На правах рукописи

Sign

Красников Кирилл Евгеньевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭТИЧЕСКИХ НОРМ ПОВЕДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ ПОДХОДОВ В ГОСУДАРСТВЕННОМ УПРАВЛЕНИИ, ЭКОНОМИКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Федеральном Государственном Бюджетном Образовательном Учреждении Высшего Образования «МИРЭА - Российский Технологический Университет» на кафедре вычичлительной техники института Информационных технологий.

Научный руководитель: доктор физико-математическиз наук, профессор
Смольяков Эдуард Римович

Официальные оппоненты: **Фамилия Имя Отчество**,
научная степень, звание,
Основное место работы,
должность

Фамилия Имя Отчество,
научная степень, звание,
Основное место работы,
должность

Ведущая организация:

Защита состоится DD mmmmmmmm YYYY г. в XX часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.224.01 при Институте сисемного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Название библиотеки.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 117312, г. Москва, проспект 60-летия Октября, д. 9, ученому секретарю диссертационного совета Д 24.1.224.01.

Автореферат разослан DD mmmmmmmm2022 года.
Телефон для справок: +7 (908) 109-74-58.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.224.01,
канд. физ.-мат. наук, доц.
Смирнов Иван Валентинович

Фамилия Имя Отчество

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Один из принципов экономической теории, заложенный ещё одним из её основоположников – шотландским экономистом и философом-этиком Адамом Смитом, заключается в том, что человеком движет прежде всего мотив максимизации личного благосостояния.

Появился даже специальный термин, описывающий собирательный образ индивида, действующего в соответствии с данным принципом, – *homo economicus* (*человек рациональный* или *человек эгоистичный*).

Однако так ли реалистична эта устоявшаяся и широко используемая поведенческая модель?

Ряд экспериментальных исследований, проведённых разными исследователями, заставляет в этом усомниться.

В частности, речь идёт об игровых социальных экспериментах «Ультиматум»[1] и «Диктатор»[2], в которых исследуется, как первый участник испытания распорядится полученной от экспериментатора суммой средств: оставит всё себе иди поделится со вторым участником.

Согласно модели *homo economicus* первый участник эксперимента должен оставить всё себе. Однако в действительности, как показывают экспериментальные наблюдения, люди ведут себя иначе: в среднем не менее 20% полученных средств первый испытуемый передаёт второму.

Таким образом, модель *homo economicus* выглядит слишком упрощённой, грубой и не учитывающей всей сложности организации человеческой натуры.

Следовательно, **требуется новая модель, которая бы лучше отражала особенности принятия решения индивидами, учитывая в том числе морально-этическую составляющую человеческой личности**.

В этой связи кажется весьма актуальным появление в XX веке такой дисциплины, как *поведенческая экономика* (*bahavioral economics*), изучающая какое влияние оказывает на принятие решений индивидами психологические, морально-этические, когнитивные и культурные факторы.

А поскольку одним из наиболее эффективных инструментов, позволяющих исследовать процесс принятия решения индивидами, является математическая теория игр, то именно средствами данного раздела прикладной математики целесообразно воспользоваться для решения данной задачи.

Целью данной работы является построить математическую теоретико-игровую модель принятия решения индивидами, основанную на раз-

[1] *Güth, W.* An experimental analysis of ultimatum bargaining [текст] / W. Güth, R. Schmittberger, B. Schwarze // J. Econ. Behav. Organ. 1982. т. 13. с. 367—388.

[2] Fairness in simple bargaining experiments [текст] / R. Forsythe [и др.] // Game Econ. Behav. 1994. т. l6. с. 347—369.

личных социально-этических принципах. А также исследовать, какое влияние оказывают на развитие сообщества преобладающие среди его представителей мировоззренческие принципы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Построить теоретико-игровую модель альтруистического (просоциального) поведения, а также сформулировать теоремы существования конфликтных равновесий в зависимости от значения параметра модели, характеризующего степень предпочтения интересов сообщества личным интересам каждым из участников.
2. Исследовать теоретико-игровую модель поведения, основанную на императиве Канта. На её основе построить модель обучения, предполагающую, что значения параметров, влияющих на процесс принятия решения индивидами, изменяются с течением времени в следствии проведения в сообществе просветительской, образовательной деятельности.
3. Исследовать динамическую теоретико-игровую экономическую модель взаимодействия двух регионов для установления влияния кооперации на получаемые участниками результаты.
4. Разработать программные средства для численного вычисления конфликтных равновесий для широкого класса задач.

Научная новизна:

1. При исследовании модели альтруистического (просоциального) поведения была выдвинута гипотеза о неубывании уровня общего (кооперативного) дохода при увеличении параметра системы, характеризующего уровень предпочтения общественных интересов личным среди представителей сообщества (коэффициента α).
2. Впервые для той же модели доказано существование различных конфликтных равновесий в точке достижения максимума кооперативного дохода, при определённом уровне описанного выше коэффициента (α) среди представителей сообщества.
3. Впервые показана необходимость обучения для перехода на более эффективные поведенческие нормы в пороговой модели бинарного коллективного поведения.
4. Выполнено оригинальное исследование влияния кооперации на уровень совместного дохода в динамической модели взаимодействия двух экономик.
5. Впервые реализованы программные средства для численного поиска конфликтных равновесий, разработанных Э.Р. Смольяковым.

Теоретическая значимость. Работа вносит вклад в область применения теории игр к таким, не совсем обычным для неё сферам, как социальные и гуманитарные науки, продолжая исследования, начатые рядом зарубежных и отечественных авторов[3].

Практическая значимость Работа может быть использована для выстраивания государственной политики в таких сферах, как образование, воспитание и культура.

Благодаря приведённой программной реализации численных методов поиска конфликтных равновесий, работа также может быть использована для решения большого класса конфликтных задач.

Методология и методы исследования. В основу методологии исследования положены теоретико-игровая модель сообщества и теория поиска равновесий для конфликтных задач, разработанная Э.Р. Смольяковым[4]. Также для исследования используются пороговая модель бинарного коллективного поведения, предложенная М. Грановеттером и развитая рядом современных авторов[5].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод моделирования просоциального поведения и теоремы существования конфликтных равновесий в точке максимума кооперативного дохода.
2. Использование модели обучения в задаче коллективного бинарного поведения.
3. Доказательство эффекта синергии (увеличения производительности) при повышении уровня кооперации в задаче взаимодействия двух экономик.
4. Программная реализация методов поиска конфликтных равновесий.

Достоверность полученных результатов обеспечивается точностью используемых математических методов, а также программной реализацией, позволяющей проверить найденные аналитическими методами решения конфликтных задач.

Апробация работы. Основные результаты, полученные автором, были представлены на следующих конференциях:

– Национальная научно-практическая конференция «Фундаментальные, поисковые, прикладные исследования и инновационные про-

---

[3] *Harsanyi, J. C.* Game and decision theoretic models in ethics [текст] / J. C. Harsanyi. 01.1992; *Alfano, M.* Ethics, Morality, and Game Theory [текст] / M. Alfano, H. Rusch, M. Uhl // Games. 2017; *Зак, Ф. Л.* О некоторых моделях альтруистического поведения [текст] / Ф. Л. Зак // Журнал Новой экономической ассоциации. 2021. т. 1, № 49. с. 12—52.

[4] *Смольяков, Э. Р.* Методы решения конфликтных задач [текст] / Э. Р. Смольяков. М. : МГУ, 2010.

[5] *Бреер, В. В.* Теоретико-игровые модели бинарного коллективного поведения [текст] / В. В. Бреер // Математическая теория игр и ее приложения. Петрозаводск: Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН. 2020. т. 12, № 2. с. 3—19.

екты» (2022, РТУ МИРЭА, очный доклад с публикацией тезисов [4]);
- Международная конференция «Формальная философия» (2022, НИУ ВШЭ, очный доклад);
- XIII научно-практическая конференция «Современные информационные технологии в управлении и образовании» (2014, ФГУП НИИ «Восход», доклад с публикацией тезисов [5]);

Также результаты работ автора были представлены на следующих научных семинарах и заседаниях Научно-технических советов:
- Общемосковский научный семинар «Теория управления организационными системами» (24 июня, 8 июля 2021 г. и 3 марта 2022 г., Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, онлайн);
- Заседания Научно-технического совета Московского института радиоэлектроники и автоматики (РТУ МИРЭА) от 25 мая, 27 сентября и 14 декабря 2022 г.;

Работы автора, включая результаты диссертации, были представлены на соискание следующих премий и медалей за достижения в науке:
- Премия правительства Москвы молодым учёным за 2022 год;
- Конкурс на соискание медалей Российской академии наук за 2022 год с премиями для молодых ученых;
- Конкурс молодых ученых в области наук об образовании на соискание медали «Молодым ученым за успехи в науке» Российской академии образования (РАО) в 2022 году. Решением президиума РАО было принято постановление о награждении автора благодарственным письмом за активное участие в конкурсе ;

Личный вклад. Все положения, выносимые на защиту, получены автором лично.

Вид функций полезности $U_i(q)$ участников, учитывающих интересы других (модель игровой задачи Γ^α, рассматриваемая в главе 1), был доработан с учётом пожеланий и предложений д.ф.-м.н. проф. Э.Р. Смольякова, под чьим научным руководством выполнена работа.

Также дифференциальная теоретико-игровая модель взаимодействия двух экономик, рассматриваемая в главе 3 , была впервые сформулирована Э.Р. Смольяковым[6]. Однако рассматриваемый в настоящей диссертации частный случай данной модели, предполагающий наличие кооперации между участниками, был сформулирован и решён автором.

[6] *Смольяков, В. Э.* Решение дифференциальной игры, моделирующей отношения между странами [текст] / В. Э. Смольяков, Э. Р. Смольяков // Труды ИСА РАН. 2013. т. 3. с. 71—77; *Смольяков, Э. Р.* Универсальная система управления параметрическим семейством дифференциальных игр [текст] / Э. Р. Смольяков, В. А. Ефрюшкина // Дифференциальные уравнения. 2019. т. 55, № 1. с. 117—122.

Теоретико-игровая модель рациональности, основанной на императиве Канта, рассматриваемая в главе 2 , была предложена Й. Вибул и И. Алджер[7]. Однако модель обучения, рассматриваемая в последнем разделе данной главы была разработана автором самостоятельно.

