

# Анализ и управление фильтрацией и течениями реальных газов

В.В. Лычагин

ИПУ, Лаб. 6

22 апреля 2021

Пусть  $(\Omega, \mu)$  — вероятностное пространство, и пусть

$$\begin{aligned} X &: (\Omega, \mu) \rightarrow V, \\ \Omega &\ni \omega \mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

— случайный вектор со значениями в векторном пространстве  $V$ ,  $\dim V < \infty$ .

Результатом измерения называется значение математического ожидания

$$E_\mu(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mu.$$

## Факт

Пусть  $c \in V$  — такой вектор, что значение  $E_\mu(\|X - c\|^2)$  минимально, тогда  $c = E_\mu(X)$ .

# Принцип минимального прироста информации

Для нахождения вероятностных мер будем использовать принцип минимального прироста информации.

- Расстояние Кульбака-Лейблера  $\simeq$  относительная энтропия  $\simeq$  прирост информации:

$$I(\mu, \mu_0) = \int_{\Omega} \log \left( \frac{d\mu}{d\mu_0} \right) d\mu = \int_{\Omega} \rho \log(\rho) d\mu_0,$$

где  $\mu, \mu_0$  — вероятностные меры на  $\Omega$ ,  $d\mu = \rho d\mu_0$ , и  $\mu_0$  — априорная мера.

# Принцип минимального прироста информации

Для нахождения вероятностных мер будем использовать принцип минимального прироста информации.

- Расстояние Кульбака-Лейблера  $\simeq$  относительная энтропия  $\simeq$  прирост информации:

$$I(\mu, \mu_0) = \int_{\Omega} \log \left( \frac{d\mu}{d\mu_0} \right) d\mu = \int_{\Omega} \rho \log(\rho) d\mu_0,$$

где  $\mu, \mu_0$  — вероятностные меры на  $\Omega$ ,  $d\mu = \rho d\mu_0$ , и  $\mu_0$  — априорная мера.

- Заметим, что  $I(\mu, \mu_0) \geq 0$  и  $I(\mu, \mu_0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mu = \mu_0$  почти всюду.

# Принцип минимального прироста информации

Для нахождения вероятностных мер будем использовать принцип минимального прироста информации.

- Расстояние Кульбака-Лейблера  $\simeq$  относительная энтропия  $\simeq$  прирост информации:

$$I(\mu, \mu_0) = \int_{\Omega} \log \left( \frac{d\mu}{d\mu_0} \right) d\mu = \int_{\Omega} \rho \log(\rho) d\mu_0,$$

где  $\mu, \mu_0$  — вероятностные меры на  $\Omega$ ,  $d\mu = \rho d\mu_0$ , и  $\mu_0$  — априорная мера.

- Заметим, что  $I(\mu, \mu_0) \geq 0$  и  $I(\mu, \mu_0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mu = \mu_0$  почти всюду.
- **Принцип:** Пусть задан  $x \in V$ . Требуется найти вероятностную меру  $\mu_e$  (которая также называется экстремальной), такую что

$$I(\mu_e, \mu_0) = \min_{\mu} (I(\mu, \mu_0)), \quad E_{\mu_e}(X) = x.$$

# Экстремальные меры-1

- Вариационная задача. Найти функции  $\rho \geq 0$ , такие что функционал  $\rho \rightarrow \int_{\Omega} \rho \log(\rho) d\mu_0$  принимает минимальное значение при условиях

$$\int_{\Omega} \rho X(\omega) d\mu_0 = x, \quad \int_{\Omega} \rho d\mu_0 = 1.$$

# Экстремальные меры-1

- Вариационная задача. Найти функции  $\rho \geq 0$ , такие что функционал  $\rho \rightarrow \int_{\Omega} \rho \log(\rho) d\mu_0$  принимает минимальное значение при условиях

$$\int_{\Omega} \rho X(\omega) d\mu_0 = x, \quad \int_{\Omega} \rho d\mu_0 = 1.$$

- Решение:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{Z(\lambda)} \exp \langle \lambda, X(\omega) \rangle,$$

где  $\lambda \in V^*$  — ковектор (множители Лагранжа), и

$$Z(\lambda) = \int_{\Omega} \exp \langle \lambda, X(\omega) \rangle d\mu_0$$

— статистическая сумма.

