



Исследование систем массового обслуживания с коррелированными потоками для оценки производительности широкополосных беспроводных сетей

Семёнова Ольга Валерьевна

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
лаборатории № 69 «Телекоммуникационных систем»

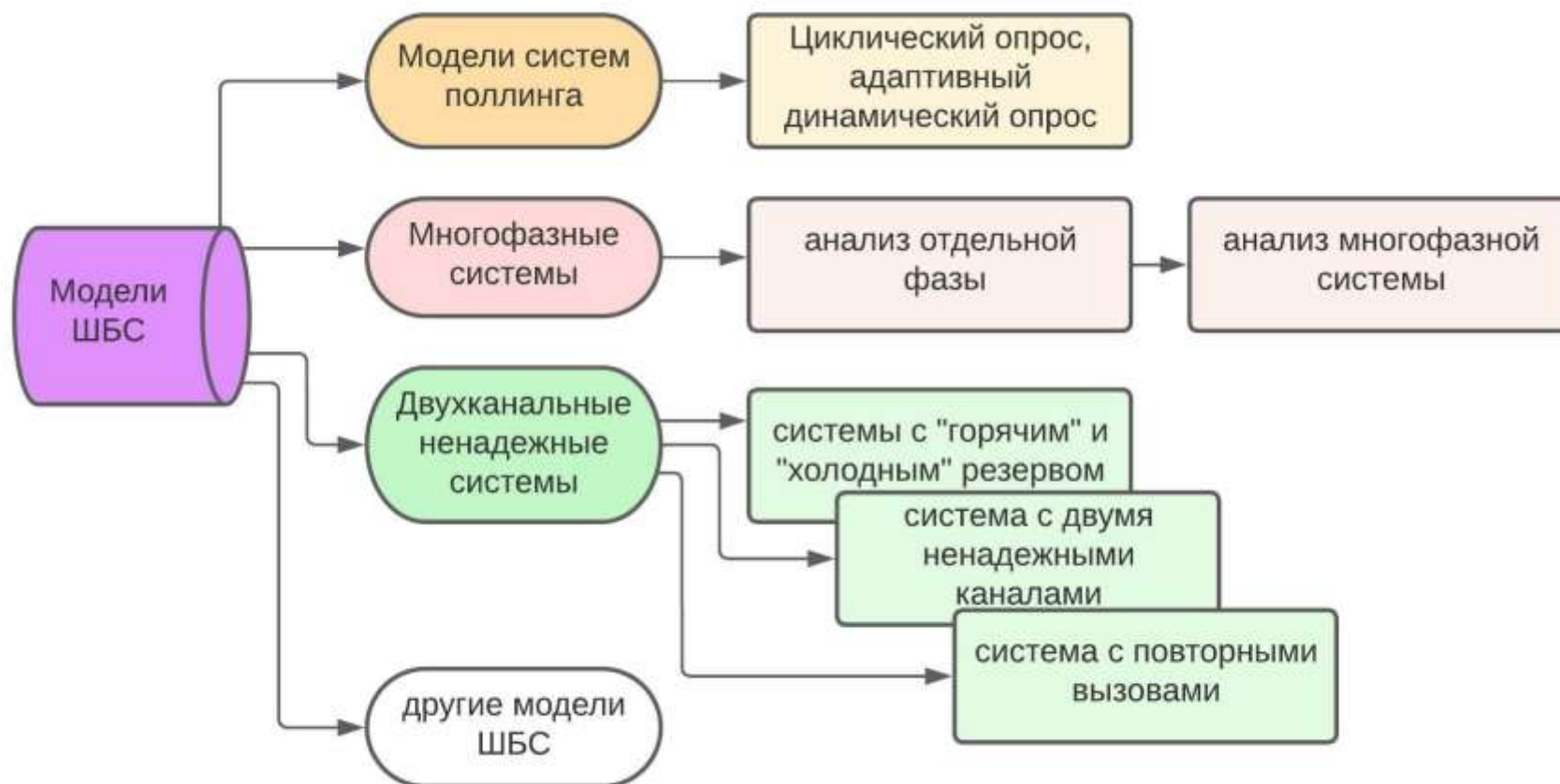
1. Системы поллинга и их применение к анализу широкополосных беспроводных сетей
2. Системы поллинга с адаптивным динамическим опросом
3. Многофазные системы массового обслуживания с коррелированными потоками
4. Математические модели гибридных беспроводных систем на базе лазерной и радиотехнологий

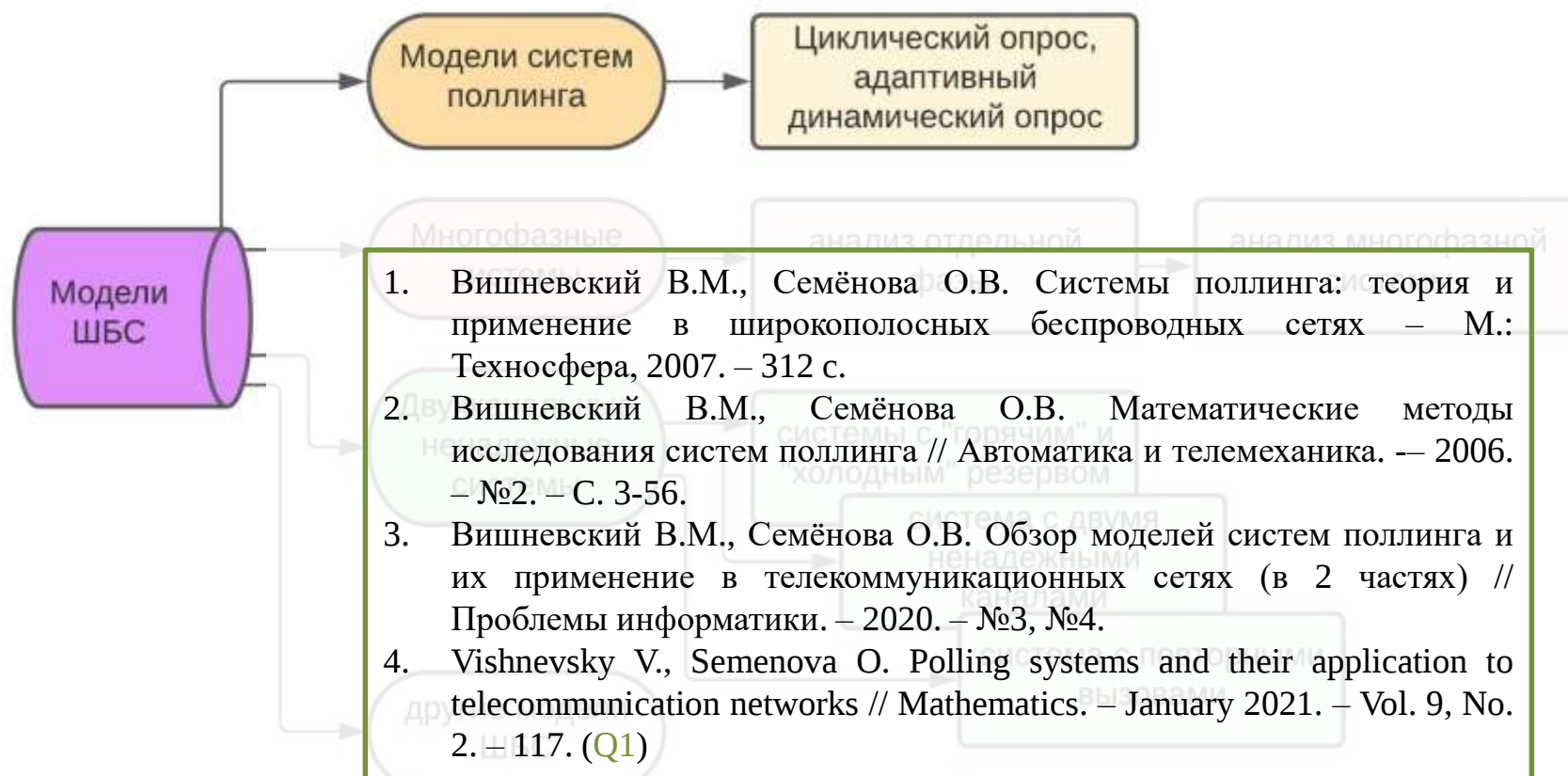
Широкополосные беспроводные сети (ШБС) передачи информации - важнейшее направление развития современной сетевой индустрии, предоставляющей широкий набор услуг передачи данных в реальном времени (дистанционное обучение, телемедицина, телеконференции, торговля, удаленный режим работы компаний, и т.д.) Для решения вопроса эффективного управления доступом к беспроводному каналу передачи данных разработан ряд международных стандартов: Bluetooth, IEEE802.11, IEEE802.16 и ряд других.

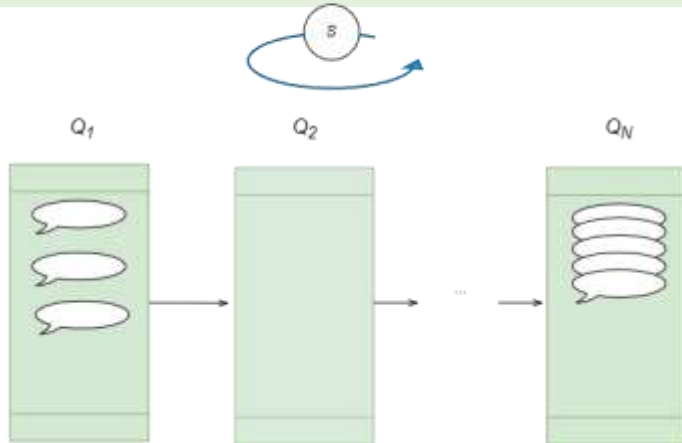
Характерный признак современного этапа развития ШБС – большой объем передаваемых данных. Потоки данных являются нестационарными и коррелированными. Это повышает требования к качеству связи для сохранения прежнего уровня надежности и величины задержки в условиях возросших объемов передаваемых данных.

Новый этап развития ШБС приводит к появлению новых **математических моделей**, которые требуют разработки новых **методов анализа** и алгоритмов расчета характеристик производительности:

1. ШБС с централизованным управлением – модели систем поллинга
2. ШБС с линейной топологией – многофазные системы
3. Гибридные системы на основе лазерных и радиотехнологий – двухканальные ненадежные системы







Система поллинга с адаптивным опросом

Модель: система массового обслуживания:

- N очередей типа $M/G/1$ ($\lambda_i, B_i(t)$)
- общий обслуживающий прибор (ОУ),
- немгновенное переключение между очередями ($S_i(t)$),
- адаптивный циклический опрос,
- шлюзовое или исчерпывающее обслуживание очередей.

В работах Вишневого В.М.

Вишневский В.М. Беспроводные сети широкополосного доступа к ресурсам Интернета // Электросвязь. 2000. №10. С. 9-13. и др.

показано, что модели систем стохастического поллинга эффективно используются для оценки производительности ШБС с централизованным управлением. Для более эффективного использования ресурса сети с целью избежания непродуктивного обмена данными предложен **адаптивный динамический опрос**.

