т.е. грибными телами), распространение колоний по территории и образование «федераций» (см. [1]) не свидетельствуют о наличии интеллекта у муравьев и термитов. Скорее, они позволяют более трезво рассматривать многие человеческие социальные и экономические конструкции не как продукты сознательной деятельности, а как стихийно возникшие в результате стремления к выживанию под давлением природных факторов. Принципиальное отличие человека от других биологических видов заключается не в изобретении государства, земледелия или рабовладения, а в мгновенном, в масштабах времени биологической эволюции, закреплении их полезных свойств путем обучения. Действительно, муравьи и термиты существуют десятки миллионов лет (время возникновения их «сельского хозяйства» точно не установлено), тогда как у людей *неолитическая революция*, или переход от охоты и собирательства к производящей экономике, в населенных регионах Земли произошла в интервале от X до II тысячелетий до н.э.[4].

«Рабовладение» муравьев, как общеизвестную аналогию с длительной человеческой практикой, надо отметить особо, поскольку это явление из жизни общественных насекомых не является рабовладением. Нападениям муравьев подвергаются очень многие животные – в том числе муравьи других видов. При разграблении чужого муравейника захват личинок и куколок, как способ фуражирования, благодаря стохастическому поведению насекомых в гнезде, неизбежно приводит к появлению из них некоторого количества муравьев другого вида, обладающих запахом «своих» и участвующих на общих основаниях в стихийной жизни колонии. Эволюционное закрепление преимуществ такого процесса породило виды, не имеющие необходимой для выживания доли рабочих, но с избытком «солдат», которые захватывают в муравейниках-жертвах больше куколок, чем нужно для пропитания – например, муравьев-*амазонок* рода *Polyergus*. Муравьи, вышедшие из трофейных куколок, замещают отсутствующих рабочих, участвуя в коллективных действиях, трофаллаксисе и подвергаясь насилию по единой норме для всех нерепродуктивных особей гнезда. Таким образом, «муравьиное рабовладение» – это одна из форм социального паразитизма вида[*]:

[*] Еще одна форма социального паразитизма, распространенная у муравьев – «узурпация власти». В этом случае оплодотворенная самка-узурпатор проникает в муравейник близкородственного вида со схожим химическим набором пахучих веществ у его особей. Пробыв там некоторое время и став неотличимой по запаху от остального населения гнезда,

весьма распространенного явления у общественных насекомых. (Строго говоря, к той же категории относится и рабовладение в человеческих сообществах, возникшее по сходному механизму, см.[4]).

10.1.1. Роевой интеллект общественных насекомых

Итак, сложные «человекоподобные» конструкции и социальные процессы у общественных насекомых отражают не индивидуальный интеллект термитов, муравьев и пчел, а тот факт, что многие стороны жизни людей формировались стихийно, без участия индивидуального человеческого интеллекта. «Разум» социальных видов насекомых проявляется иначе: их сообщество в целом реагирует на внешние воздействия много быстрее и адаптируется к нему гораздо лучше, чем отдельные особи. Во многих случаях такую коллективную реакцию приходится признать рациональной. В этом смысле говорят, что семья общественных насекомых или ее некоторая достаточно большая часть обладает *распределенным интеллектом* (РИ).

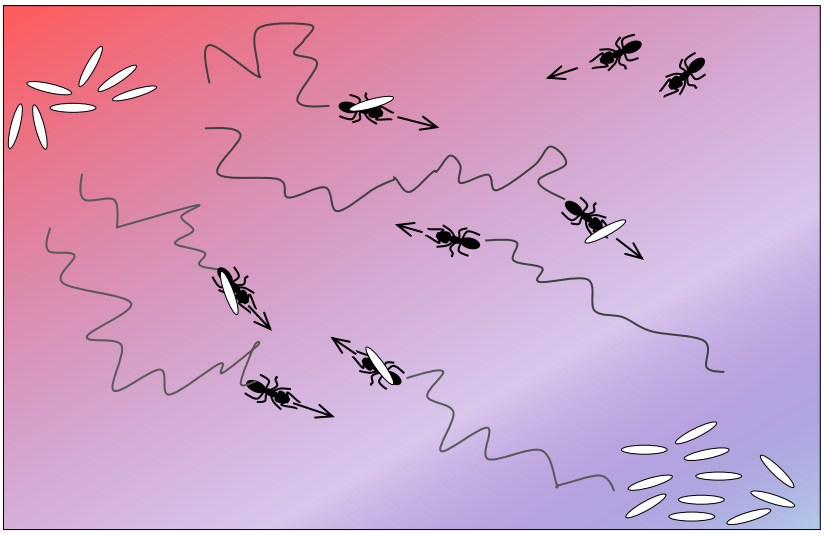


Рисунок 10.2. Схема перемещения муравьями расплода из неблагоприятного участка камеры в благоприятный

Способность к целеполаганию и использование внешней информации для достижения цели (определение (10.1)) проявляется почти у всех живых существ, включая как одиночных, так и общественных насекомых. *Объективной целью* индивида или коллективного агента является оптимальное, в заданных внешних условиях, состояние – соответственно для индивида или сообщества взаимосвязанных индивидов. Если в летний день под перевернутым куском древесной коры обнажится земля с притаившимися там мокрицами, они разбегутся с освещенной поверхности. Если же так раскрыть земляной муравейник – муравьи прежде всего станут уносить личинок и куколок. Цель одиночных

она проникает в камеру к царице, откусывает ей голову при полном попустительстве находящейся здесь же «свиты» (которая реагирует не на действия, а на химические сигналы) и занимает ее место. Потомство узурпаторши, выращиваемое на прежних основаниях рабочими муравейника-жертвы, составляют только способные к размножению чужие особи; зараженный муравейник постепенной погибает – а с ним, во имя некоторой высшей справедливости, гибнет и лже-царица. В этом случае самка паразитического вида действует аналогично вирусу в живой клетке. Подбрасыванием своего потомства в чужое гнездо также занимаются *шмели-кукушки* и другие социальные паразиты [1].

насекомых – индивидуальное выживание; объективная цель общественных насекомых – спасение гнезда.

Объективная цель мультиагентной системы – не тавтология, а вполне содержательное понятие. В экспериментах биологов с муравьями в специальных контейнерах-*формикариях* при изменении условий содержания расплода (например, нагреве пола под местом расположения куколок) муравьи воспроизводимо переносят его в наиболее комфортную зону (см. [1] в списке литературы). Сам процесс перемещения протекает весьма хаотично: некоторые особи возвращают куколок с нового места на старое, другие бегают в обе стороны без ноши, третьи не участвуют (Рис. 10.2) – однако в результате весь расплод покидает зону, ставшую опасной. Преграда, поставленная на пути переноса, заставляет муравьев изменить траектории перемещений, но не их цель: система реагирует не только воспроизводимо, но и гибко. Это одно из проявлений РИ муравьиной колонии. В естественных условиях примерно так же происходит выбор места для новой семьи при роении пчел или направления движения колонны наиболее страшных хищников семейства *Formicidae*: *муравьев-кочевников* (англ. *army ants*), которые не имеют постоянного гнезда и перемещаются между временными «бивуаками», уничтожая на пути все доступное им живое[*].

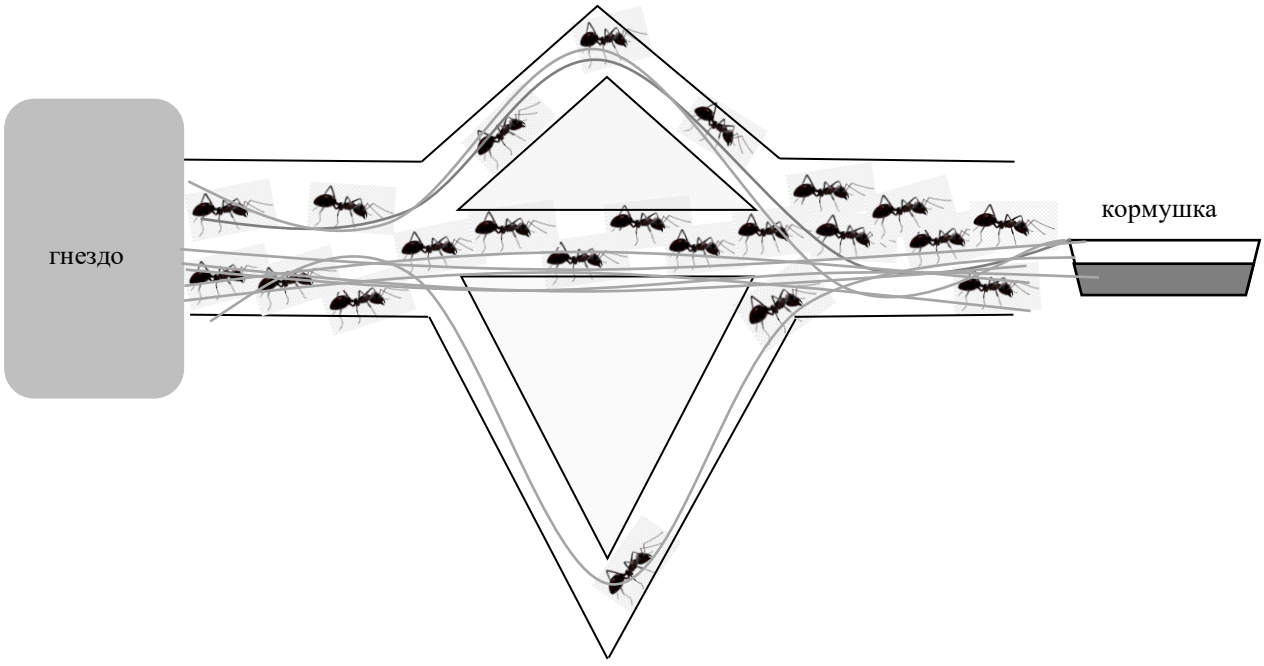


Рисунок 10.3. Перемещение муравьев от гнезда к кормушке: выбор короткой дороги

[*] При огромном положительном значении муравьев для людей (уничтожение вредителей, процессы образования почвы), в области столкновения интересов современные средства человечества не позволяют ограничить распространение вредоносных видов, не нанося непоправимый урон биологическому разнообразию. Это проявляется и в названиях *инвазивных* видов муравьев, вторгшихся в новую среду обитания без естественных хищников и болезней: *красный* либо *черный огненный муравей Solenopsis invicta*, который принес из Южной Америки в США многомиллиардные убытки (названием отражается ощущение от укуса), *желтый бешеный муравей Anoplolepis gracilipes,* от которого страдают флора, фауна и туристическая индустрия в тропической области Мирового океана, и мн. др. Инвазивные виды муравьев особенно хорошо изучены.

Выбор дороги муравьями направляется следом феромона, оставленным уже прошедшими особями (не все виды муравьев зрячи). Химическая маркировка вместе со случайными отклонениями насекомых от «тропы» обеспечивают выбор наилучшего пути к оптимальному источнику пищи с экономным испытанием возможных вариантов как в экспериментах (рис. 10.3), так и в естественных условиях. Поскольку феромон с течением времени улетучивается, наилучшему маршруту по механизму положительной обратной связи отвечает максимальное число проходящих особей в единицу времени. По тому же механизму образуются тропинки пешеходов на газонах и на снегу; здесь обоняние муравьев заменяется человеческим зрением (рис. 10.4).

Рисунок 10.4. Тропинки между организованными пешеходными дорожками в кампусе Штутгартского университета (D. Helbing, J. Keltsch, P. Molnar, Nature, 1997, 388, 47)

Неосознанные запись и считывание информации биологическими существами за счет изменений внешней среды в XX веке была названа *стигмэргией*. Ее примеры среди общественных насекомых простираются от возбуждения активности гнезда химическими сигналами либо их отсутствием (при гибели царицы возрастает число оплодотворенных самок, что обостряет конкуренцию и улучшает ее результат) до изменения действий рабочих особей по мере возведения муравейников и термитников. Тропинки муравьев, крупных животных и людей – один из многих примеров стигмэргии. Возбуждение общественных насекомых к деятельности протекает не по одному, а параллельно по нескольким каналам (зрительному, обонятельному и осязательному), порождая стохастические циклы (рис. 10.5). Концентрация усилий в максимумах активности – еще

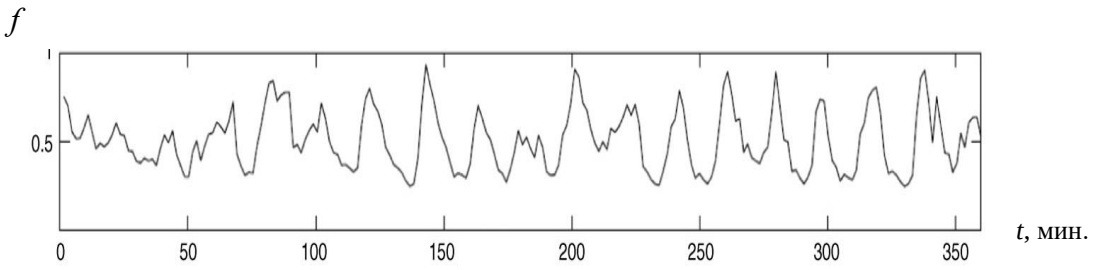


Рисунок 10.5. Циклы активности при строительстве муравейника, *f* – доля активных насекомых (I.D. Couzin, *Collective cognition in animal groups,* Trends in Cognitive Sciences, 2009, 13, 36)

один приспособительный механизм, способствующий выживанию колонии. Существенно, что даже в максимумах количество активных особей не достигает 100%, отражая наличие коллективного резерва (см. выше).

В колониях пчел, обладающих хорошим зрением, особи-разведчицы сообщают информацию об удаленных источниках пищи путем *танца*, описывая «восьмерки» на вертикально висящих сотах внутри улья. Извилистая внутренняя часть траектории танца указывает расстояние до цели, а ее средняя ориентация относительно вертикали – *азимут* цели, т.е. угол φ между целью и направлением на солнце (которое пчелы различают даже сквозь неплотные облака). По мере движения солнца по небу передаваемый танцем угол φ для одной и той же цели изменяется (Рис. 10.6). Этот поразительный механизм «обнародования» информации твердо установлен для многих видов домашних пчел. Более естественная, с точки зрения человека, ориентация в магнитном поле Земли для них не реализуется*.

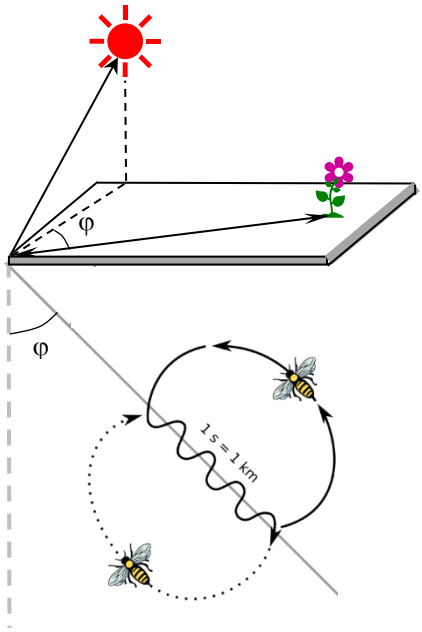


Рисунок 10.6. Танец пчелы-разведчицы на соте (Р. Шовен, *От пчелы до гориллы*, пер. с франц., М.: Мир. 1965)

10.1.2. Роевой интеллект других животных

Распределенный интеллект общественных насекомых в литературе обычно называется *роевым* (англ. *swarm intelligence*). Для него характерны высокая доля хаотического поведения особей, ненаправленный или слабо направленный обмен информацией и ее запись во внешней среде – в частности, химическими средствами. Управляющие единицы в этой форме РИ отсутствуют: матка-царица выполняет только репродуктивные функции, а иерархия в колонии насекомых (в том числе биохимическая), ее кастовая структура и специализация рабочих особей проявляются на фоне беспорядочных действий. Тем не

*Хотя в телах пчел содержатся чувствительные к магнитному полю *суперпарамагнитные* микрокристаллы магнетита Fe_3O_4, в улье, помещенном во внешнее магнитное поле – как нивелирующее (до остаточных 2%) магнитное поле Земли, так и поворачивающее его силовые линии на 90° – не было выявлено изменений в эффективности передачи информации от разведчиков к фуражирам (V. Lambinet, et al., PLoS ONE 2014, **9** (12): e115665. doi:10.1371/journal.pone.0115665).

менее, уже в этом виде распределенного интеллекта мультиагентная система «дрейфует» в сторону своих объективных целей и обрабатывает информацию значительно лучше, чем индивидуальные особи. Наличие даже простейшего роевого РИ является конкурентным преимуществом общественных биологических видов, объясняющим их распространенность в природе.

Роевым интеллектом в широком смысле обычно называют «стохастический» вид РИ с высоким вкладом случайного поведения агентов, непосредственно не связанный с иерархическими структурами. При переходе от беспозвоночных к позвоночным животным и, далее, к птицам и млекопитающим индивидуальные когнитивные возможности особей возрастают, а их деятельность становится все более богатой и разносторонней. Это, в частности, сопровождается появлением и усложнением иерархий внутри биологических систем. Проявления роевого интеллекта при этом сокращаются – тем не менее, некоторые его элементы присутствуют даже в поведении массы людей.

Подчинение и иерархия среди животных

Норвежских крестьян в начале 1920-х годов вряд ли интересовал смысл занятий ученого-биолога и его студентов, весь день сидящих на птичьем дворе с блокнотами. Это было и хорошо: каждый наблюдатель следил за специально для него помеченной курицей и всякий раз, когда она клюнет другую курицу, ставил галочку в левой половине страницы блокнота, а когда его птицу клевали другие особи – в правой. Подобные занятия ученых на деньги налогоплательщика могли вывести крестьян из скандинавской невозмутимости. По результатам таких (или примерно таких) наблюдений Торлейф Шельдеруп-Эббе в 1922 г. опубликовал большую статью «О социальной психологии домашних кур»[*], ставшей одним из краеугольных камней второго, после открытия генов, крупнейшего достижения биологии XX века: доказательства социальной структуры в сообществах животных. Обнаруженный им *порядок клевания*, или иерархия особей (α-курица безнаказанно клюет и гоняет всех остальных, β-особь клюет всех, кроме «альфы», от которой ей достается самой, и т.д.), по-английски *pecking order,* оказался устойчивой характеристикой любого птичьего двора – и до сих пор, в полушутливом смысле, обозначает отношения подчинения в организациях и фирмах.

Иерархия, или неравный доступ к ограниченным ресурсам (пище, спариванию и другим признакам места под солнцем) в сообществах животных устанавливается по совокупности физических сил, жизнестойкости и индивидуальной сообразительности особей преимущественно в нелетальных стычках. Иерархия вместе с образованием коалиций, или групп, снижающих ее давление на подчиненные уровни (см. разд. 9.3.1 в гл. 9), определяют сложную структуру сообществ животных. Их весьма сложное поведение с середины XX века систематически исследуется в рамках *этологии*[5]. Роевой РИ в таких системах преимущественно проявляется там, где воздействие иерархии минимально: при трехмерном перемещении стаи птиц или косяка рыб, движении пешеходов в городе или обмене мнениями пользователей социальных сетей.

[*]T. Schjelderup-Ebbe, Zeitschrift fur Psychologie, 1922, **88**, 225.

Отметим, что созданная эволюцией иерархическая структура сообщества животных, или система «распределенного» угнетения – важнейший механизм выживания вида. Угнетенное состояние большинства особей в нормальных условиях – аналог сжатой пружины, срабатывающий при резком уменьшении численности популяции. Так, непрерывная борьба с мышами и крысами в городах обусловлена тем, что любые яды, безопасные для людей, уничтожают не более 85-90% всех вредителей. Угнетение особей из-за взаимной агрессии в колонии грызунов (*деме*), по общим биологическим законам, снижает их продуктивность. После применения ядохимикатов социальное давление уменьшается: мыши, в нормальных условиях убивающие подсаженного в клетку чужака, становятся дружелюбными к посторонним особям своего вида, их репродуктивный возраст падает, плодовитость возрастает – и распрямленная экологическая пружина быстро восстанавливает численность популяции.

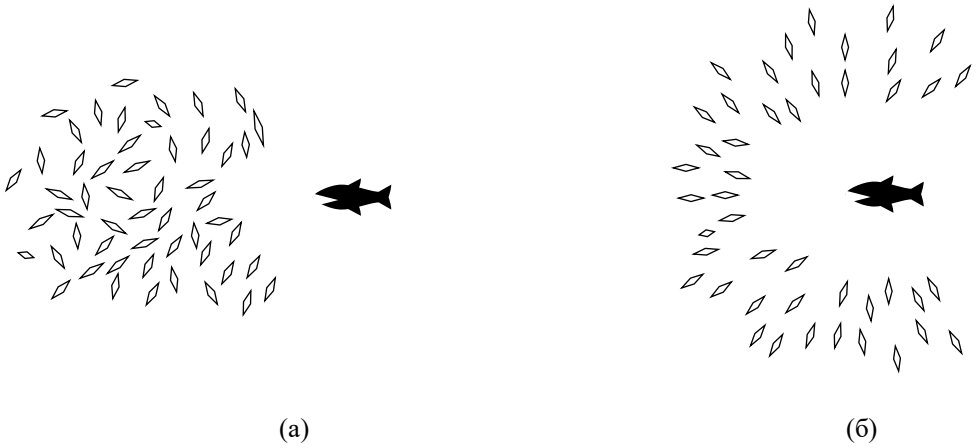
Тем не менее, существуют «мягкие» (по отношению к окружающей среде) и эффективные методы борьбы с грызунами, описанные в интереснейшей книге[6]. В них чередуется применение ядов и нейролептиков. Последние, поедаемые с приманкой в первую очередь оставшимися доминантами, временно подавляют их активность, что приводит к борьбе за доминирование среди других особей, а через некоторое время – к атаке пришедших в себя «альф» на новую иерархию. Чередование мышиных революций и контрреволюций поддерживает в животных высокий уровень стресса, препятствующий размножению – и следующее применение яда может выбить популяцию ниже уровня устойчивого воспроизведения. Таким образом, схемы «цветных революций» XXI века в ряде государств мира опираются на прочный этологический фундамент. Ломка сколь угодно нечеловеческой (для животных это достигается автоматически), но устоявшейся архитектуры сообщества при отключении компенсирующих механизмов приводит к войнам всех против всех и к вероятной гибели системы, включая социальные системы людей.

Роевой интеллект позвоночных

Корреляция перемещений особей в стаях рыб или птиц (см. рисунки 5.10 и 5.11 в главе 5) –составная часть роевого распределенного интеллекта. Переключения режимов коллективного движения, рассмотренных в разд. 5.2, регулируют разные виды динамики: целенаправленное движение (собственно стая), хаотические смещения (*рой*) и «вихревое» перемещение косяка рыб, вызванное их гидродинамическим взаимодействием (см. главу 5). К этим режимам необходимо добавить рассредоточение врассыпную при приближении хищника, в котором инстинкты следования за соседями складываются с сильной реакцией избегания опасности (рис. 10.7). Резкое снижение числа особей в единице объема при рассредоточении – еще одно средство выживания вида. Для приведения его в действие у косяка рыб как целого должен существовать круговой обзор – который и достигается в режиме «роя» (см. рис. 10.7 а). Как и у общественных насекомых, в этом случае эффективность совместной обработки информации многократно превышает возможности отдельной особи.

Интерес математической биологии к трехмерному движению птиц и рыб в конце XX века был вызван, в том числе, отсутствием вожаков у перемещающейся массы – то есть автоматической выработкой «консенсуса» по скорости и направлению перемещения.

Движение птичьих и рыбьих стай, а также формаций беспилотных аппаратов (которые и представляют основную практическую ценность), как и динамика колоний общественных насекомых, успешно поддается компьютерному моделированию[7]. Такие модели позволяют воспроизвести «эмерджентные» стороны роевого интеллекта (например, рассредоточение при возникновении опасности), однако не дают им объяснения.



(а) (б)

Рисунок 10.7. Рассредоточение «роя» рыб (а) при приближении хищника (б)

На качественном уровне основу многообразной роевой динамики составляют три фактора:

- автономия и (не у всех видов) индивидуальное целеполагание агентов
- взаимосвязь агентов в форме притяжения, отталкивания и следования (см. рис. 5.11 в главе 5)
- элементы хаотической динамики агентов

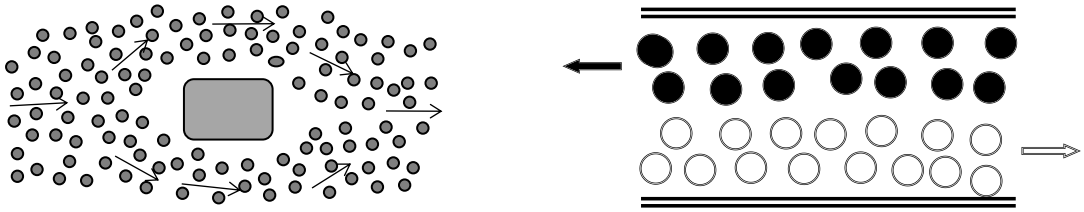
Эти принципы позволяют сконструировать роевой интеллект в системе дронов или виртуальных частиц (см. следующую главу), которые сами по себе обладают нулевыми когнитивными возможностями. В этом случае способность мультиагентной системы как единого целого воспринимать, обрабатывать и гибко использовать информацию проявляется особенно наглядно.

«Разум толпы»

Коллективное движение по поверхности обычно направляется притяжением к целям и уклонением от препятствий, в том числе от соседних индивидов[*]. Элементы роевого интеллекта, в частности, проявляются при свободном, без светофоров и турникетов, движении пешеходов по городу. В бессознательной обработке информации, характерной для такого РИ, участвует, например, большинство людей в толпе, обтекающей препятствие: его могут видеть только близкие к нему пешеходы, а все прочие изменяют направление движения вместе с идущими возле них (рис. 10.8 а). «Стихийный» РИ массы пешеходов

[*]Одним из парасоциальных видов насекомых можно считать саранчу, стаи которой мигрируют в воздухе на большие расстояния и в районах приземления причиняют огромный вред сельскохозяйственным культурам. Массы «пешей» саранчи также могут передвигаться: в отсутствии корма на разоренной местности между особями начинается каннибализм, а согласованные отползание и преследование приводят стаю в движение по поверхности земли [7].

проявляется при их движении в противоположных направлениях по тротуарам и коридорам как спонтанное разделение на встречные потоки, повышающие пропускную способность маршрутов (рис. 10.8 б). Во всех таких случаях люди приходят к «консенсусу» относительно направления и скорости перемещения, не обдумывая своих действий и без помощи речи. Роевой интеллект массы пешеходов интенсивно исследуется и воспроизводится агентными моделями, которые используют в расчетах для городского хозяйства (раздел 5.4 главы 5).



(а) (б)

Рисунок 10.8. Движение пешеходов: (а) обтекание препятствия толпой, (б) разделение на встречные потоки (см. D. Helbing, A. Johansson, *Pedestrian, crowd and evacuation dynamics*, in R. Meyers (Ed.) *Encyclopedia of Complexity and System Science*, N.Y.: Springer 2009, 6476)

Еще одним проявлением массового интеллекта можно считать мнения или оценки, усредненные по большой совокупности людей. Такие средние значения могут оказаться точнее большинства индивидуальных ответов, по которым они рассчитаны. В одной из первых статей на эту тему с характерным названием ‘Vox populi’ британский энциклопедист и социальный дарвинист Фрэнсис Гальтон привел результаты оценок «на глаз» убойного веса быка, сделанные посетителями сельскохозяйственной ярмарки 1906 г. в Плимуте[*]. Хотя сама викторина проводилась в рекламно-коммерческих целях (участники покупали карточки по 6 пенни за штуку, точные ответы вознаграждались из вырученных денег), ее условия эффективно отсеивали неспециалистов и шутников. Обработка 787 карточек показала, что медиана оценок отличалась от фактического убойного веса (быка забили «в реальном времени») лишь на 11 фунтов (5 кг), или 0.8%. Этот один из первых примеров документированного «разума толпы» (англ. *wisdom of crowd*)[**], кроме того, хорошо показывает текучесть этических норм и экологического сознания людей в масштабах одного столетия.

Многократные повторения подобных статистических исследований в XXI веке подтвердили, что в поиске не общеизвестной информации среднее значение по большому массиву опрошенных оказывается лучше большинства индивидуальных ответов. В эксперименте сотрудников Стэнфордского университета (США) проводился интернет-опрос 2 тыс. участников с 1 тыс. вопросов по 50 разным областям знаний. Статистическая обработка результатов количественных ответов (например, «в каком году начался фабричный выпуск автомобилей?», «сколько калорий содержится в одном курином яйце?»

[*] [*] F. Galton, Nature 1907. Vol. 75, No 1949. P. 450.

[**] Диалектика «разума» (wisdom of crowd) или, в других ситуациях, «безумия» толпы (madness of mob, см. разд. 8.6.4 в гл. 8) неоднократно обсуждалась в литературе. В английском языке различаются crowd (толпа как тесная масса людей) и mob: толпа как низменное, часто агрессивное сборище (mobbed – растерзан толпой). Роевой интеллект бесструктурной толпы в любом случае не отличается высокой эффективностью.

и т.д.) с их ранжированием по отклонению от правильной цифры показала, что усредненное коллективное мнение (медиана ответов на вопрос) в среднем точнее 2/3 индивидуальных ответов, хотя распределение эффективности РИ оказалось широким и неравномерным (рис. 10.9).

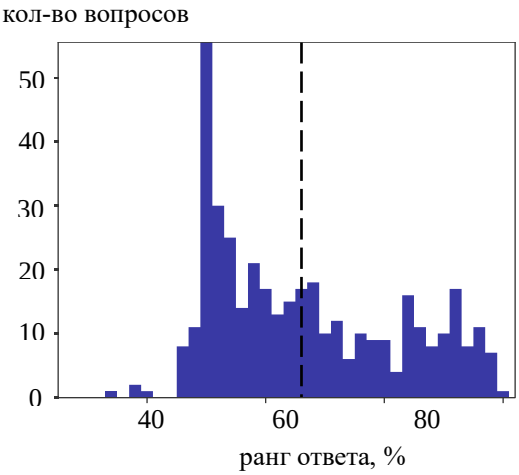


Рисунок 10.9. Распределение точности («ранга») усредненных ответов респондентов на предложенные им вопросы по сравнению с индивидуальными ответами: 100 – лучше всех индивидуальных, 80 – лучше 80% индивидуальных и т.д. Штриховая линия – медиана средних ответов по всем вопросам (лучше 66%). См. C. Simoiu, C. Sumanth, A. Mysore, S. Goel. *A large-scale study of the 'Wisdom of Crouds'*, Web of Stanford University, 2019. https://www.semanticscholar.org/paper/A-Large-Scale-Study-of-the-"-Wisdom-of-Crowds-"-Simoiu-Sumanth/23810e0888de1fa6583b35bed24f02b41a926062

Одним из проявлений роевого интеллекта в человеческих сообществах можно считать знаменитую *невидимую руку рынка*: объективную оценку стоимости товаров по балансу спроса и предложения, где продавцы и покупатели преследуют только собственные материальные цели (см. разд. 1.5.1 в гл. 1 и главу 8). На тезисе о рынке, как наилучшем из всех возможных механизмов обработки экономической информации, основаны многие разделы неоклассической экономики и идеологии капитализма. С начала XXI века роевой интеллект пользователей Интернет применяется для ранжирования ссылок в поисковых запросах* по числу предыдущих обращений к данному источнику информации. Прямой интернет-аналог маркировки муравьиных тропинок феромоном действует очень эффективно: в большинстве случаев список ссылок возглавляют наиболее интересные и полезные материалы. Применение роевого РИ в разных аспектах человеческой деятельности на популярном уровне обсуждается в книге[8].

Литература к разделу 10.1

[1] З.А. Зорина, И.И. Полетаева, *Зоопсихология. Элементарное мышление животных: учебное пособие*. –М.: Аспект Пресс, 2002.
[2] Д. Каспарьянц, *Обзор доклада Стэнфордского университета «Индекс искусственного интеллекта 2022»* https://rdc.grfc.ru/2022/05/artificial_intelligence_index_report_2022/
[3] В.В. Петухов, *Психология мышления. Учебно-методическое пособие.* М.: МГУ, 1987.
[4] А.П. Назаретян, *Цивилизационные кризисы в контексте универсальной истории*, 2 - е изд. –М.: Мир, 2004.
[5] Н. Тинберген, *Социальное поведение животных* (пер. с англ.). М.: Мир, 1993.

*Впервые реализованного поисковой системой Google PageRank в 1998 г. (разд. 6.3.1 в гл. 6).

[6] С.А. Шилова, *Популяционная экология как основа контроля численности мелких млекопитающих*, –М.: Наука, 1993.
[7] T. Vicsek, A, Zafeiris , *Collective motion.* Phys. Rep. 2012. **517**, 71.
[8] Дж. Шуровьески *Мудрость толпы. Почему вместе мы умнее, чем поодиночке, и как коллективный разум формирует бизнес, экономику, общество и государство* (пер. с англ.) – М.: ООО "И.Д. Вильяме", 2007.

10.2 Автономные аппараты и теория автоматического управления

В этой главе мы рассматриваем простейшие виды распределенного интеллекта, в большинстве случаев не предполагающие глубокой обработки информации индивидуальными агентами. Эти проявления РИ обнаруживают близкие аналогии с функционированием «протоинтеллектуальных» технических устройств в изменчивой, заранее не запрограммированной обстановке. Для таких устройств (*роботов*) в современных инженерных науках разработано детальное математическое описание, которое указывает путь к формализации общего понятия интеллекта.

Определению интеллекта (10.1), в частности, соответствует робот-пылесос, огибающий препятствия при решении задачи: за ограниченное время обработать всю площадь пола в помещении. В этом случае цель поставлена автономному агенту извне, но восприятие, обработка и использование информации для ее достижения имеют место. (Надо отметить, что внешняя постановка цели реализуется во всех вариантах искусственного интеллекта). В этом разделе будет рассмотрен искусственный *протоинтеллект* автономных аппаратов, описываемый *теорией автоматического управления*.

10.2.1. Теория автоматического управления

Любая ошибка в любом расчете будет нацелена на причинение наибольшего вреда
закон Мерфи

Управление динамическими объектами в технике со второй половины XIX века заложило фундамент большой области прикладной математики: *науки об управлении* (англ. *control science*). В настоящее время эта дисциплина существенно пересекается с такими взаимосвязанными областями знания, как кибернетика, робототехника, функционирование ИИ, другими инженерными науками – и входит в них, как составная часть. В XX веке формальные схемы управления с единым математическим аппаратом распространились на биологические, организационные и социальные системы.

По мере развития техники прямое, или «ручное», управление техническими и другими объектами и процессами заменяют системы автоматического управления (САУ). В их принципиальной схеме (рис. 10.10) объект управления (ОУ) и управляющее устройство (УУ) объединены в систему с *обратной связью*, которая вырабатывает *управляющее воздействие*, или *управление U* (УУ→ОУ) для получение нужной величины (или интервала величин) *выходной переменной Y* при заданных значениях *входной переменной X* и внешних возмущениях ω, затрудняющих работу системы (*шуме*). Если возмущения отсутствуют или мало влияют на выходную переменную, управляющее воздействие $U(t)$ может быть запрограммированной зависимостью от времени (как для огней ёлочной гирлянды или режима работы стиральной машины): это *программное управление*. В ином случае система управления должна включать содержательную обратную связь с компенсацией отклонений – так называемое *позиционное управлени*е (которое зависит от состояния и (или) выхода

ОУ) или *управление по возмущению* (управление зависит от регистрируемого внешнего воздействия). Обоснование и разработка различных видов САУ составляют основное содержание теории автоматического управления (ТАУ): одного из ключевых предметов в современных инженерных специальностях – см. учебники [2, 3] в списке рекомендованной литературы.

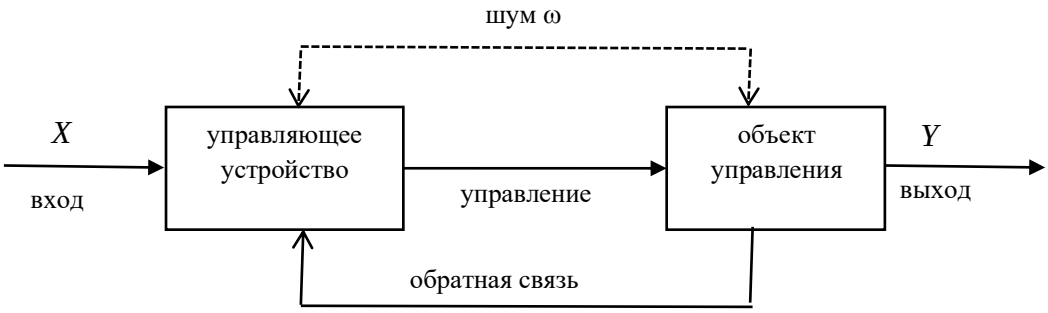


Рисунок 10.10. Общая блок-схема системы автоматического управления (см. [3]. Рис. 1.2)

Пример управления: задача о «шофере-убийце»

Теория дифференциальных игр (см. разд. 7.5 в гл. 7) после Второй мировой войны развивалась в русле военных приложений. Одной из типичных ситуаций на поле боя является преследование агента B лучше вооруженным агентом A, который передвигается со скоростью, большей, чем у B ($v_{\mathrm{A}} > v_{\mathrm{B}}{}^{max}$), и обладает инерцией, тогда как «безынерционный» B может произвольно изменять направление своего движения. В этой антагонистической игре цель A – сблизиться с B на расстояние, меньшее радиуса поражения *a*, а цель B – максимально оттянуть этот *терминальный* момент *T* (составляющий цену игры), приближая его к бесконечности. Данная игра, близкая к многим военным ситуациям (торпеда и катер, зенитная ракета и самолет, общий случай преследования-уклонения) среди математиков получила юмористическое название *шофер-убийца* (англ. *homicidal chauffeur*); агенту B в ней достается роль «безмассового» пешехода.

Динамику перемещения агентов A и B на плоскости (рис. 10.11) задают системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} dx_{\mathrm{A}}/dt = v_{\mathrm{A}} \sin\alpha & dx_{\mathrm{B}}/dt = v_{\mathrm{B}} \sin\beta \\ dy_{\mathrm{A}}/dt = v_{\mathrm{A}} \cos\alpha & dy_{\mathrm{B}}/dt = v_{\mathrm{B}} \cos\beta \\ d\alpha/dt = v_{\mathrm{A}} u/R\ , & \end{array} \qquad (10.2)$$

где $v_{\mathrm{A}} > v_{\mathrm{B}}$, $\mathbf{u}$ – вектор управления игрока A ($|\mathbf{u}| \le 1$), R – минимальный радиус его разворота; управлением игрока B служит произвольно выбираемый угол β. Без ограничения общности уравнения (10.2) можно привести к безразмерному виду ($v_{\mathrm{A}} = 1, R = 1$)

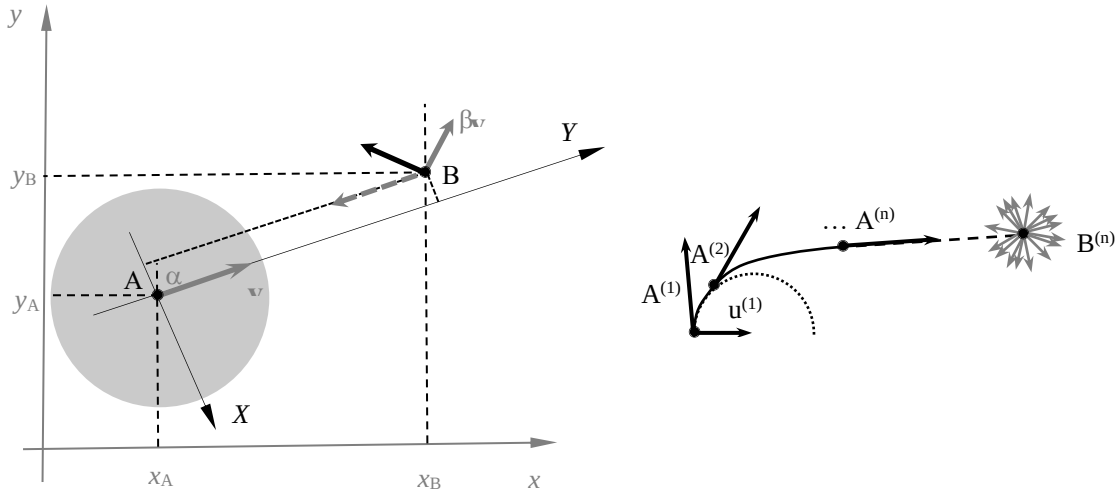
$$\begin{array}{ll} dx_{\mathrm{A}}/dt = \sin\alpha & dx_{\mathrm{B}}/dt = v_{\mathrm{B}} \sin\beta \\ dy_{\mathrm{A}}/dt = \cos\alpha & dy_{\mathrm{B}}/dt = v_{\mathrm{B}} \cos\beta \\ d\alpha/dt = \mathbf{u}; \quad |\mathbf{u}| \le 1 & |\mathbf{v_B}| = \rho < 1, \end{array} \qquad (10.2\ \text{а})$$

и к системе координат (*X*, *Y*) с началом в положении агента A (рис. 10.11 а).

$$dX/dt = -Y\mathbf{u} + V\cos\beta \qquad (10.2\ \text{б})$$

$$dY/dt = X\mathbf{u} - 1 + V\sin\beta, \qquad \text{где } V < 1$$

Система уравнений (10.2 б) не имеет аналитического решения. Для рациональных игроков возможность «поймать» B зависит от соотношения скоростей и радиуса поражения[9]. Эта сложная, решенная только в XXI веке задача показывает, что управляющие воздействия входят в уравнения, которыми определяется динамика системы.



(а) (б)

Рисунок 10.11. (а) Координаты и скорости агентов в задаче «шофера-убийцы» в неподвижной системе координат (серый цвет) и в системе координат «догоняющего» агента A (черный цвет). Серым фоном выделен круг поражения. (б) Управляющие воздействия агентов A («сила» u, показан минимальный радиус кривизны траектории) и B (произвольный угол β)[9]

Динамика линейной системы с управлением

В рамках математической теории управления n параметров, задающих состояние системы, рассматриваются как компоненты вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном *пространстве состояний* (англ. *state space*). Эти параметры, вообще говоря, неизвестны наблюдателю. Доступную информацию об управляемой системе представляет m-мерный *вектор наблюдения* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, а *управляющее воздействие*, как целенаправленное изменение некоторых характеристик системы – p-мерный *вектор управления* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$. В общем случае $1 \le m$, $p \le n$. Кроме того, на систему действуют *внешние возмущения*, или шумы, которые случайным образом изменяют компоненты как вектора состояния, так и вектора наблюдений.

Линейная непрерывная система управления задается системой уравнений

(10.3 а) $$d\mathbf{x}/dt = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}\mathbf{u} + \omega$$

(10.3 б) $$\mathbf{y} = \mathrm{C}\mathbf{x} + \theta.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка (10.3 а) соответствуют изменениям во времени компонентов вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ с учетом вектора управляющих воздействий $\mathbf{u}(t)$, а уравнения (10.3 б) –зависимости компонентов вектора наблюдений $\mathbf{y}(t)$ от вектора $\mathbf{x}(t)$. «Множители» при векторах в правой части (10.3 а) – это квадратная *матрица состояний*, или *динамическая матрица* A размера $n \times n$ и прямоугольная *матрица*

управления B размера $n \times p$, в (10.3 б) – прямоугольная *матрица выхода* C, или *матрица наблюдений* размера $n \times m$. Кроме того, в уравнения (10.3 а, б) входят случайные величины *возмущений* $\omega(t)$, изменяющих состояние системы, и шумовых *помех* $\theta(t)$, изменяющих выходящий сигналы – которые сами могут быть многокомпонентными. Если все компоненты матриц известны и постоянны, система управления называется *стационарной* и *полностью определенной*.

Уравнения (10.3 а,б) задают изменение состояния динамической системы, к которой приложено управляющее воздействие. Пусть, например, такой системой является математический маятник. Его динамику описывают дифференциальные уравнения второго порядка

$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$ без учета трения, или

$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \gamma\frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l}\alpha = 0$ с учетом вязкого трения о воздух, γ – коэффициент трения

(см. разд. 2.2 в гл. 2). Добавляя вынуждающую силу, действующую на груз в горизонтальном направлении, получим уравнения *маятника с управлением* (рис. 10.12)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = u \qquad \text{без трения}$$
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \gamma\frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l}\alpha = u \quad \text{с учетом трения.}$$

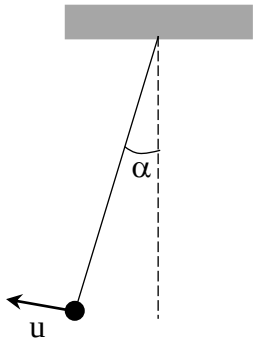


Рисунок 10.12. Математический маятник с управлением (см. [2], рис. 1.1.7)

Вводя обозначения $\alpha = x_1$, $d\alpha/dt = x_2$, как в разделе 2.2, получим систему уравнений вида (10.3 а). Для маятника без трения

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l}x_1 + u,$$

откуда следуют матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = (0 \quad 1)$$

(в качестве матрицы B выступает вектор-строка). Для маятника с трением

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{g}{l}x_1 - \gamma x_2 + u, \text{ поэтому}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\gamma \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = (0 \quad 1)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить матрицы A и B в уравнение (10.3 а) с ω = 0 и векторами-столбцами

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix};$$

в этом случае управление $u = u_2$, а компонент u_1 не используется (см. [2] в списке рекомендованной литературы, стр. 46-48).

Для автоматического управления состоянием системы необходимо, чтобы вектор **u** управляющих воздействий определялся вектором состояния **x** – который, напомним, в общем случае неизвестен и лишь оценивается по вектору наблюдений **y**:

$$\boldsymbol{u}(t) = F[\mathbf{x}(t)] = \Phi[\mathbf{y}(t)].$$

В простых примерах управляющее устройство, или *регулятор (контроллер),* однозначно задается механической схемой – например, в системе подачи топлива в двигатель внутреннего сгорания (рис. 10.13). В общем случае обратная связь на рис. 10.10 должна компенсировать отклонения системы от заданных параметров. Предполагая для простоты, что состояние системы определяет единственный скалярный параметр *x*, назовем *ошибкой* его отклонение от целевого значения x_0

$$e = x - x_0$$

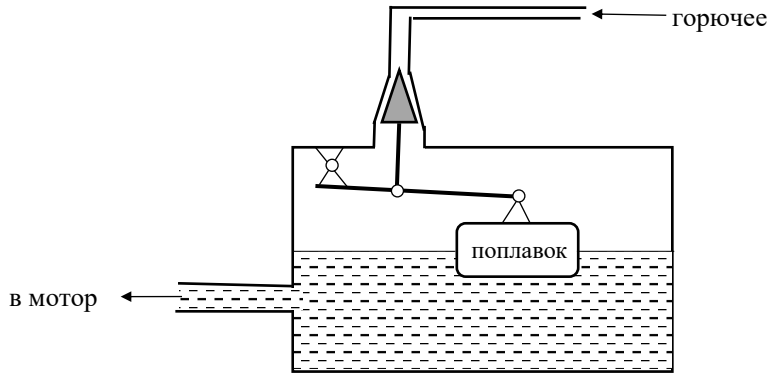


Рисунок 10.13. Поплавковый регулятор карбюратора (см. [3], рис. 1.5)

Линейную связь управления *u* (также скалярного) с ошибкой *e* в общем случае задает *пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор* (англ. *PID-controller*):

(10.4) $$u = k_1 e + k_2 \int_0^t e(t)dt + k_3 \frac{de}{dt},$$

где k_1, k_2 и k_3 – эмпирические *передаточные коэффициенты*. Первое слагаемое в (10.4) называется *пропорциональным*; оно отражает связь управления с ошибкой в момент времени t. Второе, *интегральное* слагаемое тем больше, чем выше накопленная ошибка за время от 0 до t. Третье слагаемое (*дифференциальное*) пропорционально «скорости» изменения ошибки во времени. В разных регуляторах может использоваться каждое из трех слагаемых либо их попарные сочетания: пропорциональный контроллер $u = k_1 e$, пропорционально-дифференциальный контроллер $u = k_1 e + k_3(de/dt)$ и т.д.

По отношению к возмущающим случайным воздействиям целевое состояние $\mathbf{x_0}$ системы может быть устойчивым, неустойчивым или нейтральным. Система устойчива, если при выходе из состояния $\mathbf{x_0}$ стремится в него вернуться (пример – тяжелый шарик в сферическом углублении при сдвиге из минимума совершает колебания и, с учетом трения, возвращается в нижнюю точку). Пример неустойчивой системы, которая не приходит в определенное состояние – шарик в ящике на горизонтальной поверхности (рис. 10.14 а, б). Подача топлива в карбюратор (рис. 10.13) – нейтральная система: при сдвиге клапана относительно положения поплавка устанавливается другой равновесный уровень жидкости. Близкое к устойчивости понятие *грубости*, или *робастности* (англ. *robust*), означает, что управление системой устойчиво относительно изменения ее параметров в некотором заданном интервале этих изменений и шумовых помех.

(а) (б)

Рисунок 10.14. Металлический шарик в углублении: (а) устойчивая система, (б) неустойчивая система

Управляющие воздействия могут осуществляться не непрерывно (как в регуляторе уровня горючего на рис. 10.13), а через определенные промежутки времени Δt. Если все эти промежутки одинаковы, последовательные моменты времени можно пронумеровать и перейти к описанию системы в *дискретном времени*, которому будет соответствовать подстрочный индекс $t = 1, 2, \ldots$ В этой записи связь (10.4) управления в момент T с ошибкой в PID-контроллере имеет вид

(10.4 а) $$u_T = k_1 e_T + k_2 \sum_{t=1}^{T} e_t + k_3 (e_T - e_{T-1})$$

(интеграл накопленной ошибки заменяется суммой, а производная – разностью двух ее последовательных значений). Уравнения динамики системы (10.3 а, б) в дискретном времени принимают вид

(10.5 а) $$\mathbf{x}_{T+1} = \mathrm{A}\mathbf{x}_T + \mathrm{B}\mathbf{u}_T + \omega_T$$

(10.5 б) $$\mathbf{y}_T = \mathrm{C}\mathbf{x}_T + \theta_T,$$

где матрицы A, B и C имеют прежнюю форму, а ω_T и θ_T – соответственно возмущение и шум в момент T, выраженные случайными числами.

Задача теории автоматического управления – построение таких функций управляющих воздействий $\mathbf{u}(t) = F[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{y}(t)]$, которые обеспечивают устойчивый целевой режим $\mathbf{x}^*(t)$ функционирования динамической системы с учетом ее наблюдаемых параметров $\mathbf{y}(t)$ при влиянии помех и шумов. Расчет оптимального и устойчивого («робастного») режима управления в ТАУ называется *синтезом контроллера*. В этой области разработаны многие методы описания, построения и оптимизации управления для широкого класса систем: континуальных и дискретных, линейных и нелинейных (см. [2] и гл. 4 в части I).

Считывание результатов наблюдений $\mathbf{y}(t)$, оценка их связи с фактической динамикой системы $\mathbf{x}(t)$ и выработка управляющих воздействий $\mathbf{u}(t)$ по содержанию задач приближают ТАУ к характеристике интеллекта (10.1) – в данном случае ИИ, так как цель системы задается контроллером. Ввиду необходимости изменений управления при изменениях обстановки с учетом помех, теория автоматического управления примыкает к области искусственного интеллекта и позволяет формализовать это понятие.

10.2.2. Автоматическое управление и робототехника

Робототехникой (англ. *robotics*) называется большая область академических и прикладных дисциплин, занимающихся разработкой и применением *роботов*: автоматических устройств, которые оптимизируют операции человека с внешними объектами и нередко заменяют людей в опасных условиях. В ее разделы входят стандартные приложения роботов (промышленных, транспортных, военных, космических, медицинских, обучающих, бытовых), их функциональные особенности («сухопутные» колесные, гусеничные, би-, тетра- и гексаподы; плавающие и летающие, мультисенсорные, перцептивные, сетевые и др.), зарождающиеся области человекоподобных и социальных роботов, когнитивные взаимодействий машин с человеком и многие другие. В широком смысле к роботам также относят автономные управляющие программы (биржевые *торговые роботы*, системы автоматического поиска, машинного перевода, голосовые помощники) и другие примеры взаимодействий «человек – компьютер».

Области робототехники и искусственного интеллекта перекрываются; в управлении роботами ТАУ играет ключевую роль. Мы рассмотрим здесь лишь одно из приложений автоматического управления, непосредственно переходящее в область ИИ: перемещения автономных мобильных роботов в «зашумленной» окружающей среде. Эти приложения ТАУ позволяют формализовать восприятие и обработку информации интеллектуальными агентами. Другие приложения искусственного интеллекта будут обсуждаться в следующей главе.