Для значений измерения получим:

$$x = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \lambda = \frac{\partial I}{\partial x},$$

где  $H = -\ln Z$ ,

$$I = H - \left\langle \lambda, \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle, \quad H = I - \left\langle \frac{\partial I}{\partial x}, x \right\rangle.$$



- **Фазовым пространством** измерения называется множество  $\Phi = V \times V^* \times \mathbb{R}$  всех точек  $(x, \lambda, I)$ .

- **Фазовым пространством** измерения называется множество  $\Phi = V \times V^* \times \mathbb{R}$  всех точек  $(x, \lambda, I)$ .
- Формулы выше задают подмногообразие (мы называем его состоянием измерения)

$$L_X = \left\{ x = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, I = H - \left\langle \lambda, \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle \right\} \subset \Phi,$$

$$\dim L = \dim V.$$

- **Фазовым пространством** измерения называется множество  $\Phi = V \times V^* \times \mathbb{R}$  всех точек  $(x, \lambda, I)$ .
- Формулы выше задают подмногообразие (мы называем его состоянием измерения)

$$L_X = \left\{ x = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, I = H - \left\langle \lambda, \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle \right\} \subset \Phi,$$

$$\dim L = \dim V.$$

- Точки  $(x, \lambda, I) \in L_X$  будем рассматривать как тройки:

$\lambda \Leftrightarrow$  экстремальная мера,  $x \Leftrightarrow$  ожидание,  
 $I \Leftrightarrow$  прирост информации.

- Дифференциальная 1-форма  $\theta_1 = dl - \lambda dx$  равна 0 на  $L_X$ , то есть  $L_X$  — лежандрово подмногообразиие (В.И. Арнольд) в контактном многообразии  $(\Phi, \theta_1)$ .

- Дифференциальная 1-форма  $\theta_1 = dl - \lambda dx$  равна 0 на  $L_X$ , то есть  $L_X$  — лежандрово подмногообразиие (В.И. Арнольд) в контактном многообразии  $(\Phi, \theta_1)$ .
- Дифференциальная 2-форма  $d\lambda \wedge dx$  равна 0 на проекции  $\widetilde{L}_X \subset V \times V^*$  подмногообразия  $L_X$  в симплектическом пространстве  $(V \times V^*, d\lambda \wedge dx)$ , то есть  $\widetilde{L}_X$  — лагранжево многообразиие (В.П. Маслов).

- Дифференциальная 1-форма  $\theta_1 = dl - \lambda dx$  равна 0 на  $L_X$ , то есть  $L_X$  — лежандрово подмногообразиие (В.И. Арнольд) в контактном многообразии  $(\Phi, \theta_1)$ .
- Дифференциальная 2-форма  $d\lambda \wedge dx$  равна 0 на проекции  $\widetilde{L}_X \subset V \times V^*$  подмногообразия  $L_X$  в симплектическом пространстве  $(V \times V^*, d\lambda \wedge dx)$ , то есть  $\widetilde{L}_X$  — лагранжево многообразиие (В.П. Маслов).
- Дифференциальная симметрическая 2-форма  $\kappa = d\lambda \cdot dx$  задает структуру риманова многообразииа на  $\widetilde{L}_X$  (информационная метрика Фишера).

