

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Пономарев Антон Александрович

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ РЕГУЛЯТОРОВ
ТИПА «ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР»**

05.13.01 Системный анализ, управление и обработка информации
(по прикладной математике и процессам управления)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А. П. Жабко

Санкт-Петербург
2016

Оглавление

Введение	4
Обозначения	6
1 Предварительные сведения	7
1.1 Регулятор «предиктор-корректор»	7
1.1.1 Управляемая система	7
1.1.2 Задача оптимального управления	8
1.1.3 Метод управления «предиктор-корректор»	11
1.1.4 Регулятор с двумя режимами функционирования	11
1.2 Обзор литературы	12
1.2.1 О регуляторе «предиктор-корректор»	12
1.2.2 О существовании оптимального управления	13
1.2.3 О реализации в реальном времени	15
1.2.4 О вычислительном запаздывании	17
1.3 Структура работы	18
2 Анализ нелинейного режима	20
2.1 Оценка области управляемости и выбор горизонта прогноза	20
2.2 Построение явной обратной связи	26
2.2.1 Понятия и обозначения, связанные с динамическим программированием	26
2.2.2 Вспомогательный результат: непрерывность функции Беллмана	28
2.2.3 Шаг 1: оценка близости решения задачи приближенного динамического программирования к оптимальной обратной связи	33

2.2.4	Шаг 2: аппроксимация решения задачи приближенного динамического программирования явной функцией	37
2.2.5	Построение субоптимальной обратной связи в заданной близости от оптимальной	41
3	Анализ квазилинейного режима	44
3.1	Оптимальное управление в линейно-квадратичной задаче	45
3.1.1	Построение оптимального управления без ограничений	45
3.1.2	Оптимальное управление, ограниченное по норме	47
3.2	Реализация регулятора в квазилинейном режиме	50
3.2.1	Свойства линейной обратной связи	58
3.2.2	Приближенное динамическое программирование	61
4	Компенсация вычислительного запаздывания	68
4.1	Анализ линейного приближения	69
4.1.1	Предсказывающее преобразование состояния	69
4.1.2	Функционал Ляпунова — Красовского	71
4.1.3	Устойчивость регулятора с компенсацией запаздывания	73
4.1.4	Робастность регулятора с компенсацией запаздывания	77
4.2	Нелинейный случай	82
4.2.1	Схема компенсации запаздывания	82
4.2.2	Устойчивость нелинейного регулятора с компенсацией запаздывания	88
5	Примеры	91
5.1	Система первого порядка	91
5.2	Система второго порядка	92
	Заключение	95

Введение

Под системным анализом регулятора будем понимать анализ регулятора как сложной системы, на вход которой поступает информация о состоянии управляемого объекта, а на выходе появляется управляющий сигнал. Такое понимание противопоставляется точке зрения на регулятор как на функцию, отображающую выход объекта в управление.

Регулятор «предиктор-корректор» основан на повторяющемся решении задачи оптимального управления и поэтому является сложным как с точки зрения сложности вычисления управления, так и с точки зрения анализа.

Цели системного анализа регуляторов типа «предиктор-корректор», преследуемые в данной работе, таковы:

1. *Практическая реализуемость* регулятора в реальном времени. Под реализуемостью понимается:
 - существование конечного (вероятно, приближенного) алгоритма управления;
 - возможность компенсации запаздывания, обусловленного вычислительной сложностью регулятора.
2. *Устойчивость*: начало координат системы, замкнутой приближенным регулятором, должно быть асимптотически устойчиво в обычном смысле, и область притяжения должна содержать все допустимые состояния.
3. *Субоптимальность*: приближенный регулятор должен быть в некоторой степени близок к оптимальному.

Для достижения поставленных целей решаются следующие **задачи**:

1. *Оценить область управляемости* регулятора с терминальным ограничением (при выполнении некоторых известных условий она также является областью притяжения нулевого решения).
2. *Найти условия аппроксимации* обратной связи «предиктор-корректор»

явной функцией с сохранением устойчивости и достижением заданной степени субоптимальности.

3. Доказать устойчивость и робастность регулятора с компенсацией вычислительного запаздывания.

Используются следующие **методы**:

1. Линейные оценки решений дискретных динамических систем с липшицевой правой частью.
2. Для изучения оптимального управления вблизи положения равновесия используется линейно-квадратичная оптимизация.
3. Приближенное управление строится с помощью динамического программирования.
4. Для оценки близости управления к оптимальному используются аналитические свойства некоторых атрибутов задачи оптимального управления (например, непрерывность и квадратичная аппроксимация оптимального значения функционала качества как функции начального условия).
5. Для доказательства устойчивости и робастности регулятора с компенсацией запаздывания используется метод Ляпунова — Красовского.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Метод оценки области управляемости нелинейного регулятора «предиктор-корректор» (теорема 2).
2. Алгоритм аппроксимации обратной связи нелинейного регулятора «предиктор-корректор» (теоремы 8 и 9).
3. Оценка робастности метода компенсации распределенного запаздывания в линейных системах (теорема 10) и обобщение этого метода на нелинейные системы (теорема 12).

Обозначения

- M^\top — транспонирование матрицы M ;
- \mathbb{O} — нулевая матрица, \mathbb{E} — единичная;
- $\lambda_{\max}(M)$ и $\lambda_{\min}(M)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа симметрической матрицы M ;
- $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$, $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$, $\|x\|_M = \sqrt{x^\top M x}$ (M — положительно определенная матрица);
- $\mathcal{B}_r = \{x : \|x\| < r\}$, $\mathcal{B}_r(\bar{x}) = \{x : \|x - \bar{x}\| < r\}$;
- $\rho(X) = \sup\{\|x\| : x \in X\}$;
- $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}$ — матрица частных производных f по u :

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_m} & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix};$$

- $o(x)$ понимается в обычном смысле: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{\|x\|} = 0$;

$$\bullet \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Регулятор «предиктор-корректор»

1.1.1 Управляемая система

В данной работе идет речь об управляемых системах вида

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$.

Предположение 1. $f(0, 0) = 0$.

Предположение 2. Функция f допускает выделение линейной части:

$$\begin{aligned} \|f(x, u) - f(\bar{x}, \bar{u}) - A(\bar{x}, \bar{u})(x - \bar{x}) - B(\bar{x}, \bar{u})(u - \bar{u})\| &\leq \\ &\leq M_f (\|x - \bar{x}\|^2 + \|u - \bar{u}\|^2), \end{aligned}$$

где $A(\bar{x}, \bar{u})$ и $B(\bar{x}, \bar{u})$ — некоторые матрицы, а M_f — константа, одинаковая для всех точек (\bar{x}, \bar{u}) .

Предположение 3. Функция f липшицева:

$$\|f(x, u) - f(\bar{x}, \bar{u})\| \leq L_f (\|x - \bar{x}\| + \|u - \bar{u}\|).$$

Предположение 4. При любой равномерно ограниченной последовательности $u(k)$ и любом начальном состоянии $x(0)$ система (1.1) имеет решение $x(k)$, определенное при всех $k \geq 0$.

Предположение 5. Функция $f(x, u)$ обратима по x , т. е. существует однозначная функция $f^{-1}(x, u)$ такая, что $f^{-1}(f(x, u), u) \equiv x$, причем эта функция

также липшицева:

$$\|f^{-1}(x, u) - f^{-1}(\bar{x}, \bar{u})\| \leq L_{f^{-1}} (\|x - \bar{x}\| + \|u - \bar{u}\|).$$

Замечание. Предположения 2–5 могут быть обоснованы, например, если система (1.1) получена дискретизацией непрерывной системы, которая обладает свойствами продолжимости решений, непрерывной зависимости решений от начальных условий и управления и дифференцируемости решения по начальным условиям [4].

Обозначение 1. $x(k, x^0, u(\cdot))$ есть состояние системы (1.1) на шаге k при начальном состоянии x^0 и управлении $u(\cdot)$.

1.1.2 Задача оптимального управления

Введем квадратичный функционал, характеризующий управление при заданном начальном условии:

$$\mathcal{J}(x^0, u(\cdot)) = \sum_{k=0}^{T-1} \ell(x(k+1, x^0, u(\cdot)), u(k)) + \ell_T(x(T, x^0, u(\cdot))), \quad (1.2)$$

где T — некоторое положительное число или бесконечность.

Предположение 6. Весовые функции ℓ и ℓ_T в функционале (1.2) положительно определены, т. е.

$$\begin{aligned} \ell(0, 0) &= \ell_T(0) = 0, \\ \ell(x, u) &> 0 \quad \forall x, u : x^2 + u^2 \neq 0, \\ \ell_T(x) &> 0 \quad \forall x \neq 0. \end{aligned}$$

Предположение 7. Весовые функции ℓ и ℓ_T в функционале (1.2) допускают квадратичное приближение в окрестности нулевого положения равновесия, причем градиенты допускают соответствующее линейное приближение:

$$\left| \ell(x, u) - \|x\|_M^2 - \|u\|_N^2 \right| \leq M_\ell (\|x\|^3 + \|u\|^3),$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \ell(x, u)}{\partial x} - 2Mx \right| &\leq M_{\partial_x \ell} (\|x\|^2 + \|u\|^2), \\ \left| \frac{\partial \ell(x, u)}{\partial u} - 2Nu \right| &\leq M_{\partial_u \ell} (\|x\|^2 + \|u\|^2), \\ \left| \ell_T(x) - \|x\|_{M_T}^2 \right| &\leq M_{\ell_T} \|x\|^3, \\ \left| \frac{\partial \ell_T(x)}{\partial x} - 2M_T x \right| &\leq M_{\partial \ell_T} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Предположение 8. Весовые функции ℓ и ℓ_T в функционале (1.2) липшицевы:

$$\begin{aligned} \|\ell(x, u) - \ell(\bar{x}, \bar{u})\| &\leq L_\ell (\|x - \bar{x}\| + \|u - \bar{u}\|), \\ \|\ell_T(x, u) - \ell_T(\bar{x}, \bar{u})\| &\leq L_{\ell_T} (\|x - \bar{x}\| + \|u - \bar{u}\|). \end{aligned}$$

Предположение 9.

$$\ell(f(x, u), u) \geq \underline{\ell} \|x\|^2,$$

где $\underline{\ell} > 0$.

Замечание. Предположения 7–9 могут быть обоснованы, например, если система (1.1) и функционал (1.2) получены дискретизацией непрерывной системы и интегрального функционала.

Определение 1. Число T в функционале (1.2) называется *горизонтом прогноза*.

Определение 2. Слагаемое ℓ_T в функционале (1.2) называется *терминальным слагаемым*.

Поставим оптимизационную задачу

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x^0, u(\cdot)) \rightarrow \inf_{u(\cdot)}, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U}, \\ x(t, x^0, u(\cdot)) \in \mathcal{X} \quad \forall t \in [0, T], \\ x(T, x^0, u(\cdot)) \in \mathcal{X}_T, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\mathcal{X}, \mathcal{X}_T \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$.

Определение 3. Множество \mathcal{X} в задаче (1.3) называется *множеством допустимых состояний*, а \mathcal{U} — *множеством допустимых управлений*.

Определение 4. Множество \mathcal{X}_T в задаче (1.3) называется *терминальным ограничением*.

Предположение 10. Множества \mathcal{X} , \mathcal{X}_T и \mathcal{U} в задаче (1.3) — связные, компактные и содержат внутри себя начало координат.

Предположение 11. Для каждого $x \in \mathcal{X}$ существует такое $u \in \mathcal{U}$, что $f(x, u) \in \mathcal{X}$.

Предположение 12. При любых $x, \bar{x} \in \mathcal{X}$ и $\bar{u} \in \mathcal{U}$ таких, что $f(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathcal{X}$, существует такое $u \in \mathcal{U}$, что

$$\|u - \bar{u}\| \leq \gamma \|x - \bar{x}\|,$$

$$f(\bar{x}, u) \in \mathcal{X},$$

$$f(x, u) \in \mathcal{X},$$

где γ — некоторая постоянная.

Замечание. Предположение 12 означает, что множество управлений, допустимых с учетом ограничения на состояние системы, меняется в некотором смысле непрерывно с изменением начального условия задачи (1.3). Способ проверки этого предположения предлагается ниже в лемме 3.

Предположение 13. Решение задачи (1.3) существует при любом начальном состоянии $x^0 \in \mathcal{X}$.

Обозначение 2. 1) $u_{\text{опт}}(\cdot, x^0)$ есть решение задачи (1.3). Если оно не единственно, то имеется в виду любое решение.

$$2) x_{\text{опт}}(k, x^0) = x(k, x^0, u_{\text{опт}}(\cdot, x^0)).$$

$$3) \mathcal{J}_{\text{опт}}(x^0) = \mathcal{J}(x^0, u_{\text{опт}}(\cdot, x^0)).$$

Определение 5. Функция $u_{\text{опт}}(\cdot, x^0)$ называется *оптимальным управлением*, $x_{\text{опт}}(\cdot, x^0)$ — *оптимальной траекторией*, а $\mathcal{J}_{\text{опт}}(x^0)$ — *оптимальным значением функционала* при начальном условии x^0 .

1.1.3 Метод управления «предиктор-корректор»

Определение 6. *Регулятором «предиктор-корректор» называется обратная связь*

$$u(k) = u_{\text{опт}}(0, x(k)).$$

Как алгоритм, метод управления «предиктор-корректор» означает, что на каждом такте k управление генерируется следующим образом:

- для начального состояния $x(k)$ строится оптимальное управление на горизонте прогноза T :

$$u_{\text{опт}}(\varkappa, x(k)) \quad \varkappa = 0, 1, \dots, T - 1;$$

- в систему подается первый такт оптимального управления $u_{\text{опт}}(0, x(k))$;
- в момент $k + 1$ оптимизация повторяется при новом начальном условии $x(k + 1)$, и т. д.

Такая интерпретация объясняет название «предиктор-корректор», где слово «предиктор» означает предсказание поведения системы на горизонте прогноза и оптимизацию этого поведения, а «корректор» — обновление прогноза на каждом шаге с учетом текущего состояния.

1.1.4 Регулятор с двумя режимами функционирования

В данной работе будем рассматривать регулятор, который подчиняется разным алгоритмам вблизи и вдали от начала координат, т. е. обладает двумя режимами функционирования:

1. *Квазилинейный режим* используется в окрестности начала координат.
2. *Нелинейный режим* используется вдали от начала координат — там, где система существенно нелинейна.

Будем считать, что в нелинейном режиме выполнено условие следующей известной теоремы, гарантирующей устойчивость нелинейного регулятора «предиктор-корректор».

Теорема 1. [28; 50; 69] Пусть существует функция $\kappa(x)$ такая, что

$$f(x, \kappa(x)) \in \mathcal{X}_T \quad \forall x \in \mathcal{X}_T$$

и

$$\ell_T(x) \geq \ell(f(x, \kappa(x)), \kappa(x)) + \ell_T(f(x, \kappa(x))) \quad \forall x \in \mathcal{X}_T.$$

Тогда регулятор «предиктор-корректор» стабилизирует систему (1.1). При этом в качестве функции Ляпунова можно выбрать функцию $\mathcal{J}_{\text{опт}}(x)$, которая, действительно, удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u_{\text{опт}}(0, x))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \leq -\ell(f(x, u_{\text{опт}}(0, x)), u_{\text{опт}}(0, x)) \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Здесь правая часть отрицательно определена в силу предположения 9.

1.2 Обзор литературы

1.2.1 О регуляторе «предиктор-корректор»

Метод управления «предиктор-корректор» также известен в литературе как *model predictive control* (МРС) и впервые был описан в [56]. С тех пор он получил широкое распространение и признание. Теории и практике использования регуляторов «предиктор-корректор» посвящены подробные монографии [28; 50; 69]. К достоинствам этого класса регуляторов часто относят робастность [37; 62], близость к оптимальному управлению (субоптимальность) [67] и фундаментальную способность явно учитывать ограничения в процессе вычисления управления.

Обзор коммерческих систем управления типа «предиктор-корректор», доступных в промышленности, можно найти в [66]. Модель системы в них может быть задана в частотной области или в пространстве состояний. Функционал качества может быть линейным или квадратичным, скалярным или векторным с ранжированными по приоритету компонентами. Допускаются жесткие и мягкие ограничения, и т. д.

Если в начале своего существования регуляторы «предиктор-корректор» применялись в основном в медленных процессах, например, в химической промышленности, то с развитием вычислительных возможностей стали доступны реализации для быстрых систем — как линейных, так и нелинейных [68]. Сейчас есть примеры использования этих регуляторов, например, в автомобильной промышленности [23], управлении морскими объектами [75], стабилизации плазмы [2; 74; 78], составлении расписаний [34] и т. д.

Несмотря на активное успешное применение, с регуляторами «предиктор-корректор» по-прежнему связан ряд открытых вопросов [30; 52; 59], например:

- расширение области устойчивости, которая гарантируется терминальным ограничением и терминальным слагаемым [18];
- расширение границ свойственной регулятору робастности [19; 25];
- разработка адаптивных схем управления «предиктор-корректор», а также схем с оценкой состояния по наблюдениям [60].

Ниже мы подробнее остановимся на других важных проблемах: реализации регулятора в реальном времени и вычислительном запаздывании.

1.2.2 О существовании оптимального управления

Задача оптимального управления лежит в основе регулятора «предиктор-корректор». Известны примеры таких задач, где есть допустимые управления, но не оптимальное. Вопрос существования оптимального управления, таким образом, представляет значительный интерес в контексте данной работы. Для систем дискретного времени на конечном промежутке этот вопрос решается существенно проще, чем для непрерывных систем. Действительно, функционал качества в этом случае есть функция конечного числа переменных. Достаточно предположить непрерывность этого функционала и компактность допустимых множеств, чтобы показать существование минимума указанной функции. Похожие соображения приводят к следующим результатам.

В [16] рассмотрена задача оптимального управления на конечном проме-

жутке времени в нелинейной системе дискретного времени с ограничением на управление, но без ограничений на состояние. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности, аналогичные принципу максимума Понтрягина [6]. В частности, доказано, что если ограничения на управление компактны, правая часть системы непрерывна как функция состояния и управления, а весовые функции функционала качества дифференцируемы, то оптимальное управление существует для любого начального состояния, причем оптимальное значение функционала конечно.

Результат [16] был обобщен в [1], где добавлены ограничения на состояние системы. Оказалось, что если множества допустимых управлений и начальных состояний компактны, ограничения на будущие состояния представлены замкнутыми множествами и в системе всегда существует хотя бы одна допустимая последовательность управлений, то всегда существует и оптимальная последовательность.

Дальнейшее развитие условия существования оптимального управления получили в [32], где были рассмотрены ограничения на управление, зависящие от состояния, а также несколько ослаблены предположения о функциях задачи: весовые функции считаются полунепрерывными снизу, а ограничения на управление — полунепрерывными сверху точечно-множественными отображениями состояния системы в компактное множество управлений.

На бесконечном промежутке задача оптимального управления дискретной системой была изучена в [43] в предположениях, аналогичных [32], с дополнительным условием, отражающим специфику бесконечного промежутка времени: должна существовать допустимая управляющая последовательность, доставляющая функционалу качества конечное значение. Доказано, что при этом оптимальное управление также существует.

Эти результаты обуславливают сделанное выше предположение 13 о существовании оптимального управления.

1.2.3 О реализации в реальном времени

Ограничения реального времени — это основная проблема, возникающая при реализации регулятора «предиктор-корректор», в особенности на встраиваемых устройствах управления с ограниченными ресурсами [40]. Чем быстрее управляемый процесс, тем сильнее ограничение на доступное для вычислений время.

На практике для реализации регуляторов «предиктор-корректор» часто используют тот или иной метод последовательного приближения к оптимальному управлению, однако в этом случае возникает вопрос: если процесс последовательных приближений прервется раньше, чем будет достигнута достаточная точность, останется ли замкнутая система устойчива? Для линейных систем существуют следующие решения:

- метод типа Ньютона, сложность которого растет не экспоненциально, как у традиционных методов, а линейно с увеличением горизонта прогноза [46];
- итеративный метод оптимизации, который производит субоптимальное стабилизирующее управление даже при ограничении на продолжительность итераций [70];
- быстрый метод программной реализации квадратичного программирования на основе метода Ньютона [79].

В нелинейном случае существуют такие методы:

- известен подход, который дает стабилизирующее управление, если на каждом такте известна хотя бы допустимая управляющая последовательность [71], однако субоптимальность при этом не гарантируется;
- разработан инструмент генерации программного кода регулятора с частотой работы порядка килогерц, основанный на локальной линеаризации системы [36], но его устойчивость пока не доказана.

Другой подход к реализации регуляторов «предиктор-корректор» — это ап-

проксимация оптимальной обратной связи явной функцией. К этому направлению относится и настоящая работа. Он снимает необходимость решения оптимизационной задачи и сводит регулирование к вычислению некоторой относительно простой функции [35]. Рассмотрим этот метод подробнее.

Для линейной системы с ограничениями в виде многогранников и квадратичным функционалом качества в работе [77] установлено, что обратная связь «предиктор-корректор» является кусочно аффинной функцией. Там же предложен метод приближенного построения этой функции и доказано, что полученное приближение остается стабилизирующим, а также разработана эффективная реализация, использующая способность некоторых микропроцессоров быстро решать задачи вычислительной геометрии.

В нелинейном случае оптимальная обратная связь «предиктор-корректор» имеет более сложный вид и даже может оказаться разрывной. Это существенно затрудняет ее равномерную аппроксимацию явной функцией. В предположении выпуклости оптимизационной задачи в [41] было предложено вместо аппроксимации значения оптимальной обратной связи строить такое управление, которое доставляет функционалу качества значение, близкое к минимуму, независимо от самого значения управления. При этом пространство состояний методом деления пополам разбивается на прямоугольные области, образующие структуру двоичного дерева, и в каждой области используется аффинная аппроксимация обратной связи, полученная как решение линейно-квадратичного приближения оптимизационной задачи в данной области [76]. Даны оценки точности приближения и условия устойчивости. Доказательство этих условий опирается на непрерывность функции Беллмана (т. е. значения функционала качества как функции начального состояния системы).

В [39] предложена общая идея подхода к построению кусочно аффинной обратной связи, аналогичная [41], без ограничения на выпуклость задачи, однако не даны оценки достаточной точности аппроксимации. Основная проблема здесь в том, что в выпуклом случае для получения оценок достаточно знать по-

грешность аппроксимации обратной связи в вершинах прямоугольной ячейки. При отсутствии выпуклости этого недостаточно. Чтобы найти некоторую оценку погрешности, предлагается выбирать дополнительные точки, но способ их выбора в [39] не указан.

1.2.4 О вычислительном запаздывании

При реализации сложных алгоритмов управления в системе зачастую возникает запаздывание, обусловленное существенным временем, необходимым для вычисления управляющего сигнала. Такое запаздывание называется вычислительным [33]. Известно, что вычислительное запаздывание может негативно сказываться на поведении регулятора «предиктор-корректор» и даже приводить к неустойчивости [29].

Принцип компенсации запаздывания или предикторного управления системами с запаздыванием в управлении берет начало в работах [72; 73], где сформулирован метод, названный позже «предиктором Смита». Он не является в точности эквивалентом того, что обычно понимается под компенсацией запаздывания, но в нем уже используется в терминах передаточных функций идея применения оператора, обратного оператору запаздывания.

Предиктор Смита работает только в устойчивых системах. Для произвольных линейных систем с распределенными запаздываниями принцип компенсации был разработан в [21; 49; 51]. В [51] этот подход носит название *finite spectrum assignment* и основан на том, что при управлении некоторого вида спектр замкнутой системы становится конечным. В [49] аналогичный подход используется для системы с одним запаздыванием, называется *receding horizon method* и представляет собой вариант оптимального управления с прогнозом, т. е., по сути, регулятора «предиктор-корректор». В [21] компенсация распределенного запаздывания называется *model reduction* и выводится из «редуцирующего» преобразования системы, при котором запаздывания исчезают.

В перечисленных выше работах устойчивость метода компенсации запазды-

вания выводится из анализа спектра замкнутой системы, который оказывается конечным. Анализ линейных систем с компенсацией запаздывания методом Ляпунова — Красовского впервые был проведен в [48] для случая одного запаздывания и в [24; 53] для распределенных запаздываний. Для систем с одним запаздыванием в [42] доказана робастность по отношению к величине запаздывания. В [20; 26; 27] предложены адаптивные варианты метода.

К нелинейным системам треугольной структуры компенсация запаздывания применяется в [38], а к произвольным продолжимым вправо нелинейным системам с одним запаздыванием — в [47]. В [44; 45] метод компенсации запаздывания распространен на системы с запаздыванием и в управлении, и в состоянии.