Модифицированы:

- метод производящих функций,
- метод анализа средних.

Разработан:

- метод декомпозиции системы

Применены:

- имитационное моделирование
- машинное обучение

Цель: вычислить среднее время ожидания либо начальные моменты времени ожидания в системе

Этап 1. Составление и решение системы уравнений для величин среднего времени цикла Сивероятностей $u_i, i = \overline{1, N}$ того, что очередь Q_i будет опрошена в произвольном цикле

Утверждение 2.1. Значение C среднего времени цикла и стационарных вероятностей $u_i, i = \overline{1, N}$ того, что очередь Q_i будет опрошена в произвольном цикле удовлетворяют системе уравнений

$$C = \frac{\sum_{k=1}^N s_k u_k + \beta \prod_{i=1}^N (1 - u_i)}{1 - \rho},$$

$$u_i = \frac{1}{1 + e^{-\lambda_i C}}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь N – число очередей, λ_i – интенсивность входного потока в очередь Q_i , s_i – среднее время подключения ОУ к очереди Q_i , β – длительность простоя ОУ в случае, если все очереди подлежат пропуску, ρ – загрузка системы.

Этап 2. Составление функциональных уравнений для производящих функций $F_i(\mathbf{z}), i = \overline{1, N}$ вероятностей состояний очередей в моменты опроса

Утверждение 2.2. Производящие функции $F_i(\mathbf{z}), i = \overline{1, N}$ удовлетворяют функциональным соотношениям

$$F_i(\mathbf{z}) = u_i M_{i+1}^{(0)}(\mathbf{z}) + (1 - u_i) u_i M_{i+1}^{(1)}(\mathbf{z}) + \dots + (1 - u_i) \dots (1 - u_{N-1}) u_N M_{i+1}^{(N-1)}(\mathbf{z}) +$$

$$+ (1 - u_i) \dots (1 - u_N) M_{i+1}^{(N)}(\mathbf{z}) \tilde{H}(\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j)),$$

$$M_{i+1}^{(l)}(\mathbf{z}) = F_{i-l}(z_1, \dots, z_{i-l}, \tilde{B}_{i-l}(\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j)), z_{i-l+2}, \dots, z_N) \tilde{S}_{i-l+1}(\sum_{j=1}^N \lambda_j (1 - z_j)), \quad l = \overline{0, N-1}.$$

Здесь $\tilde{B}_i(w), \tilde{S}_i(w)$ – ПЛС распределения времени обслуживания и подключения к очереди Q_i

Этап 3. Составление и решение системы уравнений для первых $f_i(j)$ и вторых $f_i(j, m)$, $i, j, m = \overline{1, N}$ моментов длин очередей в моменты опроса.

$$f_{i+1}(j) = F_{i+1}^{(1)}(f_i(k), f_{i-1}(k), \dots, f_{i-N}(k)), \quad i, j, k = \overline{1, N}, \quad (2.9)$$

$$f_{i+1}(j, m) = F_{i+1}^{(2)}(f_i(k), f_{i-1}(k), \dots, f_{i-N}(k), f_i(k, m), f_{i-1}(k, m), \dots, f_{i-N}(k, m)), \quad i, j, k, m = \overline{1, N} \quad (2.10)$$

Здесь $F_{i+1}^{(1)}(x_1, \dots, x_N)$ и $F_{i+1}^{(2)}(x_1, \dots, x_N)$ - линейные комбинации неизвестных $x_1, \dots, x_N$ с известными коэффициентами, которые определяются входными параметрами модели.

Этап 4. Расчет средних времен ожидания в очередях

- при шлюзовом обслуживании: $W_i = \frac{f_i(i, i) - f_i}{2\lambda_i f_i} (1 + \rho_i), i = \overline{1, N}.$
- при исчерпывающем обслуживании: $W_i = \frac{\lambda_i b_i^{(2)}}{2(1 - \rho_i)} + \frac{f_i(i, i)}{2\lambda_i f_i(i)}, \quad i = \overline{1, N}.$

Результат метода: среднее время ожидания

Приближенный метод

- применяется в случае экспоненциального распределения времени обслуживания
- используется *допущение* о поведении обслуживающего прибора в момент отдыха
- сводится к решению системы линейных уравнений для средних длин очередей с последующим применением формулы Литтла для нахождения средних времен ожидания в очередях системы.

Результат: среднее время ожидания в очереди.

Алгоритм расчета средних времен ожидания

Шаг 1. Задать начальные параметры $N, \beta, \beta^{(2)}, \lambda_i, b_i, b_i^{(2)}, s_i, s_i^{(2)}$ для $i = \overline{1, N}$.

Шаг 2. Вычислить $\rho_i = \lambda_i b_i, i = \overline{1, N}$ и $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$.

Шаг 3. Вычислить параметры C и $u_i, i = \overline{1, N}$ как решение системы уравнений

$$C = \frac{\sum_{i=1}^N s_i u_i + \beta \prod_{i=1}^N (1 - u_i)}{1 - \rho}, \quad u_i = \frac{1}{1 + e^{-\lambda_i C}}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Вычислить $u = \prod_{i=1}^N (1 - u_i)$.

Шаг 4. Вычислить $v_i = \rho_i C + s_i(u_i + u) + \frac{u}{\beta N}, i = \overline{1, N}$

Шаг 5. Вычислить $v_{i,j} = \sum_{n=i}^{i+j-1} v_n, q_{i,j} = \frac{v_{i,j}}{C}, i, j = \overline{1, N}.$

Приближенный метод

Алгоритм расчета средних времен ожидания

Шаг 6. Вычислить средние длины очередей $\bar{L}_i$ и $\tilde{L}_{i,n}$, $i, n = \overline{1, N}$ как решение системы уравнений

$$\sum_{n=i}^{i+j-1} \frac{q_{n,1}}{q_{i,j}} \tilde{L}_{i,n} = \lambda_i \left(v_{i,j} + \frac{1 - u_i - u}{1 - \rho + \rho_m} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N s_m u_m \right), \quad i, j = \overline{1, N}.$$

$$\bar{L}_i = \frac{\lambda_i u_i}{\rho_i} \left(v_{i,j} + \frac{1 - u_i - u}{1 - \rho + \rho_m} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N s_m u_m \right) - (1 - \rho_i) \frac{u_i}{\rho_i} \sum_{n=1}^N q_{n,1} \tilde{L}_{i,n}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Шаг 7. Вычислить

$$L_i = \tilde{L}_i + \bar{L}_i \frac{\rho_i}{u_i} = \sum_{n=1}^N q_{n,1} \tilde{L}_{i,n} + \bar{L}_i \frac{\rho_i}{u_i}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Шаг 8. Вычислить среднее время ожидания W_i , $i = \overline{1, N}$ в очереди Q_i по формуле

$$W_i = L_i / \lambda_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Приближенный метод

Декомпозиция - разделение системы поллинга на отдельные очереди.

Метод предполагает **два этапа**:

1. анализ отдельных очередей системы как СМО с отдыхами обслуживающего прибора;
2. синтез полученных результатов.

Результат: среднее и второй момент времени ожидания в очереди системы.

Перспектива метода: расчет начальных моментов произвольного порядка для времени ожидания

Этап 1. Анализ СМО M/G/1 с адаптивным отдыхом обслуживающего прибора

Теорема 2.2. Производящие функции $\Pi^{(0)}(z, y)$, $\Pi^{(1)}(z)$ и $\Pi^{(2)}(z)$ определяются следующим образом:

$$\Pi^{(0)}(z, y) = \tau^{-1} \frac{1 - \tilde{B}(\lambda(1 - z))}{\lambda(1 - z)} \frac{y}{y - \tilde{B}(\lambda(1 - z))} (Q(y) - Q(\tilde{B}(\lambda(1 - z)))), \quad (2.49)$$

$$\Pi^{(1)}(z) = \tau^{-1} \frac{1 - g(\lambda(1 - z))}{\lambda(1 - z)} (Q(\tilde{B}(\lambda(1 - z))) - q^{(0)}), \quad (2.50)$$

$$\Pi^{(2)}(z) = \tau^{-1} \frac{1 - \tilde{g}(\lambda(1 - z))}{\lambda(1 - z)} q^{(0)}. \quad (2.51)$$

q_0 - вероятность пустой очереди в момент завершения отдыха ОУ;
 $Q(z)$ – стационарное распределение вероятностей состояний системы в момент завершения отдыха ОУ;
 τ – среднее время между моментами отдыха

Теорема 2.3. ПЛС $w(s)$ времени ожидания определяется следующей формулой:

$$w(s) = \frac{\tau^{-1}}{s - \lambda(1 - \tilde{B}(s))} (Q(\tilde{B}(s))(1 - g(s)) + q^{(0)}(g(s) - \tilde{g}(s))).$$

$g(s)$ и $\tilde{g}(s)$ – ПЛС распределения времени отдыха ОУ в зависимости от состояния очереди в момент завершения предыдущего отдыха

Первый и второй моменты времени ожидания в очереди

$$W^{(1)} = \frac{v^{(2)}}{2v^{(1)}} + \frac{\lambda b^{(2)} + 2\rho\beta^{(1)}}{2(1 - \rho)}, \quad (2.54)$$

$$W^{(2)} = \frac{v^{(3)}}{3v^{(1)}} + \frac{\lambda b^{(3)} + 3\lambda b^{(2)}\beta^{(1)} + 3\rho\beta^{(2)}}{3(1 - \rho)} + W^{(1)} \left(\frac{\lambda b^{(2)}}{1 - \rho} + \frac{2\rho^2\beta^{(1)}}{1 - \rho^2} \right). \quad (2.55)$$

Этап 2. Обобщение результатов для произвольного числа очередей

$$\tilde{g}_i(w) = \tilde{\chi}_i(w)\tilde{S}_i(w), \quad (2.56)$$

$$g_i(w) = \chi_i(w)\tilde{S}_i(w), \quad (2.67)$$

$$\tilde{\chi}_i(w) = (\chi_i(w))^2 + Q_i(\tilde{H}(w + \lambda_i(1 - \tilde{B}_i(w)))r_i(w) - \chi_i(w)).$$

$g_i(s)$ и $\tilde{g}_i(s)$ – неизвестные, ПЛС распределения времени отдыха ОУ в зависимости от состояния очереди Q_i в момент ее опроса

Результат: итерационная схема расчета $W_i^{(1)}$ и $W_i^{(2)}$ - первого и второго моментов времени ожидания в очереди $Q_i, i = \overline{1, N}$.

МАР-поток – удобная математическая модель описания коррелированных потоков (потоков, у которых соседние интервалы между моментами наступления событий зависимы).

