Количественное измерение сложности в задачах дискретной оптимизации и теории расписаний[1]

к.ф.-м.н. Лемтюжникова Д. В.
darabbt@gmail.com

План

- Проблемы сложности задач
- Задачи дискретной оптимизации и теории расписаний
- Методы решения задач
- Понятие близости задач
- Основные тенденции развития

Проблемы сложности задач

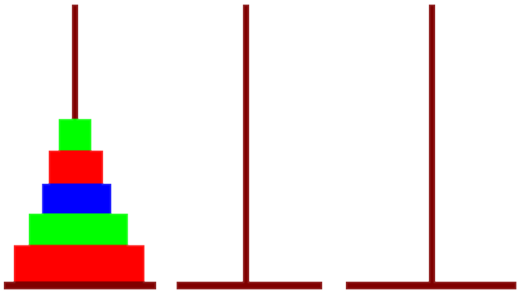
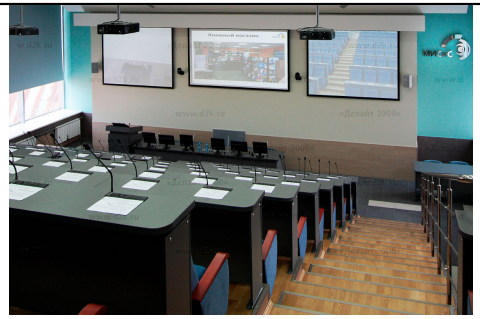
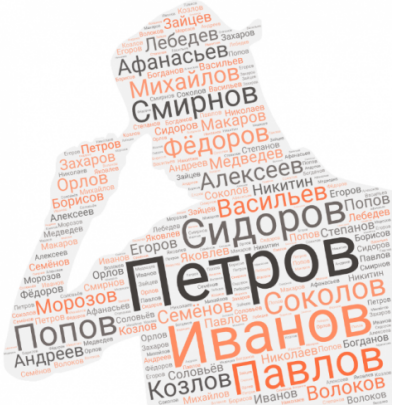
Оценка вычислительной сложности показывает, как объём входных данных влияет на требования к времени и объёму памяти.

Обозначение	Пояснение
O(1)	Устойчивое время работы, независимо от размера задачи
$O(\log \log n)$	Очень медленный рост необходимого времени
$O(\log n)$	Удвоение размера задачи увеличивает время на константу
$O(n)$	Удвоение размера задачи удвоит и необходимое время
$O(n \cdot \log n)$	Удвоение размера задачи увеличит время чуть более чем вдвое
$O(n^2)$	Удвоение размера задачи в 4 раза увеличивает время
$O(c^n)$	Увеличение размера задачи на 1 приводит к c-кратному увеличению необходимого времени

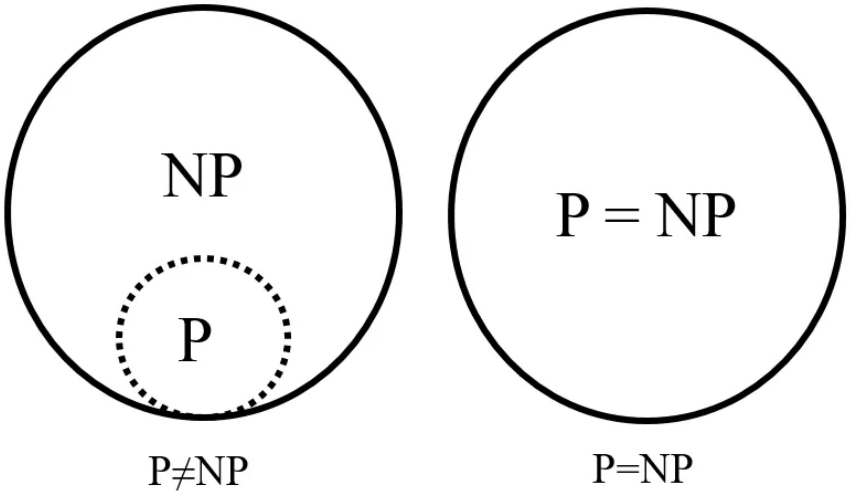
Таблица: Распространённые сложности алгоритмов

P	NP	EXP
полиномиальные	NP-трудные	экспоненциальные
легко вычислять	трудно вычислять	трудно вычислять
легко проверить	легко проверить	трудно проверить

Таблица: Теория сложности вычислений "на пальцах"

	Экспоненциальная сложность: перенос Ханойской башни
	NP-сложность: размещение студентов в аудиториях
	Полиномиальная сложность: сортировка фамилий по алфавиту

