ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 519.715+681.514
ББК 22.18

На правах рукописи

БЕЛОВ Алексей Анатольевич

Построение анизотропийной теории управления линейными дискретными дескрипторными и параметрически неопределенными обыкновенными системами

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление
и обработка информации (в отраслях информатики,
вычислительной техники и автоматизации)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН)

Научный консультант: **Чайковский Михаил Михайлович**, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник ФГУП "Научно-производственный центр автоматики и приборостроения имени академика Н.А. Пилюгина", г. Москва.

Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

Защита диссертации состоится _ 2021 года в часов минут на заседании диссертационного Совета Д002.226.02 при Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН по адресу: 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65, ИПУ РАН.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте Института проблем управления РАН (https://www.ipu.ru/).

Автореферат разослан _ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного Совета Д002.226.02,
кандидат физико-математических наук Мусатова Е.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена построению анизотропийной теории управления для дескрипторных систем с точно и неточно известными параметрами, а именно: задачам анизотропийного анализа для линейных дискретных дескрипторных систем, задачам синтеза оптимального и субоптимального анизотропийного управления, а также модального субоптимального анизотропийного управления; задачам анизотропийного анализа и синтеза робастного анизотропийного управления для параметрически неопределенных линейных обыкновенных систем; задачам синтеза отказоустойчивых систем с использованием анизотропийного подхода.

Актуальность темы. При решении задач управления проектировщик сталкивается с необходимостью качественного или количественного описания процесса, которым он хочет управлять. Обычно таким способом описания является математическая модель объекта управления или технологического процесса. Математические модели систем управления строятся на основе известных законов природы: физических, химических, биологических и т.д. Такие законы имеют как дифференциальную (например, второй закон Ньютона), так и алгебраическую форму (закон Кирхгофа). Обычно математическая модель объекта управления записывается в форме дифференциальных или разностных уравнений. Однако существуют ситуации, когда такой формы описания бывает недостаточно. Попытки задания подобных систем с помощью только дифференциальных или разностных уравнений могут привести к потере информации или же к описанию системы в некоторых абстрактных переменных, называемых фазовыми переменными. Это может затруднять практическую реализацию управляющих устройств, а также может приводить к снижению качества регулирования реальными объектами.

Таким образом, при выборе математической модели системы в переменных, которые имеют реальный физический смысл, приходится сталкиваться с тем, что она может содержать в себе не только дифференциальные, но и алгебраические связи и ограничения. Запись математической модели системы управления в алгебро-дифференциальной форме, как правило, влечет за собой невозможность разрешить данную совокупность алгебро-дифференциальных уравнений относительно первой производной. Это приводит к появлению нового класса систем, называемых алгебро-дифференциальными или дескрипторными системами.

Происхождение теории дескрипторных систем восходит к работам П. Дирака об обобщенных Гамильтоновых системах. Основная идея, которая рассмотрена в вышеописанных работах, в современной науке называется индексом дифференцирования полуявных дескрипторных систем. Геометрический метод изучения так называемых систем с ограничениями, освещенных в работах Дирака, нашел свое применение в механике. Механические системы как дескрипторные системы в дальнейшем стали объектом широкого исследования.

Дальнейшее развитие теория получила в работах К. Вейерштрасса и Л. Кронекера о параметризуемых семействах билинейных форм. В терминах матриц для анализа линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возможными вырождениями главного коэффициента матрицы Ф.Р. Гантмахером были использованы матричные пучки. Математическая теория алгебро-дифференциальных систем начала активно развиваться в 1970х гг. независимо в различных областях техники. Необходимо выделить работы Гира, Тэйкенса, а также монографии Кэмпбелла и Петзольд, вышедшие в начале 1980х гг. В данных работах основное внимание было акцентировано на численных аспектах моделирования дескрипторных систем.

В отечественной и зарубежной литературе алгебро-дифференциальные системы называются также сингулярными системами, обобщенными системами в пространстве состояний (или обобщенными системами), неявными системами или дескрипторными системами. Также в отечественной литературе можно встретить термин «системы Леонтьевского типа». Наиболее часто в зарубежной литературе используется понятие «дескрипторные системы». В данном случае предполагается, что переменные, формирующие математическую модель объекта управления, описывают некий реальный процесс, протекающий в объекте (от англ. descriptor - описатель).

Дескрипторные системы нашли свое приложение при моделировании движения летательных аппаратов, химических процессов, в схемотехнике, в экономических системах, для описания соединенных между собой систем высокого порядка, в технических системах, в энергетических системах, для описания механических систем и в робототехнике. Дескрипторные системы имеют некоторые характерные отличия от обыкновенных систем (здесь и далее обыкновенными будем называть системы, описываемые только дифференциальными или только разностными уравнениями). Для дескрипторных систем характерны следующие свойства:

- Передаточная функция дескрипторной системы может не являться строго правильной.

- Для произвольных ограниченных начальных условий в решениях алгебро-дифференциальных уравнений могут присутствовать обобщенные функции (импульсное поведение), а для алгебро-разностных уравнений решение может зависеть от будущих моментов времени (непричинное поведение).

- Решение линейного алгебро-дифференциального уравнения обычно содержит три типа компонент: ограниченные динамические компоненты, соответствующие дифференциальной составляющей; нединамические компоненты, соответствующие алгебраическим составляющим; неограниченные динамические компоненты из класса обобщенных функций, наличие которых зависит от гладкости входного сигнала, а также от начальных условий.

Несмотря на указанные выше особенности, исследование дескрипторных систем представляет достаточно перспективное направление как с точки зрения фундаментальных исследований, так и с точки зрения практического применения. Существенные отличия дескрипторных систем от обыкновенных потребовали развития и обобщения математического аппарата для них.

Многие фундаментальные понятия и результаты из теории обыкновенных систем были успешно обобщены на дескрипторные системы: разрешимость алгебро-дифференциальных уравнений, исследование управляемости и наблюдаемости; канонические формы и представления дескрипторных систем; минимальные реализации; эквивалентность систем; регулярность и регуляризация; устойчивость и стабилизация; модальное управление; линейно-квадратичное оптимальное управление; синтез наблюдателей и фильтрация; теоремы и уравнения Ляпунова; редукция модели; $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ управление.

Наибольший интерес в диссертационном исследовании представляют собой задачи понижения влияния внешних возмущений с использованием $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ норм передаточных функций в форме критериев качества. Минимизация того или иного критерия качества позволяет наилучшим образом подавлять тот или иной класс внешних возмущений, действующих на систему. Так, $\mathcal{H}_2$ регулятор позволяет наилучшим образом минимизировать среднеквадратичное отклонение выходной переменной системы, на которую действует гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. В случае $\mathcal{H}_\infty$ управления минимизируется максимальная (по всему диапазону частот) операторная норма передаточной матрицы (как коэффициент усиления внешнего возмущающего воздействия). Регуляторы, полученные с использованием $\mathcal{H}_\infty$ подхода, как правило излишне консервативны, что приводит к большим энергетическим затратам на реализацию закона управления исполнительным устройством.

Также, как и теория $\mathcal{H}_\infty$ управления, анизотропийная теория изучает возможности подавления системой случайных внешних возмущений. В отличие от перечисленных выше подходов, анизотропийная теория управления учитывает окрашенность случайного входного возмущения. Мерой окрашенности выступает неотрицательное число, называемое средней анизотропией, которая используется для теоретико-информационного (или энтропийного) описания статистической неопределенности в отношении случайных шумов (см. работы И.Г. Владимирова и соавторов). Были преодолены недостатки LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ регуляторов. Применение анизотропийных регуляторов при управлении дискретными системами существенно уменьшает энергетические затраты на управление за счет учета статистической неопределенности случайного внешнего возмущения, не снижая при этом качества переходных процессов. При этом случаи $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$

управления могут рассматриваться как частные предельные случаи анизотропийной теории.

Системы управления, замкнутые анизотропийными регуляторами, являются более робастными, чем системы, замкнутые $\mathcal{H}_2$ регуляторами, и менее консервативными, чем системы, замкнутые $\mathcal{H}_\infty$ регуляторами. В работах И.Г. Владимирова и А.П. Курдюкова рассматривались сравнения возможностей $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ и анизотропийных регуляторов в задаче подавления внешнего возмущения типа сдвига ветра при посадке самолета в присутствии случайных окрашенных шумов измерений. Анизотропийные регуляторы показали значительные преимущества по сравнению с $\mathcal{H}_\infty$ регуляторами в вопросах энергозатрат на управление. Одновременно с этим, анизотропийные регуляторы оказались более робастными в сравнении с $\mathcal{H}_2$ регуляторами. Обобщая вышесказанное, можно сделать вывод, что развитие анизотропийной теории и разработка регулярных методов анализа и синтеза для новых классов систем является чрезвычайно важной и актуальной задачей. Такие задачи позволяют обобщать в рамках единого подхода разрозненные существующие и появляющиеся в настоящий момент результаты анализа и синтеза LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ регуляторов для дискретных систем, как обыкновенных, так и дескрипторных.

Целью данного диссертационного исследования являются построение теории анизотропийного управления для класса линейных дискретных дескрипторных систем, распространение и обобщение анизотропийной теории управления на некоторые классы параметрически неопределенных линейных дискретных обыкновенных систем, а также применение анизотропийной теории в задачах технической диагностики и синтеза отказоустойчивых систем.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Решение задачи синтеза оптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати.