Теория МАР-потоков развита в работах Lucantoni D., Neuts M., а методология анализа СМО с потоками типа МАР (МС-потоками) разрабатывалась крупными отечественными учеными Башириным Г.П., Дудиным А.Н., Клименок В.И., Назаровым А.А., Моисеевой С.П., и их учениками.

$$D_0 = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 p_{0,1}^{(0)} & \dots & \lambda_0 p_{0,M-1}^{(0)} \\ \lambda_1 p_{1,0}^{(0)} & -\lambda_1 & \dots & \lambda_1 p_{1,M-1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{M-1} p_{M-1,0}^{(0)} & \lambda_{M-1} p_{M-1,1}^{(0)} & \dots & -\lambda_{M-1} \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 p_{0,0}^{(1)} & \lambda_0 p_{0,1}^{(1)} & \dots & \lambda_0 p_{0,M-1}^{(1)} \\ \lambda_1 p_{1,0}^{(1)} & \lambda_1 p_{1,1}^{(1)} & \dots & \lambda_1 p_{1,M-1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{M-1} p_{M-1,0}^{(1)} & \lambda_{M-1} p_{M-1,1}^{(1)} & \dots & \lambda_{M-1} p_{M-1,M-1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Свойства МАР-потока

1. Производящая функция числа событий потока, наступивших в интервале (0,t), есть матричная экспонента

$$P(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, t) z^n = e^{(D_0 + D_1 z)t}$$

2. Средняя скорость λ наступления событий в МАР-потоке:

$$\lambda = \theta D_1 \mathbf{1}$$

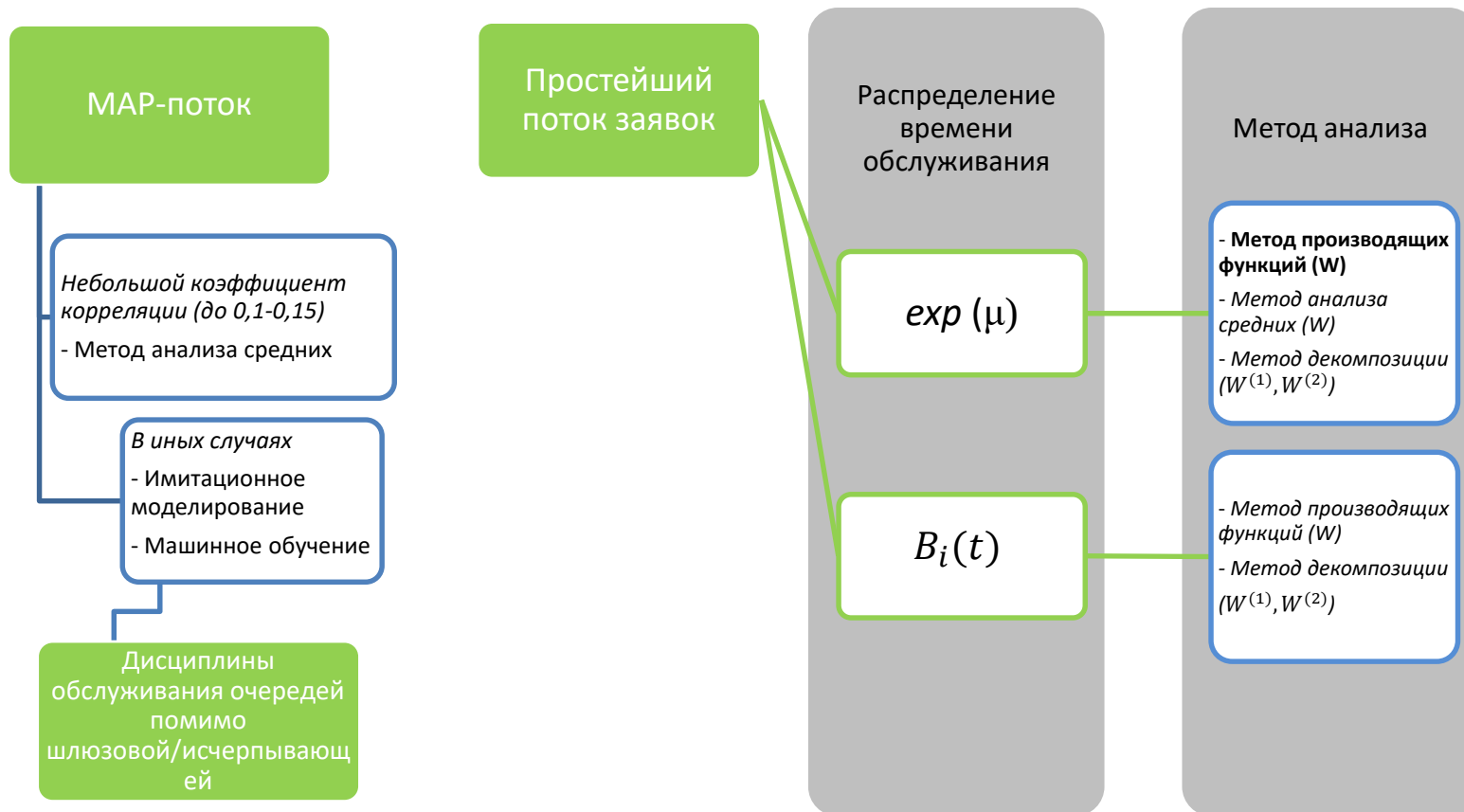
3. Коэффициент корреляции двух последовательных интервалов между событиями потока

$$c_{cor} = (\lambda^{-1} \theta (-D_0)^{-1} D_1 (-D_0)^{-1} \mathbf{1} - \lambda^{-2}) / \nu$$

4. Суперпозиция и просеивание двух МАР-потоков есть МАР-поток

Частные случаи МАР-потока

Простейший поток, IPP – прерывающийся пуассоновский поток, SPP – переключающийся пуассоновский поток, MMPP – марковский модулированный пуассоновский поток, PH – поток фазового типа.



МАР-поток

Небольшой коэффициент корреляции (до 0,1-0,15)

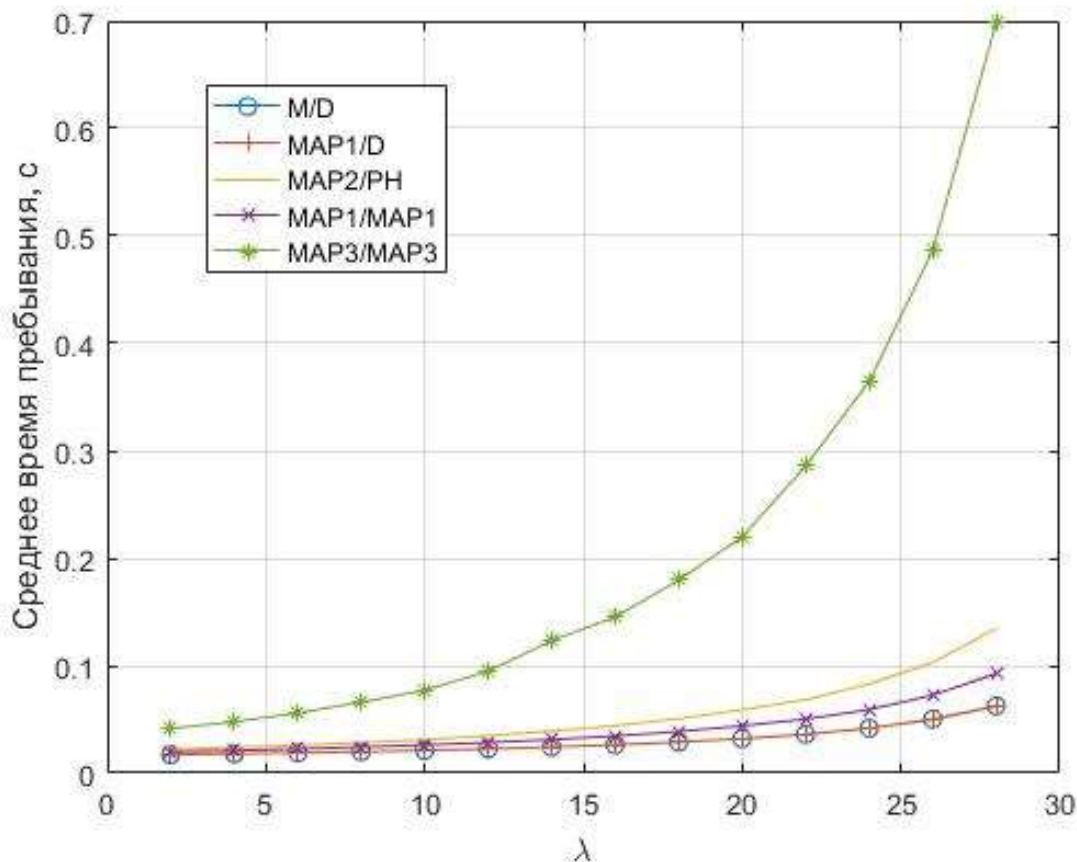
- Метод анализа средних

В иных случаях

- Имитационное моделирование

- Машинное обучение

Дисциплины обслуживания очередей помимо шлюзовой/исчерпывающей



Комплекс программ для расчета характеристик систем с коррелированными потоками



Комплекс программ позволяет проводить расчет характеристик систем поллинга с одним обслуживающим прибором, но охватывает широкий класс моделей систем не только с циклическим, но и адаптивным динамическим и случайным порядком опроса.

Пакет создан на базе OMNeT++ Discrete Event Simulator и OMNeT++ Simulation Manual 4.6.

Вишневский В. М., Семёнова О. В., Буй З.Т. Программный комплекс оценки характеристик систем стохастического поллинга: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019614554 РФ; Зарег. 08.04.2019.



Применение машинного обучения для анализа систем поллинга



Метод машинного обучения на основе использования искусственных нейронных сетей позволяет решать огромное количество задач, не решаемых на данный момент с помощью известных методов теории массового обслуживания и теории случайных процессов.

Вишневский В.М., Ефросинин Д.В. Теория очередей и машинное обучение. М.: ИНФРА-М, 2024. – 370 с.

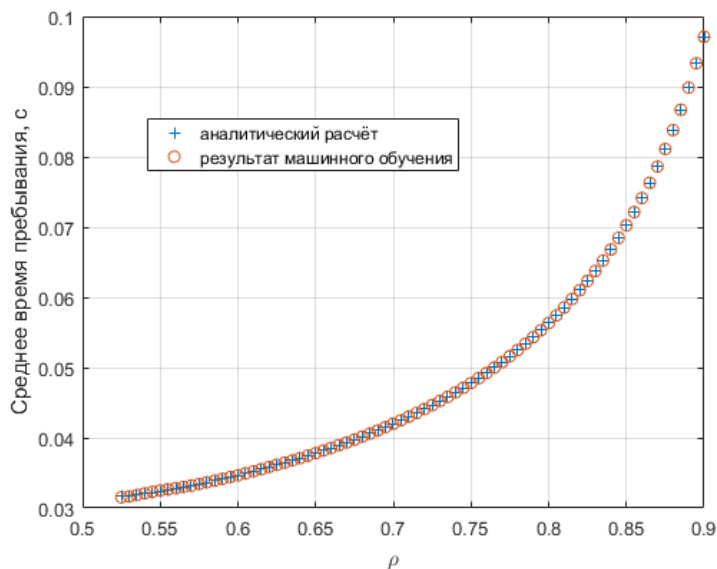
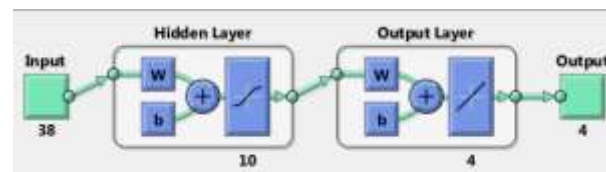
Вишневский В.М., Семёнова О.В. Методы машинного обучения для исследования стохастических моделей циклического опроса в широкополосных беспроводных сетях. опт. диск (CD-ROM). М.: ИПУ РАН, 2023. – 120 с.