Техническое отступление: перемещения робота-пылесоса

Наиболее известный пример бытовых роботов – мобильные пылесосы. Эти автономные устройства убирают помещение, где могут находиться препятствия: мебель, случайно переставляемые стулья, домашние животные и прочие. При разрядке аккумулятора пылесос автоматически возвращается на подключенную к электрической сети *базу*, положение которой его контроллер, соответственно, должен уметь определять. Навигация в изменчивой внешней обстановке, не поддающейся жесткому программированию – одна из главных задач современной робототехники.

Подавляющее большинство роботов-пылесосов имеют форму блина: низкого (5-20 см) цилиндра на двух ведущих колесах с третьим рулевым колесом (рис. 10.15). Эта форма позволяет пылесосу разворачиваться на месте и выбираться из углов помещения, что не по силам прямоугольному аппарату. Чувствительные элементы робота состоят из бампера, реагирующего на механические контакты с предметами (при лобовом столкновении по курсу движения пылесос дает задний ход, при боковом столкновении поворачивает) и системы наблюдения: видеокамеры, лазерного дальномера и инфракрасных датчиков, в том числе показывающих направление на базу. Тип, число и расположение датчиков варьируется в зависимости от стоимости изделия. В дорогостоящих моделях механические детекторы столкновения заменяются ультразвуковыми сенсорами, которые тоже оценивают расстояние до препятствия[10].

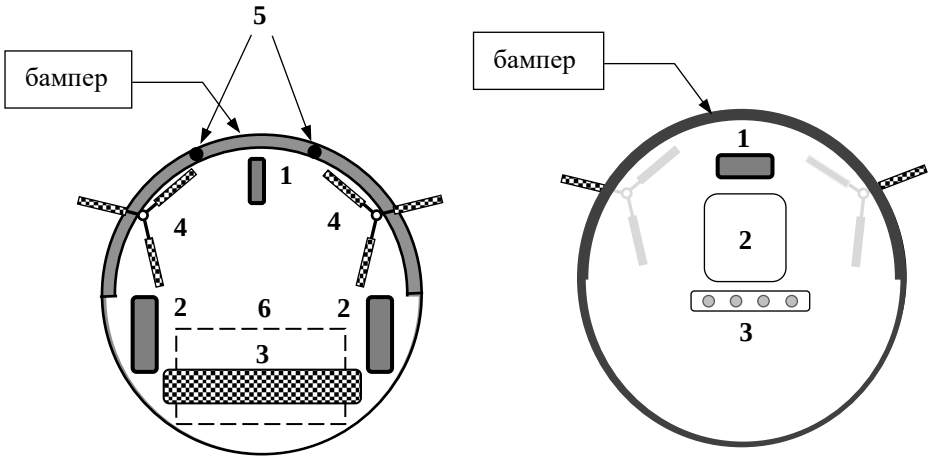


Рисунок 10.15. Узлы робота-пылесоса. (а) Вид снизу: 1 – рулевое колесо, 2 – ведущие колеса, 3 – основная щетка, 4 – боковые щетки, 5 – механические датчики, 6 – пылесборник. (б) Вид сверху: 1 – камера (лазерный дальномер, ИК-датчики), 2 – дисплей, 3 – кнопочный пульт.

Простейшая программа действий робота-пылесоса - движение зигзагами параллельно стенам до обработки всей площади пола. Ее реализация в дешевых моделях вызывает справедливые претензии покупателей: аппарат может долго «биться» возле стены (более дорогие варианты – у зеркала), падать со ступенек, застревать под шкафом и мн. др. Таким образом, функционирование робота в реальной обстановке сопряжено с решением большого числа нестандартных задач, которые нельзя заранее ввести в программу. Гибкая реакция устройства, в понимании гуманитарных наук никак не обладающего интеллектом, на заранее не определенные внешние сигналы – одна из центральных задач робототехники. Связанная с ней академическая задача – необходимость свертывания информации $\mathbf{y}(t)$, объем которой, из самых общих соображений, для математически точной локализации аппарата в каждый момент времени должен быть бесконечно велик.

Фильтр Калмана и пространство представлений

Состояние управляемой системы всегда определяется с некоторой погрешностью, а на ее динамику влияют случайные помехи. Пусть, например, маленькая тележка («колесный робот») перемещается по прямой вдоль координаты x со средней скоростью $\langle v \rangle$ (рис. 10.16). В математической модели (10.5) этой простейшей системы матрицы заменяются числами,

управление отсутствует (B = 0) и регистрируются положения тележки в последовательные моменты времени t = 1, 2, 3,… (C = 1). Уравнения (10.5 а, б) принимают вид

$$x_{t+1} = x_t + v + \omega$$
$$y_t = x_t + \theta,$$

где ω и θ – случайные величины.

В том (и только в том) случае, когда скорость v постоянна и точно известна, исходное распределение возможных положений тележки около точки x_k перенесется в точку x_{k+1} в неизменном виде (пунктирная линия на рис. 10.16). Но поскольку на скорость перемещения робота влияют случайные факторы (перебои в работе мотора, неровная поверхность, встречный ветер), шум θ_k с увеличением k будет возрастать и через некоторое число шагов сделает предсказание x_{k+1} невозможным.

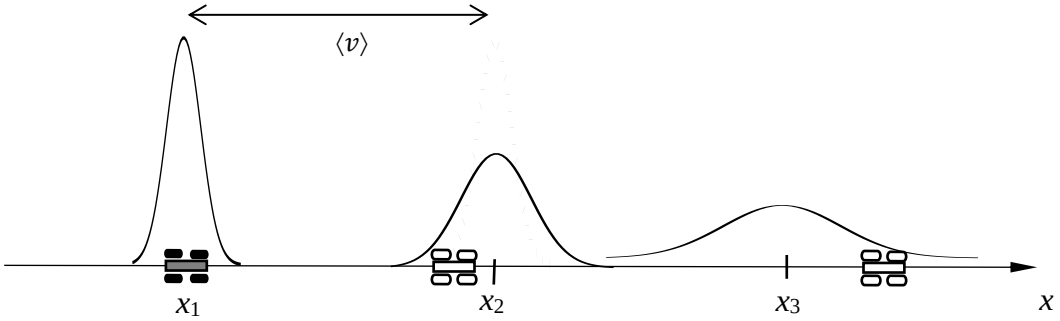


Рисунок 10.16. «Расплывание» возможных положений робота {y_k} на прямой линии

Ошибку можно скорректировать, если сохранять в памяти все положения {y_k} в последовательные моменты времени (контуры тележки на рис. 10.16), оценивая по ним среднюю скорость и ее дисперсию. Значения {y_k} регистрируются по *одометру*: это устройство показывает пройденный путь по числу оборотов колес. Однако для движения по поверхности *одометрия*, дополненная данными о направлении перемещения («положении руля») в каждый момент времени, не дает точной информации о положении робота и требует больших вычислительных затрат.

Более точную навигацию обеспечивает *фильтр Калмана*: экономный алгоритм оценки состояния системы $\hat{x}_{k+1}$ по оценке предыдущего состояния $\hat{x}_k$ и результату измерений y_{k+1}. Результат «смешивания» двух случайных величин (μ_i, σ_i^2), подчиняющихся нормальным распределениям

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

с математическими ожиданиями μ_i и дисперсиями σ_i^2 (i = 1, 2), имеет параметры

$$\mu' = \frac{\mu_1\sigma_2{}^2 + \mu_2\sigma_1{}^2}{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2}$$

$$\sigma'^2 = \frac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2}$$

(см. разд. 8.2.2. в гл. 8 и Приложение П8). Так, усреднение двух гауссовых случайных величин с параметрами (10, 4) и (12, 6) (в скобках приводятся математическое ожидание и дисперсия) даст гауссову случайную величину с параметрами

$$\mu' = \frac{10\cdot 6+12\cdot 4}{4+6} = \frac{108}{10} = 10.8, \qquad \sigma'^2 = \frac{4\cdot 6}{4+6} = 2.4,$$

а величин (10, 6) и (12, 4) (дисперсии двух распределений поменялись местами) – гауссову случайную величину с математическим ожиданием

$$\mu' = \frac{12\cdot 6+10\cdot 4}{4+6} = \frac{112}{10} = 11.2$$

и той же дисперсией $\sigma'^2 = 2.4$. Таким образом, «центр» получаемой величины сдвигается в сторону более узкого распределения и ее дисперсия уменьшается (рис. 10.17).

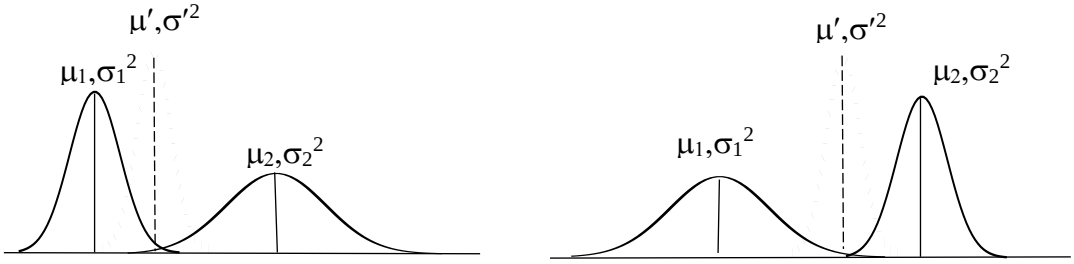


Рисунок 10.17. Усреднение двух гауссовых случайных величин (штриховая линия)

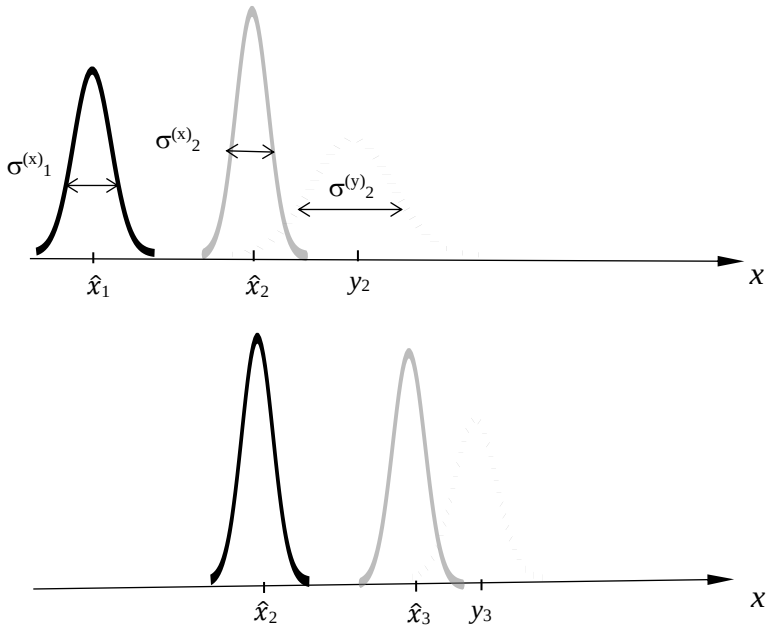


Рисунок 10.18. Оценки координаты x_n при одномерном движении в последовательные моменты времени t_2 и t_3 (см. рис. 10.16)

На этом принципе строится алгоритм рекурсивных оценок последовательных состояний системы, для которой заданы параметры исходного состояния (μ_0, σ_0^2). При одномерном движении, как на рис. 10.16, оценка положения тележки на *k*-м шаге дискретного времени имеет вид

(10.6) $$\hat{x}_k = Ky_k + (1-K)(\hat{x}_{k-1} + \langle v \rangle),$$

В общем случае рекурсивные оценки состояний «многомерной» системы $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k}^*$ и их погрешностей P_k^* выводятся из разностных уравнения (10.5 а, б):

(10.6 а) $$\hat{\mathbf{x}}_k^* = \mathrm{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathrm{B}\mathbf{u}_{k-1}$$
$$\mathrm{P_k}^* = \mathrm{A}\mathrm{P}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{A}^\mathrm{T} + \mathrm{Q}_1,$$

где A^T – транспонированная динамическая матрица, Q_1 – матрица ковариаций, т.е. взаимной зависимости случайных помех ω (см. гл. 8). Предварительные оценки (символы со звездочкой) далее корректируются по вектору наблюдений $\mathbf{y}_\mathrm{k}$

(10.6 б) $$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^* + \mathrm{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathrm{C}\hat{\mathbf{x}}_k^*)$$
$$\mathrm{P_k} = (\mathrm{E} - \mathrm{K}_k\mathrm{C})\mathrm{P_k}^*$$

с использованием матричного *фильтра Калмана*

(10.7) $$\mathrm{K_k} = \frac{\mathrm{P_k}^*\mathrm{C}}{\mathrm{C}\mathrm{P_k}^*\mathrm{C}^\mathrm{T} + \mathrm{Q}_2}$$

(E – единичная матрица, Q_2 – матрица ковариаций шума θ при измерениях, C^T – транспонированная матрица наблюдений). Отправной точкой расчета служат оценки исходного состояния $\hat{\mathbf{x}}_0$ и его погрешности P_0.

Фильтр Калмана эффективно свертывает зашумленные сигналы в сглаженную траекторию (рис. 10.19) и поэтому широко применяется в обработке информации. Оценки состояний $\{\hat{\mathbf{x}}_k\}$, в терминах ТАУ, принадлежат *n*-мерному *пространству представлений* (англ. *belief space*). Точкам этого пространства ($\hat{\mathbf{x}}$, P) соответствует «представление» системы (в робототехнике термин используют без кавычек) о своем состоянии и о неточности этого представления, которое может выражаться, в соответствии с числом параметров системы, *n*-мерным *шаром погрешностей* δ($\hat{\mathbf{x}}$).

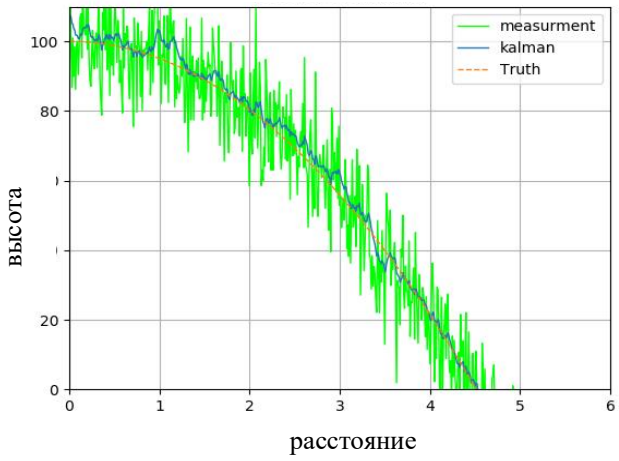


Рисунок 10.19. Моделирование падения тела по параболической траектории (пунктир) с зашумленными измерениями положения (зеленый цвет). Темно-синяя линия – калмановское сглаживание (https://i.stack.imgur.com/eRBjP.png)

Мы видим, что уже при описании динамики неодушевленных механизмов, которые должны гибко реагировать на внешние условия, в ТАУ вводятся аналоги *восприятия* и *отражения мира*, обычно обсуждаемых когнитивными науками применительно к людям. В последовательности таких «отражений» каждое представление $\hat{\mathbf{x}}(t)$ рассчитывается из представления $\hat{\mathbf{x}}(t-1)$ в предыдущий момент времени и «восприятия» текущего состояния по результатам измерений $\mathbf{y}(t)$. Не менее существенно, что каждой точке пространства представлений сопоставлена некоторая погрешность: положения этих точек *размыты*. Отражение действительности, свертка информации и нечеткость образа – общие признаки интеллекта, но они проявляются уже на протоинтеллектуальном уровне робототехники.

Навигация технических устройств

Наиболее совершенные мобильные роботы составляют и используют в навигации карту местности (помещения). Определения своего местонахождения с параллельным построением карты (англ. *Simultaneous Localizations and Mapping, SLAM*) – одно из популярных направлений робототехники. Помимо одометрии, при этом используются привязка к некоторым ориентирам-*маякам* (например, к углам комнаты), графы взаимного расположения ориентиров и *расширенный фильтр Калмана* (англ. *extended Kalman filter, EKF*), который позволяет установить координаты объектов и их погрешности в пространстве представлений. Положения ориентиров затем уточняются в рекурсивных алгоритмах с повышением точности локализации робота.

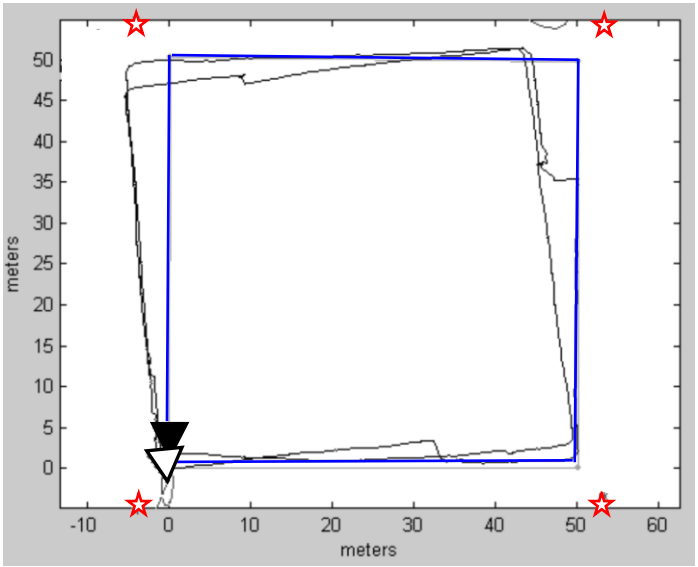


Рисунок 10.20. Расчетное моделирование перемещений робота по методу SLAM с калмановской фильтрацией. Синяя линия – заданная траектория, черная линия – фактическая траектория, звезды – положения ориентиров. Черный и белый треугольники – заданное и фактическое положение робота (по J. Park, S. Lee, J. Park, Int. J. Adv. Robotic Systems, 2009, 6 (2), 67)

Ключевой этап успешной навигации – построение замкнутой петли траектории с возвратом в однажды пройденную область (рис. 10.20). Сочетание положения (координат) и ориентации аппарата в этом разделе IT-инженерии называется *позой*. Карта местности, занимающая определенный объем памяти – одни из способов отражения окружающей действительности в «сознании» робота, понимаемом как совокупность отражений и связей

между ними. (Подобные логические ловушки в робототехнике называются *проблемой курицы и яйца* и не обсуждаются: приоритеты понятий отражения и сознания с философской точки зрения неочевидны – но здесь речь всегда идет о неодушевленных технических устройствах).

Групповая робототехника и роевой интеллект

Группы взаимосвязанных роботов способны решать общую (поставленную извне) задачу с коллективной обработкой информации, то есть проявлять признаки распределенного интеллекта. Формация мобильных аппаратов с запрограммированными функциями «следовать за соседями» и «избегать столкновений» будет огибать препятствия подобно толпе пешеходов на рис. 10.8 а. В качестве средств связи между роботами, помимо элементов управления из единого центра, используются видеоканалы и радиочастоты (с индивидуальными «метками» каждого аппарата), а также ультразвук, вместе с видеосигналом позволяющий оценить расстояние. Роевой интеллект систем из относительно простых и недорогих взаимосвязанных роботов, во многих отношениях имитирующий РИ общественных насекомых, способен выполнять ряд практически важных операций[11]:

1. Совместный сбор и рассредоточение по максимальной площади без потери связи
2. Образование геометрической формы (*строя*) и коллективное движение
3. Транспортировка и совместное перемещение объектов
4. Коллективная картография
5. Разделение функций

Основным достоинством формаций роботов является «робастность» коллективных действий: взаимозаменяемость устройств и нечувствительность системы к поломкам некоторого числа единиц. Системы роботов, использующие роевой интеллект (*swarm robotics*) могут применяться для рекогносцировки и работ в опасных для человека условиях, в медицине для манипуляций внутри организма (*нанороботы*), в исследованиях протяженных объектов (картография, геология, сельское хозяйство) и в других областях[12,13]. Роевой РИ технических систем смыкается с агентными моделями и «подсказанными Природой» алгоритмами расчетов, которые будут рассмотрены в следующей главе.

Очевидными военными применениями роботов (см., например, книгу [6] в списке рекомендуемой литературы к гл. 5) частично объясняется относительно небольшое число содержательных публикаций о РИ распределенных технических систем в открытых источниках. Некоторые достижения в этой области отражают состязания по *робофутболу* (рис. 10.21). Международный научно-инженерный проект RoboCup, начатый в 1996 г., включает ежегодные чемпионаты мира для команд из автономных *антропоморфных*[*] роботов (в их составе до пяти игроков высотой меньше 1 м, пока не вполне владеющих

[*]Антропоморфным называется робот, по конструкции аналогичный человеку (две руки, две ноги, одна голова, способная поворачиваться на шее; для робота-футболиста два жестко фиксированных глаза и запрет на такие «сверхчеловеческие» возможности, как радиосвязь). Роботы, похожие на людей – как, например, в пьесе Карела Чапека «R.U.R.» – называются *андроидами*.

техникой паса и обводки). Заявленной целью проекта является создание к 2050 г. команды роботов, способной обыграть чемпионов мира по футболу. Заметим, что в таких индивидуальных играх, как шахматы и го, подобная задача решена (см. следующую главу). В 2021 г. чемпионами мира в RoboCup стала российская команда МФТИ[14].

Рисунок 10.21. Антропоморфные роботы на футбольном поле[14]

Литература к разделу 10.2

[9] В.С. Пацко, В.Л. Турова, *Игра «шофер-убийца»: история и современные исследования*. Научные доклады, Екатеринбург: УрО РАН, 2009.

[10] А. Казанцев, 8.11.2021. *Так ли умны «роботы-пылесосы»? Рассматриваем датчики для навигации*. https://habr.com/ru/post/587580/

[11] I. Navarro. F. Matía, *An introduction to Swarm Robotics*, ISRN Robotics, 2013, art. 608164

[12] Е.А. Яковлева, А.А. Сорокин, Р.А. Коваленко. *Роевой интеллект в роботизированном решении пространственных задач*. — Казань: Бук, 2020.

[13] А.А. Кулинич, В.Э. Карпов И.П. Карпова, *Социальные сообщества роботов.* М.: ЛЕНАНД, 2019.

[14] М. Бабинов, *Когда же роботы будут играть в футбол наравне с людьми?* 20.12.2022, https://habr.com/ru/company/robouniver/blog/706684/

10.3. Нечеткое управление

Величины управляющих воздействий в формулах (10.3–10.5) рассчитываются по результатам текущих измерений параметров объекта управления (см. рис. 10.10). При отклонениях значений параметров в автоматической системе возникают компенсирующие воздействия, которые возвращают объект управления в целевое состояние. Однако точная «цифровая» зависимость управляющих воздействий от параметров системы $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ в виде таблиц с мелким разбиением интервалов всех переменных требует больших ресурсов памяти. Кроме того, для создания (*синтеза*) управления нужна математическая модель управляемого процесса. Такие модели разработаны не для всех технических систем, включая современные автомобильные двигатели. При нелинейной зависимости $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ подобные системы могут сильно реагировать на флуктуации, что грозит потерей устойчивости объекта управления.

Более надежные «робастные» регуляторы современных систем – в том числе таких, для которых еще не построены математические модели – с конца XX века разрабатываются на основе теории *нечетких множеств*. Этот подход, позволяющий проводить расчеты с нестрогими и неточными данными, применяется как к управлению техническими устройствами, так и к описанию динамики социальных процессов. По сравнению со стандартными методами (такими, как PID-контроллеры (10.4) и (10.4 а)), *нечеткое управление* более эффективно, требует меньше вычислительных ресурсов и заменяет аналитические зависимости между параметрами системы набором эмпирических правил ее функционирования.

Нечеткие множества

В разделе 8.2.1 главы 8 были представлены некоторые сведения о множествах и таких операциях с ними, как объединение, пересечение, включение и дополнение (Рис. 10.22, также см. рис. 8.6). Там же были упомянуты некоторые математические конструкции, основанные на множествах: группы, графы, алгебры, игры.

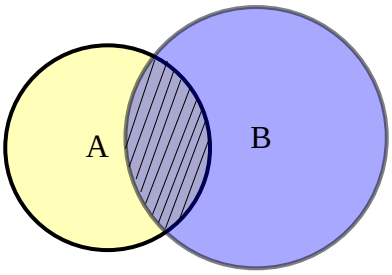


Рисунок 10.22. Объединение множеств A ∪ B (сплошной внешний контур) и их пересечение A ∩ B (заштрихованная часть); см. также рис. 8.6 в главе 8

Объединения и пересечения множеств наглядно показывают *диаграммы Эйлера-Венна* (рис. 10.23). Наиболее общее определение математических функций $y = f(x)$ (и более сложных) – это отношение между элементами множеств

(10.8) $$f: X \to Y,$$

где элементам $x \in X$ по правилу f поставлены в соответствие элементы $y \in Y$. Так, например, квадратичная функция $y = x^2$ ставит в соответствие точкам на числовой оси $x \in (-\infty, +\infty)$ точки на полуоси $y \in [0, +\infty)$, а функция $y = \sin x$ переводит точки отрезка $x \in [-\pi, \pi]$ в точки отрезка $y \in [-1, 1]$.

Определение функции (10.8) как проекции множества X на множество Y не зависит от ее конкретной формы. Оно распространяется и на такие закономерности, которые не имеют аналитического вида и могут не выражаться математическими формулами. В разд. 8.6.3 главы 8 нам встретились фрактальные множества, которые широко используются в эконофизике и финансовой математике. Понятие множества – одно из самых общих в математике с огромной областью применения – во второй половине XX века получило дальнейшее развитие.

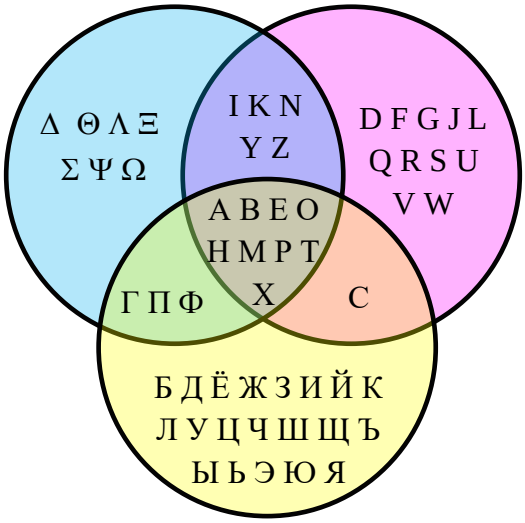


Рисунок 10.23. Диаграмма Эйлера-Венна: начертания прописных букв греческого, английского и русского алфавитов (из Интернет)

Обобщением понятия множества является *нечеткое множество* (англ. *fuzzy set*). Нечеткими называются такие множества, для которых общий признак, объединяющий элементы, указан неточно и обычно зависит от контекста, в котором эти элементы рассматриваются. Поскольку для количественных сравнений, выраженных естественным языком, характерны относительность и неопределенность («примерно равны», «чуть больше», «слабее», «теплее»…), нечеткие множества позволяют производить операции с такими не вполне определенными величинами и соотношениями величин, получая при этом содержательные результаты.

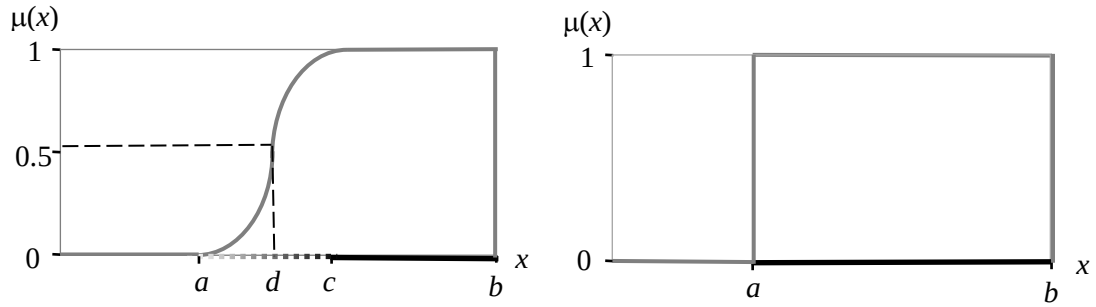
Самый общеизвестный пример нечеткого множества дает реляционный оператор «>>» (*много больше*), часто используемый в математике. Соотношение

$$x >> 1$$

на бытовом уровне можно считать верным для «больших» чисел ($x = 100$, $x = 999$, $x = 1000$, $x = 1000000$ и т.д., включая нецелые числа), однако оно вряд ли справедливо для $x = 2$ или $x = 13/5$. Запись $10 >> 1$ можно считать правильной либо неправильной в зависимости от ситуации: в повседневных масштабах трудно утверждать, что 10 г много больше одного грамма, но если речь идет о весе ручного багажа, 50 кг намного тяжелее, чем 5 кг.

В общем случае *нечетким множеством* $A \subset U$, заданном на множестве U, называется совокупность элементов $\{x \in U\}$, каждому из которых придается число $0 \le \mu(x) \le 1$, определяющее «степень принадлежности» элемента x множеству A. При $\mu(x) = 1$ элемент x «точно принадлежит» A, при $\mu(x) = 0$ «точно не принадлежит», а всем остальным значениям $0 < \mu(x) < 1$ соответствует «неточная», или условная принадлежность: тем более достоверная, чем ближе $\mu(x)$ к 1. В строгих математических формулировках нечеткое множество – это совокупность пар $A = \{x, \mu_A(x) | x \in U\}$ элементов $\{x\}$ некоторого «обычного» множества U и соответствующих им значений *функции принадлежности* $\mu_A(x) \in [0, 1]$. Множество U=Supp A называется *носителем* A (символ производится от англ. support), или *универсальным множеством*.

В простом примере на рис. 10.24 а функция принадлежности $\mu(x)$ задана на отрезке [a, b]. Точки $0 \le x \le a$ и $x > b$ со значением $\mu(x) = 0$ не принадлежат нечеткому множеству ($x \notin$ A), а точки $c \le x \le b$, которым отвечает $\mu(x) = 1$, достоверно принадлежат A. Точки отрезка между d и c «скорее принадлежат» ($\mu(x) > 1/2$), а между a и d «скорее не принадлежат» A ($\mu(x) < 1/2$); принадлежность точки d множеству A ($\mu = 1/2$) не определена. При замене плавной функции принадлежности на ступенчатую ($\mu(x) = 0$ для $x \notin$ [a, b] и $\mu(x) = 1$ для $x \in$ [a, b]) нечеткое множество A переходит в обычное множество точек отрезка U = [a, b] (рис. 10.24 б). Обычные множества, обсуждаемые в едином контексте с нечеткими, называют *четкими множествами* (*crisp sets*).



(а) (б)

Рисунок 10.24. (а) Нечеткое множество A ⊂ U = [*a, b*], (б) обычное множество A = U = [*a, b*]

Соотношения между нечеткими множествами определяются их функциями принадлежности. Если A и B – нечеткие множества, заданные на одном и том же универсальном множестве*, A ⊆ B в том случае, когда $\mu(x)_A \le \mu(x)_B$ для всех $x \in$ U. Если при всех $x \in$ U для них справедливо $\mu(x)_A = \mu(x)_B$, множества A и B одинаковы (A = B). Дополнение \A нечеткого множества на универсальном множестве U состоит из всех элементов $x \in$ U с функцией принадлежности $\mu_{\setminus A}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Объединением нечетких множеств A ∪ B является множество всех элементов из A и B с общей функцией принадлежности вида

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)],$$

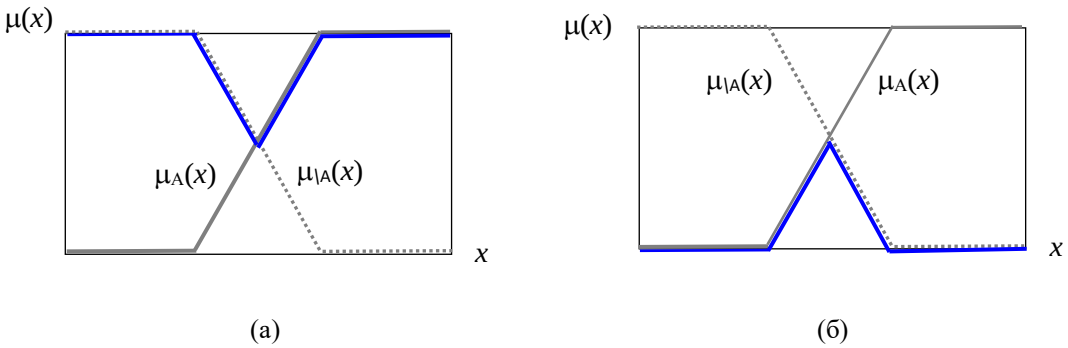
то есть совместная функция принадлежности для каждого элемента имеет максимальное значение из двух таких функций в составляющих множествах (рис. 10.25 а). В пересечении A ∩ B нечетких множеств совместная функция принадлежности для каждого элемента принимает минимальное значение (рис. 10.25 б).

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min [\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

Эти результаты отличаются от операций с обычными («четкими») множествами, показанными на рис. 10.22 и рис. 8.6 в гл. 8. Так, если множество B = \ A – это дополнение

*Для всех нечетких множеств можно задать такой «всеобъемлющий» носитель U, чтобы любые множества в рассматриваемой задаче были его подмножествами – поэтому он и называется универсальным. На рисунке 10.26 универсальным множеством U можно считать все точки числовой оси $-\infty < x < +\infty$. Таким образом, отличие нечетких множеств от четких заключается именно в функции принадлежности.

A на универсальном, т.е. произвольном объемлющем множестве U, то, в отличие от «четких» множеств, $A \cup \backslash A \neq U$ (объединение A с «не-A» меньше множества-носителя). Кроме того, $A \cap \backslash A \neq \varnothing$ (пересечение A с «не-A» не пусто).



(а) (б)

Рисунок 10.25. Композиции нечетких множеств (сплошные линии): (а) A ∪ \A, (б) A ∩ \A. Основание прямоугольного контура – универсальное множество U

В примере на рис. 10.24 можно считать, что функции принадлежности соответствуют плотности вероятности $f(x \in A)$. Однако смысл $\mu(x)$ шире математического определения вероятности: эта функция задается произвольно, может не быть нормированной, а ее значения – установленными по экспертным оценкам. Нечеткие множества, в которых $\mu(x)$ достигает 1, называются *нормальными*, при $\max[\mu(x)] < 1$ – *субнормальными*. На практике часто используют простые варианты функции принадлежности: треугольные, трапецевидные или гауссовы (рис. 10.26); их параметры определяются условиями задачи.

На основе нечетких множеств вводятся *нечеткие числа* и нечеткие математические операции. Так, нечеткое действительное число $a = \{x \in [a_1, a_2], 0 \leq \mu(x) \leq 1\}$ задается своей *областью определения*: множеством чисел на промежутке (отрезке или интервале) от a_1 до a_2, за пределами которого функция принадлежности равна нулю. Всеми функциями принадлежности на рис. 10.26 могут задаваться нечеткие числа. Универсальным носителем для них служит множество всех действительных чисел: числовая ось. По тому же принципу можно задавать нечеткие числа на комплексной плоскости. Соответствие между нечеткими множествами, установленное по схеме (10.8), называется *нечетким отношением* или *нечеткой функцией*. Действия с нечеткими множествами и их приложения рассмотрены в учебной литературе (см. [5]).

Нечеткие множества – быстро развивающийся современный раздел прикладной математики. Их впервые предложил в 1965 г. американский математик азербайджанского происхождения Лотфи Аскерзаде* (1921-2017)[15]. На основе нечетких множеств Л. Аскерзаде развивал формализм *нечеткой логики* и *мягких вычислений* (см. следующую главу), которые позволяют проводить математическую обработку информации, выраженной средствами естественного языка в *лингвистических переменных*.

* * Фамилия Аскерзаде, указывающая на происхождение из военной страты (ей примерно соответствуют русские фамилии Воинов или Витязев), в американской научной литературе была редуцирована до L. Zadeh и чаще всего так цитируется.

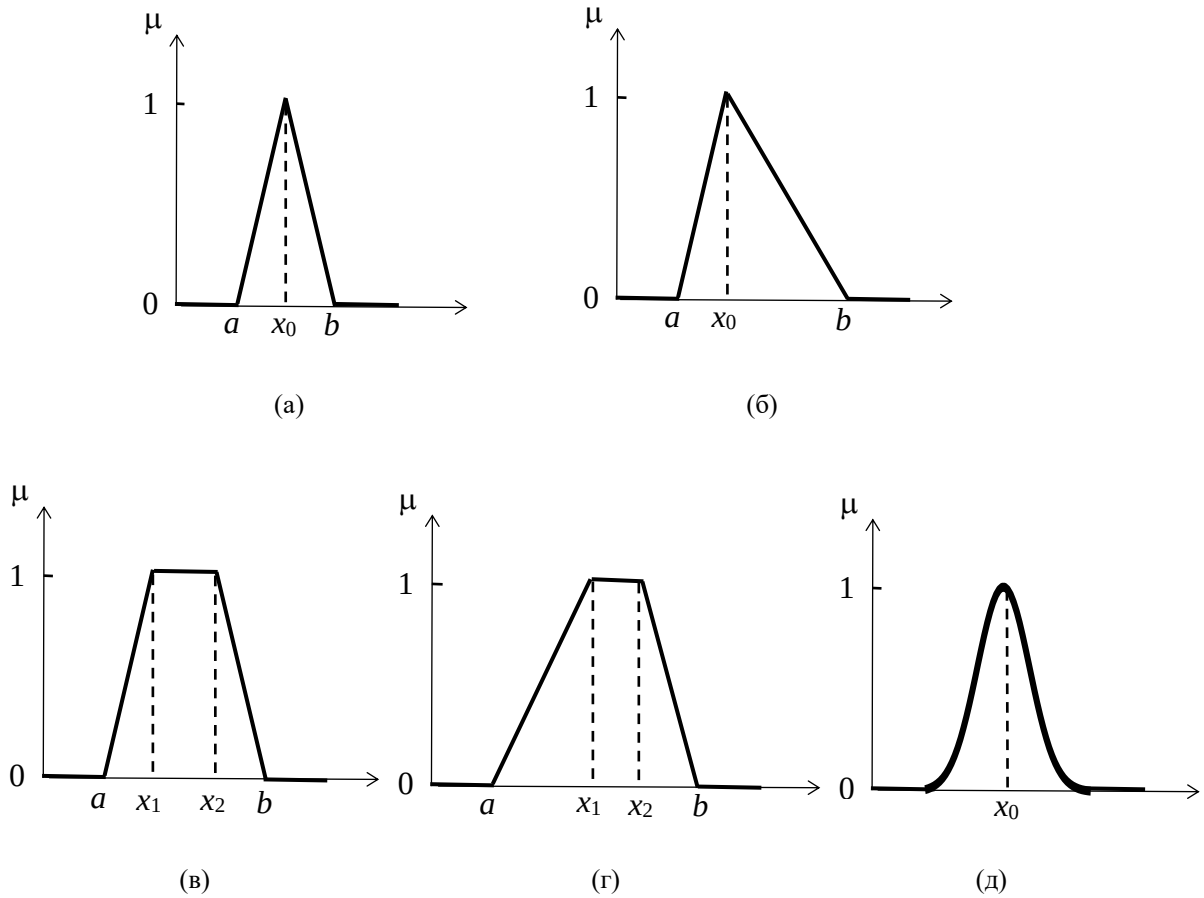


Рисунок 10.26. Часто используемые формы функции принадлежности: (а, б) треугольная, (в, г) трапецевидная, (д) гауссова.

Нечеткий контроллер

И кто его знает,
Чего он моргает…
Михаил Исаковский

В схеме нечеткого управления, в соответствии с общими принципами, управляющее устройство вырабатывает воздействие на управляемый объект по зашумленному «входу» и показаниям датчиков (см. рис. 10.10). В отличие от стандартных алгоритмов (например, PID-контроллера), получаемое воздействие не связано жестко с параметрами входа: их варьирование в некотором интервале практически не влияет на управление и, соответственно, на параметры «выхода». Сглаживание достигается в трехступенчатой схеме: точное значение параметра системы, поступающее в нечеткий контроллер, вначале «размывается» в распределение значений входных параметров с весовыми множителями, которое затем переводится нечеткой функцией в аналогичное распределение выходных параметров. На последнем этапе из этого распределения вычисляется значение выхода (рис 10.27). Перевод точных входных данных в нечеткие называется *«фаззификацией»* (калька с англ. *fuzzification*, ФЗФ в подписи к рис. 10.27), второй этап их обработки – *нечетким выводом*, или алгебраическим преобразованием нечетких величин, а третий –

«дефаззификацией»: расчетом средних величин в полученных распределениях (ДФЗФ на рис. 10.27).

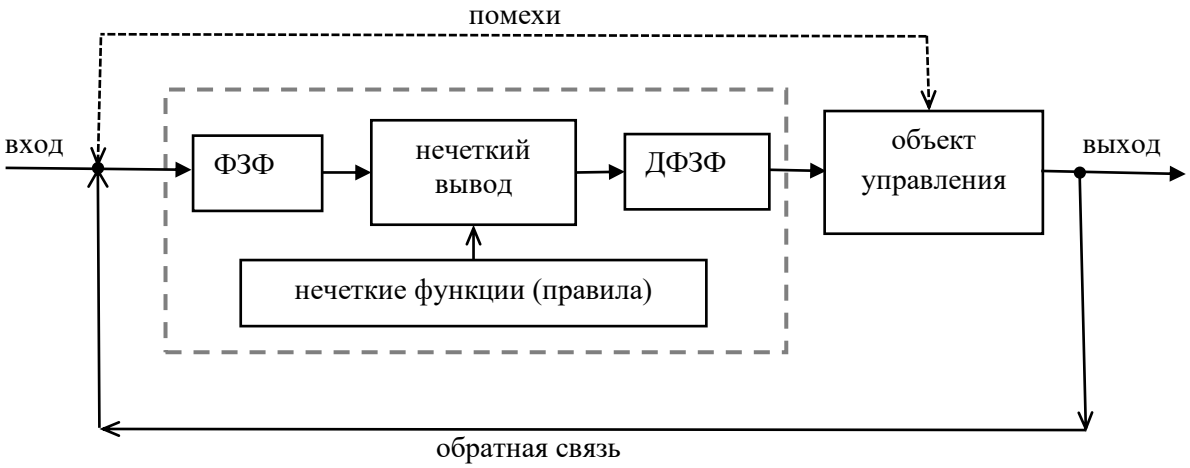


Рисунок 10.27. Схема нечеткого управления: ФЗФ – фаззификация, ДФЗФ – дефаззификация

Распространенный пример нечеткого управления из учебной литературы – автоматическое регулирование температуры воды в душевой кабине[16] (рис. 10.28 а). Если изменять температуру воды в душе краном подачи горячей воды, отклонение от целевой температуры T_0 будет нелинейной функцией от угла поворота крана φ (рис. 10.28 б; положительным значениям отвечает поворот влево, отрицательным поворот вправо), дополнительно зашумленной из-за варьирования напора воды. Чтобы поддерживать целевую температуру в соответствии с графиком на рис. 10.28 б, управляющая система должна хранить в памяти таблицу значений φ(T) с достаточно мелким разбиением ΔT (в реалистическом случае ΔT=1 °C и интервала T от 20 до 80 °C – до 3600 чисел) и сглаживать влияние флуктуаций. Стандартному PID-регулятору (10.4 а) на это потребуются дополнительный вычислительные ресурсы; поддерживать постоянную температуру T_0 (либо другой целевой параметр) при высоком уровне помех – трудная задача автоматического управления.

Чтобы построить более эффективную регулировку, точные значения температуры и угла поворота крана на графике зависимости φ(T) заменяют нечеткими числами – то есть нечеткими множествами, заданными на некоторых интервалах этих параметров их функциями принадлежности (рис. 10.28 в):

(10.9 а) Температура воды:

Холодная (Х), прохладная (П), теплая (Т), умеренно горячая (УГ), горячая (Г)

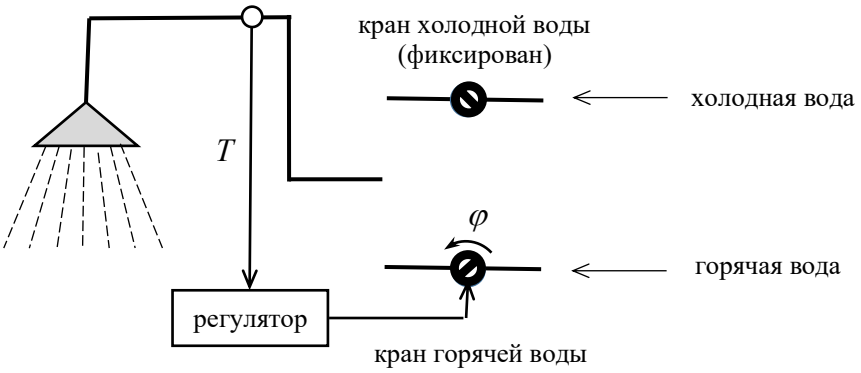
(10.9 б) Угол поворота крана:

Сильно вправо (–С), немного вправо (–Ср), не поворачивать (0),
немного влево (+Ср), сильно влево (+С)

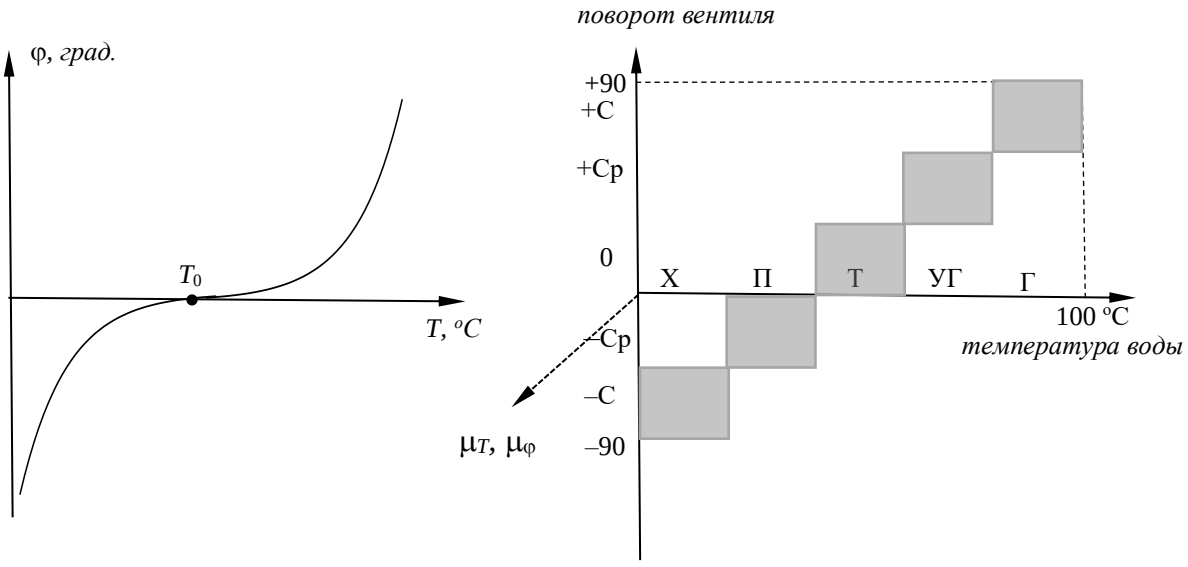
Области определения этих нечетких чисел и их функции принадлежности, не показанные на рис. 10.28 в, задают каждый раз для конкретных объектов и условий управления. Зависимость угла поворота от температуры определяется набором правил, которым соответствует нечеткая функция φ*(T):

(10.10)

Если вода холодная – сильно повернуть кран влево: φ*(*Х*) = +*С*
Если вода прохладная – немного повернуть кран влево: φ*(*П*) = +*Ср*
Если вода теплая (комфортная) – не поворачивать кран: φ*(*Т*) = 0
Если вода умеренно горячая – немного повернуть кран вправо: φ*(*УГ*) = –*Ср*
Если вода горячая – сильно повернуть кран вправо: φ*(*Г*) = –*С*



(а)



(б) (в)

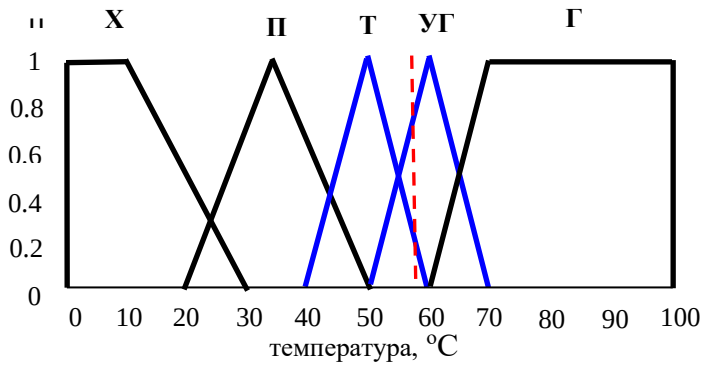
Рисунок 10.28. (а) Душ и нечеткий контроллер, схема. (б) Точная и (в) нечеткая зависимости угла поворота вентиля горячей воды от температуры

На рис. 10.28 в эту зависимость условно показывают квадраты серого цвета. Они образуют линейную цепочку, так как реальный вид зависимости «спрятан» в параметры нечетких чисел. Аналогично соотношениям тропической алгебры (см. разд. 7.8 в гл. 7), такая линеаризация упрощает задачу. Параметры системы (10.9 а, б), выраженные средствами естественного языка, называются *лингвистическими переменными*.

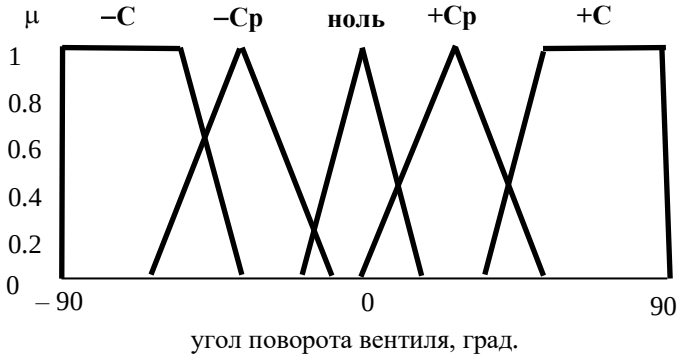
Вариант определения нечетких чисел (10.9 а, б) показан на рис. 10.29. Крайним значениям соответствуют трапецевидные числа, прочим треугольные. Нечеткий вывод управляющих воздействий (в данном случае точного угла поворота крана) по точному значению температуры проводится по следующей схеме.

Пусть измеренная температура воды в душе (белый кружок на рис. 10.28 а) равна 58 °С. Этому значению, показанному на рис. 10.29 а вертикальной штриховой линией, соответствуют два нечетких числа Т (теплая) и УГ (умеренно горячая), графики функции принадлежностей которых линия пересекает. Точки пересечения указывают вклады этих чисел в «нечеткую» температуру:

(10.11 а) температура воды = 0.2·«теплая» ∪ 0.8·«умеренно горячая»



(а)



(б)

Рисунок 10.29. Нечеткие значения (а) температуры воды, (б) угла поворота крана

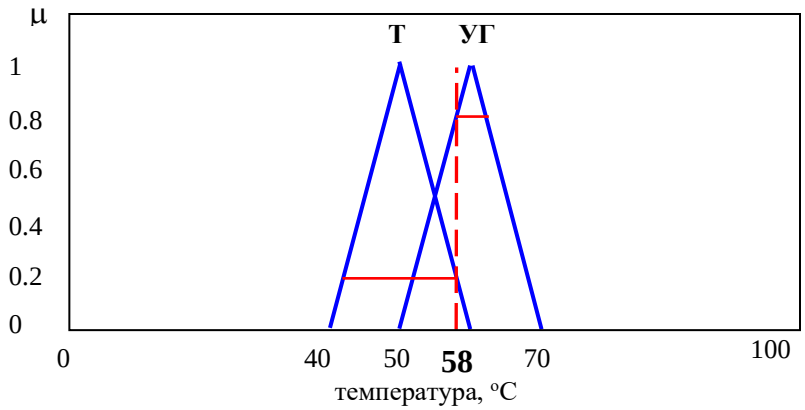
Таким образом, мы перевели температуру воды Т=58 °С в нечеткую форму: произвели ее фаззификацию. Далее по правилам (10.10), задающим нечеткую функцию φ*(*T*), значение (10.11 а) надо перевести в нечеткий угол поворота крана. Это сделать легко: в нечеткую переменную «угол поворота», в соответствии с формулами (10.10), внесут вклад только ненулевые компоненты нечеткой температуры с весами, указанными в (10.11 а):

(10.11 б) угол поворота = 0.2·«ноль» ∪ 0.8·«немного вправо».

