

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук
(ИПУ РАН)

К 80-летию ИПУ РАН

Б. Т. Поляк
М. В. Хлебников Л. Б. Рапопорт

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

*Рекомендовано
федеральным учебно-методическим объединением
в системе высшего образования по укрупненным группам
специальностей и направлений подготовки 27.00.00
«Управление в технических системах» в качестве
учебного пособия при реализации основных
профессиональных образовательных программ подготовки
магистров по укрупненной группе направлений подготовки
27.04.00 «Управление в технических системах»*

Москва
Издательство URSS
2019

УДК 681.5
ББК 32.965

Рецензенты:

директор Института системного анализа ФИЦ ИУ РАН,
академик РАН, доктор техн. наук, профессор *Ю.С. Попков*

директор Института проблем управления им. В.А. Трапезникова
РАН, член-корр. РАН, доктор техн. наук, профессор *Д.А. Новиков*

Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.

Математическая теория автоматического управления: учебное
пособие. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 500 с.: ил.

ISBN 978-5-9710-6486-2

Учебное пособие излагает основы теории управления в современной форме. Помимо традиционных разделов теории линейных систем в книгу включены вопросы управления в условиях неопределенности (робастность, внешние возмущения), управления нелинейными системами (абсолютная устойчивость, теоремы Ляпунова, хаос), техника линейных матричных неравенств. В приложениях содержится требуемый математический аппарат. Многочисленные примеры демонстрируют особенности применения теории.

Пособие предназначено для подготовки магистров по укрупненной группе направлений подготовки 27.04.00 «Управление в технических системах» и может быть использовано для подготовки кадров высшей квалификации по направлению подготовки 27.06.01 «Управление в технических системах». Книга также будет полезна научным и инженерно-техническим работникам.

© Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт, 2019

© ИПУ РАН, 2019

Оглавление

Предисловие	7
Список обозначений	10
Часть I. Линейные системы	16
1. Линейная теория: анализ и синтез	17
1.1. Описание линейных систем	17
1.1.1. Пространство состояний	18
1.1.2. Передаточная функция	20
1.1.3. Операторный подход	27
1.1.4. Одномерные системы	36
1.1.5. Примеры	46
1.2. Устойчивость	52
1.2.1. Устойчивость матриц	53
1.2.2. Устойчивость линейных систем	54
1.2.3. Критерии устойчивости полиномов	64
1.2.4. Частотные критерии устойчивости замкнутых систем	72
1.2.5. Примеры	79
1.3. Виды управления	83
1.3.1. Программное управление. Управляемость	83
1.3.2. Управление по обратной связи	90
1.3.3. Наблюдаемость	92
1.3.4. Частотные методы	94
1.3.5. Примеры	100
1.4. Стабилизация	101
1.4.1. Стабилизация с помощью регуляторов низкого порядка	101

1.4.2.	Обратная связь по состоянию	107
1.4.3.	Обратная связь по выходу	111
1.4.4.	Квадратичная стабилизация	116
1.4.5.	Примеры	122
1.5.	Показатели качества	128
1.5.1.	Задачи оптимизации управления на конечном интервале	128
1.5.2.	Линейно-квадратичный регулятор	130
1.5.3.	Примеры	139
2.	Линейная теория: внешние возмущения и неопределенность	140
2.1.	Внешние возмущения: анализ	140
2.1.1.	Реакция на типовые возмущения	140
2.1.2.	Устойчивость при наличии внешних возмущений	142
2.1.3.	Множества достижимости для устойчивых систем	149
2.1.4.	Переходные процессы	161
2.1.5.	Ограниченные внешние возмущения	163
2.1.6.	Гармонические и L_2 -ограниченные возмущения	174
2.1.7.	Случайные внешние возмущения	178
2.1.8.	Примеры	179
2.2.	Внешние возмущения: синтез	184
2.2.1.	Подавление внешних возмущений	185
2.2.2.	H_∞ -оптимизация	193
2.2.3.	Подавление случайных возмущений	199
2.2.4.	Примеры	201
2.3.	Задачи оценивания	213
2.3.1.	Эллипсоидальное оценивание	213
2.3.2.	Фильтр Калмана	217
2.3.3.	Примеры	220
2.4.	Неопределенность и ее виды	222
2.4.1.	Параметрическая неопределенность	224
2.4.2.	Частотная неопределенность	228
2.4.3.	(M, Δ) -конфигурация	229
2.4.4.	Нестационарные и нелинейные возмущения	233
2.5.	Робастная устойчивость	233
2.5.1.	Робастная устойчивость полиномов	234
2.5.2.	Робастная устойчивость матриц	243
2.5.3.	Робастная устойчивость при неопределенных передаточных функциях	246

2.6.	Робастная стабилизация и управление	254
2.6.1.	Робастная квадратичная стабилизация	254
2.6.2.	Робастный линейно-квадратичный регулятор	261
2.6.3.	H_∞ -оптимизация: робастный вариант	264
2.7.	Положительные линейные системы	266
2.7.1.	Условия положительности и устойчивости	267
2.7.2.	Внешние возмущения	272
2.7.3.	Стабилизация	275
2.7.4.	Робастность	276
 Часть II. Нелинейные системы		278
 3. Нелинейная теория		279
3.1.	Особенности динамики нелинейных систем	279
3.1.1.	Множественность состояний равновесия	281
3.1.2.	Конечное время переходного процесса	295
3.1.3.	Существование предельных циклов	296
3.1.4.	Хаотическая динамика	298
3.1.5.	Наличие кратных гармоник	302
3.1.6.	Многорезимность поведения	303
3.2.	Устойчивость и стабилизация	304
3.2.1.	Определение устойчивости	305
3.2.2.	Линейные нестационарные системы. Устойчивость	309
3.2.3.	Линейные нестационарные системы. Параметрический резонанс	310
3.2.4.	Нелинейные системы. Теоремы об устойчивости	318
3.3.	Анализ устойчивости по линейному приближению	335
3.3.1.	Исследование устойчивости стационарных нелинейных систем по линейному приближению	335
3.3.2.	Нелинейная обратная связь. Абсолютная устойчивость	338
3.4.	Управление нелинейными системами	357
3.4.1.	Метод линеаризации обратной связью	357
3.4.2.	Метод скользящих режимов	370
3.4.3.	Метод декомпозиции для стабилизации механических систем	378
3.4.4.	Каскадные системы. Синтез управления методом бэкстешинга	385
3.5.	Оптимальное управление	394
3.5.1.	Динамическое программирование	395

3.5.2.	Линейно-квадратичная задача оптимального управления в дискретном времени	401
3.5.3.	Непрерывные системы. Уравнения в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана . .	407
3.5.4.	Линейно-квадратичная задача оптимального управления в непрерывном времени	410
3.5.5.	Принцип максимума	414
3.6.	Дискретные динамические системы	421
3.6.1.	Асимптотическая устойчивость нелинейных отображений	422
3.6.2.	Бифуркации и хаотическое поведение в одномерном случае	425
3.6.3.	Странные аттракторы для двумерных систем . .	428
3.6.4.	Фракталы для двумерных систем	431
Приложение		434
А.	Элементарные свойства матриц	434
Б.	Нормы матриц	437
В.	Функции от матриц	440
Г.	Линейные матричные неравенства	449
Д.	Лемма Шура и следствия из нее	453
Е.	Матричное описание эллипсоидов	457
Ж.	S -процедура	459
З.	Лемма Питерсена	461
И.	Уравнение Ляпунова и его свойства	464
К.	Две теоремы об управляемости	473
Библиографический комментарий		475
Литература		486
Предметный указатель		491

Предисловие

Теория автоматического управления (ТАУ) — относительно молодая наука, хотя корни ее можно проследить в далеком прошлом. Она находится в процессе интенсивного развития, при этом существенно меняются взгляды на предмет и аппарат этой дисциплины. Первоначально основным объектом изучения являлись технические системы и процессы регулирования в них; соответственно называлась сама наука — «*теория автоматического регулирования*». Позднее в центр внимания переместились проблемы оптимизации, нередко стали говорить об «*оптимальном управлении*». В последнее время круг приложений необычайно расширился, включив управление экономическими, биологическими, экологическими и, главное, информационными системами. Заметно изменился и аппарат теории управления, используемые математические модели и методы. В связи с этим имеющиеся учебники нередко не успевают за этими революционными переменами и быстро устаревают. В литературе на русском языке нехватка современных учебных пособий особенно заметна.

Нам хотелось написать книгу, в какой-то мере восполняющую этот пробел. С одной стороны, она должна содержать аппарат, адекватный современной теории (системы в пространстве состояний, нелинейные системы, робастность, оптимальность, техника линейных матричных неравенств). С другой стороны, мы стараемся сделать его по возможности широко доступным. Поэтому используемый математический аппарат ограничен основными понятиями математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений и отчасти теории вероятностей. Необходимые дополнительные математические сведения приведены в приложениях. Мы постарались сделать книгу также по возможности краткой, содержащей лишь базовые задачи и методы. Разумеется, отбор материала является во многом субъективным и отражающим взгляды авторов на «ядро» теории автоматического управления. Чтобы скомпенсировать такое вынужденное огра-

ничение материала, планируется в будущем выпустить второй том, содержащий ряд дополнительных глав теории управления, в том числе и результаты современных исследований.

Мы рассчитываем, что материал, изложенный в книге, может быть положен в основу годового курса для студентов магистратуры математико-инженерных специальностей, уже ознакомившимися с «классической» ТАУ в бакалавриате. Он может быть полезен и для аспирантов с достаточной математической подготовкой для самостоятельного изучения теории управления. Наконец, инженеры и исследователи, которые связаны с реальными задачами управления, могут почерпнуть в книге нужные теоретические сведения.

Учебное пособие состоит из двух частей, относящихся соответственно к линейной и нелинейной теории управления. Первая часть охватывает основные модели *линейной теории управления*; базовые понятия (*устойчивость, обратная связь, техника анализа и синтеза, оптимальность*) составляют содержание главы 1. В основу положен язык *пространства состояний*, хотя и остальные методы описания линейных систем также упомянуты (частотный подход, входо-выходные модели, операторный подход). Вторая глава посвящена тематике, которая неизбежно возникает при проектировании реальных систем управления, — возможной *неопределенности* в описании систем, влиянию *внешних возмущений* и начальных уклонений. Приводится соответствующий математический аппарат (*робастность, линейные матричные неравенства, квадратичная стабилизация*). Изложение в первых двух главах построено следующим образом: сначала описывается математическая модель и основные теоретические результаты, затем анализируются примеры, иллюстрирующие этот материал.

Вторая часть книги (глава 3) относится к *нелинейным моделям*. Здесь изложение выглядит несколько иначе. Поскольку нелинейные модели необычайно разнообразны, а возникающие в них эффекты существенно отличаются от линейных, в начале каждого раздела приводятся конкретные примеры, объясняющие специфику данного раздела нелинейной теории, и лишь затем приводятся общие правила и закономерности. В частности, первый же раздел главы 3 описывает поведение, которое возможно лишь в нелинейных системах (*многие положения равновесия, предельные циклы, разные виды устойчивости, хаос* и т. п.), и примеры, для которых эти эффекты имеют место. Основной материал главы связан с исследованием устойчивости нелинейных систем с помощью *первого и второго метода Ляпунова* и с различными методами стабилизации таких систем. Описывается так-

же техника оптимального управления. В заключение рассказывается об эффектах, характерных для дискретных нелинейных систем, — *бифуркациях, хаосе, странных аттракторах, фракталах*.

Первая часть книги может быть использована для отдельного курса по *линейной теории управления*; она заметно проще второй части.

В конце книги приведены несколько приложений, содержащих основные математические сведения, не всегда приводимые в стандартных студенческих курсах, которые полезны для понимания материала. Даны и краткие исторические и библиографические указания по приводимому материалу. Список рекомендуемой литературы по традиции достаточно короток. Здесь приведены в основном классические учебники XX века и некоторые монографии на русском языке, а также главные современные зарубежные учебники по теории управления; из них можно почерпнуть более подробные ссылки на новые направления исследований.

В учебное пособие не включены методические материалы, нередко приводимые в современных учебных курсах (контрольные вопросы, основные положения раздела, задачи, упражнения). Их наличие привело бы к заметному увеличению объема книги. Нам кажется, разработка подобных материалов станет возможной после накопления практического опыта работы с учебным пособием.

Работа первых двух авторов была частично поддержана Российским научным фондом, проект № 16-11-10015, и Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 18-08-00140.

Мы благодарны нашим коллегам П.С. Щербакову, А.В. Назину, А.И. Матасову, А.Л. Фрадкову, П.В. Пакшину, Ю.И. Митришкину, А.А. Южакову, сделавшим много критических замечаний, а также Я.И. Квинто, взявшей на себя труд по редактированию рукописи. Особая признательность директору Института проблем управления РАН Д.А. Новикову, инициатору создания этой книги, за его постоянную поддержку и многочисленные советы.

Список обозначений

\mathbb{R} множество вещественных чисел;
 \mathbb{C} множество комплексных чисел;
 \mathbb{R}^n пространство n -мерных вектор-столбцов с вещественными элементами:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R};$$

\mathbb{C}^n пространство n -мерных вектор-столбцов с комплексными элементами;
 $\mathbb{R}^{n \times m}$ пространство матриц размера $n \times m$ с вещественными элементами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R};$$

$\mathbb{C}^{n \times m}$ пространство матриц размера $n \times m$ с комплексными элементами;

$\mathbb{S}^{n \times n}$ пространство симметрических матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами;

\doteq равно по определению;

$\text{sign } x$ знак вещественного числа $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (\text{если не оговорено особо});$$

$|x|$ абсолютная величина вещественного числа $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases}$$

$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ вещественная и мнимая части комплексного числа $z \in \mathbb{C}$: если

$$z = x + jy, \quad j \doteq \sqrt{-1},$$

то

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y;$$

z^* комплексное сопряжение числа $z \in \mathbb{C}$: если

$$z = x + jy,$$

то

$$z^* \doteq x - jy;$$

$|z|, \arg z$ модуль и аргумент комплексного числа $z \in \mathbb{C}$: если

$$z = \rho e^{j\varphi}, \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

то

$$|z| \doteq \rho, \quad \arg z \doteq \varphi$$

x^\top (если $z = x + jy$, то $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$);
транспонирование вектора $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x^\top = (x_1 \quad \cdots \quad x_n);$$

x^* комплексное сопряжение и транспонирование вектора $x \in \mathbb{C}^n$:

$$x^* = (x_1^* \quad \cdots \quad x_n^*);$$

(x, y) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ или $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i;$$

$|x|$ норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$ или $x \in \mathbb{C}^n$, в частности:

l_p -норма:

$$|x|_p \doteq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

в том числе при $p = 1$

$$|x|_1 \doteq \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

при $p = 2$

$$|x|_2 \doteq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{евклидова норма}),$$

при $p = \infty$

$$|x|_\infty \doteq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

(по умолчанию под $|x|$ понимается евклидова норма вектора);

$\|\cdot\|$

норма функции (сигнала); если не указана явно, подразумевается любая норма; наиболее употребительна $L_p(a, b)$ -норма:

$$\|w\|_p \doteq \left(\int_a^b |w(t)|_p^p dt \right)^{1/p};$$

мы, как правило, подразумеваем $a = 0$, $b = \infty$; в частности,

при $p = 2$

$$\|w\|_2 \doteq \left(\int_0^\infty |w(t)|_2^2 dt \right)^{1/2} \quad (L_2\text{-норма}),$$

при $p = \infty$

$$\|w\|_\infty \doteq \text{ess sup}_{0 \leq t < \infty} |w(t)| \quad (L_\infty\text{-норма}),$$

при $p = 1$

$$\|w\|_1 \doteq \int_0^{\infty} |w(t)| dt \quad (L_1\text{-норма});$$

(a_{ij}) матрица с элементами a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$;
 $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ диагональная матрица с элементами a_i , $i = 1, \dots, n$;
 I единичная матрица (соответствующей размерности);
 0 нулевая матрица (соответствующей размерности);
 A^\top транспонирование матрицы: если

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

то

$$A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{m \times n};$$

A^* комплексное сопряжение и транспонирование матрицы: если

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m},$$

то

$$A^* = (a_{ji}^*) \in \mathbb{C}^{m \times n};$$

$\text{rank } A$ ранг матрицы A ;
 $\text{tr } A$ след матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\text{tr } A \doteq \sum_{i=1}^n a_{ii};$$

$\det A$ определитель матрицы A ;
 $\lambda_i(A)$ i -е собственное значение матрицы A , $i = 1, \dots, n$;
 $\rho(A)$ спектральный радиус матрицы A :

$$\rho(A) \doteq \max_i |\lambda_i|;$$

$\sigma_i(A)$ i -е сингулярное число матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

$$\sigma_i(A) \doteq \lambda_i^{1/2}(A^*A), \quad i = 1, \dots, m;$$

$\langle A, B \rangle$ скалярное произведение в пространстве матриц;
для $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} A^* B,$$

в частности, для $A, B \in \mathbb{S}^{n \times n}$

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} AB;$$

$\|A\|$ норма матрицы; если не указана явно, подразумевается любая норма или индуцированная норма; в частности, для матриц $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ или $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$:
спектральная норма (2-норма):

$$\|A\|_2 \doteq \max_{|x| \leq 1} |Ax| = \max_i \lambda_i^{1/2}(A^* A) = \max_i \sigma_i(A),$$

строчная норма (1-норма):

$$\|A\|_1 \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|,$$

столбцовая норма (∞ -норма):

$$\|A\|_\infty \doteq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

фробениусова норма:

$$\|A\|_F \doteq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

(по умолчанию под $\|A\|$ понимается спектральная норма матрицы);

$A \succ 0$ ($\succcurlyeq 0$) матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симметрична и положительно (неотрицательно) определена;

$A \prec 0$ ($\preccurlyeq 0$) матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ симметрична и отрицательно (неположительно) определена;

$x > 0$ (≥ 0) вектор $x \in \mathbb{R}^n$ положительный (неотрицательный):

$$x_i > 0 \quad (x_i \geq 0) \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n;$$

$x < 0$ (≤ 0)	вектор $x \in \mathbb{R}^n$ отрицательный (неположительный): $x_i < 0$ ($x_i \leq 0$) для всех $i = 1, \dots, n$;
$A > 0$ (≥ 0)	матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ положительная (неотрицательная): $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$) для всех $i, j = 1, \dots, n$;
$A < 0$ (≤ 0)	матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ отрицательная (неположительная): $a_{ij} < 0$ ($a_{ij} \leq 0$) для всех $i, j = 1, \dots, n$;
RH_∞	пространство устойчивых реализуемых дробно-рациональных функций, то есть функций вида $G(s) = A(s)/B(s)$, где A — полином, B — гурвицев полином и $\deg A \leq \deg B$.
*	соответствующий блок в симметрической блочной матрице;
$\deg p(s)$	степень полинома $p(s)$;
▼	конец замечания или примера;
■	конец доказательства.

Часть I
Линейные системы

Глава 1

Линейная теория: анализ и синтез

В первой главе книги предполагается, что доступно полное математическое описание системы управления, то есть она не содержит неопределенностей. В то же время входные сигналы (внешние возмущения) могут быть известны не полностью.

В конце каждого раздела главы будут рассмотрены соответствующие примеры.

1.1. Описание линейных систем

В этой и последующих главах мы будем иметь дело с математическими моделями динамических объектов автоматического управления, которые составляются на основе физических законов. Существуют различные способы задания линейных систем управления: через описание в пространстве состояний, с помощью входо-выходных соотношений (описание во временной области), с помощью передаточных функций (описание в частотной области), операторный подход и др.

В этом разделе введем три наиболее употребляемых способа, уделяя основное внимание языку пространства состояний, которым будем почти исключительно пользоваться в дальнейшем изложении, исследуя параллельно как непрерывные, так и дискретные системы.

1.1.1. Пространство состояний

Линейная непрерывная система управления описывается векторным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\dot{x} = Ax + Bu + D_1w, \quad (1.1.1)$$

где t — (непрерывное) время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор *состояния* (фазового состояния) системы, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — вектор *управления* (управляющие воздействия), $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — вектор *внешних возмущений* или шумов. u управление, и возмущение называются *входами* системы.

Обычно на практике само состояние системы неизвестно, а известен ее линейный *выход* $y(t) \in \mathbb{R}^l$, $1 \leq l \leq n$:

$$y = Cx + D_2w, \quad (1.1.2)$$

который также может быть подвержен воздействию внешних возмущений. Хотя природа возмущений в состоянии и выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы D_1 и D_2 «вырезают» из вектора w разные «куски».

Система управления, в которой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$ являются постоянными, называется *стационарной*. Если же элементы этих матриц изменяются во времени, соответствующая система называется *нестационарной*. В этой главе будут рассматриваться только стационарные системы управления.

В случае когда матрицы A , B , C , D_1 , D_2 заданы, система управления является *полностью определенной*; если же эти матрицы известны не полностью, говорят о *системах с (параметрической) неопределенностью*.

Уравнение (1.1.1) называется *уравнением состояния* системы управления, а уравнение (1.1.2) — *уравнением выхода*. Пространство \mathbb{R}^n называется *пространством состояний*, а \mathbb{R}^p — *пространством управлений*.

Форма записи системы управления в виде (1.1.1)–(1.1.2) называется *описанием в пространстве состояний*. При этом матрица A называется *матрицей состояния* системы, а C — *матрицей выхода*.

Помимо наблюдаемого выхода, иногда у системы управления имеются и дополнительные выходы (регулируемый и т. п.). При этом будем обозначать через y *наблюдаемый выход*, а через z — *регулируемый*.

Относительно характера внешних возмущений $w(t)$ могут делаться самые разнообразные предположения: они могут отсутствовать или

быть полностью известными; могут быть произвольными детерминированными, ограниченными в некоторой норме или же случайными. Более подробно некоторые классы внешних возмущений будут описаны ниже.

Целью управления является выбор такого управления $u = u(t)$ (или $u = u(x, t)$), которое придает системе управления (1.1.1) требуемые свойства (например, устойчивость, оптимальность по некоторому показателю качества и т. п.). Более четко соответствующие постановки задач управления также будут сформулированы ниже.

Если в системе (1.1.1) выбрано управление в виде

$$u = Kx$$

(*линейная обратная связь по состоянию*, см. раздел 1.4.2), то приходим к системе вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

в которой отсутствует управление (и с иной матрицей состояния); при этом говорят о *системе, замкнутой линейной обратной связью*.

Решение ее уравнения состояния может быть записано в явном виде:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} D_1 w(\tau) d\tau, \quad (1.1.4)$$

где x_0 — *начальное условие*, то есть значение $x(t)$ в начальный момент $t = 0$, а e^A — *матричная экспонента*, см. Приложение В. Таким образом, зная x_0 и $w(t)$, можно найти состояние системы $x(t)$ для всех моментов времени t .

Обратим внимание на структуру решения (1.1.4). Оно состоит из двух независимых друг от друга слагаемых: одно определяется только начальными условиями, другое — лишь внешними возмущениями, поэтому их поведение можно анализировать отдельно друг от друга.

Наряду с непрерывными системами (1.1.1) будем рассматривать *дискретные системы*, описываемые не дифференциальными, а разностными уравнениями

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Здесь индекс k играет роль времени (дискретное время), а смысл всех остальных векторов и матриц тот же. Дискретные системы могут возникать как при дискретной аппроксимации непрерывных систем, так

и в других случаях. Например, k может быть номером итерации в итерационном процессе или время может быть дискретным в процессах, связанных с цифровым управлением.

Если в дискретной системе выбрано управление в виде линейной обратной связи

$$u_k = Kx_k,$$

она также называется *системой, замкнутой линейной обратной связью*, и имеет вид

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k,\end{aligned}$$

а ее решение также выписывается в явной форме:

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} D_1 w_i. \quad (1.1.6)$$

1.1.2. Передаточная функция

В этом разделе рассмотрим альтернативный способ описания линейных систем — с помощью передаточных функций.

Пусть имеется описание непрерывной системы в пространстве состояний; проведем некоторые формальные преобразования ее уравнений. Для этого введем *оператор дифференцирования по времени*:

$$s \doteq \frac{d}{dt}, \quad (1.1.7)$$

который на гладкие функции $x(t)$ действует по правилу

$$sx(t) = \dot{x}(t).$$

Будем относиться к s как к комплексной переменной и рассматривать различные функции от нее; им нетрудно придать содержательный смысл. Например, если

$$p(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_k s^k,$$

то

$$p(s)x(t) = a_0 x(t) + a_1 \dot{x}(t) + \dots + a_k x^{(k)}(t),$$

где $x^{(k)}(t)$ — k -я производная по времени от $x(t)$. Тогда, подставляя $s = d/dt$ в (1.1.1) при $x(0) = 0$ и формально разрешая первое уравнение относительно x , получим

$$x = (sI - A)^{-1}(Bu + D_1 w).$$

Окончательно, получаем следующее выражение для выхода:

$$y = C(sI - A)^{-1}Bu + (C(sI - A)^{-1}D_1 + D_2)w. \quad (1.1.8)$$

Матричная функция

$$G_{yu}(s) \doteq C(sI - A)^{-1}B$$

комплексной переменной s называется *передаточной функцией от управления и к выходу y* , а аналогичная функция

$$G_{yw}(s) \doteq C(sI - A)^{-1}D_1 + D_2$$

называется *передаточной функцией от возмущения w к выходу y* .

Рассмотрим эти функции подробнее. Элементы g_{ki} матриц $G_{yu}(s)$ и $G_{yw}(s)$ являются дробно-рациональными функциями комплексной переменной s , которые имеют общий знаменатель

$$P(s) \doteq \det(sI - A) \quad (1.1.9)$$

— характеристический полином матрицы A (см. Приложение А). Этот полином от переменной s называется *характеристическим полиномом системы*, так как в дальнейшем увидим, что от расположения его корней зависят такие важные свойства системы, как устойчивость и другие.

Поскольку матричная функция $(sI - A)^{-1}$ определена при всех $s \in \mathbb{C}$, не являющихся собственными значениями матрицы A , то функции $G_{yu}(s)$ и $G_{yw}(s)$ аналитичны на всей комплексной плоскости за исключением конечного числа точек (называемых *полюсами передаточных функций*).

С учетом обозначения (1.1.9) функция $G_{yu}(s)$ (и, аналогично, функция $G_{yw}(s)$) представима в виде

$$G_{yu}(s) \doteq H(s) = \frac{1}{P(s)}W(s), \quad (1.1.10)$$

где $W(s)$ — матрица, элементы которой являются полиномами от s . Действительно, для любой невырожденной матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \widehat{M},$$

где $\widehat{M} = (\widehat{m}_{ij})$ — присоединенная матрица:

$$\widehat{m}_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji};$$

здесь M_{ji} — матрицы, получающиеся из M вычеркиванием j -й строки и i -го столбца. Поэтому, если $M = (sI - A)$, то \hat{m}_{ij} — полиномы от s , откуда и следует выражение (1.1.10).

Нули s_i характеристического полинома $P(s)$ называются *полюсами передаточной функции* $G(s)$:

$$s_i: P(s_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, полюса $G(s)$ совпадают с собственными числами матрицы A ; для всех остальных s матрица $G(s)$ определена. В частности, если полином $P(s)$ устойчив, то есть все его корни лежат в открытой левой полуплоскости (см. далее раздел 1.2), то $G(s)$ — матричная функция, аналитичная в правой полуплоскости; такие передаточные функции называются *устойчивыми*.

Возвращаясь к соотношению (1.1.8), отметим, что выход системы можно записать как функцию от управления и внешних входов на языке передаточных функций:

$$y = G_{yu}(s)u + G_{yw}(s)w. \quad (1.1.11)$$

Строгое обоснование перехода от записи (1.1.1) системы в пространстве состояний к форме (1.1.11) может быть сделано с помощью преобразования Лапласа.

Разумеется, описание системы в форме (1.1.11) может быть и исходным; возможен обратный переход к записи (1.1.1), при этом говорят, что получена *реализация системы* в пространстве состояний. Рассмотрим для простоты ситуацию, когда внешние возмущения и ошибки измерения выхода отсутствуют:

$$y = G(s)u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^l. \quad (1.1.12)$$

В этой записи под *передаточной функцией* $G(s)$ будем понимать матрицу размера $l \times m$, элементы которой есть дробно-рациональные функции от s , то есть $G(s)$ представима в виде

$$G(s) = \frac{1}{P(s)}W(s), \quad (1.1.13)$$

где элементы матрицы $W(s)$ размера $l \times m$ являются полиномами от s . Полином $P(s)$ — общий знаменатель элементов матрицы $G(s)$ — называется *характеристическим полиномом системы*, а его корни — *полюсами передаточной функции* (системы).

Такое определение характеристического полинома и полюсов системы не вполне точно, и более строгое определение дается следующим образом. Формально умножив обе части (1.1.12) на $P(s)$, с учетом (1.1.13) получим

$$P(s)y = W(s)u, \quad (1.1.14)$$

и, рассматривая теперь s как оператор дифференцирования, приходим к системе дифференциальных уравнений высокого порядка относительно $y(t) \in \mathbb{R}^l$ и $u(t) \in \mathbb{R}^m$. На элементы матрицы $G(s)$ естественно накладывать дополнительное *условие реализуемости*: степень полинома в числителе не превосходит степени полинома в знаменателе; такие передаточные функции называются *правильными*, или *реализуемыми*. Тогда, вводя «искусственные» переменные — состояния, — можно привести уравнение (1.1.14) к виду, аналогичному (1.1.1).

Иными словами, от записи системы с помощью реализуемой передаточной функции можно перейти к эквивалентному описанию в пространстве состояний, которое принято называть *реализацией передаточной функции в пространстве состояний*. При этом используют записи

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

или

$$G(s) = (A, B, C, D),$$

которые означают, что система $y = G(s)u$ эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= 0, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

и при этом

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Переход от $G(s)$ к (A, B, C, D) -реализации может быть осуществлен различными способами, и таких реализаций много. Среди них существуют такие, в которых размерность матрицы A (то есть размерность вектора состояний x) минимальна; они называются *минимальными реализациями*. Соответствующая размерность матрицы A называется *степенью Макмиллана* для передаточной функции. Эта степень может быть найдена с помощью специального алгоритма — приведения $G(s)$ к так называемой *форме Макмиллана*.

Запись с помощью передаточных функций чрезвычайно удобна; проиллюстрируем это на простом примере. Пусть имеется несколько объектов соответствующих размерностей, соединенных последовательно, так что выход y_k каждого служит входом u_{k+1} последующего,

см. рис. 1.1.1. Пусть при этом каждый объект имеет свою передаточную функцию $G_k(s)$:

$$y_k = G_k(s)u_k, \quad k = 1, \dots, m;$$

мы для простоты полагаем, что имеется единственный входной сигнал u , а ошибки измерения v отсутствуют.

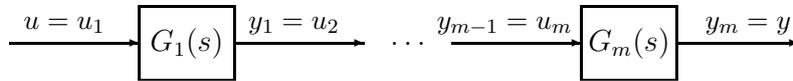


Рис. 1.1.1. Последовательное соединение объектов.

Подставляя последовательно, получаем для связи общего входа $u = u_1$ и выхода $y = y_m$ выражение:

$$y = y_m = G_m(s) \cdot \dots \cdot G_1(s)u_1 = G(s)u,$$

то есть передаточная функция последовательного соединения равна произведению передаточных функций объектов:

$$G(s) = G_m(s) \cdot \dots \cdot G_1(s). \quad (1.1.15)$$

Выразить такое соотношение на языке пространства состояний было бы гораздо труднее. Поэтому в инженерной практике, где нередко рассматриваются сложные соединения простых звеньев (*блок-схемы* системы), язык передаточных функций является общепринятым. При этом существуют простые правила, позволяющие рассчитать итоговую передаточную функцию блок-схемы по передаточным функциям звеньев, подобные правилу (1.1.15) для последовательного соединения.

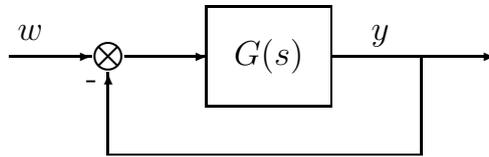


Рис. 1.1.2. Отрицательная единичная обратная связь.

Наконец, рис. 1.1.2 иллюстрирует систему, замкнутую отрицательной единичной обратной связью.

Обсудим еще одно важное свойство передаточных функций, поясняющее удобство такого способа описания систем. Предположим, что система (1.1.1) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

а входное воздействие $u(t)$ — комплексный гармонический сигнал:

$$u(t) = a e^{j\omega t},$$

где a — некоторый постоянный вектор, а ω — частота колебаний (напомним, что в теории управления мнимую единицу принято обозначать j , а не i , как обычно в математике). Из формулы (1.1.4) для решения системы $x(t)$ получим

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{(j\omega I - A)\tau} B a d\tau = \\ &= e^{At} x(0) + (j\omega I - A)^{-1} B a e^{j\omega t} - (j\omega I - A)^{-1} e^{At} B a,\end{aligned}\quad (1.1.16)$$

и через $\bar{x}(t)$ обозначим установившееся значение вектора состояния

$$\bar{x}(t) = (j\omega I - A)^{-1} B u(t).\quad (1.1.17)$$

Предположим, что матрица A устойчива, то есть все ее собственные значения λ_i лежат в левой полуплоскости: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$ (подробнее устойчивость матриц и систем обсуждается ниже, в разделе 1.2.1). Можно показать, что для устойчивых матриц $e^{At} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда из (1.1.16)–(1.1.17) следует

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для установившегося значения выхода имеем

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) = C(j\omega I - A)^{-1} B u(t),$$

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

или, иначе говоря,

$$\bar{y}(t) = H(j\omega)u(t),\quad (1.1.18)$$

где матричная функция $H(j\omega)$ называется *частотной характеристикой* системы.

Поясним смысл полученного соотношения (1.1.18). Пусть все компоненты входного вектора $u(t)$ равны нулю, кроме i -й, которую представим в виде $u_i(t) = a \cos \omega t + ja \sin \omega t$ (где a — число). Тогда k -я компонента установившегося значения выходного сигнала равна

$$\bar{y}_k(t) = |h_{ki}(j\omega)|a \cos(\omega t + \varphi) + j|h_{ki}(j\omega)|a \sin(\omega t + \varphi),$$

где $h_{ki}(j\omega)$ — (k, i) -й элемент матрицы $H(j\omega)$, а $\varphi = \arg h_{ki}(j\omega)$. В силу линейности $H(\cdot)$, отклик системы на сумму вещественной и мнимой составляющих $u(t)$ равен сумме откликов на каждую из них, то есть если в качестве $u_i(t)$ взять вещественную гармонику $a \cos \omega t$, то установившееся значение на k -м выходе будет

$$\bar{y}_k(t) = |h_{ki}(j\omega)|a \cos(\omega t + \varphi).$$

Приходим к важному выводу: если на i -й вход системы с устойчивой матрицей A подается гармонический сигнал с частотой ω , то на k -м выходе в пределе получается также гармонический сигнал с той же частотой. Его амплитуда в $|h_{ki}(j\omega)|$ раз отличается от амплитуды входного сигнала (то есть $|h_{ki}(j\omega)|$ имеет смысл *коэффициента усиления* входного гармонического сигнала), а фаза изменяется на $\arg h_{ki}(j\omega)$. Это свойство используется на практике для определения частотной характеристики системы экспериментальным путем.

Таким образом, в терминах передаточных функций очень удобно описывать трансформацию гармонических сигналов, проходящих через линейную систему.

Введем теперь передаточные функции для дискретных систем. Определим *оператор сдвига назад* z :

$$zx_k = x_{k-1},$$

и аналогично непрерывному случаю будем рассматривать его как формальную переменную. Тогда при $x_0 = 0$ уравнение

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + D_1w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2w_k, \end{aligned}$$

примет вид

$$x_k = zAx_k + zBu_k + zD_1w_k,$$

то есть

$$\begin{aligned} x_k &= z(I - zA)^{-1}Bu_k + z(I - zA)^{-1}D_1w_k, \\ y_k &= zC(I - zA)^{-1}Bu_k + (zC(I - zA)^{-1}D_1 + D_2)w_k. \end{aligned}$$

Передаточные функции теперь выражаются через переменную z по формулам

$$\begin{aligned} G_{yu}(z) &= zC(I - zA)^{-1}B, \\ G_{yw}(z) &= zC(I - zA)^{-1}D_1 + D_2, \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

и *характеристическим полиномом системы* так же, как и раньше, называется общий знаменатель элементов матричных передаточных функций, то есть полином

$$P(z) \doteq \det(I - zA)$$

от переменной z . Соответственно, передаточные функции (1.1.19), как и в непрерывном случае, имеют вид

$$G(z) = \frac{1}{P(z)}W(z),$$

где $W(z)$ — матрица, элементы которой являются полиномами от z .

В терминах передаточных функций очень удобно описывать трансформацию гармонических сигналов, имеющих фиксированную частоту, при прохождении через линейную систему. Поэтому методы, основанные на таком подходе, обычно называют *частотными*.

1.1.3. Операторный подход

В последние годы все большее распространение получает еще один способ описания линейных систем, опирающийся на язык функционального анализа. Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

при нулевых начальных условиях и отсутствии ошибок на ее выходе ($w = 0$). Тогда сигнал на выходе y линейно зависит от сигнала на входе u :

$$y = \mathcal{L}u, \quad (1.1.21)$$

где \mathcal{L} — некоторый линейный оператор, действующий в соответствующих пространствах функций.

Можно рассматривать и более общие линейные операторы \mathcal{L} вида (1.1.21), задающие соответствие входа и выхода; при этом система не обязательно приводима к виду (1.1.20). На такие операторы следует наложить естественные ограничения, например, требование *причинности*: значение выхода $y(t)$ в момент t не может зависеть от значений

входа $u(\tau)$ в будущем (при $\tau > t$). Очень важно также, чтобы оператор \mathcal{L} был ограниченным. Чтобы строго определить это понятие, нам нужно ввести функциональные пространства, в которых определены сигналы, и нормы в них.

Нормы сигналов

Посмотрим на внешнее возмущение в системе (1.1.1) (или (1.1.3)) с другой точки зрения — как на сигнал, подаваемый на вход системы. Рассмотрим основные функциональные пространства сигналов и соответствующие нормы. Будем считать, что все сигналы определены при $t \geq 0$.

1. L_2 — пространство интегрируемых с квадратом функций. Оно состоит из измеримых функций $w(t)$, заданных на $t \geq 0$ и имеющих ограниченную L_2 -норму:

$$\|w\|_2 \doteq \left(\int_0^{\infty} |w(t)|_2^2 dt \right)^{1/2} < \infty, \quad (1.1.22)$$

где $|w(t)|_2$ — евклидова норма вектора $w(t) \in \mathbb{R}^m$.

Во многих физических приложениях $\|w\|_2^2$ означает энергию сигнала, поэтому L_2 называется *пространством сигналов ограниченной энергии*. Из конечности интеграла в (1.1.22) следует, что функции $w \in L_2$, по существу, убывают с течением времени.

Пример 1.1.1. Нетрудно видеть, что функция $w(t) \equiv 1$ не принадлежит классу L_2 , так же как и функция $w(t) = \sin \omega t$ при любом $\omega \neq 0$. ▼

2. L_∞ — пространство существенно ограниченных функций. В него входят измеримые функции $w(t)$ с ограниченной ∞ -нормой:

$$\|w\|_\infty \doteq \sup_{0 \leq t < \infty} |w(t)| < \infty,$$

где $|\cdot|$ — какая-либо векторная норма в \mathbb{R}^m (как правило, ∞ - или 2-норма). Заметим, что более правильно было бы писать

$$\|w\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t < \infty} |w(t)|,$$

где $\operatorname{ess\,sup}$ — *существенная верхняя грань функции*, полученная при пренебрежении множествами нулевой меры. Мы, однако, будем считать, что функция $w(t)$ уже изменена на множестве нулевой меры так,

что величина $\sup_{0 \leq t < \infty} |w(t)|$ оказалась минимальной. Например, вместо

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 1, \\ 1, & t = 1, \end{cases}$$

будем рассматривать эквивалентную ей функцию $w(t) \equiv 0$. Нетрудно видеть, что для обеих функций $\|w\|_\infty = 0$.

Обычно величина $\|w\|_\infty$ измеряет интенсивность сигнала, так что L_∞ называется *пространством сигналов ограниченной интенсивности*.

Пример 1.1.2. Функции

$$w(t) \equiv 1 \quad \text{и} \quad w(t) = \sin \omega t$$

принадлежат классу L_∞ , однако функция

$$w(t) = \begin{cases} t^{-\alpha}, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

при $0 < \alpha < 1/2$ принадлежит классу L_2 , так как

$$\|w\|_2 = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha}},$$

но не принадлежит классу L_∞ , поскольку не ограничена в нуле. ▼

3. L_1 — *пространство абсолютно интегрируемых функций*, содержащее измеримые функции с ограниченной 1-нормой:

$$\|w\|_1 \doteq \int_0^\infty |w(t)| dt < \infty,$$

где $|w(t)|$ — некоторая норма вектора $w(t) \in \mathbb{R}^m$ (как правило, 1-норма).

Пример 1.1.3. Функция

$$w(t) = \begin{cases} t^{-\alpha}, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

при $1/2 \leq \alpha < 1$ принадлежит классу L_1 , так как

$$\|w\|_1 = \frac{1}{1-\alpha},$$

но не принадлежит ни классу L_2 (поскольку интеграл $\int_0^{\infty} t^{-2\alpha} dt$ расходится в нуле), ни классу L_{∞} . ▼

Условно соотношение между рассмотренными пространствами можно изобразить в виде диаграммы на рис. 1.1.3. В частности, из ограниченности функции в L_1 -норме и L_{∞} -норме следует ограниченность в L_2 -норме. Действительно,

$$\|w\|_2^2 = \int_0^{\infty} |w(t)| |w(t)| dt \leq \|w\|_{\infty} \int_0^{\infty} |w(t)| dt = \|w\|_{\infty} \|w\|_1.$$

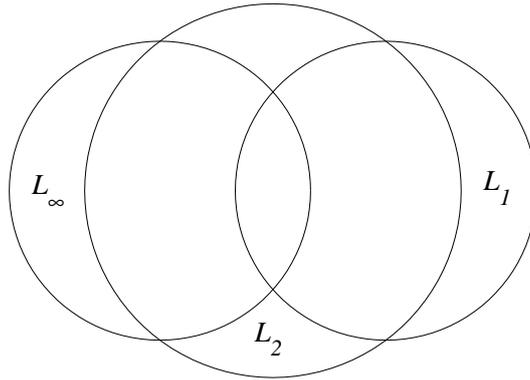


Рис. 1.1.3. Пространства L_1 , L_2 и L_{∞} .

Аналогичные пространства и нормы вводятся для дискретного случая, при этом рассматриваются не вектор-функции $w(t)$, а последовательности векторов $\{w_k\}$.

1. l_2 — пространство суммируемых с квадратом последовательностей. Оно состоит из последовательностей $\{w_k\}$, имеющих ограниченную 2-норму:

$$\|w\|_2 \doteq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |w_k|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

2. l_{∞} — пространство существенно ограниченных последовательностей, состоящее из последовательностей $\{w_k\}$ с ограниченной ∞ -

нормой:

$$\|w\|_\infty \doteq \sup_{0 \leq k < \infty} |w_k|_\infty < \infty.$$

3. l_1 — пространство абсолютно суммируемых последовательностей. Оно состоит из последовательностей $\{w_k\}$, имеющих ограниченную 1-норму:

$$\|w\|_1 \doteq \sum_{k=0}^{\infty} |w_k|_1 < \infty.$$

Пример 1.1.4. Если

$$w_k \equiv 1 \quad \text{или} \quad w_k = (-1)^k,$$

то $\{w_k\} \in l_\infty$, но $\{w_k\} \notin l_2$, $\{w_k\} \notin l_1$.

Если же

$$w_k = (k+1)^{-\alpha},$$

то $\{w_k\} \in l_\infty$ при любом $\alpha > 0$, тогда как $\{w_k\} \in l_2$ при $\alpha > 1/2$ и $\{w_k\} \in l_1$ при $\alpha > 1$. ▼

Нормы операторов

Вернемся к рассмотрению системы (1.1.20) и линейного оператора

$$y = \mathcal{L}w,$$

связывающего сигналы на ее входе и выходе. Он переводит функции из L_p в функции из L_q ; будем рассматривать $p, q = 1, 2$ или ∞ . В данном случае, в соответствии с формулой (1.1.4), этот оператор является линейным интегральным оператором и имеет явное выражение

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \doteq \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau; \quad (1.1.23)$$

функция $h(t)$ называется (матричной) *весовой функцией* системы.

Нормы функций дают возможность определить и нормы линейных операторов. Если линейный оператор \mathcal{L} вида (1.1.21) переводит функции из L_p в функции из L_q , где $p, q = 1, 2$ или ∞ (то есть $\mathcal{L}u \in L_q$ при $u \in L_p$), то его (p, q) -индуцированная норма равна

$$\|\mathcal{L}\|_{p,q} \doteq \sup_{\|u\|_p \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}u\|_q}{\|u\|_p} = \sup_{\|u\|_p \leq 1} \|\mathcal{L}u\|_q.$$

Заметим, что аналогичным образом определяются и индуцированные нормы для матриц.

Некоторые из операторных норм особенно важны; в частности, случаи $p = q = 2$ и $p = q = \infty$. Мы увидим в дальнейшем, как вычисляются эти нормы через передаточные функции системы. Так, мы покажем, что

$$\|\mathcal{L}\|_{2,2} = \|H(s)\|_{\infty},$$

где $\|H(s)\|_{\infty}$ означает H_{∞} -норму передаточной функции системы (см. ниже раздел 2.1.6). Можно вычислять норму оператора и с помощью весовой функции, то есть представления (1.1.23).

В дискретном случае индуцированная норма линейного оператора \mathcal{L} (переводящего последовательности в последовательности) определяется аналогично. Если $\mathcal{L}: l_p \rightarrow l_q$, то его (p, q) -индуцированная норма равна

$$\|\mathcal{L}\|_{p,q} = \sup_{\|u\|_p \leq 1} \|\mathcal{L}u\|_q.$$

Например, если рассмотреть оператор, задаваемый линейным разностным уравнением (1.1.5) при $w \equiv 0$, $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

то в соответствии с формулой (1.1.6)

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1}Bu_i \doteq \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i}u_i.$$

Здесь $h_{k-i} = CA^{k-i-1}B$ является весовой функцией дискретной системы (1.1.24). Это соотношение задает линейный оператор \mathcal{L} , переводящий входные последовательности u в выходные y .

Коэффициенты усиления

Норма оператора является мерой того, насколько он «усиливает» входные сигналы, измеряемые в соответствующей норме, поэтому будем пользоваться термином *коэффициент усиления* (англоязычный аналог — *gain*) и иногда использовать обозначение $\mathfrak{F}_{p,q}$.

Оказывается, для различных классов входных и выходных сигналов коэффициент усиления системы имеет прозрачный физический

смысл,¹ и многие задачи теории управления могут быть сведены к его вычислению или оптимизации. Например, обычно желательно выбирать управление так, чтобы коэффициент усиления был по возможности мал; это означает, что выход системы будет мал при любых *возмущениях*, ограниченных в соответствующей норме.

Напомним, что в конце раздела 1.1.1 было введено понятие передаточной функции, которая для системы (1.1.20) имеет вид

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Выражение

$$\|G(s)\|_{\infty} \doteq \sup_{\omega} \|C(j\omega I - A)^{-1}B\|_2,$$

где $\|M\|_2$ — *спектральная норма* фиксированной матрицы M с комплексными элементами, определяет так называемую H_{∞} -норму передаточной функции $G(s)$. Можно показать, что величина $\|G(s)\|_{\infty}$ равна коэффициенту усиления $\mathfrak{g}_{2,2}$; иными словами, она показывает, во сколько раз может измениться *энергия* сигнала при прохождении через систему.

Построение систем, оптимальных по критерию H_{∞} -нормы, составляет предмет H_{∞} -оптимизации — большого раздела теории управления, и способы вычисления H_{∞} -нормы при описании систем с помощью передаточных функций хорошо известны.

Далее, коэффициент $\mathfrak{g}_{2,\infty}$ соответствует входным сигналам из L_2 и выходным сигналам, измеряемым в норме L_{∞} ; методы его вычисления также хорошо разработаны. По определению, L_{∞} -норма выходного сигнала $y(t)$ равна радиусу минимального шара \mathcal{B} в евклидовой норме, которому принадлежит $y(t)$ при всех $t \geq 0$ и всех входных сигналах $\|w(t)\|_2 \leq 1$.

Наибольший интерес представляет случай, когда в системе (1.1.20) рассматривается входной сигнал из пространства L_{∞} и нужно получить оценку на L_{∞} -норму выхода. В частности, при $C = I$ выход системы совпадает с ее состоянием; в западной литературе величину $\mathfrak{g}_{\infty,\infty}$ называют «*peak-to-peak gain*» — коэффициент усиления от возмущений, ограниченных единицей в норме L_{∞} , к состоянию системы, также измеряемому в норме L_{∞} . Как и в предыдущих случаях, коэффициент $\mathfrak{g}_{\infty,\infty}$ может вычисляться в терминах передаточной функции (он оказывается равным L_1 -норме *весовой функции* системы).

¹В конце раздела 1.1.1 отмечалось, что элементы передаточной функции системы могут интерпретироваться как «коэффициенты усиления» *гармонического сигнала*.

Нормы передаточных функций

Рассмотрим еще один вид норм — не для функций от времени, а для передаточных функций. Пусть $M(s)$ — матрица $n \times n$, элементы которой являются аналитическими функциями комплексной переменной s в правой полуплоскости.

Определим H_∞ -норму этой функции как

$$\|M\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re} s \geq 0} \|M(s)\|_2 = \sup_{-\infty < \omega < \infty} \|M(j\omega)\|_2, \quad (1.1.25)$$

где $\|M(s)\|_2$ означает спектральную норму фиксированной матрицы $M(s)$:

$$\|M(s)\|_2 = (\lambda_{\max}(M^*(s)M(s)))^{1/2}.$$

Второе равенство в (1.1.25) (супремум достаточно искать не по всей правой полуплоскости, а лишь по ее границе — мнимой оси) следует из принципа максимума для аналитических функций. В частном случае, когда $M(s)$ — скалярная функция ($n = 1$), определение H_∞ -нормы приобретает вид

$$\|M\|_\infty = \sup_{-\infty < \omega < \infty} |M(j\omega)|.$$

Пример 1.1.5. Функция

$$M(s) = \frac{1}{s+1}$$

имеет единственный полюс в $s = -1$ и потому аналитична в правой полуплоскости. Для нее получаем

$$\|M\|_\infty = \sup_{\omega} \left| \frac{1}{j\omega + 1} \right| = \sup_{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1.$$

▼

Оказывается, если наша система записана с помощью передаточных функций, то есть исходная система (1.1.20)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= 0, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

записана в форме

$$y = H(s)u, \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (1.1.26)$$

то при условии, что A устойчива², имеем

$$\|y\|_2 \leq \|H(s)\|_\infty \|u\|_2,$$

где нижний индекс 2 для функций означает 2-норму, а $\|H(s)\|_\infty$ означает H_∞ -норму, которая (в предположении устойчивости матрицы A) является конечной. Более того, H_∞ -норма является точной верхней границей отношения энергий выход/вход:

Лемма 1.1.1. *Для системы (1.1.26) с устойчивой матрицей A справедливо*

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \|\mathcal{L}\|_{2,2},$$

где \mathcal{L} — вход-выходной оператор, соответствующий системе.

Важно отметить, что H_∞ -норма передаточной функции имеет простой физический смысл: она показывает, во сколько раз может измениться энергия сигнала при прохождении через данную линейную систему. Если вспомнить, что другая трактовка передаточной функции характеризовала $H(j\omega)$ как коэффициент усиления системы для гармонического входа заданной частоты ω , то получаем, что H_∞ -норма является также равномерно-частотной характеристикой системы. Эти два результата относительно двух типов входных сигналов (ограниченные в 2-норме и гармонические с произвольной частотой) различны, так как гармонические сигналы не принадлежат L_2 .

Другая норма, которую можно ввести для тех же матричных функций $M(s)$, — это H_2 -норма:

$$\|M\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|M(j\omega)\|_2^2 d\omega \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\max}(M^*(j\omega)M(j\omega)) d\omega \right)^{1/2}.$$

В частности, для скалярных функций определение принимает вид

$$\|M\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |M(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}.$$

В примере 1.1.5 имеем

$$\|M\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|j\omega + 1|^2} d\omega \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2} \right)^{1/2} = \sqrt{\pi}.$$

²Как мы уже отмечали, подробнее устойчивость матриц и систем обсуждается ниже, в разделе 1.2.1.

Все вышеприведенные понятия и результаты имеют дискретные аналоги. В этом случае вместо матриц $M(s)$, аналитичных в правой полуплоскости, фигурируют матрицы $M(z)$, аналитические внутри единичного круга. H_∞ -норма таких матричных функций равна

$$\begin{aligned} \|M\|_\infty &= \sup_{|z| \leq 1} \|M(z)\|_2 = \sup_{0 \leq \omega \leq 2\pi} \|M(e^{j\omega})\|_2 = \\ &= \sup_{0 \leq \omega \leq 2\pi} \left(\lambda_{\max}(M^*(e^{j\omega})M(e^{j\omega})) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

а для скалярных функций

$$\|M\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega \leq 2\pi} |M(e^{j\omega})|.$$

При этом H_∞ -норма передаточной функции дискретных систем имеет тот же физический смысл, что и для непрерывных систем.

1.1.4. Одномерные системы

Остановимся теперь на простом, но важном специальном классе систем, имеющих скалярный вход и скалярный выход. Будем называть их *одномерными*, в отличие от общего *многомерного* случая (раньше использовался термин «односвязные» и «многосвязные» системы). В англоязычной научной литературе общепотребительны термины SISO (Single-Input Single-Output) и MIMO (Multiple-Input Multiple-Output), то есть системы с одним входом – одним выходом и с многими входами – многими выходами соответственно.

В инженерных приложениях часто используется иной способ описания систем — не в пространстве состояний, а в виде дифференциального уравнения высокого порядка, связывающего вход $u(t)$ с выходом $y(t)$ напрямую, без использования понятия состояния. При этом говорят о *входо-выходном описании систем во временной области*. Так, уравнения, описывающие поведение механических систем, содержат координаты, скорости и ускорения взаимодействующих тел.

На примере одномерных систем vs рассмотрим способы описания, приведенные в предыдущих разделах (а также обсудим так называемое входо-выходное описание во временной области) и их соотношения и приведем общепринятую терминологию, используемую в инженерной практике.

Рассмотрим сначала задание одномерных систем в пространстве

состояний. Пусть

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{1.1.27}$$

где $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Тогда B и C^\top — векторы из \mathbb{R}^n , а передаточная функция

$$H_{yu}(s) \doteq H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

является скалярной функцией от s .

Для удобства перепишем (1.1.27) в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= c^\top x,\end{aligned}\tag{1.1.28}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b, c \in \mathbb{R}^n$.

Перейдем от записи в пространстве состояний к описанию в виде одного соотношения, связывающего вход u с выходом y напрямую, без использования понятия состояния. С этой целью продифференцируем n раз второе уравнение в (1.1.28), подставляя выражение для \dot{x} из первого уравнения. В результате получим

$$\begin{aligned}y &= c^\top x, \\ \dot{y} &= c^\top Ax + c^\top bu, \\ \ddot{y} &= c^\top A^2x + c^\top Abu + c^\top b\dot{u}, \\ &\vdots \\ y^{(k)} &= c^\top A^k x + c^\top A^{k-1}bu + \dots + c^\top bu^{(k-1)}, \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= c^\top A^n x + c^\top A^{n-1}bu + \dots + c^\top A^{n-k}bu^{(k-1)} + \dots + c^\top bu^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Сложим уравнения, предварительно умножив первое на a_0 , второе на a_1 , и т. д., последнее — на единицу, где a_i — коэффициенты характеристического полинома матрицы A . По *теореме Кэли – Гамильтона* (см. теорему А.1 из Приложения А) каждая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, поэтому члены с x в правой части исчезнут; в результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению n -го порядка относительно входного и выходного сигналов, то есть к эквивалентной записи на языке входов-выходных соотношений:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y &= \\ &= \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + \beta_1\dot{u} + \beta_0u, \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_k &= c^\top (A^{n-k-1} + a_{n-1}A^{n-k-2} + \dots \\ &\quad \dots + a_{k+2}A + a_{k+1}I)b, \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Вспомним, что мы ввели оператор дифференцирования s ; с его помощью (1.1.29) записывается в компактной форме

$$P(s)y = Q(s)u,$$

$$P(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k, \quad a_n = 1, \quad Q(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k s^k,$$

или

$$y = H(s)u, \quad H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)},$$

где передаточная функция $H(s)$ — скалярная дробно-рациональная (в отличие от общего многомерного случая), а ее знаменатель — полином $P(s) = \det(sI - A)$ — является характеристическим полиномом рассматриваемой системы.

В разделе 1.1.2 мы уже говорили, что всегда предполагается выполненным условие реализуемости: степень m полинома в числителе передаточной функции не превосходит степени n полинома в знаменателе. В (1.1.29) это условие выполнено: $m \leq n - 1$.

Итак, система в пространстве состояний сведена к эквивалентной записи на языке передаточных функций.

Обратно, пусть теперь доступно описание системы в форме одного дифференциального уравнения n -го порядка

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y &= \\ &= \beta_m u^{(m)} + \dots + \beta_1\dot{u} + \beta_0u, \quad n \geq m. \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

Тогда, действуя в «обратном порядке», это уравнение можно привести к эквивалентной записи в пространстве состояний. Например, пусть в уравнение (1.1.30) входит лишь входной сигнал, но не его производные:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = u, \quad (1.1.31)$$

или в операторной записи

$$P(s)y = u, \quad P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Вводя новые переменные x_i («состояния») по правилам

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y}, \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)}, \end{aligned}$$

с учетом (1.1.31) получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= c^\top x. \end{aligned}$$

Таким образом, получена форма записи системы (1.1.31) в пространстве состояний с

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.32)$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для матрицы A вида (1.1.32) полином $\det(sI - A) = P(s)$ является характеристическим полиномом системы (1.1.31).

Система с матрицами вида (1.1.32) (и вектором s произвольного вида) является так называемой *канонической управляемой формой* записи системы в пространстве состояний (при этом говорят, что матрица A приведена к *фробениусовой форме*). Оказывается, что при не слишком обременительных предположениях линейными заменами переменных ее можно привести к такому виду.

Рассмотрим еще один способ входо-выходного описания, который основан на предположении, что известна реакция системы на «типовой» входной сигнал.

Определение 1.1.1. Пусть $\delta(t)$ обозначает δ -функцию; определим функцию $h(t)$ в момент времени t как значение выхода системы в момент времени t , если на вход в момент $t = 0$ была подана δ -функция, а начальное состояние — нулевое. Функция $h(t)$ называется *импульсной характеристикой* системы (или *весовой функцией* системы).

Тогда для произвольного входа $u(t)$ получаем соотношение

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau; \quad (1.1.33)$$

это и есть желаемое входо-выходное описание системы; его вид проясняет название функции $h(t)$ — весовая. Выражение (1.1.33) для $y(t)$ представляет собой *свертку* функций $h(t)$ и $u(t)$; для нее используют обозначение $y = h * u$. Мы уже встречались с формулой (1.1.33) для систем, описываемых в пространстве состояний, см. (1.1.23).

В качестве другого типового входного сигнала часто рассматривается *единичный скачок* (функция Хевисайда):

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Реакцию системы (при нулевых начальных условиях) на такое входное воздействие называют *переходной характеристикой* $\pi(t)$ (переходной функцией); она связана с импульсной характеристикой следующим образом:

$$\pi(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau.$$

Способ описания систем, основанный на использовании весовой или переходной функций, часто применяется при моделировании сложных

физических устройств неизвестной структуры, а указанные характеристики снимаются экспериментально.

При таком описании (как и при описании в форме дифференциального уравнения (1.1.30)) говорят, что входо-выходные соотношения заданы во *временной области*. Часто удобнее бывает перейти в *частотную область*, используя *преобразование Лапласа*:

$$\mathbf{L}\{f(t)\} \doteq \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \doteq F(s),$$

которое определено для функций, растущих не быстрее экспоненты: $|f(t)| \leq C e^{st}$.

Термин «частотный» объясняется тем, что поскольку st — безразмерная величина, то s имеет смысл частоты (ср. раздел 1.1.2). Функция $f(t)$ называется *оригиналом*, а $F(s)$ — ее *изображением по Лапласу*. Из определения следует, что при $f(0) = 0$

$$\mathbf{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\mathbf{L}\{f(t)\},$$

то есть дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на s — вспомним введенный формально оператор дифференцирования $s = \frac{d}{dt}$. Наконец, нетрудно видеть, что

$$\mathbf{L}\{f * g\} = \mathbf{L}\{f\} \cdot \mathbf{L}\{g\}.$$

Таким образом, в частотной области уравнение (1.1.33) приобретает вид

$$y = H(s)u, \quad H(s) = \mathbf{L}\{h(t)\},$$

где $H(s)$ — передаточная функция, определенная в разделе 1.1.2.

Отметим, что с помощью (1.1.33) можно описать гораздо более широкий класс линейных систем, чем с помощью дифференциального уравнения — второй способ по определению накладывает ограничения на структуру системы. В самом деле, не всякой импульсной характеристике отвечает дробно-рациональная передаточная функция, например, для системы с запаздыванием $y(t) = u(t-1)$ имеем $h(t) = \delta(t-1)$ и $H(s) = e^{-s}$; в таких случаях говорят о *распределенных системах*. Мы будем рассматривать только дробно-рациональные передаточные функции, что соответствует *конечномерным* системам.

В многомерном (ММО) случае импульсная характеристика становится *матричной импульсной характеристикой* — матрицей $l \times m$,

элемент (i, k) которой есть функция $h_{ik}(t)$ — отклик i -го выхода системы в момент времени t на единичный импульс, поданный на k -й вход в момент $t = 0$ (импульсная характеристика пары (i, k)).

Аналогичным образом входо-выходное описание вводится для дискретных систем; аппаратом перехода в частотную область является *дискретное преобразование Лапласа*:

$$\mathbf{Z}\{f_k\} \doteq \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \doteq F(z), \quad (1.1.34)$$

обладающее теми же свойствами, что и непрерывное.¹

Мы видим, что все формы записи — в пространстве состояний, в виде входо-выходных соотношений во временной области, с помощью передаточных функций (в частотной области) — в определенной степени эквивалентны. Использование того или иного способа описания при решении конкретной задачи — вопрос удобства.

Закончим этот раздел кратким обзором классических частотных методов исследования одномерных систем. В инженерных приложениях различным физическим устройствам — звеньям — соответствуют так называемые типовые передаточные функции; они имеют специальные названия. Звено с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

называется *апериодическим (инерционным)*, при этом $k = H(0) > 0$ — коэффициент усиления, а $T > 0$ — постоянная времени.

Передаточная функция

$$H(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}, \quad k > 0,$$

отвечает *апериодическому звену второго порядка* при $T_1 \geq 2T_2 > 0$ (тогда корни характеристического полинома $1 + T_1 s + T_2^2 s^2$ вещественны) и *колебательному звену* при $0 < T_1 < 2T_2$ (случай комплексных корней).

Простейший элемент с

$$H(s) = \frac{k}{s}, \quad k > 0,$$

¹Обычно дискретное преобразование Лапласа записывают как $\mathbf{Z}\{f_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$, при этом z имеет смысл оператора сдвига *вперед*; если же под z понимать оператор сдвига *назад*, то приходим к записи (1.1.34).

называется *идеальным интегратором*, а c

$$H(s) = k$$

называется *идеальным усилителем*.

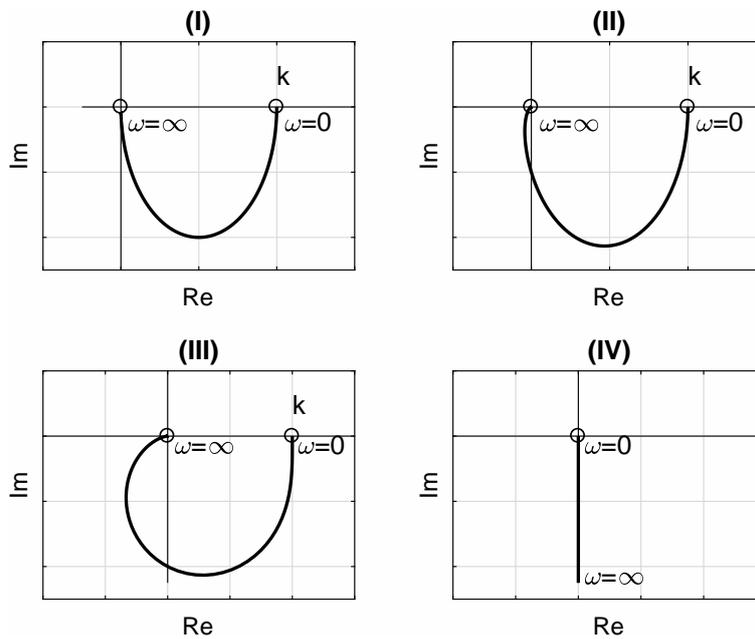


Рис. 1.1.4. Частотные характеристики типовых звеньев.

Для приведенных выше простых звеньев легко изобразить их частотные характеристики $H(j\omega)$. На рис. 1.1.4 на комплексной плоскости показаны $H(j\omega)$ для аperiodического звена первого (I) и второго (II) порядка, для колебательного звена (III) и интегратора (IV).

Часто удобно отдельно изображать амплитуду и фазу частотной характеристики (вспомним их физический смысл как реакции системы на гармоническое воздействие). Функция

$$A(\omega) \doteq |H(j\omega)|$$

называется *амплитудной частотной характеристикой (АЧХ)*, она дает коэффициент усиления на входной сигнал частоты ω .

Функция

$$\varphi(\omega) \doteq \arg H(j\omega)$$

называется *фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)*, она характеризует сдвиг по фазе входа и выхода.

Наконец, во многих случаях удобно применять логарифмические частотные характеристики (*диаграммы Боде*), когда величины $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ откладываются в логарифмической шкале. Именно, величина

$$\text{Lm}(\omega) \doteq 20 \log A(\omega)$$

называется *логарифмической амплитудной характеристикой (ЛАХ)*; она измеряется в децибелах. Как мы видели, при последовательном соединении элементов их передаточные функции перемножаются. Поэтому

$$\begin{aligned} H(s) &= H_1(s) \cdot \dots \cdot H_m(s), \\ A(\omega) &= A_1(\omega) \cdot \dots \cdot A_m(\omega), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= |H_1(j\omega)| \cdot \dots \cdot |H_m(j\omega)|, \\ \text{Lm}(\omega) &= \text{Lm}_1(\omega) + \dots + \text{Lm}_m(\omega), \end{aligned}$$

то есть логарифмические амплитудные характеристики при таком соединении складываются. При построении ЛАХ по оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмической шкале; единицей измерения при этом является декада — отрезок, на котором частота увеличивается в 10 раз. По оси ординат откладывается величина $\text{Lm}(\omega)$, единицей измерения которой является децибел. Точка пересечения ЛАХ с осью абсцисс называется *частотой среза ω_c* , то есть

$$20 \log |H(j\omega_c)| = 0, \quad |H(j\omega_c)| = 1.$$

При построении *логарифмической фазовой характеристики (ЛФХ)* по оси абсцисс откладывается частота ω в декадах (то есть в логарифмической шкале), а по оси ординат — углы φ в градусах в равномерной шкале.

Рисунок 1.1.5 показывает ЛАХ и ЛФХ для системы с передаточной функцией

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 - 0,25}{s^4 + 2s^3 - 0,79s^2 - 1,79s - 0,42} = \\ &= \frac{(s - 0,5)(s + 0,5)}{(s - 1)(s + 0,3)(s + 0,7)(s + 2)}. \end{aligned}$$

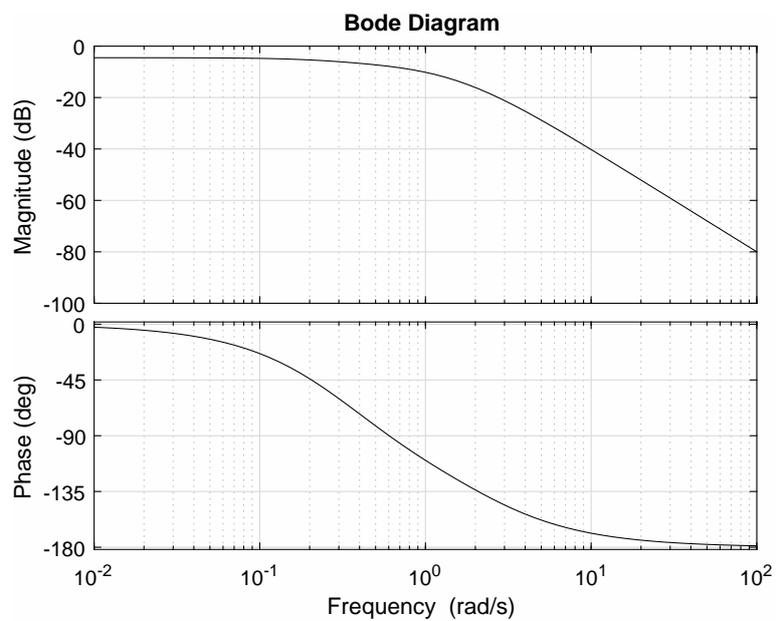


Рис. 1.1.5. Диаграммы Боде.

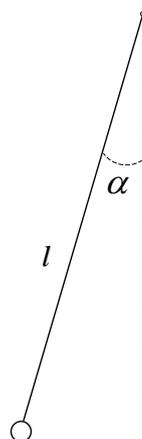


Рис. 1.1.6. Физический/математический маятник.

1.1.5. Примеры

Пример 1.1.6 (Математический маятник).

Сперва рассмотрим так называемый *физический маятник*, состоящий из тяжелого шара массы m , подвешенного на тонком нерастяжимом стержне длиной l (рис. 1.1.6).

Момент инерции шара относительно точки подвеса равен ml^2 , а момент силы тяжести шара относительно той же точки равен $-mgl \sin \alpha$, где α — угол отклонения стержня от вертикали. Воспользовавшись уравнением плоского вращательного движения твердого тела, получим:

$$-mgl \sin \alpha = ml^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0. \quad (1.1.35)$$

Таким образом, физический маятник описывается *нелинейным* дифференциальным уравнением (1.1.35).

Если угол α отклонения маятника невелик, то можно считать, что $\sin \alpha \approx \alpha$ и уравнение (1.1.35) принимает вид

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0 \quad (1.1.36)$$

В этом случае мы будем говорить о *математическом маятнике*; эта система уже описывается *линейным* дифференциальным уравнением.

Рассмотрим случай движения математического маятника в вязкой среде, сопротивление которой пропорционально скорости шарика. В этом случае имеем соотношение

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + 2k \frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l} \alpha = 0,$$

где k — коэффициент сопротивления среды. Эту систему будем называть *математическим маятником с трением*.

Наконец, рассмотрим так называемый *перевернутый* или *обратный математический маятник*, состоящий из тела массы m , закреплённого на конце жесткого невесомого стержня длины l , которое имеет центр масс выше своей точки опоры. В этом случае уравнение движения маятника принимает вид

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \frac{g}{l} \alpha = 0 \quad (1.1.37)$$

Все три рассмотренные системы не содержали управления; теперь введем в рассмотрение приложенную к грузу маятника внешнюю горизонтальную силу u , рассматриваемую в качестве управления (см. рис. 1.1.7). В этом случае приходим к следующим соотношениям:

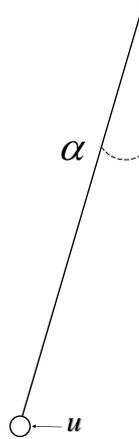


Рис. 1.1.7. Математический маятник с управлением.

1. математический маятник:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = u;$$

2. математический маятник с трением:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2k\frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{l}\alpha = u;$$

3. обратный математический маятник:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{g}{l}\alpha = u.$$

Каждое из рассмотренных соотношений легко свести к системе вида (1.1.1), введя в рассмотрение величины

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \dot{\alpha}.$$

1. Математический маятник:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_1 + u;\end{aligned}$$

в матричном виде — система вида (1.1.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.38)$$

2. Математический маятник с трением:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_1 - 2kx_2 + u;\end{aligned}$$

в матричном виде — система вида (1.1.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & -2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.39)$$

3. Обратный математический маятник:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{g}{l}x_1 + u;\end{aligned}$$

в матричном виде — система вида (1.1.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.40)$$

Нетрудно записать аналогичные результаты и в терминах передаточных функций. В самом деле, вводя оператор дифференцирования (1.1.7), уравнение математического маятника принимает вид

$$(s^2 + g/l)x = u,$$

откуда

$$x = \frac{1}{s^2 + g/l}u.$$

Величина

$$G_{xu}(s) = \frac{1}{s^2 + g/l}$$

есть передаточная функция от управления u к состоянию x .

Аналогично величина

$$G_{xu}(s) = \frac{1}{s^2 + 2ks + g/l}$$

есть передаточная функция от управления u к состоянию x для математического маятника с трением, а

$$G_{xu}(s) = \frac{1}{s^2 - g/l}$$

— передаточная функция от управления u к состоянию x для обратного математического маятника. ▼

Пример 1.1.7 (RC- и RLC-контур). Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных генератора напряжения \mathcal{E} , резистора с сопротивлением R и конденсатора с емкостью C , см. рис. 1.1.8.

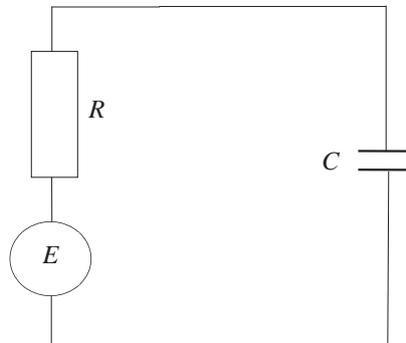


Рис. 1.1.8. RC-контур.

Нас интересует динамика напряжения U на конденсаторе. В соответствии с правилами Кирхгофа можно записать уравнение цепи:

$$U + RC \frac{dU}{dt} = \mathcal{E}$$

или

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U + \frac{1}{RC}\mathcal{E}.$$

Рассматривая напряжение $\mathcal{E}(t)$ генератора в качестве входного сигнала u , а напряжение U на конденсаторе — в качестве фазовой переменной x , приходим к системе вида (1.1.1), где

$$A = -\frac{1}{RC}, \quad B = \frac{1}{RC}.$$

Рассмотрим теперь электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных генератора напряжения \mathcal{E} , резистора с сопротивлением R , катушки индуктивности L и конденсатора с емкостью C , см. рис. 1.1.9. Правила Кирхгофа приводят к уравнению

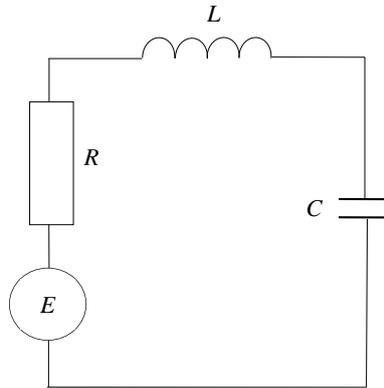


Рис. 1.1.9. RLC-контур.

$$RI + U = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt},$$

где U — напряжение на конденсаторе, а I — ток в цепи, или в эквивалентной форме

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = \frac{1}{LC} \mathcal{E}.$$

Вновь рассматривая напряжение $\mathcal{E}(t)$ генератора в качестве входного сигнала u , а напряжение U на конденсаторе — в качестве фазовой переменной x , приходим к системе

$$\ddot{x} + \frac{R}{L} \dot{x} + \frac{1}{LC} x = \frac{1}{LC} u.$$

Обозначив $x = x_1$, введем в рассмотрение величину

$$x_2 = \dot{x}_1$$

(имеющую физический смысл $\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C}I$, где I — ток, протекающий через конденсатор). В результате приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u, \end{aligned}$$

Таким образом, мы пришли к системе вида (1.1.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.1.8 (Двухмассовая система). Рассмотрим так называемую *двухмассовую систему* — систему из двух твердых тел с массами m_1 и m_2 , соединенных пружиной с коэффициентом упругости k , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (рис. 1.1.10); к левому телу приложено управление (сила) u .

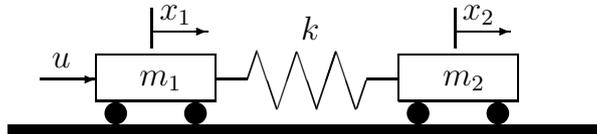


Рис. 1.1.10. Двухмассовая система.

Этот объект часто используется как тестовый для различных методов синтеза регуляторов; в различных постановках он будет привлекаться нами в последующих разделах для демонстрации работоспособности и эффективности предлагаемых методов синтеза управления.

Обозначим через x_1 координату левого тела, а через x_2 — правого тела. Модель колебаний двухмассовой системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение скорость v_1 левого тела и скорость v_2 правого тела, тогда

$$\dot{x}_1 = v_1, \quad \dot{x}_2 = v_2,$$

а вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

есть вектор фазового состояния рассматриваемой двухмассовой системы, полностью описывающий ее поведение.

Таким образом, непрерывная модель колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2. \end{aligned}$$

В результате приходим к линейной системе управления вида (1.1.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_2} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Устойчивость

В этом разделе изложено важнейшее понятие теории управления — устойчивость. Для нелинейных нестационарных систем имеется множество определений устойчивости: устойчивость точки равновесия и устойчивость движения; устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость; устойчивость «в малом» и «в большом»; устойчивость по начальным условиям и по возмущению.

Для линейных стационарных систем картина намного проще и будем говорить просто об устойчивости, понимая под этим стремление

к нулю траекторий системы без внешних возмущений, то есть *асимптотическую устойчивость*. Точные определения будут даны ниже.

1.2.1. Устойчивость матриц

Введем понятие *устойчивости матрицы*.

Определение 1.2.1. Матрица A называется *устойчивой по Гурвицу* (*гурвицевой*), если все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для гурвицевой матрицы A величина

$$\sigma = \sigma(A) \doteq -\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A) > 0$$

называется ее *степенью устойчивости*; это минимальное из расстояний от собственных значений матрицы до мнимой оси.

Имеет место следующая оценка.

Лемма 1.2.1 (Оценка матричной экспоненты). *Если матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ гурвицева, то для любого $0 < \nu < \sigma$ существует число $C = C(A, \nu)$ такое, что*

$$\|e^{At}\| \leq C e^{-\nu t}.$$

Таким образом, поведение матричной экспоненты на начальном этапе определяется константой C ; при этом асимптотически матричная экспонента убывает как экспонента с показателем, не превосходящим степень устойчивости матрицы (и взятым с противоположным знаком).

Понятие устойчивости для матриц можно ввести иным образом.

Определение 1.2.2. Матрица A называется *устойчивой по Шуру* (*шуровской*), если все ее собственные значения по абсолютной величине меньше единицы:

$$|\lambda_i(A)| < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если матрица A устойчива по Шуру, величина

$$\sigma = \sigma(A) \doteq 1 - \max_i |\lambda_i(A)| > 0$$

называется ее *степенью устойчивости*: это минимальное из расстояний от собственных значений матрицы до единичной окружности на комплексной плоскости.

Величина

$$\rho(A) \doteq \max_i |\lambda_i(A)|$$

называется *спектральным радиусом* матрицы A , так что устойчивость по Шуру означает, что $\rho(A) < 1$, а степень устойчивости матрицы равна

$$\sigma(A) = 1 - \rho(A).$$

В дальнейшем выяснится, что определения 1.2.1 и 1.2.2 устойчивой матрицы относятся к системам непрерывного и дискретного времени, поэтому устойчивость по Шуру иногда называют *дискретной устойчивостью*, в отличие от *непрерывной устойчивости* в гурвицевом случае. Будем говорить просто об *устойчивости*, когда из контекста ясно, о дискретной или непрерывной устойчивости идет речь.

Сформулируем следующий дискретный аналог леммы 1.2.1.

Лемма 1.2.2. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ шуровская. Тогда для любого $\rho(A) < q < 1$ существует $C = C(A, q)$, такое что

$$\|A^k\| \leq Cq^k.$$

1.2.2. Устойчивость линейных систем

Начнем с определений. Линейная непрерывная стационарная система

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.2.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, называется *устойчивой*, если для любого начального состояния $x(0) = x_0$ выполнено условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

В теории нелинейных систем (см. главу 3) это определение называется *асимптотической устойчивостью*, однако в главах 1 и 2 мы будем пользоваться именно таким определением.

Введем важнейшее средство исследования устойчивости, называемое *вторым (прямым) методом Ляпунова*, или *методом функций Ляпунова*.¹

¹Первый метод Ляпунова, предполагающий исследование устойчивости путем линеаризации дифференциальных уравнений, будет обсужден и применен в Главе 3.

Определение 1.2.3. Непрерывная скалярная функция

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется *функцией Ляпунова* для системы (1.2.1), если она обладает следующими свойствами:

1. $V(x) \geq 0$ для всех x , причем $V(x) = 0$ лишь для $x = 0$;
2. $\dot{V}(x(t)) \doteq \frac{d}{dt}V(x(t)) < 0$, где $x(t)$ — ненулевое решение системы (1.2.1).

Отметим, что второе свойство заключается в убывании функции Ляпунова на решениях системы.

Метод функций Ляпунова состоит в построении функции с указанными свойствами, что позволяет сделать вывод об устойчивости системы.

Отметим, что определение 1.2.3 годится также и для нестационарных и нелинейных систем вида $\dot{x} = f(t, x)$, однако если для произвольной системы общего метода построения функций Ляпунова не существует, то для случая линейной стационарной системы функцию Ляпунова можно всегда выбрать в виде квадратичной формы.

Квадратичная функция Ляпунова

В этом разделе мы покажем связь устойчивости системы с наличием у нее так называемой квадратичной функции Ляпунова, построение которой приводит к возникновению уравнения (неравенства) Ляпунова.

Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V(x) = x^\top Qx \tag{1.2.2}$$

с некоторой положительно-определенной матрицей Q и найдем условия, при которых она будет функцией Ляпунова для системы (1.2.1).

В силу $Q \succ 0$ имеем $V(x) > 0$ для всех $x \neq 0$, так что первое свойство из определения 1.2.3 выполнено.

Вычислим непосредственным образом производную функции $V(x)$ на траекториях системы (1.2.1):

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^\top Qx + x^\top Q\dot{x} = x^\top A^\top Qx + x^\top QA x = x^\top (A^\top Q + QA)x.$$

Заметим, что полученное выражение называется *производной функции Ляпунова, вычисленной в силу системы*.

Таким образом, второе свойство из определения 1.2.3 эквивалентно выполнению

$$x^T (A^T Q + QA)x < 0 \quad \text{при всех } x \neq 0,$$

то есть выполнению *матричного неравенства Ляпунова*

$$A^T Q + QA \prec 0. \quad (1.2.3)$$

Свойства ассоциированного с (1.2.3) *уравнения Ляпунова* рассматриваются в Приложении II.

Определение 1.2.4. Функция вида (1.2.2)–(1.2.3) называется *квадратичной функцией Ляпунова* для системы (1.2.1).

В следующей теореме устанавливается критерий устойчивости для линейной системы.

Теорема 1.2.1. Система (1.2.1) устойчива тогда и только тогда, когда устойчива ее матрица A . При этом для всякого $0 < \nu < \sigma$, где $\sigma = \sigma(A)$ — степень устойчивости матрицы A , существует число $C = C(A, \nu)$ такое, что

$$|x(t)| \leq C|x_0| e^{-\nu t}. \quad (1.2.4)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица A неустойчива, то есть найдется ее собственное значение λ такое, что

$$\operatorname{Re} \lambda \geq 0.$$

Если λ вещественно, возьмем $x_0 = r$, где r — нормированный вещественный собственный вектор, отвечающий λ :

$$Ar = \lambda r, \quad |r| = 1.$$

Тогда решение системы (1.2.1) с таким начальным условием имеет вид $x(t) = e^{\lambda t} r$. Поэтому если $\lambda > 0$, то $|x(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, а если $\lambda = 0$, то $x(t) = \operatorname{const} \neq 0$. Следовательно, система (1.2.1) не является устойчивой.

Пусть теперь λ — комплексное число:

$$\lambda = u + jv, \quad u \geq 0,$$

а $r = g + jh$ — нормированный собственный вектор, отвечающий λ , то есть $Ar = \lambda r$, $|r| = 1$. Тогда

$$A(g + jh) = (u + jv)(g + jh),$$

откуда

$$Ag = ug - vh, \quad Ah = vg + uh.$$

Возьмем

$$x_0 = \alpha_0 g + \beta_0 h, \quad \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} A(\alpha g + \beta h) &= \alpha Ag + \beta Ah = \\ &= \alpha(ug - vh) + \beta(vg + uh) = (\alpha u + \beta v)g + (-\alpha v + \beta u)h, \end{aligned}$$

вектор $x(t)$ будет оставаться в двумерном подпространстве, натянутом на вектора g и h :

$$x(t) = \alpha(t)g + \beta(t)h,$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha u + \beta v, & \alpha(0) &= \alpha_0, \\ \dot{\beta} &= -\alpha v + \beta u, & \beta(0) &= \beta_0. \end{aligned}$$

Обозначая $\rho(t) = \alpha^2(t) + \beta^2(t)$, отсюда легко получаем, что

$$\dot{\rho} = 2u\rho, \quad \rho(0) = \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0.$$

При этом если $u > 0$, то $\rho(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, а если $u = 0$, то $\rho(t) = \text{const} \neq 0$. Следовательно, $|x(t)| \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, и в этом случае система (1.2.1) не является устойчивой.

Достаточность. Рассмотрим уравнение Ляпунова

$$A^\top Q + QA = -R \tag{1.2.5}$$

с гурвицевой матрицей A и некоторой матрицей $R \succ 0$. Согласно лемме И.1, уравнение (1.2.5) имеет единственное положительно определенное решение $Q \succ 0$.

Из определения 1.2.4 вытекает, что функция

$$V(x) = x^\top Qx$$

является функцией Ляпунова для рассматриваемой системы, и ее производная в силу системы имеет вид

$$\dot{V}(x) = x^\top (A^\top Q + QA)x = -x^\top Rx < 0.$$

Далее, пусть $M = \lambda_{\max}(Q) > 0$ и $\ell = \lambda_{\min}(R) > 0$. Тогда

$$\dot{V}(x) \leq -\ell x^\top x \leq -\frac{\ell}{M} x^\top Qx = -\frac{\ell}{M} V,$$

и, таким образом, для функции $v(t) = V(x(t)) \geq 0$ имеем:

$$\dot{v} \leq -\frac{\ell}{M} v, \quad v(0) = x_0^\top Qx_0,$$

откуда

$$v(t) \leq v(0) e^{-\frac{\ell}{M} t}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 = x^\top(t)x(t) &\leq \frac{1}{m} x^\top(t)Qx(t) = \\ &= \frac{1}{m} v(t) \leq \frac{v(0)}{m} e^{-\frac{\ell}{M} t} \leq \frac{M|x_0|^2}{m} e^{-\frac{\ell}{M} t}, \end{aligned}$$

где $m = \lambda_{\min}(Q) > 0$. Таким образом,

$$|x(t)| \leq C|x_0| e^{-\nu t},$$

где

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{M}{m}}, \\ \nu &= \frac{\ell}{2M} \leq \sigma. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

В результате получена экспоненциальная оценка типа (1.2.4) для решений уравнения (1.2.1). При этом показатель экспоненты ν не связан напрямую с величиной σ , а выражается через максимальные и минимальные собственные значения матриц Q и R в уравнении Ляпунова.

Как известно (см. Приложение И), для устойчивой матрицы A уравнение Ляпунова

$$AP + PA^\top = -R, \quad R \succ 0,$$

имеет положительно определенное решение P ; иными словами, устойчивая система $\dot{x} = Ax$ с *необходимостью* обладает квадратичной функцией Ляпунова $V(x) = x^T P^{-1} x$. С учетом достаточной части теоремы 1.2.1 заключаем, что непрерывная система устойчива тогда и только тогда, когда у нее имеется квадратичная функция Ляпунова.

Итак, гурвицевость матрицы A необходима и достаточна для того, чтобы решение невозмущенной системы стремилось к нулю при любом начальном условии.

Итак, вновь выяснилось, что для линейных стационарных систем все определения устойчивости эквивалентны. В дальнейшем не будем делать различий между устойчивостью системы и устойчивостью ее матрицы состояния A ; соответственно, величину $\sigma = \sigma(A) > 0$ естественно также называть *степенью устойчивости системы* (1.2.1) или системы (2.1.2).

Еще раз подчеркнем эквивалентность устойчивости линейной стационарной системы существованию у нее квадратичной функции Ляпунова.

Устойчивость линейных дискретных систем

Обратимся к дискретному случаю. В простейшем случае уравнение состояния невозмущенной открытой линейной системы имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (1.2.6)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Система (1.2.6) называется (*дискретно*) *устойчивой*, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$$

для любого начального x_0 .

Как и в непрерывном случае, функции Ляпунова являются эффективным средством исследования устойчивости.

Определение 1.2.5. Непрерывная скалярная функция

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

называется *функцией Ляпунова* для системы (1.2.6), если она обладает следующими свойствами:

1. $V(x) \geq 0$ для всех x , причем $V(x) = 0$ лишь для $x = 0$;
2. $V(x_{k+1}) < V(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$, где $x_k \neq 0$ — решение системы (1.2.6).

Для линейной дискретной системы квадратичная функция Ляпунова вводится аналогично непрерывному случаю. Рассмотрим функцию

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0; \quad (1.2.7)$$

для нее первое свойство выполнено очевидным образом. Чтобы удовлетворить второму свойству, вычислим значения $V(x)$ на траекториях системы (1.2.6):

$$V(x_{k+1}) = x_{k+1}^\top Qx_{k+1} = x_k^\top A^\top QAx_k.$$

Следовательно, свойство 2 эквивалентно выполнению

$$x^\top (A^\top QA - Q)x < 0 \quad \text{при всех } x \neq 0,$$

то есть выполнению дискретного матричного неравенства Ляпунова

$$A^\top QA - Q \prec 0. \quad (1.2.8)$$

Определение 1.2.6. Функция вида (1.2.7), удовлетворяющая условию (1.2.8), называется *квадратичной функцией Ляпунова* для системы (1.2.6).

Теорема 1.2.2. Для устойчивости дискретной системы (1.2.6) необходимо и достаточно, чтобы матрица A была шуровской, то есть $\rho = \rho(A) < 1$.

При этом для любого q , $\rho < q < 1$ существует такая константа $C = C(A, q)$, что

$$|x_k| \leq C|x_0|q^k.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A не является шуровской; тогда найдется ее собственное значение λ такое, что $|\lambda| \geq 1$.

Если λ вещественно, возьмем $x_0 = r$, где r — нормированный собственный вектор, отвечающий λ :

$$Ar = \lambda r, \quad |r| = 1.$$

Тогда, согласно (1.1.6), решение системы (2.1.5) с таким начальным условием имеет вид

$$x_k = \lambda^k r.$$

Поэтому если $|\lambda| > 1$, то $|x_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, а при $|\lambda| = 1$ имеем $|x_k| \not\rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, система (1.2.6) не является устойчивой.

Пусть теперь λ — комплексное число: $\lambda = u + jv$, а $r = g + jh$ — нормированный собственный вектор, отвечающий λ .

Тогда имеем

$$A(g + jh) = (u + jv)(g + jh),$$

откуда

$$Ag = ug - vh, \quad Ah = vg + uh.$$

Возьмем

$$x_0 = \alpha_0 g + \beta_0 h, \quad \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0;$$

тогда вектор x_k будет оставаться в двумерном подпространстве, натянутом на вектора g и h :

$$x_k = \alpha_k g + \beta_k h,$$

где α_k и β_k удовлетворяют разностным уравнениям

$$\alpha_{k+1} = u\alpha_k + v\beta_k,$$

$$\beta_{k+1} = -v\alpha_k + u\beta_k$$

с начальными условиями α_0 и β_0 соответственно.

Обозначая $\rho_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2$, получаем

$$\rho_{k+1} = |\lambda|^2 \rho_k, \quad \rho_0 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0,$$

поэтому если $|\lambda| > 1$, то $\rho_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, а если $|\lambda| = 1$, то $\rho_k = \text{const}$. Следовательно, $|x_k| \not\rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то есть и в этом случае система (1.2.6) не является устойчивой.

Достаточность. Согласно лемме И.3 из Приложения И при шуровской матрице A дискретное уравнение Ляпунова

$$A^\top Q A - Q = -R$$

с некоторой матрицей $R \succ 0$ имеет положительно определенное решение $Q \succ 0$, так что функция

$$V(x) = x^\top Q x$$

является квадратичной функцией Ляпунова для системы (1.2.6). Положив $v_k = V(x_k)$, получим

$$v_{k+1} = x_{k+1}^\top Q x_{k+1} = x_k^\top A^\top Q A x_k =$$

$$= x_k^\top (Q - R)x_k = x_k^\top Qx_k - x_k^\top Rx_k \leq v_k - \frac{\ell}{M}v_k,$$

где $M = \lambda_{\max}(Q) > 0$ и $\ell = \lambda_{\min}(R) > 0$, откуда

$$v_{k+1} - v_k \leq -\frac{\ell}{M}v_k < 0.$$

Далее, имеем

$$v_k \leq v_0 \left(1 - \frac{\ell}{M}\right)^k, \quad v_0 = x_0^\top Qx_0,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |x_k|^2 = x_k^\top x_k &\leq \frac{1}{m} x_k^\top Qx_k = \frac{1}{m} v_k \leq \\ &\leq \frac{v_0}{m} \left(1 - \frac{\ell}{M}\right)^k \leq \frac{M}{m} |x_0|^2 \left(1 - \frac{\ell}{M}\right)^k, \end{aligned}$$

где $m = \lambda_{\min}(Q) > 0$.

Итак,

$$|x_k| \leq C |x_0| q^k,$$

где

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}}, \\ \rho \leq q &= \sqrt{1 - \frac{\ell}{M}} < 1, \end{aligned}$$

то есть последовательность $|x_k|$ убывает со скоростью геометрической прогрессии. ■

Как и в непрерывном случае, величину $\sigma(A) = 1 - \rho(A) > 0$ будем называть *степенью устойчивости дискретной системы* (1.2.1).

В заключение раздела поясним связь между гурвицевой и шуровской устойчивостью. Пусть задана непрерывная система

$$\dot{x} = Ax + Du, \quad x(0) = x_0, \quad (1.2.9)$$

решение которой имеет вид

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Du(\tau) d\tau.$$

Введем постоянный шаг дискретизации $\delta > 0$ и рассмотрим

$$x(t + \delta) = e^{A(t+\delta)} x_0 + \int_0^{t+\delta} e^{A(t+\delta-\tau)} Du(\tau) d\tau.$$

Путем непосредственных преобразований в правой части получаем

$$x(t + \delta) = e^{A\delta} \left(\underbrace{e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Du(\tau) d\tau}_{x(t)} \right) + \int_t^{t+\delta} e^{A(t+\delta-\tau)} Du(\tau) d\tau.$$

Положим

$$u(\tau) \equiv u_k, \quad \tau \in [t, t + \delta),$$

тогда второй интеграл в правой части полученного соотношения можно представить в виде

$$\int_t^{t+\delta} e^{A(t+\delta-\tau)} Du(\tau) d\tau = \int_t^{t+\delta} e^{A(t+\delta-\tau)} d\tau Du_k = \int_0^\delta e^{A\tau} d\tau Du_k.$$

Обозначив

$$x_k \doteq x(t), \quad x_{k+1} \doteq x(t + \delta),$$

$$A_s \doteq e^{A\delta}, \quad D_s \doteq \int_0^\delta e^{A\tau} d\tau D,$$

получим дискретный аналог системы (1.2.9):

$$x_{k+1} = A_s x_k + D_s u_k.$$

Далее, если $\lambda_i = u_i + jv_i$ — собственные значения матрицы A , то $e^{\lambda_i} = e^{u_i + jv_i}$ — собственные значения матрицы A_s . Поэтому, если матрица A гурвицева, то есть $u_i < 0$, то

$$|e^{u_i + jv_i}| = |e^{u_i}| < 1.$$

Таким образом, гурвицевость непрерывной системы отвечает шуровской устойчивости ее дискретного аналога.

Заметим также, что если A гурвицева, то беря явно интеграл в правой части выражения для D_s , имеем

$$D_s = A^{-1}(e^{A\delta} - I)D$$

(здесь использовано свойство обратимости гурвицевой матрицы).

Замечание 1.2.1. Отметим, что на практике при переходе к дискретному времени как правило используется следующая разностная аппроксимация дифференциального уравнения:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\delta} = Ax_k,$$

где δ — интервал дискретизации. Видим, что соответствующая дискретная модель, описываемая уравнением

$$x_{k+1} = (I + \delta A)x_k,$$

может оказаться неустойчивой, если δ велико. ▼

1.2.3. Критерии устойчивости полиномов

Мы видели, что проверка устойчивости систем в пространстве состояний сводится к проверке расположения собственных значений матрицы A (или, что то же самое, корней ее характеристического полинома). А именно, устойчивость имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$ (в непрерывном случае) или $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$ (в дискретном случае), где λ_i — собственные значения A . Точно так же для устойчивости систем, заданных с помощью передаточных функций, аналогичные условия нужно проверять для корней характеристического полинома системы — знаменателя передаточной функции.

Разумеется, при огромных возможностях современной вычислительной техники и математического обеспечения проверка подобных условий не представляет никакой проблемы. Тем не менее нам будут интересны другие критерии, не требующие вычисления корней или собственных значений. Дело в том, что матрица A или полином P обычно не заданы численно, а зависят от параметров или содержат неопределенности. Например, даже если матрица A в системе $\dot{x} = Ax + Bu$ задана точно, а управление выбирается в виде обратной связи $u = Kx$,

то матрица замкнутой системы $A_c = A + BK$ зависит от параметров регулятора K . Поэтому нас может интересовать вопрос, при каких значениях параметров система устойчива.

Известно много различных критериев устойчивости. Рассмотрим прежде всего графические критерии, которые по поведению некоторых кривых (обычно называемых годографами) позволяют делать выводы об устойчивости полиномов.

Графические критерии

Пусть задан полином

$$P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n$$

с вещественными коэффициентами a_i , причем $a_n > 0$ (этого всегда можно добиться, так как $P(s)$ и $-P(s)$ имеют одинаковые корни). Рассмотрим его значение при мнимом значении аргумента $s = j\omega$:

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \\ &\quad \dots + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots) \doteq \\ &\quad \doteq U(\omega^2) + j\omega V(\omega^2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U(t) &\doteq a_0 - a_2t + a_4t^2 - \dots, \\ V(t) &\doteq a_1 - a_3t + a_5t^2 - \dots. \end{aligned}$$

Годографом функции $P(j\omega)$ называется кривая, описываемая точкой $z = P(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении ω от 0 до ∞ .

Теорема 1.2.3. Следующие условия эквивалентны:

1. Полином $P(s)$ гурвицев.
2. Годограф $P(j\omega)$ проходит через n квадрантов последовательно, начиная с первого, не проходя через начало координат.
3. Аргумент годографа $\arg P(j\omega)$ определен, монотонно возрастает и меняется от 0 до $\pi n/2$.
4. Полиномы $U(t)$ и $V(t)$ имеют только положительные вещественные корни, которые перемежаются, то есть найдутся такие $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$, что

$$U(t_1) = U(t_3) = \dots = 0,$$

$$V(t_2) = V(t_4) = \dots = 0,$$

и, кроме того, $U(0) > 0$.

Условие 2 называется *критерием Михайлова* (а годограф $P(j\omega)$ — *годографом Михайлова*), а условие 4 — *критерием Эрмита – Билера*.

Доказательство. Прежде всего исключим случай чисто мнимых корней полинома $P(s)$, так как при этом $\arg P(j\omega)$ не определен и графический критерий неприменим. Представим полином в виде

$$P(s) = a_n(s - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_n),$$

тогда

$$P(j\omega) = a_n(j\omega - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (j\omega - \lambda_n), \quad a_n > 0,$$

и поэтому

$$\arg P(j\omega) = \sum_{k=1}^n \arg(j\omega - \lambda_k).$$

Отсюда при $\omega = 0$ получаем $\arg P(0) = \sum_{k=1}^n \arg(-\lambda_k)$.

Далее, поскольку корни полинома с вещественными коэффициентами встречаются комплексно-сопряженными парами, то в случае гурвицевости $P(s)$ имеем $\arg P(0) = 0$ (или, иначе, $a_0 > 0$).

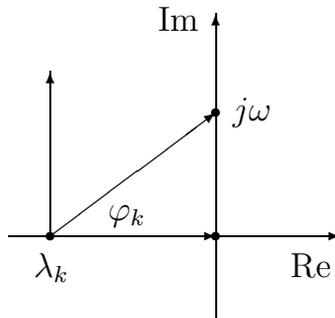
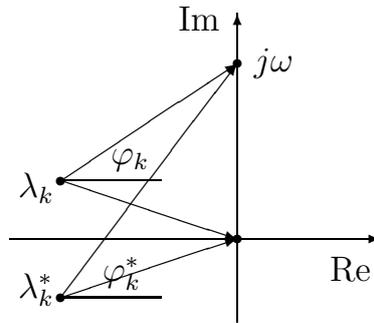


Рис. 1.2.1. Приращение аргумента $\arg(j\omega - \lambda_k)$ при изменении ω .

Обозначим $\varphi_k \doteq \arg(j\omega - \lambda_k)$ и рассмотрим случай, когда λ_k вещественно. Если $\lambda_k < 0$, то φ_k монотонно возрастает, а $\Delta\varphi_k$ — приращение аргумента комплексного числа $(j\omega - \lambda_k)$ при изменении ω от 0 до ∞ — равно $\pi/2$, см. рис. 1.2.1. Если же $\lambda_k > 0$, то $\Delta\varphi_k = -\pi/2$.

Аналогично, если λ_k — комплексное число, то найдется сопряженный корень λ_k^* . Обозначим $\varphi_k \doteq \arg(j\omega - \lambda_k)$ и $\varphi_k^* \doteq \arg(j\omega - \lambda_k^*)$. Тогда $\Delta\varphi_k + \Delta\varphi_k^* = \pi$ при $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ и $\Delta\varphi_k + \Delta\varphi_k^* = -\pi$ при $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$,

Рис. 1.2.2. Приращение аргумента $\arg(j\omega - \lambda_k)$ при изменении ω .

см. рис. 1.2.2. Таким образом, получаем, что если $P(s)$ не имеет чисто мнимых корней, то приращение аргумента $P(j\omega)$ равно

$$\Delta \arg P(j\omega) = \frac{\pi}{2}m - \frac{\pi}{2}(n - m), \quad (1.2.10)$$

где m — число корней с отрицательной вещественной частью (в дальнейшем будем называть такие корни *устойчивыми*).

В частности, если $m = n$ (полином гурвицев), то

$$\Delta \arg P(j\omega) = \pi n/2,$$

и $\arg P(j\omega)$ монотонно возрастает от нуля до $\pi n/2$ с ростом ω от 0 до ∞ (как сумма монотонных функций).

Обратно, если $\arg P(j\omega)$ определен при всех ω и монотонно возрастает от $\arg P(j0) = 0$ до $\arg P(j\infty) = \pi n/2$, то полином $P(s)$ не имеет чисто мнимых корней, а из формулы (1.2.10) заключаем, что $m = n$. Таким образом, доказана эквивалентность условий 1 и 3.

Если $P(s)$ гурвицев, то в силу условия 3 имеем $\Delta \arg P(j\omega) = \pi n/2$, то есть $\arg P(j\omega)$ монотонно меняется от $\arg P(0) = \arg a_0 = 0$ до $\pi n/2$, поэтому годограф последовательно проходит через n квадрантов. Обратно, если $P(j\omega)$ последовательно проходит через n квадрантов, то $\Delta \arg P(j\omega) \geq (n - 1)\pi/2$. Из формулы (1.2.10) (она применима, так как $P(j\omega)$ не проходит через начало координат, то есть $P(s)$ не имеет мнимых корней) следует, что $m = n$. Итак, условие 2 эквивалентно условиям 1 и 3.

Наконец, условие 4 является просто алгебраической формулировкой условия 2: последовательное прохождение квадрантов эквивалентно последовательному пересечению вещественной и мнимой осей, то

есть наличие положительных перемежающихся корней у полиномов $U(t)$ и $V(t)$. При этом никаких других корней у этих полиномов нет, так как нетрудно сосчитать, что сумма степеней $U(t)$ и $V(t)$ равна $n-1$, то есть числу пересечений с осями. ■

Вообще, положительность коэффициентов является необходимым условием гурвицевости полинома, — это так называемый *критерий Стодольи*, который следует из представления

$$P(s) = a_n \prod_{\lambda_k \in \mathbb{R}} (s - \lambda_k) \prod_{\lambda_j \in \mathbb{C}} (s^2 - 2s \operatorname{Re} \lambda_j + |\lambda_j|^2), \quad a_n > 0,$$

и если $\lambda_k < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, то все коэффициенты полинома положительны. При $n > 2$ положительность коэффициентов перестает быть достаточным условием устойчивости, и требуется проверка дополнительных условий.

Критерий Эрмита – Билера дает возможность генерировать устойчивые полиномы. Зададимся числами $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$ и $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ и построим полиномы

$$U(t) \doteq c_0(t - t_1) \cdot (t - t_3) \cdot \dots,$$

$$V(t) \doteq c_1(t - t_2) \cdot (t - t_4) \cdot \dots;$$

тогда полином $P(s)$, определяемый условием

$$P(j\omega) = U(\omega^2) + j\omega V(\omega^2),$$

будет гурвицевым. При этом мы не задаемся числом вещественных и комплексных корней, как пришлось бы делать, определяя $P(s)$ через его корни.

Алгебраические критерии

Алгебраические критерии устойчивости формулируются в терминах коэффициентов полинома. Далее, в примерах из раздела 1.2.5 мы увидим, как несложно выписать в явном виде необходимые и достаточные условия гурвицевости полиномов степени $n \leq 3$; обычно их называют *условиями Рауса – Гурвица*. Однако для более высоких степеней такой подход (основанный на критерии Эрмита – Билера) или громоздок, или нереализуем. Поэтому приведем другой способ проверки устойчивости.

Наряду с полиномом

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n > 0,$$

рассмотрим полином

$$Q(s) = a_{n-1} s^n + a_{n-3} s^{n-2} + \dots$$

и их линейную комбинацию

$$\begin{aligned} P_\lambda(s) &\doteq P(s) + \lambda Q(s) = \\ &= (a_n + \lambda a_{n-1}) s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \\ &\quad + (a_{n-2} + \lambda a_{n-3}) s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Если выбрать $\lambda = -a_n/a_{n-1}$, то соответствующий полином

$$\tilde{P}(s) = a_{n-1} s^{n-1} + \left(a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3}\right) s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} + \dots \quad (1.2.11)$$

будет полиномом степени $n - 1$.

Лемма 1.2.3. *Если $a_n, a_{n-1} > 0$ и полином $\tilde{P}(s)$ устойчив, то и полином $P(s)$ устойчив; в противном случае $P(s)$ неустойчив.*

Таким образом, задача проверки устойчивости полинома $P(s)$ степени n свелась к проверке знаков a_n, a_{n-1} и к проверке устойчивости полинома $\tilde{P}(s)$ степени $n - 1$. Продолжая последовательно этот процесс и вспоминая формулы пересчета коэффициентов полиномов при переходе от $P(s)$ к $\tilde{P}(s)$, приходим к критерию устойчивости, который формализуем в виде следующего алгоритма.

Алгоритм Рауса

1. Полагаем

$$b_1 \doteq a_n, \quad b_2 \doteq a_{n-1}, \quad \dots, \quad b_{n+1} \doteq a_0, \quad b_{n+2} \doteq 0, \quad k \doteq n + 1.$$

2. Полагаем $\lambda \doteq -b_1/b_2$ (если $b_2 = 0$, то полином неустойчив), пересчитываем коэффициенты по формулам

$$\begin{aligned} b_1 &\doteq b_2, \quad b_2 \doteq b_3 + \lambda b_4, \quad b_3 \doteq b_4, \\ b_4 &\doteq b_5 + \lambda b_6, \quad b_5 \doteq b_6, \quad \dots, \quad b_k \doteq 0, \end{aligned}$$

и полагаем $k \doteq k - 1$.

3. Если $k \geq 2$, $b_1 > 0$, $b_2 \neq 0$, возвращаемся к пункту 2.

Если $k = 1$ и $b_1 > 0$, то полином устойчив.

В остальных случаях полином неустойчив.

Алгоритму Рауса часто придают табличную форму: коэффициенты b_1, \dots, b_{n+2} , полученные на первом шаге, записывают в первую строку таблицы. Каждая последующая строка содержит на один элемент меньше; она получается из предыдущей при помощи пересчета на основе леммы 1.2.3 (шаг 2 алгоритма). В результате получают треугольную *таблицу Рауса*, и для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы элементы первого столбца таблицы были положительны (условие $b_1 > 0$ на шаге 3). Существуют и иные, несколько более экономные схемы вычислений в алгоритме Рауса.

Существует и много других алгебраических критериев устойчивости. Самый известный из них — это *критерий Гурвица*, формулируемый с помощью детерминантов. Он, однако, гораздо менее удобен с вычислительной точки зрения, чем алгоритм Рауса, и мы на нем останавливаться не будем.

Алгоритм Рауса также предоставляет возможность генерировать устойчивые полиномы. Именно, запишем произвольные положительные числа в первом столбце таблицы Рауса, а затем заполним ее всю, идя «обратным ходом» по отношению к алгоритму Рауса. Тогда в первой строке окажутся коэффициенты устойчивого полинома.

Устойчивость дискретных полиномов

Приведем теперь аналоги условий устойчивости для дискретных систем. Задан полином с вещественными коэффициентами

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n; \quad (1.2.12)$$

нас интересует, когда он является *устойчивым по Шуру*, то есть когда его корни находятся *внутри единичного круга*. Аналогом критерия Михайлова является следующий критерий.

Теорема 1.2.4. *Полином (1.2.12) шуровский тогда и только тогда, когда годограф $P(e^{j\omega})$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$ охватывает начало координат n раз.*

Доказательство. Действительно,

$$P(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i), \quad P(e^{j\omega}) = \prod_{i=1}^n (e^{j\omega} - \lambda_i),$$

и если λ_i находится вне единичного круга, то приращение аргумента $e^{j\omega} - \lambda_i$ равно нулю, когда $e^{j\omega}$ пробегает единичную окружность. Если же λ_i лежит внутри единичного круга, то приращение аргумента $e^{j\omega} - \lambda_i$ равно 2π .

Таким образом, годограф $P(e^{j\omega})$ охватывает начало координат k раз тогда и только тогда, когда k — число устойчивых корней полинома $P(z)$. ■

Приведем теперь аналог алгоритма Рауса для дискретного случая (называемый *критерием Шура – Кона – Джури*). Наряду с полиномом $P(z)$ с некоторыми корнями z_k рассмотрим полином

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + 1$$

с теми же коэффициентами, но записанными в обратном порядке; его корни равны $1/z_k$. Утверждение, аналогичное лемме 1.2.3, заключается в следующем.

Лемма 1.2.4 (Критерий Шура – Кона – Джури). *Полином $P(z)$ устойчив тогда и только тогда, когда $|a_0| < 1$ и полином*

$$z^{-1}(P(z) - a_0 Q(z))$$

степени $n - 1$ устойчив.

Таким образом, рекуррентно понижая степень полинома, приходим к полиному первой степени вида $\alpha_0 + \alpha_1 z$; он устойчив при $|\alpha_0/\alpha_1| < 1$. Тем самым получаем простой алгоритм проверки устойчивости дискретных полиномов.

Известно и много других условий устойчивости, например, если

$$\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| < a_0,$$

то полином устойчив.

Генерировать устойчивые полиномы можно на основе леммы 1.2.4 (применяя ее «в обратном направлении», то есть повышая степень полиномов), либо пользуясь следующей параметризацией.

Лемма 1.2.5 (Параметризация Левинсона – Дурбина). *Любой устойчивый полином $P(z)$ степени n вида (1.2.12) может быть получен с помощью рекуррентной процедуры*

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_{k+1}(z) = zP_k(z) + t_k Q_k(z),$$

где

$$|t_k| < 1, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Здесь $P_k(z)$ — полином степени k , полученный на k -м шаге. Числа t_k иногда называют *параметрами Левинсона – Дурбина*. Таким образом, каждой точке единичного куба в \mathbb{R}^n ставится во взаимно-однозначное соответствие устойчивый полином.

Таким образом, мы установили графические и алгебраические критерии устойчивости (гурвицевой и шуровской) для полиномов. Следующим естественным шагом было бы установление таких же критериев для матриц, то есть способов проверки требуемого расположения собственных значений матрицы без их явного вычисления. К сожалению, такие методы отсутствуют. Единственный известный подход — для заданной матрицы A построить ее характеристический полином $P(s) = \det(sI - A)$ (для этого существуют эффективные алгоритмы — они совпадают с методами приведения матриц к фробениусовой форме), а затем применить критерии устойчивости полиномов.

1.2.4. Частотные критерии устойчивости замкнутых систем

Пусть теперь описание системы задано не в пространстве состояний, а с помощью передаточных функций. Как в этих терминах проверить устойчивость, не вычисляя явно характеристический полином? Начнем со случая одномерных систем. Пусть передаточная функция объекта (либо объекта совместно с регулятором) в непрерывной системе имеет вид

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где $A(s)$, $B(s)$ — взаимно простые полиномы степеней m и n соответственно, причем $m \leq n$ (то есть выполняется условие реализуемости).

Объект замкнут единичной обратной связью, см. рис. 1.1.2; тогда передаточная функция замкнутой системы равна

$$G_c(s) \doteq \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{A(s)}{A(s) + B(s)}. \quad (1.2.13)$$

Таким образом, характеристический полином равен

$$P(s) = A(s) + B(s),$$

и в случае если A и B заданы явно, проверка его устойчивости не вызывает проблем. Однако во многих случаях нам доступна лишь частотная характеристика разомкнутой системы, то есть функция $G(j\omega)$ (вспомним, что во многих практических задачах именно частотная характеристика доступна измерению).