Vishnevsky V.M., Semenova O.V., Bui D.T. Using a machine learning approach for analysis of polling systems with correlated arrivals // Lecture Notes in Computer Science. – 2021. – Vol. 13144. – P. 336-345.

В качестве примера рассмотрим систему типа $M/M/1$ с $N = 5$ очередями и экспоненциально распределенными временами обслуживания и переключения сервера.

Система имеет $3N + 1$ входных параметров и N выходных.

Для построения нейронной сети использована выборка из примерно 500 входных и целевых данных.



Результаты расчета характеристик с помощью блока аналитического расчета комплекса программ и модели нейронной сети расходятся не более чем на 0,04%.

Время обучения не превышает 3 минут, а расчет характеристик для одного набора данных занимает не более секунды.

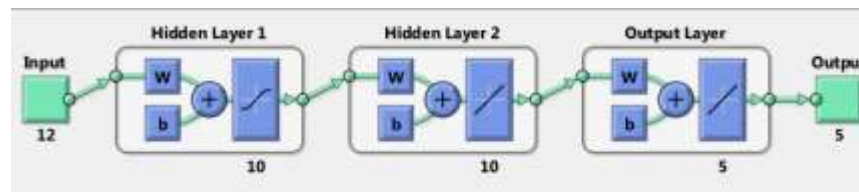
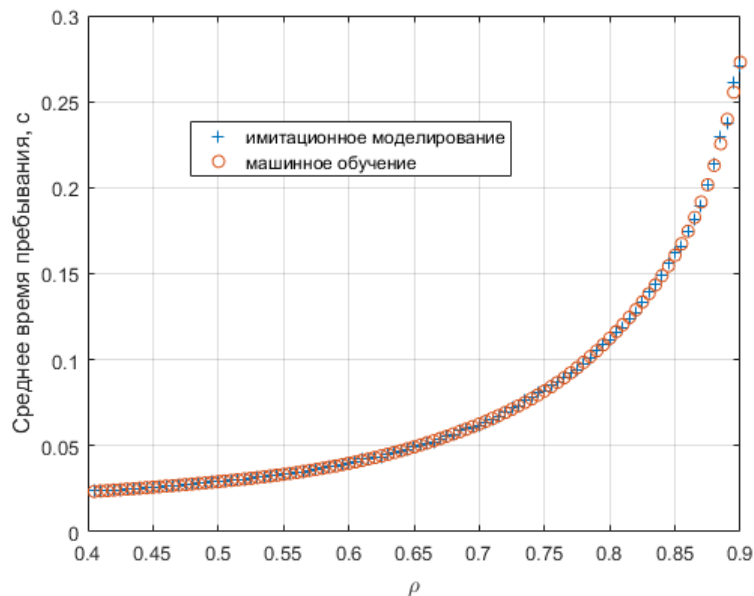
Случай системы МАР/М/1 (коррелированный входной поток) с циклическим опросом и шлюзовой дисциплиной обслуживания с $N = 4$ очередями.

Система имеет $\sum_{i=1}^N W_i(2W_i - 1) + 2N + 1$ входных параметров и N выходных.

$$D_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_0^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -0,6 \end{bmatrix}, D_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix},$$

$$D_0^{(3)} = \begin{bmatrix} -1,875 & 0,0625 \\ 0,0625 & -0,25 \end{bmatrix}, D_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,8125 & 0 \\ 0 & 0,1875 \end{bmatrix}, D_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для построения нейронной сети использована выборка из примерно 400 входных и целевых данных.



Результаты расчета характеристик, полученных с помощью блока имитационного моделирования комплекса программ и модели нейронной сети расходятся не более чем на 1%.

Модель поллинга с групповым обслуживанием



Рассматривается система поллинга с очередями типа М/М/1/К.

Порядок обслуживания – циклический, дисциплина обслуживания очередей - исчерпывающая или шлюзовая.

Подключившись к очереди i , сервер берет на обслуживание группу не более, чем k_i заявок, которые обслуживаются одновременно. По завершении обслуживания сервер берет следующую группу заявок, если в очереди есть заявки на обслуживание.

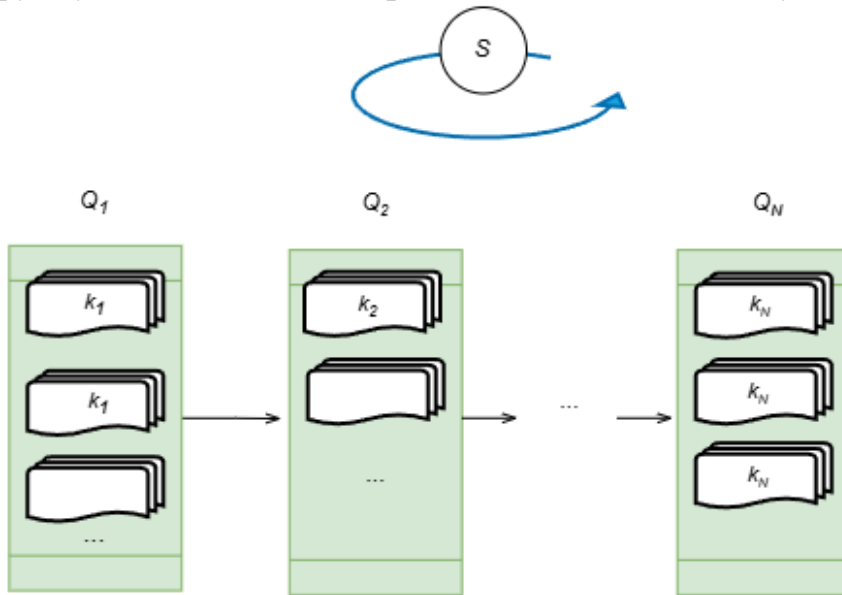
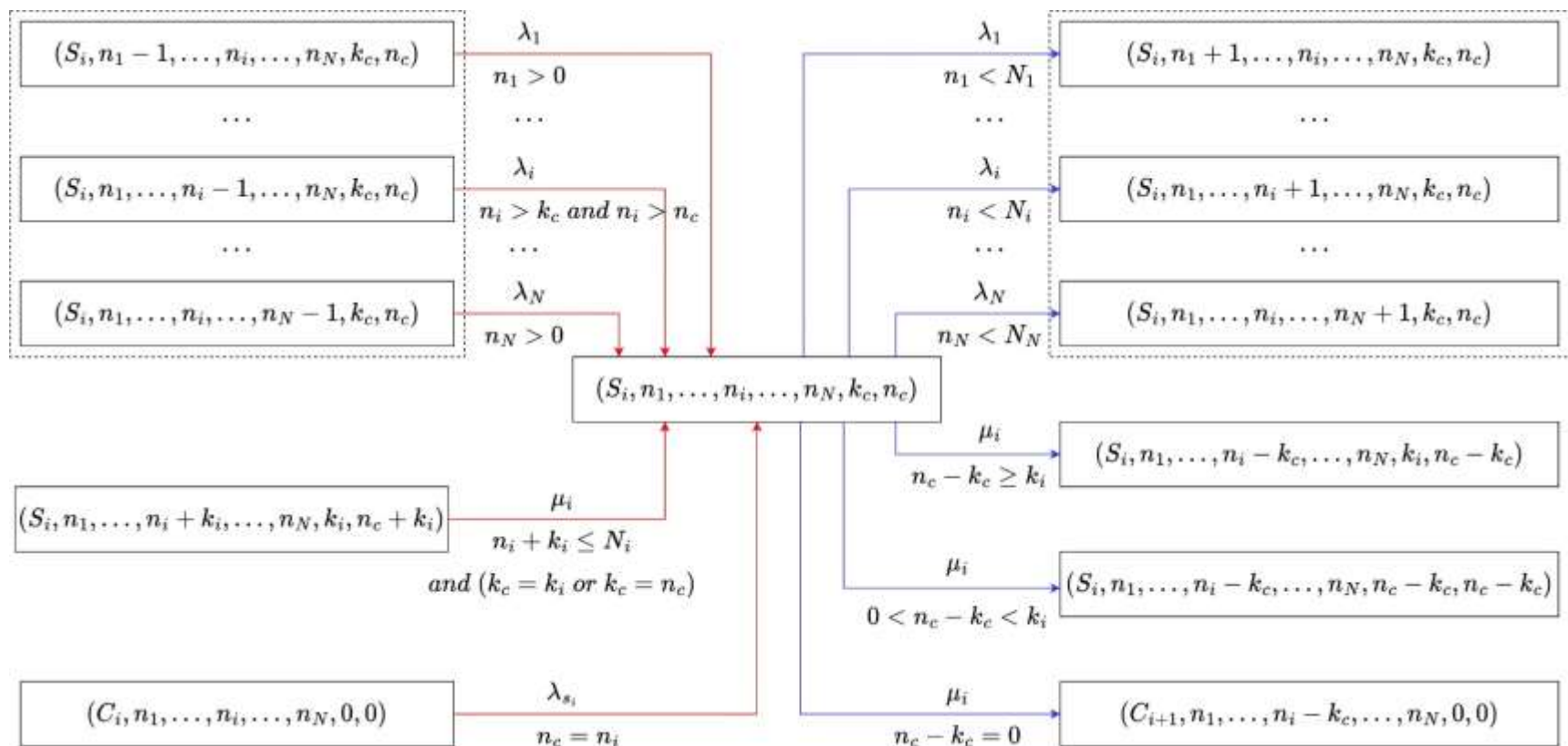


Схема переходов между состояниями



Получить характеристики для данной системы возможно лишь путем решения сильно разреженной системы линейных уравнений, что сильно сужает диапазон важнейших параметров системы (число очередей и размер буфера для каждой станции) при численной реализации