Часть результатов главы 4 , в особенности те, что касаются реализации алгоритмов поиска конфликтных равновесий с помощью технологии программирования на процессорах видеокарты (GPU) CUDA, были получены автором в рамках дипломной работы в пору его обучения на факультете Вычислительной математики и кибернетики (ВМиК) МГУ им. М.В. Ломоносова под научным руководством к.ф.-м.н. научного сотрудника кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления (НДСиПУ) Борескова А.В.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 1 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 3 — в тезисах докладов.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава [1] посвящена моделированию с помощью теоретико-игровых подходов рациональности, основанной на так называемом альтруистическом (коллективистском или просоциальном) поведении. Также в главе формулируется используемая в работе система конфликтных равновесий и доказывается ряд теорем, устанавливающих условия равновесности точки максимума кооперативного дохода в зависимости от некоторых параметров модели.

В **первом разделе** данной главы производится обзор математических методов моделирования социально-этических норм поведения с помощью теоретико-игровых подходов.

Одна из первых попыток смоделировать морально-этические нормы поведения с помощью теоретико-игровых подходов была предпринята в 1955 году профессором Брайсвайтом в прочитанной им в Кембридже лек-

[7] *Alger, I.* Strategic Behavior of Moralists and Altruists [текст] / I. Alger, J. W. Weibull // Games. 2017. Ethics, Morality, and Game Theory.

ции[8] и с тех пор регулярно появляется в работах разных исследователей, занимающихся теорией игр.

Довольно интересные идеи, помогающие в том числе и объяснить отклонения от чисто прагматической модели *homo economicus*, наблюдаемые в экспериментальных исследованиях «Ультиматум» и «Диктатора», приводятся в обзоре Ф.Л. Зака[9].

Ф.Л. Зак рассматривает работу J.C. Cox с соавторами, в которой вводится понятие *моральный ориентир* как одной из допустимых стратегий поведения, к которой стремится приблизиться каждый из участников при прочих равных факторах.

Например, применительно к эксперименту «Диктатор» можно сделать предположение, что первый из участников испытывает моральный дискомфорт, когда оставляет себе сумму большую половины от той, что ему передал экспериментатор. Соответственно, чем сильнее он отклоняется от некого справедливого, по его мнению, распределения доверенной суммы, тем большие угрызения совести испытывает. Именно точку, соответствующую справедливому дележу средств, можно принять за «моральный ориентир», как элемент множества допустимых стратегий, к которому стремятся участники.

Данную идея авторам упомянутой работы удалось весьма удачно формализовать в терминах теории рационального выбора, благодаря чему построенная теоретическая модель дала куда лучший прогноз полученных позднее экспериментальных наблюдений, нежели модель, основанная на принципе принятия решений *homo economicus*.

Однако, стоит иметь ввиду, что наиболее распространённым приёмом для моделирования различных видов принятия решения индивидами (рациональностей) с помощью теоретико-игровых подходов стала модификация первоначальных функций полезности, на которых задана исходная задача.

Например, нобелевский лауреат Дж. Харсаньи в своей работе «Модели теории игр и принятия решений в этике» утверждает, что этическое (или моральное) поведение основано на понятии коллективной рациональности, которая выходит за рамки традиционной для теории игр концепции максимизации каждым участником сугубо индивидуального или кооперативного дохода:

«Теорию рационального поведения в социальной среде можно разделить на теорию игр и этику. Теория игр имеет дело с двумя или более индивидами, часто имеющими очень разные интересы, которые пытают-

---

[8] *Braithwaite, R. B.* Theory of Games as a Tool for the Moral Philosopher. An Inaugural Lecture Delivered in Cambridge on 2 December 1954 [текст] / R. B. Braithwaite. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1955.

[9] *Зак, Ф. Л.* О некоторых моделях альтруистического поведения [текст] / Ф. Л. Зак // Журнал Новой экономической ассоциации. 2021. т. 1, № 49. с. 12—52.

ся максимизировать свои собственные (эгоистичные или бескорыстные) интересы рациональным образом против всех других индивидов, которые также пытаются максимизировать свои собственные интересы (эгоистичные или бескорыстные)»[10].

А в работе «Утилитаризм правил и теория принятия решений»[11] Дж. Харсаньи использует основополагающие концепции утилитаризма для построения более реалистичной модели принятия решений индивидуумами в социуме. Утилитаризм – направление в этике, согласно которому моральная или нравственная ценность любого поступка определяется совокупной *полезностью* или пользой, которую этот поступок приносит всем индивидуумам, на которых данное действие оказывает влияние[12]. В этой связи в теоретико-игровой интерпретации Дж. Харсаньи вводит ***функцию социальной полезности***, значение которой для каждого участника в каждой точке (каждой стратегии поведения), определяется средним значением полезностей всех участников: $W_i(s) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i(s)$.

В настоящее время идеи Дж. Харсаньи были существенно развиты в работах многих современных специалистов по поведенческой экономике (*behavioral economics*) и теории игр[13].

Отдельного внимания заслуживает так называемая эволюционная теория игр, являющаяся приложением теории игр к исследованию развития популяций в биологии, а также в социологии. Особенностью этой теории является то, что в ней, как правило, рассматриваются повторяющиеся игры, и, соответственно, каждая стратегия оценивается по тому, насколько она является эволюционно устойчивой, то есть способной пройти проверку временем. Например, применительно к биологии различные стратегии представляют собой определяющие поведение особей генетические черты, которые наследуют потомки от своих пращуров. Именно с позиций эволюционной теории игр удалось обосновать нередко наблюдаемые в природе, особенно у социальных видов, примеры «джентельменского» и даже альтруистического поведения, то есть поведения на благо вида, что никак не

[10] *Harsanyi, J. C.* Game and decision theoretic models in ethics [текст] / J. C. Harsanyi. 01.1992.

[11] *Harsanyi, J. C.* Rule utilitarianism and decision theory [текст] / J. C. Harsanyi // Erkenntnis. 1977. т. 11. с. 25—53.

[12] *Гусейнов, А. А.* История этических учений: Учебник для вузов [текст] / А. А. Гусейнов. Москва : Академический проект, 2015.

[13] *Alfano, M.* Ethics, Morality, and Game Theory [текст] / M. Alfano, H. Rusch, M. Uhl // Games. 2017; *Alger, I.* Strategic Behavior of Moralists and Altruists [текст] / I. Alger, J. W. Weibull // Games. 2017. Ethics, Morality, and Game Theory; *Kranz, S.* Moral norms in a partly compliant society [текст] / S. Kranz // Games and Economic Behavior. 2010. янв. т. 68, № 1. с. 255—274.

согласовалось с дарвиновским предположением о том, что естественный отбор происходит на индивидуальном уровне[14].

В этой связи особого интереса заслуживает книга М. Риддли «Происхождение альтруизма и добродетели: от инстинктов к сотрудничеству»[15], представляющая собой научно-популярный обзор результатов, полученных специалистами по теории игр в области моделирования этических принципов. В частности автор рассказывает о турнире компьютерных программ, объявленном в 1979 г. Робертом Аксельродом. Программы соревновались в многократно повторяющейся (200 раз) Дилемме заключённого. Победительницей объявлялась программа, набравшая больше всего очков по результатам всех 200 партий.

Дело в том, что если игра происходит один раз, то побеждает стратегия, суть которой применительно к известной постановке задачи о Дилемме заключённого выражена девизом *«Всегда предавай»*.

Однако всё меняется, когда игры повторяются многократно и, например, в следующей партии противник может ответить на оппоненту за обиду. Действительно, на турнире Аксельрода победила стратегия разработанная А. Рапопортом, получившая название «Око за око»: *«начинать с сотрудничества, а затем делать то, что делал оппонент на предыдущем ходу»*[16].

Однако и у данной стратегии поведения нашёлся недостаток, вызванный тем, что если один из участников, например, случайно, «предаст», то второй, руководствующийся «Око за око» поступит по также в следующем раунде, и так оба игрока окажутся в ситуации вечного наказания друг друга.

Выход из этой ситуации нашли австрийские математики К. Зигмунд и М. Новак, предложившие поведенческую модель, которую они называли «Великодушие». Данная стратегия идентична «Око за око» за исключением того, что допускает прощение и возвращение к сотрудничеству после предательств с вероятностью около 30%[17].

Однако исследователи обнаружили, что и у этой стратегии есть недостатки. Так, она проигрывает стратегии «Всегда сотрудничай», которая, в свою очередь, проигрывает «Всегда предавай», которая, как упоминалось выше, оказывается слабее «Око за око».

---

[14] *Smith, J. M.* Evolution and the Theory of Games [текст] / J. M. Smith. Cambridge University Press, 1982; *Newton, J.* Evolutionary game theory: A renaissance [текст] / J. Newton // Games. 2018. т. 9.

[15] *Ридли, М.* Происхождение альтруизма и добродетели: от инстинктов к сотрудничеству [текст] / М. Ридли. Москва : Эксмо, 2013. с. 272.

[16] *Axelrod, R.* The evolution of cooperation [текст] / R. Axelrod. New York : Basic Books, 1984.

[17] *Nowak, M. A.* The arithmetics of mutual help [текст] / M. A. Nowak, R. M. May, K. Sigmund // Scientific American. 1995. т. 272. с. 50—55.

Выход из данного замкнутого круга исследователи нашли в модели поведения, названной ими в честь знаменитого русского физиолога И.П. Павлова. Данная модель основана на принципе рефлекса: *«Если стратегия привела к победе на предыдущем шаге - используй её снова, если к поражению - поменяй на другую»*.

Однако и эта стратеги имеет недостатки. В частности, как обнаружил Рапопорт, она проигрывает стратегии «Всегда предавай». Поэтому необходимо, чтобы первоначально индивиды, руководствующиеся принципом «Око за око», сделали своё дело, очистив игровое пространство от непорядочных «Всегда предавай», и только после этого склонный к извлечению уроков из своих ошибок «Павлов» занимает доминирующее положение.

У приведённых выше заключений есть один существенный недостаток: они распространяются только на конфликтные задачи с двумя участниками, как это предполагается постановкой задачи «Дилемма заключённого». Если же предположить, что участников больше, то добиться положительного эффекта от сотрудничества добиться будет всё труднее и труднее, поскольку в случае выбора хотя бы одним из участников стратегии «предательство», он получает всё, а остальные ничего.

Одним из возможных выходов из данной ситуации предложил философ Ф. Китчер. Он разработал компьютерную социальную модель, «населённую» четырьмя типами стратегов: *«разборчивыми альтруистами (играли только с теми, кто никогда не предавал их раньше), усердными предателями (всегда пытались предать), одиночками (уклонялись от любых встреч) и избирательными предателями (были готовы играть с теми, кто никогда не предавал раньше, чтобы затем самим вероломно предать их)»*[18].

Как показало исследование Китчера[19], именно представители первого вида («разборчивые альтруисты») со временем начинали доминировать в игровом поле, а лучшим наказанием для непорядочных представителей второго и четвёртого классов было то, что с ними просто со временем никто не хотел иметь дело, даже не давая им таким образом возможности совершить поступок – ни хороший, ни плохой.