Важной проблемой в практике компенсации запаздывания является проблема реализации компенсатора, связанная с тем, что для вычисления управления необходимо строить решение управляемой системы. В [54; 55; 61] показано, что квадратурные формулы для этого, вообще говоря, не подходят. В [57; 58] предложен способ реализации управления с компенсацией в виде динамического регулятора, допускающий аппроксимацию интегралов конечными суммами.

В качестве примера компенсации одного запаздывания в регуляторе «предиктор-корректор» приведем публикацию [31], где решается задача управления током в трехфазном инверторе.

1.3 Структура работы

Работа имеет следующую структуру:

- Глава 2 посвящена анализу регулятора в нелинейном режиме, т. е. вдали от начала координат.
 - В параграфе 2.1 мы касаемся оценки области управляемости и связанного с ней вопроса выбора горизонта прогноза. Предложен метод построения оценки области управляемости в виде набора выпуклых многогранников. Вариация этого метода с фиксирован-

ными многогранниками опубликована в [8–10].

- В параграфе 2.2 предлагается несколько отличный от [39] подход к построению кусочно аффинной аппроксимации. Оценка точности здесь априорна, т. е. указана достаточная плотность сетки, при которой приближенное управление будет стабилизирующим и в заданной степени субоптимальным. При этом, как и в [41], используется непрерывность функции Беллмана, доказанная здесь в предположении липшицевости системы и непрерывной зависимости множества допустимых управлений от состояния системы. В результате получается приближенная обратная связь в виде явной функции, в любой наперед заданной степени субоптимальная и стабилизирующая. Эти результаты опубликованы в [7; 11; 12; 14; 64].
- В главе 3 построение приближенной обратной связи продолжается вблизи начала координат. В этом случае простого равномерного приближения функции Беллмана уже недостаточно. Рассматриваются два варианта управления: линейная обратная связь и решение приближенной задачи динамического программирования с квадратичным приближением функции Беллмана.
- В главе 4 решается вопрос компенсации вычислительного запаздывания. В линейном случае методом Ляпунова — Красовского доказывалась робастность известного в литературе метода компенсации запаздывания по отношению к неточностям в модели системы. В нелинейном случае предлагается обобщение метода компенсации на случай распределенных запаздываний, изложенное здесь в случае двух запаздываний. Эти результаты опубликованы в [13; 15; 63; 65].
- В главе 5 приведены примеры численной реализации описанного регулятора.

Глава 2

Анализ нелинейного режима

Начнем с изучения функционирования регулятора «предиктор-корректор» в существенно нелинейной области $\mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r$, где r — некоторое положительное число, которое подлежит определению далее. Здесь решаются две задачи: выбор горизонта прогноза T , от которого зависит область управляемости, и аппроксимация оптимальной обратной связи $u_{\text{опт}}(0, x)$ явной функцией $u_{\text{явн}}(x)$.

2.1 Оценка области управляемости и выбор горизонта прогноза

В этом параграфе предлагается оценка области управляемости оптимизационной задачи (1.3), т. е. множества начальных точек x^0 , для которых в этой задаче существует допустимое управление. Когда устойчивость замкнутой системы гарантирована теоремой 1, область управляемости является также областью притяжения нулевого решения. Очевидно, что область управляемости расширяется с увеличением горизонта прогноза, поэтому эта задача связана также с выбором горизонта T .

Предлагаемый ниже способ построения оценки области управляемости в виде многогранных ячеек основан на следующих двух вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. *Рассмотрим конечный набор из p точек*

$$v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathcal{X}$$

и некоторое управление $u \in \mathcal{U}$. Обозначим w_i образ точки v_i в системе (1.1)

под действием управления u :

$$w_i = f(v_i, u), \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

а выпуклые оболочки точек v_i и w_i — соответственно \mathcal{V} и \mathcal{W} :

$$\mathcal{V} = \text{conv}(v_1, v_2, \dots, v_p),$$

$$\mathcal{W} = \text{conv}(w_1, w_2, \dots, w_p).$$

Справедлива оценка

$$\min_{w \in \mathcal{W}} \|f(v, u) - w\| \leq (L_{f^{-1}}L_f + 1) \max_{i=2,3,\dots,p} \|w_i - w_1\| \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Замечание. Смысл леммы в том, что любая точка выпуклого многогранника, натянутого на точки v_i , отображается в некоторую окрестность многогранника, натянутого на их образы w_i .

Доказательство. Представим точку $v \in \mathcal{V}$ в виде

$$v = v_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i (v_i - v_1),$$

где α_i — неотрицательные коэффициенты, ограниченные условием выпуклости

$$\sum_{i=2}^p \alpha_i \leq 1.$$

Рассмотрим точку

$$w = w_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i (w_i - w_1) \in \mathcal{W}.$$

Чтобы доказать лемму, достаточно показать, что

$$\|f(v, u) - w\| \leq (L_{f^{-1}}L_f + 1) \max_{i=2,3,\dots,p} \|w_i - w_1\|.$$

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
\|f(v, u) - w\| &= \left\| f\left(v_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i(v_i - v_1), u\right) - f(v_1, u) - \sum_{i=2}^p \alpha_i(w_i - w_1) \right\| \leq \\
&\leq \left\| f\left(v_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i(v_i - v_1), u\right) - f\left(v_1 + \sum_{i=2}^{p-1} \alpha_i(v_i - v_1), u\right) \right\| + \\
&+ \left\| f\left(v_1 + \sum_{i=2}^{p-1} \alpha_i(v_i - v_1), u\right) - f\left(v_1 + \sum_{i=2}^{p-2} \alpha_i(v_i - v_1), u\right) \right\| + \\
&+ \dots + \\
&+ \|f(v_1 + \alpha_2(v_2 - v_1), u) - f(v_1, u)\| + \\
&+ \sum_{i=2}^p \alpha_i \|w_i - w_1\| \leq \\
&\leq \sum_{i=2}^p \alpha_i (L_f \|v_i - v_1\| + \|w_i - w_1\|) \leq \\
&\leq \sum_{i=2}^p \alpha_i (L_{f^{-1}} L_f + 1) \|w_i - w_1\|,
\end{aligned}$$

откуда следует требуемая оценка. Лемма доказана. \square

Лемма 2. Рассмотрим конечный набор допустимых управлений u_i ($i = 1, 2, \dots, c$) таких, что

$$\text{conv}(u_1, u_2, \dots, u_c) \subset \mathcal{U}.$$

Пусть множества \mathcal{V}_i таковы, что

$$f(v, u_i) \in \mathcal{W} \quad \forall v \in \mathcal{V}_i, \quad i = 1, 2, \dots, c,$$

где \mathcal{W} — некоторое выпуклое ограниченное множество. Обозначим \mathcal{V} выпуклую оболочку множеств \mathcal{V}_i :

$$\mathcal{V} = \text{conv}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_c).$$

Тогда справедлива оценка

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \min_{w \in \mathcal{W}} \|f(v, u) - w\| \leq (L_{f^{-1}}L_f + 1) \max_{\bar{w}, \bar{w} \in \mathcal{W}} \|\bar{w} - \bar{w}\| + L_f \max_{i=2,3,\dots,c} \|u_i - u_1\|$$

$$\forall v \in \mathcal{V}.$$

Замечание. Смысл этой леммы в том, что если управления u_i допустимы вместе со своей выпуклой оболочкой и переводят некоторые выпуклые множества \mathcal{V}_i внутрь выпуклого множества \mathcal{W} , то существуют допустимые управления, которые переводят выпуклую оболочку множеств \mathcal{V}_i внутрь некоторой окрестности множества \mathcal{W} .

Доказательство. Доказательство аналогично лемме 1. Представим точку $v \in \mathcal{V}$ в виде

$$v = v_1 + \sum_{i=2}^c \alpha_i (v_i - v_1),$$

где $v_i \in \mathcal{V}_i$, а α_i — неотрицательные коэффициенты, ограниченные условием выпуклости

$$\sum_{i=2}^c \alpha_i \leq 1.$$

Рассмотрим управление

$$u = u_1 + \sum_{i=2}^c \alpha_i (u_i - u_1) \in \mathcal{U}$$

и точки

$$w_i = f(v_i, u_i) \in \mathcal{W}, \quad i = 1, 2, \dots, c,$$

$$w = w_1 + \sum_{i=2}^c \alpha_i (w_i - w_1) \in \mathcal{W}.$$

Чтобы доказать лемму, достаточно показать, что

$$\|f(v, u) - w\| \leq (L_{f^{-1}}L_f + 1) \max_{\bar{w}, \bar{w} \in \mathcal{W}} \|\bar{w} - \bar{w}\| + L_f \max_{i=2,3,\dots,c} \|u_i - u_1\|.$$

Справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
\|f(v, u) - w\| &= \left\| f \left(v_1 + \sum_{i=2}^c \alpha_i (v_i - v_1), u_1 + \sum_{i=2}^c \alpha_i (u_i - u_1) \right) - \right. \\
&\quad \left. - f(v_1, u_1) - \sum_{i=2}^c \alpha_i (w_i - w_1) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{i=2}^c \alpha_i \left(L_f (\|v_i - v_1\| + \|u_i - u_1\|) + \|w_i - w_1\| \right) \leq \\
&\leq \sum_{i=2}^c \alpha_i \left((L_{f^{-1}} L_f + 1) \|w_i - w_1\| + L_f \|u_i - u_1\| \right),
\end{aligned}$$

откуда следует требуемая оценка. Лемма доказана. \square

На основании лемм 1 и 2 можно предложить следующий способ построения оценки области управляемости в задаче (1.3).

Теорема 2. *Выберем многогранное множество \mathcal{R}_0 , которое вместе с некоторой δ -окрестностью содержится в \mathcal{X}_T . Положим*

$$\varepsilon = \frac{L_f - 1}{(L_f^T - 1)(2(L_{f^{-1}} L_f + 1) + L_f)} \delta.$$

Выберем также выпуклые m -мерные многогранники

$$\mathcal{U}_s = \text{conv}(u_1^s, u_2^s, \dots, u_{c_s}^s), \quad s = 1, 2, \dots, S$$

такие, что

$$\max_{i, j=1, 2, \dots, c_s} \|u_i^s - u_j^s\| \leq \varepsilon.$$

Построим последовательность множеств $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_T$ по следующему алгоритму:

1. Пусть построено \mathcal{R}_k . Разбить \mathcal{R}_k на конечное число выпуклых многогранников

$$\mathcal{W}_q = \text{conv}(w_1^q, w_2^q, \dots, w_{p_q}^q), \quad q = 1, 2, \dots, Q_k$$

так, что

$$\max_{i, j=1, 2, \dots, p_q} \|w_i^q - w_j^q\| \leq \varepsilon.$$

2. При каждом $q = 1, 2, \dots, Q_k$ и $s = 1, 2, \dots, S$ вычислить

$$v_{ij}^{qs} = f^{-1}(w_i^q, u_j^s) \quad \forall i = 1, 2, \dots, p_q, \quad j = 1, 2, \dots, c_s$$

и построить

$$\mathcal{V}_{qs} = \text{conv}\{v_{ij}^{qs} : i = 1, 2, \dots, p_q, j = 1, 2, \dots, c_s\}.$$

3. Положить

$$\mathcal{R}_{k+1} = \bigcup_{\substack{q = 1, 2, \dots, Q_k \\ s = 1, 2, \dots, S}} (\mathcal{V}_{qs} \cap \mathcal{X})$$

и повторить алгоритм.

Тогда множество \mathcal{R}_T является оценкой области управляемости в оптимизационной задаче (1.3) метода управления «предиктор-корректор», т. е. из любой точки $x \in \mathcal{R}_T$ система (1.1) может достичь терминального множества \mathcal{X}_T за T тактов при соблюдении ограничений.

Доказательство. Согласно леммам 1 и 2 из любой точки множества \mathcal{V}_{qs} за один такт можно достичь $\nu\varepsilon$ -окрестности множества \mathcal{W}_q , причем

$$\nu = 2(L_{f^{-1}}L_f + 1) + L_f.$$

Значит, из \mathcal{R}_T за один такт достижима $\nu\varepsilon$ -окрестность \mathcal{R}_{T-1} .

Рассмотрим произвольный вектор v из $\nu\varepsilon$ -окрестности \mathcal{R}_{T-1} . Существует вектор $\bar{v} \in \mathcal{R}_{T-1}$ такой, что

$$\|v - \bar{v}\| \leq \nu\varepsilon.$$

Известно, что из \bar{v} можно достичь $\nu\varepsilon$ -окрестности \mathcal{R}_{T-2} с некоторым управлением \bar{u} . Из липшицевости функции f следует оценка

$$\|f(v, \bar{u}) - f(\bar{v}, \bar{u})\| \leq L_f \nu\varepsilon,$$

что означает: из точки v достижима $(L_f + 1)\nu\varepsilon$ -окрестность множества \mathcal{R}_{T-2} , т. е. эта окрестность достижима из любой точки \mathcal{R}_T .

Продолжая оценки далее, приходим к выводу, что из \mathcal{R}_T можно достичь окрестности \mathcal{R}_0 с радиусом

$$(L_f^{T-1} + L_f^{T-2} + \dots + 1)\nu\varepsilon = \frac{L_f^T - 1}{L_f - 1} (2(L_{f^{-1}}L_f + 1) + L_f)\varepsilon.$$

Следовательно, при указанном в теореме выборе ε из \mathcal{R}_T можно достичь δ -окрестности \mathcal{R}_0 , которая по условию содержится в \mathcal{X} . Теорема доказана. \square

2.2 Построение явной обратной связи

Обратимся к задаче аппроксимации решения $u_{\text{опт}}(0, x)$ задачи (1.3) явной функцией.

2.2.1 Понятия и обозначения, связанные с динамическим программированием

Принцип динамического программирования играет центральную роль в построениях и доказательствах настоящего параграфа, поэтому необходимо ввести ряд обозначений.

Рассмотрим последовательность функционалов

$$\mathcal{J}^s(x^0, u(\cdot)) = \sum_{k=0}^{T-s-1} \ell(x(k+1, x^0, u(\cdot)), u(k)) + \ell_T(x(T-s, x^0, u(\cdot))),$$

где $s = 0, 1, \dots, T-1$, а также, как непосредственное распространение этих выражений на случай $s = T$, функцию $\mathcal{J}^T(x^0) = \ell_T(x^0)$. Функционал \mathcal{J}^0 совпадает с \mathcal{J} , каждый последующий получается удалением одного слагаемого, а в функции \mathcal{J}^T остается лишь терминальное слагаемое.

По аналогии с задачей (1.3) для каждого из функционалов \mathcal{J}^s поставим оптимизационную задачу

$$\begin{cases} \mathcal{J}^s(x^0, u(\cdot)) \rightarrow \inf_{u(\cdot)}, \\ u(k) \in \mathcal{U} & \forall k \in [0, T-s-1], \\ x(k, x^0, u(\cdot)) \in \mathcal{X} & \forall k \in [1, T-s], \\ x(T-s, x^0, u(\cdot)) \in \mathcal{X}_T, \end{cases} \quad (2.1)$$

и оптимальное значение функционала обозначим $\mathcal{J}_{\text{опт}}^s(x^0)$. Функция \mathcal{J}^T не зависит от управления, потому для нее $\mathcal{J}_{\text{опт}}^T(x^0) = \mathcal{J}^T(x^0)$.

Напомним: идея динамического программирования состоит в том, что часть функционала \mathcal{J}^s , зависящую от $u(1), u(2), \dots, u(T-s-1)$, можно минимизировать независимо от $u(0)$. Точнее говоря,

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}^s(x^0) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ f(x^0, u) \in \mathcal{X}}} \left\{ \ell(f(x^0, u), u) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^{s+1}(f(x^0, u)) \right\}, \quad s = 0, 1, \dots, T-1. \quad (2.2)$$

Отсюда следует способ понижения размерности задачи поиска оптимального первого такта управляющей последовательности $u(0)$: слагаемые функционала, зависящие от остальных тактов, можно заменить их оптимальной суммой.

При реализации регулятора «предиктор-корректор» подход динамического программирования особенно уместен: вычисление всей последовательности

$$u_{\text{опт}}(0, x^0), u_{\text{опт}}(1, x^0), \dots, u_{\text{опт}}(T-1, x^0)$$

в задаче (1.3) представляется напрасным, поскольку в систему все равно подается только $u_{\text{опт}}(0, x^0)$. С этим подходом, однако, связана проблема: функция $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1(x)$ неизвестна и, вообще говоря, не имеет аналитического выражения.

Приблизим $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1(x)$ какой-либо функцией $\mathcal{F}_{\text{опт}}^1(x)$. Имея такую аппроксимацию, можно взамен \mathcal{J} построить следующий приближенный функционал, зависящий только от одного такта управления:

$$\mathcal{F}(x^0, u) = \ell(f(x^0, u), u) + \mathcal{F}_{\text{опт}}^1(f(x^0, u)).$$

Поставим для функционала \mathcal{F} задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x^0, u) \rightarrow \inf_u, \\ u \in \mathcal{U}, \\ f(x^0, u) \in \mathcal{X}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Определение 7. Решение $u_{\text{дин}}(x^0)$ задачи (2.3) будем называть *решением задачи приближенного динамического программирования*, отвечающим начальному условию x^0 . Будем считать, что оно всегда существует. Если оно не единственно, выберем его произвольно и далее будем считать однозначно определенным.

Определение 8. *Функцией Беллмана* задачи оптимального управления называется оптимальное значение функционала качества как функция начального состояния системы. Например, в задаче (1.3) это $\mathcal{J}_{\text{опт}}(x^0)$, в последовательности задач (2.1) — $\mathcal{J}_{\text{опт}}^s(x^0)$, а в (2.3) — $\mathcal{F}_{\text{опт}}(x^0)$.

Ниже будет доказано, что при достаточно точной аппроксимации функции Беллмана ($\mathcal{F}_{\text{опт}}^1 \approx \mathcal{J}_{\text{опт}}^1$) решение задачи приближенного динамического программирования является достаточно точной аппроксимацией оптимального управления в том смысле, что оно, во-первых, сохраняет устойчивость и, во-вторых, значение функционала на приближенном управлении достаточно близко к оптимальному.

2.2.2 Вспомогательный результат: непрерывность функции Беллмана

В данном параграфе покажем, что функции Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}^s(x)$ непрерывны и даже липшицевы.

Теорема 3. *В сделанных выше предположениях каждая из функций Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}^s(x)$, где $s = 1, 2, \dots, T$, удовлетворяет условию Липшица с константой $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^s}$, причем $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^s}$ допустимо определить рекуррентной формулой*

$$L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^s} = (3\gamma + 1)L_f(2L_{\ell\rho}(\mathcal{X}) + L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^{s+1}}) + 6\gamma L_{\ell\rho}(\mathcal{U}),$$

в которой $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^T} = 2L_{\ell\rho}(\mathcal{X})$.

Доказательство. Будем доказывать теорему по индукции для всех функций $\mathcal{J}_{\text{опт}}^s$, начиная с $s = T$. Для $\mathcal{J}_{\text{опт}}^T(x) = \ell_T(x)$ она, очевидно, верна, причем

соответствующая константа Липшица

$$L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^T} = 2L_{\ell_T}\rho(\mathcal{X}).$$

Предположим, что теорема доказана для $\mathcal{J}_{\text{опт}}^{s+1}$, и докажем ее для $\mathcal{J}_{\text{опт}}^s$.

Сумму, минимизируемую в выражении (2.2), обозначим $\ell_s(x^0, u(0))$, а точки минимума функций $\ell_s(x^1, u)$ и $\ell_s(x^2, u)$ обозначим соответственно u^1 и u^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{опт}}^s(x^1) &= \min_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ f(x^1, u) \in \mathcal{X}}} \ell_s(x^1, u) = \ell_s(x^1, u^1), \\ \mathcal{J}_{\text{опт}}^s(x^2) &= \min_{\substack{u \in \mathcal{U} \\ f(x^2, u) \in \mathcal{X}}} \ell_s(x^2, u) = \ell_s(x^2, u^2). \end{aligned}$$

Обратим внимание, что множество, на котором разыскивается минимум $\ell_s(x, u)$, зависит от x , потому, вообще говоря, управление u^2 недопустимо для x^1 , а u^1 — для x^2 . Тем не менее, согласно предположению 12, эти множества близки для близких значений x в том смысле, что существуют такие значения $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2 \in \mathcal{U}$, которые допустимы и для x^1 , и для x^2 , т. е. $f(x^{1,2}, \tilde{u}^1) \in \mathcal{X}$ и $f(x^{1,2}, \tilde{u}^2) \in \mathcal{X}$, причем

$$\|\tilde{u}^1 - u^1\| \leq \gamma \|x^1 - x^2\|, \quad \|\tilde{u}^2 - u^2\| \leq \gamma \|x^1 - x^2\|.$$

В силу оптимальности

$$\ell_s(x^1, u^1) \leq \ell_s(x^1, \tilde{u}^2), \quad \ell_s(x^2, u^2) \leq \ell_s(x^2, \tilde{u}^1),$$

а поскольку функция $\ell_s(x, u)$ липшицева (предположение 3), можно записать еще и следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\ell_s(x^1, \tilde{u}^1) - \ell_s(x^2, \tilde{u}^1)| &\leq K_1 \|x^1 - x^2\|, \\ |\ell_s(x^1, \tilde{u}^2) - \ell_s(x^2, \tilde{u}^2)| &\leq K_1 \|x^1 - x^2\|, \\ |\ell_s(x^1, u^1) - \ell_s(x^1, \tilde{u}^1)| &\leq K_2 \|x^1 - x^2\|, \\ |\ell_s(x^2, u^2) - \ell_s(x^2, \tilde{u}^2)| &\leq K_2 \|x^1 - x^2\|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= L_f(2L_{\ell\rho}(\mathcal{X}) + L_{\mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^{s+1}}), \\ K_2 &= \gamma(K_1 + 2L_{\ell\rho}(\mathcal{U})). \end{aligned}$$

Из перечисленных неравенств следует, что

$$|\ell_s(x^1, u^1) - \ell_s(x^2, u^2)| \leq (K_1 + 3K_2)\|x^1 - x^2\|,$$

т. е. достаточно положить $L_{\mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^s} = K_1 + 3K_2$. Теорема доказана. \square

Особую роль при доказательстве теоремы играет предположение 12. Покажем, как можно на практике установить, что оно имеет место. Следующая лемма содержит достаточные для этого условия. Фактически она описывает ситуацию, когда любое управление, которое переводит некоторую точку на границу множества \mathcal{X} , всегда можно немного изменить, чтобы эта точка отображалась внутрь \mathcal{X} .

Лемма 3. Пусть наряду с предположениями 2, 3 и 10 выполнено следующее:

1. Множество \mathcal{X} выпукло и имеет гладкую границу $\partial\mathcal{X}$, орт внешней нормали к которой в точке x равен $n^x(x)$. Множество \mathcal{U} также выпукло с гладкой границей $\partial\mathcal{U}$ и ортом $n^u(u)$.
2. Существуют такие два числа $\sigma > 0$ и $\nu > 0$, что при всех $x \in \mathcal{X}$ и $u \in \mathcal{U}$, для которых $f(x, u) \in \partial\mathcal{X}$, у системы неравенств

$$n^x(x)^\top B(x, u)v < -\sigma\|B(x, u)v\| - \nu$$

есть решение v , равное по норме единице. Если при этом $u \in \partial\mathcal{U}$, то такое решение имеет система

$$\begin{aligned} n^x(x)^\top B(x, u)v &< -\sigma\|B(x, u)v\| - \nu, \\ n^u(u)^\top v &< -\sigma\|v\| - \nu. \end{aligned}$$

Тогда выполняется и предположение 12, причем

$$\gamma = \frac{L_f}{\sigma\nu}.$$

Доказательство. Рассмотрим значения $\bar{x} \in \mathcal{X}$ и $\bar{u} \in \mathcal{U}$, о которых идет речь в предположении 12: $f(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathcal{X}$. Покажем сначала, что предположение 12 выполняется локально: при каждом $x \in \mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap \mathcal{X}$ найдется такое $u \in \mathcal{U}$, что $f(x, u) \in \mathcal{X}$ и $\|u - \bar{u}\| \leq \gamma\|x - \bar{x}\|$. Здесь ρ и γ могут, вообще говоря, зависеть от \bar{x} и \bar{u} .

