

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ДЛЯ НАВИГАЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

М.Ю. Тхоренко, с.н.с.

ИПУ РАН

декабрь 2022 г

Содержание:

- 1 Магнитные измерения
- 2 Геомагнитное поле
- 3 Неравенство Рао-Крамера
- 4 Алгоритмы комплексирования
- 5 Альтернативные подходы

Интегрированные навигационные системы, источники
корректирующей информации:

- Спутниковые навигационные системы
- Изображение подстилающей поверхности (оптическое, инфракрасное, радиолокационное, гидролокационное)
- ...
- Использование **естественных физических полей** Земли

Навигация по естественным физическим полям, **преимущества**

- Полная **автономность**
- Сложность создания помех
- Потенциально достижимая **высокая точность**

Параметры **геомагнитного поля**:

вектор индукции поля $B, \mathbf{B}$, Тл (нТл)

модуль вектора индукции $m = |\mathbf{B}|$, Тл (нТл)

тензор градиента $\Gamma, \Gamma_{ij} = \frac{\partial B_j}{\partial x_i}$, Тл/м (нТл/м)

вектор градиента $g, \gamma_i = \frac{\partial |\mathbf{B}|}{\partial x_i}$, Тл/м (нТл/м)

В силу $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ и $\sum_{i=1}^3 \Gamma_{ii} = 0$ только **5** компонент Γ_{ij} являются независимыми; составим из них столбец:

$G \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$, $G = (\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23})^T$ - в дальнейшем, где это удобно, будем пользоваться им вместо Γ_{ij}

Преимущества **градиента** геомагнитного поля для навигационных применений:

- Подавление влияния **вариаций**
- Потенциально **высокая точность** навигации в полностью автономном режиме
- Высокая **стабильность** поля градиента во времени
- Сложно создать **помехи**

Возможная структура **интегрированной навигационной системы** с магнитными измерениями:

- магнитоизмерительный модуль
- бесплатформенный инерциальный измерительный блок
- вычислитель

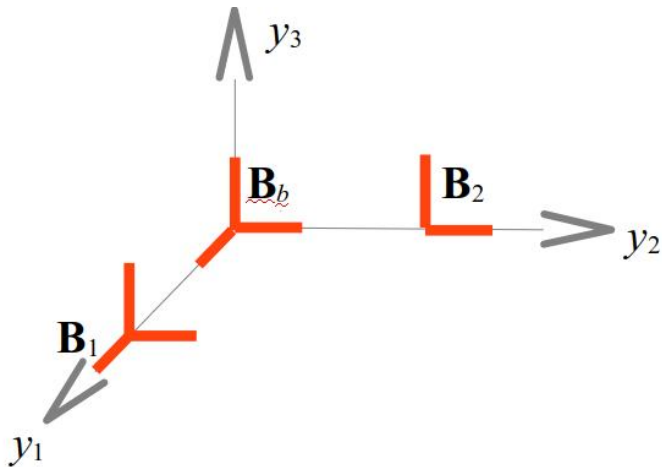
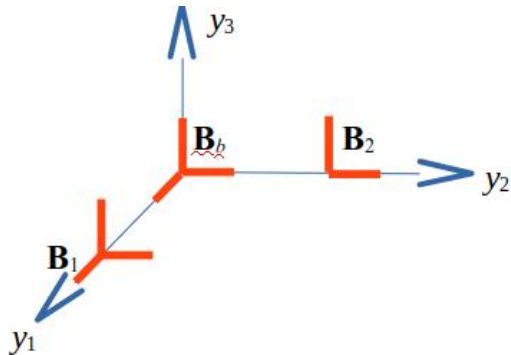


Рис.: Принципиальная схема тензорного градиентометра



$$\Gamma_{11} = B_{11} - B_{b1}, \quad \Gamma_{22} = B_{22} - B_{b2}, \quad \Gamma_{33} = -\Gamma_{11} - \Gamma_{22}$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = B_{12} - B_{b2}, \quad \Gamma_{13} = \Gamma_{31} = B_{13} - B_{b3}, \quad \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = B_{23} - B_{b3}$$