В отечественной научной мысли можно привести в пример работу Ю.Б. Гермейера и И.А. Вателя «Игры с иерархическим вектором интересов»[20]. Рассматривая задачу распределения ресурсов между личными и общественными нуждами, авторы вводят понятие «эгоизма» по отношению к нуждам данного сообщества в том случае, если участник предпочитает

[18] *Ридли, М.* Происхождение альтруизма и добродетели: от инстинктов к сотрудничеству [текст] / М. Ридли. Москва : Эксмо, 2013. с. 272, стр. 99.

[19] *Kitcher, P.* The evolution of human altruism [текст] / P. Kitcher // Journal of Philosophy. 1993. т. 90. с. 497—516.

[20] *Гермейер, Ю. Б.* Игры с иерархическим вектором интересов [текст] / Ю. Б. Гермейер, И. А. Ватель // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. т. 3. с. 54—69.

тратить все имеющиеся в его распоряжении средства исключительно на личные цели, игнорируя при этом интересы сообщества.

Ряд идей, предложенных Ю.Б. Гермейером и И.А. Вателем, нашли своё отражение в работах, посвящённых модели согласования общих и частных интересов (СОЧИ-модель)[21]. В этой модели рассматривается двухуровневое сообщество и исследуется вопрос распределения ресурсов между частными и общественными нуждами. При этом вводятся классы «индивидуалистов» и «коллективистов», на которые можно поделить участников задачи в зависимости от того на личные или общественно полезные цели они предпочитают расходовать свои ресурсы.

Довольно большую известность приобрели и работы В.А. Лефевра, в частности книга «Алгебра совести»[22]. В данной работе автором моделируется процесс принятия решения человеком в целом и элемент рефлексии или, иначе говоря, анализ субъектом самого себя и других участников ситуации. Данная модель строится на основе булевых функций, в следствии чего множество исходов сводится, по сути, к двум: благоприятному и неблагоприятному. Также и множество допустимых каждым участников стратегий бинарно и представляет собой выбор между «добром» и «злом».

Особого внимания заслуживает разработанная В.И. Жуковским, К.С. Вайсманом, и др. концепция равновесия по Бержу, предлагаемая авторами как аналог «эгоистического» равновесия по Нэшу. Авторы вводят новый тип игрового равновесия, отличающегося от классического равновесия по Нэшу тем, что, например, экстремум функции полезности (функции выигрыша) i-го участника ищется не на множестве его допустимых стратегий, а на произведении допустимых стратегий всех остальных участников, что предлагается авторами интерпретировать таким образом, что *«каждый игрок направляет все свои усилия, чтобы увеличить выигрыши остальных, «забывая о себе», о собственных интересах»*[23].

В одной из работ А.А. Васина[24] методами эволюционной теории игр предпринимается попытка объяснить появление феномена альтруистического поведения в биологических популяциях эволюционной устойчивостью кооперации среди родственных индивидов. При этом отмечается, что в реальности такое поведение получает весьма ограниченное распростране-

[21] *Горбанева, О. И.* Модели сочетания общих и частных интересов независимых агентов [текст] / О. И. Горбанева // Математическая Теория Игр и её Приложения. 2018. т. 10, № 4. с. 3—15.

[22] *Лефевр В. А.* Алгебра совести [текст] / Лефевр В. А. Москва : "Когнито Центр", 2003.

[23] *Жуковский, В.* Математические основы Золотого правила нравственности: Теория нового альтруистического равновесия в противоположность "эгоистическому"равновесию по Нэшу [текст] / В. Жуковский, А. Гусейнов, К. Кудрявцев. Москва : ЛЕНАНД, 2016. с. 280.

[24] *Васин, А. А.* “Эволюционная теория игр и экономика. Часть II.” Устойчивость равновесий. Особенности эволюции социального поведения [текст] / А. А. Васин // Журнал Новой экономической ассоциации. 2009. т. 4. с. 10—27.

ние ввиду его неустойчивости к внедрению в сообщество «мутантов-эгоистов» – индивидов, которые пользуются преимуществами того, что другие участники пытаются с ними сотрудничать, однако сами при этом выбирают стратегии поведения исходя исключительно из собственных интересов.

В работах Ф.Л. Зака рассматривается модель альтруистического поведения[25], предложенная впервые К. Саито[26], также рассматривается модель принятия решения, основанная на понятии *кантовского равновесия*[27].

В 2017 году в специализирующемся на теории игр журнале «Games» (Базель, Швейцария) вышел специальный выпуск под заголовком «Этика, Мораль и Теория Игр»[28], в котором были собраны статьи разных современных авторов, объединённые общей тематикой моделирования морально-этических норм и их влияния на принятие решений участниками игровой задачи.

Особенно хочется отметить работу «Стратегии поведения моралистов и альтруистов»[29], в которой помимо уже отмечавшихся нами типов поведения, основанных на индивидуализме и коллективизме, вводится также третий тип участников, которые руководствуются при выборе своей стратегии поведения императивом Канта, согласно которому *«человек должен стремиться к тому, чтобы максима его поступка могла стать частью всеобщего законодательства»*[30] или же Золотым правилом нравственности: *«как ты хочешь, чтобы с тобой поступали люди, так и ты поступай с ними»*[31]. Суть такого поведения применительно к теоретико-игровой модели сводится к тому, что прежде чем выбрать свою стратегию каждый участник допускает, что с определённой вероятностью все участники выберут ту же стратегию, и уже, исходя из этого допущения, принимается решение, как именно следует поступить.

По аналогии с термином *homo economicus – человек рациональный*, которым именуется первый тип участников-индивидуалистов, руководствующихся исключительно интересом максимизировать свой личный доход, игроки третьего класса именуются авторами *homo moralis–человек нравственный*.

---

[25] *Зак, Ф. Л.* Психологические игры в теории выбора. II. Стыд, сожаление, эгоизм и альтруизм [текст] / Ф. Л. Зак // Журнал Новой экономической ассоциации. 2014. т. 22, № 2. с. 12—40.

[26] *Saito, K.* Impure Altruism and Impure Selfishness [текст] / K. Saito // California Institute of Technology. 2014. т. 5.

[27] *Зак, Ф. Л.* О некоторых моделях альтруистического поведения [текст] / Ф. Л. Зак // Журнал Новой экономической ассоциации. 2021. т. 1, № 49. с. 12—52.

[28] *Alfano, M.* Ethics, Morality, and Game Theory [текст] / M. Alfano, H. Rusch, M. Uhl // Games. 2017.

[29] *Alger, I.* Strategic Behavior of Moralists and Altruists [текст] / I. Alger, J. W. Weibull // Games. 2017. Ethics, Morality, and Game Theory.

[30] *Гусейнов, А. А.* История этических учений: Учебник для вузов [текст] / А. А. Гусейнов. Москва : Академический проект, 2015.

[31] *Гусейнов, А. А.* «Золотое правило» нравственности [текст] / А. А. Гусейнов // Вестник Московского университета. Философия. 1972. т. 4.

Этот тип поведения может быть весьма успешно использован для моделирования некоторых социальных, экономических и других процессов, поскольку он в ряде случаев более реалистично описывает процесс принятия решения человеком, нежели классическая модель максимизации(минимизации) собственной платёжной функции.

Во **втором разделе** главы осуществляется общая постановка теоретико-игровой модели N участников, предполагающая, что все участники выбирают свои стратегии из одного и того же множества допустимых стратегий.

Допущение 1.1. *Пусть Q– метрическое пространство, G– компактное множество: $G \triangleq Q^N = \underbrace{Q \times \ldots \times Q}_{N}$ и пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q)$, $i = \overline{1,N}$, $q = (q_1, \ldots ,q_N) \in G$.*

Пусть q_i– стратегия i-го игрока, $q_i \in Q$, $q^i \triangleq (q_1, \ldots ,q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots , q_N)$ – стратегии остальных $N-1$ игроков при фиксированной стратегии q_i i-го игрока, $q^i \in Q^{N-1}$. $J_i(q)$ – *платёжная функция (функционал)* игрока i, которая определяет размер некого блага или ресурса, который получает i-й участник, при выборе им стратегии q_i и при выборе стратегии q^i остальными участниками. При этом функции $J_i(q), i = \overline{1,N}$ предполагается рассматривать как *трансферабельные*, то есть предполагающие возможность любого деления и распределения дохода между игроками.

Пусть $G(q_i)$ и $G(q^i)$ – сечения (срезы) множества G при фиксированной стратегии i-го игрока (q_i) или всех игроков кроме i-го (обстановке q^i), соответственно.

Пусть $J(q) \triangleq \sum_{k=1}^{N} J_k(q)$ – суммарная платёжная функция всех игроков, $J^i(q) \triangleq \sum_{k \neq i} J_k(q)$ – суммарная платёжная функция всех игроков кроме i-го.

Далее вводится классическая постановка задачи теории игр, моделирующая поведение, основанное на преследовании исключительно личных интересов.

Чтобы отразить тот факт, что каждый игрок максимизирует лишь собственную платёжную функцию и отличить её от модели, определяемой в следующих пунктах, будем называть её также моделью участников-«индивидуалистов» или же моделью *homo economicus*, как она называется в некоторых работах[32].

Определение 1.1. *Игровую задачу, удовлетворяющую допущению 1.1, будем называть классической игрой (или игрой Γ), если каждый из игроков, выбирая стратегию $q_i \in Q$, стремится обеспечить максимум своей платёжной функции $J_i(q_i,q^i)$.*

[32] *Alger, I.* Strategic Behavior of Moralists and Altruists [текст] / I. Alger, J. W. Weibull // Games. 2017. Ethics, Morality, and Game Theory.

В качестве альтернативы рассматривается класс игровых задач, в которых предполагается, что каждый игрок с некоторым весовым коэффициентом учитывает интересы других участников задачи. Данный факт моделируется переходом от первоначально поставленной задачи, характеризующейся набором платёжных функций $\left\{J_i, i = \overline{1,N}\right\} = \{J_i\}$, к вспомогательной задаче, определяемой параметрическим семейством функций полезности$\{U_i(J_k,\alpha)\} = \{U_i\}$.