- Дифференциальная 1-форма  $\theta_1 = dl - \lambda dx$  равна 0 на  $L_X$ , то есть  $L_X$  — лежандрово подмногообразиие (В.И. Арнольд) в контактном многообразии  $(\Phi, \theta_1)$ .
- Дифференциальная 2-форма  $d\lambda \wedge dx$  равна 0 на проекции  $\widetilde{L}_X \subset V \times V^*$  подмногообразия  $L_X$  в симплектическом пространстве  $(V \times V^*, d\lambda \wedge dx)$ , то есть  $\widetilde{L}_X$  — лагранжево многообразие (В.П. Маслов).
- Дифференциальная симметрическая 2-форма  $\kappa = d\lambda \cdot dx$  задает структуру риманова многообразия на  $\widetilde{L}_X$  (информационная метрика Фишера).
- Симметрические тензоры

$$\theta_k = \sum \frac{\partial^{|\sigma|} l}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{\sigma!}, \quad |\sigma| = k,$$

где  $\kappa = \theta_2$ , задают центральные моменты экстремальных мер на  $L_X$ .

- Рассмотрим случай реальных газов



- Рассмотрим случай реальных газов



$$V = \{\text{экстенсивные величины}\} = \\ \{(внутренняя энергия, объем, масса) = (E, V, m)\} = \mathbb{R}^3,$$

- Рассмотрим случай реальных газов



$$V = \{\text{экстенсивные величины}\} = \\ \{( \text{внутренняя энергия, объем, масса} ) = (E, V, m)\} = \mathbb{R}^3,$$



$$V^* = \{\text{интенсивные величины}\} = \\ \{( \text{температура, давление, хим. потенциал} ) = (T, p, \gamma)\} = \mathbb{R}^3$$

- Рассмотрим случай реальных газов



$$V = \{\text{экстенсивные величины}\} = \\ \{( \text{внутренняя энергия, объем, масса} ) = (E, V, m)\} = \mathbb{R}^3,$$



$$V^* = \{\text{интенсивные величины}\} = \\ \{( \text{температура, давление, хим. потенциал} ) = (T, p, \gamma)\} = \mathbb{R}^3$$

- Термодинамическое фазовое пространство

$$\Phi = \{(E, T, V, p, m, \gamma, S)\} = \mathbb{R}^7$$

- Рассмотрим случай реальных газов



$$V = \{\text{экстенсивные величины}\} = \\ \{( \text{внутренняя энергия, объем, масса} ) = (E, V, m)\} = \mathbb{R}^3,$$



$$V^* = \{\text{интенсивные величины}\} = \\ \{( \text{температура, давление, хим. потенциал} ) = (T, p, \gamma)\} = \mathbb{R}^3$$

- Термодинамическое фазовое пространство

$$\Phi = \{(E, T, V, p, m, \gamma, S)\} = \mathbb{R}^7$$

- Контактная форма

$$\theta = dE - TdS + pdV - \gamma dm.$$

- Рассмотрим случай реальных газов



$$V = \{\text{экстенсивные величины}\} = \\ \{( \text{внутренняя энергия, объем, масса} ) = (E, V, m)\} = \mathbb{R}^3,$$



$$V^* = \{\text{интенсивные величины}\} = \\ \{( \text{температура, давление, хим. потенциал} ) = (T, p, \gamma)\} = \mathbb{R}^3$$

- Термодинамическое фазовое пространство

$$\Phi = \{(E, T, V, p, m, \gamma, S)\} = \mathbb{R}^7$$

- Контактная форма

$$\theta = dE - TdS + pdV - \gamma dm.$$

- Закон сохранения энергии

$$\theta|_{L_x} = 0.$$

- $\varepsilon = E/m, \sigma = S/m, \nu = \rho^{-1} = V/m.$

- $\varepsilon = E/m, \sigma = S/m, \nu = \rho^{-1} = V/m.$
- Удельное фазовое пространство

$$\Phi = \mathbb{R}^5 = \{(\sigma, \varepsilon, T, \nu, p)\}.$$

- $\varepsilon = E/m, \sigma = S/m, v = \rho^{-1} = V/m.$
- Удельное фазовое пространство

$$\Phi = \mathbb{R}^5 = \{(\sigma, \varepsilon, T, v, p)\}.$$

- Закон сохранения энергии

$$\theta = d\sigma - T^{-1}d\varepsilon - T^{-1}pdv,$$

$$\gamma = \varepsilon + pv - T\sigma - \text{удельный потенциал Гиббса.}$$



# Термодинамическое состояние

- Лагранжево многообразие  $L$  ( $\dim L = 2$ ) в симплектическом пространстве  $\tilde{\Phi} = \mathbb{R}^4 = \{(\varepsilon, T, v, p)\}$ , снабженным структурной формой

$$\Omega = -d\theta = d(T^{-1}) \wedge d\varepsilon + d(T^{-1}p) \wedge dv$$

Это многообразие задано двумя уравнениями состояния:

# Термодинамическое состояние

- Лагранжево многообразие  $L$  ( $\dim L = 2$ ) в симплектическом пространстве  $\tilde{\Phi} = \mathbb{R}^4 = \{(\varepsilon, T, v, p)\}$ , снабженным структурной формой

$$\Omega = -d\theta = d(T^{-1}) \wedge d\varepsilon + d(T^{-1}p) \wedge dv$$

Это многообразие задано двумя уравнениями состояния:

- Термическое уравнение состояния:

$$p = A(v, T).$$

# Термодинамическое состояние

- Лагранжево многообразие  $L$  ( $\dim L = 2$ ) в симплектическом пространстве  $\tilde{\Phi} = \mathbb{R}^4 = \{(\varepsilon, T, v, p)\}$ , снабженным структурной формой

$$\Omega = -d\theta = d(T^{-1}) \wedge d\varepsilon + d(T^{-1}p) \wedge dv$$

Это многообразие задано двумя уравнениями состояния:

- Термическое уравнение состояния:

$$p = A(v, T).$$

- Калорическое уравнение состояния:

$$\varepsilon = B(v, T).$$

# Термодинамическое состояние

- Лагранжево многообразие  $L$  ( $\dim L = 2$ ) в симплектическом пространстве  $\tilde{\Phi} = \mathbb{R}^4 = \{(\varepsilon, T, v, p)\}$ , снабженным структурной формой

$$\Omega = -d\theta = d(T^{-1}) \wedge d\varepsilon + d(T^{-1}p) \wedge dv$$

Это многообразие задано двумя уравнениями состояния:

- Термическое уравнение состояния:

$$p = A(v, T).$$

- Калорическое уравнение состояния:

$$\varepsilon = B(v, T).$$

- $L$  — лагранжево многообразие  $\implies$

$$p = T\phi_v, \quad \varepsilon = T^2\phi_T,$$

для некоторой функции  $\phi(v, T)$  — потенциал Массье-Планка.



$$\kappa = d(T^{-1}) \cdot d\varepsilon + d(pT^{-1}) \cdot dv.$$

- $$\kappa = d(T^{-1}) \cdot d\varepsilon + d(pT^{-1}) \cdot dv.$$

- Ограничение на  $L$ :

$$\kappa_L = \phi_{vv} dv \cdot dv - (\phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T) dT \cdot dT.$$

- $$\kappa = d(T^{-1}) \cdot d\varepsilon + d(pT^{-1}) \cdot dv.$$

- Ограничение на  $L$ :

$$\kappa_L = \phi_{vv} dv \cdot dv - (\phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T) dT \cdot dT.$$

- Допустимые точки — такие, где  $\kappa_L$  отрицательно определена, то есть точки, где

$$\phi_{vv} < 0, \quad \phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T > 0$$

или

$$\varepsilon_T > 0, \quad p_v < 0.$$

- Фазовые переходы появляются, если:

$$\phi_{vv} = 0.$$



- Фазовые переходы появляются, если:

$$\phi_{vv} = 0.$$

- Две точки  $(v_1, T_1, p_1, \varepsilon_1)$  и  $(v_2, T_2, p_2, \varepsilon_2)$  — фазово-эквивалентны, если

$$T_1 = T_2, \quad p_1 = p_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$

или

$$\begin{aligned} \phi_v(v_1, T) &= \phi_v(v_2, T), \\ \phi(v_1, T) - v_1\phi_v(v_1, T) &= \phi(v_2, T) - v_2\phi_v(v_2, T). \end{aligned}$$