Тип Датчика	Измеряемый параметр	Ограничения	Диапазон измерений (мТл)	Чувствительность (нТл)	Точность (нТл)	Частотный диапазон (Гц)
Индукционные	Скорость изменения вектора индукции	нет	$10^{-10} - 10^6$	10^{-4}	-	$10^{-1} - 10^6$
Феррозонды	Вектор индукции	нет	$10^{-4} - 0,5$	0,01	50	0 – 2000
СКВИДы	Вектор индукции (интеграл от первой производной по времени)	нет	$10^{-9} - 0,1$	10^{-5}	-	0 – 10
Датчики Холла	Вектор индукции	нет	$0,1 - 3 \times 10^4$	100	1000	0 – 10^8
Магнито-резистивные	Вектор индукции		$10^{-3} - 5$	10	100	0 – 10^7
Ядерно-перцессионные	Модуль вектора индукции	По диапазону 20–90 (мкТл) Ориентационные	0,02 – 0,1	0,05	5	0 – 1
КМОН	Модуль вектора индукции	По диапазону 20–90 (мкТл) Ориентационные	0,01 – 0,1	0,0005	5	0 – 1000

Рис.: Характеристики магнитных измерителей

Магнитное поле в **околоземном** пространстве:

- Нормальное поле
- Поле магнитных аномалий
- Магнитные вариации
- Помехи

Нормальное поле:

$$V = a \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} [g_n^m(t) \cos m\phi + h_n^m(t) \sin m\phi] P_n^m(\cos \theta)$$

$$B_N = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad B_E = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad B_D = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Гармоническое приближение

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_a$$

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}_n| + \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_a, \mathbf{n} = \mathbf{B}_n / |\mathbf{B}_n|$$

Магнитная аномалия

$$\delta B = |\mathbf{B}| - |\mathbf{B}_n|$$

Для нее:

$$\delta B = -\mathbf{n} \cdot \nabla V_a, \mathbf{B}_a = -\nabla V_a$$

Ряд Фурье

$$\delta B = \sum_{k_x, k_y} F[\delta B](k_x, k_y, z) e^{ik_x x + ik_y y}$$

Аномалия удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 F[\delta B]}{\partial z^2} - k^2 F[\delta B] = 0$$

Отсюда:

$$F[\delta B] = C(k_x, k_y) e^{kz}$$

Преобразование Фурье для **компонент** (вектора поля):

$$F[B_x] = \frac{ik_x}{i(n_x k_x + n_y k_y) + n_z k} F[\delta B],$$

$$F[B_y] = \frac{ik_y}{i(n_x k_x + n_y k_y) + n_z k} F[\delta B],$$

$$F[B_z] = \frac{k}{i(n_x k_x + n_y k_y) + n_z k} F[\delta B].$$

для **тензора градиента**:

$$F[\Gamma] = \begin{pmatrix} ik_x F[B_x] & ik_x F[B_y] & ik_x F[B_z] \\ ik_y F[B_x] & ik_y F[B_y] & ik_y F[B_z] \\ k F[B_x] & k F[B_y] & k F[B_z] \end{pmatrix}.$$

Перепишем в **другом** виде:

$$F[\Gamma] = \begin{pmatrix} -k_x^2 & -k_x k_y & i k_x k \\ -k_x k_y & -k_y^2 & i k_y k \\ i k_x k & i k_y k & k^2 \end{pmatrix} \frac{F[\delta B]}{d},$$