Для данной системы разработан программный продукт, реализующий

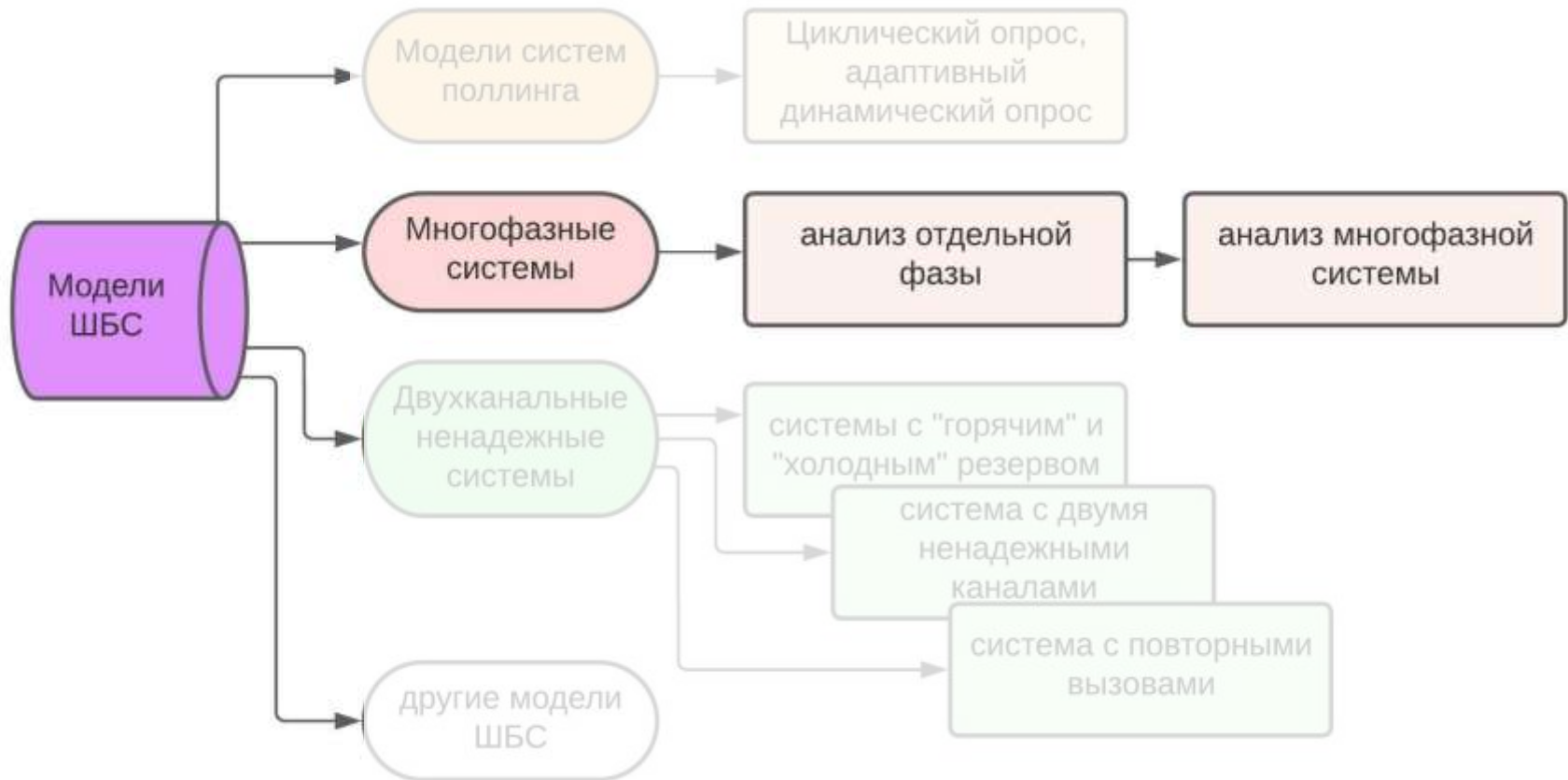
- алгоритмы расчета характеристик производительности системы, полученные аналитически,
- имитационную модель,
- модели машинного обучения.

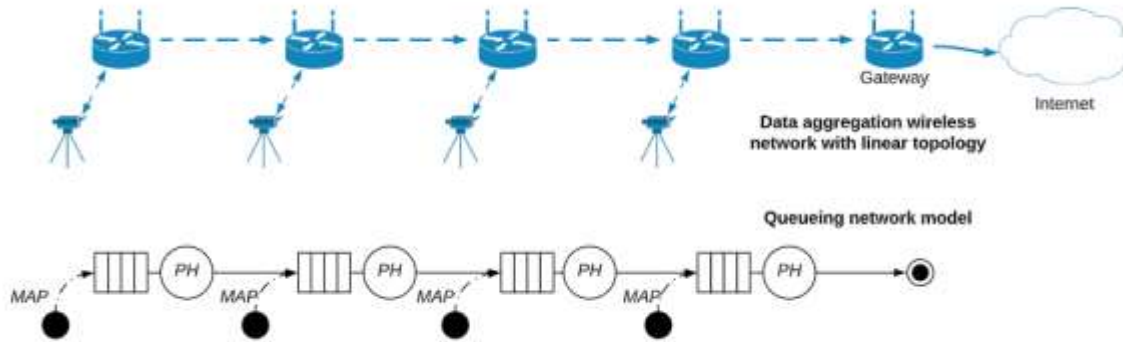
The screenshot shows the PoSys software interface. On the left, the 'Polling System Configuration' panel includes options for 'Method for Calculating Results' (Simulation, Numerical Analysis, Machine Learning), 'Polling Order' (Cyclic, Exhaustive, Gated), and 'Service Discipline' (Exhaustive, Gated). Below these are input fields for 'Number of Queues' (2), 'Unlimited Queue Capacities' (checked), 'Queue Capacities' (20, 20), 'Regular Service' (unchecked), 'Batch Sizes' (2, 2), 'Mean Customer Arrival Rates' (40, 50), 'Mean Customer Service Times' (0.01, 0.01), and 'Mean Server Switchover Times' (0.001, 0.001). At the bottom of the configuration panel are 'Clear', 'Default Config', and 'Run' buttons. On the right, the 'Results' panel displays a table with 15 rows of parameters and their values. The status bar at the bottom indicates 'Elapsed time: 0 seconds'.

	Parameter	Value
1	Mean loss rate $P_{loss}[1]$	1.5319642903449172e-06
2	Mean loss rate $P_{loss}[2]$	2.6985509756923415e-06
3	Mean effective arrival rate $\lambda_{eff}[1]$	39.99993872142839
4	Mean effective arrival rate $\lambda_{eff}[2]$	49.999965072451215
5	Mean queue length $L[1]$	0.9895334483653824
6	Mean queue length $L[2]$	1.1553484050020848
7	Mean customer sojourn time $V[1]$	0.02473837410744029
8	Mean customer sojourn time $V[2]$	0.02310703045554128
9	Mean customer waiting time $W[1]$	0.01473837410744029
10	Mean customer waiting time $W[2]$	0.0133107030455541279
11	Queue traffic intensity $\rho[1]$	0.3085773253742711
12	Queue traffic intensity $\rho[2]$	0.37833857189911616
13	Total traffic intensity ρ	0.6871158972733673
14	Mean customer sojourn time in the system V	0.0238396516375964
15	Mean cycle time C	0.0063921432331368105

Вишневский В.М., Семёнова О.В., Нгуен В.Х. Программный комплекс для оценки характеристик производительности систем циклического поллинга с групповым обслуживанием: Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024613219, 09.02.2024. Заявка № 2024611943 от 01.02.2024.

1. Вишневский В.М., Семёнова О.В. Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях – М.: Техносфера, 2007. – 312 с.
2. Вишневский В.М., Семёнова О.В. Математические методы исследования систем поллинга // Автоматика и телемеханика. — 2006. — №2. — С. 3-56.
3. Вишневский В.М., Семёнова О.В. Обзор моделей систем поллинга и их применение в телекоммуникационных сетях (в 2 частях) // Проблемы информатики. – 2020. – №3, №4.
4. Vishnevsky V., Semenova O. Polling systems and their application to telecommunication networks // Mathematics. – January 2021. – Vol. 9, No. 2. – 117. (Q1)
5. Вишневский В.М., Семёнова О.В., Нгуен В.Ч., Данг М.К. Batch service polling system: mathematical analysis and simulation modeling // Lecture Notes in Computer Science. 2024. Vol. 14123. P. 142–155.
6. Вишневский В.М., Семёнова О.В., Буй З.Т. Исследование системы поллинга с адаптивным циклическим опросом и ее применение для проектирования широкополосных беспроводных сетей // Проблемы управления. – 2020. – №5. – С. 50-55.
7. Vishnevsky V.M., Dudin A.N., Klimenok V.I., Semenova O.V., Shpilev S. Approximate method to study M/G/1 - type polling system with adaptive polling mechanism // Quality Technology and Quantitative Management. – 2012. – Vol. 2. – P. 211-228.
8. Vishnevsky V.M., Semenova O.V., Bui D.T., Sokolov A.M. Adaptive cyclic polling systems: analysis and application to the broadband wireless networks // Lecture Notes in Computer Science. – 2019. – Vol. 11965. – P. 30-42.
9. Sokolov A., Semenova O., Larionov A. Examining the performance of a distributed system through the application of queuing theory // // Lecture Notes in Computer Science. 2024. Vol. 14123. P. 16-32.





Цель анализа - вычислить

1. вероятность потери данных
2. пропускная способность системы

Моделирование беспроводной сети с линейной топологией с помощью многофазной системы с *MAP*-потоками и кросс-трафиком

$$MAP_1/PH_1/1/N_1 \rightarrow \cdot, MAP_2/PH_2/1/N_2 \rightarrow \dots \rightarrow \cdot, MAP_R/PH_R/1/N_R.$$

Промежуточный анализ

Предполагает решение задач:

1. Определить, к какому типу принадлежат потоки, выходящие из фаз системы, а также свойства этих потоков.
2. Разработать алгоритм расчета вероятностно-временных характеристик отдельных фаз и фрагментов системы (цепочки нескольких фаз)

Задача 1: определить, к какому типу принадлежат потоки, выходящие из фаз системы, а также свойства этих потоков.

Выходящий поток из r -й станции, $r = \overline{1, R}$, принадлежит классу MAP -потоков. Матрицы $D_0^{(r)}$ и $D_1^{(r)}$, определяющие этот поток, имеют вид:

$$D_0^{(r)} = \text{diag}\{O, S^{(r)}, \dots, S^{(r)}\} \oplus (D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)}) + \tilde{E}_r^+ \otimes (D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)}),$$

$$D_1^{(r)} = E_r^- \otimes \mathbf{S}_0^{(r)} \beta^{(r)} \otimes I_{K_r}, \quad r = \overline{1, R},$$

здесь предполагается, что

$$D_0^{(0)} = D_0, \quad D_1^{(0)} = D_1, \quad H_0^{(1)} = H_1^{(1)} = O,$$

$K_r = \prod_{r'=1}^{r-1} (N_{r'} + 1) M_{r'} \prod_{r'=1}^r (W_{r'} + 1)$, $\tilde{E}_r^+ = E_r^+ \otimes I_{M_r}$, E_r^+ и E_r^- есть квадратные матрицы размера $N_r + 1$, все элементы которых равны нулю кроме наддиагональных для матрицы E_r^+ и поддиагональных для E_r^- , равных единице.

Задача 2: разработать алгоритм расчета вероятностно-временных характеристик отдельных фаз и фрагментов системы (цепочки нескольких фаз)

Алгоритм вычисления стационарных вероятностей состояний фазы i

Шаг 1. Вычислить матрицы $G_i, i = \overline{0, N-1}$, последовательно через обратную рекурсию

$$G_i = -(S \oplus D_0 + \hat{D}_1 G_{i+1})^{-1} \hat{S}, \quad i = N-2, N-3, \dots, 0,$$

с начальным условием $G_{N-1} = -(S \oplus (D_0 + D_1))^{-1} \hat{S}$.