Если точка $f(\bar{x}, \bar{u})$ лежит внутри \mathcal{X} , ее можно окружить окрестностью $\mathcal{B}_R(f(\bar{x}, \bar{u})) \subset \mathcal{X}$. По предположению 3

$$|f(x, \bar{u}) - f(\bar{x}, \bar{u})| \leq L_f\|x - \bar{x}\|,$$

поэтому для локального выполнения (12) достаточно выбрать $\rho = R/L_f$, $\gamma = 0$ и $u = \bar{u}$.

Будем считать теперь, что $f(\bar{x}, \bar{u}) \in \partial\mathcal{X}$. Получим решение v системы неравенств

$$n^x(\bar{x})^\top B(\bar{x}, \bar{u})v < -\sigma\|B(\bar{x}, \bar{u})v\| - \nu.$$

Если же, кроме того, $\bar{u} \in \partial\mathcal{U}$, найдем v из системы

$$n^x(\bar{x})^\top B(\bar{x}, \bar{u})v < -\sigma\|B(\bar{x}, \bar{u})v\| - \nu,$$

$$n^u(\bar{u})^\top v < -\sigma\|v\| - \nu.$$

Согласно условию леммы, вектор v существует, причем можно принять, что $\|v\| = 1$. Выберем $u = \bar{u} + \varepsilon v$, где ε определяется так, что $u \in \mathcal{U}$ и $\mathcal{B}_R(f(\bar{x}, u)) \subset \mathcal{X}$ при некотором R . Эти требования удовлетворяются при достаточно малом ε по построению вектора v .

Действительно, по предположению 2

$$\|f(\bar{x}, u) - f(\bar{x}, \bar{u}) - \varepsilon B(\bar{x}, \bar{u})v\| \leq M_f \varepsilon^2 \|v\|^2.$$

Зададимся сначала целью выбрать $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ так, что

$$\mathcal{B}_R(f(\bar{x}, \bar{u}) + \varepsilon B(\bar{x}, \bar{u})v) \subset \mathcal{X}.$$

Иначе говоря, дан луч, выходящий из точки $f(\bar{x}, \bar{u}) \in \partial\mathcal{X}$ и направленный вдоль вектора $B(\bar{x}, \bar{u})v$, т. е. внутрь \mathcal{X} , согласно выбору v . Требуется около некоторой точки луча, лежащей вблизи его начала, описать сферу, содержащуюся в \mathcal{X} . Система неравенств для выбора вектора v позволяет гарантировать, что $\cos \alpha > \sigma$, где α — угол между лучом и внутренней нормалью к $\partial\mathcal{X}$. Кривизна гладкой поверхности $\partial\mathcal{X}$ ограниченная, поэтому худшая ситуация, которая может быть, с точки зрения выбора максимального R , — когда $\partial\mathcal{X}$ представляет собой сферу некоторого радиуса r . Полагая, что так и есть, и используя геометрические соображения, можно показать, что достаточно выбрать

$$R = r - \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 \|Bv\|^2 - 2r\varepsilon\sigma \|Bv\|}.$$

Принимая во внимание нелинейность, R необходимо сократить:

$$R = r - \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 \|Bv\|^2 - 2r\varepsilon\sigma \|Bv\|} - M_f \varepsilon^2 \|v\|^2.$$

Поскольку $\|v\| = 1$, а из определения v можно заключить, что $\|Bv\| > \nu$, возьмем

$$R = r - \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 \|B\|^2 - 2r\varepsilon\sigma\nu} - M_f \varepsilon^2.$$

Это значение имеет смысл (положительно) для достаточно малых ε , потому что производная его по ε при $\varepsilon = 0$ равна $\sigma\nu > 0$. Для дальнейшего достаточно приближенно положить $R = \sigma\nu\varepsilon/2$.

Заключаем, что свойство 12 выполняется в ρ -окрестности точки \bar{x} при $\rho = R/L_f = \frac{\sigma\nu\varepsilon}{2L_f}$, $\gamma = \frac{2L_f}{\sigma\nu}$ и достаточно малом ε . Чтобы распространить такое свойство на множество \mathcal{X} , покроем его конечным набором ρ -окрестностей, причем ε мало настолько, чтобы удовлетворять всем точкам множества \mathcal{X} . Если x и \bar{x} лежат в разных окрестностях, можно сформировать последовательность из

примерно $\|x - \bar{x}\|/\rho$ точек на расстоянии не более ρ одна от другой и, пользуясь локальным свойством, построить требуемое u так, чтобы

$$\|u - \bar{u}\| \leq \frac{\|x - \bar{x}\|}{\rho} \frac{2L_f}{\sigma\nu} \rho.$$

Заметив, что вместо 2 в числителе можно было взять любое число, большее 1, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана. \square

В качестве примера рассмотрим систему $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ с ограничением $\mathcal{X} = \{x : \|x\| \leq 1\}$ и без ограничения на u . Точка \bar{x} может отображаться этой системой в любую точку линейного многообразия с базисом B , проходящего через $A\bar{x}$. Выделяются следующие случаи:

- если это многообразие не пересекает множество \mathcal{X} при некотором $\bar{x} \in \mathcal{X}$, в первую очередь нарушается предположение 11 о существовании допустимого управления для любого допустимого состояния;
- если это многообразие касается \mathcal{X} при некотором $\bar{x} \in \mathcal{X}$, то нарушается условие леммы, поскольку для точек касания $(n^x)^\top B = 0$;
- если это многообразие пересекает внутренность \mathcal{X} при любом выборе $\bar{x} \in \mathcal{X}$, условие леммы выполняется. Введя матрицу B_\perp — ортонормированный базис ортогонального дополнения к B , данную ситуацию можно описать выражением

$$\|B_\perp^\top Ax\| < 1 \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

т. е.

$$\|B_\perp^\top A\| < 1.$$

2.2.3 Шаг 1: оценка близости решения задачи

приближенного динамического программирования к оптимальной обратной связи

Оценим погрешность аппроксимации решения $u_{\text{опт}}(0, x)$ задачи (1.3) решением $u_{\text{дин}}(x)$ задачи приближенного динамического программирования (2.3).

Согласно принципу динамического программирования, функция $u_{\text{опт}}(0, x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \ell(f(x, u), u) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u)) \rightarrow \inf_u, \\ u \in \mathcal{U}, \\ f(x^0, u) \in \mathcal{X}, \end{cases}$$

которая отличается от (2.3) заменой функции Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1$ на ее приближение $\mathcal{F}_{\text{опт}}^1$. Выше установлено, что функция Беллмана является липшицевой, и получена оценка константы Липшица $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1}$. Зная эту оценку, можно построить функцию $\mathcal{F}_{\text{опт}}^1$ так, чтобы она равномерно на $\mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r$ аппроксимировала $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1$ с любой заданной точностью. Действительно, справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *При любом $\mu > 0$ существует кусочно аналитически заданная непрерывная функция $\mathcal{F}_{\text{опт}}^1(x)$, которая удовлетворяет неравенству*

$$|\mathcal{F}_{\text{опт}}^1(x) - \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(x)| \leq \mu \quad \forall x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r.$$

Доказательство. Пусть на множестве $\mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r$ выбрана сетка из конечного числа точек \bar{x} . Плотность сетки охарактеризуем числом ρ — максимальным расстоянием, на котором может оказаться от произвольно выбранной точки $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r$ ближайшая к ней точка сетки: иными словами, при всех $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r$ существует $\bar{x} \in \mathcal{B}_\rho(x)$.

Вычислим значение $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1(\bar{x})$ во всех точках сетки и построим аппроксимацию $\mathcal{F}_{\text{опт}}^1(x)$, не входящую в противоречие с условием Липшица для $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1(x)$: при $n = 1$ соединим точки $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1(\bar{x})$ ломаной, при $n = 2$ используем линейную интерполяцию, если ячейки сетки считаются треугольными, или билинейную, если квадратными, и т. д. Очевидно, что

$$|\mathcal{F}_{\text{опт}}^1(x) - \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(x)| \leq \rho L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} \quad \forall x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r.$$

Выбрав такую сетку, что

$$\rho \leq \frac{\mu}{L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1}},$$

получим требуемое условие. Лемма доказана. \square

Лемма 5. *Если*

$$|\mathcal{F}_{\text{опт}}^1(x) - \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(x)| \leq \mu \quad \forall x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r,$$

при некотором $\mu > 0$, то

$$|\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x)| \leq \mu \quad \forall x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r.$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{опт}}(x) &= \mathcal{F}(x, u_{\text{дин}}(x)) = \\ &= \ell(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)) + \mathcal{F}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) = \\ &= \ell(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) + \\ &\quad + \mathcal{F}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))). \end{aligned}$$

В силу оптимальности значения $u_{\text{опт}}(0, x)$

$$\begin{aligned} \ell(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) &\geq \\ &\geq \ell(f(x, u_{\text{опт}}(0, x)), u_{\text{опт}}(0, x)) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{опт}}(0, x))) = \mathcal{J}_{\text{опт}}(x). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) \geq \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) + \mathcal{F}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) \geq \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) - \mu.$$

Аналогично получается неравенство

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \geq \mathcal{F}_{\text{опт}}(x) - \mu,$$

откуда следует требуемое утверждение. Лемма доказана. \square

Лемма 6. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Если*

$$|\mathcal{F}_{\text{опт}}^1(x) - \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(x)| \leq \mu \quad \forall x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r,$$

u

$$|\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x)| \leq \mu \quad \forall x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r,$$

то

$$\mathcal{F}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) - \mathcal{F}_{\text{опт}}(x) \leq -\ell\left(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)\right) + 2\mu.$$

Доказательство. Воспользуемся той же идеей, что и при доказательстве теоремы 1 (см. [28]). Рассмотрим тождество

$$\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) = \ell\left(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)\right) + \mathcal{F}_{\text{опт}}^1\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right).$$

Пользуясь неравенством из условия леммы, запишем

$$\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) \geq \ell\left(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)\right) + \mathcal{F}_{\text{опт}}^1\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) - \mu.$$

Величина $\mathcal{F}_{\text{опт}}^1$ есть

$$\mathcal{F}_{\text{опт}}^1\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) = \sum_{k=0}^{T-2} \ell(x^{k+1}, u^k) + \ell_T(x^{T-1}),$$

где u^0, u^1, \dots, u^{T-2} — некоторая последовательность управлений, допустимых в задаче (2.1) при $s = 1$, и

$$\begin{aligned} x^0 &= f(x, u_{\text{дин}}(x)), \\ x^i &= f(x^{i-1}, u^{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Заметим, что $x^{T-1} \in \mathcal{X}_T$. Используя неравенство из условия теоремы 1, получим

$$\mathcal{F}_{\text{опт}}^1\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) = \sum_{k=0}^{T-1} \ell(x^{k+1}, u^k) + \ell_T(x^T),$$

где

$$\begin{aligned} u^{T-1} &= \kappa(x^{T-1}), \\ x^T &= f(x^{T-1}, u^{T-1}). \end{aligned}$$

Из условия теоремы 1 вытекает, что $x^T \in \mathcal{X}_T$, поэтому последовательность управлений u^0, u^1, \dots, u^{T-1} допустима в задаче (1.3). Поскольку эта последовательность, вообще говоря, не оптимальна в указанной задаче, справедлива оценка

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} \ell(x^{k+1}, u^k) + \ell_T(x^T),$$

следовательно,

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}^1\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) \geq \mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right).$$

Вновь применяя неравенство из условия леммы, получаем

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}^1\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) \geq \mathcal{F}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) - \mu.$$

Подставляя это в неравенство для $\mathcal{F}_{\text{опт}}(x)$, приходим к следующему выводу:

$$\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) \geq \ell\left(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)\right) + \mathcal{F}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) - 2\mu.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство. \square

2.2.4 Шаг 2: аппроксимация решения задачи

приближенного динамического программирования явной функцией

Приближенная задача (2.3) проще, чем исходная (1.3), т. к. в ней меньше степеней свободы: всего один m -мерный вектор u вместо последовательности $u(\cdot)$ из T векторов. Тем не менее, даже решение такой задачи пониженной размерности затруднительно в реальном времени. Эффективнее аппроксимировать ее решение $u_{\text{дин}}(x)$ явной функцией.

Обратная связь $u_{\text{дин}}(x)$, вообще говоря, не является непрерывной функцией состояния x , и определить точки ее разрыва с абсолютной точностью невозможно. По этой причине обосновательно интерполировать функцию $u_{\text{дин}}(x)$ по ее

значениям на конечной сетке и рассчитывать при этом на равномерное приближение. Несмотря на сказанное, мы все же ставим целью аппроксимировать $u_{\text{дин}}(x)$ по значениям на конечной сетке. Точность приближения, однако, будем оценивать не по близости *управляющего сигнала* к оптимальному, а по тому, насколько *значение функционала* на аппроксимированном управлении близко к его оптимальному значению. Близость понимается в смысле следующего определения.

Определение 9. Допустимую обратную связь $u(x)$ будем называть ε -субоптимальной при $\varepsilon > 0$, если при всех $x \in \mathcal{X}$ выполнено неравенство

$$\ell\left(f(x, u(x)), u(x)\right) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1\left(f(x, u(x))\right) \leq (1 + \varepsilon)\mathcal{J}_{\text{опт}}(x).$$

Замечание. Чем меньше ε , тем ближе ε -субоптимальное управление к оптимальному. Оптимальная обратная связь $u_{\text{опт}}(0, x)$ является 0-субоптимальной.

Пусть выполнены предположения теорем 1 и 3, т. е. точный регулятор «предиктор-корректор» является стабилизирующим, и функция Беллмана непрерывна. Покажем, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ можно построить стабилизирующую ε -субоптимальную обратную связь в виде кусочно аффинной функции. Для этого сначала сформулируем две леммы: первая касается субоптимальности, вторая — устойчивости.

Лемма 7. Рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in \mathcal{X}$ и число $\varepsilon > 0$. Если точка $x \in \mathcal{X}$ и управляющий сигнал $u \in \mathcal{U}$ удовлетворяют

$$\|x - \bar{x}\|^2 + \|u - u_{\text{опт}}(0, \bar{x})\|^2 \leq \rho^2,$$

где

$$\rho \leq \frac{\varepsilon \min_{x \in \mathcal{B}_\rho(\bar{x})} \mathcal{J}_{\text{опт}}(x)}{L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}^1 L_f + L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} + L_\ell \sqrt{L_f^2 + 1}},$$

то сигнал u может быть кандидатом на значение ε -субоптимальной обратной связи в точке x , т. е.

$$\ell(f(x, u), u) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u)) \leq (1 + \varepsilon)\mathcal{J}_{\text{опт}}(x).$$

Здесь $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}$, $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1}$, L_f и L_ℓ — константы Липшица функций $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1$, $\mathcal{J}_{\text{опт}}$, f и ℓ .

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \ell(f(x, u), u) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) &= \\ &= \ell(f(x, u), u) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) + \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x). \end{aligned}$$

Выполнив в правой части замену

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) = \ell\left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})), u_{\text{опт}}(0, \bar{x})\right) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1\left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x}))\right),$$

придем к

$$\begin{aligned} \ell(f(x, u), u) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) &= \\ &= \ell(f(x, u), u) - \ell\left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})), u_{\text{опт}}(0, \bar{x})\right) + \\ &+ \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}^1\left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x}))\right) + \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x). \end{aligned}$$

Используя неравенства Липшица

$$\begin{aligned} \ell(f(x, u), u) - \ell\left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})), u_{\text{опт}}(0, \bar{x})\right) &\leq \\ &\leq L_\ell \sqrt{\|f(x, u) - f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x}))\|^2 + \|u - u_{\text{опт}}(0, \bar{x})\|^2} \leq \\ &\leq L_\ell \sqrt{L_f^2 (\|x - \bar{x}\|^2 + \|u - u_{\text{опт}}(0, \bar{x})\|^2) + \|u - u_{\text{опт}}(0, \bar{x})\|^2} \leq L_\ell \sqrt{L_f^2 + 1} \rho, \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}^1\left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x}))\right) \leq L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} L_f \rho,$$

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \leq L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} \rho,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} \ell(f(x, u), u) + \mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) &\leq \\ &\leq \left(L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} L_f + L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} + L_\ell \sqrt{L_f^2 + 1}\right) \rho \leq \varepsilon \mathcal{J}_{\text{опт}}(x), \end{aligned}$$

откуда следует требуемое неравенство. Лемма доказана. \square

Лемма 8. Рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r$ и число $\varkappa \in (0, 1)$. Если точка $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r$ и управляющий сигнал $u \in \mathcal{U}$ удовлетворяют

$$\|x - \bar{x}\|^2 + \|u - u_{\text{опт}}(0, \bar{x})\|^2 \leq \rho^2,$$

где

$$\rho = \frac{\varkappa - 1}{L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}(L_f + 1)} \left(\mathcal{J}_{\text{опт}} \left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})) \right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) \right),$$

то

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \leq \varkappa \left(\mathcal{J}_{\text{опт}} \left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})) \right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) \right).$$

Здесь $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}$ и L_f — константы Липшица функций $\mathcal{J}_{\text{опт}}$ и f .

Замечание. Смысл леммы 8 таков: если в данной точке \bar{x} оптимальное значение функционала убывает при оптимальном управлении $u_{\text{опт}}(0, \bar{x})$, то в достаточно близких точках x при достаточно близких управлениях u оно также будет убывать.

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) &= \mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}} \left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})) \right) + \\ &+ \mathcal{J}_{\text{опт}} \left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})) \right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) + \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x). \end{aligned}$$

Используя неравенства Липшица

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}} \left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})) \right) \leq L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} L_f \rho,$$

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \leq L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} \rho,$$

придем к

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u)) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) &\leq \\ &\leq \mathcal{J}_{\text{опт}} \left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})) \right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) + L_{\mathcal{J}}(L_f + 1)\rho = \\ &= \varkappa \left(\mathcal{J}_{\text{опт}} \left(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x})) \right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) \right), \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма доказана. □

2.2.5 Построение субоптимальной обратной связи в заданной близости от оптимальной

Следующая основная теорема, опираясь на леммы 7 и 8, предлагает основу для построения стабилизирующей ε -субоптимальной обратной связи $u_{\text{явн}}(x)$. Для этого значения $u_{\text{опт}}(0, x)$ вычисляются в точках достаточно мелкой сетки, окружаются некоторыми окрестностями и интерполируются так, чтобы получаемая приближенная обратная связь не выходила из указанных окрестностей.

Теорема 4. Пусть обратная связь «предиктор-корректор»

$$u(x) = u_{\text{опт}}(0, x)$$

стабилизирует систему (1.1), причем выполнены условия теорем 1 и 3. Выберем достаточно малое r и стабилизируем систему (1.1) в области \mathcal{B}_r , например, линейным регулятором $u = Kx$. Выберем функцию $u_{\text{явн}}(x) = Kx$ внутри \mathcal{B}_r , а вне \mathcal{B}_r построим по следующему алгоритму:

1. Выбрать $\varkappa \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, положить

$$\rho_* = \min \left\{ \frac{\varepsilon \min_{x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r} \mathcal{J}_{\text{опт}}(x)}{L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} L_f + L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} + L_\ell \sqrt{L_f^2 + 1}}, \frac{\varkappa - 1}{L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}(L_f + 1)} \min_{x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r} \left(\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x}))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) \right) \right\}.$$

2. Построить сетку \mathcal{G} из конечного числа точек так, что любая точка области \mathcal{X} имеет хотя бы одну точку из \mathcal{G} в своей ρ_* -окрестности.
3. Для каждой точки $\bar{x} \in \mathcal{G}$ построить $(n + m)$ -мерный шар с центром $(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x}))$ и радиусом

$$\rho = \min \left\{ \frac{\varepsilon \min_{x \in \mathcal{B}_\rho(\bar{x})} \mathcal{J}_{\text{опт}}(x)}{L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} L_f + L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} + L_\ell \sqrt{L_f^2 + 1}}, \frac{\varkappa - 1}{L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}(L_f + 1)} \left(\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(\bar{x}, u_{\text{опт}}(0, \bar{x}))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(\bar{x}) \right) \right\}.$$

4. Построить функцию $u_{\text{явн}}(x)$ вне окрестности \mathcal{B}_r так, чтобы точка $(x, u_{\text{явн}}(x))$ при любом $x \in \mathcal{X}$ находилась хотя бы в одном из построенных шаров.

Здесь $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}$ и $L_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1}$ — константы Липшица функций $\mathcal{J}_{\text{опт}}$ и $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1$, определенные в теореме 3.

Такое построение всегда возможно. Получаемая обратная связь $u(k) = u_{\text{явн}}(x(k))$ стабилизирует систему (1.1) и является ε -субоптимальной.

Доказательство. Следует из вышеприведенных лемм. □

Значение теоремы 4 состоит в том, что она дает достаточные условия на допустимую погрешность в аппроксимации оптимальной обратной связи $u_{\text{опт}}(0, x)$ субоптимальной $u_{\text{явн}}(x)$. Их можно использовать, чтобы построить такую аппроксимацию, которая будет храниться в памяти управляющего устройства. Например, это может быть кусочно аффинная функция, определяемая треугольной сеткой и значениями в ее узлах. Мы предполагаем, что вычисление подобной аппроксимации — более надежный и быстрый вариант реализации регулятора, чем численная оптимизация.

Пусть реализованы пункты 1–3 теоремы 4. Отметим два способа построения функции $u_{\text{явн}}(x)$, удовлетворяющей пункту 4:

1. Тривиальный способ — кусочно постоянная функция, получается при интерполировании по правилу ближайшего соседа:

$$u_{\text{явн}}(x) = u_{\text{опт}}(0, x^*), \quad x^* = \arg \min_{x \in \mathcal{G}} \|x - \bar{x}\|.$$

Недостаток этого способа — невозможность обоснованно сократить количество узлов сетки и, как следствие, избыточный расход памяти на хранение $u_{\text{опт}}(0, x^*)$ в каждом узле.

2. Выделение областей непрерывности $u_{\text{явн}}(x)$, внутри которых можно применить непрерывную интерполяцию и упростить сетку, сократив количество узлов.

Замечание. Основная сложность, связанная с задачей быстрого вычисления кусочно заданной функции в некоторой точке x заключается в поиске куска, к которому относится x . Заметим, что на практике эта задача для систем, получаемых дискретизацией непрерывной модели, несколько упрощается: если известно, в каком куске находилась точка $x(k)$, то $x(k + 1)$ в силу непрерывности окажется в близлежащем куске. Если хранить карту кусков в виде графа, то проверить куски, лежащие вблизи от данного, будет проще.

Глава 3

Анализ квазилинейного режима

Напомним: в предыдущей главе была построена явная функция $u_{\text{явн}}(x)$, аппроксимирующая оптимальную обратную связь $u_{\text{опт}}(0, x)$ на множестве $\mathcal{X} \setminus \mathcal{B}_r$. При этом построение выполнено в два этапа:

$$u_{\text{опт}}(0, x) \rightarrow u_{\text{дин}}(x) \rightarrow u_{\text{явн}}(x).$$

Промежуточная функция $u_{\text{дин}}(x)$ — это решение приближенной задачи динамического программирования (2.3), которая получается из исходной задачи (1.3) заменой функции Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1(x)$ на равномерное кусочно аффинное приближение $\mathcal{F}_{\text{опт}}^1(x)$.

Заметим, что с приближением к нулю метод предыдущей главы перестает работать, т. к. рекомендуемая теоремой 4 сетка для построения функции $u_{\text{явн}}(x)$ бесконечно уплотняется.

В настоящей главе рассмотрим регулятор «предиктор-корректор» в некоторой окрестности нуля \mathcal{B}_R . Имеет место линейное приближение системы (1.1) и квадратичное приближение весовых функций ℓ и ℓ_T в функционале (1.2):

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{J}(x^0, u(\cdot)) = \sum_{k=0}^{T-1} \left(\|x(k+1, x^0, u(\cdot))\|_M^2 + \|u(k)\|_N^2 \right) + \|x(T, x^0, u(\cdot))\|_{M_T}^2. \quad (3.2)$$

Оптимальный регулятор в линейно-квадратичной задаче, как известно, — линейный, а оптимальное значение функционала — квадратичная функция начального условия.

Ниже рассмотрены и охарактеризованы с точки зрения субоптимальности и устойчивости два варианта управления в области \mathcal{B}_R :

1. Линейный регулятор, оптимальный в линейно-квадратичном приближении оптимизационной задачи.
2. Решение задачи приближенного динамического программирования аналогично предыдущей главе, но с квадратичной, а не просто равномерной аппроксимацией функции Беллмана.

3.1 Оптимальное управление в линейно-квадратичной задаче

В качестве введения сформулируем некоторые известные результаты, касающиеся оптимального управления в линейных системах с квадратичным функционалом качества.