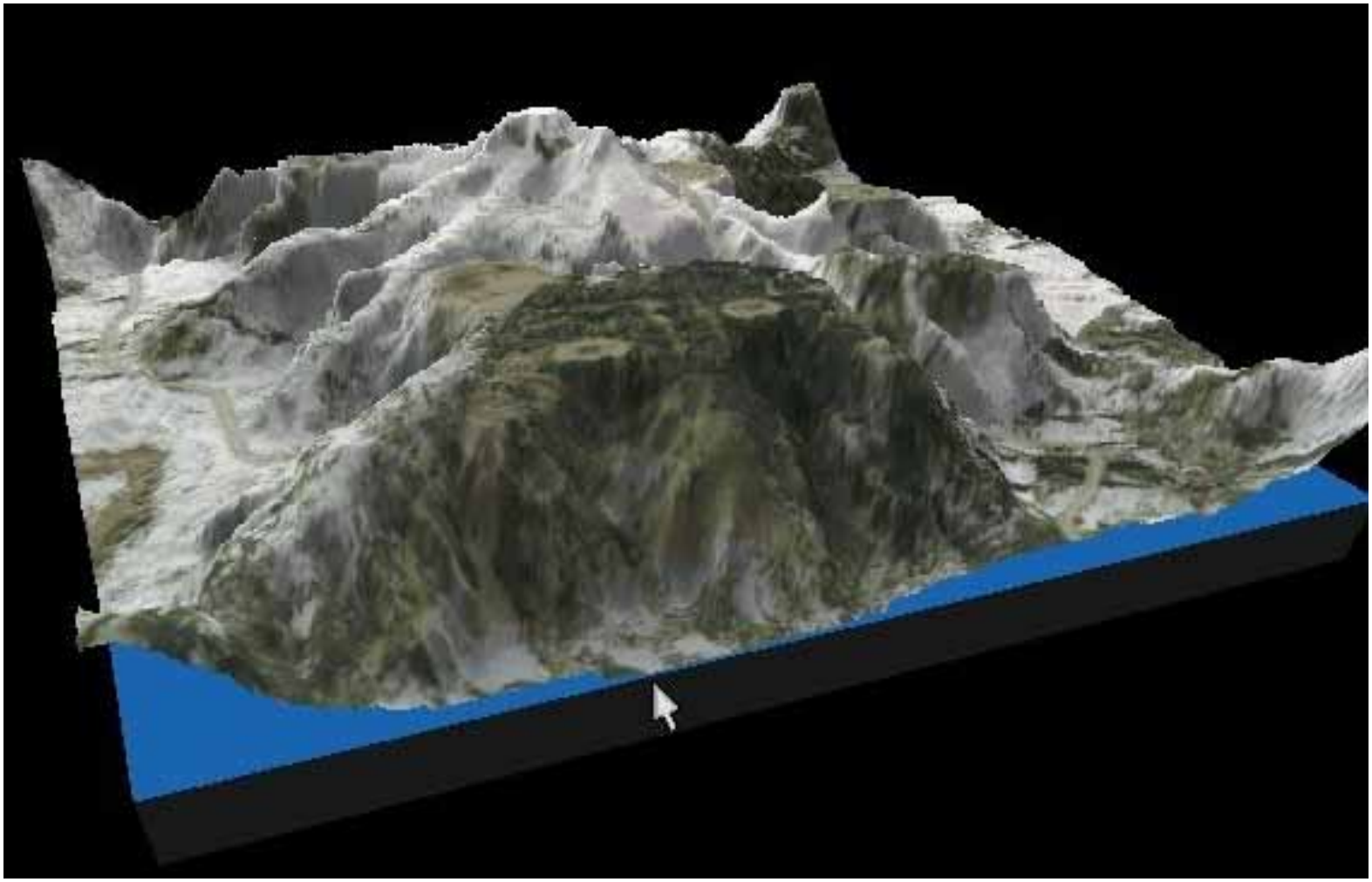
NP-трудные задачи сводимы друг к другу



?

Проблема равенства классов P и NP является одной из семи задач тысячелетия, за решение которой Математический институт Клэя назначил премию в миллион долларов США

Гипотеза $P \in NP \rightarrow$ сложность задач неоднородна



Можно ли определить закономерности упрощения или усложнения задачи в зависимости от её исходных данных?

Задачи дискретной оптимизации и теории расписаний

Как оптимизировать порядок изучения дисциплин к экзаменам, чтобы получить наилучший результат?