где:

$$d = i(n_x k_x + n_y k_y) + n_z k$$

Для **вектора градиента**

$$g = \Gamma n.$$

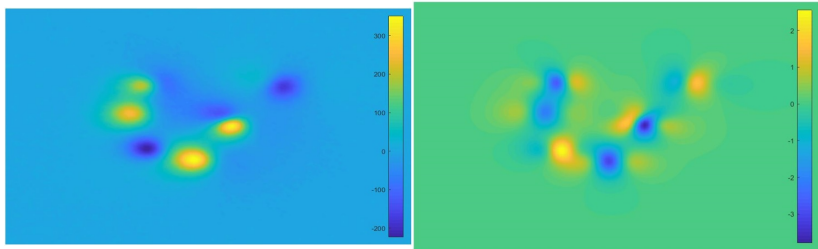
Это **некорректно-поставленная** задача: шумы исходных данных усиливаются при пересчете $\Rightarrow$ **регуляризация Тихонова**:

$$L_r = \arg \min_p \|L^{-1}p - \delta B\|_2^2 + \alpha \|p\|_2^2.$$

Выбор **квазиоптимального значения** α^* :

$$\alpha^* = \arg \min \left\| \alpha \frac{dp_\alpha}{d\alpha} \right\|_C,$$

где $\|f\|_C = \|f\|_\infty$.



Аномальное поле **150-200** нТ, градиента поля **2-2.5** нТ/м,
ошибки оценивания компонент тензора градиента **0.05** нТ/м.

Неравенство Рао-Крамера

$$E(\hat{x} - x)^2 \geq \frac{1}{E\left(\frac{\partial \ln f(x,y)}{\partial y}\right)^2}$$

Модель измерений

$$y = s(x) + n$$

Совместная плотность вероятности

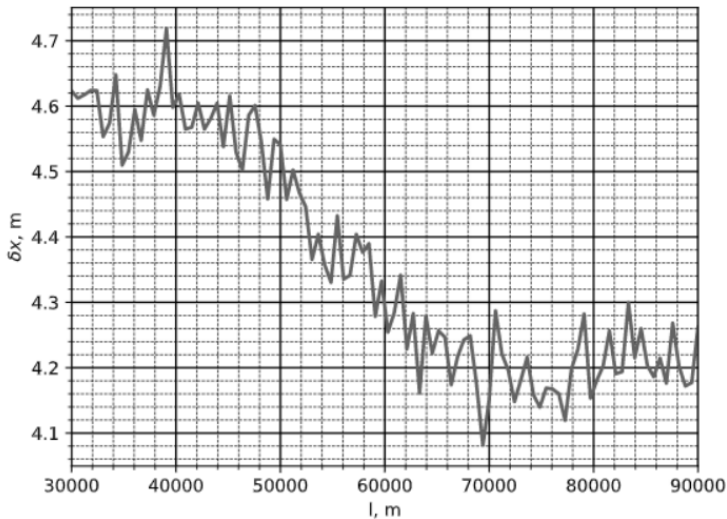
$$f(x, y) = N \exp\left(-\frac{(y - s(x))^2}{2r^2}\right) \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2p^2}\right)$$

Коррекция БИНС при полете вдоль прямолинейного маршрута

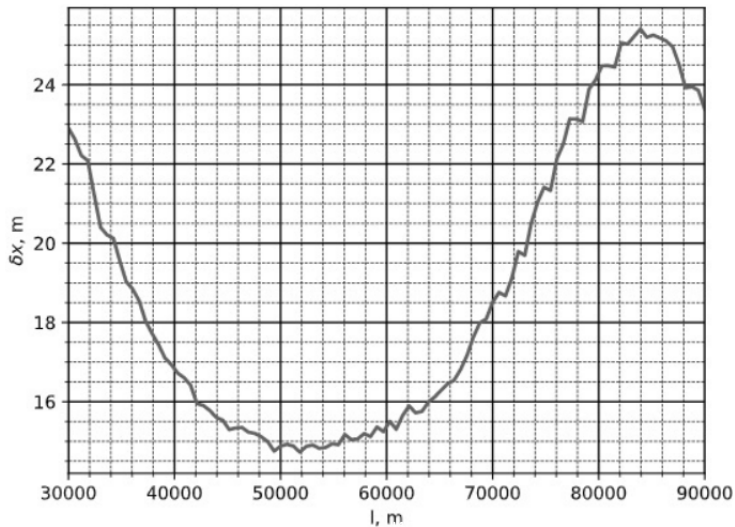
$$E(\hat{x} - x)^2 \geq \frac{1}{p^{-2} + r^{-2}I}, \quad I = \int \left(\frac{\partial s(x)}{\partial x}\right)^2 f(x) dx$$