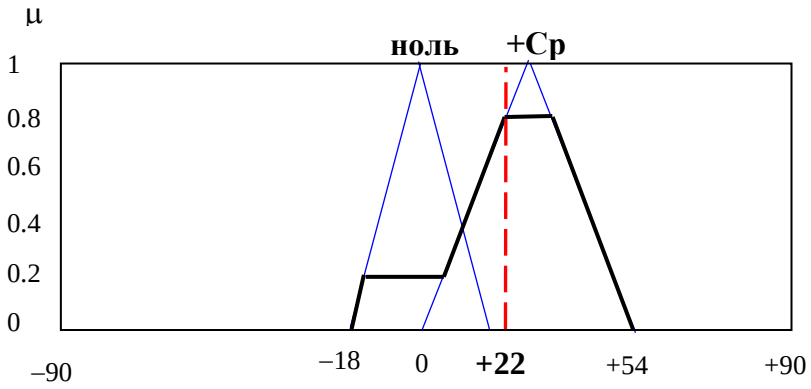
Обратим внимание, что «суммам» нечетких чисел соответствует объединение множеств. Перевод (10.11 а) в (10.11 б), т.е. процедуру нечеткого вывода, иллюстрирует рис. 10.30.

Последним шагом в выработке управления является дефаззификация: перевод нечеткого числа (10.11 б) в угол поворота вентиля. Для такого перевода в нечетком управлении используется несколько равноправных схем, дающих примерно одинаковые результаты. По наиболее популярному *алгоритму Мамдани* точная сумма двух нечетких

чисел A и B соответствует медиане функции их объединения $\mu_{A \cup B}$: линии, разделяющей фигуру под графиком объединенной функции принадлежности на две половины одинаковой площади (рис. 10.30 б).



(а)



(б)

Рисунок 10.30. (а) Определение вкладов нечетких значений температуры (фаззификация). (б) Объединение нечетких углов поворота вентиля $\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A, \mu_B)$ и нахождение среднего значения (дефаззификация)

Таким образом, схема нечеткого регулирования перевела «четкое» значение температуры воды в «четкую» величину угла, на который следует повернуть кран для понижения ее температуры:

$$58\ ^{o}C \rightarrow +22 \text{ градуса дуги}$$

«Нечеткие» алгоритмы широко применяются в современных схемах управления. По терминологии, сложившейся в этой области, для значений нечетких параметров обычно используют такие символы:

NB (negative big) – большое отрицательное
NM (negative medium), либо просто N – отрицательное
NS (negative small) – небольшое отрицательное
ZE (zero) либо Z – нулевое

PS (positive small) – небольшое положительное
PM (positive medium) либо P – положительное
PB (positive big) – большое положительное

Так, например, в нечетком дискретном пропорционально-дифференциальном (PD) регуляторе (формула (10.4 а) при $k_2 = 0$) связь величины и знака управляющего воздействия u_{k+1} с величинами ошибки $e_k = Y_0 - Y_k$, где Y_0 – целевое значение функции выхода, и изменения ошибки на k-м шаге $\Delta e_k = e_k - e_{k-1}$ отражает таблица

Таблица 10.1

Величина управления в зависимости от ошибки и ее производной в нечетком PD-регуляторе.

		Δe	производная ошибки						
			NB	*NM*	*NS*	*ZE*	*PS*	*PM*	*PB*
e									
ошибка	*NB*		PB	PB	PM	PS	ZE	ZE	NS
	NM		PB	PM	PS	ZE	NS	NM	NM
	NS		PM	PM	PM	ZE	NS	NS	NM
	ZE		PS	PS	ZE	ZE	ZE	NS	NS
	PS		PS	PS	ZE	ZE	NM	NM	NM
	PM		PM	PS	PS	ZE	NM	NM	NB
	PB		PM	PS	ZE	NS	NM	NB	NB

Первая строка в таблице задает нечеткие величины управления при большом отрицательном (NB) отклонении e_k от целевого выходного параметра и допустимых величинах производной $\Delta e_k = (e_k - e_{k-1})/1$ в единицу дискретного времени. В случае большой либо средней отрицательной производной (ошибка велика и продолжает быстро расти) требуется большое противоположное (положительное) воздействие, при малой производной – среднее положительное, при (примерно) постоянной ошибке малое положительное воздействие, при слабом или среднем уменьшении ошибки – не вмешиваться, при сильном уменьшении ошибки – слабое отрицательное управляющее воздействие. Прочие строки в таблице расшифровываются аналогично. Связи нечетких переменных по схемам, подобным (10.10) и табл. 10.1, в теории управления называются *продукционными правилами*.

Рассмотренные в этой главе простейшие формы роевого интеллекта и системы управления, примыкающие к интеллектуальным, обладают общими качествами. Роевой интеллект (составляющие единицы которого, как в рое роботов, могут не иметь собственного интеллекта) реализуется через связи между автономными агентами, по отдельности также воспринимающими внешнюю информацию, благодаря сочетанию хаотичности и взаимосвязи их индивидуальных действий. Это позволяет системе агентов гибко и успешно «вести себя» в изменяющейся внешней обстановке далеко за пределами возможностей отдельного агента – что обычно и полагают главным признаком РИ. С другой стороны, задачей автоматического управления и робототехники, подобно «целям» роя общественных насекомых, является успешное реагирование на огромное разнообразие внешних воздействий, которое невозможно изначально запрограммировать. При решении этой задачи уже в протоинтеллектуальных системах реализуются внесение в память агента образа окружающей действительности (картирование обстановки роботом) и свертка информации (нечеткое управление), математически заданные в пространстве представлений (belief space). В следующей главе мы увидим, что эти признаки характерны и для более сложных форм интеллекта.

Литература к разделу 10.3

[15] Л.А. Заде, *Нечеткие множества*, Нечеткие системы и мягкие вычисления, 2015, т.10, № 1, 7 (перевод статьи 1965 г.)
[16] см. http://fuzzy-group.narod.ru/files/Fuzzy_Modeling/Lection08.2.Fuzzy.inference.system.pdf

Рекомендуемая литература

1. В.Е Кипятков. *Мир общественных насекомых*, 3-е изд. — М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
2. Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт, *Математическая теория автоматического управления: учебное пособие*. –М.: ЛЕНАНД, 2019.
3. Д.П. Ким, *Теория автоматического управления. Учебник и практикум для академического бакалавриата*, М.: Юрайт, 2019.
4. Е.Е. Ступина, А.А. Ступин, Д.Ю. Чупин, Р.В. Каменев, *Основы робототехники: учебное пособие.* — Новосибирск: Сибпринт, 2019.
5. В.Г. Чернов. *Основы теории нечетких множеств: учебное пособие*. Владимир: Изд-во Владимирского гос. ун-та, 2010.

ГЛАВА 11. «ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ», ИСКУССТВЕННЫЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Формы проявления интеллекта. Индивидуальный, искусственный и распределенный интеллект. Социальные системы обезьян, революция в приматологии: орудийная деятельность, войны и «культура» у человекообразных обезьян. Взаимосвязь индивидуального и коллективного интеллекта. «Глокая куздра» и коллективная свертка информации.

Искусственный интеллект (ИИ). Принципы действия и возможности искусственных нейронных сетей, сведения из математической логики и логический ИИ, моделирование роевого интеллекта в «природных» алгоритмах (NIMs). Анализ формальных понятий. Интеллектуальное управление ресурсами.

Распределенный интеллект в человеческих сообществах: групповой и коллективный интеллект, организационные системы (ОС), большие системы, World Brain. Биополитика и универсальная история. Вариационный принцип для социальных систем.

В предыдущей главе обсуждались простейшие виды роевого интеллекта, а также системы автоматического управления и роботы: технические устройства, которые в когнитивных науках не считаются интеллектуальными агентами, но приближаются к ним по способности гибко действовать в переменной обстановке, достигая запрограммированной цели. Все такие системы можно называть *предынтеллектуальными* или *протоинтеллектуальными*: они соответствуют рабочему определению (10.1) в гл. 10 (стремление агента к цели с использованием внешней информации), не проявляя таких фундаментальных признаков интеллекта, как обучаемость, оперирование абстрактными понятиями и выработка новых знаний. Тем не менее, в процессе достижения цели, поставленной извне, уже протоинтеллектуальными агентами создаются упрощенные *свернутые* образы окружающей действительности. Это справедливо и для роевого интеллекта (муравьиные тропинки, танцы пчел, режимы коллективного движения рыб и птиц), где цели задаются изнутри системы физиологическими потребностями особей и задачей коллективного выживания.

Элементы роевого интеллекта могут проявляться и в системах из агентов с более высокими когнитивными способностями, включая неструктурированные сообщества людей. В этой главе будут рассмотрены различные виды коллективного интеллекта в более упорядоченных «человеческих» социальных системах и разные типы моделирования интеллектуальных агентов в компьютерной вычислительной среде: искусственный интеллект. На таком пути мы сможем точнее определить факторы, задающие динамику интеллектуальных агентов. Возможные подходы к ее формализации будут обсуждаться в последней главе.

11.1. Интеллект как коллективный феномен

Человек – общественное животное.

«Атомистическое» описание социума породило в когнитивных науках весьма упрощенный образ *индивидуального интеллекта*. Хотя разнообразие поведения людей (а также животных и, на уровне качественного описания, групп и иных совокупностей индивидов), как и различия в их способностях эффективно обрабатывать информацию, трудно отрицать – модель индивидуального интеллекта выносит за скобки *коллективное* или, в более осторожной формулировке, *мультиагентное* происхождение самого

интеллекта как явления. Даже у одиночных живых организмов с разной степенью «интеллектуальности» поведения, выработанного эволюцией, само это поведение определяется внешней обстановкой – в том числе другими организмами, среди которых присутствуют как съедобные, так и хищники. У общественных животных ближайшее окружение в основном построено из особей своего «социума»: оно служит защитной оболочкой в опасной внешней среде и формирует большинство реакций индивида. Это тем более справедливо для человечества: коллективной «оболочки», подчинившей себе почти все регионы планеты и полностью определяющей становление интеллекта входящих в нее людей.

По этим причинам наиболее изученный и интенсивно исследуемый *индивидуальный* интеллект человека, подобно рассмотренной в гл. 8 концепции *homo economicus* – лишь частная формальная модель. Она плодотворно применяется в психологии и медицине, но не объясняет происхождения базовых характеристик самого интеллекта – глубокой обработки информации, абстрагирования, обучаемости и накопления знаний – поскольку вне социума таких понятий не существует. Однако вынесенное в эпиграф почти тривиальное утверждение при обсуждении интеллекта нередко игнорируется: все его стороны полагают «данными от Бога» или, чаще, интуитивно обоснованными. Ниже мы убедимся, что фундаментальные характеристики человеческого интеллекта неотделимы от социальной среды и должны обсуждаться вместе с ней.

11.1.1. Социальный интеллект животных и человека

Если взглянуть прямо в глаза шимпанзе, мы увидим, что на нас смотрит умная и самоуверенная личность. Если они – животные, то кто же тогда мы?
Ф. де Валь, «Политика у шимпанзе».

Простейшие физиологические показатели головного мозга человека – среднее отношение его массы m в граммах к массе тела M в килограммах (рис. 11.1), а также *индекс энцефализации*, несколько модифицирующий это отношение

$$EQ = A\frac{m}{M^{\alpha}}$$

(с эмпирическими параметрами A = 10–20 и α= 0.6–0.8), демонстрируют преимущество, но не подавляющее превосходство вида *homo sapiens* над прочими видами животных. Кроме хорошего спрямления почти любых графиков в двойном логарифмическом масштабе (см. главы 6, 8 и 9 в предыдущей части книги), точки на рис. 11.1 показывают, что человек по своим «когнитивным предпосылкам» не очень далеко отстоит от других биологических видов, обладающих крупным головным мозгом. В предыдущей главе было отмечено, что некоторые из этих видов – обезьяны, попугаи, врановые птицы, дельфины и киты – безусловно проявляют элементы интеллектуальной деятельности, а их сообщества имеют развитую социальную структуру и сложную динамику. Доминирование людей в планетарном масштабе и достижения человеческого интеллекта, не сравнимые с результатами других обитателей Земли, таким образом, должны иметь не биологическое, а социальное обоснование.

На функционирование мозга и нервной системы у человека расходуется до 25-30% всей энергии, вырабатываемой организмом. По этому показателю *homo sapiens* превосходит

шимпанзе уже в три раза*. Другими параметрами, по которым люди значительно опережают обезьян, являются абсолютный объем и относительная доля «новой» (в эволюционном смысле) коры головного мозга, или *неокортекса*: главного инструмента, ответственного за интеллект и сознание. Количество нейронов в коре головного мозга у человека (~ 16 млрд.) в полтора-два раза выше, чем у человекообразных обезьян. По этому показателю нас опережают дельфины (до 20 млрд.) и косатки (более 40 млрд. нейронов), однако с учетом массы тела (у большинства дельфинов более 100 кг, у косаток до 8 т) удельная оснащенность людей выше. Иными словами, человек превосходит виды, которые потенциально могли бы конкурировать с его интеллектом, не столько в количественных характеристиках головного мозга, сколько в его структуре и функциях. А они совершенствовались эволюцией около двух миллионов лет, на протяжении которых все предки современного человека, по разным оценкам сформировавшегося от 80 до 50 тыс. лет назад, были общественными животными.

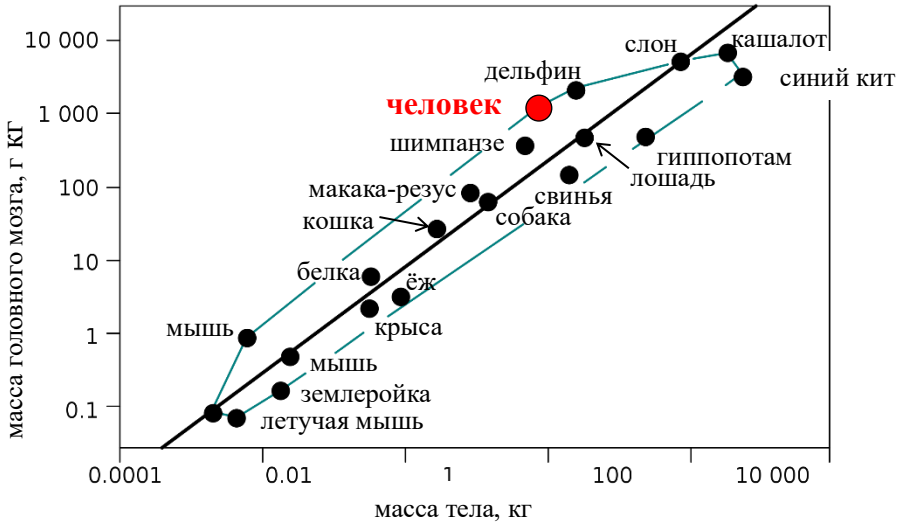


Рисунок 11.1. Соотношение масс тела и головного мозга человека и животных (график из Интернет)

Результаты исследований когнитивных возможностей и социального поведения обезьян во второй половине XX века нередко называют *революцией в приматологии*. Наблюдения над человекообразными обезьянами** – шимпанзе, бонобо, гориллами и орангутанами – не в условиях экспериментов (см. начало предыдущей главы), а в зоопарках и на воле выявили неожиданную близость их естественного поведения к поведению людей. Многочисленные параллели включают целенаправленное изготовление орудий, обучение детенышей орудийной деятельности (например, раскалыванию орехов камнями, на что у шимпанзе уходит несколько лет), многолетнюю передачу традиций, сложную динамику вражды, союзов, альтруизма и целенаправленного обмана, загонную охоту, «войны» соседних групп с уничтожением особей своего вида, коллективный каннибализм и другие приметы архаических сообществ людей, для животных ранее считавшиеся немыслимыми. Устойчивые сообщества-семьи, способные мигрировать на тысячи километров, скоординированная охота, коллективная забота о молодняке, о больных и раненых особях,

*С.В. Савельев, *Энергетический подход к эволюции мозга*, Наука и жизнь, 2006, №11 (https://www.braintools.ru/article/5038/print/). Это не абсолютный критерий: у мелких животных, далеко отстоящих от людей – например, кротов и землероек – энергопотребление мозга может превосходить человеческое (там же).

**Человекообразные обезьяны, или *гоминиды* (англ. apes) отличаются от «низших» обезьян (monkeys) – таких, как бабуины, мартышки, макаки и др. – не только анатомией, но также богатством умственных способностей и сложной структурой социальных взаимодействий.

активный обмен большими (до тысяч разных символов) массивами повторяющихся сигналов в ультразвуковом диапазоне и другие проявления интеллекта также достоверно установлены для дельфинов и китов, социальная жизнь которых менее изучена[1]. Все эти данные (см. разд. 10.1 в предыдущей главе) показывают, что «когнитивный потенциал» некоторых биологических видов, не реализованный в ходе эволюции, не настолько далек от реализованного потенциала человека, как считали ранее. Отсюда возникает вопрос о механизме его реализации.

Научно-популярная книга голландского биолога Франса де Валя ([1] в списке рекомендуемой литературы), написанная по результатам наблюдений над колонией шимпанзе, содержавшихся в зоопарке г. Арнем на островке под открытым небом, после ее выхода в 1982 г. была переиздана более 30 раз. Благодаря этой книге «осознанное» поведение, личные установки и человекоподобное стремление к власти в социумах животных стали предметом академического обсуждения. К настоящему времени параллели коллективного интеллекта людей и РИ животных обсуждаются как в этологии (где всерьез используется термин *культуры* биологического социума)[1], так и в науках об обществе[2]. В отечественной научной литературе эти вопросы рассмотрены в книге З.А. Зориной и И.И. Полетаевой (см.[1] в гл.10). Краткое изложение наиболее ярких фактов в этологии человекообразных обезьян вместе с их содержательной интерпретацией представлены в статьях Б.С. Шалютина[3,4].

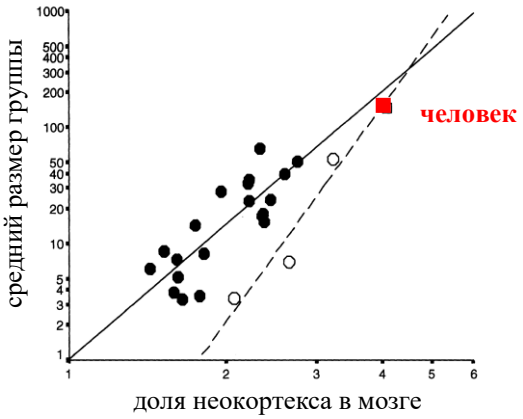


Рисунок 11.2. Отношение объемов неокортекса к остальной части головного мозга (ось абсцисс) и средний размер группы у приматов в двойном логарифмическом масштабе. Сплошная линия – низшие обезьяны, штриховая линия – гоминиды (R.I.M. Dunbar, Ann. Rev. Antropology, 2003, 32, 161)

Среди этологических терминов в книге де Валя [1] особое место занимает *макиавеллиевский интеллект:* способность животных к гибкой и изобретательной борьбе за лучшее место в социуме, включая тактические союзы, подкуп, обман и другие «человекоподобные» действия, не вполне точно названные автором *политикой*[*]. В рамках скорее вербальной теории такого интеллекта, возникшей в 1980-е годы, предполагается, что

[*] Борьбу за доминирование в небольших группах шимпанзе, строго говоря, нельзя назвать политикой, ибо на поведение вожака не влияют коллективные интересы крупных фракций социума – поскольку в сообществах обезьян фракции и их осознанные интересы отсутствуют (см.[3]). У социума обезьян в неволе отсутствует и главная для дикой природы задача выживания: такая группа ближе к тюремному или уголовному сообществу людей. Аналогии между «войнами» обезьян и банд городских подростков отмечены в литературе. Сюда же можно отнести описанное в [1] убийство вожака двумя субдоминантными самцами, заключившими коалицию, в «камерах» Арнемского зоопарка, где животные содержались ночью. Тем не менее, поведение человекообразных обезьян включает некоторые элементы политики в ее бытовом понимании: например, в естественных условиях вожак поддерживает среди «подданных» равновесие и подавляет стычки между ними, заступаясь за слабых[4].

когнитивную эволюцию у предков современных людей направляло и ускоряло влияние сообщества, поскольку для успешной конкуренции в этой среде требовалось больше ума и сообразительности, чем просто для «роевого» или стадного выживания. Положительная корреляция доли неокортекса в мозге приматов, включая человека, со средним размером группы индивидов, при увеличении которого внутригрупповые взаимодействия усложняются (рис. 11.2), не противоречит этой гипотезе, но и не может считаться решающим аргументом в ее пользу.

Развитие интеллекта человека в историческое время (начиная с IX-VIII тысячелетий до н.э., см. банк данных Seshat в разд. 9.6.3 главы 9) несомненно ускорялось его положительной обратной связью с эволюцией социальных и политических структур, от которых неотделим коллективный РИ. В этом смысле эволюционную победу *homo sapiens* на суше, за которой последовал взрывной рост человечества в историческую эпоху, можно объяснить *автокаталитическим* (гл. 4), т.е. самоускоряющимся развитием двух взаимосвязанных типов интеллекта людей: индивидуального и коллективного. Обнаруженные у животных «человекоподобные» взаимоотношения особей вместе с неожиданной глубиной их индивидуального интеллекта и РИ указывают на латентную способность таких видов к *социальной эволюции* – которая, вероятно, является одним из фундаментальных природных механизмов ускоренного развития. В этом смысле эволюционное преимущество человека состоит в том, что самоускоряющаяся комбинация когнитивного и социального развития реализовалась у людей раньше, чем у других биологических видов[*].

11.1.2. Коллективное свертывание информации

Тезис о социальном происхождении интеллекта позволяет наполнить общественным содержанием основные качества интеллектуального агента, перечисленные в прошлой главе: отражение реальности, целеполагание, обучаемость, запоминание «сжатой» внешней информации, создание и накопление новой информации (знаний). Безусловно кооперативный характер накопления знаний в человеческом обществе не вызывает сомнений, однако сам термин «знания», подобно термину «интеллект», вряд ли можно точно и однозначно определить. Мы рассмотрим здесь наиболее формализованную сторону интеллекта: свертывание информации и ее представление в виде *нечетких* объектов.

Алгоритм свертки информации остается серьезнейшим нерешенным вопросом при математическом описании интеллектуальной деятельности. Многочисленные виды однотипных внешних воздействий (например, начертаний букв, рис. 11.3) в задаче *распознавания образов* образуют бесконечные множества, не поддающиеся анализу прямым перебором. Тем не менее, мы уверенно определим верхнюю строку на рис. 11.3 как

[*] Обсуждавшийся в предыдущей главе роевой интеллект общественных насекомых, рыб и птиц, вероятно, можно считать стационарным состоянием РИ, сложившимся в ходе эволюции с достижением максимума когнитивных возможностей у формирующих его особей. Среди других потенциально общественных животных большой интерес представляют *динозавры*: ископаемые предки современных птиц, господствовавшие в биосфере Земли на протяжении 150 млн. лет от раннего триасового до позднего мелового периодов[5]. Среди более 1 тыс. установленных видов динозавров имелись как травоядные, так и хищные со средними размерами особей от нескольких сантиметров до 10-20 м. Некоторые виды динозавров предположительно вели стадный образ жизни с возрастным разделением (кладки яиц, молодняк, взрослые особи) в группах на местности[6]. При всех очевидных ограничениях достоверности палеонтологических данных ключевым доводом в пользу существования «цивилизации динозавров» (автор намеренно использует провокационное словосочетание) было бы наличие у некоторых их видов постоянных многолетних колоний, что предполагает кооперацию особей и разделение функций. Поскольку РИ биологических сообществ – не предположение, а твердо установленный факт, основной интерес представляет гипотетическая глубина «РИ ископаемых ящеров». По индивидуальному интеллекту, как необходимому элементу биологического РИ, позвоночные во всяком случае сильно превосходят общественных насекомых, обладающих роевым интеллектом.

разные начертания заглавной буквы «А», а нижнюю строку – как версии строчной буквы «а». Можно предположить, что в сознании грамотного человека существует *два разных, но связанных образа* этой буквы в ее прописном и строчном вариантах*, которые позволяют распознать очень многие, хотя и не все ее мыслимые начертания. Эти образы безусловно имеют «приблизительный», то есть нечеткий характер (см. разд. 10.3 предыдущей главы). Существенно, что подобная свертка не является врожденным атрибутом интеллекта: она вырабатывается при обучении ребенка чтению и письму в результате взаимодействия индивидуума с социумом.

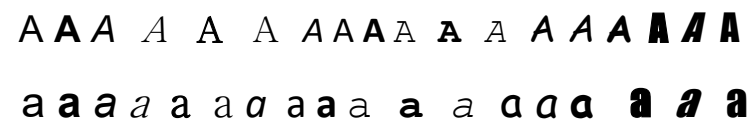


Рисунок 11.3. Разные начертания прописной и строчной буквы «а»

Одним из главных средств передачи информации в человеческих сообществах служит *язык*, изначально составленный из нечетких конструкций: *«Петя* (кто? фамилия? описание?) *пошел в школу»* (достиг школьного возраста или отправился на занятия? в какую школу? и так далее). Отнюдь не шуточный текст, взятый из просторов Интернет – и вызвавший там, в том числе, резкую непрофессиональную критику – иллюстрирует нечеткость образов распознаваемых слов с переставленными буквами и важность их связи в предложении (рис. 11.4): при беглом просмотре можно не заметить искажения многих слов. В хрестоматийном филологическом примере академика Л.В. Щербы (1925 г.) *Гло́кая ку́здра што́ко будлану́ла бо́кра и курдя́чит бокрёнка* предложение, не содержащее реально существующих слов, но построенное грамматически правильно, сообщает определенную информацию.** Во всех этих примерах средством свертки служит структура языка, воспринятая в ходе обучения – то есть результат многолетних коллективных взаимодействий. Нечеткостью образов обеспечивается устойчивость понимания текста относительно случайных возмущений: опечаток, грамматических ошибок и удаления некоторой части слов.

По рзеузьаттам илссоевадний одонго анлигсйокго унвиертисета,
не иеемт занчнеия, в каокм проякде рсапжоолены бкувы в солве.
Галовне, чотбы преавя и пслонедяя бквуы блыи на мсете. Осатьыне
бкувы мгоут селдовтаь в плоонм бсепордяке, все рвано ткест чтаитсея
без побрелм. Пичрионй эгото ялвятеся то, что мы чиаетм не кдаужю
бкуву по отдльенотси, а все солво цлиеком.

Рисунок 11.4. Текст из слов с переставленными буквами (источник: Интернет, см. также K. Rayner, et al. *Raeding wrods with jubmled lettres: There is a cost.* Psychological Science, 2006, 17, 192)

В более развернутом «музыкальном» примере три параметра монохроматического звука (что уже упрощает частотный спектр звучания инструментов), различимые лицами с музыкальным образованием – высота (пять октав, 60 вариантов), громкость (шесть ступеней от *pp* до *ff*) и длительность (шесть вариантов от целой ноты до 1/32) вместе с тремя

* Различия заглавной и строчной версий новых букв особенно наглядны в начале изучения иностранного языка – а по мере его освоения они забываются.

** Л.В. Успенский, Слово о словах (очерки о языке), 5-е изд. –Л: Детская литература, 1971.

формами извлечения звуков (стаккато, нонлегато, легато) для одного звука составляют 60×6×6×3=6480 комбинаций. В этом случае короткому фрагменту музыкального текста из 100 нот отвечает количество вариантов, много большее 10^{100}, или *числа googol*. Здесь, как и в примерах распознавания текстов и зрительных образов, средства сжатия информации вырабатываются при обучении индивидуума. Это обучение кардинально сокращает множество комбинаторно возможных сочетаний символов (нот, букв, знаков) и преобразует оставшееся множество в относительно небольшой набор разрешенных нечетких образов – например, мелодий, гармоний или слов естественного языка. Во всех случаях индивидуум оперирует конструкциями, созданными многими людьми за несколько поколений – то есть продуктами коллективного интеллекта социальных систем. Иначе говоря, все наши средства индивидуального восприятия информации выработаны коллективным РИ.

Литература к разделу 11.1

[1] К. Сафина, *Воспитание дикости: Как животные создают свою культуру, растят потомство, учат и учатся.* Пер. с англ. М.: Альпина нон-фикшн, 2023. Английскому названию этой книги *Becoming Wild* лучше соответствовал бы перевод «Становление в дикой Природе», не имеющий отрицательных коннотаций.

[2] М. Моффетт, *Человеческий рой. Естественная история общества.* Пер. с англ. М: Аттикус, 2022.

[3] Б.С. Шалютин, *Правда ли, что у шимпанзе есть политика?* Вестник Курганского гос. ун-та, сер. Гуманитарные науки, 2016, №1, 102.

[4] Б.С. Шалютин, *О вызовах приматологической революции, эмпатическом познании и природе когнитивного отрыва человека от обезьян.* Философский журнал, 2019, **18**, №4, 15.

[5] Д. Нэш, П. Барретт, *Динозавры: 150000000 лет господства на Земле.* М: Альпина диджитал, 2018.

[6] D. Pol, A.C. Mancuse, R.M.H. Smith, et al., *Earliest evidence of herd-living and age segregation amongst dinosaurs*, Sci. Rep., 2021, **11**, 20023, https://doi.org/10.1038/s41598-021-99176-1.

11.2. Типы искусственного интеллекта

В разделе Британской энциклопедии, посвященном интеллекту человека, справедливо отмечено: *«большинство споров среди исследователей в данной области порождаются их попытками дать точное определение интеллекта»*[*]. Понимая ограниченность любых определений, мы будем называть «машинным», или *искусственным интеллектом (ИИ)* компьютерные средства обработки информации, проявляющие такие существенные качества интеллектуального агента, как оперирование образами реальности, свертывание информации, обучаемость и гибкое стремление к цели – для современных компьютеров пока задаваемую людьми. Как обсуждалось в предыдущей главе, некоторые протоинтеллектуальные свойства (отражение реальности, свертка информации и ее использование для достижения цели) имеют современные системы автоматического управления и оснащенные ими технические устройства-роботы. Но возможности существующих видов ИИ много шире способности автомата выполнять поставленную задачу в изменяющейся внешней обстановке. Они включают *распознавание образов* (в том числе речи и рукописных текстов), управление большими техническими системами при воздействии помех и сбоев, «автоматическое» составление программ и доказательство теорем, моделирование творческой деятельности и многие другие достижения, ранее считавшиеся доступными только для людей.

Мы рассмотрим главные типы современного ИИ, который в академической и популярной литературе называется *слабым* или *узким* (англ. *Narrow AI*). В компьютерных науках активно обсуждаются возможности создания *сильного ИИ* (*Broad AI*), не

[*] https://www.britannica.com/science/human-intelligence-psychology

уступающего интеллекту человека – в частности, с автономным целеполаганием и самообучением. К нашему счастью, такой машинный интеллект пока остается гипотетическим.

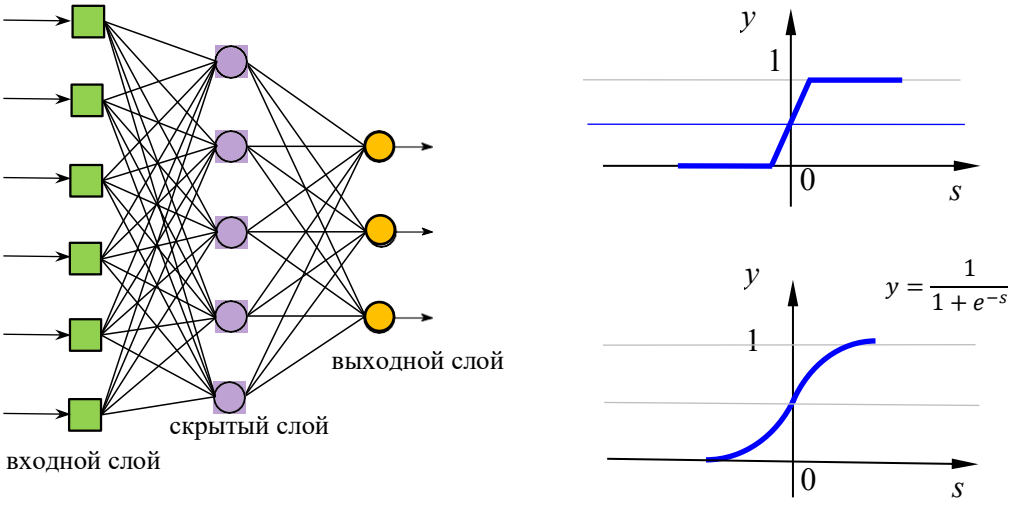
В соответствии с содержанием предыдущего раздела, машинный интеллект сам по себе – частное понятие, поскольку все виды ИИ созданы людьми и используются обществом. В этом смысле ИИ, подобно индивидуальному интеллекту человека – еще один, относительно новый, компонент РИ социальных структур, занимающий в нем (без фантастического «восстания машин») подчиненное положение. Некоторые способы обработки информации, единые у всех интеллектуальных агентов, проявляются в ИИ особенно наглядно, указывая возможный путь к содержательной формализации интеллекта как явления. Расчетные алгоритмы, используемые в современных компьютерах («муравьиные», «пчелиные», «потребностей–возможностей» и другие), имитируют роевой РИ мультиагентных систем, обсуждавшийся в предыдущей главе. В противовес алармистским прогнозам, которыми неизбежно сопровождаются новые технические достижения, объективной целью человечества как социальной системы является не замена людей компьютерами, а интеграция ИИ в системы коллективного интеллекта, расширяющая человеческие возможности.

В искусственном интеллекте, как области исследований в информационных технологиях, робототехнике и когнитивных науках, можно выделить *вычислительное* и *логическое* направления. В первом направлении наиболее известны искусственные нейронные сети (ИНС). К вычислительным методикам также относятся «природные» расчетные алгоритмы и агентные модели РИ, частично уже рассмотренные в предыдущей главе. Второе направление посвящено обработке и использованию информации, выраженной средствами естественных языков, на основе *математической логики* и ее современных версий (нечеткая логика, схема «представления-желания-намерения», анализ формальных понятий). Эти два направления пересекаются, взаимодействуют и применяются в разных типах коллективного РИ, которые будут рассмотрены в следующем разделе. Граничащие с философией работы математиков по формализации актов мышления, творчества и научно-технического прогресса[7] находятся вне компетенции автора и здесь обсуждаться не будут.

11.2.1. Искусственные нейронные сети

Самое известное техническое средство, позволяющие воспроизвести некоторые аспекты интеллектуальной деятельности – *искусственная нейронная сеть (ИНС)*, в 1960-е годы названная *перцептроном*. В ее схеме, имитирующей сеть взаимосвязанных нейронов мозга (см. рис. 6.28 в гл. 6), входной сигнал передается элементами (*узлами*) слоя, или искусственными «нейронами», к связанным с ними узлам следующего (*скрытого*) слоя, которые, в свою очередь, в зависимости от строения ИНС, транслируют сигнал на выходной узел либо на последующий промежуточный слой (Рис. 11.5 а). Каждая связь между двумя узлами (i-м и j-м) характеризуется числом $w_{ij} \in [0, 1]$: *весом* связи. Активационные функции узлов $y = f(s)$, или *фильтры*, определяющие их способность передавать входной сигнал s следующему узлу, могут иметь разнообразную сигмоидную либо ступенчатую форму. При превышении суммой входящих сигналов на i-м узле некоторой пороговой интенсивности $s > s_{max}$ узел передает сигнал с максимальной интенсивностью $y = 1$, тогда как при $s < s_{min}$ сигнал не передается (Рис. 11.5 б).

Одной из главных задач ИНС, моделируемых в компьютерной среде программными средствами, является *распознавание образов*: например, изображений, передаваемых по пикселям на элементы входного слоя с выводом ответа в форме n-мерного вектора $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, компонентами которого служат вероятности $\{p_i\}$ отнесения введенного массива к одному из n заданных типов ($\sum p_i = 1$). В этом случае узлы первого слоя соответствуют компонентам входного сигнала, а n узлов выходного слоя – типам при его отнесении (см. рис. 11.5 а). Для решения этой задачи «проводимости», т.е. веса связей между узлами в процессе передачи заведомо известных типов входящего сигнала варьируют, добиваясь корректного выходящего сигнала (*обучение нейронной сети*). Далее обучающая выборка массивов входной информации заменяется на анализируемый массив.



(а) (б)

Рисунок 11.5. (а) Схема распространения сигналов по трехслойной ИНС. (б) Примеры активационных функций *y*(*S*) «искусственного нейрона»: вверху линейная, внизу сигмоидная

Распространенный алгоритм обучения сети состоит в изменении весов связей, пропорциональном ошибке вычисления выходной функции j-го нейрона $\delta_j = y_j - y_j^*$ (где y_j^* – его целевая функция выхода) на k-м шаге обучения

$$\Delta w_{ij}^{(k+1)} = \eta \delta_j y_i + \alpha \Delta w_{ij}^{(k)} \tag{11.1}$$

Здесь y_i – выходной сигнал i-го нейрона из предыдущего слоя, связанного с j-м, $\Delta w_{ij}^{(k)}$ – изменение веса связи на предыдущем шаге, η и α – масштабные множители, соответственно отражающие скорость движения к минимуму ошибки и «сглаживающую» инерционность системы.

В многослойных ИНС с нелинейными функциями активации оптимальные значения выхода $\{y_j^*\}$ у нейронов в промежуточных слоях неизвестны. В обучении таких сетей используется процедура *обратного распространения ошибки* (*error back-propagation*). В ее рамках минимум суммарной квадратичной ошибки нейронов выходного слоя

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\sum_{j,p}(y_{j,p}^N - y_{j,p}^*)^2$$

(где $\mathbf{w}$ – вектор весовых коэффициентов их связей) определяют обычным методом градиентного спуска (глава 3, разд. 3.4), дифференцируя по весам связей узлов.

$$\Delta w_{ij}^{(N)} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$$

Затем из набора полученных ошибок $\{\delta_j{}^{(N)}\}$ рассчитывают ошибки узлов предыдущего, т.е. *N*–1-го слоя по рекуррентной формуле

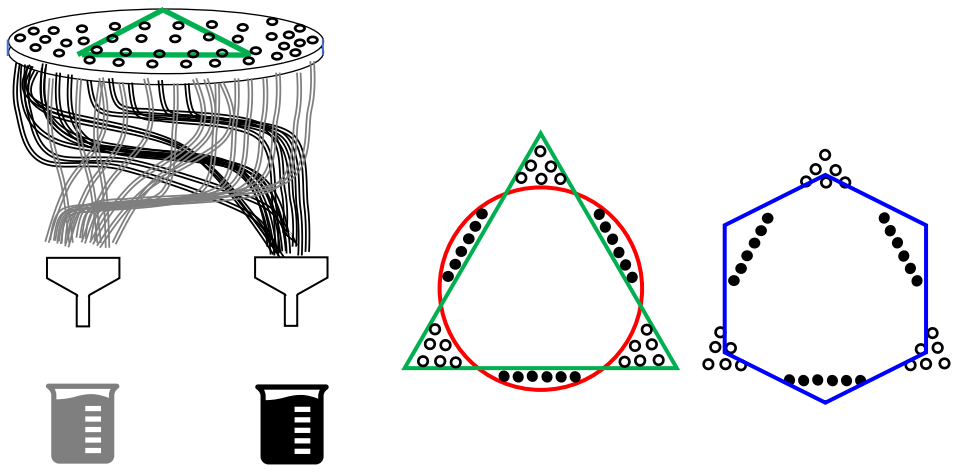
$$\delta_j^{(N-1)} = \left[\sum_k \delta_k^{(N)} w_{jk}^{(N)}\right] \frac{dy_j}{ds_j}$$

(где j – номер нейрона в слое, s_j – взвешенная сумма его входных сигналов, y_j – выходной сигнал). После возврата к входному слою процедура повторяется. При снижении ошибки E до заданной величины обучение сети считается завершенным.

Техническая иллюстрация: водяная ИНС XVII-го века

С незапамятной древности до Нового времени важнейшей инженерной дисциплиной оставалась гидротехника, так как потоки воды были не только условием существования социумов, но и главным источником внешней механической энергии с многочисленными приложениями: плотинами, каналами, речными и приливными мельницами, водопроводами, водоподъемниками, шлюзами и др. На фоне сложных гидротехнических механизмов XVII века гидро-аналоги искусственных нейронных сетей, способные различать геометрические фигуры, не описаны только потому, что в них тогда не было необходимости.

Простейшая «водяная ИНС» – это плоский дуршлаг с трубочками, снабженными винтовыми зажимами, которые отводят воду от половины всех отверстий в левый, а от другой половины – в правый стакан (рис. 11.6 а). Закрывая дуршлаг трафаретами с вырезанными геометрическими фигурами и выливая в него один и тот же ковш воды, мы получим разные объемы воды в стаканах. Если трубочек много и отводы к каждому стакану распределены по дуршлагу равномерно – перед нами аналог двухслойной полносвязной ИНС в технической реализации XVII века.



(а) (б) (в)

Рисунок 11.6. «Водяная ИНС»: (а) принцип устройства, (б) распознавание круга и треугольника, (в) «распознавание» шестиугольника

«Обучение» ИНС состоит в том, что мы варьируем проводимость трубочек, поворачивая винты в зажимах, и добиваемся того, чтобы для заданной геометрической

фигуры на трафарете вся вода стекала в определенный стакан. Чтобы таким образом различить круг и равносторонний треугольник *той же площади* (это сильное условие, но, во-первых, в нашем примере на дворе XVII век, а во-вторых, в XXI веке масштабы изображений легко варьировать), надо отвести в левый стакан все трубочки от незакрашенных отверстий на рис. 11.6 б, а в правый стакан – от закрашенных, прочие зажимы наглухо закрыть. Заменяя трафареты при разумных условиях на их ориентацию (например, один угол строго наверху) и измеряя объемы воды в стаканах, мы с помощью такого устройства наверняка опознаем треугольники *одинаковой площади*, не сильно отличающиеся от равностороннего. Правда, уже шестиугольник той же площади наша водяная ИНС с заданным на рис. 11.6 в расположением отверстий распознает как «круг с вероятностью 85%», но нас интересует не эффективность устройства, а принцип его обучения.

Современные многослойные ИНС по изображению отличают кошку от собаки и автомобиль от пешехода; они активно применяются в автопилотах для наземного городского транспорта. Другой важной практической задачей, решаемой с их помощью, является построение многомерных корреляций вида $f = Y(p_1, p_2, ..., p_k)$ для неизвестной и обычно нелинейной зависимости целевой функции f от параметров системы $(p_1,\ldots,p_k)$. Определением корреляций *состав – структура – свойства* и поиском перспективных составов на их основе занимаются науки о полимерах, фармацевтическая химия, материаловедение и ряд других областей. На основе ИНС созданы компьютерные программы, побеждающие чемпионов мира в таких играх, как шахматы и го.

Среди разнообразных видов архитектуры ИНС можно выделить *полносвязные* сети, в которых каждый «нейрон» внутреннего слоя связан со всеми узлами предыдущего слоя, таким образом влияющими на его состояние (см. рис. 11.5 а), и *сверточные* сети. В последнем типе сетей массивы информации, входящей в *сверточный слой* искусственных нейронов и выходящей из него в следующий слой, а также набор функций-фильтров представляются в виде тензоров (см. раздел 3.1.2 в главе 3). Так, изображение размером $N_1 \times N_2$ пикселей, имеющее C цветовых каналов, задается тензором $\mathbf{X}$ размера $N_1^{(1)} \times N_2^{(1)} \times C$, компонентами которого $\{X_{ijk}\}$ служат нормированные интенсивности всех цветовых каналов для каждого пикселя, а массив из S фильтров с размерами $m \times m$ и тем же числом цветовых каналов – тензором размера $m \times m \times C \times S$ с компонентами $\{F_{ijkp}\}$. Результаты преобразование входного массива данных

$$Y(p,q,s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{C} F(i,j,k,s)\, X(p+i-1, q+j-1, k)$$

(индексы компонентов тензоров для упрощения записи приведены в скобках) образуют тензор $\mathbf{Y}$ размера $(N_1 - m + 1) \times (N_2 - m + 1) \times S$ с меньшим числом компонентов, который служит входящим массивом информации для следующего слоя (Рис. 11.7; фильтр условно изображен в виде скользящего окна 3×3). По сравнению с полносвязными ИНС, сверточные нейронные сети требуют меньшего объема вычислительных ресурсов при обработке одинаковых объемов информации и обеспечивают лучшее распознавание объектов (см. [2] в списке рекомендуемой литературы).

Подобно системам автоматического управления, ИНС воспринимают внешнюю информацию и создают ее нечеткие образы в виде наборов весовых коэффициентов $\{w_{ij}^{(k)}\}$ и тензоров выходных сигналов слоя. Новым, по сравнению с ТАУ, качеством интеллектуального агента для них является обучаемость, тогда как цель обработки информации по-прежнему задают пользователи программы.

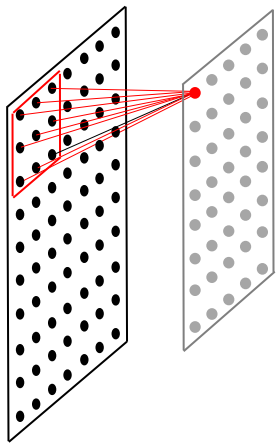


Рисунок 11.7. Свертка значений элементов слоя ИНС в скользящем окне

Одним из главных направлений развития ИИ является *глубокое обучение* (*deep learning*) ИНС и других компьютерных структур с несколькими этапами свертывания информации. Современные результаты в этой области включают распознавание лиц и объектов по данным видеонаблюдений (*компьютерное зрение*), «оцифровку» рукописного текста и устной речи, машинный перевод и многие другие достижения. Заметим, однако, что программные средства моделирования ИНС основаны на строгих математических соотношениях, но не имеют общетеоретической интерпретации («теории ИИ») в когнитивных науках, а массивы информации на промежуточных слоях уязвимы к малым помехам, включая целенаправленные атаки. В этом смысле нейронные сети повторяют судьбу многих технических достижений человечества (паровая машина, электронные схемы, летательные аппараты и др.), строгая теория которых была разработана лишь после их продолжительного применения.

11.2.2. Логический ИИ

В соответствии с Большой Российской энциклопедией, *логикой* называется нормативная наука о законах, формах и приемах интеллектуальной (мыслительной) познавательной деятельности[*]. *Классическая логика* сформировалась более 2 тыс. лет назад в Древней Греции, Индии и Китае как область философии, формулирующая на вербальном уровне законы и формы правильного (логического) мышления. Наиболее общими законами логики задаются основы построения корректных рассуждений, дискуссий и доказательств:

Закон тождества
Каждое обсуждаемое понятие и утверждение следует употреблять в одном и том же смысле (*А есть А*).
Закон непротиворечия
Противоречивые утверждения не могут одновременно быть истинными (*А не есть не-А*)
Закон исключения третьего
Из двух взаимоисключающих содержательных утверждений одно истинно, а другое ложно; третьего не дано.
Закон достаточного основания

[*] https://old.bigenc.ru/philosophy/text/2177591

Утверждение достоверно, если оно доказано – т.е. имеются *достаточные* основания считать его истинным.

Как многие, если не все императивные нормы в гуманитарных науках, законы логики неявно предполагают реальное существование обсуждаемых объектов («чёрт с рогами» и «чёрт безрогий» – взаимоисключающие утверждения) и оперируют нечеткими языковыми конструкциями. Тем не менее, они входят в фундамент гуманитарного знания. В частности, на последний закон опирается юридическая презумпция невиновности подследственного лица, в рамках которой собственное признание не является *достаточным* основанием для того, чтобы считать вину доказанной. В XIX веке на основе таких законов и правил были разработаны соотношения *формальной*, или *математической логики*, которая стала одним из разделов математики. Математическая логика широко используется в компьютерных науках и служит основой *логического искусственного интеллекта*: направления информационных технологий, развиваемого со второй половины XX века параллельно вычислительному ИИ и во взаимодействии с его методами.

Математическое отступление: некоторые элементы формальной логики

Математическая логика примыкает к теории множеств (см. разд. 8.2.1 в гл. 8 и разд. 10.3 в предыдущей главе), используя многие ее понятия и соотношения. Объектами в математической логике являются *высказывания*, обозначаемые символами (A, B, C, D…), а предметом анализа – формальные соотношения между высказываниями. Каждое высказывание может быть или истинным, или ложным; фантомные конструкции не рассматриваются. Истинному и ложному высказываниям придаются противоположные признаки, или *логические константы* из бинарного множества {1, 0}, которые также могут обозначаться {T, F} или {И, Л}. На бесконечном счетном множестве высказываний заданы пять *логических операций* (табл. 11.1).

Таблица 11.1

Логические операции над высказываниями

название	символ	как читается	другие символы
отрицание	$\bar{A}$	не-A; неверно, что A	¬A, –A
конъюнкция	$A \wedge B$	A и B	A&B, AB
дизъюнкция	$A \vee B$	A или B	A+B
импликация	$A \rightarrow B$	если A, то B	$A \Rightarrow B$, $A \supset B$
эквивалентность	$A \sim B$	A эквивалентно B	$A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$

Истинность или ложность результатов логических операций в зависимости от истинности (1) или ложности (0) входящих в них высказываний выражают *таблицы истинности*:

для отрицания

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

для конъюнкции

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

для дизъюнкции

A	B	$A \vee B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

для импликации

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

для эквивалентности

A	B	A~B
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

(если А ложно, то «не-А» истинно и наоборот; сочетание «А и В» истинно только если истинны как А, так и В; «А или В» ложно только если А и В ложны; комбинация «А эквивалентно В» истинна, если оба его компонента истинны или оба ложны). В обычной математике операции А ~ В соответствует «тогда и только тогда», или «если А, то В, и если В, то А». Импликация «если А, то В» не соответствует повседневному «из А следует В»: она истинна, если высказывание В истинно или если оба компонента ложны.

Логические операции позволяют строить комбинации высказываний, например $(X \wedge Y) \rightarrow Z$ (если X и Y, то Z), в которых абстрактные обозначения высказываний (в данном случае X, Y и Z) называются *пропозиционными переменными*. Эти комбинации могут быть истинными или ложными в зависимости от подстановки в них конкретных высказываний, или *допустимых значений* каждой переменной.

Любое сложное высказывание, полученное из более простых высказываний действием логических операций, называется *формулой*

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

а при подстановке в нее конкретных переменных (высказываний $\{A_i\}$) – *реализацией* или *интерпретацией* этой формулы

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n).$$

По таблицам истинности логических операций для каждого набора высказываний можно определить истинность или ложность любых формул в зависимости от значений логической переменной для составляющих их высказываний. Формула называется *выполнимой*, если хотя бы одна ее реализация является истинным высказыванием, и *опровержимой*, если существует хотя бы один набор переменных, с которым она превращается в ложное высказывание. Формула, не являющаяся выполнимой, называется *тождественно ложной*, или *противоречием*. Формула, являющаяся истинным высказыванием при любом наборе входящих в нее переменных, называется *тождественно истинной*, или *тавтологией* (законом логики; обозначается $|=F$).

Две формулы *F* и *G* называются *равносильными* (*F* = *G*), если они истинны при одних и тех же значениях входящих в них пропозиционных переменных. В этом случае $F \sim G$ – тавтология ($|=F \sim G$). Тавтологиями являются все основные законы и правила логики. Обозначая единицей всегда истинное высказывание, а нулем всегда ложное высказывание, можно записать три закона классической логики, сформулированные Аристотелем в IV в. до н.э.[*], в виде

$A = A$	*закон тождества*
$A \wedge \overline{A} = 0$	*закон непротиворечия*
$A \vee \overline{A} = 1$	*исключение третьего*,

а также алгебраические соотношения

[*]Алгебраически не формализуемый закон достаточного основания сформулировал в XVII в. В.Г. Лейбниц, который внес большой вклад в основы математической логики.

(11.2)

$A \wedge 1 = A,\quad A \vee 0 = A$ $A \wedge 0 = 0,\quad A \vee 1 = 1$	*законы нуля и единицы*
$\overline{\overline{A}} = A$	*двойное отрицание*
$A \vee B = B \vee A,\ A \wedge B = B \wedge A$	*коммутативность*
$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$	*ассоциативность*
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	*дистрибутивность*
$A \vee A = A,\quad A \wedge A = A$	*идемпотентность*
$A \vee (B \wedge A) = A,\quad A \wedge (B \vee A) = A$	*закон поглощения*
$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B},\quad \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	*закон де Моргана*

Формулам математической логики (11.2) соответствует *алгебра* (см. разд. 7.8 главы 7), в которой операцией сложения является дизъюнкция, операцией умножения – конъюнкция и введена операция *отрицания* $\overline{a}$. Это *булева алгебра*, названная так в честь английского математика Джорджа Буля, который в XIX веке сформулировал ее главные положения и, кроме того, предложил двоичную систему счисления, ставшую основной в компьютерных дисциплинах. Функции булевой алгебры $f(a, b, c, \ldots)$, принимающие значения 0 и 1, эквивалентны соотношениям между высказываниями.