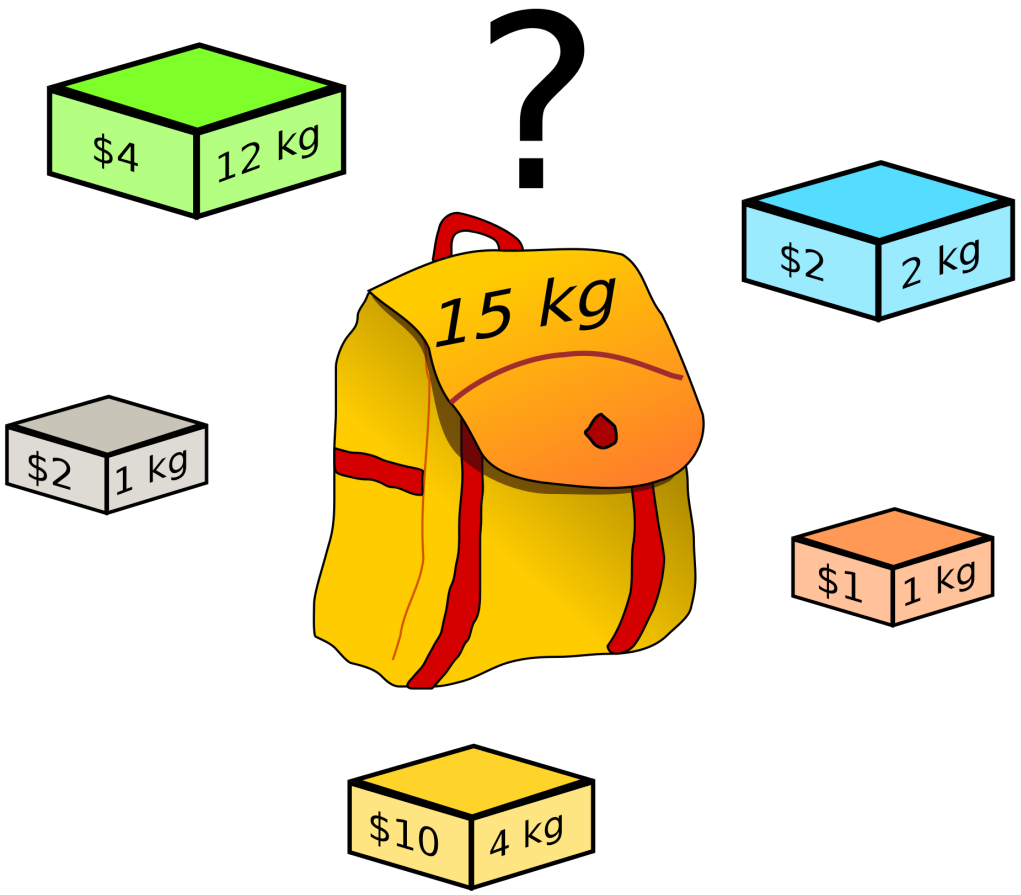
Стратегия студента на экзамене

| 4 | 4 | 4 | 4 |

а) получил все четвёрки, чтобы не потерять стипендию

| 3 | 4 | 5 | 5 |

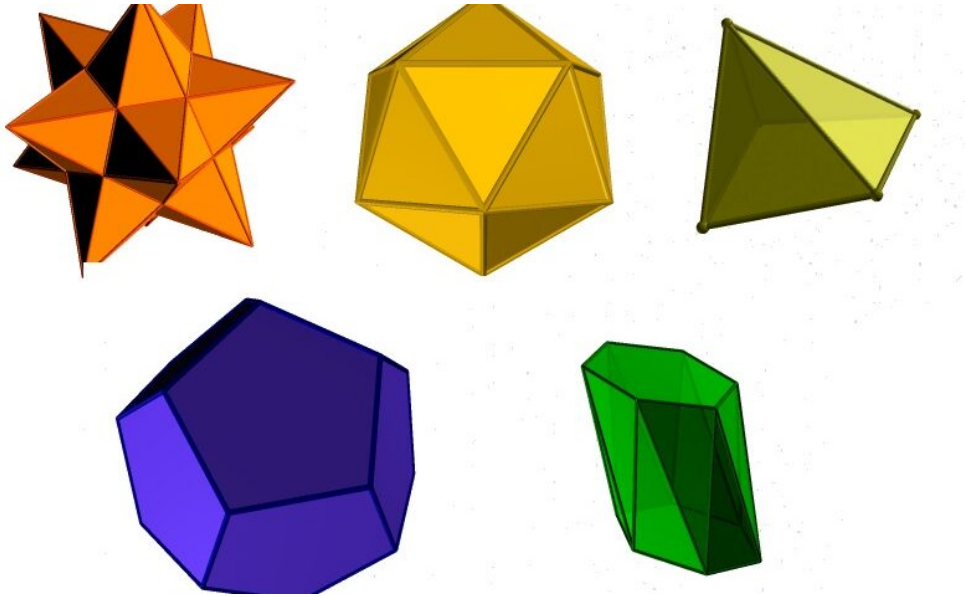
б) получил одну тройку среди остальных четвёрок и пятёрок