- Фазовые переходы появляются, если:

$$\phi_{vv} = 0.$$

- Две точки  $(v_1, T_1, p_1, \varepsilon_1)$  и  $(v_2, T_2, p_2, \varepsilon_2)$  — фазово-эквивалентны, если

$$T_1 = T_2, \quad p_1 = p_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$

или

$$\begin{aligned} \phi_v(v_1, T) &= \phi_v(v_2, T), \\ \phi(v_1, T) - v_1 \phi_v(v_1, T) &= \phi(v_2, T) - v_2 \phi_v(v_2, T). \end{aligned}$$

- Исключая  $v_2$  из уравнений выше и полагая  $v_1 = v$ , получаем кривую сосуществования  $\Gamma_\phi \subset \mathbb{R}^2(T, v)$ , и аналогично, исключая  $T$ , получаем кривую фазового перехода  $\Gamma_\phi \subset \mathbb{R}^2(v_1, v_2)$ .

- Фазовые переходы появляются, если:

$$\phi_{vv} = 0.$$

- Две точки  $(v_1, T_1, p_1, \varepsilon_1)$  и  $(v_2, T_2, p_2, \varepsilon_2)$  — фазово-эквивалентны, если

$$T_1 = T_2, \quad p_1 = p_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$

или

$$\begin{aligned} \phi_v(v_1, T) &= \phi_v(v_2, T), \\ \phi(v_1, T) - v_1\phi_v(v_1, T) &= \phi(v_2, T) - v_2\phi_v(v_2, T). \end{aligned}$$

- Исключая  $v_2$  из уравнений выше и полагая  $v_1 = v$ , получаем кривую сосуществования  $\Gamma_\phi \subset \mathbb{R}^2(T, v)$ , и аналогично, исключая  $T$ , получаем кривую фазового перехода  $\Gamma_\phi \subset \mathbb{R}^2(v_1, v_2)$ .
- Скачки внутренней энергии, теплота и работа на фазовых переходах:

$$\Delta Q = T(\Delta\phi + T\Delta\phi_T), \quad \Delta W = -T\Delta\phi, \quad \Delta\varepsilon = T^2\Delta\phi_T.$$

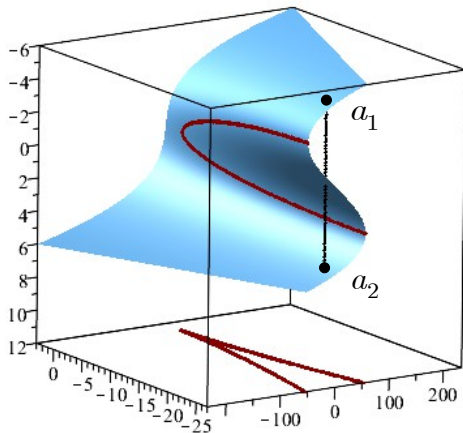


Рис. 1: Фазовый переход

## Идеальный газ

- уравнение Клапейрона-Менделеева  $pV = RT$ , и

## Идеальный газ

- уравнение Клапейрона-Менделеева  $pV = RT$ , и
- уравнение для внутренней энергии  $\varepsilon = \frac{n}{2}RT$ , где  $n$  — число степеней свободы.

## Идеальный газ

- уравнение Клапейрона-Менделеева  $pV = RT$ , и
- уравнение для внутренней энергии  $\varepsilon = \frac{n}{2}RT$ , где  $n$  — число степеней свободы.
- В этом случае

$$\phi = R \ln \left( T^{\frac{n}{2}} v \right),$$

$$\kappa = -\frac{n}{2} T^{-2} dT \cdot dT - v^{-2} dv \cdot dv.$$

- уравнения состояния (в безразмерных переменных):

$$p = \frac{8T}{3v-1} - \frac{3}{v^2}, \quad \varepsilon = \frac{4n}{3}T - \frac{3}{v}.$$