Определение 1.2. *Игровую задачу, удовлетворяющую допущению 1.1, будем называть игрой Γ^α (или игрой в классе участников-«альтруистов»), если каждый из игроков стремится обеспечить максимум своей функции полезности U_i, которая выражается через платёжную функцию данного игрока $J_i(q)$ и суммарную платёжную функцию остальных игроков $J^i(q)$ следующим образом:*

$$U_i(q) = (1-\alpha)J_i(q) + \frac{\alpha}{N-1}J^i(q), q \in G, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in [0,\frac{N-1}{N}], i = \overline{1,N}. \quad (1)$$

Термин «альтруизм» (от лат. *alter* - другой) использован для обозначения данного типа игровых задач с целью подчеркнуть особый вид рациональности или логики принятия решений игроками данного класса: они учитывают с некоторым весовым коэффициентом интересы других участников. Подобный тип рациональности называется *коллективизмом*[33], а такой вид поведения принято называть *просоциальным.*

Если воспользоваться заменой: $\beta \triangleq \alpha \frac{N}{N-1}$, то поскольку $\alpha \in [0,\frac{N-1}{N}]$, следовательно $\beta \in [0,1]$, и функцию полезности $U_i(q)$ можно записать в следующем виде:

$$U_i(q) = (1-\beta)J_i(q) + \frac{\beta}{N}J(q), \beta \in [0,1]. \quad (2)$$

В такой форме модель, определяемую функциями полезности (2), можно рассматривать как *игру на общественное благо* (*public goods game*), где функции $\beta J_i(q)$ определяют вклад i-го участника, который он делает на некоторые общественно значимые нужды. Слагаемое $(1-\beta)J_i(q)$ определяет ту часть ресурса, которую он оставляет для собственных нужд, а сумма $\frac{\beta}{N}J(q)$ определяет то, что он получает от общества.

В **третьем разделе** первой главы определяется система конфликтных равновесий.

Прежде всего даётся определение классического равновесия по Нэшу.

[33] *Гермейер, Ю. Б.* Игры с иерархическим вектором интересов [текст] / Ю. Б. Гермейер, И. А. Ватель // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. т. 3. с. 54—69.

Определение 1.3. *Ситуацию $q^* \in G$ назовём равновесием по Нэшу ($\overline{C}^N$-экстремальной), если*

$$\max_{q_i \in G(q^{i*})} J_i(q^{i*},q_i) = J_i(q^*), \quad i=\overline{1,N}, \text{ где } q^i = (q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_N) \tag{3}$$

Максимум в выражении (3) берётся по всем допустимым стратегиям i-го участника q_i из сечения множества G с зафиксированными в равновесной ситуации q^* стратегиями остальных участников (обстановке) q^{i*}.

Однако данное равновесие обладает рядом недостатков: во-первых, оно существует далеко не всегда и, во-вторых, даже когда существует, может определять далеко не самую выгодную для всех участников задачи ситуацию (как, например, в известной задаче «дилемма заключённого»). Поэтому, помимо этого ставшего классическим равновесия в работе используется также система конфликтных равновесий, разработанная Э.Р. Смольяковым[34].

Данная система представляет собой набор усиливающихся понятий равновесия для конфликтных задач. Базовое равновесие данной системы определяется следующим образом:

Определение 1.4. *Ситуацию (точку) $q^* \in G$ назовём A_i-экстремальной, если или $G(q^{i*}) = q_i^*$, или каждой стратегии $q_i \in G\left(q^{i*}\right) \backslash q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну ответную стратегию $\hat{q}^i = \hat{q}^i < q_i >$ остальных $N-1$ игроков, такую, чтобы*

$$J_i(\hat{q}^i,q_i) \leq J_i(q^i). \tag{4}$$

Обозначая через A_i множество всех A_i-экстремальных ситуаций, ситуацию (точку) $q^* \in G$ назовём ситуацией симметричного слабого активного равновесия или, короче, A-равновесием, если $q^* \in A_1 \cap \cdots \cap A_N \triangleq A$

Запись $\hat{q}^i < q_i >$, обозначает, что остальные участники выбирают свою ответную стратегию $\hat{q}^i$, как реакцию на выбор стратегии, i-м участником в том случае, если он решит отклониться от равновесной стратегии q_i^*, выбрав другую стратегию $q_i \in G(q^{i*}) \backslash q_i^*$.

Данное равновесие существует во всяком случае в любой ϵ-аппроксимации, $\forall \epsilon > 0$, в любых игровых задачах[35], удовлетворяющих довольно общим допущениям 1.1. Поскольку при численном решении в реальных задачах равновесные ситуации ищутся приближённо, то для приложений неважно, окажется ли ситуация q^* точным A-равновесием

[34] *Смольяков, Э. Р.* Теория поиска конфликтных равновесий [текст] / Э. Р. Смольяков. М. : Эдиториал УРСС, 2005.

[35] *Смольяков, Э. Р.* Методы решения конфликтных задач [текст] / Э. Р. Смольяков. М. : МГУ, 2010.

или же равновесной с допустимой точностью ϵ, где ϵ – сколь угодно малое число. Таким образом введение данного равновесия решает проблему существования решения игровой задачи.

Однако, как правило, A-равновесные ситуации оказываются неединственными. Поэтому следующие понятия определяют естественные усиления (сужения) множества A-равновесий.

Определение 1.5. *Ситуацию (точку) $q^* \in A_i$ назовём B_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию*

$$\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*,q^i) = J^i(q^*) \tag{5}$$

Назовём ситуацию $q^* \in G$ B-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N B_i \triangleq B$, где B_i – множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Равновесие, задаваемое следующим определением, является одним из возможных усилений B-равновесия.

Определение 1.6. *Ситуацию (точку) $q^* \in A_i$ назовём C_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию*

$$\mathop{max}_{q^i \in G(q_i^*)} J^i(q_i^*,q^i) = J^i(q^*) \tag{6}$$

Ситуацию $q^* \in G$ назовём C-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N C_i \triangleq C$, где C_i – множество всех C_i-экстремальных ситуаций.

Далее определяются ещё несколько определений, усиливающих соответственно B и C-равновесия.

Определение 1.7. *Ситуацию $q^* \in B_i$ назовём $\overline{D}_i$-экстремальной, если она удовлетворяет условию*

$$\mathop{max}_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*)$$

или (то же самое только в развёрнутом виде) - условию

$$\mathop{max}_{q_i \in Pr_{Q_i} A_i} J_i(Arg \mathop{max}_{q^i \in A_i(q_i)} J^i(q_i,q^i)) = J_i(q^*) \tag{7}$$

и назовём её $\overline{D}$-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^N \overline{D}_i \triangleq \overline{D}$.

Данное понятие равновесия усиливает введённое выше понятие C-равновесия.

Аналогичный смысл имеет даваемое ниже определение D-экстремальных ситуаций, с той лишь разницей, что выбор i-м игроком производится не на множестве B_i, а на множестве C_i.

Определение 1.8. *Ситуацию $q^* \in C_i$ назовём D_i-экстремальной, если она удовлетворяет условию*

$$\max_{q \in C_i} J_i(q) = J_i(q^*)$$

и назовём её D-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} D_i \triangleq D$.

В **четвёртом разделе** первой главы сравниваются определённая выше система конфликтных равновесий с рядом других систем, в частности равновесием в безопасных стратегиях (РБС), разработанной М.Б. Искаковым[36] и соавторами, а также концепцией *двойного наилучшего ответа*, описываемая в работе Н.И. Базенкова[37].

В **пятом разделе** формулируется и доказывается ряд теорем о существования конфликтных равновесий в точке максимума кооперативного дохода.

В первой из теорем утверждается существование равновесия по Нэшу в указанной точке в игре Γ^α (определен. 1.2), моделирующей просоциальное (или альтруистическое) поведение участников, при достижении определённого уровня коэффициента α, отражающего степень предпочтения участниками общественных интересов личным:

Теорема 1.1. *Пусть в игровой задаче, удовлетворяющей допущению 1.1, в ситуации q^* достигается максимум суммарной платёжной функции. Тогда $\exists \ \alpha_{NE} \in \mathbb{R}, \alpha_{NE} \in [0, \frac{N-1}{N}]$:*

1) В игре $\Gamma^{\alpha_{NE}}$ ситуация q^* будет равновесием по Нэшу ($\overline{C}^N$-экстремальной).

2) $\forall \alpha \in [\alpha_{NE}, \frac{N-1}{N}]$ в игровой задаче класса Γ^α ситуация q^* также будет равновесной по Нэшу.

В приложении A аналогичные утверждения сформулированы и доказаны и для других определённых выше конфликтных равновесий (A, C и D).

Также формулируется предположение о неубывании уровня кооперативного дохода в точке сильнейшего из существующих в игре равновесий при росте значения коэффициента α:

Гипотеза 1.1. *В конфликтной задаче Γ^α, удовлетворяющей допущениям 1.1 и определению 1.2, в точке сильнейшего из существующих игровых равновесий (1.4-1.7) значение функции кооперативного дохода $J(q)$ не убывает с ростом значения коэффициента $\alpha \in [0, \frac{N-1}{N}]$.*

[36] *Искаков, М. Б.* Равновесие в безопасных стратегиях [текст] / М. Б. Искаков // Автоматика и телемеханика. 2005. т. 3. с. 139—153.

[37] *Базенков, Н. И.* Динамика двойных наилучших ответов в игре формирования топологии беспроводной ad hoc сети [текст] / Н. И. Базенков // Автоматика и телемеханика. 2014. т. 75, № 6. с. 1155—1171.

В третьей главе данное предположение подтверждается на примере решения дифференциальной игры, моделирующей отношения между странами.

В **шестом разделе** строится модель гетерогенного (неоднородного) сообщества, предполагающая не одинаковое для всех участников значение коэффициента α (под которым также понимается мера вклада i-го участника в общественные блага), а различные, определяемые долей, вносимой i-м участником, в значение функции общего (кооперативного) дохода в точке достижения его максимума или в точке сильнейшего игрового равновесия. Данная модель тождественна системе прогрессивного налога, введённого в некоторых странах.

Во **второй главе** [2] на примере задачи бинарного коллективного выбора исследуется другой тип рациональности (принятия решений) участниками, основанный на императиве Канта *«поступай так, чтобы максима твоей воли могла бы быть всеобщим законом»*[38] или близком ему по смыслу золотом правиле нравственности, присутствующее в той или иной форме во многих этических учениях, и которое может быть сформулировано следующим образом: *«Поступай по отношению к другим так, как ты хотел бы, чтобы они поступали по отношению к тебе»*[39].

В работе «Стратегии поведения альтруистов и моралистов»[40] данный принцип предлагается моделировать следующим образом. Пусть i-й участник предполагает, что каждый из оставшихся игроков с вероятностью $k_i \in [0,1]$ (который можно воспринимать, как уровень морали данного участника) выберет ту же стратегию, что и он, и с вероятностью $(1 - k_i)$ – отличную стратегию. Таким образом, каждый участник, выбирая стратегию $q_i \in Q$, получает известную из теории вероятностей схему Бернулли из $N - 1$ испытания (соответствующих оставшимся игрокам), и с двумя исходами для j-го испытания, $j = \overline{1,N-1}$: j-м участником выбрана стратегия $q_j = q_i$ или же выбрана другая стратегия ($q_j \neq q_i$). При этом вместо первоначальных платёжных функций игра проводится на функциях полезности, которые для каждого игрока представляют собой математические ожидания описанного биноминального распределения.