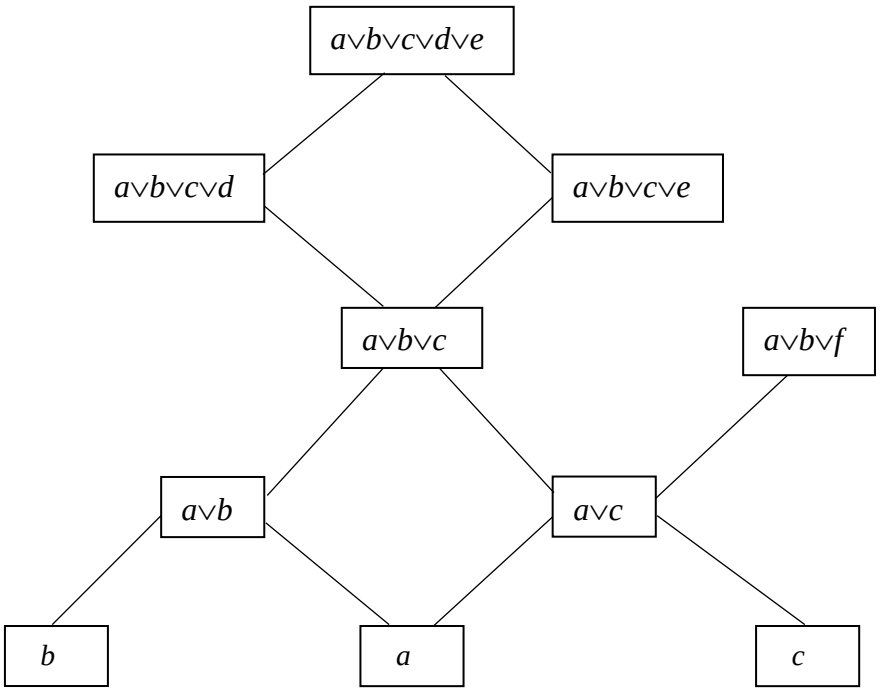


Рисунок 11.8. Диаграмма Хассе множества из десяти элементов, упорядоченного по операции включения

Булева алгебра в математических терминах является *решеткой*: между ее элементами можно ввести *отношение частичной упорядоченности* «$x \geq y$». Так, можно положить $(a \vee b) \geq a,\ (a \vee b) \geq b$: объединение элементов «не меньше», чем включенные в него компоненты. Соотношение упорядоченности в конечных множествах наглядно показывают *диаграммы Хассе*, иногда действительно напоминающие фрагмент решетки. На этих диаграммах элементам множества соответствуют вершины графа, а их «старшинство» возрастает снизу вверх (рис. 11.8). Вершины x и y соединены ребрами, если $y \geq x$ и в составе

y нет такого подмножества z, что $y > z > x$. Так, на рис. 11.8 $(a \vee c) \geq a$, $(a \vee b \vee c) \geq (a \vee b)$, $(a \vee b \vee c) \geq (a \vee c)$ и т.д., но элементы a, b и c, $(a \vee b)$ и $(a \vee c)$, а также $(a \vee b \vee c)$ и $(a \vee b \vee f)$, $(a \vee b \vee c \vee d)$ и $(a \vee b \vee c \vee e)$ *несравнимы*. По классической и математической логике (см. [3] и [4] в списке рекомендуемой литературы) имеется много хороших учебников, включая понятно написанные краткие пособия[8,9].

Одним из современных направлений развития математической логики является *нечеткая логика*, которая оперирует рассуждениями и оценками, сформулированными на естественном языке. В ее рамках пропозиционные переменные булевой логики заменяются *лингвистическими переменными*, дающими качественную характеристику обсуждаемых объектов. Соотношения между лингвистическими переменными устанавливают по *продукционным правилам* (см. разд. 10.3 предыдущей главы). Для нечетких аналогов логических операций из табл. 11.1, по образцу нечетких множеств, вводится функция принадлежности:

конъюнкция	$\mu_{A \wedge B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
дизъюнкция	$\mu_{A \vee B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$
отрицание	$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$,

где x – положение точки на отрезке [0, 1], задающее «степень истинности» высказывания (рис. 11.9). Таким образом, логические константы 0 и 1 заменяются нечеткими числами. Для нечеткой импликации используют несколько равноправных определений, например

импликация Аскерзаде $\mu_{A \to B}(x) = \max\{\min[\mu_A(x), \mu_B(x), 1 - \mu_A(x)]\}$

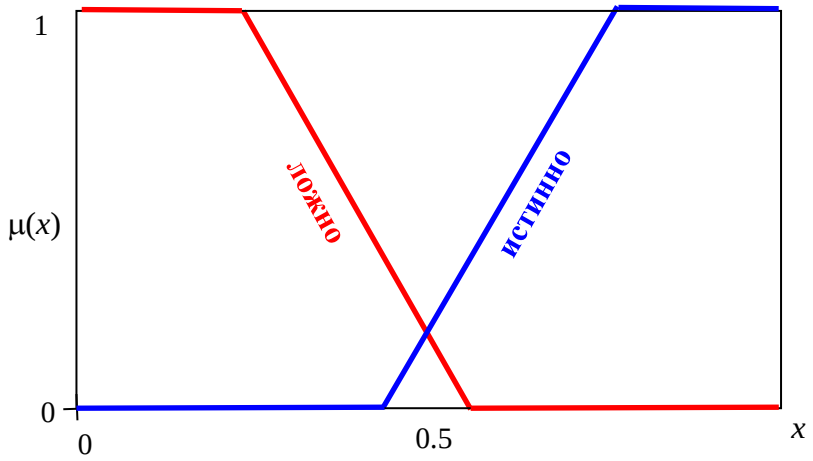


Рисунок 11.9. Функции принадлежности нечетких термов «истинно» и «ложно»

Схема нечеткого логического вывода (рис. 11.10) содержит этапы фаззификации, определения нечеткого вывода по значению (*терму*) входной лингвистической переменной и дефаззификации. В соответствии ней в конце XX века были сформулированы и с тех пор так объясняются в учебной литературе принципы действия нечеткого контроллера, представленные в разд. 10.3 в виде нечеткой функции (см. [5] в списке рекомендуемой литературы и рис. 10.27 в главе 10). Нечеткая логика по ряду соотношений отличается от булевской: в частности, в ней не выполняются законы непротиворечия и исключения третьего (рис. 10.25 в гл. 10). К настоящему времени разработаны и другие неклассические логики.

Применение логического ИИ

Высказываниями в логике по правилам естественного языка устанавливаются связи между «сущностями»: объектами, так или иначе отражающими реальность. На техническом уровне соотношения формальной логики позволяют производить *исчисление высказываний*, то есть выводить их истинность или ложность из заданного набора *аксиом*: утверждений, которые всегда считаются истинными. Построение таблиц истинности для любых логических формул с использованием компьютеров формально открывает путь к полному непротиворечивому описанию действительности и к логическому выводу новой информации («придумыванию нового»).

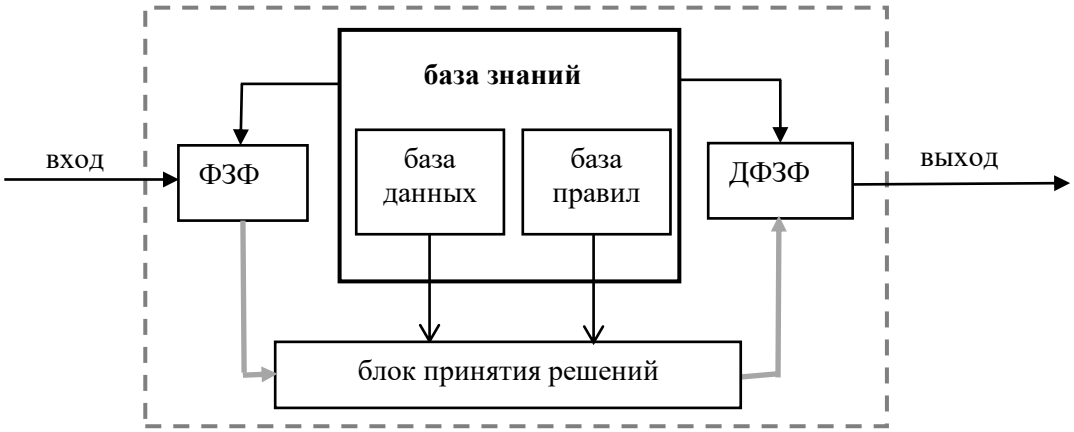


Рисунок 11.10. Схема нечеткого логического вывода. ФЗФ – этап фаззификации входного сигнала, ДФЗФ – дефаззификация «нечеткого» вывода (см. также рис. 10.27 в гл. 10)

Однако сами постулаты логики не вполне адекватно отражают наше восприятие реального мира, что порождает *логические парадоксы*. (Например, утверждение «я всегда лгу» в рамках математики не может быть ни ложным, ни истинным). По этой причине формальные логики во всех современных вариантах не позволяют построить «абсолютную» модель человеческого интеллекта (по ощущению автора этой книги – часто нелогичного). Тем не менее, они активно и плодотворно используются в реализациях ИИ в составе комбинированных интеллектуальных систем *человек* + *компьютер*. Общедоступное описание принципов действия логических экспертных систем и искусственных нейронных сетей представлено в книге [5].

На логическом выводе новых содержательных высказываний из истинных высказываний основаны программы «автоматического» доказательства теорем. Важнейшим компонентом данного подхода является *логическое программирование*: созданный в 1960-е годы язык Prolog и его позднейшие модификации (см. [5]). Главным же недостатком логического моделирования интеллекта приходится считать ограниченную «информационную емкость» последовательного вывода, не включающего инсайта, т.е. «озарения». Даже воображаемый сверхмощный компьютер, вооруженный безупречной логикой и способный вывести все результаты алгебры действительных чисел из определения действительного числа и алгебраических постулатов (две операции, ноль, единица, коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность), вряд ли изобретет мнимые и комплексные числа. Идея «давайте примем, что решение уравнения $x^2 = -1$ все

же существует, и назовем его мнимой единицей» (см. разд. 3.1 в гл. 3) пока относится исключительно к области человеческого ума.

Наиболее широко логический ИИ используют в извлечении и обработке информации, выраженной на естественном языке. Эти приложения ИИ особенно близки к теории управления и робототехнике. Методы математической логики внедрены в разнообразные компьютерные средства, облегчающие пользователям решение интеллектуальных задач: системы поддержки принятия решений (СППР), системы управления базами данных (СУБД), *базы знаний* (как структурированные наборы установленных фактов, см. рис. 11.10), информационные, экспертные и иные «интеллектуальные» системы. Эти средства с помощью простой графики реализуют диалог с программой (ввод и вывод информации) пользователей, не имеющих специальной подготовки в компьютерных науках. Здесь наглядно проявляется социальная функция всех видов ИИ: они созданы коллективным интеллектом людей, служат его составной частью и угрожают «восстанием машин» в той же степени, что и любые массовые поломки техники. Влияние технического прогресса на устойчивость неоднородного и весьма некооперативного глобального человеческого сообщества будет обсуждаться в следующем разделе.

Большие достижения в компьютерных средствах поддержки для решения оператором интеллектуальных задач не в последнюю очередь объясняются относительно скромным объемом человеческой памяти: наиболее полные словари содержат порядка 1 млн. слов. Это позволяет построить для любой специализированной области исчерпывающий глоссарий в 20-30 тыс. терминов, содержащий до 100 млн. семантических связей (см. разд. 9.2 в гл. 9) с верхней оценкой числа связей $^1/_2\ N(N-1)$ как ребер полного графа из N вершин-терминов. Подбор семантически связанных терминов в построении производственных, экономических и логистических схем (когнитивных карт, см. гл. 6) вполне по силам современному ноутбуку. Но такая постановка задачи делает невозможным прогнозирование уже на 5-10 шагов вперед, для чего нужен перебор, соответственно, от ~10^{20} до ~10^{40} комбинаций терминов и еще большего числа связей при отсутствии «экономных» методов поиска предпочтительных сочетаний. Технический лимит человеческого мозга (~10^{11} нейронов) вместе с фактом его успешного функционирования иллюстрируют важность свертки информации, которую следует воспроизводить в моделях интеллекта. Современные реализации логического ИИ не включают такой свертки и, подобно ИНС, выполняют лишь задачи, заданные извне.

Математические алгоритмы безусловно необходимы при верификации решений, полученных путем инсайта – включая творческую работу математика. Однако представление деятельности интеллекта лишь одними алгоритмами ограничивает возможности моделирования. Другая особенность интеллекта людей, не воспроизводимая в его континуальных моделях – это *прерывистый* характер решения задач: наблюдение обстановки в сочетании с эпизодическими действиями, корректирующими ее динамику (при управлении транспортными средствами, работе операторов, стратегиях биржевых игроков и многих других видах поведения). Механизм *прерывистого управления* (см. разд. 5.3 в гл. 5), вероятно, является эволюционно отобранным средством экономии ресурсов мозга и тесно связан с явлением инсайта.

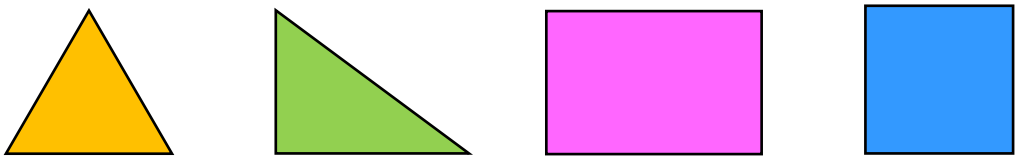
Анализ формальных понятий

Применение формальной логики для поиска в базах знаний ограничено неполнотой и нередко противоречивостью данных – но человеческим мышлением эти обстоятельства

легко преодолеваются[10]. Популярным современным направлением в логическом ИИ является *анализ формальных понятий* (*АФП*, англ. *Formal Concept Analysis, FCA* – с равноправным переводом «формальный анализ понятий»), в перспективе призванный воспроизвести функции реального человеческого интеллекта. В его рамках распределение объектов из множества $G = \{g_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, обладающих множеством признаков $P = \{p_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, по классам $Q = \{q_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ с определенными наборами признаков (задача классификации) решается в процессе составления *онтологии*: структурированного описания множества объектов с их признаками и взаимосвязями*.

Композиция трех множеств (G, P, I) (или «тройка множеств», см. математическое определение игры в гл. 7), где I – множество отношений «объект-признак», называется в АФП *формальным контекстом*. Первый шаг классификации объектов – составление *объектно-признаковой*, или *контекстной* матрицы: таблицы, в которой строки соответствуют объектам, а столбцы признакам. Наличию *j*-го признака у *i*-го объекта соответствует элемент матрицы $a_{ij} = 1$, при отсутствии этого признака $a_{ij} = 0$ (рис. 11.11). Затем в G выделяют подмножества объектов $A \subseteq G$ с одинаковым набором признаков $B \subseteq P$, которым отвечают прямоугольные блоки контекстной матрицы, составленные из одних единиц. На рис 11.11 среди таких множеств, содержащих больше одного элемента, выделены ({12},{a}) (треугольники), ({34},{bc}) (четырехугольники, в которых есть прямой угол) и ({234},{c}) (фигуры с прямым углом); также имеется множество равносторонних фигур ({14},{d}), не отмеченное на рисунке.

G (фигуры)



1: треугольник | 2: прямоугольный треугольник | 3: прямоугольник | 4: квадрат

P (признаки фигур) a: 3 вершины, b: 4 вершины, c: есть угол 90°, d: все стороны равны

Контекстная матрица

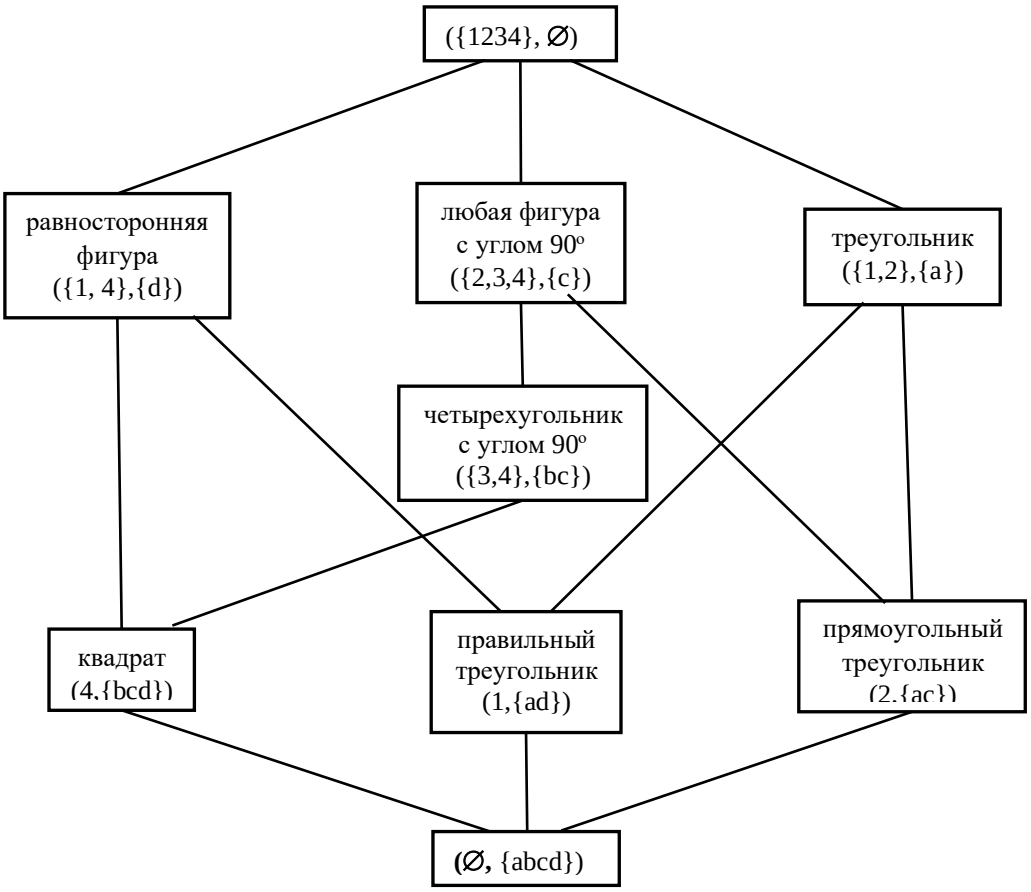
	P	a	b	c	d
G					
1		1	0	0	1
2		1	0	1	0
3		0	1	1	0
4		0	1	1	1

Рисунок 11.11. Геометрические фигуры и их признаки (см.[11]). Выделены формальные понятия

Пары (A_i, B_i), составленные из множеств объектов с одинаковыми признаками, называются *формальными понятиями*. Они образуют *решетку понятий* (см. выше), в которой «старшинство» $(A_i, B_i) \geq (A_j, B_j)$ соответствует включению множеств: $A_i \supseteq A_j$, $B_i \supseteq B_j$. Большее по объему (а значит более детализированное) понятие имеет меньшее

*Онтологией в общем и преобладающем понимании этого термина называется раздел философии, посвященный описанию и осмыслению бытия. В точных науках и информационных технологиях понятие онтологии используется в более узком смысле: как формализация некоторой предметной области, задающая описание всех исследуемых объектов, иерархию их связей и наборы их свойств.

содержание. Диаграмма Хассе (см. рис. 11.8) такой решетки, в которую добавлены *абстрактный ноль* (совокупность всех рассматриваемых признаков, которая не отвечает ни одному объекту) и *абстрактная единица* (все классифицируемые объекты, не имеющие ни одного общего признака), непосредственно представляет формальные понятия, которые могут быть составлены из заданного набора объектов и признаков – в данном случае их семь (рис. 11.12). В общем случае из множества *прецедентов* – объектов с заданным набором признаков, уже отнесенных к определенным классам – составляется обучающая выборка, по которой устанавливается *решающее правило*, далее применяемое для классификации исследуемой выборки. Обучение программы на заданных выборках продолжается до тех пор, пока доля ошибок и отказов (при которых объект не удается отнести ни к одному из имеющихся классов) не станет меньше заданного порогового значения.



9

Рисунок 11.12. Решетка понятий из таблицы на рис. 11.11, см[11]

Приложения АФП включают классификацию объектов из самых разных областей человеческой деятельности. Следует заметить, что наборы признаков в ее рамках, как и в случае исчисления высказываний, выбираются из бесконечного счетного множества без универсального критерия, позволяющего выделить лучшие содержательные характеристики. Это иллюстрирует контекстная матрица на рис. 11.11, лишь частично отражающая признаки включенных в нее объектов. При увеличении числа объектов и признаков объем расчетов быстро возрастает. Тем не менее, АФП успешно применяется в управлении базами знаний, контекстном поиске, экспертных системах и других методах классификации объектов, характеризуемых средствами естественного языка.

Подобно ИНС, новые логические реализации ИИ способны обучаться и, с некоторыми оговорками, могут создавать новые знания – то есть обладают фундаментальными признаками интеллекта, перечисленными в начале этой главы. Тем не менее, алгоритмы математического вывода не включают инсайта: существеннейшего механизма умственной деятельности людей. Таком образом, логические системы ИИ, подобно ИНС, хотя и по другой причине, не обладают главным признаком человеческого интеллекта: способностью генерировать новую информацию, не выводимую методами формальной логики (как и методом многомерной экстраполяции в случае ИНС) из имеющихся знаний. Использование логических и семантических схем в комбинации *человек + компьютер*, где на каждом этапе деятельности решение принимает человек, в данной ситуации выглядит наилучшим. Концептуальные проблемы искусственного интеллекта обсуждаются в книге[10].

11.2.3. Компьютерное моделирование роевого интеллекта

Помимо рассмотренных выше схем прямого математического конструирования интеллекта, к области ИИ относятся различные средства его имитации в агентных моделях. Идея роевого интеллекта (см. предыдущую главу) используется в компьютерных алгоритмах поиска и оптимизации, где возросшие вычислительные мощности изменили как технику, так и стратегию расчетов. В последние десятилетия в информационных технологиях широко используются *алгоритмы, подсказанные Природой* (англ. *Nature-Inspired Metaheuristics, NIMs*), в которых имитация «интеллектуального роя» позволяет оптимизировать решение трудных вычислительных задач ([6] в списке рекомендуемой литературы).

В *муравьином алгоритме*, впервые предложенном в 1992 г. для поиска оптимальных маршрутов на сложных графах (*задача о коммивояжере*, см. разд. 6.1 в гл. 6), вероятность перехода виртуального «агента» от i-й к j-й вершине графа

$$P_{ij}(t) = \frac{\tau_{ij}(t)^{\alpha} {d_{ij}}^{-\beta}}{\sum \tau_{ij}(t)^{\alpha} {d_{ij}}^{-\beta}}$$

определяется длиной пути d_{ij} между вершинами и «уровнем феромона» τ_{ij} на этом пути (где α и β – эмпирические параметры, а сумма в знаменателе отвечает всем возможным маршрутам из i в j). В общем случае множитель ${d_{ij}}^{-\beta}$ заменяется *эвристической ценностью* $C_{ij}^{(k)}$, которая вычисляется алгоритмически для каждого частного решения (маршрута). Уровень «феромона, оставленного агентом на маршруте» уменьшается на каждом шаге дискретного времени t и увеличивается при прохождении данного маршрута другими агентами:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\varepsilon)\tau_{ij}(t) \cdot \sum_k \frac{\gamma}{{c_{ij}}^{(k)}}$$

(здесь ε – «коэффициент испарения», γ – ценность наилучшего решения и суммирование проводится по всем найденным маршрутам $i \to j$).

Имитируя положительную обратную связь привлекательности реальных муравьиных тропинок с числом прошедших по ним насекомых (разд. 10.1.1 предыдущей главы, рис. 10.3), муравьиный алгоритм позволяет экономно находить субоптимальные решения таких задач, где затраты вычислительных ресурсов в случае прямого перебора n вариантов возрастают пропорционально $n!$ В альтернативном *пчелином алгоритме* каждый виртуальный агент проводит случайный поиск доступного ему лучшего решения (например, максимума целевой функции $U(p_1, p_2, \ldots, p_n)$) по связной траектории в

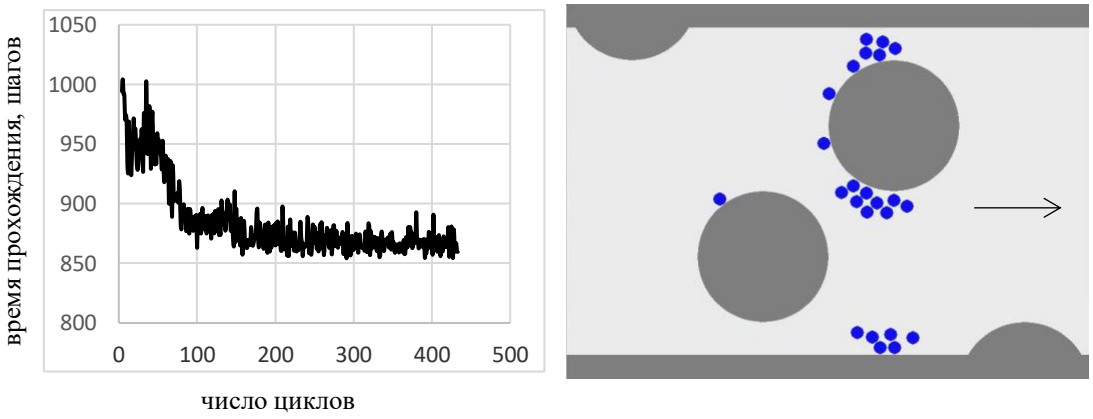
некоторой области пространства параметров $\{p_i\}$, учитывая общее знание наилучшей найденной точки $\mathbf{p}^*(t)$ на каждом шаге времени: *информационную панель* (*blackboard*).

В общей схеме роевых алгоритмов положение x_i и скорость v_i виртуальной частицы-агента в n-мерном пространстве параметров в момент времени $t + \Delta t$

$$x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + v_i(t)\Delta t$$
$$v_i(t+\Delta t) = \omega v_i(t) + a_l r_l[l_i(t) - x_i(t)]\Delta t + a_g r_g[g(t) - x_i(t)]\Delta t \quad (11.3)$$

рассчитываются исходя из положения и скорости в предыдущий момент времени, учитывая положения локального оптимума $l_i(t)$ в «радиусе обозрения» i-го агента и глобального оптимума $g(t)$ по данным всех агентов, с эмпирическими параметрами ω (инерция), R (радиус обозрения), a_l и a_g (коэффициенты ускорения к оптимумам) и случайными возмущениями r_l, $r_g \in [0, 1]$. В уравнениях (11.3), задающих модификацию классического метода молекулярной динамики (разд. 3.4 гл. 3) множители $a_l r_l[l_i(t) - x_i(t)]$ и $a_g r_g[g(t) - x_i(t)]$ при приращении времени Δt называются, соответственно, *когнитивным фактором* и *социальным фактором*[12].

Круг «природных» вычислительных алгоритмов значительно шире эвристик, имитирующих рой живых организмов (включая синхронизацию вспышек свечения светлячков) и даже социальное поведение высокоорганизованных животных: волков, львов, обезьян. К области NIM также принадлежат широко распространенные *генетические* и *культуральные* алгоритмы[13]. В последних типах расчетов происходят изменения популяции виртуальных агентов, наследующих адаптационные признаки с варьированием в результате случайных «мутаций» (*генетический алгоритм*) либо в процессе «обучения» (*культуральный алгоритм*).



(а) (б)

Рисунок 11.13. Прохождение агентами коридора с препятствием в генетическом алгоритме отбора: (а) время прохождения (число шагов) в последовательных циклах, (б) движение агентов в «обученной» системе, стрелка – направление (Y.L. Slovokhotov, I.S. Neretin, Programming & Computer Software. 2018, 44 (6), 499)

Эмерджентные эффекты, сопутствующие достижению оптимума целевой функции в расчетах по генетическим алгоритмам, позволяют по-новому взглянуть на содержание биологической эволюции. На рис. 11.13 показаны результаты минимизации времени прохождения агентами коридора с препятствиями в простой эволюционной модели. Параметрами агентов, аналогично моделям «живых частиц» (гл. 5, разделы 5.1 и 5.2),

задавались их ускорение при движении слева направо, отталкивание от препятствий и следование за соседними агентами в радиусе обозрения. Эволюционный отбор состоял в замене «медленных» 50% агентов копиями «быстрых» со случайным варьированием их параметров (мутациями) в последовательных циклах расчета. В результате обучения модели время прохождения коридора последним агентом в группе уменьшалось на 15-16% (рис. 11.13 а), а их хаотический дрейф с многочисленными столкновениями сменялся изначально не запрограммированным согласованным движением в сгустках (рис. 11.13 б). Такие результаты косвенно указывают на аналогии процессов эволюции, в которых оптимизируется приспособленность биологических видов, с развитием их *системного РИ*, давно обсуждаемого на качественном уровне[*]. Одним из направлений современных компьютерных исследований является *искусственная эволюция* роботов и их управляющих программ с произвольно задаваемыми приспособительными признаками[**].

Эмерджентным интеллектом (*emergent intelligence, EI*) в литературе по разным видам ИИ часто называют гибкие транспортные, логистические, экономические и комбинированные системы управления в масштабах предприятия, отрасли или городского хозяйства. «Признаком ума» таких систем считается способность автоматически распределять ограниченные ресурсы в изменяющейся обстановке без прямого вмешательства оператора. Количество варьируемых параметров в подобных задачах ставит жесткое централизованное управление, если оно вообще возможно, в критическую зависимость от компьютерных мощностей и осложняет коррекцию случайных возмущений из-за поломок, отказов, погодных условий и прочих неблагоприятных событий в реальном времени.

Альтернативой прямому централизованному управлению служат компьютерные модели гибких систем с обменом информацией между агентами, играющими роль поставщиков ресурсов либо услуг, и агентами-потребителями. По аналогии с СППР, такие модели позволяют воспроизвести изменения в динамической системе, учесть случайные возмущения и оперативно выработать управляющие воздействия. Предложенная в 1990-е годы модель BDI (англ. *belief-desire-intentions,* т.е. *представления–желание–намерения*), в рамках которой агенты изначально интеллектуальны, а их взаимодействия заданы средствами математической логики, столкнулась с трудностями формального определения базовых функций интеллекта и их программной реализации. Гораздо перспективнее оказались модельные системы «ограниченно интеллектуальных» агентов с алгоритмически заданным стремлением к максимуму целевой функции (виртуальных денег), которые по известным значениям выигрышей и потерь устанавливают и переключают связи между множествами поставщиков и потребителей в переменной среде.

Метаэвристика «рыночных» агентов, которые стремятся к максимуму выигрыша, перераспределяясь между наиболее выгодными заказами, родственная NIMs, успешно используется в широком спектре практических задач. Мультиагентные модели обмена ресурсами проявляют все основные признаки РИ: вариативность динамики взаимосвязанных агентов-поставщиков и агентов-потребителей, модельный обмен информацией между ними в форме перераспределения объемов предложения и спроса, индивидуальное целеполагание агентов (стремление к максимальным выигрышам) и

[*] Р. Докинз, *Эгоистичный ген* (пер. с англ.): М.: АСТ:CORPUS, 2013.

[**] см., например, R.J. Alattas, S. Patel,·T.M. Sobh, *Evolutionary modular robotics: survey and analysis,* J. Intel. & Robotic Syst. 2019. **95**, 815.

эволюцию системы, которую представляет агент-*диспетчер*, к максимуму целевой функции. На основе динамической *сети потребностей и возможностей (ПВ)* в таких моделях строится система *интеллектуального управления ресурсами* в реальном времени[14].

Литература к разделу 11.2

[7] В.В. Целищев, *Философия математики на переломе тысячелетий: смена парадигмы*. 2-е изд. М.: ЛЕНАНД, 2021.

[8] Г.Н. Степаненко, Е.В. Кузьмина. *Логика: конспект лекций*. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2014.

[9] Л.Н. Куртова, *Основы математической логики*. Белгород: Изд-во НИУ «БелГУ», 2018.

[10] О.В. Кузнецов, *Избранные труды. Автоматы, языки и искусственный интеллект.* М.: 2016.

[11] С.О. Кузнецов, *Решетки формальных понятий в современных методах анализа и разработки данных,* http://www.posp.raai.org/data/posp2011/kuznetsov.pdf

[12] Z. Winklerova, *Maturity of the particle swarm as a metric for measuring the particle swarm intelligence,* Proc. 4th Int. Conf. Adv. Swarm Intel. (2013, Harbin), Part 1, 40.

[13] S. Patnaik, X.-S. Yang, K. Nakamatsu (Eds.) *Nature-inspired computing and optimization: theory and applications.* Springer. 2017.

[14] С.П. Грачев и соавт., *Методы и средства построения интеллектуальных систем для решения сложных задач адаптивного управления ресурсами в реальном времени*. Автоматика и телемеханика, 2021. № 11, 30.

11.3. Коллективный интеллект в человеческих сообществах

В предыдущей главе обсуждались проявления «роевого» РИ в бесструктурных сообществах людей, в том числе *разум толпы*: способность вырабатывать «усредненный» ответ на внешнее воздействие, который может оказаться более точным и эффективным, чем большинство составляющих его индивидуальных реакций. Этой форме РИ, характерной для больших совокупностей слабо связанных индивидуумов (участники опроса, электорат, рынок, биржа), посвящены многие академические исследования и большая популярная литература (см., например, книгу[8] в разд. 10.1 предыдущей главы). Механизм выработки усредненных оценок в этом случае не включает коллективного обсуждения: он близок к динамике роя общественных насекомых, косяка рыб и даже формаций беспилотных аппаратов, не имеющих индивидуального мозга. В рассмотренных выше «природных» вычислительных алгоритмах элементы РИ также проявляются в кооперативной динамике виртуальных агентов с нулевыми когнитивными возможностями.

Функционирование социальных систем в человеческом обществе, где важную роль играют коммуникации и осознанные действия, на первый взгляд далеки от динамики стаи птиц или муравейника. Тем не менее, в них тоже действуют общие факторы, порождающие РИ: связи между элементами системы, передача информации и стремление системы к объективной цели, которая часто не совпадает с целями элементов (сокращение персонала в организации, военные действия и мн. др.). Главное отличие социальной системы людей от других совокупностей агентов состоит в прямом вовлечении интеллекта индивидуумов в коллективную динамику, прежде всего через использование речи и письменности для передачи информации[*]. Поскольку письменность, речь, организационные структуры и почти все другие характеристики человеческих социальных систем сами являются продуктами и проявлениями РИ, индивидуальный интеллект человека и распределенный интеллект человеческих сообществ неразделимы. В согласии с преобладающей

[*] Как обсуждалось выше, сообщества высокоразвитых животных в некоторых проявлениях напоминают доисторические социальные системы людей; индивидуальный интеллект их особей тоже является неотъемлемой частью РИ. В данном разделе мы обсуждаем человеческий коллективный интеллект как лучше изученный и в контексте этой книги несравнимо более важный.

терминологией мы будем далее называть «человеческую» форму РИ *коллективным интеллектом*.

Разные социальные системы людей различаются по числу индивидуумов и структуре отношений между ними. С этими факторами тесно связаны глубина, структура и функции коллективного интеллекта системы. Его типы для систем, рассматриваемых нами в этом разделе (также см.[15]), представлены в табл. 11.2. Типы сообществ в таблице соответствуют современности, в нее не включены исторические и архаические социальные системы: род, племя, полис, традиционная деревня и др. Неопределенность размера человечества как глобальной системы отражает разную численность населения Земли в историческом времени. Отметим, что, за исключением слабо структурированных сообществ (где тоже можно выделить составные части – например, группы в пешеходном потоке), системы на каждом последующем уровне состоят из большого числа подсистем низших уровней, которые вносят собственные вклады в объемлющий их РИ (рис. 11.14). Вложенное строение особенно характерно для организационных систем (ОС) во всех областях деятельности (производственных, экономических, культурно-образовательных, военных), которые обычно состоят из большого числа организационных подсистем, объединенных в многоуровневую иерархию.

Таблица 11.2

Типы коллективного интеллекта в человеческих сообществах[15]

Тип сообщества		количество индивидуумов	упорядоченность	интеллект			
				индивидуальный		коллективный	
				«доля»	«глубина»	«доля»	«глубина»
группа	социальная	до 10-20 чел.	слабая	высокая	норма	низкая	слабый
	экспертная	до нескольких десятков чел.	средняя или высокая	средняя	сильный	средняя	сильный
толпа (биржа, рынок, электорат)		до нескольких тысяч	не упорядочена	низкая	ниже нормы	высокая	очень слабый
организационные системы, в том числе отрасли и армии		от десятков до сотен тысяч	от высокой до сложной	средняя	норма	средняя	средний
«макро»-системы: народы, государства, цивилизации		от сотен тысяч до десятков миллионов	сложная структура	низкая	норма	высокая	пере-менная
глобальная система: человечество в историческом времени		несколько млрд.	сложная структура	очень низкая	норма	очень высокая	очень сильный

Из материала предыдущей главы в таблицу 11.2 включена толпа как аморфная неупорядоченная человеческая масса с крайне низкой «мудростью». Этому определению соответствует не только массовые непродуктивные собрания или уличные шествия, но и, например, *информационные пузыри* в социальных сетях, которые особенно часто служат объектом и продуктом манипуляций (см. главу 9). Из самых общих соображений и в соответствии с материалом, который обсуждался во второй части книги, вклад коллективного интеллекта в динамику человеческих сообществ растет с увеличением их численности, а «глубина» РИ – с повышением упорядоченности системы. В том же направлении «снизу вверх» возрастают время жизни системы и характеристическое время протекающих в ней процессов. Таким образом, достижения РИ более крупных систем повышаются благодаря увеличению как численности их состава и сложности структуры, так и времени накопления результатов. Вес и глубина интеллекта больших социальных

«макро»-систем возрастает относительно систем меньших размеров параллельно с усложнением структуры.

Более сложная, чем движение толпы или армейского подразделения, динамика человеческих сообществ управляется целенаправленными воздействиями на людей, вызывающими их осознанные действия – хотя результат не обязательно совпадает с индивидуальными целями участников. В упрощенных моделях таких систем, обсуждавшихся в части II, цели (не конфликтующих) управляющих воздействий совпадают с их результатами, а разнонаправленные воздействия дают «средневзвешенный» результат. Это позволяет «исчислять» нематериальные объекты – планы, мнения, стратегии и прочие, которые сами являются продуктами как индивидуального, так и коллективного интеллекта. Общие методы решения задач такого уровня сложности до сих пор не вполне разработаны, можно обсуждать лишь наиболее распространенные частные схемы и эвристики.

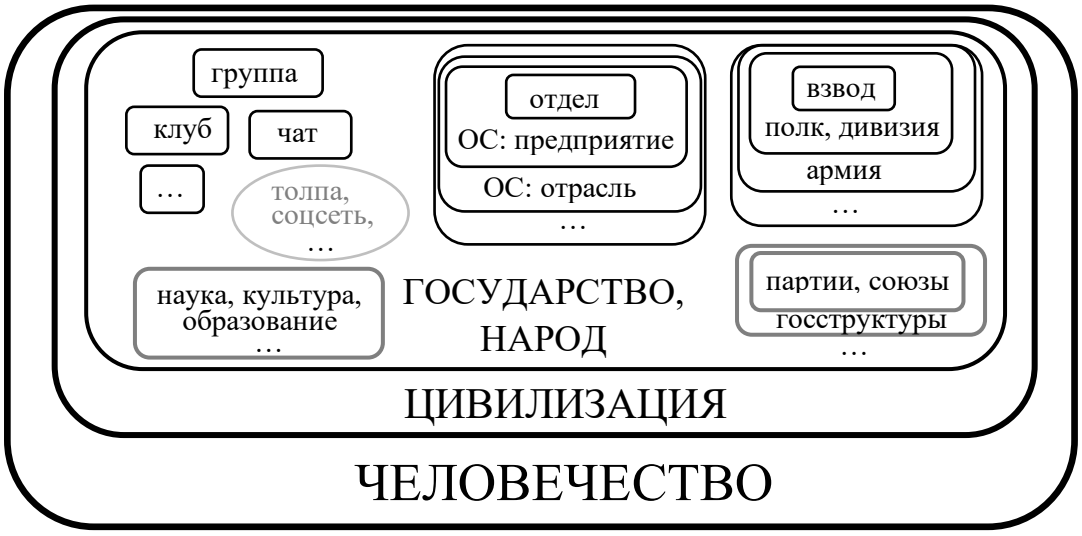


Рисунок 11.14. «Вложенные» типы социальных систем[15].

Групповой интеллект

Шимпанзе никогда не совершают непродуманных ходов
Ф. де Валь, «Политика у шимпанзе»

Простейшей «молекулярной» формой человеческих социальных систем является *малая группа*, где все индивидуумы (агенты) осведомлены о всех других членах группы, но различаются по интенсивности и направленности взаимодействий: клуб филателистов, совет директоров предприятия, отделение во взводе и т.п. За исключением не рассматриваемых здесь семей, время существования устойчивой группы в социуме, как правило, не превышает нескольких лет, что много меньше средней продолжительности человеческой жизни. Неформальные социальные группы складываются в результате общности интересов людей, они относительно демократичны и соответствуют коалициям в биологических сообществах. Группы в составе организационных систем варьируют от постоянных микро-коллективов («отдел») до функционирующих периодически («экспертный совет») или создаваемых временно для решения конкретной задачи («команда»). За вычетом участников спектакля, оркестрантов, футболистов на поле и других команд, функционирующих как единое целое, коллективное поведение и РИ в большинстве типов групп в основном определяется индивидуальным поведением участников, которое лишь модифицируется взаимодействиями внутри группы.

Связь коллективного интеллекта сообщества с его структурой, эффективностью управления и интеллектуальными возможностями составляющих единиц знакома всем из повседневной практики. Структуру взаимных влияний в группе отражают дуги взвешенного ориентированного графа, вершины которого соответствуют агентам. Как и в сообществах высокоорганизованных животных, в группе обычно выделяется индивидуум-лидер с наиболее сильным влиянием на остальных членов группы, которые при этом могут разделяться на фракции (рис. 11.15; см. также разд. 9.3.1 в главе 9). Такой подход позволяет формализовать вклады индивидуумов в коллективную динамику группы, даже если их действия вариативны и точно не известны.

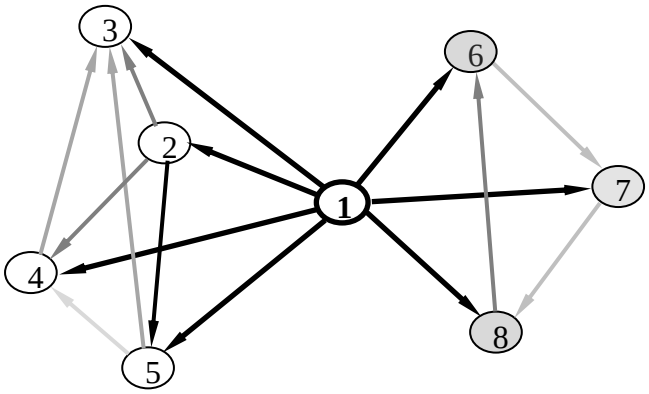


Рисунок 11.15. Строение малой группы (схема). Толщина и цвет стрелок отражают разную интенсивность влияния агентов. Нейтральные взаимодействия между не влияющими друг на друга «серыми» и «белыми» агентами не показаны

По структуре и функциям ближе всего к сообществам животных и архаическим общностям людей находятся криминальные группы (банды), живущие в состоянии войны с окружающей социальной средой. В экстремальных условиях, включая армию, малые группы (отделение, взвод) и составленные из них подразделения действуют по приказам командиров; их групповой интеллект реализуется как слаженное и гибкое выполнение поставленной задачи. Это не в меньшей степени справедливо для актеров на сцене или игроков на поле: РИ системы проявляется на фоне строгой регламентации поведения ее составляющих единиц.

При менее жестких ограничениях на сроки и характер действий лидеры групп обычно учитывают информацию, поступающую от членов группы, и их мнение. Такая практика на эмпирическом уровне иллюстрирует преимущество коллективного интеллекта перед единоличным управлением (*один ум хорошо, а два лучше*) в относительно спокойной обстановке. Ускорение общественного прогресса и становление локальных цивилизаций в V-III тысячелетиях до н.э. (см. книгу[4] в гл. 10) совпадает с возникновением городов, где повседневная борьба за выживание была частично снята и у социума появилось время подумать…

Обмен мнениями и выработка единой позиции составляют главное содержание деятельности экспертных советов; в том или ином виде они присутствуют в работе большинства органов управления. Математические модели обсуждения в группе воспроизводят динамику установления единого мнения (консенсуса) и оценивают степень влияния участников группы на вырабатываемое решение. Для этого часто используется модель де Гроота, где взаимное влияние агентов отражает стохастическая матрица влияний

W = $\|w_{ij}\|$ с неотрицательными элементами $\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1\right)$, модели условного доверия и другие процедуры поиска «средневзвешенного мнения» (см. гл. 9, разд. 9.3.2). При этом общеизвестная способность коллектива предложить новое нестандартное решение известной проблемы либо найти адекватный ответ на непредвиденные изменения обстановки крайне трудно поддается формализации и обычно не моделируется.

Схемы выработки консенсуса в группе с изначально заданным множеством мнений не предусматривают возможности нового нестандартного решения, то есть не воспроизводят одно из ключевых свойств коллективного интеллекта. В то же время приемы, способствующие совместному творчеству, хорошо разработаны и успешно используются на практике. Кроме таких очевидных средств, как специализация членов группы, разложение задачи на этапы и их пошаговое, нередко параллельное исполнение, для решения нестандартных задач применяются «стохастические» подходы, напоминающие деятельность роевого интеллекта. Среди них наиболее известен *мозговой штурм*, или «шторм» (англ. *brainstorm*), предложенный в середине XX века[16]. В его процедуре среди участников группы временно отменяется субординация и они свободно генерируют идеи, анализ которых начинается лишь после наполнения «мусорной корзины» (англ. *garbage can*: одно из полу-юмористических названий составленной коллекции идей).

Примерно те же принципы, с разной степенью упорядоченности группы и процессов в ней, реализуются в традиционных формах профессионального научного семинара, политических дебатов или творческой дискуссии. В том или ином виде элементы мозгового штурма присутствуют в работе большинства совещаний, которые различаются в основном степенью централизации и допустимыми рамками споров[17]. Компьютерные СППР, поддерживающие процедуру коллективного поиска решений, включают поиск семантических ассоциаций, структурирование проблемы, построение когнитивных карт и другие способы усиления РИ участников группы. Мозговой штурм не является универсальным способом решения любых задач, его эффективность ограничена служебным неравенством, психологическими особенностями и карьерными соображениями участников, многими другими факторами[17] – но в контексте этой главы важны те методы коллективной обработки информации, которые способствуют нестандартным решениям.

Коллективное решение задач в научной литературе нередко и не вполне корректно называют «роевым интеллектом группы». По существу его практика предполагает не отсутствие иерархии (как в настоящем рое), а особый вид управления с временным и «рекреационным», т.е. почти игровым, ослаблением ограничений, затрудняющих творческий процесс. Аналогично индивидуальным изобретательским эвристикам[18], практика мозгового штурма включает «расшатывание» модифицируемой модели, поощрение случайных ассоциаций и активное высказывание любых идей, которые становятся общим знанием (см. пчелиный алгоритм, [6] в списке рекомендуемой литературы). Надо подчеркнуть, что успешное решение проблемы группой, если оно возникает, обычно не сводится к «озарению» одного из участников дискуссии: новая идея должна быть одобрена и обычно скорректирована другими участниками под руководством модераторов[16].

При стохастических возмущениях состояний ума индивидуумов в дискуссии неизбежно возникают ошибочные предположения и иная «шумовая» информация – но именно этот процесс способствует возникновению инсайта у участников обсуждения. Его результаты закрепляются коллективом по механизму, в целом аналогичному изменению

средней траектории птичьей стаи (см. разд.5.2 и рис. 5.12 в гл. 5): перспективное предположение одного из участников обсуждается, критикуется и модифицируется всей группой. Другой характерной чертой мозгового штурма является увеличение *библиотеки знаний* благодаря разным областям компетенции участников, что провоцирует аналогию с расширением сферы обзора у косяка рыб.

Проверка новых идей в общей дискуссии и их закрепление в сознании участников соответствует созданию новой информации *эмерджентным* интеллектом группы. Явные параллели этого процесса с хаотической ориентацией особей в режиме роя, облегчающей распознавание хищника, и их согласованным бегством от опасности по механизму рассредоточения и следования за соседями (рис. 10.7 в предыдущей главе) отражают единый механизм реализации РИ, превосходящего индивидуальные возможности участников группы.

Несмотря на принципиальную разницу когнитивных способностей человека и стайных животных, аналогии группового решения задач с роевым интеллектом тоже могут быть формализованы в простых моделях. Предполагая, что способность «придумать новое» возрастает с обучением, т.е. с расширением библиотеки знаний, для i-го агента в группе можно условно записать вероятность возникновения инсайта в виде

(11.4) $$p_i = 1 - e^{-\alpha_i x_i},$$

где x_i – размер его библиотеки X_i, α_i – индивидуальные когнитивные способности. Эта вероятность $0 \le p_i \le 1$ монотонно возрастает и асимптотически стремится к 1 при увеличении произведения $\alpha_i x_i$ в формуле (11.4) (рис. 11.16). В таком случае вероятность хотя бы одного инсайта в группе из N независимых агентов

(11.4 а) $$P_0 = 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - p_i) = 1 - \prod_{i=1}^{N} e^{-\alpha_i x_i},$$

где $1 - p_i = e^{-\alpha_i x_i}$ – вероятность отсутствия инсайта у i-го агента, а отсутствию инсайта у всех N агентов соответствует произведение вероятностей

$$\prod_{i=1}^{N}(1 - p_i) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \ldots \cdot (1 - p_N).$$

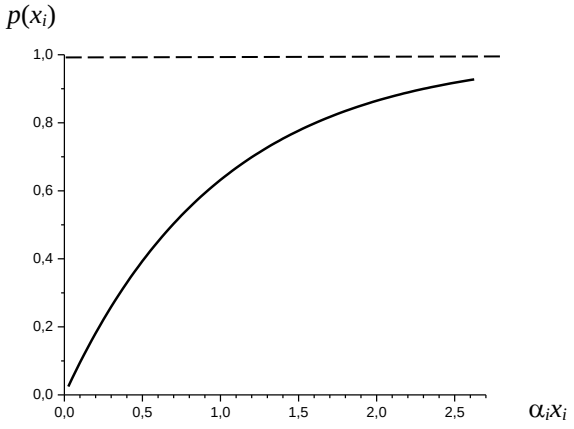


Рисунок 11.16. Модельная вероятность инсайта в зависимости от размера памяти агента (формула (11.4), см. текст)

Понимая объединение библиотек $Y = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_N$ как необходимое условие мозгового штурма, для множества взаимодействующих агентов можно записать аналог формулы (11.4 а):

(11.4 б) $$P_\Sigma = 1 - \prod_{i=1}^{N} e^{-\alpha_i y},$$

где y – размер объединенной библиотеки Y, единой у всех агентов. Если $y > x_i$ для каждого x_i (что соответствует содержательному обсуждению), $P_\Sigma > P_0$. В частности, при $N = 2$ (всего два агента) с параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $x_1 = x_2 = x$, $y = 2x$ и $\alpha x = 0.1$ получим

$$P_0 = 1 - e^{-0.2} \approx 0.181 \quad \text{для двух независимых агентов,}$$
$$P_\Sigma = 1 - e^{-0.4} \approx 0.330 \quad \text{для двух взаимодействующих агентов:}$$

вероятность инсайта при взаимодействии агентов почти удваивается. (Для косяка рыб на рис. 10.7 в предыдущей главе формулы (11.4) и (11.4 б) могут задавать вероятность распознавания хищника, а переменные x_i и y – соответственно долю кругового обзора особи и стаи).

При всей простоте, такая схема отражает главную особенность формальных моделей творческой деятельности: «придумывание нового» в них приходится постулировать (и в удачных случаях стимулировать) как эмпирически наблюдаемый эффект. Схемы обмена информацией различной степени упорядоченности в ходе совещаний в литературе обсуждаются на уровне эвристик[16,17]. Для экспертных групп, показанных в табл. 11.2 отдельной строкой, характерно сочетание четкой организационной структуры и регламентированной динамики с эффективной обработкой информации. Данный способ усиления РИ будет рассмотрены ниже вместе с организационными системами.