Точка $G(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ описывает некоторую кривую на комплексной плоскости, которая называется *годографом Найквиста*. Задача заключается в том, чтобы по поведению этой кривой сделать выводы об устойчивости замкнутой системы, то есть о гурвицевости $P(s)$. Ее простое решение дается нижеследующим *критерием Найквиста*.

Теорема 1.2.5 (Критерий Найквиста). Пусть передаточная функция $G(s)$ имеет p неустойчивых полюсов и $n - p$ устойчивых и не имеет мнимых полюсов. Тогда замкнутая система (1.2.13) устойчива, если и только если $G(j\omega)$ не проходит через точку $(-1, j0)$ и делает вокруг нее $p/2$ оборотов против часовой стрелки.

Доказательство. Для замкнутой системы

$$P(j\omega) = A(j\omega) + B(j\omega) = B(j\omega)(G(j\omega) + 1),$$

поэтому при изменении ω от 0 до ∞

$$\Delta \arg P(j\omega) = \Delta \arg B(j\omega) + \Delta \arg(G(j\omega) + 1).$$

По условию 3 теоремы 1.2.3 полином $P(s)$ устойчив тогда и только тогда, когда

$$\Delta \arg P(j\omega) = \pi n/2, \quad P(j\omega) \neq 0.$$

В силу предположений о передаточной функции $G(s)$ имеем $B(j\omega) \neq 0$ и $\Delta \arg B(j\omega) = \pi n/2 - \pi p$, см. формулу (1.2.10).

Таким образом, должно быть $G(j\omega) + 1 \neq 0$ и $\Delta \arg(G(j\omega) + 1) = \pi p$. Это и означает, что $G(j\omega)$ делает $p/2$ оборотов вокруг точки $(-1, j0)$. При этом подразумевается, что $1/2$ оборота — это приращение аргумента на π . ■

Заметим, что при $\omega = 0$ имеем $G(j\omega) = a_0/b_0$, а при $\omega = \infty$ имеем $G(j\omega) = a_n/b_n$ если $m = n$, и $G(j\omega) = 0$ если $m < n$, то есть годограф $G(j\omega)$ начинается и заканчивается на вещественной оси. В частности, если $B(s)$ — устойчивый полином, то критерий Найквиста принимает простейший вид: годограф $G(j\omega)$ не должен охватывать точку $(-1, j0)$.

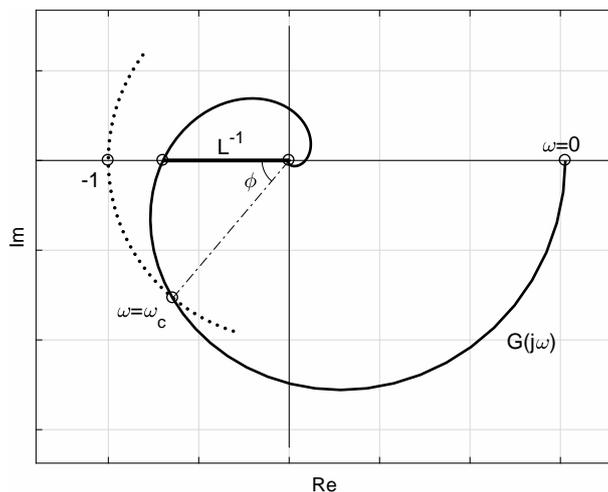


Рис. 1.2.3. Годограф Найквиста. Запасы устойчивости по амплитуде и по фазе.

В связи с годографом Найквиста введем понятия, широко употребляемые в инженерной практике, см. рис. 1.2.3.

Запасом устойчивости по амплитуде L называется величина, обратная расстоянию от начала координат до ближайшего к критической точке $(-1, j0)$ пересечения годографа с отрицательной вещественной полуосью.

Запасом устойчивости по фазе φ называется угол между отрицательной вещественной полуосью и той точкой, в которой $|G(j\omega)| = 1$.

Ясно, что чем больше эти величины, тем дальше годограф от точки $(-1, j0)$, поэтому они могут служить некоторой мерой устойчивости. Напомним, что частоту среза ω_c , для которой $|G(j\omega)| = 1$, мы уже ввели в разделе 1.1.4 при рассмотрении логарифмической амплитудной характеристики. Таким образом, запас устойчивости по фазе — это значение $\varphi(\omega_c) + \pi$.

При рассмотрении проблем устойчивости систем, заданных передаточными функциями, надо иметь в виду одно обстоятельство, связанное с возможным сокращением нулей и полюсов, то есть наличием общих корней у числителя и знаменателя передаточной функции.

Пример 1.2.1. Рассмотрим (см. рис. 1.2.4) последовательное со-

единение объекта с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

и регулятора

$$C(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

Поступая формально, вычисляем передаточную функцию

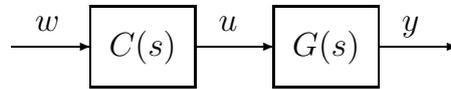


Рис. 1.2.4. Последовательное соединение объекта и регулятора.

$$H(s) = G(s)C(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1},$$

и эта передаточная функция устойчива (единственный полюс -1 лежит в левой полуплоскости). Однако соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид

$$u = C(s)w, \quad y = G(s)u, \quad y = H(s)w,$$

$$\dot{u} + u = \dot{w} - w, \quad \dot{y} - y = u,$$

откуда, подставляя u в первое уравнение, получаем

$$\ddot{y} - y = \dot{w} - w.$$

Решение этого дифференциального уравнения даже при нулевом входе $w = 0$ неустойчиво. Действительно, оно имеет вид

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t},$$

где

$$c_1 = \frac{y(0) + \dot{y}(0)}{2}, \quad c_2 = \frac{y(0) - \dot{y}(0)}{2},$$

и растет с ростом t при сколь угодно малом $y(0) = \varepsilon$ и $\dot{y}(0) = 0$. Аналогичным образом даже при нулевых начальных условиях при малых $w \equiv \varepsilon$ решение возрастает. Это противоречие возникло вследствие сокращения неустойчивого корня $s = 1$. ▼

Таким образом, мы приходим к важному выводу: *сокращение общих неустойчивых нулей и полюсов передаточной функции недопустимо*. В то же время, выводы об устойчивости передаточной функции, имеющей общие устойчивые нули и полюса, можно делать и после сокращения этих множителей.

Перейдем теперь к случаю многомерных систем. Как мы видели в разделе 1.1.2, передаточная функция системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

имеет вид

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{W(s)}{P(s)},$$

где $W(s)$ — матрица, все элементы которой являются полиномами от s , а $P(s) = \det(sI - A)$ — характеристический полином матрицы A , то есть $P(s)$ является общим знаменателем всех элементов $H(s)$. Если задана лишь матрица $H(s)$, а не реализация в пространстве состояний (1.2.14), то критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.2.6. Система с матричной передаточной функцией $H(s)$ устойчива тогда и только тогда, когда полюса $H(s)$ лежат в левой полуплоскости.

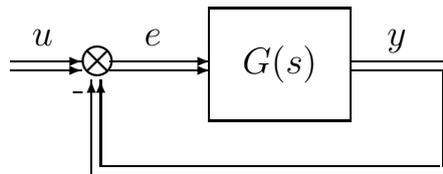


Рис. 1.2.5. Многомерная система, замкнутая единичной обратной связью.

Многомерный аналог критерия Найквиста отвечает следующей задаче. Задана матричная передаточная функция $G(s)$ открытой системы; будет ли устойчива замкнутая система, получающаяся путем введения единичной обратной связи? Возникающая конфигурация показана на рис. 1.2.5 (двойные линии отвечают векторным сигналам). Передаточная функция от входа u к выходу y вычисляется так:

$$u - y = e, \quad y = Ge, \quad y = (I + G)^{-1}Gu = Hu.$$

Таким образом,

$$H = (I + G)^{-1}G,$$

и нас интересует устойчивость этой передаточной функции. Рассмотрим годограф

$$g(j\omega) \doteq \det(I + G(j\omega)), \quad 0 \leq \omega < \infty,$$

и пусть p — число неустойчивых полюсов $G(s)$.

Теорема 1.2.7. *Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф $g(j\omega)$ не проходил через начало координат и делал вокруг нее $p/2$ оборотов против часовой стрелки.*

Заметим, что в одномерном случае теорема 1.2.7 совпадает с обычным критерием Найквиста. В самом деле, в этом случае $G(j\omega) \in \mathbb{C}$ и $g(j\omega) = 1 + G(j\omega)$, то есть $g(j\omega)$ — сдвинутый на единицу вправо годограф $G(j\omega)$. Поэтому точка $(-1, j0)$ в теореме 1.2.5 заменяется на точку $(0, j0)$ в теореме 1.2.7.

Проблема устойчивости многомерных систем, заданных передаточными функциями, имеет некоторые особенности по сравнению с одномерным случаем. Например, для одномерной системы все передаточные функции (от входа к выходу, от входа к ошибке и т.д.) одновременно или устойчивы, или неустойчивы. В многомерном случае это может быть не так. Кроме того, вопрос о сокращении нулей и полюсов матричной передаточной функции отнюдь не прост, так как само понятие нуля такой функции может быть определено различными способами.

Напомним, что мы обозначили через RH_∞ пространство матричных функций, все элементы которых — вещественные дробно-рациональные реализуемые функции с устойчивыми знаменателями. Открытая система с матричной передаточной функцией $H(s)$ является устойчивой тогда и только тогда, когда $H(s) \in RH_\infty$.

Чтобы сформулировать условия устойчивости замкнутых систем, рассмотрим конфигурацию на рис. 1.2.6, где $G(s)$ и $K(s)$ — матричные передаточные функции объекта и регулятора, а e_1, e_2, w_1, w_2 — векторные сигналы ошибок и входов. Заметим, что здесь мы используем *положительную обратную связь*¹ и изменили обозначение для регулятора. Имеем

$$\begin{aligned} e_1 &= w_1 + Ke_2, \\ e_2 &= w_2 + Ge_1, \end{aligned}$$

¹Переход к отрицательной обратной связи производится изменением знака регулятора с соответствующими изменениями знака в передаточных функциях.

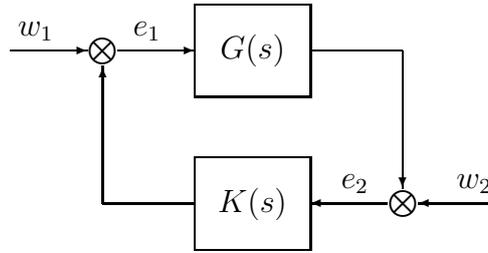


Рис. 1.2.6. Конфигурация, порождающая четыре матричных передаточных функции.

откуда получаем четыре передаточных функции (от w_i к e_j , $i, j = 1, 2$)

$$(I - KG)^{-1}, \quad (I - KG)^{-1}K, \quad (I - GK)^{-1}G, \quad (I - GK)^{-1}. \quad (1.2.15)$$

Принято говорить, что система на рис. 1.2.6 *внутренне устойчива*, если все функции (1.2.15) принадлежат RH_∞ , а конфигурация *корректна*, то есть матрица

$$I - K(\infty)G(\infty)$$

обратима.

Конфигурация рис. 1.2.6 может быть удобно интерпретирована в терминах реализации передаточных функций, см. раздел 1.1.2. Пусть реализации объекта и регулятора имеют вид

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix}.$$

Тогда, обозначая через x и \hat{x} векторы состояний для G и K , имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Be_1, \\ e_2 &= Cx + De_1 + w_2, \\ \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}e_2, \\ e_1 &= \hat{C}\hat{x} + \hat{D}e_2 + w_1, \end{aligned}$$

и для всех передаточных функций могут быть найдены их реализации. Например,

$$GK = \begin{bmatrix} A & B\hat{C} & B\hat{D} \\ 0 & \hat{A} & \hat{B} \\ C & D\hat{C} & D\hat{D} \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$G(\infty) = D, \quad K(\infty) = \widehat{D},$$

то в терминах реализаций условие корректности приобретает вид

$$\det(I - D\widehat{D}) \neq 0.$$

1.2.5. Примеры

Пример 1.2.2. Вернемся к математическим маятникам, рассмотренным в примере 1.1.6.

Характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix}$$

системы (1.1.38) имеет вид

$$\lambda^2 + g/l = 0,$$

поэтому ее собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{g/l}$$

чисто мнимые. Следовательно, матрица системы (и сама система) неустойчива, и мы не можем утверждать, что ее траектории будут асимптотически стремиться к нулю.

Однако в данном случае, благодаря наличию простой пары чисто мнимых корней величина e^{At} останется ограниченной (см. приложение В) и траектории системы хотя и не будут стремиться к нулю, но останутся ограниченными на бесконечном горизонте. В самом деле, решение соответствующего дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

имеет вид

$$\alpha(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Обратимся к математическому маятнику с трением (1.1.39); характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & -2k \end{pmatrix}$$

системы имеет вид

$$\lambda^2 + 2k\lambda + g/l = 0,$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - g/l} < 0.$$

Закключаем, что математический маятник с трением является устойчивой системой.

Наконец, характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix}$$

обратного математического маятника (1.1.40) имеет вид

$$\lambda^2 - g/l = 0,$$

поэтому ее собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{g/l}$$

имеют разные знаки. Таким образом, перевернутый математический маятник — пример неустойчивой системы.

Пример 1.2.3 (Полином второй степени).

$$P(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2, \quad a_2 > 0.$$

Имеем

$$P(j\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + ja_1\omega,$$

$$U(t) = a_0 - a_2t, \quad V(t) = a_1, \quad t_1 = a_0/a_2.$$

Годограф $P(j\omega)$ — парабола, см. рис. 1.2.7, поэтому условие того, что она проходит через I и II квадранты, имеет вид $a_1 > 0$, $a_0/a_2 > 0$, то есть для $n = 2$ необходимое и достаточное условие устойчивости — положительность всех коэффициентов: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Пример 1.2.4 (Полином третьей степени).

$$P(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3, \quad a_3 > 0.$$

Имеем

$$P(j\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + j\omega(a_1 - a_3\omega^2),$$

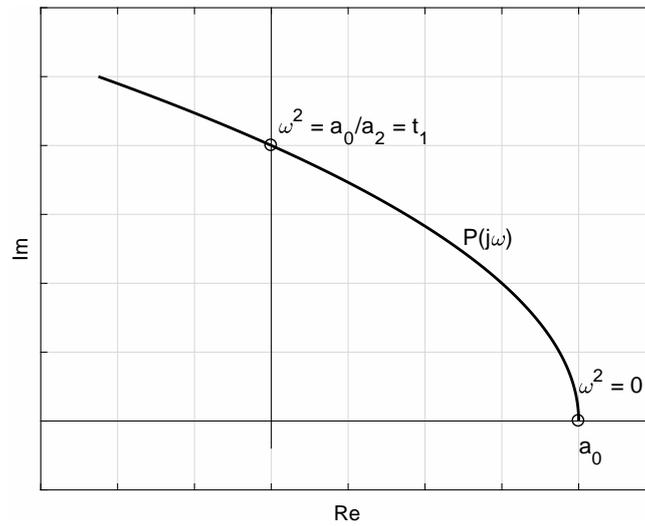


Рис. 1.2.7. Годограф Михайлова для устойчивого полинома второй степени.

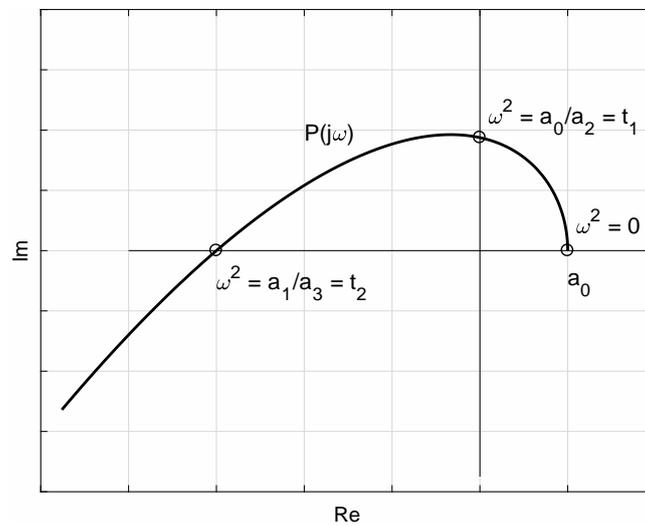


Рис. 1.2.8. Годограф Михайлова для устойчивого полинома третьей степени.

$$U(t) = a_0 - a_2 t, \quad V(t) = a_1 - a_3 t, \\ t_1 = a_0/a_2, \quad t_2 = a_1/a_3.$$

Годограф устойчивого полинома изображен на рис. 1.2.8.

Критерий Михайлова выполняется, если

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad 0 < t_1 = a_0/a_2 < t_2 = a_1/a_3.$$

Эти условия эквивалентны следующим:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Таким образом, здесь к условию положительности коэффициентов добавляется еще одно условие:

$$a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Покажем работу алгоритма Рауса на примерах, пользуясь непосредственно способом понижения степени (1.2.11) и леммой 1.2.3.

Пример 1.2.5.

$$n = 3: \quad P(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0.$$

Получаем

$$\tilde{P}(s) = a_2 s^2 + \left(a_1 - \frac{a_3}{a_2} a_0\right) s + a_0.$$

Можно не проводить вычисления дальше и воспользоваться критерием гурвицевости полинома второй степени, а именно, проверить положительность его коэффициентов:

$$a_2 > 0, \quad a_1 - \frac{a_3}{a_2} a_0 > 0, \quad a_0 > 0.$$

Тем самым мы пришли к тем же условиям, что и с помощью критерия Михайлова. ▼

Пример 1.2.6.

$$n = 4: \quad P(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0.$$

Получаем

$$\tilde{P}(s) = a_3 s^3 + \left(a_2 - \frac{a_4}{a_3} a_1\right) s^2 + a_1 s + a_0,$$

и пользуясь полученными выше условиями устойчивости при $n = 3$ приходим к условиям

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ a_1 \left(a_2 - \frac{a_4}{a_3} a_1\right) > a_3 a_0.$$

1.3. Виды управления

Предыдущие разделы были посвящены описанию систем, в которых управление отсутствует; в настоящем разделе обсуждаются два способа задания управления в системах управления: программное управление и управление в форме обратной связи. Здесь же вводятся такие важнейшие термины теории управления как управляемость и наблюдаемость. Обсуждаются особенности задания управления при описании системы в частотной области.

1.3.1. Программное управление. Управляемость

Рассмотрим линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + D_1 w, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

с вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектором управления $u(t) \in \mathbb{R}^p$, вектором внешних возмущений $w(t) \in \mathbb{R}^m$ и обсудим способ выбора управления как функции от времени, то есть в виде $u = u(t)$. Такой способ выбора называется *программным управлением*; на первый взгляд он представляется наиболее естественным.

Здесь прежде всего следует уточнить, в каком классе ищутся функции $u(t)$ и какие на них накладываются ограничения. Так, управления обычно предполагаются либо гладкими, либо непрерывными, либо произвольными измеримыми функциями времени. Чаще всего задача ставится именно в последней формулировке, то есть допускаются и разрывные управления. Однако нередко оказывается, что для некоторых задач оптимальное управление достигается на дифференцируемых функциях от времени. Кроме того, на класс управлений обычно накладываются дополнительные условия типа ограниченности управлений. Типичным является условие

$$u(t) \in \mathcal{U} \quad \text{для всех } t \in [0, T],$$

где T — заданная длительность процесса управления, а \mathcal{U} — заданное замкнутое ограниченное множество в \mathbb{R}^p .

Другим типом ограничений являются интегральные, например,

$$J(u) \doteq \int_0^T |u(t)|_2^2 dt \leq c^2 \quad (1.3.2)$$

(то есть управления предполагаются L_2 -ограниченными на отрезке $[0, T]$). Функционал (1.3.2) называется *функционалом энергии*.

После выбора программного управления и подстановки его в систему (1.3.1) приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых фигурируют лишь внешние воздействия. Например, уравнение состояния приобретает вид

$$\dot{x} = Ax + \underbrace{Bu(t) + D_1 w(t)}_{w_1(t)},$$

и если величины $x(0) = x_0$ и $w(t)$ известны, то $x(t)$ может быть определено по формуле

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} w_1(\tau) d\tau$$

для всех значений $t \geq 0$.

Разумеется, программное управление может применяться и в дискретных системах (управление u_k выбирается заранее как функция от k); никаких принципиально новых моментов при этом не возникает.

Используем программное управление для анализа важного понятия *управляемости*.

Определение 1.3.1. (Определение управляемости на физическом уровне) Система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.3.3}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, называется *управляемой*, если для любых точек $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ и любого момента времени $T > 0$ найдется ограниченное кусочно-непрерывное управление $u(t)$, переводящее систему из $x(0) = x_0$ в $x(T) = x_1$.

Свойство управляемости системы — естественное требование; оно означает, что имеются достаточные возможности воздействия на систему.

Замечание 1.3.1. Важно отметить, что из свойств решений линейных дифференциальных уравнений вытекает, что управляемость системы эквивалентна выполнению следующего свойства: для любого начального $x(0)$ и любого $0 < T < \infty$ найдется ограниченное кусочно-непрерывное управление $u(t)$ на отрезке $[0, T]$ такое, что решение системы (1.3.3) переходит в начало координат в момент T . ▼

Иначе говоря, в управляемой системе начальное отклонение может быть устранено за (любое) конечное время. Очевидно, что изменив направление времени, получим, что управляемая система может быть переведена из $x(0) = 0$ в любую заданную точку $x(T)$; это свойство иногда называют *достижимостью*.

Трудность задачи проверки управляемости состоит в том, что обычно количество управляющих воздействий (размерность p пространства управлений) меньше количества управляемых величин (размерности n пространства состояний), однако она разрешается следующим образом.

Определение 1.3.2. Назовем *матрицей управляемости* для системы (1.3.3) матрицу

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-r}B),$$

где r — ранг матрицы B .

Заметим, что матрица U составлена из $n - r + 1$ блоков, каждый из которых — матрица размера $n \times p$, то есть $U \in \mathbb{R}^{n \times (n-r+1)p}$.

Определение 1.3.3. Если матрица управляемости имеет полный ранг, то есть

$$\text{rank } U = n,$$

то пару матриц (A, B) называют *управляемой*.

В частности, для системы управления с одним входом

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, матрица управляемости будет квадратной (n -го порядка) со столбцами

$$b, Ab, \dots, A^{n-1}b.$$

Таким образом, пара (A, b) будет управляемой, если эти векторы линейно независимы. В этом случае систему можно с помощью преобразования подобия привести к так называемой *канонической управляемой форме*.

Следующая теорема дает конструктивное необходимое и достаточное условие управляемости.

Теорема 1.3.1 (Ранговый критерий управляемости).

Линейная система (1.3.3) управляема тогда и только тогда, когда матрица управляемости имеет полный ранг.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\text{rank } U < n$. Тогда найдется вектор $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, такой, что

$$v^\top B = v^\top AB = \dots = v^\top A^{n-1}B = 0.$$

По теореме Кэли – Гамильтона матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0I = 0, \quad (1.3.4)$$

откуда

$$v^\top A^n B = -a_{n-1}v^\top A^{n-1}B - \dots - a_0v^\top B = 0.$$

Аналогично, умножая равенство (1.3.4) слева на $v^\top A^k$, $k = 1, 2, \dots$, и справа на B , получим

$$v^\top A^k B = 0$$

для всех $k \geq n + 1$, откуда

$$v^\top e^{-A\tau} B = v^\top \left(I - A\tau + \frac{1}{2!}A^2\tau^2 - \dots \right) B \equiv 0.$$

С другой стороны, согласно (1.1.4) решение системы (1.3.3) имеет вид

$$x(T) = e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau = e^{AT} \left(x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right),$$

поэтому для $x(T) = 0$ имеем

$$0 = x_0 + \int_0^T e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

или, после домножения слева на v^\top ,

$$0 = v^\top x_0 + \int_0^T \underbrace{v^\top e^{-A\tau} B}_{=0} u(\tau) d\tau = v^\top x_0$$

для любого управления $u(\tau)$. Однако равенство $v^\top x_0 = 0$ не может выполняться при любых x_0 (например, при $x_0 = v$).

Достаточность. Укажем конкретный вид управления, которое переводит систему (1.3.3) из $x(0) = x_0$ в $x(T) = 0$. Именно, возьмем

$$\widehat{u}(t) \doteq B^\top e^{A^\top(T-t)} v,$$

где вектор v подлежит выбору из условий

$$x(T) = 0, \quad x(0) = x_0,$$

то есть

$$\begin{aligned} 0 &= e^{AT} x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B \widehat{u}(\tau) v \, d\tau = \\ &= e^{AT} x_0 + \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^\top e^{A^\top(T-\tau)} \, d\tau \right) v. \end{aligned}$$

Покажем, что матрица

$$W(T) \doteq \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^\top e^{A^\top(T-\tau)} \, d\tau = \int_0^T e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} \, d\tau, \quad (1.3.5)$$

называемая *грамианом управляемости*, невырождена.

Прежде всего,

$$d^\top W(T) d = \int_0^T |d^\top e^{A\tau} B|^2 \, d\tau$$

для любого $d \in \mathbb{R}^n$, то есть эта матрица неотрицательно определена. Если $d^\top W(T) d = 0$ для некоторого $d \neq 0$, то

$$\varphi(\tau) = d^\top e^{A\tau} B \equiv 0 \quad \text{для всех } \tau \in [0, T].$$

Но тогда и все производные функции φ равны нулю, в частности,

$$\varphi^{(k)}(0) = d^\top A^k B = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Следовательно, $d^\top U = 0$, что противоречит условию $\text{rank } U = n$.

Таким образом, $W(T) \succ 0$, поэтому уравнение

$$e^{AT} x_0 + W(T) v = 0$$

имеет решение

$$v = -W^{-1}(T) e^{AT} x_0$$

при любом x_0 . Тем самым, найдено управление

$$\hat{u}(t) = -B^\top e^{A^\top(T-t)} W^{-1}(T) e^{AT} x_0,$$

которое переводит систему (1.3.3) из состояния $x(0) = x_0$ в состояние $x(T) = 0$. ■

В случае когда

$$\text{rank } U = q < n,$$

рассмотрим подпространство \mathbb{R}^q , натянутое на столбцы матрицы управляемости. Нетрудно видеть, что на этом подпространстве система (1.3.3) обладает свойством управляемости, то есть для любого начального $x(0) \in \mathbb{R}^q$ и любого $0 < T < \infty$ найдется ограниченное кусочно-непрерывное управление $u(t)$ на отрезке $[0, T]$ такое, что решение системы (1.3.3) обращается в нуль в момент T . Назовем \mathbb{R}^q *управляемым подпространством* рассматриваемой системы; в нем замечание 1.3.1 сохраняет свою силу.

Далее, выше не просто доказано, что найдется управление, которое переводит систему из произвольного начального состояния в начало координат, но и явно указана одна такая функция: $u = \hat{u}(t)$. Более того, предложенное управление оказалось гладкой функцией, в то время как в определении управляемости требуется лишь кусочная непрерывность.

Еще одно важное свойство управляемых систем будет сформулировано ниже, в теореме 1.4.4.

Замечание 1.3.2. Рассмотрим дискретную систему управления

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1.3.6)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^p$, $\text{rank } B = r$. Согласно (1.1.6), решение системы (1.3.6) представимо в виде

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i,$$

поэтому условию управляемости можно придать следующую форму: для всякого $a \in \mathbb{R}^n$ найдется число $k > 0$ и векторы u_0, \dots, u_{k-1} , такие что

$$\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i = a. \quad (1.3.7)$$

Отсюда вытекает критерий управляемости для дискретных систем: система (1.3.6) управляема тогда и только тогда, когда пара (A, B) управляема. Действительно, взяв $k = n - r + 1$, перепишем уравнение (1.3.7) в виде

$$Uu = a,$$

где

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-r}B) \in \mathbb{R}^{n \times (n-r+1)p},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_{n-r} \\ u_{n-r-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-r+1)p}.$$

Остается заметить, что уравнение имеет решение при любом a тогда и только тогда, когда ранг матрицы U равен n . ▼

В отличие от непрерывных систем дискретное время не может выбираться произвольно — требуется конечное число шагов, чтобы «накопить» ранг матрицы U . Если ранг матрицы B больше единицы, то систему можно привести в начало координат за число шагов, меньшее n ; в частности, если матрица B квадратная невырожденная, то можно достичь цели всего за один шаг.

Замечание 1.3.3. Подход с точки зрения программного управления допустим в случае, когда внешние воздействия на систему отсутствуют, матрицы A , B и C известны и задан критерий оптимальности типа

$$J(u) = \int_0^T |u(t)|_2^2 dt.$$

В этом случае можно найти оптимальное управление

$$u = \hat{u}(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Однако в более общих ситуациях — при наличии внешних возмущений или неопределенности в описании системы — применение программного управления может привести к резкому ухудшению качества процесса либо к полной катастрофе.¹ Это же относится и к подавляющему большинству иных ситуаций, связанных с управлением производственными процессами, транспортом, системами связи, финансами

¹Представим себе, например, процесс управления самолетом, рассчитанный заранее, до начала полета, и не предусматривающий использования текущей информации о скорости ветра, высоте и т. п. Вряд ли кому-нибудь придет в голову управлять самолетом подобным образом.

и т. д. Лишь в очень небольшом числе случаев (расчет оптимального режима космического полета или модели, в которых t не играет роль времени, например, расчет оптимальной трассы дороги) решение в виде программного управления $u = u(t)$ является удовлетворительным. Ниже будут рассмотрены иные подходы к выбору управления. ▼

1.3.2. Управление по обратной связи

Выше, в разделе 1.3.1, в качестве управлений рассматривались заранее выбранные функции от времени; такое управление было названо *программным*. Другой подход к построению управления связан с идеей *обратной связи*, в рамках которого управление не выбирается заранее, а корректируется в каждый текущий момент на основании информации о состоянии (или о выходе) системы.

Выбор управления в форме функции от состояния и момента времени называется *комбинированным управлением*:

$$u = u(x, t). \quad (1.3.8)$$

Функция $u(x, t)$ может быть нелинейной по x ; существуют различные подходы (например, *динамическое программирование*), позволяющие решать соответствующие задачи синтеза в некоторых постановках. Однако после выбора управления в форме (1.3.8) уравнение состояния становится нелинейным и нестационарным. Поэтому в данной главе мы преимущественно будем рассматривать управление в форме статической линейной обратной связи.

Начнем с рассмотрения *статической линейной обратной связи по состоянию*:

$$u = Kx, \quad (1.3.9)$$

где матрица $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, называемая *матрицей регулятора* (или *матрицей усиления*), не зависит от t . Оказывается, что в некоторых задачах (см., например, раздел 1.5.2 ниже) управление такого типа обеспечивает наилучшее значение критерия оптимальности в классе любых управлений, то есть переход к нелинейным нестационарным обратным связям не улучшает критерий качества.

Подставив управление (1.3.9) в уравнение состояния (1.1.1), приходим к замкнутой системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + D_1w, \\ y &= Cx + D_2w. \end{aligned}$$

Таким образом, после замыкания системы линейной обратной связью по состоянию (1.3.9) мы вновь получили линейное уравнение состояния — с матрицей состояния

$$A_c = A + BK,$$

которая называется *матрицей замкнутой системы*. В дальнейшем покажем, что за счет выбора матрицы усиления K можно оптимизировать те или иные показатели качества. В частности, для управляемой системы надлежащим выбором регулятора K можно обеспечить желаемый спектр замкнутой системы.

Управления в виде (1.3.9) называются *линейными (статическими) регуляторами*. Большинство используемых на практике регуляторов являются именно линейными; они легко реализуются технически.

Отметим, что возможности статических линейных регуляторов в некоторых отношениях ограничены. Так, регулятор в линейной системе $\dot{x} = Ax + Bu$ не может устранить начальное отклонение за конечное время, то есть не может перевести систему из состояния $x_0 \neq 0$ в начало координат за конечное время T . Действительно, из уравнения замкнутой системы $\dot{x} = A_c x$ и условия $x(T) = 0$ очевидно следует, что $x(t) \equiv 0$ при всех t .

В дискретных системах линейная обратная связь имеет вид

$$u_k = Kx_k,$$

поэтому уравнения замкнутой системы приобретают вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_c x_k + D_1 w_k, \\ y_k &= C x_k + D_2 w_k, \end{aligned}$$

где $A_c = A + BK$. Таким образом, матрица состояния A_c замкнутой дискретной системы вычисляется по той же формуле, что и в непрерывном случае.

Как отмечалось выше, состояние системы не всегда доступно измерению; часто единственная информация о системе предоставляется ее выходом y . Попытка построить регулятор в форме *статической линейной обратной связи по выходу*

$$u = Ky,$$

где $K \in \mathbb{R}^{p \times l}$, как правило, бывает неудовлетворительной; обычно с помощью управлений такого вида систему даже не удается сделать устойчивой.

Допустимые способы построения управления по выходу системы будут обсуждены позже.

1.3.3. Наблюдаемость

Дальше будет показано, как управление может эффективно строиться исходя из текущего состояния системы. Однако состояние не всегда доступно наблюдению; часто в нашем распоряжении имеются лишь измерения выходной переменной. В этом разделе обсудим принципиальную возможность восстановления состояния по выходу. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Система (1.3.10) называется *ненаблюдаемой*, если разным траекториям могут отвечать одинаковые выходы, то есть найдутся такие $x_0 \neq x'_0$, что для соответствующих траекторий $x(t), x'(t)$ и выходов $y(t), y'(t)$ будет выполнено $y(t) \equiv y'(t)$. В противном случае система называется *наблюдаемой*.

Покажем, что если линейная система наблюдаема, то можно восстановить значение $x(t)$ по значениям

$$y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t),$$

то есть достаточно знать значения выхода и $n - 1$ его последовательных производных в тот момент времени, когда производится оценка состояния.

Определение 1.3.4. Назовем *матрицей наблюдаемости* для линейной системы (1.3.10) матрицу

$$V = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l(n-q+1) \times n},$$

где q — ранг матрицы C .

Определение 1.3.5. Если матрица наблюдаемости имеет полный ранг, то есть

$$\text{rank } V = n,$$

то пару матриц (C, A) называют *наблюдаемой*.

В следующей теореме устанавливается необходимое и достаточное условие наблюдаемости.

Теорема 1.3.2 (Ранговый критерий наблюдаемости). *Линейная система (1.3.10) наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости имеет полный ранг.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\text{rank } V < n$. Тогда найдется вектор $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, такой, что

$$Cv = CAv = \dots = CA^{n-1}v = 0.$$

Как и при доказательстве необходимости в теореме 1.3.1 об управляемости, отсюда следует, что

$$CA^k v = 0 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

и, следовательно, $C e^{A\tau} v \equiv 0$. Поэтому при $x(0) = v$ имеем

$$y(t) = Cx(t) = C e^{At} v \equiv 0.$$

С другой стороны, при $x(0) = 0$ также имеем $y(t) \equiv 0$. Таким образом, разным начальным условиям отвечают одинаковые выходы, поэтому система ненаблюдаема.

Достаточность. Поскольку выход $y(t)$ порожден линейной системой (1.3.10), имеем

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t), \\ \dot{y}(t) &= CAx(t), \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) &= CA^{n-1}x(t), \end{aligned}$$

то есть

$$Vx = Y,$$

где

$$x = x(t), \quad Y = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nl}.$$

Полученная линейная система имеет единственное решение, поскольку $\text{rank } V = n$. ■

Замечание 1.3.4. Матрица

$$V^\top \doteq (C^\top \quad A^\top C^\top \quad \dots \quad (A^\top)^{n-1} C^\top)$$

является матрицей управляемости для системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A^\top x + C^\top u, \\ y &= B^\top x,\end{aligned}$$

которая называется *двойственной* к системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

поскольку управляемость одной из них эквивалентна наблюдаемости другой. ▼

Способ оценивания состояния, вытекающий из приведенного выше доказательства теоремы 1.3.2, неудовлетворителен: он требует вычисления $n - 1$ последовательных производных от выхода. Меньшим числом производных обойтись нельзя, если выход скалярный; конечно, если размерность l выхода больше, то число требуемых производных можно уменьшить. Например, если матрица C квадратная невырожденная, то можно взять

$$x(t) = C^{-1}y(t).$$

В разделе 1.4.3 будет рассмотрен используемый на практике подход к оцениванию состояния системы, не требующий вычисления производных.

1.3.4. Частотные методы

Предыдущие разделы данной главы были посвящены выбору управления при описании систем в пространстве состояний; обсудим теперь эти вопросы на языке передаточных функций. Начнем со случая одномерных непрерывных систем. Запишем уравнение системы в виде

$$P(s)y = Q(s)u + R(s)w,$$

где $P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$ — полиномы от оператора дифференцирования s :

$$\begin{aligned}P(s) &= p_0 + p_1 s + \dots + p_n s^n, \\ Q(s) &= q_0 + q_1 s + \dots + q_m s^m, \\ R(s) &= r_0 + r_1 s + \dots + r_l s^l,\end{aligned}$$

$l \leq n, m \leq n$ (то есть выполнены условия реализуемости), а скалярные функции $y(t), u(t), w(t)$ имеют смысл выхода, управления и внешнего входа, соответственно. Напомним, что такая запись эквивалентна (1.1.11):

$$y = H_{yu}(s)u + H_{yw}(s)w, \quad (1.3.11)$$

где $H_{yu}(s), H_{yw}(s)$ — передаточные функции

$$H_{yu}(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad H_{yw}(s) = \frac{R(s)}{P(s)},$$

а также записи в виде одного дифференциального уравнения

$$p_n y^{(n)} + \dots + p_0 y = q_m u^{(m)} + \dots + q_0 u + r_l w^{(l)} + \dots + r_0 w$$

в предположении, что $u(t)$ и $w(t)$ дифференцируемы соответственно m и l раз.

Выбор управления в форме обратной связи означает, что оно ищется в виде

$$u = -\frac{N(s)}{D(s)}y \doteq -C(s)y, \quad (1.3.12)$$

где $N(s), D(s)$ — полиномы

$$\begin{aligned} N(s) &= n_0 + n_1 s + \dots + n_\alpha s^\alpha, \\ D(s) &= d_0 + d_1 s + \dots + d_\beta s^\beta, \quad \beta \geq \alpha, \end{aligned}$$

а $C(s)$ — передаточная функция регулятора. Подставляя это соотношение в (1.3.11), получаем связь входа и выхода в замкнутой системе:

$$y = H_c(s)w, \quad H_c(s) = \frac{H_{yw}(s)}{1 + H_{yu}(s)C(s)} = \frac{R(s)D(s)}{Q(s)N(s) + P(s)D(s)}. \quad (1.3.13)$$

Таким образом, характеристический полином $P_c(s)$ замкнутой системы равен

$$P_c(s) = Q(s)N(s) + P(s)D(s),$$

а ее передаточная функция $H_c(s)$ легко определяется по передаточным функциям разомкнутой системы и регулятора. Мы еще раз убеждаемся в удобстве языка передаточных функций при таких операциях как замыкание системы с помощью обратной связи.

Замкнутую систему можно записывать в виде блок-схемы, изображенной на рис. 1.3.1, где $G(s)$ и $C(s)$ — передаточные функции объекта и регулятора, значок \otimes обозначает суммирующее устройство,

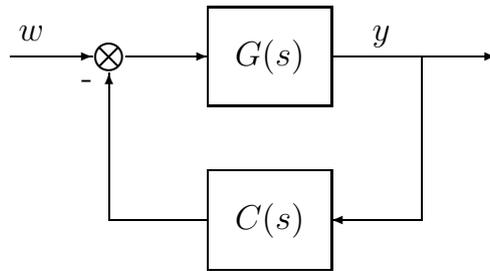


Рис. 1.3.1. Блок-схема замкнутой системы.

а знак « $-$ » соответствует минусу в формуле (1.3.12) (*отрицательная обратная связь*). Таким образом, передаточная функция замкнутой системы «объект-регулятор» равна

$$H_c(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)}. \quad (1.3.14)$$

Такого рода язык блок-схем очень нагляден и широко распространен в инженерной практике.

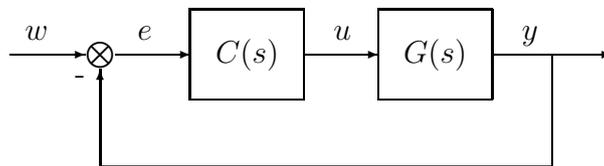


Рис. 1.3.2. Блок-схема замкнутой системы.

Чаще используется конфигурация системы, которая изображена на рис. 1.3.2, где входной сигнал w имеет смысл *задающего воздействия*, C и G — передаточные функции регулятора и объекта, а u — выход регулятора — имеет смысл управления. В этой конфигурации передаточная функция замкнутой системы (от w к y) равна

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}, \quad (1.3.15)$$

а передаточная функция от w к *невязке*

$$e \doteq w - y$$

называется *чувствительностью*:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)}. \quad (1.3.16)$$

Происхождение этого термина следующее. Пусть ΔG — возмущение передаточной функции объекта, и $\Delta G/G$ — относительное возмущение; соответственно, ΔT — вызываемое им возмущение передаточной функции T замкнутой системы, и $\Delta T/T$ — относительное возмущение. Величина

$$\lim_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G}$$

является характеристикой чувствительности передаточной функции замкнутой системы к бесконечно малым возмущениям передаточной функции объекта. Рассматривая T как функцию от G , получаем, что эта величина равна S . Поскольку $S(s) + T(s) = 1$, то $T(s)$ также называют *дополнительной чувствительностью*.

Функция $1 + G(s)C(s)$, стоящая в знаменателе (1.3.14), называется *возвратной разностью*. Позже мы увидим, что основные свойства замкнутой системы (в частности, ее устойчивость) формулируются в виде условий на возвратную разность или на обратную к ней величину — чувствительность.

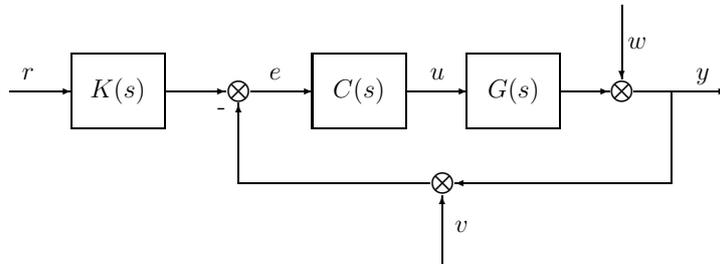


Рис. 1.3.3. Блок-схема замкнутой системы с двумя степенями свободы.

Конфигурация на рис. 1.3.2 является простейшей. Существует много других блок-схем, описывающих системы с обратной связью. Значительно более полная конфигурация показана на рис. 1.3.3. В ней регулирование объекта G осуществляется с помощью *префильтра* (иначе, *корректирующего фильтра*) K и регулятора C , поэтому применяется термин *система с двумя степенями свободы* (в отличие от *системы*

с одной степенью свободы на рис. 1.3.2). На систему воздействует задающее воздействие $r(t)$, внешние возмущения $w(t)$ и ошибки измерения $v(t)$. Для выходного сигнала $y(t)$ такой системы нетрудно получить следующее выражение:

$$y = S(s)w + R(s)r - T(s)v, \quad (1.3.17)$$

где $S(s)$ и $T(s)$ — чувствительность и дополнительная чувствительность, описываемые теми же формулами (1.3.16) и (1.3.15), а передаточная функция от r к y равна

$$R(s) = K(s)T(s).$$

Если мы хотим, чтобы влияние возмущения w на выход было мало, то — как следует из (1.3.17) — для этого нужна малость S в том или ином смысле. Аналогичным образом, чтобы ошибки измерения v мало влияли на выход (задача *фильтрации ошибок измерения*), нужна малость T . Обе эти задачи не могут быть решены одновременно, так как

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (1.3.18)$$

при всех s . Обычный компромисс заключается в том, что эти задачи рассматриваются на разных частотных интервалах, то есть $S(j\omega)$ должно быть мало для малых ω , а $T(j\omega)$ — для больших ω .

Все вышеприведенные выкладки были достаточно формальными. Чтобы придать им корректность, нужно чтобы получаемые передаточные функции удовлетворяли условию реализуемости (см. раздел 1.1.2), то есть чтобы степень полинома в числителе не превосходила степени знаменателя. На первый взгляд кажется, что это условие выполняется в силу реализуемости передаточных функций объекта. Например, в знаменателе (1.3.13) содержится член PD , а в числителе — RD ; поскольку $l = \deg R \leq \deg P = n$, то $\deg RD \leq \deg PD$. Однако может оказаться, что старшие коэффициенты у слагаемых QN и PD в знаменателе (1.3.13) имеют разные знаки, старшие члены сокращаются, и условие реализуемости нарушается. Поэтому надо наложить дополнительные требования во избежание подобного сокращения.

Лемма 1.3.1. Если в (1.3.13)

$$1 + H_{yu}(\infty)C(\infty) \neq 0$$

или в (1.3.14)

$$1 + G(\infty)C(\infty) \neq 0,$$

то соответствующие передаточные функции (1.3.13) или (1.3.14) — реализуемые.

Эти условия часто называют *корректностью* замкнутой системы.

Отметим теперь, какие особенности возникают при переходе к многомерным системам. В этом случае передаточные функции являются матричными, а сигналы — векторными (раздел 1.1.2). Имея это в виду, мы можем рассматривать те же блок-схемы на рис. 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3. При этом, разумеется, (1.3.14) и последующие формулы требуют модификации (хотя бы потому, что деление на матрицу не имеет смысла, а перемножение матриц некоммукативно). Из блок-схемы на рис. 1.3.2 имеем

$$y = G(s)C(s)e, \quad e = w - y.$$

Исключая отсюда e или y и рассматривая получающуюся систему линейных уравнений, находим

$$\begin{aligned} y &= (I + GC)^{-1}GCw \doteq Tw, \\ e &= (I + GC)^{-1}w \doteq Sw. \end{aligned}$$

Матричные функции

$$\begin{aligned} S(s) &= (I + G(s)C(s))^{-1}, \\ T(s) &= (I + G(s)C(s))^{-1}G(s)C(s) \end{aligned}$$

по-прежнему носят название чувствительности и дополнительной чувствительности; они являются передаточными функциями от входа w к невязке e и от входа w к выходу y соответственно. По-прежнему верно и соотношение, обобщающее (1.3.18):

$$S(s) + T(s) = I.$$

Аналогичным образом вводятся передаточные функции многомерной системы, соответствующей рис. 1.3.3. Требование реализуемости (лемма 1.3.1) передаточных матриц приобретает следующую форму: матрица $I + G(\infty)C(\infty)$ должна быть обратимой, — это есть условие корректности для многомерной системы.

Наконец, заметим, что критерии управляемости и наблюдаемости тесно связаны с понятием минимальной реализации многомерных передаточных функций (см. раздел 1.1.2). Справедлив следующий результат.

Теорема 1.3.3. *Реализация*

$$H(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

минимальна тогда и только тогда, когда пара (A, B) управляема, а пара (A, C) наблюдаема.

1.3.5. Примеры

Пример 1.3.1. Рассмотрим одномерную систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

где $u, y \in \mathbb{R}$. В этом случае $K = k \in \mathbb{R}$ и матрица системы, замкнутой обратной связью $u = Ky$, имеет вид

$$A + BKC = A + kBC.$$

Нетрудно построить пример неустойчивой матрицы A и матриц B и C таких, что матрица $A + kBC$ неустойчива при всех значениях скалярного параметра k . Иными словами, имеется слишком мало возможностей воздействия на систему.

Действительно, рассмотрим следующую систему в канонической форме:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 0 \ 1).$$

Матрица A имеет фробениусову форму и неустойчива, поскольку коэффициенты ее характеристического полинома (они определяются ее последней строкой) имеют разные знаки, так что необходимое условие устойчивости полинома нарушено. Матрица замкнутой соответствующей замкнутой системы

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$$

неустойчива при любом $k \in \mathbb{R}$ по той же причине. ▼

1.4. Стабилизация

В разделе 1.2 обсуждалось важнейшее понятие устойчивости линейных систем. Однако система может быть неустойчивой; в этом случае возникает задача ее стабилизации — то есть обеспечения устойчивости замкнутой системы путем введения обратной связи. Различные способы подобной стабилизации представлены в настоящем разделе.

1.4.1. Стабилизация с помощью регуляторов низкого порядка

Пусть одномерный объект записывается с помощью передаточной функции

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где

$$\begin{aligned} A(s) &= a_0 + a_1s + \dots + a_ms^m, \\ B(s) &= b_0 + b_1s + \dots + b_ns^n, \quad m \leq n. \end{aligned}$$

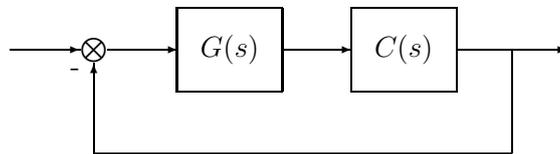


Рис. 1.4.1. Блок-схема замкнутой системы.

Мы хотим замкнуть систему с помощью регулятора (см. рис. 1.4.1)

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

так, чтобы замкнутая система была устойчивой. Как мы знаем, характеристический полином имеет вид

$$P(s) = A(s)N(s) + B(s)D(s).$$

Таким образом, нужно выбрать полиномы $N(s)$ и $D(s)$ так, чтобы $P(s)$ был гурвицевым. Сейчас рассмотрим ситуации, когда $C(s)$ имеет простейший вид и зависит от одного-двух параметров.

П-регулятор

Наиболее элементарным представляется случай, когда $C(s)$ — пропорциональный регулятор (П-регулятор): $C(s) = k$, и выбору подлежит коэффициент усиления $k > 0$. Характеристический полином имеет вид

$$P(s) = B(s) + kA(s),$$

и его корни являются функциями от k (при $k = 0$ они совпадают с корнями $B(s)$, а при $k = \infty$ — с корнями $A(s)$). Можно исследовать поведение этих корней графически; такой метод называется *методом корневого годографа*. Однако в двух важных частных задачах решение находится проще.

1. Устойчивый объект (полином $B(s)$ устойчив). Тогда разомкнутая система устойчива, и в принципе нет нужды во введении обратной связи. Однако в ряде задач обратная связь вводится для других целей; более того, важно иметь как можно более высокий коэффициент усиления. Характеристический полином $P(s) = B(s) + kA(s)$ устойчив при малых k (поскольку $B(s)$ устойчив); вопрос заключается в том, каково критическое значение k_{crit} , при котором происходит потеря устойчивости. Ответ на него немедленно следует из критерия Найквиста. Действительно, там мы рассматривали объект с передаточной функцией $G(s)$ и единичную обратную связь, а вышеприведенная задача эквивалентна объекту с передаточной функцией $kG(s)$ и также единичной обратной связью. Вспоминая формулировку критерия Найквиста для устойчивого объекта и проводя «масштабирование» вещественной оси, получаем критерий устойчивости.

Теорема 1.4.1 (Критерий устойчивости). *Объект с устойчивой передаточной функцией $G(s)$ и коэффициентом усиления k в цепи обратной связи устойчив тогда и только тогда, когда годограф Найквиста $G(j\omega)$ не охватывает точки $(-1/k, j0)$.*

Таким образом, один и тот же годограф решает вопрос об устойчивости для любых значений k . Более того, немедленно решается и задача о максимальном k_{crit} :

$$k_{\text{crit}} = -\frac{1}{\kappa},$$

где $(\kappa, 0)$ — точка самого левого пересечения $G(j\omega)$ с отрицательной вещественной полуосью, см. рис. 1.4.2-а. Это объясняет ранее введенный термин «запас по амплитуде», см. раздел 1.2.4.

Отметим, что если $G(j\omega)$ не пересекается с отрицательной полуосью, то $k_{\text{crit}} = \infty$, см. рис. 1.4.2-b, то есть возможны сколь угодно большие коэффициенты усиления, сохраняющие устойчивость замкнутой системы.

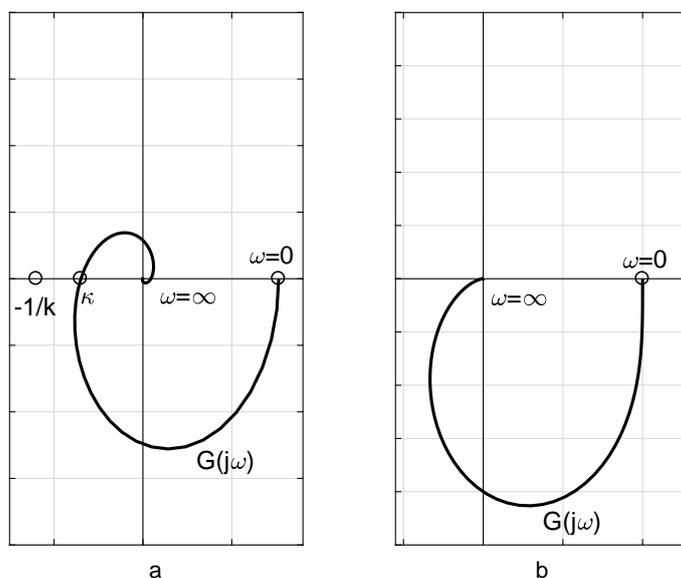


Рис. 1.4.2. Критический коэффициент усиления.

2. Минимально-фазовый объект. *Минимально-фазовым* называется объект, для которого полином $A(s)$ устойчив, $a_m > 0$. Как и ранее, характеристический полином равен

$$P(s) = B(s) + kA(s) = k(A(s) + \varepsilon B(s)), \quad \varepsilon = \frac{1}{k}, \quad (1.4.1)$$

поэтому $P(s)$ устойчив тогда и только тогда, когда

$$P_\varepsilon(s) \doteq A(s) + \varepsilon B(s)$$

устойчив. На первый взгляд, ситуация аналогична рассмотренной выше: $A(s)$ устойчив, и можно ожидать, что при $0 \leq \varepsilon < 1/k_{\text{crit}}$ сохраняется устойчивость. Однако в действительности такой вывод, вообще говоря, не верен. Дело в том, что степень m полинома A может быть меньше степени n полинома B , и даже при малых $\varepsilon > 0$ устойчивость

может теряться; следующий более точный результат учитывает этот эффект. Построим обратный годограф Найквиста

$$H(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

Он всюду определен, так как если $A(s)$ устойчив, то $A(j\omega) \neq 0$ при любом ω . Найдем ω^* из условия:

$$\operatorname{Im} H(j\omega) = 0, \quad \operatorname{Re} H(j\omega) < 0, \quad \operatorname{Re} H(j\omega) \rightarrow \max$$

(то есть найдем корни ω_i уравнения $\operatorname{Im} H(j\omega) = 0$ и среди них найдем тот, для которого $\operatorname{Re} H(j\omega)$ отрицательно и наиболее близко к 0) и положим $\nu \doteq -\operatorname{Re} H(j\omega^*)$; если такого ω^* нет, то примем $\nu \doteq 0$.

Теорема 1.4.2. Пусть выполнено любое из условий:

1. $n = m$.
2. $n = m + 1, b_n > 0$.
3. $n = m + 2, b_n > 0, b_{n-1} > 0, a_m b_{n-1} > a_{m-1} b_n$.

Тогда при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{\text{crit}} \doteq \nu$ (то есть при $k \geq \frac{1}{\nu}$) замкнутая система (1.4.1) устойчива. В остальных случаях полином $P_\varepsilon(s)$ неустойчив при малых ε .

Таким образом, заведомо можно стабилизировать систему с помощью П-регулятора в двух случаях: для устойчивых объектов (с помощью малого коэффициента усиления) и для минимально-фазовых объектов (с помощью большого коэффициента усиления).

D-разбиение

Стабилизировать объект с помощью П-регулятора можно лишь в редких случаях; как правило, приходится прибегать к помощи регуляторов более сложной структуры. Простейшим из них является пропорционально-интегральный регулятор (ПИ-регулятор):

$$C(s) = k_1 + \frac{k_2}{s}. \quad (1.4.2)$$

Иногда рассматривают и другие аналогичные формы регуляторов, например,

$$C(s) = \frac{k_1}{s + k_2}, \quad C(s) = \frac{k_1}{1 + k_2 s},$$

и т.д. Важно, что они зависят лишь от двух параметров k_1, k_2 , поэтому и характеристический полином будет зависеть линейно от этих же двух параметров:

$$P(s, k) = P_0(s) + k_1 P_1(s) + k_2 P_2(s), \quad k = (k_1, k_2). \quad (1.4.3)$$

Например, для ПИ-регулятора (1.4.2) выполняется

$$P_0(s) = B(s)s, \quad P_1(s) = A(s)s, \quad P_2(s) = A(s).$$

Оказывается, для характеристического полинома вида (1.4.3) можно указать области на плоскости (k_1, k_2) , в которых он будет обладать заданным количеством корней в левой и правой полуплоскости (в частности, область, отвечающая всем корням в левой полуплоскости, соответствует устойчивой системе). Этот метод называется *D-разбиением плоскости параметров*; его идея заключается в следующем. Пусть при каком-либо значении k степень полинома $P(s, k)$ равна n , и он имеет $m \leq n$ корней в левой полуплоскости и $n - m$ корней — в правой. Как при изменении k может измениться расположение корней? Ясно, что это может произойти только в одном из следующих случаев:

- а) изменится степень многочлена $P(s, k)$;
- б) вещественный корень $P(s, k)$ перейдет из одной полуплоскости в другую, то есть станет равным нулю;
- в) пара комплексных корней перейдет из одной полуплоскости в другую, то есть $P(s, k)$ будет иметь пару чисто мнимых корней $\pm j\omega$.

Таким образом, границы областей *D-разбиения* описываются параметрическим уравнением

$$P(j\omega, k) = 0 \quad (1.4.4)$$

(соответствующем случаям б) и в)) и уравнением

$$a_n(k) = 0, \quad (1.4.5)$$

где $a_n(k)$ — старший коэффициент $P(s, k)$ (случай а)).

Уравнение (1.4.4) при фиксированном ω — это два линейных уравнения (отвечающих вещественной и мнимой частям $P(j\omega, k)$) относительно двух переменных k_1, k_2 . В общей ситуации его решение определяет одну точку $k(\omega)$ на плоскости параметров, при изменении ω от 0 до ∞ она описывает некоторую кривую. Кроме того, в вырожденном случае (когда линейные уравнения в (1.4.4) линейно зависимы) возникают так называемые особые прямые: одному значению ω отвечает

прямая на плоскости параметров. Наконец, условие (1.4.5) также определяет прямую линию.

Итак, процедура D -разбиения следующая. Проводится кривая $k(\omega)$ (1.4.4), прямая, отвечающая условию (1.4.5) и особые прямые; они разбивают плоскость k на области. Каждая из этих областей соответствует определенному расположению нулей полинома $P(s, k)$. Среди этих областей находится и область устойчивости; впрочем она может оказаться пустой — тогда характеристический полином неустойчив при любом значении k .

«Расшифровку» расположения нулей в каждой из областей можно делать по-разному. Например, начать с конкретного полинома $P(s, k^0)$ и для него выяснить, сколько его нулей лежит в левой, а сколько — в правой полуплоскости, а затем из соответствующей ему области переходить к соседним, пользуясь тем, что кривой $k(\omega)$ соответствует переход пары корней через мнимую ось, а особым прямым — переход одного корня через начало координат. Впрочем, можно в каждой из областей выбрать по точке и найти корни соответствующих полиномов; то же расположение корней сохраняется и для всех остальных полиномов из области.

Дискретные системы

Рассмотрим, как видоизменяются вышеприведенные методы в случае дискретных систем. Пусть дискретный объект задан в виде передаточной функции

$$G(z) = \frac{A(z)}{B(z)},$$

где z обозначает оператор сдвига назад. При этом под устойчивостью полинома будем понимать расположение его корней вне единичного круга, то есть $|\lambda_i| > 1$. Регулятор

$$C(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

в цепи обратной связи приводит к характеристическому полиному замкнутой системы

$$P(z) = A(z)N(z) + B(z)D(z);$$

в частности, при $C(z) = k$ имеем

$$P(z) \doteq P_k(z) = kA(z) + B(z).$$

Дискретные аналоги теорем 1.4.1 и 1.4.2 имеют следующий вид.

Теорема 1.4.3. Если объект $G(z)$ устойчив (то есть полином $B(z)$ устойчив), то при $0 \leq k \leq k_{\text{crit}}$ полином $P_k(z)$ устойчив. Если объект $G(z)$ минимально-фазовый (то есть полином $A(z)$ устойчив), то при $k \geq k_{\text{crit}}$ полином $P_k(z)$ устойчив. При этом

$$k_{\text{crit}} = \min\left\{-\frac{1}{G(e^{j\omega})} : \operatorname{Im} G(e^{j\omega}) = 0, \operatorname{Re} G(e^{j\omega}) < 0\right\}$$

в первом случае и

$$k_{\text{crit}} = \max\left\{-\frac{1}{G(e^{j\omega})} : \operatorname{Im} G(e^{j\omega}) = 0, \operatorname{Re} G(e^{j\omega}) < 0\right\}$$

— во втором.

Таким образом, аргумент $j\omega$ в непрерывном случае заменяется на $e^{j\omega}$ в дискретном; с этим мы уже встречались и раньше. Более существенно, что в теореме 1.4.3, в отличие от ее непрерывных аналогов, нет никаких требований к степеням полиномов A и B . Дело в том, что в дискретном случае у полинома

$$P_\varepsilon \doteq A + \varepsilon B, \quad \deg A = m, \quad \deg B = n > m,$$

при малом ε любого знака m корней близки к корням A , а $n - m$ корней «приходят из бесконечности» (то есть велики по модулю). Поэтому если A — устойчивый полином, то и P_ε будет устойчивым при малых ε (именно здесь мы пользуемся определением устойчивости полиномов в форме $|\lambda_i| > 1$ — «приходящие из бесконечности» корни являются устойчивыми). В остальном доказательство теоремы 1.4.3 проводится так же, как и в непрерывном случае. Дискретное D -разбиение осуществляется так же, как и для непрерывных полиномов, с заменой аргумента $j\omega$ на $e^{j\omega}$.

1.4.2. Обратная связь по состоянию

Выше было рассмотрено важнейшее понятие устойчивости линейных систем. Если система неустойчива, можно попытаться добиться устойчивости замкнутой системы путем введения обратной связи.

Во многих случаях с помощью обратной связи можно не только стабилизировать систему, но добиться любого заданного спектра матрицы замкнутой системы (так называемая *задача модального управления*). Иначе говоря, можно получить любой желаемый характеристический

полином замкнутой системы. Приведем основной результат такого типа для систем со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.4.6)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$.

Будем искать управление в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = k^\top x, \quad k \in \mathbb{R}^n;$$

тогда матрица замкнутой системы примет вид

$$A_c = A + bk^\top. \quad (1.4.7)$$

Пусть Λ — произвольный набор из n чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющий условию: если $\lambda_i \in \Lambda$, то и $\lambda_i^* \in \Lambda$. Тогда полином

$$p(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0$$

имеет вещественные коэффициенты. Верно и обратное — множество корней любого полинома с вещественными коэффициентами удовлетворяет указанному условию.

Теорема 1.4.4. *Если пара (A, b) управляема, то найдется такой вектор $k \in \mathbb{R}^n$, что у матрицы A_c вида (1.4.7) собственные значения совпадают с наперед заданным набором Λ .*

Доказательство. Как известно, управляемую систему со скалярным управлением можно привести к канонической форме путем невырожденного преобразования переменных.

А именно, при линейном преобразовании

$$\tilde{x} = Tx$$

с невырожденной матрицей

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} A^{n-1}b & \dots & Ab & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

система (1.4.6) приобретает вид

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u,$$

где

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.8)$$

Если искать управление в форме

$$u = \tilde{k}^\top \tilde{x}, \quad \tilde{k} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_0 \\ \tilde{k}_1 \\ \vdots \\ \tilde{k}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

матрица замкнутой системы будет иметь вид

$$\tilde{A}_c = \tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ -a_0 + \tilde{k}_0 & -a_1 + \tilde{k}_1 & \cdots & -a_{n-1} + \tilde{k}_{n-1} \end{pmatrix}$$

и ее характеристический полином имеет вид

$$s^n + (a_{n-1} - \tilde{k}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_0 - \tilde{k}_0).$$

Выбирая

$$\tilde{k}_i = a_i - p_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

получаем, что его коэффициенты совпадают с коэффициентами полинома $p(s)$, то есть собственные значения матрицы \tilde{A}_c совпадают с набором Λ .

Наконец, взяв $k = T^{-1}\tilde{k}$, имеем

$$\tilde{A}_c = \tilde{A} + \tilde{b}\tilde{k}^\top = TAT^{-1} + Tb k^\top T^{-1} = T(A + bk^\top)T^{-1} = TA_c T^{-1}.$$

Поскольку определители прямой T и обратной матрицы T^{-1} взаимнообратны, то характеристические полиномы матриц в левой и правой частях равенства одинаковы, следовательно собственные значения матриц \tilde{A}_c и A_c совпадают. ■

Следствие 1.4.1. *В предположениях теоремы 1.4.4 замкнутую систему можно сделать устойчивой с любым расположением собственных значений ее матрицы в левой полуплоскости.*

В аналитической форме выражение для искомого регулятора k дается следующей формулой (так называемой *формулой Аккермана*):

$$k = -e^\top U^{-1} p(A),$$

где U — матрица управляемости системы (1.4.6), p — желаемый характеристический полином замкнутой системы, а

$$e = (0 \ 0 \ \dots \ 1)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Практическая применимость этой формулы ограничена скалярными системами невысокого порядка.

Теорема 1.4.4 справедлива и для систем со многими управлениями; приведем (без доказательства) соответствующий результат.

Теорема 1.4.5. *Пусть пара (A, B) управляема, тогда матрица $A_c = A + BK$ замкнутой системы*

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.4.9}$$

за счет выбора обратной связи по состоянию $u = Kx$ может приобрести любое расположение собственных значений; в частности, замкнутая система может быть сделана устойчивой.

Важно отметить, что если в системах со скалярным управлением выбор регулятора K при обеспечении заданного спектра единственный, то в системах с векторным управлением имеется бесконечное множество решений.

Заметим также, что утверждения теорем 1.4.4 и 1.4.5 справедливы и в обратную сторону: если выбором матрицы регулятора K можно добиться любого расположения собственных значений матрицы $A + BK$, то пара (A, B) управляема.

В связи с задачей модального управления введем еще одно понятие. Говорят, что система *стабилизируема*, если с помощью статической линейной обратной связи по состоянию она может быть сделана устойчивой, то есть собственные значения матрицы замкнутой системы могут быть расположены слева от мнимой оси.

Ясно, что стабилизируемость предъявляет к системе более слабые требования, чем устойчивость. В самом деле, пусть нужно добиться

лишь устойчивости системы, а не заданного расположения ее собственных значений в левой полуплоскости. Тогда управляемости не требуется — достаточно управлять системой лишь в ее *неустойчивом подпространстве*. Соответствующий результат представлен следующей леммой.

Лемма 1.4.1. *Система управления*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

стабилизируема тогда и только тогда, когда матрица Хаутуса

$$(A - \lambda_i I \quad B)$$

имеет ранг n для всех неустойчивых собственных значений λ_i матрицы A .

Таким образом, управляемость влечет стабилизируемость, но не наоборот. Отвлекаясь от излишних деталей, везде в дальнейшем будем предполагать, что система управляема, тем более что это требование неограничительно.

Совершенно аналогично формулируются (и доказываются) аналоги теорем 1.4.4 и 1.4.5 для дискретного случая. При этом вместо непрерывной системы (1.4.9) рассматривается дискретная система управления

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k.$$

Некоторый новый эффект, которого можно здесь добиться, связан с тем, что у матрицы $A_c = A + BK$ все собственные значения можно сделать нулевыми, то есть ее характеристический полином будет иметь вид $z^n = 0$. В силу теоремы Кэли – Гамильтона тогда $A_c^n = 0$. Иными словами, можно добиться *конечной продолжительности* процесса.

Теорема 1.4.6. *Пусть пара (A, B) управляема. Тогда существует такая обратная связь $u = Kx$, что для замкнутой системы*

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k$$

будет иметь место $x_n = 0$ при любом x_0 .

1.4.3. Обратная связь по выходу

Вернемся к обсуждавшейся выше стабилизации с помощью обратной связи по выходу; мы видели, что в общем случае статический регулятор в этих условиях синтезировать не удастся. Сейчас покажем,

каким образом, имея информацию о выходе системы и предполагая наличие у нее свойства наблюдаемости, можно эффективно оценивать вектор состояния и использовать эту оценку для построения стабилизирующего управления.

Рассмотрим наблюдаемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $l < n$.

Линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n,$$

в которое входит рассогласование выхода y системы (1.4.10) и его прогноза $\hat{y} = C\hat{x}$ при некоторой постоянной матрице $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$, называется *наблюдателем Льюенбергера*.

Заметим, что *ошибка наблюдения*

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad \tilde{e}(t) \in \mathbb{R}^n$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC)e. \tag{1.4.11}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.4.2. *Если пара (A, C) наблюдаема, то выбором матрицы L можно назначить любой спектр матрицы $A - LC$; в частности, система*

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

может быть сделана устойчивой.

Доказательство. В соответствии с замечанием 1.3.4, наблюдаемость пары (A, C) эквивалентна управляемости пары (A^\top, C^\top) . Следовательно, согласно теореме 1.4.5, система

$$\dot{e} = (A^\top + C^\top K)e$$

может приобрести любое расположение собственных значений.

Поскольку транспонирование матрицы не меняет ее собственные значения, выбором K собственные значения матрицы

$$(A^\top + C^\top K)^\top = A + K^\top C$$

также можно расположить произвольным образом. Полагая

$$L = -K^T,$$

завершаем доказательство леммы. \blacksquare

Таким образом, поскольку пара (A, C) наблюдаема, матрицу L можно выбрать так, чтобы система (1.4.11) стала устойчивой. В этом случае

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

при любом начальном рассогласовании $e(0)$. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x(t),$$

то есть вектор \hat{x} будет являться *асимптотической оценкой состояния* рассматриваемой системы.

Воспользуемся наблюдателем Люенбергера для построения стабилизирующей обратной связи по выходу. Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

с неизвестным фазовым состоянием x и доступным выходом y . Будем предполагать, что пара (A, B) управляема, пара (A, C) наблюдаема.

Будем искать управление в виде *обратной связи по состоянию при неполных измерениях*

$$u = K\hat{x}, \tag{1.4.13}$$

где наблюдатель \hat{x} удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}). \tag{1.4.14}$$

Фактически, вместо неизвестного состояния x берется его оценка \hat{x} , полученная с помощью динамического наблюдателя по измеряемому выходу.

Замыкая уравнения (1.4.12) и (1.4.14) обратной связью (1.4.13), получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x}, \\ \dot{\hat{x}} &= (A + BK - LC)\hat{x} + LCx. \end{aligned}$$

Введя в рассмотрение ошибку наблюдения $e = x - \hat{x}$, полученные соотношения перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x - BKe, \\ \dot{e} &= (A - LC)e. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к расширенной системе

$$\dot{z} = A_c z \quad (1.4.15)$$

относительно вектора

$$z = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Далее, блочная матрица

$$A_c = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix}$$

системы (1.4.15) имеет те же собственные значения, что и стоящие на ее диагонали матрицы $A + BK$ и $A - LC$. Согласно теореме 1.4.5 и лемме 1.4.2, собственные значения этих матриц могут быть выбраны произвольно.

Таким образом, приходим к следующему результату.

Теорема 1.4.7. *Пусть система*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx \end{aligned}$$

управляема и наблюдаема. Тогда ее можно стабилизировать с помощью динамической обратной связи

$$u = K\hat{x}$$

с использованием наблюдателя

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}).$$

Для дискретных систем наблюдатель Люенбергера строится аналогичным образом; в разделе 2.3.1 будет показано, как соответствующая техника работает в задачах фильтрации для систем с возмущениями.

Итак, для управляемых систем всегда можно добиться стабилизации в виде статической обратной связи по состоянию, а для управляемых и наблюдаемых систем — с помощью динамической обратной связи с использованием наблюдателя. Подчеркнем, что и задача модального управления, и построение асимптотического наблюдателя возможны только при полной параметрической определенности матриц системы. При наличии шумов в измерениях этот наблюдатель может выполнять двойную функцию: и наблюдать, и фильтровать помехи (фильтр Калмана, см. раздел 2.3.2).

Линейный динамический регулятор

Существуют способы построения динамической обратной связи по выходу, не предполагающие построения наблюдателя.

Рассмотрим линейную систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

где все величины имеют тот же смысл, что и выше, но при этом в уравнение для выхода введено управление. В дальнейшем покажем, что такая форма записи естественна, когда накладываются неявные ограничения на величину управляющего воздействия.

Идея, лежащая в основе линейного динамического регулятора, заключается в том, что в качестве управления принимается выход некоторой линейной динамической системы, на вход которой подается выход y системы (1.4.16). Таким образом, *динамический регулятор по выходу* описывается следующими линейными уравнениями, подобными уравнениям объекта:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, & x_r(0) &= 0, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned}$$

где $x_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ — вектор состояния регулятора, $A_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{n_r \times l}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p \times n_r}$, $D_r \in \mathbb{R}^{p \times l}$ — матричные параметры регулятора. Здесь n_r — *порядок регулятора*; как правило, принимается $n_r \leq n$ (*регулятор пониженного порядка*), а если $n_r = n$, то говорим о *регуляторе полного порядка*.

Задача состоит в том, чтобы, включив регулятор в цепь обратной связи, как схематично показано на рис. 1.4.3, найти значения матричных параметров A_r , B_r , C_r , D_r , при которых замкнутая система будет устойчива.

Решение такой задачи заведомо существует, если система (1.4.16) управляема и наблюдаема.

Понятно, что динамические регуляторы представляют более широкий класс по сравнению с теми, что рассматривались выше (например, при $n_r = 0$ имеем статический регулятор по выходу, при $C = I$ получаем динамический регулятор по полному вектору состояния и т.д.), поэтому и возможности их гораздо шире. Так, с помощью динамического регулятора можно получать более точные оценки в задачах оптимального управления (см. раздел 1.5), добиваться лучшего качества переходного процесса.

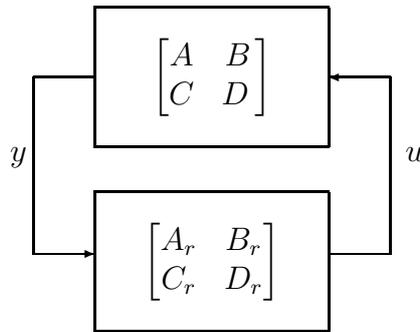


Рис. 1.4.3. Схема линейного динамического регулятора по выходу в цепи обратной связи.

1.4.4. Квадратичная стабилизация

Вернемся к так называемой *квадратичной стабилизации*; мы начали ее обсуждать в разделе 1.2.2. Напомним, она основывается на том, что устойчивость системы эквивалентна наличию у нее квадратичной функции Ляпунова вида

$$V(x) = x^\top Qx, \quad Q \succ 0. \quad (1.4.17)$$

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1.4.18)$$

с управляемой парой (A, B) , где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Замкнув ее линейной обратной связью по состоянию

$$u = Kx, \quad (1.4.19)$$

придем к замкнутой системе

$$\dot{x} = A_c x \quad (1.4.20)$$

с матрицей $A_c = A + BK$.

Как мы знаем, см. раздел 1.2.2, функция (1.4.17) является функцией Ляпунова для системы (1.4.20) тогда и только тогда, когда

$$A_c^\top Q + QA_c \prec 0,$$

то есть когда найдутся матрицы K и $Q \succ 0$ такие, что

$$(A + BK)^\top Q + Q(A + BK) \prec 0. \quad (1.4.21)$$

Неравенство (1.4.21) нелинейно (и невыпукло!) относительно матричных переменных Q и K . Однако можно свести задачу к линейной с помощью следующего приема, который будет систематически использоваться в дальнейшем.

Домножив неравенство (1.4.21) слева и справа на матрицу

$$P = Q^{-1},$$

получим

$$(A + BK)P + P(A + BK)^{\top} \prec 0$$

или

$$AP + PA^{\top} + BKP + PK^{\top}B^{\top} \prec 0.$$

Введем вспомогательную матричную переменную

$$Y = KP,$$

исключая K . В силу $P \succ 0$, матрица K восстанавливается единственным образом:

$$K = YP^{-1}.$$

В результате приходим к матричному неравенству

$$AP + PA^{\top} + BY + Y^{\top}B^{\top} \prec 0,$$

линейному по переменным Y и P .

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 1.4.8. Пусть матрицы \hat{P} и \hat{Y} удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$AP + PA^{\top} + BY + Y^{\top}B^{\top} \prec 0, \quad P \succ 0. \quad (1.4.22)$$

Тогда регулятор (1.4.19) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (1.4.18), а квадратичная форма

$$V(x) = x^{\top}\hat{P}^{-1}x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Из доказательства видно, что для управляемых систем разрешимость линейных матричных неравенств (1.4.22) эквивалентна возможности стабилизировать систему с помощью обратной связи по состоянию. Более того, теорема предлагает очень простую параметризацию всех стабилизирующих регуляторов через решения этого линейного матричного неравенства и служит основой синтеза.

Из утверждения теоремы вытекает следующее важное наблюдение. Рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top \hat{P}^{-1} x \leq 1\}$$

с центром в начале координат и матрицей $\hat{P} \succ 0$. Тогда если начальное условие x_0 системы (1.4.18) лежит в этом эллипсоиде, то ее траектория будет оставаться в нем для всех моментов времени; это следует из того, что квадратичная форма $x^\top \hat{P}^{-1} x$ является функцией Ляпунова для данной системы. Это свойство будем называть *инвариантностью* полученного эллипсоида относительно начальных условий.

Если же начальное условие x_0 задано, то для построения инвариантного эллипсоида необходимо потребовать, чтобы он содержал начальную точку, то есть

$$x_0^\top P^{-1} x_0 \leq 1,$$

или в форме линейного матричного неравенства:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (1.4.23)$$

и это неравенство следует добавить к ограничениям (1.4.22) в теореме 1.4.8.

Заметим, что иногда нам нужно не просто стабилизировать систему, а гарантировать желаемую степень $\sigma > 0$ ее устойчивости. В этом случае первое из неравенств (1.4.22) заменится на *нестрогое* линейное матричное неравенство

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \preceq -2\sigma P \quad (1.4.24)$$

в формулировке теоремы 1.4.8.

Ограничения на управление

Обычно на практике требуется, чтобы управляющие воздействия были тем или иным образом ограничены; в разделе 1.3.1 уже затрагивался этот вопрос, когда накладывались интегральные ограничения на

величину управления. Покажем, каким образом ограничения на величину управления можно учитывать в рамках описанной выше задачи квадратичной стабилизации.

Будем накладывать следующее ограничение на вектор управления, которое должно выполняться вдоль траектории системы:

$$|u(t)| \leq \mu \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (1.4.25)$$

где $\mu > 0$ — уровень допустимых управлений, ресурс управления.

В следующей лемме дается достаточное условие для выполнения этого ограничения, которое формулируется в виде линейного матричного неравенства относительно матричных переменных P и Y , фигурирующих в теореме 1.4.8. Это неравенство будет использоваться нами и далее, при рассмотрении систем с внешними возмущениями.

Лемма 1.4.3. Пусть матрицы P и Y удовлетворяют линейным матричным неравенствам (1.4.22) и (1.4.23). Тогда выполнение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succ 0 \quad (1.4.26)$$

гарантирует выполнение ограничения (1.4.25) на траектории системы (1.4.18), (1.4.19).

Доказательство. Поскольку $u = Kx$, то мы представим ограничение (1.4.25) в виде

$$x^\top K^\top Kx \leq \mu^2.$$

Рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top Qx \leq 1\}$$

с матрицей $Q = P^{-1} \succ 0$, удовлетворяющей (1.4.22) и (1.4.23), и потребуем выполнения условия

$$x^\top K^\top Kx \leq \mu^2 \quad \text{при } x^\top Qx \leq 1. \quad (1.4.27)$$

Для выполнения (1.4.27) необходимо и достаточно

$$\frac{1}{\mu^2} K^\top K \preceq Q.$$

Далее, поскольку $K = YP^{-1}$, то полученное матричное неравенство примет вид

$$\frac{1}{\mu^2} P^{-1} Y^\top Y P^{-1} \preceq P^{-1}.$$

Домножив его слева и справа на матрицу P , получаем

$$\frac{1}{\mu^2} Y^\top Y \preceq P,$$

или, по лемме Шура,

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succ 0. \quad \blacksquare$$

Достаточность этого условия следует из (1.4.27): выполнение ограничения (1.4.25) требуется не только вдоль траектории системы, но и в любой точке эллипсоида с матрицей P , содержащем траекторию.

Таким образом, для построения квадратично стабилизирующего регулятора при наличии ограничения на управление, теорема 1.4.8 модифицируется следующим образом. К неравенствам (1.4.22), гарантирующим стабилизацию, добавляются линейные матричные неравенства (1.4.23) и (1.4.26). При этом эллипсоид с полученной матрицей \hat{P} будет инвариантным, содержащим начальное условие x_0 , а ограниченность управления вдоль траектории гарантируется условием (1.4.26).

Ясно, что не для всякого начального условия x_0 систему можно стабилизировать управлением заданного уровня. Вопрос о минимально возможном значении величины μ решается с помощью следующего очевидного развития леммы 1.4.3.

Лемма 1.4.4. Пусть $\hat{\gamma}$ — решение задачи оптимизации

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succ 0, \quad \begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \gamma I \end{pmatrix} \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярной переменной γ .

Тогда при

$$\mu \geq \mu_{\min} \doteq \sqrt{\hat{\gamma}}$$

существует регулятор $u = Kx$, стабилизирующий систему (1.4.18) и удовлетворяющий ограничению (1.4.25).

Обратимся теперь к случаю дискретного времени; для него справедлив результат, аналогичный теореме 1.4.8. В самом деле, рассмотрим систему

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1.4.28)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, с управлением, выбираемым в виде

$$u_k = Kx_k. \quad (1.4.29)$$

Тогда, как было показано выше, функция

$$V(x) = x^\top P^{-1}x, \quad P \succ 0$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы с матрицей A_c тогда и только тогда, когда

$$A_c P A_c^\top - P \prec 0.$$

Преобразуя это линейное матричное неравенство с помощью леммы Шура и вводя, как и выше, новую матричную переменную $Y = KP$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.4.9. Пусть матрицы \hat{P} и \hat{Y} удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} P & AP + BY \\ PA^\top + Y^\top B^\top & P \end{pmatrix} \succ 0, \quad P \succ 0.$$

Тогда регулятор (1.4.29) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (1.4.28), а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Таким образом, и в дискретном, и в непрерывном времени отыскание стабилизирующего регулятора может формулироваться в терминах линейных матричных неравенств и сводиться к решению задачи разрешимости.

Описанный выше подход к стабилизации, основанный на поиске квадратичной функции Ляпунова (и потому называемый *квадратичной стабилизацией*) не дает решения в явном виде, а сводит задачу

к решению линейных матричных неравенств. Такая техника оказывается особенно эффективной для задач робастной стабилизации, когда требуется стабилизировать систему в условиях неопределенности (а также при наличии внешних возмущений и в разнообразных задачах оптимизации).

1.4.5. Примеры

Пример 1.4.1. Рассмотрим цепочку n одинаковых звеньев первого порядка с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{1 + Ts}, \quad T > 0,$$

соединенных обратной связью с П-регулятором (рис. 1.4.4).

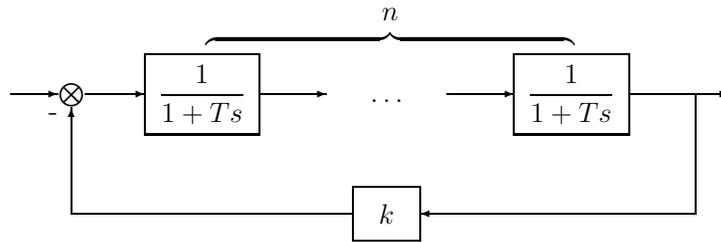


Рис. 1.4.4. Последовательное соединение звеньев первого порядка с П-регулятором в цепи обратной связи.

Тогда передаточная функция разомкнутой системы (см. (1.1.15) для последовательного соединения) равна

$$G(s) = \frac{1}{(1 + Ts)^n}.$$

Полином $B(s) = (1 + Ts)^n$, очевидно, устойчив (все его корни равны $-1/T < 0$) и

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + Tj\omega)^n} = \frac{1}{z^n},$$

$$z = 1 + Tj\omega, \quad |z| = \sqrt{1 + T^2\omega^2}, \quad \varphi = \arctg T\omega,$$

то есть

$$G(j\omega) = (1 + T^2\omega^2)^{-n/2} (\cos n\varphi - j \sin n\varphi).$$

Точки пересечения годографа с вещественной осью отвечают значениям φ , для которых $\sin n\varphi = 0$, то есть $n\varphi = l\pi$, где $l = 0, \pm 1, \dots$. При этом величина $\operatorname{Re} G(j\omega)$ для таких точек равна $\pm(1 + T^2\omega^2)^{-n/2}$. Нас интересуют точки с отрицательной вещественной частью и, в частности, та из них, для которой величина $-\operatorname{Re} G(j\omega)$ максимальна; при $n > 2$ она соответствует $l = 1$. Тогда

$$\varphi = \frac{\pi}{n}, \quad \operatorname{arctg}(T\omega_{\text{crit}}) = \frac{\pi}{n}, \quad T\omega_{\text{crit}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

то есть

$$\kappa = -(1 + T^2\omega_{\text{crit}}^2)^{-n/2} = -(1 + \operatorname{tg}^2 \pi/n)^{-n/2} = -(\cos \pi/n)^n.$$

Окончательно получаем значение максимального коэффициента усиления

$$k_{\text{crit}} = \frac{1}{(\cos \pi/n)^n}, \quad n > 2. \quad (1.4.30)$$

Нетрудно проверить, что при $n = 1, 2$ замкнутая система устойчива при любом $k > 0$ (действительно, характеристический полином $P(s) = (1 + Ts)^n + k$ при $n = 1, 2$ и любом $k > 0$ гурвицев).

Например, при $n = 3$ из формулы (1.4.30) получаем

$$k_{\text{crit}} = 1/(0,5)^3 = 8;$$

это же следует из критерия устойчивости для кубического полинома $P(s) = (1 + Ts)^3 + k$, а именно, $9T^3 > (1 + k)T^3$, откуда $k < 8$. \blacktriangledown

Пример 1.4.2. Требуется стабилизировать объект второго порядка

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 1}$$

(он не является ни устойчивым, ни минимально-фазовым) ПИ-регулятором

$$C(s) = k_1 + \frac{k_2}{s}.$$

Характеристический полином равен

$$\begin{aligned} P(s, k) &= s(s^2 + 1) + (s - 1)(k_1s + k_2) = \\ &= s^3 + k_1s^2 + (1 - k_1 + k_2)s - k_2. \end{aligned}$$

Его старший коэффициент не зависит от k , поэтому прямая (1.4.5) отсутствует. Равенство $P(j\omega, k) = 0$ принимает вид

$$-k_2 - k_1\omega^2 = 0,$$

$$\omega(1 - k_1 + k_2 - \omega^2) = 0.$$

Если $\omega = 0$, то решением является особая прямая

$$k_2 = 0.$$

При $\omega \neq 0$ точка $k(\omega)$ определяется однозначно. При этом нет необходимости находить эту зависимость, а можно просто исключить параметр $\omega^2 = 1 - k_1 + k_2$ из второго уравнения и подставить в первое, тогда уравнение кривой будет задано в явной, а не параметрической форме:

$$k_2 + k_1(1 - k_1 + k_2) = 0, \quad k_2 = \frac{k_1^2 - k_1}{1 + k_1}.$$

Это уравнение гиперболы, однако условие $\frac{k_2}{k_1} = -\omega^2 < 0$ выделяет ее часть, лежащую во II и IV квадрантах. Найденная часть гиперболы вместе с прямой $k_2 = 0$ осуществляет D -разбиение плоскости k на 4 области (рис. 1.4.5).

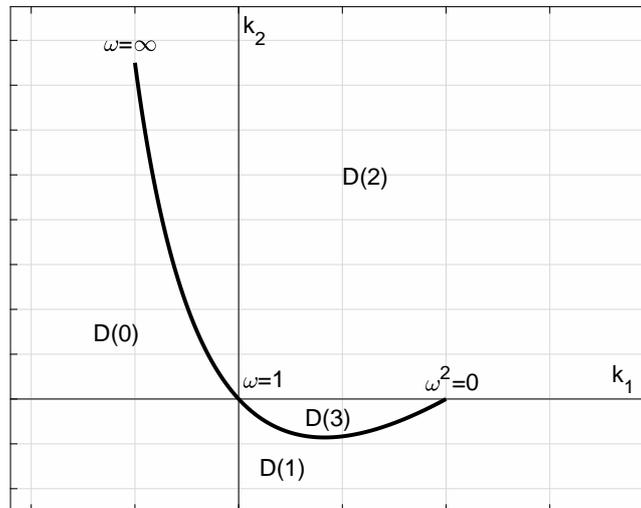


Рис. 1.4.5. D -разбиение в примере 1.4.2.

Обозначения $D(0)$, $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$ показывают, сколько корней в левой полуплоскости у всех полиномов, у которых параметры k лежат в данной области. Небольшая область $D(3)$ отвечает устойчивым полиномам. Взяв любые значения коэффициентов ПИ-регулятора внутри этой области, получим устойчивую замкнутую систему. ▼

Для данного примера удалось найти стабилизирующий ПИ-регулятор. Однако в целом проблема синтеза стабилизирующих регуляторов заданной структуры весьма сложна; сказать заранее, можно ли данный объект сделать устойчивым с помощью регулятора низкого порядка, не удастся.

Пример 1.4.3. В качестве примера вновь рассмотрим задачу управления двухмассовой системой, см. пример 1.1.8. Пусть параметры системы единичны:

$$k_1 = k_2 = 1, \quad m_1 = m_2 = 1,$$

а в качестве начальной точки возьмем

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Зададимся также желаемой степенью устойчивости замкнутой системы:

$$-\max_i \operatorname{Re} \lambda(A_c) = \sigma = 1.$$

В соответствии с теоремой 1.4.8 получаем регулятор

$$\widehat{K} = (-30,6292 \quad -12,0670 \quad -7,3333 \quad -51,3909),$$

стабилизирующий систему со степенью устойчивости

$$\widehat{\sigma} = \sigma(A + B\widehat{K}) = 1,3378.$$

Эта величина оказывается заметно больше желаемой $\sigma = 1$, поскольку регулятор \widehat{K} получен в результате решения задачи *допустимости* линейного матричного неравенства (1.4.24).

В приведенном решении никак не учитывалась величина управляющего воздействия; решим теперь задачу заново, наложив на него явные ограничения. Для этого сначала определим величину μ_{\min} минимально допустимого ресурса управления, как это предписано леммой 1.4.4 (учитывая при этом требование к степени устойчивости в форме (1.4.24)); получаем $\mu_{\min} = 32,2736$. Положим теперь

$$\mu = 1,2\mu_{\min} = 38,7284$$

и воспользуемся леммой 1.4.3 (также учитывая (1.4.24)). В результате получаем

$$P = \begin{pmatrix} 138,3194 & 35,5645 & -144,3467 & -68,2231 \\ * & 24,0833 & -5,8715 & -25,2779 \\ * & * & 347,2916 & 39,5763 \\ * & * & * & 41,1862 \end{pmatrix},$$

$$Y = (54,1847 \quad -14,9767 \quad -500,0120 \quad 12,9178),$$

что дает стабилизирующий регулятор

$$\tilde{K} = (-10,2069 \quad 0,9351 \quad -4,3130 \quad -11,8753),$$

норма которого почти вчетверо меньше нормы регулятора \hat{K} . При этом степень устойчивости замкнутой системы оказывается равной

$$\tilde{\sigma} = \sigma(A + B\tilde{K}) = 1,0661,$$

причем везде внутри инвариантного эллипсоида с матрицей P гарантировано ограничение на управление

$$|\tilde{K}x| \leq 38,7284.$$

В действительности управление не превышает заметно меньшей величины 18,7043, поскольку лемма 1.4.3 дает лишь достаточные условия, см. рис. 1.4.6, на котором приведены графики управления для системы замкнутой регуляторами \hat{K} (пунктир) и \tilde{K} (сплошная линия).

На рис. 1.4.7 показано изменение со временем нормы решения системы, замкнутой регуляторами \hat{K} (пунктир) и \tilde{K} (сплошная линия).

Обратим внимание на явно выраженный эффект всплеска (см. раздел 2.1.4) траектории системы, замкнутой регулятором \hat{K} : норма решения возрастает более чем в семь раз, прежде чем начать убывать, — довольно большая величина для исследуемой маломерной системы. В тоже время при регуляторе \tilde{K} наблюдается почти вдвое меньший всплеск.

Итак, введение ограничения на управление в данном примере приводит к гораздо меньшим коэффициентам усиления, придает замкнутой системе степень устойчивости, существенно более близкую к желаемой, и заметно ослабляет эффект всплеска. ▼

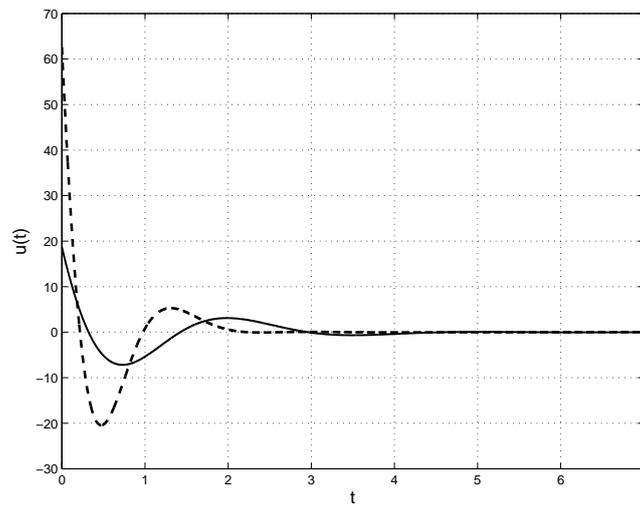


Рис. 1.4.6. Графики управления $u(t)$ в системе из примера 1.4.3 при различных регуляторах.

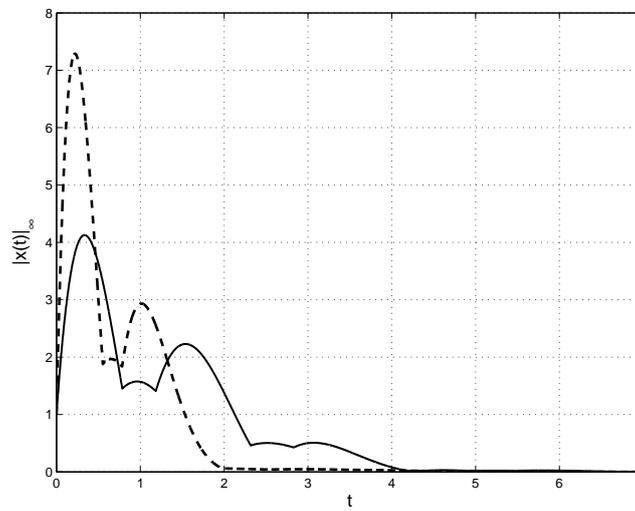


Рис. 1.4.7. Графики нормы решения системы из примера 1.4.3 для различных регуляторов.

1.5. Показатели качества

Условия устойчивости замкнутой системы, представленные в предыдущих разделах, являются необходимыми требованиями при выборе закона управления. Однако стабилизирующих управлений много, и мы можем выбрать среди них то, которое оптимально с точки зрения некоторого критерия, характеризующего качество управления. Большинство таких «инженерных» показателей качества управления связаны с реакцией замкнутой системы на типовые входные сигналы, и мы их рассмотрим в главе 2.

В этом разделе мы рассмотрим ряд важнейших критериев оптимальности иного типа и обсудим технику нахождения оптимального управления.

1.5.1. Задачи оптимизации управления на конечном интервале

В разделе 1.3.1 было найдено программное управление

$$\hat{u}(t) = -B^T e^{A^T(T-t)} W^{-1}(T) e^{AT} x_0, \quad (1.5.1)$$

переводящее линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.5.2)$$

за заданное время T из заданного начального состояния $x(0) = x_0$ в начало координат: $x(T) = 0$.

Важно отметить, что управление $\hat{u}(t)$ является оптимальным по критерию энергии

$$J(u) \doteq \int_0^T |u(t)|^2 dt \quad (1.5.3)$$

(где $|u(t)|$ — 2-норма) среди всех кусочно-непрерывных управлений, которые переводят систему из заданного начального состояния в нуль (*управление с минимальной энергией*). Это означает, что если $u(t)$ — любое другое допустимое управление, то $J(\hat{u}) \leq J(u)$.

Действительно, вычитая друг из друга решения системы (1.5.2) при $u(t)$ и при $\hat{u}(t)$, получим

$$\int_0^T e^{A(T-t)} B(u(t) - \hat{u}(t)) dt = 0,$$

откуда после домножения на $W^{-1}(T) e^{AT} x_0$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\int_0^T e^{A(T-t)} B(u(t) - \hat{u}(t)) dt, W^{-1}(T) e^{AT} x_0 \right) = \\ &= \int_0^T (u(t) - \hat{u}(t))^\top B^\top e^{A^\top(T-t)} W^{-1}(T) e^{AT} x_0 dt = \\ &= - \int_0^T (u(t) - \hat{u}(t))^\top \hat{u}(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T |u(t)|^2 dt = \int_0^T |u(t) - \hat{u}(t) + \hat{u}(t)|^2 dt = \\ &= \int_0^T (|u(t) - \hat{u}(t)|^2 + |\hat{u}(t)|^2 + 2(u(t) - \hat{u}(t))^\top \hat{u}(t)) dt = \\ &= \int_0^T |u(t) - \hat{u}(t)|^2 dt + \int_0^T |\hat{u}(t)|^2 dt \geq \int_0^T |\hat{u}(t)|^2 dt = J(\hat{u}). \end{aligned}$$

Пользуясь формулами (1.5.1) и (1.3.5), нетрудно вычислить и само значение функционала энергии $J(\hat{u})$:

$$J(\hat{u}) = x_0^\top \left(\int_0^T e^{-A\tau} B B^\top e^{-A^\top \tau} d\tau \right)^{-1} x_0,$$

откуда видно, что чем меньше время T процесса, тем большие управления приходится применять, так что ограничение вида

$$J(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt \leq c^2$$

на величину функционала энергии может нарушиться.

Для произвольных точек $x(0) = x_0$ и $x(T) = x_1$ управление, переводящее систему из x_0 в x_1 и минимизирующее функционал энергии (1.5.3), имеет вид

$$u(t) = -B^\top e^{A^\top(T-t)} W^{-1}(T)(e^{AT} x_0 - x_1);$$

в частности, при $x_1 = 0$ приходим к $\hat{u}(t)$, а при $x_0 = 0$ получаем управление минимальной энергии

$$\tilde{u}(t) = B^\top e^{A^\top(T-t)} W^{-1}(T)x_1,$$

переводящее систему из начала координат в заданное состояние x_1 .

Еще одна важная задача, предполагающая поиск управления, оптимального по некоторому критерию качества, состоит в поиске управления, минимизирующего на решениях линейной системы функционал

$$J = (c, x(T)).$$

В разделе 2.1.3 будет введено понятие множества достижимости и показано, что эта задача эквивалентна задаче вывода траектории системы на границу множества достижимости системы с заданной нормалью c , а также дано ее явное решение.

В следующем разделе мы рассмотрим еще одну задачу, связанную с поиском оптимального управления.

1.5.2. Линейно-квадратичный регулятор

В этом разделе рассмотрим ряд важнейших критериев оптимальности и обсудим технику получения оптимального управления.

Задана линейная стационарная система в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (1.5.4)$$

с фиксированным начальным условием

$$x(0) = x_0. \quad (1.5.5)$$

Требуется найти закон управления в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (1.5.6)$$

который минимизирует *квадратичный критерий качества*

$$J = \int_0^{\infty} [(Rx, x) + (Su, u)] dt. \quad (1.5.7)$$

Здесь $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — положительно определенные матрицы, так что $J \geq 0$. Очевидно, что для того чтобы функционал J был конечен, необходимо, чтобы замкнутая система была устойчива; это же условие и достаточно для конечности J . Критерий (1.5.7) гарантирует малость как состояний замкнутой системы, так и применяющихся управлений (за счет больших управлений можно добиться, чтобы $x(t)$ быстро убывал, однако тогда член (Su, u) будет велик). Матрицы R и S играют роль *весовых коэффициентов*, учитывающих оба указанных фактора.

Приведенная выше задача является одной из основных в теории управления; в отечественной литературе она иногда называется *задачей об аналитическом конструировании регуляторов*, в западной — *задачей о линейно-квадратичном регуляторе* (LQR — Linear Quadratic Regulator).

Ввиду важности задачи, рассмотрим несколько подходов к ее решению. Каждый из них представляет самостоятельный интерес и может быть обобщен на другие постановки задачи; кроме того, аналитическая форма получаемого решения также различна. Всюду далее принято следующее предположение: пара (A, B) управляема, а матрицы R и S положительно определены. Это предположение может быть ослаблено, но мы проанализируем задачу в этом простейшем случае.

Принцип максимума

Видоизменим несколько постановку задачи, считая конечной продолжительность T процесса; при этом не будем требовать, чтобы управление имело вид (1.5.6), а будем искать его в форме программного управления $u(t)$:

$$\min_u J_T(u), \quad J_T(u) = \int_0^T [(Rx, x) + (Su, u)] dt, \quad (1.5.8)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Нетрудно показать, что функционал $J_T(u)$ имеет единственную точку минимума $u_T(t)$ на гильбертовом пространстве $L_2(0, T)$ — про-

пространстве измеримых функций $u(t)$, определенных при $t \in [0, T]$ и имеющих ограниченную 2-норму: $\|u\|_2 \doteq \left(\int_0^T |u(t)|_2^2 dt\right)^{1/2} < \infty$.

Итак, пусть $x_T(t)$ — решение линейной системы (1.5.4), соответствующее управлению $u_T(t)$:

$$\dot{x}_T(t) = Ax_T(t) + Bu_T(t), \quad x_T(0) = x_0.$$

Дадим оптимальному управлению $u_T(t)$ некоторое приращение $\delta u(t)$: $u \doteq u_T + \delta u$; тогда оптимальная траектория $x_T(t)$ также получит приращение $\delta x(t)$: $x \doteq x_T + \delta x$, которое будет описываться дифференциальным уравнением с нулевым начальным условием:

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u, \quad \delta x(0) = 0, \quad (1.5.9)$$

а функционал J_T будет иметь вид

$$J_T(u) = J_T(u_T) + 2 \int_0^T [(Rx_T, \delta x) + (Su_T, \delta u)] dt + \varepsilon,$$

где остаточный член ε допускает оценку $|\varepsilon| \leq C\|\delta u\|_2^2$.

Поскольку u_T — точка минимума $J_T(u)$, то $J_T(u_T) \leq J_T(u)$ для любого u , и из вышеприведенного выражения следует, что при малых $\|\delta u\|_2$ имеем

$$\delta J \doteq \int_0^T [(Rx_T, \delta x) + (Su_T, \delta u)] dt \geq 0.$$

Рассмотрим теперь так называемую *сопряженную систему*

$$\dot{\psi} = -A^\top \psi - Rx_T, \quad \psi(T) = 0.$$

Подставляя в δJ значение Rx_T из этой системы и проводя преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_0^T [(-\dot{\psi} - A^\top \psi, \delta x) + (Su_T, \delta u)] dt = \\ &= \int_0^T [(\psi, \delta \dot{x}) - (\psi, A\delta x) + (Su_T, \delta u)] dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^T [(\psi, B\delta u) + (Su_T, \delta u)] dt = \int_0^T (B^\top \psi + Su_T, \delta u) dt.$$

Здесь мы осуществили интегрирование по частям с учетом граничных условий $\psi(T) = 0$, $\delta x(0) = 0$ и подставили $\delta \dot{x}$ из уравнения (1.5.9).

Линейный функционал $\int (a, \delta u) dt$ может быть одного знака для всех малых δu , лишь если $a = 0$. Поэтому из условия $\delta J \geq 0$ получаем

$$B^\top \psi + Su_T = 0,$$

то есть

$$u_T = -S^{-1}B^\top \psi. \quad (1.5.10)$$

Итак, оптимальное решение u_T , x_T является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}_T &= Ax_T - BS^{-1}B^\top \psi, & x_T(0) &= x_0, \\ \dot{\psi} &= -A^\top \psi - Rx_T, & \psi(T) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

Таким образом, отыскание оптимального программного управления $u_T(t)$ задачи (1.5.8) свелось к решению краевой задачи (1.5.11) для системы $2n$ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных x_T и ψ ; тогда u_T находится из (1.5.10). Если вернуться к исходной задаче (1.5.4), (1.5.5), (1.5.7) на интервале $[0, \infty)$, то можно ожидать, что ее решение u_∞ , x_∞ находится из системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_\infty &= Ax_\infty - BS^{-1}B^\top \psi, & x_\infty(0) &= x_0, \\ \dot{\psi} &= -A^\top \psi - Rx_\infty, & \psi(\infty) &= 0, \end{aligned}$$

однако предельный переход $T \rightarrow \infty$ нуждается в обосновании (мы дадим его несколько позже, в следующем разделе).

Описанный выше подход может быть применен для гораздо более общей задачи оптимального управления с нелинейным нестационарным уравнением, неквадратичным функционалом и при наличии ограничений на управление:

$$\begin{aligned} \min \int_0^T F(x, u, t) dt, \\ \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

В этом случае рассматривается сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = -f_x(x^0, u^0, t)^\top \psi + F_x(x^0, u^0, t), \quad \psi(T) = 0, \quad (1.5.12)$$

где нижний индекс x означает дифференцирование по x , и составляется функция (часто называемая *гамильтонианом*)

$$H(x, u, t) \doteq f(x, u, t)^\top \psi - F(x, u, t).$$

Тогда, если x^0, u^0 — решение задачи (1.5.12), то

$$H(x^0, u^0, t) = \max_{u \in U} H(x^0, u, t)$$

для всех $0 \leq t \leq T$. Это утверждение называется *принципом максимума*; его применение к линейно-квадратичной задаче (1.5.8) приводит к оптимальному решению (1.5.10), (1.5.11).

Более подробно принцип максимума будет освещаться в третьей главе в общем виде для нелинейных систем.

Уравнение Риккати

Задача (1.5.11) представляет определенные трудности, состоящие в том, что это не обычная задача Коши для линейных дифференциальных уравнений, а краевая задача, так как условия для $x_T(t)$ и $\psi(t)$ заданы в граничных точках $t = 0$ и $t = T$. Попробуем ее решить с помощью специального приема; такой же прием применяется в методе прогонки, используемом в вычислительной математике для решения линейных краевых задач. Именно, попробуем искать линейную зависимость между ψ и x :

$$\psi(t) = P(t)x(t), \quad (1.5.13)$$

где симметричная матрица $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ подлежит определению. Подставляя это выражение в уравнения (1.5.11), получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - BS^{-1}B^\top Px, & x(0) &= x_0, \\ \dot{P}x + P\dot{x} &= A^\top Px - Rx, & P(T)x(T) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая \dot{x} , находим

$$\dot{P}x + PAx - PBS^{-1}B^\top Px + A^\top Px + Rx = 0, \quad P(T)x(T) = 0.$$

Такое уравнение заведомо выполняется (при любых x), если

$$\dot{P} + A^\top P + PA - PBS^{-1}B^\top P + R = 0, \quad P(T) = 0. \quad (1.5.14)$$

Это матричное обыкновенное дифференциальное уравнение (с начальным условием при $t = T$). Оно называется *дифференциальным матричным уравнением Риккати*. Отметим, что это уравнение нелинейно

по P . Таким образом, процедура построения оптимального управления u_T в данном подходе следующая:

1. Решается уравнение (1.5.14) и находится $P(t)$.
2. Управление u_T находится из (1.5.10), (1.5.13):

$$u_T(t) = -S^{-1}B^T P(t)x(t) \doteq K(t)x(t). \quad (1.5.15)$$

Итак, в данном случае оказалось, что оптимальное программное управление можно выразить в форме обратной связи по состоянию, однако матричный коэффициент усиления $K(t)$ зависит от времени t . Можно показать, что при сделанных предположениях (пара (A, B) управляема, $R \succ 0$, $S \succ 0$) решение уравнения Риккати обладает следующими свойствами:

1. При любом $T > 0$ решение существует и единственно для всех $t \in [0, T]$.

2. $P(t) \succ 0$ для любых $0 \leq t \leq T$.

3. Если $P_T(t)$ — решение уравнения Риккати при заданном T , то $P_{T_2}(t) \prec P_{T_1}(t)$ при $T_2 > T_1$.

4. При $T \rightarrow \infty$ будет $P_T(t) \rightarrow P_\infty$, где (не зависящая от t) матрица P_∞ является единственным положительно определенным решением алгебраического матричного уравнения Риккати

$$PA + A^T P - PBS^{-1}B^T P + R = 0. \quad (1.5.16)$$

С учетом свойств 3 и 4 и формулы (1.5.15) мы получаем, что при $T = \infty$ оптимальное управление приобретает форму стационарной обратной связи

$$u(t) = Kx(t), \quad K = -S^{-1}B^T P, \quad (1.5.17)$$

где P — решение (1.5.16). Итак, для решения исходной задачи (1.5.4), (1.5.5), (1.5.7) о линейно-квадратичном регуляторе достаточно решить алгебраическое уравнение Риккати (1.5.16) и с помощью найденной матрицы $P \succ 0$ построить оптимальную обратную связь в виде (1.5.17).

Оптимальность управления (1.5.17) может быть доказана и непосредственно; а именно, если обозначить его через $u^*(t)$, то для любого другого (даже программного) управления $u(t)$ можно путем несложных преобразований получить формулу

$$J = x_0^T P x_0 + \int_0^\infty |u(t) - u^*(t)|^2 dt.$$

Отсюда следует важный вывод: оптимальное значение функционала J равно

$$J_{\min} = x_0^\top P x_0$$

и является квадратичной функцией от начальных значений состояния.

Решение с помощью линейных матричных неравенств

Для решения линейно-квадратичной задачи можно применить и иную технику, которая использует аппарат линейных матричных неравенств и приводит к аналогичным результатам.

Для дальнейшего нам понадобится следующий результат, известный под названием *лемма Беллмана*.

Лемма 1.5.1 (Лемма Беллмана). *Значение функционала*

$$J = \int_0^{\infty} x^\top R x dt, \quad R \succ 0,$$

на решениях системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

с устойчивой матрицей A равно

$$J = x_0^\top Q x_0,$$

где матрица Q удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$A^\top Q + QA = -R. \quad (1.5.18)$$

Замечание 1.5.1. Пусть матрица $Q \succ 0$ является решением матричного неравенства Ляпунова

$$A^\top Q + QA \preccurlyeq -R. \quad (1.5.19)$$

В силу леммы И.2 из Приложения И имеем $Q \succ \widehat{Q}$, где \widehat{Q} — решение уравнения Ляпунова (1.5.18), поэтому

$$J = x_0^\top \widehat{Q} x_0 \leq x_0^\top Q x_0.$$

Следовательно, точное значение функционала J можно искать как решение задачи

$$x_0^\top Q x_0 \longrightarrow \min$$

при ограничении (1.5.19). ▼

Вернемся к исходной задаче. Система (1.5.4), замкнутая обратной связью (1.5.6), принимает вид

$$\dot{x} = (A + BK)x,$$

и на ее решениях имеем

$$J = \int_0^{\infty} (x^{\top} R x + x^{\top} K^{\top} S K x) dt = \int_0^{\infty} x^{\top} (R + K^{\top} S K) x dt.$$

Воспользовавшись леммой Беллмана 1.5.1 (точнее, замечанием к ней), получаем, что минимальное значение функционала J предоставляет решение задачи

$$x_0^{\top} Q x_0 \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$(A + BK)^{\top} Q + Q(A + BK) \preceq -R - K^{\top} S K.$$

Домножив последнее матричное неравенство слева и справа на матрицу $P = Q^{-1}$, получаем

$$(A + BK)P + P(A + BK)^{\top} + PRP + PK^{\top}SKP \preceq 0,$$

или, дважды применяя лемму Шура,

$$\begin{pmatrix} (A + BK)P + P(A + BK)^{\top} & P & PK^{\top} \\ P & -R^{-1} & 0 \\ KP & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Наконец, введя вспомогательную матричную переменную $Y = KP$, приходим к линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + BY + Y^{\top}B^{\top} & P & Y^{\top} \\ P & -R^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (1.5.20)$$

Таким образом, на решениях полученного матричного неравенства нам следует минимизировать величину

$$x_0^{\top} Q x_0 = x_0^{\top} P^{-1} x_0,$$

которая нелинейна по переменной P . Введем скалярную переменную γ и запишем неравенство

$$x_0^{\top} P^{-1} x_0 \leq \gamma$$

в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Замечание 1.5.2. Наконец, поскольку весовая матрица R положительно определена, то в силу следствия Д.2 из Приложения Д имеем

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0$$

для всех P и Y , удовлетворяющих (1.5.20). Это означает, что регулятор $K = YP^{-1}$ будет стабилизирующим для системы (1.5.4). ▼

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.5.1. Пусть \hat{P}, \hat{Y} — решение задачи полуопределенного программирования

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top & P & Y^\top \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -S^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (1.5.21)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярной переменной γ .

Тогда регулятор (1.5.6) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (1.5.4); при этом квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1} x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы, а величина $x_0^\top \hat{P}^{-1} x_0$ определяет минимальное значение функционала (1.5.7) на решениях системы (1.5.4) с начальным условием x_0 .

Оптимизационная задача, сформулированная в теореме 1.5.1, представляет собой задачу полуопределенного программирования относительно двух матричных переменных P и Y и одной скалярной переменной γ .

Мы увидим (см. раздел 2.6.2), что описанный подход полезен при решении робастной линейно-квадратичной задачи, когда в матрицах системы присутствует неопределенность (ср. с квадратичной стабилизацией). В этом случае одним уравнением Риккати обойтись не удастся; вместо этого будем оптимизировать квадратичный критерий на решениях соответствующих *неравенств*.