Определение 2.1. *Игровую задачу, удовлетворяющую допущению 1.1, будем называть игрой Γ^{hm} (игрой в классе участников-«моралистов», homo moralis), если каждый из игроков вместо своей первоначальной платёжной функции J_i стремится обеспечить максимум функции полезности W_i, определяемой как математическое ожидание случайной величи-*

[38] *Кант, И.* Основы метафизики нравственности. Сочинения в шести томах (с рецензией на книгу И.Шульца. 1783). 1785 [текст] / И. Кант. М. : «Мысль», 1965. с. 211—310.

[39] *Гусейнов, А. А.* «Золотое правило» нравственности [текст] / А. А. Гусейнов // Вестник Московского университета. Философия. 1972. т. 4.

[40] *Alger, I.* Strategic Behavior of Moralists and Altruists [текст] / I. Alger, J. W. Weibull // Games. 2017. Ethics, Morality, and Game Theory.

ны $J_i(q_i,\tilde{q}^i)$*:*

$$W_i(q_i,q^i) = \mathbb{E}_{k_i}[J_i(q_i,\tilde{q}^i)], q_i \in Q, k_i \in \mathbb{R}, k_i \in [0,1], i = \overline{1,N}, \tag{8}$$

где $\tilde{q}^i$ *- случайный* $(N-1)$*-мерный вектор, принимающий значения из* Q^{N-1} *и имеющий следующее распределение: с вероятностью* $k_i^m(1-k_i)^{N-m-1}$ *ровно* $m \in \{0,\ldots,N-1\}$ *из его компонент принимают значение равное* q_i*, а остальные компоненты сохраняют свои первоначальные значения;* $\mathbb{E}_{k_i}$ *- математическое ожидание случайной величины* $J_i(q_i,\tilde{q}^i)$*, где с вероятностью* $k_i \in [0,1]$ *каждая из* $N-1$ *компонент вектора* $\tilde{q}^i$ *принимает значение, равное выбранной* i*-м участником стратегии* q_i*.*

Например, для игры трёх лиц функция полезности (8) приобретает вид:

$$W_i(q_i,q_j,q_k) = (1-k_i)^2 J_i(q_i,q_j,q_k) + k_i(1-k_i)J_i(q_i,q_i,q_k)+$$
$$+k_i(1-k_i)J_i(q_i,q_j,q_i) + k_i^2 J_i(q_i,q_i,q_i).$$

Из приведённого примера видно, что если $k_i = 1$, то $W_i(q_i,q_j,q_k) \equiv J_i(q_i,q_i,q_i)$, и данная модель принятия решения фактически будет идентичной предложенной впервые Дж. Дж. Лаффоном[41] и развитой впоследствии Дж. Рёмером[42] модели *кантовского равновесия*. При кантовской оптимизации игроки спрашивают себя: «*Если я отклонюсь от своей стратегии и все другие участники аналогичным образом отклонятся от своих стратегий, предпочту ли я новое состояние?*»[43].

Во **втором разделе** второй главы осуществляется постановка задачи коллективного бинарного поведения следующего вида: пусть N участников некоторого сообщества независимо друг от друга делают выбор между двумя нормами поведения (стратегиями) A и B. Причём норма A является более эффективной, чем норма B в том смысле, что если все индивидуумы перейдут на норму A, то благосостояние (в широком смысле этого слова, отражаемое целевой функцией $J_i(q)$) каждого участника будет выше, чем в случае, когда все выбирают B. Однако норма B является общепринятой, поэтому в начале рассматриваемой социальной модели все участники выбирают норму B, а норма A является для них новой.

Пусть $q_i \in Q = \{0,1\}$ – выбор i-го участника, где $q_i = 1$ означает, что выбрана норма A, а $q_i = 0$, что выбрана B. Если i-й участник выбирает норму A, и n_A других участников выбирают эту же норму, то платёжная

[41] *Laffont, J.-J.* Macroeconomic Constraints, Economic Efficiency and Ethics: an Introduction to Kantian Economics [текст] / J.-J. Laffont // Economica. 1975. т. 42, № 168. с. 430—437.

[42] *Roemer, J.* Kantian Optimization: A Microfoundation for Cooperation [текст] / J. Roemer // Journal of Public Economics. 2014. апр. т. 127.

[43] *Зак, Ф. Л.* О некоторых моделях альтруистического поведения [текст] / Ф. Л. Зак // Журнал Новой экономической ассоциации. 2021. т. 1, № 49. с. 12—52.

функция $J_i(q)$ i-го участника принимает значение $a \cdot n_A$. Если же он выбирает B и n_B других участников поступает также, то значение его функции полезности равно $b \cdot n_B$. Будем полагать, что $0 < b < a$.

Для определённого нами класса игроков Γ^{hm} функции полезности, максимум которых стремятся доставить игроки данного класса, в соответствии с определением 2.1 имеют вид математического ожидания: $W_i(q) = \mathbb{E}_{k_i}[J_i(q_i,\tilde{q}^i)]$, где $\tilde{q}^i$ – случайный вектор, распределение которого таково, что с вероятностью $k_i^m(1-k_i)^{N-m-1}$ ровно $m \in \{0,\ldots,N-1\}$ из его компонент принимают значение равное q_i, а остальные компоненты сохраняют свои первоначальные значения. Это распределение похоже на широко известное из теории вероятностей биноминальное распределение $B_{k_i}^{N-1}$, однако отличается от него условием, что $(N-m-1)$ компонент должны сохранить свои первоначальные значения (то есть значения в точке $q \in G$, в которой определяется значение функции $W_i(q)$).

Таким образом значение функции $W_i(q_i,q^i)$ определяется выражением:

$$W_i(q_i,q^i) = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\begin{array}{c} N-1 \\ m \end{array} \right) k_i^m(1-k_i)^{N-m-1} \cdot \Big(\overbrace{aq_i \cdot (mq_i + \frac{N-1-m}{N-1} \cdot \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} q_j)}^{I}$$

$$\underbrace{+b(1-q_i)\big(m(1-q_j) + \frac{N-1-m}{N-1} \cdot \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N} (1-q_j)\big)}_{II} \Big), \qquad (9)$$

где выражение I отвечает случаю, когда $q_i = 1$, а II случаю, когда $q_i = 0$. Слагаемые с коэффициентом $\frac{N-1-m}{N-1}$ отражают положение о том, что остальные игроки, кроме тех m, стратегии которые считаются равными q_i, сохраняют свои первоначальные стратегии.

Если все игроки выбирают стратегию A, то i-й участник получает $(n-1)a$, также выбирая A, а в случае, если он решает выбрать B, его функция полезности равняется:

$$W_i(0,q^i = (1,\ldots,1)) = b \sum_{m=0}^{N-1} \left(\begin{array}{c} N-1 \\ m \end{array} \right) k_i^m(1-k_i)^{N-m-1} m. \qquad (10)$$

Выражение (10) можно переписать в виде:

$$W_i(0,q^i = (1,\ldots,1)) = b(N-1)k_i \qquad (11)$$

Если же все игроки выбирают B, то поступая как все, i-й участник получает $W_i(0,\ldots,0) = (N-1)b$, а выбирая в одиночку A, он получает

$$W_i(1,q^i = (0,\ldots,0)) = a\sum_{m=0}^{N-1}\left(\begin{array}{c} N-1 \\ m \end{array}\right) k_i^m(1-k_i)^{N-m-1}m = a(N-1)k_i. \tag{12}$$

Далее в **третьем разделе** второй главы вводится понятие порогового значения для модели бинарного коллективного поведения, разработанное впервые в работах американского социолога М. Грановеттера[44] и экономиста Т. Шеллинга[45].

Под пороговым значением θ_i i-го участника понимается наименьшая доля от общего количества других участников сообщества, перешедших на норму A, необходимую для того, чтобы i-й участник также сделал выбор в пользу нормы A. Например, i-й участник переходит на норму A, если он полагает, что её выберет половина сообщества, а j-й, если треть. Тогда $\theta_i = \frac{1}{2}$, а $\theta_j = \frac{1}{3}$.

Далее вычисляется значение функции полезности $W_i(0,q^i)$ i-го участника при условии, что он выберет норму B, и значение той же функции при условии, что он выберет более благоприятную норму A: $W_i(1,q^i)$.

Далее, решая неравенство $W_i(1,q^i) > W_i(0,q^i)$, можно найти условие на отношение минимального количества выбравших новую норму A участников $\tilde{n}$ к их общему количеству $N-1$, что и будет являться интересующем нас выражением порогового значения θ_i через параметр k_i, определяющий вероятность того события, что другие участники выберут ту же стратегию, что и i-й, в описанной выше схеме Бернулли:

$$\theta_i \overset{\Delta}{=} \frac{\tilde{n}}{N-1} \geq \frac{b-k_i a}{(a+b)(1-k_i)}, \tag{13}$$

Далее для моделирования неоднородности сообщества относительно коэффициента k_i и соответствующего ему порогового значения θ_i каждого индивидуума, рассмотрим функцию распределения $F(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$, значения которой равны доле от общего количества тех представителей сообщества, пороговое значение θ_i которых не превосходит x.

Если пороговое значение θ у некоторого представителя сообщества принять за случайную величину, принимающую значения на интервале $(-\infty, \frac{b}{a+b})$, то функцию $F(x)$ можно понимать также как функцию распределения данной случайной величины: $F(x) = \mathbf{P}(\theta < x)$, где $\mathbf{P}$ – соответствующая вероятность, равная доле от общего количества тех представителей сообщества, пороговое значение θ которых не превосходит x.

---

[44] *Granovetter, M.* Threshold models of interpersonal effects in consumer demand [текст] / M. Granovetter, R. Soong // Journal of Economic Behavior and Organization. 1986. март. т. 7, № 1. с. 83—99.

[45] *Schelling, T.* Dynamic Models of Segregation [текст] / T. Schelling // Journal of Mathematical Sociology. 1971. т. 1. с. 143—186.

Для численного определения параметров распределения порогового значения, в соответствии с которым представители сообщества готовы перейти на новую норму поведения, могут быть использованы различные статистические методы. Например, может быть использована статистика по участию граждан в общественных организациях по охране окружающей среды, бескорыстное донорство, участие в различного рода спасательных службах и т.д.[46]

Если рассматриваемая социальная модель предполагает достаточно большое количество участников, то для дальнейших рассуждений в качестве функции распределения $F(x)$ пороговых значений для участников сообщества можно выбрать функцию нормального распределения (Гаусса, см. рис. 1) с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, где μ и σ – параметры, характеризующие сообщество: $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(u-\mu)^2/(2\sigma^2)} du$.