Задача дискретной оптимизации имеет следующий вид:

$$MONEY \to \max,$$
$$SUM_of_weight \leq KNAPSACK$$

Ограничения задают структуру задачи

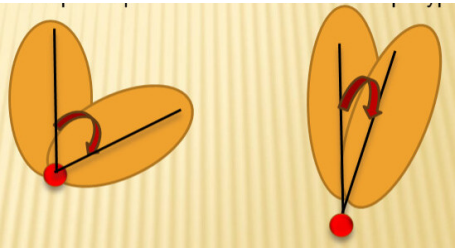


Коэффициенты при переменных определяют местоположение задачи в пространстве

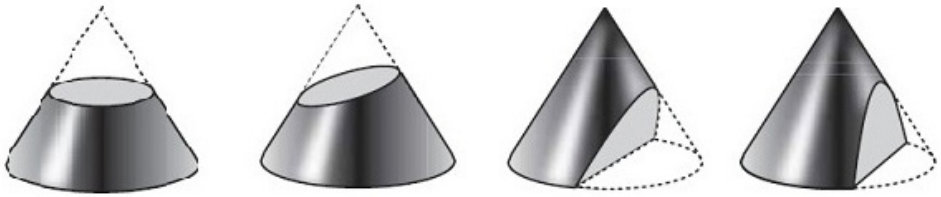
Задача состоит в том, чтобы получить решение новой задачи по имеющимся ранее решениям похожих задач

Чем больше задач было решено ранее - тем точнее полученное решение

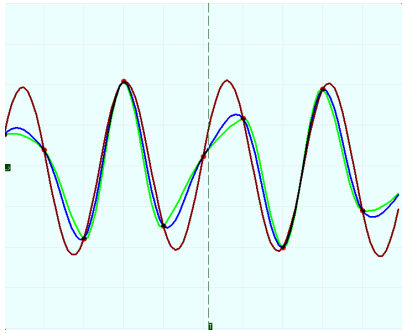
- Изменение параметров при фиксированной структуре
  - Изменение разреженности задачи



- Изменение структуры при фиксированных параметрах



- Изменение восстановленной по точкам структуры задачи
  - Изменение восстановленной по точкам структуры задачи с помощью машинного обучения