1.5.3. Примеры

Пример 1.5.1. Вновь вернемся к двухмассовой системе (см. примеры 1.1.8 и 1.4.3) и построим для нее линейно-квадратичный регулятор, полагая весовые матрицы единичными:

$$R = S = I.$$

Воспользовавшись теоремой 1.5.1, находим

$$P = \begin{pmatrix} 0,5847 & 0,2782 & -0,2891 & -0,2743 \\ * & 0,4491 & -0,0784 & -0,1546 \\ * & * & 0,6993 & -0,0005 \\ * & * & * & 0,3745 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$K = \begin{pmatrix} -1,7212 & 0,3070 & -2,1078 & -1,1366 \end{pmatrix}$$

и значение функционала

$$\gamma = 16,6635.$$

При этом имеем степень устойчивости матрицы замкнутой системы

$$\sigma(A_c) = -\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A + BK) = 0,3738.$$

Глава 2

Линейная теория: внешние возмущения и неопределенность

В первой главе книги рассматривались системы управления, в которых отсутствовали неопределенности как во входах (внешние возмущения), так и в описании самой системы. Однако, как уже неоднократно указывалось, такая ситуация является идеализированной. В реальных задачах неизбежно присутствует неопределенность, а используемое управление должно быть работоспособно при наличии неопределенности. Такое управление называется робастным.

Мы переходим к изучению робастной теории управления (разделы 2.4–2.7), но вначале рассмотрим эффект воздействия внешних возмущений и возможность их подавления (разделы 2.1–2.3).

В конце каждого раздела главы будут рассмотрены соответствующие примеры.

2.1. Внешние возмущения: анализ

2.1.1. Реакция на типовые возмущения

С первых лет развития автоматической теории регулирования многие характеристики системы описывались с помощью реакций на типовые возмущения — единичный скачок и гармонический сигнал. По существу, эти решения уже были получены ранее, в разделе 1.1.

Единичный скачок

Рассмотрим устойчивую систему с одним входом и одним выходом

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= 0, \\ y &= c^\top x, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где $D \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, а $w(t)$ — скалярный единичный скачок, то есть

$$w(t) \equiv 1 \quad \text{для всех } 0 \leq t < \infty.$$

Тогда, пользуясь формулой (1.1.4) для решения линейных систем, имеем

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} D d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau D = e^{At} \left(\int_0^t e^{-A\tau} d\tau \right) D.$$

В соответствии с правилами вычисления матричной экспоненты (см. Приложение В) имеем

$$\int_0^t e^{-A\tau} d\tau = A^{-1}(I - e^{-At})$$

(матрица A обратима, так как система устойчива) и получаем

$$x(t) = A^{-1}(e^{At} - I)D.$$

Поскольку (в силу гурвицевости матрицы A) $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$, то окончательно получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_\infty = -A^{-1}D.$$

Эта величина называется *установившимся значением состояния системы*. Ясно, что оно является точкой равновесия системы (2.1.1) при единичном входе: если $Ax + D = 0$, то $x = x_\infty$.

Величина

$$y_\infty = c^\top x_\infty = -c^\top A^{-1}D$$

называется *установившимся выходом*.

В ряде случаев желательно, чтобы величина y_∞ была не больше некоторого порога

$$|y_\infty| \leq \alpha.$$

Этот показатель называют *точностью* системы, и при выборе обратной связи стараются выполнить его.

Под *перерегулированием* понимается всплескообразная реакция устойчивой системы на единичное входное воздействие $w(t) \equiv 1$ при нулевых начальных условиях. При этом *перерегулированием* также называют величину

$$\eta = \frac{\max_{t \geq 0} |x(t)| - |x_\infty|}{|x_\infty|} = \frac{\max_{t \geq 0} |x(t)|}{|x_\infty|} - 1,$$

которая характеризует максимальное отклонение траектории возмущенной системы от установившегося значения¹. Эта величина также может служить показателем качества регулирования.

Гармонический сигнал

Реакция линейной системы (2.1.1) на комплексный гармонический сигнал

$$w(t) = a e^{j\omega t}$$

подробно рассматривалась в разделе 1.1.2. Напомним, что установившееся значение состояния $\bar{x}(t)$ в этом случае равно

$$\bar{x}(t) = (j\omega I - A)^{-1} D w(t),$$

а для установившегося значения выхода имеем

$$\bar{y}(t) = c^\top (j\omega I - A)^{-1} D w(t).$$

Таким образом, на выходе получаем гармонический сигнал с той же частотой ω и амплитудой, увеличенной в $|c^\top (j\omega I - A)^{-1} D|$ раз. Эти параметры также характеризуют поведение замкнутой системы.

2.1.2. Устойчивость при наличии внешних возмущений

Используя изложенные в первой главе результаты, теперь можно оценить решения системы

$$\dot{x} = Ax + w \tag{2.1.2}$$

¹Иногда под перерегулированием понимается величина $\eta \cdot 100\%$, измеряемая в процентах превышения установившегося режима.

при наличии L_∞ -ограниченных внешних возмущений:

$$|w(t)| \leq \gamma \quad \text{для всех } t \geq 0. \quad (2.1.3)$$

Без потери общности будем полагать $\gamma = 1$, что может быть достигнуто соответствующей нормировкой вектора состояния системы.

Теорема 2.1.1. *Для того чтобы решение $x(t)$ системы (2.1.2) было ограниченным для всех ограниченных внешних возмущений вида (2.1.3), необходимо и достаточно, чтобы матрица A была устойчива.*

Доказательство. *Необходимость.* Покажем, что система (2.1.2) с неустойчивой матрицей A имеет неограниченное решение.

В силу теоремы 1.2.1, если матрица A неустойчива, найдется ее собственное значение λ такое, что

$$\operatorname{Re} \lambda \geq 0.$$

Если λ вещественно, положим $w(t) \equiv r$, где r — нормированный вещественный собственный вектор, отвечающий λ :

$$Ar = \lambda r, \quad |r| = 1.$$

При $x_0 = r$ решение системы (2.1.2) будет иметь вид

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} r + \int_0^t e^{A(t-\tau)} r d\tau = \\ &= e^{\lambda t} r + r \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} d\tau = \left(e^{\lambda t} + \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right) r \end{aligned}$$

для $\lambda \neq 0$, поэтому

$$|x(t)| = e^{\lambda t} + \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

Если же $\lambda = 0$, то

$$x(t) = r + r \int_0^t d\tau = (1 + t)r$$

И ВНОВЬ

$$|x(t)| = t + 1 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Пусть теперь собственное значение λ комплексно:

$$\lambda = u + jv, \quad u \geq 0,$$

а $r = g + jh$ — отвечающий ему собственный вектор, нормированный следующим образом:

$$Ar = \lambda r, \quad |g| + |h| = 1.$$

Возьмем $x_0 = \alpha_0 g + \beta_0 h$. Тогда уравнение движения вектора $x(t)$ на плоскости, порожденной векторами g и h , принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha u + \beta v + \varphi, & \alpha(0) &= \alpha_0, \\ \dot{\beta} &= -\alpha v + \beta u + \psi, & \beta(0) &= \beta_0, \end{aligned}$$

где (см. доказательство необходимости в теореме 1.2.1)

$$x(t) = \alpha(t)g + \beta(t)h,$$

а внешнее возмущение выбрано в виде $w(t) = \varphi(t)g + \psi(t)h$.

Обозначая $\rho(t) = \alpha^2(t) + \beta^2(t)$, имеем

$$\dot{\rho} = 2u\rho + \varphi\alpha(t) + \psi\beta(t).$$

Выберем

$$\varphi(t) = \text{sign } \alpha(t),$$

$$\psi(t) = \text{sign } \beta(t),$$

полагая $\text{sign } 0 = 1$; в силу нормировки вектора r внешнее возмущение удовлетворяет ограничению (2.1.3). Тогда

$$\dot{\rho} = 2u\rho + |\alpha(t)| + |\beta(t)|, \quad \rho(0) = \alpha_0^2 + \beta_0^2.$$

Поскольку $\alpha(t), \beta(t) \not\equiv 0$, то $\dot{\rho} > 0$ и $\rho \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$. Следовательно, при выбранном внешнем возмущении

$$|x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty,$$

то есть и в этом случае система (2.1.2) имеет неограниченное решение.

Достаточность. Для общности рассуждений будем рассматривать систему несколько более общего вида, чем (2.1.2), а именно:

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad (2.1.4)$$

и покажем, что устойчивость матрицы A достаточна для ограниченности всех ее решений.

Пусть, как и ранее, $V(x) = x^\top Qx$, где $Q \succ 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$A^\top Q + QA = -R, \quad R \succ 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{d}{dt}V(x(t)) = (Ax + Dw)^\top Qx + x^\top Q(Ax + Dw) = \\ &= x^\top (A^\top Q + QA)x + w^\top D^\top Qx + x^\top QDw = \\ &= -x^\top Rx - \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}Q^{1/2}Dw - \sqrt{\gamma}Q^{1/2}x\right)^\top \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}Q^{1/2}Dw - \sqrt{\gamma}Q^{1/2}x\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma}w^\top D^\top QDw + \gamma x^\top Qx \leq -\frac{\ell}{M}V + \frac{1}{\gamma}w^\top D^\top QDw + \gamma V, \end{aligned}$$

где $M = \lambda_{\max}(Q) > 0$, $\ell = \lambda_{\min}(R)$, а $\gamma > 0$ произвольно (в левой части последнего неравенства использован стандартный прием дополнения до полного квадрата). Таким образом,

$$\dot{V} \leq -\left(\frac{\ell}{M} - \gamma\right)V + \frac{1}{\gamma}\|D^\top QD\|,$$

поскольку $w^\top D^\top QDw \leq \|D^\top QD\|$ при $|w| \leq 1$.

Пусть $0 < \gamma < \frac{\ell}{M}$, тогда при

$$\alpha = \frac{\ell}{M} - \gamma > 0, \quad \beta = \frac{1}{\gamma}\|D^\top QD\|,$$

для функции $v(t) = V(x(t))$ имеем

$$\dot{v}(t) \leq -\alpha v(t) + \beta.$$

Интегрируя это неравенство с учетом $v(t) \geq 0$, находим

$$v(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} + \left(v_0 - \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\beta}{\alpha},$$

откуда

$$v(t) \leq \max\left\{\frac{\beta}{\alpha}, v_0\right\},$$

где $v_0 = x_0^\top Q x_0$.

Поэтому

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 = x^\top(t)x(t) &\leq \frac{1}{m} x^\top(t)Qx(t) = \frac{1}{m} v(t) \leq \\ &\leq \frac{1}{m} \max\left\{\frac{\beta}{\alpha}, x_0^\top Q x_0\right\} \leq \frac{1}{m} \max\left\{\frac{\beta}{\alpha}, M|x_0|^2\right\}, \end{aligned}$$

где $m = \lambda_{\min}(Q)$, что и гарантирует ограниченность решений системы (2.1.4). ■

Итак, гурвицевость матрицы A необходима и достаточна для того, чтобы решение возмущенной системы оставалось ограниченным для ограниченных возмущений. Это свойство иногда называется *устойчивостью по входу*.¹

Теперь оценим поведение решений дискретной системы при наличии l_∞ -ограниченных внешних возмущений:

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k, \quad (2.1.5)$$

где

$$|w_k| \leq \gamma \quad \text{при всех } k = 0, 1, \dots \quad (2.1.6)$$

Вновь без потери общности будем полагать $\gamma = 1$, что может быть достигнуто соответствующей нормировкой вектора состояния x_k .

Теорема 2.1.2. *Для того чтобы решение x_k системы (2.1.5) было ограниченным для всех ограниченных внешних возмущений вида (2.1.6), необходимо и достаточно, чтобы матрица A была шуровской.*

Доказательство. *Необходимость.* Как и в непрерывном случае, покажем, что у системы (2.1.5) с неустойчивой матрицей A существует неограниченное решение.

Предположим, что матрица A не является шуровской; тогда найдется ее собственное значение λ такое, что $|\lambda| \geq 1$.

¹В англоязычной литературе устойчивые по входу системы называются BIBO (Bounded-Input, Bounded-Output, то есть *ограниченный вход–ограниченный выход*).

Пусть λ вещественно, а r — нормированный собственный вектор, отвечающий λ :

$$Ar = \lambda r, \quad |r| = 1.$$

Выберем в качестве начального условия $x_0 = r$; при этом, согласно (1.1.6), решение системы (2.1.5) будет иметь вид

$$x_k = A^k r + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} w_k.$$

При $w_k \equiv r$ получаем

$$x_k = A^k r + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} r = \lambda^k r + r \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i-1} = (1 + \lambda + \dots + \lambda^k) r,$$

поэтому при $|\lambda| > 1$ имеем

$$|x_k| = \left| \frac{\lambda^{k+1} - 1}{\lambda - 1} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty,$$

а при $\lambda = 1$, очевидно, $|x_k| = k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$.

Если же $\lambda = -1$, положив $w_k = (-1)^k r$ при том же начальном условии, получаем

$$x_k = A^k r + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} (-1)^i r = (-1)^k r + r \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} = (-1)^{k+1} (k-1) r,$$

и вновь $|x_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. Следовательно, система (2.1.5) имеет неограниченное решение.

Пусть теперь λ — комплексное число: $\lambda = u + jv$, а $r = g + jh$ — соответствующий собственный вектор, нормированный следующим образом:

$$Ar = \lambda r, \quad |g| + |h| = 1;$$

при этом

$$Ag = ug - vh, \quad Ah = vg + uh.$$

Возьмем $x_0 = \alpha_0 g + \beta_0 h$ и выберем внешнее возмущение в виде

$$w_k = \varphi_k g + \psi_k h,$$

тогда вектор x_k будет оставаться в двумерном подпространстве, натянутом на вектора g и h :

$$x_k = \alpha_k g + \beta_k h,$$

где α_k и β_k удовлетворяют разностным уравнениям

$$\alpha_{k+1} = u\alpha_k + v\beta_k + \varphi_k,$$

$$\beta_{k+1} = -v\alpha_k + u\beta_k + \psi_k,$$

с начальными условиями α_0 и β_0 соответственно.

Обозначая $\rho_k = \alpha_k^2 + \beta_k^2$, получаем, что

$$\rho_{k+1} = |\lambda|^2 \rho_k + \varphi_k^2 + 2\varphi_k(u\alpha_k + v\beta_k) + \psi_k^2 + 2\psi_k(-v\alpha_k + u\beta_k).$$

Положим

$$\varphi_k = \text{sign}(u\alpha_k + v\beta_k),$$

$$\psi_k = \text{sign}(-v\alpha_k + u\beta_k),$$

где $\text{sign } 0 = 1$; при этом, в силу нормировки вектора r , внешнее возмущение будет удовлетворять условию (2.1.6). Тогда

$$\rho_{k+1} = |\lambda|^2 \rho_k + 2(1 + |u\alpha_k + v\beta_k| + |-v\alpha_k + u\beta_k|),$$

поэтому $\rho_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$.

Следовательно, при выбранном внешнем возмущении

$$|x_k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty,$$

то есть и в этом случае система (2.1.5) имеет неограниченное решение.

Достаточность. Вновь для общности рассуждений будем рассматривать систему более общего вида, чем (2.1.5), а именно:

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad (2.1.7)$$

и покажем, что дискретная устойчивость матрицы A достаточна для ограниченности решений такой системы.

Пусть как и ранее $V(x) = x^\top Qx$, где $Q \succ 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$A^\top QA - Q = -R, \quad R \succ 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}) &= x_{k+1}^\top Qx_{k+1} = (Ax_k + Dw_k)^\top Q(Ax_k + Dw_k) = \\ &= x_k^\top A^\top QAx_k + w_k^\top D^\top QAx_k + x_k^\top A^\top QDw_k + w_k^\top D^\top QDw_k = \\ &= x_k^\top A^\top QAx_k - \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} Q^{1/2} Dw_k - \sqrt{\gamma} Q^{1/2} Ax_k \right)^\top \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} Q^{1/2} D w_k - \sqrt{\gamma} Q^{1/2} A x_k \right) + \\
& + \frac{1}{\gamma} w_k^\top D^\top Q D w_k + \gamma x^\top A^\top Q A x + w_k^\top D^\top Q D w_k \leq \\
& \leq (1 + \gamma) x_k^\top (Q - R) x_k + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) w_k^\top D^\top Q D w_k \leq \\
& \leq (1 + \gamma) V(x_k) - (1 + \gamma) \frac{\ell}{M} V(x_k) + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) w_k^\top D^\top Q D w_k,
\end{aligned}$$

где $M = \lambda_{\max}(Q) > 0$, $\ell = \lambda_{\min}(R)$, а $\gamma > 0$ произвольно. Таким образом,

$$V(x_{k+1}) \leq (1 + \gamma) \left(1 - \frac{\ell}{M}\right) V(x_k) + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \|D^\top Q D\|,$$

поскольку $w_k^\top D^\top Q D w_k \leq \|D^\top Q D\|$ при $|w_k| \leq 1$.

Пусть $0 < \gamma < \ell/(M - \ell)$, тогда при

$$\alpha = (1 + \gamma) \left(1 - \frac{\ell}{M}\right) < 1, \quad \beta = \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \|D^\top Q D\|,$$

для функции $v_k = V(x_k)$ имеем

$$v_{k+1} \leq \alpha v_k + \beta.$$

Отсюда, с учетом $v_0 = x_0^\top Q x_0 \geq 0$, имеем

$$v_k \leq \alpha^k v_0 + \frac{\beta}{1 - \alpha} \leq v_0 + \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

поэтому

$$|x_k|^2 \leq \frac{1}{m} x_k^\top Q x_k = \frac{1}{m} v_k \leq \frac{1}{m} \left(v_0 + \frac{\beta}{1 - \alpha}\right) \leq \frac{1}{m} \left(M |x_0|^2 + \frac{\beta}{1 - \alpha}\right),$$

где $m = \lambda_{\min}(Q)$. Таким образом, все решения системы (2.1.7) ограничены. \blacksquare

2.1.3. Множества достижимости для устойчивых систем

Заметим, что задачу описания множества

$$\{x(T): \dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0, \quad \|w\| \leq 1\}$$

можно интерпретировать двояко. Оно представляет собой либо совокупность всех состояний системы, достижимых к моменту T из начала координат с помощью ограниченных *управлений* w , либо неопределенность в состоянии системы с нулевыми начальными условиями, накопившуюся к моменту T под воздействием неизвестных, но ограниченных в какой-то норме *возмущений* w .

Мы видели, что устойчивые системы являются устойчивыми по входу, то есть их состояния (и выходы) ограничены при ограниченных входах. В этом параграфе будет дано явное описание достижимого множества (то есть всего множества возможных состояний системы) для входов, ограниченных в различных нормах, и убедимся в том, что точное описание может наталкиваться на серьезные трудности.

Множество достижимости линейной системы

Рассмотрим линейную непрерывную систему

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0, \quad (2.1.8)$$

с вектором состояний $x \in \mathbb{R}^n$ и внешним возмущением $w \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в какой-либо норме:

$$\|w\| \leq 1$$

(например, принадлежащим одному из классов, рассмотренных в разделе 1.1.3); будем называть такие возмущения *допустимыми*.

Заметим, что условие $x(0) = 0$ не является ограничительным, поскольку в силу (1.1.4) решение $x(t)$ уравнения (2.1.8) представимо в виде

$$x(t) = e^{At} x(0) + x_0(t),$$

где $x_0(t)$ — решение (2.1.8) при нулевых начальных условиях. Однако далее будут рассматриваться лишь нулевые начальные условия, так как в противном случае описание приводимой ниже конструкции может оказаться сложнее.

Множество

$$\mathcal{R}(T) \doteq \{x(T) \in \mathbb{R}^n : \dot{x} = Ax + Dw, \quad \|w\| \leq 1\}$$

будем называть *множеством достижимости в момент* $T \geq 0$, а множество

$$\mathcal{R} \doteq \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{R}(T)$$

— просто *множеством достижимости* системы (2.1.8).

Таким образом, множество $\mathcal{R}(T)$ — это совокупность концов траекторий системы, рассматриваемой на $[0, T]$, с нулевыми начальными условиями при воздействии допустимых возмущений, а достижимое множество \mathcal{R} — это совокупность всех точек фазового пространства, в которые система может попасть из нуля при воздействии допустимых возмущений при всех $T > 0$.

Можно было бы определить *множество достижимости к моменту* $T \geq 0$:

$$\overline{\mathcal{R}}(T) \doteq \{x(t) \in \mathbb{R}^n: \dot{x} = Ax + Dw, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \|w\| \leq 1\},$$

однако в этом нет необходимости, поскольку $\overline{\mathcal{R}}(T) = \mathcal{R}(T)$.

Действительно, ясно, что $\mathcal{R}(T) \subseteq \overline{\mathcal{R}}(T)$; покажем, что имеется и обратное включение. Для некоторого допустимого возмущения $w(t)$ и некоторого $0 \leq T_1 < T$ рассмотрим точку $x^* = x(T_1, w(t))$ из $\overline{\mathcal{R}}(T)$. Выписывая в явном виде решение системы (2.1.8), нетрудно убедиться, что допустимое возмущение

$$\overline{w}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < T - T_1, \\ w(t - (T - T_1)) & \text{при } T - T_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

приводит систему в точку x^* в момент времени T , то есть $x^* \in \mathcal{R}(T)$.

Имеют место следующие свойства множества достижимости линейных систем; некоторые из них вытекают непосредственно из его определения.

1. Множество $\mathcal{R}(T)$ замкнуто и ограничено.
2. Множество $\mathcal{R}(T)$ выпукло.

Действительно, если точки $x_1, x_2 \in \mathcal{R}(T)$ соответствуют некоторым допустимым w_1, w_2 , то точка $x_\alpha = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ достижима при допустимом $w_\alpha = \alpha w_1 + (1 - \alpha)w_2$.

3. Множество $\mathcal{R}(T)$ центрально-симметрично: если точка x достигнута с помощью допустимого w , то $-w$ соответствует точке $-x$.

4. Множество $\mathcal{R}(T)$ монотонно по вложенности, то есть

$$\mathcal{R}(T_1) \subset \mathcal{R}(T_2) \quad \text{для } T_1 < T_2 < \infty.$$

5. Из свойств устойчивых систем (ВИБО) следует, что множество \mathcal{R} ограничено тогда и только тогда, когда матрица A устойчива. Как и $\mathcal{R}(T)$, множество \mathcal{R} замкнуто, выпукло и центрально-симметрично.

6. Множество \mathcal{R} *инвариантно*: если $x(0) \in \mathcal{R}$, то $x(t) \in \mathcal{R}$ при всех $t > 0$.

Действительно, поскольку точка $x(0) \in \mathcal{R}$, то она достижима из нуля при некотором допустимом $w(t)$ в некоторый момент T , поэтому она может быть взята в качестве начальной для любого допустимого возмущения, определенного на $[T, \infty)$.

7. Множество \mathcal{R} минимально по включению среди всех инвариантных множеств.

8. При устойчивой матрице A множество \mathcal{R} обладает свойством *глобальной притягиваемости*.

В самом деле, по определению

$$\mathcal{R}(t) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n : x = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Dw(\tau) d\tau \right\},$$

причем для устойчивой матрицы A при $t \rightarrow \infty$ имеем $e^{At} x_0 \rightarrow 0$, а второе слагаемое образует множество достижимости \mathcal{R} . Таким образом, любая траектория системы, исходящая из точки вне достижимого множества \mathcal{R} , либо входит в него (и остается внутри вследствие инвариантности), либо стремится к точке на границе. Иными словами, для любой начальной точки x_0 предельное множество $\mathcal{R}(\infty)$ совпадает с достижимым множеством \mathcal{R} .

Обратимся теперь к дискретному времени и рассмотрим систему с нулевыми начальными условиями:

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0, \quad (2.1.9)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $w_k \in \mathbb{R}^m$. Ее решение записывается как

$$x_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Dw_i.$$

Пусть внешнее возмущение w_k ограничено в какой-либо норме, например, из тех, что вводились выше. Определение множества достижимости совершенно аналогично непрерывному случаю.

Множество

$$\mathcal{R}_k \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Dw_i \text{ при } \|w\| \leq 1 \right\}$$

будем называть *множеством достижимости системы (2.1.9) в момент времени k* , а множество

$$\mathcal{R} \doteq \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{R}_k$$

просто *множеством достижимости*.

Достижимые множества для систем дискретного времени обладают теми же свойствами, что и в непрерывном случае. Единственное отличие — при $k < n$ множества \mathcal{R}_k оказываются вырожденными, имеющими меньшую размерность. Если пара (A, D) управляема, то при $k \geq n$ множества \mathcal{R}_k имеют полную размерность.

Достижимые множества весьма полно характеризуют поведение системы, и многие задачи управления в конечном счете сводятся к построению таких множеств. Однако в некоторых постановках задач их точное описание чрезвычайно сложно, поэтому в дальнейшем будем аппроксимировать их множествами простой структуры (а именно, эллипсоидами), обладающими всеми приведенными выше свойствами (кроме свойства минимальности). Принципиальными среди этих свойств являются инвариантность и притягиваемость, определяющие природу достижимых множеств.

В следующих параграфах этого раздела будут даны явные описания множеств достижимости для ограниченных возмущений из классов, освещенных в разделе 1.1.3.

L_2 -ограниченные возмущения

Теорема 2.1.3. Пусть внешние возмущения в системе (2.1.8) ограничены в L_2 -норме:

$$\|w\|_2^2 = \int_0^{\infty} w^T(t)w(t) dt \leq 1.$$

Если пара (A, D) управляема, множество $\mathcal{R}(T)$ является эллипсоидом

$$\mathcal{R}(T) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T W^{-1}(T)x \leq 1\}$$

с матрицей

$$W(T) = \int_0^T e^{A\tau} D D^T e^{A^T \tau} d\tau \succ 0.$$

Если к тому же матрица A устойчива, множество \mathcal{R} является эллипсоидом

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T W^{-1}x \leq 1\},$$

где

$$W = \int_0^{\infty} e^{A\tau} D D^T e^{A^T \tau} d\tau \succ 0, \quad (2.1.10)$$

то есть матрица W является решением уравнения Ляпунова

$$AW + WA^\top = -DD^\top.$$

Доказательство. Поскольку функцию $w(t)$ можно трактовать и как *управление*, доказательство легко получить, опираясь на результаты раздела 1.3.1. Действительно, там было показано, что $W(T) \succ 0$ и что управление

$$w(t) = D^\top e^{A^\top(T-t)} W^{-1}(T)a \quad (2.1.11)$$

переводит точку $x(0) = 0$ в точку $x(T) = a$. Если при этом $a \in \mathcal{R}(T)$, то, доопределив $w(t)$ на всей полуоси: $w(t) = 0$ при $t > T$, получим

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_2^2 &= \int_0^\infty w^\top(t)w(t) dt = \\ &= \int_0^T (a^\top W^{-1}(T) e^{A(T-t)} DD^\top e^{A^\top(T-t)} W^{-1}(T)a) dt = \\ &= a^\top W^{-1}(T)a \leq 1, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

то есть такое управление является допустимым.

С другой стороны, в том же разделе 1.3.1 было показано, что управление (2.1.11) минимизирует критерий $\int_0^T w^\top(t)w(t) dt$. Отсюда и из (2.1.12) следует, что если $a \notin \mathcal{R}(T)$, то есть $a^\top W^{-1}(T)a > 1$, то не существует управления, переводящего $x(0) = 0$ в $x(T) = a$ и такого, что $\int_0^T w^\top(t)w(t) dt \leq 1$.

Наконец, если матрица A устойчива, то

$$W(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} W \succ 0,$$

где матрица W определяется формулой (2.1.10). ■

Таким образом, достижимое множество для устойчивых систем с ограниченными в L_2 внешними возмущениями имеет очень простой вид: оно является эллипсоидом (*эллипсоидом достижимости*). Очевидно, что если нас интересует выходная величина $y = Cx$, то достижимое множество выходов

$$\mathcal{Y} \doteq \{y(t), \quad 0 \leq t < \infty\}$$

также является эллипсоидом (см. лемму Е.1 из Приложения Е):

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^l: \quad y^\top (CWC^\top)^{-1}y \leq 1\} \quad (2.1.13)$$

(заметим, что $CWC^\top \succ 0$, если C — матрица максимального строчного ранга). В частности, для системы с одним выходом $y = c^\top x$, $c \in \mathbb{R}^n$, множество \mathcal{Y} является отрезком

$$|y| \leq (c^\top Wc)^{1/2}.$$

Как уже отмечалось (см. раздел 1.1.3), при синтезе управления обычно желательно обеспечивать малость выхода при всех допустимых возмущениях из данного класса. Теорема 2.1.3 показывает, что в системах с L_2 -ограниченными возмущениями в качестве критерия оптимальности при выборе обратной связи естественно принимать величину эллипсоида (2.1.13).¹

Аналогичный результат верен и для дискретных систем вида

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0, \quad (2.1.14)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $w_k \in \mathbb{R}^m$, а входы ограничены в l_2 -норме:

$$\|w\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^\top w_k \leq 1. \quad (2.1.15)$$

Теорема 2.1.4. Пусть внешние возмущения в линейной системе (2.1.14) удовлетворяют ограничению (2.1.15).

Если пара (A, D) управляема, множество \mathcal{R}_k при $k \geq n$ представляет собой эллипсоид

$$\mathcal{R}_k = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top W_k^{-1}x \leq 1\}$$

с матрицей

$$W_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i D D^\top (A^\top)^i.$$

Если матрица A шуровская, множество $\mathcal{R} = \bigcup_{k \geq n} \mathcal{R}_k$ также является эллипсоидом

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top W^{-1}x \leq 1\},$$

¹Заметим, что величина коэффициента усиления $\mathfrak{g}_{2,\infty}$ дает гораздо более бедную характеристику выхода, указывая лишь радиус шара, в котором содержится эллипсоид.

где

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} A^i D D^T (A^T)^i,$$

то есть матрица W является решением дискретного уравнения Ляпунова

$$A W A^T - W = -D D^T.$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1.3 с использованием результатов раздела 1.3.1, относящихся к дискретным системам.

В формулировке теоремы 2.1.4 требование $k \geq n$ вводится для обеспечения обратимости матрицы W_k , — выше обсуждалась вырожденность множеств достижимости для дискретных систем. Можно было бы и не накладывать это требование, тогда эллипсоид \mathcal{R}_k оказался бы вырожденным (имеющим меньшую размерность).

L_∞ -ограниченные возмущения

Опишем теперь достижимое множество для возмущений (или управлений), ограниченных в L_∞ -норме. В этом случае картина оказывается более сложной.

Для системы

$$\dot{x} = Ax + Dw \tag{2.1.16}$$

с L_∞ -ограниченными входами

$$\|w\|_\infty = \sup_{t \geq 0} (w^T(t)w(t))^{1/2} \leq 1$$

сохраним прежние обозначения $\mathcal{R}(T)$ и \mathcal{R} для достижимых множеств. Обсудим описание этих множеств с помощью опорной функции.

Напомним, что для множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ и вектора $c \in \mathbb{R}^n$ *опорной функцией* называется

$$\varphi_{\mathcal{X}}(c) \doteq \max_{x \in \mathcal{X}} c^T x.$$

Замкнутое ограниченное выпуклое множество \mathcal{X} однозначно восстанавливается по своей опорной функции $\varphi_{\mathcal{X}}(c)$, $|c| = 1$. Именно,

$$\mathcal{X} = \{x: c^T x \leq \varphi_{\mathcal{X}}(c), \quad |c| = 1\}$$

есть пересечение опорных полупространств.

В рассматриваемом случае множества $\mathcal{R}(T)$ и \mathcal{R} выпуклы, замкнуты и ограничены; множество \mathcal{R} ограничено при предположении об устойчивости системы.

Поскольку

$$x(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} Dw(\tau) d\tau,$$

то

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{R}(T)}(c) &= \max_{\|w\|_\infty \leq 1} \int_0^T c^\top e^{A(T-\tau)} Dw(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^T |D^\top e^{A^\top(T-\tau)} c| d\tau = \int_0^T |D^\top e^{A^\top \tau} c| d\tau, \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

а при устойчивой матрице A

$$\varphi_{\mathcal{R}}(c) = \int_0^\infty |D^\top e^{A^\top \tau} c| d\tau.$$

При фиксированном векторе c величину $\varphi_{\mathcal{R}}(c)$ можно вычислять следующим образом. Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A^\top z, \\ \dot{\phi} &= |D^\top z|, \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

с начальным условием

$$z(0) = c, \quad \phi(0) = 0. \quad (2.1.19)$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{A^\top t} c, \\ \phi(t) &= \int_0^t |D^\top e^{A^\top \tau} c| d\tau, \end{aligned}$$

так что

$$\phi(\infty) = \varphi_{\mathcal{R}}(c).$$

Таким образом, решая дифференциальное уравнение (2.1.18)–(2.1.19) при различных векторах c , $|c| = 1$, строим *опорные гиперплоскости*

$$\{x: c^\top x = \varphi_{\mathcal{R}}(c)\}.$$

При этом пересечение полупространств $\{x: c^\top x \leq \varphi_{\mathcal{R}}(c)\}$ по всем векторам c , $|c| = 1$, и дает искомое множество \mathcal{R} .

Пример 2.1.1. В качестве иллюстрации рассмотрим устойчивую двумерную систему (2.1.16) в канонической управляемой форме с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и L_∞ -ограниченными возмущениями $\|w\|_\infty \leq 1$.

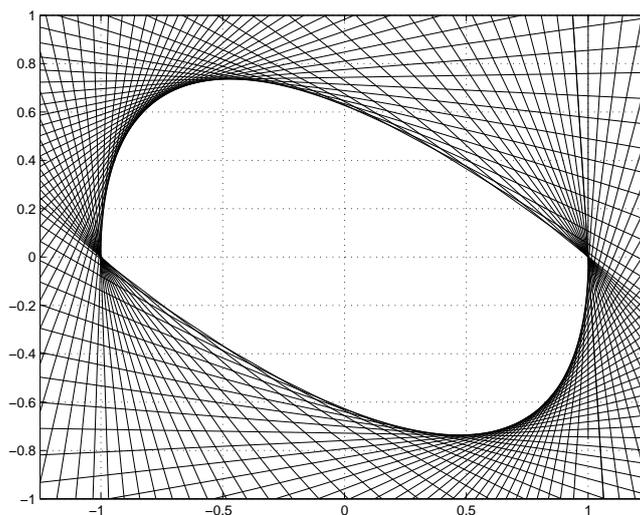


Рис. 2.1.1. Аппроксимация двумерного достижимого множества для системы из примера 2.1.1 пересечением опорных полуплоскостей; $d\theta = 2\pi/100$.

Выбирая значения вектора c на единичной окружности в виде

$$c = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

с некоторым шагом $d\theta$ по параметру θ и решая уравнение (2.1.18) с начальным условием (2.1.19), получаем характеристику достижимого

множества с помощью опорных полуплоскостей $\{x: c^\top x \leq \varphi_{\mathcal{R}}(c)\}$, изображенную на рис. 2.1.1. ▼

Такое описание эффективно при малых размерностях ($n = 2, 3$), допускающих простую параметризацию вектора c на единичном шаре. Ясно, что при больших размерностях фазового пространства этот способ трудоемок и при этом дает весьма неполное представление о достижимом множестве.

Однако во многих технических приложениях бывает достаточно определять не всю границу, а лишь интервалы, в которых независимо меняются координаты вектора состояний. В этом случае достаточно посчитать лишь n значений опорной функции, взяв в качестве c единичные координатные векторы e_i (в силу симметрии множества \mathcal{R} , при $c = -e_i$ получим симметричную опорную гиперплоскость).

Ограниченность предложенного метода заключается также и в том, что он не дает возможности строить достижимое множество при наличии неопределенности в матрице системы. В то же время, как будет показано далее, эллипсоидальная техника с легкостью позволяет учесть это обстоятельство, приводя к так называемым *робастным оценкам*.

Введем еще одно понятие, связанное с достижимыми множествами; оно встретится нам позже, но будет иметь несколько иное происхождение и структуру. Рассмотрим конечное $T > 0$ и назовем *наихудшим возмущением* такое $w(t)$, которое выводит траекторию на границу $\partial R(T)$ множества $\mathcal{R}(T)$. Существование такого допустимого возмущения уже было доказано при выводе формулы (2.1.17); оно доставляет максимум подынтегральному выражению в (2.1.17) и при данном фиксированном c имеет вид

$$\hat{w}(t) = \frac{D^\top e^{A^\top(T-t)} c}{|D^\top e^{A^\top(T-t)} c|}. \quad (2.1.20)$$

Нетрудно видеть, что в момент T возмущение $\hat{w}(t)$ приводит траекторию системы в точку $x_c(T) \in \partial \mathcal{R}(T)$ с нормалью c .

В простейшем случае скалярного возмущения и размерности $n = 2$, записав вектор c в полярных координатах, получим

$$\hat{w}(t) = \text{sign } D^\top e^{A^\top(T-t)} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

с некоторым $\theta \in [0, 2\pi]$; тогда траектория в момент $t = T$ попадет в точку x_θ на границе $\mathcal{R}(T)$.

Заметим, что в скалярном случае наилучшее возмущение принимает два значения ± 1 , то есть имеет релейный характер. Этот факт хорошо известен в теории оптимального управления.

Рассмотрим теперь бесконечное время и устойчивую матрицу A . Нетрудно видеть (см. свойство 8 достижимых множеств), что при любом начальном положении $x(0)$ (в том числе и при $x(0) \notin \mathcal{R}$) и указанном возмущении $\widehat{w}(t)$ имеем

$$x_\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_\theta \in \partial \mathcal{R}.$$

Обратим внимание, что заодно доказана замкнутость множества \mathcal{R} и явно указано (как и в предыдущем параграфе для случая L_2 -ограниченных возмущений) то возмущение, которое выводит траекторию на границу достижимого множества при $t \rightarrow \infty$.

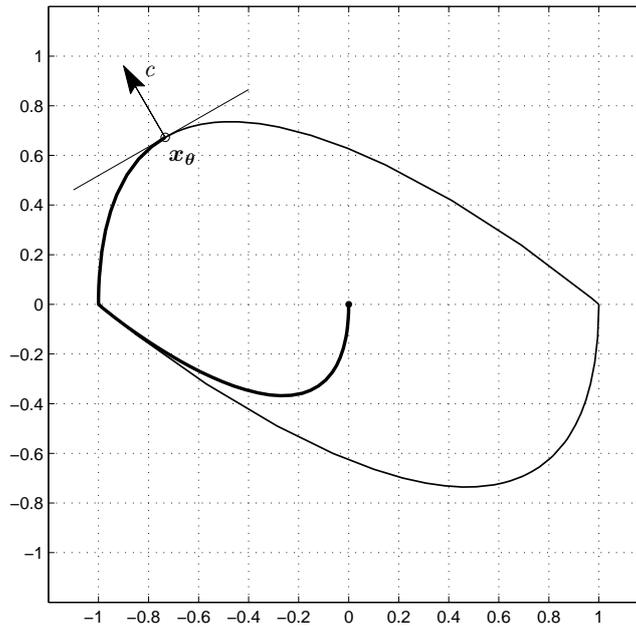


Рис. 2.1.2. Достижимое множество для системы из примера 2.1.1 и ее траектория при наилучшем возмущении для $\theta = 2\pi/3$.

Пример 2.1.2. Граница достижимого множества для системы из примера 2.1.1 изображена на рис. 2.1.2. Значению $\theta = 2\pi/3$ соответ-

ствуется точка

$$x_\theta = \begin{pmatrix} -0,7336 \\ 0,6726 \end{pmatrix}$$

на границе множества \mathcal{R} , в которой касательная имеет вектор нормали $c = (\cos \theta \quad \sin \theta)^\top$. Соответственно, при возмущении вида (2.1.20) с $\theta = 2\pi/3$ траектория системы сходится в точку x_θ . ▼

Заметим также, что поскольку из ограниченности возмущения в L_2 или L_∞ -норме в общем случае не следует ограниченности в другой из них, то соответствующие множества достижимости для данной системы могут соотноситься (в смысле вложенности) произвольным образом.

Случай дискретного времени анализируется практически так же. Для системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0,$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $w_k \in \mathbb{R}^m$, а возмущения w_k ограничены в l_∞ -норме:

$$w_k^\top w_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

опорная функция достижимых множеств выписывается явно и имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{R}_k}(c) &= \sum_{i=0}^{k-1} |D^\top (A^\top)^i c|, \\ \varphi_{\mathcal{R}}(c) &= \sum_{i=0}^{\infty} |D^\top (A^\top)^i c|. \end{aligned}$$

Этому описанию присущи те же недостатки, что и для непрерывных систем.

Итак, множества достижимости систем с L_∞ -ограниченными входами, вообще говоря, не являются эллипсоидами, и их описание не просто. Однако в силу их выпуклости и центральной симметрии, их удобно аппроксимировать эллипсоидами. Соответствующие результаты будут представлены в следующем разделе.

2.1.4. Переходные процессы

Может показаться, что результаты, сформулированные в виде теорем из раздела 1.4.2, решают не только задачу стабилизации, но и все разумные задачи теории управления. Например, если в непрерывной управляемой системе необходимо как можно быстрее устранить

начальное отклонение, то в соответствии с теоремой 1.4.5 можно было бы так выбрать стабилизирующую обратную связь $u = Kx$, чтобы сдвинуть собственные значения λ_i матрицы $A_c = A + BK$ далеко влево:

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\sigma < 0. \quad (2.1.21)$$

Действительно, тогда для решения замкнутой системы

$$\dot{x} = A_c x, \quad x(0) = x_0$$

имеем

$$|x(t)| = |e^{A_c t} x_0| \leq \|e^{A_c t}\| |x_0| \leq C e^{-\nu t} |x_0|, \quad C = C(A_c, \nu)$$

для любого $0 < \nu < \sigma$.

Выбирая большие ν , на первый взгляд, за счет экспоненциального члена $e^{-\nu t}$ можно получить сколь угодно малые значения $|x(t)|$ для всех $t \geq T$, где $T > 0$ сколь угодно мало. Однако «за все приходится платить»; не является исключением и данная ситуация. Во-первых, элементы матрицы усиления K , для которой собственные значения матрицы A_c удовлетворяют условию (2.1.21), могут оказаться очень большими. Поэтому и управление $u = Kx$ может принимать очень большие значения, в то время как в практических задачах обычно есть ограничения на величину управления.

Вторая неприятность связана с константой C в приведенной выше оценке. Оказывается, с ростом σ эта величина возрастает; это проявляется в том, что значения $x(t)$ на начальном интервале не убывают, а возрастают, и притом весьма значительно. Количественное описание этого эффекта всплеска дается следующим результатом.

Теорема 2.1.5. Пусть $x(t)$ — решение замкнутой системы

$$\dot{x} = (A + bk^\top)x, \quad x(0) = x_0,$$

для которой $\operatorname{Re} \lambda_i(A + bk^\top) \leq -\sigma < 0$.

Тогда существует константа C , зависящая от матрицы A и вектора b (но не зависящая от σ), такая что справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq 1/\sigma} \max_{|x_0|=1} |x(t)| \geq C\sigma^{n-1}.$$

Иначе говоря, если собственные значения матрицы A_c замкнутой системы сильно сдвинуты влево, то заведомо найдется такое начальное значение x_0 , $|x_0| = 1$, для которого решение замкнутой системы

принимает значения, бóльшие, чем $C\sigma^{n-1}$; последняя величина тем больше, чем больше σ и n . Более того, с ростом σ этот всплеск проявляется на все меньшем временном интервале $0 \leq t \leq 1/\sigma$.

Таким образом, влияние «плохих» начальных условий на поведение невозмущенной системы проявляется в виде всплеска. Этот эффект имеет ту же природу, что и хорошо известное в теории управления перерегулирование, см. раздел 2.1.1.

В самом деле, для соответствующего решения системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = 0$$

со скалярным управлением имеем

$$x(t) = -A^{-1}b + e^{At} A^{-1}b \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{x}, \quad (2.1.22)$$

где $\bar{x} = -A^{-1}b$ его установившееся значение.

Выберем теперь (в соответствии с теоремой 2.1.5) начальное условие x_0 : $|x_0| = 1$ для невозмущенной системы таким образом, чтобы вызвать большой всплеск ее траектории $x(t) = e^{At} x_0$. Тогда, положив в (2.1.22) $b = Ax_0$, получаем $\bar{x} = -x_0$ и

$$\eta = \max_{t \geq 0} |e^{At} x_0| - 1,$$

то есть перерегулирование в системе (2.1.22) велико.

2.1.5. Ограниченные внешние возмущения

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, с вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектором выходных переменных $z(t) \in \mathbb{R}^l$ и вектором внешних возмущений $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (2.1.24)$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма вектора. Подчеркнем, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладываем; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Таким образом, рассматриваются L_∞ -ограниченные внешние возмущения: $\|w(t)\|_\infty \leq 1$. Класс таких возмущений будем называть *допустимым*.

Заметим, что сейчас не рассматриваются *интервальные* ограничения вида

$$|w_i(t)| \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{для всех } t \geq 0,$$

(они будут обсуждаться позже); ограничения (2.1.24) являются *евклидовыми*. Впрочем, в одномерном случае эти ограничения совпадают.

Будем полагать, что система (2.1.23) устойчива (матрица A гурвицева), пара (A, D) управляема, C — матрица максимального ранга.

Целью является простое и по возможности «аккуратное» описание множества возможных состояний (или выходов) системы, в которых она может оказаться под воздействием допустимых возмущений.¹

В этом разделе вводится ключевое понятие *инвариантного эллипсоида* для систем с внешними возмущениями, которое будет служить систематической основой построения эффективных оценок достижимых множеств.

Определение 2.1.1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0, \quad (2.1.25)$$

будем называть *инвариантным* для системы (2.1.23), если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \geq 0$ и всех допустимых возмущений $w(t)$. Матрицу P будем называть *матрицей эллипсоида* \mathcal{E}_x .

Отметим, что из условия управляемости системы следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида — совпадающего со всем фазовым пространством. Вообще говоря, инвариантный эллипсоид может оказаться неограниченным (матрица $Q = P^{-1}$ вырождена) или иметь меньшую размерность (при отсутствии управляемости). Как правило, будем иметь дело с регулярным случаем, когда инвариантные эллипсоиды имеют полную размерность и ограничены.

Как будет показано ниже (см. следствие 2.1.1), инвариантный эллипсоид для линейной системы обладает следующим свойством: при

¹Напомним, что в этом направлении нами уже предприняты некоторые усилия. Так, в конце раздела 1.1.3 введена важная характеристика системы — коэффициент усиления. Для случая, когда и входной, и выходной сигналы измеряются в норме L_∞ , этот коэффициент был обозначен как $g_{\infty, \infty}$ (*peak-to-peak gain*). Если матрица A устойчива, то решения системы (2.1.23) при всех допустимых возмущениях $w(t)$ ограничены и величина $g_{\infty, \infty}$ конечна. Далее, в разделе 2.1.3 дана более точная, исчерпывающая характеристика выходного сигнала, основанная на построении достижимого множества, однако его описание в этой ситуации наталкивается на определенные трудности.

$x(0) \notin \mathcal{E}_x$ будет

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}_x$$

(при этом, возможно, $x(t) \in \mathcal{E}_x$ при $t \geq T$ для некоторого $T > 0$), то есть траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида \mathcal{E}_x , стремится к эллипсоиду \mathcal{E}_x с течением времени (или попадает в него в некоторый конечный момент $T > 0$). Таким образом, инвариантный эллипсоид является также и *притягивающим*.

Как показано в разделе 2.1.3, сами достижимые множества являются выпуклыми, инвариантными и притягивающими, поэтому наличие этих принципиальных свойств у инвариантных эллипсоидов представляется существенным при использовании их для аппроксимации достижимых множеств.

Из данного определения инвариантного эллипсоида вытекают два подхода к изучению воздействия внешних возмущений на поведение системы:

- если начальное состояние системы принадлежит инвариантному эллипсоиду, имеем *равномерную* оценку поведения ее траекторий — в каждый момент времени траектории системы будут находиться в этом эллипсоиде при любых допустимых внешних возмущениях;
- если начальные условия произвольны, оценка поведения траекторий системы будет *асимптотической* — при любом допустимом внешнем возмущении с течением времени траектория будет стремиться к инвариантному эллипсоиду.

Важно отметить, что понятие инвариантного эллипсоида является более «робастным» по сравнению с множеством достижимости. Действительно, в последнем предполагается, что начальные условия — нулевые, однако на практике это предположение не всегда можно гарантировать; более того, проверка принадлежности данного ненулевого начального состояния достижимому множеству невозможна без построения самого множества. В случае когда начальное состояние лежит вне достижимого множества, построения еще более усложняются.

Если же принять на вооружение технику инвариантных эллипсоидов, то учет ненулевых начальных условий гораздо более прост. Так, пусть в начальном состоянии системы содержится неопределенность вида

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P_0^{-1} x \leq 1\}, \quad P_0 \succ 0,$$

тогда выполнение условия $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_x$, эквивалентного матричному неравенству

$$P \succcurlyeq P_0, \quad (2.1.26)$$

гарантирует, что траектории системы, начавшись в эллипсоиде \mathcal{E}_0 , не покинут инвариантный эллипсоид \mathcal{E}_x .

В случае непосредственного задания начального условия $x_0 \neq 0$, достаточно потребовать, чтобы

$$x_0^\top P^{-1} x_0 \leq 1;$$

это условие по лемме Шура представимо в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0. \quad (2.1.27)$$

Таким образом, добавляя условия (2.1.26) или (2.1.27) в качестве дополнительных в формулировке всех последующих результатов книги, можно легко найти инвариантный эллипсоид, заведомо содержащий имеющиеся начальные условия.

Следует отметить, что, поскольку достижимое множество \mathcal{R} системы (2.1.23) минимально по включению среди всех инвариантных множеств, то для любого инвариантного эллипсоида (даже минимального по какому-либо критерию) имеет место вложение $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}_x$, причем качество такой аппроксимации может быть весьма плохим.

Пример 2.1.3. Рассмотрим устойчивую систему

$$\dot{x} = Ax + Dw$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -20 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и ограниченным внешним возмущением $\|w\|_\infty \leq 1$; ср. с системой из примера 2.1.1, от которой матрица A отличается лишь величиной правого нижнего элемента a_{22} .

На рис. 2.1.3 изображено достижимое множество и минимальный по критерию следа инвариантный эллипс (способ их построения будет описан ниже в этом разделе). Более того, можно показать, что с ростом абсолютной величины элемента a_{22} инвариантный эллипс будет давать все более грубую оценку достижимого множества. ▼

Иными словами, подход на основе инвариантных эллипсоидов дает лишь субоптимальные решения, точность которых может быть невысокой. Однако приведенный пример демонстрирует лишь *теоретическую* возможность того, что получаемые оценки могут быть плохими.

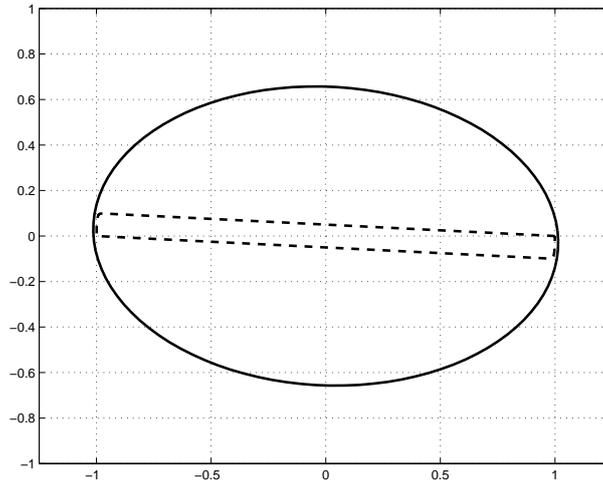


Рис. 2.1.3. Достижимое множество (пунктир) и минимальный инвариантный эллипс для системы из примера 2.1.3.

Многочисленные содержательные примеры показывают, что этот подход дает весьма высокую точность аппроксимации; в совокупности с простотой его реализации и единообразием применения к различным задачам управления, он представляется эффективным методом анализа и синтеза в условиях ограниченных внешних возмущений. Отметим, что в качестве инвариантных множеств, аппроксимирующих достижимые множества, разумеется, могут использоваться не только эллипсоиды.

Теперь сформулируем основной результат этого раздела.

Теорема 2.1.6. *Эллипсоид (2.1.25) является инвариантным для системы*

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad \|w\| \leq 1 \quad (2.1.28)$$

тогда и только тогда, когда его матрица P удовлетворяет линейным матричным неравенствам

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad (2.1.29)$$

при некотором $\alpha > 0$.

Идея, лежащая в основе доказательства теоремы 2.1.6, состоит в том, что для системы с возмущением строится квадратичная форма

$V(x) = x^T P^{-1}x$, подчиняющаяся условиям (2.1.29). Как нетрудно видеть, эти условия обеспечивают ее убывание на траекториях системы (2.1.28) *вне эллипсоида*, задаваемого матрицей P . Иными словами, в этой области фазового пространства функция $V(x)$ является квадратичной функцией Ляпунова для возмущенной системы (2.1.28). Соответственно, инвариантность получаемого эллипсоида доказывается исходя не из «внутреннего» определения инвариантности, а из наличия «внешней» функции Ляпунова. С учетом сказанного получаем

Следствие 2.1.1. *Инвариантный эллипсоид для линейной непрерывной системы является притягивающим.*

Инвариантные эллипсоиды могут рассматриваться как средство оценивания возможных значений *состояния* динамической системы, находящейся под влиянием ограниченного постоянно действующего возмущения. Однако часто интерес представляет оценивание выхода системы, в простейшем случае представленного в виде $z = Cx$. Соответственно, задача состоит в построении «простых» и *минимальных* в некотором смысле множеств, содержащих вектор выхода.

В соответствии с леммой Е.1 из Приложения Е об образе эллипсоида при линейном отображении имеем, что если \mathcal{E}_x — инвариантный эллипсоид (2.1.25) с матрицей P , то выход $z = Cx$ системы (2.1.23) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l: z^T (CPC^T)^{-1}z \leq 1\}, \quad (2.1.30)$$

который будем называть *ограничивающим* для выхода z . Отметим, что, как вытекает из следствия 2.1.1, при $x_0 \notin \mathcal{E}_x$ выход z будет стремиться к эллипсоиду \mathcal{E}_z .

В частности, в случае одномерного выхода ($l = 1$) ограничивающий эллипсоид представляет собой отрезок

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}: |z| \leq \sqrt{CPC^T}\}.$$

Разумеется, при $C = I$, когда в качестве выхода системы рассматривается весь вектор состояния, ограничивающий эллипсоид совпадает с инвариантным.

Для корректности записи эллипсоида в форме (2.1.30) требуется, чтобы матрица CPC^T была обратима, то есть матрица C имела максимальный ранг (как это и было сформулировано в лемме Е.1). Если не оговорено противное, везде ниже будем предполагать, что это свойство выполняется, так что ограничивающий эллипсоид имеет полную размерность (см. замечание Е.1 из Приложения Е).

Итак, степень влияния ограниченных внешних возмущений $w(t)$ на выход $z(t)$ системы будем характеризовать *минимальным* ограничивающим эллипсоидом (2.1.30).

Минимальность эллипсоидов можно понимать по-разному; примем в качестве основного линейный *критерий следа*

$$f(P) = \operatorname{tr} CPC^T, \quad (2.1.31)$$

соответствующий сумме квадратов длин полуосей эллипсоида \mathcal{E}_z . В качестве других естественных критериев минимальности можно выбирать длину наибольшей полуоси эллипсоида выхода, равную

$$g(P) = \sqrt{\|CPC^T\|},$$

или его объем, выражаемый величиной

$$h(P) = c_l \sqrt{\det CPC^T},$$

где c_l — объем единичного шара в \mathbb{R}^l ; см. приложение А (в скалярном случае все критерии совпадают).

Поскольку система (2.1.23) предполагается устойчивой, то для каждой из указанных выше функций существует конечный ограничивающий эллипсоид (2.1.30), ее минимизирующий. Отыскание такого минимального эллипсоида можно проводить на основе теоремы 2.1.6, минимизируя тот или иной критерий при каждом фиксированном значении параметра α при ограничениях (2.1.29) и выбирая минимальное среди полученных решений. Именно такая схема и будет использоваться в дальнейшем.

Для критерия следа (2.1.31) можно получить следующее упрощение.

Следствие 2.1.2. *Минимальный (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид для системы (2.1.23) с $x_0 = 0$ принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами $CP(\alpha)C^T$, где $P(\alpha)$ удовлетворяет уравнению Ляпунова*

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T = 0 \quad (2.1.32)$$

на интервале $0 < \alpha < -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$. При этом функция

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T$$

строго выпукла на указанном интервале.

Доказательство. Уравнение (2.1.32) представимо в виде

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^\top = -\frac{1}{\alpha}DD^\top$$

и, согласно лемме И.1, имеет единственное положительно определенное решение тогда и только тогда, когда матрица $A + \frac{\alpha}{2}I$ гурвицева:

$$\operatorname{Re} \lambda_i\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right) < 0,$$

то есть $0 < \alpha < -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$. Пользуясь следствием И.3 из Приложения И, получаем первое утверждение.

Покажем теперь, что функция

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^\top$$

строго выпукла на интервале $(0, -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$. В соответствии с леммой И.1, решение уравнения (2.1.32) представимо в явном виде как

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)t} \frac{1}{\alpha} DD^\top e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)^\top t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} e^{At} DD^\top e^{A^\top t} dt > 0, \end{aligned}$$

следовательно

$$\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^\top = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \operatorname{tr}[C e^{At} DD^\top e^{A^\top t} C^\top] dt > 0.$$

Заметим, что функция

$$\mu(\alpha) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$$

при всех $t \geq 0$ строго выпукла на интервале $(0, -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$, а

$$\psi(t) \doteq \operatorname{tr}[C e^{At} DD^\top e^{A^\top t} C^\top] \geq 0,$$

причем при некоторых $t \geq 0$ это неравенство является строгим. Следовательно, в силу непрерывности $\psi(t)$, функция $\varphi(\alpha)$ строго выпукла на интервале $(0, -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$. ■

Согласно следствию 2.1.2, при поиске минимального (по критерию следа!) ограничивающего эллипсоида достаточно рассматривать однопараметрическое семейство не матричных неравенств, а *уравнений* (2.1.32). При этом задача сводится к одномерной выпуклой минимизации на известном конечном интервале, что приводит к единственному минимальному ограничивающему эллипсоиду. Можно показать, что решение, доставляющее минимум другим упоминавшимся критериям, вообще говоря, не единственно. Как уже не раз отмечалось, везде ниже будем пользоваться критерием следа, если не оговорено противное.

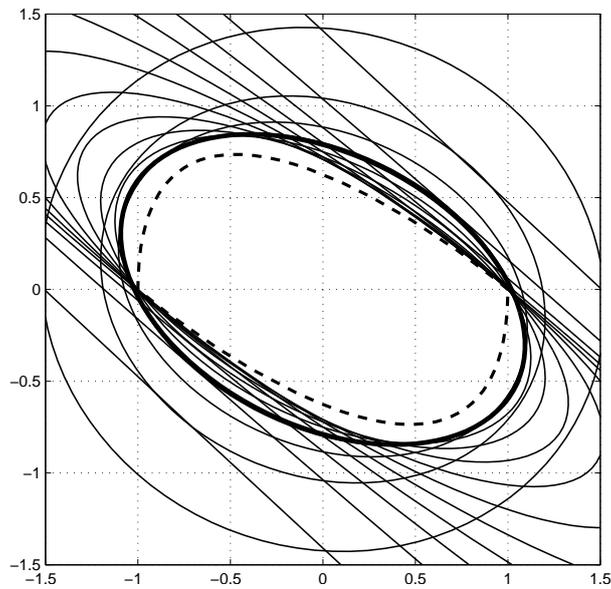


Рис. 2.1.4. Семейство инвариантных эллипсов для системы из примера 2.1.1.

Пример 2.1.4. На рис. 2.1.4 для системы из примера 2.1.1 изображены инвариантные эллипсы с матрицами, являющимися решением уравнения Ляпунова (2.1.32) при нескольких значениях параметра α из соответствующего интервала; жирной линией выделен минимальный по критерию следа эллипс. Заметим, что пересечение всех инвариантных эллипсов, будучи инвариантным множеством, в общем случае эллипсом не является. Для сравнения на этом же рисунке пунктиром

изображена граница достижимого множества системы. ▼

Сделаем важный комментарий. Не следует думать, что нам удалось точно решить задачу и надобность в эллипсоидальном описании отпадает, — достижимое множество для выхода приведено на рисунке исключительно в иллюстративных целях; построения осуществлялись следующим образом. Во-первых, четырехмерное множество достижимости для состояний системы строилось с помощью опорных функций, как это было показано в разделе 2.1.3. Так, были сгенерированы $N = 500$ векторов s , равномерно распределенных на единичном шаре в \mathbb{R}^4 , и по ним построены $2N$ опорных гиперплоскостей с нормальями $\pm s$ (в силу свойства симметрии достижимых множеств), определяющих некоторый многогранник (параллелотоп). Далее, используя пакет МРТ (Multi-Parametric Toolbox) системы МАТЛАВ были вычислены вершины v_i полученного многогранника; наконец, выпуклая оболочка их двумерных образов Cv_i взята в качестве приближенного описания достижимого множества для выхода.

Будучи очень трудоемким даже для невысокой размерности, такое построение не дает сколько-нибудь надежного описания множества, в то время как отыскание минимального инвариантного эллипсоида в соответствии со следствием 2.1.2 требует порядка сотых долей секунды на стандартном персональном компьютере.

Интервальные ограничения на возмущения

Как отмечалось выше, вместо евклидовых ограничений (2.1.24) на внешние возмущения можно наложить *интервальные* ограничения:

$$|w_i(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.1.33)$$

Такие ограничения естественны для многих практических приложений, когда компоненты вектора возмущений в модели объекта имеют различную физическую природу и никак не связаны между собой. При такой постановке можно получить *субоптимальное* решение задачи в терминах линейных матричных неравенств.

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.1.6.

Теорема 2.1.7. *Эллипсоид (2.1.25) является инвариантным для устойчивой системы*

$$\dot{x} = Ax + Dw$$

при интервальных ограничениях (2.1.33), если его матрица P удовлетворяет линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

при некоторых $\alpha > 0$ и $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq \alpha.$$

Следствие 2.1.3. Пусть \hat{P} — решение задачи

$$\text{tr } CPC^\top \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P & D \\ D^\top & -\text{diag}\{\beta_1 \ \dots \ \beta_m\} \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \leq \alpha, \quad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, скалярных переменных β_1, \dots, β_m и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда матрица

$$C\hat{P}C^\top$$

определяет ограничивающий эллипсоид для выхода z системы (2.1.23) при внешних возмущениях вида (2.1.33) и нулевых начальных условиях.

Отметим различия в результатах для двух рассмотренных типов ограничений. В интервальном случае имеем более широкое множество допустимых возмущений (поскольку единичный l_2 -шар содержится в единичном l_∞ -шаре), поэтому получаемый эллипсоид содержит в себе эллипсоид, построенный для случая евклидовых ограничений. Что существеннее, теорема 2.1.7 предоставляет лишь достаточные условия инвариантности, приводящие к более консервативным оценкам. Кроме того, при каждом допустимом значении параметра α здесь приходится решать оптимизационную задачу (а не уравнение Ляпунова).

2.1.6. Гармонические и L_2 -ограниченные возмущения

В ряде случаев характеристикой влияния внешних возмущений является не эллипсоид, а H_∞ -норма. Пусть на вход устойчивой системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Dw, \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

подается гармонический сигнал

$$w(t) = a e^{j\omega t}.$$

Тогда (см. раздел 1.1.3) установившийся сигнал на выходе будет равен

$$\bar{y}(t) = H(j\omega)w(t), \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}D.$$

Необходимо, чтобы амплитуда этого сигнала была достаточно мала для всех частот ω , при этом мерой ее малости может служить величина

$$\sup_{\omega} |H(j\omega)| = \|H(s)\|_\infty,$$

то есть H_∞ -норма передаточной функции. Несколько более общая задача возникает, когда нам желательна малость выхода в какой-то полосе частот или, в общем случае, когда есть *весовая функция* $W(s)$ и критерий качества процесса имеет вид

$$\sup_{\omega} |W(j\omega)H(j\omega)| = \|W(s)H(s)\|_\infty.$$

Иначе, пусть на вход той же системы поступает любое возмущение, ограниченное в L_2 -норме:

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w^\top(t)w(t)dt \leq 1. \quad (2.1.34)$$

Тогда, как мы знаем,

$$\sup \|y\|_2 = \|H(s)\|_\infty,$$

где супремум берется по всем входным возмущениям, удовлетворяющим (2.1.34). Итак, в обеих постановках задачи естественным *показателем качества* процесса является величина

$$J \doteq \|H(s)\|_\infty.$$

Напомним, что выше вводилось понятие матричной передаточной функции системы. Помимо наглядных частотных свойств и связи с (комплексным) радиусом устойчивости матрицы со структурированной неопределенностью, мы отметили еще одно ее важное свойство: величина H_∞ -нормы передаточной функции системы равна коэффициенту усиления $\mathfrak{g}_{2,2}$ входного сигнала, ограниченного в L_2 -норме. Точнее, имеет место следующий известный результат, который приведем без доказательства.

Лемма 2.1.1. *Рассмотрим систему, заданную с помощью передаточной функции:*

$$z = G(s)w, \quad G(s) = C(j\omega I - A)^{-1}D,$$

где матрица A устойчива, z — выход системы, а w — внешнее возмущение, ограниченное в L_2 -норме:

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w^\top(t)w(t) dt \leq 1. \quad (2.1.35)$$

Тогда

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w \|z\|_2,$$

где супремум берется по всем входным возмущениям, удовлетворяющим (2.1.35).

Одной из задач теории H_∞ -оптимизации является вычисление значения H_∞ -нормы передаточной функции данной устойчивой системы. Способы вычисления этой величины при описании системы с помощью передаточных функций хорошо известны. Рассмотрим альтернативный способ, предполагающий описание системы в пространстве состояний и основанный на технике линейных матричных неравенств. Он исключительно численно устойчив и дает точный результат при численной реализации.

Рассмотрим несколько более общую формулировку, а именно, для системы

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0,$$

с устойчивой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и L_2 -ограниченным внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (2.1.35), будем интересоваться следующей интегральной характеристикой:

$$J = \int_0^\infty x^\top R x dt, \quad R \succ 0. \quad (2.1.36)$$

В частности заметим что при $R = I$ этот показатель совпадает с квадратом L_2 -нормы решения:

$$J = \int_0^{\infty} x^{\top} x dt = \|x\|_2^2.$$

Нас интересует, какие значения может принимать функционал J на решениях системы при всевозможных внешних возмущениях

$$\|w\|_2 \leq 1.$$

Ясно, что $J_{\min} = 0$ при $w \equiv 0$ (тогда $x \equiv 0$), поэтому важно найти $J_{\max} = \max_{\|w\|_2 \leq 1} J$.

Теорема 2.1.8. *Для функционала*

$$J = \int_0^{\infty} x^{\top} R x dt, \quad R \succ 0,$$

на решениях системы

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0, \quad (2.1.37)$$

с устойчивой матрицей A и L_2 -ограниченными внешними возмущениями $\|w\|_2 \leq 1$ справедлива оценка

$$J \leq \hat{\gamma},$$

где $\hat{\gamma}$ — решение задачи минимизации

$$\gamma \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^{\top}Q + QA + R & QD \\ D^{\top}Q & -\gamma I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (2.1.38)$$

$$Q \succ 0.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что линейное матричное неравенство (2.1.38), эквивалентное матричному неравенству

$$A^{\top}Q + QA + R + \frac{1}{\gamma}QDD^{\top}Q \preceq 0,$$

разрешимо относительно $Q \succ 0$ и γ .

Далее, пусть неравенство (2.1.38) выполняется для некоторого γ и $Q \succ 0$. Это означает, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$ верно

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} A^\top Q + QA + R & QD \\ D^\top Q & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \leq 0,$$

или

$$x^\top (A^\top Q + QA + R)x + x^\top QDw + w^\top D^\top Qx - \gamma w^\top w \leq 0. \quad (2.1.39)$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$V(x) = x^\top Qx$$

с некоторой матрицей $Q \succ 0$. На решениях системы (2.1.37) имеем

$$\dot{V}(x, w) = \dot{x}^\top Qx + x^\top Q\dot{x} = (Ax + Dw)^\top Qx + x^\top Q(Ax + Dw),$$

откуда с учетом (2.1.39)

$$\dot{V}(x, w) \leq -x^\top Rx + \gamma w^\top w.$$

Интегрируя это неравенство по t от 0 до T , с учетом $V(x(0)) = 0$ получаем

$$V(x(T)) \leq - \int_0^T x^\top Rx dt + \gamma \int_0^T w^\top w dt.$$

Поскольку $V(x(T)) \geq 0$, переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$ (что возможно в силу устойчивости матрицы A) имеем

$$\int_0^\infty x^\top Rx dt \leq \gamma \int_0^\infty w^\top w dt \leq \gamma.$$

Таким образом, число γ дает верхнюю оценку для функционала J . ■

Итак, сформулированная задача оптимального управления сведена к задаче полуопределенного программирования относительно матричной переменной Q и скалярной переменной γ .

Если пара (A, D) управляема, то оценка сверху для функционала J , предоставляемая величиной $\hat{\gamma}$, является достижимой. Иными словами, существует возмущение (2.1.35), для которого $J = \hat{\gamma}$.

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы остается справедливым и в том случае, когда $R = C^T C$ и пара (A, C) наблюдаема. Тогда функционал J может пониматься как квадрат L_2 -нормы выхода $z = Cx$ системы (2.1.37) при L_2 -ограниченном внешнем возмущении, а величина $\hat{\gamma}$, полученная в теореме 2.1.8, представляет собой не что иное как квадрат H_∞ -нормы передаточной функции от входа w к выходу z . Таким образом, теорема 2.1.8 предлагает еще один способ вычисления H_∞ -нормы.

Выше было введено понятие достижимого множества и дано его описание для устойчивой системы со входами, ограниченными в норме L_2 или L_∞ . Задача этого раздела может также интерпретироваться как еще один вариант задачи о достижимости — в «интегральной» формулировке (2.1.36).

2.1.7. Случайные внешние возмущения

До сих пор мы рассматривали задачи с детерминированными внешними возмущениями, ограниченными в той или иной норме. Однако во многих задачах на систему действуют *случайные внешние возмущения*; нас интересует ее реакция на такие возмущения. Разумеется, эта реакция тоже будет случайной, поэтому важны некоторые средние характеристики отклонений. Изучение таких характеристик для непрерывных систем требует более сложного математического аппарата (теории случайных процессов), поэтому мы ограничимся наиболее простым случаем дискретных систем, где достаточно элементарных сведений из теории вероятностей.

Итак, рассмотрим дискретную систему (2.1.14):

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0,$$

но теперь будем предполагать w_k случайным вектором со следующими свойствами:

1. Средние значения помех равны нулю: $Ew_k = 0$ (напомним, что знак E означает математическое ожидание).
2. Матрица ковариаций помех задана: $Ew_k w_k^T = F \succ 0$.
3. Помехи не коррелированы во времени: $Ew_k w_l^T = 0, k \neq l$.

Обозначим среднее значение вектора состояний $Ex_k = h_k$, а его матрицу вторых моментов — $Ex_k x_k^T = W_k$.

Теорема 2.1.9. *При сделанных предположениях*

$$h_k = 0, \quad W_{k+1} = AW_kA^\top + DFD^\top, \quad W_0 = 0. \quad (2.1.40)$$

Если матрица A шуровская, то существует

$$W = \lim_{k \rightarrow \infty} W_k,$$

и эта предельная матрица ковариаций удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$AWA^\top - W = -DFD^\top. \quad (2.1.41)$$

Доказательство. Действительно, вычисляя

$$Ex_{k+1} = AEx_k$$

и

$$Ex_{k+1}x_{k+1}^\top = E(Ax_k + Dw_k)(Ax_k + Dw_k)^\top,$$

с использованием свойств случайных помех 1–3, приходим к (2.1.40), а выписывая явное решение матричного рекуррентного соотношения (2.1.40) получаем существование предела $W = \lim_{k \rightarrow \infty} W_k$ (поскольку для шуровской матрицы A имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$), см. лемму И.3 из Приложения И. ■

Мы видим, что средние характеристики траекторий при случайных возмущениях качественно близки к гарантирующим характеристикам систем с ограниченными в L_∞ возмущениями.

2.1.8. Примеры

Пример 2.1.5. Приведем простой пример, показывающий, сколь велик может быть нежелательный эффект всплеска. Пусть $n = 10$, а система записана в канонической форме (1.4.8) с $a_i = 0$, $i = 1, \dots, 10$.

Воспользуемся результатами раздела 1.4.2 и потребуем, чтобы у характеристического полинома $p(s)$ замкнутой системы все корни были равны -2 , то есть

$$p(s) = (s + 2)^{10}.$$

Для этого, согласно теореме 1.4.4, элементы матрицы регулятора k_i должны выбираться равными коэффициентам этого полинома:

$$k_i = C_{10}^{i-1} 2^{11-i};$$

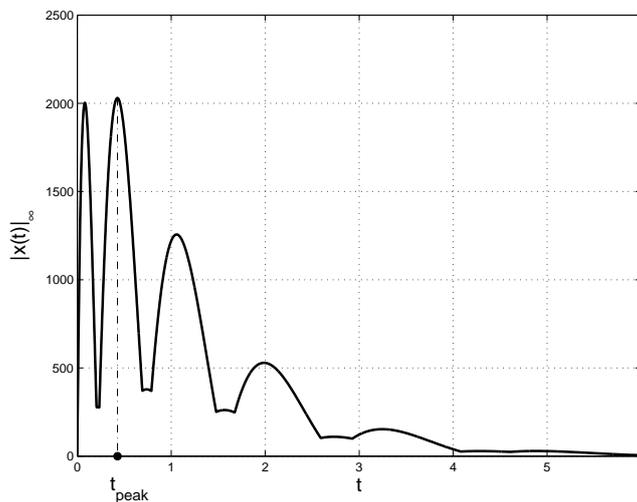


Рис. 2.1.5. Эффект всплеска из примера 2.1.5.

при этом наибольший из них равен $k_4 = C_{10}^3 2^7 = 15360$.

Таким образом, коэффициенты усиления в цепи обратной связи превышают $1,5 \cdot 10^4$. Более того, например, при

$$x_0 = (1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^\top$$

норма решения замкнутой системы достигает значения $|x(t)|_\infty \approx 2030$ при $t = t_{\text{peak}} \approx 0,4275$, то есть возрастает более чем в 2000 раз, прежде чем начать убывать (это не противоречит устойчивости системы — $x(t)$ действительно стремится к нулю при больших t , см. рис. 2.1.5). ▼

Пример 2.1.6. Рассмотрим двойной пружинный маятник, движущийся в вязкой среде.

Как и ранее, обозначим через x_1, x_2 — координаты левого и правого тела, через v_1, v_2 — их скорости, тогда вектор состояния имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix};$$

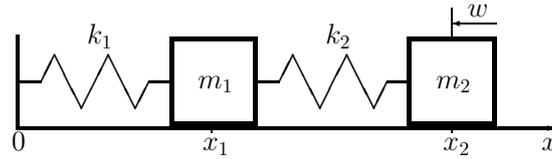


Рис. 2.1.6. Двойной пружинный маятник из примера 2.1.6.

и пусть на правое тело действует ограниченное внешнее возмущение $|w| \leq 1$, см. рис. 2.1.6. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \gamma v_1, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 - \gamma v_2 + \frac{1}{m_2}w, \end{aligned}$$

где k_1, k_2 — коэффициенты жесткости левой и правой пружины, m_1, m_2 — массы левого и правого тела, γ — коэффициент сопротивления среды.

Взяв в качестве выхода вектор

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

приходим к системе вида (2.1.23) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\gamma & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Примем следующие численные значения параметров:

$$k_1 = k_2 = 1, \quad m_1 = m_2 = 1, \quad \gamma = 0,2,$$

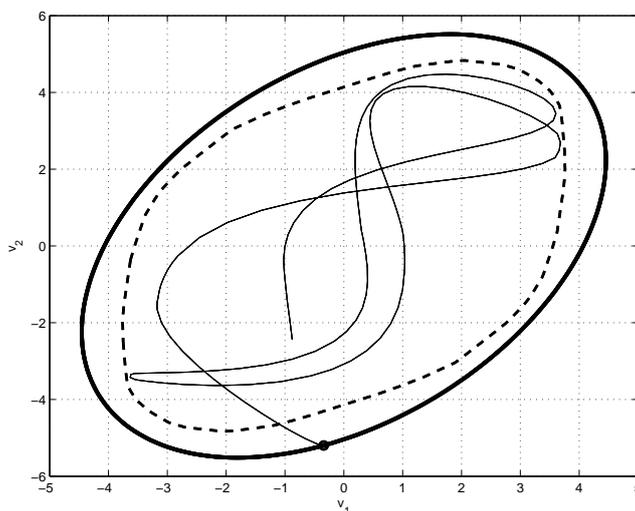


Рис. 2.1.7. Ограничивающий эллипс и траектория системы из примера 2.1.6.

и воспользуемся следствием 2.1.2. В результате находим матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 30,3772 & 40,7626 & -1,5189 & -4,0145 \\ * & 71,5351 & -0,0617 & -3,5768 \\ * & * & 19,8400 & 9,9839 \\ * & * & * & 30,4148 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному (по критерию следа) ограничивающему эллипсу с матрицей

$$C\hat{P}C^T = \begin{pmatrix} 19,8400 & 9,9839 \\ 9,9839 & 30,4148 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2.1.7 изображен получившейся минимальный ограничивающий эллипс; для сравнения пунктирной линией изображено истинное ограничивающее множество для выхода системы — двумерный образ множества достижимости (для состояния) при линейном преобразовании с матрицей C . На этом же рисунке показана траектория выхода системы при некотором выборе начального положения внутри соответствующего инвариантного эллипсоида и при воздействии на систему некоторого допустимого внешнего возмущения $w(t)$. Как видно из

рисунка, степень консерватизма полученной эллипсоидальной оценки весьма невелика. ▼

Пример 2.1.7. Сравним результаты, получаемые для евклидовых и интервальных ограничений, на примере двойного пружинного маятника (см. пример 2.1.6). Однако на этот раз будем предполагать, что внешнее возмущение

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

воздействует на каждое из тел, см. рис. 2.1.8.

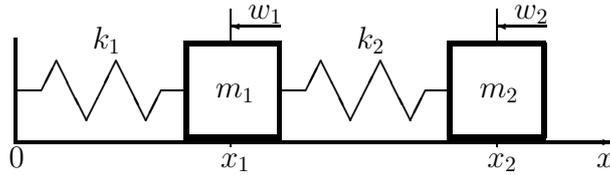


Рис. 2.1.8. Двойной пружинный маятник из примера 2.1.7.

Модель возмущенных колебаний системы будет описываться уравнением

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\gamma & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\gamma \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix} w,$$

в котором все входящие величины имеют тот же смысл, что и в примере 2.1.6.

В качестве выхода системы возьмем вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

При единичных значениях параметров и коэффициенте сопротивления среды $\gamma = 0,2$ приходим к системе (2.1.23) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае евклидовых ограничений (2.1.24) в соответствии со следствием 2.1.2 находим матрицу

$$\hat{P}_{\text{euc}} = \begin{pmatrix} 50,7643 & 51,1480 & -2,5382 & -2,5574 \\ * & 101,9123 & -2,5574 & -5,0956 \\ * & * & 50,1269 & 0,1279 \\ * & * & * & 50,2548 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующую минимальному ограничивающему эллипсу с матрицей

$$C\hat{P}_{\text{euc}}C^{\top} = \begin{pmatrix} 50,7643 & 51,1480 \\ 51,1480 & 101,9123 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, для случая интервальных ограничений

$$|w_1(t)| \leq 1, \quad |w_2(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0,$$

согласно теореме 2.1.7 находим матрицу

$$\hat{P}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 101,0902 & 94,6315 & -5,0545 & -3,3260 \\ * & 195,4406 & -6,1372 & -9,7720 \\ * & * & 107,0435 & -6,7913 \\ * & * & * & 99,8319 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида и соответствующую матрицу ограничивающего эллипса

$$C\hat{P}_{\text{int}}C^{\top} = \begin{pmatrix} 101,0902 & 94,6315 \\ 94,6315 & 195,4406 \end{pmatrix}.$$

Естественно, l_{∞} -эллипс оказался значительно больше l_2 -эллипса (содержа его внутри себя). ▼

2.2. Внешние возмущения: синтез

В предыдущем разделе 2.1 изучалось влияние внешних возмущений на поведение линейной системы. Теперь мы рассмотрим, как с помощью управления можно уменьшить это влияние.

2.2.1. Подавление внешних возмущений

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, с вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектором выходных переменных $z(t) \in \mathbb{R}^l$, вектором управления $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и вектором внешних возмущений $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в L_∞ -норме:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (2.2.2)$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма вектора; пара (A, B_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема.¹

Нашей целью является нахождение регулятора K в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (2.2.3)$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида для выхода z) подавляет воздействие внешних возмущений w .

Заметим, что наличие ненулевой компоненты $B_2 u$ в выходе системы (2.2.1) позволяет при минимизации выхода избежать появления больших значений управления.² Таким образом, матрица B_2 играет роль весового коэффициента, подобного матрице S в задаче о линейно-квадратичном регуляторе. Альтернативой такому подходу является явное введение ограничения на величину управления; эта ситуация будет освещена ниже.

В следующей теореме поиск оптимального регулятора сводится к задаче полуопределенного программирования (см. Приложение Г) и одномерной минимизации.

Теорема 2.2.1. Пусть $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{Z}$ — решение задачи

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2 Y C^\top + B_2 Z B_2^\top] \rightarrow \min \quad (2.2.4)$$

¹Чтобы избежать «смешивания» управлений и фазовых координат в выходе системы, можно положить $B_2^\top C = 0$, однако получаемые в дальнейшем результаты не предполагают выполнения этого условия; ср. со сноской на с. 18.

²Более того, если управление и возмущение действуют по одним и тем же каналам, то есть матрицы B_1 и D совпадают, то за счет больших величин управления выход системы можно сделать сколь угодно малым.

при ограничениях

$$AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^\top \preceq 0, \quad (2.2.5)$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (2.2.6)$$

$$P \succ 0 \quad (2.2.7)$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда регулятор (2.2.3) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (2.2.1), (2.2.2) и оптимально подавляет внешние возмущения, при этом матрица минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипсоида для выхода z замкнутой системы с $x_0 = 0$ дается выражением

$$C\hat{P}C^\top + C\hat{Y}^\top B_2^\top + B_2\hat{Y}C^\top + B_2\hat{Z}B_2^\top.$$

Доказательство. Система (2.2.1) с учетом (2.2.3) принимает замкнутый вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_1K)x + Dw, \\ z &= (C + B_2K)x. \end{aligned}$$

Применяя к ней теорему 2.1.6, приходим к задаче

$$\text{tr}[(C + B_2K)P(C + B_2K)^\top] \longrightarrow \min \quad (2.2.8)$$

при ограничениях (2.2.7) и

$$(A + B_1K)P + P(A + B_1K)^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^\top \preceq 0. \quad (2.2.9)$$

В матричное неравенство (2.2.9) переменные P и K входят нелинейным образом. Воспользуемся приемом, который использовался при квадратичной стабилизации в разделе 1.4.4. Введем матричную переменную

$$Y = KP, \quad Y \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

Тогда неравенство (2.2.9) примет линейный (по переменным P и Y) вид (2.2.5). Далее, с учетом введенной переменной Y целевая функция в (2.2.8) может быть представлена в виде

$$\text{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top].$$

Таким образом, приходим к задаче

$$\operatorname{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2YP^{-1}Y^\top B_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (2.2.5) и (2.2.7). Согласно Лемме Д.2, полученная задача эквивалентна задаче

$$\operatorname{tr}[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top] \longrightarrow \min$$

при ограничениях (2.2.5), (2.2.6) и (2.2.7), где $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$ — вспомогательная матричная переменная. ■

Заметим, что функция $V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$ с матрицей $\hat{P} \succ 0$, удовлетворяющей линейному матричному неравенству (2.2.5), является квадратичной функцией Ляпунова для системы (2.2.1), замкнутой регулятором \hat{K} , лишь *вне эллипсоида* с матрицей \hat{P} . С другой стороны, внутри этого эллипсоида (который является инвариантным для замкнутой системы) управление ограничено следующим образом:

$$|u| \leq \max_{x^\top \hat{P}^{-1}x \leq 1} |\hat{K}x| = \|\hat{K}\hat{P}^{1/2}\|.$$

Как и в задаче анализа (см. раздел 2.1.5), если в начальном состоянии системы имеется неопределенность вида

$$x(0) \in \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P_0^{-1}x \leq 1\}, \quad P_0 \succ 0,$$

то для получения равномерной оценки поведения траекторий дополнительно потребуем выполнения линейного матричного неравенства

$$P \succ P_0. \quad (2.2.10)$$

В случае же непосредственного задания начального условия $x_0 \neq 0$ потребуем выполнения линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succ 0. \quad (2.2.11)$$

Соответствующее неравенство при необходимости добавляется к совокупности ограничений в формулировках приводимых ниже результатов.

В дальнейших постановках задач будем указывать некоторое начальное условие x_0 системы, не обсуждая способы его учета.

При фиксированном α данная задача представляет собой задачу минимизации линейной функции (2.2.4) при ограничениях (2.2.5)–(2.2.6), задаваемых линейными матричными неравенствами, то есть задачу полуопределенного программирования. Это замечание относится ко всем результатам, приведенным в данном разделе.

Лемма 2.2.1. *Задача, сформулированная в теореме 2.2.1, имеет решение при любом значении параметра $\alpha > 0$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если пара (A, B) управляема, то и пара $(A + \beta I, B)$ управляема при любом $\beta \in \mathbb{R}$. В самом деле, по Теореме К.1

$$\text{rank}(A + \lambda I \quad B) = n \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{C}.$$

При этом если λ пробегает множество \mathbb{C} , то и $\lambda + \beta$ пробегает \mathbb{C} , поэтому

$$\text{rank}(A + (\lambda + \beta)I \quad B) = n \quad \text{для всех } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Далее, зафиксируем произвольное $\alpha > 0$ и выберем любую матрицу $R \succ 0$ такую, что

$$R \succcurlyeq \frac{1}{\alpha} DD^\top.$$

Поскольку пара (A, B_1) управляема, то управляема и пара матриц $(A + \frac{\alpha}{2}I, B_1)$, поэтому найдется K такое, что матрица $A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K$ устойчива. Тогда согласно лемме И.1 уравнение Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K\right)^\top = -R$$

имеет (единственное) положительно определенное решение $P \succ 0$. При этом

$$\begin{aligned} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top &= \\ = \left(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I + B_1K\right)^\top + \frac{1}{\alpha} DD^\top &= \\ = -R + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preccurlyeq 0. &\blacksquare \end{aligned}$$

Аналогичный результат будет справедлив и в том случае, когда в формулировке теоремы 2.2.1 имеется дополнительное ограничение

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

соответствующее заданному (ненулевому) начальному условию x_0 .

Наконец, нетрудно видеть, что лемма 2.2.1 останется справедливой и в случае неопределенности в начальном состоянии системы в виде дополнительного ограничения $P \succcurlyeq P_0$.

Замечание 2.2.1. В формулировке теоремы 2.2.1 отсутствует утверждение о строгой выпуклости целевой функции. При численном моделировании на тестовых примерах одномерная минимизация по α всегда оказывалась выпуклой, однако строгое обоснование этого факта пока остается открытой задачей. ▼

Как отмечалось выше, в качестве критерия оптимальности можно выбрать норму матрицы ограничивающего эллипсоида для выхода замкнутой системы (то есть минимизировать радиус шара, содержащего этот эллипсоид).

Следующая теорема является соответствующим аналогом теоремы 2.2.1.

Теорема 2.2.2. Пусть $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{Z}$ — решение задачи

$$\lambda \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2 Y C^\top + B_2 Z B_2^\top &\preccurlyeq \lambda I, \\ AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top &\preccurlyeq 0, \\ \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} &\succcurlyeq 0, \\ P &\succ 0, \end{aligned}$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Z = Z^\top \in \mathbb{R}^{p \times p}$, скалярной переменной λ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда статический регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (2.2.1) и оптимально подавляет внешние возмущения; при этом матрица минимального (по критерию нормы) ограничивающего эллипсоида для выхода z замкнутой системы с $x_0 = 0$ дается выражением

$$C \hat{P} C^\top + C \hat{Y}^\top B_2^\top + B_2 \hat{Y} C^\top + B_2 \hat{Z} B_2^\top.$$

Наличие ограничений на управление

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, x — вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектором выходных переменных $z(t) \in \mathbb{R}^l$, вектором управления $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и вектором внешних возмущений $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (2.2.2); пара (A, B) управляема, пара (A, C) наблюдаема.

В отличие от системы (2.2.1), в выходе системы (2.2.12) отсутствует компонента, зависящая от управления. Как уже отмечалось, минимизация выхода такой системы может осуществляться за счет сколь угодно больших значений управления, поэтому естественно потребовать введения явных ограничений на управление.

Как и в случае невозмущенной системы, будем накладывать на управление ограничение вида

$$|u(t)| \leq \mu \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (2.2.13)$$

достаточное условие выполнения которого вдоль траектории замкнутой системы дается следующим аналогом леммы 1.4.3.

Лемма 2.2.2. Пусть матрицы $P \succ 0$ и Y удовлетворяют неравенству

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0$$

при некотором $\alpha > 0$. Тогда выполнение линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succ 0$$

влечет выполнение ограничения (2.2.13) внутри эллипсоида с матрицей P для системы (2.2.12), (2.2.2), (2.2.3) с регулятором

$$K = YP^{-1}.$$

Как и в ситуации без внешних возмущений, возникает вопрос о допустимых значениях величины μ , который решается следующим образом.

Лемма 2.2.3. Пусть $\hat{\lambda}, \hat{P}$ — решение задачи

$$\lambda \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^\top \\ Y & \lambda I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

с матричными переменными $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$, скалярной переменной λ и скалярным параметром $\alpha > 0$.

Тогда при

$$\mu \geq \mu_{\min} \doteq \sqrt{\hat{\lambda}}$$

для системы (2.2.12) существует стабилизирующий регулятор по состоянию $u = Kx$, удовлетворяющий ограничению (2.2.13) внутри эллипсоида с матрицей \hat{P} .

Замечание 2.2.2. Допустимым диапазоном варьирования параметра α в лемме 2.2.3 является вся положительная полуось, а при каждом фиксированном значении α полученная задача является задачей полуопределенного программирования. Более того, при численном моделировании на тестовых примерах функция $\mu_{\min}(\alpha)$ всегда оказывалась выпуклой (строгое обоснование этого факта в настоящее время отсутствует, ср. с замечанием 2.2.1). На рис. 2.2.1 показан график этой функции для некоторой возмущенной системы.

Это наблюдение может быть использовано следующим образом. Пусть задан некоторый уровень μ допустимых управлений. Тогда проекция сечения надграфика функции на уровне μ на горизонтальную ось дает соответствующий этому уровню интервал $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ для значений параметра α , при которых справедлива лемма 2.2.2. ▼

Как и в случае без возмущений, при определении минимально возможного уровня управления ненулевые начальные условия можно учитывать, добавляя дополнительное ограничение (2.2.10) или (2.2.11).

Таким образом, приходим к следующему утверждению, которое представляет собой аналог теоремы 2.2.1, но при наличии явных ограничений на управление.

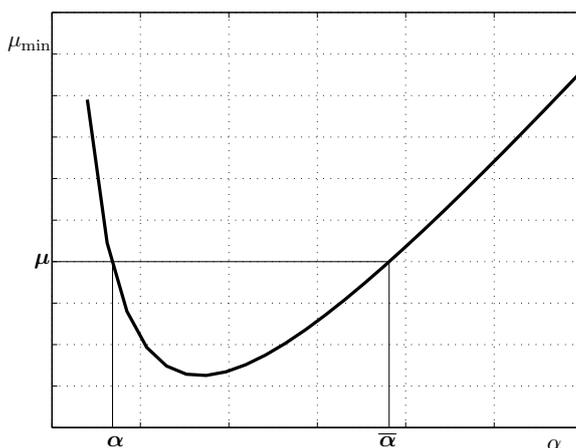


Рис. 2.2.1. График функции $\mu_{\min}(\alpha)$.

Теорема 2.2.3. Пусть величина μ удовлетворяет лемме 2.2.3. Тогда существует решение \hat{P}, \hat{Y} задачи

$$\text{tr } CPC^T \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$AP + PA^T + BY + Y^T B^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \succ 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

При этом регулятор (2.2.3) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему (2.2.1) при соблюдении ограничения (2.2.13), а матрица ограничивающего эллипсоида для выхода z замкнутой системы с $x_0 = 0$ дается выражением

$$C \hat{P} C^T.$$

В соответствии с замечанием 2.2.2, пределы варьирования параметра α в сформулированной выше задаче можно находить с использованием леммы 2.2.2.

2.2.2. H_∞ -оптимизация

В разделе 2.1.6 мы выяснили, что для возмущений, ограниченных в L_2 -норме, и для гармонических возмущений естественной мерой их влияния является H_∞ -норма выхода.

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$, с вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектором выходных переменных выходом $z(t) \in \mathbb{R}^l$, вектором управления $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и вектором внешних возмущений $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в L_2 -норме.

Мы обратимся к задаче синтеза: в простейшей постановке задача H_∞ -оптимизации заключается в выборе регулятора в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (2.2.15)$$

который минимизирует H_∞ -норму передаточной функции $H(s)$ замкнутой системы (2.2.14), то есть

$$\min_K \|H(s)\|_\infty, \quad H(s) = C_c(sI - (A_c + BK))^{-1}D,$$

где

$$A_c = A - B_1 K, \quad C_c = C + B_2 K,$$

в предположении, что K — стабилизирующий регулятор.

В соответствии с леммой 2.1.1 введем в рассмотрение функционал

$$J = \int_0^\infty z^\top z dt = \|z\|_2^2$$

и будем искать его минимум по всем стабилизирующим регуляторам вида (2.2.15); решение этой задачи и дает H_∞ -оптимальный регулятор.

Обратим внимание, что в (2.2.14) управление u включено в уравнение для выхода z для того, чтобы ограничить величину используемого

управления. С той же самой целью управление было введено в критерий J в задаче о линейно-квадратичном регуляторе.

Мы дадим два различных решения этой важной задачи. Одно будет проведено в пространстве состояний и опирается на описание достижимого множества. Другое, связанное с описанием исходной системы с помощью передаточных функций, будет дано в частотной области.

Решение в частотной области

Начнем с последнего подхода и для простоты ограничимся одномерным случаем. Задана линейная непрерывная система:

$$a(s)y(t) = b(s)u(t) + w(t),$$

где $a(s)$, $b(s)$ — полиномы от оператора дифференцирования $s = d/dt$; ищется регулятор в форме линейной обратной связи

$$u(t) = -C(s)y(t) = -\frac{f(s)}{g(s)}y(t)$$

(где $f(s)$, $g(s)$ — полиномы), который, во-первых, стабилизирует систему, а во-вторых, минимизирует H_∞ -норму передаточной функции $H(s)$ от входа w к выходу y .

Прежде всего, мы знаем, как записать все стабилизирующие регуляторы. Именно, введем некоторый устойчивый полином $\varphi(s)$, удовлетворяющий условию $\deg \varphi = \max\{\deg a, \deg b\}$, и рассмотрим функции

$$A(s) = \frac{a(s)}{\varphi(s)}, \quad B(s) = \frac{b(s)}{\varphi(s)}, \quad D(s) = \frac{1}{\varphi(s)}$$

из RH_∞ — пространства устойчивых реализуемых дробно-рациональных функций. Предположим, что полиномы $a(s)$ и $b(s)$ не имеют общих неустойчивых нулей, то есть функции $A(s)$ и $B(s)$ взаимнопросты. Тогда уравнение

$$AX + BY = 1$$

имеет решение $X^0(s), Y^0(s) \in RH_\infty$, и общий вид стабилизирующего регулятора дается выражением

$$C(s) = \frac{Y^0 + AQ}{X^0 - BQ}, \quad (2.2.16)$$

где $Q = Q(s)$ — произвольная функция из RH_∞ . Передаточная функция системы, замкнутой таким регулятором, примет вид

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{g(s)}{a(s)g(s) + b(s)f(s)} = \frac{D(s)}{A(s) + B(s)C(s)} = \\ &= D(s)(X^0(s) - B(s)Q(s)) \doteq \tilde{X}^0(s) - \tilde{B}(s)Q(s), \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

где

$$\tilde{X}^0 \doteq DX^0 = \frac{1}{\varphi(s)}X^0, \quad \tilde{B} \doteq DB = \frac{1}{\varphi(s)}B$$

(подчеркнем, что $\varphi(s)$ — устойчивый полином).

Итак, для всякой $Q \in RH_\infty$ регулятор (2.2.16) является стабилизирующим. Следовательно, задача минимизации $\|H(s)\|_\infty$ свелась к минимизации

$$\min \| \tilde{X}^0(s) - \tilde{B}(s)Q(s) \|_\infty$$

по $Q \in RH_\infty$. Вспоминая определение H_∞ -нормы, эту задачу можно рассматривать как задачу наилучшего приближения: заданы функции $\tilde{X}^0(j\omega)$, $\tilde{B}(j\omega)$, требуется найти $Q(j\omega)$, минимизирующую

$$\max_\omega | \tilde{X}^0(j\omega) - \tilde{B}(j\omega)Q(j\omega) |.$$

В некоторых случаях решение находится совсем просто. Пусть, например, полином $b(s)$ устойчив (иначе говоря, разомкнутая система — минимально-фазовая), тогда можно взять

$$Q(s) \doteq \frac{\tilde{X}^0(s)}{\tilde{B}(s)} = \frac{X^0(s)}{B(s)}.$$

Действительно, тогда $Q(s)$ имеет устойчивый знаменатель и

$$Q(s) \in RH_\infty,$$

при этом $\|H(s)\|_\infty = 0$.

Явное решение можно найти и в случае, когда $b(s)$ имеет один неустойчивый корень s_0 , $\operatorname{Re} s_0 > 0$. Для этого выберем

$$Q(s) \doteq \frac{\tilde{X}^0(s) - \tilde{X}^0(s_0)}{\tilde{B}(s)} = \frac{X^0(s) - X^0(s_0)}{B(s)}. \quad (2.2.18)$$

Тогда $Q \in RH_\infty$ (считаем, что в (2.2.18) единственный неустойчивый корень s_0 знаменателя сокращен с корнем s_0 в числителе), и $H(s) = \tilde{X}^0(s_0) = \operatorname{const}$, то есть $\|H(s)\|_\infty = |\tilde{X}^0(s_0)|$. С другой стороны, при любой $Q \in RH_\infty$, $H(s)$ — аналитическая функция в правой

полуплоскости (по построению, так как C , определяемый (2.2.16), — стабилизирующий регулятор), поэтому по известной теореме теории аналитических функций ее максимум модуля достигается на границе, то есть для любой Q будет $\|H(s)\|_\infty \geq |H(s_0)| = |\tilde{X}^0(s_0)|$ (последнее равенство следует из (2.2.17), поскольку $\tilde{B}(s_0) = 0$). Поэтому $Q(s)$ вида (2.2.18) минимизирует H_∞ -норму передаточной функции.

Общий случай произвольных нулей полинома $b(s)$ анализируется следующим образом. Пусть s_1, \dots, s_n — корни $b(s)$, лежащие в правой полуплоскости:

$$B(s_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \operatorname{Re} s_i > 0.$$

Введем число $\gamma > 0$; нас интересует, можно ли найти $Q \in RH_\infty$ такое, что

$$\|\tilde{X}^0 - \tilde{B}Q\|_\infty \leq \gamma. \quad (2.2.19)$$

Обозначим

$$G_\gamma \doteq \frac{1}{\gamma}(\tilde{X}^0 - \tilde{B}Q), \quad (2.2.20)$$

тогда $G_\gamma \in RH_\infty$, и

$$G_\gamma(s_i) = \frac{1}{\gamma}\tilde{X}^0(s_i) \doteq n_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

в остальном $G_\gamma(s)$ произвольна. Поэтому задача записывается так: найти (если таковое существует) $G_\gamma \in RH_\infty$ из условий

$$\|G_\gamma\|_\infty \leq 1, \quad G_\gamma(s_i) = n_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2.21)$$

Решение этой проблемы дается следующей теоремой Неванлинны — Пика.

Теорема 2.2.4 (Неванлинна — Пик). Составим матрицу Пика — матрицу P размерности $n \times n$ с элементами

$$p_{ij} = \frac{1 - n_i n_j^*}{s_i + s_j^*};$$

это эрмитова матрица. Задача (2.2.21) разрешима тогда и только тогда, когда $P \succ 0$.

Существует также простой рекуррентный алгоритм, позволяющий в случае $P \succ 0$ построить G_γ , удовлетворяющее (2.2.21). Тогда из формулы (2.2.20) можно найти Q , для которой верно (2.2.19), а затем и

регулятор C из формулы (2.2.16). Подбором γ можно решить и задачу отыскания минимального γ , для которого задача (2.2.21) разрешима; соответствующий регулятор будет обеспечивать минимум $\|H(s)\|_\infty$.

Известны и другие способы решения задачи минимизации H_∞ -нормы для систем, заданных с помощью передаточных функций. Мы не будем на них останавливаться, а перейдем к иному подходу — решению задач H_∞ -оптимизации в пространстве состояний.

Решение в пространстве состояний

Как было показано выше, существуют методы решения этой задачи, исходящие из описания системы в частотной области (то есть с помощью передаточных функций). Они используют довольно сложный математический аппарат и непросты с вычислительной точки зрения. Мы же снова воспользуемся техникой линейных неравенств и сведем задачу к полуопределенному программированию.

Преобразуем величину $\|z\|_2^2$:

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \int_0^\infty (Cx + B_2u)^\top (Cx + B_2u) dt = \\ &= \int_0^\infty (x^\top C^\top Cx + 2u^\top B_2^\top Cx + u^\top B_2^\top B_2u) dt. \end{aligned}$$

Далее будем предполагать,¹ что $B_2^\top C = 0$; тогда

$$\|z\|_2^2 = \int_0^\infty (x^\top C^\top Cx + u^\top B_2^\top B_2u) dt = \int_0^\infty x^\top (C^\top C + K^\top B_2^\top B_2K)x dt.$$

На основании теоремы 2.1.8 заключаем, что если матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} A_c^\top Q + QA_c + C^\top C + K^\top B_2^\top B_2K & QD \\ D^\top Q & -\gamma I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad (2.2.22)$$

где $A_c = A + B_1K$, имеет решение $Q \succ 0$, то $J \leq \gamma$.

¹Это предположение не принципиально и вводится исключительно для упрощения выкладок. В общем случае можно воспользоваться соответствующей заменой переменных.

Умножив полученное неравенство (2.2.22) слева и справа на матрицу $\text{diag}\{P \ 0\}$, где $P = Q^{-1}$, имеем

$$\begin{pmatrix} \Omega & D \\ D^\top & -\gamma I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\Omega = P(A + B_1K)^\top + (A + B_1K)P + PC^\top CP + PK^\top B_2^\top B_2KP,$$

или, дважды применяя лемму Шура,

$$\begin{pmatrix} P(A + B_1K)^\top + (A + B_1K)P & D & PC^\top & PK^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

После замены $Y = KP$, окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0. \quad (2.2.23)$$

Таким образом, если линейное матричное неравенство (2.2.23) выполняется при некоторых $P \succ 0$, Y и γ , то $J \leq \gamma$, а соответствующий стабилизирующий регулятор получается как $K = YP^{-1}$.

Замечание 2.2.3. Следует отметить, что будучи H_∞ -оптимальным, полученный регулятор $K = YP^{-1}$ может обладать некоторыми недостатками. В частности, из-за нестрогости матричного неравенства (2.2.23) он может не оказаться стабилизирующим (замкнутая система будет находиться на границе устойчивости); строгая знакоопределенность матрицы P функции Ляпунова не гарантируется и др. Можно предложить следующий простейший способ получения стабилизирующего регулятора в данном случае: заменим левый верхний блок в (2.2.23) на

$$AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top + 2\sigma P,$$

где $\sigma > 0$ — желаемая степень устойчивости замкнутой системы. ▼

Итак, приходим к следующему результату.

Теорема 2.2.5. Пусть $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{\gamma}$ — решение задачи

$$\gamma \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + 2\sigma P & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярной переменной γ .

Тогда стабилизирующий регулятор (2.2.15) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

будет минимизировать функционал $J = \sup_w \|z\|_2^2$ на решениях системы (2.2.14):

$$J_{\min} = \hat{\gamma},$$

а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1} x$$

является функцией Ляпунова для замкнутой системы со степенью устойчивости σ .

Выше рассматривалась задача H_∞ -оптимизации в предположении, что состояние системы известно. Аналогичная техника возможна и в задаче управления по выходу. Кроме того, возможен и ряд других, более общих постановок задачи, а также ее дискретные аналоги. Не будем на этом останавливаться, так как выкладки становятся значительно сложнее, а идейная сторона решения мало меняется.

2.2.3. Подавление случайных возмущений

Рассмотрим задачу о выборе регулятора, в максимальной степени подавляющего случайные помехи. Вновь ограничимся случаем дискретных систем. Итак, мы имеем дело с системой

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Dw_k, \quad x_0 = 0,$$

со случайными w_k , удовлетворяющими тем же предположениям 1–3 раздела 2.1.7 (то есть несмещенность, ограниченность ковариаций и некорррелированность). Нашей целью является выбор регулятора в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k,$$

которая делает систему устойчивой и при этом минимизирует средний разброс траекторий на бесконечности, то есть минимизирует след предельной матрицы ковариаций W , даваемой теоремой 2.1.9. Подставляя в уравнение (2.1.41) матрицу замкнутой системы $A + BK$ вместо матрицы A , получаем для W уравнение

$$(A + BK)W(A + BK)^{\top} - W = -DFD^{\top},$$

которое после стандартной замены $Y = KW$ переходит в линейное матричное неравенство относительно матриц W, Y :

$$AWA^{\top} + BYA^{\top} + AY^{\top}B^{\top} - W = -DFD^{\top}, \quad W \succ 0.$$

Минимизируя какую-либо заданную характеристику матрицы W (например, $\text{tr } W$ или CWC^{\top} при наличии скалярного выхода $y = Cx$) при этих ограничениях, мы находим решение \widehat{W}, \widehat{Y} , а по нему — оптимальный регулятор

$$K = \widehat{Y}\widehat{W}^{-1}.$$

Таким образом, случайность помех не вносит принципиальной разницы в решение задачи о синтезе регулятора, когда целью является минимизация отклонений от равновесия в среднем. Аналогичная ситуация имеет место и в другой постановке задачи о стохастическом управлении. В разделе 1.5.2 мы рассматривали задачу о наилучшем линейно-квадратичном регуляторе для систем без возмущений. Для ее стохастического дискретного варианта (на систему действуют случайные помехи) можно ставить аналогичную задачу, когда оптимизируется сумма средних квадратов отклонений траектории и управления. Такая задача нередко называется *LQG* (*Linear Quadratic Gaussian*), поскольку в ее постановке естественно предполагать дополнительно, что помехи являются гауссовскими. Для нее выписывается решение, являющееся полным аналогом линейно-квадратичного регулятора без помех.

2.2.4. Примеры

Пример 2.2.1. Вновь обратимся к двухмассовой системе из примера 1.4.3, но на этот раз будем предполагать, что на систему воздействует внешнее возмущение (см. рис. 2.2.2). Пусть к левому телу

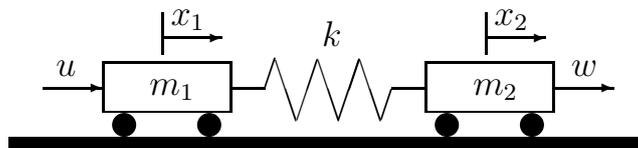


Рис. 2.2.2. Двухмассовая система из примера 2.2.1.

приложено управление u для компенсации внешнего возмущения w , действующего на правое тело. Возмущение предполагается произвольным, но ограниченным в любой момент времени, то есть удовлетворяют ограничению (2.2.2).

В прежних обозначениях непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_1}u, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w.\end{aligned}$$

Взяв в качестве регулируемого выхода вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix},$$

приходим к системе вида (2.2.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ m_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ m_2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При единичных значениях параметров системы

$$k = 1, \quad m_1 = m_2 = 1$$

с помощью теоремы 2.2.1 был найден оптимальный регулятор

$$\hat{K} = (-2,2779 \quad 0,6450 \quad -2,3373 \quad -1,6594)$$

и матрица

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 4,8143 & 1,8060 & -0,9340 & -3,6538 \\ * & 6,7449 & 2,9531 & -1,3085 \\ * & * & 4,9266 & -1,5907 \\ * & * & * & 5,4467 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному ограничивающему эллипсу для выхода z замкнутой системы с матрицей

$$(C + B_2 \hat{K}) \hat{P} (C + B_2 \hat{K})^\top = \begin{pmatrix} 6,7449 & -4,4941 \\ -4,4941 & 8,3819 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2.2.3 этот эллипс изображен вместе с траекторией выхода системы при некотором выборе начального положения внутри соответствующего инвариантного эллипсоида и при воздействии на систему внешнего возмущения $w(t) = \text{sign} \sin(t/3)$.

Видим, что консерватизм полученной оценки невелик: траектория выхода системы подходит близко к границе ограничивающего эллипса.

На рис. 2.2.4 приведены графики внешнего возмущения $w(t)$ (пунктиром) и синтезированного управления $u(t)$ (сплошной линией).

В соответствии с вышесказанным, внутри инвариантного эллипсоида с полученной матрицей \hat{P} управление остается ограниченным величиной

$$|u| \leq \|\hat{K} \hat{P}^{1/2}\| = 2,8951.$$

Мы отмечали, что в системе (2.2.1) матрица B_2 играет роль весового коэффициента при управлении; уменьшение ее ненулевого элемента приводит к большим значениям управления и, как следствие, к

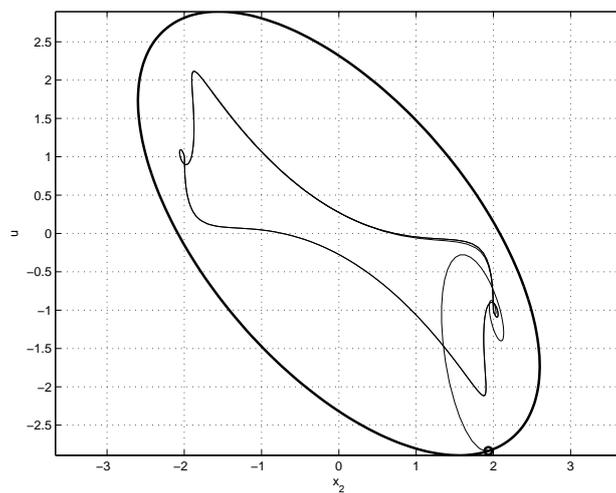


Рис. 2.2.3. Ограничивающий эллипс и траектория выхода системы из примера 2.2.1.

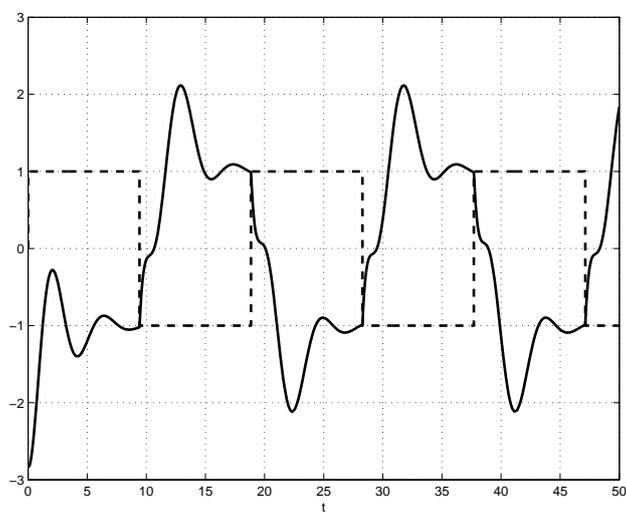


Рис. 2.2.4. Внешнее возмущение $w(t)$ и управление $u(t)$ для системы из примера 2.2.1.

уменьшению размера инвариантного эллипсоида и ограничивающего эллипса для выхода. Так, при выборе

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

приходим к результатам, изображенным на рис. 2.2.5 и 2.2.6.

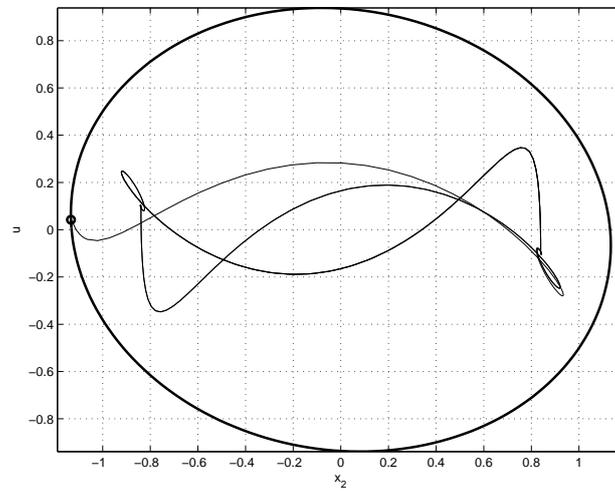


Рис. 2.2.5. Ограничивающий эллипс и траектория системы из примера 2.2.1 при $B_2 = (0 \ 0,1)^T$.

Пример 2.2.2. Рассмотрим задачу из примера 2.2.1. На этот раз компонента управления в выходе будет отсутствовать, а ограничение на управление наложим явным образом.