I вычисляется методом Монте-Карло

Высота 250 м



Высота 1000 м



Линейная задача оптимального оценивания:

$$\begin{aligned}x_k &= F_{k-1}x_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + q_{k-1}, \\z_k &= H_kx_k + r_k,\end{aligned}$$

Фильтр Калмана:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + B_{k-1}u_{k-1}, \\P_k^- &= F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^\top + Q_{k-1}, \\K_k &= P_k^-H_k^\top(H_kP_k^-H_k^\top + R_k)^{-1}, \\\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k^-), \\P_k^+ &= (I - K_kH_k)P_k^-.\end{aligned}$$

Линеаризованные **уравнения ошибок** БИНС:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{y} &= \delta V_y + \hat{\beta}_{z_x} V'_y + \hat{\Omega}_y \Delta y, \\ \delta \dot{V}_y &= (\hat{\Omega}_y + 2\hat{u}_y) \delta V'_y - \hat{v}_{z_x} V'_y + \Delta f_{z_x} + S, \\ S &= \omega_0^2 \hat{\beta}_{z_x} y' - \omega_0^2 (\Delta y_1, \Delta y_2, -2\Delta y_3)^\top, \\ \dot{\beta}_{z_x} &= \hat{\omega}_y \beta_{z_x} + \nu_{z_x},\end{aligned}$$

где $\Delta f_z, \nu_z$ – ошибки акселерометров и ДУС, соответственно (в трехграннике Oz).

Выбирая **вектор состояния** $x = (\Delta y^\top, \delta V_y^\top, \beta_y^\top, \nu_z^\top, \Delta f_z^\top)^\top$,
 приходим к

$$x_{k+1} = F_k x_k + q_k,$$

где

$$F = I + \begin{pmatrix} \hat{\Omega}_y & I & -\hat{V}'_y & O & O \\ -\omega_0^2 K & \hat{\Omega}_y + 2\hat{u}_y & -\omega_0^2 \hat{y}' & \hat{V}'_y & T_2'^\top \\ O & O & \hat{\omega}_y & T_2'^\top & O \\ O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O \end{pmatrix} \Delta t.$$

Последовательность поворотов:

$$O\eta \xrightarrow{T'_1} O y_x \xrightarrow{I + \hat{\beta}_{zx}} O z_x \xrightarrow{T'_2} O z \xrightarrow{R} Ob.$$

Модуль магнитного поля m : $z = \Delta m$ и

$$H = \begin{pmatrix} -J_y^m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Вектор магнитного поля B : $z = T_2'^\top R^\top \Delta B_b$ и

$$H = \begin{pmatrix} -J_y^v & 0 & -\hat{B}_y^m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор градиента магнитного поля g : $z = T_2'^\top R^\top \Delta g_b$ и

$$H = \begin{pmatrix} -J_y^{vg} & 0 & -\hat{g}_y^m & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тензор градиента магнитного поля G : $z = \kappa_2(T_2'^\top R^\top) \Delta G_b$ и

$$H = \begin{pmatrix} -J_y^{tg} & 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример вывода уравнения измерений для **тензора градиента**:

$$\Gamma_b^m = RT_2' T_1' \Gamma_\eta^m T_1'^\top T_2'^\top R^\top,$$

где Γ_η^m - значения с карты

Получим выражение для $\Delta\Gamma_b = \Gamma_b - \Gamma_b^m$, действительно

$$\Gamma_b = RT_2'(I + \hat{\beta}_{z_x})T_1'\Gamma_\eta^m(y' - \Delta y)T_1'^\top(I - \hat{\beta}_y)T_2'^\top R^\top,$$