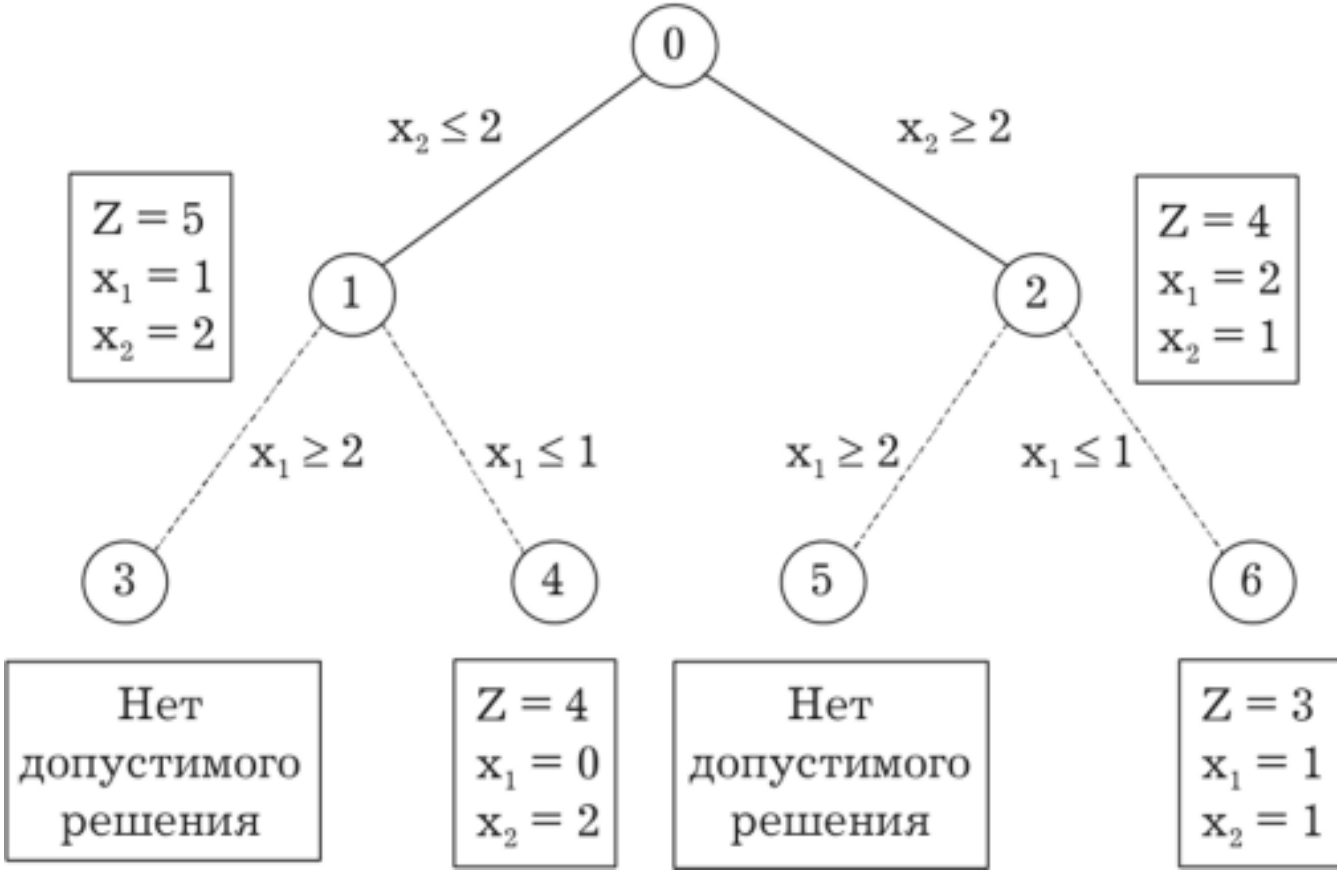
Методы решения задач

Наивный подход

$x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max,$
$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4,$
$4x_1 - 3x_2 \leq 2,$
$-3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3,$
$x_1, x_2, x_3 \in Z.$

Игнорируя условие целочисленности, получим оптимальное решение линейной задачи $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = 4\frac{1}{2}$. Никакие округления компонент этого решения не дают даже целочисленного плана, оптимальное решение целочисленной задачи имеет вид $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 5$.

Методы решения: точные, приближенные, приближенные с гарантированной погрешностью целевой функции



Современная версия: метод ветвлений, отсечений и оценок

Решение задачи приближенными методами обычно происходит в два этапа:

- построение начального решения — эвристические алгоритмы;
- улучшение начального решения — алгоритмы локальной оптимизации.

Метаэвристические алгоритмы:

- объединяют в себе один или более эвристических методов;
- опираются на стратегию поиска более высокого уровня.

Приближенные алгоритмы с гарантированной погрешностью — алгоритмы, для которых удалось оценить максимально плохое решение

I. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МЕТОДЫ: генетические алгоритмы; методы, имитирующие иммунные системы организмов; метод рассеивания; эволюционная стратегия преобразования ковариационной матрицы; метод динамических сеток; метод дифференциальной эволюции; метод, имитирующий распространение сорняков; метод, имитирующий поведение кукушек.

II. МЕТОДЫ «РОЕВОГО» ИНТЕЛЛЕКТА: метод частиц в стае; метод муравьиных колоний; метод имитации поведения бактерий; методы пчелиных колоний; метод, имитирующий поведение стаи рыб в поисках корма; метод, имитирующий поведение летучих мышей; метод, имитирующий поведение светлячков; алгоритм, имитирующий поведение лягушек.

III. МЕТОДЫ, ИМИТИРУЮЩИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ: метод гравитационной кинематики; метод имитации отжига; метод поиска гармонии; метод, использующий закон электромагнетизма.

IV. МУЛЬТИСТАРТОВЫЕ МЕТОДЫ: жадный адаптивный метод случайного поиска; метод направленного табу-поиска.

Базис решателя состоит из следующих концепций:

- основной алгоритм (метод ветвей и границ, симплекс-метод);
- приближенные алгоритмы и условия их применимости внутри основного метода;
- предобработка задачи.