Интеллект организационных систем

В иерархической системе каждый индивидуум имеет тенденцию подниматься до уровня своей некомпетентности
принцип Питера

Главным структурным элементом всех видов человеческой деятельности являются *организационные системы* (ОС), объединяющие людей для решения задач, поставленных руководством фирмы, института, министерства и другими вышестоящими единицами. Совещательные механизмы в их деятельности не преобладают: коллективная обработка информации происходит внутри иерархии, которую не могут изменить индивидуальные участники системы. Обработка внешней информации, принятие управленческих решений и их реализация составляют основное содержание деятельности ОС и главную функцию их коллективного интеллекта*. Сроки существования организационных систем в экономической и технической сферах бывают недолгими (от нескольких лет), однако у крупных консервативных структур (государственных, образовательных, политических, военных) они могут намного превышать продолжительность человеческой жизни.

Реальные ОС обычно имеют многоуровневую структуру и сами состоят из организационных подсистем. Подсистемы низшего уровня по строению близки к группам с административно назначенным лидером. С повышением уровня возрастает сложность систем (см. рис. 11.14), переходящих в государственные и межгосударственные структуры макроскопического масштаба (группа → отдел → учреждение → объединение → отрасль → экономика страны).

* Это относится и к ОС на производстве, которыми организуются, поддерживаются и развиваются технологические процессы, формирующие техногенную среду, в которой функционирует система. С организационной точки зрения главным содержанием их деятельности также являются сбор, обработка и использование информации.

В отличие от группы, графы влияния в которой могут быть любыми, организационные системы обладают жесткой, как правило, иерархической архитектурой (рис. 11.17) с *управляющим центром*, которым может быть как индивидуум, так и группа (например, совет директоров). Управляющие воздействия (на рис. 11.17 красные сплошные стрелки) распространяются в системе сверху на последующие уровни иерархии вплоть до непосредственных исполнителей; в обратном направлении передается рабочая информация (синие штриховые стрелки). По наличию иерархии ОС напоминает «перевернутую» искусственную нейронную сеть (см. рис. 11.5 а). Это сходство усиливается возможностью повышения связности узлов каждого ее слоя в виде опосредованного влияния участников системы на любые подразделения через информацию, передаваемую центру.

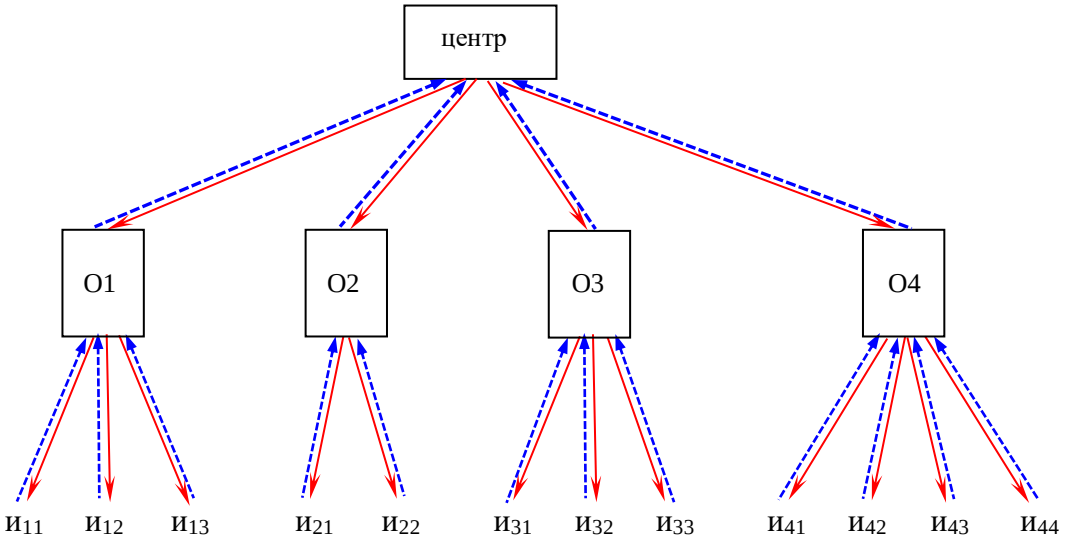


Рисунок 11.17. Схема двухуровневой ОС: О(*k*) – подразделения (отделы), и$_{ij}$ – группы исполнителей

Переход от роевого интеллекта толпы к коллективному интеллекту групп, где взаимное влияние упорядочено, сопровождается повышением точности и глубины вырабатываемых решений. Еще более упорядоченные ОС по эффективности обработки информации сопоставимы с индивидуальным человеческим интеллектом. Промежуточное положение занимают *комиссии*, или экспертные группы, создаваемые для решения возникающих задач в изменяющейся внешней обстановке (см. табл. 11.2). Идеальная комиссия имеет жестко заданную структуру (целевой отбор участников по критерию квалификации, председатель с решающим голосом и правом корректировать состав группы) и ведет строго регламентированную деятельность: упорядоченное обсуждение, исключение эмоций, количественное сравнение значимости мнений, т.е. голосование с подчинением меньшинства большинству; решения комиссии обязательны к исполнению. Все эти ограничения – эвристики, повышающие эффективность коллективного интеллекта системы. Неуправляемая группа, где такие ограничения сняты, вряд ли работоспособна при любом интеллектуальном уровне ее участников.

Коллективная рациональность социальной системы увеличивается при ограничении набора возможных действий агентов и при наличии библиотеки стандартных реакций на внешние воздействия. В хрестоматийном примере *пожар в театре*, несмотря на высокий культурно-образовательный уровень большинства зрителей, грозит возникновением паники и давки. Однако рота солдат, находящаяся в зале в порядке культпохода, с большой вероятностью выведет всех зрителей без потерь, выполняя приказы командиров.

Рациональность индивидуального поведения людей тоже возрастает с сокращением возможностей выбора (переход улицы по светофору, биржевая торговля с фиксированной ценой акций) и снижается при выборе из многих возможностей (пересечение улицы на красный свет, торги при высокой волатильности цен). Эти примеры иллюстрируют ограниченность способностей человека к рациональным действиям, что компенсируется в обществе нормами поведения.

Если узлы ИНС (рис. 11.5 а) лишь усиливают или ослабляют сигналы от узлов предыдущего слоя, то индивидуумы в ОС способны к глубокой переработке информации и к интеллектуальному творчеству. Их функционирование в системе, помимо ее структуры, формализовано должностными инструкциями, которые служат аналогами активационных функций (фильтров) в нейронных сетях.

Отметим, что коллективные решения в форме распоряжений центра после получения им рабочей информации от подразделений обычно принимаются в нерутинной, постоянно изменяющейся обстановке. Хорошо известная на повседневном уровне деятельность ОС включает отражения реальности (отчеты), свертывание информации (интегральные показатели), целеполагание, обучаемость и адаптивность, а также выработку новых знаний (схемы выполнение планов, модернизация, реакция на чрезвычайные обстоятельства и т.д.) – то есть имеет все признаки интеллекта. Обработка информации и ее использование в динамике ОС безусловно свидетельствует о наличии РИ у этого вида мультиагентных систем, однако в современной литературе еще нет его общепринятой теории.

Поскольку в социальных системах решения принимают люди, ОС часто рассматривают как *бюрократическую машину* под тем или иным персональным руководством. Подобно отнесению результатов дискуссии к инсайту одного из участников, эта модель не вполне соответствует действительности. Так, например, объем информации в годовом отчете предприятия выходит далеко за пределы области знаний и интересов каждого из его соавторов, адресован нескольким разным группам специалистов (технических, финансовых, правовых и др.) и лишь корректируется руководством ОС (центром). Эта информация затем коллективно обрабатывается вышестоящей организацией и приводит к организационным действиям – например, к изменению годового финансирования. Таким образом, коллективные интеллекты разнообразных ОС устанавливают *прямой диалог*, в котором индивидуальный интеллект их элементов играет скорее подчиненную роль. С середины XX века составной частью интеллекта организационных систем становятся компьютерные технические средства, т.е. элементы ИИ (см. «эмерджентный интеллект» гибких систем управления ресурсами в разд. 11.2.3).

Самодостаточность и автономия бюрократического аппарата, чаще всего трактуемые негативно – общее место в мировой художественной литературе и публицистике двух последних столетий. Многократно отмеченная «бесчеловечность» поведения ОС, иногда понимаемая как абсолютная противоположность интересов коллектива и личности (хотя само понятие личности существует только в коллективной среде), прямо указывает на внеличностную (или *надличностную*) субъектность коллективного интеллекта. (Сокращение персонала фирмы вызовет гораздо больше сочувствия, чем судьба генерального директора, которому не нашлось места в новой структуре – но это однотипные иллюстрации конфликта индивидуума и РИ). Такой «недостаток бюрократии», как раздувание управленческого аппарата в период кризиса (с чем старшее поколение

читателей столкнулось в 1990-е годы), также иллюстрирует не злонамеренность управленцев, а рост сложности и актуальности задач, решаемых РИ ОС в этот период*.

Качество решений, принимаемых коллективным интеллектом ОС, ввиду их разнообразия и преобладания в нашей жизни, часто вызывает обоснованную критику. Но сама эта критика косвенно подтверждает, что средние уровни интеллекта ОС и составляющих ее индивидуумов сравнимы. Иных форм интеллектуального управления, отличающихся от организационных систем (где оно осуществляется через индивидуальную деятельность) в нашей жизни не существует.

Математическое описание деятельности ОС обычно построено на основе теории игр, исследующей взаимодействие агентов, где выигрыш каждого в общем случае зависит от стратегий всех агентов. В роли агентов могут выступать как индивидуумы, так и коллективные агенты в ОС более высокого уровня. Вероятные результаты взаимодействия агентов представляются в виде равновесия их игры (см. главу 7). Агенты по определению интеллектуальны, однако их стратегии априорно задаются в начальных условиях: состав стратегий не рассматривается вне кооперативных и эволюционных игр, а в последних представляется «взвешенной суммой» заданных компонентов. Обычный постулат всегда рационального поведения агентов тоже сильно удаляет модель от реальных общественных систем (см. разделы 7.6.3 и 7.7 в гл. 7 и главу 8).

Во второй половине XX века на основе теории игр была разработана *теория активных систем (ТАС):* раздел теории управления ОС, на динамику которых влияет интеллектуальное поведение (*активность*) участников системы[20]. В рамках ТАС выработан ряд методов и механизмов управления системами, включающих активные элементы с собственными целевыми функциями – поскольку такие элементы в своих интересах могут ухудшать функционирование системы (например, искажая передаваемую информацию). Для объективного мониторинга результатов деятельности активных систем, требуемого при выработке планов и необходимых управляющих воздействий, разработаны механизмы многокритериального *комплексного оценивания* (см. разд. 6.1 в главе 6). Этот способ концентрирования информации в иерархических ОС по своей функции близок к процедурам обучения сверточных ИНС (рис. 11.7).

Формализм теории игр позволяет анализировать и прогнозировать действия интеллектуальных агентов, а также предсказывать их результаты (равновесия) – однако множество возможных действий фиксировано в условиях задачи. В теоретико-игровом описании ОС, как и в формальных алгоритмах выработки мнения в группе, за пределами моделей остаются эмерджентные события, или коренные изменения стратегий – такие, как решение о банкротстве или выработка антикризисной программы. Эмпирически хорошо известное генерирование нового знания системой взаимосвязанных индивидуумов разительно отличается от моделей консенсуса как выбора наилучшей индивидуальной программы действий либо взвешенного среднего из нескольких наперед заданных программ.

*Приведенную в знаменитой книге Сирилла Паркинсона[19] иллюстрацию «алогичности бюрократии» многократным ростом численности персонала Министерства заморских территорий Великобритании в период распада колониальной империи приходится признать хлесткой, но необоснованной. Организационная система колоний, как коллективный субъект, в это время боролась за свое выживание, решая все более многочисленные проблемы. Тем не менее, в цитируемой книге имеется много интересных содержательных наблюдений за деятельностью систем и организаций.

Настроения и моральный дух в реальных коллективах и группах в некоторых моделях учитываются введением стилизованных «гуманитарных» переменных: уровня доверия, взаимопомощи и т.д.[21]. Косвенно отражая наличие РИ в ОС, этот подход также не воспроизводит механизмы его функционирования, поскольку результаты коллективной обработки информации оказываются в нем заранее предписанными. Аналогии с этой ситуацией можно найти в исследованиях причин солидарного поведения в мультиагентных системах из биологических, т.е. изначально эгоистичных особей, которые были рассмотрены в разд. 7.6.3 главы 7. Теоретико-игровые модели подтверждают преимущества сообществ с агентами-альтруистами (равновесная доля которых зависит от внешних условий[22]), но механизм возникновения таких агентов ими не воспроизводится: альтруизм приходится постулировать.

В то же время возникновение альтруизма непосредственно следует из наличия РИ у биологических сообществ с объективной целью выживания (см. предыдущую главу). Вместе с изменчивостью особей и закреплением качеств, полезных для вида, по генетическому механизму (а в человеческих сообществах – по механизму обучения) это обстоятельство уже на качественном уровне снимает проблему, по-видимому не имеющую решения для системы «атомизированных» агентов. В рамках теории игр появление альтруистов возможно в многократно повторяющихся играх с редактированием матрицы платежей, что принципиально изменяет исходную «антагонистическую» модель.

Так, в многочисленных вариантах эволюционной игры на основе Дилеммы бандита (разд. 7.2.1 в гл. 7) была математически доказана эволюционная устойчивость доминирующей стратегии «предавать» (возможность условного сотрудничества *око за око* показана лишь эмпирически, см. разд. 7.6.3 той же главы). Однако в смешанной популяции «предающих» и «солидарных» агентов итерационные изменения матрицы платежей*

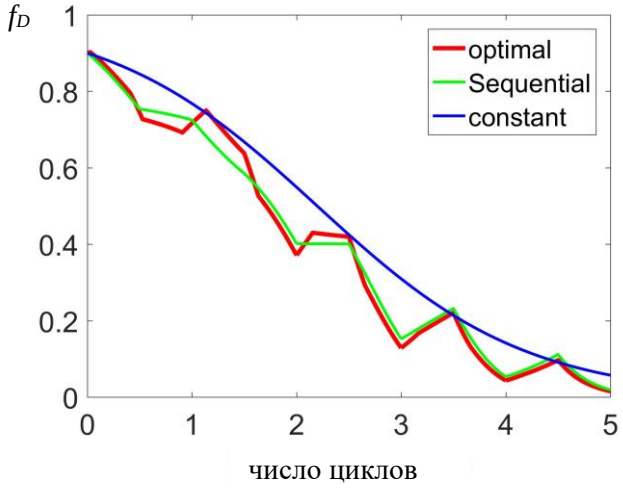


Рисунок 11.18. Падение доли «предателей» f_D в последовательных циклах эволюционной дилеммы заключенного при разных формах корректирующей матрицы управления (P.K. Newton, Y. Ma, Phys. Rev. E 103, 2021, 012304)

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -u_2(t) \\ u_1(t) & 0 \end{bmatrix}$$

* В рамках *квантовых игр* (гл. 8, разд. 8.7) разрешены еще более кардинальные изменения платежных матриц: введение в них комплекснозначных элементов.

(где *управляющие элементы* u_1 и u_2 в корректирующей матрице A_1 задают разные виды штрафов за предательство) позволяет снизить долю предающих агентов практически до нуля (рис. 11.18). На этом пути можно надеяться построить теорию коллективного интеллекта ОС, которая, аналогично моделям индивидуального интеллекта, должна воспроизводить такие эмерджентные свойства РИ, как обучаемость и создание новой информации.

Коллективный интеллект «макроскопических» систем

К макроскопическим системам в физике относят совокупности взаимодействующих частиц, число которых $N \sim 10^{20}$–10^{24} может быть лишь на несколько порядков меньше числа Авогадро $6.02 \cdot 10^{23}$. Броуновские частицы, содержащие 10^{12}-10^{15} атомно-молекулярных единиц, уже относятся к *мезоскопическим* системам (см. гл. 4). В этом (строгом) смысле все социальные системы – микро- либо мезоскопические, чем хорошо объясняются масштабные флуктуации их параметров. Тем не менее, в человеческом обществе к «макроскопическим», или *большим*, относят системы, содержащие от десятков тысяч и более индивидуальных агентов. Такие системы – страны, народы, отрасли экономики, армии – имеют сложную плохо упорядоченную структуру и не вполне изученный механизм функционирования с сильным влиянием случайных факторов.

Динамику больших социальных систем до сих пор по преимуществу анализируют в гуманитарных науках. Предельным по масштабу представителем макроскопического РИ можно считать гипотетический «всемирный интеллект» (Global Brain) пользователей компьютеров, объединенных в Интернет[23]. Декларируемые аналогии этой динамической сети с нейронными сетями мозга выглядят сомнительно с точки зрения связи функций со структурой – для сети Интернет скорее хаотической – и вряд ли указывают на ее когнитивные возможности. Координация составляющих элементов и рождение нового знания в макроскопических подсистемах современного мира (транспортной, научной, коммерческой), также на описательном уровне, обсуждаются в книге Дж. Шуровьески (см.[8] в предыдущей главе).

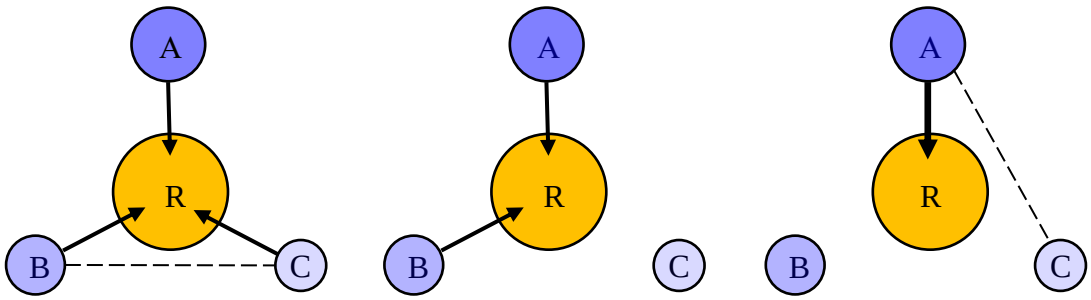
Способность больших систем к обработке информации и действиям на ее основе с общей точки зрения не вызывает сомнений, однако для РИ таких систем в литературе имеется лишь качественное описание. Можно выделить такие его характерные черты:

1. Неупорядоченные взаимодействия коллективных акторов, среди которых преобладают конкурентные (экономика, научная и техническая среда, внутренняя политика) и антагонистические отношения (внешняя политика, войны);
2. Отсутствие сильных свидетельств персонального управления – в частности, этических норм;
3. Стремление систем к равновесию;
4. Биоподобные жизненные циклы (см.[19]).

Рассмотренные во 2-й части книги действия экономических и политических агентов можно рассматривать как проявления и, одновременно, составные части коллективного интеллекта больших систем. «Бесчеловечность» этих процессов – не просто нравственная оценка, преобладающая в художественных произведениях. Как отмечал еще Томас Гоббс в XVII веке, она выявляет существование коллективного разума, который не руководствуется человеческими представлениями о добре и зле.

Персонификация событий и явлений истории, в которых взаимодействуют и сталкиваются коллективные интеллекты («Петр I победил Карла XII в Северной войне») дают им не просто упрощенную, а и ошибочную трактовку. Отсутствие этических норм у крупномасштабного коллективного РИ вызвано как численностью его элементов, на фоне которой одна человеческая жизнь не имеет заметного значения, так и длительным, в масштабе столетий, временем существования. Последним обстоятельством объясняется парадоксально низкая эффективность «большого» интеллекта в решении сиюминутных задач, многократно отмеченная литераторами и историками: РИ больших систем решает проблемы в другом масштабе времени.

Три почти равных актора A, B и C, ранжированные по убыванию их возможностей, установили свободный доступ к ресурсу R, что соответствовало равновесию Нэша в их кооперативной игре (см. гл. 7). Актор A по своим возможностям превосходил как B, так и C, но B и C заключили союз – поэтому конфликты A с ними на почве доступа к ресурсу ограничивались ритуальными демонстрациями. Однажды, по невыясненным причинам, B ограничил доступ своего союзника C к ресурсу R. В ближайшем ритуальном конфликте C поддержал актора A, и конфликт перестал быть ритуальным: актору B пришлось срочно ретироваться. Однако C совсем не желал стать бесправным сателлитом A: он лишь продемонстрировал своему ненадежному партнеру B, что обладает «золотой акцией». B дальнейшем B и C успешно дружили против A и, несмотря на его явное недовольство, продолжали наравне с A пользоваться ресурсом R (рис. 11.19).*



(а) (б) (в)

Рисунок 11.19. Устойчивая (а) и неустойчивые (б, в) конфигурации «акторов» в сообществе обезьян (см. текст). Штриховые линии – коалиции

Эта история, на первый взгляд взятая из международной политики, в действительности заимствована из книги З.А. Зориной и И.И. Полетаевой «Элементарное мышление животных» (см.[1] в предыдущей главе). Актор A в ней – самец обезьян, доминирующий в стаде, B и C – субдоминанты, заключившие коалицию, а ресурс R – самки, в биологической литературе неполиткорректно называемые *гаремом*. Сложное и во многом интеллектуальное поведение приматов внутри их социальных систем обсуждалось выше. Приведенный нами абзац иллюстрирует другое обстоятельство: примитивность динамики в сообществах государств как больших систем, интеллект которых составлен усилиями тысяч и миллионов людей, но по своим проявлениям даже в спокойные времена мало отличается от будней обезьяньего стада.

*«Золотой акцией», или блокирующим пакетом, в экономико-политическом просторечии называется относительно небольшая доля в совместной собственности либо в политической структуре, которая позволяет ее обладателю создавать и разрушать доминирующие коалиции (см. раздел 9.4.1 в главе 9).

Одной из неожиданных особенностей коллективного интеллекта больших систем, состоящих из людей, является нередко низкий, по сравнению с индивидуальными человеческими нормами, уровень обработки информации и решения конкретных задач. Как и отсутствие этики, это объясняется неличностным механизмом «кооперативного мышления» и слабо упорядоченной структурой межагентных взаимодействий. На аналогиях действий политических субъектов с поведением животных основана большая область *биополитологии*[24]. Параллели действий животных и коллективного поведения людей также рассматриваются в *этологии человека*, социальной психологии[25] и *психоистории*, обсуждавшейся в разделе 9.6 главы 9.

Еще одна характерная черта крупномасштабного РИ – возможность ложного и нередко патологического массового целеполагания (чему история предоставляет много примеров), порождаемая сильной зависимостью коллективной динамики от состояния индивидуумов. Вследствие этого можно говорить не только о коллективном интеллекте, но и о *коллективной психике* больших систем. Последний термин употребляется в социальной психологии и лежит в основе психоистории. Комбинация коллективного интеллекта и коллективной психики на уровне государства и составляющих его больших социальных систем обычно называется *идеологией*.

Войны как прямой диспут РИ

Миллионы людей совершали друг против друга такое бесчисленное количество злодеяний, обманов, измен, воровства, подделок и выпуска фальшивых ассигнаций, грабежей, поджогов и убийств, которого в целые века не соберет летопись всех судов мира и на которые, в этот период времени, люди, совершавшие их, не смотрели как на преступления.
Л.Н. Толстой, «Война и мир»

Отсутствие этических норм у больших социальных систем наиболее ярко проявляется в войнах. Отмена законов и правил, соблюдению которых в мирное время посвящена деятельность существенной части госаппарата, при столкновении государств, их стремление нанести максимальных ущерб противнику и прочие особенности войны не могут рассматриваться исключительно как катастрофа, временно прерывающая человеческий прогресс. С началом войны руководство государства осознанно переходит к особому режиму деятельности, все компоненты которого (вооружения, армии, военное планирование и многое другое) целенаправленно и последовательно создаются в мирное время. Это в той же степени распространяется на коллективный интеллект государства, общества и всех их подсистем. В противоположность мирному времени, главной задачей РИ на войне становится не максимально эффективное, а *быстрое* принятие и исполнение решений.

Для коллективного интеллекта государства в мирное временя характерны многоступенчатые структуры, детальный обмен информацией и коллегиальные механизмы; некоторые его аспекты были рассмотрены выше. Не только декларируемая, но и фактическая ценность человеческой жизни в мирное время довольно высока. Сложный процесс согласования и принятия решений во многом призван обеспечить безопасность и благополучие возможно большей доли населения страны. Принятие решений в структуре ОС в неопределенных и при этом не критических условиях повышает их вариативность: в данном случае действия систем могут отражать личное мнение руководителей или экспертов. Однако при чрезвычайных обстоятельствах – например, в условиях природной или техногенной катастрофы – для специальных служб характерны упрощенный механизм принятия решений «по законам военного времени», строгая иерархия руководства,

персональная ответственность исполнителей и меньший объем согласований (*приказы не обсуждаются*). Это повышает оперативность реакций общественных структур в неблагоприятной и быстро изменяющейся обстановке.

В военное время все противоборствующие стороны действуют в неблагоприятной и изменчивой внешней среде. В этих условиях, вместо оптимальности, главным требованием становится оперативность решений, а влияние индивидуумов на динамику системы сильно снижается. Совещания и выработка планов в военное время существуют, но они подчинены главному условию: функционировать быстрее, опережая противника. Поэтому войну можно рассматривать как *прямой диспут* коллективных интеллектов с характерной для РИ временной (до окончания военных действий) отменой ряда этических норм и низкой ценностью человеческих жизней. Военная обстановка включает сознательное поощрение агрессивности, свойственной людям как биологическим существам; механизм военной и политической пропаганды будет обсуждаться в следующей главе.

Противоборство участников конфликта объединяет их в единую «метасистему», в ряде случаев способную обрабатывать и использовать информацию как единое целое. На стремлении больших систем к равновесию основано использование теории игр в политологии и военных науках – в частности, интерпретация войн в рамках *теории торга* Т. Шеллинга, упомянутой в разд. 9.5 главы 9. Существование равновесных конфигураций даже при сильном антагонизме сторон иллюстрирует, например, график военных потерь СССР в Великой Отечественной войне (рис. 11.20). Если в 1942 г. весеннее наступление Красной Армии в условиях распутицы не достигло целей и сопровождалось большими потерями людей и техники (с пропорциональными потерями германской армии), то в неблагоприятные периоды весны 1943 и весны 1944 гг. стороны не вели интенсивных боевых действий (см[26]).

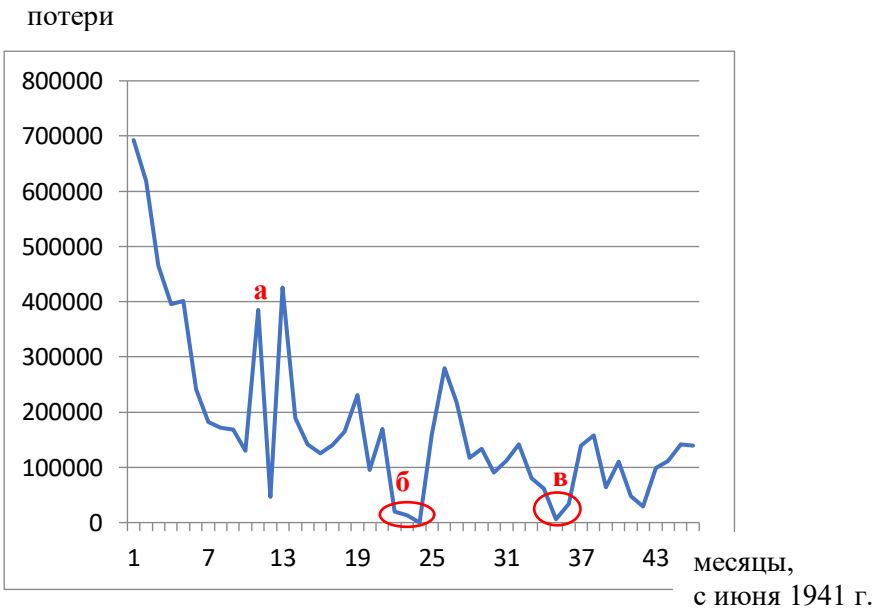


Рисунок 11.20. Военные потери СССР с июня 1941 по май 1945 г., помесячно (по[26]): (а) май 1942 г., (б), (в) – стратегические паузы в апреле-июне 1943 и мае-июне 1944 г.

Этическое осуждение войны как промышленно организованного массового убийства не отменяет необходимости воюющих сторон беречь свои ресурсы, а также стремления втянутых в войну людей выжить в опасных условиях. Благодаря наложению этих тенденций, в динамике исторических событий, по-видимому, проявляется *принцип наименьших потерь*, который можно считать некоторым аналогом принципа наименьшего действия в механике (разд. 2.2.1 в главе 2). Такие проявления очевидны (но редко обсуждаются с этой точки зрения) в военных науках, всегда нацеленных на минимизацию потерь *своих* вооруженных сил, и в политической практике, где предусмотрена возможность капитуляции при угрозе неприемлемо высокого ущерба[*].

Общее описание экономической, политической и исторической динамики позволяет предположить, что эволюция социальных систем на макроскопическом и глобальном уровне подчиняется некоторому вариационному принципу, напоминающему принцип наименьшего действия в механике и связанное с ним стремление «неживых» консервативных систем к минимуму энергии и максимуму энтропии. Эта гипотеза косвенно подтверждается универсальной идеей *равновесия* в теории игр (и, ранее, в неоклассической экономике), которая формализует конкурентные взаимодействия в человеческих сообществах. Но поскольку общественные системы диссипативны, то есть очень сложны с физической точки зрения, такие аналогии обсуждаются в основном на качественном и локальном уровне.

В приложениях точных наук к описанию общества используются несколько разновидностей вариационного принципа. Ранее в нашей книге упоминался *принцип наименьших усилий* (или *наименьших трудозатрат*)[27], сформулированный в 1949 г. Джорджем Ципфом, который объяснил на его основе распределение частотностей слов в естественном языке (разд. 9.2.3 в гл. 9). Другой формой вариационного принципа является стремление к минимуму «свободной энергии мысли» при извлечении индивидуумом информации из внешнего окружения, постулированное К. Фристоном (см. гл. 2, разд. 2.3), а также вариационные процедуры *активного вывода* (англ. active inference) и сценария действий в недавних работах с участием того же автора[**]. На основе принципа наименьших усилий было разработано реалистическое компьютерное моделирование пешеходного движения с приложениями к ИИ (см. разд. 5.4 в гл. 5). В работах В.В. Поддубного и А.А. Поликарпова минимизация обобщенного интеграла действия позволила воспроизвести динамику полисемии слов русского языка (разд. 9.2.2. и рис. 9.13 в главе 9). Моделирование движения стаи птиц и толпы пешеходов на основе максимума энтропии Шеннона (глава 5), использование максимума энтропии Реньи в тематическом анализе

---

[*] Начиная с 1990-х годов, многие политизированные публицисты возлагают полную ответственность за все жертвы гражданской войны 1918-1921 гг. в России на партию большевиков, которые, придя к власти, заключили с Германией «позорный Брестский мир» и тем самым спровоцировали хаос на территории бывшей Российской империи. Не давая нравственную оценку действиям революционных властей (всегда этически сомнительных), отметим редко обсуждаемую деталь: все прочие политические силы России 1917 года, тоже стремившиеся сместить или переформатировать Временное правительство, в согласии с требованиями союзников выступали за продолжение военных действий. В условиях распада армии и государственного управления реализация таких планов с высокой вероятностью означала бы разгром российских армий с утратой не меньших (или же бóльших) территорий и с дополнительными, по сравнению с реальным сценарием, людскими потерями, за которыми последовал бы не менее унизительный сепаратный мир с Германией и неизбежная гражданская война. Меньшее количество человеческих жертв при реальном ходе событий по сравнению с гипотетическим в этом случае представляется очень вероятным.

[**] M. Albaraccin, et al., *A variational approach to scripts*, Frontiers in Psychology, 12, 2021, art. 585493.

текстов (гл. 9, разд. 9.3.4) и некоторые другие математические модели, обсуждавшиеся в части II, также представляют собой разные версии вариационного подхода.

На уровне качественного описания социума «минимизация трудозатрат» выглядит следствием биологической и социальной природы человека. По аналогии с самосохранением биологических особей, одним из основных проявлений распределенного интеллекта у общественных животных является самосохранение сообщества (глава 10). В этом случае *принцип наименьших общественных затрат* естественно вытекает из наличия РИ у социальных систем – и, возможно, столь же универсален для них, как и вариационные принципы в «неживых» физических системах. Это наиболее наглядно проявляется в больших человеческих сообществах, где нормы индивидуальной этики действуют весьма ограниченно, и в масштабах исторического времени.

Поскольку любой биологический социум состоит из особей, которые прежде всего стараются выжить, сохранение человеческих жизней остается важным (пусть нечетким и противоречивым) условием в эволюции социальных систем. При всем обилии исторических данных по войнам и геноциду ценность жизней людей все же входит в сумму общественных затрат с существенным весом. На уровне гипотезы можно предположить, что в столкновении двух близких по силе антагонистических социальных структур *обычно* побеждает более гуманная[*].

Эволюция человечества как единой системы обсуждается в гуманитарных науках со второй половины XX века в контексте *универсальной истории* Земли, включающей геофизические, экологические, технические и социальные факторы (см. книгу А.П. Назаретяна[4] в предыдущей главе). В наших терминах этот процесс прежде всего отражает становление и развитие РИ в системах глобального размера – государствах, народах, цивилизациях – в историческом времени со свойственной ей неравномерностью: взлетами, стагнацией и кризисами. На «универсальном» уровне особенно ярко проявляется неотделимость индивидуального интеллекта человека от образовательной и культурной среды. Этот факт, тривиальный для носителей гуманитарного знания, до сих пор не вполне отражен в формальных моделях.

Несмотря на то, что РИ мировой экономико-политической системы с государствами в качестве агентов неспособен предотвращать кризисы и войны, его деятельность в мирное время является в основном созидательной. В этом смысле вспышки войн и революций с уничтожением людей, материальных ценностей и наименее жизнеспособных социальных институтов выступают в роли аналогов хаотического движения агентов в простейших системах с роевым интеллектом. «Прерывистое» улучшение условий жизни населения

[*]Таким столкновением были, например, Пунические войны III-II в.в. до н.э. между Карфагеном и древним Римом за господство в средиземноморской цивилизации. Жизнь Карфагена включала регулярные человеческие жертвоприношения – в частности, родители нередко жертвовали первого ребенка, чтобы снискать расположение богов[28]. Уже изжившие эти обычаи римляне считали своих врагов (не только карфагенян) варварами, не заслуживающими снисхождения. Морской экспедиции Эрнана Кортеса в Мезоамерике XVI века, изначально нацеленной на завоевание и ограбление, противостояло государство ацтеков, где, при всех достижениях наук и архитектуры, обильные ритуальные убийства людей сопровождались каннибализмом правящей элиты, таким образом подчеркивавшей свое родство с весьма кровожадными богами. Испанцы, находясь в несравнимом численном меньшинстве, победили ацтеков не столько огнестрельным оружием (запас привезенного пороха был ограничен), сколько европейской дипломатией: Кортес заключал союзы с народами, покоренными ацтеками[29]. Истребление и вытеснение индейцев Северной Америки, как и форсированное использование существовавшего в Африке рабовладения белыми колонизаторами, во многом мотивировались архаическими обычаями коренных жителей обоих континентов, описанными в той же книге[29]. Ретуширование исторических фактов, искажающее реальный спектр социальных структур и практик *homo sapiens*, способно привести к ошибочным действиям в нынешнем кризисном состоянии мира.

Земли, численность которого в XX веке возросла почти в четыре раза несмотря на войны и эпидемии (табл. 2.2 в главе 2), основано на достижениях техники, экономики, медицины, социальной сферы и других реализаций «всемирного» распределенного интеллекта.

На качественном уровне можно утверждать, что научно-технический и социальный прогресс во все известные периоды истории отражает эволюцию коллективного интеллекта человечества и его больших подсистем. Укрупнение таких подсистем сопровождается не только умиротворением населения (в Средние века все нынешние государства заметных размеров состояли из воюющих политий), но также укреплением и развитием коллективного интеллекта системы, что способствует ее совершенствованию. Необходимым условием «углубления» РИ человечества как единой системы является укрепление информационных, экономических и культурных взаимодействий между существующими государствами.

Однако этот медленный процесс, начатый промышленной революцией XVIII-XIX веков, особенно подвержен деструктивному влиянию хаоса в форме межгосударственного антагонизма, противостояния политических блоков, «холодных» и «горячих» войн. С начала XXI века в ряде государств мира все шире используются манипулятивные методы управления массами людей, внедряющие через прессу, телевидение и Интернет ложные образы в общественное сознание[30]. Результатом массированных информационных воздействий с начала 2010-х годов стало насильственное разрушение политических систем более чем в десяти странах с крупными человеческими жертвами и экономико-политическим регрессом (разд. 9.4.4 в гл. 9). Рост мировой нестабильности в последнее десятилетие указывает на перерастание глобальной финансово-экономической турбулентности во всесторонний кризис.

Искоренить войны и другие насильственные столкновения человеческих общностей можно только при фактическом объединении государств всей планеты – а этот неустойчивый процесс ныне снова поворачивает вспять. Среди многих исследований современного состояния мировой политической системы нельзя не упомянуть публицистическую книгу Петра Турчина (одного из лидеров современной математической истории, см. разд. 9.6.3 в главе 9) «Терминальные эпохи»[*], по очевидным причинам сфокусированную на состоянии США и адресованную прежде всего американской аудитории. В ней обсуждаются периоды экономико-политической деградации, в два последних тысячелетия угрожавшие существованию наиболее развитых государств, с особым вниманиям к таким действиям правящих классов, которые в ряде случаев позволили избежать катастрофического развития событий[31]. С той же целью в рамках банка глобальной историко-политической информации Seshat (см. гл. 9) П. Турчиным заявлено создание базы количественных данных CrisisDB о таких исторических эпохах[32]. Многочисленные попытки осмысления кризисов больших и глобальных систем в современном научном сообществе иллюстрируют важнейшую объективную цель «глобального» РИ: коллективное самосохранение человечества. Новые идеи и методы управления социумом, возникающие во времена кризисов, могут оставаться невостребованными в течение десятилетий, но в конечном счете они помогают миру выйти из хаоса.

[*] [*] Наш перевод авторского названия *End Times*

Литература к разделу 11.3

[15]Ю.Л. Словохотов, Д.А. Новиков, *Распределенный интеллект мультиагентных систем*, Проблемы управления, 2023, № 5, 3, №6, 3.

[16] А.П. Панфилова *Мозговые штурмы в коллективном принятии решений*. — СПб.: Питер, 2005.

[17] Ю.В. Сидельников, А.В. Ряпухин, *Повышение эффективности совещаний в малых группах*. ч.1: Проблемы управления, 2018, №6, 18, ч.2: там же, 2019, №1, 15.

[18] Г.С. Альтшуллер, *Найти идею. Введение в ТРИЗ – теорию решения изобретательских задач.* 4-е изд. М.: Альпина Паблишерз, 2011.

[19] С.Н. Паркинсон, Закон Паркинсона и другие памфлеты (пер. с англ.) М.: Прогресс, 1976.

[20]В.Н. Бурков, Д.А. Новиков *Теория активных систем (история развития и современное состояние)*, Проблемы управления, 2009, № 3.1, 29.

[21]А.П. Михайлов, А.П. Петров, *Математические модели систем «человек-общество»*, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022.

[22] П.Ю. Чеботарев и соавт. *О сравнительной полезности альтруизма и эгоизма при голосовании в стохастической среде*. Автоматика и телемеханика, 2018, вып. 11, 123.

[23] Э. Макафи, Э. Бриньолфсон, *Машина, платформа, толпа. Наше цифровое будущее.* –М: МИФ, 2019.

[24]А.В. Олескин, *Биополитика. Политический потенциал современной биологии: философские, политологические и практические аспекты.* – М.: Научный мир, 2007.

[25] Н.И. Семечкин, *Социальная психология* (2-е изд.). – М.: Юрайт, 2019.

[26] В.Д. Кривошеев (ред.). *Россия и СССР в войнах XX века. Потери вооруженных сил. Статистическое исследование,* – М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2001.

[27] П.П. Лисицын, Н.А. Орлова, А.М. Степанов, *Миграционное поведение: принцип снижения трудозатрат Дж. Зипфа*, Социологический журнал. 2022. **28** (3), 72.

[28] И.Ш. Шифман, *Карфаген*, СПб: Изд. СПбГУ, 2006.

[29] Л. Каневский, *Каннибализм*, М.: КРОН-ПРЕСС, 1998.

[30] С.Г. Кара-Мурза, *Манипуляция сознанием*, М.: Эксмо, 2000.

[31] P. Turchin, *End Times: elites, counter-elites, and a part of political disintegration*, Penguin, N.Y., 2023.

[32] https://seshatdatabank.info/wp-content/uploads/2020/05/CrisisDB.png

Рекомендуемая литература

1. Ф. де Валь, *Политика у шимпанзе: власть и секс у приматов,* М.: Изд. ВШЭ, 2014.
2. В.В. Цехановский (ред.), *Искусственные нейронные сети.* М.: КноРус, 2023.
3. А.Д. Гетманова, У*чебник логики со сборником задач.* 8-е изд., М.: Кнорус, 2011.
4. С.В. Попова, И.А. Ходырев, *Математическая логика: учебное пособие.* СПб: Изд. Политех. ун-та, 2010.
5. Е.В. Боровская, Н.А. Давыдова, *Основы искусственного интеллекта: учебное пособие.* М.: БИНОМ, 2010.
6. Дж. Мак Коннелл, *Основы современных алгоритмов*. М.: Техносфера, 2004.

ГЛАВА 12. СХЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНТЕЛЛЕКТА

ТАУ и динамика интеллектуального агента в физическом и информационном пространствах. Представления о состояниях агента как нечеткие образы. Цель. Рождение и уничтожение образов.

Детализация образа, численные и описательные модули. Краниометрия. Техническое зрение, цифровая обработка изображений, их численные характеристики. Психология: ассоциативная теория восприятия и гештальт. Фреймы и слоты, геоны. Слова и образы, психолингвистика.

Модульная модель восприятия. Размеры «слова» и библиотеки. Иероглифическая письменность. Распознавание образа как известной комбинации модулей, библиотека ключей. Создание новой информации как замена «плохих» модулей в образе-схеме.

Пространство представлений и семантическое пространство. Частотность понятий как веса модулей. Применимость модульной модели к коллективному интеллекту ОС. Отпечатки коллективного восприятия и их модульная структура в других видах РИ: муравьиные тропинки, режимы динамики роя. Эмоциональная окраска модулей, пропаганда. Перспективы построение «сильного» ИИ на основе модульной модели.

Последнюю главу книги можно считать приглашением к дискуссии. Во всех предыдущих главах автор стремился обсуждать твердо установленные факты, проверенные закономерности и общепринятые модели – в крайнем случае, гипотезы и воззрения с солидным авторитетом в междисциплинарной литературе. Но в области моделирования интеллекта подобному стилю, единственно возможному для учебника (пусть на нестандартную тему), начинают противоречить как неопределенность фундаментальных понятий – мы это видели в двух предыдущих главах, – так и обилие разнородных вербальных и расчетных конструкций. Некоторые из них приводят к противоположным выводам, в своем большинстве они носят качественный характер и могут быть определены в несовместимых условиях.

Подобную ситуацию приходится считать единственно возможной во всех более или менее естественных науках. В любом «горячем» научном направлении интенсивными исследованиями порождается обилие гипотез, теорий и концепций (в этой книге называемых моделями), каждая из которых объясняет ограниченный набор экспериментальных данных и игнорирует все остальные данные[*]. Конгломерат моделей, нередко разнородных и противоречивых, в некоторой связной области знаний обычно и называют теорией; хорошим примером может служить теория игр (см. главу 7). Логическая завершенность и математическая строгость характерны не для живой, а скорее для мертвой области науки, где новые экспериментальные результаты возникают очень редко.

В этой главе мы введем и постараемся обосновать формальную модель интеллектуального агента, то есть перевести словесное описание всех видов интеллекта из двух предыдущих глав в математические символы. Желательно, чтобы эти символы существовали не сами по себе в герметичной умозрительной области (в предыдущей главе приводились примеры «чистого» логического ИИ с моделью DBI, в части II – положения неоклассической экономики): они должны, пусть в принципе, открывать путь к расчетам. Мы увидим, что компоненты искомой модели по отдельности известны, а некоторые из них

[*]Включая теории сверхпроводимости, фундаментальных частиц, фазовых переходов и многие другие направления современной физики – не говоря уже о ее междисциплинарных приложениях.

успешно используются в «умных» технических приложениях. Сложив их вместе, мы получим схему, еще не готовую к практическому применению, но уже дающую единое описание индивидуального интеллекта, РИ и архитектуры гипотетического *сильного* ИИ.

12.1. Образы действительности в информационном пространстве

12.1.1. Общие положения

Работоспособная формальная модель интеллектуального агента должна воспроизводить главные качества интеллекта, перечисленные в начале 10-й главы: отражение реальности, целеполагание, обучаемость, свернутую запись информации и способность создавать («придумывать») новую информацию*. В гл. 10 также было отмечено, что некоторые эти качества проявляются уже на уровне теории автоматического управления (разд. 10.2), в которой динамика управляемой системы расщеплена на изменения вектора ее физических параметров $\mathbf{X}(t)$ (среди которых, возможно, не все поддаются измерениям) и вектора результатов измерений $\mathbf{Y}(t)$, по которым реконструируют параметры состояния. Эти реконструируемые параметры вместе с погрешностями их оценок принадлежат особому *пространству представлений* о состоянии системы (*belief space*): оно служит «отображением» физического *пространства состояний*, но не совпадает с ним.

Условия на взаимосвязь физических и регистрируемых параметров, при которых система является наблюдаемой и управляемой, то есть может переводиться вектором управляющих воздействий $\mathbf{U}(t)$ в область целевых состояний в физическом пространстве, детально рассматриваются в математической теории управления (см. книги [2, 3] в литературе к гл. 10). В контексте настоящей главы наиболее важен факт сосуществования реальной и воспринимаемой динамики управляемого объекта: эти процессы взаимозависимы, но не идентичны. Расщепление динамики системы на эволюцию в двух несовпадающих пространствах, очевидно, является фундаментальным свойством отражения реальности для автономного интеллектуального агента.

В соответствии с терминологией ТАУ мы будем разделять динамику интеллектуального агента на изменение его состояний $\mathbf{x}(t)$ в физическом *пространстве состояний* X и изменения образов этих состояний $\boldsymbol{\xi}(t)$ в информационном *пространстве представлений* Ξ. (рис. 12.1). Связь состояния $\mathbf{x}(t)$ с его образом в некоторый предыдущий момент времени $\boldsymbol{\xi}(t–1)$ задается суммой собственной динамики агента (например, включающей инерцию, детерминированные внешние силы и др. – горизонтальные стрелки на рисунке) и управляющего воздействия $\mathbf{u}[\boldsymbol{\xi}(t–1)]$, выработанного агентом на основе этого образа (наклонные стрелки). В свою очередь, образ состояния $\boldsymbol{\xi}(t)$ в момент времени t, по аналогии с рекурсивной процедурой Калмана (гл. 10, формула (10.6 б)), складывается из его образа в предыдущий момент времени $\boldsymbol{\xi}(t–1)$ и результата измерения текущего состояния

*Как отмечалось в двух предыдущих главах, разными авторами были даны разные определения интеллекта и указаны его разные, часто несовпадающие признаки. Для единообразия мы будем пользоваться нашим собственным определением «протоинтеллекта» (10.1) из гл. 10 и перечисленными там же главными характеристиками «настоящего», или *сильного* интеллекта.

y[**x**(t)] – допустим, осуществляемого мгновенно (вертикальные стрелки). Результаты измерения (или *наблюдения*) искажаются случайным *шумом* θ(t); на физическое состояние агента **x**(t) также влияют *помехи* ω(t):

(12.1)
$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{f}[\mathbf{x}(t), \xi(t-1)] + \omega(t-1)$$
$$\xi(t) = \varphi[\xi(t-1), \mathbf{x}(t)] + \theta(t)$$

(где символами f и φ условно обозначены функции связи между состояниями и их образами). На рисунке 12.1 динамика агента представлена в дискретном времени.

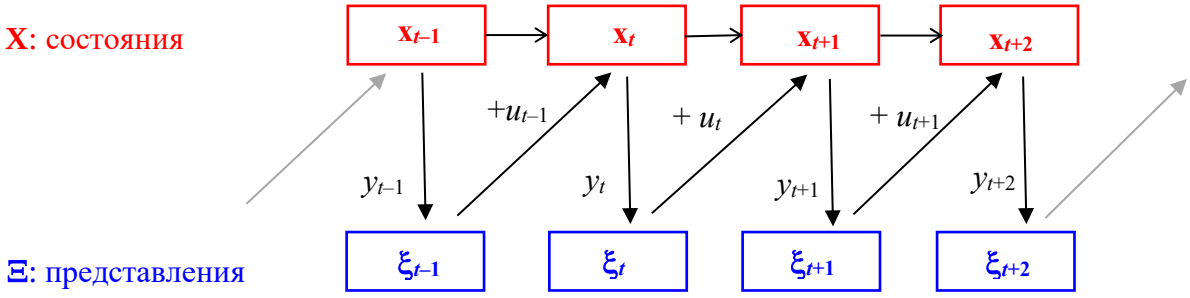


Рисунок 12.1. Динамика интеллектуального агента в физическом пространстве состояний {X(t)} и в информационном пространстве представлений {Ξ(t)}

Формулы (12.1) и рис. 12.1 характеризуют *двойственную* динамику агента, способного создавать и использовать образы окружающей действительности. Такой динамикой, в частности, снимается классический философский парадокс, сформулированный Платоном в IV в. до н.э. и в современных версиях обсуждаемый до сих пор (см. книгу[7] в предыдущей главе): если реальный мир существует в пространстве и во времени, а абстрактные математические объекты – вне времени и пространства, каким образом человек получает к ним доступ из реального мира? В данном случае связь реального мира и математических абстракций обеспечивает пространство представлений, где могут находиться как текущие образы реальности (доступной нам лишь как ее отражения в человеческом восприятии), так и абстрактные объекты, возникающие в результате многократной коллективной обработки «сырых» образов. Также понятно, что образы {ξ(t)} в информационном пространстве – нечеткие объекты: для их формирования и хранения при ограниченных вычислительных ресурсах (человека, компьютера или коллективного агента) необходима свертка континуума информации.

Динамику интеллектуального агента направляет стремление к *цели*: такому объекту $\boldsymbol{\xi}^*$ в пространстве представлений, с которым агент старается максимально сблизить образы своего состояния $\boldsymbol{\xi}(t)$. В векторном пространстве представлений, элементами которого являются некоторые наборы изменяющихся во времени воспринимаемых параметров $\{\xi^{(1)}(t), \xi^{(2)}(t), \ldots, \xi^{(n)}(t)\}$, приближению агента к цели соответствует уменьшение метрического расстояния

(12.2 а)
$$|\boldsymbol{\xi}^* - \boldsymbol{\xi}(t+1)| \le |\boldsymbol{\xi}^* - \boldsymbol{\xi}(t)|$$

(см. формулы (9.1 а) и (9.34) в главе 9). Но прямое отображение восприятия в числах осложняется тем, что даже для однотипных состояний полный набор параметров обычно

не фиксирован, а принципы его формирования неизвестны. Если же рассматривать пространство $\boldsymbol{\Xi}$ как абстрактное множество математически не определенных объектов $\{\xi(t)\}$ с заданными на нем отношениями предпочтения $\succ$ (лучше), $\prec$ (хуже) и $\approx$ (безразлично), приближению к цели отвечает соотношение

(12.2 б) $$\boldsymbol{\xi}^* \cap \boldsymbol{\xi}(t+1) \succ \boldsymbol{\xi}^* \cap \boldsymbol{\xi}(t),$$

где символам t и $t+1$ снова соответствуют последовательным моментам времени. (Пересечение образа состояния с образом цели с течением времени «улучшается»).

Двойственная динамика агента в физическом и информационном пространствах на формальном уровне позволяет воспроизвести такие признаки интеллекта, как отражение действительности, свертывание информации и целеполагание – или, по крайней мере, им не противоречит. Из собственного опыта мы знаем, что образы действительности могут различаться по степени адекватности вызвавшим их воздействиям, а также способны модифицироваться, рождаться и «уничтожаться», т.е. исчезать. (Хороший пример – геоцентрическая система небесной механики). Последним обстоятельством объясняется интерес междисциплинарной физики к квантовому и релятивистскому формализму, неоднократно упомянутый в части II (см. разделы 5.4 в гл. 5, 6.3.2 в гл. 6 и 8.7 в гл. 8). Действительно, во всей теоретической физике строгий формальный аппарат для описания процессов рождения и уничтожения объектов материального мира (элементарных частиц) имеет только квантовая теория поля: весьма сложная и глубоко математизированная дисциплина, по объективным причинам нами не затронутая.