2. Решение задачи анализа анизотропийного качества и вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с использованием техники Риккати и методов выпуклой оптимизации.

3. Решение задачи синтеза анизотропийного регулятора при полном измерении вектора состояния для дескрипторных систем с расположением конечных полюсов замкнутой системы в заданной области.

4. Решение задачи робастного анизотропийного анализа и оценки анизотропийного качества дескрипторной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

5. Решение задачи синтеза робастного анизотропийного управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

6. Решение задачи синтеза робастного анизотропийного управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями с асположением конечных полюсов замкнутой системы в заданной области при полном измерении вектора состояния.

7. Решение задачи робастного анизотропийного анализа и оценки анизотропийного качества обыкновенной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

8. Решение задачи синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном и неполном измерении вектора состояния.

9. Решение задачи робастного анизотропийного анализа и оценки анизотропийного качества обыкновенной системы с политопическими параметрическими неопределенностями.

10. Решение задачи синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с политопическими параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

11. Решение задачи диагностики отказов исполнительных и измерительных элементов системы с использованием анизотропийного функционала качества.

Соответствие шифру специальности. Работа соответствует специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации (в технических системах)» в части обработки информации по пунктам:

- Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

- Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

- Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

- Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

- Теоретико-множественный и теоретико-информационный анализ сложных систем.

- Методы и алгоритмы прогнозирования и оценки эффективности, качества и надежности сложных систем.

Методы исследования. В работе применяются методы линейной алгебры, теории вероятностей и случайных процессов, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теория обработки сигналов, методы математического моделирования и методы оптимизации.

Степень обоснованности и достоверности полученных научных результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата, а также результатами математического и компьютерного моделирования.

Апробация. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных конференциях: XI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Москва, 2010; 9-th International Conference Process Control 2010, Kouty nad Desnou: Czech Republic, 2010; Конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург); 11-й Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2014, Арзамас); I, II, IV Всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация», 2009, 2010, 2012; 19th International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2013); 13th European Control Conference (ECC 2014, Strasbourg, France); 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015); European Control Conference (ECC-2015, Linz, Austria); 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference); 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017, Valletta, Malta); 21st International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2017); 20th IFAC World Congress, 2017; 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018, Zadar, Croatia); 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2018, Moscow); 18th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2018, Stockholm, Sweden; 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization Yekaterinburg, CAO-2018; 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland); 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019); International Workshop Navigation and Motion Control (NMC 2019), 2019, Saint Petersburg, Russia; 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 38 работ. В том числе 2 монографии (1 индексируется в Web of Science и Scopus), 15 журнальных статей в рецензируемых изданиях (14 индексируются в Web of Science и Scopus, а 1 индексируется в Scopus), 20 статей в сборниках конференций (11 индексируются в Web of Science и Scopus, 5 индексируются в Scopus, 4 конференции индексируются в РИНЦ), 1 брошюра.

Личный вклад соискателя.

Все исследования, представленные в диссертационной работе, постановки и решения задач, формулировки и доказательства теорем, вычислительные эксперименты выполнены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию без ссылки включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка публикаций, списка литературы. Работа изложена на 298 страницах, содержит 42 иллюстрации, 11 таблиц. Список цитируемой литературы включает 297 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и значимость исследуемой проблематики, дан обзор литературы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В главе 1 рассмотрены основные особенности дискретных дескрипторных систем, дано краткое изложение теории анизотропийного анализа линейных систем управления, а также приведены формулировки известных лемм и теорем, которые будут использоваться в дальнейшем изложении и получения новых результатов. В первом разделе даются основные определения, относящиеся к теории дескрипторных систем, вводятся понятия эквивалентных форм, понятия регулярности, причинности, устойчивости и допустимости дескрипторной системы. Также рассмотрены различные виды управляемости и наблюдаемости и приведены формулы для вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости дескрипторных систем. Эти результаты известны и поэтому приводятся в обзорной форме, без доказательств с указанием ссылок на первоисточники.

Линейная стационарная система также является одной из специальных форм описания дескрипторных систем и имеет вид:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bf(k), \tag{1}$$
$$y(k) = Cx(k) + Df(k), \tag{2}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $f(k) \in \mathbb{R}^m$ и $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — входная и выходная последовательности соответственно, $k \in \mathbb{Z}$, $K \geqslant 0$. E, A, B, C, D — постоянные действительные матрицы соответствующих размерностей. Если в уравнении (1) матрица E является вырожденной, т.е. $\operatorname{rank}(E) < n$, то алгебраические связи между переменными не позволяют разрешить исходные уравнения относительно производной. Невозможность обратить матрицу E не дает перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Определение 1. *Для любых двух заданных матриц $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ пара матриц (E, A) называется регулярной (матричный пучок $(\alpha E - A)$ называется регулярным), если существует постоянный скаляр $\alpha \in \mathbb{C}$, для которого* $\det(\alpha E - A) \not\equiv 0$.

Пара матриц (E, A) или система (1) является регулярной если и только если существуют такие две невырожденные матрицы $\overline{W}$ и $\overline{V}$, что

$$\overline{W}E\overline{V} = \mathrm{diag}(I_r, N), \;\; \overline{W}A\overline{V} = \mathrm{diag}(A_1, I_{n-r}), \tag{3}$$

где $\mathrm{rank}\,(E) = r$, $A_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ — нильпотент.

Определение 2. *Квадратная матрица N называется нильпотентом индекса h, если $N^h = 0$, а $N^i \neq 0$ для всех $i = \overline{1, (h-1)}$.*

Для регулярных дескрипторных систем вводится понятие передаточной функции.

Определение 3. *Рациональная матричная функция $P(z) = C(zE - A)^{-1}B$ называется передаточной функцией дискретной дескрипторной системы* (1)–(2). *Здесь z — переменная Z-преобразования Лапласа.*

Преобразование (3) в литературе также называют первой эквивалентной формой. Индекс матричного пучка $(\lambda E - A)$ или мера неразрешенности системы (1)–(2) равна индексу нильпотентности матрицы N.

Рассмотрим еще одну важную эквивалентную форму для системы (1)–(2). Напомним, что $r = \mathrm{rank}\,(E)$, предполагаем, что пара матриц (E, A) является регулярной. Тогда из теории матриц следует, что можно подобрать такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, что $\widetilde{W}E\widetilde{V} = \mathrm{diag}(I_r, 0)$.

Применяя преобразование координат $\widetilde{V}^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, $x_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, и умножая левую и правую часть уравнения (1) на матрицу $\widetilde{W}$, система (1)–(2) запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1 f(k), && (4)\\ 0 &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2 f(k), && (5)\\ y(k) &= C_1 x_1(k) + C_2 x_2(k) + Df(k), && (6) \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{W}A\widetilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{W}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C\widetilde{V} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Система (4)–(7) называется второй эквивалентной формой или эквивалентной формой, основанной на сингулярной декомпозиции, для системы (1)–(2).

Матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$ могут быть найдены с использованием сингулярной декомпозиции в виде:

$$E = U\mathrm{diag}(S,0)H^{\top}. \tag{8}$$

Дискретные дескрипторные системы обладают несколькими особенностями, которые не позволяют быстро и легко обобщить результаты, полученные для обыкновенных систем. Главной такой особенностью является *нарушение принципа причинности* — текущее состояние системы может зависеть от будущих значений входного сигнала.

Другим важным отличием дискретных дескрипторных систем от систем обыкновенных является то, что дескрипторные системы имеют решение не для всех начальных условий. Эта особенность может быть проиллюстрирована, используя выражение для описания зависимости между состоянием системы и входом в нулевой момент времени. Решение системы существует, если

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \overline{V}^{-1} x(0) = \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 f(i). \tag{9}$$

Начальные условия, для которых справедливо равенство (9), называют *согласованными начальными условиями.*

Понятие устойчивости дескрипторной системы определяется следующим образом.

Определение 4. *Система* (1) *называется глобально асимптотически устойчивой или просто устойчивой, если при* $f(k) = 0$ *и для любых согласованных начальных условий* $x(0)$ *справедливо неравенство*

$$\|x(k)\| \le \alpha\beta^k \|x(0)\|,\ k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 0\ \alpha > 0,\ 0 < \beta < 1$$

Отсюда следует определение допустимой дескрипторной системы.

Определение 5. *Система* (1) *называется допустимой, если она является регулярной (т.е.* $\exists \lambda \in \mathbb{C}:\ \ (\lambda E - A) \not\equiv 0$*), причинной и устойчивой.*

Пусть система (1)–(2) задана во второй эквивалентной форме (4)–(7)

- Пара матриц (E, A) является причинной тогда и только тогда, когда матрица A_{22} является невырожденной.
- Пара матриц (E, A) является допустимой тогда и только тогда, когда A_{22} является невырожденной и $\rho(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) < 1$.

Определение 6. *Рассмотрим область* $\mathfrak{D}$ *на комплексной плоскости, задаваемую в виде:*

$$\mathfrak{D} = \{z \in \mathbb{C} : d + 2b\mathfrak{Re}(z) + c|z|^2 < 0\}. \tag{10}$$

Пара (E, A) *называется* $\mathfrak{D}$*–допустимой, если она является допустимой, а все ее конечные собственные значения лежат внутри области* $\mathfrak{D}$*.*

В связи с тем, что динамика дескрипторной системы разделяется на две подсистемы, понятия управляемости и наблюдаемости в дескрипторных системах гораздо шире, чем аналогичные понятия в теории обыкновенных линейных систем. Так, в теории дескрипторных систем выделяют полную управляемость (C-управляемость), управляемость на множестве достижимости (R-управляемость) и причинную управляемость (Y-управляемость).