Однако следует отметить, что в литературе имеются примеры использования и других функций распределения пороговых значений. В частности, В.В. Бреером в некоторых работах[47] предлагается использовать β-распределение.

В следующем разделе (**четвёртом**) рассматривается динамический процесс перехода представителей сообщества на некотором временном промежутке $[t_0, T]$. Сначала рассматривается модель с дискретным шагом Δt, а затем Δt устремляется к нулю. Пусть $N_A(t)$– количество представителей сообщества, выбирающих норму A в момент времени t. По условию задачи $N_A(t_0) = 0$.

Тогда $\frac{N_A(t)}{N-1}$ задаёт долю перешедших на A в момент t. А в соответствии с определением функции $F(x)$: $F(\frac{N_A(t)}{N-1})$ – есть доля от общего количества индивидуумов, пороговое значение у которых не превосходит $\frac{N_A(t)}{N-1}$. Поэтому количество перешедших на норму A в некий следующий момент определяется отношением: $N_A(t+\Delta t) = F(\frac{N_A(t)}{N-1}) \cdot N$. Если полагать, что сообщество достаточно большое, то $N - 1 \approx N$. Обозначив через $x(t) \triangleq \frac{N_A(t)}{N}$ долю перешедших на норму A участников в момент времени t, получим соотношение:

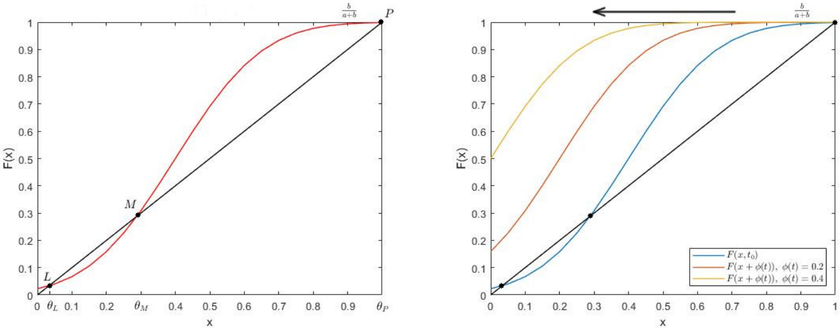
$$x(t + \Delta t) = F(x(t)) \tag{14}$$

Далее показывается, что неподвижные точки x отображения F: $x = F(x)$, то есть те, в которых график функции $y = F(x)$ пересечёт график $y = x$ сверху (точки L и P на рис. 1a), будут являться точками

[46] *Соболевская, М. К.* Анализ показателей моральной статистики России за 2000–2015 гг. [текст] / М. К. Соболевская, С. А. Стрекалова // Молодой ученый. 2016. т. 20 (124). с. 419—421. URL: https://moluch.ru/archive/124/34342/.

[47] *Бреер, В. В.* Модели толерантного порогового поведения (от Т. Шеллинга к М. Грановеттеру) [текст] / В. В. Бреер // Проблемы управления. 2016. т. 1.

устойчивого равновесия, а если пересечение произойдёт снизу, то равновесие окажется неустойчивым (точка M на рис. 1а).



а) б)

Рис. 1 — График функций распределения F(x) порогового значения θ_i (слева) и точки устойчивого и неустойчивого равновесия (справа).

Если функция распределения F такова, что существует неподвижная точка, являющаяся устойчивым равновесием, со значением меньшим единицы, то сообщество никогда полностью не перейдёт на более эффективную норму, «застряв» в окрестности ближайшей к нулю точки устойчивого равновесия.

Однако в **шестом разделе** второй главы показывается, что если в обществе проводится некоторая просветительская (образовательная) деятельность, в результате которой повышается уровень морали в обществе, отражаемый коэффициентом k_i и, соответственно, понижается пороговое значение θ_i каждого участника (поскольку $\frac{\partial \theta_i}{\partial k_i} < 0$), то общество в целом способно перейти на более совершенную норму поведения.

Действительно, пусть процесс обучения, в результате которого пороговое значение θ_i для i-го участника уменьшается со временем, можно представить в следующем виде: $\theta_i(t) = \theta_i(t_0) - \phi(t)$, $\phi(t) > 0$, $\frac{\partial \phi}{\partial t} > 0$, $t \in [t_0, T]$. Для простоты будем полагать, что функция $\phi(t)$ одна и та же для всех представителей сообщества.

В статическом случае мы определяли F как функцию распределения вероятности случайной величины θ, определяемой, как значение пороговой величины некоторого случайно выбранного представителя сообщества: $F \triangleq \mathbb{P}(\theta \equiv \theta(t_0) < x)$, где $\mathbb{P}$ - вероятностная мера для соответствующего распределения.

В рассматриваемом же случае динамики с обучением, функция F будет зависеть от времени, причём она связана со своим статическим аналогом следующим соотношением: $F(x,t) = \mathbb{P}(\theta(t_0) - \phi(t) < x) = \mathbb{P}(\theta(t_0) < x + \phi(t)) = F(x + \phi(t))$.

Таким образом процесс обучения равносилен сдвигу графика функции распределения вероятности влево (см. рис. 1б), в результате чего устойчивые неподвижные точки у начала координат, соответствующие «топтанию» сообщества на менее благоприятных, но привычных для участников нормах, будут исчезать. И при непрерывности процесса обучения и прохождении необходимого количества времени останется единственная устойчивая равновесная точка вблизи значения аргумента, равного 1, соответствующая переходу всего сообщества на новую более благоприятную для него норму поведения (например, точка P на рис. 1а).

В последней **третьей главе** функции полезности $U_i(q)$, определённые для задачи Γ^α используются для отражения наличия кооперации между участниками в теоретико-игровой дифференциальной задаче, моделирующей отношения меду странами.

Материал данной главы во многом опирается на результаты, полученные в работе «Универсальная система управления параметрическим семейством дифференциальных игр»[48], в которой рассматривается агрегированная динамическая модель экономического взаимодействия двух регионов: промышленно развитого региона и региона - поставщика энергоресурсов. В этой работе получено общее управление для весьма широкого класса динамических моделей, в которых экономика первого региона описывается производственной функцией типа Кобба-Дугласа вида $h = A(t)z_1^a(t)z_2^b(t)\ldots$, где $z_i\,(t)$ - фазовые или управляющие переменные, а a, b - параметры.

В настоящей же работе рассматривается особый частный случай этой модели, когда экономическая деятельность первого региона находится лишь в стадии своего становления. Для данного частного случая исследуется вопрос, как влияет на решение задачи наличие определённой степени партнерских, союзнических отношений между участниками, что на практике может означать, например, обмен активами и т.д.

В результате такого рода операций наблюдается эффект *синергии*, когда объединённые в результате слияния субьекты достигают лучших результатов, чем каждый из них по отдельности. Именно этот эффект на примере указанной задачи и исследуется в данной главе.

В **первом разделе** главы производится обзор теоретико-игровых методов моделирования отношений между странами.

Во **втором разделе** осуществляется общая постановка задачи.

[48] *Смольяков, Э. Р.* Универсальная система управления параметрическим семейством дифференциальных игр [текст] / Э. Р. Смольяков, В. А. Ефрюшкина // Дифференциальные уравнения. 2019. т. 55, № 1. с. 117—122.

Рассматривается семейство дифференциальных игр[49], в которых предполагается, что i-й участник ($i = \overline{1,N}$), используя чистую стратегию $u_i(t)$, максимизирует свой функционал:

$$J_i(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0^i(u,x,t)dt,\ i{=}\overline{1,N}, \tag{15}$$

при ограничениях

$$(u,t) \in W \subset U \times T, \tag{16}$$

$$\dot{x} = f(u,x,t),\ t \in T = [t_0,t_1] \subset E^1, \tag{17}$$

$$x_j(t_0) = x_j^0,\ j = \overline{1,n},\ x_k(t_1) = x_k^1,\ k \in K \subset \{1,\ldots,N\}, \tag{18}$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$; $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_N(t))$; $U = \prod_{i=1}^{N} U_i$, U_i - конечномерные пространства. W - компактное множество в U; $u_i \in W(u^i), W(u^i)$ - сечение множества W; $W_i = Pr_{U_i}W$ - проекция множества W на U_i; $u^i = (u_1,\ldots,u_{i-1},u_{i+1},\ldots,u_N)$ - управление всех участников, кроме i-го.

В **третьем разделе** формулируется непосредственно решаемая задача взаимодействия между странами.

Пусть имеются два региона, один из которых для нужд собственного производства вынужден закупать энергоресурсы у другого.

Пусть суммарный выпуск первого региона моделируется платёжной функцией типа Кобба-Дугласа: $h(t) = A(t)x_1^a v^b(t)$, где x_1 - основные фонды первого игрока в стоимостном выражении, $v(t)$ - объём энергоресурсов, закупаемых у второго игрока, а коэффициент $A(t)$ моделирует автономный технический прогресс.

Пусть первый участник, выбирая управление $u(t)$ (инвестиции в собственные фонды), стремится максимизировать свой национальный доход, задаваемый функционалом J_1, а второй игрок, выбирая управление $v(t)$ (скорость производства и поставки энергоресурсов первому игроку) заинтересован в максимизации своего национального дохода, определяемого функционалом J_2.

$$J_1 = \int_T [A(t)x_1^a v^b(t) - u(t) - v(t)]dt,\ T = [t_0,t_1] \tag{19}$$

$$J_2{=}\int_T \beta[v(t){-}\frac{v(t)}{e^{\gamma x_2}{-}1}]dt \tag{20}$$

[49] *Жуковский, В. И.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры [текст] / В. И. Жуковский, А. А. Чикрий. Москва : Наукова думка Украина, 1994. с. 241.

$$1 > a_1 \geq a \geq a_0 > 0, 1 > b_1 \geq b \geq b_0 > 0 \tag{21}$$

При этом слагаемое $\beta v(t)(e^{\gamma x_2} - 1)^{-1}$ моделирует тот факт, что затраты на производство энергоресурса по мере его истощения возрастают. Коэффициент β - стоимость единицы энергопродукции, которую для упрощения изложения принимается равной 1.

Также предполагается, что платёжные функции J_1 и J_2 являются трансферабельными, то есть соответствующие национальные доходы выражены в одних единицах (денежных) и могут быть перераспределены между участниками в соответствии с условиями, которые будут определены далее.