12.1.2. Детализация образов реальности: модули

Описание процессов в пространстве представлений следует начинать с содержательной модели составляющих его образов. В двух предыдущих главах упоминались некоторые виды свертывания внешней информации, создаваемые искусственным (тензоры выходных сигналов в ИНС, решетки формальных понятий в АФП, гл. 11) либо распределенным интеллектом (муравьиные тропинки в гл. 10, комплексные оценки ОС в гл. 11 и др.); в самых общих терминах их можно назвать образами. Но пригодной для расчетов общепринятой модели образа действительности в компьютерных науках и ИИ, по-видимому, еще не существует.

В области психологии и когнитивистики, наоборот, имеются многочисленные модели отражения действительности, а *образ* является фундаментальным понятием – и эти качественные модели не предполагают расчетов. В настоящем разделе мы перечислим некоторые существующие подходы к отображению реальности как в технических, так и в гуманитарных науках. Их обобщение позволяет предположить, что образы, как элементы информационного пространства, должны иметь *модульную* структуру.

Краниометрическое отступление: как отличить собаку от кошки без помощи ИНС

Дьявол кроется в деталях
народная теорема

Одним из широко известных достижений в области «компьютерного зрения» является распознавание изображений с использованием ИНС (см. раздел 11.2.1 в предыдущей главе). Такие системы, в частности, способны отличать собак от кошек, определять пол и, с меньшим успехом, возраст человека по фотографии[1,2]. Обучение ИНС проводится на выборках, содержащих сотни и тысячи изображений, и включают ряд эвристик – таких, как расчеты геометрических параметров для характеристических областей лица, установленных разработчиками алгоритма без участия ИИ. Таким образом, граница между ИНС как «интеллектуальным черным ящиком» и системами *технического зрения*, которые мы начинаем обсуждать, оказывается размытой.

Вместе с тем, изображения кошек и собак различаются по соотношениям *краниометрических* характеристик (в отечественной литературе чаще называемых *краниологическими*), которые отражают форму черепа людей и животных[3] (рис. 12.2). Такие параметры, как *цефалический индекс* (англ. *cephalic index*: отношение ширины черепа к его длине), соотношения размеров лицевой части и мозговой коробки и др. обнаруживают значимые систематические различия у собак и кошек (табл. 12.1). Оценки этих метрических отношений по оцифрованному изображению головы животного вместе с интервалами погрешностей позволяют различать кошек и собак простейшими алгоритмами даже с учетом большой вариативности размеров у разных пород.

Таблица 12.1

Цефалические индексы $C_i = \frac{W}{L} \times 100$ (%) собак и кошек:
D – долихоцефальные, M – мезоцефальные, B – брахицефальные породы

собаки			кошки	ссылка
D	M	B		
43.9±5.1	67.3±1.8	89.7±6.4		[1]
46.4±6.5	59.8±6.9	88.3±15.1		[2]
			65±4	[3]
			61.5±2.7*, 85.2±13.9**	[4]
			72±6*** 93±15**	[5]

* короткошерстная домашняя кошка, ** брахицефальная персидская кошка, *** другие породы

[1] L.M. Carreira, A. Ferreira, J. Anim. Vet. Adv., 2015, 14(4), 91
[2] H.R. Stone, et al., PLoS ONE, 2016, **11**(2): e0149403, Supporting information (выборочно).
[3] M. Stacharski, et al., Acta Sci. Pol., Zootechnica 2010, **9**(3), 65.
[4] J. Sieslack, et al., PLoS ONE, 2021, **16**(7), e0254420.
[5] X. Huizing, A. Sparkes, R. Dennis, J. Feline Med. Surgery, 2017, **19**(10), 1065.

(а) (б)

Рисунок 12.2. Некоторые краниометрические характеристики животных: (а) череп собаки, (б) череп кошки (см. табл. 12.1 и далее рис. 12.3)

Породы собак сильно различаются по значениям цефалического индекса $C_i = (D/L)\times 100$, подразделяясь на *долихоцефалов* («длинноголовых» – например, колли или борзая), *мезоцефалов* (или *мезатицефалов*: ротвейлер, лабрадор и др.) и *брахицефалов* («короткоголовых»: боксер, мопс). Внутри этих классов имеются характеристические интервалы индексов для отдельных пород (см. ссылку [2] к табл. 12.1). Черепные индексы домашних кошек, за исключением некоторых брахицефальных персидских (англ. peke-face), находятся в более узком интервале[*]. Величины черепных индексов, а также их совместные 2D-распределения (англ. scatterplots) и корреляции, устанавливаемые в современной ветеринарии, открывают возможность определения вида и породы животного по метрическим характеристикам изображения без привлечения ИИ (рис. 12.3).

Ввиду объективного существования систематических различий изображений, ИНС *тоже* могут идентифицировать кошек и собак, определять пол людей по параметрам характеристических областей лица и выполнять многие другие практически важные задачи. Однако в данном случае компьютер не имитирует интеллектуальную деятельность человека, а лишь используется в качестве мощного вычислительного средства для построения нелинейных многомерных корреляций. В частности, эмпирические критерии позволяют с помощью ИНС установить *породы* собак и кошек по видео-данным[**]. Алгоритмы классификации, позволяющие отсортировать изображения, в таких работах обычно не разглашаются.

Хорошей иллюстрацией возможностей «параметрического» распознавания изображений может служить работа, посвященная определению пола мушки дрозофилы по морфологии ее брюшка[4]. В ней по обучающей выборке из фотографий 50 самцов и 50 самок была достигнута эффективность идентификации 98% (аналогичная достижениям ИНС по определению пола людей[1]) с временем обработки одного изображения 0.4 с на настольном

[*]На основе малой вариативности краниометрических показателей и ряда поведенческих особенностей домашней кошки итальянские биологи предложили считать ее не одомашненным, а *прирученным* видом (A. Coli, et al, Natura Rerum 2015-2016, **4**, 65).

[**]O.M. Parkhi, et al., *Cats and Dogs*, Proc. IEEE Conf. on Computer Vision & Pattern Recognition, 2012, https://ieeexplore.ieee.org/document/6248092.

компьютере. «Автоматическое» определение пола животных по соотношению геометрических параметров изображений – одна из успешно решаемых практических задач в современных биологических и ветеринарных дисциплинах.

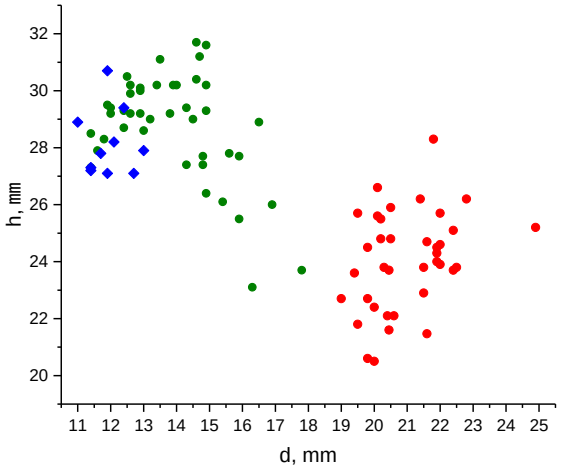


Рисунок 12.3. Распределения межглазничного расстояния d и высоты черепа h у кошек (см. рис. 12.2 б): синие ромбы – домашние короткошерстные, зеленые точки – персидские классические (doll-face), красные точки – персидские брахицефальные (peke-face) (M.J. Schmidt, et al., J. Vet. Intern. Med., 2017, 31, 1487, Supporting information, Table S1)

Народной теоремой (англ. *folk theorem*) в прикладной математике называется общепризнанное – хотя, возможно, еще не доказанное – утверждение, не имеющее твердо установленных авторов. В области ИИ таким утверждением можно считать тезис о преимущественно *комбинированном* характере «компьютерного зрения», где возможности ИНС сочетаются с многочисленными эвристиками. Не подрывая веру в могущество информационных технологий, данный тезис существенно уточняет определение ИИ: подобно индивидуальному интеллекту человека, «компьютерный интеллект» неразрывно связан с коллективным интеллектом человеческих сообществ – в частности, с эмпирическими достижениями человеческого ума. Кроме того, идентификация изображений по их ключевым параметрам указывает путь к построению образа физического объекта как конечного набора некоторых стандартных элементов, в простейшем случае чисел. Наибольших успехов на этом пути, по самым практическим мотивам, достигли промышленные системы технического зрения.

Цифровая обработка изображений

Массовым и быстро развивающимся прикладным направлением информационных технологий, примыкающим к искусственному интеллекту, является цифровая обработка изображений. На распознавании объектов по их двумерным (с камеры) и трехмерным (восстанавливаемым с двух камер под разными углами съемки) «образам» основано *техническое зрение* промышленных роботов, способных различать подлежащие обработке детали с произвольной ориентацией в поле изображений камеры. Изображения объектов (в этой области называемое *сценой*, см. также разд. 10.2.2 в гл. 10) далее переводятся в цифровую форму, позволяющую их идентифицировать. Методы обработки изображений, включая фильтрацию шумов, кодировку, сегментацию и другие стандартные приемы

вместе с кратким доступным описанием их математических инструментов (векторы и матрицы, преобразование Фурье, ИНС, нечеткие множества) подробно рассмотрены в наиболее популярном современном учебнике из этой области ([1] в списке рекомендуемой литературы). Благодаря широкому внедрению ИНС, системы компьютерного и технического зрения в настоящее время сближаются.

Большинство систем технического зрения основано на идентификации объекта по набору численных характеристик его изображения (*дескрипторов*) и включают стадию *обучения по образцам*. Изображение объекта переводится в упорядоченный набор дескрипторов (например, вектор количественных признаков) и сопоставляется с аналогичными наборами для эталонных образцов. Совокупность образов, обладающих некоторым общим свойством, называется *классом*. Автоматическое распознавание образов – это отнесение изображения объекта к определенному классу.

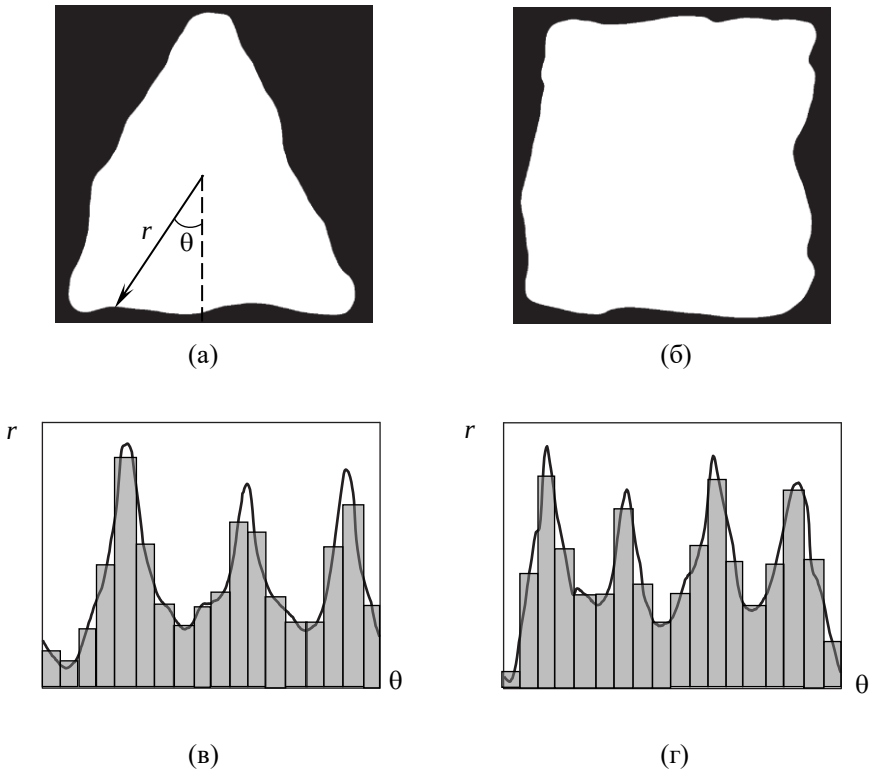


Рисунок 12.4 (а, б) Области на плоскости и (в, г) их сигнатуры $r(\theta)$ с шагом 1° (сплошная линия) и 20° (гистограммы) (см. [1], рис. 11.11)

Главными требованиями к системам технического зрения являются надежность распознавания при экономном использовании вычислительных ресурсов. (Сопоставление изображений объекта и образца при их сравнении «по пикселям», очевидно, не экономно). В изображениях плоской фигуры важнейшим шагом является выделение границы и ее численное представление в виде функции – например, *сигнатуры* $r(\theta)$ в полярных координатах (Рис. 12.4 а). Сопоставление сигнатур, в том числе огрубленных до гистограмм с шагом 10-20°, на рис. 12.4 в, г позволяет отличить треугольную фигуру от четырехугольной. Более тонкие способы включают, например, представление сигнатуры последовательностью комплексных чисел и преобразование Фурье полученной

комплексной функции с последующим сопоставлением фурье-образов объекта и эталонных объектов (см. [1] в списке литературы).

Критерием различия образов объекта и эталона обычно служит сумма квадратов отклонений значений численных параметров изображения

$$d = \sum_{i=1}^{n} (X_i^{(\text{о})} - X_i^{(\text{э})})^2,$$

где $\{X_i^{(\text{э})}\}$ – параметры эталона, n – число дескрипторов при переводе изображений в векторную форму или же общее число «клеточек», на которые разбиваются сравниваемые образы – естественно, для всех них одинаковое. Классификации объекта соответствует выбор эталона с минимальной суммой отклонений

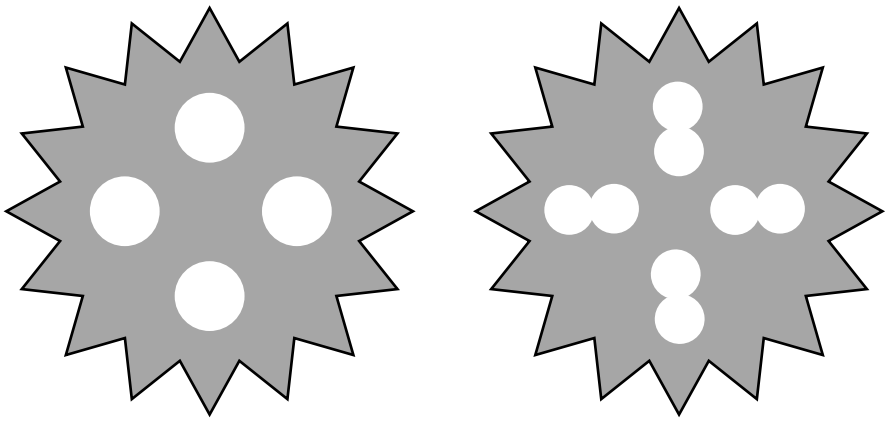
$$d(\text{о}, m^*) = \min_{m=1,2,\ldots,M} \{ d(\text{о}, m) \}$$

(где M – общее число эталонов, m^* - номер лучшего из них), см.[5]

Форму объекта также воспроизводит набор моментов распределения $\{M_k\}$ его плотности (гл. 8, разд. 8.2.3). В простейшем случае плотность $\rho(\mathbf{r})$ одинакова во всех точках 2D- или 3D-изображения

$$M_k = \int_\Omega r^k \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = K \int_\Omega r^k d\mathbf{r}$$

(где $K = \text{const}$). Интегрирование, т.е. численное суммирование по заданной сетке, проводится по всем элементам области Ω, в которой находится фигура, с $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$.



(а) (б)

Рисунок 12.5. Фигуры (а) и (б) с одинаковой площадью вырезанных отверстий трудно различить по наборам моментов $\{M_k\}$, хотя визуально они разные

При $k \to \infty$ набор моментов распределения дает точную числовую характеристику фигуры, однако большие наборы $\{M_k\}$ усложняют процедуру идентификации. Затруднения также возникают для объектов сложной формы, у которых моменты одинаковых порядков почти совпадают, хотя визуально они легко различаются (рис. 12.5). Приходится согласиться, что зрительное восприятие человека по некоторым признакам принципиально отличается от систем технического зрения.

Экономное представление формы 2D и 3D-фигур дают, соответственно, *квадратомические* и *октотомические деревья*. При квадратомическом разбиении прямоугольная область, занятая плоской фигурой, разбивается на квадранты. Во всех квадрантах, содержащих границу фигуры, разбиение продолжается (рис. 12.6 а). Элементарным областям (квадратам или прямоугольникам), целиком лежащим внутри фигуры, приписывается признак 1, областям вне фигуры – признак 0 (рис. 12.6 б, темные и незакрашенные области). Представлению фигуры на рис. 12.6 б соответствует *квадро-дерево* (англ. *quadtree*): древовидный граф, в котором разветвляющиеся («серые») вершины соответствуют дальнейшему разбиению областей, а концевые вершины-«листья» (см. гл. 6) – областям внутри и вне фигуры (рис. 12.6 в).

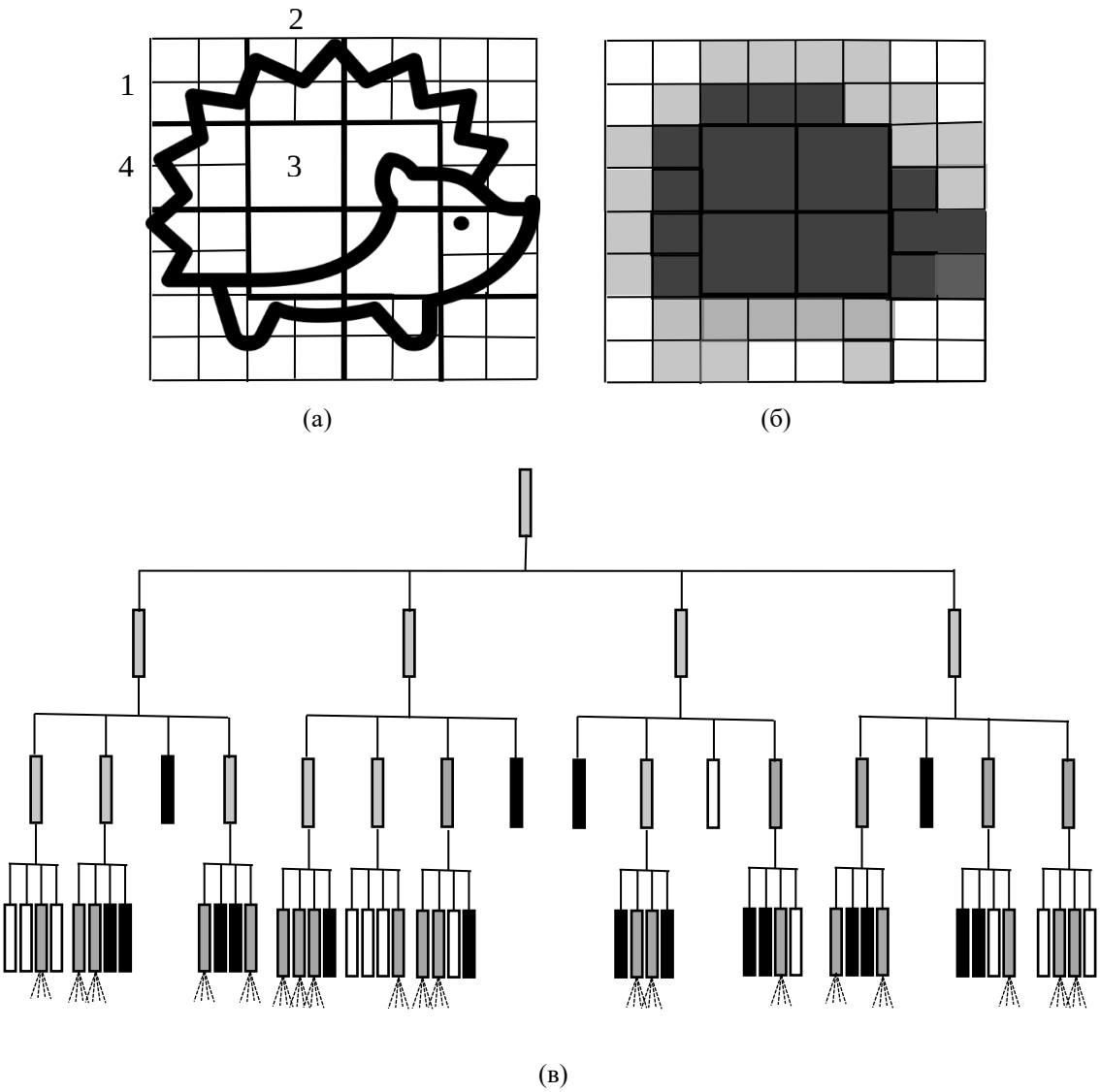
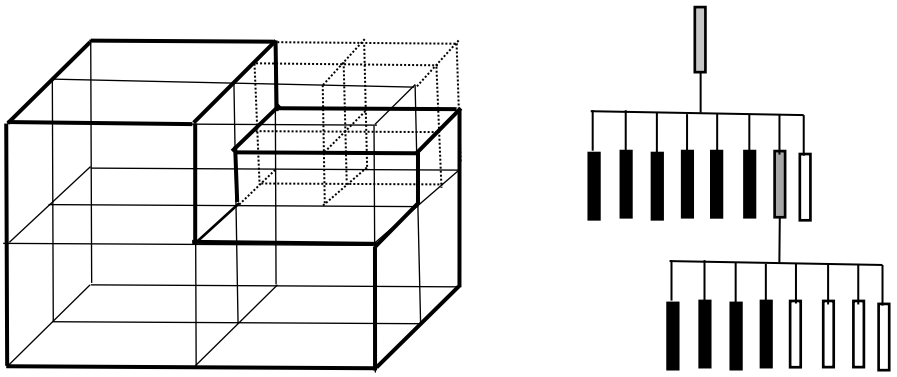


Рисунок 12.6. Разложение контура плоской фигуры (а, б) в квадро-дерево (в) до 3-го уровня разбиения

Квадро-деревья отражают форму плоских фигур и обеспечивают их автоматическое сравнение (см. [1]). Вместе с другими методами цифровой обработки изображений они широко используются в картографии[7] и в построении географических интегрированных систем[8] (ГИС, разд. 8.5 в главе 8). Трехмерные фигуры по аналогичной схеме разбиваются на октанты, расположение который отражает *окто-дерево* (англ. *octree*, рис. 12.7).

Представление фигур графами – один из основных методов цифровой обработки изображений, позволяющий построить образ объекта с любой заданной точностью.



(а) (б)

Рисунок 12.7. (а) Разбиение трехмерного тела простой формы на октанты, (б) соответствующее ему окто-дерево

Разные методы компьютерной обработки изображений объединяет общий принцип: свертывание континуума информации (форма, яркость, контуры, текстура, цвет и т.д.) в дискретный, предпочтительно небольшой набор чисел. Другим общим принципом является настройка классификации изображений по образцам-эталонам: аналог обучения на уровне, весьма далеком от «сильного» интеллекта. В экономных и эффективных методах классификации объект сопоставляется с образцами после перевода в символьный вид – то есть сравниваются компоненты их «свернутых» образов. В последние десятилетия подобный подход начинает распространяться и на формальное описание образов в человеческом сознании. При этом остается невыясненным, почему человек распознает сложные образы с эффективностью, недостижимой для существующих видов ИИ (см., например, рис. 12.5), несмотря на ограниченность вычислительных возможностей мозга по сравнению с современными компьютерами.

Теории восприятия в психологии

До начала XX века в психологической науке структурными единицами образа реальности в сознании людей считались элементарные ощущения. Критику такой «атомистической» теории представили основатели *гештальт-психологии* в Германии (М. Вертмейер, К. Кофка, В. Кёлер), в 1930-е годы эмигрировавшие в США. В рамках этого направления воспринимаемый образ объекта (в общем случае – любого внешнего воздействия) рассматривался как возникшее в сознании единое целое (нем. *Gestalt*: образ, форма, фигура), не сводимое к простой сумме ощущений – подобно тому, как слово не сводится к комбинации букв ([2] в списке литературы). На основании экспериментальных исследований восприятия внешних стимулов человеком и животными (Вольфганг Кёлер был одним из первых исследователей элементарного мышления животных, см. раздел 11.1.1 в предыдущей главе) гештальт-психологи понимали образы действительности как ее «отпечатки» в коре головного мозга, *изоморфные* (т.е. соответствующие) внешним физическим воздействиям.

Распознавание целостных образов в гештальт-психологии объяснялось на вербальном уровне близостью воспринимаемого отпечатка к образу, хранящемуся в памяти. На примерах двойственного восприятия и оптических иллюзий, в частности, была сформулирована задача разделения фигуры и фона (рис. 8.66 а в гл. 8) – ныне одна из необходимых составляющих технического зрения. Курт Левин (1890-1947), развивавший данное направление и разделивший судьбу поколения немецких ученых после прихода нацистов к власти, в 1940-е годы сформулировал в США теорию *психологического поля*: ее «оцифрованная» версия используется в компьютерном моделировании пешеходных потоков (см. разделы 1.1.5 в гл. 1 и 5.4 в гл.5).

Представление каждого внешнего воздействия, в психологии называемого стимулом, индивидуальным целостным образом с вычислительной точки зрения делает их идентификацию невозможной, возвращая к необходимости обрабатывать континуум воспринимаемых параметров ограниченными техническими средствами – в частности, человеческим мозгом. Однако понятие гештальта, далее разлагаемого в сознании на составные элементы, внесло в когнитивные науки идею отображения объектов внешнего мира компактными «иероглифами», что допускает их экономное сравнение и идентификацию как целостных элементов. Ниже мы увидим, что дуализм «целого» и его составных частей, в идее гештальта несколько перекошенный в сторону «целого», присутствует во всех моделях восприятия. Идеи гештальт-психологии и других направлений психологической науки кратко рассмотрены в учебнике [2].

Принципы цифровой обработки изображений, распространенные на образы любых воспринимаемых объектов, породили в когнитивных науках *теорию фреймов*[*]. Ее автор, американский математик и когнитивист Марвин Минский (1927-2016), был одним из первых разработчиков ИНС и организатором лаборатории искусственного интеллекта в Массачусетском технологическом институте (1959 г.). *Фреймом* называется пакет информации, хранимый в памяти или создаваемый по мере надобности из содержащихся в ней компонентов. В теории фреймов ([3] в рекомендуемой литературе) стереотипный, то есть многократно встречающийся образ реального объекта (в общем случае – повторяющегося внешнего воздействия) представляется в виде определенной фиксированной комбинации узлов, называемых *слотами*. Эти узлы заполняются некоторыми «заданиями», которые отражают внешнее воздействие на индивидуума; один и тот же фрейм может соответствовать множеству однотипных воздействий[**]. Подобно когнитивной карте, комбинацию «слотов» изображают в виде графа. Действия, соответствующие «заданиям», и правила их комбинирования устанавливают программы-«демоны», тоже находящиеся в узлах фрейма (в английском IT-полужаргоне *demon* – управляющая программа или процедура).

Теория фреймов предлагает единое описание интеллекта человека и «сильного» ИИ. В ее терминах память интеллектуального агента наполняют разнообразные фреймы

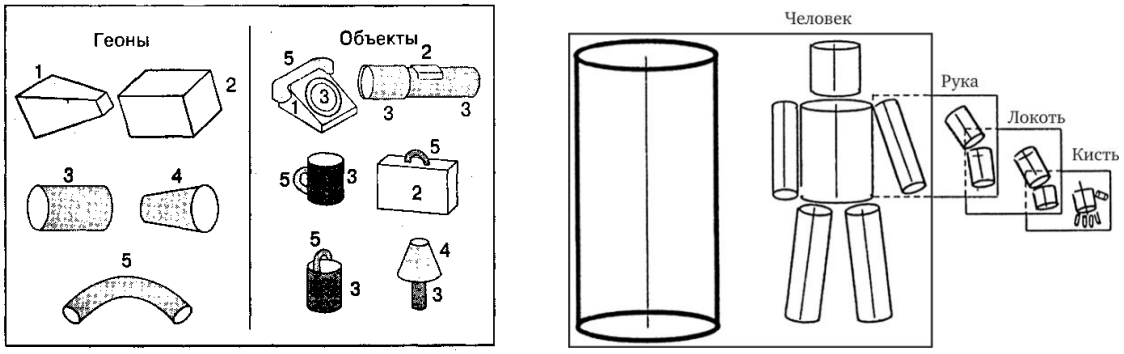
[*]В этом названии, принятом в отечественной литературе, используется калька с английского термина (*frame* – рамка, кадр, схема). Составная часть фрейма *слот* – еще одна общеупотребительная калька (англ. *slot* – щель, прорезь или отверстие, предпочтительно для размещения технических элементов, также «слот»).

[**] Подчеркнем это обстоятельство: в следующем разделе оно станет аргументом в пользу модульной модели «интеллектуального» восприятия.

визуальных образов или текстовых сообщений (*семантические фреймы*), рассуждений и действий (*фреймы-сценарии*) и другие. Распознаванию внешнего воздействия соответствует вызов из памяти подходящего фрейма. Буквальное воплощение этой идеи в вычислительном алгоритме возвращает к бесконечному множеству информационных конструкций – пусть не континуальному, а дискретному – что делает расчеты невозможными. В сторону нереализуемости эту модель смещают и очевидные соображения о детализации образов, приводящие к «вложенным» фреймам.

В то же время теория фреймов косвенно допускает «придумывание нового»: в ней постулируется, что некоторые узлы схемы не заполнены заданиями либо находящиеся в них задания «слабо удерживаются» и могут замещаться другими, которые лучше отвечают реальной ситуации (отметим физико-химическую аналогию с динамическим равновесием, см. разд. 2.4 в гл. 2). Новая комбинация заданий, даже при постулированной неизменности расположения узлов внутри фрейма, соответствует если не созданию новой, то редактированию имеющейся информации.

Современные принципы моделирования зрительного восприятия, родственные теории фреймов, были сформулированы Дэвидом Марром (1945-1980). Он высказал идею модульного (постадийного) конструирования образа по исходному воздействия света на сетчатку наблюдателя: (1) формирование первоначального *отпечатка* из областей разной яркости, (2) выделение контуров и формирование 2D-*эскиза*, (3) восприятие ориентации, глубины контуров, построение прототипа трехмерного изображения («2.5 D») и (4) построение трехмерного образа в сознании наблюдателя[9].



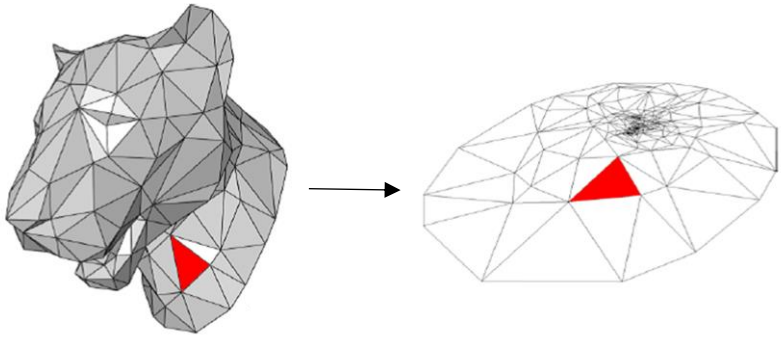
(а) (б) (в)

Рисунок 12.8. (а) Элементарные формы – «геоны» и (б) составленные из них объекты. (в) Представление объекта сложной формы комбинацией цилиндров (см.[10])

Использование компьютерной терминологии в описании зрения в 1970-е годы было новаторским подходом, способствовавшим изменению общей парадигмы восприятия в когнитивных науках. В его развитие Ирвинг Бидерман в 1987 г. предположил, что зрительные образы распознаются в сознании как комбинации небольшого числа простейших геометрических форм, идентифицируемых почти в любом ракурсе: параллелепипедов, цилиндров, клиньев, конусов[10] (рис. 12.8). Из этих простейших форм-

геонов («геометрических ионов»; в цитируемой статье было предложено 36 форм), по предположению, строится схематический образ почти любого объекта.

В реально существующих процедурах компьютерного зрения сегментированные изображения (в частности, головы человека) разбиваются на *геометрические примитивы* – в простейшем случае треугольники (рис. 12.9), далее используемые для покомпонентной идентификации с помощью ИНС (см. [1] в списке литературы). Как упоминалось выше, в идентификации людей по видеокадрам используют эмпирически выделенные «жесткие» области лица – например, глазницы и нос, устойчивые к мимике и частичному экранированию[11]. Этот эвристический прием дополнительно сближает компьютерное и техническое зрение.



(а) (б)

Рисунок 12.9. (а) Триангуляция изображения и (б) его представление в виде плоской сетки

Еще одним направлением, для которого создан ряд формальных моделей, является языковое общение как составная часть человеческого сознания. Взаимосвязь произносимых и читаемых высказываний и текстов с образами в сознании людей исследует *психолингвистика* ([4] в списке рекомендуемой литературы). Одним из ее фундаментальных положений является неразрывность индивидуального и коллективного интеллекта – в частности, на примерах освоения детьми речи и языка. Как и для других форм восприятия, в этой области установлено, что образ, порождаемый словом, высказыванием или текстом, не сводится к сумме составляющих элементов (соответственно букв, слов и предложений), имеет тесные связи с индивидуальным и коллективным опытом и может формально изображаться графом. Среди большое объема интересной и полезной информации в цитируемом учебнике* упомянем наиболее важные для следующего раздела: экспериментально доказанное «покадровое» чтение текста (англ. frame of perception) и упрощение приводимых понятий при его восприятии, а также наличие общеупотребительных понятий-стимулов, которыми вызывается наибольшее число ассоциаций у носителей языка[12].

*Помимо обширного материала по психологии и лингвистике, включая историю возникновения психолингвистики как синтетической дисциплины, в [4] обсуждаются опыты по обучению животных языку (с довольно скептической трактовкой их результатов), основы теории фреймов, экспериментальные лингвистические исследования, в том числе семантический дифференциал (см. разд. 9.2 в гл. 9), принципы работы детектора лжи и другие интересные темы.

Уже краткий перечень моделей восприятия в гуманитарных науках и версий, направленных на их формализацию в ИИ, указывает на двойственный характер образа воспринимаемого объекта (который, в свою очередь, служит частью двойственной картины эволюции интеллектуального агента в физическом и информационном пространствах), принятый в той и другой областях знания:

(1) образ дает цельное представление об объекте в физическом пространстве, и
(2) образ состоит из субъединиц, отражающих некоторые качества объекта.

В большинстве «гуманитарных» моделей отсутствуют как принципы выбора множества произвольно назначаемых характеристик (качеств), из которых складывается образ, так и ограничивающие его критерии. Это затрудняет «цифровизацию» образов для перехода к содержательным расчетам. (Отметим, что в психолингвистике множество понятий, из которых формируются высказывания, косвенно ограничено *нечетким* критерием их употребительности, см. [4]). С другой стороны, в схемах технического и компьютерного зрения разбиение изображений на элементарные области с формализацией геометрических связей между ними является стандартным эвристическим приемом. Общие принципы таких разбиений и критерии полноты множества областей (кроме важного, но неопределенного понятия *простоты* элементов) здесь тоже отсутствуют; они формулируются авторами каждой конкретной схемы.

Большое число элементарных областей, облегчающее идентификацию изображений современными компьютерными средствами (см. рис. 12.9 б), выводят эти схемы за пределы вычислительных возможностей человеческого мозга. Таким образом, «машинная» идентификация образов не является адекватной моделью действия человеческого интеллекта, который успешно распознает известный ему сложный образ за время порядка одной секунды – хотя, в общих терминах, это восприятие также основано на представлении внешнего воздействия комбинацией некоторых его характеристик.

Литература к разделу 12.1

[1] А.О. Симонов, *Применение нейросетевых технологий для определения пола и возраста человека на основе фотографии лица,* бакалаврская выпускная работа, 2017, СПбГУ.

[2] А.С. Харчевникова, А.В. Савченко, *Распознавание пола и возраста по видеоизображению лица на основе сверточных нейронных сетей*, в кн. Материалы XXIII международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии – 2017», 864.

[3] *Cephalic index,* in DetailedPedia https://detailedpedia.com/wiki-Mesocephalic

[4] Л.М. Местецкий и соавт., *Распознавание пола дрозофилы по фотоизображениям*, Экология, экономика, информатика, серия Геоинформационные технологии и космический мониторинг, 2019, №4, 80.

[5] В.Я. Колючкин, К.М. Нгуен, Т.Х. Чан, *Алгоритмы обработки информации в системах технического зрения промышленных роботов*. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 9, URL: http://engjournal.ru/catalog/pribor/optica/920.html

[6] А.В. Терехин, *Распознавание объектов методом вычисления оценок с использованием диагональных признаков формы*, Известия высших учебных заведений, Поволжский регион, Технические науки, 2014, № 1 (29), 17

[7] А.И. Дубровский, О.И. Малыгина, *Геоинформационные системы: автоматизированное картографирование*, Новосибирск, СГУГиТ, 2016.

[8] А.А. Гостева и соавт., *Геоинформационные системы и технологии*, СФУ, Ин-т космических и информационных технологий, Красноярск, 2007 (Электронный учебно-методический комплекс дисциплины).

[9] Д. Марр, *Зрение. Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов.* М.: Радио и связь, 1987.

[10] I. Bidermann, *Recognition-by-components: a theory of human image understanding,* Psych. Rev., 1987, **94** (2), 115.
[11] Б.А. Эчеагарай-Патрон и соавт., *Методы распознавания лиц с использованием трехмерных поверхностей*, Информационные процессы, 2016, **16** (2), 170.
[12] Ю.Н. Караулов и соавт., *Русский ассоциативный словарь*, в 2-х т. 2002, М.: АСТАстрель.

12.2. Модульная модель восприятия

Способность комбинировать элементы прошлого опыта ради достижения определенной цели называют рассудком и мышлением — более подходящих терминов просто не существует
Ф. де Валь, «Политика у шимпанзе»

12.2.1. Предварительные соображения

Модель восприятия внешних воздействий интеллектуальным агентом в общем виде можно построить по аналогии с имеющимися «вербальными» конструкциями, в которых образ воздействия имеет модульную структуру (модели фреймов, геонов, примитивных элементов и другие, здесь не рассмотренные). В большинстве таких конструкций набор модулей образует единое целое (*гештальт*), которое не является простой суммой его субъединиц и отражает определенную цельную «сущность». Чтобы такая модель соответствовала техническим характеристикам человеческого интеллекта, в нее следует ввести важные эмпирические ограничения:

(1) Число модулей в комбинации не должно превышать среднее число параметров, которые человек способен воспринимать *параллельно и одновременно* (6-7)[13].
(2) Общее число комбинаций-«гештальтов», по предположению хранимых в человеческой памяти, должно быть сравнимым со средним словарным запасом взрослого образованного индивидуума (несколько десятков тысяч слов).

Первое условие отражает ограниченный объем оперативной памяти человека, второе – средний объем его долговременной памяти, в которой слову соответствует некоторое понятие или образ [4]. Большой (на 1-2 порядка) разброс индивидуальных характеристик людей по второму параметру в основном компенсируется их взаимодействием с коллективным интеллектом внутри иерархической структуры социума. Но средняя емкость памяти человека – более общий параметр, чем словарный запас: неграмотные и, возможно, неразговорчивые представители архаических сообществ, по сравнению с нашими современниками, обладали гораздо более обширными знаниями и навыками, необходимыми для выживания в опасной окружающей среде. Скорость и глубина обработки информации, по которым индивидуумы тоже сильно различаются, несущественны для структуры образа; в модели их можно учесть косвенно по «эффективности» восприятия.

Оценки размера пассивного словарного запаса носителей русского языка в зависимости от возраста, выполненные по интернет-тестам в выборке из 123 тыс. респондентов[14], представлены на рис. 12.10. В цитируемой работе эти оценки названы завышенными из-за неопределенности круга участников тестирования (активные пользователи Интернет, включая зарубежных), высокой доли респондентов с высшим образованием и присутствия в тестовых выборках родственных слов (например, «город» и «городской»). Учитывая вариативность словарного запаса у носителей языка и значительно меньший объем активного словаря (*лексикона*) по отношению к пассивному, можно оценить размер

активного словаря родного языка у взрослого образованного человека в 10-20 тыс. слов[15]. На качественном уровне в нем отражается емкость долговременной памяти по числу соответствующих этим словам образов, или «гештальтов».

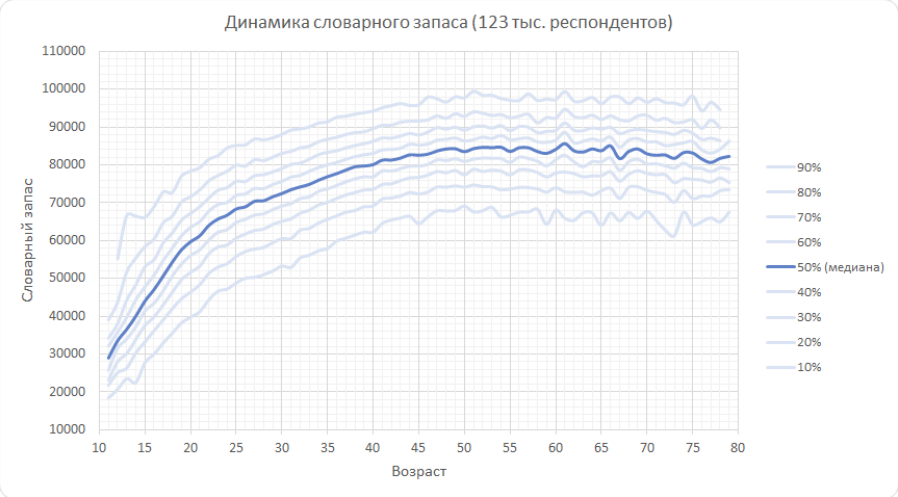


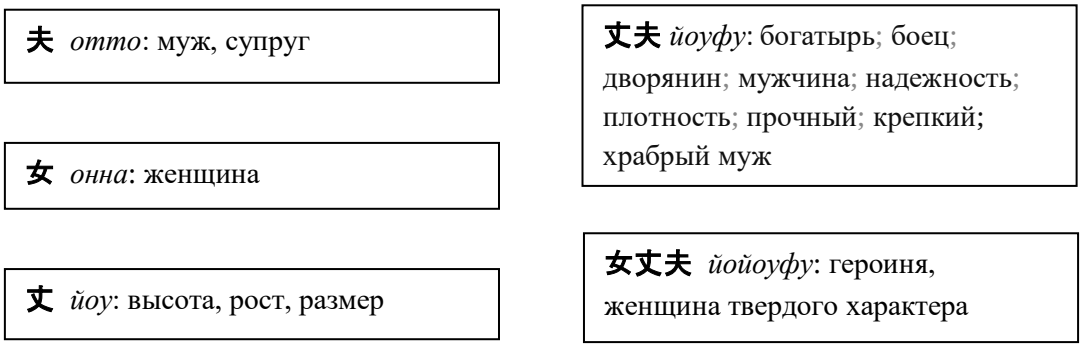
Рисунок 12.10. Размеры пассивного словарного запаса носителей русского языка по интернет-тесту в зависимости от возраста (123 тыс. респондентов)[14]. Бледные линии соответствуют децилям, синяя – медиане

Освоение любого языка в детском и школьном возрасте происходит при интенсивном взаимодействии ребенка с родителями, семьей и коллективным интеллектом социума с большим весом аудио-информации и образного восприятия [4]. Поэтому 10-20 тыс. слов можно принять как оценку средних размеров активного устного словаря в любом современном языке. В большинстве языков фонетического письма, включая русский, где произношение слова отражается последовательностью его букв, активный устный и активный письменный словари близки друг к другу по размеру.

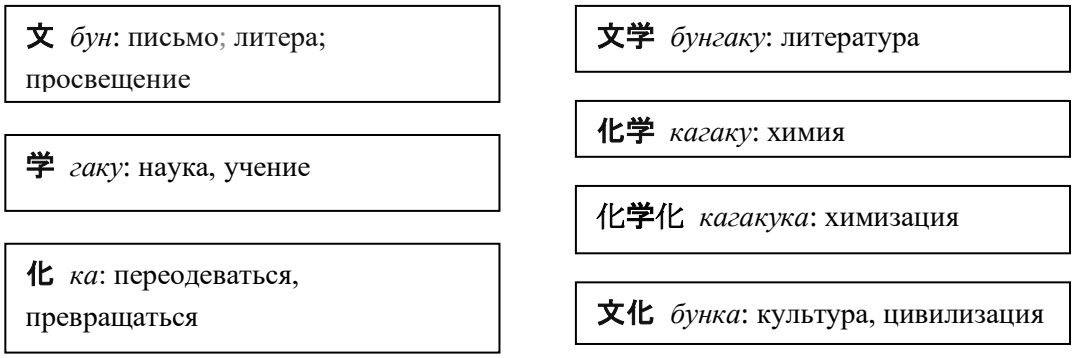
В более сложной китайской и японской иероглифический письменности слова составлены из небольшого числа (обычно от 1 до 4) графических символов (иероглифов), которыми в абстрактной форме выражаются некоторые признаки обозначаемых объектов[16]. В этих языках число используемых символов в 5-6 раз меньше количества слов в активном словарном запасе[17], поскольку запись большинства слов состоит из нескольких иероглифов. Каждый из них по отдельности имеет определенное значение (чаще несколько значений), но образ их комбинаций в слове не сводится к сумме: иероглифическим словом «кодируется» определенный объект либо группа объектов внешнего мира (рис. 12.11). Заметим, что данный принцип распространяется на составные понятия в языках фонетического письма, не сводимые к сумме своих компонентов («красные чернила», «тяжелая вода»).

Учитывая ограниченную емкость нашей оперативной памяти, восприятие интеллектуальным агентом объектов внешнего мира (внешних воздействий) можно представить комбинацией небольшого числа субъединиц-модулей, формирующих образ данного воздействия. Модули, или составные элементы образа, предположительно отражают *качества*, т.е. воспринимаемые характеристики воздействий. В этом смысле

комбинация модулей аналогична слову в иероглифической письменности, где компоненты сами имеют определенные значения, однако их сочетания порождают новую «сущность».



(а)



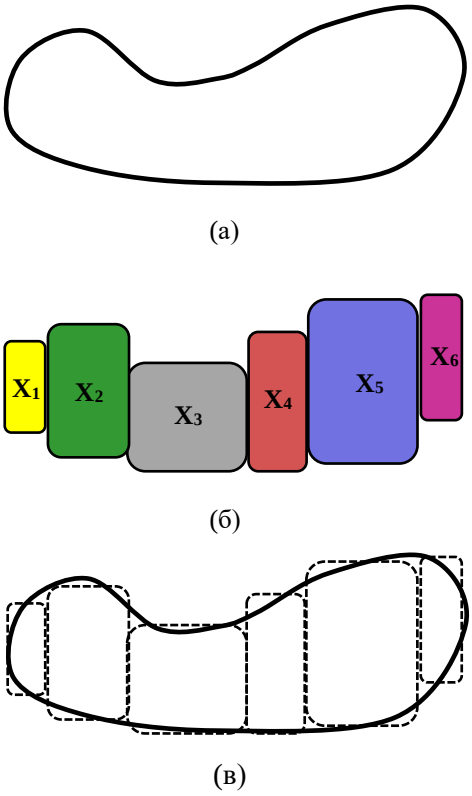
(б)

Рисунок 12.11. Примеры построения слов в иероглифической письменности (Русско-японский, японско-русский интернет-словарь Yakuru: https://yakuru.net)

12.2.2. Описание модели

Для описания объектов в информационном пространстве представлений, порождаемых явлениями внешнего мира в физическом пространстве состояний (см. выше разд. 12.1.2), нами была предложена модульная модель восприятия ([5] в списке рекомендуемой литературы). В ее рамках внешнее воздействие вызывает в сознании человека «отпечаток» (как в первой стадии формирования зрительного образа по Марру, см. выше), который далее воспринимается путем сравнения с *образами-схемами*, ранее выработанными для сходных отпечатков и вызываемыми из памяти. Эти схемы представляют собой комбинации $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ небольшого числа модулей, характеризующих некоторые качества данного воздействия. Библиотека модулей-«иероглифов» составляется в процессе обучения и хранится в памяти (рис. 12.12). «Единицами хранения» являются не отпечатки воздействий и не соответствующие им схемы: в памяти хранится библиотека модулей и содержатся «ключи»: наборы идентификаторов модулей, позволяющие вызвать ранее

построенные из них образы-схемы*. Последовательности субъединиц в комбинации (в модели фреймов или при оцифровке изображений задаваемые эмпирически, то есть произвольно) в нашей модульной модели могут соответствовать рангам используемых «качеств» в человеческом сознании (см. далее).



(а)

(б)

(в)

Рисунок 12.12. Представление интеллектуальным агентом отпечатка внешнего воздействия (сплошной контур, (а)) в виде набора модулей (б), дающих удовлетворительное соответствие отпечатку (в)

Разумной оценкой среднего числа N модулей в библиотеке (на индивидуальном уровне определяемого продолжительностью и глубиной обучения) может служить количество иероглифов, которыми оперирует грамотный носитель японского или китайского языка: до нескольких тысяч (см. выше). Оценки среднего числа модулей в образе-схеме $n = 5$ и их общего количества в памяти $N = 1000$ дают число сочетаний

$$C_{1000}^{5} = \frac{1000!}{995!\cdot 5!} = \frac{996\cdot 997\cdot 998\cdot 999\cdot 1000}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \approx \frac{9.9\cdot 10^{14}}{120} \sim 10^{13}$$

– т.е. почти десять триллионов вариантов. С помощью калькулятора можно убедиться, что при числе модулей в схеме $n = 10$ мы получим еще более невероятное количество сочетаний $C_{1000}^{10} \sim 10^{23}$, по порядку величины сопоставимое с числом Авогадро.

Итак, число возможных малоразмерных комбинаций из библиотеки в 1000 модулей практически бесконечно – во всяком случае оно несравнимо больше вычислительных

* *Нейрофизиологический механизм, обеспечивающий локализацию образов в коре головного мозга, и связь сети взаимосвязанных нейронов мозга (*коннектома*, см. разд. 6.2.2. в гл. 6) с сознанием пока неизвестны, хотя интенсивно исследуются (см. [6] в списке рекомендуемой литературы).

возможностей человеческого мозга (~10^{11} нейронов). Вместе с тем идентификатор схемы, позволяющий вызвать ее модули из памяти в заданном порядке, может весьма экономно состоять из «номеров» или иных признаков модулей в библиотеке – для чего в предельном случае достаточно одного нейрона, локализованного в коре головного мозга, на один модуль (см. [6] в списке литературы). Реальное число «ключей», как хранимых в памяти комбинаций идентификаторов модулей, можно оценить количеством слов в пассивном словарном запасе: до ста тысяч.

По аналогии со знаками иероглифической письменности, модули, составляющие схему, в процессе их приобретения (обучения) характеризуют определенные признаки внешних воздействий, но используются далее как универсальные компоненты образов-схем: комбинаций модулей, индивидуальных для каждого отпечатка. Соответствие вызванной модульной схемы отпечатку внешнего воздействия проверяется в мозге по некоторому быстрому, не вполне установленному механизму [6]. При хорошем соответствии происходит *узнавание*. Плохое соответствие вызывает неудовлетворенность (в терминах *теории решения изобретательских задач* «обостренное противоречие» (см. книгу[18] в предыдущей главе). Стремление преодолеть неудовлетворенность стимулирует построение новой схемы, лучше соответствующей отпечатку, из имеющихся в библиотеке блоков. Хорошее согласие предположительно вызывает биохимически контролируемое удовлетворение (*обучение с подкреплением* [6]). Создание новой модульной схемы и запоминание ее ключа отвечает *производству новой информации*.

Модульная модель восприятия непосредственно отражает фундаментальное свойство интеллекта, не воспроизводимое известными нам теориями: *придумывание нового* в форме подбора комбинации модулей, которая аппроксимирует новое, ранее не испытанное воздействие лучше других комбинаций, хранящихся в памяти. Из невозможности, при принятых оценках чисел n и N, построить образ-схему прямым перебором модулей следует достаточно правдоподобный алгоритм восприятия внешних воздействий интеллектуальным агентом:

(12.4)

(1) поиск наилучшего образа-схемы для отпечатка воздействия по имеющимся в памяти ключам,
(2) выявление в найденной схеме модуля (или модулей) с наихудшим соответствием отпечатку,
(3) замена «плохого» модуля на другие модули, хранящиеся в памяти, ограниченным случайным перебором (рис. 12.13),
(4) нахождение модуля, улучшающего соответствие схемы отпечатку,
(5) запоминание новой комбинации модулей: введение в память ее ключа.

Схема (12.4) согласуется с такими известными условиями успешного решения творческих задач, как предварительное обучение, эрудиция (создание и расширение библиотек модулей и ключей), опыт распознавания в проблемных ситуациях (алгоритм нахождения наилучшего образа в памяти), свободный ассоциативный поиск (подбор ключей) и *умственные способности*, т.е. способность без ошибок обрабатывать большие объемы информации. В эмпирических описаниях творческой деятельности (см.[17, 18] в гл. 11) пункту (2) соответствует «проблемная», или «изобретательская» ситуация, п. (3) –

состояние *нерешенной проблемы*, которому сопутствуют процессы «расшатывания» образа и снятие ограничений в поиске как одно из условий успеха, п. (4) – «озарение» (инсайт), а п. (5) – рождение новой информации. Следует подчеркнуть, что упомянутые выше схемы восприятия и идентификации образов не воспроизводят инсайта, тогда как в модульной модели это органичный этап. В бесструктурной схеме отбора полезной информации, ранее предложенной Д.С. Чернавским[18], аналогом перебора модулей является хаотический *перемешивающий слой*, или странный аттрактор, в фазовом пространстве континуальной математической модели, а ценность новой информации, полученной случайным путем, определяется ее пригодностью для решения текущих задач.