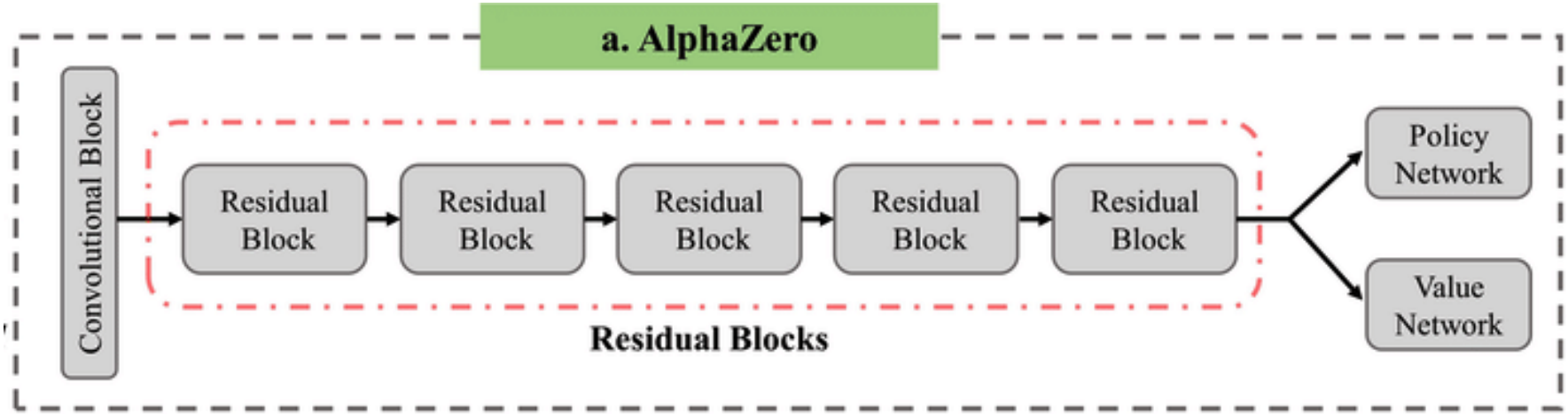
Наиболее известные решатели задач ДО

- Gurobi;
- Scip;
- Copt;
- Xpress;
- Cplex;
- Cbc;
- Scipy;
- Glpk.

+ бенчмарки - данные, на которых сравниваются алгоритмы

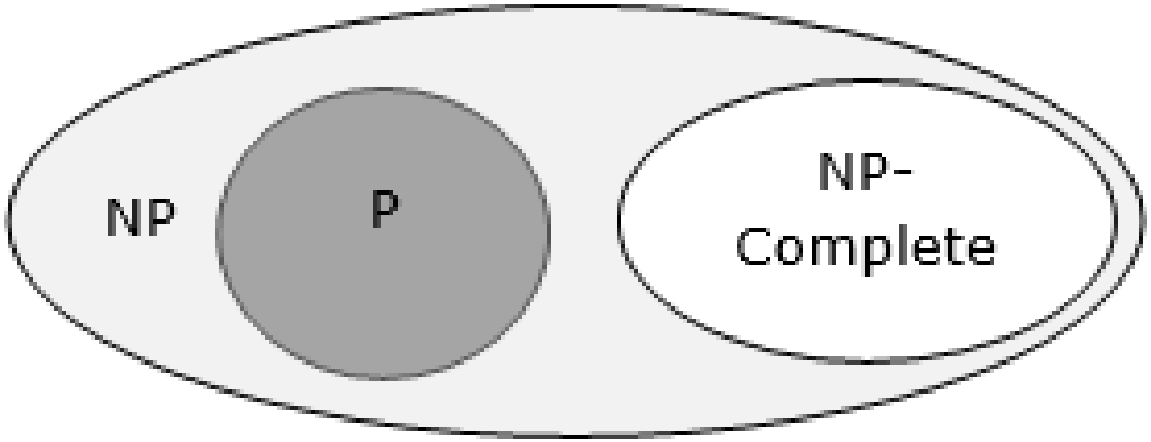
Постоптимальный анализ (анализ моделей на чувствительность) - это процесс, реализуемый после того, как оптимальное решение задачи получено.

Нейронные сети обучаются на точных решениях задач небольшой размерности, а затем применяются к задачам того же типа большей размерности. Проблема в том, что нейронную сеть необходимо чрезвычайно долго обучать.



Наиболее популярная архитектура: архитектура **Alpha-zero**.

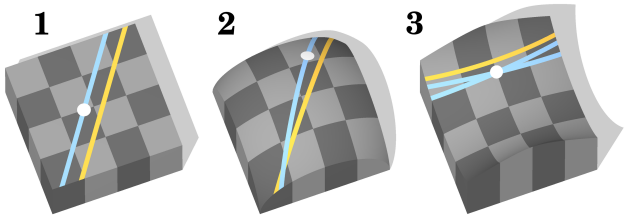
Понятие близости задач



Простой	Сложный
определяется закономерностью в данных исходной NP-трудной задачи	
существует простой алгоритм, даёт точные решения	не существует такого алгоритма