Определение 7. *Система* (1) *называется причинно управляемой, если существует такой закон управления*

$$f(k) = Kx(k) + v(k),$$

что замкнутая система

$$Ex(k+1) = (A + BK)x(k) + Bv(k)$$

является причинной.

Далее приводятся основы анизотропийной теории управления в линейных обыкновенных системах. Пусть $W = \{w_k\}_{-\infty<k<\infty}$ — стационарная последовательность случайных векторов $w_k \in \mathbb{R}^m$ с конечными вторыми моментами. Составим элементы последовательности W, рассматриваемые на временно интервале $[0, N]$, в случайный вектор вида $W_{0:N} = \begin{bmatrix} w_0^\top & \cdots & w_N^\top \end{bmatrix}^\top$. Предполагаем, что $W_{0:N}$ является абсолютно непрерывно распределенным для любых $N \geq 0$. Анизотропия вектора $W_{0:N}$ обозначается через $\mathbf{A}(W_{0:N})$ и определяется как минимальное значение относительной энтропии (информационное уклонение Кульбака-Лейблера) по отношению к эталонному вектору в $\mathbb{R}^{m(N+1)}$ с гауссовским распределением, нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей. Формально анизотропия вектора $W_{0:N}$ определяется как

$$\mathbf{A}(W_{0:N}) = \frac{m}{2}\ln\left(\frac{2\pi e}{m}\mathbf{E}(|W_{0:N}|^2)\right) - h(W_{0:N}),$$

где дифференциальная энтропия $h(W_{0:N})$ вычисляется в виде

$$h(W_{0:N}) = -\mathbf{E}\ln f(W_{0:N}) = -\int_{\mathbb{R}^{m(N+1)}} f(x)\ln f(x)dx,$$

а $f(x)$ — функция плотности вероятности вектора $W_{0:N}$.

Отметим также, что информационное уклонение Кульбака-Лейблера является неотрицательным функционалом. Таким образом, анизотропия случайного вектора также является неотрицательным числом, т.е. $\mathbf{A}(W_{0:N}) \geqslant 0$. Также следует отметить, что $\mathbf{A}(W_{0:N}) = 0$ если и только если $W_{0:N}$ — гауссовский вектор с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей.

Средняя анизотропия последовательности W определяется как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty}\frac{\mathbf{A}(W_{0:N})}{N}. \tag{11}$$

средняя анизотропия последовательности W может быть определена в частотной области с использованием спектральной плотности как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2}d\omega = -\frac{1}{4\pi}\ln\det\frac{m\mathbf{cov}(\tilde{w}_0)}{\|G\|_2^2}, \tag{12}$$

где

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Tr}\,\left(\widehat{G}^*(\omega)\widehat{G}(\omega)\right)d\omega\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\,S(\omega)d\omega\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим обыкновенную разностную систему $F(z)$:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathcal{A}x(k) + \mathcal{B}w(k), \qquad (13)\\ y(k) &= \mathcal{C}x(k) + \mathcal{D}w(k). \qquad (14)\end{aligned}$$

Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ и $y(k) \in \mathbb{R}^p$. Передаточная функция системы имеет вид:

$$F(z) = \mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}.$$

Для вход-выходного соотношения (13)–(14) введем среднеквадратичный коэффициент усиления, определяемый соотношением:

$$Q(F, W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}},$$

где

$$\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\mathbf{E}|y(k)|^2}$$

— мощностная норма стационарной последовательности $Y = \{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Определение 8. *Для заданного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ анизотропийная норма системы F с реализацией в пространстве состояний* (13)–(14) *определяется выражением*

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(P, W).$$

Таким образом, анизотропийная норма системы $|\!|\!|F|\!|\!|_a$ описывает стохастический коэффициент усиления системы F по отношению к внешнему возмущению W.

Отношение мощностных норм, задаваемое выражением () может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} = \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2},$$

где $G(z)$ — это формирующий фильтр, ассоциированный с факторизацией спектральной плотности последовательности W. Используя эту запись, анизотропийную норму системы можно определить другим образом.

Определение 9. *Для заданного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ анизотропийная норма системы F с реализацией в пространстве состояний* (13)–(14) *определяется выражением*

$$
|\!|\!| F |\!|\!|_a = \sup_{G \in \mathbf{G}_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}.
$$

Здесь через $\mathbf{G}_a$ обозначается множество всех формирующих фильтров, для которых справедливо неравенство

$$
\mathbf{G}_a = \left\{ G \in \mathcal{H}_2{}^{m\times m} : \ \overline{\mathbf{A}}(G) \leqslant a \right\}.
$$

Таким образом, анизотропийная норма $|\!|\!| F |\!|\!|_a$ характеризует робастность системы F по отношению к случайному возмущению W, неточность знания статистических свойств которого описывается параметром a.

Глава 2. Во второй главе вводятся понятия $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ и анизотропийной норм передаточной функции дескрипторной системы. Следует заметить, что понятия $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ норм являются общеизвестными, но вынесены во вторую главу для удобства изложения материала работы. Определение анизотропийной нормы дескрипторной системы в частотной области аналогично определению 9. Приведены алгоритмы для вычисления соответствующих норм и вычислительные примеры. Далее в главе ставится задача анизотропийного анализа дескрипторной системы в более широком смысле, которая заключается в одновременной проверке ее на допустимость и оценке ограниченности анизотропийной нормы дескрипторной системы наперед заданным числом. Для решения данной задачи были сформулированы и доказаны различные варианты анизотропийной частотной теоремы.

Предположим, что выполнены следующие ранговые условия:

$$
\operatorname{rank}(\widetilde{E}) = \operatorname{rank}[\ \widetilde{E} \quad \widetilde{B}\ ] = \operatorname{rank}[\ \widetilde{E} \quad \widetilde{C}^\top\ ].
$$

Сформулируем анизотропийную частотную теорему на основе уравнения Риккати.

Теорема 1. *Пусть $P \in \mathcal{H}_\infty{}^{p\times m}$ – допустимая система с представлением в пространстве состояний* (1)–(2). *Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ анизотропийна норма системы ограничена сверху числом γ, т.е. $|\!|\!| P |\!|\!|_a \leqslant \gamma$, тогда и только тогда, когда существует такое число*

$$
q \in [0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty^{-2})),
$$

для которого справедливо неравенство

$$-\frac{1}{2}\ln\det\Big((1-q\gamma^2)\Sigma\Big) \geqslant a,$$

где матрица Σ *связана со стабилизирующим*[1] *решением* $\widehat{R} = \widehat{R}^\top$ *обобщенного алгебраического уравнения Риккати*

$$\begin{aligned} E^\top \widehat{R} E &= A^\top \widehat{R} A + qC^\top C + L^\top \Sigma^{-1} L, \\ L &= \Sigma(B^\top \widehat{R} A + qD^\top C), \\ \Sigma &= (I_m - B^\top \widehat{R} B - qD^\top D)^{-1}, \end{aligned}$$

с дополнительным условием

$$E^\top \widehat{R} E \geqslant 0.$$

Также были получены условия на основе матричных неравенств. Приведем их. Предположим, что выполнены следующие ранговые условия:

$$\operatorname{rank}(\widetilde{E}) = \operatorname{rank}[\ \widetilde{E} \quad \widetilde{B}\ ].$$

Теорема 2. *Пусть* $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *— стационарная случайная гауссовская последовательность, средняя анизотропия которой не превосходит заданного числа, т.е.* $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, *где* $a \geqslant 0$. *Система* P *с реализацией в пространстве состояний* (1)–(2) *является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена положительным числом* $\gamma > 0$, *т.е.*

$$|\!|\!|P|\!|\!|_a < \gamma,$$

если существует такой скалярный параметр $q \in \Big[0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty)\Big)$ *и симметрическая матрица* R, *которые удовлетворяют неравенствам*

$$ERE^\top \geqslant 0,$$

$$-(\det(I_m - B^T RB - qD^T D))^{1/m} < -(1-q\gamma^2)e^{2a/m},$$

$$\begin{bmatrix} A^\top RA - E^\top RE & A^\top RB \\ B^\top RA & B^\top RB - I_m \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0.$$

Для того, чтобы сформулировать следующий результат, предполагаем, что система является регулярной, поэтому для нее существуют такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, с помощью которых исходная система может быть представлена во второй эквивалентной форме (4)–(6). Ниже будем использовать следующие обозначения: $E_d = \widetilde{W} E \widetilde{V}$, $A_d = \widetilde{W} A \widetilde{V}$, $B_d = \widetilde{W} B$, $C_d = C\widetilde{V}$, $D_d = D$. Справедлива теорема.

[1]Стабилизирующим решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати (15) будем называть матрицу $\widehat{R}$, для которой пара $(E,\ A + BL)$ является допустимой.

Теорема 3. *Для заданных скаляров $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ система (1)–(2) с передаточной функцией $P(z)$ является допустимой и ее анизотропийная норма ограничена числом γ, т.е.*

$$|||P|||_a < \gamma,$$

если существуют такие матрицы $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и скалярные величины $\eta > \gamma^2$ и $\alpha > 0$, что выполняются следующие неравенства:

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m + B_d^\top \Theta B_d & D_d^\top \\ D_d & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top & \star & \star & \star & \star \\ A_d^\top \Gamma^\top & \Pi A_d + A_d^\top \Pi^\top - \Theta & \star & \star & \star \\ B_d^\top \Gamma^\top & B_d^\top \Pi^\top & -\eta I_m & \star & \star \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_d & -Q - Q^\top & \star \\ 0 & C_d + \alpha C_d \Pi A_d & D_d + \alpha C_d \Pi B_d & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

где $\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}$.