тогда:

$$T_2'^\top R^\top \Delta\Gamma_b RT_2' = \hat{\beta}_y \Gamma_y^m - \Gamma_y^m \hat{\beta}_{z_x} - \sum_{i=1}^3 (J_y^{tg})_i \Delta y_i + \epsilon,$$

где $\Gamma_y^m = T_1' \Gamma_\eta^m T_1'^\top$, $(J_y^{tg})_i = T_1'(J_\eta^{tg})_i T_1'^\top$, ϵ - ошибки измерителя и магнитной карты

Введем операцию:

$$\{\cdot\} : \Gamma_{ij} \xrightarrow{\{\cdot\}} G = (\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23})^T.$$

Тогда:

$$\{\hat{\beta}_{z_x} \Gamma_y^m - \Gamma_y^m \hat{\beta}_{z_x}\} = \kappa_1 \beta_{z_x},$$

$$\kappa_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2(G_y^m)_4 & 2(G_y^m)_3 \\ 2(G_y^m)_5 & 0 & -2(G_y^m)_3 \\ (G_y^m)_4 & -(G_y^m)_5 & -(G_y^m)_1 + (G_y^m)_2 \\ -(G_y^m)_3 & 2(G_y^m)_1 + (G_y^m)_2 & (G_y^m)_5 \\ -(G_y^m)_1 - 2(G_y^m)_2 & (G_y^m)_3 & -(G_y^m)_4 \end{pmatrix}$$

Кроме того:

$$\{L \Gamma_\eta^m L^\top\} = \kappa_2 G_\eta^m,$$

где L – произвольная ортогональная матрица

$$\begin{aligned}(\kappa_2)_{11} &= L_{11}^2 - L_{13}^2, (\kappa_2)_{12} = L_{12}^2 - L_{13}^2, \\(\kappa_2)_{13} &= 2L_{11}L_{12}, (\kappa_2)_{14} = 2L_{11}L_{13}, (\kappa_2)_{15} = 2L_{12}L_{13}, \\(\kappa_2)_{21} &= L_{21}^2 - L_{23}^2, (\kappa_2)_{22} = L_{22}^2 - L_{23}^2, \\(\kappa_2)_{23} &= 2L_{21}L_{22}, (\kappa_2)_{24} = 2L_{21}L_{23}, (\kappa_2)_{25} = 2L_{22}L_{23}, \\(\kappa_2)_{31} &= L_{11}L_{21} - L_{13}L_{23}, (\kappa_2)_{32} = L_{12}L_{22} - L_{13}L_{23}, \\(\kappa_2)_{33} &= L_{11}L_{22} + L_{12}L_{21}, (\kappa_2)_{34} = L_{11}L_{23} + L_{13}L_{21}, \\(\kappa_2)_{35} &= L_{12}L_{23} + L_{13}L_{22}, \\(\kappa_2)_{41} &= L_{11}L_{31} - L_{13}L_{33}, (\kappa_2)_{42} = L_{12}L_{32} - L_{13}L_{33}, \\(\kappa_2)_{43} &= L_{11}L_{32} + L_{12}L_{31}, (\kappa_2)_{44} = L_{11}L_{33} + L_{13}L_{31}, \\(\kappa_2)_{45} &= L_{12}L_{33} + L_{13}L_{32}, \\(\kappa_2)_{51} &= L_{21}L_{31} - L_{23}L_{33}, (\kappa_2)_{52} = L_{22}L_{32} - L_{23}L_{33}, \\(\kappa_2)_{53} &= L_{21}L_{32} + L_{22}L_{31}, (\kappa_2)_{54} = L_{21}L_{33} + L_{23}L_{31}, \\(\kappa_2)_{55} &= L_{22}L_{33} + L_{23}L_{32}.\end{aligned}$$