Пусть выход системы представим вектором

$$z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

то есть матрица выхода системы имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

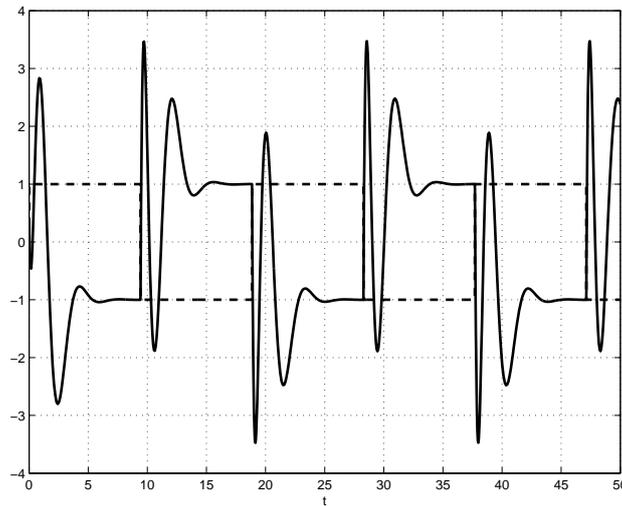


Рис. 2.2.6. Графики внешнего возмущения $w(t)$ и управления $u(t)$ для системы из примера 2.2.1 при $B_2 = (0 \ 0,1)^T$.

Прежде всего, в соответствии с леммой 2.2.3 норма стабилизирующего управления не может быть меньше, чем

$$\mu_{\min} = 2,0006,$$

поэтому в качестве ограничения на управление выберем $\mu = 2,8951$, то есть то, которое получилось в задаче без явных ограничений на управление (см. пример 2.2.1). Согласно лемме 2.2.2 это дает следующий интервал варьирования параметра:

$$0,01 \leq \alpha \leq 0,48.$$

Воспользовавшись теоремой 2.2.3, находим

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 6,0541 & 1,1046 & -0,7985 & -4,3065 \\ * & 9,5265 & 4,0151 & -1,2565 \\ * & * & 7,8585 & -3,8134 \\ * & * & * & 8,7533 \end{pmatrix}$$

и регулятор

$$\hat{K} = (-1,1665 \ -0,0484 \ -1,2256 \ -0,7984),$$

соответствующий минимальному ограничивающему эллипсу для выхода z с матрицей

$$C\hat{P}C^T = \begin{pmatrix} 6,0541 & 1,1046 \\ 1,1046 & 9,5265 \end{pmatrix}.$$

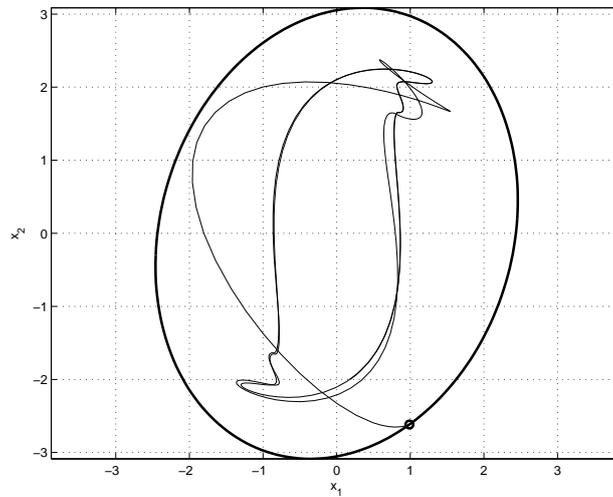


Рис. 2.2.7. Ограничивающий эллипс и траектория системы из примера 2.2.2.

На рис. 2.2.7 изображен найденный ограничивающий эллипс и некоторая траектория системы; в качестве внешнего возмущения взято $w(t) = \text{sign} \sin(t/3)$.

На рис. 2.2.8 приведены графики внешнего возмущения $w(t)$ и управления $u(t)$, величина которого почти достигает разрешенного допустимого уровня.

Сравнивая эти результаты с полученными для системы из примера 2.2.1, убеждаемся, что использование явных ограничений на управление приводит к схожему поведению замкнутой системы. ▼

Пример 2.2.3. Вновь рассмотрим двухмассовую систему из примера 1.4.3, но на этот раз будем предполагать, что компоненты ограниченного внешнего возмущения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad |w(t)| \leq 1,$$

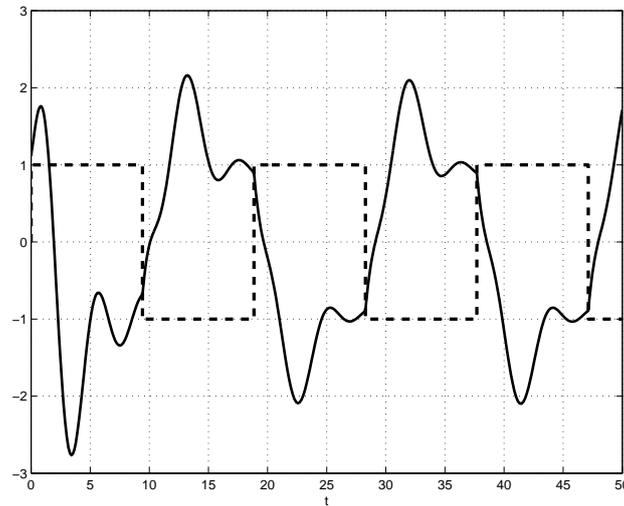


Рис. 2.2.8. Внешнее возмущение $w(t)$ и управление $u(t)$ для системы из примера 2.2.2.

воздействуют на каждое из тел, см. рис. 2.2.9.

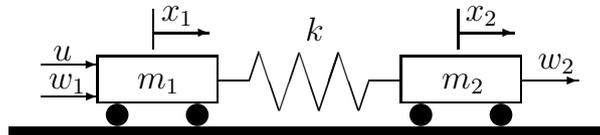


Рис. 2.2.9. Двухмассовая система из примера 2.2.3.

Взяв в качестве регулируемого выхода системы вектор

$$z = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix},$$

приходим к системе вида (2.2.1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее параметры системы предполагаются единичными.

С помощью условий теоремы 2.2.1 находим оптимальный регулятор

$$\widehat{K} = (-2,5868 \quad 0,8140 \quad -2,5096 \quad -1,8295)$$

и матрицу

$$(C + B_2 \widehat{K}) \widehat{P} (C + B_2 \widehat{K})^\top = \begin{pmatrix} 7,1762 & -4,6513 \\ -4,6513 & 13,7513 \end{pmatrix}$$

минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипса для выхода системы.

Для сравнения построим для этой же системы линейно-квадратичный регулятор (с единичными весовыми матрицами). Имеем:

$$K_{\text{лqr}} = (-0,6285 \quad -0,0786 \quad -1,1212 \quad -0,8069).$$

На рис. 2.2.10 изображен минимальный ограничивающий эллипс, соответствующий оптимальному регулятору \widehat{K} . На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы и некотором допустимом внешнем возмущении $w(t)$ построены две траектории выходной переменной: сплошной линией — траектория, соответствующая регулятору \widehat{K} , а пунктиром — траектория, соответствующая регулятору $K_{\text{лqr}}$. Обратим внимание, что траектория системы, замкнутой регулятором $K_{\text{лqr}}$, выходит за пределы минимального ограничивающего эллипса, тогда как траектория системы, замкнутой регулятором \widehat{K} , естественно, в нем и остается.

Для сравнения в качестве критерия выберем норму матрицы ограничивающего эллипса для выхода системы. С помощью теоремы 2.2.2 получаем оптимальный регулятор

$$\widehat{K} = (-2,3272 \quad 1,0534 \quad -2,3912 \quad -1,7859)$$

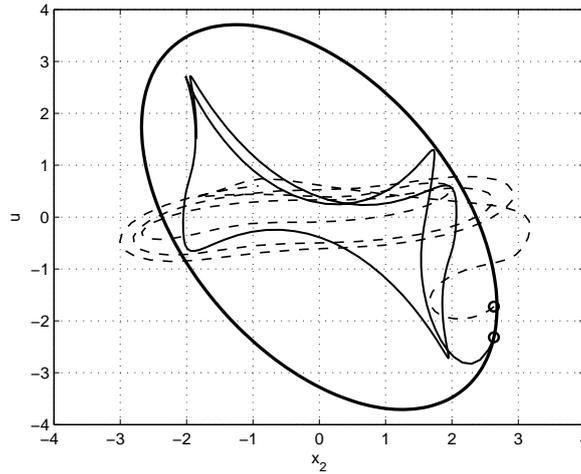


Рис. 2.2.10. Ограничивающий эллипс и траектории системы из примера 2.2.3.

и соответствующий ему минимальный ограничивающий эллипс с матрицей

$$(C + B_2 \hat{K}) \hat{P} (C + B_2 \hat{K})^\top = \begin{pmatrix} 11,2055 & -2,5846 \\ -2,5846 & 13,6202 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2.2.11 изображен найденный минимальный ограничивающий эллипс для выхода системы, замкнутой регулятором \hat{K} . На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы и наихудшем внешнем возмущении $\tilde{w}(t)$ построены две траектории выходной переменной: сплошной линией — траектория, соответствующая регулятору \hat{K} , и пунктиром — траектория, соответствующая регулятору K_{Iqr} . Отметим, что и в этом случае траектория системы, замкнутой регулятором K_{Iqr} , выходит за пределы ограничивающего эллипса, тогда как траектория системы, замкнутой регулятором \hat{K} , естественно, в нем и остается. ▼

Пример 2.2.4. Рассмотрим линейную систему десятого порядка

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + Dw, \quad x(0) = 0$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

ср. с примером 2.1.5.

В качестве минимизируемого выхода системы рассмотрим вектор

$$z = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ u)^\top,$$

то есть

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теоремой 2.2.1, находим следующий оптимальный регулятор

$$\hat{K} = (-2,1652 \quad -14,7898 \quad -48,9315 \quad -102,9161 \quad -151,9990 \quad \dots \\ \dots \quad -164,3900 \quad -131,6554 \quad -77,0149 \quad -31,4702 \quad -8,1080),$$

при этом степень устойчивости замкнутой системы равна

$$\hat{\sigma} = 0,3945.$$

На рис. 2.2.12 показана зависимость от времени нормы $|x(t)|$ фазового состояния рассматриваемой системы, замкнутой оптимальным

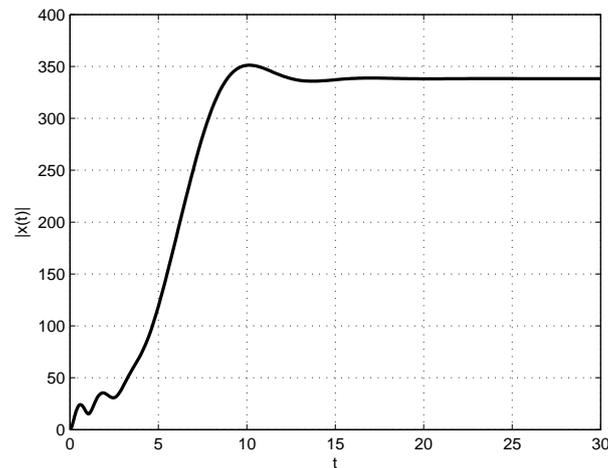


Рис. 2.2.12. Норма вектора состояния замкнутой системы при подавлении внешних возмущений из примера 2.2.4.

регулятором \hat{K} , при *ступенчатом* внешнем возмущении. В этом случае установившемуся режиму соответствует

$$|\bar{x}| \approx 338,$$

а перерегулирование (см. конец раздела 1.4.2) составляет менее 4%.

С другой стороны, если пытаться стабилизировать систему прямым размещением полюсов (см. раздел 1.4.2) с той же степенью устойчивости, получим регулятор

$$K = \begin{pmatrix} -0,0001 & -0,0023 & -0,0264 & -0,1784 & -0,7916 & \dots \\ \dots & -2,4079 & -5,0864 & -7,3675 & -7,0034 & -3,9450 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2.2.13 (также при ступенчатом внешнем возмущении) показана зависимость от времени нормы фазового состояния системы, замкнутой регулятором K . При этом установившемуся режиму соответствует величина $|\bar{x}| \approx 3 \cdot 10^5$, то есть почти в 900 раз больше. Видим, что и время установления оказалось заметно бóльшим.

Следует отметить, что столь бóльшой выигрыш дается не даром: норма коэффициента усиления \hat{K} примерно в 20 раз больше нормы коэффициента усиления K , при этом требуемый ресурс управления увеличивается примерно на порядок. ▼

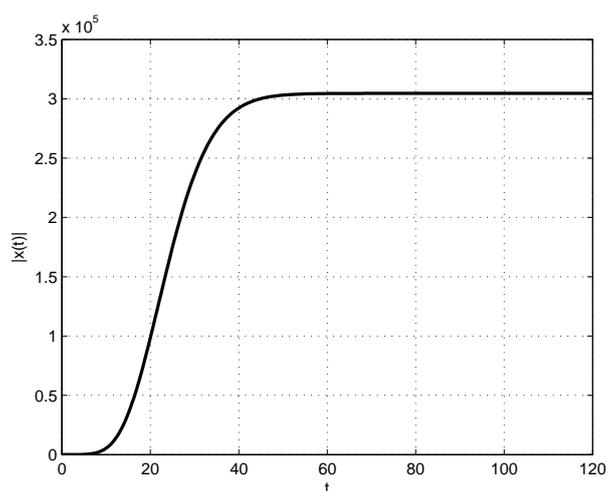


Рис. 2.2.13. Норма вектора состояния замкнутой системы при размещении полюсов из примера 2.2.4.

2.3. Задачи оценивания

2.3.1. Эллипсоидальное оценивание

Выше, в разделе 2.1.5 рассматривались задачи анализа, то есть исследовалось поведение систем, подверженных влиянию ограниченных внешних возмущений, и оценивалось множество возможных значений выхода с помощью инвариантных эллипсоидов. В настоящем разделе с этих же позиций будет рассмотрена проблема *фильтрации*, то есть оценки состояния системы (или ее оцениваемого выхода) по имеющимся измерениям, когда и динамика системы, и измерения содержат внешние возмущения.

При случайных возмущениях эта задача допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана (см. раздел 2.3.2), однако во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным; часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными. В этом случае можно строить *гарантированные* (а не вероятностные) оценки состояний.

А именно, для линейных *стационарных* систем, когда все пара-

метры модели не зависят от времени, нужно найти такую оценку состояния, чтобы ошибка была гарантированно заключена в эллипсоид (*инвариантный эллипсоид*) для всех моментов времени, то есть получаемая оценка будет равномерной; сам фильтр также нужно найти в классе линейных стационарных фильтров. В этом классе задач и оценок проблема оказывается полностью разрешимой, то есть удастся построить *оптимальный* фильтр и оценку состояния.

Соответствующий подход легко обобщается и на дискретный случай, и на случай больших начальных уклонений.

Рассмотрим непрерывную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, с фазовым состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением (шумом) $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (2.1.24); пара (A, D_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y . Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния \hat{x} , включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C\hat{x}$:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0, \quad (2.3.2)$$

где $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее — он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица L . Эта структура такая же, как в *наблюдателе Люенбергера* (см. раздел 1.4.3).

Введем в рассмотрение *невязку*

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

характеризующую точность фильтрации. Задачей является нахождение минимального инвариантного эллипсоида \mathcal{E} , содержащего невязку e . Таким образом, оценивается асимптотическая (а при малых уклонениях и равномерная по t) точность фильтрации.

Прежде всего отметим, что из условия наблюдаемости следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида (а управляемость гарантирует его полномерность). Инвариантных эллипсоидов много, цель — найти минимальный из них при фиксированной стабилизирующей L , а затем добиться минимума этого эллипсоида по L .

По-прежнему удобно считать минимальным тот эллипсоид, у которого минимален след его матрицы.

Теорема 2.3.1. Пусть \widehat{Q}, \widehat{Y} — решение задачи

$$\text{tr } H \longrightarrow \min \quad (2.3.3)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA - YC - C^\top Y^\top + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ D_1^\top Q - D_2^\top Y^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (2.3.4)$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (2.3.5)$$

$$Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$\widehat{L} = \widehat{Q}^{-1} \widehat{Y},$$

а минимальный инвариантный эллипсоид, содержащий невязку системы (2.3.1), (2.3.2) с $x_0 = 0$, определяется матрицей

$$\widehat{P} = \widehat{Q}^{-1}.$$

Доказательство. Согласно (2.3.1), (2.3.2) невязка $e(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC)e + (D_1 - LD_2)w. \quad (2.3.6)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V(e) = e^\top Q e, \quad Q = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (2.3.6).

Воспользовавшись теоремой 2.1.6, получаем, что условие инвариантности эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{e \in \mathbb{R}^n : e^\top Q e \leq 1\} \quad (2.3.7)$$

эквивалентно выполнению линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} (A - LC)^\top Q + Q(A - LC) + \alpha Q & Q(D_1 - LD_2) \\ (D_1 - LD_2)^\top Q & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0$$

при некотором $\alpha > 0$.

Вводя матричную переменную

$$Y = QL$$

и тем самым исключая L , приходим к линейному матричному неравенству (2.3.4).

Таким образом, приходим к задаче

$$\text{tr } Q^{-1} \longrightarrow \min$$

при ограничении (2.3.4). Согласно следствию Д.3 из Приложения Д, полученная задача эквивалентна задаче минимизации $\text{tr } H$ при ограничениях (2.3.4) и (2.3.5), где $H = H^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — вспомогательная матричная переменная. ■

Отметим, что при фиксированном α задача (2.3.3)–(2.3.4) является задачей полуопределенного программирования (см. Приложение Г); при этом одномерная минимизация по α всегда оказывается выпуклой.

Из доказательства теоремы 2.3.1 вытекает, что квадратичная форма $V(x) = x^T Q x$ с матрицей $Q \succ 0$, удовлетворяющей линейному матричному неравенству (2.3.4), является квадратичной функцией Ляпунова для невязки системы (2.3.1), (2.3.2) вне эллипсоида (2.3.7).

Замечание 2.3.1. Если известно начальное состояние $x(0) = x_0$ системы (2.3.1), то к условиям теоремы 2.3.1 добавляется ограничение

$$x_0^T Q x_0 \leq 1,$$

означающее, что $x_0 \in \mathcal{E}$.

Если же имеется следующая априорная информация о начальном состоянии системы:

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_0^{-1} x \leq 1\}, \quad P_0 \succ 0,$$

то к системе ограничений теоремы 2.3.1 добавляется линейное матричное неравенство

$$Q \preceq P_0^{-1},$$

означающее, что $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$.

В любом из этих случаев, ввиду $\hat{x}(0) = 0$, имеем

$$e(0) = x(0) \in \mathcal{E},$$

что и гарантирует равномерную оценку точности фильтрации. ▼

Исходная задача синтеза оптимальной (в смысле следа инвариантного эллипсоида, содержащего невязку) матрицы фильтра (2.3.2) для системы (2.3.1) эквивалентна полученной задаче (2.3.3)–(2.3.4), то есть полученные условия являются необходимыми и достаточными.

Замечание 2.3.2. Нередко нужно оценивать качество фильтрации не всех координат состояния x , а лишь некоторых. Пусть имеется регулируемый выход

$$y_1 = C_1 x \quad (2.3.8)$$

▼

(например, одна из координат состояния) и желательно сделать ошибку его оценки

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = C_1(x - \hat{x})$$

возможно малой. Тогда задача сводится к минимизации $\text{tr } C_1 P C_1^\top$, что достигается заменой в формулировке теоремы 2.3.1 линейного матричного неравенства (2.3.5) на неравенство

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^\top & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Отметим также, что можно воспользоваться и иными критериями оптимальности вместо суммы квадратов полуосей эллипсоида. Например, можно минимизировать L_∞ -норму невязки, то есть радиус шара, содержащего эллипсоид \mathcal{E} . Для этого потребуем

$$r \longrightarrow \max$$

при дополнительном ограничении

$$Q \succcurlyeq rI.$$

2.3.2. Фильтр Калмана

Задача оценивания состояний, которая рассматривалась в предыдущем разделе в детерминированной постановке (когда помехи предполагались ограниченными, а в остальном произвольными), имеет гораздо более популярную стохастическую формулировку. Эта формулировка и возникла заметно раньше, и имеет очень простое и красивое решение, называемое *фильтром Калмана*. Мы рассмотрим лишь простейший вариант фильтра, относящийся к дискретным системам, чтобы избежать излишних математических трудностей, связанных со

случайными процессами в непрерывном времени. Впрочем, мы и раньше, анализируя стохастические возмущения, поступали подобным образом.

Итак мы рассматриваем задачу

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + w_k, & x(0) &= x_0, \\y_k &= Cx_k + v_k,\end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, с фазовым состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$. Мы несколько изменили обозначения для удобства, теперь у нас есть случайная помеха $w_k \in \mathbb{R}^n$ и случайная ошибка измерений $v_k \in \mathbb{R}^m$. Относительно случайных величин предположим следующее:

1. $Ew_k = 0$, $Ew_k w_k^\top = Q$.
2. $Ev_k = 0$, $Ev_k v_k^\top = R \succ 0$.
3. $Ex_0 = 0$, $Ex_0 x_0^\top = P_0$.
4. Все величины w_k, w_l ($k \neq l$), v_k, v_l ($k \neq l$), x_0 попарно некоррелированы.

Предположим, мы хотим оценить x_k по измерениям y_0, \dots, y_k , при этом матрицы A, C, Q, R, P_0 предполагаются известными.

Здесь уместно напомнить некоторые основные факты теории статистического оценивания. А именно, пусть имеются измерения $y_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 0, 1, \dots, k$, которые зависят от неизвестных параметров $\theta \in \mathbb{R}^n$ линейным образом:

$$y_i = H_i \theta + \varepsilon_i,$$

где матрицы H_i известны, а случайные ошибки ε_i взаимно независимы, имеют нулевое среднее и одинаковую матрицу ковариаций: $E\varepsilon_i = 0$, $E\varepsilon_i \varepsilon_i^\top = S \succ 0$. Тогда *метод наименьших квадратов*

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=0}^k (S^{-1}(y_i - H_i \theta), (y_i - H_i \theta))$$

является наилучшим линейным способом оценивания, а при дополнительном предположении о *гауссовости* ошибок он является наилучшим и в более широком классе оценок, чем линейные.

Если применить такой подход к нашей задаче, то метод наименьших квадратов сведется к квадратичной задаче оптимизации, которая

очень близка к задаче о линейно-квадратичном регуляторе. Выкладки, которые совершенно аналогичны описанным в разделе 3.5.2, приводят к следующему рекуррентному алгоритму оценивания *фильтру Калмана*:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= A(\hat{x}_k + K_k(y_k - CA\hat{x}_k)), \quad \hat{x}_0 = 0, \\ K_k &= P_k^* C^\top (CP_k^* C^\top + R)^{-1}, \\ P_{k+1}^* &= AP_k A^\top + Q, \\ P_k &= P_k^* - K_k CP_k^*, \quad P_0 = P_0^* = P_0.\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

Здесь \hat{x}_k — оценка вектора состояния в момент k , P_k — матрица ковариаций этой оценки, P_k^* — матрица ковариаций ошибки, K_k — матрица усиления. Отметим, что вычисление соответствующих матриц не зависит от реальных измерений y_0, \dots, y_k . Кроме того, в случае скалярных ($m = 1$) выходов K_k — число, и никаких обращений матриц производить не нужно.

Заметим, что здесь есть некоторая проблема с выбором начальных условий для матриц P_0 и P_0^* и вектора \hat{x}_0 . Выше они выписаны в предположении, что начальное состояние — случайное с заданным средним и известной матрицей ковариаций. Если же этой информации нет, то можно получить n первых измерений y_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, и используя метод наименьших квадратов в нерекуррентной форме получить начальные условия на момент n .

Сопоставим полученный подход с некоторыми задачами наблюдения и фильтрации, которые мы решали раньше. В *наблюдателе Люенбергера* (раздел 1.4.3) также решалась проблема оценивания состояния системы по выходам, однако там предполагалось отсутствие возмущений и помех. При этом структура наблюдателя была примерно такой же, как в фильтре Калмана, но используемые там матрицы были постоянными, и в их выборе был произвол. Здесь же матрица усиления K_k задается четким алгоритмом и меняется на каждой итерации. Сравнительно с задачей интервального оценивания (предыдущий раздел) основная разница — в исходных предположениях о природе возмущений и помех (детерминированные или случайные), однако вид получаемого фильтра качественно тот же.

Отметим еще, что фильтр (2.3.9) без всяких изменений применим к *нестационарным* задачам, в которых матрицы A , C , Q , R зависят от времени.

Пример 2.3.1. Рассмотрим простейший одномерный пример — *оценку постоянной величины* по ее случайным измерениям. Модель

измерений имеет вид

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k, \\y_k &= x_k + v_k.\end{aligned}$$

Таким образом мы имеем частный случай (2.3.9) с

$$n = 1, \quad A = 1, \quad C = 1, \quad Q = 0, \quad R = 1,$$

и из (2.3.9) приходим к соотношениям

$$P_{k+1}^* = P_k, \quad K_{k+1} = \frac{K_k}{K_k + 1}.$$

Отсюда для $t_k = 1/K_k$ получаем рекуррентное соотношение

$$t_{k+1} = 1 + t_k,$$

то есть $t_k = t_0 + k$ и окончательно

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \frac{1}{t_0 + k}(y_k - \hat{x}_k).$$

Для начальных условий $t_0 = 1$, $\hat{x}_0 = 0$ отсюда следует что даваемая фильтром оценка — *среднее арифметическое*

$$\hat{x}_k = \frac{1}{1+k} \sum_{i=0}^k y_i,$$

а предыдущая формула — просто рекуррентная форма ее вычисления. ▼

2.3.3. Примеры

Пример 2.3.2. Продемонстрируем предложенный подход к фильтрации ограниченных внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи оценивания состояния двойного пружинного маятника, движущегося в вязкой среде, см. пример 2.1.6.

Наблюдаемый выход системы выберем в виде

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

а в качестве оцениваемого выхода возьмем вектор

$$y_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть, как и ранее, параметры системы единичны, а коэффициент сопротивления среды равен 0,2. В результате приходим к системе вида (2.3.1), (2.3.8) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0,2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $P_0 = 0,1I$ с помощью условий теоремы 2.3.1 и замечания 2.3.2 находим оптимальную матрицу фильтра

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1,4380 & 0,5623 \\ -0,4119 & 1,9274 \\ -1,0667 & 1,1968 \\ 0,5114 & 3,3514 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0,2000 & 0 & 0,0700 & 0 \\ * & 0,1465 & 0 & 0,1738 \\ * & * & 0,1490 & 0 \\ * & * & * & 0,7497 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному ограничивающему эллипсу с матрицей

$$C_1 \hat{P} C_1^T = \begin{pmatrix} 0,1490 & 0 \\ 0 & 0,7497 \end{pmatrix},$$

содержащему невязку e_1 .

На рис. 2.3.1 сплошной линией изображен найденный минимальный ограничивающий эллипс, а пунктиром — проекция эллипсоида

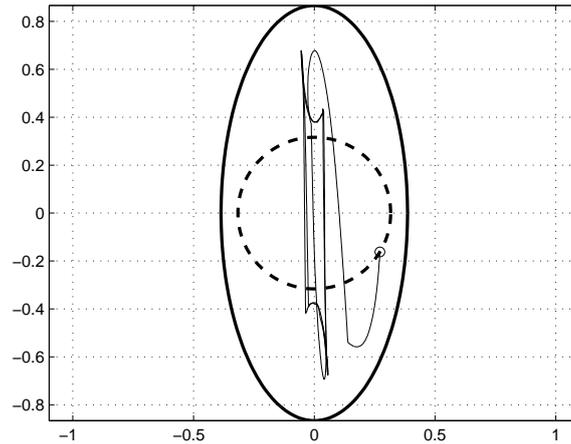


Рис. 2.3.1. Инвариантный эллипс и траектория невязки для системы из примера 2.3.2.

начальных состояний (эллипс с матрицей $C_1 P_0 C_1^\top$). На этом же рисунке показана некоторая траектория $e_1(t)$; при этом в качестве внешнего возмущения выбиралось локально наихудшее — максимизирующее $\dot{V}(e, w)$ при фиксированном e . Как уже знаем, оно определяется формулой

$$\tilde{w} = \frac{D_1^\top \hat{P}^{-1} e}{|D_1^\top \hat{P}^{-1} e|}.$$

На рис. 2.3.2 показаны траектории оцениваемой координаты $v_1(t)$ (сплошной линией) и ее оценки $\hat{v}_1(t)$ (пунктиром), а на рис. 2.3.3 показаны траектории $v_2(t)$ (сплошной линией) и $\hat{v}_2(t)$ (пунктиром). Видно, что точность фильтрации весьма высока. ▼

2.4. Неопределенность и ее виды

Как правило, в практических задачах модель объекта или явления не бывает известна точно, т.е. в описании присутствует неопределенность. В этом разделе мы приведем некоторые типичные способы описания неопределенности и обсудим важное понятие робастности —

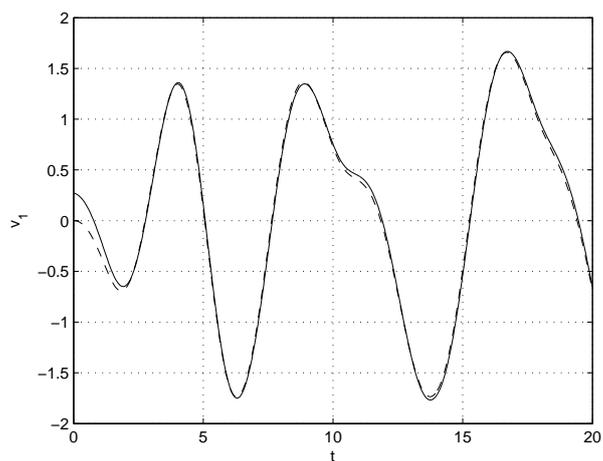


Рис. 2.3.2. Координата $v_1(t)$ и ее оценка $\hat{v}_1(t)$ для системы из примера 2.3.2.

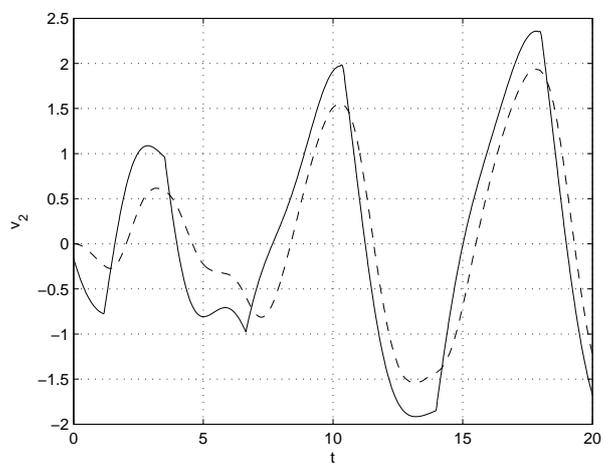


Рис. 2.3.3. Координата $v_2(t)$ и ее оценка $\hat{v}_2(t)$ для системы из примера 2.3.2.

сохранение системой желаемого свойства при всех допустимых значениях неопределенного параметра.

2.4.1. Параметрическая неопределенность

Если модель описывает физический объект (механический, электрический, экономический и т.п.) то, как правило, его параметры не известны точно, причем во многих случаях их значения в принципе не могут быть доступны, поскольку они могут меняться в процессе функционирования. Например, при управлении автомобилем мы не знаем заранее его массу (она зависит от загрузки), скорость, коэффициент трения (он зависит от состояния дороги и износа шин) и т.д. При этом сами уравнения, описывающие движение, известны точно. В таких ситуациях можно говорить о *параметрической неопределенности*. Линейная система (1.1.1) при этом заменяется на *семейство систем* (иногда используют термин *неопределенная система*)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(q)x + B(q)u + D_1(q)w, & q \in Q, \\ y &= C(q)x + D_2(q)w, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где все матрицы A , B , C , D_1 , D_2 зависят от параметров $q \in \mathbb{R}^\ell$, которые принадлежат заданному *допустимому множеству* $Q \subset \mathbb{R}^\ell$ (*множеству неопределенности*). Подчеркнем, что система (2.4.1) остается стационарной: параметры q не меняются во времени, однако априори известно лишь то, что они лежат во множестве Q .

Аналогичным образом при описании системы с помощью передаточных функций ее элементы могут зависеть от параметров, т.е. передаточная функция объекта (пусть, для простоты, в одномерном случае) приобретает вид

$$H(s, q) = \frac{A(s, q)}{B(s, q)}, \quad q \in Q, \quad (2.4.2)$$

где $A(s, q)$, $B(s, q)$ — *неопределенные полиномы*, коэффициенты $a_i(q)$, $b_i(q)$ которых зависят от $q \in Q$. В этом случае говорят о *неопределенном объекте* $H(s, q)$. Например, при последовательном соединении ℓ простых звеньев с передаточными функциями $k_i/(1 + T_i s)$ и неопределенными постоянными времени T_i и коэффициентами усиления k_i , мы получаем *семейство передаточных функций*

$$H(s, T, k) = \frac{k_1 \cdot \dots \cdot k_\ell}{(1 + T_1 s) \cdot \dots \cdot (1 + T_\ell s)},$$

$$T = (T_1, \dots, T_\ell)^\top \in Q_T, \quad k = (k_1, \dots, k_\ell)^\top \in Q_k,$$

где роль параметров играют постоянные времена и коэффициенты усиления, принадлежащие соответственно множествам Q_T и Q_k .

Заметим, что в $H(s, T, k)$ числитель и знаменатель зависят каждый от своего вектора параметров, что на первый взгляд не укладывается в модель неопределенности (2.4.2). Однако, объединяя T и k в вектор

$$q \doteq \begin{pmatrix} T \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\ell},$$

придем к записи (2.4.2), которая, таким образом, является общей моделью.

Мы будем рассматривать различные виды ограничений на неопределенные параметры, то есть на форму множества Q . В принципе, допустимое множество может иметь произвольный вид и даже совпадать с \mathbb{R}^ℓ , но чаще всего (по соображениям природы задачи, когда неопределенные параметры имеют некоторые допуски) мы будем иметь дело с параллелепипедом, когда каждый из параметров меняется независимо в своем диапазоне (*интервале неопределенности*):

$$Q = \{q \in \mathbb{R}^\ell: \underline{q}_i \leq q_i \leq \bar{q}_i, \quad i = 1, \dots, \ell, \quad (2.4.3)$$

в частности, с единичным кубом в ∞ -норме:

$$Q = \{q \in \mathbb{R}^\ell: |q|_\infty \leq 1\}. \quad (2.4.4)$$

При этом *вершинным элементом* семейства (или просто *вершиной*) называется элемент (матрица, полином, передаточная функция), определяемый крайними допустимыми значениями параметров: $q_i = \underline{q}_i$ либо $q_i = \bar{q}_i$, $i = 1, \dots, \ell$, в случае (2.4.3) или $q_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, \ell$, в случае (2.4.4). Таким образом, всего имеется 2^ℓ вершинных элементов — по числу вершин ℓ -мерного параллелепипеда (куба) Q .

Однако параметры могут быть зависимыми, например, иметь некоторые совместные ограничения; простейший из таких случаев: допустимое множество Q является шаром $\{q \in \mathbb{R}^\ell: |q|_2 \leq 1\}$ в 2-норме или эллипсоидом вида

$$Q = \{q \in \mathbb{R}^\ell: q^\top M^{-1} q \leq 1\}, \quad M \succ 0,$$

или

$$Q = \left\{ q \in \mathbb{R}^\ell: \sum_{i=1}^{\ell} \frac{(q_i - q_i^0)^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\}, \quad (2.4.5)$$

где $q^0 = (q_1^0, \dots, q_\ell^0)$ — некоторое значение параметра, соответствующее *номинальной* системе, α_i — масштабные множители. В этом случае говорим о *сферических* (эллиптических) ограничениях на параметры. Вообще, в качестве Q обычно рассматривается множество, ограниченное в какой-нибудь норме.

Мы будем рассматривать также различные *структуры неопределенности*, то есть типы функциональной зависимости от параметра q , главным образом *линейную неопределенность*. При этом коэффициенты $a_i(q)$ неопределенного полинома (или элементы $a_{ij}(q)$ матрицы $A(q)$) есть линейные функции от q . Особо выделяют следующие случаи.

1. Интервальная неопределенность. Например, *интервальный полином* задается так:

$$\mathcal{P}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n : \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \quad \underline{a}_n > 0, \quad i = 0, \dots, n\};$$

в нем сами коэффициенты являются неопределенными параметрами, которые могут независимо принимать значения в своих интервалах неопределенности $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$. Условие $\underline{a}_n > 0$ обычно накладывается для того, чтобы обеспечить неизменность степени n полинома при всех $\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n$.

Иногда бывает удобнее следующая форма записи интервального семейства полиномов:

$$\mathcal{P}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n : |a_i - a_i^0| \leq \gamma\alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n\}. \quad (2.4.6)$$

Здесь a_i^0 — коэффициенты так называемого *номинального полинома*

$$P_0(s) = a_0^0 + a_1^0s + \dots + a_n^0s^n,$$

$\alpha_i \geq 0$ — *масштабы* изменения коэффициентов a_i , $\gamma > 0$ — *размах* неопределенности. В этой записи $\underline{a}_i = a_i^0 - \gamma\alpha_i$, $\bar{a}_i = a_i^0 + \gamma\alpha_i$.

Таким же образом определяется *интервальное семейство матриц*:

$$A = ((a_{ij})): \quad \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

которое часто записывают в форме, аналогичной (2.4.6):

$$A = A_0 + \gamma\Delta, \quad (2.4.7)$$

где $A_0 = ((a_{ij}^0))$ — номинальное значение, а $\Delta = ((\Delta_{ij}))$, $|\Delta_{ij}| \leq \delta_{ij}$ — неопределенность, матрица $\delta = ((\delta_{ij}))$ задает масштабы изменения элементов a_{ij} матрицы A , а $\gamma > 0$ — размах неопределенности.

2. Аффинная неопределенность. Описанная выше ситуация, когда неопределенными параметрами являются сами коэффициенты полиномов, достаточно редкая, ибо обычно коэффициенты характеристического полинома не имеют непосредственного физического смысла и зависят от параметров q более сложным образом. Аффинная неопределенность является простейшей моделью такой *зависимой* структуры неопределенности. *Аффинное семейство полиномов* задается так:

$$P(s, Q) = \{P(s, q) = P_0(s) + q_1 P_1(s) + \dots + q_\ell P_\ell(s), \quad q \in Q\},$$

где полиномы $P_i(s)$, $i = 0, \dots, \ell$, фиксированы и известны (полином $P(s, 0) = P_0(s)$ также называют *номинальным полиномом* семейства). В этом случае коэффициенты $a_i(q)$ полинома $P(s, q)$ зависят аффинным образом от параметров q :

$$a_i(q) = a_i^0 + \sum_{j=1}^{\ell} q_j a_i^j,$$

где a_i^j — коэффициент $P_j(s)$ при s^i . Иными словами, коэффициенты $a_i(q)$ не могут меняться независимо друг от друга при изменении q . Аналогично задается и *матричное аффинное семейство*:

$$A(q) = A_0 + q_1 A_1 + \dots + q_\ell A_\ell, \quad q \in Q,$$

где A_i , $i = 0, \dots, \ell$, — известные матрицы.

Линейная зависимость от неопределенных параметров представляет собой удобную модель параметрической неопределенности; чаще, однако, встречается случай *мультилинейной* зависимости. Скалярная функция $a(q)$, $q \in \mathbb{R}^\ell$, называется *мультилинейной*, если она линейна по каждой компоненте при фиксированных значениях всех остальных компонент. Мы уже встречали характеристические полиномы, коэффициенты которых являются мультилинейными функциями. Таким, например, будет характеристический полином уже упоминавшейся цепочки простых звеньев вида $k_i/(1 + T_i s)$, замкнутой единичной обратной связью:

$$P(s, T, k) = (1 + T_1 s) \cdot \dots \cdot (1 + T_\ell s) + k_1 \cdot \dots \cdot k_\ell,$$

если рассматривать постоянные времени T_i и коэффициенты усиления k_i как неопределенные параметры $(T, k) \in Q$. Характеристический

полином интервальной матрицы (2.4.7) также является мультилинейной функцией переменных Δ_{ij} .

Отметим также встречающуюся *полиномиальную зависимость* от параметров; примером может служить характеристический полином аффинного матричного семейства:

$$P(s, q) = \det(sI - A(q)), \quad A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} q_i A_i, \quad q \in Q,$$

и другие.

При описании в пространстве состояний часто используется модель матричной неопределенности, когда не физические параметры, а непосредственно матрицы, описывающие систему, допускают неопределенность. Например,

$$\dot{x} = Ax, \quad A = A_0 + \Delta,$$

где A_0 — известная матрица, а Δ — матрица возмущений, удовлетворяющая условию типа

$$\|\Delta\| \leq \gamma.$$

Здесь $\|\cdot\|$ означает некоторую норму матрицы, а γ — диапазон возможных возмущений. Типичной является модель, иногда называемая *структурированной матричной неопределенностью*.

Пример 2.4.1. При наличии неопределенности в матрице усиления

$$K = K_0 + \Delta, \quad \|\Delta\| \leq \gamma,$$

соответствующая неопределенность в матрице $A + BKC$ замкнутой системы будет иметь структурированную форму $B\Delta C$, $\|\Delta\| \leq \gamma$, а номинальное значение матрицы замкнутой системы равно $A + BK_0C$. ▼

2.4.2. Частотная неопределенность

В тех случаях, когда исходным является описание системы с помощью частотных характеристик, естественно описывать и неопределенность в тех же терминах. Так, передаточная функция одномерной системы может иметь вид

$$H(s) = H_0(s) + \Delta H(s),$$

где частотная неопределенность $\Delta H(s)$ принадлежит тому или иному классу. Например, нередко считают, что

$$|\Delta H(j\omega)| \leq |W(j\omega)|$$

для всех ω при заданной функции $W(s)$, $W^{-1}(s) \in RH_\infty$. Иными словами,

$$\|W^{-1}\Delta H\|_\infty \leq 1.$$

Кроме того, предполагается, что число устойчивых полюсов функций $H_0(s) + \Delta H(s)$ одинаково для всех допустимых $\Delta H(s)$.

Для матричной передаточной функции существует гораздо большее разнообразие форм, в которых может быть задана неопределенность. Например, передаточная функция может иметь вид

$$H(s) = H_0(s) + W_1(s)\Delta(s)W_2(s),$$

где $W_1(s), W_2(s) \in RH_\infty$ — заданные функции, а

$$\Delta(s) \in RH_\infty, \quad \|\Delta(s)\|_\infty \leq 1,$$

— это так называемая *аддитивная модель ошибок*. Наряду с ней может рассматриваться *мультипликативная модель*:

$$H(s) = H_0(s)(I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))$$

и ряд других. Несколько иная модель связана с записью объекта в виде $G(s) = N(s)M^{-1}(s)$, где $N(s), M(s) \in RH_\infty$; тогда неопределенность может быть учтена в форме

$$G(s) = (N(s) + \Delta N(s))(M(s) + \Delta M(s))^{-1}.$$

2.4.3. (M, Δ) -конфигурация

Еще более общей моделью неопределенности является так называемая (M, Δ) -конфигурация системы. Не будем подробно обсуждать структуру и свойства такого способа задания неопределенности, а ограничимся простейшими формулировками.

Начнем с рассмотрения системы

$$\dot{x} = (A + \Delta_A)x, \quad (2.4.8)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — номинальная матрица, а неопределенность имеет вид

$$\Delta_A = F_1\Delta(I - F_2\Delta)^{-1}C, \quad (2.4.9)$$

где $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ — матричная неопределенность, ограниченная в спектральной норме

$$\|\Delta\| \leq \gamma,$$

а $F_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{q \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ — постоянные матрицы, причем предполагается, что $\det(I - F_2 \Delta) \neq 0$ при всех допустимых значениях элементов матрицы Δ .

Обратим внимание, что возмущение Δ_A представлено дробно-линейной функцией от матричной неопределенности Δ , при этом матрица

$$A + F_1 \Delta (I - F_2 \Delta)^{-1} C$$

называется *дробно-линейным преобразованием* (linear fractional transformation, LFT) неопределенности Δ , задаваемым матрицами A , F_1 , C , F_2 .

Неопределенность такого типа возникает, например, если рассмотреть систему, записанную в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + F_1 v, \\ e &= Cx + F_2 v, \\ v &= \Delta e. \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Здесь v и e — «искусственные» переменные, с помощью которых неопределенность включена в цепь обратной связи. Тогда, исключая их из уравнений, приходим к (2.4.8), (2.4.9).

Вообще говоря, дробно-линейное преобразование определяется следующим образом. Пусть M — матрица, имеющая блочную форму:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.4.11}$$

где матрицы M_{11} , M_{22} — квадратные (возможно, разных размерностей). *Нижним* (соответственно *верхним*) *дробно-линейным преобразованием* матриц Δ_l и Δ_u называются соответственно матрицы

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) \doteq M_{11} + M_{12} \Delta_l (I - M_{22} \Delta_l)^{-1} M_{21},$$

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) \doteq M_{22} + M_{21} \Delta_u (I - M_{11} \Delta_u)^{-1} M_{12},$$

при условии, что обратные матрицы существуют.

Дробно-линейное описание естественным образом возникает в задачах с так называемой (M, Δ) -*конфигурацией*. Это общая схема анализа задач с неопределенностями, получившая широкое распространение в современных исследованиях; она позволяет учитывать возмущения номинального объекта, имеющие различную природу — параметрическую, структурированную, частотную, немоделируемую динамику и др.

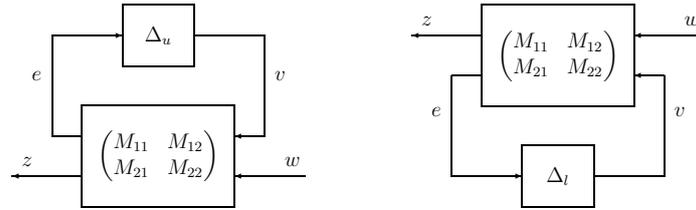


Рис. 2.4.1. (M, Δ) -конфигурация: верхнее и нижнее дробно-линейные преобразования.

Такой способ описания особенно удобен при задании систем с помощью передаточных функций; он заключается в том, что система приводится к виду, изображенному на рис. 2.4.1, где w — внешний вход, z — выход, $M_{ij} = M_{ij}(s)$ — блоки матричной передаточной функции $M(s)$ вида (2.4.11), а $\Delta(s)$ — матричная функция, отвечающая неопределенностям.

Например, для верхнего LFT из блок-схемы слева на рис. 2.4.1 имеем

$$\begin{pmatrix} e \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad v = \Delta_u e,$$

или

$$\begin{aligned} e &= M_{11}v + M_{12}w, & v &= \Delta_u e, \\ z &= M_{21}v + M_{22}w. \end{aligned}$$

Как и в (2.4.10), формально исключая отсюда e и v , получаем

$$z = (M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12})w;$$

иначе говоря,

$$z = \mathcal{F}_u(M, \Delta_u)w.$$

При такой записи блок M_{22} матрицы $M(s)$ отвечает за динамику невозмущенной системы (при $\Delta = 0$), а все относящееся к неопределенности помещается в цепь обратной связи. При этом говорят, что неопределенность «изымается» из системы.¹ Блоки M_{21} , M_{11} и M_{12} описывают конкретные связи и форму, в которой неопределенность воздействует на номинальную систему.

Техника таких преобразований бывает удобной не только при описании систем с неопределенностью. Приведем два примера.

¹ Англиязычный термин — «pulling out the Δ s».

Пример 2.4.2. Для системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

передаточная функция от u к y имеет вид

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

а в терминах дробно-линейного преобразования она может быть записана как

$$G(s) = \mathcal{F}_u\left(M, \frac{1}{s}I\right), \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на языке ЛФТ удалось связать представление системы в пространстве состояний с ее передаточной функцией. ▼

Пример 2.4.3. Другим примером служит задача H_∞ -оптимизации, когда для системы с внешним возмущением

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + w, \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

требуется найти регулятор $u = Kx$, который минимизирует H_∞ -норму передаточной функции замкнутой системы

$$G(s) = (C + DK)(sI - A - BK)^{-1}.$$

Путем несложных преобразований функцию $G(s)$ можно записать как

$$G(s) = \mathcal{F}_l(M, K),$$

где

$$M = \begin{pmatrix} C(sI - A)^{-1} & D + C(sI - A)^{-1}B \\ (sI - A)^{-1} & (sI - A)^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Тогда задача H_∞ -оптимизации приобретает вид

$$\min_K \|\mathcal{F}_l(M, K)\|_\infty.$$

При этом блок Δ имеет смысл регулятора, по которому можно проводить оптимизацию. ▼

(M, Δ) -конфигурация является весьма общей и удобной *формой записи* системы, однако если исходно система записана в пространстве состояний и имеет аффинную параметрическую неопределенность, то при ее приведении к виду (M, Δ) выражения сильно усложняются и естественность параметрического представления теряется.

2.4.4. Нестационарные и нелинейные возмущения

В рассмотренной выше модели

$$\dot{x} = (A_0 + \Delta)x$$

мы предполагали, что Δ — постоянная матрица. Однако иногда возмущения меняются во времени, и мы приходим к модели *нестационарных возмущений*

$$\Delta = \Delta(t).$$

При этом предполагается, что для всех t матрицы $\Delta(t)$ принадлежат какому-либо заданному семейству, например,

$$\|\Delta(t)\| \leq \gamma$$

для некоторой матричной нормы $\|\cdot\|$ или интервальному семейству

$$\underline{\Delta}_{ij} \leq \Delta_{ij}(t) \leq \bar{\Delta}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Более того, в ряде случаев возмущения зависят и от состояния системы, и мы можем рассматривать системы типа

$$\dot{x} = \left(A_0 + \Delta(t, x(t)) \right) x$$

и множество других вариантов вхождения нелинейных и нестационарных возмущений. Хотя в этой главе мы в основном ограничиваемся линейными стационарными задачами, тем не менее в ряде случаев развитый аппарат (например, квадратичной стабилизации) позволяет решать задачи и при наличии нестационарных и нелинейных возмущений.

2.5. Робастная устойчивость

В данном разделе исследуется проблема робастной устойчивости, то есть устойчивости систем при наличии неопределенности. Простейшей здесь является задача о робастной устойчивости полиномов при параметрической неопределенности. Предполагается, что характеристический полином системы зависит от параметров; условие робастной устойчивости сводится к проверке гурвицевости этого полинома при всех допустимых значениях параметров. Критерии этого иногда весьма просты. Если параметрами являются сами коэффициенты полинома и они могут изменяться в некотором параллелепипеде, то теорема

Харитонова утверждает, что робастная устойчивость гарантируется, если устойчивы четыре специальных полинома из данного семейства. Для этого же случая графический критерий Цыпкина – Поляка позволяет не только проверять робастную устойчивость, но и находить радиус устойчивости — максимальный размах неопределенных параметров, при котором все полиномы устойчивы.

Более сложная (но и более реалистическая) ситуация встречается, когда неопределенные параметры входят в полином нелинейным образом. Принципиальное решение вопроса дается здесь с помощью принципа исключения нуля, однако конструктивное построение требуемых для этого «областей значений» возможно лишь в частных случаях. Далее обсуждается проблема робастной устойчивости при иных видах неопределенности — частотных и матричных. Другим удобным инструментом является переход к проблеме квадратичной устойчивости — построению единой функции Ляпунова для всего семейства матриц.

2.5.1. Робастная устойчивость полиномов

Задано семейство полиномов

$$\mathcal{P}(s, Q) \doteq \{P(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \dots + a_n(q)s^n, \quad q \in Q\}, \quad (2.5.1)$$

коэффициенты $a_i(q)$ которых зависят от параметров $q \in \mathbb{R}^\ell$, изменяющихся в допустимом множестве $Q \subset \mathbb{R}^\ell$. Это семейство называется *робастно устойчивым*, если $P(s, q)$ устойчивы при всех $q \in Q$, то есть

$$\operatorname{Re} s_i(q) < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad q \in Q,$$

где $s_i(q)$ — корни $P(s, q)$. Таким образом, здесь мы имеем дело с непрерывной устойчивостью; проблема дискретной устойчивости будет обсуждена ниже. Ясно, что в данной ситуации мы не можем непосредственно воспользоваться критериями устойчивости из Главы 1, так как множество Q , вообще говоря, содержит бесконечно много элементов. Наша цель — получить робастные аналоги этих критериев.

Приведем сначала один общий принцип (часто называемый *принципом исключения нуля*), позволяющий строить конструктивные алгоритмы проверки робастной устойчивости.

Теорема 2.5.1 (Принцип исключения нуля). Пусть полином $P(s, q^0)$ устойчив для некоторого $q^0 \in Q$, множество Q связно, и $a_n(q) \neq 0$ для всех $q \in Q$. Тогда условие

$$0 \notin \mathcal{S}(\omega) \doteq \{P(j\omega, q) : q \in Q\} \quad \text{для всех } 0 \leq \omega < \infty \quad (2.5.2)$$

необходимо и достаточно для робастной устойчивости семейства (2.5.1).

Множество $\mathcal{S}(\omega)$ называется *областью значений* полиномиального семейства (2.5.1); это двумерный образ множества Q при преобразовании $P(j\omega, \cdot)$.

Идея доказательства теоремы очень проста: при переходе от устойчивости к неустойчивости один из корней должен пересечь мнимую ось, при этом нарушится условие (2.5.2). Заметим, что мы уже пользовались такого рода рассуждениями при осуществлении D -разбиения. Там точка зрения была несколько иной: нас интересовала вся область устойчивости в пространстве двух параметров. При исследовании робастной устойчивости мы пытаемся выяснить, лежит ли заданная область Q целиком в области устойчивости. При этом, как будет видно из дальнейшего, удастся рассмотреть случай большого числа параметров.

Для того чтобы конструктивно пользоваться теоремой 2.5.1, нам нужно, во-первых, строить множества $\mathcal{S}(\omega)$, а, во-вторых, уметь эффективно проверять условие (2.5.2). И то и другое возможно для ряда важных частных случаев задачи о робастной устойчивости. Приступим к их анализу.

Начнем с интервального полинома

$$\mathcal{P}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \\ \underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad \underline{a}_0 > 0, \quad \underline{a}_n > 0\}, \quad (2.5.3)$$

параметрами которого являются сами коэффициенты полинома, изменяющиеся в параллелепипеде. Рассмотрим четыре полинома, составленных из крайних значений коэффициентов, чередующихся парами (два нижних значения — два верхних):

$$\begin{aligned} P_1(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \dots, \\ P_2(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \dots, \\ P_3(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \dots, \\ P_4(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \dots. \end{aligned}$$

Эти полиномы называются *полиномами Харитоновы*.

Теорема 2.5.2 (Теорема Харитоновы). *Для робастной устойчивости интервального семейства (2.5.3) необходимо и достаточно, чтобы все полиномы Харитоновы были устойчивы.*

Доказательство. Необходимость устойчивости полиномов Харитонова тривиальна, так как они входят в интервальное семейство. Чтобы доказать достаточность, воспользуемся теоремой 2.5.1 и построим множество $\mathcal{S}(\omega)$. Представим

$$P(j\omega) \doteq U(\omega) + j\omega V(\omega),$$

где

$$\begin{aligned} U(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots, \\ V(\omega) &= a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\underline{U}(\omega) \leq U(\omega) \leq \bar{U}(\omega), \quad \underline{V}(\omega) \leq V(\omega) \leq \bar{V}(\omega),$$

где

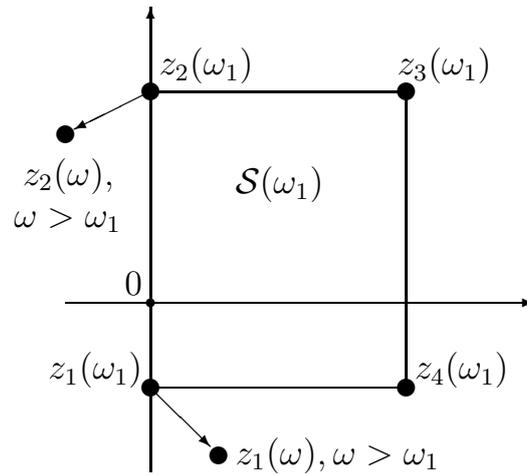
$$\begin{aligned} \underline{U}(\omega) &= \underline{a}_0 - \bar{a}_2\omega^2 + \underline{a}_4\omega^4 - \dots, \\ \bar{U}(\omega) &= \bar{a}_0 - \underline{a}_2\omega^2 + \bar{a}_4\omega^4 - \dots, \\ \underline{V}(\omega) &= \underline{a}_1 - \bar{a}_3\omega^2 + \underline{a}_5\omega^4 - \dots, \\ \bar{V}(\omega) &= \bar{a}_1 - \underline{a}_3\omega^2 + \bar{a}_5\omega^4 - \dots. \end{aligned}$$

Иначе говоря, $P(j\omega)$ может изменяться в прямоугольнике, вершинами которого являются точки

$$\begin{aligned} z_1 &\doteq \underline{U}(\omega) + j\omega\underline{V}(\omega), \\ z_2 &\doteq \underline{U}(\omega) + j\omega\bar{V}(\omega), \\ z_3 &\doteq \bar{U}(\omega) + j\omega\bar{V}(\omega), \\ z_4 &\doteq \bar{U}(\omega) + j\omega\underline{V}(\omega). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $z_i = P_i(j\omega)$, $i = 1, \dots, 4$, то есть $\mathcal{S}(\omega)$ — прямоугольник, вершины которого соответствуют харитоновским полиномам. Покажем, что $\mathcal{S}(\omega)$ не содержит начала координат при любом $0 \leq \omega < \infty$. Действительно, при $\omega = 0$ имеем $0 \notin \mathcal{S}(0)$ (иначе было бы $P(0) = a_0 = 0$, что противоречит условию $\underline{a}_0 > 0$), поэтому если $0 \in \mathcal{S}(\omega_0)$ при каком-то $\omega_0 > 0$, то должно произойти пересечение границы прямоугольника $\mathcal{S}(\omega)$ с началом координат при некотором $0 < \omega_1 \leq \omega_0$. Это пересечение не может произойти ни в какой вершине прямоугольника $\mathcal{S}(\omega)$, так как вершины соответствуют устойчивым харитоновским полиномам. Пусть это пересечение произойдет с некоторым ребром, например в точке

$$z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Рис. 2.5.1. Движение области значений $\mathcal{S}(\omega)$.

Поскольку соответствующие полиномы $P_1(s)$ и $P_2(s)$ устойчивы, то в силу критерия Михайлова (теорема 1.2.3) аргументы $P_1(j\omega)$ и $P_2(j\omega)$ монотонно строго возрастают с ростом ω , однако это противоречит тому, что сторона z_1z_2 прямоугольника $\mathcal{S}(\omega)$ остается вертикальной (см. рис. 2.5.1).

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.5.1, то есть из устойчивости харитоновских полиномов следует робастная устойчивость интервального семейства. ■

Заметим, что теореме Харитонова можно придать графическую форму. При этом достаточно проверять поведение лишь одного (а не четырех) годографов, и, кроме того, одновременно можно найти максимальный размах неопределенности, при котором сохраняется робастная устойчивость. С этой целью запишем интервальное семейство в форме (2.4.6):

$$\mathcal{P}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n, \quad |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n\}, \quad (2.5.4)$$

причем считаем $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, и введем в рассмотрение следующие величины:

$$P_0(j\omega) \doteq U_0(\omega) + j\omega V_0(\omega), \\ U_0(\omega) \doteq a_0^0 - a_2^0 \omega^2 + a_4^0 \omega^4 - \dots,$$

$$\begin{aligned} V_0(\omega) &\doteq a_1^0 - a_3^0\omega^2 + a_5^0\omega^4 - \dots, \\ R(\omega) &\doteq \alpha_0 + \alpha_2\omega^2 + \alpha_4\omega^4 + \dots, \\ T(\omega) &\doteq \alpha_1 + \alpha_3\omega^2 + \alpha_5\omega^4 + \dots. \end{aligned}$$

Построим годограф

$$z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (2.5.5)$$

где

$$x(\omega) = \frac{U_0(\omega)}{R(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{V_0(\omega)}{T(\omega)},$$

который часто называется *годографом Цыпкина – Поляка*.

Теорема 2.5.3 (графический критерий). *Для робастной устойчивости семейства (2.5.4) необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_0^0 > \gamma\alpha_0, \quad a_n^0 > \gamma\alpha_n \quad (2.5.6)$$

и годограф $z(\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ проходил последовательно через n квадрантов против часовой стрелки и не пересекал квадрата с вершинами $(\pm\gamma, \pm\gamma)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что область значений семейства (2.5.4) есть прямоугольник

$$\mathcal{S}(\omega) = \{z = x + jy: |x - U_0(\omega)| \leq \gamma R(\omega), \quad |y - \omega V_0(\omega)| \leq \gamma \omega T(\omega)\},$$

а условие $0 \in \mathcal{S}(\omega)$ эквивалентно тому, что

$$|U_0(\omega)| \leq \gamma R(\omega), \quad |V_0(\omega)| \leq \gamma T(\omega),$$

то есть $|x(\omega)| \leq \gamma$, $|y(\omega)| \leq \gamma$. Поэтому непересечение годографа $z(\omega)$ с квадратом $\{z = x + jy: |x| \leq \gamma, |y| \leq \gamma\}$ эквивалентно условию $0 \notin \mathcal{S}(\omega)$.

Далее, по критерию Михайлова полином $P_0(s)$ устойчив тогда и только тогда, когда годограф $P_0(j\omega)$ проходит последовательно через n квадрантов, но $P_0(j\omega) = U_0(\omega) + j\omega V_0(\omega)$ лежит в каком-либо квадранте тогда и только тогда, когда

$$z(\omega) = \frac{U_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{V_0(\omega)}{T(\omega)}$$

лежит в том же квадранте. Итак, $z(\omega)$ проходит через n квадрантов тогда и только тогда, когда $P_0(s)$ устойчив. Наконец, условие (2.5.6) требуется для обеспечения положительности коэффициентов a_0 и a_n для всех полиномов семейства. Тем самым теорема 2.5.3 эквивалентна принципу исключения нуля (теорема 2.5.1) для данного семейства. ■

Таким образом, построив годограф $z(\omega)$, можно не только проверить робастную устойчивость при фиксированном $\gamma > 0$, но и найти наибольшее $\gamma = \gamma_{\max}$, для которого робастная устойчивость сохраняется при всех $\gamma < \gamma_{\max}$. Такое γ_{\max} называется *радиусом устойчивости* интервального семейства; оно находится по формуле

$$\gamma_{\max} = \min\{\gamma^*, \gamma_0, \gamma_\infty\}, \quad (2.5.7)$$

где γ^* — размер наибольшего квадрата $\{|x| \leq \gamma^*, |y| \leq \gamma^*\}$, вписанного в годограф $z(\omega)$, $\gamma_0 = \frac{a_0^0}{\alpha_0}$, а $\gamma_\infty = \frac{a_n^0}{\alpha_n}$.

Пример 2.5.1. Задан номинальный полином шестой степени с коэффициентами

$$a^0 = (433,5 \quad 667,25 \quad 502,72 \quad 251,25 \quad 80,25 \quad 14 \quad 1)$$

и размахами коэффициентов

$$\alpha = (43,35 \quad 33,36 \quad 25,137 \quad 15,075 \quad 5,6175 \quad 1,4 \quad 0,1).$$

На рис. 2.5.2 показан вид годографа $z(\omega)$ и вписанный в него наибольший квадрат; из него находим $\gamma_{\max} \approx 1,2372$.

Отметим, что годограф (2.5.5) существенно отличается от годографа Михайлова: он начинается внутри первого квадранта, а не на вещественной оси, и заканчивается в конечной точке $z(\infty)$, а не уходит на бесконечность (поскольку дробно-рациональные функции $x(\omega)$, $y(\omega)$ имеют одинаковые степени числителя и знаменателя).

Для семейств (2.5.3), (2.5.4) неопределенными параметрами являются сами коэффициенты полиномов. Перейдем теперь к изучению более сложной ситуации — аффинному семейству полиномов:

$$\mathcal{P}(s, Q) = \{P_0(s) + q_1 P_1(s) + \dots + q_\ell P_\ell(s), \quad |q_i| \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, \ell\} \quad (2.5.8)$$

с параметрами, изменяющимися в кубе

$$Q \doteq \{q \in \mathbb{R}^\ell: \quad |q|_\infty \leq \gamma\}. \quad (2.5.9)$$

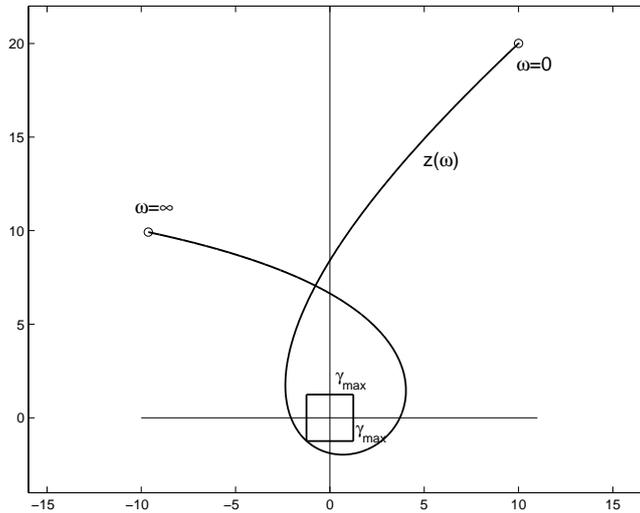


Рис. 2.5.2. Годограф Цыпкина – Поляка.

Одномерное семейство вида

$$\{P(s, q): |q_i| = \gamma, \quad i \neq k, \quad |q_k| \leq \gamma\}$$

назовем *реберным полиномом*. Напомним, что *вершинными полиномами* мы назвали полиномы вида

$$P(s, q), \quad q_i = \pm\gamma, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Важно отметить, что геометрически вершинные и реберные полиномы соответствуют вершинам и ребрам куба (2.5.9), то есть реберный полином «соединяет» два «соседних» вершинных полинома (соответствующих соседним вершинам куба), и всего имеется $\ell 2^{\ell-1}$ реберных полиномов. Справедлива следующая

Теорема 2.5.4 (Реберная теорема). Пусть

$$\deg P_i \leq \deg P_0 \doteq n, \quad i = 1, \dots, \ell, \tag{2.5.10}$$

$$\gamma \sum_{i=1}^{\ell} |a_n^i| < |a_n^0|, \quad \gamma \sum_{i=1}^{\ell} |a_0^i| < |a_0^0|, \tag{2.5.11}$$

где a_k^i , $i = 1, \dots, \ell$, — коэффициенты при s^k полиномов $P_i(s)$. Пусть полином $P_0(s)$ устойчив.

Тогда для робастной устойчивости семейства (2.5.8) необходима и достаточна устойчивость всех реберных полиномов.

Доказательство. Мы воспользуемся теоремой 2.5.1 с $q^0 = 0$; тогда неравенства (2.5.10)–(2.5.11) гарантируют условие $a_n(q) \neq 0$, $q \in Q$, для старшего коэффициента полинома $P(s, q)$ (2.5.8). Нам остается проверить принцип исключения нуля (2.5.2). Область $\mathcal{S}(\omega)$ имеет вид

$$\mathcal{S}(\omega) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = P_0(j\omega) + \sum_{i=1}^{\ell} q_i P_i(j\omega), \quad |q|_{\infty} \leq \gamma \right\},$$

то есть это аффинный двумерный образ ℓ -мерного куба.

Такой образ является многоугольником, стороны которого — образы ребер куба Q . Поскольку $0 \notin \mathcal{S}(0)$ в силу (2.5.11), то может оказаться $0 \in \mathcal{S}(\omega)$, лишь если 0 будет принадлежать границе $\mathcal{S}(\omega)$ для некоторого $\omega > 0$. Однако это невозможно, так как граница соответствует реберным полиномам, а они по предположению устойчивы. ■

Реберная теорема позволяет получить эффективную формулировку критерия робастной устойчивости, лишь если число ℓ неопределенных параметров мало. В этом случае следует проверить все реберные полиномы. Они представляют собой однопараметрические семейства вида

$$\lambda M(s) + (1 - \lambda)N(s)$$

(где $M(s)$, $N(s)$ — два соседних вершинных полинома), и в соответствии с критерием Найквиста (роль точки -1 здесь играет $-(1 - \lambda)/\lambda$) их устойчивость при $0 \leq \lambda \leq 1$ эквивалентна тому, что полиномы $M(s)$, $N(s)$ устойчивы, а годограф $G(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega)$ не пересекает отрицательной вещественной полуоси. Однако если ℓ велико, то число таких проверок значительно (даже для $\ell = 5$ нужно проверить $\ell 2^{\ell-1} = 80$ реберных полиномов). Можно предложить другой способ, основанный на более конструктивном описании множества $\mathcal{S}(\omega)$; мы используем этот подход позже, при исследовании робастной устойчивости дискретных полиномов.

До сих пор мы рассматривали семейства с линейно входящими неопределенными параметрами, которые изменялись независимо в кубе (параллелепипеде). Перейдем теперь к анализу сферических семейств. Проверку робастной устойчивости и определение радиуса устойчивости также можно осуществить с помощью графических критериев типа теоремы 2.5.3. Рассмотрим *эллиптические ограничения*

вида (2.4.5):

$$\mathcal{P}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, \sum_{i=0}^n \frac{(a_i - a_i^0)^2}{\alpha_i^2} \leq \gamma^2\}, \quad (2.5.12)$$

где, как и раньше, a_i^0 — коэффициенты номинального полинома $P_0(s)$, $\alpha_i \geq 0$ — масштабы изменения коэффициентов a_i (при $\alpha_i \equiv 1$ ограничения переходят в сферические), причем $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, а $\gamma > 0$ — общий размах неопределенности. Как и в теореме 2.5.3, введем следующие величины:

$$P_0(j\omega) \doteq U_0(\omega) + j\omega V_0(\omega),$$

где

$$\begin{aligned} U_0(\omega) &\doteq a_0^0 - a_2^0\omega^2 + a_4^0\omega^4 - \dots, \\ V_0(\omega) &\doteq a_1^0 - a_3^0\omega^2 + a_5^0\omega^4 - \dots, \\ R(\omega) &\doteq (\alpha_0^2 + \alpha_2^2\omega^4 + \alpha_4^2\omega^8 + \dots)^{1/2}, \\ T(\omega) &\doteq (\alpha_1^2 + \alpha_3^2\omega^4 + \alpha_5^2\omega^8 + \dots)^{1/2}, \end{aligned}$$

и построим годограф

$$z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \infty,$$

где

$$x(\omega) = \frac{U_0(\omega)}{R(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{V_0(\omega)}{T(\omega)}.$$

Теорема 2.5.5. Для робастной устойчивости семейства (2.5.12) необходимо и достаточно, чтобы $a_0^0 > \gamma\alpha_0$, $a_n^0 > \gamma\alpha_n$ и годограф $z(\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ проходил последовательно через n квадрантов против часовой стрелки и не пересекал круга радиуса γ с центром в нуле.

Доказательство. Доказательство в точности повторяет рассуждения теоремы 2.5.3 (то есть основано на принципе исключения нуля), с той лишь разницей, что область значений $\mathcal{S}(\omega)$ — эллипс

$$\mathcal{S}(\omega) = \{(z - P_0(j\omega))^\top M^{-1}(z - P_0(j\omega)) \leq \gamma^2\},$$

где

$$\begin{aligned} M &= M(\omega) = A(\omega)A^\top(\omega), \\ A(\omega) &= \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & -\alpha_2\omega^2 & 0 & \alpha_4\omega^4 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1\omega & 0 & -\alpha_3\omega^3 & 0 & \alpha_5\omega^5 & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, радиус устойчивости семейства, определяемого условиями (2.5.12), вычисляется как

$$\gamma_{\max} = \min\{\gamma^*, \gamma_0, \gamma_\infty\},$$

где γ^* — радиус наибольшего круга, вписанного в годограф $z(\omega)$, а

$$\gamma_0 = \frac{a_0^0}{\alpha_0}, \quad \gamma_\infty = \frac{a_n^0}{\alpha_n}.$$

Пример 2.5.2. Для семейства шестой степени из примера 2.5.1 получаем $\gamma_{\max} \approx 2,8380$, то есть больше, чем величина радиуса устойчивости (2.5.7) соответствующего интервального полинома, что неудивительно, так как ограничения на неопределенность в семействе (2.5.12) более жесткие, чем в семействе (2.5.4): эллипсоид

$$\{a = (a_0, \dots, a_n)^\top : \frac{\sum_{i=0}^n (a_i - a_i^0)^2}{\alpha_i^2} \leq \gamma^2\}$$

содержится в параллелепипеде

$$\{a = (a_0, \dots, a_n)^\top : |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Отметим, что для сферических семейств не существует аналогов теоремы Харитоновой: робастная устойчивость семейства не определяется устойчивостью конечного числа элементов семейства.

Мы видим, что различные структуры неопределенности и различные виды ограничений на неопределенные параметры приводят к весьма большому разнообразию форм областей значений; тем не менее многие задачи могут решаться единообразно на основе принципа исключения нуля и применения графических критериев устойчивости типа критерия Михайлова.

2.5.2. Робастная устойчивость матриц

Обратимся теперь к параметрическим семействам матриц, таким как *интервальное семейство*, задаваемое в форме

$$A = ((a_{ij})), \quad \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.5.13)$$

или

$$A = A_0 + \Delta, \quad \Delta = ((\Delta_{ij})), \quad |\Delta_{ij}| \leq \gamma, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.5.14)$$

либо *аффинное семейство*

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} q_i A_i, \quad |q_i| \leq \gamma, \quad i = 1, \dots, \ell. \quad (2.5.15)$$

Семейство называется *робастно устойчивым*, если устойчивы все его элементы, то есть

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

при всех q (соответственно, при всех Δ для семейства (2.5.14)) из допустимого множества, где λ_i — собственные значения A . При этом, как и для семейств полиномов, наибольшее $\gamma = \gamma_{\max}$, для которого робастная устойчивость сохраняется при всех $\gamma < \gamma_{\max}$, называется *радиусом устойчивости* матричного семейства.

Можно было бы ожидать, что проблемы робастной устойчивости таких матричных семейств решаются приблизительно так же, как и для соответствующих семейств полиномов. Однако оказывается, что ситуация с матрицами значительно более сложная. Так, для интервального семейства (2.5.13) нет никакого аналога теоремы Харитонова (все вершинные матрицы могут быть устойчивы, однако робастная устойчивость отсутствует), для аффинного семейства (2.5.15) неверна реберная теорема и т.д.

Формальное пояснение этого заключается в том, что в характеристический полином $P(s, q) = \det(sI - A(q))$ параметры q входят нелинейно (мультилинейно для интервального семейства (2.5.13) и полиномиально для аффинного семейства (2.5.15)), поэтому применить реберную теорему или какой-либо иной результат предыдущего параграфа мы не можем. В связи с этим обсудим совсем иные подходы к проблеме.

Основной подход связан с использованием достаточных условий робастной устойчивости. Можно потребовать, чтобы у всего семейства матриц $A(q)$, $q \in Q$, была *общая функция Ляпунова* $V(x) = x^T P x$, $P \succ 0$. Мы знаем, что существование решения матричного неравенства $A^T P + P A \prec 0$, $P \succ 0$ гарантирует устойчивость матрицы A , тем самым существование решения системы линейных матричных неравенств

$$A^T(q)P + PA(q) \prec 0, \quad P \succ 0, \quad q \in Q, \quad (2.5.16)$$

гарантирует робастную устойчивость матричного семейства $A(q)$. Если $A(q)$ — семейство интервальных матриц (2.5.13) или аффинное семейство (2.5.15), то неравенства (2.5.16) достаточно решить лишь для

вершин множества Q (обозначим их через \mathcal{V}); поскольку любая точка $q \in Q$ представляется как выпуклая комбинация вершин, то из выполнения (2.5.16) для вершин будет следовать, что (2.5.16) удовлетворяется (с данным P) и для любого $q \in Q$. Итак, достаточно решить конечное число матричных неравенств

$$A^\top(q^v)P + PA(q^v) \prec 0, \quad P \succ 0, \quad q^v \in \mathcal{V}, \quad (2.5.17)$$

где $A(q^v)$ — вершинные матрицы: в случае семейства (2.5.13) это те матрицы, в которых все a_{ij} принимают крайние значения (либо \underline{a}_{ij} , либо \bar{a}_{ij}), а в случае семейства (2.5.15) это матрицы, для которых $|q_i| = \gamma$, $i = 1, \dots, \ell$. Ясно, что число неравенств в (2.5.17) достаточно велико даже если n и ℓ не слишком большие числа. Впрочем, существуют быстрые итеративные методы решения неравенств (2.5.17), работоспособные даже для больших размерностей.

В то же время нужно ясно понимать, что мы получили лишь достаточный критерий робастной устойчивости. Если система линейных матричных неравенств (2.5.16) не имеет решения, то это не значит, что робастная устойчивость нарушена — могут существовать робастно устойчивые семейства, для которых нет общей квадратичной функции Ляпунова.

Другое достаточное условие заключается в использовании *сверхустойчивости* вместо устойчивости. Покажем как такой подход работает на примере интервального матричного семейства, записанного в виде (2.4.7):

$$A = ((a_{ij})), \quad a_{ij} = a_{ij}^0 + \Delta_{ij}, \quad |\Delta_{ij}| \leq \gamma m_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.5.18)$$

где номинальная матрица $A_0 \doteq ((a_{ij}^0))$ сверхустойчива, то есть

$$\sigma(A_0) \doteq \min_i (-a_{ii}^0 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0|) > 0.$$

Потребуем, чтобы условие сверхустойчивости сохранялось для всех матриц семейства:

$$-(a_{ii}^0 + \Delta_{ii}) - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0 + \Delta_{ij}| > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ясно, что это неравенство будет выполнено для всех допустимых Δ_{ij} тогда и только тогда, когда

$$-a_{ii}^0 - \gamma m_{ii} - \sum_{j \neq i} (|a_{ij}^0| + \gamma m_{ij}) > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

то есть при

$$\gamma < \gamma^* \doteq \min_i \frac{-a_{ii}^0 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0|}{\sum_j m_{ij}}.$$

В частности, если $m_{ij} \equiv 1$ (масштабы изменения всех элементов матрицы одинаковы), то

$$\gamma^* = \frac{\sigma(A_0)}{n}.$$

Таким образом, мы в явном виде находим *радиус сверхустойчивости* интервального семейства.

Аналогичные формулы справедливы и в дискретном случае: если $\|A_0\|_1 < 1$, то семейство матриц (2.5.18) остается сверхустойчивым при

$$\gamma < \gamma^* \doteq \min_i \frac{1 - \sum_j |a_{ij}^0|}{\sum_j m_{ij}},$$

а в случае $m_{ij} \equiv 1$

$$\gamma^* = \frac{1 - \|A_0\|_1}{n}.$$

Известны и другие достаточные условия, дающие оценки снизу для радиуса устойчивости аффинного или интервального семейств матриц.

2.5.3. Робастная устойчивость при неопределенных передаточных функциях

В разделах 2.4.1 и 2.4.2 обсуждались возможные виды неопределенности при описании объектов с помощью передаточных функций; приведем критерии робастной устойчивости соответствующих семейств замкнутых систем.

Начнем с простейшей задачи об устойчивости одномерных систем, заданных передаточной функцией, зависящей от параметров. Объект описывается передаточной функцией

$$G(s, q) = \frac{a(s, q)}{b(s, q)} \quad q \in Q,$$

где $a(s, q)$, $b(s, q)$ — полиномы, зависящие от параметров $q \in Q$, а регулятор в цепи обратной связи имеет передаточную функцию

$$C(s) = \frac{f(s)}{g(s)},$$

где $f(s)$, $g(s)$ — заданные полиномы (в этом разделе полиномы обозначаются строчными буквами). Нас интересует робастная устойчивость (то есть устойчивость при всех $q \in Q$) замкнутой системы. Характеристический полином в данном случае равен

$$p(s, q) = a(s, q)f(s) + b(s, q)g(s),$$

и задача сводится к проблеме устойчивости параметрического семейства полиномов. Мы отметим лишь некоторые особенности возникающих задач.

Во-первых, если $a(s, q)$, $b(s, q)$ — интервальные полиномы, то $p(s, q)$ таковым не является, и никакого аналога теоремы Харитоновой в общей ситуации нет. Однако в некоторых специальных случаях «вершинные» теоремы все же имеют место. Назовем *харитоновскими* 16 передаточных функций $G_i(s)$, $i = 1, \dots, 16$, (соответствующих *харитоновским объектам*), которые получаются из $G(s, q)$, когда в числителе и знаменателе берутся харитоновские полиномы.

Теорема 2.5.6. *Если $a(s, q)$, $b(s, q)$ — интервальные полиномы, а регулятор $C(s)$ — первого порядка, то есть*

$$C(s) = \frac{f_0 + f_1 s}{g_0 + g_1 s},$$

и он стабилизирует 16 харитоновских объектов, то он стабилизирует все интервальное семейство.

В более общем случае для регулятора произвольного порядка можно воспользоваться тем фактом, что область значений полинома $p(s, q)$ (то есть $\mathcal{S}(\omega) \doteq \{p(j\omega, q), q \in Q\}$) является восьмиугольником. Действительно, области значений интервальных полиномов $a(s, q)$, $b(s, q)$ являются прямоугольниками, потому сумма

$$f(j\omega)a(j\omega, q) + g(j\omega)b(j\omega, q)$$

является восьмиугольником. На этой основе нетрудно выписать эффективный критерий робастной устойчивости.

Во-вторых, если $a(s, q)$, $b(s, q)$ — аффинные семейства, то и $p(s, q)$ будет аффинным семейством полиномов, и мы можем применить результаты раздела 2.5.1 для установления его робастной устойчивости. В частности, справедлива реберная теорема, и мы получаем следующий результат.

Теорема 2.5.7. *Если $a(s, q)$, $b(s, q)$ — аффинные семейства и все реберные объекты (получающиеся, когда q пробегает ребро параллелепипеда Q) устойчивы, то имеет место робастная устойчивость.*

Есть и несколько других частных случаев, когда, используя конкретный вид $p(s, q)$, можно получить специальные критерии робастной устойчивости. Не будем на этом останавливаться, а перейдем к непараметрической неопределенности одномерных передаточных функций.

Пусть открытая система описывается семейством скалярных передаточных функций

$$H(s) = H_0(s) + \Delta(s),$$

где частотная неопределенность $\Delta(s)$ удовлетворяет условию

$$|\Delta(j\omega)| \leq \nu |W(j\omega)| \quad (2.5.19)$$

при всех ω для некоторой функции $W(s)$, $W^{-1}(s) \in RH_\infty$, что эквивалентно условию

$$\|W^{-1}(s)\Delta(s)\|_\infty \leq \nu.$$

Нас интересует, будет ли робастно устойчива такая система, замкнутая единичной обратной связью. Как известно (см. раздел 1.2.4), при отсутствии неопределенности вопрос решается с помощью годографа Найквиста. Приведем его робастную модификацию.

Теорема 2.5.8. *Пусть неопределенности $\Delta(s)$ удовлетворяют условию (2.5.19) и все $H(s) = H_0(s) + \Delta(s)$ имеют одинаковое число N неустойчивых полюсов при всех допустимых $\Delta(s)$. Построим годограф*

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{H_0(j\omega) + 1}{|W(j\omega)|} - 1, \quad 0 \leq \omega < \infty.$$

Замкнутая система робастно устойчива тогда и только тогда, когда годограф $\tilde{H}(j\omega)$ охватывает круг C_ν с центром в точке $(-1, j0)$ и радиуса ν $N/2$ раз против часовой стрелки, не пересекая его (см. рис. 2.5.3).

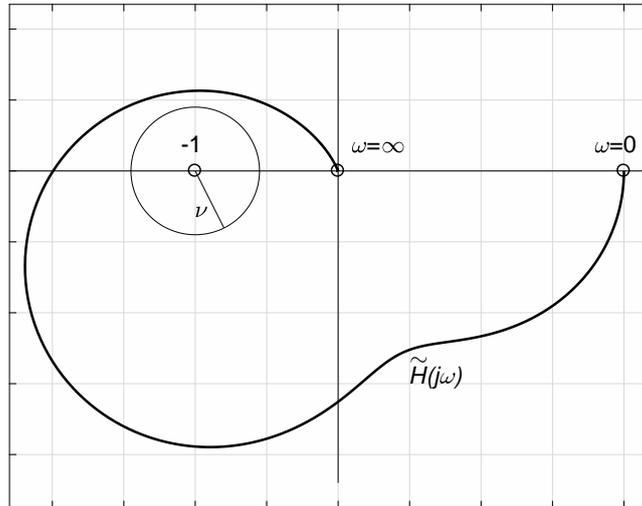


Рис. 2.5.3. Робастный критерий Найквиста. Поведение годографа $\tilde{H}(j\omega)$.

Доказательство. Покажем, что при сделанных предположениях для каждой допустимой функции $H(s)$ выполняется критерий Найквиста. Действительно, условие, что $\tilde{H}(j\omega)$ не пересекает C_ν , означает $|\tilde{H}(j\omega) + 1| > \nu$, то есть $|H_0(j\omega) + 1| > \nu|W(j\omega)|$ для всех ω . Поэтому для любого допустимого $H(s)$ имеем

$$\begin{aligned} |H(j\omega) + 1| &= |H_0(j\omega) + 1 + \Delta(j\omega)| \geq \\ &\geq |H_0(j\omega) + 1| - |\Delta(j\omega)| > \nu|W(j\omega)| - \nu|W(j\omega)| = 0, \end{aligned}$$

то есть $H(j\omega)$ не проходит через точку $(-1, j0)$.

Далее, годографы $H_0(j\omega)$ и $\tilde{H}(j\omega)$ пересекают луч $(-1, -\infty)$ одинаковое число раз и в одинаковых направлениях (сверху вниз или снизу вверх). Действительно, если $H_0(j\omega)$ вещественно и $H_0(j\omega) < -1$, то

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{H_0(j\omega) + 1}{|W(j\omega)|} - 1 < -1;$$

при этом если $H_0(j\omega) \doteq U_0 + jV_0$, $\tilde{H}(j\omega) \doteq U + jV$, то

$$V = \frac{V_0}{|W(j\omega)|},$$

то есть знаки мнимых частей $\tilde{H}(j\omega)$ и $H_0(j\omega)$ совпадают.

Поэтому число оборотов вокруг точки $(-1, j0)$ для $\tilde{H}(j\omega)$ и $H_0(j\omega)$ одинаково. Но все годографы $H(j\omega)$ делают одинаковое число оборотов вокруг точки $(-1, j0)$ (число оборотов может измениться только при прохождении одного из годографов семейства $H(j\omega)$ через точку $(-1, j0)$), однако как было доказано, $H(j\omega)$ не проходит через -1 для всех допустимых $H(s)$.

Итак, все годографы $H_0(j\omega)$, $\tilde{H}(j\omega)$, $H(j\omega)$ делают $N/2$ оборотов вокруг точки $(-1, j0)$ против часовой стрелки. По критерию Найквиста отсюда следует устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией $H(s)$, то есть робастная устойчивость рассматриваемого семейства.

Теперь докажем обратное утверждение: если годограф $\tilde{H}(j\omega)$ пересекает круг C_ν или делает вокруг него число оборотов, отличное от $N/2$, то устойчивость нарушается. Действительно, вторая возможность исключается, так как мы доказали выше, что если $\tilde{H}(j\omega)$ не пересекает C_ν , то число оборотов $\tilde{H}(j\omega)$ и $H_0(j\omega)$ одинаково, а последнее равно $N/2$. Если же $\tilde{H}(j\omega)$ пересекает C_ν , то при некотором ω будет $|\tilde{H}(j\omega) + 1| = \nu$, то есть $|H_0(j\omega) + 1| = \nu|W(j\omega)|$. Тогда, взяв

$$\Delta(s) = \nu W(s) e^{j\theta}, \quad \theta = -\pi + \arg W^{-1}(j\omega)(H_0(j\omega) + 1),$$

получим $\|W^{-1}\Delta\|_\infty = \nu$, $\Delta \in RH_\infty$ (так как $W \in RH_\infty$), и все $H(s) = H_0(s) + \Delta$ имеют то же число неустойчивых полюсов, что и $H_0(s)$. Поэтому Δ — допустимое возмущение. Однако так как

$$|H_0(j\omega) + 1| = \nu|W(j\omega) e^{j\theta}|,$$

$$\arg(H_0(j\omega) + 1) = -\arg(\nu W(j\omega) e^{j\theta}),$$

то

$$|H(j\omega) + 1| = |H_0(j\omega) + \nu W(j\omega) e^{j\theta} + 1| = 0,$$

то есть $H(j\omega)$ проходит через точку $(-1, j0)$, и тем самым (по обычному критерию Найквиста) соответствующая замкнутая система является неустойчивой. ■

Отметим, что полученной теореме можно придать и аналитическую форму: если номинальная система (с передаточной функцией $H_0(s)$ разомкнутой части) устойчива, то робастная устойчивость рассматриваемого семейства эквивалентна условию

$$|H_0(j\omega) + 1| > \nu|W(j\omega)|$$

для всех ω или

$$\|W^{-1}(s)(H_0(s) + 1)\|_\infty > \nu. \quad (2.5.20)$$

Действительно, условие непересечения $\tilde{H}(j\omega)$ с кругом C_ν означает, что $|\tilde{H}(j\omega) + 1| > \nu$, что в свою очередь эквивалентно (2.5.20).

Перейдем теперь к анализу робастной устойчивости многомерных систем при частотной неопределенности. Мы начнем с важного вспомогательного результата, играющего роль теоремы 2.5.8 для матричных передаточных функций.

Теорема 2.5.9 (о малом коэффициенте усиления). *Предположим, что функция $M(s) \in RH_\infty$. Матрица $(I + M(s)\Delta(s))^{-1}$ определена и принадлежит RH_∞ при всех*

$$\Delta \in RH_\infty, \quad \|\Delta(s)\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma},$$

тогда и только тогда, когда $\|M(s)\|_\infty < \gamma$.

Отметим некоторые частные случаи теоремы о малом коэффициенте усиления и ее связь с предыдущими результатами.

Прежде всего, теорема 2.5.8 (в форме неравенства (2.5.20), а не в графической интерпретации) является одномерным вариантом этого утверждения. Действительно, устойчивость замкнутой системы, рассматриваемой в теореме 2.5.8, определяется устойчивостью ее передаточной функции $S(s) \doteq (1 + H(s))^{-1}$. Обозначая

$$(1 + H_0(s))^{-1} \doteq M(s) \in RH_\infty,$$

получаем $S(s) = M(s)(1 + M(s)\Delta(s))^{-1}$, то есть условие $S(s) \in RH_\infty$ эквивалентно условию $(1 + M(s)\Delta(s))^{-1} \in RH_\infty$; именно это условие и рассматривается (в матричном варианте) в теореме о малом коэффициенте усиления. Для $W(s) \equiv 1$ требование $\|M(s)\|_\infty \leq \gamma$ в последней в точности эквивалентно (2.5.20), а ограничения на Δ в обеих теоремах совпадают при $\nu = 1/\gamma$.

В то же время в скалярном случае было доказано несколько более общее утверждение: там не предполагалось, что $\Delta \in RH_\infty$, а требовалось лишь, чтобы $H_0(s) + \Delta(s)$ и $H_0(s)$ имели одинаковое число неустойчивых полюсов. Иначе говоря, класс возмущений в теореме 2.5.8 несколько более общий, чем в многомерном случае.

Попробуем теперь сравнить результат, даваемый теоремой о малом коэффициенте усиления, с формулой для комплексного радиуса

устойчивости. Поскольку матрица устойчива тогда и только тогда, когда обратная существует и устойчива, а

$$(A + \Delta)^{-1} = A^{-1}(I + A^{-1}\Delta) = A^{-1}(I + M\Delta), \quad M \doteq A^{-1},$$

то устойчивость $A + \Delta$ эквивалентна устойчивости $I + M\Delta$. Поэтому на первый взгляд кажется, что из теоремы о малом коэффициенте усиления следует, что радиус устойчивости равен

$$\frac{1}{\|M\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

тогда как в действительности он равен

$$\|(sI - A)^{-1}\|_{\infty} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Дело в том, что в двух теоремах рассматривались разные классы возмущений: в теореме о радиусе устойчивости возмущения Δ были постоянными матрицами, тогда как в теореме о малом коэффициенте усиления рассматривались динамические возмущения $\Delta(s)$. Этот класс более широк, поэтому радиус устойчивости получается меньшим.

Из теоремы о малом коэффициенте усиления можно получить много следствий для различных типов неопределенности и различных структур объектов. Всюду далее $G(s)$ — матричная передаточная функция объекта; $G_0(s)$ — ее номинальное значение; $C(s)$ — матричная передаточная функция регулятора; $\Delta(s)$ — матричная неопределенность, причем предполагается, что

$$\Delta(s) \in RH_{\infty}, \quad \|\Delta\|_{\infty} \leq 1; \quad (2.5.21)$$

W_1, W_2 — заданные матричные весовые функции; а

$$S \doteq (I + G_0C)^{-1}, \quad T \doteq I - S = G_0C(I + G_0C)^{-1}$$

есть чувствительность и дополнительная чувствительность номинальной системы, показанной на рис. 2.5.4 (она предполагается устойчивой).

Теорема 2.5.10.

1. Если неопределенность входит аддитивно

$$G = G_0 + W_1\Delta W_2$$

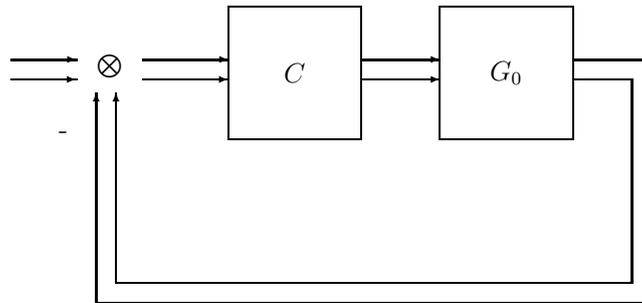


Рис. 2.5.4. Структура объекта с неопределенностью.

(см. рис. 2.5.5), то условие робастной устойчивости имеет вид

$$\|W_2CSW_1\|_\infty < 1.$$

2. Если неопределенность входит мультипликативно

$$G = (I + W_1\Delta W_2)G_0$$

(см. рис. 2.5.6), то условие робастной устойчивости записывается в виде

$$\|W_2TW_1\|_\infty < 1.$$

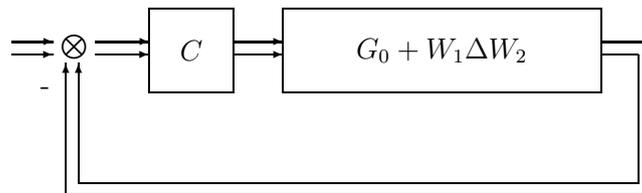


Рис. 2.5.5. Аддитивная неопределенность.

В простейшей ситуации при $W_1 = W_2 \equiv I$ условия робастной устойчивости при всех возмущениях, удовлетворяющих (2.5.21), принимают вид

$$\|CS\|_\infty < 1$$

в аддитивном случае и

$$\|T\|_\infty < 1$$

— в мультипликативном случае. Аналогичные результаты можно получить и для других моделей неопределенности.

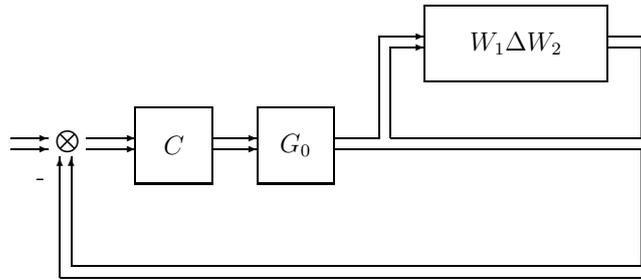


Рис. 2.5.6. Мультипликативная неопределенность.

2.6. Робастная стабилизация и управление

В данном разделе рассматривается одна из наиболее важных задач робастного синтеза. Она заключается в выборе регулятора (в форме обратной связи по состоянию или по выходу), который, во-первых, обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы, а во-вторых, гарантирует некоторое желаемое значение показателя качества при всех возможных неопределенностях. Мы рассмотрим робастные версии задач стабилизации и оптимального управления, исследовавшихся в предыдущих разделах 1.4.4, 1.5.2 и 2.2.2.

2.6.1. Робастная квадратичная стабилизация

В этом разделе мы рассмотрим задачу квадратичной стабилизации (см. раздел 1.4.4) в робастном варианте, а именно, для семейства систем

$$\dot{x} = A(q)x + Bu, \quad q \in \mathcal{Q}, \quad (2.6.1)$$

будем искать общий регулятор вида

$$u = Kx$$

такой, чтобы у замкнутых систем

$$\dot{x} = A_c(q)x, \quad A_c(q) = A(q) + BK, \quad q \in \mathcal{Q},$$

была общая квадратичная функция Ляпунова

$$V(x) = x^\top Px, \quad P \succ 0.$$

Зависимость матрицы A от параметров q может быть любой, например, это может быть интервальное или аффинное семейство матриц (см. раздел 2.4.1). Как было показано в теореме 1.4.8, решение задачи для фиксированной матрицы A определяется решением одного линейного матричного неравенства. В случае неопределенной матрицы появляется набор соответствующих неравенств, отвечающих всевозможным (допустимым) значениям параметра q .

Теорема 2.6.1. Пусть матрицы \hat{P} и \hat{Y} удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$A(q)P + PA^\top(q) + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0, \quad q \in \mathcal{Q}.$$

Тогда регулятор с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (2.6.1) при всех $q \in \mathcal{Q}$, а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы (при всех $q \in \mathcal{Q}$).

Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.4.8.

Таким образом, разрешимость приведенной в теореме системы линейных матричных неравенств эквивалентна робастной квадратичной стабилизируемости неопределенной системы (2.6.1).

Итак, проблема свелась к решению линейных матричных неравенств. Как уже обсуждалось ранее, число неравенств может быть конечным и соответствовать вершинным элементам семейства (например, если $A(q)$ — интервальное или аффинное семейство, а \mathcal{Q} — куб).

Тем не менее число неравенств может быть велико: скажем, в случае интервальной матрицы размера $n \times n$ число неравенств равно 2^{n^2} , и уже при $n = 5$ возникают трудности при использовании вычислительных методов. В этих случаях могут применяться более простые итеративные методы, которые на каждом шаге имеют дело лишь с одним случайно генерируемым неравенством. При этом общее число неравенств может быть даже бесконечным.

Мы рассмотрели лишь ситуацию, когда матрица A включает неопределенность, в то время как матрица B известна точно. Более общий

случай неопределенной матрицы B также может быть сведен к линейным матричным неравенствам. Действительно, рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(q_A)x + B(q_B)u, \quad q_A \in \mathcal{Q}_A, \quad q_B \in \mathcal{Q}_B,$$

и пусть для простоты матрицы $A(q_A)$ и $B(q_B)$ аффинно зависят от неопределенностей q_A, q_B , а области $\mathcal{Q}_A, \mathcal{Q}_B$ — выпуклые многогранники в \mathbb{R}^{ℓ_A} и \mathbb{R}^{ℓ_B} соответственно. Тогда, обозначив через $\mathcal{V}_A, \mathcal{V}_B$ совокупности вершин этих многогранников, видим, что наличие общего квадратично стабилизирующего регулятора эквивалентно разрешимости системы линейных матричных неравенств, отвечающих всем точкам из декартова произведения $\mathcal{V}_A \times \mathcal{V}_B$.

Теперь рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \quad (2.6.2)$$

со структурированной матричной неопределенностью, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$, пара (A, B) управляема, а матричная неопределенность $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ удовлетворяет ограничению

$$\|\Delta\| \leq 1.$$

Цель прежняя — стабилизировать систему (2.6.2) с помощью линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx \quad (2.6.3)$$

при всех допустимых неопределенностях.

Воспользуемся теоремой 1.4.8 из раздела 1.4.4 и будем предполагать существование матриц $P \succ 0$ и Y , удовлетворяющих матричному неравенству

$$(A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0,$$

или

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + F\Delta HP + PH^\top \Delta^\top F^\top \prec 0.$$

В силу леммы Питерсена (в форме леммы 3.2 из Приложения 3), где

$$G = AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top, \quad M = F, \quad N = HP,$$

полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности Δ тогда и только тогда, когда существует число ε такое, что

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0.$$

Таким образом, с учетом однородности по P, Y, ε , приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.6.2. Пусть матрицы \hat{P} и \hat{Y} удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0. \quad (2.6.4)$$

Тогда регулятор (2.6.3) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему (2.6.2) при всех неопределенностях $\|\Delta\| \leq 1$, а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы (при всех неопределенностях $\|\Delta\| \leq 1$).

Как и в случае параметрической неопределенности, теорема 2.6.2 дает необходимые и достаточные условия робастной квадратичной стабилизируемости неопределенной системы.

Нетрудно заметить, что в случае заданной степени устойчивости $\sigma > 0$ замкнутой системы первое из условий (2.6.4) теоремы 2.6.2 заменится на нестрогое матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + 2\sigma P + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Можно рассмотреть случай, когда структурированная неопределенность также содержится и в матрице B системы:

$$\dot{x} = (A + F_A \Delta_A H_A)x + (B + F_B \Delta_B H_B)u,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$, $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$, $F_B \in \mathbb{R}^{n \times p_B}$, $H_B \in \mathbb{R}^{q_B \times m}$, $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$, $\Delta_B \in \mathbb{R}^{p_B \times q_B}$, причем

$$\|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_B\| \leq 1.$$

Однако при этом соответствующий аналог теоремы 2.6.2 предоставит лишь достаточные условия робастной квадратичной стабилизируемости, поскольку лемма Питерсена для нескольких неопределенностей справедлива только в части достаточности. Необходимость имеет место лишь если A и B подвержены воздействию одной и той же

возмущающей матрицы: $\Delta_A = \Delta_B$ (при этом, разумеется, возможно $F_A \neq F_B, H_A \neq H_B$).

Дискретным аналогом теоремы 2.6.2 является следующее утверждение.

Теорема 2.6.3. Пусть матрицы \hat{P} и \hat{Y} удовлетворяют линейным матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} P - FF^\top & AP + BY & 0 \\ * & P & PH^\top \\ * & * & I \end{pmatrix} \succ 0, \quad P \succ 0.$$

Тогда регулятор $u_k = \hat{K}x_k$ с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно стабилизирует систему

$$x_{k+1} = (A + F\Delta H)x_k + Bu_k$$

при всех неопределенностях $\|\Delta\| \leq 1$, а квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы (при всех неопределенностях $\|\Delta\| \leq 1$).

Закончим этот раздел изучением еще одной характеристики системы (2.6.2) — радиуса квадратичной стабилизируемости, который определим как величину максимального размаха неопределенности, при котором еще возможна робастная квадратичная стабилизация:

$$\gamma_{\max}^{\text{st}} = \sup \{ \gamma : (A + BK + F\Delta H)P + P(A + BK + F\Delta H)^\top \prec 0 \\ \text{при некотором } P \succ 0, \text{ регуляторе } K \text{ и всех } \|\Delta\| \leq \gamma \}.$$

Ответ дается следующим утверждением.

Теорема 2.6.4. Пусть $\hat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования

$$\gamma \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \gamma FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярной переменной γ . Тогда радиус квадратичной стабилизируемости системы (2.6.2) равен $\sqrt{\hat{\gamma}}$.

Сделаем важное замечание.

Замечание 2.6.1. В системе

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu$$

радиус квадратичной стабилизируемости, вообще говоря, может и не быть конечным. В частности, это заведомо имеет место при

$$F = B$$

(несколько позже подобная ситуация возникнет еще не раз).

Действительно, в этом случае матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \gamma BB^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

из теоремы 2.6.4 окажется разрешимым относительно $P \succ 0$ и Y при любом $\gamma > 0$.

В самом деле, положив

$$Y = -\frac{\gamma + \alpha}{2} B^\top, \quad \alpha > 0,$$

имеем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top - \alpha BB^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Полученное матричное неравенство по лемме Шура эквивалентно неравенству Риккати

$$AP + PA^\top - \alpha BB^\top + PH^\top HP \preccurlyeq 0,$$

или, после домножения слева и справа на матрицу $Q = P^{-1}$, неравенству

$$A^\top Q + QA - \alpha QBB^\top Q + H^\top H \preccurlyeq 0,$$

которое имеет решение $Q \succ 0$ при любом значении параметра α . ▼

В следующем примере радиус квадратичной стабилизируемости системы также бесконечен.

Пример 2.6.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = (0 \quad 1), \quad \Delta \in \mathbb{R}.$$

Будем искать матрицу усиления в виде

$$K = (0 \quad k),$$

тогда матрица замкнутой системы приобретает вид

$$A_c(\Delta) = A + F\Delta H + BK = \begin{pmatrix} -1 & \Delta \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что она устойчива тогда и только тогда, когда $k < -1$, причем устойчивость сохраняется *при всех* $\Delta \in \mathbb{R}$.

Теперь зафиксируем некоторый уровень неопределенности $\gamma > 0$ и найдем общую квадратичную функцию Ляпунова для семейства устойчивых систем $\dot{x} = A_c(\Delta)x$ при всех $|\Delta| < \gamma$. Будем искать матрицу функции Ляпунова в виде

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \succ 0.$$

Представим $k = -1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, тогда

$$A_c(\Delta)P + PA_c^T(\Delta) = \begin{pmatrix} -2p_1 & \Delta p_2 \\ \Delta p_2 & -2\varepsilon p_2 \end{pmatrix}.$$

Для отрицательной определенности этой матрицы получаем (например, из леммы Шура) следующее условие:

$$p_1 > \frac{\Delta^2}{4\varepsilon} p_2,$$

которое выполняется для всех допустимых $|\Delta| < \gamma$ при выборе

$$p_1 > \frac{\gamma^2}{4\varepsilon} p_2,$$

например, при $p_2 = \varepsilon$, $p_1 = \gamma^2$.

Итого, каков бы ни был размах неопределенности γ , робастно стабилизирующий регулятор может быть выбран в виде

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0,$$

а в качестве матрицы общей квадратичной функции Ляпунова взята матрица

$$P = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Идеи и технические приемы, использовавшиеся при построении (робастно) квадратично стабилизирующих регуляторов самым существенным образом будут применяться в дальнейшем изложении. Основными среди таких приемов являются замена переменных, введенная в теореме 1.4.8, и использование леммы Питерсена (Приложение 3) для учета структурированной неопределенности при робастном синтезе.

Рассмотрим теперь робастные варианты задач из разделов 1.5.2 и 2.2.2. Еще раз напомним, что далее ограничимся построением *квадратично стабилизирующих* регуляторов; эффективная техника решения таких задач, основанная на линейных матричных неравенствах, была описана в предыдущих разделах этой главы. Соответственно, говоря о минимизации того или иного критерия, подразумеваем, что она производится в классе робастно *квадратично* стабилизирующих регуляторов.

2.6.2. Робастный линейно-квадратичный регулятор

Построим оптимальный линейно-квадратичный регулятор в ситуации, когда матрицы системы содержат неопределенность. В этих условиях встанем на минимаксные позиции и будем оптимизировать качество замкнутой системы против «наихудшей» неопределенности.

Рассмотрим сперва случай, когда параметрическая неопределенность содержится лишь в матрице A системы:

$$\dot{x} = A(q)x + Bu, \quad q \in \mathcal{Q}.$$

В соответствии с минимаксным подходом будем минимизировать критерий

$$J = \max_{q \in \mathcal{Q}} \int_0^{\infty} (x^\top R x + u^\top S u) dt, \quad R, S \succ 0,$$

по всем квадратично стабилизирующим регуляторам по состоянию $u = Kx$.

Способ решения такой задачи немедленно следует из теоремы 1.5.1, в которой вместо линейного матричного ограничения (1.5.21) появится совокупность ограничений, соответствующих всем возможным значениям параметра q из области неопределенности \mathcal{Q} . Совершенно аналогично задаче о робастной квадратичной стабилизации число ограничений может быть конечным; например, если само множество \mathcal{Q} конечно или оно имеет многогранную структуру, а зависимость $A(q)$ линейна.

Таким образом, робастная линейно-квадратичная задача при параметрической неопределенности допускает простое решение.

Теперь обратимся к системе со структурированной матричной неопределенностью:

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (2.6.5)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$, $H \in \mathbb{R}^{q_2 \times n}$, а матричная неопределенность $\Delta \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$ удовлетворяет ограничению

$$\|\Delta\| \leq 1 \quad (2.6.6)$$

и будем искать закон управления в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (2.6.7)$$

минимизируя квадратичный критерий качества

$$J = \max_{\Delta} \int_0^{\infty} (x^{\top} R x + u^{\top} S u) dt, \quad R, S \succ 0, \quad (2.6.8)$$

по всем квадратично стабилизирующим регуляторам.

Согласно теореме 1.5.1, будем предполагать существование матриц $P \succ 0$ и Y , удовлетворяющих матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^{\top} + BY + Y^{\top}B^{\top} & P & Y^{\top} \\ P & -R^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} \preceq 0,$$

которое представимо в виде

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\top} + BY + Y^{\top}B^{\top} & P & Y^{\top} \\ P & -R^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta (HP \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top (F^\top \ 0 \ 0) \preccurlyeq 0.$$

Вновь воспользовавшись леммой Питерсена (лемма 3.1 из Приложения 3), заключаем, что полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности Δ тогда и только тогда, когда существует число ε такое, что

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon FF^\top & P & Y^\top & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -S^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \quad (2.6.9)$$

Далее, поскольку весовая матрица R положительно определена, в силу следствия Д.2 из Приложения Д имеем

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0$$

для всех P и Y , удовлетворяющих линейному матричному неравенству (2.6.9). Это означает, что соответствующий регулятор $K = YP^{-1}$ будет робастно стабилизировать систему (см. раздел 2.6.1).

Наконец, минимизируя на решениях полученного линейного матричного неравенства величину $x_0^\top P^{-1} x_0$ (переписав ее в виде линейной функции, так же, как и в неробастном случае), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.6.5. Пусть \hat{P}, \hat{Y} — решение задачи

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + \varepsilon FF^\top & P & Y^\top & PH^\top \\ * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -S^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярных переменных γ и ε .

Тогда регулятор (2.6.7) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$$

робастно квадратично стабилизирует систему (2.6.5), при этом квадратичная форма

$$V(x) = x^\top \hat{P}^{-1}x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы при всех неопределенностях (2.6.6), а минимальное значение функционала (2.6.8) на решениях системы (2.6.5) с начальным условием x_0 равно

$$J_{\min} = x_0^\top \hat{P}^{-1}x_0.$$

Отметим, что при достаточно высоком уровне неопределенности $\|\Delta\|$ решение данной задачи отсутствует. Впрочем, в теореме 2.6.4 был представлен простой способ отыскания максимального уровня $\gamma_{\max}^{\text{st}}$, допускающего квадратичную стабилизацию, так что в предыдущей теореме молчаливо предполагается, что этот уровень не превышен.

2.6.3. H_∞ -оптимизация: робастный вариант

Обратимся теперь к робастной постановке задачи H_∞ -оптимизации (см. раздел 2.2.2) и рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + F\Delta H)x + B_1u + Dw, & x(0) &= 0, \\ z &= Cx + B_2u, \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$, с вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектором выходных переменных $z(t) \in \mathbb{R}^l$, вектором управления $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и вектором внешних возмущений $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в L_2 -норме.

Как и ранее, полагаем, что неопределенность в системе имеет структурированную матричную форму: $F \in \mathbb{R}^{n \times q_1}$ и $H \in \mathbb{R}^{q_2 \times n}$ — постоянные матрицы, а матричная неопределенность $\Delta \in \mathbb{R}^{q_1 \times q_2}$ удовлетворяет ограничению

$$\|\Delta\| \leq 1. \quad (2.6.11)$$

Будем искать регулятор в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (2.6.12)$$

который минимизирует величину

$$J = \max_{\|\Delta\| \leq 1} \sup_{|w| \leq 1} \|z\|_2^2$$

на решениях системы (2.6.10) по всем квадратично стабилизирующим регуляторам.

Согласно теореме 2.2.5 будем предполагать существование матриц $P \succ 0$, Y и скалярной переменной γ , удовлетворяющих следующему матричному неравенству:

$$\begin{pmatrix} \Phi & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где

$$\Phi = (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top.$$

Представив его в виде

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ & D^\top & -\gamma I & 0 & 0 \\ & CP & 0 & -I & 0 \\ & B_2 Y & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta (HP \ 0 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top (F^\top \ 0 \ 0 \ 0) \preceq 0$$

и воспользовавшись леммой Питерсена, заключаем, что полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности Δ тогда и только тогда, когда существует число ε такое, что

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top & PH^\top \\ * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad (2.6.13)$$

где

$$\Omega = AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + \varepsilon FF^\top.$$

Как и в неробастном случае, из-за нестрогости матричного неравенства (2.6.13), регулятор $K = YP^{-1}$ может оказаться не стабилизирующим. Поступая аналогично замечанию 2.2.3, приходим к следующему результату.

Теорема 2.6.6. Пусть $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{\gamma}$ — решение задачи

$$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} \Omega & D & PC^T & Y^T B_2^T & PH^T \\ * & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

где

$$\Omega = AP + PA^T + B_1 Y + Y^T B_1^T + 2\sigma P + \varepsilon FF^T,$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и скалярных переменных γ и ε .

Тогда регулятор (2.6.12) с матрицей

$$\hat{K} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

робастно квадратично стабилизирует систему (2.6.10), минимальное значение функционала J на ее решениях равно

$$J_{\min} = \hat{\gamma},$$

а квадратичная форма

$$V(x) = x^T \hat{P}^{-1} x$$

является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы при всех неопределенностях (2.6.11) со степенью устойчивости σ .

2.7. Положительные линейные системы

В последнем разделе главы будет рассмотрен особый класс линейных систем — так называемые положительные системы, модели которых естественным образом возникают в разнообразных приложениях. Для таких систем будут построены функции Ляпунова специального вида, описаны инвариантные множества (отличные от эллипсоидальных) при наличии внешних возмущений, приведены примеры синтеза.

2.7.1. Условия положительности и устойчивости

Во многих прикладных задачах переменные по своей природе являются неотрицательными величинами. Достаточно очевидны примеры из физики, химии, биологии, экономики, экологии. Естественно, это свойство должно найти отражение в математических моделях таких систем, в частности, дифференциальных уравнениях, описывающих их динамику.