3.1.1 Построение оптимального управления без ограничений

Теорема 5. [5] *Если положительно определенная матрица P_k является решением уравнения Риккати*

$$P_{k-1} = A^T P_k A - (A^T P_k B + N)(B^T P_k B)^{-1}(B^T P_k A + N^T) + M$$

с условием

$$P_T = M_T,$$

то оптимальное управление для линейной системы (3.1) с квадратичным функционалом (3.2) без учета ограничений имеет вид линейной обратной свя-

зу

$$u(k) = K_k x(k), \quad k = 0, 1, \dots, T - 1,$$

где

$$K_k = -(N + B^\top P_k B)^{-1} B^\top P_k A.$$

Чтобы построить оптимальное управление и оптимальное движение в виде

$$u_{\text{опт}}(k, x^0) = S(k)x^0,$$

$$x_{\text{опт}}(k, x^0) = R(k)x^0,$$

можно использовать следующую теорему.

Теорема 6. [3; 17] *Если существует решение Q системы линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} \end{pmatrix} \Phi^T \begin{pmatrix} \mathbb{E} \\ Q \end{pmatrix} = \mathbb{O}, \quad (3.3)$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} A + BN^{-1}B^\top(A^{-1})^\top M & -BN^{-1}B^\top(A^{-1})^\top \\ -(A^{-1})^\top M & (A^{-1})^\top \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} S(k) \\ R(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & N^{-1}B^\top \\ \mathbb{E} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \Phi^k \begin{pmatrix} \mathbb{E} \\ Q \end{pmatrix}.$$

Если матрица Q существует, то она определяет матрицу $R(1)$, которая ответственна за отображение $x^0 \mapsto x_{\text{опт}}(1, x^0)$. Спектр матрицы $R(1)$, таким образом, позволяет судить об устойчивости замкнутой системы: имеет место следующий факт.

Следствие 1. *Пусть существует решение Q системы (3.3). Система (3.1), замкнутая регулятором «предиктор-корректор» с функционалом (3.2) без учета ограничений, экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы*

$$R(1) = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ Q \end{pmatrix}$$

по модулю меньше единицы.

3.1.2 Оптимальное управление, ограниченное по норме

Пусть в отсутствие ограничений система (3.1), замкнутая регулятором «предиктор-корректор» без ограничений, экспоненциально устойчива. Предложим способ оценивания области устойчивости при наличии ограничений с помощью прямого метода Ляпунова. Для примера рассмотрим ограничение в виде эллипсоида:

$$\mathcal{U} = \{u : \|u\|_C^2 \leq p\},$$

где C — положительно определенная $(m \times m)$ -матрица, $p > 0$. Очевидно, что, вообще говоря, не при всяких начальных условиях решение может быть устремлено к 0 при ограниченной величине управления.

Будем использовать метод функций Ляпунова: пусть V — положительно определенная $(n \times n)$ -матрица, g — положительное число, x^0 — любой вектор из области

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_V^2 \leq g\},$$

x^1 — решение $x(1)$ системы (3.1), замкнутой регулятором «предиктор-корректор» с функционалом (3.2), с начальным условием $x(0) = x^0$ и ограничением $u \in \mathcal{U}$. Если величина

$$\|x^1\|_V^2 - \|x^0\|_V^2 \tag{3.4}$$

отрицательно определена при всех x^0 из указанной выше области, то эта область является оценкой снизу требуемой области асимптотической устойчивости.

Рассмотрим произвольную положительно определенную матрицу W размером $n \times n$. Поскольку спектр матрицы $R(1)$ в силу устойчивости системы без ограничений лежит внутри единичного круга, уравнение

$$R^T(1)VR(1) - V = -W$$

относительно матрицы V имеет положительно определенное решение. Далее будем под матрицей V понимать именно такое решение.

Допустим, что известна положительная величина β такая, что при всех x из области

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_V^2 \leq \beta \tilde{p}\},$$

где $\tilde{p} \geq p$, вектор $u = S(k)x$ принадлежит области

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\|_C^2 \leq \tilde{p}\}$$

при всех $k = 0, 1, \dots, T-1$. Например, можно взять

$$\beta = \frac{\lambda_{\min}(V)}{\max_{k=0,1,\dots,T-1} \|S(k)\|^2 \lambda_{\max}(C)}.$$

Очевидно, что в силу линейного характера связи u и x нет необходимости выбирать число β зависимым от \tilde{p} .

Когда $\tilde{p} = p$, приращение (3.4) отрицательно определено при $x^0 \in X$ благодаря тому, что $x^1 = R(1)x^0$, а матрица V выбрана так, как указано выше. Станем увеличивать число \tilde{p} и потребуем, чтобы величина (3.4) оставалась отрицательной при всех $x^0 \in \partial X$, где

$$\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_V^2 = \beta \tilde{p}\}.$$

Если $x^0 \in \partial X$, то соответствующая оптимальная последовательность $u(k) = S(k)x^0$ может быть как допустима, так и нет. В первом случае разность (3.4) отрицательна. Если же $S(k)x^0$ — не допустимая последовательность, то использоваться в управлении будет последовательность $\hat{u}(k)$, наилучшая из допустимых. Если определить вектор

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}(0) \\ \hat{u}(1) \\ \vdots \\ \hat{u}(T-1) \end{pmatrix},$$

то, согласно правилу множителей Лагранжа, он удовлетворяет равенству

$$\left. \frac{\partial \mathcal{J}(x^0, u)}{\partial u} \right|_{u=\hat{u}} = -\mu \left. \frac{\partial \|u\|_C^2}{\partial u} \right|_{u=\hat{u}},$$

где μ – некоторое положительное число и

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & \dots & \\ & & & C \end{pmatrix}.$$

Вычислив градиенты, это уравнение можно записать в виде

$$Mx^0 + N\hat{u} = -\mu\bar{C}\hat{u}.$$

В то же время известно, что

$$Mx^0 + N \begin{pmatrix} S(0)x^0 \\ S(1)x^0 \\ \vdots \\ S(T-1)x^0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} S(0)x^0 \\ S(1)x^0 \\ \vdots \\ S(T-1)x^0 \end{pmatrix} - \hat{u} = \mu N^{-1}\bar{C}\hat{u}.$$

Используя условия

$$\left\| \begin{pmatrix} S(0)x^0 \\ S(1)x^0 \\ \vdots \\ S(T-1)x^0 \end{pmatrix} \right\|_{\bar{C}}^2 = \tilde{p}, \quad \|\hat{u}\|_{\bar{C}}^2 = p,$$

выводим оценку

$$\|\hat{u}(0) - S(0)x^0\| \leq \sqrt{\frac{\tilde{p} - p}{\lambda_{\min}(C)}}.$$

Применение управления $\hat{u}(0)$ приводит к значению

$$x^1 = R(1)x^0 + B(\hat{u}(0) - S(0)x^0).$$

Поэтому разность (3.4) допускает оценку

$$\begin{aligned}
\|x^1\|_V^2 - \|x^0\|_V^2 &= \|R(1)x^0 + B(\hat{u}(0) - S(0)x^0)\|_V^2 - \|x^0\|_V^2 \leq \\
&\leq -\|x^0\|_W^2 + 2x^{0\top} R^\top(1)VB(\hat{u}(0) - S(0)x^0) + \\
&\quad + \|B(\hat{u}(0) - S(0)x^0)\|_V^2 \leq \\
&\leq -\frac{\lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\max}(V)}\tilde{p} + \frac{2\|R(1)\|\sqrt{\beta}\lambda_{\max}(V)}{\sqrt{\lambda_{\min}(V)\lambda_{\min}(C)}}\sqrt{\tilde{p}}\sqrt{\tilde{p}-p} + \\
&\quad + \frac{\lambda_{\max}(V)}{\lambda_{\min}(C)}(\tilde{p}-p).
\end{aligned}$$

Теорема 7. Пусть система (3.1), замкнутая регулятором «предиктор-корректор» с функционалом (3.2) без ограничений, экспоненциально устойчива. Тогда если при всех $\tilde{p} \in [p, p_*]$ верно

$$-\frac{\lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\max}(V)}\tilde{p} + \frac{2\|R(1)\|\sqrt{\beta}\lambda_{\max}(V)}{\sqrt{\lambda_{\min}(V)\lambda_{\min}(C)}}\sqrt{\tilde{p}}\sqrt{\tilde{p}-p} + \frac{\lambda_{\max}(V)}{\lambda_{\min}(C)}(\tilde{p}-p) < 0,$$

то множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_V^2 \leq \beta p_*\}$ является оценкой снизу области асимптотической устойчивости системы (3.1), замкнутой регулятором «предиктор-корректор» с функционалом (3.2) при ограничении $\|u\|_C^2 \leq p$.

3.2 Реализация регулятора в квазилинейном режиме

Перейдем к обсуждению реализации регулятора в окрестности \mathcal{B}_R . Рассмотрим два способа:

1. Линейная обратная связь, полученная решением линейно-квадратичной задачи оптимального управления.
2. Решение приближенной задачи динамического программирования аналогично нелинейному режиму, но с квадратичной аппроксимацией функции Беллмана.

Для каждого варианта получим условие устойчивости и оценку субоптимальности управления. При этом потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 9. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $\Lambda(x, u)$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} |\Lambda(x, u) - \|x\|_{L_x}^2 - u^\top L_{xu}x - \|u\|_{L_u}^2| &\leq M_\Lambda (\|x\|^3 + \|u\|^3), \\ \left\| \frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} - 2L_u u - 2L_{xu}x \right\| &\leq M_{\partial \Lambda} (\|x\|^2 + \|u\|^2), \\ \underline{\Lambda} \|u\|^2 &\leq \Lambda(x, u) \leq \bar{\Lambda} (\|x\|^2 + \|u\|^2) \end{aligned}$$

при всех $x \in X$, $u \in U$ (X и U — компактные множества), некоторых положительных константах $M_{\partial \Lambda}$, $\underline{\Lambda}$ и $\bar{\Lambda}$ и матрицах L_u и L_x , причем $\det L_u \neq 0$ и существует такое $\nu > 0$, что $\mathcal{B}_\nu \subset U$. Определим

$$u_0(x) = \arg \min_{u \in U} \Lambda(x, u),$$

$$\Lambda_0(x) = \Lambda(x, u_0(x)),$$

$$K = -L_u^{-1}L_x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u_0(x) - Kx\| &\leq M_{u_0} \|x\|^2, \\ |\Lambda_0(x) - \|x\|_P^2| &\leq M_{\Lambda_0} \|x\|^3 \end{aligned}$$

при всех таких x , что

$$\|x\| < \rho = \min \left\{ \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}}}, \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(L_u^\top L_u)}{8M_{\partial \Lambda}(1 + \|K\|^2)}}, \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(L_u^\top L_u)}}{4M_{\partial \Lambda} \left(\|K\| + \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}} \right)} \right\},$$

где

$$P = L_x - L_{xu}^\top L_u^{-1} L_{xu},$$

$$M_{u_0} = \frac{2(1 + 2\|K\|^2)}{\sqrt{\lambda_{\min}(L_u^\top L_u)}},$$

$$M_{\Lambda_0} = M_\Lambda (1 + 4\|K\|^3 + 2M_{u_0} \|L_{xu}\| + M_{u_0}^2 \lambda_{\max}(L_u) \rho(X) + 4M_{u_0} \rho^3(X)).$$

Доказательство. 1) Докажем сначала, что

$$\|u_0(x)\| \leq \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}} \|x\|.$$

Предположим противное: пусть есть такое x , что

$$\|u_0(x)\| > \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}} \|x\|.$$

Тогда

$$\Lambda(x, u_0(x)) \geq \underline{\Lambda} \|u_0(x)\|^2 > \underline{\Lambda} \frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}} \|x\|^2 = \bar{\Lambda} \|x\|^2 \geq \Lambda(x, 0).$$

Имеем неравенство

$$\Lambda(x, 0) < \Lambda(x, u_0(x)),$$

что противоречит оптимальности значения $u_0(x)$. Следовательно, доказываемое неравенство верно.

2) Покажем, что если при некотором μ

$$\|x\| \leq \frac{\mu}{\|K\| + \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}}},$$

то

$$\|u_0(x) - Kx\| \leq \mu.$$

Предположим противное: $\|u_0(x) - Kx\| > \mu$. Тогда

$$\begin{aligned} \|u_0(x)\| &\geq \|u_0(x) - Kx\| - \|Kx\| > \mu - \|K\| \|x\| > \\ &> \mu - \frac{\|K\| \mu}{\|K\| + \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}}} = \frac{\sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}} \mu}{\|K\| + \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}}} \geq \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}} \|x\| \geq \|u_0(x)\|. \end{aligned}$$

Получаем противоречие: $\|u_0(x)\| > \|u_0(x)\|$. Значит, $\|u_0(x) - Kx\| \leq \mu$.

3) Заметим, что рассматриваемые значения x удовлетворяют

$$\|x\| < \rho \leq \frac{\nu}{\sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}}},$$

поэтому

$$\|u_0(x)\| < \nu,$$

т. е. оптимальное значение u гарантированно находится внутри допустимого множества U , так что необходимым условием оптимальности является выполнение равенства

$$\left. \frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} \right|_{u=u_0(x)} = 0.$$

Рассмотрим оценку

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} \right\| &= \left\| L_u u + L_x x + \frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} - L_u u - L_x x \right\| \geq \\ &\geq \|L_u u + L_x x\| - \left\| \frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} - L_u u - L_x x \right\|. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\|L_u u + L_x x\| = \|L_u(u - Kx)\| \geq \sqrt{\lambda_{\min}(L_u^T L_u)} \|u - Kx\|$$

и

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} - L_u u - L_x x \right\| &\leq M_{\partial \Lambda} (\|x\|^2 + \|u\|^2) \leq \\ &\leq M_{\partial \Lambda} (\|x\|^2 + 2 \|Kx\| + 2 \|u - Kx\|). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} \right\| &\geq \sqrt{\lambda_{\min}(L_u^T L_u)} \|u - Kx\| - M_{\partial \Lambda} (\|x\|^2 + 2 \|Kx\| + 2 \|u - Kx\|) \geq \\ &\geq -2M_{\partial \Lambda} \|u - Kx\|^2 + \sqrt{\lambda_{\min}(L_u^T L_u)} \|u - Kx\| - \\ &\quad - M_{\partial \Lambda} (1 + 2 \|K\|^2) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку по условию

$$\|x\| < \rho \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(L_u^T L_u)}{8M_{\partial \Lambda} (1 + \|K\|^2)}},$$

то дискриминант полученной квадратичной оценки положителен. Можно заключить, что

$$\left\| \frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} \right\| > 0$$

при всех u из области

$$\omega_1 < \|u - Kx\| < \omega_2,$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{4M_{\partial\Lambda}} \left(\sqrt{\lambda_{\min}(L_u^\top L_u)} \pm \sqrt{\lambda_{\min}(L_u^\top L_u) - 8M_{\partial\Lambda}(1 + \|K\|^2) \|x\|^2} \right)$$

(значению ω_1 отвечает знак «-», ω_2 — знак «+»). Следовательно, равенство

$$\frac{\partial \Lambda(x, u)}{\partial u} = 0$$

может выполняться только если

$$\|u - Kx\| \leq \omega_1 \quad \text{или} \quad \|u - Kx\| \geq \omega_2,$$

что приводит к оценке

$$\|u_0(x) - Kx\| \leq \omega_1 \quad \text{или} \quad \|u_0(x) - Kx\| \geq \omega_2.$$

4) По условию леммы

$$\|x\| < \rho \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(L_u^\top L_u)}}{4M_{\partial\Lambda} \left(\|K\| + \sqrt{\frac{\bar{\Lambda}}{\underline{\Lambda}}} \right)},$$

откуда следует

$$\|u_0(x) - Kx\| \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(L_u^\top L_u)}}{4M_{\partial\Lambda}} < \omega_2.$$

Остается одна область, в которой может находиться $u_0(x)$:

$$\|u_0(x) - Kx\| \leq \omega_1.$$

Неравенство $\omega_1 \leq M_{u_0} \|x\|^2$ проверяется, например, подстановкой.

5) Чтобы получить оценку $\Lambda_0(x)$, заметим, что

$$\|x\|_P^2 = \left(\|x\|_{L_x}^2 + u^\top L_{xu} x + \|u\|_{L_u}^2 \right) \Big|_{u=Kx}.$$

Поэтому, используя полученную выше оценку $\|u_0(x) - Kx\|$, имеем

$$\begin{aligned}
|\Lambda_0(x) - \|x\|_P^2| &\leq |\Lambda_0(x) - \|x\|_{L_x}^2 - u_0^\top(x)L_{xu}x - \|u_0(x)\|_{L_u}^2| + \\
&\quad + |\|x\|_{L_x}^2 + u_0^\top(x)L_{xu}x + \|u_0(x)\|_{L_u}^2 - \|x\|_P^2| \leq \\
&\leq M_\Lambda (\|x\|^3 + \|u_0(x)\|^3) + \\
&\quad + |2(u_0(x) - Kx)^\top L_{xu}x| + |\|u_0(x)\|_{L_u}^2 - \|Kx\|_{L_u}^2| \leq \\
&\leq M_\Lambda (\|x\|^3 + 4(\|u_0(x) - Kx\|^3 + \|Kx\|^3)) + \\
&\quad + 2\|L_{xu}\| \|u_0(x) - Kx\| \|x\| + \|u_0(x) - Kx\|_{L_{xu}}^2 \leq \\
&\leq M_{\Lambda_0} \|x\|^3.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим функционалы \mathcal{J}^s ($s = 0, 1, \dots, T$), определенные выше при обсуждении принципа динамического программирования:

$$\mathcal{J}^s(x^0, u(\cdot)) = \sum_{k=0}^{T-s-1} \ell(x(k+1), x^0, u(\cdot), u(k)) + \ell_T(x(T-s), x^0, u(\cdot)).$$

В следующей лемме доказывається, что эти функционалы удовлетворяют условиям леммы 9, т. е. допускают в окрестности нуля квадратичное приближение и квадратичные оценки снизу и сверху, а их градиенты по переменным $u(\cdot)$ допускают линейное приближение.

Лемма 10. *Существуют такие положительные константы $M_{\mathcal{J}^s}$, $M_{\partial \mathcal{J}^s}$, $\underline{\mathcal{J}}^s$ и $\overline{\mathcal{J}}^s$ и матрицы L_x^s , L_{xu}^s и L_u^s , причем $\det L_u^s \neq 0$, что*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{J}^s(x, u^s) - \|x\|_{L_x^s}^2 - u^{s\top} L_{xu}^s x - \|u^s\|_{L_u^s}^2| &\leq M_{\mathcal{J}^s} (\|x\|^3 + \|u^s\|^3), \\
\left\| \frac{\partial \mathcal{J}^s(x, u^s)}{\partial u^s} - 2L_u^s u^s - 2L_{xu}^s x \right\| &\leq M_{\partial \mathcal{J}^s} (\|x\|^2 + \|u^s\|^2), \\
\underline{\mathcal{J}}^s \|u^s\|^2 &\leq \mathcal{J}^s(x, u^s) \leq \overline{\mathcal{J}}^s (\|x\|^2 + \|u^s\|^2).
\end{aligned}$$

Здесь

$$u^s = (u^\top(0), u^\top(1), \dots, u^\top(T-s-1))^\top.$$

Доказательство. Доказательство проводится по индукции начиная с $s = T$.

При $s = T$ функционал $\mathcal{J}^T = \ell_T$, согласно основным предположениям, обладает требуемыми свойствами.

Для краткости обозначений рассмотрим последний шаг индукции: пусть для функционала \mathcal{J}^1 утверждение леммы имеет место. Рассмотрим функционал $\mathcal{J}^0 = \mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}(x, u^0) = \ell\left(f(x, u(0)), u(0)\right) + \mathcal{J}^1\left(f(x, u(0)), u^1\right).$$

Оценим точность квадратичного приближения этого функционала, которое получится, если заменить в правой части функции ℓ и \mathcal{J}^1 на их квадратичные приближения, а f — на линейное приближение:

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{J}(x, u^0) - \|Ax + Bu(0)\|_{M+L_x^1}^2 - \|u(0)\|_N^2 - u^{1\top} L_{xu}^1 (Ax + Bu(0)) - \|u^1\|_{L_u^1}^2 \right| \leq \\ & \leq \left| \ell\left(f(x, u(0)), u(0)\right) - \|f(x, u(0))\|_M^2 - \|u(0)\|_N^2 \right| + \\ & + \left| \|f(x, u(0))\|_M^2 - \|Ax + Bu(0)\|_M^2 \right| + \\ & + \left| \mathcal{J}^1\left(f(x, u(0)), u^1\right) - \|f(x, u(0))\|_{L_x^1}^2 - \right. \\ & \quad \left. - u^{1\top} L_{xu}^1 f(x, u(0)) - \|u^1\|_{L_u^1}^2 \right| + \\ & + \left| \|f(x, u(0))\|_{L_x^1}^2 - \|Ax + Bu(0)\|_{L_x^1}^2 \right| + \\ & + \left| u^{1\top} L_{xu}^1 f(x, u(0)) - u^{1\top} L_{xu}^1 (Ax + Bu(0)) \right| \leq \\ & \leq M_\ell \left(4L_f^3 (\|x\|^3 + \|u(0)\|^3) + \|u(0)\|^3 \right) + \\ & + M_{\mathcal{J}^1} \left(4L_f^3 (\|x\|^3 + \|u(0)\|^3) + \|u^1\|^3 \right) + \\ & + 2M_f^2 \lambda_{\max}(M + L_x^1) (L_f + \max\{\|A\|, \|B\|\}) \times \\ & \quad \times \max\{\rho(\mathcal{X}), \rho(\mathcal{U})\} (\|x\|^2 + \|u(0)\|^2) + \\ & + M_f \|L_{xu}^1\| (\|x\|^2 + \|u(0)\|^2) \|u^1\|. \end{aligned}$$

Используя неравенства

$$\begin{aligned}\|u(0)\| + \|u^1\| &\leq \sqrt{2} \|u^0\|, \\ \|x\|^2 \|u^1\| &\leq \frac{4}{3} \left(\|x\|^3 + 2\sqrt{2} \|u^0\|^3 \right), \\ \|u(0)\|^2 \|u^1\| &\leq \frac{8\sqrt{2}}{3} \|u^0\|^3,\end{aligned}$$

можно получить оценку требуемого вида. Аналогично получаются остальные оценки. Лемма доказана. \square

Рассмотрим обратную связь, оптимальную для линейно-квадратичного приближения исходной оптимизационной задачи (1.3). По теореме 5 она имеет вид

$$u(s) = K_s x(s), \quad s = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.5)$$

где

$$K_s = (N + B^\top P_s B)^{-1} B^\top P_s A, \quad (3.6)$$

а P_s — решение уравнения Риккати

$$P_{s-1} = A^\top P_s A - (A^\top P_s B + N)(B^\top P_s B)^{-1}(B^\top P_s A + N^\top) + M \quad (3.7)$$

с условием $P_T = M_T$.

Следующая лемма утверждает, что обратная связь (3.5) является первым приближением нелинейной оптимальной обратной связи, а соответствующая квадратичная функция Беллмана — приближением точной функции Беллмана.

Лемма 11. Пусть последовательность матриц P_s ($s = 0, 1, \dots, T-1$) есть решение уравнения Риккати (3.7), константы $\underline{\mathcal{J}}^s$, $\overline{\mathcal{J}}^s$, $M_{\partial \mathcal{J}^s}$ и матрицы L_x^s , L_{xu}^s , L_u^s определены условием леммы 10, а число ν таково, что $\mathcal{B}_\nu \subset \mathcal{U}$.

Если выполнено неравенство

$$R < \min \left\{ \frac{\nu}{\sqrt{\overline{\mathcal{J}}^s}}, \sqrt{\frac{\lambda_{\min}((L_u^s)^\top L_u^s)}{8M_{\partial \mathcal{J}^s}(1 + \|K_s\|^2)}}, \frac{\sqrt{\lambda_{\min}((L_u^s)^\top L_u^s)}}{4M_{\partial \mathcal{J}^s} \left(\|K_s\| + \sqrt{\overline{\mathcal{J}}^s} \right)} \right\},$$

то при всех $\|x\| \leq R$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|u_{\text{опт}}^s(x) - K_s x\| &\leq M_{u_{\text{опт}}^s} \|x\|^2, \\ |\mathcal{J}_{\text{опт}}^s(x) - \|x\|_{P_s}^2| &\leq M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^s} \|x\|^3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_{u_{\text{опт}}^s} &= \frac{2(1 + 2\|K_s\|^2)}{\sqrt{\lambda_{\min}((L_u^s)^\top L_u^s)}}, \\ M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^s} &= M_{\mathcal{J}^s} (1 + 4\|K_s\|^3 + 2M_{u_{\text{опт}}^s} \|L_{xu}^s\| + \\ &\quad + M_{u_{\text{опт}}^s}^2 \lambda_{\max}(L_u^s) \rho(\mathcal{X}) + 4M_{u_{\text{опт}}^s} \rho^3(\mathcal{X})). \end{aligned}$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из лемм 9 и 10. \square

3.2.1 Свойства линейной обратной связи

Пусть в системе (1.1) вблизи начала координат используется линейная обратная связь $u = Kx$, оптимальная для линейно-квадратичного приближения оптимизационной задачи (1.3), т. е. $K = K_0$, где K_0 определено равенством (3.6). Простейшая оценка окрестности нуля, в которой это управление является стабилизирующим, получается следующим обычным способом с помощью второго метода Ляпунова.