Замечание 1. *Анизотропийная норма дескрипторной системы может быть вычислена с использованием методов выпуклой оптимизации*

$$\text{найти } \xi_* = \min \gamma^2$$

на множестве $\{L, Q, R, S, \Psi, \eta, \xi\}$, удовлетворяющих неравенствам (15)–(17). *Если минимум ξ_* найден, то анизотропийная норма системы P вычисляется как*

$$|||P|||_a \approx \sqrt{\xi_*}.$$

Глава 3 посвящена решению задачи синтеза анизотропийного управления для дескрипторных систем с точно известными параметрами. Главу условно можно разделить на две части: оптимальное управление и субоптимальное управление.

Рассмотрим общую постановку задачи оптимального анизотропийного управления для дескрипторной системы. Дескрипторная система с реализацией в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), && (18) \\ z(k) &= C_z x(k) + D_{zw} w(k) + D_{zu} u(k), && (19) \\ y(k) &= C_y x(k) + D_{yw} w(k), && (20) \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — случайное внешнее возмущение, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — сигнал управления, $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ — измеряемый выход.

Предполагается, что все параметры системы точно известны, а $w(k)$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$.

Пусть также выполнены следующие стандартные предположения о системе

A1. Система является стабилизируемой и причинно управляемой.

A2. Система является детектируемой и причинно наблюдаемой.

A3. Размерность управляемого сигнала z меньше размерности входного возмущения w: $p_1 < m_1$.

A4. Матрица D_{yw} имеет полный строчный ранг: $\operatorname{rank} D_{yw} = p_2 \leq m_1$.

A5. Матрица D_{zu} имеет полный столбцовый ранг: $\operatorname{rank} D_{zu} = m_2 \leq p_1$.

Рассмотрим строго неупреждающий закон управления в виде:

$$u(k) = K(x(k), y(k)),$$

где $K(\cdot)$ — функция, подлежащая определению. Тогда задачу синтеза оптимального анизотропийного управления можно сфомулировать в следующем виде:

Задача 1. *Для известного неотрицательного уровня средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$ входного возмущения $w(k)$ и системы* (18)–(20), *необходимо найти закон управления $u(k) = K(x(k), y(k))$, который делает замкнутую систему допустимой и при этом минимизирует ее анизотропийную норму, определяемую соотношениями*

$$\sup_{\overline{\mathbf{A}}(G) \leqslant a} \frac{\|F_{cl}(P, K)G\|_2}{\|G\|_2} \to \min_K, \tag{21}$$

где G — наихудший формирующий фильтр для замкнутой системы, $\mathbf{G}_a$ — множество таких формирующих фильтров с заданным уровнем средней анизотропии равным a, а $F_{cl}(P, K)$ означает замкнутую систему.

Решение задачи оптимального анизотропийного управления по состоянию, при котором необходимо найти закон управления $u(k) = Kx(k)$, можно разделить на два этапа. На первом этапе необходимо найти условия на наихудший формирующий фильтр для замкнутой системы, а на втором — решить задачу синтеза $\mathcal{H}_2$ оптимального регулятора для расширенного объекта управления. Введем обозначения $\widehat{A} = A + B_u K$, $\widehat{C} = C_1 + D_u K$ и предположим, что замкнутая система является допустимой. Условия, при которых можно найти наихудший формирующий фильтр определяются теоремой.

Теорема 4. *Пусть замкнутая система является допустимой. Тогда для любого уровня средней анизотропии входного возмущения $a \geqslant 0$ существует единственная пара (q, R), где скалярный параметр q принадлежит полуинтервалу $\left[0, \quad \|P_{cl}\|_{\infty}^{-2}\right)$, а $R = R^{\top}$ — $n \times n$ матрица, для которой справедливо условие $E^{\top}RE \geqslant 0$. Решение (q, R) находится из системы уравнений*

$$\begin{aligned} E^{\top}RE &= \widehat{A}^{\top}R\widehat{A} + q\widehat{C}^{\top}\widehat{C} + L^{\top}\Sigma^{-1}L, && (22)\\ \Sigma &= (I_{m_1} - qD_w^{\top}D_w - B_w^{\top}RB_w)^{-1}, && (23)\\ L &= \Sigma(B_w^{\top}R\widehat{A} + qD_w^{\top}\widehat{C}). && (24) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m_1\Sigma}{\operatorname{tr}(LP_GL^{\top} + \Sigma)}\right) = a, \qquad (25)$$

где $P_G = P_G^{\top} > 0$, $P_G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — грамиан управляемости формирующего фильтра G, который находится из решения обобщенного уравнения Ляпунова

$$EP_GE^{\top} = (\widehat{A} + B_wL)P_G(\widehat{A} + B_wL)^{\top} - B_w\Sigma B_w^{\top}. \qquad (26)$$

Кроме того, формирующий фильтр G с реализацией в пространстве состояний

$$G = \left[\ E,\ \ \begin{array}{c|c} \widehat{A} + B_wL & B_w\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array}\ \right] \qquad (27)$$

является наихудшим формирующим фильтром для замкнутой системы.

Рассмотрим теперь расширенную систему с реализацией

$$\begin{aligned} E_*\widehat{x}(k+1) &= A_*\widehat{x}(k) + B_{u*}u(k) + B_{v*}v(k), && (28)\\ z(k) &= C_*\widehat{x}(k) + D_wv(k), && (29) \end{aligned}$$

где $\widehat{x}(k) \in \mathbb{R}^{2n}$, $z(k) \in \mathbb{R}^{p}$, $v(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — белый гауссовский шум. Параметры системы равны $E_* = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$,

$A_* = \begin{bmatrix} A & B_wL \\ 0 & A + B_wL \end{bmatrix}$, $B_{u*} = \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_* = \begin{bmatrix} C & D_wL \end{bmatrix}$. Так как формирующий фильтр G предполагается обратимым, задача синтеза анизотропийного регулятора может быть сведена к задаче синтеза $\mathcal{H}_2$ оптимального регулятора.

Теорема 5. *Пусть система (28)–(29) является стабилизируемой и причинно управляемой. Закон управления, который решает оптимальную анизотропийную задачу, может быть найден из решения взвешенной задачи $\mathcal{H}_2$ оптимального управления в виде*

$$K = \Gamma_1 + \Gamma_2 \qquad (30)$$

где $\Gamma = [\,\Gamma_1 \quad \Gamma_2\,]$ *определяется с помощью матрицы* $T = T^\top$, *удовлетворяющей условию* $E_*^\top T E_* \geqslant 0$ *и являющейся решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати*

$$\begin{aligned} E_*^\top T E_* &= A_*^\top T A_* + C_*^\top C_* + \Gamma^\top \Pi \Gamma, && (31)\\ \Pi &= (B_{u*}^\top T B_{u*} + D_w^\top D_w), && (32)\\ \Gamma &= -\Pi^{-1}(B_{u*}^\top T A_* + D_w^\top C_*). && (33) \end{aligned}$$

Таким образом, решение оптимальной анизотропийной задачи при полном измерении вектора состояния сводится к решению связанных между собой матричных уравнений: два обобщенных алгебраических уравнения Риккати (22)–(24) и (31)–(33), обобщенного уравнения Ляпунова (26) и нелинейного уравнения (25).

Решение задачи при неполном измерении вектора состояния разделено на два этапа. На первом этапе строится контур, который будет обеспечивать свойство причинности для исходной системы (каузализация). На втором этапе строится оценивающий регулятор, стабилизирующий систему и минимизирующий анизотропийную норму замкнутой системы. В силу предположения A1 система является причинно управляемой, то есть существует такой закон управления $\tilde{u}(k) = K_1 y(k)$, что пара $(E, A + B_u K_1 C_y)$ является причинной.

Рассмотрим процедуру поиска коэффициента усиления K_1. Так как разомкнутая система (18)–(20) предполагается регулярной, то существуют такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, что исходная система (18)–(20) преобразуется ко второй эквивалентной форме, где

$$\widetilde{W} E \widetilde{V} = \mathrm{diag}(I_r, 0), \qquad \widetilde{W} A \widetilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

где $r = \mathrm{rank}\,(E)$. Если $\mathrm{rank}\,(A_{22}) = s < n - r$, рассмотрим следующий блок $(A_{22} + B_{22} K_1 C_{22})$. Согласно предположению A1 существует такая матрица K_1, что $\mathrm{rank}\,(A_{22} + B_{22} K_1 C_{22}) = n - r$. Применяя в очередной раз сингулярную декомпозицию, представим матрицу A_{22} в форме

$$S_{A_{22}} A_{22} U_{A_{22}} = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Умножая слева и справа выражение $(A_{22} + B_{22} K_1 C_{22})$ на матрицы $S_{A_{22}}$ и $U_{A_{22}}$, получаем

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{B}_{22} K_1 \widetilde{C}_{22}, \tag{36}$$

где $\widetilde{B}_{22} = S_{A_{22}} B_{22}$ и $\widetilde{C}_{22} = C_{22} U_{A_{22}}$.