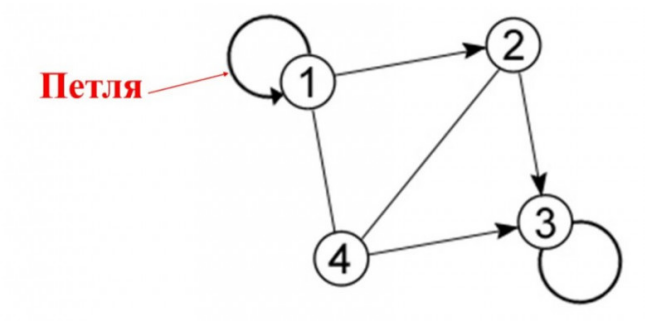
Таблица: Специальные случаи

Расстояние между точками определяется разными способами



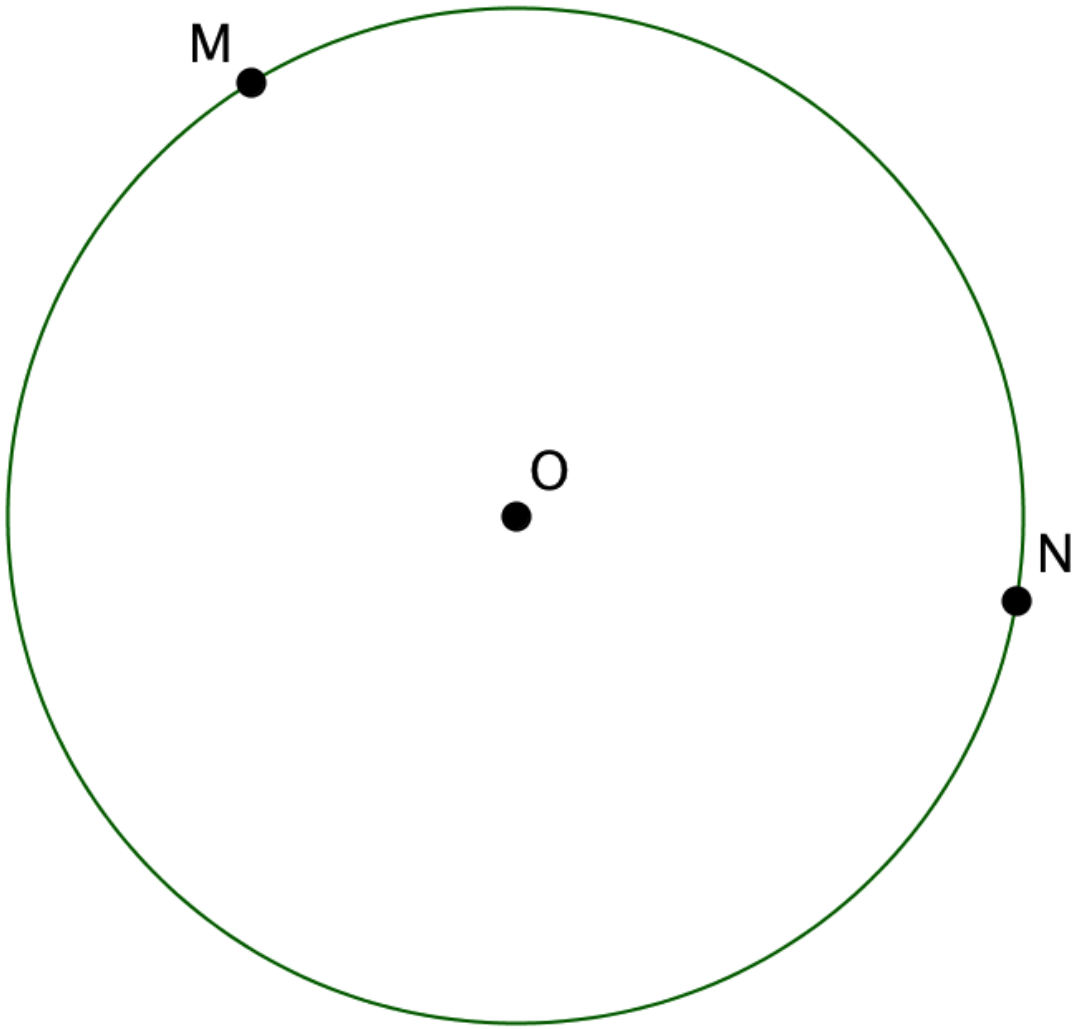
Аксиомы метрики:

- Аксиома тождества: расстояние из точки в саму себя равно ноль

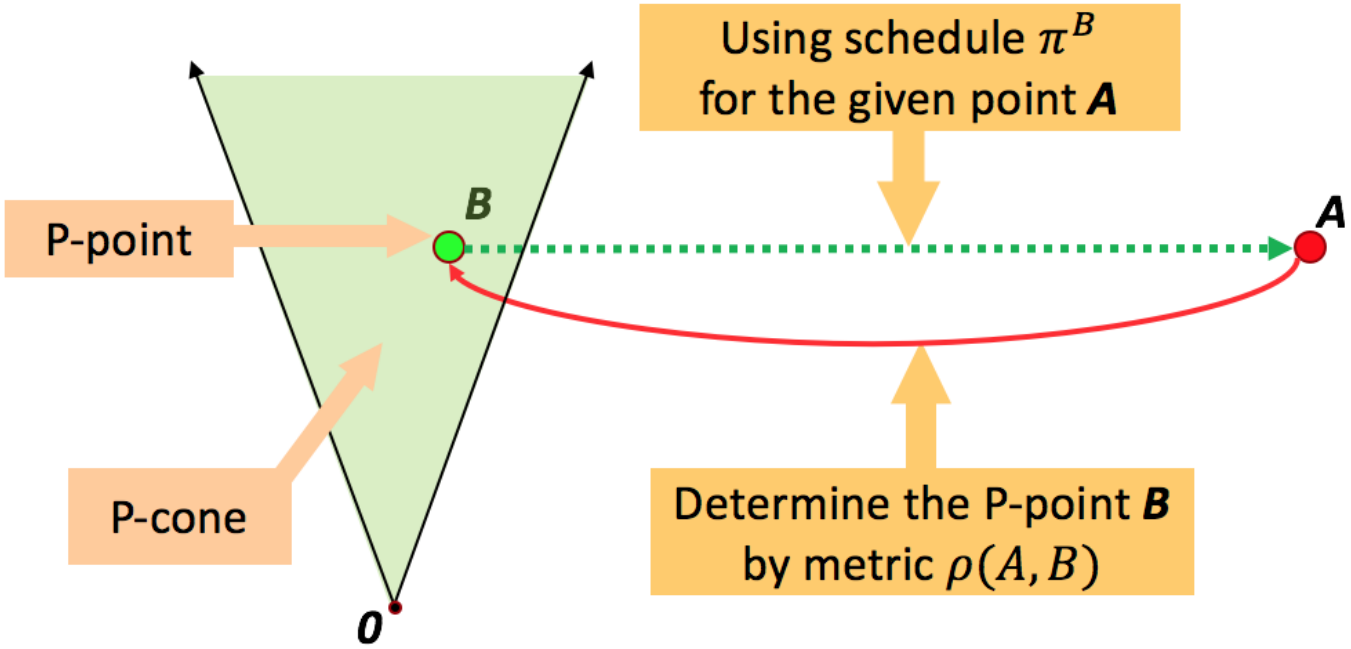


- Аксиома симметричности: расстояние из первой точки во вторую равно расстоянию из второй точки в первую
- Аксиома треугольника: сумма расстояний из первой точки в третью и из второй точки в третью не меньше, чем расстояние из первой точки во вторую

Построить функцию сходства для двух примеров данной NP-трудной задачи — выбрать такую функцию, которая будет оценкой сверху для разности целевых функций этих примеров.



- чем ближе исходная задача к простому специальному случаю или дальше от сложного — тем «проще» исходная задача;
- чем ближе исходная задача к сложному специальному случаю или дальше от простого — тем «сложнее» исходная задача.



Terra Quantuum https://terraquantum.swiss

Quantagonia https://www.quantagonia.com/platform

	классические	квантовые
задачи	линейные	квадратичные
переменные	целочисленные	бинарные
ограничения	как можно больше	как можно меньше

Формирование метрики для классических и квантовых моделей:

- оценка перехода от линейного вида целевой функции к квадратичному
- оценка перехода от целочисленных переменных к бинарным
- оценка перехода от большего числа ограничений к меньшему

Основные тенденции развития

- Методы типа ветвлений, отсечений и оценок на базе методов отсечений и комбинаторных методов;
- Эвристики, метаэвристики и условия их применимости;
- Специальные случаи задач: такие, для которых существует точный и несложный алгоритм и такие, для которых простого и точного алгоритма не существует;
- Кластеризация и декомпозиция задач;
- Технологии квантовых решений и нейронных сетей.

Проблема: нет гарантий, что алгоритмы сравнимы между собой, поскольку все вычисления проходят на разных машинах и алгоритмы могут быть реализованы по-расному, на разных языках; особенно это остро, когда вычисления сравниваются на тестовых или практических данных, не бенчмарках

- kaggle.com — реализация многих решений одной и той же задачи в одном месте и на одних данных;
- schedulingzoo.lip6.fr — систематизация специальных случаев для задачи теории расписаний.
- ampl.com — платформа, на которой объединяются различные решатели.

Теория

- система оценок работы алгоритмов
- архитектура нейронных сетей
- сравнение параметров задач и оценка их влияния на решение
- методы более чем попарного сходства задач
- автоматизация декомпозиции
- точные подходы локального программирования
- квантовые решатели и мультиплатформы
- количественная NP-трудность

Области применения

- умный город
- интернет вещей
- автоматизация транспорта
- мегасеть спутников
- карманный искусственный интеллект
- многопроцессорные системы

Спасибо за внимание!