Лемма 12. Пусть матрица V есть положительно определенное решение уравнения Ляпунова

$$(A + BK)^\top V (A + BK) - V = -W$$

при некоторой положительно определенной матрице W . Если выполняются неравенства

$$r < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(V)}{\lambda_{\max}(V)}} \rho, \quad R > \rho,$$

где

$$\rho = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{\lambda_{\min}(W)\lambda_{\max}(V)}{2\|V(A+BK)\|^2}} - 1 \right) \|V(A+BK)\|}{M_g \lambda_{\max}(V) (1 + \|K\|^2)},$$

то при любом начальном условии $x(0) \in \mathcal{B}_r$ движение $x(k)$ системы (1.1), замкнутой обратной связью $u(k) = Kx(k)$, не покидает \mathcal{B}_R при $k \geq 0$ и удовлетворяет оценке

$$\|x(k)\| \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(V) - \frac{1}{2}\lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\min}(V)} \right)^k \|x(0)\|.$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\|x(k+1)\|_V^2 - \|x(k)\|_V^2$$

на движении замкнутой системы. Обозначим $x(k) = x$, тогда

$$\begin{aligned} \|x(k+1)\|_V^2 - \|x\|_V^2 &= \|f(x, Kx)\|_V^2 - \|x\|_V^2 = \\ &= \|(A + BK)x + g(x, Kx)\|_V^2 - \|x\|_V^2 = \\ &= \|(A + BK)x\|_V^2 - \|x\|_V^2 + \|g(x, Kx)\|_V^2 + \\ &\quad + 2x^\top (A + BK)^\top V g(x, Kx) \leq \\ &\leq -\|x\|_W^2 + \lambda_{\max}(V)M_g^2(1 + \|K\|^2)^2 \|x\|^4 + \\ &\quad + 2M_g \|V(A + BK)\| (1 + \|K\|^2) \|x\|^3 \leq \\ &\leq \left(-\lambda_{\min}(W) + \lambda_{\max}(V)M_g^2(1 + \|K\|^2)^2 \|x\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2M_g \|V(A + BK)\| (1 + \|K\|^2) \|x\| \right) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Если $\|x\| < \rho$, то коэффициент при $\|x\|^2$ в правой части меньше $-\lambda_{\min}(W)/2$.

Следовательно,

$$\|x(k+1)\|_V^2 - \|x(k)\|_V^2 < -\frac{\lambda_{\min}(W)}{2} \|x(k)\|^2$$

при $\|x(k)\| < \rho$. Если

$$\|x(0)\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(V)}{\lambda_{\max}(V)}} \rho,$$

то $\|x(0)\|_V^2 < \lambda_{\min}(V)\rho^2$ и $\|x(k)\| < \rho < R$ при $k = 1, 2, \dots$, что гарантирует утверждение теоремы. \square

Следующая лемма дает оценку субоптимальности линейной обратной связи, построенной по линейно-квадратичному приближению оптимизационной задачи.

Лемма 13. Пусть радиус R удовлетворяет условию леммы 11 при $s = 0$, а матрица $K = K_0$ определена равенством (3.6). Тогда обратная связь $u = Kx$ является ε -субоптимальной в области \mathcal{B}_R , т. е.

$$\ell(f(x, Kx), Kx) + \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1(f(x, Kx)) \leq (1 + \varepsilon) \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}(x) \quad \forall x \in \mathcal{B}_R,$$

причем

$$\varepsilon = \frac{L\ell(L_f M_{u_{\text{ОПТ}}^0} + 1) + L_{\mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1} L_f M_{u_{\text{ОПТ}}^0}}{\underline{\mathcal{J}}}.$$

Здесь $L_{\mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1}$ — константа Липшица функции $\mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1$, определенная в теореме 3, константа $\underline{\mathcal{J}} = \underline{\mathcal{J}}^0$ дана в лемме 10, а $M_{u_{\text{ОПТ}}^0}$ — в лемме 11.

Доказательство. Из равенства

$$\mathcal{J}_{\text{ОПТ}}(x) = \ell\left(f(x, u_{\text{ОПТ}}(x)), u_{\text{ОПТ}}(x)\right) + \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1\left(f(x, u_{\text{ОПТ}}(x))\right)$$

следует

$$\begin{aligned} \ell(f(x, Kx), Kx) + \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1(f(x, Kx)) - \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}(x) &= \ell(f(x, Kx), Kx) + \\ &+ \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1(f(x, Kx)) - \ell\left(f(x, u_{\text{ОПТ}}(x)), u_{\text{ОПТ}}(x)\right) - \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1\left(f(x, u_{\text{ОПТ}}(x))\right). \end{aligned}$$

Оценивая

$$\left| \ell(f(x, Kx), Kx) - \ell\left(f(x, u_{\text{ОПТ}}(x)), u_{\text{ОПТ}}(x)\right) \right| \leq L\ell(L_f M_{u_{\text{ОПТ}}^0} + 1) \|x\|^2$$

и

$$\left| \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1(f(x, Kx)) - \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1\left(f(x, u_{\text{ОПТ}}(x))\right) \right| \leq L_1 L_f M_{u_{\text{ОПТ}}^0} \|x\|^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} \ell(f(x, Kx), Kx) + \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}^1(f(x, Kx)) - \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}(x) &\leq \\ &\leq \left(L\ell(L_f M_{u_{\text{ОПТ}}^0} + 1) + L_1 L_f M_{u_{\text{ОПТ}}^0} \right) \|x\|^2 = \varepsilon \underline{\mathcal{J}} \|x\|^2 \leq \varepsilon \mathcal{J}_{\text{ОПТ}}(x), \end{aligned}$$

откуда следует требуемое неравенство. Лемма доказана. \square

Выводом из последних двух лемм является следующая теорема.

Теорема 8. Пусть числа r и R выбраны согласно условиям лемм 12 и 13, матрица $K = K_0$ определена равенством (3.6), а явная обратная связь $u_{\text{явн}}(x)$ построена по алгоритму теоремы 4. Определим регулятор с двумя режимами функционирования

$$u(x) = \begin{cases} Kx & \text{в квазилинейном режиме,} \\ u_{\text{явн}}(x) & \text{в нелинейном режиме} \end{cases}$$

со следующими правилами переключения между режимами:

- если регулятор находится в нелинейном режиме, а система входит в шар \mathcal{B}_r , то регулятор переходит в квазилинейный режим;
- если регулятор находится в квазилинейном режиме, а система выходит из шара \mathcal{B}_R , то регулятор переходит в нелинейный режим.

Такой регулятор обладает следующими свойствами:

1. Он стабилизирует нулевое равновесие системы (1.1), причем:
 - в нелинейном режиме функция Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}$ является функцией Ляпунова, гарантирующей устойчивость, и скорость ее убывания вдоль решения дана в лемме 8;
 - в квазилинейном режиме квадратичная функция Ляпунова убывает вдоль решений со скоростью, определенной в лемме 12.
2. Он является ε -субоптимальной обратной связью, причем оценка ε дана в леммах 7 и 13.

Доказательство. Следует из лемм 12 и 13. □

3.2.2 Приближенное динамическое программирование

Рассмотрим вариант построения обратной связи в квазилинейном режиме с использованием динамического программирования. Для этого в задаче

$$u_{\text{опт}}(0, x) = \arg \min_u \left\{ \ell(f(x, u), u) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u)) \right\}$$

заменяем функцию Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1$ на ее квадратичную аппроксимацию $\|\cdot\|_P^2$. Получим задачу приближенного динамического программирования

$$u_{\text{дин}}(x) = \arg \min_u \mathcal{F}(x, u), \quad (3.8)$$

где

$$\mathcal{F}(x, u) = \ell(f(x, u), u) + \|f(x, u)\|_P^2.$$

Охарактеризуем обратную связь $u_{\text{дин}}(x)$ с точки зрения устойчивости и субоптимальности. Для этого докажем две вспомогательные леммы, аналогичные леммам 10 и 11.

Лемма 14. *Существуют такие положительные константы $M_{\mathcal{F}}$, $M_{\partial\mathcal{F}}$, $\underline{\mathcal{F}}$ и $\overline{\mathcal{F}}$, что*

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{F}(x, u) - \|Ax + Bu\|_{M+P_1}^2 - \|u\|_N^2 \right| \leq M_{\mathcal{F}} (\|x\|^3 + \|u\|^3), \\ & \left\| \frac{\partial \mathcal{F}(x, u)}{\partial u} - 2B^T(M + P_1)(Ax + Bu) - 2Nu \right\| \leq M_{\partial\mathcal{F}} (\|x\|^2 + \|u\|^2), \\ & \underline{\mathcal{F}} \|u\|^2 \leq \mathcal{F}(x, u) \leq \overline{\mathcal{F}} (\|x\|^2 + \|u\|^2). \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем для примера первое неравенство:

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{F}(x, u) - \|Ax + Bu\|_{M+P_1}^2 - \|u\|_N^2 \right| \leq \\ & \leq \left| \ell(f(x, u), u) - \|f(x, u)\|_M^2 - \|u\|_N^2 \right| + \\ & \quad + \left| \|f(x, u)\|_{M+P_1}^2 - \|Ax + Bu\|_{M+P_1}^2 \right| \leq \\ & \leq M_{\ell} (\|f(x, u)\|^3 + \|u\|^3) + \\ & \quad + \lambda_{\max}(M + P_1) \|f(x, u) - Ax - Bu\| \times \\ & \quad \times (\|f(x, u)\| + \|Ax + Bu\|) \leq \\ & \leq M_{\ell} \left(4L_f^3 (\|x\|^3 + \|u\|^3) + \|u\|^3 \right) + \\ & \quad + M_f \lambda_{\max}(M + P_1) (L_f + \max\{\|A\|, \|B\|\}) \times \\ & \quad \times (\|x\|^2 + \|u\|^2) (\|x\| + \|u\|). \end{aligned}$$

Закключаем, что допустимо взять

$$M_{\mathcal{F}} = M_{\ell}(4L_f^3 + 1) + 4M_f \lambda_{\max}(M) (L_f + \max\{\|A\|, \|B\|\}).$$

Остальные неравенства устанавливаются аналогично. Лемма доказана. \square

Лемма 15. Пусть константы $M_{\mathcal{F}}$, $M_{\partial\mathcal{F}}$, $\underline{\mathcal{F}}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ определены леммой 14, матрицы $K = K_0$ и $P = P_0$ определены уравнениями (3.6) и (3.7), а число ν таково, что $\mathcal{B}_\nu \subset \mathcal{U}$. Если

$$R < \min \left\{ \frac{\nu}{\sqrt{\underline{\mathcal{F}}}}, \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(\bar{N}^\top \bar{N})}{8M_{\partial\mathcal{F}}(1 + \|K\|^2)}}, \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(\bar{N}^\top \bar{N})}}{4M_{\partial\mathcal{F}} \left(\|K\| + \sqrt{\underline{\mathcal{F}}} \right)} \right\},$$

где

$$\bar{N} = N + B^\top(M + P_1)B,$$

то при всех $\|x\| \leq R$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|u_{\text{дин}}(x) - Kx\| &\leq M_{u_{\text{дин}}} \|x\|^2, \\ |\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) - \|x\|_P^2| &\leq M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}} \|x\|^3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_{u_{\text{дин}}} &= \frac{2(1 + 2\|K\|^2)}{\sqrt{\lambda_{\min}(\bar{N}^\top \bar{N})}}, \\ M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}} &= M_{\mathcal{F}}(1 + 4\|K\|^3 + 2M_{u_{\text{дин}}} \|B^\top(M + P_1)A\| + \\ &\quad + M_{u_{\text{дин}}}^2 \lambda_{\max}(\bar{N})\rho(\mathcal{X}) + 4M_{u_{\text{опт}}^s} \rho^3(\mathcal{X})). \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно лемме 14 функция \mathcal{F} удовлетворяет условию леммы 9. Следовательно, функция $u_{\text{дин}}(x)$, определенная равенством (3.8), допускает линейное приближение в окрестности нуля, а $\mathcal{F}_{\text{опт}}(x)$ — квадратичное приближение. При этом указанные приближения являются, соответственно, оптимальным управлением и значением функции Беллмана приближенной линейно-квадратичной задачи

$$\|Ax + Bu\|_{M+P_1}^2 + \|u\|_N^2 \rightarrow \min.$$

Заметим, что $u = Kx$ является решением этой задачи, а $\|x\|_P^2$ — ее функцией Беллмана. Лемма доказана. \square

Следующие леммы аналогичны леммам 7 и 8 предыдущей главы, однако здесь используется не равномерное, а квадратичное приближение функции Беллмана, полученное в лемме 11.

Лемма 16. Пусть радиус $r = R_0$, где R_0 удовлетворяет условию леммы 15 при $s = 0$, а матрица $P = P_0$ определена равенством (3.7). Тогда обратная связь $u = u_{\text{дин}}(x)$, определенная как решение оптимизационной задачи (3.8), является γr -субоптимальной в области \mathcal{B}_r , т. е.

$$\ell\left(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)\right) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) \leq (1 + \gamma r)\mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \quad \forall x \in \mathcal{B}_r.$$

Здесь

$$\gamma = \frac{4L_f^3 M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} \left(4(\|K\|^3 + M_{u_{\text{дин}}}^3 \rho^3(\mathcal{X})) + 1\right) + M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}} + M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}}{\underline{\mathcal{J}}},$$

константа $\underline{\mathcal{J}} = \underline{\mathcal{J}}^0$ определена в лемме 10, $M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}}$ и $M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1}$ — в лемме 11, а $M_{u_{\text{дин}}}$ и $M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}}$ — в лемме 15.

Доказательство. Из неравенства

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x)\right| &\leq \left|\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) - \|x\|_P^2\right| + \left|\mathcal{J}_{\text{опт}}(x) - \|x\|_P^2\right| \leq \\ &\leq (M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}} + M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}) \|x\|^3 \leq \frac{M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}} + M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}}{\underline{\mathcal{J}}} \|x\| \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \end{aligned}$$

следует оценка

$$\mathcal{F}_{\text{опт}}(x) \leq \left(1 + \frac{M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}} + M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}}{\underline{\mathcal{J}}} \|x\|\right) \mathcal{J}_{\text{опт}}(x),$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
& \ell(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) = \\
& = \ell(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) - \\
& \quad - \mathcal{F}_{\text{опт}}(x) + \mathcal{F}_{\text{опт}}(x) = \\
& = \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) - \|f(x, u_{\text{дин}}(x))\|_{P_1}^2 + \mathcal{F}_{\text{опт}}(x) \leq \\
& \leq M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} \|f(x, u_{\text{дин}}(x))\|^3 + \mathcal{F}_{\text{опт}}(x) \leq \\
& \leq 4L_f^3 M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} (\|x\|^3 + \|u_{\text{дин}}(x)\|^3) + \mathcal{F}_{\text{опт}}(x).
\end{aligned}$$

Используя неравенство

$$\begin{aligned}
\|u_{\text{дин}}(x)\|^3 & \leq (\|K\| \|x\| + M_{u_{\text{дин}}} \|x\|^2)^3 \leq \\
& \leq 4(\|K\|^3 \|x\|^3 + M_{u_{\text{дин}}}^3 \|x\|^6) \leq 4(\|K\|^3 + M_{u_{\text{дин}}}^3 \rho^3(\mathcal{X})) \|x\|^3,
\end{aligned}$$

приходим к

$$\begin{aligned}
& \ell(f(x, u_{\text{дин}}(x)), u_{\text{дин}}(x)) + \mathcal{J}_{\text{опт}}^1(f(x, u_{\text{дин}}(x))) \leq \\
& \leq \frac{4L_f^3 M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}^1} (4(\|K\|^3 + M_{u_{\text{дин}}}^3 \rho^3(\mathcal{X})) + 1)}{\underline{\mathcal{J}}} \|x\| \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) + \\
& \quad + \left(1 + \frac{M_{\mathcal{F}_{\text{опт}}} + M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}}{\underline{\mathcal{J}}} \|x\|\right) \mathcal{J}_{\text{опт}}(x),
\end{aligned}$$

откуда следует требуемая оценка. Лемма доказана. \square

Лемма 17. Пусть радиус r удовлетворяет условию леммы 15 при $s = 0$, а также неравенству

$$r < \frac{\underline{\ell}}{q},$$

где

$$\begin{aligned}
q & = 4M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} L_f^3 \left(1 + 4(\|K\|^3 + M_{u_{\text{дин}}}^3 \rho^3(\mathcal{X}))\right) + \\
& \quad + \lambda_{\max}(P) L_f^2 (M_{u_{\text{дин}}} + M_{u_{\text{опт}}}) \left(2 + 2\|K\| + (M_{u_{\text{дин}}} + M_{u_{\text{опт}}}) \rho(\mathcal{X})\right) + \\
& \quad + 4M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} L_f^3 \left(1 + 4(\|K\|^3 + M_{u_{\text{опт}}}^3 \rho^3(\mathcal{X}))\right),
\end{aligned}$$

константа $M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}}$ определена в лемме 11, $M_{u_{\text{дин}}}$ — в лемме 15, а $\underline{\ell}$ — в предположении 9.

Тогда функция $\mathcal{J}_{\text{опт}}(x)$ убывает вдоль движений системы (1.1), замкнутой управлением $u = u_{\text{дин}}(x)$, определенным как решение оптимизационной задачи (3.8), в области \mathcal{B}_r :

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \leq \left(1 - \frac{q}{\underline{\ell}} \|x\|\right) \left(\mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{опт}}(x))\right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x)\right) \quad \forall x \in \mathcal{B}_r.$$

Доказательство. С помощью неравенства треугольника получается оценка

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) &\leq \mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{опт}}(x))\right) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) + \\ &+ \left| \mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) - \|f(x, u_{\text{дин}}(x))\|_P^2 \right| + \\ &+ \left| \|f(x, u_{\text{дин}}(x))\|_P^2 - \|f(x, u_{\text{опт}}(x))\|_P^2 \right| + \\ &+ \left| \|f(x, u_{\text{опт}}(x))\|_P^2 - \mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{опт}}(x))\right) \right|. \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{J}_{\text{опт}}\left(f(x, u_{\text{дин}}(x))\right) - \|f(x, u_{\text{дин}}(x))\|_P^2 \right| &\leq \\ &\leq M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} \|f(x, u_{\text{дин}}(x))\|^3 \leq 4M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} L_f^3 (\|x\|^3 + \|u_{\text{дин}}(x)\|^3) \leq \\ &\leq 4M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} L_f^3 \left(1 + 4(\|K\|^3 + M_{u_{\text{дин}}}^3 \rho^3(\mathcal{X}))\right) \|x\|^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \|f(x, u_{\text{дин}}(x))\|_P^2 - \|f(x, u_{\text{опт}}(x))\|_P^2 \right| &\leq \\ &\leq \lambda_{\max}(P) \|f(x, u_{\text{дин}}(x)) - f(x, u_{\text{опт}}(x))\| \times \\ &\quad \times \left(\|f(x, u_{\text{дин}}(x))\| + \|f(x, u_{\text{опт}}(x))\| \right) \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(P) L_f^2 \|u_{\text{дин}}(x) - u_{\text{опт}}(x)\| \left(2\|x\| + \|u_{\text{дин}}(x)\| + \|u_{\text{опт}}(x)\|\right) \leq \\ &\leq \lambda_{\max}(P) L_f^2 (M_{u_{\text{дин}}} + M_{u_{\text{опт}}}) \left(2 + 2\|K\| + (M_{u_{\text{дин}}} + M_{u_{\text{опт}}}) \rho(\mathcal{X})\right) \|x\|^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \|f(x, u_{\text{опт}}(x))\|_P^2 - \mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u_{\text{опт}}(x))) \right| \leq \\
& \leq M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} \|f(x, u_{\text{опт}}(x))\|^3 \leq 4M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} L_f^3 (\|x\|^3 + \|u_{\text{опт}}(x)\|^3) \leq \\
& \leq 4M_{\mathcal{J}_{\text{опт}}} L_f^3 \left(1 + 4(\|K\|^3 + M_{u_{\text{опт}}}^3 \rho^3(\mathcal{X}))\right) \|x\|^3.
\end{aligned}$$

Следовательно, исходную оценку можно переписать в виде

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u_{\text{дин}}(x))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \leq \mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u_{\text{опт}}(x))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) + q \|x\|^3.$$

По теореме 1

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u_{\text{опт}}(x))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \leq -\ell(f(x, u_{\text{опт}}(x)), u_{\text{опт}}(x)) \leq -\underline{\ell} \|x\|^2,$$

поэтому

$$\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u_{\text{дин}}(x))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x) \leq \left(1 - \frac{q}{\underline{\ell}} \|x\|\right) \left(\mathcal{J}_{\text{опт}}(f(x, u_{\text{опт}}(x))) - \mathcal{J}_{\text{опт}}(x)\right),$$

что и требовалось. Лемма доказана. \square

Опираясь на полученные результаты, можно сделать следующее заключение.

Теорема 9. Пусть число r выбрано согласно условиям лемм 16 и 17, функция $u_{\text{дин}}(x)$ определена равенством (3.8), а явная обратная связь $u_{\text{явн}}(x)$ построена по алгоритму теоремы 4. Тогда обратная связь

$$u(x) = \begin{cases} u_{\text{дин}}(x), & \|x\| \leq r, \\ u_{\text{явн}}(x), & \|x\| > r \end{cases}$$

обладает следующими свойствами:

1. Она стабилизирует нулевое равновесие системы (1.1), причем функция Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}$ является функцией Ляпунова, гарантирующей устойчивость, и скорость ее убывания вдоль решения дана в леммах 8 и 17.
2. Она является ε -субоптимальной обратной связью, причем оценка ε дана в леммах 7 и 16.

Доказательство. Утверждение следует из лемм 16 и 17. \square

Глава 4

Компенсация вычислительного запаздывания

В этой главе обратимся к проблеме вычислительного запаздывания: допустим, что для вычисления даже приближенной обратной связи $u_{\text{явн}}(x)$ требуется существенное время. Рассмотрим модель регулятора, который состоит из двух иерархически соединенных подсистем, работающих с разной частотой:

1. *Низкочастотный регулятор* вычисляет последовательность управляющих сигналов на $h \geq 1$ тактов вперед. Эту последовательность будем называть *программной*. Алгоритм ее вычисления сложен, поэтому она обновляется только каждые h тактов, т. е. на такте Kh ($K = 0, 1, \dots$) высокочастотный регулятор генерирует последовательность

$$\bar{u}(Kh), \bar{u}(Kh + 1), \dots, \bar{u}((K + 1)h - 1).$$

Например, эта последовательность может получаться замыканием модели (1.1) обратной связью $u_{\text{явн}}(x)$. Соответствующую программную траекторию обозначим

$$\bar{x}(Kh), \bar{x}(Kh + 1), \dots, \bar{x}((K + 1)h - 1).$$

2. *Высокочастотный регулятор* — это простой быстрый регулятор. На каждом такте он производит новый управляющий сигнал, для вычис-

ления которого требуется один такт. Его цель — стабилизировать программную траекторию, запланированную низкочастотным регулятором, по линейному приближению.

Замечание. Действие высокочастотного регулятора ограничено конечным промежутком длительностью в h тактов, поэтому здесь под стабилизацией понимается не достижение асимптотической устойчивости, а такой выбор управления, при котором собственные числа матрицы линейного приближения замкнутой системы имеют амплитуду, меньшую единицы. Практической целью при этом является подавление случайных возмущений в правой части системы.

Итак, предположим, что сигнал $u(k)$ складывается из двух компонент: u_1 с запаздыванием h тактов и u_2 с запаздыванием в один такт:

$$u(k) = u_1(k - h) + u_2(k - 1). \quad (4.1)$$

Если в системе с запаздывающим управлением использовать обыкновенную обратную связь вида $u = u(x)$, замкнутая система окажется системой с запаздыванием в состоянии. Чтобы избежать анализа такой системы, используем метод компенсации запаздывания, который основан на так называемом *предсказывающем преобразовании*.