Шаг 2. Вычислить матрицы $F_l, l = \overline{0, N}$ рекуррентно:

$$F_0 = I, \quad F_l = -F_{l-1} \hat{D}_1 (S \oplus D_0 + (S \oplus D_1) \delta_{i,N} + \hat{D}_1 G_l)^{-1}, \quad l = \overline{1, N}.$$

Шаг 3. Найти вектор $\mathbf{q}_0$ как решение системы уравнений:

$$\mathbf{q}_0 (\hat{D}_0 + \hat{D}_1 G_0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_0 \sum_{l=0}^N F_l \mathbf{1} = 1.$$

Шаг 4. Вычислить векторы $\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_0 F_l, l = \overline{0, N}$ стационарного распределения.

Задача 2: разработать алгоритм расчета вероятностно-временных характеристик отдельных фаз и фрагментов системы (цепочки нескольких фаз)

Расчет стационарного распределения вероятностей состояний фрагмента системы

Совместное стационарное распределение $\mathbf{p}^{(1,\dots,r)}$ вероятностей состояний первых r станций многофазной системы вычисляется как стационарное распределение управляющего процесса выходящего из r -й станции $MAP^{(r)}$ -потока: $\mathbf{p}^{(1,\dots,r)} = \theta^{(r)}$, где вектор $\theta^{(r)}$ – единственное решение системы линейных уравнений

$$\theta^{(r)}(D_0^{(r)} + D_1^{(r)}) = \mathbf{0}, \quad \theta^{(r)}\mathbf{1} = 1, \quad r = \overline{1, R}.$$

Расчет вероятности потерь

Вероятность $P_{loss}^{(r)}$ того, что произвольная заявка будет потеряна при поступлении в r -й узел многофазной системы, есть величина

$$P_{loss}^{(r)} = \frac{\bar{\lambda}_r - \lambda_r}{\bar{\lambda}_r}, \quad r = \overline{1, R},$$

где $\bar{\lambda}_r = \bar{\theta}^{(r)} \tilde{D}_1^{(r)} \mathbf{e}$, $\lambda_r = \theta^{(r)} D_1^{(r)} \mathbf{e}$, а векторы $\bar{\theta}^{(r)}$ и $\theta^{(r)}$ находятся как решения соответствующих систем:

$$\bar{\theta}^{(r)} (\tilde{D}_0^{(r)} + \tilde{D}_1^{(r)}) = \mathbf{0}, \quad \bar{\theta}^{(r)} \mathbf{e} = 1,$$

$$\theta^{(r)} (D_0^{(r)} + D_1^{(r)}) = \mathbf{0}, \quad \theta^{(r)} \mathbf{e} = 1.$$

Ограничение метода расчета вероятностно-временных характеристик многофазной системы через прямое построение выходящих *МАР*-потоков в некоторых случаях состоит в *бурном росте* числа состояний таких потоков при продвижении от фазы к фазе.

Способ обойти *ограничение* – применить метод сокращения размерности выходящих *МАР*-потоков.

Задача – разработать алгоритм сокращения размерности выходящих потоков.

Шаг 1. Определить матрицы $D_0^{(r)}$ и $D_1^{(r)}$, описывающие выходящий поток из r -й фазы.

Шаг 2. Задать числа K_m и K_l первых моментов и коэффициентов корреляции.

Шаг 3. Вычислить m_k , $k = \overline{1, K_m}$ и l_k , $k = \overline{1, K_l}$ по формулам (3.20) и (3.21).

Шаг 4. Задать минимальную $N = 2$ и максимальную N_{max} размерность.

Шаг 5. Найти матрицы $\tilde{D}_0$ и $\tilde{D}_1$ МАР-потока, аппроксимирующие матрицы $D_0^{(r)}$ и $D_1^{(r)}$ как решение задачи оптимизации

$$(D_0, D_1) = \operatorname{argmin}_{D_0, D_1} Q$$

Шаг 6. Если $(D_0 + D_1)\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ или D_0 не является субгенератором, то
– $N := N + 1$;

– Если $N \leq N_{max}$, то *Шаг 5*, иначе завершить алгоритм без решения;
иначе завершить алгоритм с найденным решением вида $(D_0^{(r)}, D_1^{(r)})$.

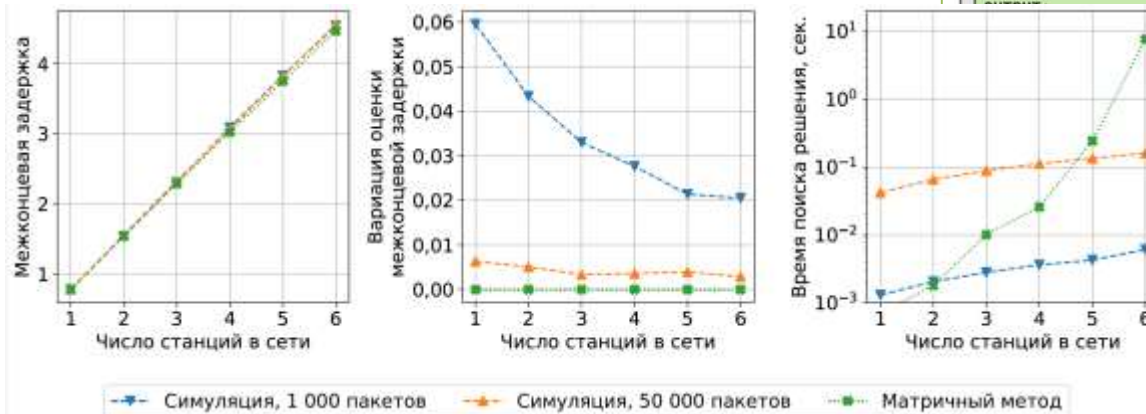
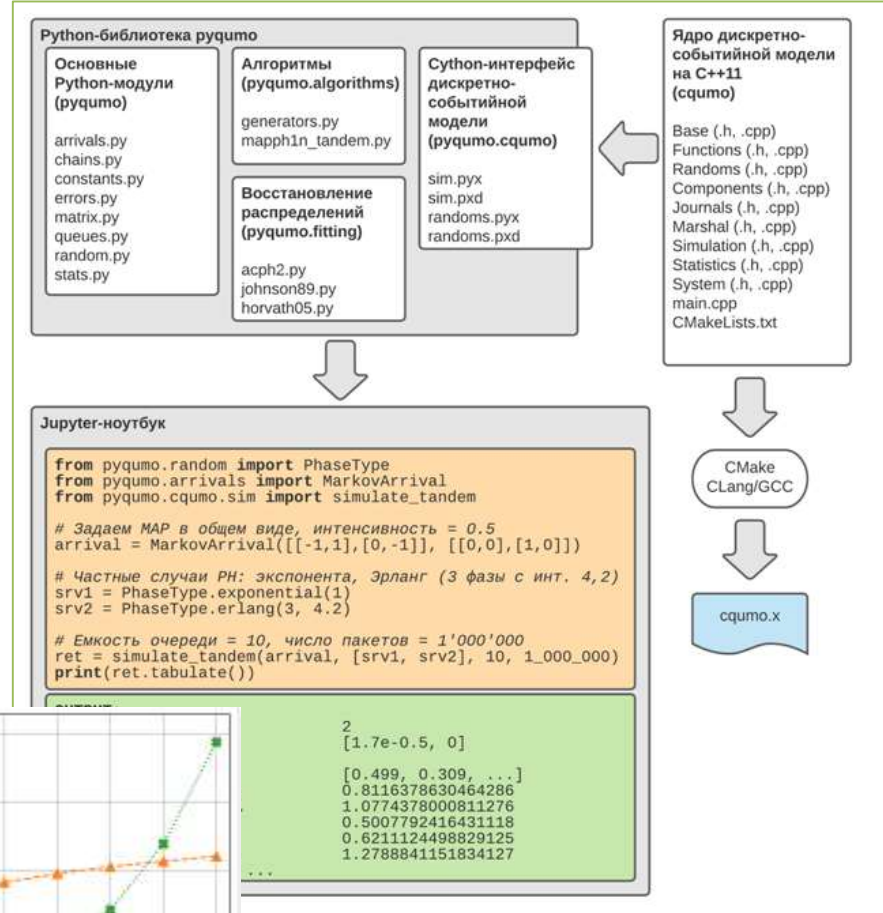
В случае, если сокращение размерности не дало удовлетворительных результатов, рекомендуется для расчетов вероятностно-временных характеристик использовать имитационное моделирование.

Комплекс программ для многофазных систем с коррелированными потоками

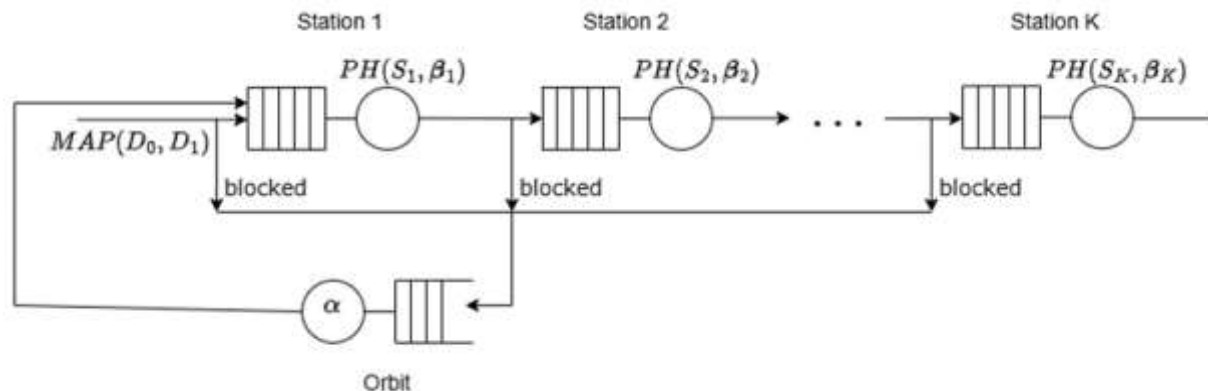


Комплекс программ состоит из двух основных частей:

- Python-библиотеки
Pyqumo (включает набор основных модулей, алгоритмы и набор методов восстановления распределений, а также Cython-интерфейс)
- имитационная модель на C++11 (cqumo).



Для повышения качества обслуживания в многофазных системах и уменьшения потерь передачи данных вводится механизм повторной передачи потерянных данных, который предполагает возврат на первую станцию сети с линейной топологией для повторного обслуживания на всех узлах сети.



Цель: разработать алгоритм расчета вероятностно-временных характеристик отдельных фаз и фрагментов системы (цепочки нескольких фаз)

Ограничение: анализ системы удастся провести лишь для частного случая двух фаз.

Метод: построение Марковского процесса, описывающего состояния системы, определение его инфинитезимального генератора, определение класса марковских процессов и применение матрично-аналитического подхода для вычисления стационарных вероятностей процесса.

Результат: алгоритм расчета среднего времени пребывания заявки в системе.