Тогда **уравнение измерений**:

$$z = \kappa_2(T_2'^\top R^\top)\Delta G_b,$$

где $\Delta G_b = G_b - \kappa_2(RT_2'T_1')G_\eta^m,$

для **вектора состояния** x получаем

$$z_k = H_k x_k + r_k,$$

где

$$H = \begin{pmatrix} -J_y^{tg} & O & \kappa_1 & O & O \end{pmatrix},$$

где $J_y^{tg} = \kappa_2(T_1')J_\eta^{tg}$, O - нулевые матрицы

Численное моделирование

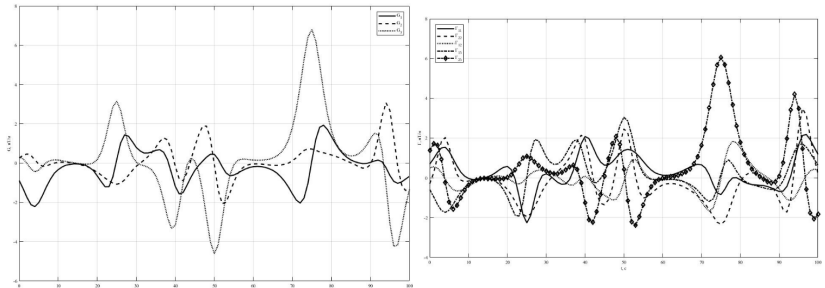


Рис.: Модельное поле; вектор градиента (слева), тензор градиента (справа)

Численное моделирование

Результаты, часть I

Класс точности	Модуль	Модуль (вар.)	Вектор
низкий	расх.	1,93 м 0,68 м/с 2.81°	расх.
средний	4,88 м 0,22 м/с 0.26°	7,4 см 2,1 см/с 0.10°	1,03 м 0,08 м/с 0.03°

Результаты, часть II

Класс точности	Вектор гр.	Тензор (фер.)	Тензор (СКВИД)
низкий	3,29 м 0,58 м/с 0.83°	27,5 м 3,5 м/с 2.2°	2,0 м 0,29 м/с 0.48°
средний	23,0 см 4,1 см/с 0.03°	11,8 м 0,59 м/с 0.61°	26,4 см 3,7 см/с 0.03°

Многочастичный фильтр (Particle Filter)

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1} = f_k(x_k, w_k), \\ y_k = h_k(x_k, v_k) \end{cases}$$

+ известно $p(x_0)$

Найти:

$$p(x_k | Y_k)$$

Байесовский оценщик

Априорная плотность

$$p(x_k|Y_{k-1}) = \int p(x_k|x_{k-1})p(x_{k-1}|Y_{k-1})dx_{k-1}$$

Апостериорная плотность (формула Байеса)

$$p(x_k|Y_k) = \frac{p(y_k|x_k)p(x_k|Y_{k-1})}{\int p(y_k|x_k)p(x_k|Y_{k-1})dx_k}$$

Эмпирическая плотность:

$$\bar{p}_N(x|y) = \sum_{i=1}^N w_i \delta(x^{(i)})$$

Генерируем N точек ("частицы") $x_{0,i}^+$

Прогноз $x_{k+1,i}^- = f_k(x_{k,i}^+, w_{k,i})$

Оцениваем веса $q_i = p(y_k | x_{k,i}^-)$ (с помощью $y_k = h_k(x_k, v_k)$)

Нормируем $q_i \rightarrow q_i / \sum_i q_i$

Строим новое множество точек $x_{k+1,i}^+$ в соответствии с
вычисленными q_i

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!