4.1 Анализ линейного приближения

Рассмотрим движение системы в окрестности нуля — там, где справедливо линейное приближение

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

С учетом вычислительного запаздывания (4.1) получим следующую модель:

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu_1(k - h) + Bu_2(k - 1). \quad (4.2)$$

4.1.1 Предсказывающее преобразование состояния

Преобразование состояния системы, используемое в [21] для компенсации запаздывания управления в системах непрерывного времени, допускает рас-

пространение на систему дискретного времени (4.2) в виде

$$p(k) = A^h x(k) + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B u_1(k + \varkappa - h) + A^{h-1} B u_2(k - 1). \quad (4.3)$$

Отметим, что преобразование (4.3) является преобразованием *расширенного* состояния системы, включающего кроме $x(k)$ и прошлые значения управляющего сигнала:

$$\begin{aligned} \{x(k), u_1(k-h), u_1(k-h+1), \dots, u_1(k-1), u_2(k-1)\} &\mapsto \\ &\mapsto \{p(k), u_1(k-h), u_1(k-h+1), \dots, u_1(k-1), u_2(k-1)\}. \end{aligned}$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет новая переменная $p(k)$. Используя уравнение (4.2), получим

$$\begin{aligned} p(k+1) &= A^h (Ax(k) + Bu_1(k-h) + Bu_2(k-1)) + \\ &\quad + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B u_1(k+1+\varkappa-h) + A^{h-1} B u_2(k). \end{aligned}$$

Преобразуем суммирование по \varkappa следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B u_1(k+1+\varkappa-h) &= \sum_{\varkappa=1}^h A^{h-\varkappa} B u_1(k+\varkappa-h) = \\ &= A \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B u_1(k+\varkappa-h) - A^h B u_1(k-h) + B u_1(k) \end{aligned}$$

и подставим его в выражение для $p(k+1)$:

$$\begin{aligned} p(k+1) &= A^h (Ax(k) + Bu_1(k-h) + Bu_2(k-1)) + \\ &\quad + A \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B u_1(k+\varkappa-h) - A^h B u_1(k-h) + \\ &\quad + B u_1(k) + A^{h-1} B u_2(k) = \\ &= A \left[A^h x(k) + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B u_1(k+\varkappa-h) + A^{h-1} B u_2(k-1) \right] + \\ &\quad + B u_1(k) + A^{h-1} B u_2(k). \end{aligned}$$

Замечая, что выражение в квадратных скобках совпадает с $p(k)$, находим, что уравнение для новой переменной $p(k)$ есть

$$p(k+1) = Ap(k) + Bu_1(k) + A^{h-1}Bu_2(k). \quad (4.4)$$

Итак, предсказывающее преобразование (4.3) позволило избавиться от запаздывания в управлении. Требуется доказать, что стабилизация системы (4.4) с компенсированным запаздыванием гарантирует стабилизацию исходной системы (4.2).

Будем рассматривать регуляторы $u_1(k)$ и $u_2(k)$ в линейном приближении:

$$u_{1,2}(k) = F_{1,2}p(k). \quad (4.5)$$

Тогда в исходных переменных эта же обратная связь будет иметь вид

$$u_{1,2}(k) = F_{1,2} \left[A^h x(k) + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} Bu_1(k+\varkappa-h) + A^{h-1}Bu_2(k-1) \right]. \quad (4.6)$$

Преимущество от перехода к новой переменной состояния p по сравнению с прямым анализом замкнутой системы (4.2), (4.6) заключается в том, что для замкнутой системы в форме (4.4), (4.5) проще построить функционал Ляпунова — Красовского. Последний требуется, например, чтобы при анализе устойчивости учесть погрешности в вычислении предиктора (4.3) на практике. Построим сначала функционал для преобразованной системы (4.4), (4.5), а затем вернемся к исходной переменной x .

4.1.2 Функционал Ляпунова — Красовского

Система (4.4), хотя и не содержит в правой части запаздывающих управлений, тем не менее, определена в пространстве состояний вида

$$\{p(k), u_1(k-h), u_1(k-h+1), \dots, u_1(k-1), u_2(k-1)\}.$$

Чтобы применить к ней метод Ляпунова — Красовского, необходимо найти функционал v , определенный на $(n + (h+1)m)$ -мерном пространстве расширенных состояний и допускающий верхнюю и нижнюю квадратичные оценки.

Замкнутая система (4.4), (4.5) имеет вид

$$p(k+1) = \bar{A}p(k), \quad (4.7)$$

где $\bar{A} = A + BF_1 + A^{h-1}BF_2$. Будем считать, что она асимптотически устойчива, т. е. все собственные числа матрицы \bar{A} по модулю меньше единицы.

Выберем произвольные положительно определенные матрицы W , W_1 и W_2 . Предположим, что V — положительно определенное решение уравнения Ляпунова

$$\bar{A}^T V \bar{A} - V = -2W - F_1^T W_1 F_1 - F_2^T W_2 F_2,$$

т. е.

$$\bar{A}^T V \bar{A} - V + F_1^T W_1 F_1 + F_2^T W_2 F_2 = -2W.$$

На основании непрерывности можно утверждать, что существует такое число $\sigma \in (0, 1)$, что имеет место матричное неравенство

$$\bar{A}^T V \bar{A} - \sigma V + \sigma^{1-h} F_1^T W_1 F_1 + F_2^T W_2 F_2 < -W.$$

Будем считать, что число σ выбрано именно так, и построим функционал v , который на движениях замкнутой системы принимает вид

$$v(k) = \|p(k)\|_V^2 + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 + \|u_2(k-1)\|_{W_2}^2. \quad (4.8)$$

В исходных переменных этот функционал имел бы следующую более сложную форму:

$$v(k) = \left\| A^h x(k) + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B u_1(k+\varkappa-h) + A^{h-1} B u_2(k-1) \right\|_V^2 + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 + \|u_2(k-1)\|_{W_2}^2.$$

4.1.3 Устойчивость регулятора с компенсацией запаздывания

В следующих двух леммах доказывается, что функционал (4.8) обладает требуемыми для доказательства устойчивости свойствами (верхней и нижней квадратичными границами). Для краткости введем обозначение

$$U(k) = \begin{pmatrix} u_1(k-h) \\ u_1(k-h+1) \\ \vdots \\ u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{pmatrix}.$$

Лемма 18. *Справедлива оценка*

$$v(k) \leq M_v (\|x(k)\|^2 + \|U(k)\|^2),$$

где

$$M_v = \max \left\{ \|A^h\|_V^2 \lambda_{\max}(V), \|A^{h-1-\varkappa} B\|_V^2 \lambda_{\max}(V), \|A^{h-1} B\|_V^2 \lambda_{\max}(V), \sigma^{1-h} \lambda_{\max}(W_1), \lambda_{\max}(W_2) : \varkappa = 0, 1, \dots, h-1 \right\}.$$

Доказательство. Оценка получается из (4.8) применением неравенства Юнга, неравенства треугольника и неравенства Коши — Шварца. \square

Лемма 19. *Справедливы оценки*

$$v(k) \geq m_u \|U(k)\|^2,$$

$$v(k) \geq m_x \|x(k)\|^2,$$

где

$$m_u = \min \{ \lambda_{\min}(W_1), \lambda_{\min}(W_2) \},$$

$$m_x = \lambda_{\min} \left((A^h)^\top (V^{-1} + m_u^{-1} G)^{-1} A^h \right),$$

$$G = QQ^T,$$

$$Q = \left(A^{h-1}B, A^{h-2}B, \dots, AB, B, A^{h-1}B \right).$$

Замечание. Нижняя оценка функционала через полную норму $\|x(k)\|^2 + \|U(k)\|^2$ следует из леммы 19:

$$v(k) \geq \frac{\min\{m_x, m_u\}}{2} (\|x(k)\|^2 + \|U(k)\|^2).$$

Доказательство. Начнем с оценки

$$v(k) \geq \|p(k)\|_V^2 + m_u \|U(k)\|^2, \quad (4.9)$$

где переменная $p(k)$ связана с $x(k)$ и $U(k)$ равенством (4.3):

$$p(k) = A^h x(k) + QU(k).$$

Первое неравенство леммы получается отбрасыванием $\|p(k)\|_V^2$ в (4.9).

Чтобы получить второе неравенство леммы, необходимо оценить снизу правую часть неравенства (4.9). Для этого рассмотрим вспомогательную задачу оптимизации:

$$\|p\|_V^2 + m_u \|U\|^2 \rightarrow \min_U.$$

Любой вектор U может быть представлен в виде суммы двух компонент: своей проекции на строки Q и ортогональной составляющей, т. е.

$$U = Q^T c + \bar{U},$$

где c — некоторый n -мерный вектор, а \bar{U} удовлетворяет условию ортогональности

$$Q^T \bar{U} = 0.$$

Такое представление вектора U позволяет записать

$$p = A^h x + Gc,$$

$$\|U\|^2 = c^T Gc + \|\bar{U}\|^2 \geq c^T Gc.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v &\geq \|Gc\|_V^2 + m_u c^\top Gc + 2c^\top GV A^h x + \|A^h x\|_V^2 = \\ &= c^\top (GVG + m_u G)c + 2c^\top GV A^h x + \|A^h x\|_V^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Минимум этой оценки достигается, когда c удовлетворяет уравнению

$$(GVG + m_u G)c = -GV A^h x,$$

которое, вообще говоря, может иметь множество решений. Нам подходит любое из них — например,

$$c = -(G + m_u V^{-1})^{-1} A^h x.$$

Подставив это значение в (4.10), получим

$$\begin{aligned} v &\geq (A^h x)^\top \left((G + m_u V^{-1})^{-1} \right)^\top (GVG + m_u G) (G + m_u V^{-1})^{-1} A^h x - \\ &\quad - 2(A^h x)^\top VG (G + m_u V^{-1})^{-1} A^h x + \|A^h x\|_V^2. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(GVG + m_u G)(G + m_u V^{-1})^{-1} = GV(G + m_u V^{-1})(G + m_u V^{-1})^{-1} = GV,$$

поэтому оценка упрощается:

$$v \geq (A^h x)^\top \left(V - VG(G + m_u V^{-1})^{-1} \right) A^h x.$$

Покажем, что матрица

$$R = V - VG(G + m_u V^{-1})^{-1}$$

положительно определена:

$$R(G + m_u V^{-1}) = V(G + m_u V^{-1}) - VG = m_u \mathbb{E},$$

что приводит к равенству

$$R = (V^{-1} + m_u^{-1} G)^{-1}.$$

Следовательно, матрица R положительно определена и имеет место требуемая оценка

$$v(k) \geq (A^h x(k))^T (V^{-1} + m_u^{-1} G)^{-1} A^h x(k) \geq m_x \|x(k)\|^2.$$

Лемма доказана. □

Покажем, что функционал (4.8) убывает на движениях замкнутой системы (4.7).

Лемма 20. *На движениях системы (4.7) функционал (4.8) удовлетворяет неравенству*

$$v(k+1) \leq \sigma v(k).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} v(k+1) = \|p(k+1)\|_V^2 + \sum_{\varkappa=0}^{h-2} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k+1-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 + \\ + \sigma^{1-h} \|u_1(k)\|_{W_1}^2 + \|u_2(k)\|_{W_2}^2. \end{aligned}$$

Используя уравнение замкнутой системы (4.7) и выражения для управлений (4.5), получим

$$v(k+1) = \|p(k)\|_{\bar{A}^T V \bar{A} + \sigma^{1-h} F_1^T W_1 F_1 + F_2^T W_2 F_2}^2 + \sum_{\varkappa=0}^{h-2} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k+1-h+\varkappa)\|_{W_1}^2.$$

Сумма в правой части допускает оценку

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa=0}^{h-2} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k+1-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 &= \\ &= \sum_{\varkappa=0}^{h-1} \sigma^{1-\varkappa} \|u_1(k-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 - \sigma \|u_1(k-h)\|_{W_1}^2 \leq \\ &\leq \sum_{\varkappa=0}^{h-1} \sigma^{1-\varkappa} \|u_1(k-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 = \\ &= \sigma v(k) - \sigma \|p(k)\|_V^2 - \sigma \|u_2(k-1)\|_{W_2}^2 \leq \sigma v(k) - \sigma \|p(k)\|_V^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v(k+1) \leq \sigma v(k) + \|p(k)\|_{\bar{A}^T V \bar{A} - \sigma V + \sigma^{1-h} F_1^T W_1 F_1 + F_2^T W_2 F_2}^2.$$

Матрица $\bar{A}^T V \bar{A} - \sigma V + \sigma^{1-h} F_1^T W_1 F_1 + F_2^T W_2 F_2$ отрицательно определена, поэтому

$$v(k+1) \leq \sigma v(k).$$

Лемма доказана. □

Из доказанных лемм следует асимптотическая устойчивость замкнутой системы (4.2), (4.6). На практике, однако, параметры модели системы, т. е. матрицы A и B , по которым строится предсказывающая переменная p , известны неточно. Покажем, что замкнутая система, тем не менее, остается асимптотически устойчивой при небольших неточностях в вычислении управления, и получим оценки допустимых неточностей.

4.1.4 Робастность регулятора с компенсацией запаздывания

Пусть модель, описываемая системой (4.2), точна, и пусть она неизвестна, но доступна ее оценка

$$x(k+1) = \hat{A}x(k) + \hat{B}u_1(k-h) + \hat{B}u_2(k-1).$$

Здесь матрицы \hat{A} и \hat{B} — аппроксимации соответствующих параметров точной модели.

Регулятор, аналогичный (4.6), построенный по неточной модели системы, имеет вид

$$u_{1,2}(k) = F_{1,2} \left[\hat{A}^h x(k) + \sum_{\kappa=0}^{h-1} \hat{A}^{h-1-\kappa} \hat{B}u_1(k+\kappa-h) + \hat{A}^{h-1} \hat{B}u_2(k-1) \right].$$

Сравнивая его с точным регулятором (4.5), замечаем, что

$$u_{1,2}(k) = F_{1,2} p(k) + \Delta u_{1,2}(k), \tag{4.11}$$

где

$$\Delta u_{1,2}(k) = F_{1,2} \left[(\hat{A}^h - A^h)x(k) + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} (\hat{A}^{h-1-\varkappa}\hat{B} - A^{h-1-\varkappa}B)u_1(k + \varkappa - h) + \right. \\ \left. + (\hat{A}^{h-1}\hat{B} - A^{h-1}B)u_2(k - 1) \right].$$

Здесь переменную $x(k)$ можно заменить через $p(k)$ и $u(\cdot)$, пользуясь формулой (4.3):

$$x(k) = -A^{-h}p(k) + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{-1-\varkappa}Bu_1(k + \varkappa - h) + A^{-1}Bu_2(k - 1).$$

Таким образом, получается

$$\Delta u_{1,2}(k) = F_{1,2} \left[(\mathbb{E} - \hat{A}^h A^{-h})p(k) + \right. \\ \left. + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} (\hat{A}^{h-1-\varkappa}\hat{B} - A^{h-1-\varkappa}B + (\hat{A}^h - A^h)A^{-1-\varkappa})u_1(k + \varkappa - h) + \right. \\ \left. + (\hat{A}^{h-1}\hat{B} - A^{h-1}B + (\hat{A}^h - A^h)A^{-1}B)u_2(k - 1) \right].$$

Приходим к выводу, что система (4.4), замкнутая неточным регулятором с компенсацией запаздывания (4.11), после предсказывающего преобразования (4.3) есть

$$p(k + 1) = \bar{A}p(k) + B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k). \quad (4.12)$$

Видно, что в силу неточности параметров системы, используемых для построения регулятора, запаздывание в системе компенсировалось не полностью, т. к. прошлые значения управления входят в $\Delta u_{1,2}(k)$. Эти запаздывающие слагаемые, однако, малы, если значения \hat{A} и \hat{B} достаточно близки к A и B . Следовательно, можно ожидать, что устойчивость сохранится при достаточно малой погрешности модели.

Чтобы получить оценку допустимых погрешностей, используем построенный выше функционал Ляпунова — Красовского (4.8). В следующей лемме оценивается убывание этого функционала.

Лемма 21. *Вдоль движений системы (4.2), замкнутой неточным регулятором с компенсацией запаздывания (4.11), функционал (4.8) удовлетворяет неравенству*

$$v(k+1) \leq \tilde{\sigma} v(k),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = & \sigma + 2\mu(\lambda_{\min}^{-1}(V) + m_u^{-1}) \times \\ & \times \left[2 \max \left\{ \|\bar{A}VB + \sigma^{1-h} F_1^\top W_1\|, \|\bar{A}VA^{h-1}B + F_2^\top W_2\| \right\} + \right. \\ & + 2\mu\lambda_{\max}(V) \max \left\{ \|B\|^2, \|A^{h-1}B\|^2 \right\} + \\ & \left. + \mu\sigma^{1-h}\lambda_{\max}(W_1) + \mu\lambda_{\max}(W_2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu = & \max \|F_{1,2}\| \times \\ & \times \max \left\{ \left\| \mathbb{E} - \hat{A}^h A^{-h} \right\|, \left\| \hat{A}^{h-1-\varkappa} \hat{B} - A^{h-1-\varkappa} B + (\hat{A}^h - A^h) A^{-1-\varkappa} \right\|, \right. \\ & \left. \left\| \hat{A}^{h-1} \hat{B} - A^{h-1} B + (\hat{A}^h - A^h) A^{-1} B \right\| : \varkappa = 0, 1, \dots, h-1 \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} v(k+1) = & \|p(k+1)\|_V^2 + \sum_{\varkappa=0}^{h-2} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k+1-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 + \\ & + \sigma^{1-h} \|u_1(k)\|_{W_1}^2 + \|u_2(k)\|_{W_2}^2. \end{aligned}$$

Используя уравнение замкнутой системы (4.12), (4.11), получим

$$\begin{aligned} v(k+1) = & \|\bar{A}p(k) + B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k)\|_V^2 + \\ & + \sum_{\varkappa=0}^{h-2} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k+1-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 + \\ & + \sigma^{1-h} \|F_1 p(k) + \Delta u_1(k)\|_{W_1}^2 + \|F_2 p(k) + \Delta u_2(k)\|_{W_2}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|p(k)\|_{\bar{A}^\top V \bar{A} + \sigma^{1-h} F_1^\top W_1 F_1 + F_2^\top W_2 F_2}^2 + \sum_{\varkappa=0}^{h-2} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k+1-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 + \\
&\quad + 2p^\top(k) \left(\bar{A}V (B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k)) + \right. \\
&\quad \left. + \sigma^{1-h} F_1^\top W_1 \Delta u_1(k) + F_2^\top W_2 \Delta u_2(k) \right) + \\
&\quad + \|B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k)\|_V^2 + \sigma^{1-h} \|\Delta u_1(k)\|_{W_1}^2 + \|\Delta u_2(k)\|_{W_2}^2.
\end{aligned}$$

Пользуясь оценкой

$$\sum_{\varkappa=0}^{h-2} \sigma^{-\varkappa} \|u_1(k+1-h+\varkappa)\|_{W_1}^2 \leq \sigma v(k) - \sigma \|p(k)\|_V^2$$

из доказательства леммы 20, получаем

$$\begin{aligned}
v(k+1) &\leq \sigma v(k) + \|p(k)\|_{\bar{A}^\top V \bar{A} - \sigma V + \sigma^{1-h} F_1^\top W_1 F_1 + F_2^\top W_2 F_2}^2 + \\
&\quad + 2p^\top(k) \left(\bar{A}V (B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k)) + \right. \\
&\quad \left. + \sigma^{1-h} F_1^\top W_1 \Delta u_1(k) + F_2^\top W_2 \Delta u_2(k) \right) + \\
&\quad + \|B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k)\|_V^2 + \sigma^{1-h} \|\Delta u_1(k)\|_{W_1}^2 + \|\Delta u_2(k)\|_{W_2}^2 < \\
&< \sigma v(k) - \|p(k)\|_W^2 + 2p^\top(k) \left((\bar{A}VB + \sigma^{1-h} F_1^\top W_1) \Delta u_1(k) + \right. \\
&\quad \left. + (\bar{A}VA^{h-1}B + F_2^\top W_2) \Delta u_2(k) \right) + \\
&\quad + \|B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k)\|_V^2 + \sigma^{1-h} \|\Delta u_1(k)\|_{W_1}^2 + \|\Delta u_2(k)\|_{W_2}^2 \leq \\
&\leq \sigma v(k) + 2p^\top(k) \left((\bar{A}VB + \sigma^{1-h} F_1^\top W_1) \Delta u_1(k) + \right. \\
&\quad \left. + (\bar{A}VA^{h-1}B + F_2^\top W_2) \Delta u_2(k) \right) + \\
&\quad + \|B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k)\|_V^2 + \sigma^{1-h} \|\Delta u_1(k)\|_{W_1}^2 + \|\Delta u_2(k)\|_{W_2}^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что в обозначениях лемм 18 и 19

$$\Delta u_{1,2}(k) \leq \mu(\|p(k)\| + \|U(k)\|).$$

Применив к оценке $v(k+1)$ неравенства

$$\begin{aligned}
2p^\top(k) & \left((\bar{A}VB + \sigma^{1-h}F_1^\top W_1)\Delta u_1(k) + (\bar{A}VA^{h-1}B + F_2^\top W_2)\Delta u_2(k) \right) \leq \\
& \leq 2\|p(k)\| \left(\|\bar{A}VB + \sigma^{1-h}F_1^\top W_1\| \|\Delta u_1(k)\| + \right. \\
& \quad \left. + \|\bar{A}VA^{h-1}B + F_2^\top W_2\| \|\Delta u_2(k)\| \right) \leq \\
& \leq 2\mu \max \left\{ \|\bar{A}VB + \sigma^{1-h}F_1^\top W_1\|, \|\bar{A}VA^{h-1}B + F_2^\top W_2\| \right\} \times \\
& \quad \times (\|p(k)\| + \|U(k)\|)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|B\Delta u_1(k) + A^{h-1}B\Delta u_2(k)\|_V^2 & \leq \\
& \leq 2\lambda_{\max}(V) (\|B\|^2 \|\Delta u_1\|^2 + \|A^{h-1}B\|^2 \|\Delta u_2\|^2) \leq \\
& \leq 2\mu^2 \lambda_{\max}(V) \max \{ \|B\|^2, \|A^{h-1}B\|^2 \} (\|p(k)\| + \|U(k)\|)^2, \\
\sigma^{1-h} \|\Delta u_1(k)\|_{W_1}^2 & \leq \mu^2 \sigma^{1-h} \lambda_{\max}(W_1) (\|p(k)\| + \|U(k)\|)^2
\end{aligned}$$

и

$$\|\Delta u_2(k)\|_{W_2}^2 \leq \mu^2 \lambda_{\max}(W_2) (\|p(k)\| + \|U(k)\|)^2,$$

приходим к оценке

$$\begin{aligned}
v(k+1) & \leq \sigma v(k) + \left[2\mu \max \left\{ \|\bar{A}VB + \sigma^{1-h}F_1^\top W_1\|, \|\bar{A}VA^{h-1}B + F_2^\top W_2\| \right\} + \right. \\
& \quad + 2\mu^2 \lambda_{\max}(V) \max \{ \|B\|^2, \|A^{h-1}B\|^2 \} + \\
& \quad \left. + \mu^2 \sigma^{1-h} \lambda_{\max}(W_1) + \mu^2 \lambda_{\max}(W_2) \right] (\|p(k)\| + \|U(k)\|)^2.
\end{aligned}$$

Используя неравенство

$$\begin{aligned}
(\|p(k)\| + \|U(k)\|)^2 & \leq 2(\|p(k)\|^2 + \|U(k)\|^2) \leq \\
& \leq 2(\lambda_{\min}^{-1}(V)v(k) + \|U(k)\|^2) \leq 2(\lambda_{\min}^{-1}(V) + m_u^{-1})v(k),
\end{aligned}$$

следующее из леммы 19, получаем

$$v(k+1) \leq \tilde{\sigma}v(k).$$

Лемма доказана. □

Следующая теорема дает оценку робастности системы, стабилизированной неточным компенсатором запаздывания.

Теорема 10. Система (4.2), замкнутая управлением с неточной компенсацией запаздывания (4.11), асимптотически устойчива, если число $\tilde{\sigma}$, определенное в лемме 21, меньше единицы.