Алгоритм

1. Вычислить матрицу G как минимальное неотрицательное решение матричного уравнения

$$G = Y(G).$$

2. Вычислить матрицы $G_{i_0-1}, G_{i_0-2}, \dots, G_0$ с помощью обратной рекуррентной формулы

$$G_i = (-Q_{i+1,i+1} - Q_{i+1,i+2}G_{i+1})^{-1}Q_{i+1,i}, \quad i = i_0 - 1, i_0 - 2, \dots, 0,$$

с граничным условием $G_i = G$ для $i \geq i_0$, где i_0 – неотрицательное целое число, такое что $|G_{i_0} - G| < \varepsilon$ для некоторого положительного ε (точность вычислений).

3. Вычислить матрицы

$$Q_{i,i} = Q_{i,i} + Q_{i,i+1}G_i, \quad Q_{i,i+1} = Q_{i,i+1}, \quad i \geq 0,$$

где $G_i = G$ при $i \geq i_0$.

4. Вычислить матрицы $F_i, i \geq 1$ по рекуррентной формуле $F_0 = I, \quad F_i = F_{i-1}Q_{i-1,i} - Q_{i,i-1}, \quad i \geq 1.$

5. Вычислить вектор $\mathbf{p}_0$ как единственное решение системы

$$\mathbf{p}_0 Q_{0,0} = 0, \quad \mathbf{p}_0 e = 1.$$

6. Вычислить векторы $\mathbf{p}_i$ по формуле $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 F_i, \quad i \geq 1.$

7. Среднее время пребывания заявки в системе $W = \frac{L+L_1+L_2}{\lambda}.$

Случай произвольного числа фаз: имитационное моделирование и машинное обучение.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

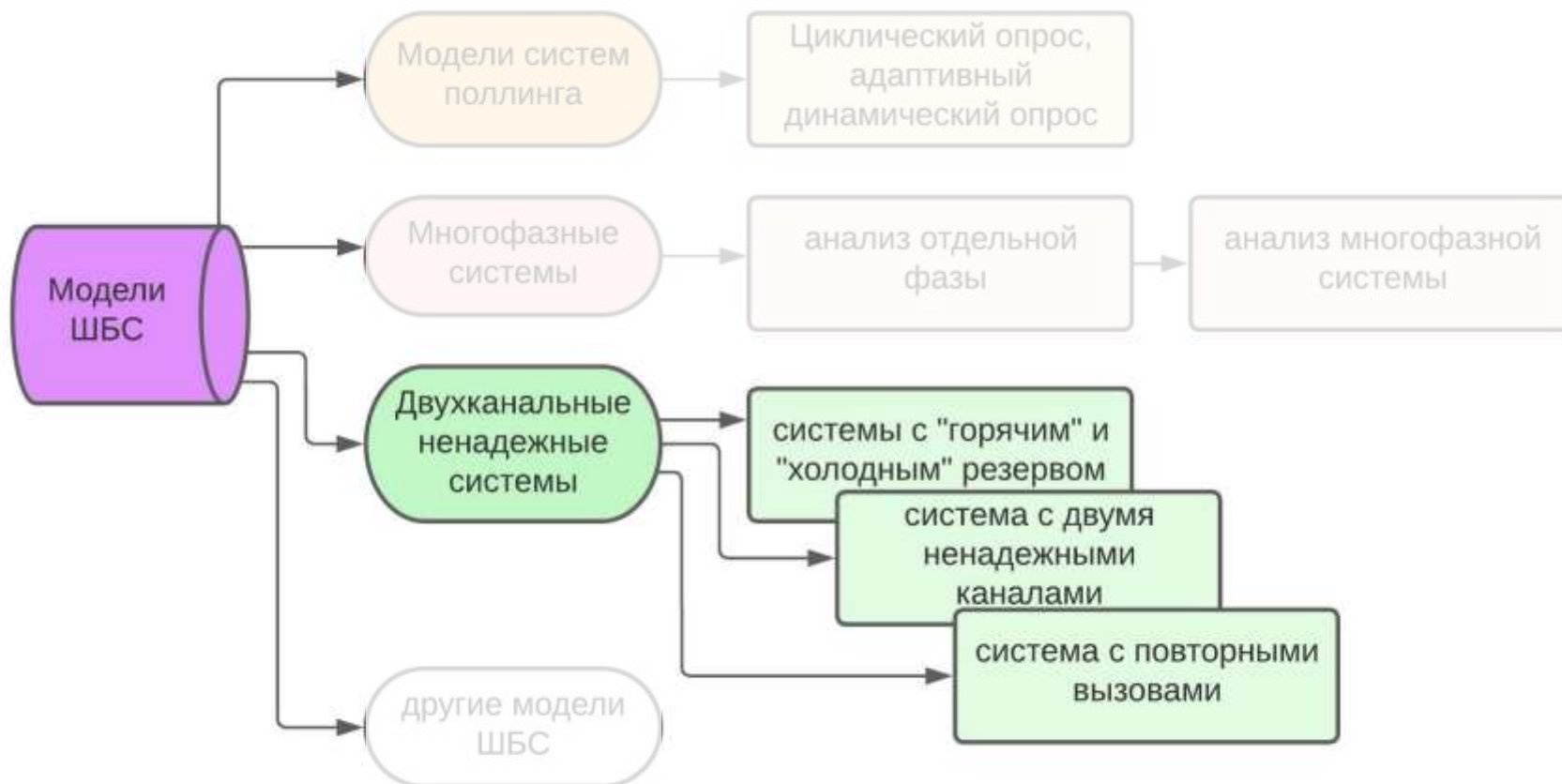
- № 2024682239 «Программный комплекс для обучения нейросетевых моделей для прогнозирования производительности многофазной системы массового обслуживания с орбитой» / В. М. Вишневский, О. В. Семёнова, М. С. Данг. Опубликовано 19.09.2024.
- № 2024682238 «Программный комплекс для имитационного моделирования многофазных систем массового обслуживания с орбитой» / В. М. Вишневский, О. В. Семёнова, М. С. Данг. — Опубликовано 19.09.2024.

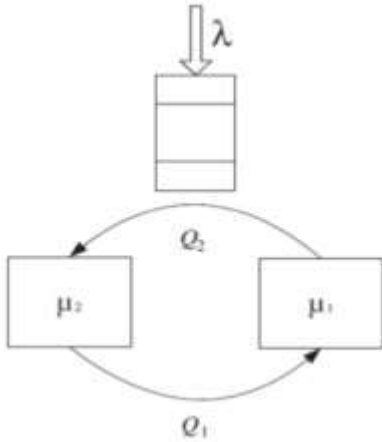


	Neural Network	Gradient Boosting	Random Forest
Number of examples with error $\leq 10\%$	532	347	474
Number of examples with error $\geq 50\%$	66	90	89
Number of examples with error $\geq 90\%$	35	25	43

Method	Execution time (seconds)
Simulation	4
Gradient Boosting	2×10^{-4}
Random Forest	1×10^{-7}
Neural Network	3×10^{-5}

1. Vishnevsky V., Klimenok V., Semenova O., Dang M.C. Retrial tandem queueing system with correlated arrivals // AIMS Mathematics. 2025. 10(5): 10650–10674. (Q1)
2. Vishnevsky V., Semenova O., Dang M.C., Nguen V.H. Multiphase queueing system of blocking queues and a single common orbit retrial queue with limited buffer // Lecture Notes in Computer Science. 2024. Vol. 14123. P. 209–221.
3. Larionov A., Vishnevsky V., Semenova O., Dudin A. A multiphase queueing model for performance analysis of a multi-hop IEEE 802.11 wireless network with DCF channel access // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. – Communications in Computer and Information Science. – 2019. – Vol. 1109. – P. 162-176.
4. Вишнеvский В.М., Ларионов А.А., Семёнова О.В. Оценка производительности высокоскоростной беспроводной тандемной сети с использованием каналов сантиметрового и миллиметрового диапазонов радиоволн в системах управления безопасностью дорожного движения // Проблемы управления. 2013. №4. С. 50-56.
5. Vishnevsky V., Larionov A., Semenova O., Ivanov R. State Reduction in Analysis of a Tandem Queueing System with Correlated Arrivals // Communications in Computer and Information Science. Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications (ITMM 2017). Springer, Cham, 800, pp. 215–230.
6. Larionov A., Vishnevsky V., Semenova O., Dudin A. A multiphase queueing model for performance analysis of a multi-hop IEEE 802.11 wireless network with DCF channel access // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. 2019. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1109. P. 162-176.





Периоды отказов и работоспособности основного канала – случайные величины, имеющие гиперэкспоненциальное распределение с ф.р.

$$F_k(t) = p_k \gamma_k^{(1)} e^{-\gamma_k^{(1)} t} + (1 - p_k) \gamma_k^{(2)} e^{-\gamma_k^{(2)} t}.$$

Методы анализа:

- метод вложенных цепей Маркова
- матрично-аналитический подход

Полученные результаты

1. Достаточное условие существования стационарного режима

$$\rho_1 + \rho_1 V \left(\frac{p_1}{\gamma_1^{(1)}} + \frac{1 - p_1}{\gamma_1^{(2)}} \right)^{-1} < 1.$$

2. Стационарное распределение вероятностей состояний системы во вложенные моменты и произвольный момент времени.
3. Среднее время ожидания.
4. Доля времени использования первого/второго ОУ.

$\rho_1 = \lambda / \mu_1$,
 V – средняя продолжительность периода, когда не используется основной канал

Расчет стационарного распределения вероятностей во вложенные моменты

Векторы стационарных вероятностей π_i , $i \geq 0$, вычисляются с помощью соотношений:

$$\pi_k = \pi_0 \Phi_k, \quad k \geq 1,$$

где $\Phi_0 = I$,

$$\Phi_k = \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_i F_{i,k} (I - F_{k,k})^{-1}, \quad k \geq 1,$$

матрицы $F_{i,k}$, $k \geq 0$, $i = \overline{0, k}$, определяются равенствами

$$F_{i,k} = \sum_{l=k}^{\infty} P_{i,l} G^{l-k}, \quad i = \overline{0, k}, k \geq 0,$$

а вектор π_0 находится как решение следующей системы уравнений с добавлением условия нормировки

$$\begin{aligned} \pi_0 (I - F_{0,0}) &= 0, \\ \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \mathbf{1}_2 &= 1. \end{aligned}$$

Стационарное распределение вероятностей в произвольный момент времени

$$p(i, m) = F(\pi_1, \dots, \pi_i), \quad i \geq 0, m \in \{1, 1', 2, 2'\}$$

Характеристики производительности

1. Среднее время ожидания

$$W = \lambda^{-1} \sum_{m \in \{1, 1', 2, 2'\}} \sum_{i=0}^{\infty} i p(i, m)$$

2. Среднее время использования первого/второго ОУ

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^{\infty} p(i, k), \quad k \in \{1, 2\}$$

3. Доступность гибридной системы

$$R = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} p(i, 1')$$

Оба канала работают одновременно

Периоды отказов и работоспособности основного канала – случайные величины, имеющие гиперэкспоненциальное распределение с ф.р.

$$F_k(t) = p_k \gamma_k^{(1)} e^{-\gamma_k^{(1)} t} + (1 - p_k) \gamma_k^{(2)} e^{-\gamma_k^{(2)} t}.$$

Метод анализа:

- матрично-аналитический подход

Полученные результаты

1. Критерий существования стационарного режима

$$\lambda < \mu_2 + \frac{\gamma_2 \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

2. Стационарное распределение вероятностей состояний системы в произвольный момент времени.
3. Среднее время ожидания.
4. Доля времени функционирования обоих каналов/резервного канала.