Тогда задача каузализации может быть представлена как задача поиска такой матрицы коэффициентов K_1, что матрица (36) станет невырожденной. Для простоты положим, что необходимо найти такую матрицу K_1, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{B}_{22} K_1 \widetilde{C}_{22} = \begin{bmatrix} 2I_s & 0 \\ 0 & I_{n-r-s} \end{bmatrix},$$

что эквивалентно

$$\widetilde{B}_{22} K_1 \widetilde{C}_{22} = I_{n-r}.$$

Откуда следует, что

$$K_1 = \widetilde{B}_{22}^{+} \widetilde{C}_{22}^{+}, \tag{37}$$

где M^+ псевдообращение по Муру-Пенроузу матрицы M.

Процедура каузализации позволяет преобразовать исходную систему к эквивалентной системе, содержащей явные выражения для динамической и алгебраической подсистем. Получим следующую обыкновенную систему:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \mathcal{A} x_1(k) + \mathcal{B}_1 w(k) + \mathcal{B}_2 u_1(k), \\ z(k) &= \mathcal{C}_1 x_1(k) + \mathcal{D}_{11} w(k) + \mathcal{D}_{12} u_1(k), \\ y(k) &= \mathcal{C}_2 x_1(k) + \mathcal{D}_{21} w(k) + \mathcal{D}_{22} u_1(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \overline{A}_{11} - \overline{A}_{12} \overline{A}_{22}^{-1} \overline{A}_{21}, & \mathcal{B}_i &= \overline{B}_{i1} - \overline{A}_{12} \overline{A}_{22}^{-1} \overline{B}_{i2}, \\ \mathcal{C}_i &= \overline{C}_{i1} - \overline{C}_{i2} \overline{A}_{22}^{-1} \overline{A}_{21}, & \mathcal{D}_{ij} &= D_{ij} - \overline{C}_{i2} \overline{A}_{22}^{-1} \overline{B}_{j2}, \end{aligned}$$

где $i, j = 1, 2$, $\overline{A} = A + B_u K_1 C_y$, $\overline{C}_1 = C_z + D_{zu} K_1 C_y$, $\overline{C}_2 = C_y$, $\overline{B}_1 = B_w + B_u K_1 D_{yw}$, $\overline{B}_2 = B_u$ и $\overline{D}_{11} = D_{zw} + D_{zu} K_1 D_{yw}$,

$$\widetilde{W} \overline{A} \widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{W} \overline{B}_w = \begin{bmatrix} \overline{B}_{11} \\ \overline{B}_{12} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{W} \overline{B}_u = \begin{bmatrix} \overline{B}_{21} \\ \overline{B}_{22} \end{bmatrix},$$
$$\overline{C}_z \widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} \end{bmatrix}, \qquad \overline{C}_y \widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} \end{bmatrix},$$

а $u_1(k)$ — новый закон управления. Исходная алгебро-разностная система после введения каузализирующей обратной связи может быть сведена к обыкновенной системе. Однако в общем случае эквивалентная система не удовлетворяет стандартным требованиям, накладываемым на объект управления. А именно, в общем случае не выполняется требование

$$\mathcal{D}_{22} = 0, \tag{38}$$

Ограничение (38) можно обойти, воспользовавшись заменой переменных

$$y^{(1)}(k) = y(k) - \mathcal{D}_{22} u_1(k).$$

После указанных выше преобразований система удовлетворяет стандартным требованиям, поэтому для нее применима уже решенная И.Г. Владимировым задача синтеза анизотропийного регулятора по выходу.

Исходя из условия оптимальности, синтез стабилизирующего регулятора разбивается на несколько подэтапов:

1. Синтез наихудшего формирующего фильтра замкнутой системы.

2. Синтез наблюдателя полного порядка для системы, взвешенной формирующим фильтром.

3. Решение задачи $\mathcal{H}_2$ оптимального управления для объекта, взвешенного формирующим фильтром.

Далее рассматриваются задачи синтеза *субоптимального анизотропийного управления* по состоянию и по вектору полной информации. Приведем постановку задачи ниже.

Рассмотрим дескрипторную систему, заданную в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), & (39)\\ z(k) &= Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k), & (40) \end{aligned}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a \geqslant 0$, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — управление, E, A, B_w, B_u, C, D_w, D_u известные действительные матрицы соответствующих размерностей, $\operatorname{rank}(E) = r < n$.

Предположим, что

1. система (39)–(40) является причинно управляемой и стабилизируемой;

2. выполнено ранговое ограничение

$$\operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc} E & B_w \end{array}\right].$$

Задача 2. *Входная последовательность W — стационарная гауссовская случайная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$. Предполагается, что известны скалярные величины $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$. Рассмотрим закон управления в виде:*

$$u(k) = K(x(k), w(k)).$$

Задачей синтеза субоптимального анизотропийного регулятора для дескрипторных систем является поиск такого закона управления $u(k) = K(x(k), w(k))$, при котором замкнутая система является допустимой и выполнено неравенство

$$|\!|\!| P_{cl} |\!|\!|_a \leqslant \gamma.$$

Данная задача решена с помощью двух техник: техники на основе Риккати-подхода и техники на основе матричных неравенств и выпуклой оптимизации.

Рассмотрим ***задачу субоптимального управления по состоянию.*** Будем искать закон управления в форме $u_{SF}(k) = F_2 x(k)$. Справедлива теорема.

Теорема 6. *Для заданного уровня средней анизотропии входного возмущения* $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$ *и числа* $\gamma > 0$ *замкнутая система* P_{cl}^{SF} *является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом* γ, *т.е.* $\|P_{cl}^{SF}\|_a \leqslant \gamma$ *если существуют такая матрица* $\Phi = \Phi^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и положительное число* $\eta > \gamma^2$, *которые удовлетворяют следующим условиям*

$$
\begin{gathered}
E^\top \Phi E \geqslant 0, \\
B_w^\top \Phi B_w + D_w^\top D_w - \gamma^2 I_{m_1} < 0, \\
B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u > 0, \\
-\tfrac{1}{2}\ln(\det((\eta-\gamma^2)(\eta I_{m_1} - B_w^\top \Phi B_w - D_w^\top D_w)^{-1})) \geqslant a, \\
E^\top \Phi E = A^\top \Phi A + C^\top C - \\
-(A^\top \Phi \overline{B} + S)(\overline{B}^\top \Phi \overline{B} + R)^{-1}(\overline{B}^\top \Phi A + S^\top),
\end{gathered}
$$

где $\overline{B} = \left[\begin{array}{cc} B_w & B_u \end{array}\right]$, $S = \left[\begin{array}{cc} C^\top D_w & C^\top D_u \end{array}\right]$, $R = \left[\begin{array}{cc} D_w^\top D_w - \eta I_{m_1} & D_w^\top D_u \\ D_u^\top D_w & D_u^\top D_u \end{array}\right]$.
При этом закон управления определяется по формуле:

$$
F_2 = -(B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u)^{-1}(B_u^\top \Phi A + D_u^\top C).
$$

Теперь приведем ***решение задачи субоптимального управления при полной информации.*** Будем искать закон управления в виде $u_{FI}(k) = F_1 w(k) + F_2 x(k)$. Методика синтеза субоптимального анизотропийного регулятора по полной информации может быть сформулирована в следующей теореме.

Теорема 7. *Для заданного уровня средней анизотропии входного возмущения* $a \geqslant 0$ *и скаляра* $\gamma > 0$ *замкнутая система* P_{cl}^{FI} *является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом* γ, *т.е.* $\|P_{cl}^{FI}\|_a \leqslant \gamma$, *если существуют такая матрица* $\Phi = \Phi^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и положительное число* $\eta > \gamma^2$, *которые удовлетворяют следующим условиям*

$$
\begin{gathered}
E^\top \Phi E \geqslant 0, \\
M_2 = B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u > 0, \\
M_3 = B_w^\top \Phi B_w + D_w^\top D_w - \gamma^2 I_{m_1} - N^\top M_2^{-1} N < 0, \\
-\tfrac{1}{2}\ln\det\left((\eta-\gamma^2)(-M_1)^{-1}\right) \geqslant a, \\
E^\top \Phi E = A^\top \Phi A + C^\top C - \\
-(A^\top \Phi \overline{B} + S)(\overline{B}^\top \Phi \overline{B} + R)^{-1}(\overline{B}^\top \Phi A + S^\top),
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
M_1 = B_w^\top \Phi B_w + D_w^\top D_w - \eta I_{m_1} - N^\top M_2^{-1} N, \\
N = B_u^\top \Phi B_w + D_u^\top D_w,\ \overline{B} = \left[B_w \quad B_u\right], \\
S = \left[\begin{array}{cc} C^\top D_w & C^\top D_u \end{array}\right],\ R = \left[\begin{array}{cc} D_w^\top D_w - \eta I_{m_1} & D_w^\top D_u \\ D_u^\top D_w & D_u^\top D_u \end{array}\right].
\end{gathered}
$$

При этом искомый закон управления может быть вычислен из следующих соотношений

$$F_1 = -(B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u)^{-1}(B_u^\top \Phi B_w + D_u^\top D_w),$$
$$F_2 = -(B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u)^{-1}(B_u^\top \Phi A + D_u^\top C).$$