Напомним, что система

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.7.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, называется *положительной*, если¹ из $x(0) > 0$ следует $x(t) > 0$ для всех $t > 0$. Нетрудно привести легко проверяемые необходимые и достаточные условия положительности систем.

Разумеется, большинство из прикладных задач с положительными переменными описываются нелинейными моделями, однако ограничимся линейным случаем, имеющим свою специфику и позволяющим использовать нестандартный математический аппарат исследования.

Приведем основные свойства положительных систем (условия положительности, условия устойчивости, робастность, влияние внешних возмущений) и типичные задачи управления для них (стабилизация, оптимизация по различным критериям). Оказывается, здесь существуют специфические уточнения общей теории линейных систем управления (линейная функция Ляпунова вместо квадратичной, линейные векторные неравенства вместо линейных матричных неравенств, линейные критерии оптимальности вместо квадратичных и т.д.).

Теорема 2.7.1. Система (2.7.1) положительна тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j. \quad (2.7.2)$$

Этот результат хорошо известен и просто доказывается. Действительно, на границе неотрицательного ортанта (то есть при $x_i = 0$) должно быть

$$\dot{x}_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \geq 0$$

для всех x_j , $j \neq i$, что возможно лишь, если $a_{ij} \geq 0$, $i \neq j$ для всех i и j . Интересно, что диагональные элементы матрицы A могут быть любого знака; положительность определяется знаком недиагональных

¹Здесь и далее векторные и матричные неравенства понимаются покомпонентно.

элементов. Заметим, что свойство положительности системы не инвариантно относительно преобразований координат; оно привязано к координатной форме матрицы, а не к ее спектральным характеристикам.

Весьма важный вопрос об устойчивости положительных систем также имеет простой и конструктивный ответ, не связанный с вычислением собственных значений матрицы A . Для общих линейных систем условие устойчивости заключается в существовании квадратичной функции Ляпунова, то есть сводится к линейным матричным неравенствам. Оказывается, что для положительных систем устойчивость эквивалентна существованию *диагональной* квадратичной функции Ляпунова или существованию *линейной* функции Ляпунова.

Теорема 2.7.2. *Для положительной системы*

$$\dot{x} = Ax$$

следующие условия эквивалентны:

1. Матрица A гурвицева.
2. Существует диагональная квадратичная функция Ляпунова, то есть найдется

$$V(x) = x^T D x, \quad D = \text{diag}\{d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n\}, \quad d_i > 0,$$

такая, что $\dot{V}(x) < 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, то есть

$$DA + A^T D < 0.$$

3. Существует линейная функция Ляпунова

$$V(x) = h^T x, \quad h > 0,$$

такая, что $\dot{V}(x) < 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, то есть

$$-A^T h > 0.$$

4. Существует $h > 0$ такое, что $Ah < 0$.
5. $A^{-1} \leq 0$.
6. $(A^T)^{-1} \leq 0$.

Доказательство. Не будем приводить полное доказательство теоремы, оно может быть найдено в литературе. Отметим лишь, что основная идея заключается в том, что при надлежащем выборе t матрица $A + tI$ будет неотрицательной, поэтому к ней можно применить результаты для дискретных систем, см. приводимую ниже теорему 2.7.4. ■

Будем матрицу A называть M -матрицей, если она гурвицева и для нее выполнено условие (2.7.2); в этом случае пишем: $A \in \mathcal{M}$ (заметим, что в некоторых работах терминология несколько иная).

Таким образом, проверка факта $A \in \mathcal{M}$ сводится к проверке разрешимости линейных неравенств

$$h > 0, \quad Ah < 0, \quad (2.7.3)$$

что может быть реализовано без труда стандартными средствами линейного программирования.

В качестве примера рассмотрим аналог леммы Беллмана (см. лемму 1.5.1). В ней речь шла о вычислении квадратичного функционала на решении линейной системы; здесь же изучим вычисление линейного интегрального критерия.

Пусть

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad A \in \mathcal{M}. \quad (2.7.4)$$

Нас интересует значение интеграла

$$J = \int_0^{\infty} c^T x(t) dt, \quad c > 0, \quad (2.7.5)$$

как функция от начального условия x_0 .

Лемма 2.7.1. *Значение функционала (2.7.5) на решениях системы (2.7.4) равно*

$$J = -c^T (A^T)^{-1} x_0.$$

Доказательство. Возьмем $p = -(A^T)^{-1}c$, тогда $V(x) = p^T x$ будет функцией Ляпунова, поскольку

$$p > 0, \quad A^T p < 0,$$

и

$$\dot{V}(x) = p^T Ax = p^T A^T x = -c^T x < 0.$$

Интегрируя это равенство от нуля до бесконечности и учитывая, что $V(x(\infty)) = 0$, получаем требуемый результат. ■

Приведем аналогичные результаты для дискретных систем. Система

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad (2.7.6)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, называется *положительной*, если из $x_0 > 0$ следует $x_k > 0$ для всех $k > 0$. Условия положительности здесь даже проще, чем для непрерывного случая.

Теорема 2.7.3. Система (2.7.6) положительна тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} \geq 0 \quad \text{для всех } i, j = 1, \dots, n.$$

Доказательство этого факта очевидно. Таким образом, положительные дискретные системы — те, у которых матрица A неотрицательна. Такие матрицы обладают рядом замечательных свойств, из которых нам понадобится следующий результат.

Лемма 2.7.2 (Теорема Перрона – Фробениуса). Пусть матрица $A \geq 0$ — квадратная, а ρ — ее спектральный радиус. Тогда найдется вещественный собственный вектор $\hat{x} \geq 0$ такой, что

$$A\hat{x} = \rho\hat{x}.$$

Иными словами, наибольшее по модулю собственное значение неотрицательной матрицы вещественно и неотрицательно, и ему соответствует неотрицательный собственный вектор. Заметим, что этот собственный вектор не обязательно единственный, и могут найтись комплексные собственные значения, равные по модулю спектральному радиусу.

Сформулируем условия устойчивости положительных дискретных систем.

Теорема 2.7.4. Для положительной дискретной системы

$$x_{k+1} = Ax_k$$

следующие условия эквивалентны:

1. Матрица A — шуровская ($\rho(A) < 1$).
2. Существует диагональная квадратичная функция Ляпунова

$$V(x) = x^T D x, \quad D = \text{diag}\{d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n\}, \quad d_i > 0,$$

такая, что $V(x_{k+1}) < V(x_k)$, $x_k \geq 0$, $x_k \neq 0$, то есть

$$A^T D A - D < 0.$$

3. Существует линейная функция Ляпунова:

$$V(x) = c^T x, \quad c > 0,$$

такая, что $V(x_{k+1}) < V(x_k)$, $x_k \geq 0$, $x_k \neq 0$, то есть

$$A^T c \leq c.$$

4. Существует $h > 0$ такое, что $Ah < h$.
5. $(I - A)^{-1} \geq 0$.
6. $(I - A^T)^{-1} \geq 0$.

Таким образом, и здесь проверка устойчивости сводится к разрешимости системы линейных неравенств

$$h > 0, \quad Ah < h,$$

или

$$A^T c \leq c;$$

и по решениям таких линейных неравенств легко строить диагональную квадратичную или линейную функцию Ляпунова.

Доказательство теоремы легко проводится с использованием теоремы Перрона – Фробениуса.

Пример 2.7.1. В качестве важного примера кратко рассмотрим случай *стохастической* (по строкам) матрицы A такой, что

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Такие матрицы возникают во многих приложениях, связанных с *цепями Маркова* и *задачами ранжирования*. У них (при дополнительном требовании *неразложимости* матрицы) спектральный радиус равен единице и (по теореме Перрона – Фробениуса) найдется так называемый главный собственный вектор $Ax^* = x^*$, $x^* \geq 0$, $x^* \neq 0$. Тем самым система

$$x_{k+1} = Ax_k$$

положительна, но не устойчива (можно показать что $x_k \rightarrow x^*$). Однако если

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} < 1 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n,$$

то матрица A будет устойчивой, поскольку выполняется условие

$$h > 0, \quad Ah < h, \quad h = e = (1 \ \dots \ 1)^T.$$

Тем самым $\lim x_k = 0$, $(e, x_{k+1}) < (e, x_k)$. ▼

2.7.2. Внешние возмущения

Рассмотрим теперь линейные системы с внешними возмущениями:

$$\dot{x} = Ax + Dw. \quad (2.7.7)$$

Здесь w — либо внешнее возмущение, либо (программное) управление.

Для положительности системы (2.7.7) и ограниченности ее траекторий необходимы и достаточны условия

$$A \in \mathcal{M}, \quad D \geq 0, \quad 0 \leq w \leq e,$$

где, как и ранее, $e = (1 \ \dots \ 1)^\top$.

Действительно, например, при нарушении условия $w \geq 0$ траектория системы может выйти из неотрицательного ортанта. В дальнейшем будем предполагать выполнение этих условий. Заметим, что более общие интервальные ограничения

$$0 \leq w_i \leq c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

легко сводятся к рассматриваемому случаю за счет масштабирования матрицы D .

Нас интересуют:

— *инвариантные множества*: при $x(0) \in Q$ выполняется $x(t) \in Q$ для всех $t \geq 0$ и всех $0 \leq w(\tau) \leq e$;

— *предельно достижимые множества*: $\bigcap_T \{x(T)\}$ при $x(0) = 0$;

— *притягивающие множества*: $x(t) \rightarrow Q$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $x(0)$.

Исследование этих объектов для линейных систем, не являющихся положительными, было проведено выше; при этом в качестве соответствующих множеств было удобно брать эллипсоиды; здесь же они являются параллелепипедами (интервальные ограничения на возмущения $0 \leq w \leq e$ порождают интервальные ограничения на траекторию).

Теорема 2.7.5. *Любое инвариантное множество для линейной системы (2.7.7) содержит параллелепипед*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad 0 \leq x \leq -A^{-1}De\},$$

и это множество является минимальным инвариантным, предельно достижимым и притягивающим множеством.

Доказательство. *Достижимое множество.* Пусть $Q(T)$ — достижимое из нуля множество к моменту T ; оно выпукло, замкнуто и ограничено. Решив задачу

$$c^\top x \longrightarrow \max$$

при ограничениях

$$c > 0, \quad x \in Q(T),$$

находим

$$\begin{aligned} \max_w c^\top x(T) &= \max_w \int_0^T c^\top e^{A(T-t)} Dw dt = \\ &= \max_w \int_0^T w^\top D^\top e^{A^\top(T-t)} c dt. \end{aligned}$$

Но поскольку

$$D \geq 0, \quad c > 0, \quad e^{A^\top t} \geq 0,$$

то максимум по $0 \leq w \leq e$ достигается при $w = e$ при всех t и $c > 0$.

Таким образом, на множестве $Q(T)$ максимум линейной функции (c, x) , $c > 0$, достигается в одной точке $x(T)$, являющейся решением системы

$$\dot{x} = Ax + De, \quad x(0) = 0.$$

При этом $x(T) \rightarrow -A^{-1}De$ при $T \rightarrow \infty$. Множество с таким свойством является параллелепипедом

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq -A^{-1}De\}.$$

Инвариантное множество. Пусть точка x не принадлежит множеству Q , то есть

$$x_i > (-A^{-1}De)_i$$

для некоторого i .

Возьмем функцию

$$V(x) = h^\top x, \quad h = -(A^\top)^{-1}e_i,$$

где

$$e_i = (\underbrace{0 \quad \dots \quad 0 \quad 1}_{i} \quad 0 \quad \dots \quad 0).$$

Тогда

$$h > 0, \quad A^\top h < 0,$$

и функция V будет функцией Ляпунова для системы без возмущений.

Для нее

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = h^\top (Ax + Dw) &\leq -e_i^\top x + e_i^\top (-A^{-1}De) = \\ &= -x_i + (-A^{-1}De)_i < 0, \end{aligned}$$

то есть траектория притягивается к Q . ■

Аналогичный результат для дискретной системы

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad (2.7.8)$$

где

$$A \geq 0, \quad D \geq 0, \quad 0 \leq w_k \leq e,$$

формулируется следующим образом. Будем предполагать, что A — шуровская матрица, а ограничения на возмущение имеют тот же вид, что и для непрерывной системы.

Теорема 2.7.6. *Минимальное инвариантное, предельное достижимое, притягивающее множество системы (2.7.8) является параллелепипедом*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq (I - A)^{-1}De\}.$$

Доказательство аналогично приведенному выше для непрерывных систем.

В качестве примера рассмотрим метод последовательных приближений для решения системы линейных алгебраических уравнений при наличии помех. Рассмотрим систему

$$x = Ax + b$$

с матрицей A такой, что

$$a_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} < 1,$$

и вектором $b \geq 0$ (они нам неизвестны) и пусть в точках x_k нам доступны векторы

$$s_k = Ax_k + b + w_k,$$

содержащие помеху w_k . Будем предполагать, что помехи ограничены:

$$0 \leq w_k \leq \varepsilon e$$

(предположение о неотрицательности помех отчасти искусственно и сделано для упрощения результатов; от него можно избавиться путем замены переменных).

Мы будем применять для решения метод последовательных приближений:

$$x_{k+1} = Ax_k + b + w_k,$$

при этом будем считать, что

$$x_0 > x^* = (I - A)^{-1}b,$$

то есть начальное приближение мажорирует решение.

Обозначим

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 \leq x - x^* \leq (I - A)^{-1}De\}$$

и введем правило остановки итераций:

$$|x_{k+1} - x_k|_\infty \leq \mu\varepsilon, \quad \mu > 2.$$

Теорема 2.7.7. *Параллелепипед Q является притягивающим инвариантным множеством итерационного метода; условие останова заведомо выполнится за конечное число итераций, и при этом будет*

$$x_k \in (\mu - 1)Q,$$

то есть полученное приближение будет близко к минимальному предельно достижимому множеству для данного уровня помех.

2.7.3. Стабилизация

Вернемся к задаче без возмущений, но с управлением:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.7.9}$$

причем управление будем искать в форме линейной обратной связи

$$u = Kx.$$

При этом не предполагается, что $A \in \mathcal{M}$, и задача заключается в том, чтобы сделать $A + BK \in \mathcal{M}$.

Для этого нужно

$$a_{ij} + b_i k_j \geq 0, \quad i \neq j, \quad h > 0, \quad Ah + B \sum_i k_i h_i < 0,$$

где k_i — столбец искомой матрицы K , а h_i — компонента искомого вектора h .

Эта система неравенств нелинейна относительно K и h . Сделаем замену

$$k_i h_i = y_i \in \mathbb{R}^n$$

и получим

$$\begin{aligned} a_{ij} h_j + b_i y_j &\geq 0, \quad i \neq j, \\ h > 0, \quad Ah + B \sum_i y_i &< 0. \end{aligned}$$

Эти неравенства линейны по y и h ; решив их, найдем обратную связь

$$K = (k_1 \quad \cdots \quad k_n), \quad k_i = y_i / h_i.$$

Однако, в отличие от обычной задачи стабилизации, управляемость пары (A, B) не гарантирует возможность сделать замкнутую систему (2.7.9) положительной и устойчивой.

Заметим, что вместо привычной задачи с линейными матричными неравенствами для стабилизации общих линейных систем здесь получена система линейных векторных неравенств.

2.7.4. Робастность

Некоторые задачи с неопределенностями получают для положительных систем неожиданно простое решение. Рассмотрим лишь один характерный пример — проблему *робастной устойчивости интервальных матриц*. В общем случае эта проблема очень сложна — например, даже проверка на устойчивость всех «вершинных» матриц (в которых элементы принимают крайние значения) не гарантирует робастной устойчивости семейства. Однако для положительных систем критерий оказывается исключительно простым.

Рассмотрим интервальное семейство матриц:

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}\}.$$

Мы хотим установить критерий, гарантирующий, что все матрицы из этого семейства принадлежат \mathcal{M} , то есть что все системы $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathcal{A}$, положительны и устойчивы.

Составим матрицу $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ такую, что

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \bar{a}_{ii}, & i = j, \\ \underline{a}_{ij}, & i \neq j. \end{cases}$$

Теорема 2.7.8. *Для робастной устойчивости и положительности семейства \mathcal{A} необходима и достаточна гурвицевость матрицы \tilde{A} и выполнение условий*

$$\underline{a}_{ij} \geq 0, \quad i \neq j. \quad (2.7.10)$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 2.7.1, для положительности семейства \mathcal{A} необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j,$$

для всех матриц из \mathcal{A} . Ясно, что это эквивалентно условию (2.7.10).

Для гурвицевости всех матриц из семейства \mathcal{A} необходимо и достаточно выполнение условий (2.7.3). Однако если это условие выполнено для матрицы \tilde{A} , то оно выполнено и для любой матрицы из заданного семейства. ■

Не станем останавливаться на других задачах робастности положительных систем; приведенный пример вполне характеризует как специфику таких задач, так и возможную технику исследования.

Часть II
Нелинейные системы

Глава 3

Нелинейная теория

В предыдущих главах мы познакомились с методами анализа линейных систем управления. Линейная теория весьма хорошо разработана. Инженерам доступны как аналитические, так и численные методы анализа и синтеза линейных систем. Однако динамические системы, с которыми приходится иметь дело на практике, часто оказываются нелинейными. Это означает, что описанные ранее методы могут либо оказаться неприменимыми, либо иметь ограниченное применение при рассмотрении окрестности рабочей точки, в которой осмыслена линеаризация системы. В отличие от линейных систем, теория нелинейных динамических систем далека от завершения. Методы синтеза законов управления нелинейными системами существуют в виде отдельных «ящиков с инструментами» и инженерам следует проявлять изобретательность и осторожность, выбирая те или иные инструменты для решения своих задач.

3.1. Особенности динамики нелинейных систем

Важный метод анализа предполагает *линеаризацию*, позволяющую распространить методы анализа линейных систем на нелинейный случай. Вернемся к примеру маятника, рассмотренного в разделе 1.1.6 и изображенного на рис. 1.1.6. Если не предполагать малость угла отклонения α в уравнении (1.1.35), то в уравнении колебаний маятника присутствует нелинейная функция $\sin \alpha$, что препятствует непосредственному применению методов анализа линейных систем. Лине-

ризация этой функции в окрестности нижнего положения равновесия $\alpha_0 = 0$ позволяет переписать (1.1.35) в виде (1.1.36). Корни характеристического полинома уравнения (1.1.36) равны $\pm j\sqrt{g/l}$. Это позволяет заключить, что нижнее положение равновесия маятника является устойчивой особой точкой типа *центр* в двумерном *фазовом пространстве* или, другими словами, на *фазовой плоскости* x, \dot{x} . Напомним, что *особой точкой* дифференциального уравнения называется точка, в которой его правая часть равна нулю. В двумерном случае различают четыре типа невырожденных особых точек. Если матрица линейного приближения правой части в особой точке невырождена, то, в зависимости от характера собственных чисел, особая точка может быть *узлом*, *седлом*, *фокусом* или *центром*. Кроме того, узел и фокус могут быть устойчивыми или неустойчивыми. В случае двух вещественных отрицательных собственных чисел имеем устойчивый узел. Если два вещественных собственных числа положительны, то узел неустойчив. Вещественные числа разного знака дают седло с устойчивой и неустойчивой сепаратрисами. Пара комплексно сопряженных собственных чисел дает устойчивый или неустойчивый фокус в зависимости от знака их вещественной части. Особая точка, отвечающая паре чисто мнимых собственных чисел называется центром. Начальное условие дифференциального уравнения определяется точкой на плоскости. *Траекторией* или *интегральной кривой* дифференциального уравнения называется геометрическое место точек решения. Совокупность траекторий, заполняющих плоскость, называется *фазовым портретом* дифференциального уравнения. Обычно на траекториях фазового портрета указывают направление движения решения при возрастании независимой переменной (времени).

Линеаризация имеет локальный характер. Анализ линеаризованной в окрестности положения равновесия системы дает строение фазового портрета в окрестности определенной особой точки или опорной траектории. Свойства системы вблизи точки линеаризации распространяются на некоторую ее малую окрестность. Методы, основанные на линеаризации, не могут предвидеть нелокальные явления. Действительно, линеаризация функции $\sin \alpha$ в окрестности другого, верхнего, положения равновесия приводит к линейному дифференциальному уравнению (1.1.37), корни характеристического полинома которого вещественны и равны $\pm\sqrt{g/l}$. Таким образом верхнее положение равновесия маятника является неустойчивой особой точкой типа *седло*. Задача выбора управления, стабилизирующего верхнее положение, рассмотрена в разделе 3.2.4 в качестве примера. Таким образом, в

малой окрестности нижнего и верхнего положений равновесия система (1.1.35) имеет различное строение фазового портрета, и полный фазовый портрет этой системы шит из чередующихся фокусов и седел.

Мы видим, что динамика нелинейных систем сложнее и богаче динамики линейных систем. Следующие явления можно встретить только в нелинейных системах:

- 1) множественность состояний равновесия;
- 2) конечное время переходного процесса;
- 3) существование предельных циклов;
- 4) хаотическая динамика;
- 5) гармоника, почти периодические движения;
- 6) многорежимность поведения.

Ниже эти явления проиллюстрированы примерами.

3.1.1. Множественность состояний равновесия

В отличие от линейных систем нелинейные системы могут иметь несколько изолированных положений равновесия. В случае неединственного положения равновесия в линейной системе множество равновесий образует линейное пространство. В нелинейных системах возможно существование множества неизоллированных положений равновесия, отличного от линейного пространства. Например, множество положений равновесия может состоять из конечного числа изолированных точек. Также может быть ограниченное множество неизоллированных положений равновесия.

Пример 3.1.1. Шесть стационарных вращений твердого тела вокруг центра масс. Уравнение вращения твердого тела вокруг центра масс имеет вид

$$\begin{aligned} J_1 \dot{p} &= -(J_3 - J_2)qr, \\ J_2 \dot{q} &= -(J_1 - J_3)pr, \\ J_3 \dot{r} &= -(J_2 - J_1)pq. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Уравнения (3.1.1) допускают *первый интеграл* энергии, то есть величину, сохраняющую постоянное значение на траекториях системы.

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на три главные оси эллипсоида инерции, J_1, J_2, J_3 — моменты инерции относительно главных осей эллипсоида инерции. Кинетическая энергия выражается через угловые скорости следующим образом: $T = \frac{1}{2}(J_1 p^2 + J_2 q^2 + J_3 r^2)$. Условие $T = c$ определяет поверхность эллипсоида в трехмерном пространстве векторов $(p, q, r)^\top$. Поверхность эллипсоида образует *двумерное гладкое замкнутое многообразие без края*. Двумерные замкнутые многообразия без края можно представить себе как поверхности гладких трехмерных тел, имеющих ограниченный объем, таких как сфера, тор, и т.д. Каждое из таких тел подобно (также говорят *гомеоморфно*) сфере с конечным числом k приклеенных к ней ручек. Классы подобия характеризуются так называемой *эйлеровой характеристикой*, равной $2(1 - k)$. Поверхности, принадлежащие одному и тому же классу, переводятся друг в друга непрерывным преобразованием координат. Поверхность сферы (или подобного ей эллипса) имеет эйлерову характеристику 2, поскольку не имеет ручек. Тор подобен сфере с одной ручкой и его поверхность имеет эйлерову характеристику 0.

Уравнение (3.1.1) образует *гладкое векторное поле*, касательное к многообразию $T = c$, поскольку T сохраняет постоянное значения при движении системы. Имеет место *теорема Хопфа* о равенстве эйлеровой характеристики сумме *индексов особых точек* гладкого касательного векторного поля. Индексы невырожденных особых точек принимают значения 1 и -1 . Поэтому на поверхности эллипсоида будет не менее двух особых точек касательного векторного поля. В нашем случае имеется шесть изолированных особых точек, являющихся состояниями равновесия:

$$\pm(\sqrt{2c/J_1}, 0, 0)^\top, \quad \pm(0, \sqrt{2c/J_2}, 0)^\top, \quad \pm(0, 0, \sqrt{2c/J_3})^\top.$$

Легко видеть, что они обращают правую часть (3.1.1) в нуль. Они определяют вращения вокруг каждой из трех осей в двух направлениях. Вращение вокруг малой и большой осей устойчиво, вращение вокруг средней оси неустойчиво. На двумерной поверхности $T = c$ имеется четыре центра и два седла. Индекс центра равен 1. Индекс седла равен -1 . Таким образом имеем сумму индексов $4 \times 1 + 2 \times (-1) = 2$, равную эйлеровой характеристике поверхности. ▼

Пример 3.1.2. Электрическая цепь с туннельным диодом. Этот пример показывает изменение количества и характера состояний равновесия динамической системы в зависимости от значения управляющего параметра. На рис. 3.1.1а показана электрическая цепь, состоящей из источника ЭДС величины E , резистора с сопротивлением

R , конденсатора емкости C , индуктивности величины L и туннельного диода. Правая часть рис. 3.1.1б показывает *вольтамперную характеристику*

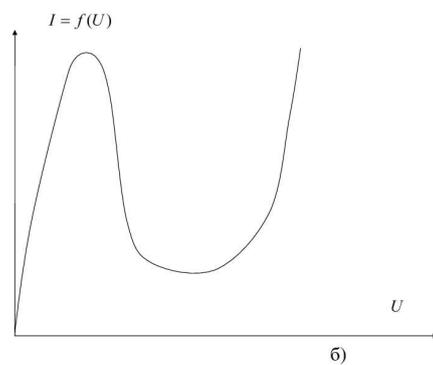
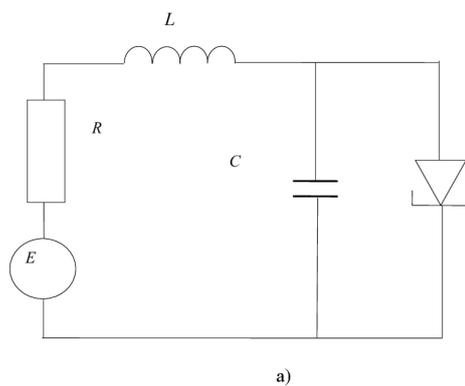


Рис. 3.1.1. Электрическая цепь с туннельным диодом.

риктику диода, то есть зависимость протекающего тока от величины приложенного напряжения. На характеристике виден участок отрицательного сопротивления, на котором при увеличении напряжения уменьшается величина протекающего тока. Обозначим через U напря-

жение на конденсаторе и туннельном диоде, I — ток, протекающий через диод. Другие обозначения перечислены ниже:

I_C — ток через конденсатор,

I_L — ток через индуктивность и резистор,

U_L — напряжение на катушке индуктивности,

E — ЭДС, развиваемая источником.

Дифференциальные уравнения, описывающие динамику системы имеют вид

$$\dot{U} = \frac{1}{C}I_C, \quad \dot{I}_L = \frac{1}{L}U_L.$$

В соответствии с *законами Кирхгофа* о балансе суммы токов в узлах и балансе падений напряжения на элементах контура имеем

$$I_L = I_C + I = I_C + f(U), \quad U_C + U_L + I_L R = E.$$

Окончательно дифференциальные уравнения системы принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{C}(-f(U) + I_L), \\ \dot{I}_L &= \frac{1}{L}(-U - RI_L + E). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Состояния равновесия определяются равенствами $-f(U) + I_L = 0$ и $-U - RI_L + E = 0$. Исключив I_L , перепишем эти условия в виде $f(U) = \frac{1}{R}(E - U)$. Рис. 3.1.2 иллюстрирует это равенство. В зависимо-

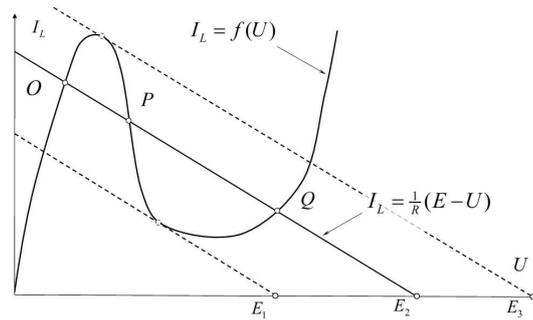


Рис. 3.1.2. Определение состояний равновесия системы (3.1.2).

сти от значения ЭДС имеется одно или три состояния равновесия. На рисунке изображены три положения прямой $I_L = \frac{1}{R}(E - U)$, отвечающие значениям ЭДС $E_1 < E_2 < E_3$. Нижнее положение (пунктирная линия) отвечает значению E_1 , среднее положение (сплошная линия) отвечает значению E_2 , третье положение (пунктирная линия) отвечает значению E_3 . Значениям $E \in (E_1, E_3)$ (в частности E_2) отвечают три состояния равновесия, обозначенные на рисунке точками O, P, Q . Для анализа характера положений равновесия запишем матрицу линеаризованной системы, составленную из частных производных правой части системы (3.1.2) по переменным U и I_L . Имеем

$$A(U) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} \frac{\partial f}{\partial U} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\frac{1}{C} \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{R}{L}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C} \frac{\partial f}{\partial U} - \frac{R}{L}\right)^2}{4} - \frac{1}{LC}}.$$

Предположим, что подкоренное выражение положительно, то есть оба корня вещественны. Получим условия, при которых больший из корней положителен, а меньший отрицателен. Имеем

$$-\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C} \frac{\partial f}{\partial U} - \frac{R}{L}\right)^2}{4} - \frac{1}{LC}} < \frac{1}{C} \frac{\partial f}{\partial U} + \frac{R}{L} < \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{C} \frac{\partial f}{\partial U} - \frac{R}{L}\right)^2}{4} - \frac{1}{LC}}.$$

После несложных преобразований получим, что последнее условие эквивалентно одному неравенству

$$\frac{\partial f}{\partial U} < -\frac{1}{R}, \quad (3.1.3)$$

при выполнении которого состояние равновесия системы (3.1.2) имеет характер седла. Если же выполняется неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial U} > -\frac{1}{R}, \quad (3.1.4)$$

то больший корень отрицателен и, следовательно, состояние равновесия является устойчивым узлом.

Далее, при выполнении условия (3.1.3) вольтамперная характеристика $I_L = f(U)$ пересекает прямую $I_L = \frac{E-U}{R}$ сверху вниз, что отвечает точке P на рис. 3.1.2. При выполнении условия (3.1.4), вольтамперная характеристика $I_L = f(U)$ пересекает прямую $I_L = \frac{E-U}{R}$

снизу вверх, что отвечает точкам O , Q . Фазовый портрет системы, имеющий три особые точки, изображен на рис. 3.1.3. При увеличении

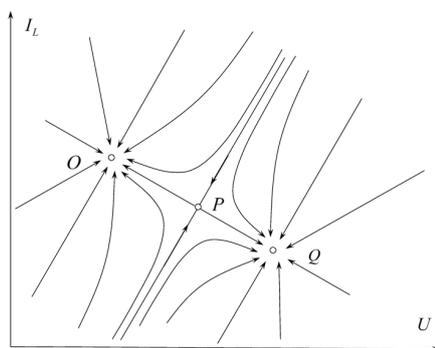
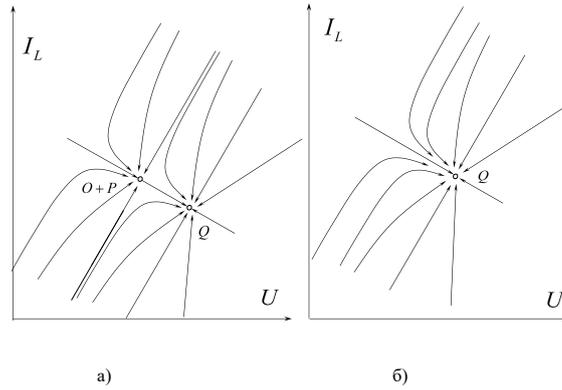


Рис. 3.1.3. Фазовый портрет системы (3.1.2) в случае $E_1 < E < E_3$.

величины E точки O и P на рис. 3.1.2 сближаются и при достижении E величины E_3 сливаются, образуя на фазовом портрете вырожденную точку, называемую *седлоузлом*, см. рис. 3.1.4-а. При дальнейшем увеличении величины E вырожденная особая точка исчезает, см. рис. 3.1.4-б. Перестройка фазового портрета, сопровождающаяся изменением количества и характера особых точек, называется *бифуркацией*. Рассмотренная выше бифуркация называется бифуркацией типа «*седло – узел*». При переходе бифуркационного параметра E через критическое значение E_3 рождается или исчезает пара «седло и узел» в зависимости от направления изменения величины E . В этой системе два бифуркационных значения параметра E : E_1 и E_3 . Вторая бифуркация, отвечающая значению E_1 , сопровождается слиянием и исчезновением или рождением пары седла и узла P и Q . ▼

Пример 3.1.3. Фазовая плоскость маятника. В модели физического маятника (1.1.35) добавим вязкое трение в точке подвеса с коэффициентом трения φ :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\varphi\dot{\alpha} - \frac{g}{l} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Рис. 3.1.4. Слияние особых точек O и P .

Фазовый портрет такой двумерной системы состоит из чередующихся седел и устойчивых фокусов, расположенных на оси α . Обозначив $x = (\alpha, \omega)^\top$, представим уравнение (3.1.5) в виде $\dot{x} = f(x)$. Выбрав точку x_0 , проинтегрируем аналитически или численно дифференциальное уравнение и получим функцию $x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$, зависящую от времени и начального условия. Векторное поле, заданное правой частью дифференциального уравнения, определяет поле скоростей \dot{x} на двумерной плоскости, а отображение начального условия x_0 в точку $x(t, x_0)$ для заданного периода времени t образует поток, несущий точку фазовой плоскости от начального условия x_0 вдоль всей траектории решения. Семейство отображений $x_0 \rightarrow x(t, x_0)$, $t \in [0, \infty)$, называется *фазовым потоком* динамической системы.

Выберем начальную точку $x_0 = (\alpha_0, \dot{\alpha}_0)^\top$, лежащую на устойчивой *сепаратрисе* одного из седел как показано на рис. 3.1.5-а. Напомним, что сепаратрисой называется интегральная кривая, начинающаяся или заканчивающаяся в особой точке типа седло, имеющей четыре сепаратрисы. Две устойчивых (то есть направленных к седлу) и две неустойчивых (то есть исходящих из седла). Сепаратриса разделяет *инвариантные области* фазовой плоскости. Рассмотрим малую окрестность $B_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 радиуса ε и выпустим из каждой точки этой окрестности, как из начального условия, траекторию системы. На рисунке показана эволюция пятна фазовой плоскости $B_\varepsilon(x_0)$, которое

несется фазовым потоком по фазовой плоскости маятника с трением (3.1.5). Начальное круглое пятно уносится фазовым потоком вдоль устойчивой сепаратрисы, деформируется, растягивается в направлении неустойчивой сепаратрисы седла. Для каждого конкретного момента времени образ $x(t, B_\varepsilon(x_0))$ начального пятна есть *линейно связное множество* в силу непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начального условия. Множество

$$S_T(x_0, \varepsilon) = \bigcup_{t \in [0, T]} x(t, B_\varepsilon(x_0))$$

– это та область фазового пространства, которая заметается множеством $x(t, B_\varepsilon(x_0))$ при изменении t от 0 до T . Это множество также линейно связно. Однако если мы рассмотрим всю траекторию, образованную замыканием объединения всех образов начального пятна $x(t, B_\varepsilon(x_0))$ для всех моментов времени от 0 до ∞ ,

$$S_\infty(x_0, \varepsilon) = \overline{\bigcup_{t \in [0, \infty)} x(t, B_\varepsilon(x_0))}, \quad (3.1.6)$$

то получим множество *топологически связное*, но не являющееся линейно связным, поскольку оно будет содержать два устойчивых фокуса, смежных седлу, на сепаратрисе которого выбрано начальное пятно, и целые траектории, которые к этим фокусам асимптотически приближаются, см. рисунок 3.1.5-б. Любая линия, соединяющая два фокуса, и лежащая в множестве $S_\infty(x_0, \varepsilon)$, имела бы бесконечную длину.

Отображение $B_\varepsilon(x_0) \rightarrow x(t, B_\varepsilon(x_0))$ определяет оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения $\Phi_t(X) \equiv x(t, X)$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Для случая автономных систем *операторы сдвига* по траекториям образуют *группу* относительно операции умножения, определенной следующим образом:

$$(\Phi_s \circ \Phi_t)(X) = x(s, x(t, X)) = x(s + t, X) = \Phi_{s+t}(X),$$

$$(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}, \quad (\Phi_t)^{-1} \circ \Phi_t = \Phi_0 = I,$$

где I – тождественный оператор, $I(X) \equiv X$. Оператор $(\Phi_t)^{-1}$, обратный оператору Φ_t , обращает фазовый поток. Такой оператор соответствует интегрированию дифференциальных уравнений динамической системы в обратном времени. Будучи применен к множествам, изображенным на рис. 3.1.5а при соответствующих значениях t , он отобразит их в исходное пятно $B_\varepsilon(x_0)$. Для случая линейных стационарных систем $\dot{x} = Ax$ оператор сдвига по траекториям имеет вид $\Phi_t(X) = e^{At} X$.

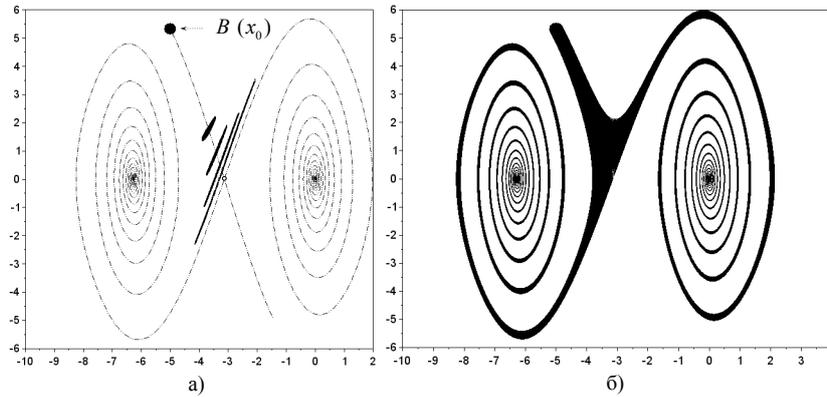


Рис. 3.1.5. Эволюция пятна, уносимого фазовым потоком системы (3.1.5) для случая $\varphi = 0,3$ и $l = 1$; а) пятно начальных условий $B_\varepsilon(x_0)$ и его образы $x(t, B_\varepsilon(x_0))$ для $t = 0,2, 0,4, 0,6$ и $0,8$; б) множество S_∞ .

Обозначим через $V(X)$ объем области X фазового пространства. Напомним, что *дивергенцией* векторного поля $f(x) \in \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}.$$

Имеет место следующая *теорема Ливилля*, устанавливающая скорость изменения *фазового объема* под действием оператора сдвига по траекториям автономного дифференциального уравнения:

$$\left. \frac{dV(\Phi_t(X))}{dt} \right|_{t=0} = \int_X \operatorname{div}(f(x)) dx. \quad (3.1.7)$$

Матрицу частных производных вектор-функции $f(x)$ размера $n \times n$ называют матрицей Якоби и обозначают $\partial f / \partial x$. Тогда

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{tr}(\partial f / \partial x).$$

Из формулы (3.1.7) следует, что если в области фазового пространства X след матрицы Якоби отрицателен, то фазовый объем этой области убывает при малом сдвиге по траекториям дифференциального уравнения. Наоборот, положительность величины $\operatorname{div}(f)$ гарантирует расширение фазового объема. ▼

Разбирая этот пример, мы использовали понятия фазового потока, фазового объема и группы операторов сдвига по траекториям дифференциального уравнения динамической системы.

Пример 3.1.4. Бусинка на кольце, вращающемся с постоянной угловой скоростью. Бусинка массы m движется без трения на кольце радиуса l , вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω , см. рис. 3.1.6. Выведем уравнения движения, вос-

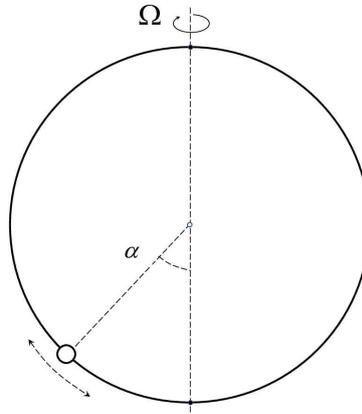


Рис. 3.1.6. Бусинка на кольце.

пользовавшись *лагранжесвым формализмом*. В качестве обобщенной переменной возьмем α и в качестве обобщенной скорости $\dot{\alpha}$. Кинетическая энергия системы имеет вид $T = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 ml^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 ml^2 \sin^2 \alpha$, а потенциальная энергия $\Pi = mgl(1 - \cos \alpha)$. Запишем *функцию Лагранжа* $L(\alpha, \dot{\alpha}) = T(\alpha, \dot{\alpha}) - \Pi(\alpha)$ и *уравнение Лагранжа* второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0.$$

Выполнив операции дифференцирования, получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \mu \sin \alpha \cos \alpha - b \sin \alpha, \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

где $\mu = \Omega^2 \geq 0$, $b = g/l$, и проанализируем характер фазового портрета при различных значениях параметра μ . Уравнения (3.1.8) напо-

минают уравнения маятника (1.1.35), но в отличие от них содержат дополнительное слагаемое $\mu \sin \alpha \cos \alpha$, имеющее смысл дополнительной потенциальной силы. Особые точки системы удовлетворяют алгебраическим уравнениям $\omega = 0$ и $\mu \sin \alpha \cos \alpha - b \sin \alpha = 0$. Рассмотрим два случая: 1) $\sin \alpha = 0$, что отвечает нижнему и верхнему положению бусинки, и 2) $\sin \alpha \neq 0$. В обоих случаях матрица линеаризованной системы, образованная из частных производных правой части уравнений (3.1.8) по переменным α и ω , имеет вид

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu \cos 2\alpha - b \cos \alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.9)$$

В случае 1) и $\alpha = 0$ (точнее, $\alpha = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$) имеем

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu - b & 0 \end{pmatrix}$$

и собственные числа этой матрицы равны

$$\pm \sqrt{\mu - b}. \quad (3.1.10)$$

Если выполняется условие $\mu < b$, то корни чисто мнимые и нижнее положение бусинки является центром. Если же выполняется условие

$$\mu > b, \quad (3.1.11)$$

то числа (3.1.10) вещественны и имеют разный знак, что соответствует особой точке типа седло. В случае 1) и $\alpha = \pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, имеем

$$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu + b & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы вещественны при любых $\mu \geq 0$ и верхнее положение $\omega = 0$, $\alpha = \pi$ всегда является седлом. Рассмотрим случай 2). При $\sin \alpha \neq 0$ особые точки удовлетворяют уравнениям $\omega = 0$ и $\mu \cos \alpha - b = 0$. При выполнении условия (3.1.11) последнее уравнение имеет решение $\cos \alpha = \frac{b}{\mu}$ или

$$\alpha_0 = \pm \arccos \frac{b}{\mu}. \quad (3.1.12)$$

При этом собственные числа матрицы (3.1.9)

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\mu \cos 2\alpha_0 - b \cos \alpha_0} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{\mu} - \mu}$$

чисто мнимые и положения равновесия (3.1.12) являются центрами. Суммируя вышесказанное получаем:

- если $0 \leq \mu < b$, то нижнее положение бусинки есть центр;
- если $\mu > b$, то нижнее положение бусинки есть седло и, кроме этого, возникают два отклоненных положения равновесия (3.1.12) типа центр.

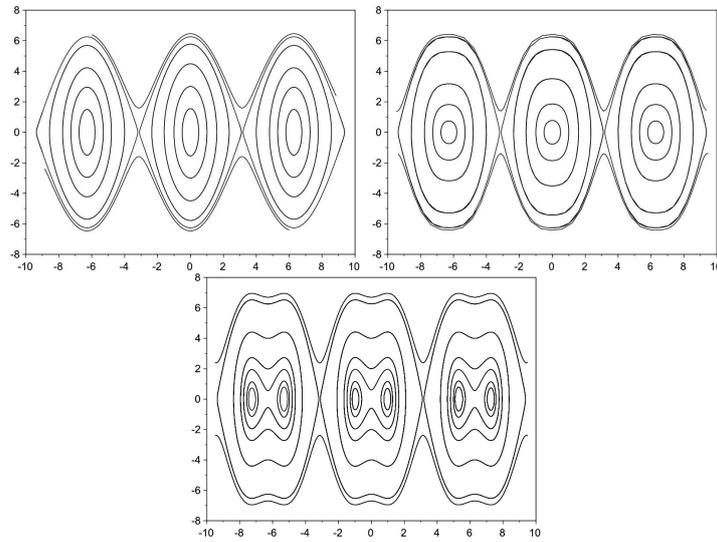


Рис. 3.1.7. Фазовый портрет системы (3.1.8) в координатах $\alpha, \dot{\alpha}$ при значениях $\mu = 0$, $\mu = 0,8\mu^*$ и $\mu = 1,8\mu^*$.

При критическом значении $\mu^* = b$ происходит бифуркация, то есть строение фазового портрета изменяется. При превышении μ величины μ^* из устойчивого центра образуются и расходятся два устойчивых отклоненных положения равновесия, а нижнее положение превращается в неустойчивое седло. Бифуркация этого типа называется “вилка”. Рис. 3.1.7 иллюстрирует три случая. В первом случае, при $\mu = 0$, фазовый портрет совпадает с фазовым портретом физического маятника. Второй случай показывает докритическое поведение при $0 < \mu < \mu^*$. Третий рисунок иллюстрирует третий случай — посткритическое поведение, отвечающее случаю $\mu > \mu^*$. ▼

Пример 3.1.5. Бусинка на свободно вращающемся кольце. Пусть теперь кольцо, изображенное на рис. 3.1.6, свободно вращается вокруг вертикальной оси. Теперь угловая скорость Ω не постоянна,

а подчиняется уравнениям динамики системы. Угол поворота кольца вокруг вертикальной оси обозначим φ и $\dot{\varphi} = \Omega$. Выведем уравнения движения, воспользовавшись лагранжевым формализмом. В качестве обобщенных координат выберем угол отклонения бусинки α и угол φ . Соответствующими обобщенными скоростями будут $\dot{\alpha}$ и $\dot{\varphi}$. Кинетическая энергия системы имеет следующее выражение

$$T = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 ml^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 ml^2 \sin^2 \alpha,$$

а потенциальная энергия $\Pi = mgl(1 - \cos \alpha)$. Функция Лагранжа имеет вид $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - \Pi(q)$, где $q = (\alpha, \varphi)^\top$ — вектор обобщенных координат, а $\dot{q} = (\dot{\alpha}, \dot{\varphi})^\top$ — вектор обобщенных скоростей. Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$. Заметим, что переменная φ циклическая, то есть функция Лагранжа явно от нее не зависит и $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$. Поэтому система допускает *циклический интеграл* $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \sin^2 \alpha = c$. Интерес представляет исследование динамики системы при различных значениях c . Уравнения движения по переменной α принимают вид

$$\ddot{\alpha} - \dot{\varphi}^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0.$$

Перепишем уравнения движения с учетом циклического интеграла в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \mu \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} - b \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

где $\mu = c^2 \geq 0$, $b = \frac{g}{l}$, и проанализируем характер фазового портрета при различных значениях μ . При $\mu = 0$ фазовый портрет системы совпадает с фазовым портретом маятника. При $\mu > 0$ правая часть уравнения (3.1.13) определена при $\alpha \neq k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Ни одна траектория системы не может пересечь вертикальную прямую, проходящую через точку $\alpha = k\pi$, $\dot{\alpha} = 0$ на плоскости $(\alpha, \dot{\alpha})$, поскольку при приближении к такой прямой слева или справа величина $\ddot{\alpha}$ принимает неограниченные отрицательные или положительные значения и траектория разворачивается параллельно оси $\dot{\alpha}$. Таким образом при $\mu > 0$ фазовый портрет состоит из несвязных полос, разделенных прямыми, параллельными оси $\dot{\alpha}$, и пересекающими ось α в точках $\alpha = k\pi$,

$k = 0, 1, 2, \dots$. В этой системе бифуркация происходит при нулевом значении параметра μ .

При $\alpha \neq k\pi$ особые точки системы удовлетворяют алгебраическим уравнениям $\omega = 0$ и

$$\cos \alpha = \frac{b}{\mu} \sin^4 \alpha. \quad (3.1.14)$$

Матрица системы, линеаризованной в окрестности точки α , имеет вид

$$A(\alpha_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left[\frac{\mu}{\sin^2 \alpha} + \frac{4b^2}{\mu} \sin^4 \alpha\right] & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.15)$$

Собственные числа матрицы (3.1.15) чисто мнимы при $\mu > 0$ и $\alpha \neq k\pi$, и отклоненные положения равновесия, удовлетворяющие условию (3.1.14), являются центрами. Рис. 3.1.8 иллюстрируют устройство фазового портрета системы (3.1.13) при двух значениях μ . Полосы, на

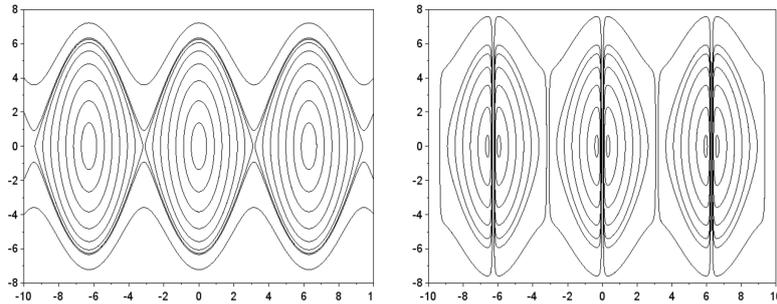


Рис. 3.1.8. Фазовый портрет системы (3.1.13) в координатах $\alpha, \dot{\alpha}$ при значениях $\mu = 0$ и $\mu = 0,1$.

которые разделен фазовый портрет, *инвариантны* относительно фазового потока в том смысле, что ни одна траектория не может пересечь границы полосы, в которой она начинается. Фазовый поток системы (3.1.13) заперт внутри каждой полосы. ▼

Пример 3.1.6. Множество неизолированных состояний равновесия. Наличие множества неизолированных состояний равновесия возможно в системе, состоящей из тела массы m , движущейся по горизонтальной поверхности под действием упругой силы kx со стороны пружины и сухого трения $\varphi \operatorname{sign}(\dot{x})$ со стороны поверхности, где $\operatorname{sign}(y)$ — разрывная функция, принимающая значение -1 для отрицательных значений y , 0 — при $y = 0$ и 1 для положительных значений y .

Динамика этой системы подчиняется дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x} + \varphi \operatorname{sign}(\dot{x}) + kx = 0. \quad (3.1.16)$$

▼

На фазовой плоскости «положение – скорость» состояния равновесия образуют отрезок, удовлетворяющий условиям $-\frac{\varphi}{k} \leq x \leq \frac{\varphi}{k}$ и $\dot{x} = 0$ и изображенный на рис. 3.1.9 жирной линией.

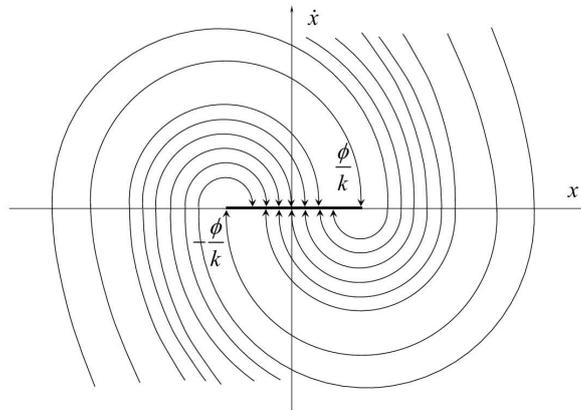


Рис. 3.1.9. Фазовый портрет системы (3.1.16).

3.1.2. Конечное время переходного процесса

Стремление к нулю состояния устойчивой линейной системы носит асимптотический характер. Состояние нелинейной системы может прийти к нулю за конечное время. Пример такой системы приведен ниже

$$\dot{x} = -\operatorname{sign}(x).$$

Очевидно, что эта система переходит из состояния x_0 в 0 за время $t = |x_0|$. Заметим, что определение решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью не очевидно и требует отдельного рассмотрения. Аналогично, существуют системы, состояние которых может принимать бесконечно большие значения спустя конечное время.

3.1.3. Существование предельных циклов

Динамическая система, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\alpha v(x^2 - 1) - kx,\end{aligned}\tag{3.1.17}$$

называется *системой Ван дер Поля*. Система (3.1.17) представляет собой осциллятор с нелинейным коэффициентом трения $\alpha(x^2 - 1)$, зависящим от x . Видно, что в зависимости от знака величины $x^2 - 1$ в системе возможно как затухание колебаний ($x^2 > 1$), так и возбуждение ($x^2 < 1$). Подобные уравнения используются для описания самовозбуждающихся (говорят также *релаксационных*) колебаний в системах различной природы — электронных цепях, биологических системах и т.д. Начало координат фазовой плоскости x, v есть неустойчивый фокус. Из малой окрестности начала координат траектории уходят. Из бесконечно удаленных точек плоскости x, v траектории приходят в ограниченную область начала координат.

Иными словами, существует двухсвязная (кольцевая) область плоскости G , инвариантная относительно фазового потока. Фазовый поток оказывается заперт внутри кольцевой области. Ни одна частица потока не выносится ни через внешнюю границу кольца, ни через внутреннюю. Кроме того, предполагается, что область G не содержит состояний равновесия. Схематически такое устройство фазового портрета изображено на рис. 3.1.10. *Теорема Пуанкаре – Бендиксона* утверждает, что в этом случае динамическая система имеет по крайней мере один устойчивый *предельный цикл*. Эта теорема может быть доказана построением *отрезка без контакта*, то есть такого отрезка, что траектории системы, имеющие с ним общие точки, трансверсальны этому отрезку. Точки пересечения траектории с отрезком без контакта образуют последовательность, предельная точка которой будет лежать на предельном цикле. Под предельным циклом понимается такое решение, отличное от равновесия, траектория которого есть замкнутая кривая. Предельный цикл в системе (3.1.17) изображен на рис. 3.1.11.

Уравнения более общего вида, частным случаем которых является (3.1.17), записанные в виде

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + f(x) = 0,\tag{3.1.18}$$

называются *уравнениями Льенара*.

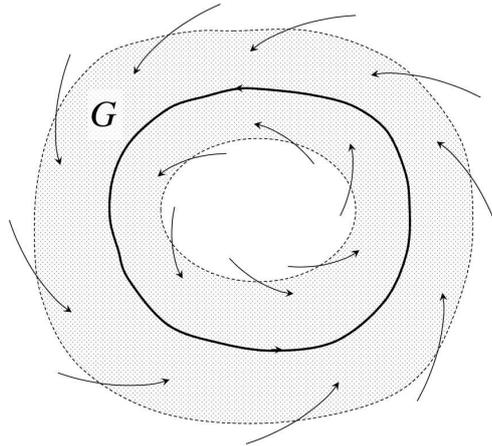


Рис. 3.1.10. Замкнутая двухсвязная (кольцевая) область, инвариантная относительно фазового потока и не содержащая состояний равновесия.

Наличие предельного цикла не является, разумеется, обязательным атрибутом двумерной системы. Сформулируем признак отсутствия предельных циклов в терминах дивергенции векторного поля. Дивергенция двумерного векторного поля $f(x) \in \mathbb{R}^2$ есть величина $\operatorname{div}(f) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}$, имеющая смысл сходимости или расходимости потока, определяемого векторным полем в точке. Если дивергенция отрицательна, то через границу малого контура, окружающего точку, входит больше потока, чем выходит. Если же дивергенция положительна, то точка является источником потока и через границу окружающего ее малого контура выходит больше потока, чем входит, см. формулу (3.1.7). Справедлива следующая формула Гаусса – Остроградского. Пусть односвязная область плоскости Ω имеет гладкую границу Γ (ограничена контуром Γ). Обозначим через $n(x)$ вектор внешней нормали к границе в точке x . Тогда

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}(f) d\omega = \int_{\Gamma} f(x)^{\top} n(x) d\gamma, \quad (3.1.19)$$

где $d\omega$ — элемент площади области, $d\gamma$ — элемент длины контура. Если дивергенция поля $f(x)$ строго отрицательна или строго положитель-

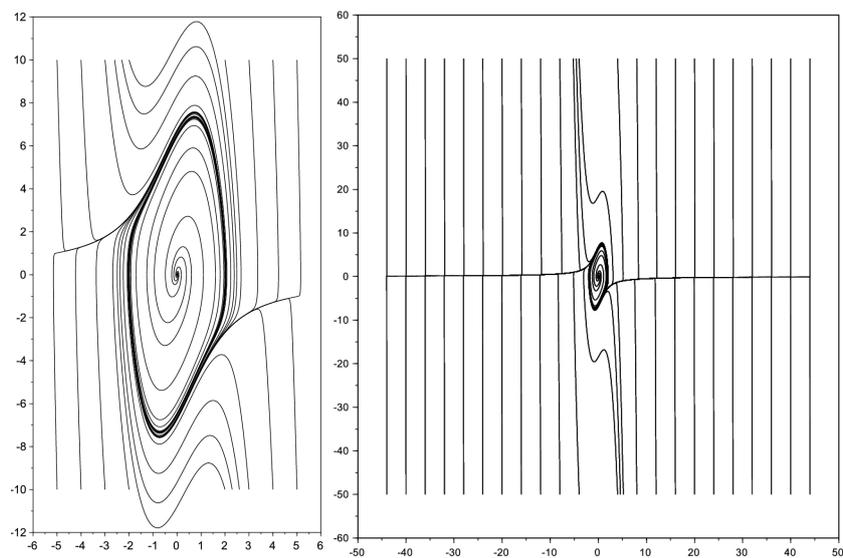


Рис. 3.1.11. Фазовый портрет системы системы Ван дер Поля в различных масштабах.

на, то интеграл по области Ω в левой части (3.1.19) отличен от нуля. Если бы у системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ был предельный цикл и мы бы взяли его в качестве контура Γ , то интеграл в правой части (3.1.19) был бы равен нулю. Таким образом, если в некоторой области фазового пространства дивергенция векторного поля знакоопределена, то в этой области предельные циклы невозможны. Это утверждение называется критерием Бендиксона. Критерий Бендиксона можно обобщить и сформулировать критерий Дюлака, состоящий в следующем. Если существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $g(x)$, что величина $\text{div}(gf)$ знакоопределена в некоторой области, то в этой области нет предельных циклов.

3.1.4. Хаотическая динамика

Поведение системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, определяется только начальным условием x_0 . Предполагается, что начальное условие находится в области, в которой правая часть дифференциального уравнения определена и удовлетворяет

условиям существования и единственности решения. Решение $x(t, x_0)$ продолжимо либо неограниченно, либо до границы этой области. Будем предполагать неограниченную продолжимость.

Геометрическое место точек $x(t, x_0)$, отвечающих всевозможным значениям t , вместе со всеми предельными точками, называется орбитой точки x_0 . Выбрав в (3.1.6) $\varepsilon = 0$, получим для орбиты выражение

$$S_\infty(x_0) = \overline{\bigcup_{t \in [0, \infty)} x(t, x_0)}.$$

Если система *диссипативна*, то есть, говоря нестрого, теряет энергию в процессе движения, то орбиты сходятся к подмножествам, называемым *аттракторами*. Частными случаями аттракторов являются устойчивые состояния равновесия и устойчивые предельные циклы. Система может иметь множество аттракторов, притягивающих траектории в зависимости от начального условия. Множество начальных условий, из которых траектории притягиваются к определенному аттрактору, называется *областью притяжения* аттрактора. Области притяжения различных аттракторов могут соприкасаться. Это значит, что могут быть точки, сколь угодно малая окрестность которых пересекается с областями притяжения разных аттракторов. На рис. 3.1.5 сколь угодно малая окрестность точки x_0 содержит точки из областей притяжения двух аттракторов — устойчивых фокусов.

Если размерность фазового пространства больше или равна трем, то в детерминированных системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, не содержащими элементов стохастичности, может возникнуть явление *стохастизации*, называемое хаотическим поведением. При этом для данного начального условия и больших значениях времени оказывается сложно предвидеть, к какому из аттракторов траектория системы приблизится. В таких случаях аттракторы не могут быть описаны простыми кривыми, такими как предельные циклы, или точками равновесия. Примером подобной системы является *система Лоренца*. Это детерминированная система, описываемая следующим дифференциальным уравнением третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3, \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

но демонстрирующая нерегулярное поведение, ожидаемое от стохастических систем. Здесь σ , r , b — положительные параметры. Хаотические движения возникают при некоторых значениях параметров. В то

же время в примере 3.2.6 раздела 3.2.4 показано, что при $r < 1$ нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво в целом, то есть единственный аттрактор совпадает с началом координат.

При значении параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ аттрактор системы Лоренца имеет так называемую *фрактальную структуру*. Любой сколь угодно малый участок такого аттрактора так же сложно устроен, как и весь аттрактор в целом. Такие аттракторы называют *странными*. На рис. 3.1.12 изображена траектория системы (3.1.20), исходящая из точки $x_0 = (-3, -6, 12)^T$. Эту траекторию можно представлять себе как объединение бесконечного количества предельных циклов, между которыми система случайным образом переключается. На самом деле никакой случайности нет и переключения однозначно определяются начальным условием. Эффект стохастизации в детерминированной системе означает, что при больших временах будущее состояние не может быть восстановлено из начального условия, если начальное условие дано с ограниченной точностью, обусловленной конечным числом значащих цифр в представлении чисел. Исчезающие малые изменения начальных условий приводят к «эффекту бабочки» — значительному изменению исходящей из начального состояния траектории и, следовательно, значительным изменениям состояния в окрестности одного из аттракторов. Для измерения меры хаотичности системы и сложности формы аттрактора используется максимальный *характеристический показатель Ляпунова* и фрактальная размерность аттрактора. Максимальный характеристический показатель Ляпунова определяется следующим образом:

$$\lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(0)\|}.$$

Здесь $\delta x(t)$ — вектор отклонения двух близких траекторий, $\delta x(0)$ — начальное отклонение. Система демонстрирует хаотичное поведение, если в соответствии с (3.1.7) фазовый объем сжимается, но максимальный характеристический показатель Ляпунова положителен. Это означает, что, несмотря на уменьшение фазового объема, траектории системы отталкиваются друг от друга. Для системы Лоренца имеем $\operatorname{div}(f(x)) = -(\sigma + 1 + b) < 0$. Более детальный анализ показывает положительность ее максимального показателя Ляпунова в случае $r > 1$.

Начальная область X_0 так уносится фазовым потоком $\Phi_t(X_0)$, что при больших t ее части можно обнаружить в окрестности разных аттракторов.

В качестве другого примера рассмотрим динамическую систему,

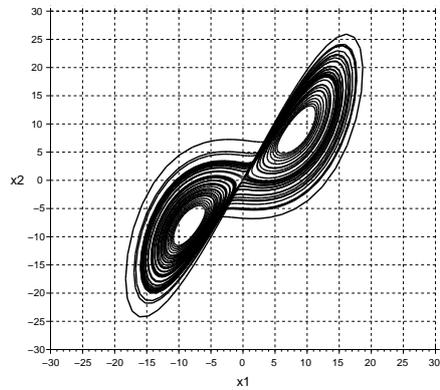
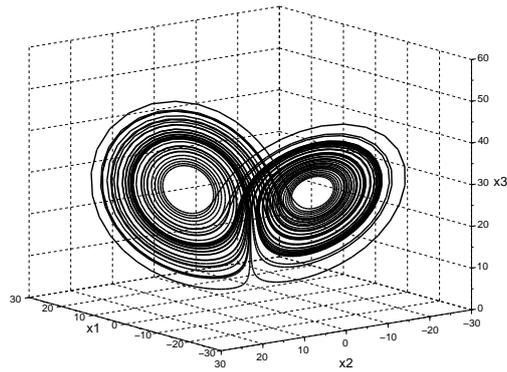


Рис. 3.1.12. Странный аттрактор системы Лоренца, отвечающий параметрам $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$.

описывающую движение двумерного маятника. На невесомом нерастяжимом стержне, отклонение которого от вертикали определяется двумя углами, прикреплен магнит, который может притягиваться к любому из трех стационарных магнитов, расположенных в точках $(x_i, y_i)^\top$

плоскости (x, y) , $i = 1, 2, 3$. В рассматриваемом примере положения магнитов следующие:

$$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0,25 \\ 0,433 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,433 \end{pmatrix}.$$

Если в качестве переменных, описывающих положение маятника, выбрать координаты проекции конца маятника на плоскость (x, y) , то дифференциальные уравнения, описывающие динамику такой системы, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\varphi\dot{x} - bx + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i - x}{(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d})^3}, \\ \ddot{y} &= -\varphi\dot{y} - by + \sum_{i=1}^3 \frac{y_i - y}{(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d})^3}, \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

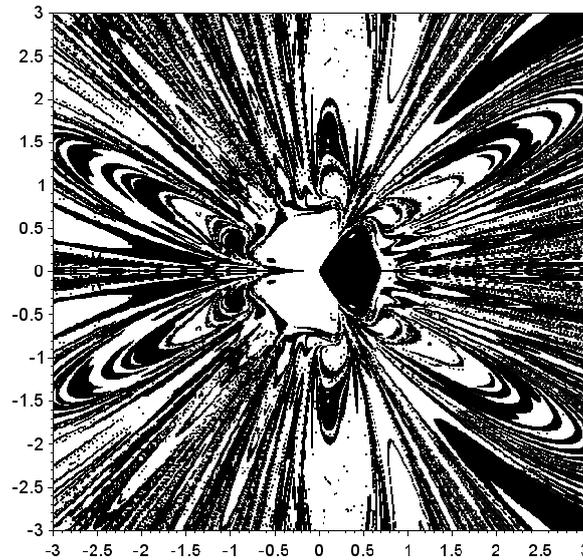
где $b = \frac{g}{l}$, l — длина маятника, φ — коэффициент вязкого трения, d — расстояние от конца маятника до горизонтальной плоскости. В рассматриваемом примере $\varphi = 0,3$, $b = 0,3$, $d = 0,2$. При этих параметрах система (3.1.21) имеет три положения равновесия:

$$\begin{pmatrix} 0,481 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0,2165 \\ 0,4165 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0,2165 \\ -0,4165 \end{pmatrix}. \quad (3.1.22)$$

Фазовое пространство системы четырехмерно, и вектор состояния имеет вид $(x, \dot{x}, y, \dot{y})^T$. Рассмотрим поведение системы при различных начальных условиях вида $(x_0, 0, y_0, 0)^T$, то есть движение маятника при различных начальных отклонениях и нулевой начальной скорости. Выберем начальные условия из квадрата $-3 \leq x_0 \leq 3$, $-3 \leq y_0 \leq 3$. Интегрируя дифференциальные уравнения для каждого начального условия, отметим на рис. 3.1.13 черными точками те из них, для которых точкой притяжения траектории окажется первая точка (3.1.22). Таким образом, на рисунке изображено сечение области притяжения точки равновесия (аттрактора) $X_1 = (0,481, 0, 0, 0)^T$ плоскостями $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$. Область притяжения аттрактора оказалась сложно устроенной. Из близких точек плоскости x_0, y_0 траектории притягиваются к различным аттракторам.

3.1.5. Наличие кратных гармоник

Отклик линейной системы на гармоническое воздействие есть гармоническая функция той же частоты. При прохождении гармонического сигнала с частотой ω через нелинейные элементы происходит

Рис. 3.1.13. Сечение области притяжения точки X_1 .

генерация сигналов с кратными частотами $k\omega$ при всевозможных целых k . На этом основана работа многих аналоговых устройств в радиотехнике. Например, генератор высокочастотных колебаний можно построить из генератора низкочастотных колебаний, нелинейного элемента (такого как диод) и аналогового фильтра, выделяющего высокочастотную гармонику. Такие и подобное ему устройства называют *устройствами умножения частоты*. Они используются в сложных радиотехнических системах, в которых имеется один *задающий генератор*, к частоте которого должно быть точно привязано несколько кратных частот.

3.1.6. Многорежимность поведения

В различных областях фазового пространства система может демонстрировать различные режимы поведения, как будто имеются различные системы, действующие в различных областях. В действительности система одна, и она не знает о наших представлениях о ее поведении. Например, система Ван дер Поля (3.1.17) вдали от начала координат ведет себя как жесткая система с устойчивым узлом в нуле

(рис. 3.1.11, правая часть), а не система с устойчивым предельным циклом (левая часть рисунка). Многорежимность поведения могут демонстрировать системы с переключениями закона управления, в которых применяется тот или иной закон управления в зависимости от того, в какой области пространства находится система. Например, система управления конвертопланом переключается между режимами управления вертолетом и самолетом.

3.2. Устойчивость и стабилизация

В этом разделе мы исследуем фундаментальное свойство динамических систем, называемое устойчивостью. Определение устойчивости в общем случае отличается от того определения, которое использовалось в разделе 1.2 при анализе устойчивости в линейном случае, когда внимание было уделено асимптотической устойчивости. В общем виде уравнения динамики нелинейной системы с сосредоточенными параметрами записываются следующим образом:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2.1)$$

Общее решение (3.2.1), удовлетворяющее начальным данным x_0 , обозначим $x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$. Уравнения нелинейной управляемой системы записываются в виде

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (3.2.2)$$

где x — вектор пространства состояний, а u — вектор управляющих воздействий. Решение, удовлетворяющее начальным данным x_0 и отвечающее управлению $u(t)$ обозначаем $x_u(t, x_0)$. Наконец, уравнения нелинейной нестационарной системы и управляемой нестационарной системы записываются в виде

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.2.3)$$

и

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (3.2.4)$$

Общее решение (3.2.3), удовлетворяющее начальным данным x_0 в момент $t = t_0$, обозначим $x(t, t_0, x_0)$. Общее решение (3.2.4), удовлетворяющее начальным данным x_0 в момент $t = t_0$ и отвечающее управлению $u(t)$, обозначим $x_u(t, t_0, x_0)$.

3.2.1. Определение устойчивости

Рассмотрим сначала неуправляемые стационарные системы (3.2.1). Напомним, что матрица частных производных вектор-функции $f(x)$ размера $n \times n$ обозначается $\partial f / \partial x$. Пусть вектор-функция $f(x)$ непрерывна вместе со своими частными производными в некотором открытом связном множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, включающем начало координат. Тогда для любого $x_0 \in D$ решение $x(t, x_0)$ существует на некотором интервале $t \in [0, T)$, $T > 0$, и это решение единственно и продолжимо по крайней мере до границы множества D . Единственность решения означает, что траектории автономной системы (3.2.1) не пересекаются в фазовом пространстве. Действительно, в противном случае из точки пересечения исходили бы две траектории. В случае двумерных систем отсутствие пересечений траекторий вводит естественные топологические ограничения на устройство фазового портрета.

Теперь рассмотрим неуправляемые системы (3.2.3), частным случаем которых является (3.2.1). Точка x^* это состояние равновесия, то есть $f(x^*, t) \equiv 0$, для любого $t \geq t_0$. Если траектория начинается в точке равновесия, то она эту точку не покинет. Состояние равновесия может быть неединственным, как уже было иллюстрировано приведенными выше примерами. Мы рассматриваем одно из изолированных состояний равновесия. Как подсказывает опыт, равновесие может быть устойчивым или неустойчивым. В случае устойчивости система может оставаться близко от состояния равновесия после воздействия малых возмущений или стремиться вернуться к равновесию. От неустойчивого равновесия состояние системы уходит после как угодно малого возмущения. Несмотря на то, что понятие устойчивости динамической системы интуитивно понятно, говоря об устойчивости мы имеем в виду следующее определение устойчивости по Ляпунову. Достаточно ограничиться случаем $x^* = 0$, поскольку в противном случае замена переменных $x = x^* + y$ приводит к рассмотрению системы $\dot{y} = \dot{x} = f(x^* + y) = f_1(y)$ с состоянием равновесия в нуле.

Определение 3.2.1. Нулевое состояние равновесия называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что из условия $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ следует, что $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$ для любого $t \geq t_0$.

Ранее, при рассмотрении линейных систем, мы ограничились анализом асимптотической устойчивости состояний равновесия. При анализе нелинейных систем устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость по Ляпунову рассматриваются отдельно. Асимптотиче-

ская устойчивость по Ляпунову определяется следующим образом

Определение 3.2.2. Если в дополнение к устойчивости по Ляпунову найдется такое $\delta_1(t_0) > 0$, что из $\|x_0\| \leq \delta_1(t_0)$ следует, что $\|x(t, t_0, x_0)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то нулевое состояние равновесия называется *асимптотически устойчивым*.

Определение 3.2.3. Нулевое состояние равновесия называется *неустойчивым по Ляпунову*, если оно не является устойчивым.

Устойчивость по Ляпунову может быть не обязательно асимптотической. Нижнее положение равновесия маятника без трения (1.1.35) устойчиво, но не асимптотически.

Заметим, что не каждое притягивающее состояние равновесия является асимптотически устойчивым по Ляпунову. Второго условия в определении 3.2.2 недостаточно для асимптотической устойчивости, поскольку оно не гарантирует устойчивости по Ляпунову.

Пример 3.2.1. Система с неустойчивой точкой притяжения. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r(1 - r), \\ \dot{\theta} &= \sin^2(\theta/2), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

записанную в полярных координатах, $\theta \in [0, 2\pi)$, μ — положительный параметр. Перепишав ее в декартовых координатах $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x(1 - r) - \frac{1}{2}y + \frac{xy}{2r}, \\ \dot{y} &= \mu y(1 - r) + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2r}, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Система (3.2.6) имеет две точки равновесия: $x = 0$, $y = 0$ и $x = 1$, $y = 0$. Вторая точка равновесия отвечает полярным координатам $r = 1$, $\theta = 0$. Проанализируем устойчивость этой точки. Из вида правой части первого уравнения (3.2.5) следует, что значение $r = 1$ есть точка притяжения дифференциального уравнения. Действительно, если $r > 1$, то правая часть отрицательна и, следовательно, r будет убывать в силу этого уравнения, и наоборот, если $0 < r < 1$, то правая часть будет положительна, что приведет к увеличению r . Второе дифференциальное уравнение (3.2.5) решается аналитически: $\theta(t) = 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\theta_0/2) - t/2)$. Очевидно, что $\theta(t) \rightarrow 2\pi$ при

любом начальном условии $\theta(0) = \theta_0$, $0 < \theta_0 < 2\pi$. При $\theta_0 = 0$ имеем $\theta(t) \equiv 0$, как видно из рассмотрения правой части второго уравнения (3.2.5). Фазовый портрет системы в координатах x, y изображен на рис. 3.2.1. Направление фазового потока показано стрелками. Видно, что из сколь угодно малой окрестности точки равновесия траектории уходят за пределы окрестности, возвращаясь в эту окрестность, сделав оборот против часовой стрелки и асимптотически приближаясь к точке равновесия. Таким образом, точка равновесия неустойчива по Ляпунову, являясь точкой притяжения. Пунктирной линией

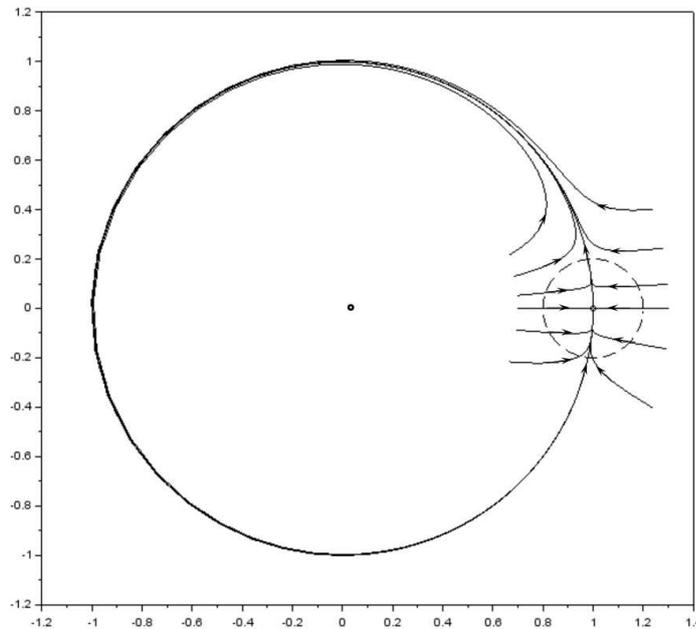


Рис. 3.2.1. Фазовый портрет системы (3.2.6) при $\mu = 0,35$ в координатах x, y . Траектории покидают малую окрестность положения равновесия (пунктирная линия) и, сделав оборот против часовой стрелки, возвращаются в нее, асимптотически приближаясь к равновесию.

изображена малая окрестность положения равновесия $x = 1, y = 0$. Часть фазового портрета, заполняющая верхнюю часть окрестности, напоминает седло. Нижняя часть фазового портрета в изображенной окрестности напоминает устойчивый узел. Подобные точки равнове-

сия называют полуустойчивыми, или точками типа седлоузла. Такое поведение невозможно в линейных системах. Читатель может самостоятельно убедиться, что матрица Якоби системы (3.2.6) вырождена в точке $x = 1, y = 0$. Нулевое подпространство этой матрицы совпадает с осью y . Поэтому строение фазового портрета на многообразии, проходящем через точку $x = 1, y = 0$ параллельно оси y , определяется членами второго порядка в правой части системы. ▼

Распространим определения устойчивости на случай произвольного решения нестационарной системы, а не только равновесного состояния.

Определение 3.2.4. Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (3.2.3) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что для любого начального значения \bar{x}_0 , удовлетворяющего условию $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$, выполняется неравенство

$$\|x(t, t_0, \bar{x}_0) - x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$$

для любого $t \geq t_0$.

Определение 3.2.5. Если в дополнение к устойчивости по Ляпунову найдется такое $\delta_1(t_0) > 0$, что из $\|\bar{x}_0 - x_0\| \leq \delta_1(t_0)$ следует, что $\|x(t, t_0, \bar{x}_0) - x(t, t_0, x_0)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то решение $x(t, t_0, x_0)$ называется *асимптотически устойчивым*.

Следующий пример показывает, что неограниченно растущее решение может быть асимптотически устойчивым.

Пример 3.2.2. Система с неограниченно растущим асимптотически устойчивым решением. Рассмотрим одномерную систему

$$\dot{x} = 1 + t - x$$

Исследуем на устойчивость решение $x(t, 0, 0)$ (то есть $t_0 = 0, x_0 = 0$). Имеем $x(t, 0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0 e^{-t} + t$ и $x(t, 0, 0) = t$. Тогда

$$\|x(t, 0, \bar{x}_0) - x(t, 0, 0)\| = \|\bar{x}_0 e^{-t}\|,$$

что доказывает асимптотическую устойчивость неограниченно возрастающего решения t .

Заменой переменных $x = x(t, t_0, x_0) + y$ исследование устойчивости произвольного решения системы (3.2.3) сводится к исследованию устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной нестационарной системы

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{x}(t, t_0, x_0) = f(x(t, t_0, x_0) + y) - f(x(t, t_0, x_0), t) = f_1(y, t).$$

3.2.2. Линейные нестационарные системы. Устойчивость

В случае линейных стационарных систем устойчивость нулевого решения эквивалентна гурвицевости матрицы системы. Если же система линейная и нестационарная, то есть $\dot{x} = A(t)x$, то ее общее решение имеет вид $x(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0$, где $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений системы. Вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения становится гораздо более сложным. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Нулевое решение линейной нестационарной системы устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда для любого t_0 найдется такое число $a_0 > 0$, что выполняется условие*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq a_0 \text{ для любого } t \geq t_0. \quad (3.2.7)$$

Доказательство. Предположим, что условие (3.2.7) выполнено. Тогда

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x_0\| \leq a_0 \|x_0\| \quad (3.2.8)$$

и для любого ε можно выбрать $\delta(\varepsilon, t_0) = \frac{\varepsilon}{a_0}$. Из $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ в силу (3.2.8) будет следовать $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$. Пусть нулевое решение устойчиво по Ляпунову. Предположим, что условие (3.2.7) не выполняется. Тогда найдется такая последовательность $\{t_i\} \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$, что

$$\|\Phi(t_i, t_0)\| \rightarrow \infty \text{ при } i \rightarrow \infty,$$

что противоречит определению 3.2.4. ■

Теорема 3.2.2. *Нулевое решение линейной нестационарной системы асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда для любого t_0 выполняется условие*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0. \quad (3.2.9)$$

Доказательство. Из (3.2.9) и $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x_0\|$ очевидно следует асимптотическая устойчивость нулевого решения в силу определения 3.2.5. Пусть (3.2.9) не выполняется. Тогда найдутся такие числа $t_0, a_0 > 0$ и неограниченно возрастающая последовательность $\{t_i\} \rightarrow \infty$, что

$$\|\Phi(t_i, t_0)\| \geq a_0.$$

Но тогда на единичной сфере $\|x\| = 1$ можно выбрать такую последовательность $\{x_{0,i}\}$, что

$$\|\Phi(t_i, t_0)x_{0,i}\| = \|\Phi(t_i, t_0)\| \geq a_0.$$

Выбрав из ограниченной последовательности $\{x_{0,i}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{0,i_k}\} \rightarrow x_0$, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi(t_{i_k}, t_0)x_0\| \geq a_0,$$

что противоречит асимптотической устойчивости нулевого решения. ■

3.2.3. Линейные нестационарные системы. Параметрический резонанс

Начнем с примера, показывающего, что гурвицевости матрицы линейной нестационарной системы при каждом фиксированном значении t недостаточно для ее асимптотической устойчивости. Специальным случаем нестационарной системы является система с переключениями.

Линейная система с переключениями

Рассмотрим уравнение (3.1.5), линеаризованное в окрестности точки $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$. Обозначив $u = \frac{q}{t}$ и предположив, что параметр u может меняться во времени, перепишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\varphi\omega - u(t)\alpha. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Подчеркнем еще раз, что в (3.2.10) функция $u(t)$ является не управлением, а зависящим от времени параметром. Траектории системы (3.2.10) при постоянном значении параметра u и положительном φ изображены на рис. 3.1.5. Позволив параметру u меняться во времени, мы сделаем систему нестационарной. Свойство асимптотической устойчивости, имеющее место при постоянном u , может как сохраниться, так и нарушиться. Предположим, что параметр u может принимать два значения: u_1 и u_2 . Будем считать, что всякий раз, когда точка $\alpha, \dot{\alpha}$ находится в первом и третьем квадранте фазовой плоскости, выполняется $u(t) = u_1$, а в случае второго и четвертого квадрантов имеем $u(t) = u_2$:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } \alpha(t)\dot{\alpha}(t) \geq 0, \\ u_2, & \text{если } \alpha(t)\dot{\alpha}(t) < 0. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

На рис. 3.2.2 показана траектория системы (3.2.10), где изменение $u(t)$ подчинено правилу (3.2.11). Видно, что положение равновесия $\alpha = 0, \dot{\alpha} = 0$, асимптотически устойчивое при постоянном значении параметра u , становится неустойчивым при $u(t)$, меняющемся во времени. Это явление называется *параметрическим резонансом*. Человек, раскачивающий качели с трением в подвесе, достигает параметрического резонанса. Мы рассматриваем специальный случай скачкообразного изменения параметра. Пусть $x_u(t, t_0, x_0)$ — общее решение неавтономной системы (3.2.10), отвечающее функции времени $u(t)$, а $x(t, x_0)$ — общее решение автономной системы с переключениями (3.2.10), (3.2.11). Начав движение в силу системы (3.2.10), (3.2.11) из некоторого начального условия x_0 в момент времени $t = 0$, получим решение $x(t, x_0)$ и некоторую реализацию параметра $u_0(t)$, подставив которую в правую часть (3.2.10), получим то же решение:

$$x_{u_0}(t, 0, x_0) \equiv x(t, x_0).$$

В рассмотренном выше примере (3.2.10) при $u(t) = u_1$ или $u(t) = u_2$ мы имеем две линейные стационарные системы с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_1 & -\varphi \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_2 & -\varphi \end{pmatrix}.$$

Траектория решения системы (3.2.10), (3.2.11) составлена из кусков траекторий систем

$$\dot{x} = A_1 x \quad \text{или} \quad \dot{x} = A_2 x, \quad (3.2.12)$$

которые будем называть для краткости системами A_1 и A_2 . Обе системы имеют асимптотически устойчивое нулевое решение. При переключении между системами A_1 и A_2 , отвечающему зависящему от времени параметру $u_0(t)$, как мы уже выяснили, свойство устойчивости может потеряться. Естественно возникает вопрос о том, всегда ли можно добиться неустойчивости с помощью переключений между устойчивыми системами? Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\dot{x} = \mathcal{A}(u(t))x. \quad (3.2.13)$$

В записи (3.2.13) предполагается, что матрица $\mathcal{A}(u(t))$ параметризована единственной скалярной функцией $u(t)$, зависящей от времени. Если бы параметризация имела вид

$$\mathcal{A}(u(t)) = u(t)A, \quad (3.2.14)$$

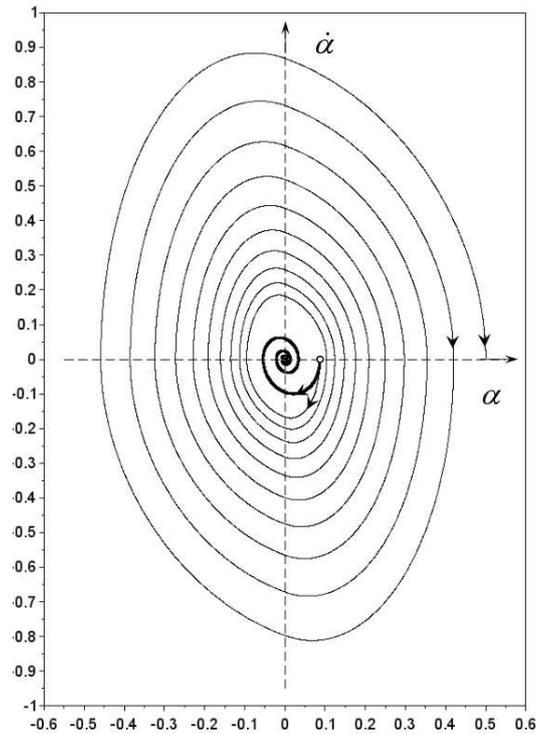


Рис. 3.2.2. Траектория системы (3.2.10) при $\varphi = 0,42$ с законом переключения (3.2.11), где $u_1 = 2$, $u_2 = 5$ (тонкая линия). Линии переключения показаны пунктиром. Жирной линией показана траектория системы (3.2.10), исходящая из той же начальной точки, но соответствующая постоянному $u(t) \equiv u_1$.

то общее решение такой системы имело бы вид

$$x(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t u(\tau) d\tau A} x_0.$$

При этом при любом выборе интегрируемой функции $u(t)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \geq \alpha(t - t_0), \quad \text{где } \alpha > 0,$$

и гурвицевой матрице A с собственными числами λ_i , удовлетворяющими условию $\operatorname{Re}(\lambda_i) < -\lambda_0$, выполнялась бы оценка $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta e^{-\alpha\lambda_0(t-t_0)} \|x_0\|$ при некотором $\beta > 0$ и система (3.2.13), (3.2.14) была бы асимптотически устойчивой. Таким образом, для получения неустойчивости зависимость $\mathcal{A}(u(t))$ от $u(t)$ должна быть не линейной, как в (3.2.14), а по крайней мере аффинной, как в (3.2.10).

При рассмотрении системы (3.2.13) ограничимся кусочно-постоянными $u(t)$, принимающими значения u_1 и u_2 . Рассмотрим две системы (3.2.12) с квадратными матрицами размера $n \times n$, $A_1 = \mathcal{A}(u_1)$ и $A_2 = \mathcal{A}(u_2)$ соответственно. Предположим, что обе матрицы гурвицевы. Пусть $\Phi_u(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений системы (3.2.13), отвечающая $u(t)$. При этом $x_u(t, t_0, x_0) = \Phi_u(t, t_0)x_0$. Предположим, что при данном $u^*(t)$ и t_0 система (3.2.13) не является асимптотически устойчивой. Тогда найдется такая неограниченно возрастающая последовательность $\{t_i\} \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$, и число $a > 0$, что будем иметь

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\Phi(t_i, t_0)\| \geq a. \quad (3.2.15)$$

Но при кусочно-постоянном виде $u^*(t)$ имеем

$$\Phi(t_i, t_0) = e^{\tau_1 A_1} e^{\theta_1 A_2} e^{\tau_2 A_1} e^{\theta_2 A_2} \dots e^{\tau_{m_i} A_1} e^{\theta_{m_i} A_2}, \quad (3.2.16)$$

где

$$t_i = \tau_1 + \theta_1 + \tau_2 + \theta_2 + \dots + \tau_{m_i} + \theta_{m_i},$$

и любое из чисел $\tau_1, \dots, \tau_{m_i}$ и $\theta_1, \dots, \theta_{m_i}$ может быть равно нулю. Обозначим

$$T_i = \sum_{k=1}^{m_i} \tau_k, \quad \Theta_i = \sum_{k=1}^{m_i} \theta_k.$$

Имеем $t_i = T_i + \Theta_i$. Предположим, что матрицы A_1 и A_2 перестановочны, то есть $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Тогда будут перестановочны матрицы $e^{\tau A_1}$ и $e^{\theta A_2}$ и в выражении (3.2.16) можно будет переставить сомножители таким образом, что

$$\Phi(t_i, t_0) = e^{T_i A} e^{\Theta_i B},$$

поскольку

$$e^{\tau_1 A_1} e^{\tau_2 A_1} \dots e^{\tau_{m_i} A_1} = e^{T_i A_1} \quad \text{и} \quad e^{\theta_1 A_2} e^{\theta_2 A_2} \dots e^{\theta_{m_i} A_2} = e^{\Theta_i B}.$$

Но матрицы A_1 и A_2 гурвицевы, и при $t_i = T_i + \Theta_i \rightarrow \infty$ будем иметь $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\Phi(t_i, t_0)\| \rightarrow 0$, что противоречит (3.2.15). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.3. Пусть две гурвицевы матрицы A_1 и A_2 перестановочны. Тогда при любом кусочно-постоянном $u(t)$ нулевое решение системы (3.2.13) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим вопрос о коммутативности A_1 и A_2 более подробно. Из начального условия x_0 начнем движение системы A_1 и продолжим его в течение времени τ . Придя в точку $e^{\tau A_1} x_0$, продолжим из нее, как из начального условия, движение системы A_2 в течение времени θ . Придем в точку $x_{A_1 A_2} = e^{\theta A_2} e^{\tau A_1} x_0$. Если же из точки x_0 будем двигаться сначала θ единиц времени в силу системы A_2 , а затем τ единиц времени в силу системы A_1 , то придем в точку $x_{A_2 A_1} = e^{\tau A_1} e^{\theta A_2} x_0$. Если матрицы A_1 и A_2 перестановочны, то $x_{A_1 A_2} = x_{A_2 A_1}$ и будет справедлива диаграмма, изображенная на левой части рисунка 3.2.3. В противном

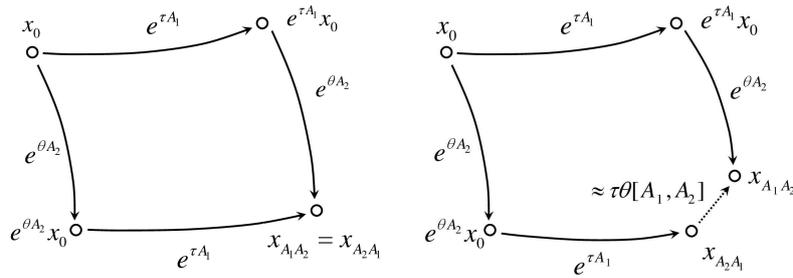


Рис. 3.2.3. Диаграммы, иллюстрирующие две траектории движения системы. Горизонтальная линия на каждой из двух диаграмм соответствует движению в силу системы A_1 , вертикальная линия соответствует движению в силу системы A_2 .

случае, если $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$, то $e^{\tau A_1} e^{\theta A_2} \neq e^{\theta A_2} e^{\tau A_1}$ и $x_{A_1 A_2} \neq x_{A_2 A_1}$. Правая часть рисунка иллюстрирует этот случай. Оценим величину $x_{A_1 A_2} - x_{A_2 A_1}$. Имеем

$$\begin{aligned} e^{\tau A_1} e^{\theta A_2} - e^{\theta A_2} e^{\tau A_1} &= \\ &= \left(I + \tau A_1 + \frac{1}{2} \tau^2 A_1^2 + \dots \right) \left(I + \theta A_2 + \frac{1}{2} \theta^2 A_2^2 + \dots \right) - \\ &- \left(I + \theta A_2 + \frac{1}{2} \theta^2 A_2^2 + \dots \right) \left(I + \tau A_1 + \frac{1}{2} \tau^2 A_1^2 + \dots \right) = \\ &= \left(I + \tau A_1 + \theta A_2 + \frac{1}{2} \tau^2 A_1^2 + \tau \theta A_1 A_2 + \frac{1}{2} \theta^2 A_2^2 + \dots \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(I + \theta A_2 + \tau A_1 + \frac{1}{2} \theta^2 A_2^2 + \tau \theta A_2 A_1 + \frac{1}{2} \tau^2 A_1^2 + \dots \right) = \\
& \qquad \qquad \qquad = \tau \theta (A_1 A_2 - A_2 A_1) + \dots
\end{aligned}$$

Это означает, что отличие $e^{\tau A_1} e^{\theta A_2}$ от $e^{\theta A_2} e^{\tau A_1}$ начинается с членов порядка $\tau \theta$. Следовательно, $\|x_{A_1 A_2} - x_{A_2 A_1}\|$ имеет порядок малости $\tau \theta$. Матрица

$$[A_1, A_2] \equiv A_1 A_2 - A_2 A_1 \quad (3.2.17)$$

называется коммутатором матриц A_1 и A_2 или *скобкой Ли*. Также ее часто называют скобкой Пуассона. Если матрицы A_1 и A_2 перестановочны, то их коммутатор равен нулю. В этом случае матрицы $e^{\tau A_1}$ и $e^{\theta A_2}$ также перестановочны и выражение (3.2.17) равно нулю тождественно по τ и θ . Теорема 3.2.3 утверждает, что при этом параметрического резонанса достичь невозможно.

Рассмотрим произвольную линейную нестационарную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \text{где } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2.18)$$

В записи системы (3.2.18) не предполагается специального вида зависимости от t , как это было сделано в (3.2.13). Очевидно, что систему (3.2.18) можно переписать в виде

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i x \quad (3.2.19)$$

при надлежащем выборе скалярных функций времени $u_i(t)$ и постоянных матриц A_i . Эти функции вносят нестационарность в запись системы. Относительно них будем предполагать лишь, что они удовлетворяют условиям Каратеодори существования решения уравнения (3.2.19). Ограничимся выбором $t_0 = 0$ и общее решение (3.2.19) обозначим $x(t, x_0)$. Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях общее решение системы (3.2.19) можно представить в виде

$$x(t, x_0) = \prod_{i=1}^m e^{g_i(t) A_i} x_0 \quad (3.2.20)$$

при надлежащем выборе функций $g_i(t)$. Речь идет именно о представлении в виде произведения ровно m экспонент, по одной экспоненте на каждую матрицу A_i , а не в виде произведения произвольного количества экспонент.

Определение 3.2.6. Множество матриц A_1, \dots, A_m называется *инволютивным*, если скобка Ли любых двух матриц линейно выражается через эти матрицы

$$[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^m \gamma_{ijk} A_k. \quad (3.2.21)$$

Определение 3.2.7. Линейное инволютивное пространство матриц называется *матричной алгеброй Ли*.

Имеет место следующая теорема Фробениуса.

Теорема 3.2.4. Пусть множество матриц A_1, \dots, A_m инволютивно. Тогда решение системы (3.2.19) может быть представлено в виде (3.2.20).

При этом множество матриц, представимых в виде

$$\prod_{i=1}^m e^{\alpha_i A_i}, \quad (3.2.22)$$

при некоторых вещественных α_i замкнуто относительно операции умножения. Обратная к каждой такой матрице также представима в виде (3.2.22). Таким образом такие матрицы образуют группу, называемую *группой Ли*, отвечающей алгебре Ли. Единицей группы является единичная матрица I . Если рассматривать группу Ли как гладкое многообразие, то соответствующая алгебра Ли образует линейное пространство, касательное к многообразию в точке I .

Ниже приведены некоторые примеры матричных алгебр Ли:

- 1) $gl(n)$ — пространство всех квадратных вещественных матриц размера $n \times n$;
- 2) $sl(n)$ — пространство вещественных матриц с нулевым следом, $\text{tr}(A) = 0$;
- 3) $so(n)$ — пространство вещественных кососимметричных матриц, $A^\top = -A$;
- 4) $u(n)$ — пространство комплекснозначных косоэрмитовых матриц, $A^* = -A$;
- 5) $su(n)$ — пространство комплексных косоэрмитовых матриц с нулевым следом, $A^* = -A$, $\text{tr}(A) = 0$.

Вышеперечисленным алгебрам соответствуют следующие группы Ли:

- 1) $GL(n)$ — группа невырожденных вещественных матриц размера $n \times n$;

2) $SL(n)$ — группа вещественных матриц с единичным детерминантом, $\det(A) = 1$;

3) $SO(n)$ — группа вещественных ортогональных матриц,

$$A^T = A^{-1};$$

4) $U(n)$ — группа комплекснозначных унитарных матриц,

$$A^* = A^{-1};$$

5) $SU(n)$ — группа комплексных унитарных матриц с единичным детерминантом, $A^* = A^{-1}$, $\det(A) = 1$.

Хорошо известно, что любая ортогональная матрица Q из окрестности единичной матрицы может быть представлена в виде

$$Q = I + S + o(\|S\|) + \dots,$$

где матрица S кососимметрична ($S \in so(n)$) с точностью до членов второго порядка малости, что и означает, что S лежит в касательном многообразии к $SO(n)$ в единице. Легко проиллюстрировать и остальные приведенные выше примеры. Необходимо заметить, что указанными примерами множество матричных алгебр и групп Ли, разумеется, не исчерпывается. Любое конечное множество матриц A_i , $i = 1, \dots, m$, можно дополнять матрицами до тех пор, пока не получится базис алгебры Ли, удовлетворяющий условию (3.2.21). Поскольку в базисе не более n^2 элементов, то результатом такого дополнения будет алгебра Ли, по крайней мере совпадающая с $gl(n)$.

В записи (3.2.19) предположим, что функции $u_i(t)$ ограничены условием

$$\sum_{i=1}^m u_i(t) = 1, \quad u_i(t) \geq 0. \quad (3.2.23)$$

Это означает, что матрица $A(t)$ в (3.2.18) принадлежит выпуклой оболочке матриц A_1, \dots, A_m . Это свойство записываем следующим образом: $A(t) \in \text{co}\{A_1, \dots, A_m\}$. Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения системы (3.2.19), (3.2.23).

Определение 3.2.8. Алгебра Ли называется *разрешимой*, если существует линейное преобразование, приводящее все ее элементы к верхнетреугольному виду.

Имеет место следующая теорема, приводимая без доказательства.

Теорема 3.2.5. Пусть множество матриц A_1, \dots, A_m порождает разрешимую алгебру Ли. Тогда нулевое решение системы (3.2.19), (3.2.23) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все матрицы $A \in \text{co}\{A_1, \dots, A_m\}$ гурвицевы.

Таким образом, если множество A_1, \dots, A_m инволютивно, одновременно приводится к верхнетреугольному виду и все матрицы

$$A \in \text{co}\{A_1, \dots, A_m\}$$

гурвицевы, то параметрический резонанс невозможен. Существуют и другие классы алгебр Ли (не только разрешимые), которые совместно с гурвицевостью всех $A \in \text{co}\{A_1, \dots, A_m\}$ гарантируют асимптотическую устойчивость.

Результаты последней теоремы важны, но труднопроверяемы, они приведены скорее для полноты понимания проблемы, чем для практического применения. Конструктивные достаточные условия, сводящиеся к проверке разрешимости линейных матричных неравенств, приведены в разделе 3.2.4.

3.2.4. Нелинейные системы.

Теоремы об устойчивости

Вернемся к анализу устойчивости и асимптотической устойчивости нелинейных систем (3.2.3). С помощью прямого метода Ляпунова изучается свойство устойчивости без анализа решения системы в явном виде. Вместо этого анализируется поведение на решениях системы специально подобранных функций, называемых функциями Ляпунова. Рассмотрим вещественную скалярную функцию $v(t, x)$, непрерывно дифференцируемую по t и x в области пространства \mathbb{R}^{n+1} , определенной условиями

$$\Psi(t_0, \rho) = \{(t, x) \mid t \geq t_0, \|x\| \leq \rho\} \text{ для некоторого } \rho > 0. \quad (3.2.24)$$

Определение 3.2.9. Функция $v(t, x)$ называется положительно (отрицательно) определенной в области $\Psi(t_0, \rho)$, если найдется такая непрерывная функция $k(x)$, определенная в области $\|x\| \leq \rho$ и удовлетворяющая условиям $k(x) > 0, k(0) = 0$, что $v(t, x) \geq k(x)$ ($v(t, x) \leq -k(x)$) для $(t, x) \in \Psi(t_0, \rho)$ и $v(t, 0) \equiv 0$.

Определение 3.2.10. Производной функции $v(t, x)$ в силу системы (3.2.3) называется функция

$$\dot{v}(t, x) = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^\top f(t, x).$$

В последнем выражении через $\frac{\partial v}{\partial x}$ обозначен вектор-столбец первых частных производных $v(t, x)$ по переменным x , или градиент. Справедлива следующая теорема об *устойчивости нулевого решения системы* (3.2.3).

Теорема 3.2.6. Пусть система (3.2.3) допускает нулевое решение и пусть найдется такая непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных (t, x) положительно определенная функция $v(t, x)$, что

$$\dot{v}(t, x) \leq 0 \text{ при } (t, x) \in \Psi(t_0, \rho). \quad (3.2.25)$$

Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Существует такая непрерывная функция $k(x)$, что $v(t, x) \geq k(x) > 0$ для $(t, x) \in \Psi(t_0, \rho)$ и $v(t, 0) \equiv 0$. Пусть $S_\varepsilon = \{x : \|x\| = \varepsilon\}$ и ε выбрано так, что $\varepsilon < \rho$. Пусть

$$a = \min_{x \in S_\varepsilon} k(x). \quad (3.2.26)$$

Из положительности и непрерывности $k(x)$ следует $a > 0$. Из непрерывности функции $v(t_0, x)$ и условия $v(t_0, 0) = 0$ следует существование $0 < \delta < \varepsilon$ такого, что $v(t_0, x) < a$ для любого такого x , что $\|x\| < \delta$. Выберем начальное условие x_0 , $\|x_0\| < \delta$, и рассмотрим решение системы (3.2.3) $x(t, t_0, x_0)$. Из условия (3.2.25) следует, что функция $v(t, x)$ не возрастает на решениях системы. Поэтому $v(t, x(t, t_0, x_0)) \leq v(t_0, x_0)$ и, далее,

$$k(x(t, t_0, x_0)) \leq v(t, x(t, t_0, x_0)) \leq v(t_0, x_0) < a.$$

Из последнего неравенства и (3.2.26) следует, что решение остается в окрестности S_ε , что означает устойчивость по Ляпунову. ■

Функция $v(t, x)$ — функция Ляпунова. Рассмотрим случай автономной системы (3.2.1). Для анализа устойчивости применим функцию Ляпунова $v(x)$ и определим производную в силу системы (3.2.1) следующим равенством

$$\dot{v}(t) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^\top f(x).$$

В определении положительной (отрицательной) определенности такой функции Ляпунова, не зависящей от t , в качестве функции $k(x)$ достаточно взять саму $v(x)$ ($-v(x)$). Следующая теорема, доказываемая аналогично теореме 3.2.6, устанавливает достаточные условия устойчивости нулевого решения (3.2.1).

Теорема 3.2.7. Пусть система (3.2.1) допускает нулевое решение и пусть найдется такая непрерывно дифференцируемая положительно определенная функция $v(x)$, что

$$\dot{v}(x) \leq 0 \text{ при } \|x\| \leq \rho. \quad (3.2.27)$$

Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

На рис. 3.2.4 проиллюстрировано свойство неотрицательности производной функции Ляпунова в силу системы (3.2.1). Жирной линией показана траектория системы (3.2.1), последовательно пересекающая линии уровня положительно определенной функции $v(x)$ в сторону убывания (невозрастания), $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots$. В каждой точке градиент $\frac{\partial v}{\partial x}$ составляет с вектором $f(x)$, касательным к траектории, острый угол.

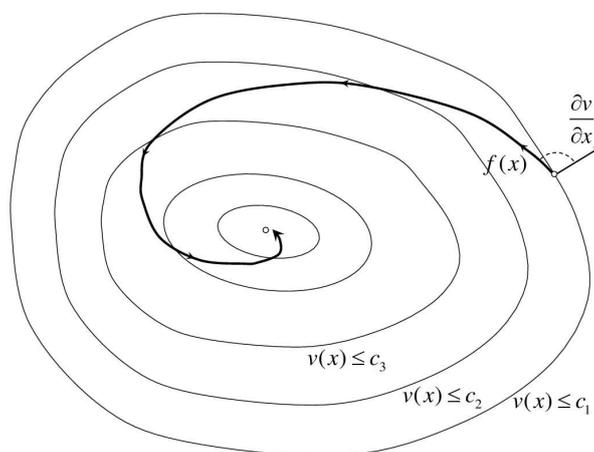


Рис. 3.2.4. Геометрическая интерпретация функции Ляпунова и условия (3.2.27).

Перейдем к анализу *асимптотической устойчивости*.

Определение 3.2.11. Функция $v(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел, если $v(t, 0) = 0$ для любого $t \geq t_0$ и $v(t, x)$ непрерывна по переменной x в точке 0 равномерно по $t \geq t_0$, то есть для любого ε найдется такое $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от t , что $v(t, x) < \varepsilon$ для любого $\|x\| < \delta$ и $t \geq t_0$.

Теорема 3.2.8. Пусть система (3.2.3) имеет нулевое решение и пусть найдется положительно определенная функция Ляпунова $v(t, x)$, допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая отрицательно определенную производную в силу системы. Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Поскольку из выполнения условий этой теоремы следует выполнение условий теоремы 3.2.6, то устойчивость нулевого решения доказана. Нужно доказать, что выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0 \quad (3.2.28)$$

для x_0 из некоторой окрестности нуля. Из устойчивости нулевого решения следует, что для x_0 найдется такое $\Delta_0 < \rho$, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \Delta_0$ для любого $t \geq t_0$. Рассмотрим поведение функции $v(t, x)$ на решении $x(t, t_0, x_0)$. Поскольку ее производная в силу системы отрицательна, то $v(t, x(t, t_0, x_0))$ монотонно убывает и существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x(t, t_0, x_0)) = a \geq 0.$$

Возможны два случая:

- а) $a = 0$,
- б) $a > 0$.

Рассмотрим случай а). Из положительной определенности $v(t, x)$ следует существование функции $k(x)$ (определение 3.2.9), определенной в области $\|x\| \leq \rho$ и удовлетворяющей условиям $k(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $v(t, x) \geq k(x)$. Если предположить, что предельное соотношение (3.2.28) не выполняется, то найдется такое $0 < \varepsilon < \rho$ и такая последовательность $\{t_i\} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, что $\|x(t_i, t_0, x_0)\| > \varepsilon$. Обозначим $\kappa = \min_{\varepsilon \leq \|x\| \leq \rho} k(x)$. Из предположения а) следует, что найдется такое T , что $v(t, x(t, t_0, x_0)) < \kappa$ для любого $t > T$. Выберем из последовательности $\{t_i\}$ любое число $T_2 > T$. Имеем $\|x(T_2, t_0, x_0)\| > \varepsilon$ и, следовательно, $k(x(T_2, t_0, x_0)) \geq \kappa$. Получили противоречие:

$$\kappa > v(t, x(T_2, t_0, x_0)) \geq k(x(T_2, t_0, x_0)) \geq \kappa.$$

Таким образом, в случае а) теорема доказана. Покажем, что случай б) невозможен.

Предположим обратное. Покажем, что при этом предположении найдется такое $\Delta_1 < \Delta_0$, что выполняется двойное неравенство

$$\Delta_1 \leq \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \Delta_0 \text{ при } t \geq t_0. \quad (3.2.29)$$

Если бы (3.2.29) не выполнялось, то нашлась бы такая последовательность $\{t_k\} \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, что $x(t_k, t_0, x_0) \rightarrow 0$. Поскольку $v(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел, то $\lim_{k \rightarrow \infty} v(t_k, x(t_k, t_0, x_0)) = 0$, что противоречит $a > 0$. Итак, (3.2.29) выполняется. Из отрицательной определенности производной $v(t, x)$ в силу системы (3.2.3) следует существование такой функции $k_1(x) > 0$, что $\dot{v}(t, x) \leq -k_1(x) < 0$ при $t \geq t_0, x \neq 0$. Обозначим $\kappa_1 = \min_{\Delta_1 \leq \|x\| \leq \Delta_0} k_1(x)$. Тогда

$$v(t, x(t, t_0, x_0)) = v(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t \dot{v}(\tau, x(\tau, t_0, x_0)) d\tau \leq v(t_0, x_0) - \kappa_1(t - t_0).$$

Из последнего неравенства при достаточно большом $t \geq t_0$ получаем противоречие с положительной определенностью функции Ляпунова $v(t, x)$. Таким образом, случай $a > 0$ невозможен, что доказывает теорему. ■

Для случая автономных систем (3.2.1) имеем следующую разновидность предыдущей теоремы.

Теорема 3.2.9. Пусть система (3.2.1) допускает нулевое решение и пусть найдется положительно определенная функция Ляпунова $v(x)$, имеющая отрицательно определенную производную в силу системы. Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3.2.3. Одномерная система с графически заданной правой частью. Пусть правая часть уравнения

$$\dot{x} = -f(x) \quad (3.2.30)$$

задана графиком 3.2.5. Воспользуемся теоремой 3.2.9. Выберем функцию Ляпунова

$$v(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi.$$

Взяв в определении положительной определенности функции $\rho < 1$, имеем

$$\dot{v}(x) = -f^2(x).$$

Функция Ляпунова $v(x)$ положительно определена и имеет отрицательно определенную производную в силу системы (3.2.30), что доказывает асимптотическую устойчивость. ▼

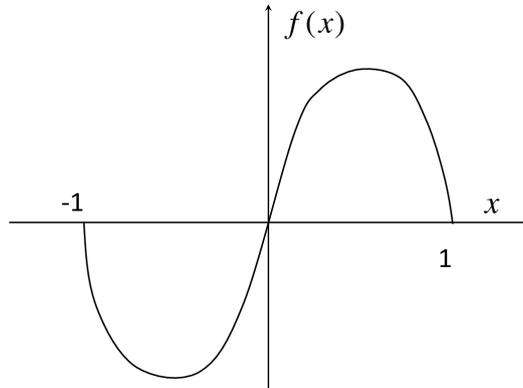


Рис. 3.2.5. График функции $f(x)$.

Пример 3.2.4. Градиентная система. Выберем любую положительно определенную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $v(x)$ и рассмотрим систему

$$\dot{x} = -\frac{\partial v(x)}{\partial x}.$$

Положительная определенность гарантирует наличие у этой системы нулевого состояния равновесия. Производная $v(x)$ в силу системы $\dot{v}(x) = -\|\frac{\partial v(x)}{\partial x}\|^2$ неположительно определена, что доказывает устойчивость в силу теоремы 3.2.7. Если в дополнение к этому нулевое решение системы

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x} = 0$$

единственно, то $\dot{v}(x)$ отрицательно определена и нулевое решение системы асимптотически устойчиво в силу теоремы 3.2.9. Для этого достаточно невырожденности матрицы $\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}$ при $\|x\| \leq \rho$. ▼

Пример 3.2.5. Устойчивость нулевого решения уравнения Льенара. Рассмотрим уравнения (3.1.18) и получим условия, при которых нулевое решение устойчиво. Определим функции $\Phi(x)$ и $F(x)$ выражениями

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(\xi) d\xi, \quad F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi,$$

и сделаем замену переменных

$$y = \dot{x} + \Phi(x). \quad (3.2.31)$$

Система (3.1.18) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \Phi(x), \\ \dot{y} &= -f(x). \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + F(x) \quad (3.2.33)$$

и вычислим ее производную в силу системы (3.2.32). Получим

$$\dot{V}(x, y) = -f(x)\Phi(x). \quad (3.2.34)$$

Потребуем, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла условиям

$$\varphi(x) > 0 \text{ при } x \neq 0 \text{ и } \varphi(0) = 0,$$

а функция $f(x)$ — условиям

$$f(x) > 0 \text{ при } x > 0, \quad f(x) < 0 \text{ при } x < 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Ясно, что при выполнении этих условий $F(x) > 0$, $x \neq 0$, $V(x, y)$ положительно определена и $\dot{V}(x, y)$ неположительно определена, что гарантирует устойчивость решения $x = 0$, $y = 0$ уравнений (3.2.32) в силу теоремы 3.2.7. Если мы дополнительно потребуем ограниченности функции $\varphi(x)$ в окрестности 0, то при малых значениях x и y величина \dot{x} будет также малой в силу замены (3.2.31), что доказывает устойчивость решения $x = 0$, $\dot{x} = 0$ системы (3.1.18).