Доказательство. Следует из лемм 18, 19 и 21. □

Замечание. Число $\tilde{\sigma}$, определенное в лемме 21, меньше единицы, если μ достаточно мало, что достигается близостью \hat{A} и \hat{B} к A и B .

4.2 Нелинейный случай

В данном параграфе предлагается распространение метода компенсации запаздывания в управлении на нелинейные системы с несколькими запаздываниями. Рассмотрим систему (1.1), считая, что управление, как и в предыдущем параграфе, складывается из двух компонент u_1 и u_2 , имеющих различные запаздывания, обусловленные различной вычислительной сложностью: h и 1. Получаем систему

$$x(k+1) = f(x(k), u_1(k-h) + u_2(k-1)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.13)$$

4.2.1 Схема компенсации запаздывания

Чтобы построить компенсатор запаздывания для нелинейной системы, удобно переформулировать метод компенсации, разработанный для линейных систем [21; 49; 51], в следующем виде, основанном на понятии *предсказателя* будущего состояния системы.

Пусть дана линейная система с одним запаздыванием:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-h), \quad k = 0, 1, \dots$$

Для нее запаздывание компенсируется следующим образом:

- для текущего состояния $x(k)$ и прошлых управлений $u(\cdot)$ *предсказатель* $\mathcal{P}(x(k), u(\cdot))$ будущего состояния $x(k+h)$ вычисляется интегрированием системы как

$$\mathcal{P}(x(k), u(\cdot)) = A^h x(k) + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B u(k-h+\varkappa);$$

- выполняется *преобразование состояния* по формуле

$$p(k) = \mathcal{P}(x(k), u(\cdot));$$

- *преобразованная система* не содержит запаздывания:

$$p(k+1) = Ap(k) + Bu(k);$$

- состояние $p(k)$ стабилизируется, например, управлением

$$u(k) = Fp(k);$$

- для исходной системы управление имеет вид

$$u(k) = F\mathcal{P}(x(k), u(\cdot)).$$

Предположим теперь, что в системе есть несколько запаздываний, например, два: 0 (слагаемое без запаздывания) и $h > 0$:

$$x(k+1) = Ax(k) + B_0u(k) + B_1u(k-h), \quad k = 0, 1, \dots$$

В этом случае буквальное предсказание $x(k+h)$ в текущий момент k затруднительно, т. к. оно подразумевает либо знание будущих управлений, либо некоторое предположение о них. Первый вариант нарушает временную причинность и приводит к нереализуемому регулятору, а второй требует неявного задания регулятора. В [21; 49; 51], однако, используется фактически «предсказание с нулевым будущим управлением». Это не буквальное предсказание в том смысле, что будущее управление не обязательно должно оказаться нулем в действительности. Управление строится следующим образом:

- *предсказатель* $\mathcal{P}(x(k), u(\cdot))$ определяется как прогноз $x(k+h)$ с заданным прошлым управлением $u(\cdot)$ и нулевым будущим управлением, т. е. $u(k+\varkappa) = 0$ при $k \geq 0$. Формально

$$\mathcal{P}(x(k), u(\cdot)) = \xi(h),$$

$$\xi(\varkappa + 1) = A\xi(\varkappa) + B_1 u(k - h + \varkappa), \quad \varkappa = 0, 1, \dots, h - 1,$$

$$\xi(0) = x(k)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathcal{P}(x(k), u(\cdot)) = A^h x(k) + \sum_{\varkappa=0}^{h-1} A^{h-1-\varkappa} B_1 u(k - h + \varkappa);$$

- выполняется *преобразование состояния*

$$p(k) = \mathcal{P}(x(k), u(\cdot));$$

- *преобразованная система* вновь не содержит запаздывания:

$$p(k+1) = Ap(k) + (A^h B_0 + B_1)u(k);$$

- $p(k)$ стабилизируется управлением

$$u(k) = Fp(k);$$

- для исходной системы управление есть

$$u(k) = F \mathcal{P}(x(k), u(\cdot)).$$

Метод компенсации запаздывания разработан также для нелинейных систем с одним запаздыванием в управлении вида

$$x(k+1) = f(x(k), u(k-h)).$$

Управление построено и исследовано в [47], используя ту же идею, что и в линейном случае: построить предсказатель $\mathcal{P}(x(k), u(\cdot))$ будущего состояния

$x(k+h)$, ввести новую переменную $p(k) = \mathcal{P}(x(k), u(\cdot))$, которая преобразует систему к виду без запаздывания

$$p(k+1) = f(p(k), u(k)),$$

и стабилизировать ее обратной связью $u = \kappa(p)$. После этого доказывается, что стабилизация исходной системы достигается управлением

$$u(k) = \kappa\left(\mathcal{P}(x(k), u(\cdot))\right).$$

Следуя принципам компенсации нескольких запаздываний в линейных системах, описанным выше, определим предсказатель $\mathcal{P}(x(k), u(\cdot))$ для системы (4.13) как прогноз будущего состояния $x(k+h)$ при нулевом будущем управлении. Нелинейная версия предсказывающего преобразования (4.3), таким образом, определяется равенством

$$p(k) = \mathcal{P}(x(k), u(\cdot)), \quad (4.14)$$

где отображение \mathcal{P} задано системой

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x(k), u(\cdot)) &= \xi(h), \\ \xi(0) &= x(k), \\ \xi(1) &= f(\xi(0), u_1(k-h) + u_2(k-1)), \\ \xi(2) &= f(\xi(1), u_1(k-h+1)), \\ \xi(3) &= f(\xi(2), u_1(k-h+2)), \\ &\vdots \\ \xi(h) &= f(\xi(h-1), u_1(k-1)). \end{aligned}$$

Это определение содержит алгоритм: чтобы найти $p(k)$, следует последовательно найти $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(h)$ при $\xi(0) = x(k)$ и положить $p(k) = \xi(h)$.

Замечание. Вообще говоря, такое определение $p(k)$ может быть некорректным, если движение нелинейной системы уходит на бесконечность за конечное

число шагов. Это препятствие обходится в [47], где предполагается продолжительность вправо (*forward completeness*) всех решений разомкнутой системы, и в [63], где на правую часть системы накладываются линейные ограничения. В данной работе существование отображения $\mathcal{P}(x(k), u(\cdot))$ гарантируется предположением 4.

Теорема 11. Система (4.13) после преобразования (4.14) принимает вид

$$p(k+1) = f(p(k), u_1(k)) + \Phi(p(k), u_1(\cdot))u_2(k) + o(u_2(k)), \quad (4.15)$$

где матрица Φ определяется системой

$$\begin{aligned} \Phi(p(k), u_1(\cdot)) &= Z(h), \\ Z(1) &= B(\xi(1), u_1(k-h+1)), \\ Z(2) &= A(\xi(2), u_1(k-h+2))Z(1), \\ Z(3) &= A(\xi(3), u_1(k-h+3))Z(2), \\ &\vdots \\ Z(h) &= A(\xi(h), u_1(k))Z(h-1), \\ \xi(h) &= p(k), \\ \xi(h-1) &= f^{-1}(\xi(h), u_1(k-1)), \\ \xi(h-2) &= f^{-1}(\xi(h-1), u_1(k-2)), \\ &\vdots \\ \xi(1) &= f^{-1}(\xi(2), u_1(k-h+1)). \end{aligned}$$

Доказательство. По определению переменная $p(k)$ находится из системы

$$\begin{aligned} p(k) &= \xi(h), \\ \xi(0) &= x(k), \\ \xi(1) &= f(\xi(0), u_1(k-h) + u_2(k-1)), \\ \xi(2) &= f(\xi(1), u_1(k-h+1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi(3) &= f(\xi(2), u_1(k-h+2)), \\ &\vdots \\ \xi(h) &= f(\xi(h-1), u_1(k-1)),\end{aligned}$$

а $p(k+1)$ — из системы

$$\begin{aligned}p(k+1) &= \bar{\xi}(h), \\ \bar{\xi}(0) &= x(k+1), \\ \bar{\xi}(1) &= f(\bar{\xi}(0), u_1(k-h+1) + u_2(k)), \\ \bar{\xi}(2) &= f(\bar{\xi}(1), u_1(k-h+2)), \\ \bar{\xi}(3) &= f(\bar{\xi}(2), u_1(k-h+3)), \\ &\vdots \\ \bar{\xi}(h) &= f(\bar{\xi}(h-1), u_1(k)).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(0) &= f(x(k), u_1(k-h) + u_2(k-1)) = \\ &= f(\xi(0), u_1(k-h) + u_2(k-1)) = \\ &= \xi(1), \\ \bar{\xi}(1) &= f(\bar{\xi}(0), u_1(k-h+1) + u_2(k)) = \\ &= f(\xi(1), u_1(k-h+1) + u_2(k)) = \\ &= f(\xi(1), u_1(k-h+1)) + \\ &\quad + B(\xi(1), u_1(k-h+1))u_2(k) + o(u_2(k)) = \\ &= \xi(2) + Z(1)u_2(k) + o(u_2(k)), \\ \bar{\xi}(2) &= f(\bar{\xi}(1), u_1(k-h+2)) = \\ &= f(\xi(2) + Z(1)u_2(k) + o(u_2(k)), u_1(k-h+2)) = \\ &= f(\xi(2), u_1(k-h+2)) + \\ &\quad + A(\xi(2), u_1(k-h+2))Z(1)u_2(k) + o(u_2(k)) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(\xi(2), u_1(k-h+2)) + Z(2)u_2(k) + o(u_2(k)) = \\
&= \xi(3) + Z(2)u_2(k) + o(u_2(k)), \\
\bar{\xi}(3) &= \xi(4) + Z(3)u_2(k) + o(u_2(k)), \\
&\vdots \\
\bar{\xi}(h-1) &= \xi(h) + Z(h-1)u_2(k) + o(u_2(k)), \\
\bar{\xi}(h) &= f(\xi(h) + Z(h-1)u_2(k) + o(u_2(k)), u_1(k)) = \\
&= f(\xi(h), u_1(k)) + Z(h)u_2(k) + o(u_2(k)).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$p(k+1) = f(p(k), u_1(k)) + \Phi(p(k), u_1(\cdot))u_2(k) + o(u_2(k)),$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание. В результате преобразования (4.14) запаздывание из системы исключилось не полностью: матрица Φ в преобразованной системе (4.15) зависит от прошлых значений u_1 . Тем не менее, эта система аффинна по управлению $u_2(k)$, которое теперь входит без запаздывания.

4.2.2 Устойчивость нелинейного регулятора с компенсацией запаздывания

Как указано выше, задачей низкочастотного регулятора u_1 является построение программной последовательности $\bar{u}(k)$. Этой последовательности соответствует программная траектория $\bar{x}(k)$, которая стабилизируется высокочастотным регулятором. В преобразованной системе программную траекторию обозначим $\bar{p}(k)$.

Замечание. Для выбора управления $u_1(k)$ подходят уже известные результаты, касающиеся метода компенсации для нелинейных систем с одним запаздыванием [47], т. к. предсказывающее преобразование (4.14), где будущие значения u_2 предполагаются нулевыми, эквивалентно отсутствию u_2 , т. е. случаю одного запаздывания.

Рассмотрим систему в отклонениях от программной траектории:

$$\pi(k+1) = A(\bar{p}(k), u_1(k))\pi(k) + \Phi(\bar{p}(k), u_1(\cdot))u_2(k) + o(\pi(k)) + o(u_2(k)),$$

где

$$\pi(k) = p(k) - \bar{p}(k).$$

Полагая $u_2(k) = F_2(\bar{p}(k), u_1(\cdot))\pi(k)$ и линеаризуя систему в отклонениях, получаем

$$\pi(k+1) = \left(A(\bar{p}(k), u_1(k)) + \Phi(\bar{p}(k), u_1(\cdot))F_2(\bar{p}(k), u_1(\cdot)) \right) \pi(k).$$

Следующее утверждение касается стабилизации системы (4.15) выбором F_2 и следующей из этого стабилизации исходной системы (4.13). Оно сформулировано в форме прямого метода Ляпунова для управляемых систем [22]: если управляемая функция Ляпунова (*control-Lyapunov function*) убывает при некотором управлении, то система стабилизируема.

Теорема 12. Пусть при всех $\bar{p}(k) \in \mathcal{X}$ и $u_1(k-\varkappa) \in \mathcal{U}$ ($\varkappa = 1, 2, \dots, h-1$) существует $(m \times n)$ -матричная функция

$$F_2(\bar{p}(k), u_1(k-h), u_1(k-h+1), \dots, u_1(k-1))$$

и симметрические положительно определенные $(n \times n)$ -матричные функции

$$V(\bar{p}(k), u_1(k-h), u_1(k-h+1), \dots, u_1(k-1))$$

и

$$W(\bar{p}(k), u_1(k-h), u_1(k-h+1), \dots, u_1(k-1)),$$

связанные равенством

$$\bar{A}^\top(\bar{p}(k), u_1(\cdot))V(\bar{p}(k), u_1(\cdot))\bar{A}(\bar{p}(k), u_1(\cdot)) - V(\bar{p}(k), u_1(\cdot)) = -W(\bar{p}(k), u_1(\cdot)),$$

где

$$\bar{A}(\bar{p}(k), u_1(\cdot)) = A(\bar{p}(k), u_1(k)) + \Phi(\bar{p}(k), u_1(\cdot))F_2(\bar{p}(k), u_1(\cdot)).$$

Тогда управление

$$u_2(k) = F_2\left(\bar{p}(k), u_1(\cdot)\right)\left(\mathcal{P}(x(k), u_1(\cdot)) - \bar{p}(k)\right)$$

стабилизирует систему (4.13).

Доказательство. Доказательство проводится полностью аналогично линейному случаю, при этом в качестве функционала Ляпунова — Красовского вместо (4.8) используется выражение

$$v(k) = \|p(k)\|_{V(\bar{p}(k), u_1(\cdot))}^2 + \|u_2(k-1)\|^2.$$

Квадратичные оценки функционала получаются благодаря линейной ограниченности правой части системы (4.13). \square

Замечание. С помощью функционала Ляпунова — Красовского, используемого в доказательстве теоремы 12, можно исследовать и робастность регулятора u_2 аналогично тому, как это сделано в теореме 10.

Теорема 12 предлагает следующий алгоритм выбора управления $u_2(k)$ при известном программном управлении $u_1(k)$ и известной программной траектории $\bar{p}(k)$:

1. На такте k , имея $x(k), u_1(k-h), u_1(k-h+1), \dots, u_1(k-1), u_2(k-1)$, построить $\xi(\varkappa)$ из определения отображения (4.14).
2. Положить $p(k) = \xi(h)$.
3. Выбрать

$$u_2(k) = F_2\left(\bar{p}(k), u_1(\cdot)\right)(p(k) - \bar{p}(k)).$$

На следующем такте повторить алгоритм.

Глава 5

Примеры

5.1 Система первого порядка

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \sin x(t) + u(t) \quad (5.1)$$

и функционал качества

$$\int_0^{\infty} x^2(t) + u^2(t) dt.$$

Оптимальное управление в данном случае может быть вычислено в явном виде:

$$u = -\sin x - \operatorname{sign} x \sqrt{x^2 + \sin^2 x}.$$

Для моделирования система дискретизирована с шагом 0,1.

На рис. 5.1 пунктиром показано управление и движение в системе, замкнутой оптимальной обратной связью. Если аппроксимировать оптимальную обратную связь ломаной, построенной с шагом 0,5 по x , в системе возникают колебания в окрестности нуля (точечная линия на рис. 5.1), которые устраняются использованием вблизи положения равновесия линейной обратной связи

$$u = -2x$$

(сплошная линия на рис. 5.1).

Этот пример иллюстрирует необходимость квазилинейного режима управления, рассмотренного в главе 3.

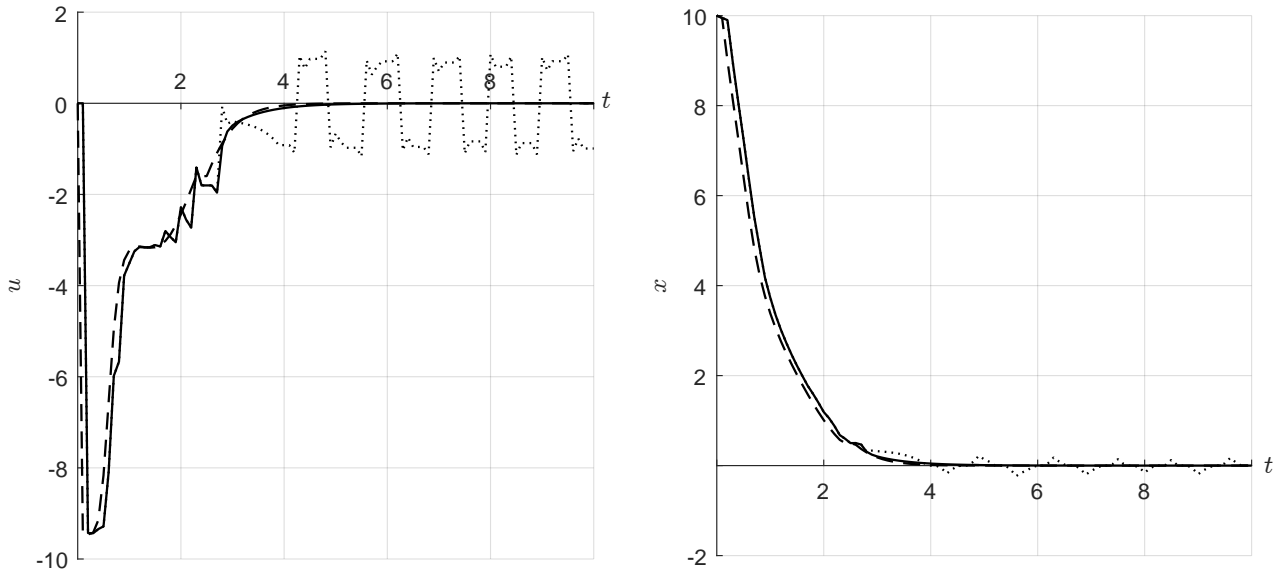


Рис. 5.1: Управление (слева) и движение (справа) в системе (5.1), замкнутой точным регулятором «предиктор-корректор» (пунктирная линия) и приближенным без использования квазилинейного режима (точечная линия) и с квазилинейным режимом (сплошная линия).

5.2 Система второго порядка

Рассмотрим модель маятника с нулевым равновесием в верхнем положении и управлением в виде горизонтально направленной силы. Непрерывная модель имеет вид

$$\ddot{\varphi}(t) = \sin \varphi(t) + u(t) \cos \varphi(t). \quad (5.2)$$

Зададим допустимые множества $(5\varphi)^2 + \dot{\varphi}^2 \leq 15^2$, $|u| \leq 1000$ и функционал вида (1.2) с $l(\varphi, \dot{\varphi}, u) = 10000\varphi^2 + 10\dot{\varphi}^2 + u^2$, $l_T = 0$. Дискретизируем систему с шагом 0,05 и выберем горизонт прогноза $T = 7$ тактов.

На рис. 5.2 методом главы 2 построена оценка области управляемости в виде совокупности прямоугольных ячеек. На рис. 5.3 изображена аппроксимация $\mathcal{F}_{\text{опт}}^1$ функции Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1$. На рис. 5.4 показана приближенная обратная связь $u_{\text{явн}}(x)$. Использование точного и приближенного регуляторов «предиктор-корректор» дает результаты, показанные на рис. 5.5.

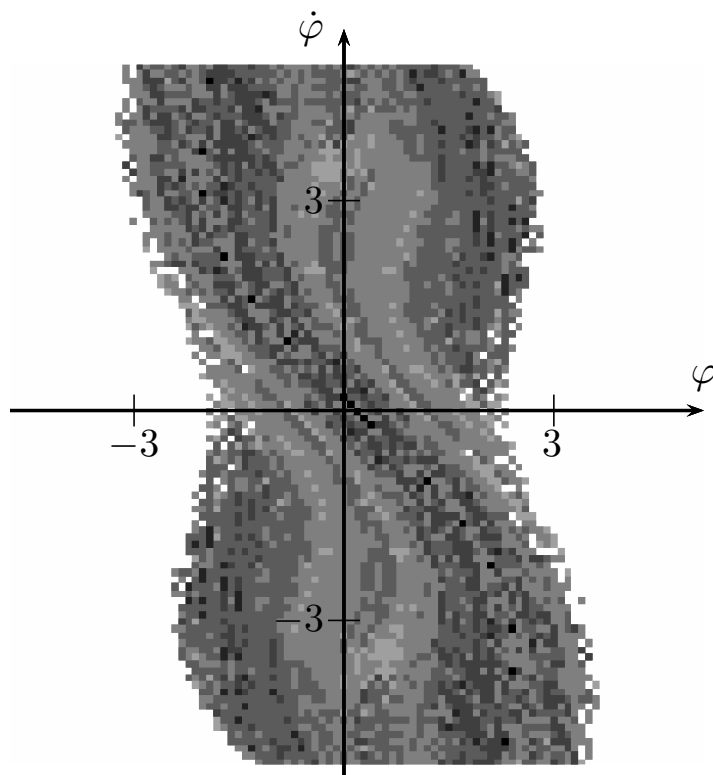


Рис. 5.2: Оценка области управляемости в примере (5.2). Более темные области управляемы за меньшее число тактов.

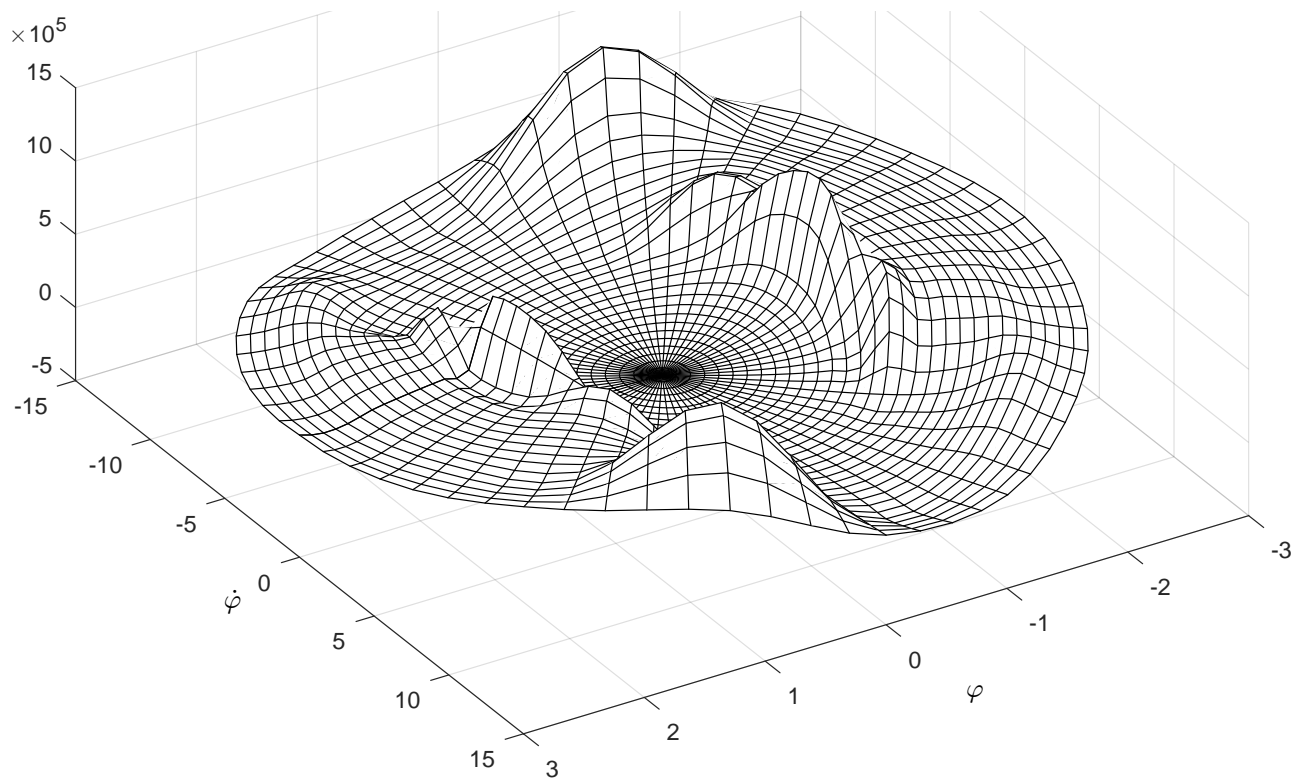


Рис. 5.3: Аппроксимация функции Беллмана $\mathcal{J}_{\text{опт}}^1$ в примере (5.2).