При использовании техники матричных неравенств были получены методики синтеза субоптимального анизотропийного управления в следующем виде. Рассмотрим закон управления $u = F_2 x(k)$ и предположим, что $D_u = 0$ и $m_1 \leqslant p$. Учитывая предположение о том, что система (39) является регулярной, мы можем найти две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, которые преобразуют исходную систему (39)–(40) к эквивалентной форме (4)–(6). Ниже будем использовать следующие обозначения:

$$E_d = \widetilde{W} E \widetilde{V},\ A_d = \widetilde{W} A \widetilde{V},\ B_{wd} = \widetilde{W} B_w,\ B_{ud} = \widetilde{W} B_u,\ C_d = C\widetilde{V},\ D_{wd} = D_w.$$

Для того, чтобы найти субоптимальный регулятор методами выпуклой оптимизации, для замкнутой системы необходимо применить теорему 3 и выразить из переменных матрицу F_2. Так как непосредственное применение теоремы 3 приводит к нелинейным выпуклым ограничениям, то получить регулятор с помощью алгоритмов не получится. Чтобы обойти этот недостаток необходимо рассмотреть двойственную систему, которая будет имеет следующую реализацию в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} E^\top x'(k+1) &= (A + B_u F)^\top x'(k) + C^\top w'(k), && (41)\\ z'(k) &= B_w^\top x'(k) + D_w^\top w'(k), && (42) \end{aligned}$$

Следует отметить, что для $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ норм в линейных системах выполняется условие двойственности, т.е. $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ нормы исходной и двойственной систем совпадают. К сожалению, анизотропийная норма подобным свойством не обладает, однако в случае когда $m_1 \leqslant p$, требования, предъявляемые к величине анизотропийной нормы исходной замкнутой системы, могут быть выполнены и для системы, двойственной к ней.

Теорема 8. *Рассмотрим систему* (39)–(40). *Предположим, что* $\operatorname{rank}(E^\top) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^\top & C^\top \end{bmatrix}$ *и* $m_1 \leqslant p$. *Для заданных числа* $\gamma > 0$ *и уровня средней анизотропии входной возмущающей последовательности* W $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$ *замкнутая система* P_{cl}^{SF} *является допустимой, а ее анизотропийная норма удовлетворяет неравенству* $\|P_{cl}^{SF}\|_a < \gamma$, *если найдутся такие матрицы* $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times m_2}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$, *и число* $\eta > \gamma^2$, *для которых справедливы неравенства*

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & \Lambda_{41}^\top & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^\top & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^\top \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^\top \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & -(Q+Q^\top) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \qquad (43)$$

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/p} < \gamma^2, \tag{44}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p + C_d \Theta C_d^\top & D_{wd}^\top \\ D_{wd} & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{45}$$

где

$$\begin{aligned}
\Lambda_{11} &= -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top,\ \Lambda_{21} = A_d\Gamma^\top + B_{ud}Z^\top\Omega^\top, \\
\Lambda_{31} &= C_d\Gamma^\top,\ \Lambda_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^\top, \\
\Lambda_{22} &= \Pi A_d^\top + A_d\Pi^\top + \Phi Z B_{ud}^\top + B_{ud}Z^\top\Phi^\top - \Theta, \\
\Lambda_{52} &= B_{wd}^\top,\ \Lambda_{53} = D_{wd}^\top,\ \Lambda_{32} = C_d\Pi^\top.
\end{aligned}$$

Остальные обозначения определяются по формулам
$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$, $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$, $\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}$.
Тогда допустимый регулятор в форме статической обратной связи по состоянию может быть найден по формуле:

$$F_2 = Z^\top \begin{bmatrix} Q^{-\top} & 0 \\ -S^{-\top}R^\top Q^{-\top} & S^{-\top} \end{bmatrix} \widetilde{V}^{-1}. \tag{46}$$

Теорема 8 позволяет находить γ-оптимальное управление, решая оптимизационную задачу, подобно той, что рассмотрена в замечании 1, а также налагать дополнительные условия в виде ограничения на область расположения конечных собственных значений пары матриц замкнутой системы $(E, A + B_uF_2)$. Тогда дополнительно к условиям теоремы 8 необходимо потребовать выполнения условия

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\left(\begin{bmatrix} A_d \\ -E_d \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B_{2d} \\ 0 \end{bmatrix} Z^\top\right)\mho\right) < 0, \tag{47}$$

где

$$G = \begin{bmatrix} Q^\top & 0 \\ R^\top & S^\top \end{bmatrix},\ \mho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

для $0 < \omega < 1$ и $X = X^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X > 0$. В случае, если неравенства (43)–(47), то конечные собственные значения замкнутой системы лежат внутри диска с центром в начале координат и радиусом ω.

В **главе 4** рассмотрена задача робастного анизотропийного анализа и синтеза робастных анизотропийных регуляторов для дискретных дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Результаты, полученные в данной главе, основаны на обобщениях результатов синтеза субоптимальных регуляторов, представленных в третьей главе. Все результаты сформулированы в терминах матричных неравенств, а также получены выпуклые ограничения для решения задач анализа и синтеза. Пусть дескрипторная система задана в пространстве состояний в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= A_\Delta x(k) + B_{\Delta w} w(k) + B_{\Delta u} u(k), &(48)\\
y(k) &= C_\Delta x(k) + D_{\Delta w} w(k), &(49)
\end{aligned}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^q$ — случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — выход системы, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ — управление. Матрица E является вырожденной, т.е. $\operatorname{rank}(E) = r < n$.

Матрицы системы представимы в следующем виде: $A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_{\Delta w} = B_w + M_B^w \Delta N_B^w$, $B_{\Delta u} = B_u + M_B^u \Delta N_B^u$, $C_\Delta = C + M_C \Delta N_C$, $D_{\Delta w} = D_w + M_D \Delta N_D$. Здесь матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s\times s}$ неизвестная матрица с ограниченной спектральной нормой, т.е. $\|\Delta\|_2 \leqslant 1$. Следует заметить также, что для спектральной нормы справедливо следующее утверждение: $\|\Delta\|_2 \leqslant 1$, если и только если $\Delta^\top \Delta \leqslant I_s$.

Система (48)–(49) преобразуется во вторую эквивалентную форму с использованием следующих обозначений
$A_d = \overline{W} A \overline{V}$, $B_{wd} = \overline{W} B_w = \begin{bmatrix} B_{w1}^d \\ B_{w2}^d \end{bmatrix}$, $B_{ud} = \overline{W} B_u$, $C_d = C\overline{V} = \begin{bmatrix} C_1^d & C_2^d \end{bmatrix}$, $D_{wd} = D_w$, $M_A^d = \overline{W} M_A$, $N_A^d = N_A \overline{V}$, $M_B^{wd} = \overline{W} M_B^w = \begin{bmatrix} M_{B1}^{wd} \\ M_{B2}^{wd} \end{bmatrix}$, $N_B^{wd} = N_B^w$, $M_B^{ud} = \overline{W} M_B^u$, $N_B^{ud} = N_B^u$, $M_C^d = M_C$, $N_C^d = N_C \overline{V} = \begin{bmatrix} N_{C1}^d & N_{C2}^d \end{bmatrix}$,

Предположим, что

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rank}\left(E^\top\right) &= \operatorname{rank}\left[E^\top, C^\top, N_C^\top\right],\\
\operatorname{rank}(E) &= \operatorname{rank}\left[E, B_w, M_B^w\right].
\end{aligned}
$$

Введем определение анизотропийной нормы для системы с неопределенностями.

Определение 10. *Рассмотрим отображение $P_\Delta : W \to Y$, которое задается уравнениями (48)–(49). Анизотропийной нормой системы с параметрическими неопределенностями будем называть норму оператора P_Δ, определяемую следующим соотношением:*

$$
\|P_\Delta\|_a = \sup_{W \in \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a} \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.
$$

Ниже будут рассмотрены следующие задачи:

Задача 3. *Для системы с реализацией в пространстве состояний (48)–(49) и ограниченных по норме неопределенностей требуется проверить свойство робастной допустимости и выполнение ограниченности анизотропийной нормы* *системы в виде:*

$$\|P_\Delta\|_a < \gamma$$

для известных числовых значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$.

Задача 4. *Для системы с реализацией в пространстве состояний* (48)–(49) *и известного уровня средней анизотропии входного возмущения $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $(a \geqslant 0)$ требуется построить закон управления $u(k) = Kx(k)$, который делает систему робастно допустимой ($\mathfrak{D}$–допустимой) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы оператора замкнутой системы $\gamma > 0$.*

Задача анизотропийного анализа может быть решена с помощью следующей теоремы.

Теорема 9. *Для заданных чисел $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ система* (48)–(49) *является робастно допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом γ, т.е. $\|P_\Delta\|_a < \gamma$, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,$\Psi \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r\times r}$, для которых справедливы матричные неравенства*

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/q} < \gamma^2, \tag{50}$$

$$\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_1 N_1^\top N_1 & M_1 \\ M_1^\top & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \tag{51}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon_2 N_2^\top N_2 & M_2 \\ M_2^\top & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0. \tag{52}$$

Здесь

$$\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_q & D_{wd}^\top & (B_{w1}^d)^\top H^\top \\ D_{wd} & -I_p & 0 \\ HB_{w1}^d & 0 & -H - H^\top + L \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_D & 0 \\ 0 & HM_{B1}^{wd} \end{bmatrix}, \; N_1 = \begin{bmatrix} N_D & 0 & 0 \\ N_B^{wd} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & L^\top - Q^\top - \frac{1}{2}Q & 0 \\ A_d^\top \Gamma^\top & \Pi A_d + A_d^\top \Pi^\top - \Theta & \Pi B_{wd} & A_d^\top \Gamma^\top & C_d^\top \\ B_{wd}^\top \Gamma^\top & B_{wd}^\top \Pi^\top & -\eta I_q & B_{wd}^\top \Gamma^\top & D_{wd}^\top \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^\top & 0 \\ 0 & C_d & D_{wd} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ \Pi M_A^d & \Pi M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C^d & M_D \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & N_C^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Решение задачи синтеза также опирается на использование двойственной системы и предположения о том, что анизотропийная норма исходной системы при $p \leqslant q$ не превосходит анизотропийную норму двойственной ей системы.