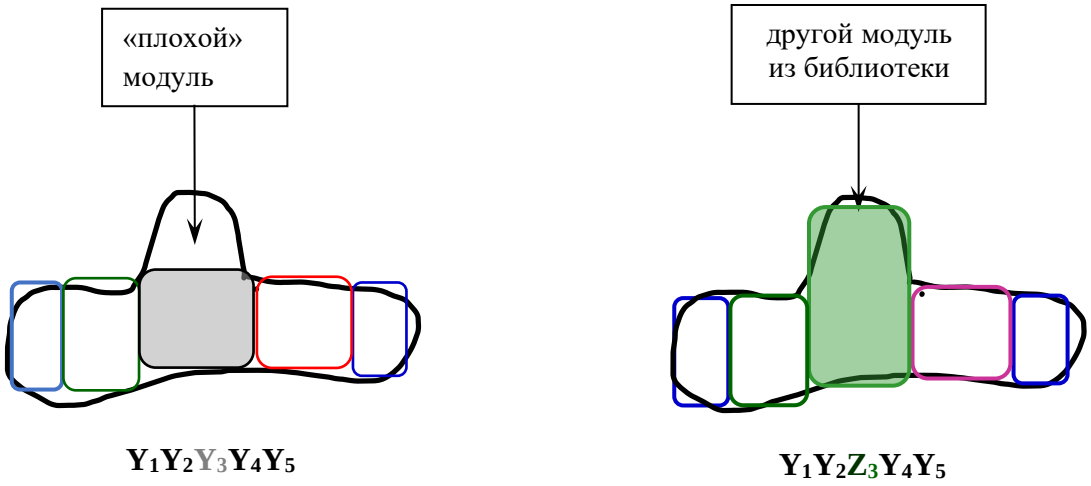


Рисунок 12.13. Замена «плохого» модуля ($Y_3 \rightarrow Z_3$) в схеме, улучшающая соответствие отпечатку: рождение новой информации

Поскольку одна и та же характеристика воздействия может быть выражена в разной степени, его схему в восприятии индивидуума (рис. 12.12 б) можно формально представить взвешенной суммой

(12.5) $$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} w_j m_j^{(i)},$$

где ξ_i – образ в информационном пространстве, $\{m_j^{(i)}\}$ – формирующие его модули, $\{w_j \in [0, 1]\}$ – их весовые коэффициенты. (Чтобы условно отобразить формулу (12.5), на рисунках 12.12 и 12.13 следовало бы добавить координату *интенсивности* и изображать отпечаток воздействия трехмерным телом).

Аналог формулы (12.5) используется в описании *мышечных синергий*: устойчивых комбинаций работы многих мышц, или их *профилей активации* $S(t)$, управляющих движением людей и животных. В нейрофизиологических исследованиях установлено, что широкий набор движений человека к пространственной цели формируется из небольшого числа (4-5) *динамических синергий* $\{S_i\}$, выбираемых из малоразмерной библиотеки[19]. Внутренняя репрезентация сложного мышечного движения в этом случае сводится к набору весовых коэффициентов $\{w_j\}$[20]. Другими словами, наша модульная модель не является чисто умозрительной и даже полностью оригинальной: представление сложных объектов и процессов комбинацией малого числа стандартных субъединиц уже несколько десятилетий

используют в техническом и компьютерном зрении, а также в нейрофизиологии и медицине на уровне, непосредственно примыкающем к количественным расчетам.

12.2.3. Направления детализации модульной модели

Баронесса Сиэр: Милорды, простите мое невежество, но не мог бы благородный лорд сказать, что за предмет мы обсуждаем – это животное, растение или минерал?
Наука и жизнь, 2004, №4, *Фуллерены в палате лордов*, https://www.nkj.ru/archive/articles/4204/

Молекулярные формы углерода *фуллерены* C_n (где n = 60, 70, 76 и далее любое четное число) в 1990-е годы были «горячей» областью химических исследований, где участвовал и автор этой книги. Обсуждение перспектив открытия фуллеренов для английской науки и промышленности в верхней палате парламента (10.12.1991 г.) многие химики и физики, вовлеченные в эту область, восприняли как исторический анекдот. Мы возвращаемся к нему не только для объективности: британские парламентарии не были обязаны читать специальную литературу по новым направлениям науки, само же обсуждение проходило вполне профессионально (см. ссылку). Вопрос баронессы Сиэр, заданный в английском слегка ироническом стиле, отражает традиционное членение большого массива фактов на *три* категории.

В естествознании XVIII-XIX веков все объекты Природы и явления с их участием подразделялись на три Царства: животных, растений, и минералов. Детализация оценок экспертов в любой области начинается с бинарной («да – нет», «хорошо – плохо») и продолжается тройной классификацией («да – не знаю – нет», «хорошо – безразлично – плохо» и т.д.). Эти оценки легко перевести в числа, соответственно, из множеств {1, 0} (либо {–1, 1}) и {–1, 0, 1}. Они отражают свойственное людям стремление сопоставлять воспринимаемые внешние воздействия с малым набором нечетких стандартов. В более детальных оценках уже нет преобладающих схем, хотя при построении нечетких регуляторов часто используется семичленная градация: negative big, negative medium, negative small, zero, positive small, positive medium, positive big (см. раздел 10.3 главы 10).

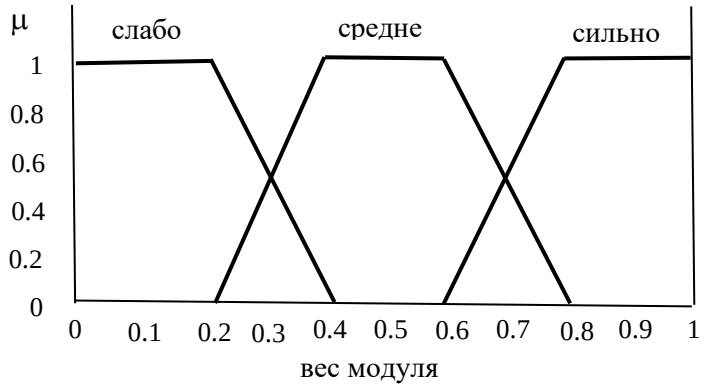


Рисунок 12.14. Нечеткие веса модулей в формуле (12.5) (условно)

Характерные для научных и просто человеческих сообществ разбиения множества результатов наблюдений на малое число классов указывают путь, по которому модульную схему восприятия можно преобразовать к виду, допускающему численные расчеты. Так, по трехчленной градации интенсивности внешнего воздействия весовым множителям $\{w_i\}$ в

формуле (12.5) можно придать значения «слабый», «средний» и «сильный» – например, заданные нечеткими числами 0.1, 0.5 и 0.9 (рис. 12.14).

Чтобы оценить общее число модулей $\{m_j^{(i)}\}$ в средней по размеру библиотеке, нужны дополнительные предположения. Если модули отражают определенные качества воздействия, логично их выбирать из тех оценочных характеристик, которым соответствуют наиболее часто употребляемые слова. Такие слова имеются во всех языках; их набор можно построить, удаляя служебные слова (артикли, предлоги, местоимения, числительные) из верхней части списка всех слов, ранжированных по убыванию их частотности.

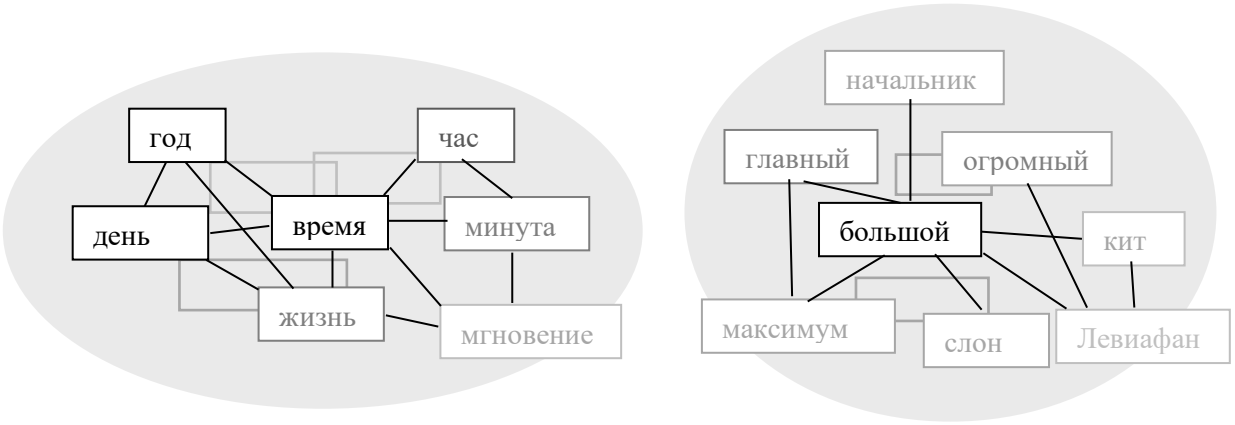


Рисунок 12.15. Модули качеств как области семантического пространства (условно). Интенсивность шрифта и контура – частотность, незаполненные контуры – другие близкие по значению слова

Каждому слову соответствует образ в человеческом сознании, отражающий совокупность близких точек в семантическом пространстве («год – время – день – жизнь», «первый – главный – лучший» и т.д., а также слова меньшей частотности). В этом случае модулю как субъединице образа-схемы в пространстве представлений соответствует некоторая нечеткая совокупность близких образов в семантическом пространстве (рис. 12.15), а набору всех модулей $\{m_j^{(i)}\}$ – область этого пространства (возможно, разрывная), которая покрывает основную часть употребляемых нами понятий. Так, 450 самых частотных слов русского языка входят в половину всех словоупотреблений, зафиксированных в Национальном корпусе русского языка (НКРЯ, рис. 12.16). Поэтому оценка $N{\sim}10^3$ числа модулей, позволяющих построить любое количество образов-схем (близкая к числу знаков, необходимых для понимания текстов на японском языке[17]), представляется обоснованной. Для понимания произвольного («усредненного») текста на русском языке требуется знать от 26 до 42 тысяч слов[12] – что возвращает нас к оценке размера библиотеки «ключей», позволяющих интеллектуальному агенту распознать произвольное внешнее воздействие.

Итак, для индивидуального человеческого интеллекта информационное пространство представлений можно считать *грубым* (robust) разбиением семантического пространства (разд. 9.2.1 в гл. 9); компонентам образа в нем соответствуют нечеткие области близких понятий. Учитывая закон Ципфа (см. разд. 9.2.3 в гл. 9), добавление координаты частотности по формуле (12.5) к такому пространству, которое само по себе не является строгой математической конструкцией (разд. 9.2.1 гл. 9), сделает его принципиально

нелинейным. Свертка слов разной частотности, условно показанная на рис. 12.15 оттенками серого цвета, выглядит оправданным эмпирическим упрощением. Этот прием позволяет обосновать квантовомеханические аналогии в описании сознания (гл. 8, разд. 8.7): подобно фазовому пространству многочастичной системы в квантовой механике (разд. 3.4 в гл. 3), информационное пространство представлений в нашей интерпретации имеет «зернистую» структуру.

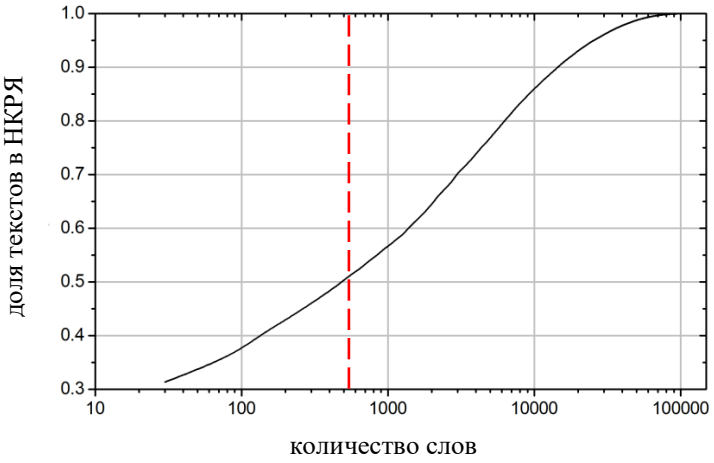


Рисунок 12.16. Покрытие текстов Национального корпуса русского языка (НКРЯ) разным числом слов, расположенных в порядке убывающей частотности, полулогарифмический масштаб[12]

С увеличением объема лексикона число слов в каждой ячейке семантического пространства, отвечающей (нечетко) определенному понятию, будет возрастать, однако области ячеек при этом сильно не изменятся. Подобное разбиение позволяет ограничить набор «сущностей» в анализе формальных понятий (АФП), до настоящего времени остающийся неопределенным (разд. 11.2.2 в гл. 11), введением нечеткого критерия их частотности. Это переводит решетку понятий, в существующей версии АФП неограниченную, в конечную совокупность связей «объект – признак», отражающих основные качества заданного множества объектов. При компьютерном составлении онтологий (см. обзор[11] в предыдущей главе) подобные эмпирические ограничения неизбежно вводятся в программу.

Взаимосвязь языка и мышления – одни из главных предметов исследования в области когнитивных наук и искусственного интеллекта. В последние десятилетия здесь интенсивно обсуждаются нестандартные структуры семантического пространства, соединяющие значения слов и создаваемых ими образов в человеческом сознании[21]. По современным представлениям, люди в каждом этносе оперируют нечетко фиксированным, однако ограниченным и устойчивым набором «базисных» понятий, который лишь медленно изменяется в историческом времени.

Представление образов-схем взвешенной суммой (12.5) модулей как нечетких «базисных» областей семантического пространства с весами, отражающими их относительные вклады в «гештальт», открывает путь к математической формализации интеллекта. Библиотеку модулей в «иероглифическом» восприятии внешнего мира интеллектуальными агентами могут составить базисные понятия, дополненные отрицанием

(«не-большой», «не-человек») и представленной выше оценкой их интенсивности. Сочетания таких модулей позволяют представить произвольное внешнее воздействие комбинацией характеризующих его понятий. На перспективность этого подхода косвенно указывают характеристики слов в семантическом дифференциале (см. табл. 9.1 в главе 9), отражающие стремление лингвистов выделить некоторые общие качества для обозначения порождаемых ими ассоциаций.

Модульное представление образа не противоречит сетевой структуре семантического пространства (см. главу 9), но предлагает рассматривать модули в нем не как точки, а как некоторые окрестности («ячейки»), отвечающие нечеткой совокупности близких понятий (рис. 12.15). Семантические связи между значениями слов, как и любых образов, должны коррелировать с модульной структурой понятий: близким понятиям отвечают сходные комбинации модулей. На этом основании можно оценить некоторые параметры информационного пространства представлений (разд. 12.1.1) в сознании человека. Такое пространство предположительно имеет относительно небольшую, по сравнению с возможностями современных компьютеров, размерность $N \sim 10^3$, а его элементами служат малоразмерные ($n < 10$) комбинации нечетких модулей.

Приведенные здесь соображения еще не дают рецептов «изобретения языка» для символьного описания произвольных внешних воздействий, а лишь намечают возможный путь его построения на стыке компьютерных наук и лингвистики. Главным недостатком модульной модели в настоящее время приходится признать отсутствие «правил грамматики», которые задавали бы алгоритм построения образа из символов ощущений (эта фундаментальная проблема психологии и когнитивных наук интенсивно исследуется, см. [6] в списке литературы). Однако на качественном уровне модульное восприятие можно распространить на любых интеллектуальных агентов, включая распределенный, или коллективный, интеллект социальной системы (РИ) и искусственный интеллект (ИИ). Рассмотрим перспективы такого распространения.

12.2.4. Модульная структура РИ

Модульная модель восприятия интеллектуального агента естественно расширяется на описание распределенного интеллекта (РИ) мультиагентных социальных систем. Как обсуждалось в предыдущей главе, наличие интеллекта у социальной системы определяется способностью агентов воспринимать информацию, их целеполаганием и взаимодействиями. Уровень РИ соответственно зависит от когнитивных возможностей агентов, от преследуемых ими целей, от характера и структуры межагентных взаимодействий, а также от внешних условий. Распределенный интеллект системы в общем случае становится «сильнее» с увеличением числа агентов и с усложнением структуры их взаимодействий. Существенно, что рациональность как индивидуального, так и коллективного поведения увеличивается при ограничении набора возможных действий агентов и при наличии библиотеки стандартных реакций (раздел 11.3 предыдущей главы).

Анализ и использование информации организационными системами (ОС) достаточно высокого уровня в человеческом обществе имеет очевидные аналогии с описанием восприятия реальности индивидуальным интеллектом по модульной схеме (Табл. 12.2). В качестве «отпечатка» внешнего воздействия на систему (например, аварии на

производстве) здесь выступает совокупность реакций системы как целого и индивидуальных реакций агентов. Сильные воздействия изменяют структуру системы (при аварии – эвакуация персонала, создание руководящего штаба и комиссии, аварийные и восстановительные работы). Составными единицами-модулями при интерпретации системой такого воздействия служат инструкции и должностные обязанности, «образом-схемой» является стандартный ответ системы (действия по инструкциям), корректировкой схемы – оценка успешности действий и испытание новых предложений (работа комиссии), заменой модуля (модулей) в «образе-схеме» – выбор оптимальных действий (выводы комиссии), запоминанием новой информации – дополнение и изменение инструкций.

Таблица 12.2

Сравнение индивидуальной интеллектуальной деятельности и проявлений РИ организационной системы [5]

индивидуальный интеллект человека	распределенный интеллект ОС
1-й этап восприятия: «отпечаток» внешнего воздействия	сумма системных и индивидуальных реакций работников на внешнее воздействие
библиотека модулей и «хранилище ключей»	рабочая информация, должностные инструкции
2-й этап восприятия: выбор модульного образа-схемы	оценки параметров воздействия и его предварительная характеристика; действия по инструкциям
поиск лучшей имеющейся схемы, оценка ее расхождений с отпечатком	оценка успешности стандартных действий (создание комиссии)
случайная замена «плохих» модулей в схеме	корректировка действий; испытание новых предложений (работа комиссии)
контроль качества соответствия	оценка успешности скорректированных действий (выводы комиссии)
запоминание новой схемы	дополнение и изменение инструкций

В роли «пространства представлений ОС» выступает вся совокупность документированных событий и интерпретаций, включая их «свертку» в множество регламентаций и законов – неизбежно нечетких по практике их применения. Инструкции и нормативы выполняют роль нечетких блоков в коллективной интерпретации внешних воздействий участниками ОС и системой как целым. Глубину коллективного интеллекта, или «размеры» его информационного пространства, можно оценить количеством действующих нормативов, инструкций и законов в разных аспектах деятельности человеческого общества: это миллионы «образов-схем», выработанных в интеллектуальном взаимодействии индивидуумов (см. количество товаров, производимых в плановой экономике СССР, со своими инструкциями и регламентами, разд. 8.1 в главе 8). Такую оценку можно распространить и на другие фундаментальные аспекты жизни государства и общества: технику, юриспруденцию, политику, искусство и др.[*]

[*]Заметим, что внедрение компьютеров в документооборот, изначально представлявшееся средством сокращения бюрократии, на деле многократно увеличило количество используемых документов. Отвлекаясь от эмоциональных

В «живых» системах с более примитивными агентами также можно выделить (значительно меньшие) наборы модулей, которые направляют коллективную динамику и изменяются при варьировании обстановки: танцы пчел в улье, тропинки муравьев, воспроизводимые режимы перемещения особей в стае, иерархические структуры в стаде животных и др. Во всех случаях реакция на внешние воздействия складывается из существующих модулей, которые отражают динамику системы при уже испытанных внешних воздействиях и хранятся в коллективной библиотеке. Озарение, или инсайт, на уровне системы сводится к «стохастическому» нахождению наилучших комбинаций действий из библиотеки, формируемой в процессе обучения.

Распознаванию образов как известных агенту комбинаций модулей на коллективном уровне отвечает свертка информации, а составлению новой, ранее не использованной комбинации модулей – рождение новой информации. Достижения коллективного интеллекта системы неразрывно связаны с индивидуальным интеллектом ее участников (см. предыдущую главу). Отметим, что новые образы-схемы, включая произведения искусства, технические изобретения и научные открытия, возникают на основе индивидуального творчества, но вносятся в коллективную библиотеку лишь в тех случаях, когда их принимает, одобряет или хотя бы фиксирует в памяти социальная среда.

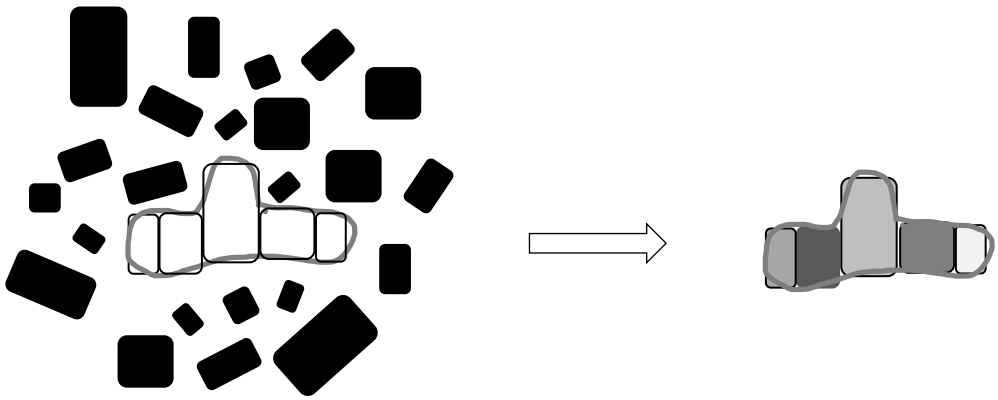


Рисунок 12.17. Реклама и пропаганда как замещение модулей в образе-схеме (условно)

Одним из частных примеров взаимодействия индивидуального и коллективного «модульного» сознания может служить *пропаганда*, понимаемая в широком смысле – включая рекламу товаров, агитацию за здоровый образ жизни и так далее. В собственно политической пропаганде ярко проявляется парадоксальная комбинация примитивности массированных воздействий на сознание людей и масштаба их результатов. В терминах нашей модели содержание пропаганды – замещение модулей в комбинациях, обозначающих явления внешнего мира, аналогичными модулями с иной, заданной эмоциональной нагрузкой (рис. 12.17). Таким образом, пропаганда занимается не столько убеждением людей в правильности той или иной политической позиции (или покупки товаров конкретной фирмы), сколько редактированием библиотеки признаков внешних

оценок, можно предположить, что этому процессу соответствует не размывание, а *усиление* коллективного интеллекта, который вынужден решать все более сложные задачи в растущих человеческих сообществах. Общеизвестное расширение «электронной бюрократии» сопровождается менее наглядным, но неотрывным от него ростом глубины и эффективности обработки информации. Оба процесса вместе характеризуют увеличение возможностей РИ.

воздействий, что обеспечивает ее объектам требуемое восприятие *любого* явления. Стандартным средством обеспечения пропаганды является доминирование в информационном пространстве. При этом модули, имеющиеся в сознании людей, «вымываются» новыми, внедряемыми модулями по неоднократно упомянутой в этой книге физико-химической схеме динамического равновесия (см. разд. 2.4 главы 2).

12.2.5. Модульная модель в ИИ

Основы модульной модели восходят к схемам восприятия внешней среды роботами и другими техническими устройствами. Так, роль модулей в системах технического зрения, обсуждавшихся в разделе 12.1.2, играют метрические параметры объекта в физическом пространстве, восстановленные по его изображению, а сам объект характеризуется вектором параметров. Идентификация целевых объектов при этом не предполагает их «осмысления»: используется лишь сопоставление векторов признаков объекта и эталона. Набор признаков изначально задается составителями программы; объективные критерии характера признаков и полноты набора отсутствуют. Тем не менее, уже на данном *протоинтеллектуальном* уровне системы технического зрения могут решать задачи, которые обычно относят к достижениям более совершенных видов ИИ – таких, как искусственные нейронные сети.

Рассмотренное в предыдущей главе распознавание объектов внешнего мира средствами ИИ имеет ряд впечатляющих достижений («сверхчеловеческие» шахматные программы, компьютерное зрение, машинный перевод и др., см. гл. 11), но единой формальной теории восприятия в этой области пока не имеется. Способы автоматического построения достаточного набора символов, характеризующих объект – как, например, методы выбора полного набора признаков в АФП – в настоящее время тоже неизвестны. Однако они могут быть найдены в рамках модульной модели на основе гипотетического «символьного» языка, приписывающего каждому объекту произвольной природы набор *существенных* признаков, которые далее запоминаются и используются в качестве его идентификатора по модульной схеме. В этом случае важным параметром являются частотности признаков, которые могут задаваться разработчиками языка или, по аналогии с интеллектом человека, автономно оцениваться «сильным» самообучающимся ИИ.

Современные компьютеры способны оперировать длинными наборами символов и огромными, по сравнению с возможностями человека, массивами информации. В задачах модульного распознавания соответственно возрастают полнота и точность отражения внешних воздействий их «иероглифическими» компьютерными образами. Вместе со скоростью обработки информации, превышающей технические параметры *homo sapiens* в миллионы раз (в частности, при поиске и замене модулей путем перебора, см. рис. 12.13), этим открывается путь к «сильному» самообучающемуся компьютерному интеллекту, параметры которого могут существенно превысить любые человеческие возможности. Это указывает как на возможные преимущества «сверхчеловеческого» модульного ИИ, так и на вероятные риски его реализации.

Литература к разделу 12.3

[13] А.Н. Гусев, *Психофизика сенсорных задач*, М.: МГУ, 2004.

[14] Г.В. Головин, *Измерение пассивного словарного запаса русского языка*, Социо- и психолингвистические исследования, 2015, №3, 148.
[15] Э.Б. Гуннемарк, *Искусство изучать языки*, пер. со швед., 2001, СПб: ТЕССА.
[16] В.М. Алпатов, *Япония: язык и общество*, М.: «Муравей», 2003.
[17] Нихонго норёку сикэн (日本語能力試験, Japanese Language Proficiency Test, JLPT), https://elenaruvel.com/ekzamen-nihongo-noreku-siken/
[18] Д.С. Чернавский, *Синергетика и информация: динамическая теория информации*. 3-е изд. М.: Либроком, 2009.
[19] A. D'Avella, *Modularity for motor control and motor learning,* In: Laczko, J., Latash, M. (Eds.) Progress in motor control. Advances in Experimental Medicine and Biology, vol 957. Springer, Cham. 2016, 3.
[20] А.А. Корнеев, А.В Курганский, *Преобразование порядка движения в серии, заданной зрительным образом*. 2014. Вестн. МГУ. Сер. 14. Психология. № 2, 61.
[21] О.П. Кузнецов, *Когнитивная семантика и искусственный интеллект*, в кн. О.П. Кузнецов, *Избранные труды: автоматы, языки и искусственный интеллект*, М.: 2016, 334.

Рекомендуемая литература

1. Р.С. Гонсалес, Р.Е. Вудс, *Цифровая обработка изображений*, 3-е изд., пер. с англ., М.: Техносфера, 2012.
2. А.Н. Ждан, *История психологии: от античности до наших дней,* М.: МГУ, 1990.
3. М. Минский, *Фреймы для представления знаний*, пер. с англ., М.: Энергия, 1979.
4. В.П. Белянин, *Психолингвистика*, 4-е изд., М.: ФЛИНТА, 2016.
5. Ю.Л. Словохотов, И.С. Неретин, *К построению модульной модели распределенного интеллекта*, Труды ИСП РАН, 2018, **30** (3), 341.
6. К.В. Анохин, *Когнитом: в поисках фундаментальной нейронаучной теории сознания*, Журн. высшей нервной деятельности, 2021, **71** (1), 39.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

И в заключение, хоть я и не люблю этого слова…
Михаил Жванецкий

Подводя итоги материалу, представленному во всех трех частях, попробуем вернуться к затронутым в них фундаментальным вопросам: корректно ли применять методы точных наук в описании человеческого общества, насколько значительны нынешние достижения на этом пути и в какой степени формальное описание осложняется наличием у социальных систем коллективного интеллекта? Положительный ответ на первый вопрос дает история науки. Успешное математическое и физическое моделирование разных аспектов деятельности общества развивается, как минимум, с начала XX века – хотя «социальная физика» (далее социология), «психофизика» (экспериментальная психология) и неоклассическая экономика (весьма формализованная, несмотря на некоторую неопределенность предмета) возникли еще в XIX веке. По убеждению автора, содержание этой книги показывает, что применение методов точных наук в экономических, социальных и даже гуманитарных дисциплинах корректно, необходимо и в конечном счете неизбежно. Междисциплинарные исследования социума не просто осуществляются в возрастающем объеме: на них основаны безусловные достижения в экономической и социальной практике, а также теории многих общественных явлений – которые постепенно вливаются в непрерывно растущую область физики.

Тем не менее, результаты экспансии точных наук в науки о человеке и обществе не так легко сформулировать на уровне положительного знания. С позиций «школьных» и общефизических закономерностей, представленных в части 1, физика устанавливает количественные законы природы, оперируя формулами и уравнениями. В междисциплинарных приложениях физики этот подход действительно преобладает и дает результаты; многие из них обсуждались в части II. Но при описании общественных явлений, в широком смысле включающих экономику, уравнения и формулы в основном составляются для частных задач, за пределами которых они теряют смысл. В имитационных агентных моделях, также распространенных в междисциплинарной физике, вместо формул применяют произвольно установленные правила, которые могут не иметь физической основы (как квантовоподобные модели в разд. 8.7 главы 8). Подобно формулам, каждая агентная модель имитирует лишь тот весьма узкий круг явлений, для которого она была разработана.

Ограниченные успехи математического аппарата, перенесенного из физики в общественные науки, следуют из того обстоятельства, что социальные системы – *материальные* объекты. Для них, с определенными оговорками, можно использовать аналоги физических понятий силы и поля сил, инерции, емкости, потенциала и «меры беспорядка» (энтропии, которая в междисциплинарной физике мало отличается от температуры). Однако по своей социальной природе разные мультиагентные системы настолько не похожи друг на друга, и тем более на «неживые» многочастичные системы, что эти понятия удается преобразовать лишь в *квазифизические* параметры. Последние допускают содержательный расчет, имеющий предсказательную ценность, только в узком круге явлений на коротких интервалах времени: их не удается обобщить. Кроме того, в самих этих параметрах отражается действие специфических социальных факторов, которые

при моделировании обычно «заметают под ковер» – см. агентные модели автомобильных и пешеходных потоков на основе *социального поля* в главе 5.

Однако общие количественные закономерности в социуме все-таки существуют. Правда, студентов гуманитарных специальностей (притом не всех) знакомят с ними не в общественных науках, а в кратких курсах теории вероятностей и математической статистики. Различные распределения случайных величин, обычно представленные в таких курсах как абстрактные истины, на деле вызваны разными схемами межагентных взаимодействий: изменения количественного параметра агентов по механизму случайных блужданий порождают нормальное распределение, аналогичные изменения масштаба параметра – логарифмически нормальное и т.д. (см. разд. 8.2 в главе 8). Генезис распределений случайных величин (табл. 8.6 в главе 8), видимо, не особенно интересует математиков: если он и обсуждается, то очень кратко.

Интерпретацию формул теории вероятностей дополнительно осложняют дискретность любых социальных мультиагентных систем и малое, в масштабах статистической физики, число генерируемых ими точек. Вследствие этого классические непрерывные распределения в приложениях к общественным наукам используются лишь как идеализированные шаблоны: нередко одному и тому же ряду данных приблизительно соответствуют несколько разных функций. Помимо этого, корреляция результатов «измерений» в неоднородных системах с сильной связью между агентами делает такие распределения квази-полимодальными (рисунки 9.2, 9.3 и 9.48 в главе 9). Попытки исследовать их структуру вскрывают нерегулярную зависимость положений и формы локальных максимумов от состава выборки.

Один из примеров универсального количественного соотношения в общественных науках – закон Ципфа

$$f(r) \approx Cr^{-\gamma},$$

подробно рассмотренный в разд. 9.2.3 главы 9. В этом случае $f(r)$ – значение регистрируемой переменной (плотность вероятности или частотность употребления слов в языке, благосостояние агентов и многое другое), r – ранг агента (номер в списке по убыванию значений f), C и γ – эмпирические параметры. Неоднократные попытки установить физически обоснованные или хотя бы наиболее вероятные значения параметров этого распределения для разных социальных систем не привели к успеху. Сама же общая форма закона Ципфа (а также Парето, Ауэрбаха, Мандельброта и других авторов) следует из алгоритма предпочтитель9ного присоединения (*богатые становятся богаче*), которым в науке о сетях порождаются «растущие» безмасштабные графы Барабаши-Альберт (гл. 6, разд. 6.2.1).

Неоднородность «социальных» численных данных проявляется в изменении параметров обратного степенного распределения даже для разных частей одной и той же выборки (см. рис. 9.20 в гл. 9). Ей нередко соответствуют характерные для социума комбинированные функции – например, обратные степенные *тяжелые хвосты* в распределениях порядка вершин сложной сети (гл. 6, рис. 6.22), благосостояния в богатых странах (разд. 8.4.1, рис. 8.25 и 8.26 в главе 8), доходности биржевых активов (рис. 8.49 б)

и других. По этой причине попытки свести биржевые распределения к «универсальному» распределению Леви, предпринятые в эконофизике 1990-х годов, оказались безуспешными: данная функция не является универсальной. *Остроконечные* биржевые распределения доходности активов гораздо проще объясняются действиями брокеров в режиме *прерывистого управления* (гл. 5, рисунки 5.22 и 5.23), а их обратная степенная асимптотика – продажами и покупками крупных игроков.

В сильно идеализированной форме динамику параметров социальной системы можно представить несколькими простыми зависимостями, следующими из соотношений

$$dx = kx^{\alpha}dt$$

(прирост или убыль субстанции x пропорциональны ее количеству, возведенному в некоторую степень α). Как обсуждалось во 2-й главе, для $k > 0$ при $\alpha < 1$ отсюда следует степенной рост параметра во времени $x \sim t^{\beta}$ (где $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$), $\alpha = 1$ дает экспоненциальный рост, или мальтузианскую динамику $x \sim e^{kt}$, $\alpha > 1$ – обратный степенной «гиперболический» рост $x \sim \frac{1}{(t_0-t)^{\beta}}$. Эти функции действительно отражают эволюцию некоторых социальных систем на ограниченных промежутках времени. Соотношению параметров $k < 0$ и $\alpha = 1$ отвечает экспоненциальное затухание, тоже часто наблюдаемое в экономике и социуме – например, в распределении доходов $P(r) \sim e^{-\gamma r}$ «гиббсовых» 95% населения страны, где управляющей переменной, вместо времени t, служит доход r (гл. 8, разд. 8.4.1)

Перечисленные количественные соотношения весьма характерны для социума, но они чаще рассматриваются не в общественных науках, а в начальном курсе математического анализа. При эндогенных ограничениях на рост переменной x возникает логистическое уравнение

$$dx = (ax - bx^2)dt$$

и его более сложные аналоги – тоже лишь условно воспроизводящие динамику «живых» систем (см. рис. 2.3 а, б в главе 2).

Еще одним видом эволюции социальных систем являются циклические процессы – в частности, мальтузианские, экономические и биржевые циклы. В отличие от простейших механических и электрических колебаний, «социальные» циклы часто не имеют определенного периода и воспроизводятся в моделях лишь на качественном уровне. Стохастические колебания в «неживых» нелинейных системах (колебательные химические реакции, *солнечное динамо*) удается описать на языке аттракторов в фазовых пространствах (гл. 4, раздел 4.3), но и такие модели относятся к «живым» системам скорее метафорически (см. рисунки 4.7 и 4.8 в гл. 4).

Отклонения параметров социальных систем от правильных функциональных зависимостей и нерегулярность циклов объясняются малым числом агентов, порождающим большие относительные флуктуации. Отсюда, в частности, возникает отмеченная в эконофизике и финансовой математике нестационарность случайных процессов биржи (гл. 8, разд. 8.6.2), снижающая информативность моментов распределений «биржевых» параметров. Но и в этих условиях материальная природа агентов, приводящая к ненулевой

инерции их действий, позволяет предсказывать фазовую траекторию системы на коротких интервалах времени даже в визуально хаотическом режиме (*теорема Такенса*, см. рис. 8.58).

Таким образом, динамика мультиагентных социальных систем познаваема и формализуема в той мере, в какой эти системы можно считать объективно существующими, стационарными и допускающими содержательное усреднение параметров. В этом смысле перечисленные выше количественные соотношения играют роль *законов-тенденций*: они разрушаются флуктуациями и поэтому сохраняют предсказательную силу лишь в определенном круге данных на ограниченное время.

Дополнительные фундаментальные отличия «живых» систем следуют из их неравновесной диссипативной природы, обычно не воспроизводимой частными моделями. С внешним потоком энергии косвенно связаны таких специфические качества социума, как производство, рост населения, инфляция денег, экспансия государств. Подобные явления, слишком сложные для строгого описания средствами неравновесной термодинамики, тоже чаще всего рассматриваются в рамках имитационных моделей. «Растущие» экономические и социальные системы не имеют постоянных законов – что относится и к динамике их роста. Соответственно, постоянно модернизируются методы управления такими системами, поскольку *обучаемые* индивидуумы вырабатывают способы противодействия для каждого нового административного инструмента.

Текучесть состояний человечества как динамической социальной системы отражается в постоянном смещении фокуса интересов академической науки – включая общие вопросы, традиционно относимые к философии и мировоззрению. Так, проблемы происхождения Жизни и Разума на нашей планете в целом сняты современным естествознанием. Первая из них замещена гораздо более частной (но пока не вполне решенной) задачей о механизме образования термодинамически неравновесных подсистем в органическом «первичном бульоне», синтез которого из неорганических ингредиентов доказан экспериментально (см. последнюю часть разд. 4.2.2. в главе 4). Вторая, с позиций естественных наук, уже не является проблемой. Когнитивные возможности (автономная обработка информации) и способность к взаимодействию в разной степени присущи всем живым организмам, что создает единую основу для сочетания индивидуального и распределенного интеллекта. Преимущество получают те биологические виды, у которых этим сочетанием запускается самоускоряющееся социальное развитие; среди них *homo sapiens* – лишь наиболее успешный (см. главу 11). Эти схемы обоснованы и объективны: они отводят место случайности лишь как фактору в стохастических процессах и не предполагают воздействия внешней воли. Центр тяжести в науках о человеке и обществе в настоящее время смещается от мировых проблем в сторону создания работоспособных теорий и моделей для исследования тех или иных конкретных явлений.

Тем не менее, частный вопрос о влиянии коллективного интеллекта человеческих сообществ (гл. 11) на возможность формализовать и предсказывать их динамику выглядит довольно трудным. Фактически он возвращает нас к постулату свободы воли правителей, предположительно делающей беспредметным поиск объективных факторов в описании исторического процесса (см. начало разд. 9.6 в главе 9) – правда, на новом уровне, где эти факторы косвенно включены в структуру РИ. *Свобода воли системы*, подкрепленная

многочисленными примерами «коллективного помешательства» народов и государств, на первый взгляд заново ограничивает задачи общественных наук регистрацией и описанием событий, пусть даже с современными средствами математической обработки данных. Однако в этой книге были представлены модели, позволяющие (хотя бы на качественном уровне) прогнозировать динамику «интеллектуальных» систем, включая компьютерные расчеты и определение равновесий методами теории игр.

В данном контексте следует отметить, что коллективные устремления и действия человеческих масс еще менее свободны, чем поведение их лидеров (обычно погруженных в антагонистическую среду, карающую за управленческие ошибки). Первоначально решавший задачи выживания вида, «массовый РИ», включающий как конкуренцию, так и кооперацию, ныне нацелен на улучшение условий существования социальных слоев, общественных классов и государств как агрегированных агентов. Периоды уничтожения достигнутого на этом пути (кризисы, войны и революции), как проявления «разума толпы» в задачах для более сильного интеллекта, прерывают эту общую тенденцию, но они относительно скоротечны. Кроме того, на действия масс людей сильно влияют экзогенные факторы – например, изменения климата. В сочетании с новыми, более объективными методами анализа исторических данных это позволяет считать динамику больших человеческих систем познаваемой и в перспективе предсказуемой.

Даже при сохраняющейся неопределенности понятия *интеллект*, в части III были представлены примеры его содержательного анализа и моделирования. К сожалению, среди них еще нет формализуемой теории РИ и коллективного интеллекта людей: его проявления по-прежнему рассматриваются в гуманитарных дисциплинах на эмпирическом уровне. Как обсуждалось в гл. 11, на больших промежутках исторического времени «медленный» РИ государств и составляющих их больших подсистем в целом развивается и совершенствуется, что обычно называют научно-техническим, организационным и социальным прогрессом человечества. Улучшение жизненных условий людей, в свою очередь, сопровождается ростом населения планеты, с начала XX века более чем четырехкратному (разд. 2.5 главы 2). Увеличение числа интеллектуальных единиц в мировой системе по механизму положительной обратной связи делает возможным дальнейшее развитие ее РИ. При всем этом не следует забывать, что периодическая хаотизация отношений между агрегированными экономико-политическими агентами в XX веке привела к ряду тяжелых кризисов и двум мировым войнам.

Позитивному восприятию динамики человечества серьезно мешает нынешнее опасное состояние мировой экономико-политической системы. Появление и укрепление «глобальных» агентов в виде крупнейших ТНК, действующих независимо от интересов государств и часто вопреки им, а также гипертрофированное развитие спекулятивного финансового капитала приводит к *сокращению,* а не расширению, круга лиц, определяющих мировой системный интеллект. Неизбежным следствием становится ослабление (весьма желательно временное) «коллективных разумов», затрудняющее выход из кризиса. На описательном уровне этот процесс принимает вид приватизации и криминализации стратегических функций, традиционно относящихся к сфере деятельности государств; одним из многих примеров могут служить *криптовалюты* (разд. 8.4.3 главы 8).

Современная версия конфликта между коллективным созданием и частным присвоением общественного продукта принимает предельные, нередко карикатурные формы – до частных армий, частных космических агентств и планов создания персональных орбитальных станций. В качестве метода управления растущим человечеством численно сокращающиеся «элиты» все интенсивнее используют манипулирование общественным сознанием. В терминах последней главы это означает возрастающее несоответствие реальности ее образам в коллективном *пространстве представлений*, то есть снижение адекватности действий социальных систем, по механизму обратной связи углубляющее кризис. «Приватизация» мирового сознания – один из главных угрожающих факторов современности; научному сообществу необходимо его охарактеризовать и предложить способы нейтрализации.

Быстрое развитие междисциплинарной «физики общества» в последние десятилетия убедительно показывает, что в процессе исследования социума методами точных наук нет непреодолимых препятствий. Можно надеяться, что научный подход и теперь поможет миру выйти из кризиса. Важным инструментом здесь стало бы расчетное моделирование социальных систем, прямо учитывающее их распределенный интеллект и «коллективное сознание». Разработка таких инструментов представляется весьма актуальной научно-практической задачей.

Так как индивидуальный и распределенный компоненты человеческого интеллекта вовлечены в общую эволюцию, важнейшим нерешенным вопросом остаются ее перспективы. Будет ли продолжаться развитие человеческого ума в сочетании с коллективным интеллектом, включая его компьютерные усовершенствования, выйдет ли РИ человечества на более высокий уровень – или, как неоднократно предрекали в последнее столетие, его неконтролируемая динамика сделает глобальную систему неустойчивой и приведет ее к гибели? В этом сложном, иногда намеренно запутанном вопросе автор все же сохраняет осторожный оптимизм.

ПРИЛОЖЕНИЕ. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

П1. Производные элементарных функций

(1) $(x^a)' = ax^{a-1}$, где a – любое действительное число, например

$$x' = 1, \qquad (x^2)' = 2x, \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

(1) $(e^x)' = e^x$

(2) $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$

(3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

(9) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

(10) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

(11) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

(12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

П2. Некоторые табличные интегралы

(1) $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, (a \neq -1)$, в том числе

(1a) $\int x^0 dx = \int 1 \cdot dx = x + C, \quad \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

(2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(3) $\int e^x dx = e^x + C$

(4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x)dx = -\operatorname{ctg} x + C \ \ (x \neq \pi n, n = 0, \pm 1, \dots)$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)dx = \operatorname{tg} x + C (x \neq \pi/2 + \pi n, n = 0, \pm 1, \dots)$

(9) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C\ (x \neq \pi/2 + \pi n, n = 0, \pm 1, \dots)$

(10) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C\ (x \neq 2\pi n, n = 0, \pm 1, \dots)$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1 \ \ (|x| < a, a > 0)$

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \ \ (a > 0)$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \ \ (|x| > a > 0)$

(14) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C_1$

П3. Линии и поверхности 2-го порядка

Кривые 2-го порядка на плоскости

Эллипс (см. рис. 2.19)

Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Точки ($-c$,0) и (c,0) на оси Ox – фокусы эллипса, $2c$ – фокусное расстояние, a и b ($a>b$) – большая и малая полуоси, $b^2 = a^2 - c^2$. Эллипс – множество точек с одинаковой суммой расстояний до фокусов $r_1 + r_2 = 2a > 2c$.

Параметрическое уравнение $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t$, где t – параметр

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} < 1$ – эксцентриситет эллипса. Площадь эллипса $S = \pi ab$.

Окружность: $a = b = R$, $\varepsilon = 0$ и $S = \pi R^2$.

Гипербола (см. рис. 2.20 а)

Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Точки ($-c$, 0) и (c, 0) на оси Ox – фокусы гиперболы, $2c$ – фокусное расстояние, a – действительная полуось, b мнимая полуось, $b^2 = c^2 - a^2$. Гипербола – множество точек с одинаковым модулем разности расстояний до фокусов $|r_1 - r_2| = 2a < 2c$.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} > 1$

Параметрическое уравнение $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ \ y = b\,\mathrm{sh}\,t$, где t – параметр,

$\mathrm{ch}\,t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ – *гиперболический косинус*,

$\mathrm{sh}\,t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ – *гиперболический синус*.

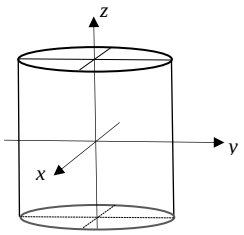
Парабола (см. рис. 2.21 а)

Каноническое уравнение $y^2 = 2px$

Точка ($p/2$,0) на оси Ox – фокус параболы, прямая $x = -p/2$ – директриса. Парабола – множество точек, расположенных на одинаковом расстоянии от фокуса (r) и директрисы (d). Эксцентриситет параболы $\varepsilon = d/r = 1$.

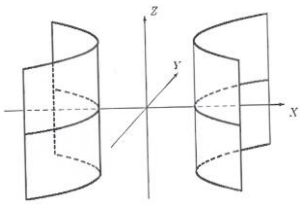
Поверхности 2-го порядка в трехмерном пространстве

Вырожденные поверхности 2-го порядка



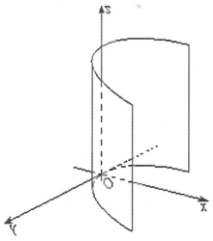
эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



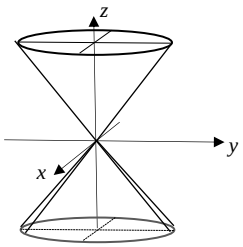
гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



параболический цилиндр

$$y^2=2px$$



конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Невырожденные поверхности 2-го порядка

Эллипсоид (см. рис. 2.22)

Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

a, b, c – полуоси эллипсоида. Если *a*, *b* и *c* разные – трехосный эллипсоид (см. рис. 2.22 б), при *a* = *b*, *b* = *c* или *a* = *c* – эллипсоид вращения (рис. 2.22 а), *a* = *b* = *c* = *R* – сфера. Объем эллипсоида $^4/_3\,\pi abc$, объем сферы $^4/_3\,\pi R^3$

Однополостный гиперболоид (см. рис. 2.23 а)

Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

a, b – действительные полуоси, *c* – мнимая полуось. При *a* = *b* – однополостный гиперболоид вращения.

Двухполостный гиперболоид (см. рис. 2.23 б)

Каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

При *a* = *b* – двухполостный гиперболоид вращения.

Эллиптический параболоид

Каноническое уравнение $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ (*p*, *q* > 0)

При *p* = *q* – параболоид вращения (см. рис. 1.27 б)

Гиперболический параболоид (см. рис. 2.24)

Каноническое уравнение $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ (*p*, *q* >0)

П4. Математические соотношения термодинамики

Термодинамические потенциалы (см. (2.43) и рис. 2.33 в главе 2)

U – внутренняя энергия
H = *U* + *PV* – энтальпия

$F = U - TS$ – свободная энергия Гельмгольца
$G = H - TS = U + PV - TS$ – свободная энергия Гиббса

Бесконечно малые изменения обобщенного потенциала A при изменении параметров состояния системы:

$$dA = d\sum(x_i X_i) = \sum x_i dX_i + \sum X_i dx_i,$$

где $\{x_i\}$ – *обобщенные координаты* (в случае газа объем V и энтропия S), $\{X_i\}$ – *обобщенные силы* (для газа давление P и температура T). Некоторые $\{x_i, X_j\}$ могут быть постоянными. В случае газа

$$dU(V,S) = TdS - PdV$$
$$dH(P,S) = TdS + VdP$$
$$dF(V,T) = -SdT - PdV$$
$$dG(P,T) = -SdT + VdP$$

По формуле *полных дифференциалов* (см. (1.43) в главе 1) термодинамические переменные можно выразить через производные потенциалов:

$$T = \left(\partial U/\partial S\right)_V = \left(\partial H/\partial S\right)_P$$
$$P = -\left(\partial U/\partial V\right)_S = -\left(\partial F/\partial V\right)_T$$
$$V = \left(\partial H/\partial P\right)_S = \left(\partial G/\partial P\right)_T$$
$$S = -\left(\partial F/\partial T\right)_V = -\left(\partial G/\partial T\right)_P$$

Теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \left(\partial U/\partial T\right)_V = T\left(\partial S/\partial T\right)_V = -T\left(\partial^2 F/\partial T^2\right)_V$$

Теплоемкость при постоянном давлении

$$C_P = \left(\partial H/\partial T\right)_P = T\left(\partial S/\partial T\right)_P = -T\left(\partial^2 G/\partial T^2\right)_P$$

Соотношения Максвелла

$$\left(\partial P/\partial S\right)_V = -\left(\partial T/\partial V\right)_S, \quad \left(\partial V/\partial S\right)_P = \left(\partial T/\partial P\right)_S$$
$$\left(\partial P/\partial T\right)_V = \left(\partial S/\partial V\right)_T, \quad \left(\partial V/\partial T\right)_P = -\left(\partial S/\partial P\right)_T$$

П5. Матрицы

Матрица размера $m \times n$ – прямоугольная таблица, имеющая m строк и n столбцов

$$\mathrm{A} = \|a_{ij}\|_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $\{a_{ij}\}$ – обычно числа или функции. Матрица размера $n \times m$, получаемая из A заменой ее строк столбцами, называется *транспонированной*

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \|a_{ij}\|_{n,m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $\|a_{ij}\|$ размера $n \times n$ называется *квадратной*. Квадратная матрица, в которой все элементы $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, называется *диагональной*. Диагональная матрица, в которой все $a_{ii} = 1$ – *единичная* матрица E:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \delta_{ij} \text{ (\textit{символ Кронекера})}$$

Если квадратная матрица совпадает со своей транспонированной матрицей, она называется *симметричной*

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}, \text{ если } a_{ij} = a_{ji} \text{ при всех } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ и } i \neq j$$

Матрица любого размера, в которой все элементы равны нулю, называется *нулевой* и обозначается 0.