Алгоритм расчета характеристик при архитектуре горячего резервирования

Шаг 1. Определить параметры гиперэкспоненциальных распределений периодов доступности и недоступности оптического канала:

$$F_k(t) = p_k \gamma_k^{(1)} e^{-\gamma_k^{(1)} t} + (1 - p_k) \gamma_k^{(2)} e^{-\gamma_k^{(2)} t}, \quad k = \overline{1, 2}.$$

Шаг 2. Задать входные параметры λ , μ_1 , μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$), q_1 , q_2 .

Шаг 3. Проверить выполнение условия существования стационарного режима:

$$\lambda < \mu_2 + \frac{\gamma_2 \mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Шаг 4. Вычислить векторы π_i , $i \geq 0$ стационарных вероятностей как $\pi_i = \pi_0 F_i$, $i \geq 1$.

Шаг 5. Вычислить характеристики производительности системы:

- Средняя доля заявок, обслуженных на k -м приборе;
- Среднее число L заявок в очереди;
- Среднее время ожидания в системе: $W = L/\lambda$.

Особенность: обслуживающие приборы (каналы) одновременно не могут находиться в состоянии отказа (поломки).

Критерий существования стационарного режима рассматриваемой системы имеет вид

$$\lambda a < (\mu_1 + \mu_2)\alpha_1\alpha_2 + \mu_1(1-p)\alpha\alpha_1 + \mu_2p\alpha\alpha_2, \quad (4.38)$$

где $a = \alpha_1\alpha_2 + p\alpha\alpha_2 + (1-p)\alpha\alpha_1$.

Векторы $\mathbf{p}_i$, $i \geq 0$ стационарных вероятностей состояний системы определяются следующим образом:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 C_1 (-A_0)^{-1}, \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 B_1 B^{-1} R^{n-1}, \quad n \geq 2, \quad (4.42)$$

вектор $\mathbf{p}_1$ находится как решение системы линейных уравнений

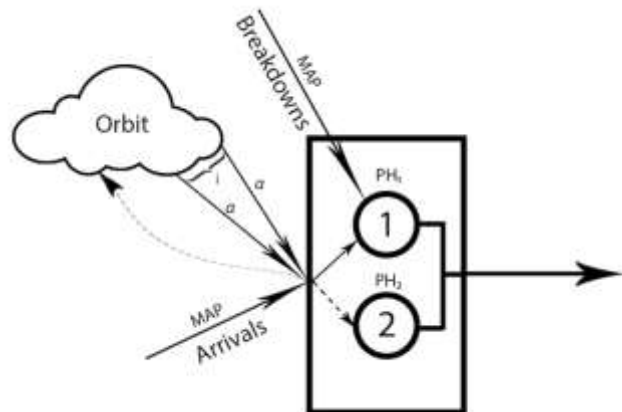
$$\mathbf{p}_1 [A_1 + C_1 (-A_0)^{-1} B_0 + B_1 B^{-1} R C_2] = \mathbf{0}_4, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{p}_1 [\mathbf{1}_4 + C_1 (-A_0)^{-1} \mathbf{1}_3 + B_1 B^{-1} R (I - R)^{-1} \mathbf{1}_3] = 1. \quad (4.44)$$

Матрица R – минимальное неотрицательное решение матричного уравнения $R^2 C + R A + B = O$.

α – интенсивность потока поломок,
 p – вероятность поломки первого ОУ,
 α_r – параметр экспоненциального распределения длительности поломки ОУ r , $r = \overline{1,2}$.

Характеристики производительности: среднее время ожидания, средняя доля длительности отказа для каждого прибора.



Модель: система с повторными вызовами

- Входной поток типа MAP
- PH распределение времени обслуживания
- Поток поломок типа MAP

Условия существования стационарного режима

1) Цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, имеет стационарное распределение вероятностей, если

$$\lambda < \pi_1 S_0^{(2)} + \pi_1 S_0^{(1)}, \quad (4.52)$$

2) Если неравенство (4.52) имеет противоположный знак, то цепь Маркова $\xi_t, t \geq 0$, не является эргодической.

Алгоритм вычисления векторов вероятностей состояний системы

Шаг 1. Вычислить матрицу G как минимальное неотрицательное решение следующего матричного уравнения: $G = Y_0 + Y_1 G + Y_2 G^2$.

Шаг 2. Вычислить матрицы $G_i, i \geq 0$, из обратной рекурсии $G_i = (-Q_{i+1,i+1} - Q_{i+1,i+2}G_{i+1})^{-1} Q_{i+1,i}$.

Шаг 3. Вычислить матрицы $\bar{Q}_{i,i} = Q_{i,i} + Q_{i,i+1}G_i, i \geq 0, \bar{Q}_{i,i+1} = Q_{i,i+1}, i \geq 0$.

Шаг 4. Рекуррентно вычислить матрицы $F_0 = I, F_i = F_{i-1}\bar{Q}_{i-1,i}(-\bar{Q}_{i,i})^{-1}, i \geq 1$.

Шаг 5. Вычислить вектор $\mathbf{p}_0$ как решение системы линейных уравнений

$$\mathbf{p}_0(-\bar{Q}_{0,0}) = 0, \mathbf{p}_0 \sum_{i=0}^{\infty} F_i \mathbf{e} = 1.$$

Шаг 6. Вычислить векторы $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 F_i, i \geq 0$.

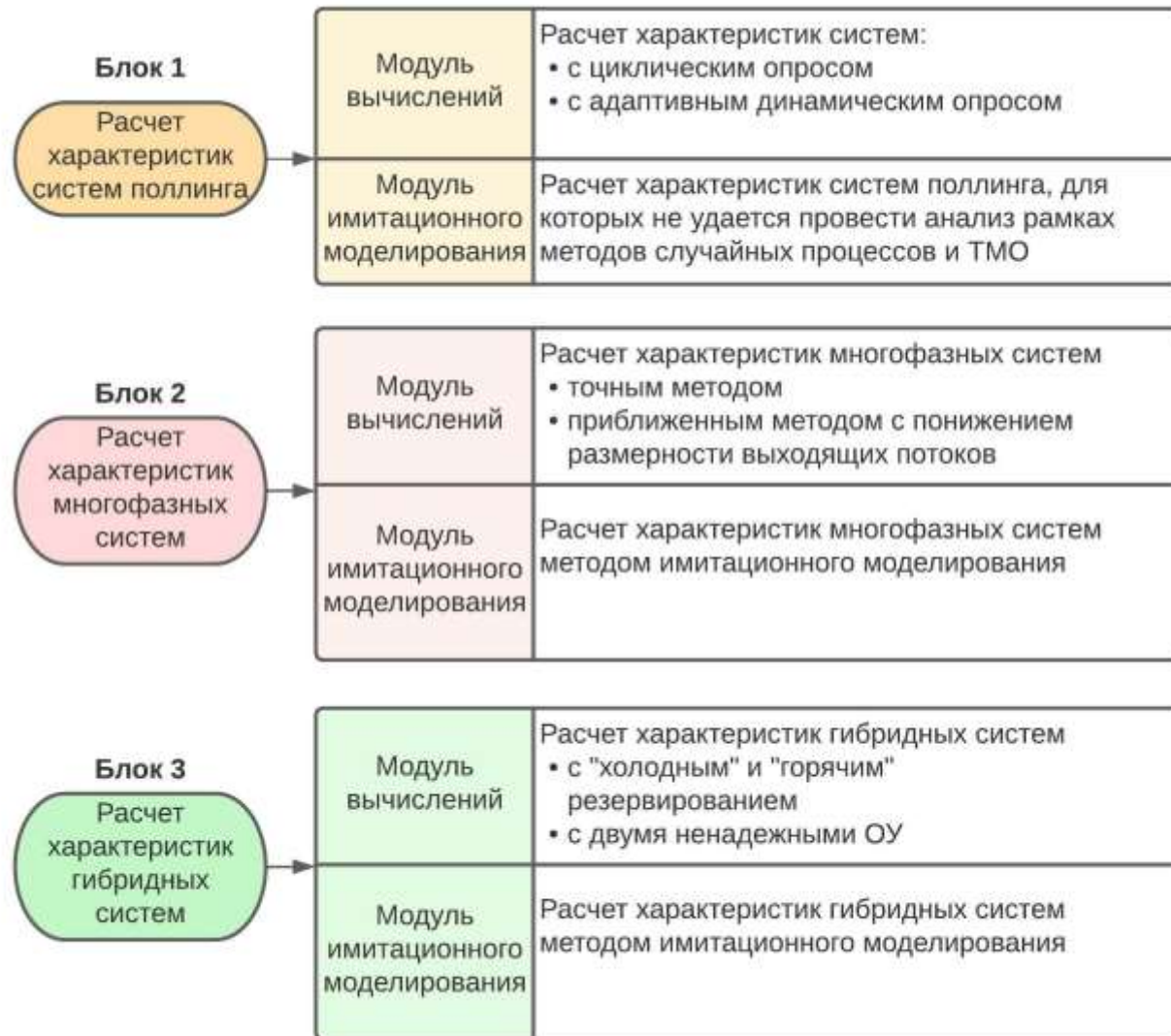
Характеристики производительности: среднее время ожидания, вероятности занятости, простоя и восстановления после отказа основного ОУ

Разработаны модели двухканальных систем с ненадежными ОУ:

- а) системы с архитектурой «холодного» резервирования
- б) системы с архитектурой «горячего» резервирования
- в) системы с двумя ненадежными ОУ
- г) системы с коррелированным МАР-потокм заявок, повторными вызовами и резервным ОУ, работающем в «горячем» резерве

2. Предложена *модификация* матрично-аналитического подхода с целью вычисления характеристик производительности перечисленных моделей.

Разработаны алгоритмы расчета характеристик производительности систем.



1. Разработаны методы производящих функций и средних значений для анализа моделей систем поллинга с адаптивным динамическим опросом очередей.
2. Разработан метод расчета параметров многофазных систем массового обслуживания с коррелированным входным потоком.
3. Разработаны модели двухканальных систем с ненадежными обслуживающими устройствами, коррелированным входным потоком и гиперэкспоненциальным распределением периодов отказа и бесперебойной работы, разработан метод анализа и алгоритм расчета характеристик производительности двухканальных ненадежных систем.
4. Предложен метод анализа переходного режима системы с коррелированным входным потоком, распределением обслуживания фазового типа и ограниченным буфером, разработан алгоритм вычисления нестационарных вероятностей состояний и основных характеристик производительности системы.
5. Разработан программный комплекс, реализующий методику расчета характеристик производительности систем поллинга, многофазных систем массового обслуживания и гибридных систем с коррелированными входными потоками.