Теорема 10. *Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора в виде $u(k) = Fx(k)$ для системы (48)–(49) для заданных чисел $\gamma > 0$ и $a > 0$ ($\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$) разрешима, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,$\Psi \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r\times r}$, and $Z \in \mathbb{R}^{n\times m}$, для которых справедливы неравенства*

$$\begin{array}{rcl} \eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/p} & < & \gamma^2, \\ \begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_1 N_1 N_1^\top & M_1^\top \\ M_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} & < & 0, \\ \begin{bmatrix} \Lambda + \varepsilon_2 M_2^\top M_2 & N_2 \\ N_2^\top & -\varepsilon_2 I_{5s} \end{bmatrix} & < & 0. \end{array}$$

Здесь

$$M_1 = \begin{bmatrix} (M_D)^\top & 0 & 0 \\ \left(M_C^d H\right)^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (N_D)^\top & 0 \\ 0 & \left(N_{C1}^d\right)^\top \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & \left(M_A^d\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(M_B^{ud}\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(M_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & \left(M_B^{wd}\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_D^w)^\top & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \Gamma\left(N_A^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Gamma\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ \Pi\left(N_A^d\right)^\top & \Phi Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Pi\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma\left(N_A^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Gamma\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(N_B^{wd}\right)^\top & (N_D^w)^\top \end{bmatrix},$$

$$\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p & D_{wd} & C_1^d H \\ D_{wd}^\top & -I_q & 0 \\ H^\top (C_1^d)^\top & 0 & -H - H^\top + L \end{bmatrix},$$

$$
\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & \Lambda_{41}^\top & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^\top & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^\top \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^\top \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & -(Q+Q^\top) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_q \end{bmatrix},
$$

$$
\Lambda_{11} = -\tfrac{1}{2}Q - \tfrac{1}{2}Q^\top,\ \Lambda_{21} = A_d\Gamma^\top + B_{ud}Z^\top\Omega^\top,
$$

$$
\Lambda_{31} = C_d\Gamma^\top,\ \Lambda_{41} = L - Q - \tfrac{1}{2}Q^\top,
$$

$$
\Lambda_{22} = \Pi A_d^\top + A_d\Pi^\top + \Phi Z B_{ud}^\top + B_{ud}Z^\top\Phi^\top - \Theta,
$$

$$
\Lambda_{32} = C_d\Pi^\top,\ \Lambda_{52} = B_{wd}^\top,\ \Lambda_{53} = D_{wd}^\top.
$$

$$
\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},\ \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},
$$

$$
\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.
$$

Закон управления можно найти по формуле

$$
F = Z^\top \begin{bmatrix} Q^{-\top} & 0 \\ -S^{-\top}R^\top Q^{-\top} & S^{-\top} \end{bmatrix} \overline{V}^{-1}.
$$

При решении задачи модального управления к условиям, рассмотренным в теореме 10 следует добавить следующие неравенства:

$$
\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_3 M_3 M_3^\top & N_3^\top \\ N_3 & -\varepsilon_3 I_s \end{bmatrix} < 0.
$$

Здесь

$$
\Xi = \begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\left(\begin{bmatrix} A \\ -E \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} Z^\top\right)\mho\right),
$$

где

$$
M_3 = \begin{bmatrix} M_A^d \\ 0 \end{bmatrix},\ N_3 = N_A^d G\mho,\ \ G = \begin{bmatrix} Q & R \\ R^\top & S \end{bmatrix},\ \ \mho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

и потребовать их выполнения для $n \times n$ матрицы $X > 0$.

Отдельно решена задача синтеза $\mathcal{H}_\infty$ робастного регулятора по состоянию. В данном случае рассматривается система вида:

$$
\begin{aligned} Ex(k+1) &= A_\Delta x(k) + B_{\Delta w}w(k) + B_{\Delta u}u(k), && (54) \\ y(k) &= C_\Delta x(k) + D_{\Delta w}w(k) + D_{\Delta u}u(k). && (55) \end{aligned}
$$

Матрица $D_{\Delta u} = D_u + M_D^u \Delta N_D^u$, а остальные обозначения определены выше.

В отличие от задач анизотропийного анализа и управления, $\mathcal{H}_\infty$ задачи не требуют дополнительных ранговых ограничений типа (50)–(50) и условия $p \leqslant q$. Кроме того, матрица $D_{\Delta u}$ может быть ненулевой. Задача робастного $\mathcal{H}_\infty$ управления заключается в поиске закона управления в форме статической обратной связи по состоянию

$$
u(k) = Fx(k),
$$

для которого замкнутая система (54)–(55) робастно устойчива, а $\mathcal{H}_\infty$ норма ограничена сверху числом γ, т.е.

$$\sup_{W\in\mathcal{L}_2}\frac{\|Y\|_2}{\|W\|_2}<\gamma$$

для всех Δ из заданного множества.

Приведем ниже формулировки теорем, решающих задачи робастного $\mathcal{H}_\infty$ анализа и синтеза.

Теорема 11. *(Частотная теорема) Система* (54)–(55) *для* $u(k)=0$ *является робастно допустимой, а ее* $\mathcal{H}_\infty$ *норма ограничена сверху положительным числом* γ *для всех* $\Delta:\ \Delta\Delta^\top\leqslant I_s$, *если найдется такое число* $\varepsilon>0$, *и матрицы* $Q\in\mathbb{R}^{r\times r}$, $R\in\mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $L\in\mathbb{R}^{r\times r}$, $L>0$, *при которых выполняются следующие неравенства:*

$$\begin{bmatrix}\Sigma+\varepsilon N_1^\top N_1 & M_1\\ M_1^\top & -\varepsilon I_{4s}\end{bmatrix}<0.$$

Здесь

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & \Sigma_{41}^\top & 0\\ A_d^\top\Gamma^\top & \Sigma_{22} & \Pi B_{wd} & A_d^\top\Gamma^\top & C_d^\top\\ B_{wd}^\top\Gamma^\top & B_{wd}^\top\Pi^\top & -\gamma^2 I_q & B_{wd}^\top\Gamma^\top & D_{wd}^\top\\ \Sigma_{41} & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q-Q^\top & 0\\ 0 & C_d & D_{wd} & 0 & -I_p\end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11}=-\frac{1}{2}Q-\frac{1}{2}Q^\top,\ \Sigma_{41}=L-Q-\frac{1}{2}Q^\top,\ \Sigma_{22}=\Pi A_d+A_d^\top\Pi^\top-\Theta,$$

$$M_1=\begin{bmatrix}\Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0\\ \Pi M_A^d & \Pi M_B^{wd} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_C^d & M_D^w\end{bmatrix},\ N_1=\begin{bmatrix}0 & N_A^d & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_B^{wd} & 0 & 0\\ 0 & N_C^d & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_D^w & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Theta=\begin{bmatrix}L & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \Pi=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & S\end{bmatrix},\ \Gamma=\begin{bmatrix}Q & R\end{bmatrix}.$$

Теорема 12. *Для заданного положительного числа* $\gamma>0$ *задача синтеза* $\mathcal{H}_\infty$ *робастного регулятора разрешима, если найдутся такие матрицы* $L\in\mathbb{R}^{r\times r}$, $L>0$, $Q\in\mathbb{R}^{r\times r}$, $R\in\mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $Z\in\mathbb{R}^{n\times m}$ *и число* $\varepsilon>0$, *для которых справедливы следующие матричные неравенства:*

$$\begin{bmatrix}\Lambda+\varepsilon M^\top M & N\\ N^\top & -\varepsilon I_{6s}\end{bmatrix}<0,$$

$$N = \left[\begin{array}{cccccc} \Gamma\left(N_A^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Gamma\left(N_C^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_D^u\right)^\top & 0 & 0 \\ \Pi\left(N_A^d\right)^\top & \Phi Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Pi\left(N_C^d\right)^\top & \Phi Z\left(N_D^u\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma\left(N_A^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Gamma\left(N_C^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_D^u\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(N_B^{wd}\right)^\top & \left(N_D^w\right)^\top \end{array}\right],$$

$$M = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \left(M_A^d\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(M_B^{ud}\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(M_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(M_D^u\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & \left(M_B^{wd}\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(M_D^w\right)^\top & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \Lambda = \left[\begin{array}{ccccc} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & \Lambda_{41}^\top & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^\top & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^\top \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\gamma^2 I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^\top \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & -(Q+Q^\top) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_q \end{array}\right],$$

где
$\Lambda_{11} = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top$, $\Lambda_{21} = A_d\Gamma^\top + B_{ud}Z^\top\Omega^\top$, $\Lambda_{31} = C_d\Gamma^\top + D_u Z^\top\Omega^\top$,
$\Lambda_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^\top$, $\Lambda_{22} = \Pi A_d^\top + A_d\Pi^\top + \Phi Z B_{ud}^\top + B_{ud}Z^\top\Phi^\top - \Theta$,
$\Lambda_{32} = C_d\Pi^\top + D_u Z^\top\Phi^\top$, $\Lambda_{52} = B_{wd}^\top$, $\Lambda_{53} = D_{wd}^\top$.

$$\Theta = \left[\begin{array}{cc} L & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \Pi = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & S \end{array}\right], \Phi = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{array}\right],$$

$$\Omega = \left[\begin{array}{cc} I_r & 0 \end{array}\right], \Gamma = \left[\begin{array}{cc} Q & R \end{array}\right].$$

Коэффициент усиления можно определить по формуле

$$F = Z^\top \left[\begin{array}{cc} Q^{-\top} & 0 \\ -S^{-\top}R^\top Q^{-\top} & S^{-\top} \end{array}\right] \overline{V}^{-1}.$$

Глава 5 посвящена вопросам анизотропийного анализа и синтеза в параметрически неопределенных обыкновенных системах. Рассматриваются два типа параметрических неопределенностей: политопические и ограниченные по норме неопределенности. Для обоих типов неопределенностей получены условия ограниченности анизотропийной нормы сверху заданным положительным числом, а также разработаны вычислительные методики оценки верхней границы анизотропийной нормы параметрически неопределенной системы.