- уравнения состояния (в безразмерных переменных):

$$p = \frac{8T}{3v-1} - \frac{3}{v^2}, \quad \varepsilon = \frac{4n}{3}T - \frac{3}{v}.$$

- В этом случае

$$\phi = \ln \left( T^{\frac{n}{2}} (3v-1) \right) + \frac{9}{8vT},$$

$$\kappa = -\frac{n}{2} \frac{dT \cdot dT}{T^2} - \frac{9(4Tv^3 - 9v^2 + 6v - 1)}{4Tv^3(3v-1)^2} dv \cdot dv$$

- уравнения состояния (в безразмерных переменных):

$$p = \frac{8T}{3v-1} - \frac{3}{v^2}, \quad \varepsilon = \frac{4n}{3}T - \frac{3}{v}.$$

- В этом случае

$$\phi = \ln \left( T^{\frac{n}{2}} (3v-1) \right) + \frac{9}{8vT},$$

$$\kappa = -\frac{n}{2} \frac{dT \cdot dT}{T^2} - \frac{9(4Tv^3 - 9v^2 + 6v - 1)}{4Tv^3(3v-1)^2} dv \cdot dv$$

- фазовые переходы возникают возле кривой:  $4v^3 T = (3v-1)^2$ .

- уравнения состояния (в безразмерных переменных):

$$p = \frac{8T}{3v-1} - \frac{3}{v^2}, \quad \varepsilon = \frac{4n}{3}T - \frac{3}{v}.$$

- В этом случае

$$\phi = \ln \left( T^{\frac{n}{2}} (3v-1) \right) + \frac{9}{8vT},$$
$$\kappa = -\frac{n dT \cdot dT}{2 T^2} - \frac{9(4Tv^3 - 9v^2 + 6v - 1)}{4Tv^3(3v-1)^2} dv \cdot dv$$

- фазовые переходы возникают возле кривой:  $4v^3 T = (3v-1)^2$ .
- кривая фазового перехода

$$\frac{(3v_1-1)(3v_2-1)(v_1+v_2)}{v_1-v_2} \ln \left( \frac{3v_2-1}{3v_1-1} \right) = 3(v_1+v_2-6v_1v_2),$$
$$T = \frac{(3v_1-1)(3v_2-1)(v_1+v_2)}{8v_1^2v_2^2}.$$