Для системы (3.1.17) $\varphi(x) = \alpha(x^2 - 1)$ и условие $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$ не выполняется. ▼

Пример 3.2.6. Устойчивость нулевого решения системы Лоренца. Рассмотрим вопрос о том, при каких значениях параметров σ , r и b нулевое решение системы (3.1.20) асимптотически устойчиво. Известно, что эта система демонстрирует хаотическое движение при $r > 1$. Попробуем доказать асимптотическую устойчивость нуля, подбирая параметры следующей функции Ляпунова:

$$v(x) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2.$$

Имеем

$$\dot{v}(x) = 2c_1 x_1 \sigma(x_2 - x_1) + 2c_2 x_2 (rx_1 - x_2 - x_1 x_3) + 2c_3 x_3 (x_1 x_2 - bx_3).$$

Выберем $c_1 = \frac{1}{2\sigma}$, $c_2 = c_3 = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= x_1(x_2 - x_1) + x_2(rx_1 - x_2 - x_1 x_3) + x_3(x_1 x_2 - bx_3) = \\ &= -x_1^2 + (1+r)x_1 x_2 - x_2^2 - bx_3^2 = \\ &= -(x_1 - ax_2)^2 - (1-a^2)x_2^2 - bx_3^2 < 0, \end{aligned}$$

где $a = \frac{1+r}{2} < 1$ при $0 < r < 1$. Итак, положительно определенная функция Ляпунова имеет отрицательно определенную производную. Знакоопределенность обеих функций имеет место во всем пространстве \mathbb{R}^3 , то есть $\rho = \infty$. Асимптотическая устойчивость нулевого решения доказана, причем величина δ_1 может быть выбрана сколь угодно большой в определении 3.2.2. Таким образом хаотическое поведение системы Лоренца при $r < 1$ невозможно. ▼

Пример 3.2.7. Стабилизация верхнего положения маятника. В уравнении (1.1.35) положим $\alpha = \pi + x$, где x — отклонение от неустойчивого вертикального положения равновесия. Добавим в правую часть управляющий момент u , который предстоит выбрать для достижения устойчивости. Получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= b \sin x + u, \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

где $b = \frac{g}{l}$. Управление будем выбирать из параметрического класса

$$u(x, v) = k_1 x + k_2 \sin x + k_3 v. \tag{3.2.36}$$

Для анализа устойчивости нулевого решения возьмем функцию Ляпунова в виде $V(x, v) = \frac{1}{2}(x + v)^2 + \frac{1}{2}v^2$. Вычислим производную в силу системы

$$\dot{V}(x, v) = xv + v^2 + (x + 2v)(b \sin x + k_1 x + k_2 \sin x + k_3 v)$$

и выберем свободные параметры k_1, k_2 и k_3 таким образом, чтобы удовлетворить условиям теоремы 3.2.9. Положим $k_2 = -b$, чтобы убрать зависимость от $\sin x$. Получим

$$\dot{V}(x, v) = k_1 x^2 + (1 + 2k_3)v^2 + (1 + 2k_1 + k_3)xv.$$

Положив $k_1 = -\frac{1}{8}$, $k_3 = -\frac{3}{4}$, получим $\dot{V}(x, v) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}v^2 < 0$. ▼

В этом примере мы использовали метод функций Ляпунова не только для доказательства асимптотической устойчивости нулевого решения, но и для синтеза стабилизирующей обратной связи. Мы выбрали фиксированную функцию Ляпунова и подобрали параметры закона управления. В предыдущем примере мы поступали иначе, подбирая параметры функции Ляпунова. Выбором параметров закона управления мы обеспечили асимптотическую устойчивость замкнутой системы стабилизации верхнего положения равновесия маятника. Такой класс управлений (и, следовательно, регуляторов) называется *пропорционально-дифференциальным (ПД)*, поскольку содержит слагаемые, зависящие от переменной состояния x и от ее производной v .

Асимптотическая устойчивость нулевого решения при нестрогой отрицательности производной функции Ляпунова

В этом разделе мы рассмотрим условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость в том случае, когда условие отрицательности производной функции Ляпунова в силу системы выполняется нестрого: $\dot{V}(x) \leq 0$. Начнем с рассмотрения примера. Перепишем уравнения маятника с трением (3.1.5) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -b \sin x - \varphi v. \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

Исследуем устойчивость нулевого положения равновесия. В качестве функции Ляпунова возьмем полную энергию системы

$$V(x, v) = b(1 - \cos x) + \frac{1}{2}v^2.$$

Мы ожидаем (и опыт подсказывает, что это так), что за счет силы трения полная энергия системы будет рассеиваться и, следовательно, движение маятника асимптотически приблизится к нулевому положению. Однако производная в силу системы равна $\dot{V}(x, v) = -\varphi v^2$.

Видим, что производная функции Ляпунова только лишь неположительна, и теорема 3.2.7 гарантирует простую (не асимптотическую) устойчивость. Заметим, что из $\dot{V}(x, v) = 0$ следует, что $v = 0$. Из второго уравнения (3.2.37) получаем, что $\dot{v} = -b \sin x$ и поэтому при нулевой скорости будем иметь $\dot{v} \neq 0$, если $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \dots$, то есть если маятник не находится в верхнем или нижнем положении равновесия. Но тогда v начнет изменяться, что вызовет уменьшение функции Ляпунова. Это значит, что при нулевой скорости маятник может находиться только в верхнем или нижнем положении равновесия. Не существует таких движений маятника, на которых тождественно выполняется условие $\dot{V}(x, v) \equiv 0$. Можно также сказать, что не существует траекторий системы, целиком расположенных внутри множества $\{(x, v) : \dot{V}(x, v) = 0\}$. Это утверждение, полученное из рассмотрения примера, называется *принципом инвариантности*. Для его формулировки потребуется понятие *инвариантного множества* динамической системы, рассмотренного на примерах в разделе 3.1.

Определение 3.2.12. Множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ называется инвариантным множеством дифференциального уравнения (3.2.1), если из условия $x_0 \in M$ следует $x(t, x_0) \in M$ для всех $t \geq 0$.

В силу определения 3.2.12 фазовый поток, начинающийся в внутри множества M , не выносится наружу. Очевидно, что тривиальным инвариантным множеством является положение равновесия системы.

Имеет место следующая теорема Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского, называемая также *принципом инвариантности Ла Салля*.

Теорема 3.2.10. Пусть система (3.2.1) допускает нулевое решение и пусть найдется положительно определенная функция Ляпунова $V(x)$, определенная в окрестности нулевого решения, имеющая неположительно определенную производную в силу системы. Если единственным инвариантным множеством, содержащимся в множестве $M_0 = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$, является тривиальное инвариантное множество $\{0\}$, то нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство этой теоремы не приводится. В более общем виде формулировка и доказательство теоремы могут быть найдены в литературе по теории устойчивости.

Поскольку, как было установлено в приведенном выше примере, система (3.2.37) не допускает решений, на которых тождественно выполняется условие $\dot{V}(x, v) \equiv 0$, кроме решения $x = 0, v = 0$, то это решение асимптотически устойчиво в силу теоремы 3.2.10.

Вернемся к примеру 3.2.5. Из выражения (3.2.34) и условия на функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ следует, что $\dot{V}(x, y) = 0$ возможно только если $x = 0$. Но тогда, в силу положительности $\varphi(x)$, следует $\Phi(0) = 0$. Из уравнений (3.2.32) получаем $\dot{x} = y$. Если предположить, что $y \neq 0$, то траектория системы выйдет из множества $\dot{V}(x, y) \equiv 0$. Таким образом нет решений, отличных от нулевого, на которых производная (3.2.34) была бы тождественно равна нулю. Теорема 3.2.10 доказывает асимптотическую устойчивость системы (3.2.32).

Теорема об устойчивости в целом

В предыдущих построениях функция Ляпунова могла удовлетворять теоремам об устойчивости или асимптотической устойчивости не во всем пространстве, а лишь в некоторой области. Для обозначения этого факта мы пользовались константой $\rho > 0$ и условием (3.2.24). Для приложений полезно уметь описывать область притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия. Под оценкой области притяжения понимается такое инвариантное множество начальных условий (см. определение 3.2.12), для которых исходящие из них траектории системы асимптотически приближаются к состоянию равновесия. Оценки областей притяжения строятся с помощью функций Ляпунова, удовлетворяющих теореме об асимптотической устойчивости 3.2.9. Особый интерес представляют области притяжения, совпадающие со всем пространством.

Определение 3.2.13. Асимптотически устойчивая точка равновесия называется *асимптотически устойчивой в целом*, если ее область притяжения совпадает со всем пространством. Заметим, что любая асимптотически устойчивая линейная система асимптотически устойчива в целом. Для нелинейных систем эти свойства отличаются.

Справедлива следующая теорема Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости в целом.

Теорема 3.2.11. Пусть система (3.2.1) допускает нулевое решение и пусть найдется положительно определенная функция Ляпунова $V(x)$, определенная во всем пространстве \mathbb{R}^n , имеющая отрицательно определенную производную в силу системы и, в отличие от теоремы 3.2.9, обладающая дополнительным свойством

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ при } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом.

Доказательство теоремы является простой модификацией доказательства теоремы 3.2.9.

Если в дополнение к условиям на функцию $f(x)$ из примера 3.2.5 потребовать

$$\int_0^x f(\xi) d\xi \rightarrow \infty \text{ при } |x| \rightarrow \infty,$$

то функция Ляпунова (3.2.33) будет удовлетворять всем условиям теоремы 3.2.11.

Пример 3.2.8. Система асимптотически устойчивая в целом. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -A[x]^3,$$

где матрица A такова, что матрица $(A + A^\top)$ положительно определена, а через $[x]^3$ обозначен вектор $(x_1^3, \dots, x_n^3)^\top$. Выберем функцию Ляпунова $V(x) = \|x\|^4$. Имеем $\dot{V}(x) = -2([x]^3)^\top (A + A^\top) [x]^3$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 3.2.11. ▼

Теорема об устойчивости по входу

Наряду с нелинейной управляемой системой (3.2.2) рассмотрим нелинейную систему, полученную при $u(t) \equiv 0$:

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad (3.2.38)$$

и предположим, что ее нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво в целом. Это в общем случае не гарантирует ограниченности решения исходной системы (3.2.2) даже при малых управлениях. Действительно, например, для системы $\dot{x} = -x + x^2 u$ система $\dot{x} = -x$, полученная при $u(t) \equiv 0$, асимптотически устойчива в целом. Выбрав управление $u(t) \equiv \varepsilon > 0$ и $x(0) > 2/\varepsilon$, получим неограниченное увеличение $x(t)$, поскольку в области $\{x > 1/\varepsilon\}$ выполняется $\dot{x} > 0$ и эта область инвариантна относительно системы. Свойство ограниченности решения при ограниченном в том или ином смысле управлении называется устойчивостью по входу.

Определение 3.2.14. Система (3.2.2) называется *устойчивой по входу*, если найдутся такие константы $\alpha, \beta > 0$, что для любого начального условия $x(0) = x_0$ и ограниченного управления $u(t)$ справедлива оценка

$$|x(t)| \leq \alpha |x_0| + \beta \sup_{\tau \in [0, t]} |u(\tau)|.$$

Мы хотим связать свойства системы (3.2.38) с устойчивостью по входу. Рассмотренный пример показывает, что кроме свойств системы (3.2.38) нужно потребовать какие-нибудь ограничения на зависимость $f(x, u)$ от u . Имеет место следующая теорема, устанавливающая свойство даже более сильное, чем устойчивость по входу.

Теорема 3.2.12. Пусть функция $v(x)$ такова, для любого x выполняются условия:

- а) $\lambda_1 \|x\|^2 \leq v(x) \leq \lambda_2 \|x\|^2$;
- б) $\left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^\top f(x, 0) \leq -a \|x\|^2$;
- в) $\left\|\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right\| \leq b \|x\|$;
- г) $\|f(x, u) - f(x, 0)\| \leq L \|u\|$

для некоторых положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, a, b, L$. Тогда найдутся такие положительные числа α, β, c , что для решений системы (3.2.2) выполняется оценка

$$|x(t)| \leq e^{-ct} \alpha |x_0| + \beta \sup_{\tau \in [0, t]} |u(\tau)|. \quad (3.2.39)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^\top f(x, 0) + \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^\top (f(x, u) - f(x, 0)) \leq \\ &\leq -a \|x\|^2 + bL \|x\| \|u\| \leq -\frac{a}{\lambda_2} v(x) + \frac{bL}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{v(x)} \|u\|. \end{aligned}$$

Разделив обе части последнего неравенства (при $x \neq 0$) на $\sqrt{v(x)}$, получим

$$\frac{d}{dt} \sqrt{v(x)} \leq -c \sqrt{v(x)} + d \|u\|, \quad \text{где } c = \frac{a}{2\lambda_2}, \quad d = \frac{bL}{2\sqrt{\lambda_1}}.$$

Обозначив $w(t) = e^{ct} \sqrt{v(x(t))}$, получим

$$\dot{w} = e^{ct} \frac{d}{dt} \sqrt{v(x(t))} + c e^{ct} \sqrt{v(x(t))} \leq d e^{ct} \|u(t)\|.$$

Из последнего неравенства следует оценка

$$w(t) \leq w(0) + d \int_0^t e^{c\tau} \|u(\tau)\| d\tau,$$

разделив обе части которой на e^{ct} , получим

$$\sqrt{v(x(t))} \leq e^{-ct} \sqrt{v(x(0))} + d \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau.$$

Отсюда с учетом условия а) и неравенства $\int_0^t e^{-c(t-\tau)} d\tau < \frac{1}{c}$ окончательно получаем

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{-ct} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|x(0)\| + \frac{bL}{2\sqrt{\lambda_1}} \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq e^{-ct} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \|x(0)\| + \frac{bL\lambda_2}{a\sqrt{\lambda_1}} \sup_{\tau \in [0,t]} |u(\tau)|. \end{aligned}$$

Оценка (3.2.39) доказана. \blacksquare

Ключевую роль в доказательстве сыграла *липшицевость* функции $f(x, u)$, равномерная по u , требуемая в условии г). Поскольку $e^{-ct} \leq 1$ при $t \geq 0$, то следствием из теоремы 3.2.4 является устойчивость по входу в смысле определения 3.2.14.

Из оценки (3.2.39) следует, что влияние начального условия экспоненциально затухает при стремлении t к бесконечности, и состояние системы определяется управлением. Это сближает свойства нелинейной управляемой системы со свойствами линейной системы, если условия теоремы выполняются. Теорема требует выполнения ограничений, которые могут оказаться слишком стеснительными, если их выполнения требовать во всем пространстве. Предположим, что мы можем гарантировать их выполнения только в некоторой области D , включающей начало координат. Даже если начать движение из этой области, то ничто не гарантирует, что через некоторое время система выйдет из D и условия теоремы окажутся неприменимыми. В таких случаях нужно построить такое инвариантное множество $\Omega \subset D$, что траектория системы не выйдет из него при любом выборе управления. Пусть управление ограничено константой $\|u\| \leq \bar{u}$ и β — константа из утверждения теоремы. Пусть \bar{r} — радиус наибольшего шара, вписанного в D . Тогда, если начать движение из шара радиусом $r = \bar{r} - \beta\bar{u}$, то в силу теоремы 3.2.12 траектория системы будет оставаться внутри шара радиуса \bar{r} и, следовательно, внутри области D , в которой выполняются условия теоремы.

Теорема о неустойчивости

Рассмотрим вопрос о *неустойчивости* динамических систем. Достаточные условия неустойчивости дает следующая теорема.

Теорема 3.2.13. Пусть для системы (3.2.3) существует такая непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $v(x, t)$, что

- а) $v(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел;
- б) производная $\dot{v}(x, t)$ в силу системы (3.2.3) положительно определена;
- в) найдется такое $\bar{t} \geq t_0$, что для любого как угодно малого $\delta > 0$ найдется точка \bar{x} , $\|\bar{x}\| < \delta$, удовлетворяющая условию $v(\bar{x}, \bar{t}) > 0$.

Тогда нулевое решение системы (3.2.3) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Из положительной определенности $\dot{v}(x, t)$ следует существование такой непрерывной функции $w(x)$, что

$$\dot{v}(x, t) \geq w(x) > 0 \text{ для любого } x \neq 0, \|x\| \leq \rho. \quad (3.2.40)$$

Далее, условие а) означает равномерную непрерывность $v(x, t)$ по t . Поэтому найдутся числа $0 < \Delta_0 < \rho$ и $a > 0$, для которых

$$v(x, t) \leq a \text{ для любого } t \geq t_0, \|x\| \leq \Delta_0. \quad (3.2.41)$$

Пусть теперь δ как угодно малое положительное число, удовлетворяющее условию $\delta < \Delta_0$. Тогда для числа \bar{t} , указанного в условии в), найдется такое \bar{x} , что $\|\bar{x}\| < \delta$, $v(\bar{t}, \bar{x}) > 0$. Рассматривая \bar{t}, \bar{x} как начальные данные, определим решение $x(t, \bar{t}, \bar{x})$ системы (3.2.3). Из (3.2.40) следует, что

$$v(x(t, \bar{t}, \bar{x})) \geq v(x(\bar{t}, \bar{t}, \bar{x})) = v(\bar{t}, \bar{x}) > 0. \quad (3.2.42)$$

Тогда найдется такое положительное $\beta \leq \Delta_0$, что

$$0 < \beta \leq \|x(t, \bar{t}, \bar{x})\| \leq \Delta_0 \text{ при } t \geq \bar{t}. \quad (3.2.43)$$

Действительно, в противном случае нашлась бы такая последовательность $\{t^i\} \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$, что $\|x(t^i, \bar{t}, \bar{x})\| \rightarrow 0$ и, в силу равномерной непрерывности, $v(t, x), v(x(t^i, \bar{t}, \bar{x})) \rightarrow 0$, что противоречит (3.2.42). Итак, (3.2.43) доказано.

Определим

$$\gamma = \inf_{\beta \leq \|x\| \leq \Delta_0} w(x) > 0.$$

Тогда в силу (3.2.43) имеем $\dot{v}(x(t, \bar{t}, \bar{x})) \geq w(x) \geq \gamma$ при $t \geq \bar{t}$. Интегрируя последнее неравенство по t , получаем

$$v(t, x(t, \bar{t}, \bar{x})) \geq v(\bar{t}, \bar{x}) + \gamma(t - \bar{t}),$$

что противоречит (3.2.41). Таким образом, для данного $\Delta_0 > 0$ и сколь угодно малого положительного $\delta < \Delta_0$ имеем $\|x(t, \bar{t}, \bar{x})\| > \Delta_0$ при $\|\bar{x}\| < \delta$ и $t \geq \bar{t}$, что противоречит устойчивости нулевого решения по Ляпунову. ■

Квадратичная устойчивость и квадратичная стабилизация линейных систем с нестационарной неопределенностью

В разделах 3.2.2 и 3.2.3 были рассмотрены общие вопросы теории устойчивости линейных нестационарных систем. Сформулированные теоремы дают необходимые и достаточные, но труднопроверяемые условия асимптотической устойчивости нулевого решения. Более конструктивные и практические условия асимптотической устойчивости системы (3.2.19), (3.2.23) получаются применением квадратичной функции Ляпунова. Выберем $v(x) = x^T P x$. Производная в силу системы (3.2.19) при произвольном выборе значений u_i , стесненном ограничении (3.2.23), принимает вид

$$\dot{v}(x) = \left(\sum_{i=1}^m u_i A_i x \right)^T P x + x^T P \left(\sum_{i=1}^m u_i A_i x \right). \quad (3.2.44)$$

Отрицательная определенность (3.2.44) с учетом ограничений (3.2.23) эквивалентна следующему утверждению

Теорема 3.2.14. *Отрицательная определенность производной квадратичной функции Ляпунова в силу системы (3.2.19), (3.2.23) эквивалентна следующей совокупности линейных матричных неравенств*

$$\begin{aligned} P A_1 + A_1^T P &< 0, \\ P A_2 + A_2^T P &< 0, \\ &\vdots \\ P A_m + A_m^T P &< 0. \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

Определение линейных матричных неравенств (ЛМИ) дано в Приложении Г. Условия (3.2.45) гарантируют асимптотическую устойчивость

линейной нестационарной системы (3.2.19) при произвольном выборе функций $u_i(t)$, удовлетворяющем условию (3.2.23). Если трактовать запись (3.2.19) как линейную стационарную систему $\dot{x} = Ax$, правая часть которой возмущена параметрическим возмущением

$$\Delta A(t) \in \text{co}\{A_1 - A, \dots, A_m - A\},$$

то теорема 3.2.14 гарантирует робастную устойчивость линейной системы в присутствии нестационарных возмущений, ограниченных выпуклым многогранником. В качестве A можно взять, например, матрицу A_1 . Функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям (3.2.45), называется общей функцией Ляпунова, поскольку она является функцией Ляпунова одновременно для m линейных стационарных систем. Последнее свойство более сильное, чем просто гурвицевость m матриц A_i , которая, как мы знаем из раздела 3.2.3, не гарантирует асимптотической устойчивости нестационарной системы. Теорема 3.2.14 дает лишь достаточные условия асимптотической устойчивости системы (3.2.19), (3.2.23). Это значит, что существуют асимптотически устойчивые системы, для которых не существует общей квадратичной функции Ляпунова.

Рассмотрим вопрос о стабилизации системы

$$\dot{x} = A(t)x + BU(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad U \in \mathbb{R}^k,$$

стационарной обратной связью $U(t) = Kx$, где $A(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t)A_i$, и произвольно меняющиеся во времени функции $u_i(t)$ удовлетворяют условиям $\sum_{i=1}^m u_i(t) = 1$, $u_i(t) \geq 0$ и матричный коэффициент усиления K имеет размерность $n \times k$. Вопрос об одновременном выборе «стабилизирующей пары» — квадратичной функции Ляпунова $v(x) = x^\top Px$ и матрицы K — сводится к решению системы LMI

$$\begin{aligned} P(A_1 + BK) + (A_1 + BK)^\top P &< 0, \\ P(A_2 + BK) + (A_2 + BK)^\top P &< 0, \\ &\vdots \\ P(A_m + BK) + (A_m + BK)^\top P &< 0, \end{aligned}$$

которая после умножении каждого неравенства слева и справа на P^{-1} и замены переменных $Y = P^{-1}Y$, $W = KP^{-1}$ приводится к виду

$$\begin{aligned} A_1 Y + BW + Y A_1^\top + W^\top B^\top &< 0, \\ A_2 Y + BW + Y A_2^\top + W^\top B^\top &< 0, \\ &\vdots \\ A_m Y + BW + Y A_m^\top + W^\top B^\top &< 0. \end{aligned}$$

После решения последней системы LMI (или, что эквивалентно, одного LMI блочно-диагонального вида) относительно Y и W , получаем искомым матричный коэффициент линейной обратной связи $K = WY^{-1}$.

3.3. Анализ устойчивости по линейному приближению

Часто оказывается возможным разделить систему на линейную и нелинейную части. В данном разделе описаны методы анализа устойчивости нелинейных систем, опирающиеся на такое разделение. При этом устойчивость линейной части системы должна гарантировать устойчивость полной системы.

3.3.1. Исследование устойчивости стационарных нелинейных систем по линейному приближению

Во введении к главе 3 мы рассуждали о линеаризации уравнений движения нелинейной в окрестности положения равновесия и о распространении свойств линеаризованной системы вблизи точки линеаризации на некоторую ее малую окрестность. В этом разделе дается строгое обоснование метода линеаризации для анализа асимптотической устойчивости по Ляпунову.

С этой целью рассматриваются системы, описываемые дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = Ax + \varphi(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3.1)$$

где A — вещественная матрица, $\varphi(t, x)$ — нелинейная вектор-функция, определенная в области (3.2.24), непрерывная по совокупности пере-

менных t, x и удовлетворяющая условию

$$\varphi(t, 0) = 0 \quad (3.3.2)$$

при $t \geq t_0$ и

$$\frac{\|\varphi(t, x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad (3.3.3)$$

равномерно по t при $\|x\| \rightarrow 0$. Таким образом, функция $\varphi(t, x)$ имеет смысл суммы отброшенных членов разложения правой части дифференциального уравнения в степенной ряд в окрестности точки 0. Сумма отброшенных членов имеет порядок малости выше $\|x\|$ для всех $t \geq t_0$.

Линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax \quad (3.3.4)$$

называют *линейным приближением* системы (3.3.1).

Теорема 3.3.1. Пусть матрица A гурвицева и функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяет условиям (3.3.2) и (3.3.3). Тогда нулевое решение системы (3.3.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть P — решение матричного уравнения Ляпунова (см. уравнение (И.1) из Приложения И):

$$PA + A^\top P = -I. \quad (3.3.5)$$

Матрица P существует и положительно определена в силу гурвицевости A . Определим $v(x) = x^\top Px$. Тогда из (3.3.5) следует, что производная $v(x)$ в силу системы (3.3.4) равна $-x^\top x = -\|x\|^2$. Вычислим ее производную в силу системы (3.3.1). Имеем

$$\dot{v}(x, t) = \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^\top (Ax + \varphi(t, x)) = -\|x\|^2 + 2x^\top P\varphi(t, x). \quad (3.3.6)$$

Пусть $\bar{\mu}$ — максимальное собственное число матрицы P , вещественное и положительное в силу положительной определенности этой матрицы. Тогда из (3.3.6) следует

$$\dot{v}(x, t) \leq -\|x\|^2 + 2\bar{\mu}\|x\|\|\varphi(t, x)\|. \quad (3.3.7)$$

Из (3.3.3) следует, что для любого достаточно малого положительного ε найдется такое $\delta < \rho$, что из $\|x\| \leq \delta$ следует $\|\varphi(t, x)\| \leq \varepsilon\|x\|$ для всех $t \geq t_0$. Тогда из (3.3.7) получим

$$\dot{v}(x, t) \leq -\|x\|^2 + 2\bar{\mu}\varepsilon\|x\|^2.$$

Выбрав $\varepsilon < \frac{1}{2\mu}$, получим $\dot{v}(t, x) < 0$ для всех $x \neq 0$ и $t \geq t_0$, что доказывает асимптотическую устойчивость по Ляпунову нулевого решения системы (3.3.1) в силу теоремы 3.2.8. ■

В формулировке теоремы 3.3.1 гурвицевость матрицы A играет ключевую роль для доказательства асимптотической устойчивости. Исходную систему (3.3.1) можно считать возмущением линейной системы (3.3.4). Тогда выполнение условия теоремы 3.3.1 гарантирует сохранение свойства асимптотической устойчивости при малом возмущении системы линейного приближения в окрестности нулевого решения. Такое свойство, сохраняющееся при малом возмущении, называется *грубым*.

В отличие от асимптотической устойчивости, простая устойчивость по Ляпунову грубым свойством не является и может разрушиться при малом возмущении. Проиллюстрируем это утверждение примерами.

Пример 3.3.1. Система с вырожденной матрицей линейного приближения. Пусть матрица A размера 2×2 имеет одно отрицательное собственное число и одно нулевое,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.8)$$

Нулевое решение системы (3.3.4) с такой матрицей будет устойчиво по Ляпунову. Рассмотрим две системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_2^3, \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

имеющие одинаковое линейное приближение с матрицей (3.3.8). Нулевое решение первой системы (3.3.9) асимптотически устойчиво, что доказывается использованием функции Ляпунова $v(x) = x_1^2 + x_2^4$. Действительно, функция $v(x)$ положительно определена и ее производная в силу системы $\dot{v}(x) = -2x_1^2 - 4x_2^3$ отрицательно определена. Нулевое решение системы (3.3.10) неустойчиво. Чтобы это доказать, выберем функцию Ляпунова $v(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$. Для использования теоремы 3.2.13 положительная определенность $v(x)$ не требуется. Нужно лишь для каждого $\delta > 0$ указать точку \bar{x} , для которой $\|\bar{x}\| < \delta$ и $v(\bar{x}) > 0$. Очевидно, что можно взять $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = \delta/2$. Для производной в силу

системы получим $\dot{v}(x_2) = x_1^2 + x_2^4$, что в силу теоремы 3.2.13 гарантирует неустойчивость. ▼

3.3.2. Нелинейная обратная связь. Абсолютная устойчивость

При анализе динамических систем полезно выделять, если это возможно, линейную и нелинейную части. Например, в (3.3.1) предполагается, что линейная часть возмущена нелинейной нестационарной добавкой $\varphi(t, x)$, которая предполагалось непрерывной по совокупности переменных. В этом разделе мы рассмотрим управляемые системы, в которых добавка $\varphi(t, x)$ играет роль закона управления и, кроме того, требование непрерывности ослаблено. Предполагается, что объект управления линеен, а регулятор, реализующий закон управления, нелинеен и нестационарен. Объект управления задается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (3.3.11)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор пространства состояний, вещественная матрица A имеет размер $n \times n$, вектор $b \in \mathbb{R}^n$, u — скалярное управление. Зависимость x и u от времени для краткости опущена. Уравнение (3.3.11) определяет линейную часть системы со скалярным входом u . Скалярный выход определим уравнением

$$y = c^\top x, \quad (3.3.12)$$

где $c \in \mathbb{R}^n$. Обратная связь, устанавливающая зависимость входа линейной части от ее выхода, определяется уравнением

$$u(t) = \varphi(t, y). \quad (3.3.13)$$

Схематично замкнутая система изображена на левой части рис. 3.3.1. Ее уравнение записывается следующим образом:

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(t, c^\top x). \quad (3.3.14)$$

Система (3.3.14) является нелинейной и нестационарной системой вида (3.2.3), и для ее описания нужно задать начальное состояние x_0 , в котором система находится в начальный момент времени $t = t_0$.

Ранее, при рассмотрении системы (3.3.1), предполагалась малость нелинейной части по сравнению с величиной $\|x\|$, см. (3.3.3). Теперь в (3.3.11) нелинейная часть определяется управлением и предположения о нелинейности будут другими. Предполагается, что при каждом

фиксированном значении t график зависимости $\varphi(t, y)$ от второго аргумента y заключен в сектор, ограниченный прямыми $k_1 y$ и $k_2 y$, где k_1 и k_2 — некоторые константы (см. правую часть рис. 3.3.1). Более точно, предполагается, что $\varphi(t, y)$ удовлетворяет ограничениям

$$\varphi(t, 0) = 0 \text{ и } k_1 \leq \frac{\varphi(t, y)}{y} \leq k_2 \text{ при } y \neq 0. \quad (3.3.15)$$

Эти ограничения называются *секторными*. Случай $k_2 = \infty$ не исключается. Например, при $k_1 = 0$ и $k_2 = \infty$ график функции $\varphi(t, y)$ занимает первый и третий квадранты плоскости y, u . При этом сектор вмещает в себя график функции $\text{sign}(y)$. Мы сейчас не касаемся вопроса о существовании решения систем с разрывной правой частью. Разумеется, что в дополнение к секторным ограничениям необходимо добавить условия на нелинейную функцию, гарантирующие существования решения замкнутой системы (3.3.14) в смысле того или иного определения. Обычно график разрывной однозначной функции дополняется до графика *выпуклозначного полунепрерывного сверху точечно-множественного отображения*. При этом дифференциальное уравнение заменяется дифференциальным включением, под решением которого понимается *абсолютно непрерывная* функция времени t , удовлетворяющая дифференциальному включению для почти всех значений t .

В такой постановке задачи от нелинейной функции $\varphi(t, y)$ требуется лишь принадлежность ее графика сектору (3.3.15). Размер сектора задается константами k_1 и k_2 , не зависящими от начального момента времени t_0 . Поэтому, не ограничивая общности, можно взять $t_0 = 0$ при записи начальных данных $x(0) = x_0$. Из первого условия (3.3.15) следует, что точка $x = 0$ является состоянием равновесия замкнутой системы (3.3.14) при любой нелинейной функции, удовлетворяющей секторному ограничению. Система, изображенная на рисунке, состоит из двух последовательно соединенных частей, линейной и нелинейной, замкнутых обратной связью. Исследуем устойчивость такого соединения. Начнем со случая асимптотически устойчивой линейной части, то есть со случая гурвицевости матрицы A . Поставим вопрос о том, при каких условиях на матрицу A , векторы b, c и числа k_1, k_2 нулевое решение замкнутой системы (3.3.14) асимптотически устойчиво. Поскольку из выполнения секторного ограничения (3.3.15) не следует в общем случае выполнение условия (3.3.3), то мы не можем воспользоваться теоремой 3.3.1 об устойчивости по линейному приближению и нам потребуются другая теория. Круг вопросов, к рассмотрению которых мы приступаем, исторически связывается с теорией абсолютной

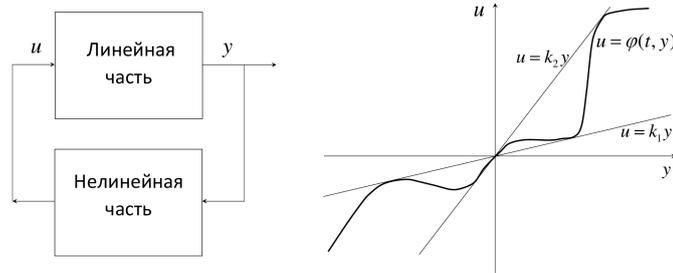


Рис. 3.3.1. Система, состоящая из линейной и нелинейной части (левая часть) и секторное ограничение на нелинейность (правая часть).

устойчивости. Нас будет интересовать устойчивость нулевого решения не одной единственной нелинейной системы (3.3.14), а целого класса таких систем, соответствующих всевозможным функциям $\varphi(t, y)$, удовлетворяющим секторному ограничению.

Определение 3.3.1. Систему, заданную уравнениями (3.3.11), (3.3.12), (3.3.13), будем называть *абсолютно устойчивой в секторе* (3.3.15), если ее нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом при любом выборе нелинейной функции $\varphi(t, y)$ из сектора (3.3.15).

Для того чтобы воспользоваться теоремой 3.2.11 об асимптотической устойчивости в целом, попробуем выбрать функцию Ляпунова из класса квадратичных форм $v(x) = x^T P x$. Имеем $v(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$. Производная $\dot{v}(x, u)$ в силу системы (3.3.11) имеет вид

$$\dot{v}(x, u) = 2x^T P(Ax + bu). \quad (3.3.16)$$

Производная $\dot{v}(x, u)$ должна быть отрицательна для любых $x \neq 0$ и u , удовлетворяющих условиям (3.3.13) и (3.3.15). Секторное ограничение (3.3.15) с учетом (3.3.13) представим в виде

$$k_1 \leq \frac{u}{y} \leq k_2 \text{ при } y \neq 0. \quad (3.3.17)$$

При анализе знакоопределенности $\dot{v}(x, u)$ при условии (3.3.17) факт зависимости (3.3.13) можно не принимать во внимание. Это справедливо, поскольку для любой точки y, u , удовлетворяющей условию (3.3.17),

можно подобрать такой график функции $\varphi(t, y)$, который удовлетворит условию $u = \varphi(t, y)$ для некоторого t и лежит в секторе (3.3.15). Условие (3.3.17) перепишем с учетом (3.3.12) в эквивалентном виде

$$(u - k_1 c^\top x)(k_2 c^\top x - u) \geq 0. \quad (3.3.18)$$

Приходим к следующей алгебраической задаче. Для заданных A , b , c , k_1 и k_2 необходимо проверить, существует ли такая положительно определенная квадратная матрица $P \succ 0$, что квадратичная форма $\dot{v}(x, u)$ переменных x , u , заданная выражением (3.3.16), отрицательно определена в области пространства \mathbb{R}^{n+1} , заданной квадратичным ограничением (3.3.18). Составим $(n+1)$ -мерный вектор z из вектора x и переменной u соотношением $z^\top = (x^\top, u)$. Тогда квадратичная форма (3.3.16) может быть записана в виде

$$\dot{v}(z) = z^\top D(P)z, \text{ где } D(P) = \begin{pmatrix} PA + A^\top P & Pb \\ b^\top P & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.19)$$

Матрица $D(P)$ не может быть отрицательно определена ни при каком выборе матрицы P . Действительно, если бы она была отрицательно определена, то матрица $-D(P)$ была бы положительно определена и по лемме Шура (см. Приложение Д) выполнялись бы два условия: $PA + A^\top P \prec 0$ и $b^\top P(PA + A^\top P)^{-1}Pb > 0$. Но второе условие невозможно, поскольку из первого условия следует невырожденность матрицы P и, следовательно, $y = Pb \neq 0$ (предполагается $b \neq 0$). Тогда из отрицательной определенности $PA + A^\top P$ следует $y^\top P(PA + A^\top P)^{-1}y < 0$. Противоречие доказывает, что матрица $D(P)$ не является отрицательно определенной. Поэтому квадратичная форма $\dot{v}(z)$, определенная условием (3.3.16), не может быть отрицательно определена на всем пространстве \mathbb{R}^{n+1} , не стесненном ограничением (3.3.18). Чтобы проверить выполнение условия $\dot{v}(z) < 0$ при $z \neq 0$ и ограничении (3.3.18), воспользуемся S -процедурой (см. Приложение Ж).

Составим квадратичную форму

$$\begin{aligned} s_\tau(z) &= \dot{v}(x, u) + \tau(u - k_1 c^\top x)(k_2 c^\top x - u) = \\ &= 2x^\top P(Ax + bu) + \tau(u - k_1 c^\top x)(k_2 c^\top x - u), \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

где $\tau \geq 0$ — параметр, подлежащий определению наряду с матрицей P . Если удастся найти такие $\tau \geq 0$ и $P \succ 0$, что выполняется условие $s_\tau < 0$ для $(x, u) \neq 0$, то выполняется условие $\dot{v}(x, u) < 0$

при ограничении (3.3.18). При этом достаточно ограничиться случаем $\tau > 0$. Действительно, если бы удалось найти такое $P \succ 0$, что $s_0(x, u) = \dot{v}(x, u) < 0$ при $(x, u) \neq 0$, то матрица (3.3.19) оказалась бы отрицательно определенной, что невозможно.

Итак, заметив, что искомая матрица P входит в выражение для s_τ линейно и разделив оба слагаемых этого выражения на $\tau > 0$, приходим к задаче о поиске матрицы P , удовлетворяющей неравенству $s_1(x, u) < 0$ при $(x, u) \neq 0$ или, другими словами, о решении линейного матричного неравенства

$$S(P) = \begin{pmatrix} PA + A^\top P - k_1 k_2 c c^\top & Pb + \frac{k_1 + k_2}{2} c \\ b^\top P + \frac{k_1 + k_2}{2} c^\top & -1 \end{pmatrix} \prec 0 \quad (3.3.21)$$

относительно матрицы P .

Случай, когда функция φ в выражении (3.3.13) зависит только от y и не зависит от t , называется случаем стационарной нелинейности $\varphi(y)$. На рис. 3.3.2 приведены графики двух стационарных нелинейностей, часто встречающихся в теории управления. В левой части рисунка изображен график линейного элемента с насыщением, определенным условием

$$\text{sat}_{\bar{u}}(y) = \begin{cases} -\bar{u}, & \text{при } y \leq -\bar{u}, \\ y, & \text{при } -\bar{u} < y < \bar{u}, \\ \bar{u}, & \text{при } y \geq \bar{u}. \end{cases} \quad (3.3.22)$$

Сектор, которому принадлежит функция $\text{sat}_{\bar{u}}(y)$, описывается константами $k_1 = 0$, $k_2 = 1$.

В правой части рисунка изображен релейный элемент с мертвой зоной $[-\delta, \delta]$, внутри которой выход элемента равен нулю. Вне мертвой зоны выход равен $\pm\sigma$ в зависимости от знака y . Такие элементы позволяют избежать частых переключений управления в окрестности нулевого значения y . При этом сектор определяется константами $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{\sigma}{\delta}$.

Хотя функции $\text{sat}_{\bar{u}}(y)$ и $\varphi_{\sigma, \delta}(y)$ вполне определенные, удобно рассматривать целый класс функций, удовлетворяющих секторному ограничению (3.3.15). Абсолютная устойчивость в секторе (3.3.15) гарантирует асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия каждой системы с нелинейностью, удовлетворяющей секторному ограничению и, в частности, с данной конкретной нелинейностью. При этом условия устойчивости могут оказаться слишком консервативными, однако это часто окупается простотой анализа.

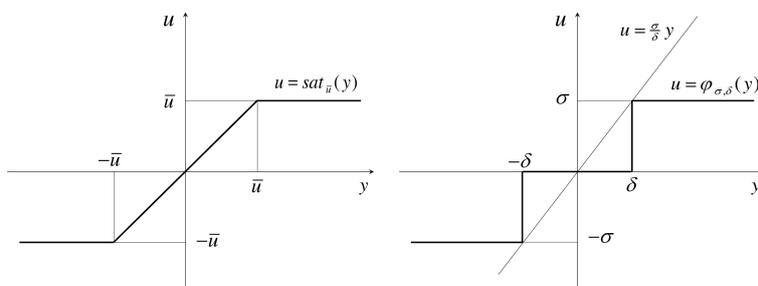


Рис. 3.3.2. Нелинейный элемент с насыщением (левая часть) и мертвой зоной (правая часть).



Рис. 3.3.3. Схема автопилота, управляющего курсом самолета.

В качестве примера применения методов теории абсолютной устойчивости к анализу конкретной системы управления с нелинейным элементом рассмотрим автопилот самолета.

Пример 3.3.2. Автопилот, управляющий курсом самолета.

На рис. 3.3.3 через ψ обозначен угол курсового отклонения самолета и через γ — отклонение руля, управляющего курсом. Упрощенные уравнения движения самолета выглядят следующим образом:

$$T\ddot{\psi} + \dot{\psi} = -a\gamma, \quad (3.3.23)$$

где константы T , a определены конструкцией самолета. Цель управления состоит в асимптотической стабилизации нулевого решения системы (3.3.23). Систему управления, решающую эту задачу, построим в виде *пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора*

$$\gamma^* = k_p \psi + k_d \dot{\psi}. \quad (3.3.24)$$

В соответствии с последним уравнением, возникшее угловое отклонение и отклонение от нуля угловой скорости должно парироваться отклонением руля γ^* , который изменяет курс самолета в соответствии с моделью (3.3.23). Для поворота руля на требуемый угол $\gamma = \gamma^*$ служит рулевая машина, состоящая из электромотора с редуктором и усилителя, усиливающего сигнал отклонения мгновенного значения реального угла γ от желаемого значения γ^* , синтезированного ПД регулятором (3.3.24). Положительное или отрицательное значение отклонения задает вращение электромотора в ту или иную сторону. На рис. 3.3.3 электромотор изображен идеальным интегратором. Скорость вращения вала электромотора пропорциональна приложенному напряжению. Уравнение рулевой машины принимает вид

$$\dot{\gamma} = a_1(k_p \psi + k_d \dot{\psi} - \gamma), \quad (3.3.25)$$

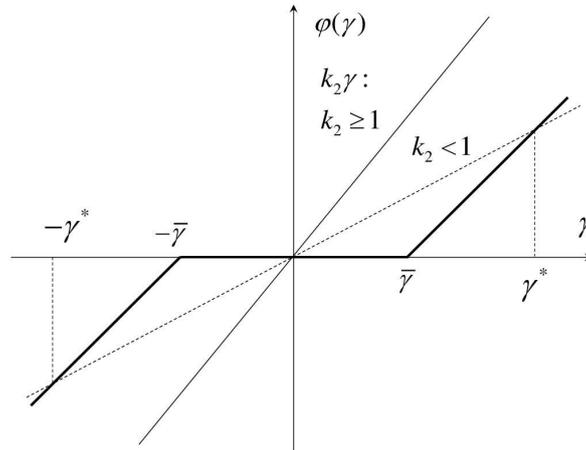
где $a_1 > 0$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от коэффициента усиления усилителя и передаточного числа редуктора. Положение руля стеснено ограничителями, позволяющими принимать положения только из интервала $-\bar{\gamma} \leq \gamma \leq \bar{\gamma}$ между крайними допустимыми положениями. Не обсуждая детальную реализацию такого механизма, ограничимся его моделью в виде нелинейного элемента с насыщением (3.3.22), см. левую часть рис. 3.3.2.

Наряду с нелинейным элементом $\text{sat}_{\bar{\gamma}}(\gamma)$ определим для удобства новый нелинейный элемент уравнением

$$\varphi(\gamma) = \gamma - \text{sat}_{\bar{\gamma}}(\gamma).$$

График функции $\varphi(\gamma)$ изображен на рис. 3.3.4. Графики обоих нелинейных элементов, $\text{sat}_{\bar{\gamma}}(\gamma)$ и $\varphi(\gamma)$ принадлежат одному и тому же сектору, определенному коэффициентами $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Причина, по которой мы ввели в рассмотрение новую нелинейность, состоит в том, что при этом мы получим невырожденную и, следовательно, необходимо гурвицеву матрицу линейной части системы. Действительно, модель (3.3.23) примет вид

$$\ddot{\psi} = -\frac{1}{T}\dot{\psi} - \frac{a}{T}\text{sat}_{\bar{\gamma}}(\gamma) = -\frac{1}{T}\dot{\psi} - \frac{a}{T}\gamma + \frac{a}{T}\varphi(\gamma). \quad (3.3.26)$$

Рис. 3.3.4. График характеристики нелинейного элемента $\varphi(\gamma)$.

Обозначив $x_1 = \psi$, $x_2 = \dot{\psi}$, $x_3 = \gamma$ и собрав вместе уравнения (3.3.26) и (3.3.25), приходим к записи (3.3.11)–(3.3.13), (3.3.18), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T} & -\frac{a}{T} \\ a_1 k_p & a_1 k_d & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1 = 0, \quad k_2 > 0.$$

При этом $\det A = -\frac{aa_1 k_p}{T} \neq 0$.

Теперь, последовательно решая задачу о разрешимости линейного матричного неравенства (3.3.21) при увеличивающихся значениях k_2 , начиная с нулевого, мы можем найти точную верхнюю грань k_2^* тех k_2 , при которых гарантируется абсолютная устойчивость. Если окажется, что $k_2^* \geq 1$, то нелинейность $\varphi(\gamma)$ принадлежит сектору и автопилот будет иметь асимптотически устойчивое в целом нулевое положение равновесия независимо от того, что угол отклонения руля ограничен. Величина $\bar{\gamma}$ при этом не имеет значения. Если $k_2^* < 1$, то график нелинейности принадлежит сектору только если $-\gamma^* \leq \gamma \leq \gamma^*$, как показано на рисунке 3.3.4. При этом асимптотическая устойчивость автопилота возможна только если величина γ на решениях замкнутой

системы не выходит за границы указанного интервала. Это можно гарантировать, если начальное условие $x(0)$ принадлежит инвариантной области притяжения, вписанной в полосу $|x_3| \leq \gamma^*$. Задача оценки области притяжения возникает только при анализе нелинейных систем, для которых свойство асимптотической устойчивости в целом гарантировать невозможно.

Проверка разрешимости ЛМІ при значении параметров $T = 1$, $a = 0,1$, $a_1 = 0,05$, $k_p = 0,1$, $k_d = 0,1$ с помощью пакета полуопределенной оптимизации дала положительный результат для $k_2 = 1$. Таким образом, при данном выборе параметров на вопрос об асимптотической устойчивости в целом нулевого состояния автопилота дан положительный ответ. Далее мы вернемся к этому примеру и проверим устойчивость автопилота другим методом при другом выборе параметров. ▼

Если нелинейная функция $\varphi(y)$ зависит только от y и не зависит явно от времени, то для анализа абсолютной устойчивости можно использовать функция Ляпунова из более широкого класса

$$v_{LP}(x) = x^T P x + \theta \int_0^{c^T x} \varphi(y) dy. \quad (3.3.27)$$

Функция вида (3.3.27) называется *функцией Лурье – Постникова*. Ее производная в силу системы (3.3.11) имеет вид

$$\dot{v}_{LP}(x, u) = (2x^T P + \theta u c^T)(Ax + bu).$$

Для проверки условия $\dot{v}_{LP}(z) < 0$ при $z \neq 0$ и ограничении (3.3.18) воспользуемся S -процедурой. Составим квадратичную форму

$$\begin{aligned} s_{\tau, LP}(z) &= \dot{v}_{LP}(x, u) + \tau(u - k_1 c^T x)(k_2 c^T x - u) = \\ &= (2x^T P + \theta u c^T)(Ax + bu) + \tau(u - k_1 c^T x)(k_2 c^T x - u). \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Параметры, подлежащие определению: $P \succ 0$, $\tau > 0$, θ . Рассуждая подобно тому, как мы рассуждали при анализе знакоопределенности $s_{\tau}(z)$ для случая квадратичных функций Ляпунова, приходим к утверждению о том, что можно ограничиться случаем $\tau = 1$. Таким образом приходим к задаче о поиске матрицы P и вещественного числа θ , удовлетворяющих неравенству $s_{1, LP}(x, u) < 0$ при $(x, u) \neq 0$ или, другими словами, о решении ЛМІ

$$S_{LP}(P, \theta) = \begin{pmatrix} PA + A^\top P - k_1 k_2 c c^\top & Pb + \frac{\theta}{2} A^\top c + \frac{k_1 + k_2}{2} c \\ b^\top P + \frac{\theta}{2} c^\top A + \frac{k_1 + k_2}{2} c^\top & \frac{\theta}{2} (b^\top c + c^\top b) - 1 \end{pmatrix} \prec 0 \quad (3.3.29)$$

относительно матрицы P и числа θ . Заметим, что если в (3.3.29) положить $\theta = 0$, то получится ЛМІ (3.3.21). Таким образом, если нелинейная характеристика $\varphi(y)$ стационарна, то к анализу абсолютной устойчивости можно применить более общий по сравнению с квадратичными формами класс функций Ляпунова и, следовательно, получить менее ограничительные или, как говорят, менее консервативные условия абсолютной устойчивости.

Итак, мы обеспечили отрицательную определенность производной $\dot{v}_{LP}(x, u)$, однако не обсуждали положительную определенность самой функции $v_{LP}(x)$. В связи с этим возникают следующие два вопроса:

а) нужно ли для обеспечения положительной определенности функции $v_{LP}(x)$ наряду с (3.3.29) дополнительно требовать выполнения условия $P \succ 0$?

б) нужно ли требовать условия $\theta \geq 0$?

Далее, поскольку абсолютная устойчивость в секторе (3.3.15) системы (3.3.11), (3.3.12), (3.3.13) предполагает, в частности, асимптотическую устойчивость системы (3.3.14) при любой линейной характеристике из сектора (3.3.15), то необходимым условием абсолютной устойчивости является гурвицевость матриц

$$A_1 = A + k_1 b c^\top, \quad A_2 = A + k_2 b c^\top,$$

соответствующих крайним линейным характеристикам $u = k_1 c^\top x$ и $u = k_2 c^\top x$, ограничивающим сектор. Поскольку отрицательная определенность (3.3.28) должна выполняться при любых значениях x, u , то она выполняется, в частности, при $u = k_1 c^\top x$ и $u = k_2 c^\top x$. После подстановки в (3.3.28) получаем

$$(P + \eta k_1 c c^\top) A_1 + A_1 (P + \eta k_1 c c^\top) \prec 0,$$

$$(P + \eta k_2 c c^\top) A_2 + A_2 (P + \eta k_2 c c^\top) \prec 0.$$

В силу гурвицевости матриц A_1, A_2 получаем (см. Приложение II) положительную определенность

$$(P + \eta k_1 c c^\top) \succ 0, \quad (P + \eta k_2 c c^\top) \succ 0. \quad (3.3.30)$$

Из (3.3.27) с учетом (3.3.15) следует

$$\frac{k_1}{2}(c^\top x)^2 \leq \int_0^{c^\top x} \varphi(y) dy \leq \frac{k_2}{2}(c^\top x)^2.$$

Тогда при $\eta = \frac{\theta}{2} \geq 0$ имеем

$$x^\top Px + \eta k_1 (c^\top x)^2 \leq x^\top Px + \theta \int_0^{c^\top x} \varphi(y) dy \leq x^\top Px + \eta k_2 (c^\top x)^2$$

и при $\eta < 0$ имеем

$$x^\top Px + \eta k_2 (c^\top x)^2 \leq x^\top Px + \theta \int_0^{c^\top x} \varphi(y) dy \leq x^\top Px + \eta k_1 (c^\top x)^2.$$

Из последних двух неравенств следуют с учетом (3.3.30) неравенства

$$v_{LP}(x) \geq x^\top (P + \eta k_1 c c^\top) x > 0 \text{ при } x \neq 0, \eta \geq 0$$

и

$$v_{LP}(x) \geq x^\top (P + \eta k_2 c c^\top) x > 0 \text{ при } x \neq 0, \eta < 0.$$

Окончательно, приходим к следующему утверждению

Теорема 3.3.2. *Если P и θ удовлетворяют LMI (3.3.29) и матрицы A_1 и A_2 гурвицевы, то функция $v_{LP}(x)$ положительно определена.*

Нелинейная характеристика $\varphi(\gamma)$, изображенная на рис. 3.3.4 из ранее рассмотренного примера автопилота стационарна. Поэтому к задаче устойчивости автопилота можно применить функцию Ляпунова (3.3.27) и получить менее консервативные достаточные условия устойчивости в виде условий разрешимости LMI (3.3.29).

Заметим, что в силу *неущербности* S -процедуры с одной связью (см. Приложение Ж), разрешимость (3.3.29) устанавливает необходимые и достаточные условия существования функции Лурье – Постникова с отрицательно определенной производной в области, определенной одним квадратичным секторным ограничением.

Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями. Достаточные условия существования функций Лурье – Постникова

Рассмотрим обобщение задачи абсолютной устойчивости, рассмотренной в предыдущем разделе. Пусть теперь система, изображенная

на рис. 3.3.1, состоит из линейной части и нескольких нелинейных элементов, каждый из которых удовлетворяет секторному ограничению. Объект управления задается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.3.31)$$

где теперь B — матрица размера $n \times m$, u — векторное управление размерности m . Зависимость x и u от времени для краткости опущена. Уравнение (3.3.31) определяет линейную часть системы со многими входами. Выход системы также векторный и имеет ту же размерность:

$$Y = C^T x,$$

где C — матрица размера $n \times m$, Y — m -мерный векторный выход системы. Каждый из выходов системы соединен с одним входом:

$$u_i(t) = \varphi_i(t, y_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

где u_i и y_i — i -е компоненты векторов U и Y соответственно. Относительно нелинейных характеристик $\varphi_i(t, y_i)$ будем, как и раньше, предполагать принадлежность их графиков секторам для любого момента времени. Однако для простоты изложения ограничимся случаем секторов, ограниченных осью абсцисс и прямой $u_i = k_i y_i$. Итак, предполагаем, что выполняются условия

$$\varphi_i(t, 0) = 0 \text{ и } 0 \leq \frac{\varphi_i(t, y_i)}{y_i} \leq k_i \text{ при } y_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая стационарных нелинейных элементов $\varphi_i(y_i)$, и функций Ляпунова типа Лурье – Постникова, то есть квадратичных форм с добавлением интегралов от нелинейностей

$$v_{LP}(x) = x^T P x + \sum_{i=1}^m \theta_i \int_0^{c_i^T x} \varphi_i(y) dy. \quad (3.3.32)$$

Случай нестационарных нелинейных элементов $\varphi_i(t, y_i)$ и квадратичных функций Ляпунова получится как частный случай при $\theta_i = 0$.

Обозначим через $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_m)$ диагональную матрицу, составленную из чисел θ_i . Производная функции (3.3.32) в силу системы (3.3.31) имеет вид

$$\dot{v}_{LP}(x, u) = (2x^T P + u^T \Theta C^T)(Ax + Bu).$$

Составим $(n + m)$ -мерный вектор z из вектора x и вектора u :

$$z^\top = (x^\top, u^\top).$$

Для проверки отрицательной определенности $\dot{v}_{LP}(z)$ при m квадратичных ограничениях

$$q_i(z) = q_i(x, u) = u_i(k_i c_i^\top x - u_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

воспользуемся S -процедурой. Составим квадратичную форму

$$\begin{aligned} s_{\tau, LP}(z) &= \dot{v}_{LP}(x, u) + \sum_{i=1}^m \tau_i u_i (k_i c_i^\top x - u_i) = \\ &= (2x^\top P + u^\top \Theta C^\top)(Ax + Bu) + \sum_{i=1}^m \tau_i u_i (k_i c_i^\top x - u_i), \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

где параметры $\tau_i \geq 0$ подлежат определению наряду с положительно определенной матрицей P и диагональной матрицей Θ .

Обозначим $T = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ и $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$. Потребовав отрицательной определенности функции $s_{\tau, LP}$, определенной выражением (3.3.33), приходим к задаче о поиске симметричной матрицы P и диагональных матриц Θ и $T \geq 0$, удовлетворяющих ЛМІ

$$\begin{aligned} S_{LP}(P) &= \\ &= \begin{pmatrix} PA + A^\top P & PB + \frac{1}{2}A^\top C\Theta + \frac{1}{2}CKT \\ B^\top P + \frac{1}{2}\Theta C^\top A + \frac{1}{2}TKC^\top & \frac{1}{2}(B^\top C\Theta + \Theta C^\top B) - T \end{pmatrix} \prec 0. \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

Поскольку S -процедура с несколькими связями *ущербна* (см. Приложение Ж), то разрешимость (3.3.34) устанавливает только достаточные условия существования функции Лурье – Постникова с отрицательно определенной производной в области, определенной несколькими квадратичными секторными ограничениями.

Частотные критерии абсолютной устойчивости для случая одной нелинейности

Передаточная функция линейной части системы (3.3.11), (3.3.12) равна $H(s) = c^\top (sI - A)^{-1} b$, где s – комплексная операторная переменная. Для случая нескольких нелинейных элементов получаем матричную передаточную функцию $H(s) = C^\top (sI - A)^{-1} B$. Выбрав $s = j\omega$,

где j обозначает мнимую единицу, ω — вещественную переменную, имеющую смысл частоты, получим *амплитудно-фазовую характеристику* (АФХ) $H(j\omega)$. АФХ определена для значений ω , не совпадающих с чисто мнимыми собственными числами матрицы A (если они есть). Если матрица A гурвицева, то передаточная функция аналитическая в замкнутой правой полуплоскости переменной s . Поэтому она однозначно определяется через интеграл Коши своими значениями на мнимой оси, то есть передаточная функция однозначно определяется АФХ.

В этом разделе рассматриваются вопросы существования квадратичных функций Ляпунова и функций Ляпунова вида Лурье – Постникова в терминах условий на АФХ линейной части системы. Начнем со скалярного случая одной нелинейности. Вопрос о существовании функций Ляпунова из указанных двух классов сводится к вопросу о знакоопределенности квадратичных форм (3.3.20) и (3.3.28) соответственно при надлежащем выборе матрицы P и числа θ . При этом достаточно рассмотреть более общий случай (3.3.28), положив, если нужно, $\theta = 0$. Нужно найти необходимые и достаточные условия существования такой матрицы P , что отрицательно определена следующая квадратичная форма переменных $z = (x^\top, u)^\top$:

$$Q(x, u) = 2x^\top P(Ax + bu) + G(x, u) < 0, \quad (3.3.35)$$

где для случая (3.3.28) имеем

$$G(x, u) = \theta uc^\top (Ax + bu) + (u - k_1 c^\top x)(k_2 c^\top x - u). \quad (3.3.36)$$

Мы положили $\tau = 1$. Задача об отрицательной определенности квадратичной формы (3.3.35) вещественных переменных обобщается на задачу относительно комплексных переменных и эрмитовых форм следующим образом:

$$\tilde{Q}(\tilde{z}) = \operatorname{Re}[Q(\tilde{z})], \quad \tilde{z} \in \mathbb{C}^{n+1}. \quad (3.3.37)$$

Доказательство эквивалентности исходной задачи об отрицательной определенности и задачи об отрицательной определенности эрмитовой формы (3.3.37) можно найти в литературе по теории абсолютной устойчивости. Итак, $\tilde{Q}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \tilde{Q}(\tilde{z})$ — эрмитова форма комплексных переменных \tilde{z} . Здесь и далее символ « $\tilde{}$ » используется для обозначения комплекснозначных переменных, соответствующих вещественным переменным после расширения квадратичной формы до эрмитовой формы в соответствии с (3.3.37).

Необходимым условием выполнения (3.3.35) является его выполнение на линейных подпространствах пространства \mathbb{C}^{n+1} , заданных уравнениями

$$j\omega\tilde{x} = A\tilde{x} + b\tilde{u}, \quad (3.3.38)$$

при всевозможных вещественных значениях ω . Выразив из (3.3.38) $\tilde{x} = (j\omega I - A)^{-1}b\tilde{u}$ и поставив в (3.3.37), получим, что для выполнения (3.3.35) необходимо выполнение

$$\operatorname{Re}[G((j\omega I - A)^{-1}b\tilde{u}, \tilde{u})] < 0 \quad (3.3.39)$$

при $-\infty < \omega < \infty$ и комплексных \tilde{u} .

Оказывается, что при условии управляемости пары (A, b) условие (3.3.39) не только необходимо, но и достаточно для выполнения (3.3.35). Это утверждение следует из так называемой *частотной теоремы*, играющей важную роль в теории управления. Существует несколько доказательств частотной теоремы.

Пусть квадратичная форма $G(x, u)$ в (3.3.37) имеет вид

$$G(x, u) = x^\top G_{xx}x + 2x^\top g_{xu}u + g_{uu}u^2,$$

где $G_{xx}^\top = G_{xx}$, g_{xu} — вектор, g_{uu} — число. Тогда (3.3.37) может быть переписано в виде

$$\tilde{Q}(\tilde{z}) = \tilde{x}^* G_{xx} \tilde{x} + \operatorname{Re}(\tilde{x}^* g_{xu} \tilde{u}) + g_{uu} \tilde{u}^* \tilde{u}. \quad (3.3.40)$$

Для случая (3.3.36) неравенство (3.3.39) принимает, с учетом равенства $H(j\omega) = c^\top (j\omega I - A)^{-1}b$ и тождества (3.3.40), вид

$$\operatorname{Re}[j\omega\theta H(j\omega) + (1 - k_1 H(j\omega))^*(k_2 H(j\omega) - 1)]\tilde{u}^* \tilde{u} < 0.$$

Поскольку $\tilde{u}^* \tilde{u} = |u|^2$, то последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Re}[j\omega\theta H(j\omega) + (1 - k_1 H(j\omega))^*(k_2 H(j\omega) - 1)] < 0, \quad (3.3.41)$$

которое должно выполняться для всех $-\infty < \omega < \infty$.

Если нелинейность $\varphi(t, y)$ в (3.3.13) нестационарна и для анализа абсолютной устойчивости использована функция Ляпунова из класса квадратичных форм, то в (3.3.41) полагаем $\theta = 0$. Полученное частотное условие

$$\operatorname{Re}[(1 - k_1 H(j\omega))^*(k_2 H(j\omega) - 1)] < 0 \quad (3.3.42)$$

при $-\infty < \omega < \infty$ называется *круговым критерием*. Название критерия связано с тем, что множество точек z комплексной плоскости,

удовлетворяющих неравенству $\operatorname{Re}[(1 - k_1 z)^*(k_2 z - 1)] = 0$, есть круг, проходящий через точки $\frac{1}{k_1}$ и $\frac{1}{k_2}$.

Если $k_1 = 0$ и $k_2 > 0$, то условие (3.3.42) означает, что годограф АФХ $H(j\omega)$ находится левее вертикальной прямой, параллельной мнимой оси и пересекающей ось абсцисс в точке $\frac{1}{k_2}$.

Проверим выполнение кругового критерия в применении к примеру 3.3.2 об устойчивости автопилота, рассмотренному в разделе 3.3.2. Годограф АФХ системы из этого примера при значении параметров $T = 1$, $a = 0,1$, $a_1 = 0,05$, $k_p = 0,1$, $k_d = 0,1$ изображен на рис. 3.3.5 сплошной линией. На рисунке вертикальная прямая, отвечающая значению $k_2 = 1$, изображена пунктиром.

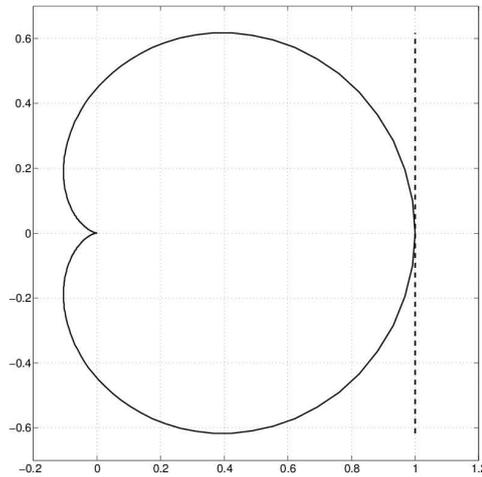


Рис. 3.3.5. Применение кругового критерия к анализу устойчивости автопилота.

Иногда вместо АФХ $H(j\omega)$ используют $W(j\omega) = -H(j\omega)$. При этом критерий (3.3.42) принимает вид

$$\operatorname{Re}[(1 + k_1 W(j\omega))^*(k_2 W(j\omega) + 1)] > 0$$

или, при $k_1 = 0$ и $k_2 = k > 0$,

$$\operatorname{Re}(W(j\omega) + \frac{1}{k}) > 0.$$

Напомним, что выполнение кругового критерия эквивалентно су-

пуществованию квадратичной функции Ляпунова с отрицательно определенной производной.

Если нелинейность $\varphi(y)$ в (3.3.13) стационарна и для анализа абсолютной устойчивости использована функция Ляпунова из класса функций Лурье – Постникова, то в (3.3.41) $\theta \neq 0$. В часто используемом случае $k_1 = 0, k_2 = k > 0$ это частотное условие принимает вид

$$\operatorname{Re}[j\omega\theta H(j\omega) + (kH(j\omega) - 1)] < 0$$

при $-\infty < \omega < \infty$. Поделив обе части на k , получим, без изменения обозначения переменной θ , условие

$$\operatorname{Re}[j\omega\theta H(j\omega) + H(j\omega)] - \frac{1}{k} < 0. \quad (3.3.43)$$

Это частотное условие впервые было получено В.М. Поповым с помощью разработанного им метода априорных интегральных оценок. Поэтому оно называется *критерием В.М. Попова*. Если используются $W(j\omega) = -H(j\omega)$, то частотное условие (3.3.43) принимает вид

$$\operatorname{Re}[j\omega\theta W(j\omega) + W(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0.$$

Определим годограф модифицированной АФХ как геометрическое место точек, описываемых точкой $(\omega \operatorname{Im} H(j\omega), \operatorname{Re} H(j\omega))^T$ при всевозможных значениях $-\infty < \omega < \infty$. Тогда частотное условие (3.3.43) допускает следующую геометрическую интерпретацию. Назовем прямую, проходящую через точку $\frac{1}{k}$ оси абсцисс на комплексной плоскости, «прямой Попова». Прямая в общем виде наклонена относительно мнимой оси в отличие от случая кругового критерия. Наклон определяется вектором $\pi = (1, -\theta)^T$, ортогональным к прямой. Тогда условие (3.3.43) эквивалентно тому, что удастся подобрать такое число θ , что годограф модифицированной АФХ лежит левее прямой Попова. Если прямая Попова параллельна мнимой оси, то частотный критерий В.М. Попова дает тот же результат, что и круговой критерий.

Проиллюстрируем применение критерия В.М. Попова на том же примере 3.3.2 об анализе устойчивости автопилота. Изменим значения параметров $a = 0,954, a_1 = 0,03$, а остальные параметры оставим без изменения. На рисунке 3.3.6 изображены годограф кругового критерия и годограф модифицированной АФХ критерия В.М. Попова. Круговой критерий гарантирует абсолютную устойчивость при $k = 0,808$, в то время как критерий В.М. Попова гарантирует абсолютную устойчивость при $k = 1$, что гарантирует устойчивость нулевого положения

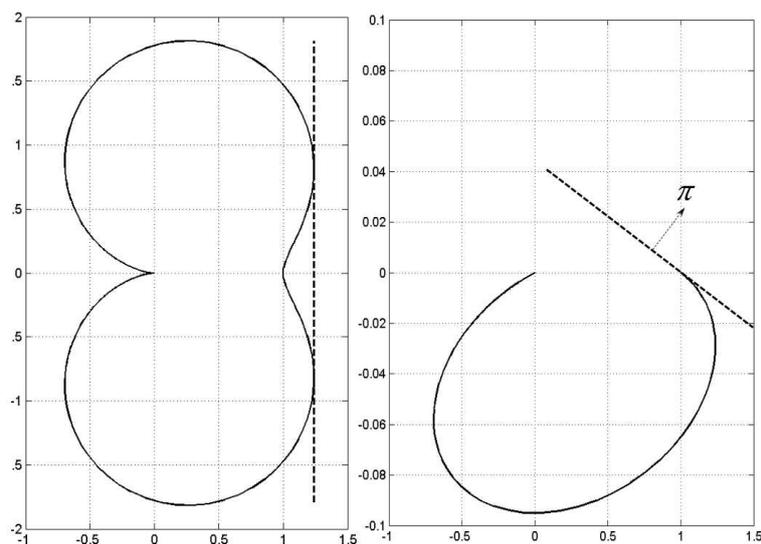


Рис. 3.3.6. Сравнение кругового критерия (слева) и критерия В.М. Попова (справа) для задачи об устойчивости автопилота при $a = 0,95$, $a_1 = 0,03$. Пунктирной линией справа показана прямая Попова, проходящая через точку $\frac{1}{k} = 1$ вещественной оси. Также пунктиром изображен вектор $\pi = (1, -\theta)^\top$, ортогональный прямой Попова.

равновесия автопилота при любом значении $\bar{\gamma}$, ограничивающем угол поворота руля.

Выполнение критерия В.М. Попова эквивалентно существованию функции Ляпунова вида Лурье – Постникова (3.3.27) с отрицательно определенной производной.

Частотные критерии абсолютной устойчивости для случая многих нелинейностей

Рассмотрим сразу случай систем со многими стационарными нелинейностями и распространим на них частотные методы исследования, изложенные в предыдущем разделе. В разделе 3.3.2 исследовалось применение функций Ляпунова вида Лурье – Постникова (3.3.32). В разделе 3.3.2 были получены достаточные условия существования ука-

занных функций Ляпунова в форме разрешимости ЛМІ (3.3.34).

Начнем с рассмотрения условий существования матрицы P , для которой квадратичная форма (3.3.35) отрицательно определена, где теперь u — вектор размерности m и, согласно (3.3.33)

$$G(x, u) = u^\top \Theta C^\top (Ax + Bu) + \sum_{i=1}^m \tau_i u_i (k_i c_i^\top x - u_i). \quad (3.3.44)$$

Рассуждая подобно тому, как мы делали в предыдущем разделе, распространим квадратичную форму

$$Q(x, u) = 2x^\top P(Ax + Bu) + G(x, u)$$

на случай эрмитовых форм $n + m$ комплексных переменных $\tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$

равенством $\tilde{Q}(\tilde{z}) = \text{Re}[Q(\tilde{z})]$, $\tilde{z} \in \mathbb{C}^{n+m}$. Необходимым и достаточным условием выполнения (3.3.35) является его выполнение на линейных подпространствах пространства \mathbb{C}^{n+m} , заданных уравнениями (3.3.38), где теперь $\tilde{u} \in \mathbb{C}^m$ и ω принимает всевозможные вещественные значения от $-\infty$ до ∞ . Выразив из (3.3.38) $\tilde{x} = (j\omega I - A)^{-1} B \tilde{u}$ и поставив в выражение для $\tilde{Q}(\tilde{z})$ и (3.3.44), получим частотное условие $\text{Re}[G((j\omega I - A)^{-1} B \tilde{u}, \tilde{u})] < 0$ при $-\infty < \omega < \infty$ и $\tilde{u} \in \mathbb{C}^m$, $\tilde{u} \neq 0$. С учетом введенных в разделе (3.3.2) обозначений $T = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ и $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_m)$ получаем условие отрицательной определенности эрмитовой формы

$$\text{Re}[\tilde{u}^* (j\omega \Theta H(j\omega) + T K H(j\omega) - T) \tilde{u}] < 0$$

при всех значениях $-\infty < \omega < \infty$ и $\tilde{u} \neq 0$. Другими словами, должна быть отрицательно определена эрмитова матрица

$$\text{Re}[j\omega \Theta H(j\omega) + T K H(j\omega) - T] \prec 0,$$

где для комплекснозначной матрицы M выражение $\text{Re} M$ означает $\frac{1}{2}(M^* + M)$. Если матричную $m \times m$ АФХ линейной части системы заменить на $W(j\omega) = -H(j\omega)$, то получим частотное условие, которое называется многомерным критерием В.М. Попова

$$\text{Re}[j\omega \Theta W(j\omega) + T K W(j\omega) + T] \succ 0 \quad \text{при} \quad -\infty < \omega < \infty.$$

При выполнении условия управляемости пары (A, B) и отсутствия чисто мнимых собственных чисел матрицы A это частотное условие эквивалентно существованию функции Ляпунова вида (3.3.32).

3.4. Управление нелинейными системами

Сложность и разнообразие нелинейных динамических управляемых систем усложняет развитие универсальных приемов синтеза управлений, стабилизирующих те или иные состояния системы или режимы следования по заданным траекториям. С другой стороны, разработан ряд приемов, применяемых инженерами для решения прикладных задач, к знакомству с основными из которых мы сейчас приступаем.

3.4.1. Метод линеаризации обратной связью

Рассмотрение метода синтеза управления нелинейными системами с помощью *линеаризации обратной связью* начнем с примера.

Пример 3.4.1. Управление движением колесного робота. Колесный робот схематически изображен на рис. 3.4.1. Он состоит из платформы и трех колес. Два задних колеса являются ведущими, а

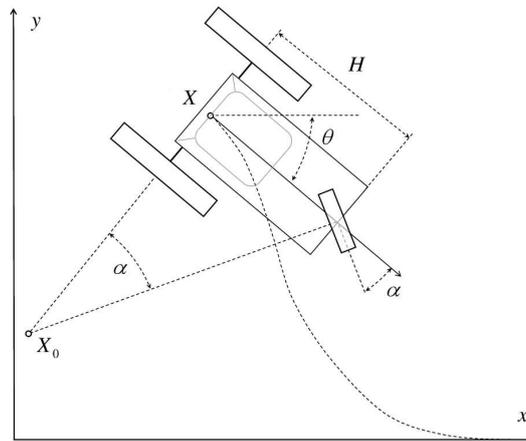


Рис. 3.4.1. Кинематическая схема колесного робота.

переднее отвечает за поворот платформы. Движение предполагается

плоским. Уравнения движения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= vu.\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

Целевая точка находится в середине задней оси платформы робота и имеет координаты $X = (x, y)^\top$, θ — угол ориентации платформы робота относительно оси x . В каждый момент времени платформа имеет текущую угловую скорость вращения $\dot{\theta}$. Мгновенную кривизну траектории, которую описывает целевая точка, обозначим через u . Точка X_0 , изображенная на рисунке как точка пересечения нормалей к плоскости колес, представляет собой мгновенный центр кривизны траектории целевой точки. Ее положение зависит от времени. При движении по прямой, когда плоскости колес коллинеарны, X_0 находится в бесконечно удаленной точке.

Величина u , обратная радиусу кривизны, зависит от угла α поворота переднего колеса и, как видно из рисунка, равна $u = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{H}$, где H — расстояние между осями колес. Пусть v — мгновенная скорость целевой точки. Задача состоит в стабилизации движения целевой точки вдоль оси x , то есть синтеза такого управления u , которое обеспечивает асимптотическое стремление y к нулю (точнее, асимптотическую устойчивость по переменной y). У нас нет явной зависимости y от u и нет возможности найти управление, решая алгебраическое уравнение. Посмотрим, зависит ли \dot{y} от u . Имеем $\dot{y} = v \sin \theta$, и снова у нас нет явной зависимости от u . Возьмем вторую производную $\ddot{y} = v \cos \theta \dot{\theta} + \dot{v} \sin \theta = v^2 \cos \theta u + \dot{v} \sin \theta$. Видим, что вторая производная y зависит от управления. Теперь мы можем записать желаемое дифференциальное уравнение, которому мы хотим подчинить изменение y :

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \beta^2 y = 0,\tag{3.4.2}$$

где β — показатель экспоненциального убывания y . Если подставить известные теперь выражения для \ddot{y} и \dot{y} в выражение (3.4.2), то можно решить полученное алгебраическое уравнение относительно u :

$$u = -\frac{\dot{v} \sin \theta + 2\beta v \sin \theta + \beta^2 y}{v^2 \cos \theta}.\tag{3.4.3}$$

Величина \dot{v} может быть измерена акселерометром, в то время как v измеряется спутниковым навигатором. Угол ориентации θ можно измерить компасом. Таким образом мы можем замкнуть систему управления в реальном времени, опираясь на модель (3.4.1) и показания

датчиков о состоянии реальной системы, вычислив $\alpha = \operatorname{arctg}(uH)$ и отправив вычисленное значение на привод поворота рулевого колеса. ▼

Мы пришли к важному выводу: если замкнуть нелинейную систему (3.4.1) нелинейным законом управления (3.4.3), мы получим линейную систему (3.4.2) с предсказанными желаемыми динамическими свойствами: экспоненциальным убыванием y с показателем убывания β . Такой подход называется линеаризацией обратной связью. Число дифференцирований, которые пришлось сделать, прежде чем получить явное выражение для u , называется относительной степенью управляемой системы.

Перейдем к формальному изложению метода и введем необходимые понятия. Пусть $f(x)$ — n -мерная вектор-функция n -мерного аргумента x , определенная в некоторой открытой окрестности нуля в \mathbb{R}^n , и $V(x)$ — скалярная функция. Напомним, что производной функции $V(x)$ по направлению $y \in \mathbb{R}^n$ называется скалярная функция, определенная равенством $\frac{d}{dy}V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}^\top y$. Определяя производную функции Ляпунова в силу автономной системы (3.2.1), мы использовали производную $V(x)$ по направлению вектор-функции (говорят также «векторного поля») $f(x)$, $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}^\top f(x)$. Мы будем называть эту величину производной Ли от $V(x)$ по направлению $f(x)$ и использовать обозначение $L_f V(x)$. При последовательном применении производной Ли выполняются следующие правила:

$$\begin{aligned} L_f L_g V(x) &= \left(\frac{\partial L_g(x)}{\partial x} \right)^\top f(x) = \left(\frac{\partial L_g(x)}{\partial x} \right)^\top f(x), \\ L_f^2 V(x) &= L_f L_f V(x), \\ L_f^k V(x) &= L_f^{k-1} L_f V(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай автономных управляемых систем вида (3.2.2) с одним управлением вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.4.4)$$

Такие системы называются аффинными, поскольку управление входит в правую часть аффинным образом. Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — вектор-функции достаточно гладкие для того, чтобы все необходимые в дальнейших выкладках производные были определены и непрерывны; также предполагается, что $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Уравнение (3.4.4) определяет эволюцию состояния системы. Когда мы имеем дело с реальными

физическими системами, состояние не всегда доступно для наблюдения. Поэтому наряду с состоянием в описание модели включают выход, который определяется скалярной функцией $h(x)$:

$$y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (3.4.5)$$

Часто ставится задача синтеза управления, зависящего только от выхода системы и стабилизирующего нулевое положение равновесия.

Иногда выражение (3.4.5) используется для формулировки цели управления в виде $y = 0$. При этом целевое многообразие, выход на которое составляет цель управления, определяется уравнением $h(x) = 0$. В примере управления колесным роботом цель управления задавалась уравнением $y = 0$.

Предположим, что цель управления ставится как $y = h(x) = 0$. Поскольку $h(x)$ не зависит явно от управления, а зависит от x , и связь между x и u задается (3.4.4), то мы не можем прямо распорядиться u для достижения цели. Вычислим производную y в силу системы. Получим

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u.$$

Если $L_g h(x) \neq 0$, то можно составить дифференциальное уравнение $\dot{y} + k_0 y = 0$ и, подставив выражения для y и \dot{y} , выразить управление как функцию x . Здесь $k_0 > 0$ — некоторая константа. Если же $L_g h(x) \equiv 0$, то продолжим дифференцирование выражения $\dot{y} = L_f h(x)$. Получим

$$\ddot{y} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u.$$

Снова возможны два варианта. Если $L_g L_f h(x) \neq 0$, то можно составить дифференциальное уравнение $\ddot{y} + k_1 \dot{y} + k_0 y = 0$ и, подставив выражения для y , \dot{y} и \ddot{y} , выразить управление как функцию x . Константы $k_0, k_1 > 0$ выбираются таким образом, чтобы корни характеристического уравнения $s^2 + k_1 s + k_0 = 0$ имели отрицательные вещественные части. Если же $L_g L_f h(x) \equiv 0$, то продолжим дифференцирование. Продолжая, мы в конце концов придем к ситуации, когда в первый раз получим $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$, а все предыдущие производные Ли тождественно нулевые. Тогда, обозначив i -ю производную y через $y^{(i)}$, составим выражение

$$y^{(r)} + k_{r-1} y^{(r-1)} + \dots + k_0 y = 0 \quad (3.4.6)$$

и, подставив в него выражения для всех производных, получим алгебраическое уравнение

$$L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u + k_{r-1} L_f^{r-1} h(x) + \dots + k_0 h(x) = 0.$$

Решив это уравнение относительно u , получим явное выражение

$$u(x) = -\frac{L_f^r h(x) + k_{r-1} L_f^{r-1} h(x) + \dots + k_0 h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}. \quad (3.4.7)$$

Применив это управление к системе (3.4.4), мы подчиним изменение величины $y(t)$ дифференциальному уравнению (3.4.6). Выбором коэффициентов $k_0, \dots, r-1$ можно добиться требуемых динамических свойств y . В частности, потребуется устойчивость нулевого решения $y = 0$ и, следовательно, отрицательность вещественных частей корней характеристического полинома $s^r + k_{r-1} s^{r-1} + \dots + k_0 = 0$. Далее, количество дифференцирований, которое пришлось сделать, зависит от свойств системы (3.4.4) и выхода (или функции, задающей целевое многообразие) (3.4.5).

Определение 3.4.1. Система, заданная уравнениями (3.4.4) и (3.4.5), имеет *относительную степень* r в некоторой области пространства \mathbb{R}^n , если в этой области выполняются условия

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0, \quad L_g L_f^i h(x) \equiv 0, \quad i = 0, \dots, r-2.$$

В примере управления колесным роботом, разобранным в начале раздела, относительная степень равна 2.

Необходимо сделать следующие замечания.

1. Может оказаться так, что управление не влияет на выход системы. Это может случиться, например, если система распадается на независимые подсистемы и при этом управление влияет на первую подсистему, в то время как выход зависит от состояния другой. При этом относительная степень не определена.

2. От выбора коэффициентов $k_0, \dots, r-1$, обеспечивающих устойчивость нулевого решения $y = 0, \dots, y^{(r-1)} = 0$ дифференциального уравнения (3.4.6), зависит «агрессивность» управления, навязанного системе (3.4.4). Если корни характеристического уравнения слишком далеко от мнимой оси в левой полуплоскости, то желаемое экспоненциальное затухание величин $y^{(i)}(t), i = 1, \dots, r-1$ будет слишком быстрым. Это может привести к тому, что в реальной системе проявятся такие нежелательные динамические свойства, неучтенные в ее модели, как внутренние задержки и инерционность исполнительных механизмов. Это, в свою очередь, может привести к высокочастотным колебаниям выхода системы вокруг целевого многообразия. Это явление подобно явлению *чаттеринга*, описанному в следующем разделе.

Чаттеринг (или «болтанка») возникает в системах с релейным управлением и регулятором, построенным с помощью метода скользящих режимов.

3. Управление (3.4.7) может принимать как угодно большие значения, не удовлетворяющие разумным ограничениям. Кроме того, это управление определено не для всех значений x , поскольку числитель в этом выражении может принимать нулевые значения. Следовательно, при практической реализации этого метода необходимо следить за тем, чтобы траектория замкнутой системы не покидала некоторого инвариантного множества, в котором управление определено и принимает ограниченные значения. В приложениях часто возникает необходимость оценки инвариантного множества для системы управления, замкнутой синтезированным законом управления. Внутри инвариантного множества гарантируется выполнение предположений, сделанных при синтезе закона управления. Обычно инвариантные множества строятся с помощью одной или нескольких функций Ляпунова, невозрастающих на траекториях замкнутой системы. При этом оценка инвариантного множества получается в виде $\{x : V(x) \leq c\}$ при некоторой константе c или в виде пересечения таких множеств. Этот прием будет проиллюстрирован в следующем разделе на примере стабилизации маятника с помощью метода скользящих режимов.

Описанный выше метод гарантирует стабилизацию переменной $y(t)$ вместе с ее производными $\dot{y}(t), \dots, y^{(r-1)}(t)$ в нуле и называется линеаризацией обратной связью по выходу. Выбор управления (3.4.7) дает возможность распорядиться динамикой r переменных. Это, однако, ничего не говорит о поведении всей n -мерной системы в целом. В примере о стабилизации бокового отклонения целевой точки колесного робота было гарантировано асимптотическое стремление к нулю величин $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ в силу уравнений (3.4.2). При этом из второго уравнения (3.4.1) следует $\sin \theta(t) \rightarrow 0$, или $\theta(t) \rightarrow i\pi$, $i = 0, \pm 1, \dots$, и величина $\cos \theta(t) \rightarrow \pm 1$. Поэтому переменная $x(t)$ в установившемся режиме будет неограниченно увеличиваться со скоростью v или уменьшаться со скоростью $-v$. Это соответствует движению целевой точки вдоль оси x со скоростью v в положительном или отрицательном направлении. Управление (3.4.2) (или (3.4.7) в общем случае) управляет напрямую поведением переменной $y(t)$ и ее производной ($r - 1$ производными в силу (3.4.6)). При этом поведение переменной $x(t)$ зависит от управления опосредованно, через переменную $\theta(t)$. В данном примере на (целевом) многообразии $y = 0$ фазового пространства x, y, θ переменная $x(t)$ асимптотическим приближается к vt или $-vt$, а не стремится

к нулю или другому состоянию покоя.

Чтобы достичь большего понимания поведения всей управляемой системы в целом, продолжим анализ в следующем направлении. Попробуем выбрать такую обратимую замену переменных $z = T(x)$, что первые r переменных обратятся в $\xi(t) = (\dot{y}(t), \dots, y^{(r-1)}(t))^T$, а оставшиеся $n - r$ переменных $\eta(t)$ таковы, что

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi). \quad (3.4.8)$$

В новых переменных управление действует только на первые r переменных, для которых работает метод линеаризации по выходу. На динамику переменных η управление непосредственно не влияет, как видно из (3.4.8). Выбор управления гарантирует $\xi(t) \rightarrow 0$. Подставим в правую часть (3.4.8) $\xi = 0$. Будем говорить, что дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

описывает *нулевую динамику системы*. Система нулевой динамики будет или не будет иметь асимптотически устойчивое состояние равновесия $\eta = 0$. Системы с асимптотически устойчивой нулевой динамикой называются минимально-фазовыми. В уравнении (3.4.8) переменная ξ присутствует подобно управлению в уравнении (3.2.2). Если система минимально-фазовая, то можно ожидать, что система нулевой динамики окажется устойчивой по входу. Для анализа устойчивости по выходу можно использовать результаты параграфа 3.2.4.

Итак $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T'(x) \\ T''(x) \end{pmatrix}$, где $T'(x)$ — r -мерная вектор-функция n -мерного аргумента x , а $T''(x)$ — $(n - r)$ -мерная вектор-функция. Определим эти функции следующими условиями:

$$T'(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \end{pmatrix}, \quad T''(x) = \begin{pmatrix} T_1''(x) \\ T_2''(x) \\ \vdots \\ T_{n-r}''(x) \end{pmatrix}, \quad (3.4.9)$$

где функции $T_i''(x)$ выбраны такими, что выполняются условия

$$\left(\frac{\partial T_i''(x)}{\partial x} \right)^T g(x) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n - r, \quad (3.4.10)$$

для всех x из некоторой окрестности точки 0. Это означает, что каждая из функций $T_i''(x)$ является первым интегралом векторного поля

$g(x)$. Если относительная степень системы равна n , то переменные η и условия (3.4.10) отсутствуют.

Рассмотрим еще один пример системы с относительной степенью меньшей размерности системы $r < n$ и, следовательно, имеющей нетривиальную нулевую динамику.

Пример 3.4.2. Стабилизация верхнего положения перевернутого маятника на тележке. Перевернутый маятник шарнирно закреплен на тележке, перемещающейся без трения по оси s , см. рис. 3.4.2. К тележке прилагается сила u , действующая в горизонтальном направлении вдоль оси s , управляя которой нужно асимптотически стабилизировать вертикальное положение маятника. Угол α — угловое отклонение от вертикального положения. Масса маятника равна m , длина невесомого стержня равна l , тележка имеет массу M . Кроме этого, на тележку может действовать упругая сила $-ks$ со стороны пружины и сила вязкого трения $\varphi\dot{s}$, как показано на правой части рисунка. Сначала рассмотрим первый случай, изображенный слева.

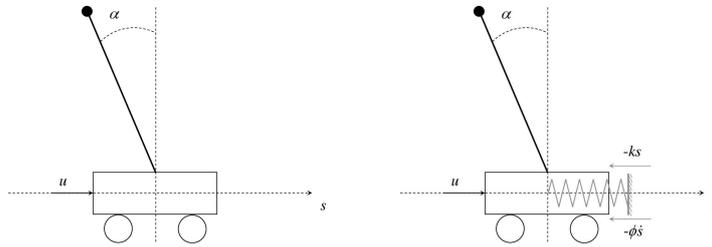


Рис. 3.4.2. Перевернутый маятник на тележке. На левой части рисунка единственной силой, действующей на тележку, является управление u . На правой части рисунка на тележку действует также упругая сила со стороны пружины ks и сила трения $\varphi\dot{s}$.

Воспользуемся лагранжевым формализмом для получения уравнений движения. Мгновенная скорость движения груза маятника массы m равна $l\dot{\alpha}$ и направлена по касательной к направлению вращения. Проекция скорости на ось s равна $l\dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{s}$. Проекция скорости на вертикальную ось равна $l\dot{\alpha} \sin \alpha$. Полная кинетическая энергия маятника и тележки

$$T = \frac{m}{2} [(l\dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{s})^2 + (l\dot{\alpha} \sin \alpha)^2] + \frac{M}{2} \dot{s}^2 =$$

$$= \frac{m}{2}(l^2\dot{\alpha}^2 + 2l\dot{\alpha}\dot{s}\cos\alpha) + \frac{M+m}{2}\dot{s}^2.$$

Потенциальная энергия равна $\Pi = mlg \cos \alpha$. Уравнения Лагранжа имеют вид $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$ и $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = u$, где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа. Заметим, что L не зависит от переменной s , которая, следовательно, является циклической. Выполнив операции дифференцирования, получим уравнения

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\alpha} + ml\ddot{s}\cos\alpha - mgl\sin\alpha &= 0, \\ ml\ddot{\alpha}\cos\alpha + (m+M)\ddot{s} - ml\dot{\alpha}^2\sin\alpha &= u. \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений относительно старших производных $\ddot{\alpha}$ и \ddot{s} получим

$$\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} m+M & -ml\cos\alpha \\ -ml\cos\alpha & ml^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mgl\sin\alpha \\ ml\dot{\alpha}^2\sin\alpha + u \end{pmatrix},$$

где $D = ml^2(m+M) - m^2l^2\cos^2\alpha = ml^2M + m^2l^2\sin^2\alpha \geq ml^2M > 0$. Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{(M+m\sin^2\alpha)l} [(m+M)g\sin\alpha - ml\omega^2\cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha u], \\ \dot{s} &= v, \\ \dot{v} &= \frac{1}{M+m\sin^2\alpha} [-mg\sin\alpha\cos\alpha + ml\omega^2\sin\alpha + u]. \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Эта запись имеет вид (3.4.4), где $x = (\alpha, \omega, s, v)^\top \in \mathbb{R}^4$ и

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} \omega \\ \frac{(m+M)g\sin\alpha - ml\omega^2\cos\alpha\sin\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)l} \\ v \\ \frac{-mg\sin\alpha\cos\alpha + ml\omega^2\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha} \end{pmatrix}, \\ g(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\cos\alpha}{(M+m\sin^2\alpha)l} \\ 0 \\ \frac{1}{M+m\sin^2\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Имея целью стабилизировать угловое отклонение в нуле, выберем в качестве выхода $y = \alpha$ ($h(x) = \alpha = 0$ — в качестве целевого многообразия). Действуя согласно описанному выше подходу, вычислим

последовательно производные $h(x)$ в силу системы (3.4.11) до тех пор, пока не получим $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ при вычислении $\alpha^{(r)}$. Непосредственно из вида системы получим, что $r = 2$ и $L_g L_f^{r-1} h(x) = -\frac{\cos \alpha}{(M+m \sin^2 \alpha)l}$. Выберем новые переменные $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)^\top = T(x)$ согласно (3.4.9) так, чтобы выполнялось (3.4.10) и замена переменных $T(x)$ была обратимой. Возьмем

$$\xi_1 = \alpha, \quad \xi_2 = \omega, \quad \eta_1 = \ddot{T}_1(x) = s, \quad \eta_2 = \ddot{T}_2(x) = l\omega + v \cos \alpha. \quad (3.4.12)$$

Эта замена переменных обратима в области $|\xi_1| < \pi/2$. Обратная замена имеет вид

$$\alpha = \xi_1, \quad \omega = \xi_2, \quad s = \eta_1, \quad v = \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1}.$$

Также легко проверить выполнение условий (3.4.10). После выполнения дифференцирования переменных ξ, η и алгебраических преобразований (для краткости опущенных) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{(M+m \sin^2 \xi_1)l} [(m+M)g \sin \xi_1 - ml\xi_2^2 \cos(\xi_1) \sin \xi_1 - \cos \xi_1 u], \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1}, \\ \dot{\eta}_2 &= g \sin \xi_1 - \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1} \xi_2 \sin \xi_1. \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Управление (3.4.7) примет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{L_f^2 h(x) + k_1 L_f^1 h(x) + k_0 h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} = \\ &= \frac{(m+M)g \sin \alpha - ml\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha + l(M+m \sin^2 \alpha)(k_1 \omega + k_0 \alpha)}{\cos \alpha}, \end{aligned}$$

где коэффициенты k_0 и k_1 таковы, что нулевое решение системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{\xi}_1 + k_1 \dot{\xi}_1 + k_0 \xi_1 = 0$$

асимптотически устойчиво. Например, можно взять $k_0 = \beta^2$, $k_1 = 2\beta$ для некоторого $\beta > 0$. Положение $\xi_1 = \alpha = 0$, $\xi_2 = \omega = 0$ будет асимптотически устойчиво. Подставив $\xi_1 = \xi_2 = 0$ в (3.4.13), получим уравнения нулевой динамики $\dot{\eta}_1 = \eta_2$, $\dot{\eta}_2 = 0$. Получаем, что при данном

выборе целевого многообразия ($\alpha = 0$) и данной замене переменных уравнения нулевой динамики не являются асимптотически устойчивыми. При этом из $\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi_2 \rightarrow 0$ получим, что η_2 будет стремиться к константе. Из замены переменных следует, что это будет постоянная скорость движения тележки вдоль оси s . Таким образом, под действием управления (3.4.13) угловое отклонение маятника стабилизируется в нуле вместе с угловой скоростью, но тележка продолжит двигаться с постоянной скоростью, зависящей от начальных условий всех переменных. Так проявляется отсутствие асимптотической устойчивости нулевой динамики при линеаризации обратной связью по данному выходу α .

Если цель управления будет выбрана другой, то нулевая динамика может оказаться устойчивой.

Далее рассмотрим второй случай, когда в модель движения добавлена упругая сила и сила трения, как показано на правой части рисунка. Применив ту же замену переменных (3.4.12), получим (оставляем проверку читателю) уравнения движения

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{(M + m \sin^2 \xi_1)l} [(m + M)g \sin \xi_1 - ml\xi_2^2 \cos(\xi_1) \sin \xi_1 - \cos \xi_1 u], \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1}, \\ \dot{\eta}_2 &= g \sin \xi_1 - \frac{\eta_2 - l\xi_2}{\cos \xi_1} \xi_2 \sin \xi_1 - \frac{1}{M + m \sin^2 \xi_1} [k\eta_1 + \varphi\eta_2].\end{aligned}\tag{3.4.14}$$

Выражение для линеаризующего управления останется без изменения. Подставив в последние два уравнения (3.4.14) $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, получим уравнения нулевой динамики

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= -\frac{1}{M}(k\eta_1 + \varphi\eta_2).\end{aligned}$$

Теперь нулевая динамика асимптотически устойчива. Применение теоремы 3.2.12 позволит установить устойчивость системы (3.4.14) по выходу ξ_1 , ξ_2 .

Будем говорить, что замена переменных $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T(x)$, $\xi \in \mathbb{R}^r$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$, $r < n$, приводит систему (3.4.4) к нормальному виду, если в

новых переменных дифференциальные уравнения (3.4.4) примут вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_r &= \varphi(z) + u\psi(z), \\ \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi).\end{aligned}\tag{3.4.15}$$

Тогда управление, приводящее замкнутую систему к линейному дифференциальному уравнению, примет вид

$$u(z) = -\frac{\varphi(z) + k_0\xi_1 + \dots + k_{r-1}\xi_r}{\psi(z)},\tag{3.4.16}$$

и выбором коэффициентов k_1, \dots, k_r обеспечивается желаемая динамика, которая «навязывается» замкнутой системе. Подставив в выражение (3.4.16) $z = T(x)$, получим выражение для закона управления $u(x)$. ▼

Прежде чем продолжить, вернемся к примеру (3.4.1) и сделаем новую замену переменных. Теперь замене подвергаются не только переменные состояния, но и независимая переменная t . Поскольку время t участвует в определении асимптотической устойчивости, то необходимо убедиться, что стабилизация системы в новых переменных, зависящих от новой независимой переменной, приводит к стабилизации в исходных переменных.

Пример 3.4.3. Управление движением колесного робота. Замена переменных и приведение к нормальному виду. Перейдем от независимой переменной t к независимой переменной x . Производную по x будем обозначать символом «'». Кроме этого введем переменные $\eta = x$, $\xi_1 = y$, $\xi_2 = \operatorname{tg} \theta$. Переменная η отвечает проекции целевой точки на заданную траекторию, которая в нашем случае просто совпадает с осью x . Переменная z_1 есть боковое отклонение целевой точки от заданной траектории, совпадающая в нашем частном случае с величиной y . Предположим, что величина линейной скорости v положительна и на траекториях системы выполняется условие $\cos \theta > 0$, то есть колесный робот не может быть ориентирован перпендикулярно заданной траектории, если он начал движение из начальной ориентации, соответствующей $|\theta(0)| < \pi/2$, и условие $|\theta(t)| < \pi/2$

выполняется при $t \geq 0$. Далее будет показано, что это предположение гарантируется синтезированным законом управления. Сделаем теперь замену переменных в (3.4.1) с учетом сделанных предположений, получим

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{u}{\cos^3 \theta} = u(1 + \xi_2^2)^{3/2}, \\ \dot{\eta} &= 1.\end{aligned}\tag{3.4.17}$$

Выбор управления в виде

$$u(z) = -\frac{k_0 \xi_1 + k_1 \xi_2}{(1 + \xi_2^2)^{3/2}}\tag{3.4.18}$$

дает

$$\ddot{\xi}_1 + k_1 \dot{\xi}_1 + k_0 \xi_1 = 0.\tag{3.4.19}$$

Если коэффициенты выбраны так, что корни характеристического уравнения $s^2 + k_1 s + k_0 = 0$ имеют отрицательные вещественные части, то из дифференциального уравнения (3.4.19) следует экспоненциальное убывание величин $\xi_1 = y$ и $\xi_2 = \operatorname{tg} \theta$. Следовательно, если движение начато из начальной ориентации, в которой $|\theta(0)| < \pi/2$, то и на всем решении замкнутой управлением (3.4.18) системы (3.4.17) величина $|\theta(x)|$ не примет значение $\pm \pi/2$.

Теперь попробуем обобщить этот прием и распространить его на случай систем общего вида.

Пусть удалось найти такую замену переменных $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T(x)$, $\xi \in \mathbb{R}^r$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$, $r < n$, $T(0) = 0$, что дифференциальные уравнения (3.4.4) принимают вид (3.4.15) и при этом первая (для определенности) компонента вектор-функции $f_0(\eta, \xi)$ положительна в некоторой окрестности начала координат: $f_{\eta, \xi} > 0$ в окрестности D , $0 \in D$. После замены независимой переменной t на η_1 дифференциальные уравнения (3.4.15) примут вид

$$\begin{aligned}\xi_1' &= \xi_2, \\ \xi_2' &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \xi_r' &= \bar{\varphi}(z) + u\bar{\psi}(z), \\ \eta' &= \bar{f}_0(\eta, \xi),\end{aligned}$$

где символ «'» означает дифференцирование по переменной η_1 . Очевидно, что $\bar{f}_{0,1}(\eta, \xi) \equiv 1$. В рассмотренном выше примере (3.4.17) имеем $n = 3$, $r = 2$, $\varphi(z) = 0$, $\psi(z) = (1 + \xi_2^2)^{3/2}$.

Управления синтезируется по той же формуле (3.4.16). Уравнения нулевой динамики $\eta' = f_0(\eta, 0)$ могут быть устойчивы или неустойчивы. В примере (3.4.17) уравнения нулевой динамики очевидно неустойчивы. ▼

В данном разделе была рассмотрена и иллюстрирована примерами идея линеаризации обратной связью по выходу. Выход системы можно также интерпретировать как цель управления. Были рассмотрены системы с одним управлением и скалярным выходом. Обобщения на случай систем со многими управлениями могут быть найдены в литературе.

3.4.2. Метод скользящих режимов

Начнем с примера стабилизации верхнего положения равновесия маятника без трения (3.2.35). Как и в ранее рассмотренном методе, важную роль играет понятие целевого многообразия и идея «навязывания» системе динамических свойств, связанных с выбором целевого многообразия.

Пример 3.4.4. Стабилизация верхнего положения маятника методом скользящих режимов. В примере 3.2.7 раздела 3.2.4 эта задача решалась с помощью управления, зависящего от положения и скорости. Величина x — угловое отклонение от вертикального верхнего положения, v — угловая скорость. Слагаемое $k_3 v$ в выражении (3.2.36) для управления играет роль искусственно созданной силы вязкого трения, обеспечивающей диссипацию механической энергии.

Итак, фазовое пространство системы двумерно и любая прямая вида $v + kx = 0$, проходящая через начало координат фазовой плоскости (x, v) , задает дифференциальное уравнение $\dot{x} = -kx$, поскольку $v = \dot{x}$. Это эквивалентно экспоненциальному затуханию $x(t) = ce^{-kt}$ при некотором c , зависящем от начальных данных. Алгебраическое уравнение в двумерном фазовом пространстве x, \dot{x} определяет дифференциальное уравнение в одномерном фазовом пространстве x . Поскольку цель состоит в асимптотическом стремлении x к нулю, то линейное одномерное многообразие $s = v + kx$ будет целевым многообразием. Разобьем решение задачи стабилизации на два этапа:

1) обеспечение приближения траектории $x(t), v(t)$ из начальной точки x_0, v_0 к целевому многообразию $s = 0$;

2) удержание траектории управляемой системы (3.2.35) на целевом многообразии, что означает изменение координаты x в силу дифференциального уравнения $\dot{x} = -kx$.

Нужно синтезировать такое управление, которое реализует оба этапа, причем желательно завершить первый этап за конечное время. В качестве вспомогательной конструкции используем функцию Ляпунова $V(x, v) = \frac{1}{2}s^2$. Ее использование несколько отлично от того, как мы использовали функцию Ляпунова, удовлетворяющую теоремам об асимптотической устойчивости и обеспечивающую асимптотическое стремление фазовых переменных к нулю. Мы будем использовать функцию $V(x, v)$ для синтеза управления, гарантирующего нулевое значение величины s по истечении конечного времени. Имеем

$$\dot{V}(x, v) = s(k\dot{x} + \dot{v}) = s(kv + b \sin x + u) \leq |s||kv + b \sin x| + su.$$

Возьмем управление в виде

$$u = -\beta(x, v) \operatorname{sign}(s), \quad (3.4.20)$$

где функция $\beta(x, v) > 0$ подлежит выбору.

Если выбрать

$$\beta(x, v) \geq |kv + b \sin x| + \varepsilon,$$

где ε это некоторая положительная константа, то будем иметь

$$\dot{V}(x, v) \leq |s||kv + b \sin x| - |s|\beta(x, v) \leq -|s|\varepsilon = -\sqrt{V(x, v)}\varepsilon,$$

откуда следует оценка $\frac{d}{dt}\sqrt{V(x, v)} \leq -\frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, начав движение с начальными данными $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$, получим

$$\sqrt{V(x(t), v(t))} \leq \sqrt{V(x_0, v_0)} - \frac{\varepsilon}{2}t. \quad (3.4.21)$$

Из последней оценки следует, что величина $\sqrt{V(x(t), v(t))}$, совпадающая с $|s(t)|$, достигает нуля за конечное время, не превосходящее $2|s(0)|/\varepsilon$. После того как величина $|s(t)|$ обратилась в нуль, она не может снова стать положительной в силу (3.4.21). Поэтому, однажды попав на многообразие $s = 0$, траектория системы больше его не покидает, а продолжает по нему скользить. При этом тождественно выполняется условие $\dot{x} = -kx$. Другими словами, система становится одномерной и движется в соответствии с упрощенным дифференциальным уравнением, не зависящим от параметра b , входящего в правую часть исходного уравнения. При этом $x(t) = ce^{-kt}$ и $v(t) = \dot{x}(t) = -kce^{-kt}$,

что означает асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия. Как и в примерах, рассмотренных в предыдущем разделе, выбором управления мы заставляем систему двигаться в соответствии с «навязанным» ей линейным дифференциальным уравнением с заданными свойствами. В отличие от предыдущего примера мы еще и понизили размерность. ▼

Такой режим движения, при котором траектория системы скользит по *целевому многообразию*, называется скользящим, а способ выбора управления называется методом скользящих режимов. Обычно такое управление бывает разрывным. Использование разрывных управлений приводит к необходимости определения понятия решения дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и обоснования существования таких решений. Мы будем использовать некоторые факты без подробных доказательств.

На рис. 3.4.3 изображен фазовый портрет системы (3.2.35), управляемой с помощью метода скользящих режимов. Значения параметров: $b = 1$, $k = 1$, $\varepsilon = 0,5$. Сходное поведение видно на рис. 3.1.9. Траектории, изображенные на рисунке, достигают целевого многооб-

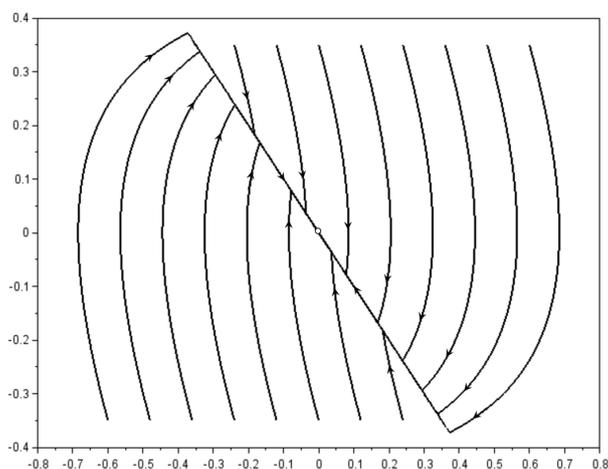


Рис. 3.4.3. Фазовый портрет системы (3.2.35) с разрывным управлением. Траектории приближаются к целевому многообразию за конечное время.

разия или, что то же самое, многообразия скользящего режима за конечное время. Траектории были получены численным интегрирова-

нием дифференциального уравнения с разрывной правой частью, что сопряжено с большими вычислительными трудностями. Существующие численные методы, даже предназначенные для интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений, предполагают непрерывность правой части вместе со своими производными. Очевидно, что это предположение не выполняется для системы с разрывной правой частью. Если речь идет о решении одного иллюстративного примера на компьютере, то эта трудность так или иначе преодолевается. Однако в реальной жизни все обстоит по-другому. При практической реализации метода скользящих режимов возникают трудности, связанные с конечным временем срабатывания реле, реализующего операцию $\text{sign}(s)$, задержкой в исполнительном механизме, вызванной его внутренней динамикой, действием шумов в измерительных устройствах. Все это приводит к явлению, называемому «чаттерингом», или болтанкой. Чаттеринг проявляется в виде зигзагообразного движения в окрестности многообразия скольжения, сопровождающегося чередованием положительных и отрицательных значений s . Частые переключения могут привести к повышенному энергопотреблению исполнительного механизма в окрестности состояния равновесия, когда логично ожидать низкого энергопотребления, или даже выходу из строя исполнительного механизма. Для борьбы с явлением чаттеринга можно использовать следующий прием. Заменяем функцию $\text{sign}(s)$ ее гладким аналогом $S_\sigma(x)$:

$$S_\sigma(s) = |s|^\sigma \text{sign}(s). \quad (3.4.22)$$

График этой функции при различных значениях σ изображен на рис. 3.4.4. При малых значениях σ график функции $S_\sigma(s)$ практически совпадает с графиком функции $\text{sign}(s)$. На рис. 3.4.5 изображен фазовый портрет системы, полученный заменой в выражении (3.4.20) функции $\text{sign}(s)$ на $S_{0,2}(s)$. Видно, что можно значительно уменьшить величину чаттеринга практически не ухудшив полезные свойства метода скользящих режимов, заменив разрывное управление его сглаженным аналогом. Особенность функции (3.4.22) состоит в том, что в окрестности нуля она может принимать как угодно малые значения, в то время как производная в нуле бесконечно большая, см. рисунок 3.4.4. Кроме (3.4.22) существует множество других гладких аналогов функции $\text{sign}(s)$, называемых *сигмоидами*. Примерами сигмOID служат функции $S'(s) = \text{arctg}(as)$ и $S''(s) = \left[\frac{2}{1+e^{-bs}} \right] - 1$, где a и b это положительные параметры, подлежащие выбору.

Используя метод скользящих режимов можно в явном виде учесть ограниченность ресурса управления. Пусть абсолютная величина уп-

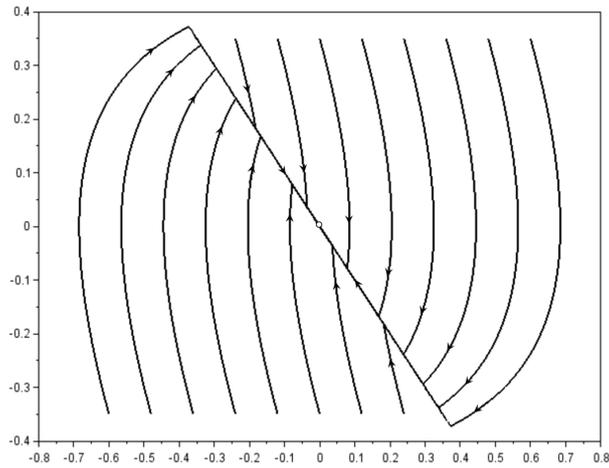


Рис. 3.4.4. Графики функции (3.4.22) при значениях $\sigma = 0,5$ (точки), $\sigma = 0,2$ (пунктирная линия), $\sigma = 0,01$ (сплошная линия).

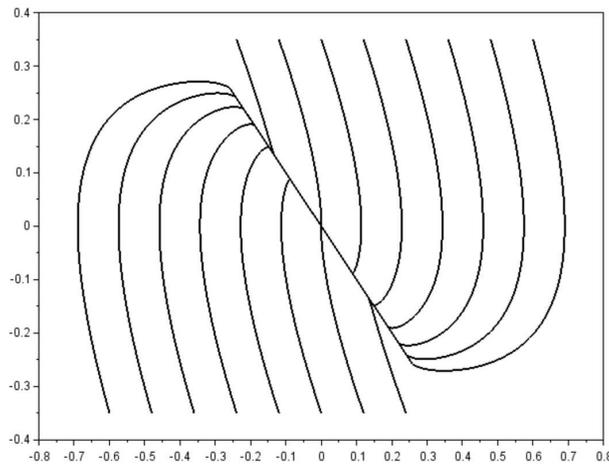


Рис. 3.4.5. Фазовый портрет системы (3.2.35) с управлением $u = -\beta(x, v)S_{0,2}(s)$.

равления должна быть ограничена константой \bar{u} . Нужно распорядиться выбором функции $\beta(x, v)$ в выражении (3.4.20) таким образом, что-

бы управление удовлетворяло ограничению. Поступим следующим образом. Предположим сначала, что траектории системы не могут покинуть квадрат фазовой плоскости $\Pi_a = \{|x| \leq a, |v| \leq a\}$, где $\pi \geq a > 0$ — константа, подлежащая выбору. Тогда мы можем в (3.4.20) выбрать $\beta(x, v) \equiv \bar{\beta} = \max_{(x,v) \in \Pi_a} |kv + b \sin x| \leq \max_{(x,v) \in \Pi_a} k|v| + b|x| = a(k + b)$. Поскольку при достаточно малом a величина $\bar{\beta}$ также может быть выбрана малой в силу непрерывной зависимости $|kv + b \sin x|$ от x, v , то, выбрав $\bar{\beta} = \bar{u} - \varepsilon$, можно взять управление $u = -\bar{u} \operatorname{sign}(s)$ и $a = \bar{\beta}/(k + b)$. При этом будут выполняться оценки $\frac{d}{dt} \sqrt{V(x, v)} \leq -\varepsilon/2$ и (3.4.21), если траектория находится внутри множества Π_a . Чтобы обеспечить это, нужно найти некоторое инвариантное для системы множество Ω , вписанное в Π_a . Начав движение из этого множества, система не покинет его и, следовательно, области Π_a , поскольку $\Omega \subseteq \Pi_a$. В силу (3.4.21) система будет двигаться в скользящем режиме и величина $s(t)$ будет убывать. В противном случае, если движение начато не в инвариантном множестве, траектория может покинуть множество Π_a и скользящий режим может нарушиться. Построим инвариантное множество.

Определим величину $\bar{s} = ka$. Если $|x| \leq a$ и $|s| \leq \bar{s}$, то будем иметь $\frac{d}{dt} x^2 = 2x\dot{x} = 2xv = 2x(s - kx) \leq 2(a\bar{s} - x^2)$. Следовательно, если $|x| \geq a$, то $\frac{d}{dt} x^2 \leq 0$. Поэтому $|x(t)| \leq a$ при $t \geq 0$ и траектория системы не покинет множества $\Omega = \{|x| \leq a, |s| \leq \bar{s}\}$ при условии, что $|v| \leq a$. Поэтому, начав движение во множестве $\Omega \cap \Pi_a = \{|x| \leq a, |v| \leq a, |s| \leq \bar{s}\}$, система его не покинет и продолжит движение в скользящем режиме.

Разбирая этот пример, мы познакомились с методом скользящих режимов, синтезом ограниченного управления, оценкой инвариантного множества, внутри которого гарантируются нужные нам свойства системы.

В этом примере цель управления (или, пользуясь терминологией, применяемой в предыдущем разделе, целевое многообразие, на которое управляемая система должна попасть) записывалась уравнением $v + kx = 0$. Обобщим это построение и перейдем к формальному описанию метода.