Динамика фондов $x_1(t)$ первого игрока и скорость $v(t)$ добычи энергоресурса $x_2(t)$ вторым игроком определяется следующими уравнениями:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = u_1 - \delta x_1, x_1(0) = x_0^1, \\ \dot{x}_2 = -v, x_2(t_0) = x_2^0, \\ 0 \leq u \leq u^0,\ 0 \leq v \leq v^0 \end{array} \tag{22}$$

Здесь $x_1(t)$ – основные фонды первого игрока (в стоимостном выражении), δ – коэффициент амортизации фондов, а u_1 – инвестиции, x_0^1 – стоимость фондов в начальный момент времени. $x_2(t)$ – объём природных ресурсов в момент времени t, x_0^2 – объём разведанных ресурсов в начальный момент времени.

Далее в **четвёртом разделе** третьей главы формулируются понятия конфликтных равновесий, аналогичные тем, что были сформулированы в первой главе, только для дифференциальных игровых задач.

Пусть Q_1 и Q_2 - метрические пространства, а G - компактное множество в их произведении $Q_1 \times Q_2$, и пусть на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_1(q)$ и $J_2(q)$, где $q = (q_1,q_2)$. Предполагается, что i-й участник, выбирая стратегию q_i из доступного ему сечения $G(q_k)$, $k \neq i$, $i = 1{,}2$ множества G или из проекции $Pr_{Q_i}G$ множества G на пространство Q_i, стремится обеспечить максимум своей платёжной функции (функционала) $J_i(q), i = 1{,}2$.

Определение 3.1. *Точку (ситуацию) $q^* \in G$ назовём A_i^c-экстремальной, если любой стратегии $q_i \in G(q_k^*) \backslash q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}_k \overset{\Delta}{=} \hat{q}_k \langle q_i \rangle \in G(q_i)$ другого игрока так, чтобы имело место соотношение*

$$J_i(\hat{q}_k \langle q_i \rangle, q_i) \leq J_i(q^*) \tag{23}$$

Ситуацию q^* назовём A_i^c-экстремальной, если отношение (23) выполняется при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}_k(t) \neq q_k^*(t)$, является подмножеством множества из T, на котором $q_i(t) \neq q_i^*(t)$. Ситуацию q^* назовём

A^c-равновесием, если отношение (23) удовлетворяется в точке q^* для каждого $i = 1{,}2$.

Данное понятие равновесия является аналогом для дифференциальных игр A-равновесия, введённого в первой главе (определен. 1.4).

Для поиска A^c-равновесных ситуаций поставленной дифференциальной игры будем использовать следующую теорему[50].

Теорема 3.1. *Пусть (u^*,v^*) - A^c-равновесие в задаче с двумя участниками. Тогда найдутся две ненулевые абсолютно непрерывные вектор-функции $p^i(t) = (p_0^i, p_1^i(t), \dots, p_n^i(t)), p_0^i \geq 0, i = \overline{1{,}2}$, удовлетворяющие почти всюду на T уравнениям*

$$\dot{p}_k^i = -p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k}, k = \overline{1{,}n}, i = \overline{1{,}2}, \tag{24}$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \dots, f_n)$, и краевым условиям

$$p_k^i(t_1) = 0, k \notin K \tag{25}$$

такие, что гамильтонианы $H^i = p^i f^i$ непрерывны на T, а A^c-равновесная ситуация (u^*,v^*) удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{array}{l} [H^1](u,\hat{v}) \leq [H^1](u^*,v^*),\, u \in G(v^*),\, \hat{v} \in G(u), \\ [H^2](\hat{u},v) \leq [H^2](u^*,v^*),\, v \in G(u^*),\, \hat{u} \in G(v) \end{array} \tag{26}$$

Основная польза теоремы 3.1 заключается в том, что она даёт возможность свести весьма нетривиальные дифференциальные игровые задачи (15)-(18), в которых игроки стремятся доставить максимум функционалам (15), при ограничениях на фазовые переменные (16)-(18) к более простым задачам, в которых в качестве платёжных функций игроков выступают соответствующие гамильтонианы (26).

В **пятом разделе** приводится основной ход решения задачи семейства задач, определяемых условиями (19)-(22) с параметрами a и b, удовлетворяющими ограничениям (21), повторяя основной ход рассуждений Э.Р. Смольякова[51].

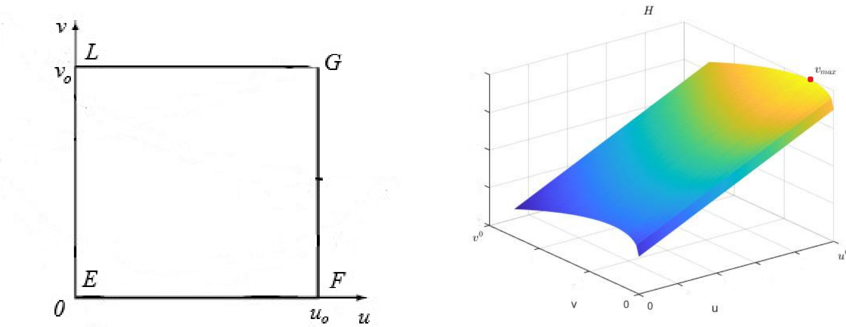
Определив функции Гамильтона и воспользовавшись ими согласно теореме 3.1 показывается, что на основном интервале планирования наиболее сильное из существующих в игре равновесий ($\bar{D}$, см. определен. 1.7) будет достигаться в точке G игрового множества (см. рис. 2а). Этой точке соответствует управление игроков: $u(t) = u^0$, $v(t) = v^0$, которое можно

[50] *Смольяков, Э. Р.* Обобщённое оптимальное управление и динамические конфликтные задачи [текст] / Э. Р. Смольяков. Москва : МГУ, 2010.

[51] *Смольяков, Э. Р.* Универсальная система управления параметрическим семейством дифференциальных игр [текст] / Э. Р. Смольяков, В. А. Ефрюшкина // Дифференциальные уравнения. 2019. т. 55, № 1. с. 117—122.

интерпретировать таким образом, что на этом временном интервале первому игроку выгодно максимальным образом инвестировать в собственные фонды, а второму в наибольшем доступном объёме добывать и продавать энергоресурсы.

В **шестом разделе** рассматривается особый частный случай описанной выше модели, когда производственный процесс первого региона, для которого заказываются энергоресурсы, находится лишь в стадии своего становления (стоимость фондов x_1^0 - низкая), также параметр b, определяющий влияние объёма поступающего энергоресурса v на значение производственной функции $h = Ax_1^a v^b$, достаточно мал. Поэтому чрезмерное количество поставляемых энергоресурсов ($v > v^*$) приводит не к увеличению дохода, а к убыткам.



а) б)

Рис. 2 — Игровое множество (слева) и график суммарного гамильтониана H (справа).

Точка, в которой достигается максимум суммарного гамильтониана H, в этом случае лежит на отрезке FG (рис. 2а) и на рассматриваемом интервале планирования может быть отлична от точки G (рис. 2б).

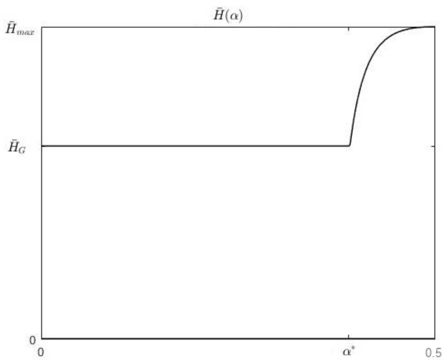
В этом случае в рассматриваемую игровую задачу вводится дополнительное предположение, что между участниками нет прямого антагонизма, а, напротив, присутствует некая доля кооперации. Такой вид отношений, например, имеет место между Россией и некоторыми дружественными странами из постсоветского пространства (например, с Белоруссией).

В этом случае вместо первоначальных целевых функционалов $J_i(u,v,t)$ участники будут стараться доставить максимум функциям полезности $U_i(u,v,t)$ следующего вида:

$$U_1 = (1-\alpha)J_1 + \alpha J_2,\, U_2 = (1-\alpha)J_2 + \alpha J_1,\, \alpha \in [0,\frac{1}{2}], \tag{27}$$

где параметр α отражает уровень кооперации между участниками, который практически может проявляться, например, в виде обмена активами.

Далее показывается, что значение суммарного гамильтониана новой задачи с функциями полезности (27), который соответствует кооперативному доходу, не убывает при увеличении уровня кооперации α. То есть с ростом α равновесной становится точка с неменьшим значением кооперативного дохода. На отрезке $[0,\alpha^*]$ равновесной остаётся точка G, а на $(\alpha^*,\frac{1}{2}]$ значение кооперативного дохода в равновесной точке (u^0,v^*) начинает возрастать до тех пор, пока при $\alpha = \frac{1}{2}$ не достигнет максимально возможного значения (рис. 3а).



а)

Рис. 3 — График зависимости суммарного гамильтониана $\bar{H}(\alpha)$ в дифференциальной задаче Γ^α от параметра α.

Полученные результаты наглядно демонстрируют эффект синергии (нелинейного увеличения производительности) при объединении усилий участников рассматриваемой конфликтной задачи.

Таким образом гипотеза 1.1, сформулированная в первой главе, нашла в данном случае своё подтверждение.

В <u>**четвёртой главе**</u> описывается программная реализация алгоритмов поиска некоторых конфликтных равновесий системы Э.Р. Смольякова (A, C, D; см. определ. (1.4) - (1.8)) в задачах с двумя участниками. Данная реализация весьма полезна для решения прикладных задач по теории игр. В частности, приведённые алгоритмы использовались для получения результатов предыдущей главы.

В <u>**первом разделе четвёртой главы**</u> для реализации первого базового и наиболее общего из всех введённых понятия A-равновесия используется необходимое и достаточное условием существования равновесия из теоремы, сформулированной и доказанной Э.Р. Смольяковым в одной из монографий[52].

Теорема 4.1. *Для того, чтобы ситуация $q^* \in G$ была A_i - экстремальной в конфликтной задаче, удовлетворяющей допущениям* **??**, *необходимо и достаточно удовлетворение условия*

$$J_i(q^*) \geq \sup_{q_i \in G(q_k^*)} \min_{q_k \in G(q_i)} J_i(q_i,q_k), \quad i = 1,2, \quad k \neq i. \tag{28}$$

В разделе приводится общий алгоритм поиска равновесий, а также листинги кода, написанного с использованием программной среды MATLAB.

Во **втором разделе** описывается алгоритм для приближённого численного решения задач с континуальными множествами допустимых стратегий участников следующего вида.