# Лагранжево многообразие газа Ван дер Ваальса

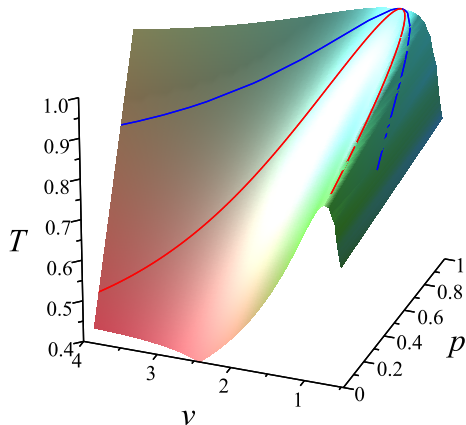


Рис. 2: Лагранжево многообразие газа Ван дер Ваальса

# Каустика и кривая фазового перехода

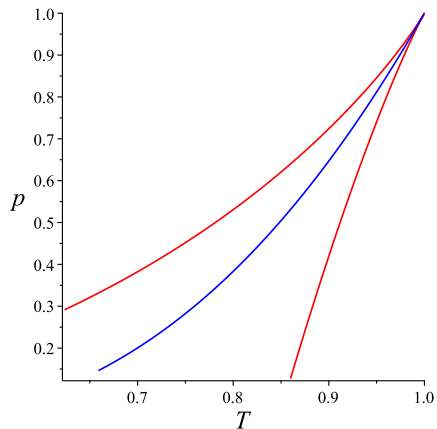


Рис. 3: Каустика и кривая фазового перехода

# Структуры высшего порядка для газа Ван дер Ваальса

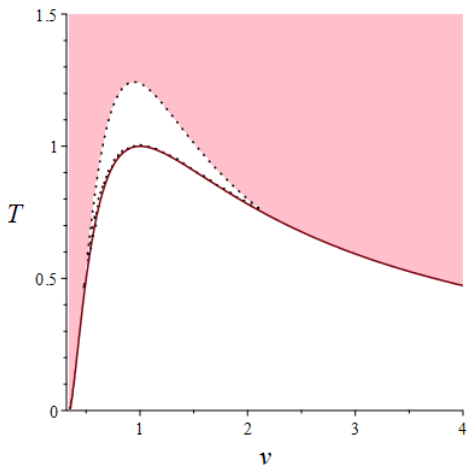







Рис. 4: Уточнение области применимости для газа Ван дер Ваальса

-  Lychagin V. Contact Geometry, Measurement, and Thermodynamics / Nonlinear PDEs, Their Geometry, and Applications. Basel: Springer Nature, 2019. 3-52.
-  Lychagin V., Roop M. On Higher Order Structures in Thermodynamics // Entropy. 2020. Vol. 22, Iss. 10. 1147 (1-8).

# Приложения. Оптимальное управление термодинамическими процессами в газах

-  Kushner A., Lychagin V., Roop M. Contact Geometry in Optimal Control of Thermodynamic Processes for Gases / Doklady Mathematics. Moscow: Pleiades Publishing Ltd, 2020. Vol. 102, No. 1. 346-349.
-  Kushner A., Lychagin V., Roop M. Geometrical approach to optimization problems in equilibrium thermodynamics // Global and Stochastic Analysis. 2020. Vol. 7, Iss. 2. 139-147.
-  Kushner A., Lychagin V., Roop M. Optimal Thermodynamic Processes for Gases // Entropy. 2020. Vol. 22, Iss. 4. 448 (1-14).



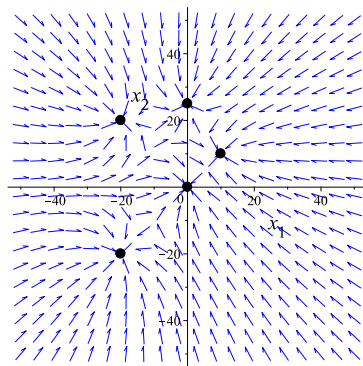
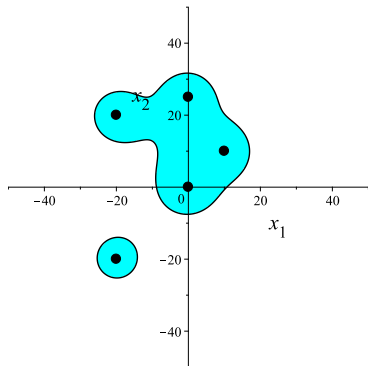






Рис. 5: Распределение фаз и поле скоростей

-  Lychagin V., Roop M. Critical Phenomena in Filtration Processes of Real Gases // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, Iss. 3. 382-399.
-  Lychagin V., Roop M. Critical phenomena and singular solutions in non-stationary filtration of real gases // Global and Stochastic Analysis. 2020. Vol. 7, Iss. 1. 73-86.
-  Lychagin V., Roop M. Phase transitions in filtration of Redlich-Kwong gases // Journal of Geometry and Physics. 2019. Vol. 143. 33-40.
-  Lychagin V., Roop M. Steady filtration of Peng-Robinson gases in a porous medium // Global and Stochastic Analysis. 2019. Vol. 6, Iss. 2. 59-74.