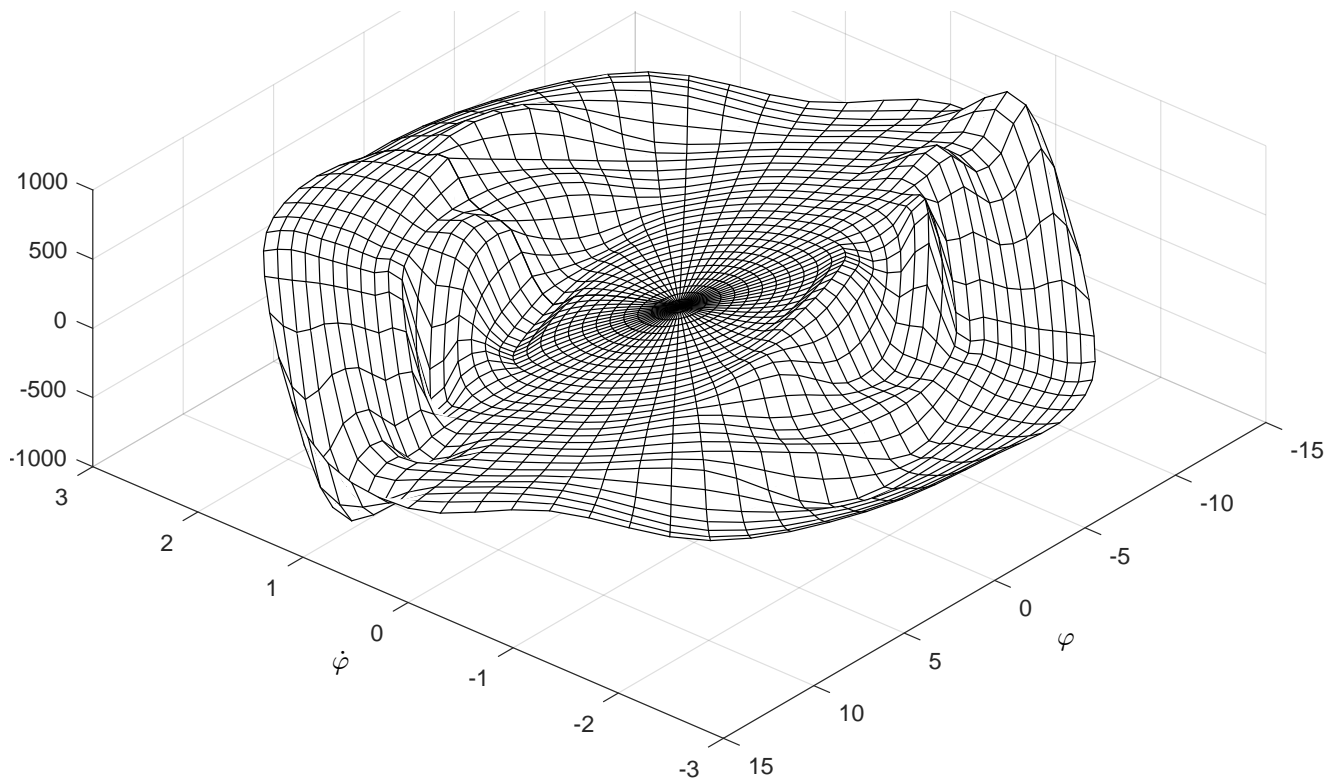


Рис. 5.4: Аппроксимация оптимальной обратной связи в примере (5.2).

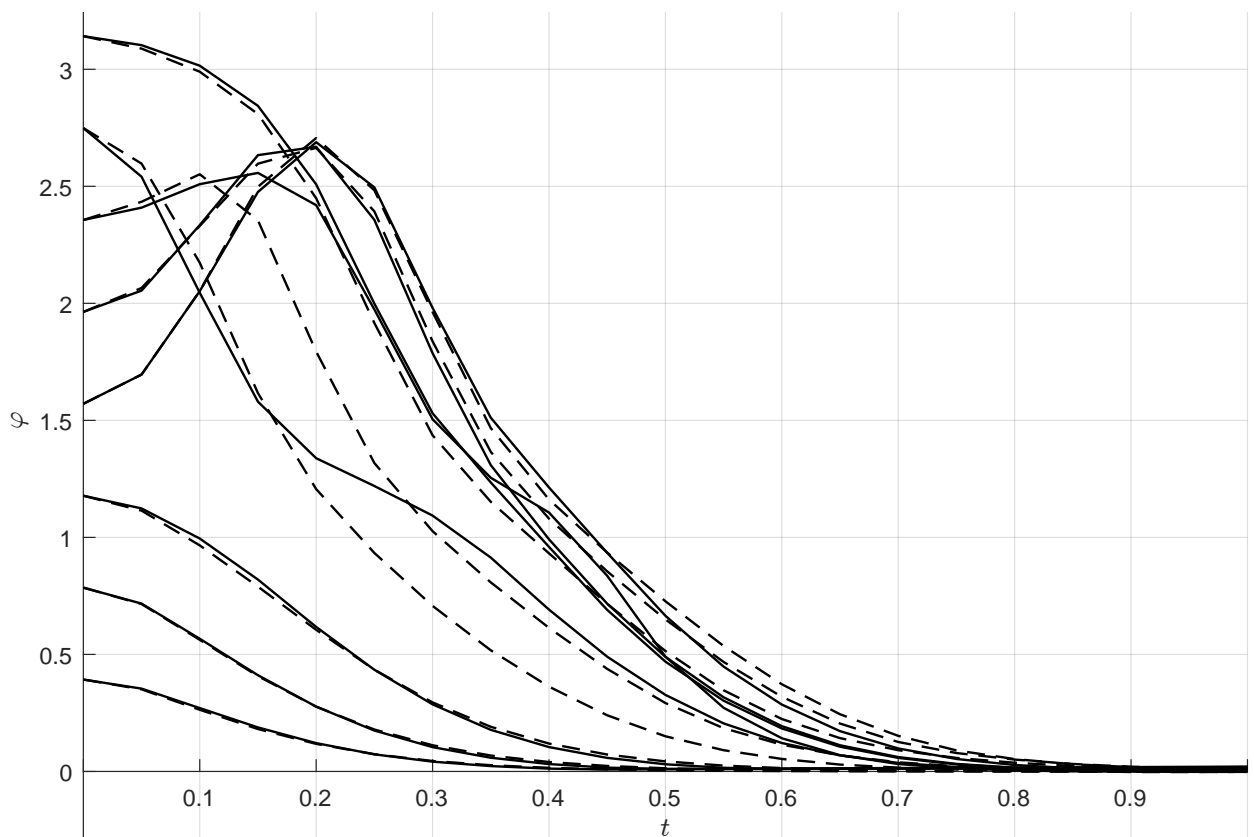


Рис. 5.5: Движение системы (5.2), замкнутой точным регулятором «предиктор-корректор» (пунктир) и приближенным (сплошная линия).

Заключение

Подведем итог полученным результатам.

В главе 2 дан способ построения оценки области управляемости регулятора с терминальным ограничением (теорема 2). Предложенный способ основан на том, что в системе с липшицевой правой частью образ многогранника при фиксированном управлении можно приблизить также многогранником. Это позволяет строить оценку области управляемости в виде многогранного множества, интегрируя систему в конечном множестве точек при убывании времени. Достоинством этого метода является возможность оценить управляемость системы в зависимости от горизонта прогноза. Благодаря этому можно выбирать допустимо малый горизонт прогноза, не нарушающий управляемость. С другой стороны, применимость метода может быть ограничена необходимостью разбиения пространства на большое число ячеек.

Также в главе 2 описан способ построения приближенного решения оптимизационной задачи (1.3) в виде кусочно заданной явной функции $u_{\text{явн}}(x)$ в области значений x , отделенных от нуля (теорема 4). Способ заключается в вычислении оптимального управления в узлах некоторой сетки и интерполировании обратной связи в остальных точках пространства. При этом непрерывная интерполяция, например, линейная, вообще говоря, неприемлема, т. к. оптимальная обратная связь может быть разрывна. Вместо этого даны допустимые границы, в которых может находиться $u_{\text{явн}}(x)$. Удовлетворяющая этим ограничениям обратная связь является стабилизирующей и ε -субоптимальной. Выбирая достаточно мелкую сетку, можно добиться сколь угодно малой оценки субоптимальности ε , а также того, что приращение функции Ляпунова в замкнутой управлению $u_{\text{явн}}(x)$ системе не более чем на сколь угодно малую константу больше, чем при использовании точного регулятора «предиктор-корректор».

В главе 3 рассмотрена линейно-квадратичная аппроксимация задачи (1.3) в окрестности нулевого положения равновесия. Это необходимо, т. к. метод главы 2 работоспособен только при x , отделенных от нуля. Оптимальное линейное управление $u = Kx$, полученное как решение линеаризованной задачи, оказывается первым приближением решения исходной задачи (1.3) при малых x . Оно является стабилизирующим и субоптимальным в окрестности нуля (теорема 8). Его недостаток — в том, что полученная оценка субоптимальности не зависит от окрестности линейного приближения. Как альтернатива линейному управлению, рассмотрен вариант приближенного динамического программирования с квадратичной аппроксимацией функции Беллмана. В этом случае также достигается устойчивость и субоптимальность (теорема 9), причем оценка субоптимальности теперь уменьшается с сокращением окрестности нуля, а скорость убывания функции Ляпунова стремится к ее скорости на движениях системы с точным регулятором. Это позволяет строить регулятор с наперед заданными оценками субоптимальности и скорости убывания функции Ляпунова. С другой стороны, преимуществом линейной обратной связи является ее простота.

В главе 4 в регулятор вводится вычислительное запаздывание. Предлагается рассматривать управление, которое складывается из двух компонент: низкочастотной u_1 с большим запаздыванием и высокочастотной u_2 с меньшим запаздыванием. Регулятор u_1 строит программную траекторию, а u_2 стабилизирует ее по линейному приближению, подавляя случайные возмущения. Для построения управления используется метод компенсации запаздывания. В системе линейного приближения, для которой метод компенсации уже известен в литературе, получена оценка робастности замкнутой системы по отношению к неточностям в модели, используемой для компенсации запаздывания (теорема 10). В нелинейном случае метод компенсации, интерпретируемый как предсказывающее преобразование состояния, обобщен на системы с несколькими запаздываниями. Это преобразование приводит систему к виду, аффинному по высокочастотному слагаемому u_2 , которое теперь не содержит запаздывания

(теорема 11). Дано достаточное условие существования управления u_2 , стабилизирующего линейное приближение системы в окрестности программной траектории (теорема 12).

Данная работа касается исключительно теоретического обоснования и анализа регулятора типа «предиктор-корректор». За рамками остаются такие задачи, как, например, оптимизация расхода памяти, затрачиваемой на хранение кусочно заданной обратной связи $u_{\text{явн}}(x)$, а также быстрое ее вычисление. Можно, однако, утверждать, что решение этих вопросов для систем небольшой размерности вполне реалистично (см. обзор литературы).

Следует отметить, что для всех оценок, о которых идет речь в настоящей работе, даны выражения или указан способ их получения. Эти оценки далеки от минимальных. Например, указанная в теореме 4 плотность сетки, по которой строится функция $u_{\text{явн}}(x)$, вероятно, чрезмерна. Тем не менее, благодаря тому, что эта плотность является достаточной, можно вычислить указанную в теореме аппроксимацию по предлагаемой сетке, но затем, исходя из вида функции $u_{\text{явн}}(x)$ в конкретной задаче, построить более экономную аппроксимацию. То же касается констант Липшица для функций Беллмана, приведенных в теореме 3. Их цель — обосновать аппроксимацию функции Беллмана с заданной точностью. Когда такая аппроксимация построена, во-первых, ее можно попытаться упростить, а во-вторых, по найденной аппроксимации можно уточнить константы Липшица и далее использовать именно их.

Список литературы

1. *Болтянский В. Г.* Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973. — 448 с.
2. *Веремей Е. И., Сотникова М. В.* Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2011. — № 1. — с. 117—134.
3. *Егоров А. И.* Уравнения Риккати. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 320 с.
4. *Жабко А. П., Котина Е. Д., Чиждова О. Н.* Дифференциальные уравнения и устойчивость. — СПб.: Лань, 2015. — 320 с.
5. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 496 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. — М.: Физматгиз, 1961. — 392 с.
7. *Пономарев А. А.* Аппроксимация управления в регуляторе «предиктор-корректор» // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции. — СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2015. — с. 329—330.
8. *Пономарев А. А.* О выборе параметров метода «предиктор-корректор» // Вестник Мордовского университета. — 2010. — № 4. — с. 124—132.
9. *Пономарев А. А.* О выборе параметров метода «предиктор-корректор» // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. А. С. Еремина, Н. В. Смирнова. — СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2011. — с. 52—57.

10. Пономарев А. А. Оценка области управляемости метода «предиктор-корректор» // Вестник Мордовского университета. — 2012. — № 2. — с. 92—98.
11. Пономарев А. А. Построение субоптимального управления в регуляторе «предиктор-корректор» // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 3. — с. 141—153.
12. Пономарев А. А. Построение субоптимальных управлений в регуляторе «предиктор-корректор» (МРС) // Процессы управления и устойчивость: Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Т. Е. Смирновой. — СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. — с. 53—58.
13. Пономарев А. А. Предиктор Смита в нелинейном случае // Процессы управления и устойчивость: Труды 41-й международной научной конференции аспирантов и студентов / под ред. Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. — СПб.: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2010. — с. 47—52.
14. Пономарев А. А. Приближенная реализация регулятора «предиктор-корректор» в нелинейном случае // Процессы управления и устойчивость. Труды 46-й международной научной конференции аспирантов и студентов. 2(18) / под ред. Н. В. Смирнова. — СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2015. — с. 84—89.
15. Пономарев А. А. Функционал Ляпунова для управляемой линейной системы с компенсатором запаздывания // Процессы управления и устойчивость. Труды 45-й международной научной конференции аспирантов и студентов. 1(17) / под ред. Н. В. Смирнова. — СПб.: Издательский Дом Федоровой Г.В., 2014. — с. 26—30.

16. *Пропой А. И.* О принципе максимума для дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1965. — т. 26, № 7. — с. 1177—1187.
17. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1985. — 630 с.
18. *Сотникова М. В.* Вопросы устойчивости движений в системах управления с прогнозирующими моделями // Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2012. — т. 8, № 1. — с. 72—79.
19. *Сотникова М. В.* Синтез робастных алгоритмов управления с прогнозирующими моделями // Системы управления и информационные технологии. — 2012. — т. 50, № 4. — с. 99—102.
20. Adaptive control of a class of time-delay systems / S. Evesque [et al.] // J. Dyn. Sys., Meas., Control. — 2003. — Vol. 125, no. 2. — Pp. 186—193.
21. *Artstein Z.* Linear systems with delayed control: a reduction // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1982. — Vol. AC-27, no. 4. — Pp. 869—879.
22. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. — 1983. — Vol. 7, no. 11. — Pp. 1163—1173.
23. Automotive model predictive control: models, methods and applications / ed. by L. del Re [et al.]. — London: Springer-Verlag, 2010. — 290 pp.
24. *Bekiaris-Liberis N., Krstic M.* Lyapunov stability of linear predictor feedback for distributed input delays // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2011. — Vol. 56, no. 3. — Pp. 655—660.
25. *Bemporad A., Morari M.* Robust model predictive control: A survey // Robustness in Identification and Control. — 1999. — Vol. 245. — Pp. 207—226.

26. *Bresch-Pietri D., Chauvin J., Petit N.* Adaptive control scheme for uncertain time-delay systems // *Automatica*. — 2012. — Vol. 48, no. 8. — Pp. 1536–1552.
27. *Bresch-Pietri D., Krstic M.* Delay-adaptive predictor feedback for systems with unknown long actuator delay // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2010. — Vol. 55, no. 9. — Pp. 2106–2112.
28. *Camacho E. F., Bordons C.* *Model Predictive Control*. — London: Springer-Verlag, 2007. — 280 pp.
29. *Chen W.-H., Ballance D. J., O'Reilly J.* Model predictive control of nonlinear systems: Computational burden and stability // *IEE Proc.-Control Theory Appl.* — 2000. — Vol. 147, no. 4. — Pp. 387–394.
30. Constrained model predictive control: stability and optimality / D. Q. Mayne [et al.] // *Automatica*. — 2000. — Vol. 36, no. 6. — Pp. 789–814.
31. Delay Compensation in Model Predictive Current Control of a Three-Phase Inverter / P. Cortes [et al.] // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. — 2012. — Vol. 59, no. 2. — Pp. 1323–1325.
32. *Doležal J.* Existence of optimal solutions in general discrete systems // *Kybernetika*. — 1975. — Vol. 11, no. 4. — Pp. 301–312.
33. *Findeisen R., Allgöwer F.* Computational delay in nonlinear model predictive control // *Proceedings of International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*. — 2004. — Pp. 427–432.
34. *Goodwin G. C., Medoli A. M.* Scenario based closed loop model predictive control with applications to emergency vehicle scheduling // *International Journal of Control*. — 2013. — Vol. 86, no. 8. — Pp. 1338–1348.
35. *Grancharova A., Johansen T. A.* *Explicit nonlinear model predictive control: theory and applications*. — Springer, 2012. — 231 pp.

36. *Houska B., Ferreau H. J., Diehl M.* An auto-generated real-time iteration algorithm for nonlinear MPC in the microsecond range // *Automatica*. — 2011. — Vol. 47, no. 10. — Pp. 2279–2285.
37. Inherent robustness properties of quasi-infinite horizon MPC / S. Yu [et al.] // *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*. — 2011.
38. *Jankovic M.* Forwarding, backstepping, and finite spectrum assignment for time delay systems // *Automatica*. — 2009. — Vol. 45, no. 1. — Pp. 2–9.
39. *Johansen T. A.* Approximate explicit receding horizon control of constrained nonlinear systems // *Automatica*. — 2004. — Vol. 40, no. 2. — Pp. 293–300.
40. *Johansen T. A.* Toward dependable embedded model predictive control // *IEEE Systems Journal*. — 2014. — to be published.
41. *Johansen T. A., Grancharova A.* Approximate explicit constrained linear model predictive control via orthogonal search tree // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2003. — Vol. 48, no. 5. — Pp. 810–815.
42. *Karafyllis I., Krstic M.* Delay-robustness of linear predictor feedback without restriction on delay rate // *Automatica*. — 2013. — Vol. 49, no. 6. — Pp. 1761–1767.
43. *Keerthi S. S., Gilbert E. G.* An existence theorem for discrete-time infinite-horizon optimal control problems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1985. — Vol. AC-30, no. 9. — Pp. 907–909.
44. *Kharitonov V. L.* An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay // *Automatica*. — 2014. — Vol. 50, no. 1. — Pp. 211–217.
45. *Kharitonov V. L.* Predictor based stabilization of neutral type systems with input delay // *Automatica*. — 2015. — Vol. 52, no. 2. — Pp. 125–134.

46. *Kouvaritakis B., Cannon M., Rossiter J. A.* Who needs QP for linear MPC anyway? // *Automatica*. — 2002. — Vol. 38, no. 5. — Pp. 879–884.
47. *Krstic M.* Input Delay Compensation for Forward Complete and Strict-Feedforward Nonlinear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2010. — Vol. 55, no. 2. — Pp. 287–303.
48. *Krstic M.* Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: inverse optimality and robustness to delay mismatch // *Automatica*. — 2008. — Vol. 4, no. 11. — Pp. 2930–2935.
49. *Kwon W. H., Pearson A. E.* Feedback stabilization of linear systems with delayed control. // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1980. — Vol. AC-25, no. 2. — Pp. 266–269.
50. *Maciejowski J. M.* Predictive control: with constraints. — London: Prentice Hall, 2002. — 331 pp.
51. *Manitius A., Olbrot A. W.* Finite spectrum assignment problem for systems with delays // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1979. — Vol. AC-24, no. 4. — Pp. 541–552.
52. *Mayne D. Q.* Model predictive control: Recent developments and future promise // *Automatica*. — 2014. — Vol. 50, no. 12. — Pp. 2967–2986.
53. *Mazenc F., Niculescu S.-I., Krstic M.* Lyapunov–Krasovskii functionals and application to input delay compensation for linear time-invariant systems // *Automatica*. — 2012. — Vol. 48, no. 7. — Pp. 1317–1323.
54. *Melchor-Aguilar D., Kharitonov V., Lozano R.* Stability conditions for integral delay systems // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. — 2010. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 1–15.
55. *Michiels W., Niculescu S.-I.* On the delay sensitivity of Smith Predictors // *Int. J. Syst. Sci.* — 2003. — Vol. 34, no. 8–9. — Pp. 543–551.

56. Model predictive heuristic control: applications to industrial processes / J. Richalet [et al.] // Automatica. — 1978. — Vol. 14, no. 5. — Pp. 413–428.
57. *Mondié S., Dambrine M., Santos O.* Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability // Kybernetika. — 2002. — Vol. 38, no. 5. — Pp. 541–551.
58. *Mondié S., Michiels W.* Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2003. — Vol. 48, no. 12. — Pp. 2207–2212.
59. Nonlinear model predictive control: towards new challenging applications / ed. by L. Magni, D. M. Raimondo, F. Allgöwer. — Berlin: Springer, 2009. — 576 pp.
60. Output feedback model predictive control: a probabilistic approach / M. Farina [et al.] // Proceedings of 19th IFAC World Congress. Vol. 47. — 2014. — Pp. 7461–7466.
61. *Palmor Z.* Stability properties of Smith dead-time compensator controller // Int. J. Control. — 1980. — Vol. 32, no. 6. — Pp. 937–949.
62. *Pannocchia G., Rawlings J. B., Wright S. J.* Conditions under which suboptimal nonlinear MPC is inherently robust // Systems & Control Letters. — 2011. — Vol. 60. — Pp. 747–755.
63. *Ponomarev A.* Nonlinear predictor feedback for input-affine systems with distributed input delays // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2016 (to be published).
64. *Ponomarev A.* Performance testing of an approximate model predictive control algorithm // Proceedings of 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA) / ed. by E. I. Veremey. — Saint Petersburg, 2014. — P. 140.

65. *Ponomarev A.* Reduction-based robustness analysis of linear predictor feedback for distributed input delays // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2016. — Vol. 61, no. 2. — Pp. 468–472.
66. *Qin S. J., Badgwell T. A.* A survey of industrial model predictive control technology // Control Engineering Practice. — 2003. — Vol. 11, no. 7. — Pp. 733–764.
67. *Reble M., Allgöwer F.* Unconstrained model predictive control and suboptimality estimates for nonlinear continuous-time systems // Automatica. — 2012. — Vol. 48, no. 8. — Pp. 1812–1817.
68. *Richalet J.* Industrial applications of model based predictive control // Automatica. — 1993. — Vol. 29. — Pp. 1251–1274.
69. *Rossiter J. A.* Model-based predictive control: a practical approach. — CRC press, 2013. — 318 pp.
70. *Rubagotti M.* Stabilizing Linear Model Predictive Control Under Inexact Numerical Optimization // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2014. — Vol. 59, no. 6. — Pp. 1660–1666.
71. *Scokaert P. O. M., Mayne D. Q., Rawlings J. B.* Suboptimal model predictive control (feasibility implies stability) // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1999. — Vol. 44, no. 3. — Pp. 648–654.
72. *Smith O. J. M.* A controller to overcome dead time // ISA Journal. — 1959. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 28–33.
73. *Smith O. J. M.* Closer control of loops with dead time // Chemical Engineering Progress. — 1957. — Vol. 53, no. 5. — Pp. 217–219.
74. *Sotnikova M.* Plasma stabilization based on model predictive control // International journal of modern physics A. — 2009. — Vol. 24, no. 5. — Pp. 999–1008.

75. *Sotnikova M.* Ship dynamics control using predictive models // Proceedings of the 9th IFAC Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft (MCMC 2012). — 2012. — Pp. 250–255.
76. *Tøndel P., Johansen T. A., Bemporad A.* An algorithm for multi-parametric quadratic programming and explicit MPC solutions // Automatica. — 2003. — Vol. 39, no. 3. — Pp. 489–497.
77. Ultra-fast stabilizing model predictive control via canonical piecewise affine approximations / A. Bemporad [et al.] // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2011. — Vol. 56, no. 12. — Pp. 2883–2897.
78. *Veremey E., Sotnikova M.* Plasma Stabilization System Design on the Base of Model Predictive Control // Model Predictive Control / ed. by T. Zheng. — Sciyo, 2010. — Pp. 199–222.
79. *Wang Y., Boyd S.* Fast Model Predictive Control Using Online Optimization // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2010. — Vol. 18, no. 2. — Pp. 267–278.