Действия над матрицами

Две матрицы $\mathrm{A} = \| a_{ij} \|$ и $\mathrm{B} = \| b_{ij} \|$ одинакового размера $m \times n$ *равны* (A = B), если равны все их элементы, стоящие на одинаковых местах

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ при всех } i = 1, 2, \dots, m \text{ и } j = 1, 2, \dots, n$$

Сложение матриц одинакового размера

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{C}, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ при всех } i = 1, 2, \dots, m \text{ и } j = 1, 2, \dots, n$$

Умножение матрицы на число

$$\alpha\mathrm{A} = \alpha \| a_{ij} \| = \| \alpha a_{ij} \|$$

В частности, A – B = A + (–1)·B (матрицы A и B одинакового размера $m \times n$)

Произведение прямоугольных матриц $\mathrm{A} = \| a_{ij} \|$ размера $m \times n$ и $\mathrm{B} = \| b_{ij} \|$ размера $n \times p$ – это прямоугольная матрица $\mathrm{C} = \| c_{ij} \|$ размера $m \times p$ с элементами

(П 5.1) $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ («строка на столбец»)

Правила умножния квадратных матриц (их размер $n \times n$ должен быть одинаковым)

A(BC) = (AB)C (*ассоциативность*)
A(B + C) = AB + AC, C(A + B) = CA + CB (*дистрибутивность*)
αAB = (αA)B = A(αB), где α– число

В общем случае умножение матриц *некоммутативно*: AB ≠ BA. Если AB = BA, матрицы A и B коммутативны (перестановочны). Диагональные матрицы размера $n \times n$ перестановочны с любыми матрицами того же размера.

След квадратной матрицы A, обозначаемый Sp A (нем. Spur) или Tr A (англ. trace) – это сумма ее диагональных элементов

(П 5.2) $\mathrm{Tr\,A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Определитель, или *детерминант* квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ – это *альтернированная сумма* всех произведений n ее элементов $\{a_{ij}\}$, взятых из разных строк и разных столбцов. Выстроив сомножители в таком произведении слева направо по возрастанию второго индекса $j = 1, 2, \ldots, n$, запишем

(П 5.3) $$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i_1 i_2 \ldots i_n)} \cdot a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$$

Множитель перед произведением – *четность перестановки* по первому индексу ($i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$), равная 1 при четном числе *инверсий* в перестановке ($i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$) и –1 в противоположном случае*. Определитель диагональной матрицы равен произведению всех ее диагональных элементов.

Правила вычисления детерминантов представлены в разд. 3.1 главы 3.

Свойства определителя

$\det(\alpha A + \beta B) = \alpha \det A + \beta \det B$ (где A, B – матрицы $n \times n$, α и β –числа)
$\det(AB) = \det(BA) = (\det A)\cdot(\det B)$
$\det A^{T} = \det A$

*Четность упорядоченного набора целых чисел (здесь это номера строк матрицы), в математике называемого *перестановкой*, равна числу *инверсий*, или *транспозиций* (т.к. слово «перестановка» уже занято) в этом наборе – иначе говоря, числу содержащихся в нем пар номеров (m, k), в которых номер $m > k$ стоит впереди k. Это число можно определить по простой схеме на примере перестановки (2 5 1 4 3 6). Найдем число номеров, стоящих левее 1 (два номера) и вычеркнем единицу. В полученной перестановке (2 5 4 3 6) найдем число номеров, стоящих левее 2 (0 – таких нет). Вычеркнем 2 и найдем число номеров, стоящих в оставшемся наборе (5 4 3 6) левее 3 (2). По тому же алгоритму выпишем число номеров перед 4 (1), 5 (0) и 6 (тоже ноль, так как все остальные номера в исходном наборе уже вычеркнуты). Сложив эти числа, получим число транспозиций 2+0+2+1+0+0=5. Итак, перестановка (2 5 1 4 3 6) нечетная: она состоит из нечетного числа транспозиций в последовательности (1 2 3 4 5 6) (см. книгу Л.И. Головиной [3] в списке литературы).

1. При перестановке двух любых строк или двух любых столбцов определитель изменяет знак на противоположный.
2. Множитель, одинаковый для всех элементов любой строки или любого столбца, можно вынести за знак определителя.
3. Определитель с двумя одинаковыми или пропорциональными строками (столбцами) равен 0.

Определитель порядка $n-1$, полученный вычеркиванием в исходной матрице $n\times n$ i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}, называется *минором* M_{ij} элемента a_{ij}. Примеры разложения детерминантов по минорам представлены в разд. 3.1 главы 3. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Выделяя в прямоугольной матрице A размера $m\times n$ (без ограничения общности положим $m < n$) k строк и k столбцов ($k \le m$), из них можно также построить детерминанты, называемые минорами матрицы A. Максимальный размер $r\times r$ минора, не равного нулю ($Mrr \neq 0$) называется *рангом* r матрицы A.

Если $\det A = 0$, квадратная матрица A называется *вырожденной*, в противном случае *невырожденной*. Для невырожденной квадратной матрицы A размера $n\times n$ можно найти *обратную матрицу* A^{-1} – такую, что $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$ (где E – единичная матрица $n\times n$). При этом

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Матрица, обратная к $A = \| a_{ij} \|$, имеет следующее строение

(П 5.4) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathcal{B}^{T} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathcal{B}^{T}$ – транспонированная матрица $\mathcal{B}$, элементы которой – алгебраические дополнения $\{A_{ij}\}$ к элементам $\{a_{ij}\}$ матрицы A. Такая матрица $\mathcal{B}^{T}$ называется *присоединенной* к матрице A.

Систему n линейных уравнений с n неизвестными (см. разд. 3.1.2 в гл. 3)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

можно представить в матричном виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ или}$$

(П 5.5) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

При det A ≠ 0 (матрица A невырожденная) система имеет единственное решение

$$\mathbf{x} = \mathrm{A}^{-1}\,\mathbf{b},$$

где A^{-1} – обратная матрица (см. выше).

Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

Невырожденная квадратная матрица A размера $n \times n$ порождает в n-мерном пространстве переменных $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ n линейно независимых *собственных векторов* $\{\mathbf{x}^*_1, \mathbf{x}^*_2, \dots, \mathbf{x}^*_n\}$ – таких, что

(П 5.6) $$\mathrm{A}\,\mathbf{x}^*_i = \lambda_i \mathbf{x}^*_i$$

Числа $\{\lambda_i\}$ – *собственные значения* матрицы A, определяемые из *векового уравнения*

(П 5.7) $$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для простоты будем считать, что все $\{\lambda_i\}$ разные. Компоненты собственных векторов находят, подставляя корни уравнения (П 5.7) в (П 5.6). Из собственных векторов матрицы A можно построить такую матрицу C, которая преобразует A к диагональному виду

$$\mathrm{C}^{-1}\mathrm{AC} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

П6. Тензоры

Тензор обобщает понятие квадратной матрицы: это упорядоченный набор $n \times n \times \dots \times n$ (m раз) чисел или функций, называемых *координатами* тензора. Так, для тензора $\mathbf{A}_{ijkl}$ ($m = 4$)

$$i = 1,2,\dots,n; \quad j = 1,2,\dots,n; \quad k = 1,2,\dots,n; \quad k = 1,2,\dots,n;$$

Координаты тензора заданы в n-мерном пространстве. Число индексов m называется *рангом* тензора. Тензор ранга m имеет n^m координат. Тензор нулевого ранга – скаляр (число), тензор 1-го ранга – вектор, тензору 2-го ранга соответствует квадратная матрица. Из-за большого числа координат тензор обозначается буквой с подстрочными индексами ($\mathbf{A}_{ijk}$, $\boldsymbol{\sigma}_{hkl}$, $\mathbf{B}_{ijkl}$ и т.д.) без дополнительных указаний на множество (скобок).

Тензоры могут быть симметрическими или антисимметрическими по перестановке пары индексов: соответственно $\mathbf{T}_{ijk} = \mathbf{T}_{jik}$ или $\mathbf{T}_{ijk} = -\mathbf{T}_{jik}$. В трехмерном пространстве у

симметрического тензора 2-го ранга A_{ij} 6 независимых координат ($a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ и $a_{23} = a_{32}$), у антисимметрического тензора 2-го ранга (*псевдовектора*, или *аксиального вектора*) $\mathbf{B}_{ij}$ три независимые координаты (из $b_{ii} = -b_{ii}$ следует $b_{ii} \equiv 0$)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & 0 & b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Любой тензор 2-го ранга (матрицу) можно представить в виде суммы симметрического (S) и антисимметрического (A) тензоров

$$M = S + A, \text{ где}$$
$$S = ½ (M + M^T)$$
$$A = ½ (M - M^T),$$

где M^T – *транспонированный* тензор 2-го ранга (транспонированная матрица).

Примеры псевдовекторных величин – момент импульса, угловая скорость, напряженность магнитного поля, магнитная индукция. У трехмерного тензора 3-го ранга, антисимметрического по всем индексам (*псевдоскаляра*) 21 координата $c_{iii}=c_{iij}=c_{iji}=c_{ijj}=0$ ($i, j = 1, 2, 3$), а для остальных координат

$$c_{123} = c_{231} = c_{312} = -(c_{213} = c_{321} = c_{132})$$

Примеры псевдоскаляров – скалярное произведение вектора на псевдовектор, круговая поляризация света.

Действия над тензорами

Сложение

$\mathbf{A}_{ijkl} + \mathbf{B}_{ijkl} = \mathbf{C}_{ijkl}$: тензор с координатами $c_{ijkl} = a_{ijkl} + b_{ijkl}$ при всех $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$ (только для тензоров одного ранга в одном и том же n-мерном пространстве)

Умножение на число

$\mathbf{B}_{klm} = \alpha\mathbf{A}_{klm}$ – тензор с координатами $\{b_{klm}=\alpha a_{klm}\}$

Тензорное умножение

$\mathbf{A}_{ij} \times \mathbf{B}_{klm} = \mathbf{C}_{ijklm}$ (в одном и том же пространстве)

Тензорным произведением двух тензоров рангов p и q, заданных в пространстве одной размерности, является тензор ранга $p+q$; его координаты получаются перемножением каждой координаты одного тензора со всеми координатами другого. Так, координаты трехмерного тензора ранга p можно записать как тензорное произведение p векторов, в котором каждая координата каждого вектора ($x^{(i)} y^{(i)} z^{(i)}$) перемножается со всеми координатами всех остальных векторов.

$$x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}\dots x^{(p)},\ y^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}\dots x^{(p)},\ z^{(1)}x^{(2)}x^{(3)},,,x^{(p)},\ x^{(1)}y^{(2)}x^{(3)}\dots x^{(p)}, \dots$$

Для $p = 2$ такие произведения

$$x^{(1)}x^{(2)},\ y^{(1)}x^{(2)},\ z^{(1)}x^{(2)},\ x^{(1)}y^{(2)},\ y^{(1)}y^{(2)},\ z^{(1)}y^{(2)},\ x^{(1)}z^{(2)},\ y^{(1)}z^{(2)} \text{ и } z^{(1)}z^{(2)}$$

– это 9 чисел, составляющих тензор 2-го ранга. Тензорное умножение некоммутативно. При переходе к другой системе координат все m векторов ($x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$), образующих тензорное произведение, преобразуются квадратной матрицей $\| a_{ij} \|$ размера 3×3:

$$x_1^{(i)} = a_{11}x^{(i)} + a_{12}y^{(i)} + a_{13}z^{(i)}$$
$$y_1^{(i)} = a_{21}x^{(i)} + a_{22}y^{(i)} + a_{23}z^{(i)}$$
$$z_1^{(i)} = a_{31}x^{(i)} + a_{32}y^{(i)} + a_{33}z^{(i)}$$

Сверткой тензора **A** ранга p по паре индексов i и j называется тензор **B** ранга p–2, компонентами которого служат суммы координат тензора **A** с *одинаковыми* индексами i и j. Так, след матрицы $\mathrm{Tr}\,\|a_{ij}\|=\Sigma\, a_{ii}$ – это свертка тензора 2-го ранга (т. е. число). Сверткой тензора 3-го ранга $\mathbf{A}=\{a_{ijk}\}$ по первому и второму индексам является тензор 1-го ранга (вектор) **B** с координатами

$$b_1 = a_{111} + a_{221} + a_{331},\ b_2 = a_{112} + a_{222} + a_{332},\ b_3 = a_{113} + a_{223} + a_{333}$$

Компоненты тензора **A** с первыми индексами $i \neq j$ (a_{121}, a_{122} и т.д.), в свертку не входят.

Умножение со сверткой по паре одинаковых индексов – это тензорное умножение и свертка его результата по заданной паре индексов, указанной одинаковыми символами. Для тензоров в трехмерном пространстве

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{jkl} = \mathbf{C}_{ikl}, \text{где } c_{ikl} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{jkl}$$

Для тензоров 2-го ранга, т.е. квадратных матриц, такой операцией является обычное перемножение двух матриц «строка на столбец» по формуле (П 5.1). В записи умножения со сверткой подразумевается суммирование по произведениям координат с одинаковыми подстрочными индексами, при этом знак суммы не указывается.

При перемножении вектора и матрицы результат зависит от порядка «сомножителей»

$$(x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (x_1 \;\; 2x_1 + x_2); \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2\\ x_2\end{pmatrix}$$

Вектор-строка в таком умножении называется *ковариантным* (в тензорных обозначениях x_i), вектор-столбец *контравариантным* (обозначается x^i). При тензорном умножении выполняется свертка по парам одинаковых «верхних» и «нижних» индексов, знак суммы не указывается:

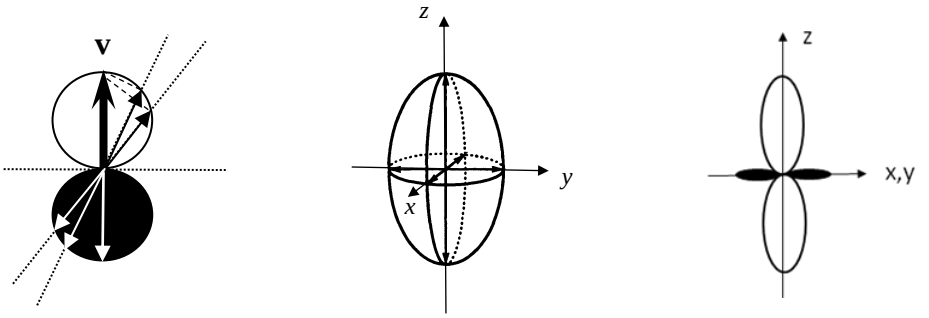
$$x_i y^i = \sum x_i\, y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$ – скалярное произведение

(см. формулу (3.10 а) в гл. 3). В общем случае тензор $\mathbf{A}_{ij\ldots}^{kl\ldots}$ ранга $p+q$ ковариантен по p «нижних» индексов и контравариантен по q «верхних» индексов. Так, квадратная матрица $\| a_{ij} \|$ эквивалентна тензору $\mathbf{a}_i{}^j$, ковариантному по строкам и контравариантному по столбцам.

Графическим образом тензорных величин служат *указательные поверхности*, точки которых по разным направлениям в пространстве отстоят от начала координат на

расстояния, пропорциональные проекциям изображаемой величины на эти направления. Так, проекция векторной величины **v** максимальна в направлении, совпадающем с **v**, равна нулю в перпендикулярном направлении и имеет проекции $0 < v_0 \cos\varphi < v_0$ на все другие прямые. Проекции вектора **v** в противоположных направлениях на этих прямых отрицательны. Положительные значения проекций обозначают белым, а отрицательные черным цветом. Указательной поверхностью тензора 2-го ранга, все компоненты которого положительны (например, тензора теплового расширения для большинства кристаллов) в общем случае является трехосный эллипсоид – но кристаллы ряда соединений при нагревании сжимаются по некоторым направлениям (гл. 4, рис. 4.2)

Примеры указательных поверхностей



Вектор | Тензор 2-го ранга | Тензор теплового расширения $CaCO_3$ (см. гл. 4, рис. 4.2)

П7. Некоторые уравнения в частных производных

Уравнение теплопроводности (параболического типа, см. разд. 3.2.1 в гл. 3)

1D (тонкий теплоизолированный стержень):

(П 7.1) $$u'_t = a^2 u''_{xx} ,$$

3D, общий случай (*неоднородное уравнение теплопроводности*)

(П 7.1 а) $$u'_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t),$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа,

$f(x, y, z, t)$ – функция источника. При $f = 0$ (П 7.1 а) переходит в *однородное уравнение теплопроводности*.

Решение уравнения (П 7.1) для бесконечного стержня:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right] d\xi$$

где $\varphi(x) = u(x, 0)$ – начальное распределение температуры. Также (П 7.1) и (П 7.1 а) называются *уравнением диффузии*: тогда u – концентрация, $a^2 = D$ – коэффициент диффузии.

Волновое уравнение (гиперболического типа)

1D (натянутая струна):

(П 7.2) $u''_{tt} = v^2 u''_{xx}$, где v – фазовая скорость волны.

Общее решение для однородной бесконечной струны: распространение двух бегущих волн в противоположных направлениях

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-vt) + \varphi(x+vt)] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\xi)d\xi, \quad \textit{формула Даламбера}$$

где $\varphi(x) = u(x, 0)$ и $\psi(x) = u'_t(x, 0)$ – начальные распределения смещений и скоростей.

Частные решения:

1D: $w(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ – плоская волна

3D: $w(\mathbf{r},t) = \frac{A}{r}e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ – сферическая волна,

где A –максимальная амплитуда (действительное число), w – комплексная амплитуда, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – положение точки в пространстве, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор, а действительная амплитуда

$$u = |w|$$

Для струны длиной l с жестко закрепленными концами (начальные условия $u(0, t) = u(l, t) = 0$) общее решение – *стоячие волны*

(П 7.3) $$u(x,t) = \sum_1^\infty \left[A_n \cos\left(\frac{\pi n v t}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n v t}{l}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$$

3D (волны в индифферентной среде):

(П 7.4) $$\partial^2 u/\partial t^2 = v^2\left(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2\right) + f(x,y,z,t) = v^2\Delta u + f$$

Δ – оператор Лапласа, f – функция источника; при $f = 0$ – *однородное волновое уравнение.*

Уравнения эллиптического типа в 3D- случае

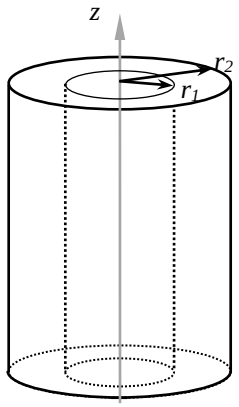
(П 7.5 а)	$\Delta u = 0$	*уравнение Лапласа*
(П 7.5 б)	$\Delta u = f(x, y, z)$	*уравнение Пуассона*

(Δ – оператор Лапласа, f – функция источника). Так как $\partial u/\partial t$, $\partial^2 u/\partial t^2 \equiv 0$, решения – стационарные распределения, определяемые граничными условиями. Для теплоизолированного 1D-стержня с температурой на концах $u(0) = U_1$, $u(L) = U_2$ – линейное распределение температуры (см. рис. 3.22 в главе 3)

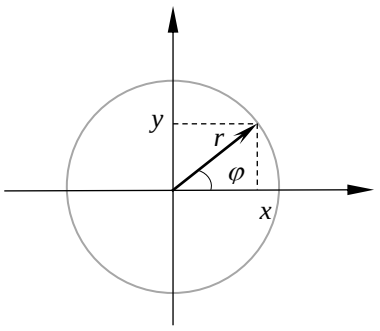
$$u = \frac{U_2 - U_1}{l}x + U_1$$

Для поля конденсатора с электродами в виде бесконечных коаксиальных цилиндров

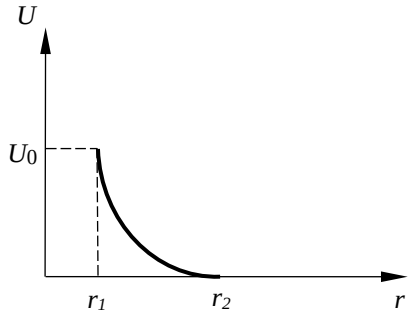
(П 7.6) $$u(r) = \frac{U_0}{\ln(r_2/r_1)}(\ln r_2 - \ln r)$$



цилиндрический конденсатор



связь (*x*, *y*) с (*r*, φ) в полярных и цилиндрических координатах



электростатический потенциал внутри цилиндрического конденсатора

Уравнение Навье-Стокса

(П 7.7) $$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{\gamma}{\rho}\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla P + f(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{v} = (v_x,\ v_x,\ v_x)$– скорость жидкости, ρ – ее плотность, γ – динамическая вязкость, $f(\mathbf{r})$ – поле внешних сил, $\nabla P = \left({}^{\partial P}/_{\partial x},\ {}^{\partial P}/_{\partial y},\ {}^{\partial P}/_{\partial z}\right)$ – градиент давления, с дополнительным условием неразрывности: для несжимаемой жидкости это

$$\nabla\mathbf{v}\ (=\operatorname{div}\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

В одномерном случае плоской волны на мелкой воде (см. рис. 3.27 в гл. 3)

(П 7.7 а) $$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Уравнение Шредингера

(П 7.8) $$i\hbar\frac{\partial\Psi(q,t)}{\partial t} = \widehat{\mathcal{H}}\Psi(q,t),$$

где Ψ(*q*,*t*) – комплексная волновая функция, $\widehat{\mathcal{H}}$ – оператор Гамильтона (гамильтониан), *i* – мнимая единица, $\hbar$=1.055·10^{-34} Дж·с – постоянная Планка. Для *N*-частичной системы

(П 7.8 а) $$\widehat{\mathcal{H}} = -\hbar^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\Delta_j}{2m_i} + U(q,t)$$

Здесь *j* – номер частицы, m_j – ее масса, Δ_j – оператор Лапласа, действующий на координаты *j*-й частицы q_j, $U(q)$ – потенциальная энергия как функция координат q всех частиц в системе. Квадрат модуля волновой функции $\rho(q,t) = \Psi^*\Psi = |\Psi(q,t)|^2$ – плотность вероятности нахождения системы в точке q конфигурационного пространства в момент *t*:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \int\Psi^*\Psi\,dq = 1$$

(интегрирование по всему конфигурационному пространству).

Если гамильтониан не зависит от времени, $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ и $\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\psi$. Для волновой функции $\psi(q)$ справедливо *стационарное уравнение Шредингера*

(П 7.8 б) $$\hat{\mathcal{H}}\psi = E\psi,$$

где E – сохраняющаяся энергия системы.

Одномерному движению квантовой частицы в поле связывающего потенциала $U(x)$ отвечает дискретный спектр собственных значений энергии и «стоячие волны вероятности»:

одномерный потенциальный ящик

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2, \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

(где L – длина ящика, m – масса частицы, n = 1, 2, … - квантовое число),

линейный гармонический осциллятор

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \psi_n(x) = A_n \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right).$$

Здесь $\omega = \sqrt{k/m}$ – классическая круговая частота колебаний, $n = 0, 1, 2, \ldots$ – колебательное квантовое число, H_n – *полиномы Эрмита*, A_n – нормирующие множители ($\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1$)

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

Свободному движению квантовой частицы с сохранением кинетической энергии E соответствует плоская «волна вероятности»

$$\Psi \sim e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})},$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – вектор координат, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ – вектор импульса частицы.

Уравнение Фоккера-Планка

(П 7.9) $$\frac{\partial \rho(q_1,\ldots,q_n,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[a_i(q,t) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_j}b_{ij}(q,t)\right]\rho(q,t),$$

где $\rho(q_1,\ldots,q_n, t) = \rho(q, t)$ – плотность вероятности в пространстве параметров системы («координат») $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, условно обозначенных q, $(a_1, \ldots, a_n)$ – вектор подвижности системы, b_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ – стохастический тензор диффузии. Уравнением (П 7.9) описывают изменения параметров системы в совокупном поле детерминистских «сил» и малых стохастических воздействий (например, плотности броуновских частиц под воздействием среды) Ему, в частности, соответствует изменение концентрации $\rho(x, y, z)$ частиц, взвешенных в жидкости, под действием поля сил или скоростей. В однородной

среде тензор заменяется скаляром (коэффициентом диффузии D). В одномерном случае (П 7.9) переходит в уравнение диффузии с *вектором сноса* v:

(П 7.9 а) $$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial \rho}{\partial x} + D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

с решением

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left[-\frac{(x-x_0-vt)^2}{4Dt}\right]$$

(см. рис. 4.23 в главе 4).

П8. Основные распределения случайных величин (гл. 8, разд. 8.2)

Дискретные случайные величины $\{X_i\}$ с вероятностями $\{P_i\}$

Равномерное распределение (i = 1, 2,…, n) (гл. 8, рис. 8.7 а)

$P_i = 1/n$ для любого i.
$P(X \le m) = \frac{m}{n}$ – кумулятивное распределение вероятности
математическое ожидание $\mathrm{M}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i = \frac{n+1}{2}$
дисперсия $\mathrm{D}[X_i] = \mathrm{M}[X_i - \mathrm{M}(X_i)]^2 = \mathrm{M}\left(X_i^2\right) - [\mathrm{M}(X_i)]^2 = \frac{n^2-1}{12}$
энтропия по Шеннону $H(X_i) = \log_2 n$

Биномиальное распределение (i = 1, 2,…, n) (гл. 8, рис. 8.8)

$P_m = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
$P(X \le m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ – кумулятивное распределение вероятности (гл. 8, рис. 8.8 б)
математическое ожидание $\mathrm{M}[X_i] = np$
дисперсия $\mathrm{D}[X_i] = np(1-p)$
энтропия по Шеннону $H(X_i) = \frac{1}{2}\log_2[2\pi e n \cdot p(1-p)] + O\left(\frac{1}{n}\right)$

Распределение Пуассона (i = 1, 2,…, ∞) (гл. 8, рис. 8.9)
$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$
$P(X \le m) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\Gamma(m+1,\ \lambda)}{m!}$ – кумулятивное распределение вероятности*
математическое ожидание $\mathrm{M}[X_i] = \lambda$
дисперсия $\mathrm{D}[X_i] = \lambda$
энтропия по Шеннону $H(X_i) = \lambda(1 - \ln\lambda) + e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln(k!)}{k!}$

* Гамма-функция Эйлера $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, Re z>0 (см. Табл. 8.6 в главе 8).

Непрерывные случайные величины

Нормальное распределение (распределение Гаусса) (гл. 8, рис. 8.12)

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ – плотность вероятности

$P(X \le x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-z^2/2} dz$ – кумулятивное распределение вероятности, где $y = (x - \mu)/\sigma$ (гл. 8, формула (8.16) и рис. 8.12 б).

математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \mu$

дисперсия $\mathrm{D}[X] = \sigma^2$

дифференциальная энтропия (в натах) $H(X) = \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)$

Логнормальное распределение (гл. 8, рис. 8.13)

$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ – плотность вероятности

$P(X \le x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$ – кумулятивное распределение вероятности

математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$

дисперсия $\mathrm{D}[X] = [\exp(\sigma^2) - 1] \cdot \exp(2\mu + \sigma^2)$

дифференциальная энтропия $H(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \mu$

Экспоненциальное распределение Больцмана-Гиббса (гл. 8, рис. 8.16 а)

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ – плотность вероятности

$P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$ – кумулятивное распределение вероятности

математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \frac{1}{\lambda}$

дисперсия $\mathrm{D}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

дифференциальная энтропия $H(X) = 1 - \ln\lambda$

Распределение Лапласа (гл. 8, рис. 8.16 б)

$f(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x-\beta|}$ – плотность вероятности

кумулятивное распределение вероятности: $P(X \le x) = \frac{1}{2} e^{\alpha(x-\beta)}$ ($x \le \beta$); $1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha(x-\beta)}$ ($x > \beta$)

математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \beta$

дисперсия $\mathrm{D}[X] = \frac{2}{\alpha^2}$

дифференциальная энтропия $H(X) = \ln\left(\frac{2e}{\alpha}\right)$

Распределение Коши (см. гл. 8, рис. 8.14)

$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{(x-\mu)^2+\gamma^2}$ – плотность вероятности

$P(X < x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-\mu}{\gamma}\right)$ – кумулятивное распределение вероятности

математическое ожидание не определено
дисперсия $\mathrm{D}[X] = \infty$
дифференциальная энтропия $H(X) = \ln(4\pi\gamma)$

Логистическое распределение (гл. 2, формула (2.6) и рис. 2.2)

$f(x) = \frac{\exp[-(x-\mu)/\sigma]}{\sigma\{1+\exp[-(x-\mu)/\sigma\}^2}$ – плотность вероятности
$P(X \le x) = \frac{1}{1+\exp[-(x-\mu)/\sigma]}$ – кумулятивное распределение вероятности
математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \mu$
дисперсия $\mathrm{D}[X] = \pi^2\sigma^2/3$
дифференциальная энтропия $H(X) = \ln\sigma + 2$

Распределение Парето (гл. 8, рис. 8.17)

$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^k$ ($x_0 \le x < \infty$) – плотность вероятности
$P(X < x) = 1 - \alpha\left(\frac{x_0}{x}\right)^{k-1}$ – кумулятивное распределение вероятности ($x > x_0$, $\alpha > 0$)
математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \frac{\alpha x_0}{k-1}$ при $k > 1$, $\mathrm{M}[X] = \infty$ при $k \le 1$
дисперсия $\mathrm{D}[X] = \left(\frac{\alpha x_0}{k-1}\right)^2 \frac{\alpha k}{k-2}$ при $k > 2$, $\mathrm{D}[X] = \infty$ при $k \le 2$
дифференциальная энтропия $H(X) = \ln\left(\frac{k}{\alpha x_0}\right) + \frac{\alpha}{k} + 1$

Распределение Вейбулла [*]

$f(x) = \frac{k}{\lambda^k}x^{k-1}\exp\left[-\frac{x^k}{\lambda^k}\right]$ – плотность вероятности
$P(X < x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right]$ – кумулятивное распределение вероятности
математическое ожидание $\mathrm{M}[X] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$ [**]
дисперсия $D[X] = \lambda^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^2\right]$
дифференциальная энтропия $H(X) = \lambda\left(1-\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{\lambda}{k}\right)^k + \ln\left(\frac{\lambda}{k}\right)$

[*] обобщение экспоненциального распределения (при $k = 1$) на поток независимых событий с возрастающей ($k > 1$) или снижающейся вероятностью ($k < 1$), см. разд. 9.6.1 в главе 9.
[**] Гамма-функция Эйлера, см. выше

Литература

1. Н.Г. Тактаров. *Справочник по высшей математике для студентов вузов*. М.: ЛИБРОКОМ, 2015.
2. В.А. Артамонов, *Введение в высшую алгебру и аналитическую геометрию*, М: ФАКТОРИАЛ ПРЕСС, 2007.
3. Л.И. Головина, *Линейная алгебра и некоторые ее приложения*, 5-е изд., М.: Наука, 1985.

4. В.И. Горшков, И.А. Кузнецов, *Основы физической химии*, Изд-во МГУ, 1993.
5. Б.В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, М.: ЛИБРОКОМ, 2011.

Ответы к задачам

Глава 1. **1.1** Луна 1.6 м/с^2, Марс 3.7 м/с^2, Юпитер 23.9 м/с^2; **1.3** 2.3 нм; **1.4** 33.2 ат. %; **1.5** M≤73.6 кг; **1.6** $2.69\cdot10^{16}$ молекул; **1.8** $V=\frac{\pi}{2}H^2=128$ см^3; **1.10** A(–1, 2) – точка максимума, $y''=-6$; B(1, –2) – точка минимума, $y''=6$; O(0, 0) – точка перегиба, $y''=0$.

Глава 2. **2.3** 1 с, 2 с; **2.4** скорости направлены противоположно, $v_1/v_2=m_2/m_1$.
При $m_1=m_2=m\lesssim M/2$ значение скоростей $v=c\sqrt{M/m-2}$; **2.6** E=66.88 кДж, H≈6.8 м;

Глава 3. **3.1** $4-3i$; **3.5** $AB=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 13\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}10 & 14\\ 4 & 6\end{pmatrix}$; **3.6** $\begin{pmatrix}0.3 & 0.1\\ -0.4 & 0.2\end{pmatrix}$ **3.7** –9; **3.8** –8; **3.9** $b_{11}b_{22}b_{33}\ldots b_{nn}$; **3.11** (1) 0.396 нм (396 пм, или 3.96 Å), (2) 30 пм (0.3 Å), (3) 3.5 пм (0.035 Å).

Глава 4. **4.4** $x^2-x-1=0$, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, так что x_1 = 1.61803…= φ, x_2 = –0.61803… = –1/φ.

Глава 6. **6.4** B_1 = 0.8, $B_2=B_3=B_4=B_5=0$; **6.5** $C_1=C_2$ = 1/3, C_3 = 1, $C_4=C_5=C_6=0$, ⟨C⟩=0.277…

Глава 7. **7.3**

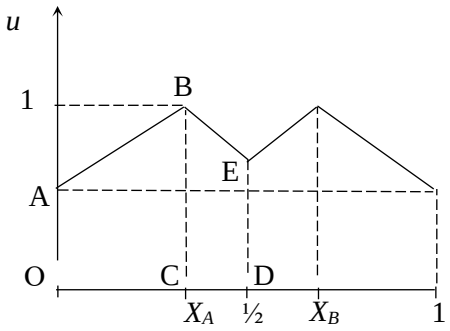
	а	э
а	0,0	2,3
э	3,2	1,1

; **7.9** для B

	1	2
1	−1	−2
2	2	1

(антагонистическая игра).

7.7



Равновесное расположение лотков X_A и X_B симметрично относительно центра ½, иначе один из продавцов получает преимущество. Рассмотрим левую половину графика. Интегральная полезность для покупателей в этой части пляжа равна сумме площадей прямоугольных трапеций OABC и BCDE с длинами оснований OA $1-X_A$, BC 1 и DE ½ + X_A (при $x<X_A$ $u=1+x-X_A$, а при $X_A<x<$½ $u=1+X_A-x$, остается подставить в эти два равенства, соответственно, $x=0$ и $x=$ ½). Высоты трапеций OABC (OC) $h_1=X_A$, BCDE (CD) $h_2=$ ½ $-X_A$. Площадь трапеции равна произведению полусуммы длин оснований на высоту. Чтобы избавиться от множителя ½, найдем удвоенную сумму

$$Y=2(S_{OABC}+S_{OABC})=(2-x_A)X_A+\left(\tfrac{3}{2}+X_A\right)\left(\tfrac{1}{2}-X_A\right)=-2{X_A}^2+X_A+\tfrac{3}{4}$$

Максимуму суммы соответствует $dY/dX_A=0$, то есть

$$-4X_A+1=0, \text{ или } X_A=\tfrac{1}{4},\ X_B=1-X_A=\tfrac{3}{4}$$

Глава 8. **8.3** $P_0=P_4$ = 0.0625, $P_1=P_3$ = 0.25, P_2 = 0.375.

Предметный указатель

Автоволны....240, 262, 278
бактериальные....277
автоколебания....234,
автомобильные потоки....**286**
клеточные автоматы 293-295
макроскопические модели 289-291
микроскопические модели 291-293
фундаментальная диаграмма 289-290
аксиомы теории вероятностей....465
алгебра....**442**
булева....751
тропическая 443-445
алгоритм Верле....209
Гейла-Шепли....439
генетический....758
Мамдани....732
муравьиный....757
пчелиный....757
алгоритмическая торговля....535
альтруизм....386, 770
анализ формальных понятий 754-756
асабия....653
аттрактор....250, 426
Лоренца....252
странный....253, 532,
аукционы....**411**
Викри....411
Африканская мировая война....654

Базы знаний....754
биополитология....773
биржа....**519**
индексы....**520**
квантовоподобные модели....545
политических прогнозов....642
технический анализ....521
фундаментальный анализ....521
блочное моделирование.... 596-598
борьба за ренту....405
броуновское движение.... 258-260

Валовый внутренний продукт....458
вариационный принцип 94, 775-777
векторы....**143**
аксиальный....99, 145
наблюдения....713
векторное произведение....99, 145
полярный....145,
скалярное произведение 145, 362, 566
случайные....568
собственные....156, 600
состояния....713
управления....713
Шепли....435
вероятность **462**
алгебраическое определение 465
плотность....187, 470
условная....465
военные науки....400, 654
войны **651**, 773-774
волатильность 420, 521, 535
кластеризация 526
волны бегущие....169
де Бройля 198-201
интерференция....172, 201
стоячие.... 175-177
суперпозиция 173

Газ идеальный....38
реальный 128
геополитика....651
геоинформационные системы 297, 519, 690
гидродинамика 179-185
вязкость....180, 184
ламинарное течение 182
турбулентное течение 184
градиент....61, 162, 207
n-граммы....575, 580
графы **308**, 596, 598-603, 763
взвешенные 312
матрицы смежности....311
ориентированные....309
простые....309
случайные....**325**
Барабаши-Альберт....329
Уоттса-Строгаца 327
Эрдеша-Реньи 325
спектр....311, 323
группы малые.... **593**, 598-603

Движение бактерий 275-277
«живых частиц» **275**
вихревое....277, 282,
роевое....282
пешеходов **298**
моделирование 299-303
турбулентность 305
фундаментальная диаграмма .299
дележ утилитарный 429
эгалитарный 429
демографические данные....133, 672
демографический переход 134
дендрограммы....514, 572
деньги **492**
агрегаты....**506**
инфляция 503, 507
кинетическая теория....113, **495**
количественная теория....502

дерево 309, 515
игры 409
квадратомическое 787
октотомическое 787
диаграмма бифуркационная 249, 271, 664
Ламерея 267, 578, 622
паутинная 269, 455
Хассе 751
Эйлера-Венна 725
дивергенция 162, 254
дилемма бандита **386**, 422, 770
детерминированный хаос **251**, 270
диск Пуанкаре 363
дисперсия 478, 569
диффузия инноваций 79
доходность логарифмическая 526, 546
дуополия Курно 407, 415

Задача о коммивояжере 319, 757
о ранце 317
о светофоре 46
о «шофере-убийце» 712
законы Ауэрбаха 585
Бенфорда 644
Вальраса 456
всемирного тяготения 28
газовые **37**
Гука 26, 160
действующих масс 125
Джоуля-Ленца 44, 115
Кирхгофа 45
Кулона 28
Ньютона **29**
постоянного тока **42**
Ричардсона 657
сохранения импульса **95**, 109
массы 95
момента импульса 98
энергии 27, 91
Стивенса 70
Фехнера 70
Хипса 587
Ципфа **585**, 809
золотое сечение 265

«**И**гра в Жизнь» 286
«игра в имена» 581
«игра в меньшинство» 418
игры **375**
в нормальной форме 377
в развернутой форме 409
двух лиц **382**
квантовые **549**
кооперативные **426**
блокирующая коалиция 435
устойчивые браки 437
ядро игры 428, 435
на сетях 400, 517
непрерывные **402**
полковника Блотто **400**
потенциальные 406
рефлексивные 416-417
с неполной информацией **413**
стохастические 383
эволюционные **421**, 770
фазовая плоскость 425
ястребы и голуби 422
иерархии **593**, 706, 766
иероглифы 795, 798
индекс Банцафа 636
Доу-Джонса 520
индексы политического развития 642
инсайт 697, 765, 798
интеграл 56-59, 61-63
многократный 61
неопределенный 56
определенный 58
интеллект **693**, 695-698
групповой 762-766
индивидуальный 695, 736
искусственный **742**, 806
логический 747
сильный 742, 780, 806
слабый 742
коллективный **760**
макиавеллиевский 739
модульная модель **794**
организационных систем **766**
распределенный **693**
модульная структура **803**
социальный **737**
роевой **698**, 723
компьютерные модели **757**
эмерджентный 759, 765
интеллектуальное управление ресурсами 760
искусственные нейронные сети **743**
глубокое обучение 747
полносвязные 746
сверточные 746
исследование операций 377
историческая демография 672
историческая информатика 670
история **669**
математическая **682**
физическая **676**

Каскадные процессы 348, 539, 623, 660
квадратичная модель боя 655
квантовая когнитивистика 554
кейнсианство 505
кластерный анализ 568
клеточные автоматы **284**, 293
климат 32, 676, 680
клиодинамика 686
клиометрия 670, 683
ковариация 336, 478

когнитивные карты....**320**
колебательные реакции....**237**
Белоусова-Жаботинского....239
брюсселятор....238
комплексное оценивание....321, 769
коннектом....340
консенсус....374, 581, 604, 608
контроллер....715-716
нечеткий....729
коэффициент Джини....497
корреляции....335, 478
краниометрия....783-785
крест Хикса....502
кривая логистическая....79
Лоренца....497
Филлипса....505
кривые 2-го порядка....100-102,
кризисы финансовые....523
экономические....**537**
криптовалюты....509
критические параметры....131-133

Латентный семантический анализ....572
ликвидность....494, 506
лингвистика....**577**
логика законы....747
исчисление высказываний....753
классическая....**747**
математическая....748-752
нечеткая....752
продукционные правила....734, 752
операции....748
парадоксы....753
переменные лингвистические....728, 752
пропозиционные....750
формулы....750
логистическое отображение....266-271
логическое программирование....753

Макроэкономика....458, 507
«малый ледниковый период»....678
манипулирование....633, 647
массовые многопользовательские
онлайн-игры....659
математическое ожидание....477
матрицы....**145**
взаимного влияния....609
контекстная....755
корреспонденций....314, 399
леонтьевские ввода-вывода....152-156
наблюдения....714
определители....150-152, 158
платежей....383, 549, 770
реляционные....597
состояния....713
семантических отношений....574
сингулярное разложение....570
стохастические (марковские)....610
управления....714
маятник математический....84-85
физический....86-88
Фроуда....234
«мексиканская волна»....241
мемы....613
метод главных компонент....569, 643
молекулярной динамики....209, 758
Монте-Карло....208, 294, 641
механика Бома....554-556
классическая....**90**
квантовая....**185**
волновая функция....187-190
гамильтониан....190, 548
постоянная Планка....190
принцип суперпозиции....189
соотношение
неопределенностей....198, 202
релятивистская....**214**
преобразования Лоренца....215
пространство-время....221
микроэкономика....63, 454-458
множества....**463**
выпуклые....432
нечеткие....726
функция принадлежности....726
множители Лагранжа....**499**
модели агент-ориентированные....**518**
культурологии....608
политической конкуренции....639-641
медианная....639
многомерная....640
пороговые....620
эпидемиологии....344
модель Бака-Снеппена....661
большинства....605
Бонабё....594
гравитационная....33, 517
Грановеттера....621
де Гроота....609-611
избирателя....605
Изинга....212, 603
Лотки-Вольтерра....**234**, 424
мешка слов....615
Нагеля-Шрекенберга....293
Поттса....213, 606
рационального правонарушителя....305
сжимаемой жидкости....289
социального воздействия....605
социального поля....299
Таллока....655
условного доверия....608
Шеллинга....623
шнайдовская....605
Эпштейна....624
мозговой штурм....764
монетаризм....505
мышечные синергии....799

Нейролингвистическое программирование.....583
нейрофизиология мозга 556

Обработка естественных языков.....577
образ-схема 796
общественные насекомые..... 698-705
эусоциальные 698
ограниченная рациональность.....418, 544, 553
онтологии 755
оптимизация дискретная..... 377-378
многокритериальная.....459, 628
фронт Парето 461
оптимум Парето.....394, 551
осциллятор гармонический 182-184
квантовый.....193, 546
Курамото 368-370
отношения предпочтения 388, 629, 648

Парадокс Браеса 47, 399
выборов 642
Кондорсе 630
Малишевского 647
парламент **635**
парламентские коалиции 636-638
пассионарность 653, 680
Пелопонесская война 683
поверхности 2-го порядка..... 102-104
седловая точка 104
полезность 66, 387, 456-458, 640
полисемия.....579
политические технологии **646**
политический атлас современности.....642
политология 560, **627**
математическая.....**638**
политэкономия.....450, 487
«порядок клевания».....706
потенциал 31
Борна-Майера 106, 300
игры 407
Леннард-Джонса.....106, 292
стратегический государства 41
потенциалы термодинамические 118-119
правило де Бордá 631
Лопиталя 53, 617
прерывистое равновесие **660**, 754
прерывистое управление.....295, 529, 810
принцип Кондорсе.....629
Ле Шателье 127
максимальной энтропии 283
наименьшего действия..... 92-94, 579
наименьших усилий 300, 585, 775
производные от функций..... 50-55
финансовые инструменты 167
частные 60
пространство евклидово 222
конфигурационное 207
Минковского.....223, 364
политических координат.....639
представлений..... 721, 780-782, 801
псевдоевклидово.....222
семантическое.....565, 801
случайных событий 465
состояний 713, 780-782
фазовое 251, 426
процессы на сетях.....**341**
каскадные 348
ко-эволюция 370
модель Изинга.....366
перколяция 342, 344
синхронизация узлов.....367
фазовые переходы **365**
психоистория 671
психолингвистика.....792

Равновесие игры 391
в доминирующих стратегиях.....391
в осторожных стратегиях.....392
седловая точка 393
в смешанных стратегиях **396**
в чистых стратегиях 396
Нэша.....394
равновесие спроса и предложения 64, 454
равновесие Уордропа 399
«разум толпы»..... 708-710
распознавание образов 740, 742, 786
распределение биномиальное.....468
Больцмана-Гиббса 112
Вейбулла.....673
Гаусса (нормальное).....166, 470, 477
Гиббса (экспоненциальное) 475
Коши 473
Лапласа 475
Леви 527
усеченное.....528
логарифмически нормальное.....472
Максвелла.....112
обратное степенное 585
Парето.....475
Пуассона.....326, 469
равномерное 466
ранг-размерное.....585, 594
растянутая экспонента 673, 682
распределения случайных величин.....**466**
медиана.....481
моменты.....**477**
энтропия 492
распространение мнений **603**
слухов 607
расстояние Хэмминга.....513
революция в приматологии 738
резонанс .. 86
стохастический ... 263
решетка.....324, 751
понятий.....755
робототехника.....717

групповая 723
рынок 63, 449, 710, 759
равновесие 454
совершенный 457
ряд Фибоначчи 265

Самоорганизованная критичность 660
свертывание информации 697, **740**,
«свободная энергия мысли» 123
семантика **565**
семантический дифференциал 565-566
семантическое пространство 565, 641
сепаратриса 89, 248, 666
сети ассортативные 338
диссортативные 338
Интернет **349**
компоненты 352-355
структура 349-352
трафик информации 357
мировой торговли 513
многослойные 338, 372
нейронные мозга **338**
сложные **330**
неевклидова геометрия 360
онлайновые социальные 355, 612
распределение степеней вершин 330
социальных взаимодействий 333
транснациональных корпораций 515
транспортные 334,
устойчивость 346
центральность узла 333
синтез популяций 691
система единиц СИ 35
системы голосования **628**
диссипативные 233
самоорганизация 233, 451
мезоскопические **258**, 771
поддержки принятия решений 461, 754
сложные **227**
социальные 15, 594
большие 771
искусственные 15
мультиагентные 694
организационные 766-770
управления базами данных 754
слияния и поглощения 541
случайные величины **466**
дискретные 466
непрерывные 470
солитон 231
солнечная постоянная 676
вековые изменения 677
социальная инженерия 19, 312, 691
«социальный лазер» 197
социология **590**
социоматрица 600
социофизика 20, 273, 606
стратегии 376
доминирующие 390
смешанные 396
эволюционно устойчивые 422
суперкомпьютеры 356

Тематический анализ **614**
тематическое моделирование 615-619
тензоры 159-162, 746
тензор инерции 160
Кронекера 161, 190
теорема Лиувилля 205
Нернста 383
Нэша 396
Такенса 535
центральная предельная 476
Эрроу 634
теории восприятия **789**
геоны 791
гештальт 789
фреймы 790
теория автоматического управления **711**, 780
активных систем 769
вероятностей **462**
аксиомы 465
графов **308**
групп 379-381, 442
катастроф **663**
молекулярно-кинетическая 106-112
множеств 464
относительности 214, 224
современная монетаристская 507
социального поля 32
торга 653
термодинамика неравновесная 120, 241
статистическая **204**
феноменологическая 118-120
«экономическая» **482**
техническое зрение 785
торгово-развлекательные центры 584
торговые роботы 536
транспортные потоки **314**
гравитационная модель 314
равновесие по Уордропу 316, 399
энтропийная модель 315

Управление городским транспортом 297
нечеткое **724**
толпой **303**
массовые мероприятия 304
пожарная безопасность 305
управляемый хаос 661
уравнение адиабаты 40, 114
Бернулли 180
вековое 156, 602
кембриджское 502
Фишера монетарное 502
химической реакции 125-126, 239, 249

уравнения дифференциальные
обыкновенные ... **74**
Ланчестера ... 655
линейного осциллятора ... 82
линейное *n*-го порядка ... 83
Мальтуса ... 75
Ферхюльста ... 77
нелинейные ... **244**
стационарные точки ... 244, 578
в частных производных ... **163**
Блэка-Шоулза ... 167-168
волновое ... **168**
Лапласа ... **177**
Навье-Стокса ... 183-184
стохастические ... 260-262, 535
Ланжевена ... 260
Фишера ... 262
Фоккера-Планка ... 261, 535
теплопроводности ... **164**
Шредингера ... 190, 548
уравнения разностные ... 209, 264, 684
«ускорение истории» ... 672

Фазовая диаграмма ... 129, 372, 425
плоскость ... 84
траектория ... 84, 246-247
фазовое пространство ... 205, 425
фазовые переходы ... **128**, 327, 365, 539
фазовый портрет ... 84, 90
феодальная революция ... 679
фильтр Калмана ... 719-721
финансовая инженерия ... 721
математика ... 507
флуктуации ... 38, 258, 525
формула Байеса ... 466, 553
Бернулли ... 468
Стирлинга ... 488
Стокса ... 182
Тейлора ... 54
Эйнштейна ... 219

фракталы ... 344, **530**, 556
фрактальная размерность ... 255, 532, 536
Хаусдорфа ... 533
функция Вейерштрасса ... 533
Гамильтона ... 90
гиперболические ... 363
Кобба-Дугласа ... 40, **67**
изокванты и изокосты ... 68
Лагранжа ... 90,
Лапласа ... 472
Лоренца ... 473
психофизические ... 71

Хаос динамический ... 255-256, 270
химическое равновесие ... 126

«Цветные революции» ... 306, 707
Центральная предельная теорема ... 476, 563
цефалический индекс ... 783
циклы демографические ... 689
Миланковича ... 676
солнечной активности ... 31, 681
цифровая обработка изображений ... **785**

Чёртова лестница ... 662
числа действительные ... 138
мнимые ... 139
комплексные ... **138**
число Авогадро ... 37, 486
Данбара ... 328, 596
Рейнольдса ... 184, 276
Рэлея ... 233

Эконометрика ... 450
экономика ... **447**
классическая ... 448
магистральная ... 450
математическая ... 447
неоклассическая ... 449
поведенческая ... 544
эконофизика ... **525**
энергия
кинетическая ... 27
потенциальная ... 27
сохранение ... 27
тепловая ... 27, 114
энтропия ... **114**
Больцмана-Гиббса ... 487
Реньи ... 617
феноменологическая ... 116, 483
Цалиса ... 618
Шеннона ... 489, 576, 616
экономическая ... 120, 483
этология ... 706, 773

Ячейки Бенара ... 232

Иноязычные термины

Animal intelligence ... 695
army ant ... 702
artificial Anasazi ... 689
artificial intelligence (AI) ... 695
attentional blink ... 339

Bag of words ... 615
behavioral economy ... 544
behavioral finance ... 544
belief space ... 721, 780
belief-desire-intentions (BDI) ... 759
betweenness centrality ... 333
blackboard ... 758
blockmodeling ... 596
bounded confidence ... 418, 608

bounded rationality....544
brainstorm....764
Broad AI....742

Cliques....331
communities....331
Correlates of War (CoW)....654
CrisisDB....686, 777
crowd control....303

Deep learning....747
Devil's staircase....662
distributed intelligence (DI)....695

Economics....447
emergent intelligence (EI)....759
encastellation....679
error back-propagation....744
event-related potentials (ERP)....557

Fish school....282
Formal Concept Analysis (FCA)....755

Game of Life....286
Gestalt....789
Global Brain....771

Hearthland....651
High Middle Ages....679
homicidal chauffeur....712
homo economicus....230, 429, 648
hubs....331
human intelligence (HI)....695

Intermittent control....296

Laissez faire....502
Lebensraum....651

Mainstream economy....450
market impact....529
MayaSim....690
mergers and acquisitions (M&A)....541
Minority Game....418
Massive Multiplayer Online Role-Playing Games (MMOPRG)....659
Modern Monetary Theory (MMT)....508

Naming Game....581
Narrow AI....742
Natural Language Processing....577
Natural Language Programming....583
Neuro-Linguistic Programming....583
Nature-Inspired Metaheuristics (NIMs)....757
network science....308

Octree....789

Pajek....598
payoff matrix....383
pecking order....706
PID-controller....715
political economy....450
Prolog....753
punctured equilibrium....661

Quadtree....788
quantum entanglement....204

Retaliator....424
Rimland....651
robotics....717

Self-organized criticality....660
Seshat....686, 740, 777
Simultaneous Localizations and Mapping (SLAM)....722
small world....328
social impact....605
spatial model....640
stable marriage....437
state space....713
stretched exponent....673
sustainable growth....538
swarm intelligence....705

Tit-for-tat....422
topic modeling....615
total solar irradiance (TSI)....676
toy models....659, 665
truncated Lévi distribution....528

Utility....66

Voter model....605

Wisdom of crowd....709