Допущение 4.1. *Пусть в двумерном евклидовом пространстве Q заданы координатные оси: абсцисса q и ордината r. Также задана функция $J(q,r)$ на некотором выпуклом, ограниченном множестве G. Первый игрок выбирает стратегию (точку) из проекции Pr_qG и стремится минимизировать значение функции $J(q,r)$, второй игрок выбирает стратегию q из проекции Pr_rG и стремится максимизировать значение функции $J(q,r)$.*

Для нахождения приближённого решения игр такого вида, строится аппроксимация исходной задачи с континуальными множествами допустимых стратегий матричной игрой с дискретным множеством стратегий путём введения на исходном игровом множестве сетки с определённым зависящем от требуемой точности вычислений шагом.

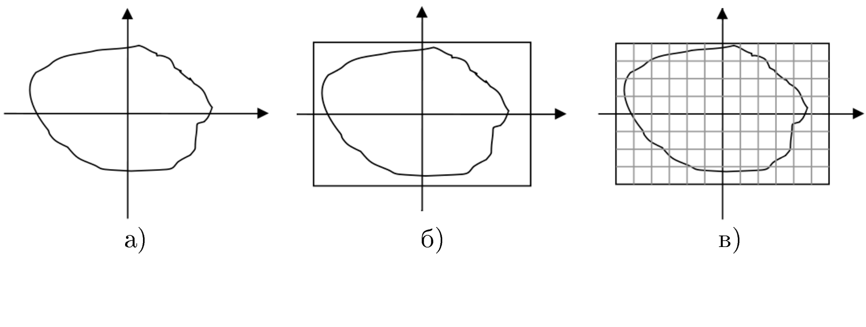


Рис. 4 — Введение сетки с шагом ϵ на игровом множестве G.

[52] *Смольяков, Э. Р.* Методы решения конфликтных задач [текст] / Э. Р. Смольяков. М. : МГУ, 2010, с. 25.

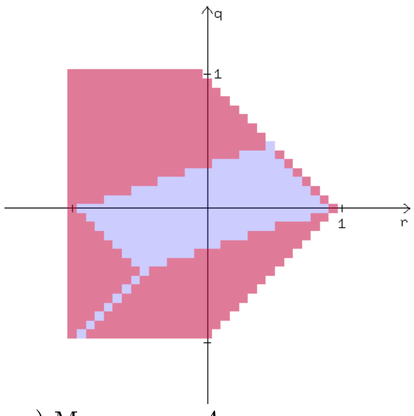
Наконец в завершающем **третьем разделе четвёртой главы** разработанные выше алгоритмы реализаются с помощью технологии параллельных вычислений на процессорах на графических процессорах видеокарт производства компании nVidea CUDA[53].

Данное решение может быть полезно для решения задач, требуемая точность вычислений в которых превышает 10^{-3}. Поскольку в этом случае приходится производить вычисления на матрицах большой размерности, то стандартные расчёты на CPU могут оказаться долгими.

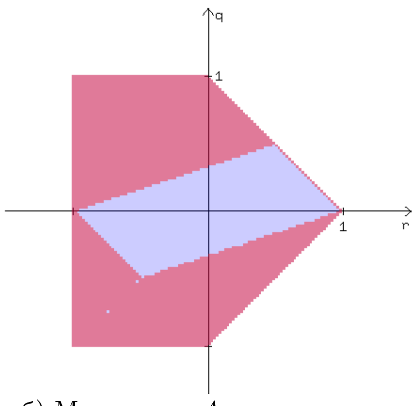
Поскольку в алгоритмах нахождения равновесий используется операции поиска максимального и минимального элемента среди строк/столбцов матриц, то скорость выполнения алгоритма можно существенным образом увеличить, поскольку эта операция весьма эффективно поддаётся «распараллеливанию».

Ниже приведены результаты работы алгоритма по нахождению A-равновесия игры на плоскости с платёжной функцией $J(q,r) = (q-r)^2$ при разных значениях ϵ. Множество G определяется следующей системой неравенств

$$\begin{cases} q + r \leq 1, |q| \leq 1 \\ q - r \geq -1, |r| \leq 1 \end{cases}$$



а) Множество A_2-равновесных точек, $\epsilon = 0.06$



б) Множество A_2-равновесных точек, $\epsilon = 0.01$

[53]Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA : Учебное пособие [текст] / А. В. Боресков [и др.]. Москва : Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2015. с. 336.

На рисунке 6 представлен график, иллюстрирующий ускорение GPU-версии программы по сравнению с CPU-версией при уменьшении шага ϵ сетки и, соответственно, увеличение размерности целевых матриц игроков. Все тесты проводились на видеокарте GeForce 8800 GTS (128 процессоров).

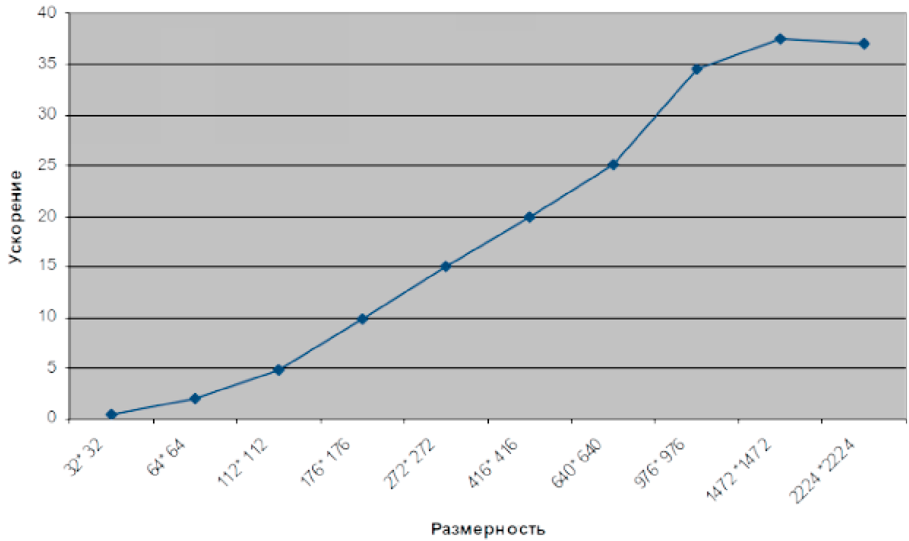


Рис. 6 — Ускорение GPU-версии программы по сравнению с CPU-версией при увеличение размерности целевых матриц игроков

С кодом алгоритма вычисления конфликтных равновесий для антагонистических игр на плоскости с использованием технологии CUDA можно ознакомиться по ссылке: https://github.com/KirillKrasnikov/cudaEquilibrium.

В **приложении А** [6] формулируется и доказывается ряд утверждений, аналогичных теореме 1.1 из первой главы, о существовании конфликтных равновесий A, C и D в точке максимума кооперативного дохода для задачи Γ^α.

В **приложении Б** формулируется и доказывается ряд вспомогательных утверждений, необходимых для построения решения третьей главы.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Построена модель альтруистического (просоциального) поведения участников сообщества.

2. Доказаны ряд теорем, в которых утверждается, что с ростом сознательности участников, выражающемся в степени предпочтения интересов сообщества личным интересам, более выгодные с точки зрения значения суммарного (кооперативного) дохода всех участников ситуации становятся равновесными.
3. Рассмотрена модель поведения, основанного на императиве Канта или золотом правиле нравственности. На примере модели коллективного бинарного поведения показано, что индивиды, принимающие решения на основе вышеуказанных этических принципов более «легки на подъём» в вопросах перехода на новые ещё нераспространённые, ну куда более благоприятные для сообщества в целом нормы поведения.
4. Также в результате применения пороговых значений в модели коллективного бинарного поведения показано, что поскольку именно устоявшиеся и не всегда эффективные нормы будут зачастую являться устойчивыми равновесиями, то переход на новые более благоприятные нормы может не произойти, если в сообществе не ведётся целенаправленная просветительская, образовательная деятельность, направленная на увеличение сознательности представителей сообщества.
5. И наконец, показывается, что все перечисленные выше эффекты могут быть применимы и в весьма практической экономической сфере. Так на примере задачи взаимодействия двух государств, показывается эффект синергии, нелинейного увеличения производительности при увеличении уровня кооперации между сторонами.

Из приведённых выше результатов становится очевидно, что сообщества, среди представителей которых преобладают приведённые выше принципы имеют неоспоримые преимущества перед сообществами, в которых преобладает исключительный индивидуализм.

Таким образом, указанные выше принципы следует культивировать на всех уровнях общественной жизни, что неминуемо приведёт общество к процветанию и благополучию.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях из списка ВАК РФ

1. *Красников, К. Е.* Математическое моделирование некоторых социально-этических норм поведения с помощью теоретико-игровых подходов [текст] / К. Е. Красников // Проблемы управления. — 2022. — т. 1. — с. 33—53.

2. *Красников, К. Е.* Математическое моделирование некоторых социальных процессов с помощью теоретико-игровых подходов и принятие на их основе управленческих решений [текст] / К. Е. Красников // Russian Technological Journal. — 2021. — т. 9, № 5. — с. 67—83.
3. *Красников, К. Е.* Моделирование социально-этических принципов в терминах игровых задач [текст] / К. Е. Красников // Экономика вчера, сегодня, завтра. — 2020. — с. 221—237.

В изданиях, входящих в международную базу цитирования Web of Science

1. *Красников, К. Е.* Математическое моделирование некоторых социально-этических норм поведения с помощью теоретико-игровых подходов [текст] / К. Е. Красников // Проблемы управления. — 2022. — т. 1. — с. 33—53.

В сборниках трудов конференций

4. *Красников, К. Е.* Анализ влияния кооперации на решение дифференциальной игры, моделирующей отношения между странами [текст] / К. Е. Красников // Фундаментальные, поисковые, прикладные исследования и инновационные проекты: сборник трудов Национальной научно-практической конференции / под.ред. С.У.Увайсов. — Москва : РТУ МИРЭА, 2022. — с. 161—165.
5. *Красников, К. Е.* Технологический комплекс разработки автоматизированных систем организационного управления [текст] / К. Е. Красников, З. Ш. Путуридзе // XIII научно-практическая конференция «Современные информационные технологии в управлении и образовании». — Москва : ФГУП НИИ «Восход», 2014.
6. *Красников, К. Е.* Моделирование некоторых социально-этических норм в терминах игровых задач [текст] / К. Е. Красников // 23-я международная мультидисциплинарная научно-практическая конференция «Российская наука в современном мире». — 2019.

Красников Кирилл Евгеньевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭТИЧЕСКИХ НОРМ ПОВЕДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫХ ПОДХОДОВ В ГОСУДАРСТВЕННОМ УПРАВЛЕНИИ, ЭКОНОМИКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________