# Течения Эйлера и Навье-Стокса — идеальный газ

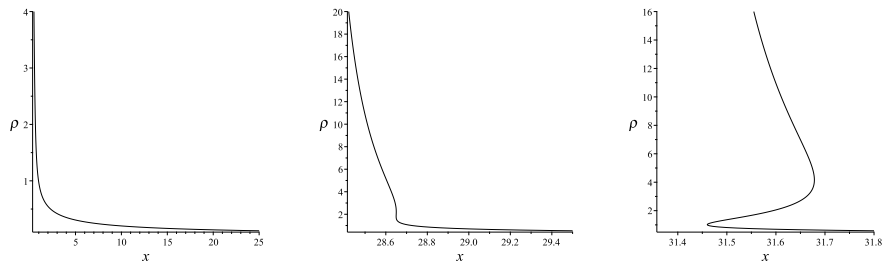


Рис. 6: График плотности

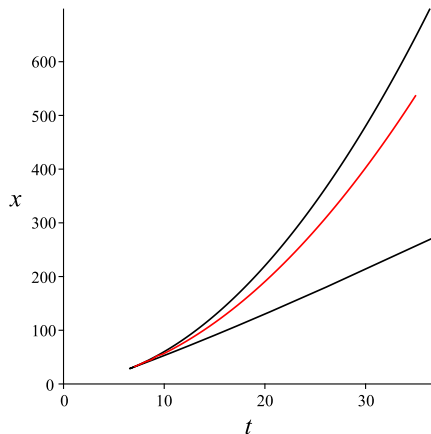


Рис. 7: Каустика (черный) и фронт ударной волны (красный)

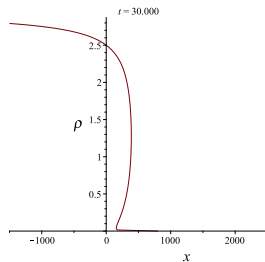
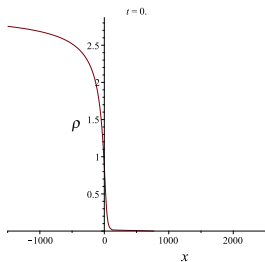


Рис. 8: Распределение плотности

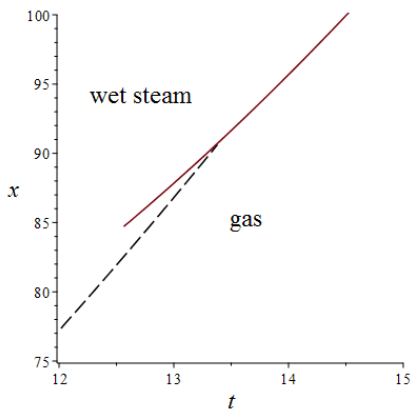










Рис. 9: Кривая фазового перехода (пунктир) и фронт ударной волны (красный).

-  Duyunova A., Lychagin V., Tychkov S. Quotients of Euler Equations on Space Curves // SYMMETRY. 2021. Vol. 13, Iss. 2. 1-9.
-  Lychagin V., Roop M. Singularities in Euler Flows: Multivalued Solutions, Shockwaves, and Phase Transitions // SYMMETRY. 2021. Vol. 13, Iss. 1. 54 (1-11).
-  Krasil'shchik I., Lychagin V., Geometric Study of Gas Behavior in a One-Dimensional Nozzle (the Case of the van Der Waals Gas) // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, No. 12, 2458–2465.
-  Duyunova A., Lychagin V., Tychkov S. Differential invariants for flows of viscid fluids // Journal of Geometry and Physics. 2017. Volume 121. 309-316.
-  Lychagin V., Roop M. Critical Phenomena in Darcy and Euler Flows of Real Gases / Differential Geometry, Differential Equations, and Mathematical Physics. Basel, Switzerland: Springer Nature, 2021.

-  Duyunova A., Lychagin V., Tychkov S. Continuum mechanics of media with inner structures // Differential Geometry and its Applications. 2021. Vol. 74. 101703 (1-9).
-  Kushner A., Lychagin V. Generalized Navier–Stokes Equations and Dynamics of Plane Molecular Media. // SYMMETRY. 2021. Vol. 13, Iss. 2. 288 (1-10).
-  Lychagin V. Euler equations for Cosserat media // Global and Stochastic Analysis. 2020. Vol. 7, Iss. 2. 197-208.