Рассмотрим аффинную систему (3.4.4) с векторным управлением, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $u \in \mathbb{R}^m$, $m < n$. Пусть цель управления состоит в стабилизации нулевого положения равновесия этой системы. Предположим, что в некоторой окрестности нуля $D \subseteq \mathbb{R}^n$ определена достаточно гладкая обратимая замена переменных $z = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T(x)$, удовлетворяющая условиям $\xi \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\eta \in \mathbb{R}^m$, $T(0) = 0$. Пусть в новых

переменных система (3.4.4) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f_0(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} &= f_1(\xi, \eta) + g_1(\xi, \eta)u.\end{aligned}\tag{3.4.23}$$

Первое уравнение можно рассматривать как управляемую систему в фазовом пространстве $\xi \in \mathbb{R}^{n-m}$ с m -мерным управлением η . Во втором уравнении матрица $g_1(\xi, \eta)$ имеет размер $m \times m$, совпадающий с размерностью управления u . Предполагаем, что в области D матрица $g_1(\xi, \eta)$ невырождена.

Разобьем задачу стабилизации нулевого положения равновесия системы (3.4.23) на два этапа:

1) выбираем закон управления $\eta = \varphi(\xi)$, стабилизирующий нулевое положение равновесия первого уравнения системы (3.4.23) или, другими словами, обеспечивающий асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы

$$\dot{\xi} = f_0(\xi, \varphi(\xi));\tag{3.4.24}$$

2) рассматривая $\eta - \varphi(\xi) = 0$ как целевое многообразие, синтезируем такое управление u , которое переводит систему в полном фазовом пространстве на целевое многообразие за конечное время и ограничивает движение системы на этом многообразии.

На целевом многообразии движение n -мерной динамической системы (3.4.4) совпадает с движением $(n - m)$ -мерной системы (3.4.24). Количество управлений u_i совпадает с количеством (m) алгебраических соотношений $\eta_i - \varphi_i(\xi) = 0$, задающих $(n - m)$ -мерное целевое многообразие.

Предположим, что задача 1) решена и у нас есть стабилизирующее управление $\eta = \varphi(\xi)$ для первой подсистемы (3.4.23). Определив $s(\xi, \eta) = \eta - \varphi(\xi)$ и взяв производную s в силу системы (3.4.23), получим

$$\dot{s}(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) + g_1(\xi, \eta)u - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^\top f_0(\xi, \eta).\tag{3.4.25}$$

Определим новое управление

$$v = g_1(\xi, \eta)u.\tag{3.4.26}$$

Эта замена обратима в области D в силу предположения о невырожденности матрицы $g_1(\xi, \eta)$. Пусть

- s_i — i -я компонента s , $s_i = \eta_i - \varphi_i(\xi)$,

- $f_{1,i}(\xi, \eta)$ — i -я компонента вектор-функции $f_1(\xi, \eta)$,
- $\varphi_i(\xi)$ — i -я компонента вектор-функции $\varphi(\xi)$.

Для каждого $i = 1, \dots, m$ определим функцию Ляпунова

$$V_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}s_i^2.$$

Взяв производную \dot{V}_i в силу системы (3.4.23), получим с учетом (3.4.25) и (3.4.26)

$$\dot{V}_i(\xi, \eta) = s_i \left[f_{1,i}(\xi, \eta) + v_i - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right)^\top f_0(\xi, \eta) \right].$$

Распорядимся новым управлением v_i таким образом, чтобы за конечное время перевести состояние системы (ξ, η) на многообразие $s_i = 0$. Воспользуемся конструкцией, аналогичной (3.4.20), и определим управление v_i следующим образом:

$$v_i = -\beta_i(\xi, \eta) \operatorname{sign}(s_i). \quad (3.4.27)$$

Функция $\beta_i(\xi, \eta) > 0$ выбирается удовлетворяющей условию

$$\beta_i(\xi, \eta) = \left| f_{1,i}(\xi, \eta) - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right)^\top f_0(\xi, \eta) \right| + \varepsilon, \quad (3.4.28)$$

где ε — некоторая положительная константа. При этом

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\xi, \eta) &\leq s_i v_i + |s_i| \left| f_{1,i}(\xi, \eta) - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right)^\top f_0(\xi, \eta) \right| \leq \\ &\leq -|s_i| \varepsilon = -\sqrt{V_i(\xi, \eta)} \varepsilon. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует оценка $\frac{d}{dt} \sqrt{V_i(\xi, \eta)} \leq -\frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, начав движение с начальными данными ξ_0, η_0 , получим

$$\sqrt{V_i(\xi(t), \eta(t))} \leq \sqrt{V_i(\xi_0, \eta_0)} - \frac{\varepsilon}{2} t. \quad (3.4.29)$$

Из последней оценки следует, что величина $|s_i(t)|$ достигает нуля за конечное время, не превосходящее $T_i = 2|s_i(0)|/\varepsilon$. После того как величина $|s_i(t)|$ обратилась в нуль, она не может снова стать положительной в силу (3.4.29). Через время $T_0 = \max_{i=1, \dots, m} T_i$ все величины $s_i(t)$ обратятся в нуль. Однажды попав на многообразие $s(\xi, \eta) = \eta - \varphi(\xi) = 0$,

траектория системы (3.4.23) больше его не покинет. Система становится $(n - m)$ -мерной и движется в соответствии с дифференциальным уравнением (3.4.24). Исходное управление получают из v обратным преобразованием

$$u = g_1(\xi, \eta)^{-1}v.$$

Рассмотрим вопрос о том, каким образом учесть ограниченность ресурса управления. Предполагаем, что каждая компонента вектора управления u ограничена по абсолютной величине $|u_i| \leq \bar{u}_i$. Рассмотрим частный случай, упрощающий решение задачи. Предположим, что матрица $g_1(z)$ диагональна. Здесь и далее наряду с обозначением зависимости от двух векторных переменных (ξ, η) будем использовать обозначение (z) . Таким образом, $g_1(z) = \text{diag}(g_{1,1}(z), \dots, g_{1,m}(z))$. С учетом (3.4.27) получим, что должно выполняться условие

$$g_{1,i}(z)\beta(z) \leq \bar{u}_i.$$

Выберем $\beta(z) = \bar{u}_i/g_{1,i}(0)$. Поскольку $f_0(0) = 0$ и $f_1(0) = 0$, то в окрестности точки $z = 0$ условие (3.4.28) будет выполняться при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Но тогда это условие будет выполняться и в некоторой окрестности точки $z = 0$. Чтобы гарантировать выполнение условия (3.4.28) вдоль всей траектории, начинающейся в этой окрестности, необходимо построить область, инвариантную относительно траекторий замкнутой системы, вписанную в окрестность нуля, в которой выполняется (3.4.28). Построение такой области проиллюстрировано при рассмотрении примера в начале настоящего раздела.

3.4.3. Метод декомпозиции для стабилизации механических систем

В этом разделе, говоря о механической системе, мы имеем в виду системы, описываемые уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}, t) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4.30)$$

где через q_i и \dot{q}_i обозначены компоненты вектора обобщенных координат $q \in \mathbb{R}^n$ и скоростей $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ соответственно, а через T обозначена кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^\top A(q) \dot{q}.$$

Матрица $A(q)$ (или *матрица инерции*) с ограниченными коэффициентами является положительно определенной для всех значений q и, следовательно, справедливы соотношения

$$\lambda_{\min} x^T x \leq x^T A(q)x \leq \lambda_{\max} x^T x. \quad (3.4.31)$$

Через $Q_i(q, \dot{q}, t)$ обозначены обобщенные силы, обусловленные наличием как внутренних потенциальных сил, так и внешних воздействий, в частности сил сопротивления и т.д. Управления u_i характеризуют управляющие обобщенные силы или моменты. Относительно управлений u_i предполагается, что они удовлетворяют условиям существования решения дифференциального уравнения (3.4.30) и принимают ограниченные значения $|u_i| \leq \bar{u}_i$. Будем предполагать, что величины управляющих обобщенных сил u_i достаточно, чтобы преодолеть обобщенные силы $Q_i(q, \dot{q}, t)$ и обеспечить достижение цели управления. Для этого предполагаем, что выполнено условие

$$|Q_i(q, \dot{q}, t)| \leq \bar{u}_i - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4.32)$$

для всех значений q и \dot{q} , ε определяет «запас» управления, обеспечивающий достижение цели управления. Если в качестве примера рассмотреть манипуляционный робот, звенья которого соединены шарнирами, то его движение будет описываться уравнениями (3.4.30), если в качестве обобщенных координат выбрать межзвенные углы. Неравенства (3.4.32) означают, что величина управляющих моментов должна превосходить моменты сил веса, сил сопротивления, сил сухого трения и т.д. В противном случае у манипулятора могут существовать мертвые зоны, из которых его нельзя будет вывести никаким допустимым управлением, и многие движения нельзя будет реализовать.

Далее будут сформулирован *принцип декомпозиции движения механических систем* с помощью разрывных управлений, предложенный Е.С. Пятницким. В соответствии с общей идеей принципа декомпозиции рассматривается задача отыскания такого допустимого управления $u^*(q, \dot{q}, v)$, чтобы после переходного процесса конечной длительности и при надлежащих ограничениях на начальное рассогласование любое движение системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}, t) + u_i^*(q, \dot{q}, \dot{q}^*), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4.33)$$

удовлетворяло соотношениям

$$\dot{q}_i = v_i. \quad (3.4.34)$$

Другими словами, требуется найти такие допустимые обратные связи $u^*(q, \dot{q}, v)$, при использовании которых система (3.4.33) становится идеальным повторителем требуемых обобщенных скоростей v_i . При этом по каждой степени свободы происходит повторение заданной обобщенной скорости независимо от остальных степеней свободы. С этим требованием независимости степеней свободы и связано название метода. Выбором управления система переводится в режим декомпозиции, то есть режим полной компенсации перекрестных динамических связей в механической системе. В качестве меры отклонения движений системы (3.4.33) от движений в режиме декомпозиции (3.4.34) рассмотрим кинетическую энергию отклонений

$$G = \frac{1}{2}(\dot{q} - v)^\top A(q)(\dot{q} - v). \quad (3.4.35)$$

Справедливы соотношения (3.4.31) при $x = \dot{q} - v$. Поэтому из равенства $G = 0$ следует $\dot{q}_i = v_i$ для $i = 1, \dots, n$. Для того чтобы обеспечить выход системы на движение в режиме декомпозиции (3.4.34), управление нужно выбирать так, чтобы функция G убывала на всяком движении системы (3.4.33). Поэтому необходимо найти такие управления, при которых производная \dot{G} функции (3.4.35) в силу системы (3.4.33) будет отрицательно определенной, причем функция G должна обращаться в нуль за конечное время. Прежде всего запишем (3.4.35) в виде

$$G = T - v^\top A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}v^\top A(q)v.$$

Уравнения Лагранжа (3.4.33) записываются в виде

$$\frac{d}{dt}A(q)\dot{q} - F = Q + u^*, \quad F^\top = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^\top \frac{\partial A(q)}{\partial q_1} \dot{q}, \dots, \dot{q}^\top \frac{\partial A(q)}{\partial q_n} \dot{q}\right). \quad (3.4.36)$$

Производная \dot{G} определяется следующим образом. По теореме об изменении кинетической энергии механической системы имеем

$$\dot{T} = \dot{q}^\top (Q + u^*). \quad (3.4.37)$$

Последнее выражение имеет простой механический смысл. Умножив обе его части на величину dt получим, что приращение кинетической энергии $\dot{T}dt$ на малом отрезке времени равно работе сил $Q + u^*$ на малом перемещении $\dot{q}dt$. С учетом (3.4.37) получаем

$$\dot{G} = \dot{q}^\top (Q + u^*) - v^\top (Q + u^* + F) - \dot{v}^\top A(q)\dot{q} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^\top A(q)v.$$

Преобразуем последнее выражение, выполнив дифференцирование в последнем слагаемом и записав выражения для компонент вектора F из (3.4.36):

$$\begin{aligned} \dot{G} &= (\dot{q} - v)^\top (Q + u^*) - v^\top F - \dot{v}^\top A(q)\dot{q} + \dot{v}^\top A(q)v + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n v_j v_k \dot{q}_i \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} = (\dot{q} - v)^\top (Q + u^*) - (\dot{q} - v)^\top A(q)\dot{v} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} (\dot{q}_i v_j v_k - v_i \dot{q}_j \dot{q}_k). \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

В последнем выражении величина $\dot{q}_i v_j v_k - v_i \dot{q}_j \dot{q}_k$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\dot{q}_i v_j v_k - v_i \dot{q}_j \dot{q}_k = \\ &= v_i v_j (v_k - \dot{q}_k) + v_i v_k (v_j - \dot{q}_j) + v_j v_k (v_i - \dot{q}_i) - v_i (v_j - \dot{q}_j) (v_k - \dot{q}_k), \end{aligned}$$

с учетом которого (3.4.38) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{G} &= (\dot{q} - v)^\top (Q + u^*) - (\dot{q} - v)^\top A(q)\dot{v} - \sum_{i=1}^n v_i v^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} (\dot{q} - v) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i - v_i) v^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} v - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i (\dot{q} - v)^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} (\dot{q} - v). \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

Управления u_i^* , имеющие смысл обобщенных сил, каждая из которых действует на одну соответствующую степень свободы, выберем такими, чтобы величина \dot{G} принимала наименьшее возможное значение. Нам нужно добиться его отрицательности, что обеспечит убывание $G(t)$ на траекториях замкнутой системы. С учетом ограничений $|u_i^*| \leq \bar{u}_i$ из (3.4.39) получим

$$u_i^* = \bar{u}_i \operatorname{sign}(v_i - \dot{q}_i). \quad (3.4.40)$$

Необходимо заметить, что в силу (3.4.32) управляющие обобщенные силы преобладают над силами сопротивления, веса и т.д. Также нужно помнить, что при практической реализации разрывных обобщенных сил возникают трудности, связанные с чаттерингом и неучтенной динамикой приводов. При наличии чаттеринга рулевая машина, реализующая разрывную силу или разрывный момент, воздействует на механическую систему ударным образом, разрушая ее. Практическая

реализация разрывного управления для механической системы требует особого рассмотрения.

При анализе выражения (3.4.39) нам придется сделать предположения об ограниченности элементов матриц $A(q)$ и $\frac{\partial}{\partial q_i} A(q)$. Будем предполагать, что равномерно по q выполняются условия

$$|A_{jk}(q)| \leq a, \quad \left| \frac{\partial A_{jk}(q)}{\partial q_i} \right| \leq b, \quad (3.4.41)$$

где a и b — некоторые положительные числа. Кроме того, придется ограничить выбор функций $v_i(t)$, задающих желаемые скорости по степеням свободы, которые должны быть реализованы замкнутой системой после окончания переходного процесса, то есть после перехода в режим декомпозиции. Будем предполагать, что

$$|v_i(t)| \leq \alpha, \quad |\dot{v}_i(t)| \leq \beta, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4.42)$$

где положительные константы α и β подлежат выбору.

Из (3.4.32), (3.4.40) следует

$$(\dot{q} - v)^\top (Q + u^*) \leq - \sum_{i=1}^n |\dot{q}_i - v_i| \varepsilon.$$

Поэтому из (3.4.39) получаем

$$\begin{aligned} \dot{G} \leq & - \sum_{i=1}^n |\dot{q}_i - v_i| \varepsilon + |(\dot{q} - v)^\top A(q) \dot{v}| + \left| \sum_{i=1}^n v_i v^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} (\dot{q} - v) \right| + \\ & + \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i - v_i) v^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} v \right| + \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n v_i (\dot{q} - v)^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} (\dot{q} - v) \right|. \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

Оценим каждое слагаемое в последнем выражении начиная со второго.

Из (3.4.41) и (3.4.42) следует оценка

$$\begin{aligned} |(\dot{q} - v)^\top A(q) \dot{v}| &= \left| \sum_{j,k=1}^n (\dot{q}_j - v_j) A_{jk}(q) \dot{v}_k \right| \leq \\ &\leq a \sum_{j,k=1}^n |\dot{q}_j - v_j| |\dot{v}_k| \leq a\beta n \sum_{j=1}^n |\dot{q}_j - v_j|. \end{aligned}$$

Далее

$$\left| \sum_{i=1}^n v_i v^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} (\dot{q} - v) \right| \leq \sum_{i,j,k=1}^n |v_i| |v_j| \left| \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right| |\dot{q}_k - v_k| \leq bn^2 \alpha^2 \sum_{k=1}^n |\dot{q}_k - v_k|.$$

Аналогично оценивается четвертое слагаемое

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i - v_i) v^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} v \right| \leq \frac{1}{2} b n^2 \alpha^2 \sum_{i=1}^n |\dot{q}_i - v_i|.$$

Наконец

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n v_i (\dot{q} - v)^\top \frac{\partial A}{\partial q_i} (\dot{q} - v) \right| &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n |v_i| |\dot{q}_j - v_j| \left| \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right| |\dot{q}_k - v_k| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} b n \alpha \sum_{j,k=1}^n |\dot{q}_j - v_j| |\dot{q}_k - v_k| \leq \frac{1}{2} b n \alpha \left(\sum_{j=1}^n |\dot{q}_j - v_j| \right)^2. \end{aligned}$$

Используем полученные оценки в выражении (3.4.43) и получим

$$\dot{G} \leq -(\varepsilon - a\beta n - b n^2 \alpha^2 - 1/2 b n^2 \alpha^2) \sum_{i=1}^n |\dot{q}_i - v_i| - 1/2 b n \alpha \left(\sum_{j=1}^n |\dot{q}_j - v_j| \right)^2. \quad (3.4.44)$$

Напомним, что для n -мерного вектора x величина $|x|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ есть 1-норма, а $|x|_2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}$ — евклидова норма. Между двумя нормами одного и того же вектора выполняются соотношения

$$|x|_2 \leq |x|_1 \leq \sqrt{n} |x|_2.$$

Теперь, с учетом введенных обозначений, оценка (3.4.44) может быть переписана в виде

$$\dot{G} \leq -(\varepsilon - a\beta n - b n^2 \alpha^2 - 1/2 b n^2 \alpha^2) |\dot{q} - v|_2 + 1/2 b n^2 \alpha |\dot{q} - v|_2^2$$

и с учетом неравенств (3.4.31) и (3.4.35)

$$\dot{G} \leq -\left(\varepsilon - a\beta n - b n^2 \alpha^2 - \frac{b n^2 \alpha^2}{\sqrt{2} \lambda_{\max}} \right) \sqrt{G} + \frac{b n^2 \alpha}{\lambda_{\min}} G. \quad (3.4.45)$$

В последнем выражении потребуем, чтобы величина, стоящая перед выражением $\sqrt{G}(\dot{q} - v)$, была отрицательной. Для этого нужно, чтобы величина ε , определенная в (3.4.32), и константы a , b , α , β , λ_{\min} , λ_{\max} удовлетворяли неравенству

$$\varepsilon - a\beta n - b n^2 \alpha^2 - \frac{b n^2 \alpha^2}{\sqrt{2} \lambda_{\max}} > 0. \quad (3.4.46)$$

Обозначим $2\gamma_1 = \varepsilon - a\beta n - bn^2\alpha^2 - bn^2\alpha^2/(\sqrt{2}\lambda_{\max})$ и $2\gamma_2 = bn^2\alpha/\lambda_{\min}$. Напомним, что величина ε определяет в какой степени ресурс управления достаточен для преодоления внутренних потенциальных сил и сил сопротивления. Неравенство (3.4.46) говорит о том, что этот запас управления должен быть еще увеличен на величину γ_1 . Теперь оценка (3.4.45) переписывается в виде

$$\dot{G} \leq -2\gamma_1\sqrt{G} + 2\gamma_2G.$$

Если $G(0) = 0$ для начального момента времени $t = 0$, то в силу последнего неравенства $\dot{G}(0) \leq 0$, что означает $G(t) = 0$ для всех последующих значений t . Пусть $\sqrt{G(0)} > 0$. Тогда обе части последнего неравенства можно поделить на \sqrt{G} . В результате получим

$$\frac{d}{dt}\sqrt{G} \leq -\gamma_1 + \gamma_2\sqrt{G}. \quad (3.4.47)$$

При выполнении неравенства

$$\sqrt{G(0)} < (\gamma_1/\gamma_2)^2 \quad (3.4.48)$$

правая часть (3.4.47) отрицательна в момент $t = 0$ и функция $\sqrt{G(t)}$ монотонно убывает, в силу чего правая часть остается отрицательной при всех t . Более того, проинтегрировав дифференциальное неравенство (3.4.47), получим оценку

$$\sqrt{G(t)} \leq \gamma_1/\gamma_2 + (\sqrt{G(0)} - \gamma_1/\gamma_2)e^{\gamma_2 t},$$

из которой следует, что при выполнении неравенства (3.4.48) величина $G(t)$ убывает и достигает нулевого значения за время, не превосходящее

$$\tau = \gamma_2^{-1} [\ln \gamma_1 - \ln(\gamma_1 - \gamma_2\sqrt{G(0)})].$$

Итак, если ресурс управления \bar{u}_i по степеням свободы $i = 1, \dots, n$, начальные условия, функции $v, \dot{v}, A(q)$ и $\frac{\partial A}{\partial q_i}$ таковы, что выполнены условия (3.4.32), (3.4.48), (3.4.42) и (3.4.41), то по истечении конечного времени, не превосходящего τ , механическая система переходит в режим декомпозиции, характеризующийся условиями (3.4.34), и продолжает двигаться в этом режиме.

Движение системы в режиме декомпозиции определяется не столько динамическими свойствами системы, сколько навязано системе приложением интенсивного (величины (3.4.40) принимают большие значения $\pm \bar{u}_i$) и бесконечно быстро переключающегося управления. При

этом система движется, находясь в скользящем режиме. Термин «декомпозиция» выражает тот факт, что по истечении конечного времени механическая система начинает отслеживать требуемую скорость движения по каждой степени свободы независимо.

Если требованием, предъявляемым к поведению системы, является стабилизация заданного положения равновесия q^* , то в качестве желаемых скоростей v_i можно взять не конкретные функции времени, а функции обобщенных координат $v_i = \lambda(q_i^* - q_i)$. Здесь λ — константа, задающая желаемый темп стремления $q_i(t)$ к q_i^* . При этом в режиме декомпозиции движение по каждой степени свободы будет подчинено отдельному, не зависящему от других степеней свободы, дифференциальному уравнению

$$\dot{q}_i = \lambda(q_i^* - q_i),$$

имеющему решение $q_i(t) = q_i^* e^{-\lambda t}$.

Необходимо заметить, что при таком способе задания желаемых скоростей v_i , когда они не являются явными функциями времени, проверка условия (3.4.42) является нетривиальной задачей. Для обеспечения этого условия придется искать оценку инвариантной для замкнутой системы области, при нахождении в которой гарантируется выполнение этого условия. Построение такой инвариантной области делается в каждом конкретном случае с привлечением соображений, аналогичных использованным при разборе примера в начале этого раздела. Общие методы построения инвариантных областей для нелинейных систем здесь приводиться не будут.

3.4.4. Каскадные системы. Синтез управления методом бэкстеппинга

В этом разделе рассматриваются системы, структура которых позволяет применить рекурсивный метод синтеза управления. Такие системы могут быть получены последовательным соединением нескольких подсистем или другим более сложным способом, подразумевающим рекуррентность. Рассмотрим аффинную систему (3.4.4) со скалярным управлением u , $x \in \mathbb{R}^n$ и целью, состоящей в стабилизации нулевого положения равновесия. Будем предполагать, что в некоторой окрестности нуля $D \subseteq \mathbb{R}^n$ определена обратимая замена переменных,

приводящая систему (3.4.4) к виду

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= f_0(\eta) + g_0(\eta)\xi_1, \\
 \dot{\xi}_1 &= f_1(\eta, \xi_1) + g_1(\eta, \xi_1)\xi_2, \\
 \dot{\xi}_2 &= f_2(\eta, \xi_1, \xi_2) + g_2(\eta, \xi_1, \xi_2)\xi_3, \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{n-m-1} &= f_{n-m-1}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m-1}) + \\
 &\quad + g_{n-m-1}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m-1})\xi_{n-m}, \\
 \dot{\xi}_{n-m} &= f_{n-m}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m}) + \\
 &\quad + g_{n-m}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m})u,
 \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

где $\eta \in \mathbb{R}^m$, $m < n$ и ξ_i , $i = 1, \dots, n - m$ — скалярные переменные. Таким образом, в новых переменных система принимает блочный нижнетреугольный вид, начинающийся с неприводимого блока, отвечающего переменным η .

Частным случаем (3.4.49) является система, включающая несколько последовательно включенных интеграторов

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= f_0(\eta) + g_0(\eta)\xi_1, \\
 \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
 \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{n-m-1} &= \xi_{n-m}, \\
 \dot{\xi}_{n-m} &= u.
 \end{aligned} \tag{3.4.50}$$

На рис. 3.4.6 изображены блок-схемы систем (3.4.49) и (3.4.50).

Благодаря специальной рекурсивной структуре системы процесс синтеза управления можно начать со стабилизации первой неприводимой подсистемы в переменных η . Затем полученный закон управления рекурсивно наращивается таким образом, чтобы включить в рассмотрение новые переменные ξ_i одну за одной, пошагово двигаясь по блок-схеме полной системы в обратном направлении, поскольку вход u обычно изображен слева. Пошаговое движение в обратном направлении (stepping back) отражено в названии метода, предложенного П. Кокотовичем и названного «backstepping». В русскоязычной литературе существуют различные эквивалентные названия метода, но мы будем использовать термин *бэкстеппинг*.

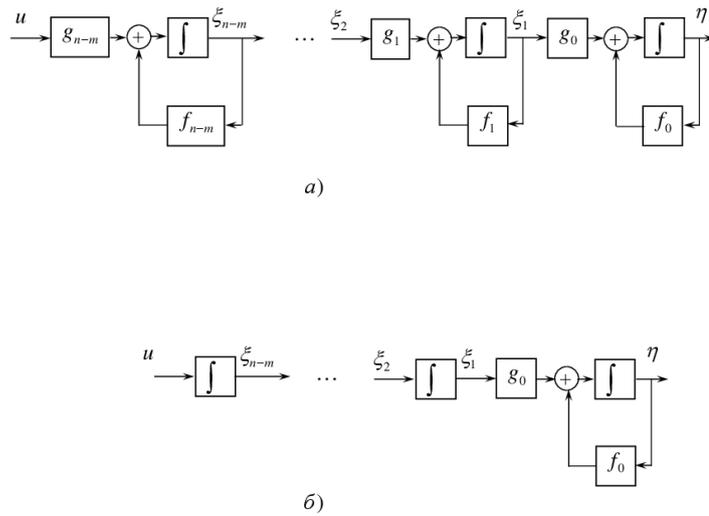


Рис. 3.4.6. Блок-схема системы (3.4.49) а) и (3.4.50) б).

Сначала рассматривается первая подсистема (3.4.49) в переменных η . Переменная ξ_1 рассматривается как фиктивное управление, действующее на первую подсистему и стабилизирующее ее состояние $\eta = 0$. В то же время реальное управление u непосредственно может влиять на состояние ξ_{n-m} , которое в свою очередь влияет как управление на состояние ξ_{n-m-1} и т.д. Метод бэкстешпинга обеспечивает стабилизацию переменной η , используя ξ_1 в качестве управления, затем обеспечивает управление переменной ξ_2 таким образом, чтобы она управляла переменной ξ_1 , стабилизирующей η и т.д. Процесс синтеза управления u , стабилизирующего положение равновесия $\eta = 0$, $\xi_1 = \dots = \xi_{n-m} = 0$, движется назад по блок-схеме рис. 3.4.6, начиная с подсистемы по переменным η .

Схематично метод бэкстешпинга работает следующим образом. Мы пронумеруем шаги метода в соответствии с номером рассматриваемой подсистемы, начиная с нулевого.

1. Рассмотрим первую подсистему (3.4.49) в переменных η , взяв ξ_1 в качестве управления. Предположим, что она может быть стабилизирована с помощью закона управления $\xi_1 = \varphi_0(\eta)$, удовлетворяющего условию $\varphi_0(0) = 0$, таким образом, что нулевое состояние системы

$$\dot{\eta} = f_0(\eta) + g_0(\eta)\varphi_0(\eta) \quad (3.4.51)$$

асимптотически устойчиво. Кроме того будем считать, что нам известна положительно определенная функция Ляпунова $V_0(\eta)$, удовлетворяющая условию

$$\dot{V}_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \eta} \dot{\eta} = W_0(\eta) < 0$$

в некоторой окрестности начала координат.

2. Рассмотрим вторую подсистему (3.4.49) относительно переменной ξ_1 , взяв ξ_2 в качестве управления, и синтезируем закон управления $\xi_2 = \varphi_1(\eta, \xi_1)$ удовлетворяющий условию $\varphi_1(0, 0) = 0$ таким образом, что система, состоящая из подсистем (3.4.51) и

$$\dot{\xi}_1 = f_1(\eta, \xi_1) + g_1(\eta, \xi_1)\xi_2$$

имеет асимптотически устойчивое нулевое состояние, причем переменная ξ_1 повторяет закон управления $\varphi_0(\eta)$, синтезированный на нулевом шаге. При синтезе закона управления $\xi_2 = \varphi_1(\eta, \xi_1)$ используем функцию Ляпунова

$$V_1(\eta, \xi_1) = V_0(\eta) + \frac{1}{2}[\xi_1 - \varphi_0(\eta)]^2.$$

Закон управления $\varphi_1(\eta, \xi_1)$ выбираем таким образом, чтобы добиться отрицательной определенности производной

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} \dot{\xi}_1 = W_1(\eta, \xi_1) < 0.$$

Процесс пошагового синтеза управления продолжается до шага с номером $n - m$, на котором синтезируется закон управления u .

- $n - m$. Наконец, для последней подсистемы (3.4.49) относительно переменной ξ_{n-m} управлением является u . Закон управления

$$u = \varphi_{n-m}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m})$$

удовлетворяет условию $\varphi_0(0, 0, \dots, 0) = 0$ и синтезируется таким образом, что вся система (3.4.49) имеет асимптотически устойчивое нулевое состояние, причем переменная ξ_{n-m} повторяет закон управления $\varphi_{n-m-1}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m-1})$, синтезированный на предыдущем шаге. При синтезе закона управления

$$u = \varphi_{n-m}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m})$$

используется функция Ляпунова

$$V_{n-m}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m}) = V_{n-m-1}(\eta, \dots, \xi_{n-m-1}) + \frac{1}{2}[\xi_{n-m-1} - \varphi_{n-m-1}(\eta, \dots, \xi_{n-m-1})]^2$$

и закон управления $\varphi_{n-m}(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-m})$ выбирается таким образом, чтобы добиться отрицательной определенности производной \dot{V}_{n-m} .

Для описания метода бэкстепинга достаточно описать один шаг индукции. Не ограничивая общности, это может быть шаг 1 из приведенного выше описания. Для простоты начнем с частного случая системы (3.4.50), содержащей один интегратор

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta) + g_0(\eta)\xi, \\ \dot{\xi} &= u. \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

Вектор-функции $f_0(\eta)$ и $g_0(\eta)$ предполагаются гладкими в окрестности начала координат в \mathbb{R}^n , и выполняется условие $f_0(0) = 0$, гарантирующее наличие положения равновесия $\eta = 0$ при $\xi = 0$. Скалярное управление u действует на систему (3.4.52) через один интегратор. Такой способ управления называется непрямым, или интегральным управлением. На практике такие системы возникают, когда в число исполнительных устройств входит рулевой механизм (в простейшем случае электромотор), скорость вращения вала которого зависит от поданного на него сигнала.

Предполагаем, что нам известен закон управления

$$\xi = \varphi_0(\eta), \quad \varphi_0(0) = 0,$$

полученный одним из ранее рассмотренных методов, например методом линеаризации нелинейной системы или методом линеаризации обратной связи. Кроме того, известна функция Ляпунова $V_0(\eta)$, удовлетворяющая условию

$$\dot{V}_0 = \left(\frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^T [f_0(\eta) + g_0(\eta)\varphi_0(\eta)] = W_0(\eta) < 0. \quad (3.4.53)$$

Добавим и вычтем слагаемое $g_0(\eta)\varphi_0(\eta)$ в правой части системы (3.4.52), получив эквивалентную систему

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta) + g_0(\eta)\varphi_0(\eta) + g_0(\eta)[\xi - \varphi_0(\eta)], \\ \dot{\xi} &= u,\end{aligned}$$

которую можно представить как последовательное соединение устойчивой системы $\dot{\eta} = f_0(\eta) + g_0(\eta)\varphi_0(\eta)$, возмущенной слагаемым $g_0(\eta)\varepsilon$, и интегратора. Возмущающая ошибка определяется равенством

$$\varepsilon = \xi - \varphi_0(\eta).$$

Таким образом приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta) + g_0(\eta)\varphi_0(\eta) + g_0(\eta)\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= u - \dot{\varphi}_0.\end{aligned}$$

Полная производная $\dot{\varphi}_0$, присутствующая в записи системы, вычисляется через известные функции следующим образом:

$$\dot{\varphi}_0 = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} \right)^\top [f_0(\eta) + g_0(\eta)\xi].$$

Выбрав новое управление в виде $v = u - (\partial \varphi_0 / \partial \eta)^\top [f_0(\eta) + g_0(\eta)\xi]$, приходим к записи системы в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta) + g_0(\eta)\varphi_0(\eta) + g_0(\eta)\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= v,\end{aligned} \tag{3.4.54}$$

отличие которого от исходной системы (3.4.52) состоит только в том, что новая система имеет асимптотически устойчивое состояние равновесия $\eta = 0$ при отсутствии управления v . Найдя управление v , мы легко вернемся к исходному управлению u . Построим функцию Ляпунова

$$V_1(\eta, \xi) = V_0(\eta) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = V_0(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \varphi_0(\eta)]^2.$$

Ее производная в силу системы (3.4.54) с учетом (3.4.53) равна

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \left(\frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^\top [f_0(\eta) + g_0(\eta)\varphi_0(\eta)] + \left(\frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^\top g_0(\eta)\varepsilon + \varepsilon v = \\ &= W_0(\eta) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial \eta} \right)^\top g_0(\eta)\varepsilon + \varepsilon v.\end{aligned} \tag{3.4.55}$$

Выберем закон управления v так, чтобы скомпенсировать второе слагаемое в (3.4.55). Взяв $v = -(\partial V_0/\partial \eta)^\top g_0(\eta) - \lambda \varepsilon$ при некотором положительном λ , получим

$$\dot{V}_1 = W_0(\eta) - \lambda \varepsilon^2 < 0.$$

Отрицательность производной \dot{V}_1 доказывает асимптотическую устойчивость положения равновесия $\eta = 0$, $\varepsilon = 0$ системы (3.4.54). Но поскольку функция $\varphi(\eta)$ принимает нулевое значение при $\eta = 0$, то производная функции Ляпунова V_1 в силу исходной системы (3.4.52) также будет отрицательна в некоторой окрестности положения равновесия $\eta = 0$, $\xi = 0$, что доказывает асимптотическую устойчивость нулевого положения этой системы, замкнутой законом управления

$$u = (\partial \varphi_0/\partial \eta)^\top [f_0(\eta) + g_0(\eta)\xi] - (\partial V_0/\partial \eta)^\top g_0(\eta) - \lambda[\xi - \varphi(\eta)]. \quad (3.4.56)$$

Описание синтеза управления системой (3.4.50) с одним интегратором позволяет распространяться по индукции на случай произвольного количества интеграторов ($n - m > 1$).

Выбор величины λ управляет скоростью, с которой в замкнутой системе будет убывать разница между переменной состояния ξ и законом управления $\varphi_0(\eta)$. Если заменить слагаемое $-\lambda \varepsilon$ в выражение для v на $-\lambda \text{sat}_v(\varepsilon)$ (см. (3.3.22) для определения функции насыщения), то при больших значениях λ получим поведение, сходное со скользящим режимом. При больших значениях λ скорость выхода на режим $\xi = \varphi_0(\eta)$ будет высокой, однако возникнет опасность «чаттеринга», вызванного неучтенной внутренней динамикой скрытых степеней свободы реальной системы, отличающейся от нашей модели.

В следующем примере мы разберем синтез системы управления методом бэкстеппинга для случая двух интеграторов.

Пример 3.4.5. Стабилизация верхнего положения маятника методом бэкстеппинга. Вернемся к примеру 3.2.7 раздела 3.2.4. Пусть нужно стабилизировать верхнее положение ($x = \pi$) маятника с помощью момента силы, которую развивает рулевая машинка. Будем считать, что уравнения, описывающие рулевую машинку, в упрощенном виде можно представить в виде двойного интегратора. Таким образом, мы предполагаем одну вращательную степень свободы внутри рулевой машинки, имеющей механическую или электромеханическую природу. Использование двойного интегратора при описании процессов, происходящих внутри рулевой машинки, означает, что мы пренебрегаем потенциальными силами и силами трения внутри машинки.

Обозначив через x отклонение маятника от вертикального положения и через v угловую скорость, запишем модель системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= b \sin x + \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= u.\end{aligned}\tag{3.4.57}$$

Синтез закона управления, стабилизирующего нулевое положение равновесия системы (3.4.57), разобьем на два шага в соответствии с описанной ранее схемой. На первом этапе рассмотрим задачу стабилизации системы с одним интегратором

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= b \sin x + \xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2,\end{aligned}$$

и управлением ξ_2 , для синтеза которого применим один шаг бэкстеппинга. Имеем $\eta = (x, v)^\top$. В качестве $\varphi_0(\eta)$ и $V_0(\eta)$ возьмем функции, полученные при рассмотрении примера 3.2.4, а именно

$$\varphi_0(\eta) = -\frac{1}{8}x - b \sin x - \frac{3}{4}v, \quad V_0(\eta) = \frac{1}{2}(x + v)^2 + \frac{1}{2}v^2.$$

При этом $W_0(\eta) = -\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}v^2$. Далее,

$$\begin{aligned}f_0 &= \begin{pmatrix} v \\ b \sin x \end{pmatrix}, \quad g_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial V_0}{\partial \eta} &= \begin{pmatrix} x + v \\ x + 2v \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} - b \cos x \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Для синтеза закона управления применим формулу (3.4.56). Получим после приведения подобных членов

$$\xi_2(\eta, \xi_1) = -\alpha x - \beta v - \gamma b \sin x - b v \cos x - \gamma \xi_1,$$

где

$$\alpha = \left(1 + \frac{\lambda_0}{8}\right), \quad \beta = \left(\frac{17}{8} + \frac{3\lambda_0}{4}\right), \quad \gamma = \left(\frac{3}{4} + \lambda_0\right)$$

и λ_0 — положительная константа, которая управляет скоростью убывания различия между переменной ξ_1 и законом управления $\varphi_0(\eta)$.

На втором шаге рассматриваем задачу стабилизации нулевого положения системы (3.4.57). Теперь имеем

$$\eta = (x, v, \xi_1)^\top, \quad \varphi_1(\eta) = -\alpha x - \beta v - \gamma b \sin x - bv \cos x - \gamma \xi_1,$$

$$V_1(\eta) = \frac{1}{2}(x+v)^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\left(\xi_1 + \frac{1}{8}x + b \sin x + \frac{3}{4}v\right)^2$$

и

$$f_1 = \begin{pmatrix} v \\ b \sin x + \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} x+v+\varepsilon(1/8+b \cos x) \\ x+2v+3/4\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} -\alpha - \gamma b \cos x + bv \sin x \\ -\beta - b \cos x \\ -\gamma \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \xi_1 + \frac{1}{8}x + b \sin x + \frac{3}{4}v$. Применение формулы (3.4.56) для синтеза закона управления дает

$$\begin{aligned} u(\eta, \xi_1, \xi_2) = & xv + v^2 + \varepsilon v(1/8 + b \cos x) + \\ & + (x + 2v + 3/4\varepsilon)(b \sin x + \xi_1) + \varepsilon \xi_2 - \varepsilon - \\ & - \lambda_1(\xi_2 + \alpha x + \beta v + \gamma b \sin x + bv \cos x + \gamma \xi_1). \end{aligned} \quad (3.4.58)$$

Для вывода подобных выражений и приведения подобных членов полезно использовать методы компьютерной алгебры. Более того, на практике полезно использовать такие инструменты, которые автоматически генерируют код на языке С, С++ или любом другом, на котором пишется программа, реализуемая в процессоре системы управления.

Из выражения (3.4.58) видно, что закон управления (3.4.58) явным образом зависит от всех компонент вектора состояния системы: x , v , ξ_1 , ξ_2 . ▼

Для завершения описания метода осталось описать один шаг индукции для случая систем общего вида (3.4.49). Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta) + g_0(\eta)\xi_1, \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(\eta, \xi_1) + g_1(\eta, \xi_1)u. \end{aligned} \quad (3.4.59)$$

В предположении о том, что $g_1(\eta, \xi_1) \neq 0$ в некоторой окрестности начала координат, можно сделать обратимую замену управляющей переменной $u_1 = g_1(\eta, \xi_1)u + f_1(\eta, \xi_1)$ и перейти во втором уравнении (3.4.59) к ранее рассмотренному случаю одного интегратора $\dot{\xi}_1 = u_1$. Это замечание завершает изложение метода бэкстеппинга для синтеза закона управления каскадными системами. Напомним, что для перехода к виду (3.4.59) может потребоваться замена переменных в системе (3.4.4) со скалярным управлением u .

3.5. Оптимальное управление

Поведение нелинейных и, возможно, нестационарных управляемых систем (3.2.2) и (3.2.4) можно оценивать, сравнивая их различные динамические свойства. В предыдущих разделах мы познакомились с устойчивостью движения и стабилизацией движения систем управления. В данном разделе мы рассмотрим вопросы поиска оптимального управления, ранее уже затронутые в разделе 1.5.1. Критерий оптимальности задается целевой функцией конечного числа переменных или целевым функционалом, определенным на всей траектории управляемой системы. Под оптимальностью понимается достижение наименьшего или наибольшего значения критерия. Для определенности будем рассматривать задачу минимизации, поскольку для максимизации достаточно изменить знак критерия. В задачах оптимального управления класс допустимых управлений обычно ограничен. Поведение нелинейных и, возможно, нестационарных управляемых систем (3.2.2) и (3.2.4) можно оценивать, сравнивая их различные динамические свойства. В предыдущих разделах мы познакомились с устойчивостью движения и стабилизацией движения систем управления. В данном разделе мы рассмотрим вопросы поиска оптимального управления. Критерий оптимальности задается целевой функцией конечного числа переменных или целевым функционалом, определенным на всей траектории управляемой системы. Под оптимальностью понимается достижение наименьшего или наибольшего значения критерия. Для определенности будем рассматривать задачу минимизации, поскольку для максимизации достаточно изменить знак критерия. В задачах оптимального управления класс допустимых управлений обычно ограничен.

Начнем изучение задач и методов оптимального управления со случая систем в дискретном времени, для которых разберем метод динамического программирования. Затем распространим метод динами-

ческого программирования на случай непрерывных систем (3.2.2) и (3.2.4). Наконец приведем формулировку принципа максимума для решения задач оптимального управления с ограничениями и разберем примеры применения рассмотренных методов.

3.5.1. Динамическое программирование

Динамическое программирование является одной из центральных идей теории оптимального управления. В свою очередь, динамическое программирование основано на принципе оптимальности, выражающем простую идею о том, что любая часть оптимальной траектории оптимальна. Предположим, что для некоторой задачи оптимального управления оптимальная траектория начинается в точке x_0 в момент времени $t = 0$ и заканчивается в точке x_1 в момент $t = T$ (как показано в левой части рис. 3.5.1) или во множестве X_1 (как показано в правой части рисунка). Предположим также, что траектория проходит через промежуточную точку \bar{x} в момент \bar{t} . Пусть целевой функционал аддитивен, то есть значение функционала на траектории, начинающейся в точке x_0 и заканчивающейся в точке x_1 , есть сумма значений на двух ее частях: первая начинается в точке x_0 и заканчивается в \bar{x} , вторая начинается в \bar{x} и заканчивается в конце траектории. Тогда оптимальная траектория, начинающаяся в точке \bar{x} в момент \bar{t} , должна быть продолжением первой траектории из точки \bar{x} , \bar{t} .

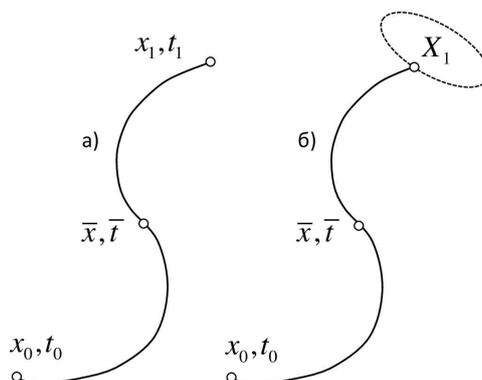


Рис. 3.5.1. Иллюстрация принципа оптимальности.

На принципе оптимальности основана вычислительная процедура динамического программирования. Рассмотрим несколько постановок

задачи оптимального управления.

Пример 3.5.1. Задача распределения ресурса. Первая формулировка. Пусть мы располагаем некоторым количеством ресурса x_0 , который тратится с интенсивностью $u(t) \geq 0$, что означает расходование $u(t)dt$ единиц ресурса за dt единиц времени, начинающихся в момент t . Кроме того, максимальная интенсивность расходования ресурса не превосходит \bar{u} . Таким образом получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -u(t)$$

и ограничения

$$\begin{aligned} 0 &\leq u(t) \leq \bar{u}, \\ x(t) &\geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где $T > 0$ — время окончания процесса управления. Оно может быть фиксированным или неявно определяться условием $x(T) = 0$. Последнее условие означает, что процесс завершается, когда ресурс исчерпан. В качестве целевого функционала, подлежащего максимизации, выберем суммарную пользу, полученную от расходования ресурса. Пусть $c(t)u(t)dt$ — выгода, полученная за время dt от расходования ресурса $u(t)dt$. Тогда максимизация выгоды означает требование

$$\int_0^T c(t)u(t)dt \rightarrow \max. \quad (3.5.1)$$

В частности, в качестве $c(t)$ можно взять $c(t) = c_0 e^{-\rho t}$, что означает, что польза от расходования ресурса убывает со временем. Если $c(t) = c_0 e^{\rho(t-T)}$, то польза от ранее потраченного ресурса меньше, чем от ресурса, потраченного в конце периода управления. Обобщением критерия (3.5.1) является

$$\int_0^T \varphi(t, u(t))dt \rightarrow \max,$$

где $\varphi(t, u(t))$ — функция полезности. Ясно, что таким образом определенный функционал качества удовлетворяет свойству аддитивности, гарантирующему сформулированный выше принцип оптимальности. ▼

Пример 3.5.2. Задача о распределении ресурса. Вторая формулировка. Пусть $x(t) \in \mathbb{R}$ — объем ресурса некоторой системы. Пусть $u(t) \in [0, 1]$ — доля ресурса, которая может расходоваться

на его наращивание. Таким образом, объем ресурса подчиняется дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = x(t)u(t). \quad (3.5.2)$$

Оставшийся ресурс $x(t)(1 - u(t))$ может использоваться для потребления. Задача состоит в максимизации суммарного потребления за время $T > 0$:

$$\int_0^T x(t)(1 - u(t))dt \rightarrow \max. \quad (3.5.3) \quad \blacktriangledown$$

Пример 3.5.3. Задача о достижении ракетой максимальной высоты. Вертикальное движение ракеты удовлетворяет уравнениям движения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= \frac{u - \alpha v^2}{m} - g, \\ \dot{m} &= -\beta u, \end{aligned}$$

где x — высота подъема ракеты, v — скорость подъема, α — коэффициент аэродинамического сопротивления, β — коэффициент расхода массы топлива, g — ускорение свободного падения, u — тяга двигателя. В начальный момент времени $t = 0$ высота и скорость равны нулю а масса ракеты, заправленной топливом, равна $m(0) = m_0$. В конечный момент времени T , который заранее не определен, выполняется условие $m(T) = m_1 < m_0$, где $m_0 - m_1$ — масса полного бака топлива. Целевой функцией, подлежащей максимизации, является $h(T)$. \blacktriangledown

Пример 3.5.4. Задача о перемещении тележки по горизонтальной оси за минимальное время (задача о максимальном быстродействии). В этом примере рассмотрим движение тела единичной массы вдоль оси x без трения из начального положения x_0 с начальной скоростью v_0 . Движение тела управляется силой u , которая может принимать значения из интервала

$$u \in [-1, 1]. \quad (3.5.4)$$

Необходимо построить закон управления, переводящий тело за минимальное время в начало координат и оставляющий его там с нулевой скоростью. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u. \quad (3.5.5)$$

Начальные условия $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Необходимо найти такой закон управления, удовлетворяющий ограничениям (3.5.5), при котором $x(\tau) = 0$, $v(\tau) = 0$ при минимально возможном τ . ▼

В приведенных формулировках задачи оптимального управления критерий оптимальности задавался интегральным функционалом или функцией от состояния в конечный момент T , который, в свою очередь, может быть фиксированным или переменным, заданным дополнительным условием, связывающим состояние системы с окончанием процесса управления. Кроме того, управление предполагается ограниченным, то есть предполагается $u(t) \in U$, где U — множество допустимых управлений. Разумным требованием является выпуклость этого множества. В противном случае трудно ожидать вычислительной эффективности численных методов решения задачи.

Рассмотрим следующую общую постановку задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} J(x(\cdot), u(\cdot)) &= \int_0^T \varphi(x(t), t, u(t)) dt + \Theta(x(T)) \rightarrow \min, \\ \dot{x} &= f(x, t, u), \quad x(0) = x_0, \quad \Psi(x(T)) = 0, \\ &u(t) \in U, \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

где $\varphi(x, t, u)$ и $\Theta(x)$ — скалярные функции переменных $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $t \in \mathbb{R}$. Символы зависимости от времени будут опущены там, где это не вызывает недоразумений. Граничные условия включают начальные условия и условия на правом конце. Функция $\Psi(x)$ может быть как скалярной, так и векторной. В случае, когда вектор-функция $\Psi(x)$ имеет размерность n_T меньшую размерности вектора x , условия на правом конце определяют некоторое многообразие размерности $(n - n_T)$, на которое оптимальная траектория должна попасть. Запись $J(x(\cdot), u(\cdot))$ означает, что этот функционал зависит от $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ как функций времени, заданных на всем интервале времени $[0, T]$. Без ограничения общности требуется минимизация критерия оптимальности.

Описание метода динамического программирования начнем со случая дискретного времени и отсутствия условий на правом конце. Разобьем отрезок $[0, T]$ на N равных частей с шагом $\Delta = T/N$ и обозначим $t_0 = 0$, $t_k = t_{k-1} + \Delta$, $k = 1, \dots, N-1$, $t_N = T$. Для обозначения зависимости от дискретного времени будем пользоваться нижним индексом k : $x_k = x(t_k)$, $u_k = u(t_k)$. Перейдем к дискретному времени в постановке задачи (3.5.6). Приблизив интеграл конечной суммой, а

дифференциальное уравнение — конечно-разностным уравнением, получим

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_k(x_k, u_k) + \Theta(x_N) \rightarrow \min, \quad (3.5.7)$$

$$x_{k+1} = F_k(x_k, u_k), \quad u_k \in U, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

где $\Phi_k(x_k, u_k) = \Delta\varphi(x_k, t_k, u_k)$, $F_k(x_k, u_k) = x_k + \Delta f(x_k, t_k, u_k)$. Траектория начинается в заданной точке x_0 .

Воспользуемся принципом оптимальности, сформулированным в начале раздела. Наряду с оптимальной траекторией $\{x_k^*\}$, $k = 1, \dots, N$, построим оптимальное управление в форме закона управления $u_k^*(x_k)$, $k = 0, \dots, N-1$, то есть зависимости управления от вектора состояния. Зависимость от переменной x_k означает, что для оптимального продолжения траектории, начинающейся из точки x_k в момент k , нужно приложить управление $u_k^*(x_k)$. Эта зависимость называется условно-оптимальным управлением. Построение условно-оптимального управления начнем с шага $N-1$. Для одношаговой траектории, начинающейся в момент времени t_{N-1} в произвольной начальной точке x_{N-1} , имеем следующую зависимость критерия оптимальности от единственного управления u_{N-1} , подлежащего выбору:

$$J_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) = \Phi_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + \Theta(x_N),$$

где в силу (3.5.7) $x_N = F_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1})$. Поэтому

$$J_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) = \Phi_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + \Theta(F_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1})).$$

Найдем в последнем выражении минимум по u_{N-1} :

$$J_{N-1}^*(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in U} J_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}). \quad (3.5.8)$$

Обозначим

$$J_N^*(x_N) = \Theta(x_N)$$

и перепишем выражение (3.5.8) в рекуррентном виде

$$J_{N-1}^*(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in U} \Phi_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + J_N^*(F_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1})). \quad (3.5.9)$$

Задача (3.5.9) представляет собой задачу конечномерного нелинейного программирования относительно переменной u_{N-1} при ограничениях

$u_{N-1} \in U$. Она должна быть решена при каждом значении вектора x_{N-1} . Значение управления, на котором достигается минимум в (3.5.9), есть условно-оптимальное управление $u_{N-1}^*(x_{N-1})$. Одновременно с $u_{N-1}^*(x_{N-1})$ получена функция $J_{N-1}^*(x_{N-1})$, определенная выражением (3.5.9).

Мы знаем оптимальную одношаговую траекторию, начинающуюся из любой точки x_{N-1} . Теперь найдем оптимальную двухшаговую траекторию, начинающуюся из точки x_{N-2} в момент времени t_{N-2} . Для этого найдем управления u_{N-2} и u_{N-1} , доставляющие минимум в задаче

$$J_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}, u_{N-1}) = \Phi_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + \Phi_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + \Theta(x_N),$$

при условиях $x_{k+1} = F_k(x_k, u_k)$, $u_k \in U$, $k = N-2, N-1$. Имеем

$$\begin{aligned} J_{N-2}^*(x_{N-2}) &= \min_{u_{N-2} \in U, u_{N-1} \in U} (\Phi_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + \\ &\quad + \Phi_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + J_N^*(x_N)) = \\ &= \min_{u_{N-2} \in U} (\Phi_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + \\ &\quad + \min_{u_{N-1} \in U} (\Phi_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) + J_N^*(x_N))) = \\ &= \min_{u_{N-2} \in U} (\Phi_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + J_{N-1}^*(x_{N-1})) = \\ &= \min_{u_{N-2} \in U} (\Phi_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}) + J_{N-1}^*(F_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}))). \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Функция $J_{N-1}^*(x_{N-1})$ определена выражением (3.5.9). Задача (3.5.10) есть задача конечномерного нелинейного программирования относительно переменной u_{N-2} при ограничениях $u_{N-2} \in U$. Она должна быть решена при каждом значении вектора x_{N-2} . Значение управления, на котором достигается минимум в (3.5.10), есть условно-оптимальное управление $u_{N-2}^*(x_{N-2})$. Одновременно с $u_{N-2}^*(x_{N-2})$ получена функция $J_{N-2}^*(x_{N-2})$, определенная выражением (3.5.10). Продолжая по индукции, получим рекуррентное соотношение

$$J_k^*(x_k) = \min_{u_k \in U} \Phi_k(x_k, u_k) + J_{k+1}^*(F_k(x_k, u_k)), \quad (3.5.11)$$

позволяющее определить по индукции условно-оптимальное управление $u_k^*(x_k)$, зависящее от текущего состояния x_k , и функцию $J_k^*(x_k)$, называемую *функцией Р. Беллмана*. Это рекуррентное соотношение выражает *принцип оптимальности*.

Мы определили последовательность функций Беллмана и условно-оптимальных управлений в процессе обратной прогонки по времени k начиная от $k = N - 1$ до $k = 0$. На шаге $k = 0$ задача (3.5.11) решается для единственного значения x_0 , которое есть начальное условие из постановки задачи. Теперь, когда нам известно выражение для u_0^* , получим первую точку оптимальной траектории $x_1^* = F_0(x_0, u_0^*)$. Применяя это соотношение по индукции, получим прямую прогонку по времени

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_k^*(x_k^*), \\ x_{k+1}^* &= F_k(x_k^*, u_k^*), \quad k = 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Описанный выше алгоритм решения дискретной задачи оптимального управления предполагает решение задачи нелинейного программирования (3.5.11) для множества последовательных моментов времени и множества значений переменной состояния x_k . Эти значения могут быть заданы на конечномерной сетке, что предполагает весьма трудоемкие вычисления, экспоненциально зависящие от размерности n . Действительно, если по каждой компоненте вектора x_k конечная сетка имеет M узлов, то в случае n компонент n -мерная сетка имеет M^n узлов. Эта экспоненциальная зависимость трудоемкости решения задачи оптимального управления методом динамического программирования названа Р. Беллманом *проклятьем размерности*. Однако в ряде частных случаев задачи оптимизации (3.5.11) решаются аналитически.

3.5.2. Линейно-квадратичная задача оптимального управления в дискретном времени

С линейно-квадратичными задачами мы уже встречались в разделах 1.5.2, 2.6.2. Если функционал качества квадратично зависит от переменных состояния и управления, а уравнения динамики линейны, то задача (3.5.7) примет вид

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^\top Q_k x_k + u_k^\top R_k u_k) + \frac{1}{2} x_N^\top Q_N x_N \rightarrow \min, \\ x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k, \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

где симметричные матрицы Q_k , $k = 0, \dots, N$, неотрицательно определены, а матрицы R_k , $k = 0, \dots, N - 1$, положительно определены. Ограничения на управления не накладываются. Применим рекуррентную формулу (3.5.11) для построения функций Беллмана. Начнем с

функции

$$J_N^*(x_N) = \frac{1}{2}x_N^\top Q_N x_N$$

и перейдем к построению $J_{N-1}^*(x_{N-1})$. Имеем

$$J_{N-1}^*(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in U} \left[\frac{1}{2}(x_{N-1}^\top Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^\top R_{N-1} u_{N-1}) + J_N^*(A_{N-1} x_{N-1} + B_{N-1} u_{N-1}) \right]. \quad (3.5.13)$$

Выражение, подлежащее минимизации в (3.5.13), после раскрытия скобок и приведения подобных членов имеет вид

$$L(x_{N-1}, u_{N-1}) = \frac{1}{2} \left[x_{N-1}^\top (Q_{N-1} + A_{N-1}^\top Q_N A_{N-1}) x_{N-1} + x_{N-1}^\top A_{N-1}^\top Q_N B_{N-1} u_{N-1} + \frac{1}{2} \left[u_{N-1}^\top (R_{N-1} + B_{N-1}^\top Q_N B_{N-1}) u_{N-1} \right] \right]. \quad (3.5.14)$$

Для квадратичных функций переменной $u \in \mathbb{R}^m$ вида

$$q(u) = 1/2 u^\top Q u + l^\top u + c,$$

где Q — симметричная матрица размера m на m , а l — вектор $l \in \mathbb{R}^m$, имеют место следующие правила дифференцирования:

$$\frac{\partial q(u)}{\partial u} = Qu + l, \quad \frac{\partial^2 q(u)}{\partial u^2} = Q,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial u_{N-1}} &= (R_{N-1} + B_{N-1}^\top Q_N B_{N-1}) u_{N-1} + \\ &\quad + x_{N-1}^\top A_{N-1}^\top Q_N B_{N-1}, \\ \frac{\partial^2 L(x_{N-1}, u_{N-1})}{\partial u_{N-1}^2} &= R_{N-1} + B_{N-1}^\top Q_N B_{N-1}. \end{aligned}$$

Последнее выражение для матрицы вторых частных производных минимизируемой функции содержит сумму двух матриц. Первая из них положительно определена в силу сделанного предположения. Вторая

матрица неотрицательно определена в силу предположения. Следовательно их сумма является положительно определенной и квадратичная функция имеет строгий глобальный минимум в точке, получаемой приравнением к нулю $\partial L(x_{N-1}, u_{N-1})/\partial_{N-1}$. Имеем

$$u_{N-1}^*(x_{N-1}) = -(R_{N-1} + B_{N-1}^\top Q_N B_{N-1})^{-1} B_{N-1}^\top Q_N A_{N-1} x_{N-1}.$$

Обозначим

$$K_{N-1} = (R_{N-1} + B_{N-1}^\top Q_N B_{N-1})^{-1} B_{N-1}^\top Q_N A_{N-1}$$

и подставим $u_{N-1}^*(x_{N-1}) = -K_{N-1} x_{N-1}$ в выражение (3.5.14). Получим следующее выражение для (3.5.13)

$$J_{N-1}^*(x_{N-1}) = \frac{1}{2} x_{N-1}^\top \left[Q_{N-1} + K_{N-1}^\top R_{N-1} K_{N-1} + (A_{N-1} - B_{N-1} K_{N-1})^\top Q_N (A_{N-1} - B_{N-1} K_{N-1}) \right] x_{N-1}. \quad (3.5.15)$$

Далее, обозначив в выражении (3.5.15)

$$P_{N-1} = Q_{N-1} + K_{N-1}^\top R_{N-1} K_{N-1} + (A_{N-1} - B_{N-1} K_{N-1})^\top Q_N (A_{N-1} - B_{N-1} K_{N-1}),$$

получим

$$J_{N-1}^*(x_{N-1}) = \frac{1}{2} x_{N-1}^\top P_{N-1} x_{N-1}.$$

Чтобы получить удобную форму для функции $J_N^*(x_N)$ и матричного коэффициента усиления K_{N-1} (коэффициента обратной связи оптимального контроллера), обозначим

$$P_N = Q_N.$$

Тогда получим выражения

$$J_N^*(x_N) = \frac{1}{2} x_N^\top P_N x_N, \\ K_{N-1} = (R_{N-1} + B_{N-1}^\top P_N B_{N-1})^{-1} B_{N-1}^\top P_N A_{N-1}.$$

Продолжим по индукции, считая, что на шаге k выражение для условно-оптимального управления имеет вид $u_k^*(x_k) = -K_k x_k$ и

$$J_k^*(x_k) = \frac{1}{2} x_k^\top P_k x_k, \\ P_k = Q_k + K_k^\top R_k K_k + (A_k - B_k K_k)^\top P_{k+1} (A_k - B_k K_k), \\ K_k = (R_k + B_k^\top P_{k+1} B_k)^{-1} B_k^\top P_{k+1} A_k.$$

Будем двигаться в обратном времени от k к $k-1$. Рассмотрим рекуррентное выражение

$$J_{k-1}^*(x_{k-1}) = \min_{u_{k-1} \in U} \left[\frac{1}{2} (x_{k-1}^\top Q_{k-1} x_{k-1} + u_{k-1}^\top R_{k-1} u_{k-1}) + J_k^*(A_{k-1} x_{k-1} + B_{k-1} u_{k-1}) \right] \quad (3.5.16)$$

и найдем точку u_{k-1} , на которой достигается минимум. Продифференцировав выражение под знаком минимума и приравняв производные нулю, получим

$$(R_{k-1} + B_{k-1}^\top P_k B_{k-1}) u_{k-1} + x_{k-1}^\top A_{k-1}^\top P_k B_{k-1} = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} u_{k-1}^*(x_{k-1}) &= \\ &= -(R_{k-1} + B_{k-1}^\top P_k B_{k-1})^{-1} B_{k-1}^\top P_k A_{k-1} x_{k-1} = \\ &= -K_{k-1} x_{k-1}. \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в (3.5.16) дает

$$J_{k-1}^*(x_{k-1}) = \frac{1}{2} (x_{k-1}^\top P_{k-1} x_{k-1}),$$

где

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= Q_{k-1} + K_{k-1}^\top R_{k-1} K_{k-1} + \\ &+ (A_{k-1} - B_{k-1} K_{k-1})^\top P_k (A_{k-1} - B_{k-1} K_{k-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, на шаге k справедливы такие же рекуррентные соотношения для функции Беллмана и условно-оптимального управления, что и на шаге N . Суммируя, получим следующий рекуррентный алгоритм решения задачи оптимального управления (3.5.12).

1. Полагаем $P_N = Q_N$.

2. Для $k = N, \dots, 1$ вычисляем

$$K_{k-1} = (R_{k-1} + B_{k-1}^\top P_k B_{k-1})^{-1} B_{k-1}^\top P_k A_{k-1} \quad (3.5.17)$$

и

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= Q_{k-1} + K_{k-1}^\top R_{k-1} K_{k-1} + \\ &+ (A_{k-1} - B_{k-1} K_{k-1})^\top P_k (A_{k-1} - B_{k-1} K_{k-1}). \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Рекуррентное соотношение (3.5.18), связывающее матрицы квадратичных функций Беллмана, называется *уравнением Риккати*. Матрицы K_k , P_k вычисляются в результате обратной прогонки по времени. После этого условно-оптимальные управления и точки оптимальной траектории получаются прямой прогонкой

$$\begin{aligned} u_k^* &= -K_k x_k^*, \\ x_{k+1}^* &= A_k x_k^* + B_k u_k^*, \quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

Заметим, что рекуррентные уравнения (3.5.17) и (3.5.18) порождают последовательность матриц, зависящих от времени k даже в том случае, когда матрицы Q_k , R_k , A_k , B_k постоянны и от k не зависят. Матрицы K_k и P_k не зависят от векторов состояния системы и могут быть вычислены заранее. Предположение о положительной определенности R_k может быть ослаблено и заменено на неотрицательность при условии, что матрицы $R_{k-1} + B_{k-1}^\top P_k B_{k-1}$ будут положительно определены.

Предположим, что матрицы $Q_k = Q$, $R_k = R$, $A_k = A$, $B_k = B$ постоянны и уравнения (3.5.17) и (3.5.18) имеют стационарное решение, удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{aligned} K^* &= (R + B^\top P^* B)^{-1} B^\top P^* A, \\ P^* &= Q + (K^*)^\top R K^* + (A - B K^*)^\top P^* (A - B K^*), \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

называемым *алгебраическим уравнением Риккати*. Объединив выражения для K^* и P^* в одно, получим

$$P^* = Q + A^\top [P^* - P^* B (R + B^\top P^* B)^{-1} B^\top P^*] A.$$

Полезно сравнить это уравнение с (1.5.16). Вычислив это решение заранее, можно им воспользоваться в выражении (3.5.19) для получения квазиоптимального управления при условии, что N большое по сравнению со временем сходимости K_{k-1} к стационарному значению K^* . Алгебраическое уравнение Риккати может иметь множество решений. Нас интересует решение, получаемое численной прогонкой до сходимости уравнений (3.5.17), (3.5.18). Предположим, что численная прогонка дала положительно определенное решение уравнения (3.5.20).

Матрица системы $x_{k+1} = A x_k + B u_k$, замкнутой стационарной обратной связью $u = -K^* x$, принимает вид

$$A_c = A - B K^*. \quad (3.5.21)$$

Нас интересует вопрос об устойчивости замкнутой системы

$$x_{k+1} = A_c x_k.$$

Алгебраическое уравнение Риккати принимает вид

$$P^* = Q + (K^*)^\top R K^* + A_c^\top P^* A_c,$$

откуда в силу положительной определенности Q следует

$$P^* \succ A_c^\top P^* A_c.$$

Если в качестве функции Ляпунова взять $1/2 x^\top P^* x$, то в силу положительной определенности P^* последнее неравенство гарантирует устойчивость нулевого решения системы (3.5.21).

Пример 3.5.5. Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления. Рассмотрим одномерный пример с $A = 1$, $B = 0,5$, $Q_N = 1$, $Q = 1$, $R = 1$. Прогон в обратном времени при $N = 20$ дает коэффициенты обратной связи K_{19}, \dots, K_0 , показанные на рис. 3.5.2. Прямой прогон при начальном условии $x_0 = 1$ дает оптималь-

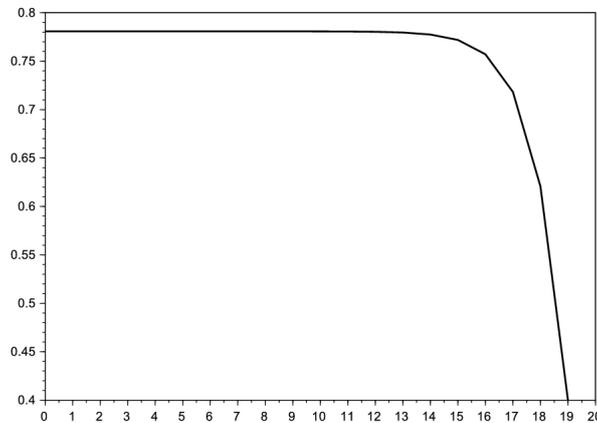


Рис. 3.5.2. Коэффициент обратной связи K_k , $k = 0, \dots, N - 1$.

ную траекторию x_k^* , показанную на рис. 3.5.3. При этом оптимальное значение критерия равно $J^* = 1,281$. Использование стационарного значения коэффициента обратной связи $K^* = 0,781$ дает то же значение критерия оптимальности. Это связано с быстрым стремлением

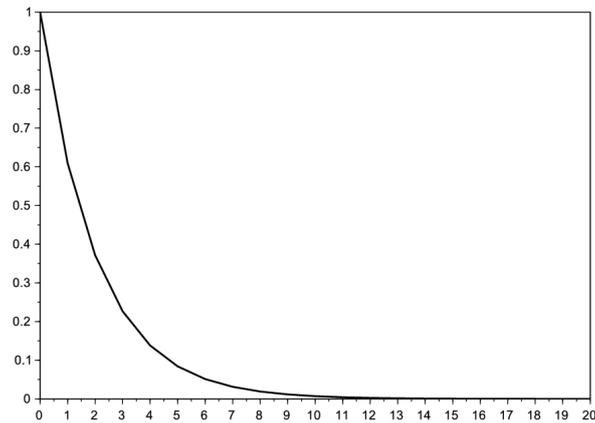


Рис. 3.5.3. Значения x_k^* , $k = 0, \dots, N$ на оптимальной траектории.

к нулю x_k^* . Действительно, на том участке траектории, на котором значение оптимального K_k существенно отличается от стационарного значения K^* то есть при $k > 14$, значение x_k^* мало отличается от нуля, и поэтому u_k^* также практически равно нулю.

Если использовать стационарный коэффициент обратной связи, отличный от K^* , то критерий оптимальности должен принимать большие значения. Действительно, при $K = 1,2K^*$ получаем

$$J = 1,309 > J^*$$

и при $K = 0,8K^*$ получаем $J = 1,319 > J^*$. ▼

3.5.3. Непрерывные системы. Уравнения в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана

Рассмотрим задачу (3.5.6). Попытаемся воспользоваться подходом, развитым при решении задачи (3.5.7), устремив величину Δ к нулю. Для того чтобы воспользоваться принципом оптимальности, наряду с критерием оптимальности $J(x(\cdot), u(\cdot))$, заданным на отрезке $[0, T]$ и зависящим от функции $x(t)$, удовлетворяющей условию $x(0) = x_0$,

рассмотрим функционал

$$J(y, t, x(\cdot), u(\cdot)) = \int_t^T \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \Theta(x(T)),$$

заданный на отрезке $[t, T]$. Дополнительная зависимость от y и t в записи функционала означает, что функция $x(\tau)$ удовлетворяет начальному условию $x(t) = y$. Таким образом, вся траектория x , начинающаяся в момент времени 0 в точке x_0 и заканчивающаяся в момент T , разбивается на две части. Первая часть начинается в момент 0 в точке x_0 и заканчивается в момент t в точке y , а вторая часть начинается в момент t в точке y и заканчивается в момент T в произвольной точке. Момент t и точка y будут варьироваться. Получим непрерывный аналог для рекуррентных уравнений для функций Беллмана (3.5.11). Для этого рассмотрим задачу

$$J^*(y, t) = \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t, T]}} J(y, t, x(\cdot), u(\cdot)),$$

где функция $x(\tau)$ подчинена дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = f(x(\tau), \tau, u(\tau))$$

при начальном условии $x(t) = y$ и конечном условии $\Psi(x(T)) = 0$. Функция $J^*(y, t)$ есть функция Беллмана. Имеем

$$\begin{aligned} J(y, t)^* &= \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t, T]}} \left\{ \int_t^T \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \Theta(x(T)) \right\} = \\ &= \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t, T]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \int_{t+\Delta}^T \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \Theta(x(T)) \right\} = \\ &= \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t, t+\Delta]}} \left\{ \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t+\Delta, T]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{t+\Delta}^T \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \Theta(x(T)) \right\} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t, t+\Delta]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t+\Delta, T]}} \left\{ \int_{t+\Delta}^T \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \Theta(x(T)) \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что второй минимум в последнем выражении есть не что иное как $J^*v(x_u(t+\Delta), t+\Delta)$, где $x_u(t+\Delta)$ — значение в момент $t+\Delta$ решения дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x(\tau), \tau, u(\tau))$ при начальном условии $x(t) = y$ и управлении $u(\tau)$, заданном на интервале $\tau \in [t, t+\Delta]$. Окончательно получаем

$$J^*(y, t) = \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t, t+\Delta]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + J^*(x_u(t+\Delta), t+\Delta) \right\}. \quad (3.5.22)$$

Чтобы связать выражения $J^*(x_u(t+\Delta), t+\Delta)$ и $J^*(x_u(t), t)$, нужно сделать предположение о непрерывной дифференцируемости функции $J^*(y, t)$ по обоим аргументам и воспользоваться разложением этой функции в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
J^*(x_u(t+\Delta), t+\Delta) &= \\
&= J^*(y, t) + \frac{\partial J^*(y, t)}{\partial t} \Delta + \left(\frac{\partial J^*(y, t)}{\partial y} \right)^\top (x_u(t+\Delta) - y) + o(\Delta),
\end{aligned}$$

где $\frac{\partial J^*(y, t)}{\partial y}$ — вектор частных производных по y , $\frac{\partial J^*(y, t)}{\partial t}$ — частная производная по t , $o(\Delta)/\Delta \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$. Подставив последнее выражение в (3.5.22), получим

$$\begin{aligned}
J^*(y, t) &= \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t, t+\Delta]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \right. \\
&\quad \left. + J^*(y, t) + \frac{\partial J^*(y, t)}{\partial t} \Delta + \left(\frac{\partial J^*(y, t)}{\partial y} \right)^\top (x_u(t+\Delta) - y) \right\}.
\end{aligned}$$

Сократив на величину $J^*(y, t)$, не зависящую от $u(\tau)$, окончательно получим

$$0 = \min_{\substack{u(\tau) \in U, \\ \tau \in [t, t+\Delta]}} \left\{ \int_t^{t+\Delta} \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau + \frac{\partial J^*(y, t)}{\partial t} \Delta + \left(\frac{\partial J^*(y, t)}{\partial y} \right)^\top (x_u(t+\Delta) - y) \right\}.$$

Принимая во внимание что $x_u(t+\Delta) = y + f(y, t, u(t))\Delta + o(\Delta)$ и $\int_t^{t+\Delta} \varphi(x(\tau), \tau, u(\tau)) d\tau = \varphi(y, t, u(t))\Delta + o(\Delta)$ и устремляя Δ к нулю, получаем

$$\min_{u(t) \in U} \left\{ \varphi(y, t, u(t)) + \frac{\partial J^*(y, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial J^*(y, t)}{\partial y} \right)^\top f(y, t, u(t)) \right\} = 0. \quad (3.5.23)$$

Последнее равенство определяет дифференциальное уравнение в частных производных. Оно должно быть решено в обратном времени с граничным условием

$$J^*(x(T), T) = \Theta(x(T)), \quad \Psi(x(T)) = 0.$$

Это уравнение в частных производных, содержащее операцию взятия максимума, называется *уравнением Гамильтона – Якоби – Беллмана*. Введем в рассмотрение функцию Гамильтона или гамильтониан следующим выражением

$$H(x, u, t, S) = \varphi(y, t, u(t)) + \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^\top f(x, t, u(t)), \quad (3.5.24)$$

зависящим от x, u, t и функции двух переменных $S(x, t)$. Теперь можно переписать уравнение (3.5.23), которому должна удовлетворять функция Беллмана, в виде

$$-\frac{\partial J^*(y, t)}{\partial t} = \min_{u(t) \in U} \{ H(y, u, t, J^*(y, t)) \}. \quad (3.5.25)$$

В общем виде эта задача решается только численно, однако существуют частные случаи, в которых задача (3.5.25) допускает аналитическое решение. Одним из таких случаев является линейно-квадратичная задача оптимального управления.

3.5.4. Линейно-квадратичная задача оптимального управления в непрерывном времени

Ранее, в разделе 1.5.2, эта задача уже была рассмотрена. В этом разделе мы проиллюстрируем применение метода функций Беллмана и получим закон оптимального управления.

Рассмотрим задачу (3.5.6) в случае, когда время T фиксировано, дифференциальные уравнения линейны, ограничения на управление и условие на правом конце отсутствуют и критерий оптимальности квадратичен. Приходим к следующей задаче:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^\top(t)Q(t)x(t) + u^\top(t)R(t)u(t))dt + \frac{1}{2} x^\top(T)Q_T x(T) \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0,$$
(3.5.26)

где симметричные матрицы $Q(t)$ и Q_T неотрицательно определены, а матрицы $R(t)$ положительно определены при любом t . В дальнейшем будем опускать символ зависимости от времени (t) всегда, когда это не вызывает недоразумений, и будем его использовать, когда зависимость от времени необходимо подчеркивать, например когда будем брать производные. Применим уравнение (3.5.25) для определения функций Беллмана. Сначала выпишем гамильтониан (3.5.24):

$$H(x, u, t, J^*) = \frac{1}{2} [x^\top Q x + u^\top R u] + \left(\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right)^\top (Ax + Bu). \quad (3.5.27)$$

В соответствии с (3.5.25) найдем значение u^* , на котором достигается минимум гамильтониана. Для этого выпишем вектор первых частных производных по u и приравняем его нулю. Имеем

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^\top \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$u^*(x, t) = -R^{-1} B^\top \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x}. \quad (3.5.28)$$

Поскольку в соответствии с предположением $R(t) \succ 0$, то эта матрица обратима и, более того, минимум достигается в единственной точке, определяемой (3.5.28). Подставим это выражение в (3.5.27) и получим

$$\begin{aligned} H(x, u^*, t, J^*) &= \frac{1}{2} \left[x^\top Q x + \left(\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right)^\top B R^{-1} B^\top \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right] + \\ &\quad + \left(\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right)^\top \left[Ax - B R^{-1} B^\top \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[x^\top Q x - \left(\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right)^\top B R^{-1} B^\top \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right] + x^\top A^\top \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства уравнение в частных производных (3.5.25) примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} &= \\ &= \frac{1}{2} \left[x^\top Q x - \left(\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right)^\top B R^{-1} B^\top \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \right] + x^\top A^\top \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

при граничных условиях

$$J^*(x(T), T) = \frac{1}{2} x^\top(T) Q_T x(T). \quad (3.5.30)$$

Условия (3.5.30) означают, что функция Беллмана $J^*(x, t)$ должна быть квадратичной формой при $t = T$. Уравнения (3.5.29) интегрируются в обратном времени от $t = T$ до $t = 0$. При каждом значении t имеем функцию $J^*(x, t)$ относительно переменной x . Посмотрим, какой вид имеет эта функция при произвольном t . Начав с момента T сделаем малое приращение Δ в обратном времени и рассмотрим момент $t = T - \Delta$. Заменим частную производную $\partial J^*(y, t)/\partial t$ в (3.5.29) на $[J^*(x, T) - J^*(x, T - \Delta)]/\Delta$. С учетом

$$\frac{\partial J^*(x, T)}{\partial x} = Q_T x \quad \text{при} \quad x = x(T)$$

из (3.5.29) получим

$$J^*(x, T - \Delta) = J^*(x, T) + \frac{\Delta}{2} x^\top [Q - Q_T B R^{-1} B^\top Q_T] x + \Delta x^\top A^\top Q_T x.$$

Но последнее равенство определяет квадратичную форму. Таким образом, сделав малое приращение по переменной T , получаем приближенное решение (3.5.29) в виде квадратичной формы $J^*(x, T - \Delta)$. Устремив Δ к нулю, получим, что решение уравнения (3.5.29) при граничном условии (3.5.30) будет квадратичной формой при всех t . Обозначим через $P(t) = P(t)^\top$ матрицу этой квадратичной формы. Тогда

$$\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} x^\top \dot{P} x,$$

и

$$\frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} = P(t)x.$$

После подстановки этих выражений в уравнение в частных производных (3.5.29) и умножении обеих частей на -2 оно примет вид обыкновенного дифференциального уравнения относительно матрицы $P(t)$:

$$\dot{P} = -Q(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t) - A^{\top}(t)P(t) - P(t)A(t). \quad (3.5.31)$$

Это уравнение есть *дифференциальное уравнение Риккати*, ранее определенное в (1.5.14). В (3.5.31) учтено следующее свойство матриц квадратичных форм. Если имеется квадратичная форма $q(x) = x^{\top}Mx$, где матрица M не обязательно симметричная, то можно записать

$$q(x) = 1/2x^{\top}Mx + 1/2x^{\top}M^{\top}x,$$

поскольку скалярное выражение при транспонировании не изменяется. Поэтому всегда при записи квадратичных форм матрица заменяется на симметричную: $q(x) = 1/2x^{\top}(M + M^{\top})x$. Уравнение (3.5.31) должно удовлетворять граничному условию

$$P(T) = Q_T. \quad (3.5.32)$$

Если $P(t)$ есть решение (3.5.31) с граничным условием (3.5.32), то функция $J^*(x, t) = 1/2x^{\top}P(t)x$ удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби – Беллмана (3.5.29) с граничным условием (3.5.30), а функция $u^*(x, t)$, определенная выражением (3.5.28) и дающая закон оптимального управления, примет вид

$$u^*(x, t) = -R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)x. \quad (3.5.33)$$

Закон управления (3.5.33) в виде оптимальной обратной связи линеен по x и явно зависит от t . Матрица $K(t) = R^{-1}(t)B^{\top}(t)P(t)$, являющаяся непрерывным аналогом матрицы (3.5.17), может быть вычислена заранее и сохранена в памяти системы управления. После этого получим $u^*(x, t) = -K(t)x$, и уравнение Риккати можно переписать в виде

$$\dot{P} = -Q(t) + K^{\top}(t)R(t)K(t) - A^{\top}P - PA.$$

В случае постоянных матриц $A \equiv A(t)$, $B \equiv B(t)$, $R \equiv R(t)$, $Q \equiv Q(t)$ и при больших значениях T (больших горизонтах оптимизации) мы можем ожидать, что решение $P(t)$ дифференциального уравнения (3.5.31), начинающееся при $t = T$, выходит на стационарное значение P^* задолго до достижения времени $t = 0$. При этом можно ожидать, что стационарный закон управления

$$\bar{u}(x) = -R^{-1}B^{\top}P^*x = -K^*x$$

обеспечит траекторию системы, близкую к оптимальной. Матрица P^* при этом удовлетворяет алгебраическому уравнению Риккати

$$Q - PBR^{-1}B^{\top}P + A^{\top}P + PA = 0$$

или

$$Q - K^{*\top}RK^* + A^{\top}P + PA = 0.$$

Добавлением и вычитанием слагаемого $K^{*\top}RK^*$ последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$Q + K^{*\top}RK^* + A_c^{\top}P + PA_c = 0, \quad (3.5.34)$$

где $A_c = A - BK^*$ — матрица линейной системы (3.5.26), замкнутой обратной связью $u = -K^*x$. Если матрица A_c оказывается гурвицевой, то в силу $K^{*\top}RK^* \succ 0$ и $Q \succcurlyeq 0$ матрица P^* будет положительно определенным решением уравнения Ляпунова (3.5.34), см. Приложение И.

3.5.5. Принцип максимума

При решении задач оптимизации в конечномерном случае мы составляем и решаем алгебраические уравнения относительно искомым переменных, приравнивая к нулю первые частные производные критерия оптимальности. Решение этих уравнений называется стационарной точкой. В случае когда переменные стеснены ограничениями, приходится использовать метод множителей Лагранжа — по одному множителю на каждое ограничение. При этом для поиска стационарной точки приравниваются к нулю первые частные производные функции Лагранжа. Производные берутся как по переменным задачи, так и по множителям Лагранжа. В случае задачи оптимального управления мы имеем дело с переменными состояния, зависящими от времени. Функции времени — точки бесконечномерных пространств и, следовательно, мы имеем дело с бесконечным количеством переменных. Кроме того, функции времени подчиняются дифференциальным уравнениям, связывающим производные переменных состояния с самими переменными и управлениями. Рассматривая дифференциальные уравнения как ограничения и применяя аналогию с множителями Лагранжа, приходим к задаче с бесконечным количеством ограничений и множителями Лагранжа, зависящими от времени, которые называются сопряженными переменными. С *принципом максимума* мы уже знакомы в разделе 1.5.2; перейдем к его формальному описанию и рассмотрим несколько наиболее распространенных случаев.

Принцип максимума для задачи (3.5.6) при фиксированном конечном времени и отсутствии условий на правом конце

В формулировке задачи (3.5.6) опустим условия $\Psi(x(T)) = 0$. Кроме того, ограничимся стационарным случаем, когда функции, участвующие в постановке задачи, зависят только от x, u и не зависят явно от t . Кроме того, чтобы не вызывать противоречий с названием принципа, будем рассматривать задачу на максимум, что не ограничивает общности. Таким образом, наша задача формулируется следующим образом:

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T \varphi(x(t), u(t)) dt + \Theta(x(T)) \rightarrow \max, \quad (3.5.35)$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \in U. \quad (3.5.36)$$

Для формулировки принципа оптимальности нам потребуется существование так называемых сопряженных переменных $p(t) \in \mathbb{R}^n$, играющих роль множителей Лагранжа. Введем в рассмотрение гамильтониан

$$H(x, p, u) = p^\top f(x, u) + \varphi(x, u).$$

Имеет место следующее утверждение, называемое *принципом максимума Понтрягина*.

Теорема 3.5.1. Пусть решением задачи (3.5.36) является оптимальное управление $u^*(t)$ и $x^*(t)$ — соответствующая траектория. Тогда существует функция $p^*(t)$, заданная на отрезке $[0, T]$, такая что выполняются следующие условия

$$\dot{x}^* = \frac{\partial H(x^*, p^*, u^*)}{\partial p}, \quad x^*(0) = x_0, \quad (3.5.37)$$

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial H(x^*, p^*, u^*)}{\partial x}, \quad p^*(T) = \frac{\partial \Theta(x^*(T))}{\partial x}, \quad (3.5.38)$$

$$H(x^*, p^*, u^*) = \max_{u \in U} H(x^*, p^*, u), \quad t \in [0, T], \quad (3.5.39)$$

причем величина $H(x^*(t), p^*(t), u^*(t))$, если ее рассматривать как функцию времени, является постоянной.

Дифференциальные уравнения (3.5.37) и (3.5.38) называются сопряженными. Второе условие (3.5.38), определяющее граничное условия

на правом конце для сопряженных переменных, называется *условием трансверсальности*. Условие (3.5.39) называется *условием максимальности*.

Рассмотрим пример решения задачи о распределении ресурса 3.5.2. Воспользуемся теоремой 3.5.1. Имеем

$$f(x, u) = xu, \varphi(x, u) = x(1 - u), \Theta(x(T)) = 0, U = [0, 1].$$

Гамильтониан принимает вид

$$H(x, p, u) = pxu + x(1 - u) = x + ux(p - 1).$$

Уравнения (3.5.37), (3.5.38) и (3.5.39) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xu, & x(0) &= x_0, \\ \dot{p} &= -1 - u(p - 1), & p(T) &= 0, \end{aligned}$$

$$H(x, p, u) = \max_{u \in [0, 1]} x + ux(p - 1), \quad t \in [0, T],$$

соответственно. Из последнего выражения следует

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } p > 1, \\ 0, & \text{если } p \leq 1. \end{cases}$$

Из выполнения условия $p(T) = 0$ следует, что $p(t) = 0$ для значений $t < T$ и достаточно близких к T . Поэтому для таких t будем иметь $u^*(t) = 0$ и, следовательно, $\dot{p} = -1$. Отсюда следует, что $p(t) = T - t$ до тех пор, пока $p(t) \leq 1$, что справедливо при $T - 1 < t \leq T$. Но при дальнейшем уменьшении времени (интегрируя (3.5.38) мы движемся в обратном времени), как только первый раз выполнится условие $p(t) > 1$ при $t < T - 1$, управление $u^*(t)$ переключится на значение 1, и в силу дифференциального уравнения $\dot{p} = -p(t)$ будем иметь $p(t) = C e^{-t}$. Константа C должна обеспечить выполнение граничного условия $p(T - 1) = 1$, что означает $C = e^{T-1}$. Окончательно при $t < T - 1$, но близких к этой величине, получим $p(t) = e^{T-1-t}$. Но $p(t) = e^{T-1-t} > 1$ при всех $t < T - 1$. Поэтому оптимальное управление определяется условиями

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq t \leq T - 1, \\ 0, & \text{при } T - 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Оптимальная траектория определяется следующим выражением:

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0 e^t, & \text{при } 0 \leq t \leq T - 1, \\ e^{T-1}, & \text{при } T - 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Принцип максимума для задачи (3.5.6) при свободном конечном времени и фиксированной конечной точке

Рассмотрим задачу

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\tau} \varphi(x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (3.5.40)$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad x(\tau) = x_1, \quad u(t) \in U.$$

Считаем, что процесс управления заканчивается, когда траектория $x(t)$ первый раз попадет в конечную точку x_1 , что случится в заранее неизвестный момент времени τ . Если нас интересует задача о наискорейшем попадании из точки x_0 в точку x_1 , то достаточно взять $\varphi(x, u) \equiv -1$, поскольку при этом $J(x(\cdot), u(\cdot)) = -\tau$.

Как и ранее, рассмотрим гамильтониан (3.5.5).

Теорема 3.5.2. Пусть решением задачи (3.5.40) является оптимальное управление $u^*(t)$ и $x^*(t)$ — соответствующая траектория. Тогда существует функция $p^*(t)$, заданная на отрезке $[0, \tau^*]$ такая, что выполняются следующие условия

$$\dot{x}^* = \frac{\partial H(x^*, p^*, u^*)}{\partial p}, \quad x^*(0) = x_0, \quad x^*(\tau^*) = x_1, \quad (3.5.41)$$

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial H(x^*, p^*, u^*)}{\partial x}, \quad (3.5.42)$$

$$H(x^*, p^*, u^*) = \max_{u \in U} H(x^*, p^*, u) \equiv 0, \quad t \in [0, \tau^*]. \quad (3.5.43)$$

Теперь условие на правом конце для сопряженных переменных не накладывается, а на переменные x накладываются условия как начальные, так и на правом конце отрезка $[0, \tau^*]$, который заранее не задан и подлежит определению в процессе решения задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу перемещения единичной массы за минимальное время (пример 3.5.4). Воспользуемся методом, следующим из теоремы 3.5.2. Гамильтониан для этой задачи имеет вид $H(x, p, u) = p_1 x_2 + p_2 u - 1$. Он принимает максимальное значение (3.5.43) на управлении, заданным условием

$$u^*(t) = \text{sign}(p_2(t)). \quad (3.5.44)$$

Уравнения (3.5.41) и (3.5.42) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= u, & x_1(0) &= x_0, & x_2(0) &= v_0, \\ \dot{p}_1 &= 0, & \dot{p}_2 &= -p_1, \end{aligned} \quad (3.5.45)$$

из которых следует общее решение

$$\begin{aligned} p_1(t) &= c_1, \\ p_2(t) &= -c_1 t + c_2, \end{aligned} \quad (3.5.46)$$

где постоянные интегрирования подлежат определению при учете граничных условий для $x_1(t)$, $x_2(t)$. Граничные условия для сопряженных переменных отсутствуют.

В соответствии с (3.5.44) оптимальное управление может принимать неопределенное значение, если $p_2(t) = 0$ для некоторого интервала времени. В таком случае говорим о вырожденном оптимальном управлении. В нашем случае такого не может случиться, если $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$.

Предположим обратное, то есть $c_1 = c_2 = 0$. Тогда $p_1^*(t) \equiv 0$ и $p_2^*(t) \equiv 0$. Но тогда $H(x, p^*(t), u^*(t)) \equiv -1 \neq 0$. Таким образом, по крайней мере одна из констант c_1 или c_2 отлична от нуля и управление (3.5.44) неопределено только лишь в изолированные моменты времени. В остальные моменты оно принимает значения 1 или -1 . Такое поведение управления не препятствует корректному определению решения системы (3.5.45). Из (3.5.46) следует, что управление может иметь не более одного переключения между значениями 1 и -1 в течение всего интервала управления. Таким образом, из принципа максимума следует, что возможны следующие последовательности значений оптимального управления:

$$1, -1, \{-1, 1\}, \text{ или } \{1, -1\} \quad (3.5.47)$$

в зависимости от начальных и граничных условий для $x(t)$. Для завершения рассмотрения примера осталось выяснить, каким начальным условиям отвечают определенные варианты последовательности. В двух последних случаях нужно определить условия, при которых происходит переключение.

Из (3.5.45) имеем

$$\begin{aligned} x_2(t) &= ut + v_0, \\ x_1(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{u}{2} t^2, \end{aligned} \quad (3.5.48)$$

где $u = \pm 1$. Решив первое уравнение (3.5.48) относительно t , получим $t = u(x_2 - v_0)$. Подставив его во второе уравнение, получим, что точки x_1 , x_2 лежат на кривой, заданной уравнением

$$x_1 = x_0 + uv_0(x_2 - v_0) + u(x_2 - v_0)^2/2 = x_0 + u(x_2^2 - v_0^2)/2.$$

В зависимости от начальных условий и при различных u траектории решений системы (3.5.48) изображены на рис. 3.5.4. Оптимальные траектории, начинающиеся в точках a' , a'' и b показаны сплошными линиями. Жирной линией изображены две траектории, отвечающие на-

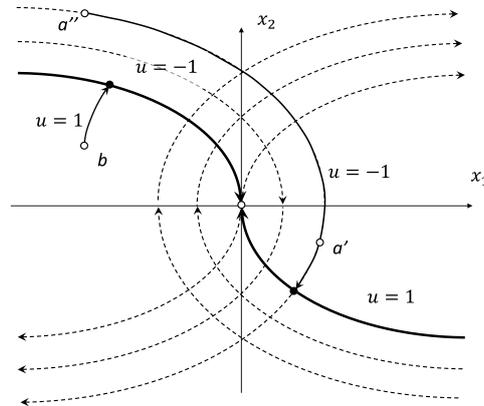


Рис. 3.5.4. Траектории системы (3.5.48) при различных начальных условиях и управлениях $u = \pm 1$ (пунктирные линии). Жирными линиями показаны линии переключения, а жирными точками - точки переключения управления.

чальным условиям, удовлетворяющим соотношению $x_0 - wv_0^2/2 = 0$. Эти траектории проходят через начало координат. Левая траектория $x_1 = -x_2^2/2$ соответствует $u = -1$, а правая $x_1 = x_2^2/2$ соответствует $u = 1$. Эти траектории, называемые линиями переключения, разделяют фазовый портрет на две части. Если начальная точка находится на линии переключения, то вопрос об оптимальном управлении решается просто.левой части линии переключения соответствует начальная скорость $v_0 > 0$ и управление $u^* = -1$. Правой части соответствует $v_0 < 0$ и $u^* = 1$. Таким образом, на линии переключения имеем $u^* = -\text{sign}(v_0)$. Это соответствует двум первым вариантам оптимальных последовательностей (3.5.47). В противном случае, если начальная точка не принадлежит линии переключения, имеем третий или четвертый вариант, когда нужно из начальной точки попасть на линию переключения, на которой происходит единственная перемена знака управления.

Пусть начальная точка такова, что переключение происходит на правой части линии переключения. Это значит, что до переключения $u^* = -1$, а после переключения $u^* = 1$. На рис. 3.5.4 это соответствует начальной точке a' или a'' . В обоих случаях начальная точка лежит выше линии переключения. Момент переключения t_s и начальные условия x_0, v_0 должны удовлетворять следующим соотношениям. Во-первых, в момент переключения точка траектории находится на линии переключения, то есть $x_1(t_s) = x_2(t_s)^2/2$, причем $x_2(t_s) < 0$. Далее, в точку переключения траектория попадает из начальных условий. В силу (3.5.48) при $u = -1$ имеем $x_2(t_s) = -t_s + v_0$ и $x_1(t_s) = -t_s^2/2 + v_0 t_s + x_0$. Решив квадратное уравнение относительно t_s , получаем

$$t_s = v_0 \pm \sqrt{\frac{1}{2}v_0^2 + x_0}.$$

Чтобы решение имело смысл, подкоренное выражение должно быть положительно. Но это условие выполняется, поскольку начальная точка лежит выше линии переключения. Действительно, из рисунка следует, что возможны три случая:

- а) начальная точка лежит во втором квадранте и $1/2v_0^2 > -x_0$; при этом подкоренное выражение положительно;
- б) начальная точка лежит в первом квадранте, откуда следует положительность подкоренного выражения;
- в) начальная точка лежит в четвертом квадранте и $1/2v_0 > x_0$ и в силу положительности x_0 снова подкоренное выражение положительно.

Далее, подставив t_s в $x_2(t_s)$, получим $x_2(t_s) = \mp \sqrt{\frac{1}{2}v_0^2 + x_0}$. Поскольку на правой части линии переключения $x_2(t_s) < 0$, то выбираем в выражении для t_s знак $+$. Окончательно

$$t_s = v_0 + \sqrt{\frac{1}{2}v_0^2 + x_0}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда начальная точка такова, что переключение происходит на левой части линии переключения (точка b на рисунке).

Мы построили оптимальную программу переключения, определив момент переключения для двух случаев расположения начальной точки — выше и ниже линии переключения. Нам нужно построить оптимальный закон переключения, то есть определить не момент переключения, а условие переключения, зависящее от текущих $x_1(t), x_2(t)$, поскольку закон переключения менее чувствителен к ошибкам сенсоров,

измеряющих положение и скорость или вычислительным погрешностям наблюдателей, которые их оценивают. Суммируя сделанные построения и наблюдения, вытекающие из рис. 3.5.4, получаем закон оптимального по быстродействию управления для задачи (3.5.4) в виде обратной связи:

$$u^*(x_1, x_2) = \begin{cases} -1, & \text{при } x_1 < 0, x_2 \geq \sqrt{-2x_1} \text{ или } x_1 \geq 0, x_2 > -\sqrt{2x_1}, \\ 1, & \text{при } x_1 > 0, x_2 \leq \sqrt{2x_1} \text{ или } x_1 \leq 0, x_2 < \sqrt{-2x_1}. \end{cases} \quad (3.5.49)$$

Мы рассмотрели применения принципа максимума к решению задач оптимального управления. При наличии ограничений на управление оптимальный закон управления оказывается разрывным. При рассмотрении линейно-квадратичной задачи оптимального управления при отсутствии ограничений на управление и при дополнительном требовании положительной определенности матриц, присутствующих в критерии оптимальности, закон управления оказывался линейным нестационарным или просто линейным. Здесь уместно провести аналогию с задачами конечномерной оптимизации. Решение задачи минимизации положительно определенной квадратичной формы при линейных ограничениях можно можно выписать аналитически. Задача минимизации линейной формы осмысленна только при наличии ограничений-неравенств. При этом минимум достигается в точке, в которой некоторые из ограничений выполняются как равенства.

Ранее, при рассмотрении задачи стабилизации состояния равновесия управляемой системы методом скользящих режимов, также использовался *разрывный закон управления*. В задаче о стабилизации верхнего положения маятника управлением (3.4.20) мы достигали конечного времени выхода на линейное целевое многообразие, на котором обеспечивалось экспоненциальное стремление к нулю отклонения от состояния равновесия. При решении задачи о наискорейшем приведении системы в нулевое положение равновесия разрывный закон управления (3.5.49) обеспечивает приведение в состояние равновесия за конечное время.

3.6. Дискретные динамические системы

До сих пор в этой главе мы рассматривали в основном непрерывные динамические системы, описываемые дифференциальными уравнени-

ями (исключением был раздел 3.5.2 о линейно-квадратичной задаче оптимального управления в дискретном времени). В то же время в линейной теории (главы 1 и 2) дискретный случай изучался наравне с непрерывными моделями. Естественно, что существует и богатая теория дискретных нелинейных систем; мы не имеем возможности рассмотреть ее во всей полноте и обсудим лишь два важных ее аспекта. Первый относится к понятию асимптотической устойчивости нелинейных отображений, второй — к эффектам хаоса, бифуркации, странным аттракторам и фракталам в системах малой размерности.

3.6.1. Асимптотическая устойчивость нелинейных отображений

Дискретные нелинейные модели возникают в самых различных областях. Во-первых, они могут служить аппроксимацией непрерывных систем. Например, имеется дифференциальное уравнение (3.2.3) с общим решением $x(t, t_0, x_0)$ и начальным условием x_0 в момент $t = t_0$ и мы применяем для его интегрирования простейшую разностную схему Эйлера с шагом h . Тогда, обозначив $t_k = t_0 + kh$, получаем для $x_k = x(t_k, t_0, x_0)$ разностное уравнение

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k, t_k).$$

Во-вторых, разностные модели описывают процессы, в которых по природе вещей время дискретно (например, курсы акций по дням). В-третьих, нелинейные последовательности возникают в разного рода итерационных методах, там роль времени играет номер итерации.

С учетом этого простейшая *стационарная* дискретная система имеет вид

$$x_{k+1} = T(x_k), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (3.6.1)$$

где T — нелинейное отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n . Точка x^* называется *неподвижной точкой* отображения T , если $x^* = T(x^*)$. Без ограничения общности можно считать что $x^* = 0$ (этого всегда можно добиться заменой переменных), так что $T(0) = 0$. Иногда систему (3.6.1) называют *методом простых итераций* для решения уравнения $x = T(x)$. Нас будет прежде всего интересовать поведение итераций x_k в окрестности нуля. Ясно, что оно будет примерно таким же, как для линеаризованной системы. Приведем точный результат.

Пусть отображение T дифференцируемо в нуле, то есть

$$T(x) = Ax + o(x),$$

где матрица $A = T'(0)$ (якобиан отображения в нуле).

Теорема 3.6.1. Пусть матрица A — шуровская (то есть для нее $\rho(A) = q < 1$). Тогда процесс (3.6.1) локально асимптотически устойчив, то есть найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $\|x_0\| < \varepsilon$ будет $x_k \rightarrow 0$. При этом скорость сходимости — линейная (знаменатель геометрической прогрессии сколь угодно близок к q).

Мы напомним, что в линейном случае (когда $T(x) = Ax$) условие $\rho(A) = q < 1$ было необходимо и достаточно для сходимости к нулю из любого начального приближения, см. раздел 1.2.2. Иногда (как при дискретизации непрерывных систем) итерационный процесс записывается в ином виде

$$x_{k+1} = x_k + \gamma(Ax_k + \varphi(x_k)), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6.2)$$

Тогда при некоторых условиях на нелинейность φ и длину шага γ можно доказать глобальную асимптотическую устойчивость процесса (3.6.2).

Теорема 3.6.2. Пусть матрица A гурвицева,

$$\|\varphi(x)\| \leq L\|x\|, \quad L < \frac{1}{2\|P\|}, \quad 0 < \gamma < \frac{\|P\|^{-1} - 2L}{(L + \|A\|)^2},$$

где матрица $P > 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$PA + A^\top P = -I.$$

Тогда процесс (3.6.2) глобально асимптотически устойчив, то есть для всякого x_0 будет $x_k \rightarrow 0$, при этом скорость сходимости — линейная.

Этот результат доказывается введением в рассмотрение функции Ляпунова $V(x) = (Px, x)$; легко показать, что $V(x_{k+1}) \leq V(x_k)$.

Теоремы 3.6.1, 3.6.2 говорят о поведении дискретной системы по ее линейному приближению. Иногда требуются более общие результаты, не предполагающие даже дифференцируемости отображения T в системе (3.6.1). Простейшим утверждением такого типа является принцип сжимающих отображений.

Определение 3.6.1. Отображение T из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n называется *сжимающим*, если для любой пары точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\|T(x) - T(y)\| \leq q\|x - y\| \quad (3.6.3)$$

при некотором $q < 1$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.6.3. Пусть отображение T — сжимающее. Тогда оно имеет единственную неподвижную точку $x^* = T(x^*)$, к которой сходится последовательность (3.6.1) со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{q^k \|T(x_0) - x_0\|}{1 - q}.$$

Доказательство. Из (3.6.3) следует

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k-1})\| \leq q \|x_k - x_{k-1}\|,$$

и, далее, $\|x_{k+1} - x_k\| \leq q^k \|x_1 - x_0\|$. Взяв произвольное натуральное $s \geq 1$, получим из последнего неравенства

$$\|x_{k+s} - x_k\| \leq \sum_{i=k}^{k+s-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \frac{q^k (1 - q^{s-1}) \|x_1 - x_0\|}{1 - q} \leq \frac{q^k \|x_1 - x_0\|}{1 - q}.$$

Следовательно, при $k \rightarrow \infty$ и любом s имеем $\|x_{k+s} - x_k\| \rightarrow 0$, то есть x_k — последовательность Коши. Поэтому она имеет предельную точку x^* .

Так как сжимающее отображение является непрерывным, то из $x_k \rightarrow x^*$ следует $T(x_k) \rightarrow T(x^*)$, поэтому x^* — неподвижная точка. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $s \rightarrow \infty$, получаем желаемый результат. ■

Отметим, что теорема о сжимающих отображениях одновременно является теоремой существования и единственности неподвижной точки, и в отличие от теоремы 3.6.1 мы не предполагаем заранее существования неподвижной точки. В то же время для теоремы 3.6.1 условие сжимаемости может быть не выполнено. Например, если отображение линейно: $T(x) = Ax$, то условие $\rho(A) < 1$, как правило, гораздо менее ограничительно, чем условие $\|A\| < 1$.

Градиентный метод. Приведем типичную ситуацию для численных методов оптимизации, анализ которых может быть проведен с использованием приведенных выше результатов. Рассмотрим задачу безусловной минимизации функции $f(x)$ на пространстве \mathbb{R}^n . Предположим, что функция является дифференцируемой и ее градиент удовлетворяет условию Липшица:

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

и кроме того она *сильно выпукла*. Есть различные формулировки этого понятия (все они эквивалентны), мы выберем следующую:

$$(f'(x) - f'(y), x - y) \geq m\|x - y\|^2, \quad m > 0,$$

для всех x, y . Для минимизации применим *градиентный метод* с постоянной длиной шага $\gamma > 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma f'(x_k).$$

Мы видим, что метод записывается в форме (3.6.1) с $T(x) = x - \gamma f'(x)$. Покажем, что при определенном выборе γ отображение $T(x)$ является сжимающим. Действительно,

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\|^2 &= \|x - y - \gamma(f'(x) - f'(y))\|^2 = \\ &= \|x - y\|^2 - 2\gamma(f'(x) - f'(y), x - y) + \gamma^2\|f'(x) - f'(y)\|^2 \leq \\ &\leq (1 - 2\gamma m + \gamma^2 L^2)\|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\gamma < \frac{2m}{L^2}$ отображение $T(x)$ является сжимающим. Из теоремы 3.6.3 следует, что имеется неподвижная точка x^* в которой $x^* = T(x^*)$, то есть $f'(x^*) = 0$. Для выпуклой функции равенство нулю градиента в некоторой точке означает, что это точка минимума.

Таким образом, мы доказали, что у сильно выпуклой функции есть единственная точка минимума и к ней глобально сходится градиентный метод со скоростью геометрической прогрессии. Если заранее предполагать существование точки минимума, то с использованием теорем 3.6.1, 3.6.2 можно получить и другие результаты о сходимости градиентного метода (с более точными оценками скорости сходимости).

3.6.2. Бифуркации и хаотическое поведение в одномерном случае

Сложное поведение нелинейных динамических систем в дискретном случае проявляется уже для систем малой размерности, даже в одномерном случае.

Логистическое отображение. Мы рассмотрим эти эффекты на примере простейшего уравнения с квадратичной правой частью — для так называемого *логистического отображения*:

$$x_{k+1} = T(x_k) = \gamma x_k(1 - x_k), \quad 0 \leq \gamma \leq 4. \quad (3.6.4)$$

Здесь последовательность $x_k \in \mathbb{R}$; мы увидим, что ее поведение совершенно различно в зависимости от параметра γ . Вид функций $T(x)$ и x при $\gamma = 4$ показан на рис. 3.6.1.

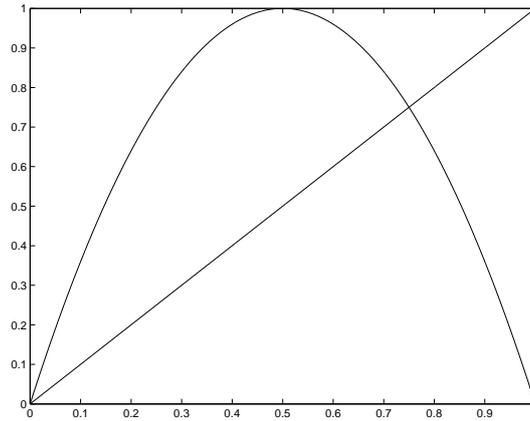


Рис. 3.6.1. Логистическое отображение.

Прежде всего очевидно, что если $0 \leq x_k \leq 1$, то при $0 \leq \gamma \leq 4$ будет $0 \leq x_{k+1} \leq 1$, то есть все итерации остаются в единичном отрезке. Далее, нулевая точка всегда является неподвижной точкой отображения $T(x)$; рассмотрим вопрос об ее устойчивости.

Поскольку $T'(x) = \gamma(1-2x)$, $T'(0) = \gamma$, мы видим, что при $0 \leq \gamma < 1$ в нуле выполнены условия теоремы 3.6.1 и эта точка является устойчивой. При $1 < \gamma$ нуль теряет устойчивость, но появляется другая неподвижная точка $x^* = 1 - 1/\gamma$; в силу аналогичных оценок она остается устойчивой при $1 < \gamma < 3$. При дальнейшем увеличении γ обе неподвижные точки неустойчивы, но возникает новый эффект — появление циклов. Напомним, что m -циклом (или m -орбитой) называются точки $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ связанные соотношением

$$x_2^* = T(x_1^*), \quad \dots, \quad x_m^* = T(x_{m-1}^*), \quad x_1^* = T(x_m^*).$$

Иначе говоря, обозначим m -ю итерацию отображения T через T^m ; тогда все точки x_k^* , $k = 1, \dots, m$, являются неподвижными точками T^m .

Вычисляя при $\gamma > 3$ 2-цикл (для этого нужно решить кубическое уравнение $x = T^2(x)$) и найдя производную отображения $T^2(x)$ можно заключить, что при $\gamma > 3$ 2-цикл существует и остается устойчивым до $\gamma < 1 + \sqrt{6} = 3,45$. При дальнейшем увеличении γ 2-цикл теряет ус-

тойчивость и происходит *удвоение цикла*, то есть возникает и приобретает устойчивость 4-цикл. Дальнейшая картина (когда и какие циклы появляются) весьма нетривиальна, она описывается общей *теоремой Шарковского*. Результаты — так называемая *бифуркационная диаграмма* — представлены на рис. 3.6.2.

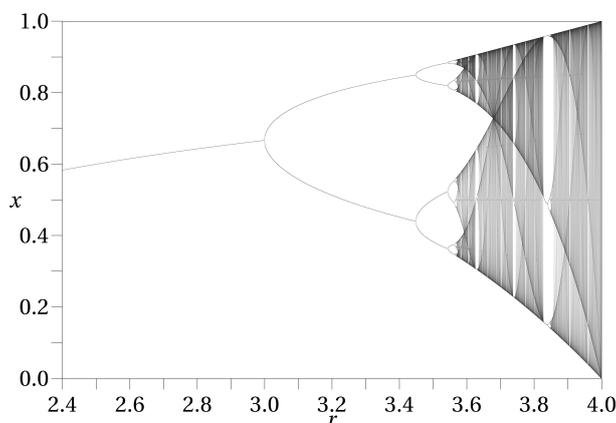


Рис. 3.6.2. Бифуркационная диаграмма.

В ней по горизонтальной оси отложены значения γ , по вертикальной оси — координаты точек x_k^* , $k = 1, \dots, m$, соответствующие m -циклу при данном γ . Например, при $\gamma = 3,5$ видно, что устойчив 4-цикл, и его координаты можно увидеть на графике. Однако при больших (близких к 4) значениям γ ситуация очень сложна. Последний появляющийся цикл — при $\gamma = 3,8284$, в этот момент возникает 3-цикл. Из теоремы Шарковского следует, что *3-цикл рождает хаос*. Именно, для значений параметра, больших $\gamma = 3,8284$, все циклы (любого порядка) существуют, но все они неустойчивы. Поведение траекторий системы (3.6.4) напоминает случайную выборку. При этом сколь бы близкими не были начальные точки, дальнейшие траектории очень сильно расходятся.

Полученные результаты относятся не только к логистическому отображению. Оказывается, они могут быть обобщены на другие отображения $T(x)$ единичного отрезка в себя, не являющиеся взаимно однозначными. Вот еще несколько примеров.

Треугольное отображение.

$$T(x) = \gamma(1 - |2x - 1|), \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Это отображение негладкое (см. рис. 3.6.3); в нем при $\gamma > 0,5$ много циклов, но все они неустойчивые. При близком к единице значении γ также возникает хаотическое поведение.

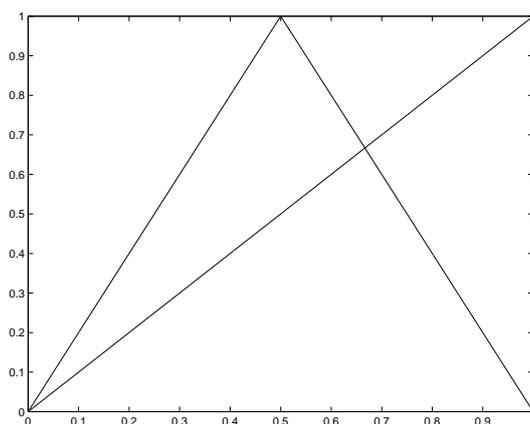


Рис. 3.6.3. Треугольное отображение, $\gamma = 1$.

Кубическое отображение.

$$T(x) = x^3 - 2x + c.$$

При $c = 1/\sqrt{3} = 0,5735$ имеется 3-цикл, при близких c его нет. Любопытно, как ведут себя последовательности $x_{k+1} = T(x_k)$ для c , близкого к критическому. На рис. 3.6.4 показаны значения x_k как функции от k . Видно, что время от времени итерации выходят на 3-цикл, а потом срываются с него.

Таким образом, мы видим, что поведение последовательностей, задаваемых нелинейным отображением, даже в одномерном случае может быть весьма сложным: они могут сходиться к неподвижной точке, притягиваться к циклу (разной длины) либо демонстрировать хаотическое поведение. При этом изменение свойств системы при изменении параметров системы происходит скачком — в точках *бифуркации*.

3.6.3. Странные аттракторы для двумерных систем

В двумерном случае возможны и другие эффекты, например, возникновение *странного аттрактора*. Мы уже сталкивались со странным аттрактором для непрерывного случая в системе Лоренца, см.

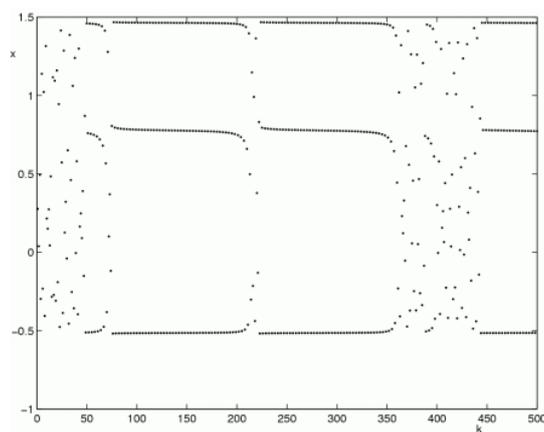


Рис. 3.6.4. Итерации для кубического отображения.

раздел 3.1.4; там наименьшая возможная размерность пространства состояний равна трем. Однако для дискретных систем достаточно и двумерного случая.

Отображение Эннона. Для упрощения обозначений будем компоненты двумерного вектора x записывать как y, z . Система Эннона в этих обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 1 - 1,4y_k^2 + z_k, \\ z_{k+1} &= 0,3y_k, \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots$, а числовые коэффициенты подобраны специальным образом. У этой системы есть две неподвижные точки (их первая компонента является корнями уравнения $1,4y^2 + 0,7y - 1 = 0$). Если вычислить якобиан отображения в этих точках и проверить их собственные значения, то оказывается что обе эти матрицы не являются шуровскими. Иначе говоря, обе неподвижные точки неустойчивы. Аналогично можно проверить неустойчивость и имеющегося 2-цикла. Индивидуальная траектория системы Эннона для некоторой начальной точки показана на рис. 3.6.5. Видны ее характерные свойства: она ограничена и ни к чему не сходится.

Если же выбрать много начальных точек и наложить их траектории (не соединяя итерации отрезками прямых), то возникает картина,

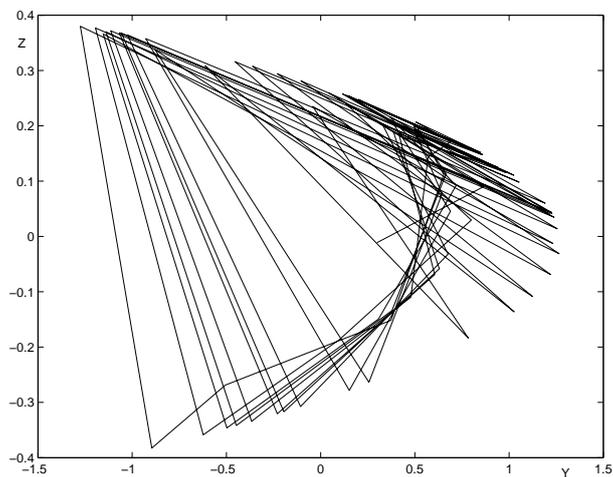


Рис. 3.6.5. Итерации для отображения Эннона.

показанная на рис. 3.6.6. Это и есть странный аттрактор: точки притягиваются к кривым нестандартного типа и непредсказуемым на вид образом двигаются в их окрестности.

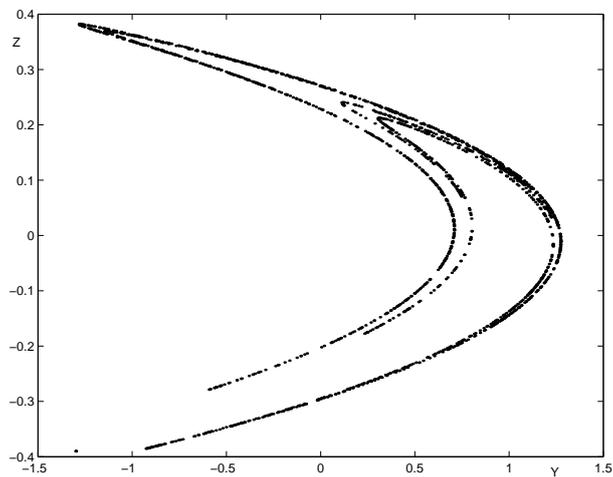


Рис. 3.6.6. Странный аттрактор для отображения Эннона.

3.6.4. Фракталы для двумерных систем

Наконец, для нелинейных дискретных систем часто характерно *фрактальное поведение*. Пример фрактала изображен на рис. 3.1.13, показывающем двумерное сечение области притяжения одного из положений равновесия непрерывной системы (3.1.21). Поясним фрактальное поведение дискретной системы на следующем примере.

Метод Ньютона. Один из самых популярных и эффективных методов решения систем нелинейных уравнений состоит в их линеаризации в текущей точке и выборе решения возникающего линейного уравнения в качестве следующей итерации. Для решения уравнения $g(x) = 0$, где g — дифференцируемое отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , метод приобретает вид

$$x_{k+1} = x_k - g'(x_k)^{-1}g(x_k).$$

Разумеется, для применимости метода нужно, чтобы матрица $g'(x_k)$ была невырождена.

Мы не будем рассматривать общую ситуацию, а ограничимся случаем простейшего уравнения $z^3 = 1$ (мы заменили переменную на z , чтобы подчеркнуть, что рассматривается комплексный случай). Тогда итерации приобретают вид

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} = \frac{2}{3}z_k + \frac{1}{3z_k^2} \quad (3.6.5)$$

(напомним что $z_k \in \mathbb{C}$). Уравнение имеет три корня

$$z^1 = 1, \quad z^2 = -1/2 + j\sqrt{3}/2, \quad z^3 = -1/2 - j\sqrt{3}/2,$$

и в принципе для какого-либо начального условия z_0 могут встретиться следующие возможности:

- 1) итерации сходятся к одному из корней;
- 2) итерации расходятся;
- 3) на какой-либо итерации метод неприменим, так как знаменатель обращается в нуль.

На комплексной плоскости пометим точки z_0 различными оттенками серого в зависимости от того, к какой из точек z^1 , z^2 или z^3 сходится начинающаяся в z_0 траектория. Точки, для которых метод расходится или неприменим пометим черным. Тогда возникает совершенно неожиданная раскраска плоскости, называемая *фракталом Кэ-ли* (рис. 3.6.7).

На первый взгляд, возникающую сложную картину трудно объяснить. Попробуем это сделать на примере черных точек. Есть только

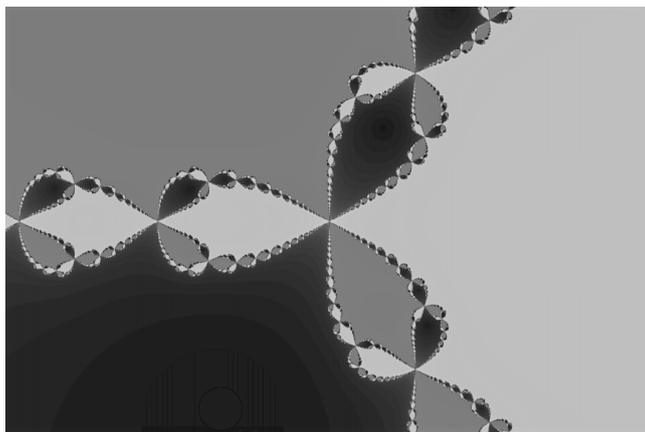


Рис. 3.6.7. Фрактал Кэли.

одна точка, в которой метод (3.6.5) не определен на первой же итерации, — точка $z = 0$ (центр рисунка). Однако есть три точки, которые приводят в ноль на первой итерации, — корни уравнения

$$\frac{2}{3}z + \frac{1}{3z^2} = 0$$

то есть уравнения $z^3 = -0,5$. В свою очередь, у каждой из этих точек есть три прообраза; продолжая эти рассуждения видим, что существует счетное множество точек, для которых итерации на каком либо этапе не могут быть продолжены.

Заметим еще, что для малой окрестности любой такой черной точки ее образы будут очень далеки от начала координат. Сходным образом может быть объяснена *фрактальная* структура точек других оттенков серого. Само понятие *фрактал* (введенное Б. Мандельбротом) не имеет точного математического определения; оно относится к объектам достаточно сложной структуры, обладающими свойством самоподобия. Например, если мы увеличим масштаб рисунка, то обнаружим, что картина останется примерно такой же.

Фрактальные множества возникают для многих нелинейных двумерных дискретных систем. Например, знаменитый *фрактал Мандельброта* (в действительности он изучен Фату в 1905 году) описывает множество тех точек $c \in \mathbb{C}$ для которых последовательность

$$z_{k+1} = z_k^2 + c, \quad z_k \in \mathbb{C}, \quad z_0 = c,$$

остаётся ограниченной. Как сложно устроено это множество иллюстрирует рис. 3.6.8).

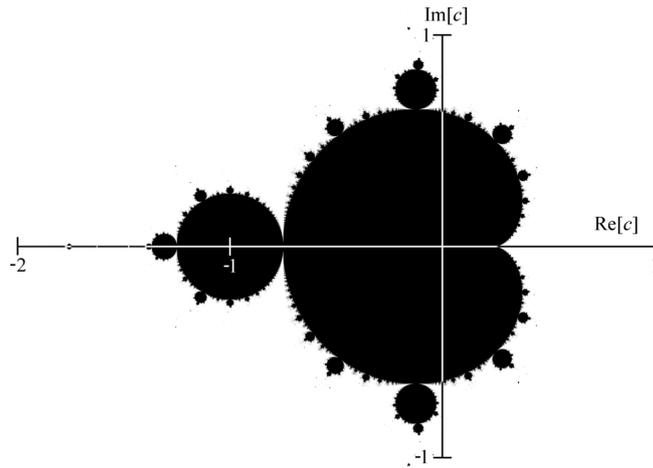


Рис. 3.6.8. Фрактал Мандельброта.

В данном разделе мы ограничились одномерными и двумерными системами и обнаружили множество сложных эффектов (наличие устойчивых и неустойчивых циклов; хаотическое поведение; странные аттракторы; фрактальная структура множества точек, приводящих к сходимости и расходимости процесса). Естественно, в многомерном случае разнообразие поведения ещё большее. В целом мы заключаем, что дискретные нелинейные системы образуют чрезвычайно богатый и сложный мир.

Приложение

А. Элементарные свойства матриц

Свойства определителя матриц из $\mathbb{C}^{n \times n}$:

1.

$$\det AB = \det BA = \det A \det B.$$

2. Если матрица A невырождена, то

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

3.

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

где λ_i — собственные значения матрицы A .

4. Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ выполняется

$$\det(I + AB) = \det(I + BA).$$

5. Для любых векторов $x, y \in \mathbb{C}^n$ выполняется

$$\det(I + xy^*) = 1 + y^* x.$$

Пусть A — прямоугольная матрица. *Рангом матрицы A* называется число ее линейно независимых строк или, что то же самое, число ее линейно независимых столбцов. Матрица A размера $m \times n$ называется *матрицей полного ранга*, если

$$\text{rank } A = \min\{m, n\}.$$

Полином $f(s)$ скалярной переменной s называется *аннулирующим полиномом* матрицы A , если

$$f(A) = 0.$$

Характеристическим полиномом матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется полином

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

корни λ_i которого называются *собственными значениями* матрицы A .

Важным свойством характеристического полинома матрицы A является то, что он является аннулирующим для A , то есть имеет место следующая теорема.

Теорема А.1 (Кэли – Гамильтон). Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению: если

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

то

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0I = 0.$$

Следствие А.1. Матрица A^n (а следовательно, и все матрицы A^m при $m \geq n$) представима в виде линейной комбинации матриц

$$I, A, A^2, \dots, A^{n-1}.$$

Из других полезных свойств характеристического полинома отметим следующие:

$$a_{n-1} = -\operatorname{tr} A, \quad a_0 = (-1)^n \det A.$$

Аннулирующий полином $\psi(s)$ наименьшей степени μ с единичным старшим коэффициентом называется *минимальным полиномом* матрицы A . Соответственно, любая степень матрицы A представима в виде линейной комбинации матриц $I, A, \dots, A^{\mu-1}$, $\mu \leq n$. Корнями минимального полинома служат все различные собственные значения матрицы A и только они.

Отметим следующие полезные свойства *следа* $\operatorname{tr} A \doteq \sum_{i=1}^n a_{ii}$ матриц из $\mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$$

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B,$$

где A и B — матрицы соответствующей размерности.

Напомним, что симметрическая матрица A называется *положительно определенной* и обозначается через $A \succ 0$, если

$$x^T A x > 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0;$$

матрица называется *неотрицательно определенной* и обозначается через $A \succcurlyeq 0$, если

$$x^T A x \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

При этом запись $A \succ B$ означает, что $A - B \succ 0$.

Симметрическая матрица A называется *отрицательно (неположительно) определенной* и обозначается через $A \prec 0$ ($A \preccurlyeq 0$), если матрица $-A$ положительно (неотрицательно) определена.

У положительно (неотрицательно) определенных матриц все собственные значения вещественны и положительны (неотрицательны); у отрицательно (неположительно) определенных матриц все собственные значения вещественны и отрицательны (неположительно).

Отметим некоторые важные свойства знакоопределенных матриц.

1. Если A и B — матрицы одинаковой размерности, причем $A \preccurlyeq 0$ и $B \preccurlyeq 0$, то $A + B \preccurlyeq 0$.

2. Если A и B — матрицы одинаковой размерности, причем $A \prec 0$ и $B \prec 0$, то $A + B \prec 0$.

3. Если A, B, C, D — матрицы одинаковой размерности, причем $A \preccurlyeq B$ и $C \preccurlyeq D$, то $A + C \preccurlyeq B + D$.

4. Если A, B, C, D — матрицы одинаковой размерности, причем $A \prec B$ и $C \prec D$, то $A + C \prec B + D$.

5. Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ верно $A^T A \succcurlyeq 0$ и $AA^T \succcurlyeq 0$. При этом если матрица A квадратная невырожденная, то $A^T A \succ 0$ и $AA^T \succ 0$.

6. Если $A \succ 0$ и матрица B полного ранга, то $BAB^T \succ 0$, то есть строгое матричное неравенство можно одновременно умножать слева на матрицу полного ранга B и справа на B^T .

7. Если $A \succcurlyeq 0$, то для произвольной матрицы B верно $BAB^T \succcurlyeq 0$, то есть нестрогое матричное неравенство можно одновременно умножать слева на произвольную матрицу B и справа на B^T .

8. Если $A \succcurlyeq B \succ 0$, то обратные матрицы A^{-1} и B^{-1} существуют и при этом $0 \prec A^{-1} \preccurlyeq B^{-1}$.

9. Для симметрической матрицы A верно $\lambda_{\min}(A)I \preceq A \preceq \lambda_{\max}(A)I$.
10. Если $0 \preceq A \preceq B$, то $\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\max}(B)$.
11. Если $A \succeq 0$ и $\operatorname{tr} A = 0$, то $A = 0$.

Б. Нормы матриц

Определение Б.1. Функция

$$\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n \times m} \longrightarrow \mathbb{R},$$

определенная на множестве матриц размера $n \times m$, называется *матричной нормой*, если для любых $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ выполнены следующие аксиомы:

- 1) $\|A\| \geq 0$;
- 2) $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$;
- 3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$;
- 4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 5) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Отметим два полезных свойства, непосредственно вытекающие из определения нормы:

$$\|I\| \geq 1,$$

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1 \quad \text{для любой обратимой матрицы } A.$$

Наиболее употребимы следующие явно задаваемые нормы:
спектральная норма:

$$\|A\|_2 \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^{1/2}(A^* A);$$

строчная норма:

$$\|A\|_1 \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

столбцовая норма:

$$\|A\|_\infty \doteq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

фробениусова норма:

$$\|A\|_F \doteq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Между матричными нормами имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &\leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F; \\ \frac{1}{n} \|A\|_\infty &\leq \|A\|_1 \leq n \|A\|_\infty; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &\leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_F; \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F &\leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_F, \end{aligned}$$

и эти оценки достижимы, то есть, например,

$$\max_{A \neq 0} \frac{\|A\|_F}{\|A\|_2} = \frac{\|I\|_F}{\|I\|_2} = \sqrt{n}.$$

Если в $\mathbb{C}^{n \times n}$ ввести скалярное произведение по правилу

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} A^* B,$$

оно будет порождать фробениусову матричную норму:

$$\|A\|_F \doteq \langle A, A \rangle^{1/2} = (\operatorname{tr} A^* A)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

в частности, при $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будет

$$\|A\|_F = (\operatorname{tr} A^2)^{1/2}.$$

Пусть задана некоторая векторная норма $|\cdot|$; функция

$$\|A\| \doteq \max_{|x| \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{|x| \leq 1} |Ax| = \max_{|x|=1} |Ax|$$

удовлетворяет всем вышеуказанным аксиомам и следовательно является матричной нормой. Она называется *подчиненной* данной векторной норме $|\cdot|$ (или *индуцированной* нормой). Иногда используют термин *операторная норма* (в частности, для таких норм $\|I\| = 1$).

Матричные нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ подчинены векторным нормами $|\cdot|_\infty$, $|\cdot|_2$, $|\cdot|_1$ соответственно¹, то есть

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \max_{|x|_2=1} |Ax|_2, \\ \|A\|_1 &= \max_{|x|_\infty=1} |Ax|_\infty, \\ \|A\|_\infty &= \max_{|x|_1=1} |Ax|_1,\end{aligned}$$

а $\|\cdot\|_F$ не является подчиненной нормой.

Матричная норма $\|\cdot\|$ называется *согласованной* с векторной нормой $|\cdot|$, если

$$|Ax| \leq \|A\| |x|.$$

Подчиненные нормы согласованы с соответствующими (индуцирующими их) векторными нормами и поэтому наиболее употребимы.

Величина

$$\rho(A) \doteq \max_i |\lambda_i(A)|$$

называется *спектральным радиусом* матрицы A . Для любой матричной нормы справедливо неравенство $\rho(A) \leq \|A\|$.

Отметим важное свойство спектральной нормы:

$$\lambda_{\max}(A) = \|A\|_2$$

для любой матрицы $A \succcurlyeq 0$.

Лемма Б.1. Пусть A — прямоугольная вещественнозначная матрица. Неравенство

$$\|A\|_2 \leq \gamma$$

эквивалентно матричному неравенству

$$A^T A \preccurlyeq \gamma^2 I.$$

¹В «матричной» литературе строчную матричную норму нередко обозначают через $\|\cdot\|_\infty$, а столбцовую — через $\|\cdot\|_1$. В таких обозначениях $\|\cdot\|_\infty$ индуцируется векторной ∞ -нормой, а $\|\cdot\|_1$ — векторной 1-нормой. Мы же следуем обозначениям, принятым в современной западной литературе.

В. Функции от матриц

Рассмотрим некоторую функцию $f(s)$ скалярного аргумента s и матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Попробуем распространить функцию f на матричные значения аргумента, то есть определить величину $f(A)$.

Если $p(s)$ — полином степени k с вещественными коэффициентами

$$p(s) = a_k s^k + \dots + a_1 s + a_0,$$

то положим

$$p(A) \doteq a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Исходя из этого распространим определение $f(A)$ и на общий случай.

Для числовой функции $f(s)$ общего вида (не полинома) имеется несколько способов определения соответствующей функции от матрицы. Дадим лишь два наиболее употребимых: один из них представляет $f(A)$ в виде полинома от A , а другой — в виде степенного ряда.

Итак, пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ — все различные корни минимального полинома степени μ матрицы A , а μ_1, \dots, μ_m — их кратности, так что $\mu_1 + \dots + \mu_m = \mu$.

Назовем μ чисел

$$f(\lambda_k), \quad f'(\lambda_k), \quad \dots, \quad f^{(\mu_k-1)}(\lambda_k), \quad k = 1, \dots, m,$$

значениями функции $f(s)$ на спектре матрицы A .

Про любую функцию, для которой эти значения существуют, будем говорить, что она *определена на спектре матрицы A* . Очевидно, что любой полином определен на спектре любой матрицы.

Если функция $f(s)$ определена на спектре матрицы A , то по определению положим

$$f(A) = g(A),$$

где $g(s)$ — произвольный полином, принимающий те же значения на спектре матрицы A , что и $f(s)$. Нетрудно убедиться в том, что выбор полинома $g(s)$ не имеет значения. Таким полиномом наименьшей возможной степени (не превосходящей $\mu - 1$) служит так называемый *интерполяционный полином*, который строится по значениям функции $f(s)$ на спектре матрицы A .

Заметим, что если функция $f(s)$ аналитична во всех собственных значениях матрицы A , то нетрудно построить полином степени $n - 1$, принимающий те же значения на спектре матрицы A , что и $f(s)$. В самом деле, пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — все различные собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а ν_1, \dots, ν_p — их кратности (так что $\nu_1 + \dots + \nu_p = n$).

Тогда коэффициенты полинома

$$g(s) = \gamma_0 + \gamma_1 s + \cdots + \gamma_{n-1} s^{n-1}$$

находятся из условий

$$g^{(k)}(\lambda_i) = f^{(k)}(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, p, \quad k = 0, 1, \dots, \nu_i - 1$$

(правые части равенств определены в силу аналитичности функции $f(s)$ в точках λ_i).

Эти условия представляют собой систему n линейных уравнений относительно n неизвестных γ_i . Можно показать, что матрица этой системы невырождена, поэтому всегда существует единственное решение $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$. При этом у построенного полинома $g(s)$ и у функции $f(s)$ совпадают значения и значения их производных вплоть до $(\nu_i - 1)$ -й в точках λ_i , то есть полином $g(s)$ и функция $f(s)$ заведомо совпадают на спектре матрицы A .

Нетрудно видеть, что если все собственные значения матрицы A различны, то ее минимальный полином совпадает с характеристическим и имеет вид

$$g(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n).$$

В этом случае интерполяционный полином имеет следующий простой вид

$$g(s) = \sum_{k=1}^n \frac{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_{k-1})(s - \lambda_{k+1}) \cdots (s - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_n)} f(\lambda_k),$$

причем это единственный полином степени $n - 1$ такой, что

$$g(\lambda_i) = f(\lambda_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Отметим следующие важные свойства функций от матрицы.

1. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и функция $f(s)$ определена на спектре матрицы A , то собственными значениями матрицы $f(A)$ служат числа

$$f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n).$$

2. Если матрицы A и B подобны, то есть

$$B = T^{-1}AT,$$

и функция $f(s)$ определена на спектре матрицы A , то

$$f(B) = T^{-1}f(A)T.$$

3. Если A — блочно-диагональная матрица

$$A = \text{diag}\{A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_k\},$$

и функция $f(s)$ определена на спектре матрицы A , то

$$f(A) = \text{diag}\{f(A_1) \quad f(A_2) \quad \cdots \quad f(A_k)\}.$$

В частности, если матрица A приводится к диагональному виду:

$$A = T^{-1} \text{diag}\{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_k\}T,$$

то

$$f(A) = T^{-1} \text{diag}\{f(\lambda_1) \quad f(\lambda_2) \quad \cdots \quad f(\lambda_k)\}T.$$

Если же матрица A приведена к жордановой форме

$$A = T^{-1} \text{diag}\{J_1 \quad J_2 \quad \cdots \quad J_k\}T,$$

то

$$f(A) = T^{-1} \text{diag}\{f(J_1) \quad f(J_2) \quad \cdots \quad f(J_k)\}T,$$

где для жорданова блока

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

размера $m_i \times m_i$ имеем

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Итак, функция от матрицы может быть определена как значение некоторого полинома (или конечного степенного ряда) от матрицы. Иногда бывает удобно определять функцию от матрицы в виде бесконечного степенного ряда.

Пусть функция $f(s)$ разложима в степенной ряд в круге $|s - s_0| < r$:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (s - s_0)^k.$$

Тогда это разложение сохраняет силу, если скалярный аргумент s заменить любой матрицей, собственные значения которой лежат внутри круга сходимости:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (A - s_0 I)^k, \quad |\lambda_i - s_0| < r,$$

причем сходимость матричного ряда — абсолютная (в смысле матричной нормы).

В частности, при $s_0 = 0$ имеем

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k.$$

В приложениях часто $r = \infty$, то есть функция $f(s)$ аналитична на всей плоскости; в этом случае $f(A)$ определена для всех матриц A .

Такое представление функций от матриц часто предпочтительнее с вычислительной точки зрения (в практических задачах соответствующие степенные матричные ряды, как правило, сходятся быстро); кроме того, оно позволяет пользоваться многими удобными свойствами матричных функций.

Разумеется, значения $f(A)$, полученные двумя описанными способами, совпадают (конечно, для тех матриц, на которых оба способа определены).

Приведем некоторые важные матричные разложения (первые три сходятся для любых матриц):

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots,$$

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots,$$

$$\cos A = I - \frac{A^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} + \dots,$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^k + \dots, \quad |\lambda_i| < 1,$$

$$\ln(I + A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \dots + (-1)^k \frac{A^k}{k} + \dots, \quad |\lambda_i| < 1.$$

Рассмотрим подробнее функции

$$e^{At} \text{ и } A^k.$$

В наиболее простом случае, когда матрица A приводится к диагональному виду

$$A = T^{-1} \operatorname{diag}\{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n\}T,$$

имеем

$$e^{At} = T^{-1} \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad e^{\lambda_n t}\}T,$$

$$A^k = T^{-1} \operatorname{diag}\{\lambda_1^k \quad \lambda_2^k \quad \dots \quad \lambda_n^k\}T.$$

Если же матрица A приведена к жордановой форме

$$A = T^{-1} \operatorname{diag}\{J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_k\}T,$$

то для жорданова блока

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

размера $m_i \times m_i$ имеем

$$e^{J_i t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_i^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C_k^1 \lambda_i^{-1} & \cdots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{-m_i+1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$C_k^m = \begin{cases} \frac{k!}{m!(k-m)!}, & m \leq k, \\ 0, & m > k. \end{cases}$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ — все различные корни минимального полинома матрицы A , а μ_1, \dots, μ_m — их кратности. Обсудим поведение матричной экспоненты e^{At} с ростом t .

Возможны следующие случаи:

1) если $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ для всех λ_k , то

$$e^{At} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$$

2) если $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$ и для тех k , для которых $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$, имеем $\mu_k = 1$, то матрица e^{At} ограничена;

3) если при некотором k имеем $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, либо $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$, но $\mu_k > 1$, то

$$e^{At} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Таким образом, для любой матрицы A верно представление

$$e^{At} = E_-(t) + E_0(t) + E_+(t),$$

где $E_0(t)$ ограничена (или постоянная),

$$E_-(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

$$E_+(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty \text{ или } E_+(t) \equiv 0.$$

Аналогично можно рассмотреть поведение степени матрицы A^k с ростом k . Возможны следующие случаи:

1) если $|\lambda_k| < 1$ для всех λ_k , то

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0;$$

2) если $|\lambda_k| \leq 1$ и для тех k , для которых $|\lambda_k| = 1$, имеем $\mu_k = 1$, то матрица A^k ограничена;

3) если при некотором k имеем $|\lambda_k| > 1$, либо $|\lambda_k| = 1$, но $\mu_k > 1$, то

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Таким образом, для любой матрицы A верно представление

$$A^k = E_- + E_0 + E_+,$$

где E_0 ограничена (или постоянная),

$$E_- \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

$$E_+ \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty \text{ или } E_+ \equiv 0.$$

Приведем несколько полезных свойств матричной экспоненты.

1. $e^0 = I$.

2. Если $A = \text{diag}\{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n\}$, то

$$e^A = \text{diag}\{e^{a_1} \ e^{a_2} \ \dots \ e^{a_n}\};$$

в частности, если $A = aI$, то $e^A = e^a I$.

3. Если матрицы A и B коммутируют, то

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

(обратное, вообще говоря, неверно).

С другой стороны, если $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$ для всех $t \in (t_1, t_2)$, то $AB = BA$.

4. $e^A e^{-A} = I$; в частности, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ для любой (вырожденной или нет) матрицы A .

5.

$$A e^{At} = e^{At} A;$$

6.

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At};$$

7. Если матрица A обратима, то

$$\int e^{At} dt = A^{-1} e^{At} + C,$$

где C — постоянная матрица; в частности,

$$\int_0^t e^{A\tau} d\tau = A^{-1}(e^{At} - I),$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{A\tau} d\tau = -A^{-1}$$

для устойчивых A .

Пример В.1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

с собственными значениями

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2;$$

при этом интерполяционный полином (первого порядка) будет иметь вид

$$g(s) = a + bs.$$

Вычислим e^A ; для этого найдем коэффициенты a и b интерполяционного полинома из соотношений

$$e^{\lambda_1} = a + b\lambda_1,$$

$$e^{\lambda_2} = a + b\lambda_2,$$

или

$$e = a + b,$$

$$e^2 = a + 2b,$$

откуда

$$a = 2e - e^2, \quad b = e^2 - e.$$

Таким образом,

$$e^A = \begin{pmatrix} 2e^2 - e & e^2 - e \\ 2(e - e^2) & 2e - e^2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично находится величина A^k ; в этом случае коэффициенты интерполяционного полинома ищутся из соотношений

$$\lambda_1^k = a + b\lambda_1,$$

$$\lambda_2^k = a + b\lambda_2$$

или

$$1 = a + b,$$

$$2^k = a + 2b,$$

откуда

$$a = 2 - 2^k, \quad b = 2^k - 1.$$

Таким образом,

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 1 & 2^k - 1 \\ 2 - 2^{k+1} & 2 - 2^k \end{pmatrix}.$$

Наконец, заметим, что для матрицы $A \succ 0$ существует единственная матрица $B \succ 0$, такая что $BB = A$; она называется *квадратным корнем* из матрицы A и обозначается через

$$B = A^{1/2}.$$

Г. Линейные матричные неравенства

Введем в рассмотрение следующую линейную матричнозначную функцию векторного аргумента $x \in \mathbb{R}^\ell$:

$$F(x) \doteq F_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i F_i, \quad (\text{Г.1})$$

где $F_i = F_i^\top \in \mathbb{S}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, \ell$, — известные фиксированные вещественные симметричные матрицы, называемые иногда *коэффициентами*, а x_i , $i = 1, \dots, \ell$, — скалярные переменные.

Запись

$$F(x) \prec 0, \quad (\text{Г.2})$$

в которой неравенство понимается в смысле знакоопределенности матрицы (см. Приложение А), называется *линейным матричным неравенством в канонической форме* относительно переменных x_1, \dots, x_ℓ . Заметим, что матричное неравенство (Г.2) эквивалентно числовому неравенству

$$\lambda_{\max}(F(x)) < 0,$$

но функция $\lambda_{\max}(F(x))$ *нелинейна* по x .

Строго говоря, правильнее было бы использовать термин «аффинное матричное неравенство», поскольку функция (Г.1) аффинна, но по сложившейся традиции принято наименование «линейное матричное неравенство» (Linear Matrix Inequality, LMI).

Важно отметить, что принципиальным свойством линейных матричных неравенств является *выпуклость* множества его решений (она доказывается непосредственно по определению), которая позволяет формулировать многие задачи оптимального управления в виде задач выпуклого программирования.

Приведем еще несколько простых полезных свойств линейных матричных неравенств, непосредственно следующих из свойств знакоопределенных матриц.

Например, неравенство обратного знака сводится к неравенству вида (Г.2) очевидным образом: $F(x) \succ 0$ тогда и только тогда, когда $-F(x) \prec 0$, а запись

$$F(x) \prec G(x)$$

для линейных функций $F(x)$, $G(x)$ вида (Г.1) эквивалентна матричному неравенству

$$F(x) - G(x) \prec 0.$$

Далее, поскольку несколько линейных матричных неравенств

$$F_j(x) \prec 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

эквивалентны одному блочно-диагональному:

$$\begin{pmatrix} F_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & F_m(x) \end{pmatrix} \prec 0,$$

можно не делать разницы между системой линейных матричных неравенств и одним линейным матричным неравенством.

Еще одно часто используемое свойство заключается в сохранении знака строгого линейного матричного неравенства при умножении слева и справа на произвольную невырожденную матрицу M :

$$F(x) \prec 0 \implies MF(x)M^\top \prec 0, \quad \det M \neq 0.$$

Для нестрогого линейного матричного неравенства это свойство выполняется независимо от вырожденности или невырожденности матрицы M .

Как правило, приходится иметь дело с линейными матричными неравенствами, в которых переменными являются не скаляры, как в (Г.2), а матрицы. Типичным примером таких линейных матричных неравенств является условие на знакоопределенность матрицы: $Q \succ 0$, или, более содержательно, рассматривавшееся выше классическое неравенство Ляпунова вида

$$A^\top Q + QA + R \prec 0, \quad R \succ 0, \quad (\text{Г.3})$$

где переменной является симметричная матрица Q .

Матричная форма линейных матричных неравенств естественным образом возникает при формулировании задач управления; помимо удобства записи она также может способствовать более эффективным вычислениям. Неравенства типа (Г.3) будем называть линейными матричными неравенствами относительно матричной переменной $Q = Q^\top$.

При необходимости матричная форма (Г.3) легко может быть приведена к каноническому виду. Именно, пусть

$$E_1, \dots, E_\ell, \quad \ell = \frac{n(n+1)}{2},$$

базис в пространстве $\mathbb{S}^{n \times n}$ симметричных матриц; тогда, имея представление $Q = \sum_{i=1}^{\ell} x_i E_i$ для $Q \in \mathbb{S}^{n \times n}$, вместо (Г.3) получаем

$$\underbrace{R}_{F_0} + \sum_{i=1}^{\ell} x_i \underbrace{(AE_i + E_i A^\top)}_{F_i} \prec 0.$$

Введем следующее важное понятие.

Определение Г.1. Совокупность точек

$$\mathcal{D}_{\text{feas}} \doteq \{x \in \mathbb{R}^{\ell} : F(x) \preceq 0\}$$

называется *допустимой областью* линейного матричного неравенства $F(x) \preceq 0$.

Очевидно, $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ — совокупность решений линейного матричного неравенства — представляет собой выпуклую область, возможно неограниченную, возможно пустую. Отсюда, в частности, следует очевидное, но важное наблюдение: если матрицы F_i диагональные, то линейное матричное неравенство представляет собой набор линейных *алгебраических* ограничений на переменную $x \in \mathbb{R}^{\ell}$, так что $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ — многогранник.

Сформулируем две основные проблемы теории линейных матричных неравенств.

Определение Г.2. Задача *разрешимости (допустимости)* заключается в отыскании некоторой точки $x \in \mathcal{D}_{\text{feas}}$ или в доказательстве того, что такой точки не существует.

Типичным примером задачи допустимости является отыскание общей квадратичной функции Ляпунова для семейства линейных стационарных систем

$$\dot{x} = A_i x, \quad i = 1, \dots, k,$$

что сводится к проверке разрешимости конечного числа линейных матричных неравенств

$$A_i^\top Q + Q A_i \preceq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

относительно матричной переменной $Q \succ 0$.

Еще одна важная задача теории линейных матричных неравенств — это оптимизация критерия на множестве, заданном линейными матричными неравенствами.

Определение Г.3. Задача минимизации линейной функции

$$c^\top x \longrightarrow \min$$

при ограничениях в виде линейных матричных неравенств

$$F_i(x) \preceq 0$$

называется задачей *полуопределенного программирования* (Semi-Definite Programming или SDP).

Очевидно, задача *максимизации* линейной функции $c^\top x$ сводится к стандартной задаче полуопределенного программирования заменой знака целевой функции.

Для задачи полуопределенного программирования можно использовать следующую запись:

$$\gamma \longrightarrow \min \quad \text{при} \quad F(x, \gamma) \preceq 0, \quad (\text{Г.4})$$

где функция $F(x, \gamma)$ аффинна по совокупности переменных x, γ . Действительно, в задаче из определения Г.3 введем дополнительную скалярную переменную γ и составим неравенство

$$c^\top x \leq \gamma.$$

Поскольку оно является линейным матричным неравенством со скалярными коэффициентами c_i , добавим его к исходному набору линейных матричных ограничений $F(x) \preceq 0$. Минимизация величины γ на множестве, задаваемом такой расширенной системой линейных матричных неравенств, эквивалентна исходной задаче полуопределенного программирования.

Замечание Г.1. Для решения задач полуопределенного программирования к настоящему времени разработаны мощные оптимизационные процедуры, в частности, основанные на так называемом методе внутренней точки. Эти процедуры эффективно реализованы в различных программных средах, в том числе в системе МАТЛАВ, широко применяемой в научных и инженерных приложениях. Таким образом, можно сказать, что если ту или иную задачу удалось свести к формату полуопределенного программирования, то по существу она решена — ее дальнейшее решение не составляет большой проблемы.

Для среды МАТЛАВ разработаны свободно распространяемые специализированные программные пакеты YALMIP, SeDuMi, svx и др. Именно эта система послужила вычислительным средством решения примеров в книге. ▼

В приложении Д будет показано, что в терминах линейных матричных неравенств можно формулировать ограничения на матричную норму, выпуклые квадратичные матричные неравенства, условия на взаимнообратные матрицы, а также описывать широкие классы неопределенностей, присутствующих в системе управления.

Опишем теперь важный технический прием (ср. с альтернативной формой записи (Г.4)), который позволяет упростить минимизируемую функцию в задаче полуопределенного программирования.

Лемма Г.1. *Задача*

$$\operatorname{tr} L_1(P) \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$L_2(P) \preceq 0,$$

где $P = P^\top$ — матричная переменная, а $L_1(P)$, $L_2(P)$ — некоторые линейные функции, эквивалентна задаче полуопределенного программирования

$$\operatorname{tr} Z \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$L_2(P) \preceq 0, \quad L_1(P) \preceq Z,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $P = P^\top$ и $Z = Z^\top$.

Замечание Г.2. Нетрудно видеть, что полученный результат будет справедлив не только для функции следа, но и для любой монотонной функции $\varphi(\cdot)$, то есть такой, что

$$F \preceq G \implies \varphi(F) \leq \varphi(G),$$

например, $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|$. ▼

Д. Лемма Шура и следствия из нее

В качестве одного из наиболее эффективных средств в рамках техники линейных матричных неравенств часто используется так называемая *лемма Шура*. Приведем ее в следующей формулировке.

Лемма Д.1 (Лемма Шура). Пусть

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

где $M_{11} = M_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $M_{22} = M_{22}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Тогда

$$M \succ 0 \iff M_{22} \succ 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \succ 0.$$

Матрица $M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top$ называется *дополнением по Шуру* к блоку M_{22} в матрице M .

Следующий результат представляет собой модификацию леммы Шура для *нестромого* матричного неравенства.

Следствие Д.1. Пусть

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

где $M_{11} = M_{11}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а $M_{22} = M_{22}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — невырожденная матрица.

Тогда

$$M \succcurlyeq 0 \iff M_{22} \succ 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \succcurlyeq 0.$$

Замечание Д.1. Лемма Шура справедлива в следующей «симметричной» формулировке:

$$M \succ 0 \iff M_{11} \succ 0, \quad M_{22} - M_{12}^\top M_{11}^{-1}M_{12} \succ 0.$$

Из леммы Шура для нестрогих неравенств и свойств определенных матриц (см. Приложение А) вытекает следующее важное следствие.

Следствие Д.2. Пусть матрица

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

причем $M_{22} \prec 0$, а M_{12} — матрица максимального строчного ранга.

Тогда

$$M_{11} \prec 0.$$

Основное применение леммы Шура — сведение нелинейных матричных неравенств к линейным, в частности, переход от обратных матриц к прямым. Приведем наиболее важные приемы.

Рассмотрим матричное неравенство Риккати

$$A^\top Q + QA - QBS^{-1}B^\top Q + R \succ 0, \quad S \succ 0,$$

относительно матричной переменной $Q \succ 0$; оно часто встречается в задачах оптимального управления и является квадратичным по Q . Раскрывая это матричное неравенство с помощью леммы Шура (иными словами, применяя ее в «обратную сторону»), приходим к эквивалентной записи в виде линейного матричного неравенства:

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + R & QB \\ B^\top Q & S \end{pmatrix} \succ 0,$$

откуда, в частности, следует, что множество решений неравенства Риккати выпукло (что совсем не очевидно!).

Пусть $F(x)$ — аффинная матричная функция от векторной переменной $x \in \mathbb{R}^\ell$ и имеется ограничение на ее спектральную норму:

$$\|F(x)\|_2 \leq 1.$$

Поскольку по лемме Б.1 из Приложения Б последнее неравенство эквивалентно матричному неравенству

$$F^\top(x)F(x) \preceq I,$$

по лемме Шура получаем

$$\begin{pmatrix} I & F(x) \\ F^\top(x) & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

что является уже линейным матричным неравенством относительно x . В частности, ограничение $|x| \leq 1$ на величину евклидовой нормы вектора x можно записать в линейном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & x^\top \\ x & I \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — симметричные аффинные матричнозначные функции от $x \in \mathbb{R}^\ell$ и имеется нелинейное ограничение

$$F(x) \preceq G^{-1}(x) \prec 0.$$

По лемме Шура оно эквивалентно линейному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} F(x) & I \\ I & G(x) \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Следующий прием позволяет свести минимизацию некоторой специальной нелинейной функции матричного аргумента при линейных матричных ограничениях к эквивалентной задаче полуопределенного программирования.

Лемма Д.2. Задача

$$\operatorname{tr} Y P^{-1} Y^{\top} \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$L(P, Y) \preceq 0,$$

где $P = P^{\top}$, Y — матричные переменные соответствующей размерности, а $L(P, Y)$ — некоторая линейная функция, эквивалентна следующей задаче полуопределенного программирования:

$$\operatorname{tr} Z \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$L(P, Y) \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^{\top} & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\top}$, Y , $Z = Z^{\top}$.

Отметим, что этот результат остается справедливым, если вместо следа используется любая иная монотонная функция (ср. с замечанием Г.2 из Приложения Г).

Из Леммы Д.2 вытекает важное следствие.

Следствие Д.3. Задача

$$\operatorname{tr} P^{-1} \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$L(P) \preceq 0,$$

где $P = P^{\top}$ — матричная переменная, а $L(P)$ — некоторая линейная функция, эквивалентна задаче полуопределенного программирования

$$\operatorname{tr} Z \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$L(P) \preceq 0, \quad \begin{pmatrix} Z & I \\ I & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $P = P^{\top}$ и $Z = Z^{\top}$.

Е. Матричное описание эллипсоидов

Эллипсоид можно описать как образ единичного шара при аффинном отображении:

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: x = Ry + x_c, y \in \mathbb{R}^m, |y| \leq 1\}, \quad (\text{E.1})$$

где $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — прямоугольная матрица, а x_c — центр эллипсоида (в дальнейшем почти всегда будем иметь дело с эллипсоидами, центр которых совпадает с началом координат). Отметим выпуклость данного представления по совокупности R и x_c .

В частности, если R — матрица максимального строчного ранга, представлению (E.1) можно придать вид

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: (x - x_c)^\top P^{-1}(x - x_c) \leq 1\}, \quad P = RR^\top, \quad (\text{E.2})$$

или

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: (x - x_c)^\top Q(x - x_c) \leq 1\}, \quad Q = P^{-1}. \quad (\text{E.3})$$

Две последние формы записи наиболее удобны с точки зрения построения квадратичных функций Ляпунова. Матрицу P будем называть *матрицей эллипсоида* (E.2).

Отметим принципиальное различие форм (E.2) и (E.3) с точки зрения задач оптимизации. Представление (E.2) нелинейно по совокупности x_c и P , однако оно может быть приведено к линейному с помощью леммы Шура:

$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n: \begin{pmatrix} 1 & (x - x_c)^\top \\ x - x_c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0\right\}. \quad (\text{E.4})$$

Представление (E.3) также нелинейно по совокупности параметров Q и x_c , но избавиться от этой нелинейности не удается.

Можно рассматривать эллипсоиды в представлении (E.4) с неотрицательно определенной матрицей P . Множество, задаваемое таким образом, представляет собой эллипсоид меньшей размерности, лежащий в подпространстве, натянутом на собственные векторы матрицы P , отвечающие ненулевым собственным значениям. Аналогично, эллипсоид вида (E.3) с неотрицательно определенной матрицей Q является вырожденным (неограниченным) — содержащим нуль-пространство (ядро) линейного преобразования, задаваемого матрицей Q .

В зависимости от постановки задачи минимизации размера эллипсоида приходится использовать ту или иную форму записи.

Наконец упомянем еще один способ матричного описания эллипсоидов — с помощью выпуклой квадратичной функции

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top Ax + 2x^\top b + c \leq 0\}, \quad (\text{E.5})$$

где

$$A \succ 0, \quad b^\top A^{-1}b - c > 0.$$

Это описание является однородным (можно одновременно умножить матрицу A , вектор b и число c на произвольное положительное число) и линейным по параметрам эллипсоида A , b и c .

Несложно переходить и от одного представления к другому. В самом деле, эллипсоид (E.2) представим в виде (E.5) с

$$A = P^{-1}, \quad b = -P^{-1}x_c, \quad c = x_c^\top P^{-1}x_c - 1.$$

Обратно, эллипсоид (E.5) представим в виде (E.2) при

$$P = (b^\top A^{-1}b - c)A^{-1}, \quad x_c = -A^{-1}b.$$

В заключение приведем точную формулировку хорошо известного факта о линейном образе эллипсоида.

Лемма E.1. *Образом эллипсоида*

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

при линейном отображении $z = Cx$, где C — матрица максимального ранга, является эллипсоид

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l : z^\top (CPC^\top)^{-1}z \leq 1\}.$$

Замечание E.1. Условие полноты ранга матрицы C гарантирует невырожденность матрицы CPC^\top и, как следствие, полномерность эллипсоида \mathcal{E}_z . ▼

Наконец, объем n -мерного эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

равен

$$\text{Vol}(\mathcal{E}) = c_n \sqrt{\det P},$$

где $c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$ — объем единичного шара в \mathbb{R}^n , а Γ — гамма-функция.

Ж. S-процедура

Теорема Ж.1 (S-процедура). Пусть даны однородные квадратичные формы

$$f_i(x) = x^T A_i x, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$. Если существуют числа $\tau_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что

$$A_0 \preceq \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad \alpha_0 \geq \sum_{i=1}^m \tau_i \alpha_i, \quad (\text{Ж.1})$$

то неравенства

$$f_i(x) \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{Ж.2})$$

влекут неравенство

$$f_0(x) \leq \alpha_0. \quad (\text{Ж.3})$$

Обратно, если из (Ж.2) следует (Ж.3) и выполняется любое из условий:

- а) $m = 1$;
- б) $m = 2$, $n \geq 3$ и существуют числа μ_1, μ_2 и вектор $x^0 \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 \succ 0, \quad f_1(x^0) < \alpha_1, \quad f_2(x^0) < \alpha_2, \quad (\text{Ж.4})$$

то найдутся $\tau_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что выполняются соотношения (Ж.1).

Нетривиальной частью этого утверждения является необходимость условия (Ж.1) при $m = 1, 2$. Можно показать, что при $m > 2$ аналогичный результат не имеет места.

Вообще, говорят, что S-процедура *неущербна*², если она предоставляет не только достаточные, но и необходимые условия. В противном случае говорят, что S-процедура *ущербна*.

Таким образом, S-процедура неущербна при наличии одного ограничения, а для случая двух ограничений требуется дополнительно выполнение условий (Ж.4).

Приведем формулировку S-процедуры в случае строго неравенства.

²В западной литературе используется термин *lossless*.

Теорема Ж.2. Пусть заданы однородные квадратичные формы

$$f_i(x) = x^\top A_i x, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A_i = A_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Если существуют числа $\tau_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что

$$A_0 \prec \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad (\text{Ж.5})$$

то неравенства

$$f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{Ж.6})$$

влекут неравенство

$$f_0(x) < 0 \quad (\text{Ж.7})$$

для всех $x \neq 0$.

Обратно, если из (Ж.6) следует (Ж.7) и выполняется любое из условий:

а) $m = 1$;

б) $m = 2$, $n \geq 3$ и существует вектор $x^0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$f_1(x^0) < 0, \quad f_2(x^0) < 0,$$

то найдутся $\tau_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что выполняются соотношения (Ж.5).

Замечание Ж.1. Утверждения теоремы Ж.1 и теоремы Ж.2 останутся справедливыми и в том случае, если одно или несколько неравенств в (Ж.2) (соответственно в (Ж.6)) заменить на равенства; при этом будет отсутствовать требование неотрицательности соответствующих коэффициентов τ_i . ▼

Частным случаем S -процедуры является так называемая *лемма Финслера*, которую приведем в следующей формулировке.

Лемма Ж.1 (Финслер). Пусть $A_0, A_1 \in \mathbb{S}^{n \times n}$. Условие

$$x^\top A_0 x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top A_1 x = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда найдется число γ такое, что

$$A_0 \succcurlyeq \gamma A_1.$$

Замечание Ж.2. При $A_1 \succcurlyeq 0$ можно уточнить, что $\gamma < 0$. ▼

На лемме Финслера, в частности, основан следующий полезный прием. Часто приходится иметь дело с неравенствами вида

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно двух матриц Y и P . Оказывается, как вытекает из следующей леммы, из него можно исключить переменную Y .

Лемма Ж.2. *Линейное матричное неравенство*

$$BY + Y^\top B^\top \preccurlyeq Q,$$

разрешимо относительно матричной переменной Y тогда и только тогда, когда существует число $\gamma < 0$ такое, что

$$\gamma BB^\top \preccurlyeq Q.$$

При этом можно положить

$$Y = \frac{\gamma}{2} B^\top.$$

Следствие Ж.1. *Матричное неравенство*

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \preccurlyeq 0$$

разрешимо относительно матричных переменных $P \succ 0$ и Y тогда и только тогда, когда матричное неравенство

$$AP + PA^\top - BB^\top \preccurlyeq 0$$

разрешимо относительно матричной переменной $P \succ 0$.

3. Лемма Питерсена

Одним из основных технических средств работы с структурированной матричной неопределенностью является так называемая лемма Питерсена; она эффективно применяется во всех робастных постановках задач. Эта лемма является удобным инструментом анализа *робастной квадратичной устойчивости* систем со структурированной неопределенностью, позволяя отыскивать общую квадратичную функцию Ляпунова.

Пусть $G \in \mathbb{S}^{n \times n}$ — вещественная симметричная матрица; рассмотрим ее возмущение вида

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top, \quad (3.1)$$

где $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ — возмущающая матрица, а $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ — постоянные «обрамляющие» матрицы соответствующих размерностей, задающие структуру неопределенности. В этой схеме симметричное возмущение задается с помощью матрицы Δ , которая не обязана быть симметричной и даже квадратной.

Мы хотим ответить на вопрос о том, при каких условиях возмущенная матрица (3.1) является знакоопределенной при всех ограниченных по норме возмущениях Δ :

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \succ 0 \quad \text{при всех } \Delta: \|\Delta\| \leq 1.$$

Мы будем называть эти условия *леммой Питерсена*; приведем этот результат в следующей формулировке.

Лемма 3.1 (Лемма Питерсена). Пусть $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ — ненулевые матрицы. Неравенство

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \succ 0$$

справедливо для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$: $\|\Delta\| \leq 1$ тогда и только тогда, когда существует число ε такое, что

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \succ 0.$$

Обратим внимание на то, что матричная неопределенность Δ не предполагается фиксированной; единственное требование — ее ограниченность по норме. Таким образом, полученный результат и его модификации, приводимые ниже, справедливы в том числе и для нестационарной неопределенности $\|\Delta(t)\| \leq 1$.

Следующий вариант леммы Питерсена — для случая *строгого* матричного неравенства.

Лемма 3.2. Пусть $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Неравенство

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \prec 0$$

справедливо для всех

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}: \|\Delta\| \leq 1$$

тогда и только тогда, когда существует число ε такое, что

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^T & N^T \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0.$$

Итак, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности семейства (3.1) к задаче разрешимости линейного матричного неравенства относительно одной скалярной переменной ε .

Следующий полезный результат представляет собой обобщение достаточной части леммы Питерсена.

Лемма 3.3. Пусть $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Тогда

$$M\Delta N + N^T \Delta^T M^T \preceq \varepsilon MM^T + \frac{1}{\varepsilon} N^T N$$

для любого $\varepsilon > 0$ и всех

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}: \|\Delta\| \leq 1 \quad \text{или} \quad \|\Delta\|_F \leq 1.$$

Следствие 3.1. Пусть $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Тогда

$$M\Delta N + N^T \Delta^T M^T \preceq \gamma \left(\varepsilon MM^T + \frac{1}{\varepsilon} N^T N \right)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и всех

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}: \|\Delta\| \leq \gamma \quad \text{или} \quad \|\Delta\|_F \leq \gamma.$$

Лемма Питерсена решает задачу анализа, предоставляя необходимое и достаточное условие робастной знакоопределенности семейства (3.1) при фиксированном уровне возмущения Δ . Естественным обобщением этого результата является отыскание максимально допустимого уровня, сохраняющего знакоопределенность семейства

$$G + M\Delta N + N^T \Delta^T M^T, \quad \|\Delta\| \leq \gamma. \quad (3.2)$$

Предполагая далее, что $G \prec 0$, введем в рассмотрение *радиус знакоопределенности* (робастности) семейства (3.2):

$$\gamma_{\max} = \sup \{ \gamma: G + M\Delta N + N^T \Delta^T M^T \prec 0 \text{ для всех } \|\Delta\| \leq \gamma \}.$$

Теорема 3.1. Пусть $\hat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования

$$\gamma \longrightarrow \max$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon MM^\top & \gamma N^\top \\ \gamma N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0$$

относительно скалярных переменных ε и γ .

Тогда радиус знакоопределенности семейства (3.2) равен $\hat{\gamma}$.

Таким образом, нахождение радиуса знакоопределенности сводится к простой задаче полуопределенного программирования.

II. Уравнение Ляпунова и его свойства

Результаты, излагаемые в следующих двух параграфах, широко используются для анализа устойчивости линейных непрерывных и дискретных систем.

Определение II.1. Пусть $A, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Матричное уравнение

$$AP + PA^\top = -R, \quad R = R^\top, \quad (\text{II.1})$$

называется *уравнением Ляпунова* относительно матрицы $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Дальше в этом параграфе будут изучены свойства решений уравнений и неравенств Ляпунова для устойчивой матрицы A .

Лемма II.1 (Уравнение Ляпунова). Если для всех собственных значений λ_i матрицы A выполнено условие

$$\operatorname{Re}(\lambda_i + \lambda_j) \neq 0, \quad (\text{II.2})$$

то существует единственное решение $P = P^\top$ уравнения Ляпунова (II.1).

При этом если $R \succ 0$ или $R = BB^\top$ и матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг n , то уравнение Ляпунова (II.1) имеет положительно определенное решение

$$P = \int_0^\infty e^{At} R e^{A^\top t} dt \succ 0 \quad (\text{II.3})$$

тогда и только тогда, когда матрица A гурвицева.

Наконец, если матрица A гурвицева и $R \succ 0$, то и $P \succ 0$.

Требование полноты ранга матрицы U играет фундаментальную роль при анализе и синтезе управления в линейных системах. Оно присутствует в формулировках основных утверждений этого раздела.

Доказательство. Как известно, если квадратные матрицы A и B не имеют одинаковых собственных значений, то матричное уравнение $AX = XB$ имеет только нулевое решение; при этом, очевидно, матричное уравнение $AX - XB = C$ имеет единственное решение. Таким образом, при выполнении условий (И.2) уравнение Ляпунова (И.1) будет иметь единственное (симметрическое) решение.

Пусть матрица A гурвицева. Тогда выполнено условие (И.2) и, по доказанному, уравнение Ляпунова имеет единственное решение.

В силу гурвицевости матрицы A интеграл в (И.3) сходится. При этом он определяет симметрическую матрицу $P = P^\top$, удовлетворяющую уравнению Ляпунова (И.1):

$$\begin{aligned} AP + PA^\top &= \int_0^\infty (Ae^{At} R e^{A^\top t} + e^{At} R e^{A^\top t} A^\top) dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{At} R e^{A^\top t}) dt = e^{At} R e^{A^\top t} \Big|_0^\infty = -R. \end{aligned}$$

Очевидно, что $P \succ 0$ при $R \succ 0$. Если же $R = BB^\top$ и ранг матрицы U равен n , то согласно теореме К.1 из Приложения К имеем

$$\int_0^\infty e^{At} BB^\top e^{A^\top t} dt \succ 0.$$

Покажем обратное. Пусть $P \succ 0$ — решение уравнения Ляпунова (И.1). Предположим, что матрица A не является гурвицевой; тогда найдется ее собственное значение λ , вообще говоря, комплексное, такое что $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Пусть $v \in \mathbb{C}^n$ — левый собственный вектор, соответствующий собственному значению λ , то есть

$$v^* A = \lambda v^*.$$

При $R \succ 0$ имеем

$$v^* R v > 0.$$

Если же $R = BB^T$, а $\text{rank } U = n$, то по теореме К.1 из Приложения К имеем $v^*B \neq 0$, откуда вновь

$$v^*Rv = v^*BB^Tv = |v^*B|^2 > 0.$$

С другой стороны

$$v^*Rv = -v^*(AP + PA^T)v = -\underbrace{(\lambda + \lambda^*)}_{\geq 0} v^*Pv \leq 0.$$

Придя к противоречию, убеждаемся в гурвицевости матрицы A .

Заключительное утверждение леммы очевидно. \blacksquare

Часто будет также рассматриваться уравнение Ляпунова вида

$$A^T Q + QA = -R, \quad R = R^T.$$

Поскольку операция транспонирования сохраняет гурвицевость матрицы, Лемма И.1 (с соответствующими изменениями) сохраняет свою силу.

Из Леммы И.1 вытекают почти очевидные, но важные следствия.

Следствие И.1. *Если матрица A гурвицева, то матричное неравенство*

$$AP + PA^T \prec 0 \tag{И.4}$$

разрешимо, причем все его решения положительно определены.

Если неравенство (И.4) имеет положительно определенное решение, то матрица A гурвицева.

Если матрица A гурвицева, матричное неравенство

$$AP + PA^T \preceq 0 \tag{И.5}$$

разрешимо и все его решения неотрицательно определены.

Доказательство. Заметим, что любое решение матричного неравенства (И.4) является решением соответствующего уравнения (И.1) при некоторой $R = R^T \succ 0$. Пусть матрица A гурвицева; тогда по Лемме И.1 уравнение

$$AP + PA^T = -R$$

имеет решение $P \succ 0$ при любой матрице $R = R^T \succ 0$. Матрица P , очевидно, удовлетворяет матричному неравенству (И.4).

Пусть $P \succ 0$ является решением неравенства (И.4). Это означает, что

$$AP + PA^\top = -R$$

при некоторой $R = R^\top \succ 0$. Таким образом, матрица $P \succ 0$ удовлетворяет уравнению Ляпунова с отрицательно определенной правой частью; по лемме И.1, матрица A гурвицева.

Заметим, что любое решение матричного неравенства (И.5) является решением соответствующего матричного уравнения при некоторой матрице $R = R^\top \succ 0$. Пусть матрица P удовлетворяет неравенству (И.5), тогда

$$AP + PA^\top = -R, \quad R \succ 0.$$

По лемме И.1, с учетом гурвицевости матрицы A , имеем $P \succ 0$. ■

Следствие И.2. *Решение матричного неравенства*

$$A^\top Q + QA \prec 0 \tag{И.6}$$

положительно определено тогда и только тогда, когда матрица A гурвицева.

Если матрица A гурвицева, то решение матричного неравенства

$$A^\top Q + QA \preceq 0 \tag{И.7}$$

является неотрицательно определенным.

Матричное неравенство (И.6) называется *двойственным* к матричному неравенству (И.4), а неравенство (И.7) — *двойственным* к матричному неравенству (И.5). Эти двойственные неравенства эквивалентны в том смысле, что если (И.5) выполнено с некоторой $P \succ 0$, то (И.7) выполнено с $Q = P^{-1}$ и наоборот.

Определение И.2. Матричное неравенство

$$AP + PA^\top \preceq -R, \quad R = R^\top, \tag{И.8}$$

называется *неравенством Ляпунова* относительно матрицы P .

Лемма И.2 (неравенство Ляпунова). *Пусть A гурвицева матрица. Если $R \succ 0$ или $R = BB^\top$ и матрица*

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг n , то неравенство Ляпунова (И.8) разрешимо, причем для любого его решения P справедлива оценка

$$P \succcurlyeq P_-,$$

где $P_- \succ 0$ — решение соответствующего уравнения Ляпунова.

Доказательство. Неравенство (И.8) разрешимо, поскольку в силу леммы И.1 существует решение соответствующего уравнения Ляпунова. Далее, имеем

$$AP + PA^\top \preccurlyeq -R = AP_- + P_-A^\top,$$

или

$$A(P - P_-) + (P - P_-)A^\top \preccurlyeq 0,$$

откуда, по следствию И.1, в силу гурвицевости матрицы A ,

$$P - P_- \succcurlyeq 0. \quad \blacksquare$$

Таким образом, среди всех решений неравенства Ляпунова минимальным (по отношению порядка \preccurlyeq) является то, которое доставляет решение соответствующему уравнению Ляпунова. Принимая во внимание свойство 11 знакоопределенных матриц из Приложения А, получаем следующий результат, который позволяет находить решение матричных уравнений через решение соответствующих неравенств.

Следствие И.3. Пусть матрица A гурвицева, матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг n , и пусть C — матрица максимального строчного ранга. Тогда решение задачи

$$\text{tr } CPC^\top \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$AP + PA^\top + BB^\top \preccurlyeq 0$$

достигается на решении уравнения Ляпунова

$$AP + PA^\top + BB^\top = 0.$$

Перейдем к случаю дискретного времени.

Определение И.3. Пусть $A, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Матричное уравнение

$$APA^T - P = -R, \quad R = R^T, \quad (\text{И.9})$$

называется *дискретным уравнением Ляпунова* относительно матрицы $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Следующая лемма является дискретным аналогом Леммы И.1.

Лемма И.3 (Дискретное уравнение Ляпунова). Пусть для всех собственных значений λ_i матрицы A выполнено условие

$$\lambda_i \lambda_j \neq 1. \quad (\text{И.10})$$

Тогда существует единственное решение $P = P^T$ дискретного уравнения Ляпунова (И.9).

При этом если $R \succ 0$ или $R = BB^T$ и матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг n , то дискретное уравнение Ляпунова (И.9) имеет положительно определенное решение

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k R (A^T)^k \succ 0 \quad (\text{И.11})$$

тогда и только тогда, когда A — шуровская матрица.

Наконец, если матрица A шуровская и $R \succcurlyeq 0$, то и $P \succcurlyeq 0$.

Доказательство. Аналогично непрерывному случаю, легко убедиться в том, что если квадратные матрицы A и B не имеют взаимно обратных собственных значений, то матричное уравнение $AXB = X$ имеет только нулевое решение; при этом, очевидно, матричное уравнение $AXB - X = C$ имеет единственное решение. Таким образом, при выполнении условий (И.10) уравнение Ляпунова (И.9) будет иметь единственное (симметрическое) решение.

Пусть матрица A шуровская. Тогда выполнено условие (И.10) и, по доказанному, дискретное уравнение Ляпунова имеет единственное решение.

При этом, в силу устойчивости матрицы A , ряд в (И.11) сходится и определяет симметрическую матрицу $P = P^T$, удовлетворяющую уравнению Ляпунова (И.9):

$$\begin{aligned} APA^\top - P &= A \sum_{k=0}^{\infty} A^k R (A^\top)^k A^\top - \sum_{k=0}^{\infty} A^k R (A^\top)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1} R (A^\top)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} A^k R (A^\top)^k = -R. \end{aligned}$$

Очевидно, что $P \succ 0$ при $R \succ 0$. Если же $R = BB^\top$ и $\text{rank } U = n$, то согласно теореме К.2 из Приложения К грамиан управляемости

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k BB^\top (A^\top)^k \succ 0.$$

Покажем обратное. Пусть $P \succ 0$ — решение уравнения Ляпунова (И.9). Предположим, что матрица A не является шуровской; тогда найдется ее собственное значение λ , такое что $|\lambda| \geq 1$, и пусть v — соответствующий ему левый собственный вектор:

$$v^* A = \lambda v^*.$$

Тогда при $R \succ 0$ имеем

$$v^* R v > 0.$$

Если же $R = BB^\top$, а $\text{rank } U = n$, то по теореме К.2 из Приложения К имеем $v^* B \neq 0$, откуда вновь

$$v^* R v = v^* BB^\top v = |v^* B|^2 > 0.$$

С другой стороны,

$$v^* R v = -v^* (APA^\top - P)v = -\underbrace{(\lambda\lambda^* - 1)}_{\geq 0} v^* P v \leq 0.$$

Полученное противоречие доказывает дискретную устойчивость матрицы A .

Заключительное утверждение леммы очевидно. ■

С другой стороны, уравнение (И.9) представимо в виде

$$P = APA^\top + R$$

и, в предположениях леммы И.3, для нахождения его решения можно воспользоваться простым итерационным методом

$$P_{k+1} = AP_k A^\top + R,$$

который сходится со скоростью геометрической прогрессии при любом начальном приближении.

Отметим важные следствия из леммы И.3, которые доказываются точно так же, как и их непрерывные аналоги.

Следствие И.4. *Если матрица A шуровская, то матричное неравенство*

$$APA^T - P \prec 0 \quad (\text{И.12})$$

разрешимо, причем все его решения положительно определены.

Если неравенство (И.12) имеет положительно определенное решение, то матрица A шуровская.

Если матрица A шуровская, матричное неравенство

$$APA^T - P \preceq 0 \quad (\text{И.13})$$

разрешимо и все его решения неотрицательно определены.

Следствие И.5. *Решение матричного неравенства*

$$A^TQA - Q \prec 0 \quad (\text{И.14})$$

положительно определено тогда и только тогда, когда матрица A шуровская.

Если матрица A шуровская, то решение матричного неравенства

$$A^TQA - Q \preceq 0 \quad (\text{И.15})$$

является неотрицательно определенным.

Матричное неравенство (И.14) будем называть *двойственным* к матричному неравенству (И.12), а неравенство (И.15) — *двойственным* к матричному неравенству (И.13).

Уравнение вида

$$A^TQA - Q = -R, \quad R = R^T,$$

будем также называть *дискретным уравнением Ляпунова*. Поскольку операция транспонирования сохраняет дискретную устойчивость матрицы, то лемма И.3 (с соответствующими изменениями) сохраняет свою силу.

Определение И.4. Матричное неравенство

$$APA^T - P \preceq -R, \quad R = R^T, \quad (\text{И.16})$$

называется *дискретным неравенством Ляпунова* относительно матрицы P .

Лемма И.4 (дискретное неравенство Ляпунова). Пусть A шуровская матрица. Если $R \succ 0$ или $R = BB^\top$ и матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг n , то неравенство Ляпунова (И.16) разрешимо, причем для любого его решения P справедлива оценка

$$P \succcurlyeq P_-,$$

где $P_- \succ 0$ — решение соответствующего уравнения Ляпунова (то есть P_- — минимальное решение неравенства (И.16)).

Доказательство. Неравенство (И.16) разрешимо, поскольку в силу леммы И.3 существует решение соответствующего уравнения Ляпунова. Далее, имеем

$$APA^\top - P \preccurlyeq -R = AP_-A^\top - P_-,$$

или

$$A(P - P_-)A^\top - (P - P_-) \preccurlyeq 0,$$

откуда, по следствию И.4, в силу дискретной устойчивости матрицы A ,

$$P - P_- \succcurlyeq 0. \quad \blacksquare$$

Использование свойства 11 знакоопределенных матриц из Приложения А приводит к дискретному аналогу следствия И.3.

Следствие И.6. Пусть матрица A шуровская, матрица

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг n , и пусть C — матрица максимального строчного ранга. Тогда решение задачи

$$\operatorname{tr} CPC^\top \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$APA^\top - P + BB^\top \preccurlyeq 0$$

достигается на решении дискретного уравнения Ляпунова

$$APA^\top - P + BB^\top = 0.$$

К. Две теоремы об управляемости

В разделе 1.3.1 мы ввели понятие управляемости; однако его можно сформулировать различными эквивалентными способами, некоторые из них сведены в следующую теорему.

Теорема К.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. Система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p,$$

управляема.

2. Грамиан управляемости

$$W(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

является положительно определенной матрицей для любого $t > 0$.

3. Матрица управляемости

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг n .

4. Матрица Хаутуса $(A - \lambda I \quad B)$ имеет ранг n для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

5. Для любого левого собственного вектора v матрицы A (то есть ненулевого вектора $v \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющего условию $v^* A = \lambda v^*$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$) выполняется $v^* B \neq 0$.

Замечание К.1. Очевидно, что если $W(t) \succ 0$ для некоторого $t > 0$, то грамиан положительно определен и для всех $0 < t \leq \infty$. ▼

Заметим, что из теоремы И.1 вытекает простая связь с уравнением Ляпунова: если пара (A, B) управляема, то решением уравнения

$$AP + PA^\top = -BB^\top$$

служит грамиан

$$W = W(\infty) = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau.$$

Приведем дискретный аналог теоремы К.1.

Теорема К.2. Следующие условия эквивалентны:

1. Дискретная система

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad u_k \in \mathbb{R}^p,$$

управляема.

2. Грамиан управляемости

$$W_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i B B^\top (A^\top)^i$$

положительно определен для всех $k \geq n$.

3. Матрица управляемости

$$U = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

имеет ранг n .

4. Матрица Хаутуса $(A - \lambda I \quad B)$ имеет ранг n для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

5. Для произвольного левого собственного вектора v матрицы A (то есть ненулевого вектора $v \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющего условию $v^* A = \lambda v^*$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$) выполняется $v^* B \neq 0$.

Заметим, что если $W_k \succ 0$ при некотором k , то грамиан положительно определен также и при всех $k, n \leq k \leq \infty$.

Аналогично непрерывному случаю, из теоремы И.3 вытекает, что если пара (A, B) управляема, то решением дискретного уравнения Ляпунова

$$APA^\top - P = -BB^\top$$

служит грамиан

$$W = W_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} A^i B B^\top (A^\top)^i.$$

Библиографический комментарий

Начнем с нескольких слов об истории и тенденциях теории управления.

В XIX веке главным объектом исследования были *автоматические регуляторы* производственных процессов, такие как регулятор Уатта для паровой машины. Было введено важнейшее понятие *устойчивости* регулируемого процесса и получены первые критерии устойчивости линейных систем, выражаемые в терминах характеристического полинома (Максвелл, Раус, Вышнеградский, Гурвиц, Стодола). В работах А. М. Ляпунова были получены первые результаты по устойчивости нелинейных систем, опирающиеся на фундаментальную идею введения *функции Ляпунова*.

В 30-е годы XX века с появлением телефонии и радиосвязи основным аппаратом теории становятся *частотные методы* и соответствующие частотные критерии устойчивости (Найквиста, Михайлова). Эти методы в 40-е–50-е годы распространяются на *импульсные и дискретные системы* (Цыпкин, Джури) — такие системы приобретают особую роль в связи с появлением цифровой вычислительной техники, — а также на некоторые классы нелинейных систем (*теория абсолютной устойчивости* — Лурье, Айзерман, Попов).

Однако в конце 50-х годов происходит очередное обновление теории управления. В связи с развитием ракет и космонавтики возникает совершенно новый аппарат описания систем управления — описание в *пространстве состояний*. Иначе говоря, движение системы подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению (вообще говоря, нелинейному), в правой части которого стоит функция, которая может выбираться проектировщиком (управление). Более того, возникла фундаментальная *идея оптимальности*: выбор управления должен оптимизировать некоторый показатель качества. В такой поста-

новке задача управления имеет много общего с классическими задачами вариационного исчисления. В дело исследования систем управления включились математики; результатом явилась разработка *принципа максимума Понтрягина* — необходимого условия оптимальности управляемой системы. Работы специалистов по управлению (Калман, Беллман, Летов) помогли инженерам осознать важность и продуктивность созданной *теории оптимального управления*.

В то же время постепенно выяснилось, что такая теория адекватно описывает лишь сравнительно узкий круг практических задач, таких как управление космическим полетом или наведение ракет. В остальных ситуациях имеется масса факторов, препятствующих применению красивой математической теории оптимального управления. Во-первых, в каждой задаче имеется неизбежная неопределенность, связанная либо с наличием внешних возмущений, либо с невозможностью точно определить параметры модели. Во-вторых, в теории оптимального управления решение ищется в виде функции от времени (программное управление). Ясно, что необходимость строить стратегию управления заранее является крайне нежелательной. Для инженера гораздо более естественно выбирать управление в форме обратной связи, как функцию от выхода системы в текущий момент (задача синтеза).

Подобное критическое отношение вызвало ревизию теории управления в 70-е годы. В инженерной практике происходит возврат к классическим способам регулирования с помощью простых регуляторов (типа ПИД) и к простым методам их настройки. В теории восстанавливается интерес к частотным методам; они обобщаются на случай многомерных систем (Розенброк). Однако подлинная революция произошла в 80-е годы. Возникла так называемая H_∞ -теория (Зеймс, Френсис, Дойл, Гловер); она позволила объединить частотные методы и методы пространства состояний и по-новому ставить оптимизационные задачи. Эта же постановка позволила рассматривать задачи с неопределенностью (*робастное управление*), а именно, задачи, в которых частотная характеристика объекта имеет неопределенность, ограниченную в H_∞ -норме. Появились и другие постановки задач робастного управления, в которых неопределенность может быть задана иначе — либо как параметрическая, либо как ограниченная в матричной норме при описании в пространстве состояний. При этом были найдены многие красивые решения отдельных задач, например, задача о робастной устойчивости интервального полинома допускает очень простое решение (*теорема Харитоновна*). Был создан математический

аппарат, позволяющий единообразно исследовать различные виды неопределенностей — μ -анализ (Дойл).

Новое решение получил ряд других разделов теории управления. Так, задача о подавлении ограниченных внешних возмущений привела к появлению так называемой l_1 -оптимизации (Барабанов – Граничин, Пирсон – Далех). Новый математический аппарат, оказавшийся чрезвычайно удобным, связан с так называемыми *линейными матричными неравенствами*. Эти неравенства возникли еще в 60-е годы в ряде задач управления (Якубович, Виллемс); позже выяснилось (Бойд), что они представляют собой очень общий метод анализа и синтеза линейных систем. Наличие эффективных программ решения линейных матричных неравенств (Нестеров – Немировский) сделало этот аппарат весьма эффективным с вычислительной точки зрения.

Наконец, в последние годы возникли новые направления и тенденции — *сетевое управление, мультиагентные системы, иерархические системы*, принципиально новые типы нелинейного управления, интерес к задачам очень большой размерности, использование современных методов оптимизации и т.д.

Как видит читатель, теория управления претерпела очень большие изменения. К сожалению, они слабо отражены в отечественной учебной литературе.

На русском языке в период 1955–1985 годов было издано большое число учебников и монографий, достаточно полно отражавших состояние теории управления в те годы (подробную информацию о первых учебниках по управлению в разных странах можно найти в [66]). Так, много учебников посвящено частотному подходу к линейным системам [9, 41, 54]. Этот же подход положен в основу и ряда учебников, вышедших сравнительно недавно [2]. Описание в пространстве состояний и задачи оптимального управления освещены в работах [12, 18, 20–22, 43, 46, 47]. В целом основные результаты теории управления на начало 80-х годов отражены в справочнике под редакцией А. А. Красовского [45] и в фундаментальном учебнике А. А. Первозванского [35]. Учебники последних лет [17, 23, 30] придерживаются в основном той же традиционной тематики. Вышедшие за последние годы монографии и учебные пособия [4, 6, 24, 28, 31, 32, 55] затрагивают, как правило, лишь отдельные стороны современной теории. Некоторую информацию можно извлечь из статей и обзоров на русском языке, однако все это дает лишь мозаичную картину предмета. В книге Б. Т. Поляка и П. С. Щербакова «Робастная устойчивость и управление» [37] изложено большое количество материала о современных раз-

делах теории управления, но в ней основной темой была робастность в линейных системах; монография [36] посвящена главным образом влиянию внешних возмущений. Несколько особняком стоит учебник [10], написанный живым, неформальным языком. Наконец, полезно взглянуть на теорию управления как часть более общей науки с условным названием *кибернетика* [34].

Иная ситуация с публикациями на Западе. Помимо стандартных учебников по линейным и нелинейным системам, которые выходят все новыми изданиями [51, 60, 67–70], появляются публикации, которые отражают прогресс в развитии науки об управлении за последние десятилетия. Кроме того, издано много книг, которые можно рассматривать и как учебники, и как монографии, например [58, 64, 73].

К Главе 1

Описание в *пространстве состояний* широко распространилось в конце 1950-х годов под влиянием пионерских работ Л. С. Понтрягина с соавторами [38, 39] и Р. Калмана [21]. До середины прошлого века исследовались в основном одномерные (односвязные) системы, интерес к многомерным (много связным) системам возник позже, причем основным аппаратом для их анализа и синтеза стало описание в пространстве состояний.

Взгляд на линейные стационарные системы как на *линейные операторы*, преобразующие входные сигналы в выходные, в настоящее время является общепринятым, равно как параллельное рассмотрение непрерывных и дискретных систем. В связи с этим нужны понятия норм сигналов и операторов в различных функциональных пространствах, описанные в разделе 1.1.3.

Условия устойчивости линейных дискретных и непрерывных систем, заданных в пространстве состояний, известны давно; их основы заложил еще А. М. Ляпунов [29] в работе 1892 года. Мы приводим условия в основном в форме квадратичных функций Ляпунова, линейных матричных уравнений и неравенств, — именно этот аппарат будет использоваться впоследствии в более общих ситуациях.

Графический критерий устойчивости полиномов в форме условия 2 теоремы 1.2.3 предложен А. В. Михайловым в 1938 г.; в форме условия 4 он был получен гораздо раньше Ш. Эрмитом (в 1852 г.) и независимо М. Билером (в 1879 г.). *Алгебраический критерий устойчивости* был предложен в 1896 г. А. Гурвицем и доведен до удобной вычислительной формы Э. Раусом. На дискретный случай алгоритм

был перенесен И. Шуром (1920 г.). Достаточное условие устойчивости было предложено Коном в 1922 г. Знаменитый критерий Найквиста (1932) оказал большое влияние на развитие частотной теории. Многомерный аналог критерия Найквиста был сначала получен Розенброком в 1974 г. в форме так называемого *корневого годографа*; теорема 1.2.7, в которой фигурирует лишь один годограф, доказана Видьясагаром.

Понятия *управляемости и наблюдаемости* введены Калманом [21]; теперь они стали ключевыми в теории линейных систем.

Теорема 2.1.5, характеризующая эффект *всплеска* при удалении полюсов в левую полуплоскость, принадлежит Р. Н. Измайлову.

Способ оценки состояния, приведенный в теореме 1.4.7, часто называется *наблюдателем Люенбергера*.

Именно *достижимые множества* (раздел 2.1.3) дают важную характеристику динамической системы, однако они весьма сложны для изучения. Поскольку достижимое множество представляет собой множество точек фазового пространства, в которые может перейти динамическая система из начала координат при некоторых допустимых возмущениях, то можно возмущения w рассматривать в качестве *управлений*. При этом мы приходим к задаче классического оптимального управления о попадании в начало координат. Структура достижимых множеств рассматривалась в ряде работ начиная с середины прошлого столетия [49]. Различные факты о строении достижимых множеств (в том числе и в дискретном времени) получены в книгах А. Б. Куржанского [27], Ф. Швепше [72] и С. Бойда с соавторами [59].

Важное направление в анализе неопределенности связано с моделью *неизвестных, но ограниченных (unknown-but-bounded)* возмущений, восходящей к [72]. Большой вклад в развитие этого направления внесли отечественные ученые А. Б. Куржанский [27] и Ф. Л. Черноусько; близкие идеи использовались в минимаксной теории управления.

Термин *линейные матричные неравенства* введен в теорию управления в 1962 году В. А. Якубовичем и независимо Я. Виллемсом в 1971 г. (хотя первым линейным матричным неравенством может считаться неравенство Ляпунова, сформулированное в 1892 г. в связи с анализом устойчивости [29]). В настоящее время этот аппарат получил широкое развитие; в [59] дано его систематическое изложение и показано, что многие задачи теории управления могут формулироваться в виде линейных матричных неравенств. Мощные и эффективные численные методы решения таких неравенств разработаны Ю. В. Нестеровым и А. С. Немировским.

Идея *робастной квадратичной устойчивости* была выдвинута в

80-х годах прошлого века Дж. Лейтманом и Б. Бармишем; впрочем, корни этой идеи могут быть прослежены много раньше. Техника сведения к линейным матричным неравенствам описана в книге [59].

Идея оптимальности в теории управления стала ключевой в 1950-е годы. До этого в центр исследований ставились задачи анализа систем и обеспечения их устойчивости; проблемы качества процессов играли меньшую роль. Ситуация кардинально изменилась к 1960-м годам, когда вся наука об управлении стала ассоциироваться с оптимальным управлением, тогда как раньше она обычно называлась теорией автоматического регулирования. В таком смещении акцентов важную роль сыграли работы Беллмана, Калмана, Л. С. Понтрягина, А. А. Фельдбаума и других крупных ученых того времени [3, 21, 39, 47].

Задача о *линейно-квадратичном регуляторе* (в русской литературе часто называвшаяся задачей об *аналитическом конструировании регуляторов*) была одной из первых решенных задач оптимального управления; основной вклад в ее решение внесли Р. Калман и А. М. Левтов. Это решение было легко воспринято специалистами по теории автоматического регулирования, так как оно формулировалось в привычных для них терминах обратной связи (в отличие от задачи о релейном быстродействии, в которой решение является программным управлением). В настоящее время теория линейно-квадратичной оптимизации развита очень глубоко, включая анализ всевозможных вырожденных случаев; есть ряд монографий, специально посвященных этому направлению, например, [22, 56].

Уравнение Риккати играет ключевую роль в линейно-квадратичном регулировании. *Задача H_∞ -оптимизации* была поставлена в работах Зеймса, ныне это один из центральных разделов теории линейных систем, которому посвящено множество статей и монографий [73]. Первоначально задача была решена в частотной области с использованием таких средств теории функций комплексного переменного, как теорема Неванлинны – Пика.

Построению стабилизирующей обратной связи по выходу посвящена работа [61].

Идея подавления внешних возмущений, описываемых дифференциальными или разностными уравнениями, с помощью динамического регулятора по выходу системы появилась в работах Френсиса и Уонема под названием *принцип внутренней модели*.

К Главе 2

Идея о необходимости учета *неопределенности* при конструировании систем управления являлась фундаментальной в теории управления на всех ее этапах. Если бы объект и внешние сигналы были известны точно, возможно было бы программное управление или использование прямой (а не обратной) связи. Основные результаты о *робастности и управлении при внешних возмущениях* в линейных системах можно найти в монографиях [36, 37].

Задача об оптимальном *подавлении внешних возмущений* является одной из основных в теории управления. Однако ею занимались преимущественно в стохастической постановке, где решением является *LQG (Linear Quadratic Gaussian — линейно-квадратично-гауссовский) регулятор*, аналогичный линейно-квадратичному регулятору. Другая модель внешних возмущений — гармонические с неизвестной частотой; в этом случае их подавление возможно с помощью H_∞ -оптимизации. Задача же о произвольных ограниченных помехах была решена сравнительно недавно. Еще в 1940-е годы возникла так называемая *задача о накоплении возмущений* Б. В. Булгакова, однако основной интерес проявлялся к проблеме анализа: каково максимальное отклонение, вызываемое произвольными ограниченными внешними воздействиями. Такая задача, по сути, является задачей программного оптимального управления, в которой внешние возмущения рассматриваются как управление. Позже появились работы по компенсации ограниченных возмущений, не содержавшие, впрочем, общих методов синтеза оптимальных регуляторов.

Впервые задачу об устойчивости интервального семейства полиномов рассмотрел С. Фаедо в 1953 г. Важнейшую роль сыграла красивая теорема Харитонова (1978 г.)

Понятие *структурного сингулярного числа* (μ) матрицы было введено Дойлом; основанная на этом техника μ -анализа (включающая верхние и нижние границы для μ , критерий робастной устойчивости и алгоритмы вычисления оценок для μ) могут быть найдены в книге [73].

Задача о робастной стабилизации с помощью регуляторов низкого порядка в общем виде весьма трудна; мы приводим ее решения лишь для частных случаев.

Задача о робастной квадратичной стабилизации, вероятно, впервые рассматривалась А. М. Мейлахсом; более подробно техника, основанная на линейных матричных неравенствах, описана в книге [59]. Робастная стабилизация при неопределенностях, заданных H_∞ -нормой,

сводится к стандартной задаче H_∞ -оптимизации. Это было осуществлено еще в первых работах, посвященных H_∞ -теории. То, что другие виды неопределенностей также могут учитываться с помощью техники H_∞ , показано в различных исследованиях.

Подход на основе построения *гарантированных оценок* был предложен в конце 60-х – начале 70-х годов прошлого века в работах американских ученых Г. Виценхаузена, Д. Бертсекаса и И. Родеса, Ф. Швеппе [72]. Примерно в это же время подобные проблемы разрабатывались в семинаре Н. Н. Красовского такими исследователями, как А. Б. Куржанский, А. И. Субботин, Ю. С. Осипов и другие, см. [27]. Существенный вклад в этот круг исследований внес Ф. Л. Черноусько. Обзор результатов можно найти в [26, 57].

Результаты, использующие множество достижимости для синтеза регуляторов, можно найти в [59]; теорема 2.2.1 является уточнением этих результатов.

В случае когда внешнее возмущение принадлежит классу L_2 , соответствующие методы предоставляются H_2 - или H_∞ -оптимизацией [7, 73]. По существу H_∞ -оптимальное управление является минимаксным управлением в дифференциальной игре против внешнего возмущения. Однако классическая задача H_∞ -оптимального управления предполагает, что начальные условия нулевые.

Способ построения линейного динамического регулятора по выходу пониженного и полного порядка для гашения возмущений, ограниченных в L_2 -норме, был предложен в монографии Д. В. Баландина и М. М. Когана [7, гл. 8]; при этом синтез H_∞ -регулятора сводится к решению линейных матричных неравенств.

Теория *положительных линейных систем* достаточно развита. К сожалению, на русском языке публикации немногочисленны. Результаты типа теорем 2.7.2 и 2.7.4 (и даже более подробные) можно найти, например, в [52].

К Главе 3

Теория нелинейных систем управления далека от завершения, что сказалось на выборе материала, включенного в книгу. Методы исследования нелинейных систем оказываются заимствованы практически из всех разделов современной математики, и поэтому авторы намеренно попытались коснуться алгебраических, геометрических, теоретико-групповых и классических аналитических методов, чтобы дать читателю представление об их многообразии.

Углубленное представление о явлениях, наблюдаемых только в нелинейных системах и которые не наблюдаются в линейных системах, можно найти в книге [68]. Из этой же книги заимствованы некоторые примеры. Много наглядных примеров имеется и в книге Формальского [50].

Основы геометрической теории двумерных динамических систем могут быть найдены в книге [5, гл. V, VI]. Там же дано доказательство теоремы Пуанкаре – Бендиксона (см. параграф 3.1.3). Определение индекса особой точки векторного поля на плоскости дано в главе V той же книги. Вообще, геометрические методы анализа динамических систем, связанные с анализом операторов сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, оказались весьма мощным инструментом. Познакомиться с этими методами можно в книге [25]. В книге [19] можно найти основные сведения о геометрии гладких векторных полей на многообразиях, определение эйлеровой характеристики многообразия, формулировку теоремы Хопфа о совпадении суммы индексов особых точек векторного поля, заданного на многообразии, с эйлеровой характеристикой многообразия, см. [19, Ч. II, §15]. Там же даны основы групповой теории дифференциальных уравнений. Познакомиться с основами теории групп Ли и алгебр Ли в применении к анализу линейных нестационарных систем можно в книге [11].

Использование релейных законов управления оказалось привлекательным для инженеров, поскольку исполнительным механизмом в этом случае выступает простое устройство — реле, включающее и выключающее управляющее воздействие. Первые попытки обобщения понятия решения обыкновенного дифференциального уравнения на случай разрывных систем можно найти в работах А. И. Алимова, Р. М. Эйдинова, Э. М. Солнечного. Следует отметить работу «Основы теории разрывных систем I и II» М. А. Айзермана и Е. С. Пятницкого [42, Т. I], в которой разрывная система рассматривается как предельная система в параметрическом классе непрерывных систем. См. также книгу [15], в которой рассмотрены различные определения решения систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и дифференциальных включений. Систематическое изложение теории систем с разрывной правой частью может быть найдено в книге [48]. Дифференциальное включение является естественным обобщением дифференциального уравнения. Правой частью дифференциального включения является точечно-множественное отображение, являющееся естественным обобщением функции, или отображения из точки в точку. Систематическое изложение метода скользящих режимов

и его использование для синтеза систем автоматического управления содержится в книге [53].

Теория устойчивости нелинейных динамических систем началась с исследования А. М. Ляпунова [29]. Существует огромное количество замечательных книг по теории устойчивости движения, см. например [33]. Определение различных видов устойчивости и современное изложение теории устойчивости можно найти в книге [44].

С первыми постановками задачи абсолютной устойчивости можно познакомиться по книге [1]. Более современное изложение этой теории, а также связь метода функций Ляпунова и частотных методов (критерий В. М. Попова и круговой критерий) можно найти в книге [15]. Там же дано доказательство знаменитой частотной теоремы и множество математических фактов, таких как теорема Дайнса и теорема о неущербности S-процедуры с одной связью.

Методы синтеза законов управления, основанные на методе линеаризации обратной связью, методе скользящих режимов, методе бэкстешинга содержатся, например, в книге [68]. Е. С. Пятницкому (см. [42, Т. II]) принадлежит подход, являющийся разновидностью метода скользящих режимов в применении к лагранжевым механическим системам и названный методом декомпозиции. Ряд методов синтеза нелинейных систем описан в книге Фримана и Кокотовича [63].

Основные факты теоретической механики, которые использовались при разборе примеров и изложении метода декомпозиции для стабилизации механических систем, можно найти в книге [13].

Введением в метод динамического программирования может служить книга [8]. Оптимальному управлению в линейном и линейно-квадратичном случае посвящена книга [22]. Изучить принцип максимума можно по книгам основателей этой теории [38, 39].

Теория нелинейных отображений начала развиваться еще в начале XX века в работах французских математиков Жюлиа, Фату и других. Глубокие результаты о бифуркациях, удвоениях циклов, возможности хаотического поведения получены украинским математиком Шарковским в середине века, позже они были продолжены Фейгенбаумом и другими физиками. Пионером исследования фрактальных эффектов был Мандельброт (1978); хотя первые примеры фракталов были обнаружены значительно ранее (например, фрактал Кэли). Мы не рассматриваем в данной книге задач управления для хаотических систем, см. [62].

К Приложению

Хорошими справочниками по *теории матриц* являются [14, 16, 52]. Много полезной математической информации, нужной для освоения теории управления, приведено в справочнике [71].

Подробное описание *программ выпуклой оптимизации*, используемых при решении линейных матричных неравенств, можно найти в [65].

Литература

- [1] АЙЗЕРМАН М.А., ГАНТМАХЕР Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: АН СССР, 1963.
- [2] АЛЕКСАНДРОВ А.Г. Методы построения систем автоматического управления. М.: Физматлит, 2008.
- [3] АЛЕКСЕЕВ В.М., ТИХОМИРОВ В.М., ФОМИН С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007.
- [4] АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. Избранные главы теории автоматического управления. СПб.: Наука, 1999.
- [5] АНДРОНОВ А.А., ВИТТ А.А., ХАЙКИН С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
- [6] АФАНАСЬЕВ В.Н., КОЛМАНОВСКИЙ В.Б., НОСОВ В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.
- [7] БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
- [8] БЕЛЛМАН Р.Э. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
- [9] БЕСЕКЕРСКИЙ В.А., ПОПОВ Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1966.
- [10] БОСС В. Лекции по теории управления. Т. 1, 2. М.: Либроком, 2012, 2014.
- [11] БРОКЕТТ Р.У. Алгебры Ли и группы Ли в теории управления. В кн. Математические методы в теории систем. Вып.14. М.: Мир, 1979.

-
- [12] ВОРОНОВ А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
- [13] ГАНТМАХЕР Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2001.
- [14] ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004.
- [15] ГЕЛИГ А.Х., ЛЕОНОВ Г.А., ЯКУБОВИЧ В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
- [16] ГОЛУБ ДЖ., ВАН ЛОАН Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
- [17] ДЕМЕНКОВ Н.П., МИКРИН Е.А. Управление в технических системах. М.: МГТУ им. Баумана, 2017.
- [18] ДОРФ К.Р., БИШОП Р.Х. Современные системы управления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.
- [19] ДУБРОВИН Б.А., НОВИКОВ С.П., ФОМЕНКО А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
- [20] ЗАДЕ Л., ДЕЗООЕР Ч. Теория линейных систем. М.: Наука, 1970.
- [21] КАЛМАН Р., ФАЛЬ П., АРБИВ М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
- [22] КВАКЕРНААК Х., СИВАН Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
- [23] КИМ Д.П. Теория автоматического управления. 3-е изд. Т. 1, 2. М.: Юрлайт, 2016.
- [24] КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
- [25] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
- [26] КУНЦЕВИЧ В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006.

- [27] КУРЖАНСКИЙ А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [28] ЛЕОНОВ Г.А. Теория управления. СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2006.
- [29] ЛЯПУНОВ А.М. Общая задача об устойчивости движения. Л.-М.: ОНТИ, 1935.
- [30] МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ И СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ в 5 томах / Под ред. Н.Д. Егупова. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
- [31] МИРОШНИК И.В., НИКИФОРОВ В.О., ФРАДКОВ А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
- [32] МИТРИШКИН Ю.В. Линейные математические модели динамических систем с управлением. М.: ЛЕНАНД, 2014.
- [33] МАЛКИН И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
- [34] НОВИКОВ Д.А. Кибернетика: навигатор. М.: ЛЕНАНД, 2016.
- [35] ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
- [36] ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
- [37] ПОЛЯК Б.Т., ЩЕРБАКОВ П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
- [38] ПОНТРЯГИН Л.С., БОЛТЯНСКИЙ В.Г., ГАМКРЕЛИДЗЕ Р.В., МИЩЕНКО Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983.
- [39] ПОНТРЯГИН Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении, 2-е изд. М.: УРСС, 2004.
- [40] ПОПОВ В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970.
- [41] ПОПОВ Е.П. Теория линейных систем регулирования и управления. М.: Наука, 1989.

- [42] Пятницкий Е.С. Избранные труды. Теория управления (В 3-х томах). Т. 1-3. М.: Наука, 2004.
- [43] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1992.
- [44] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
- [45] СПРАВОЧНИК ПО ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
- [46] Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.
- [47] Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963.
- [48] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [49] Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
- [50] Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
- [51] Халил Х.К. Нелинейные системы. Москва-Ижевск: ИКИ-РХД, 2009.
- [52] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
- [53] Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
- [54] Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.
- [55] Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
- [56] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [57] BLANCHINI F., MIANI S. Set-Theoretic Methods in Control. Boston: Birkhäuser, 2008.

-
- [58] BOYD S., BARRATT C. Linear Controller Design: Limits of Performance. NJ: Prentice Hall, 1991.
- [59] BOYD S., EL GHAOU L., FERON E., BALAKRISHNAN V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [60] CHEN C.T. Linear System Theory and Design. NY: Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [61] DESOER C.A., VIDYASAGAR M. Feedback Systems: Input-Output Properties. NY: Academic Press, 1975.
- [62] FRADKOV A. L., POGROMSKY A.YU. Introduction to Control of Oscillations and Chaos. Singapore: World Scientific, 1998.
- [63] FREEMAN R.A., KOKOTOVIC P.V. Robust Nonlinear Control Design. Birkhauser, 1996.
- [64] GLAD T., LJUNG L. Control theory: Multivariable and Nonlinear Methods. London: Taylor & Francis, 2000.
- [65] GRANT M., BOYD S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming (web page and software). URL <http://stanford.edu/~boyd/cvx>
- [66] Historic Control Textbooks. Edited by J. Gertler. IFAC, 2006.
- [67] KAILATH T. Linear Systems. NJ: Prentice-Hall, 1980.
- [68] KHALIL H.K. Nonlinear Systems. 3rd Edition. NJ: Prentice Hall, 2002.
- [69] LUENBERGER D.G. Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications. NY: Wiley, 1979.
- [70] OGATA K. Modern Control Engineering. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2010.
- [71] POZNYAK A.S. Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers. Vol. 1, 2. Elsevier, 2008.
- [72] SCHWEPPE F.C. Uncertain Dynamic Systems. NJ: Prentice-Hall, 1973.
- [73] ZHOU K., DOYLE J., GLOVER K. Robust and Optimal Control. NJ: Prentice-Hall, 1996.

Предметный указатель

- D*-разбиение, 105
 - границы областей, 105
 - дискретное, 107
 - особые прямые, 105
- Сигмоида, 373
- Алгоритм Рауса, 69, 71
- Аттрактор, 299
 - странный, 299
- Аффинное семейство матриц, 227
 - полиномов, 227
- Бифуркация, 286
 - седло – узел, 286
- Вектор
 - неотрицательный, 270
 - собственный, 56
 - левый, 465, 470
- Векторное поле
 - гладкое, 282
 - дивергенция, 289
- Вершинный элемент семейства, 225
- Весовая функция, 174, 252
- Весовые коэффициенты, 131
- Возвратная разность, 97
- Возмущение
 - внешнее, 18, 98
 - L_2 -ограниченное, 153
 - L_∞ -ограниченное, 143, 156, 163
 - допустимое, 150, 163
 - интервальные ограничения, 172
 - наихудшее, 159
 - случайное, 178, 200
- Время
 - дискретное, 89
 - непрерывное, 18
- Выход
 - системы, 98
 - установившееся значение, 25
- Гамильтониан, 134
- Гармонический сигнал, 25, 26, 174
- Годограф, 65
 - Михайлова, 66
 - Найквиста, 73, 102
 - обратный, 104
 - Цыпкина – Поляка, 238
- Грамиан
 - управляемости, 87, 470, 473
 - дискретный случай, 474
- Грубое свойство, 337

- Двойной пружинный маятник, 180, 183, 220
 Двухмассовая система, 139, 201, 204, 206
 Диаграммы Боде, 44
 Динамическое программирование, 395
 Дополнение по Шуру, 454
 Задача
 H_∞ -оптимизации, 33, 232
 робастный вариант, 264
 SDP, 452
 допустимости LMI, 451
 полуопределенного программирования, 452
 разрешимости LMI, 451
 Задающее воздействие, 96, 98
 Закон
 управления
 разрывный, 372, 421
 Запас устойчивости
 по амплитуде, 74, 102
 по фазе, 74
 Звено, 42
 апериодическое (инерционное), 42
 апериодическое второго порядка, 42
 идеальный интегратор, 43
 идеальный усилитель, 43
 колебательное, 42
 последовательное соединение, 23, 122, 224, 227
 частотные характеристики, 43
 Инвариантный
 параллелепипед, 272
 Интервал
 дискретизации, 64
 неопределенности, 225
 Коэффициент усиления, 32, 33, 35, 42, 102, 164, 180
 большой, 102–104
 критический, 102
 малый, 104
 Кривая
 интегральная, 280
 Критерий
 Гурвица, 70
 Михайлова, 66, 237, 238
 минимальности эллипсоида, 169
 Найквиста, 73, 102, 250
 дискретный случай, 107
 многомерный случай, 76
 робастная модификация, 248
 наблюдаемости, 93
 Стодолы, 68
 стабилизируемости, 111
 управляемости
 дискретная система, 89
 непрерывная система, 85
 устойчивости
 дискретной системы, 60, 146
 непрерывной системы, 56, 143
 Цыпкина – Поляка, 238
 Шура – Кона – Джури, 71
 Эрмита – Билера, 66
 Критерий качества квадратичный, 131
 Критерий оптимальности, 128
 Лемма
 Беллмана, 136, 269

- Питерсена, 256, 263, 265, 461
для строгого неравенства, 462
радиус знакоопределенности, 463
Финслера, 460
Шура, 453
применение, 166
- Ли
алгебра, 316
разрешимая, 317
группа, 316
скобка, 315
- Линеаризация, 279
- Линейно-квадратичный регулятор, 131
оптимальное управление, 130
- Линейное матричное неравенство
допустимая область, 451
каноническая форма, 449
матричная форма, 450
свойства, 449
- Линейные матричные неравенства, 244
- Ляпунова
прямой метод, 318
функция, 318
характеристический показатель, 300
- Масштабы изменения коэффициентов, 226
- Матрица
весовая, 185, 202
выхода, 18
гурвицева, 53
степень устойчивости, 53
замкнутой системы, 91
- знакоопределенная, 436
свойства, 436
интервальная, 226
наблюдаемости, 92
неопределенная
номинальное значение, 227
неотрицательная, 268, 270
определитель, 434
полного ранга, 434
ранг, 88, 434, 464, 469
регулятора, 90
след, 435
собственные значения, 53, 63, 435, 464, 469
состояния, 18
стохастическая, 271
управляемости, 85, 473
усиления, 90
фундаментальная, 309
Хаутуса, 111, 473
шуровская, 53
эллипсоида, 457
- Матричная
замена переменных, 117, 121, 137, 186
пара
наблюдаемая, 92
управляемая, 85
форма
фробениусовая, 40
экспонента, 19, 53
- Матричное
исключение переменных, 461
- Метод корневого годографа, 102
- Многообразие
гладкое, 282
- Множество

- выходов, 154
 допустимое, 224
 достижимости, 150, 151, 172
 L_2 -ограниченный вход, 153
 L_∞ -ограниченный вход, 156
 дискретной системы, 153
 свойства, 151
 инвариантное, 151, 171, 272
 линейно связное, 288
 матриц инволютивное, 316
 неопределенности, 224
 ограничивающее, 182
 предельно достижимое, 272
 предельное, 152
 притягивающее, 272
 топологически связное, 288
- Наблюдатель
 Люенбергера, 112, 214
 уравнение, 113
- Невязка, 96, 214
- Нелинейность
 нестационарная, 348
 стационарная, 348
- Неопределенность
 (M, Δ) -конфигурация, 230
 в матричной норме, 228
 в начальном состоянии системы, 165
- матричная
 структурированная, 228
- параметрическая, 224
 мультилинейная, 227
 полиномиальная, 228
 сферическая, 226
 частотная, 228
- аддитивная модель ошибок, 229
 мультипликативная модель ошибок, 229
- Неравенство
 Ляпунова, 56, 450, 466, 467
 двойственное, 467, 471
 дискретное, 471
 Риккати, 259, 454
- Норма, 31
 линейного оператора, 31
 (p, q) -индуцированная, 31
 линейного оператора дискретного
 (p, q) -индуцированная, 32
 матричная, 437
 индуцированная, 439
 подчиненная, 439
 согласованная, 439
 спектральная (2-норма), 33, 437
 столбцовая (∞ -норма), 437
 строчная (1-норма), 437
 фробениусова, 438
- передаточной функции
 H_2 -норма, 35
 H_∞ -норма, 34, 35
- передаточной функции дискретной
 H_∞ -норма, 36
- сигнала
 L_1 , 29
 L_2 , 28
 L_∞ , 28
 l_1 , 31
 l_2 , 30
 l_∞ , 31

- Нулевая динамика системы, 363
- Область значений
- аффинного семейства, 241
 - интервального семейства, 236, 238
 - полиномиального семейства, 235
 - сферического семейства, 242
 - инвариантная, 287
 - притяжения, 299
- Обратная связь, 90, 95, 102
- линейная, 275
 - по состоянию, 19, 90, 108
 - отрицательная, 96
 - по выходу, 91, 111
 - по оценке состояния, 92
 - по состоянию, 130
- Объект
- минимально-фазовый, 103
 - неопределенный, 224
 - устойчивый, 102
 - харитоновский, 247
- Ограничения
- секторные, 339
- Оператор
- дифференцирования, 20
 - линейный, 27
 - интегральный, 31
 - причинность, 27
 - сдвига, 288
 - сдвига назад, 26
- Описание системы
- в пространстве состояний, 18, 39
 - входо-выходное, 36
 - с помощью передаточной функции, 22
- Опорная гиперплоскость, 158, 172
- Особая точка, 280
- индекс, 282
 - седло, 280
 - узел, 280
 - фокус, 280
 - центр, 280
- Отображение
- сжимающее, 423
- Оценка
- асимптотическая, 165, 214
 - равномерная, 165, 214, 216
- Ошибка наблюдения, 112
- S*-процедура, 459
- для строгих неравенств, 459
 - неущербность, 459
 - ущербность, 459
- Первый интеграл, 281
- Передаточная функция, 94, 95
- дискретной системы, 27
 - замкнутой системы, 72
 - матричная, 22
 - номинальное значение, 252
 - объекта, 95
 - полосы, 22
 - последовательного соединения, 24
 - регулятора, 95, 252
 - скалярная, 38
 - сокращение нулей и полюсов, 74
 - устойчивая, 22
 - харитоновская, 247
- Переменяемость корней, 65
- Перерегулирование, 163, 212
- Полином

- аннулирующий, 434
- интервальный, 226
- минимальный, 435
- неопределенный, 224
 - номинальное значение, 226
- реберный, 240
- характеристический, 435
- харитоновский, 235
- шуровский, 70
- Полюса передаточной функции, 22
- Постоянная времени, 42
- Потеря устойчивости замкнутой системы, 104
- Преобразование
 - дробно-линейное, 230
 - верхнее, 230
 - нижнее, 230
- Префильтр (корректирующий фильтр), 97
- Принцип
 - декомпозиции, 379
 - исключения нуля, 234
 - максимума, 134, 414
 - максимума Понтрягина, 415
 - оптимальности, 400
- Пространство
 - последовательностей
 - абсолютно суммируемых, 31
 - суммируемых с квадратом, 30
 - существенно ограниченных, 30
 - сигналов
 - ограниченной интенсивности, 29
 - ограниченной энергии, 28
- сигналов дискретных
 - l_1 , 31
 - l_2 , 30
 - l_∞ , 30
- сигналов непрерывных
 - L_1 , 29
 - L_2 , 28
 - L_∞ , 28
- состояний, 18
- управлений, 18
- функций
 - абсолютно интегрируемых, 29
 - интегрируемых с квадратом, 28
 - существенно ограниченных, 28
- Радиус
 - сверхустойчивости, 246
 - спектральный, 54, 439
 - стабилизируемости квадратичной, 258
 - устойчивости, 239
 - интервального полинома, 239
 - комплексный, 175, 252
 - матричного семейства, 244
 - сферического семейства полиномов, 243
- Размах неопределенности, 226
- Размещение спектра матрицы, 107
 - дискретный случай, 111
 - многомерный случай, 110
- Реализация в пространстве состояний, 23
 - минимальная, 23
- Реберная теорема, 240, 244

- Регулятор
- линейно-квадратичный робастный, 261
 - линейный динамический, 115
 - полного порядка, 115
 - пониженного порядка, 115
 - линейный статический, 91
 - оптимальный, 185
 - П-регулятор (пропорциональный), 102, 122
 - ПД-регулятор (пропорционально-дифференциальный), 326
 - ПИ-регулятор (пропорционально-интегральный), 104
 - стабилизирующий, 101
- Резонанс
- параметрический, 311
- Робастная устойчивость матриц, 244
 - достаточные условия, 244
 - сверхустойчивость, 245
 - полиномов, 234
- Сепаратриса
- неустойчивая, 287
 - устойчивая, 287
- Сигнал
- энергия, 33
- Синтез управления
- бэкстешинг, 385
 - линеаризация обратной связью, 357
 - метод декомпозиции, 378
 - скользящие режимы, 370
- Система
- амплитудная частотная характеристика, 43
 - блок-схема, 24
 - Ван дер Поля, 296
 - весовая функция, 40
 - внутренняя устойчивость, 78
 - градиентная, 323
 - дискретная, 19
 - решение, 20
 - диссипативная, 299
 - замкнутая, 101
 - импульсная характеристика, 40
 - матричная, 41
 - каноническая управляемая форма, 40, 85, 108
 - корректность, 99
 - Лоренца, 299
 - Льенара, 324
 - логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ), 44
 - неопределенная, 224
 - номинальная, 226, 252
 - переходная характеристика, 40
 - с двумя степенями свободы, 97
 - с одной степенью свободы, 98
 - сопряженная, 132
 - точность, 142
 - установившееся значение выхода, 141
 - установившееся значение состояния, 141
 - фазовая частотная характеристика, 44
 - частотная характеристика,

- 25
- Система линейная
- выход, 18
 - наблюдаемый, 18
 - регулируемый, 18
 - двойственная, 94
 - дискретная
 - замкнутая, 91
 - устойчивая, 59
 - замкнутая, 19
 - наблюдаемая, 92
 - ненаблюдаемая, 92
 - непрерывная, 18
 - возмущенная, 143, 146
 - дискретизация, 62
 - замкнутая, 90
 - решение, 19
 - устойчивая, 54
 - нестационарная, 18
 - одномерная, 100
 - полностью определенная, 18
 - положительная
 - дискретная, 269
 - непрерывная, 267
 - с неопределенностью, 18
 - стабилизируемая, 110
 - стационарная, 18
 - управления
 - многомерная (MIMO), 36
 - непрерывная, 18
 - одномерная (SISO), 36
 - управляемая, 84
 - фазовое состояние, 18
 - оценка, 113
- Состояние
- установившееся значение, 25
- Стабилизация
- квадратичная, 116, 121, 333
 - при ограниченном управлении, 118
 - робастная, 254
 - минимально-фазового объекта, 104
 - регулятором низкого порядка, 101
- Степень устойчивости
- матрицы
 - шуровской, 54
 - системы
 - дискретной, 62
 - непрерывной, 59
- Таблица Рауса, 70
- Теорема
- Барбашина и Красовского, 327
 - об устойчивости в целом, 328
 - Кэли – Гамильтона, 37, 111, 435
 - Лиувилля, 289
 - Неванлинны – Пика, 196
 - о малом коэффициенте усиления, 251
 - о неустойчивости, 332
 - об устойчивости по входу, 329
 - Перрона – Фробениуса, 270
 - Пуанкаре – Бендиксона, 296
 - Харитонова, 235, 244
 - Хопфа, 282
 - частотная, 352
- Траектория, 280
- Управление, 18
- комбинированное, 90
 - ограниченное, 118, 190

- оптимальное, 128, 135
- программное, 83, 131
- с минимальной энергией, 128
- Управление по состоянию
 - непрерывное время, 185
- Управляемое подпространство, 88
- Управляемость, 84
- Уравнение
 - выхода, 18
 - Гамильтона – Якоби – Беллмана, 410
 - Лагранжа, 290
 - Ляпунова, 154, 464
 - дискретное, 156, 469
 - решение, 464
 - Риккати
 - алгебраическое матричное, 135
 - дифференциальное, 134
 - состояния, 18
- Условие
 - максимальности, 416
 - реализуемости, 23, 38
 - трансверсальности, 416
- Условия
 - инвариантности
 - необходимые и достаточные, 167
 - начальные, 19
 - Рауса – Гурвица, 68
- Устойчивость, 52
- ВВО, 146
- абсолютная, 340
- критерий В.М. Попова, 354
- критерий круговой, 352
- квадратичная, 333
- матрицы
 - гурвицева, 53
 - дискретная, 54
 - непрерывная, 54
 - шуровская, 53
- нулевого решения, 319
 - асимптотическая, 320
- по входу, 146
- полиномов
 - алгебраические критерии, 68
 - графические критерии, 65
 - дискретный случай, 70, 106
 - понижение степени, 69, 71
- робастная, 277
- системы
 - гурвицева, 62
 - шуровская, 62
 - системы положительной гурвицева, 268
 - шуровская, 270
 - частотные критерии, 72, 350
- Фазовая плоскость, 280
- Фазовое пространство, 280
- Фазовый
 - объем, 289
 - портрет, 280
 - поток, 287
- Фильтр, 214
 - Калмана, 217
- Фильтрация, 213
 - непрерывное время
 - для регулируемого выхода, 217
 - ошибок измерения, 98
- Формула Аккермана, 110
- Функционал

- энергии, 84, 129
- Функция
- абсолютно непрерывная, 339
 - Беллмана, 400
 - бесконечно малый высший предел, 321
 - весовая, 31
 - дискретной системы, 32
 - единичного скачка, 40
 - значение на спектре, 440
 - Лагранжа, 290
 - Лурье – Постникова, 346
 - липшицева, 331
 - мультилинейная, 227
 - опорная, 156
 - множества достижимости, 157, 161
 - определенная
 - отрицательно, 318
 - положительно, 318
 - от матрицы, 440
 - передаточная, 21
 - H_∞ -норма, 33, 175
 - от возмущения к выходу, 21
 - от управления к выходу, 21, 232
 - полос, 21
- Функция Ляпунова, 55, 59
- для невязки
 - непрерывное время, 216
 - квадратичная, 56, 60, 116
 - диагональная, 268, 270
 - дискретное время, 61, 148
 - для возмущенной системы, 168
 - непрерывное время, 57, 145
 - линейная, 268, 270
 - метод, 54
 - общая для семейства, 244
- Характеристика
- вольтамперная, 283
 - эйлерова, 282
- Характеристический полином
- дискретной системы, 27
 - замкнутой системы, 101, 106
 - матрицы, 21
 - системы, 21, 22, 38
- Цикл
- предельный, 296
- Частота среза, 44, 74
- Частотные методы, 27
- Чаттеринг, 361
- Чувствительность, 97, 252
- дополнительная, 97, 252
- Шум, 18, 214
- Эллипсоид
- достижимости, 154
 - дискретный случай, 155
 - инвариантный, 118, 164
 - для невязки, 214
 - консерватизм, 166
 - критерии минимальности, 171
 - линейный образ, 458
 - матричное описание, 457
 - объем, 458
 - ограничивающий, 168, 182
 - минимальный, 169
 - притягивающий, 165, 168
- Эффект всплеска, 126, 162