Системы с политопическими неопределенностями. Рассмотрим линейную систему с реализацией в пространстве состояний в виде:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\Theta)x(k) + B_u(\Theta)u(k) + B_w(\Theta)w(k), & (56) \\ z(k) &= C(\Theta)x(k) + D_u(\Theta)u(k) + D_w(\Theta)w(k), & (57) \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее случайное возмущение с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ $(a \geqslant 0)$, $u(k) \in \mathbb{R}^q$ — вектор управления, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход системы.

Матрицы $A(\Theta)$, $B_w(\Theta)$, $B_u(\Theta)$, $C(\Theta)$, $D_w(\Theta)$ определяются из выражений

$$A(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \Theta_i A_i, \;\; B_w(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \Theta_i B_{wi},$$
$$B_u(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \Theta_i B_{ui}, \;\; D_u(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \Theta_i D_{ui},$$
$$C(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \Theta_i C_i, \quad D_w(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \Theta_i D_{wi}, \quad (58)$$

где вектор неопределенных параметров Θ обладает следующими свойствами

$$\sum_{i=1}^{r} \Theta_i = 1, \quad \Theta_i \geqslant 0, \quad \Theta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = \overline{1, r}. \quad (59)$$

Определим анизотропийную норму системы (56)–(57) как

$$|\!|\!| F_\Delta |\!|\!|_a = \sup_{W:\, A(W) \leqslant a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

В задаче анализа необходимо разработать вычислительную методику для проверки робастной устойчивости и анизотропийного качества разомкнутой системы (56)–(57) для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ и заданного числа $\gamma > 0$. Т.е. задачу анализа можно сформулировать следующим образом.

Задача 5. *Для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ входного случайного возмущения $w(k)$ и заданного числа $\gamma > 0$ при условии, что $u(k) = 0$ проверить выполняется ли условие $|\!|\!| F_\Delta |\!|\!|_a < \gamma$ для всех возможных Θ, удовлетворяющих* (58)–(59).

Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора по состоянию для дескрипторной системы может быть сформулирована следующим образом.

Задача 6. *Для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ и заданного числа $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде $u(k) = Kx(k)$, который робастно стабилизирует разомкнутую систему* (56)–(57) *и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы, т.е. $|\!|\!| F_\Delta^{cl} |\!|\!|_a < \gamma$ для всех возможных Θ, удовлетворяющих* (58)–(59).

Для решения задачи анизотропийного анализа политопических систем, получим сначала условия, зависящие от параметра. Они сформулированы в следующей теореме.

Теорема 13. *Система* (56)–(57) *является робастно устойчивой, а ее анизотропийное качество не превышает заданного числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих* (58)–(59), *если существуют такие матрицы $P(\Theta) > 0$, невырожденная матрица $G(\Theta)$, $\Psi(\Theta) > 0$ и число $\eta(\Theta) > \gamma^2$, для которых справедливы матричные неравенства:*

$$\eta(\Theta) - \left(e^{-2a} \det \Psi(\Theta)\right)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta(\Theta) I_m & \star & \star \\ G(\Theta) B_w(\Theta) & L(\Theta) & \star \\ D_{zw}(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta(\Theta) I_m & \star & \star \\ G(\Theta) A(\Theta) & G(\Theta) B_w(\Theta) & L(\Theta) & \star \\ C_z(\Theta) & D_{zw}(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0$$

где $L(\Theta) = -G(\Theta) - G^{\top}(\Theta) + P(\Theta)$.

Условия теоремы 13 сформулированы в компактном виде и зависят явно от параметра Θ. К сожалению, такая параметрическая зависимость может существенным образом усложнить методику анализа исходной системы и делает невозможным решение задачи синтеза. Поэтому приведенная ниже теорема представляет собой независящие от неопределенных параметров достаточные условия оценки анизотропийной нормы политопической системы.

Теорема 14. *Система* (56)–(57) *является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих* (58)–(59), *если существуют такие матрицы $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_i и число $\eta > \gamma^2$, при которых справедливы следующие матричные неравенства:*

$$\eta - \left(e^{-2a} \det \Psi\right)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -G_i - G_i^{\top} + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$
\begin{bmatrix} -G_i - G_i^\top + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & \star \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -G_j - G_j^\top + \Phi_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & \star \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,
$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Задачу синтеза можно решить, используя следующую теорему.

Теорема 15. *Система* (56)–(57) *робастно стабилизируема законом управления в виде статической обратной связи по состоянию* $u(k) = Kx(k)$, *а ее анизотропийная норма строго ограничена числом* $\gamma > 0$ *для известного уровня средней* $a \geqslant 0$ *входного возмущения для всех возможных неопределенностей, определяемых выражениями* (58)–(59) *если существуют такие матрицы* $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, $\overline{L}$, $\overline{G}$ *и число* $\eta > \gamma^2$, *для которых справедливы неравенства*

$$
\eta - \left(e^{-2a} \det \Psi\right)^{1/m} < \gamma^2,
$$

$$
\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,
$$

$$
\begin{bmatrix} -\overline{G} - \overline{G}^\top + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i \overline{G} + B_{ui} \overline{L} & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i \overline{G} + D_{ui} \overline{L} & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,
$$

$i = \overline{1, r}$. *При этом закон управления определяется выражением:*

$$
K = LG^{-1}.
$$

Полученные условия могут быть использованы для синтеза робастного анизотропийного регулятора с расположением полюсов замкнутой системы в заданной области внутри диска с центром $(x_c; 0)$ и радиусом α. Для решения задачи модального управления к условиям теоремы необходимо добавить дополнительные r линейных матричных неравенств

$$
\begin{bmatrix} -\alpha^2 R_i & A_i \overline{G} - x_c \overline{G} + B_{ui} \overline{L} \\ \star & -\overline{G} - \overline{G}^\top + R_i \end{bmatrix} < 0,
$$

которые должны выполняться для заданных ранее x_c и α, а также для переменных $R_i > 0$.

Системы с ограниченными по норме неопределенностями. Рассмотрим постановки задач анизотропийного анализа и синтеза систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

$$x(k+1) = A^{\Delta}x(k) + B_w^{\Delta}w(k) + B_u u(k), \quad (60)$$

$$y(k) = C_y^{\Delta}x(k) + D_{yw}^{\Delta}w(k), \quad (61)$$

$$z(k) = C_z^{\Delta}x(k) + D_{zw}^{\Delta}w(k) + D_{zu}u(k), \quad (62)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — управление, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $z(k) \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $A^{\Delta} = A + M_A \Delta N_A$, $B_w^{\Delta} = B_w + M_B \Delta N_B$, $C_z^{\Delta} = C_z + M_C \Delta N_C$, $C_y^{\Delta} = C_y + M_{Cy}\Delta N_{Cy}$, $D_{yw}^{\Delta} = D_{yw} + M_{Dy}\Delta N_{Dy}$, $D_{zw}^{\Delta} = D_{zw} + M_D \Delta N_D$. Матрицы A, B_w, B_u C, D_w, C_z, D_{zw}, D_{zu}, M_A, N_A, M_B, N_B, M_C, N_C, M_D, N_D, M_{Cy}, N_{Cy}, M_{Dy} и N_{Dy} — постоянные, имеющие соответствующие размерности. Матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ — неизвестная, ограниченная по спектральной норме $\overline{\sigma}(\Delta) \leqslant 1$, т.е. $\Delta^{\top}\Delta \leqslant I_s$.

Сформулируем две задачи управления, которые будут решены далее.

Задача 7. (Задача синтеза статического регулятора по состоянию) *Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти управление по состоянию в виде*

$$u(k) = Fx(k), \qquad F \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, \quad (63)$$

которое стабилизирует систему (60)–(62) *и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ, т.е. $\|\mathcal{F}_{cl}^{sf}\|_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.*

Задача 8. (Задача синтеза статического регулятора по выходу) *Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде статической обратной связи по выходу*

$$u(k) = Ky(k), \qquad K \in \mathbb{R}^{m_1 \times p_1}, \quad (64)$$

который стабилизирует систему (60)–(62) *и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ, т.е. $\|\mathcal{F}_{cl}^{out}\|_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.*

Решение задачи анализа сформулировано в теореме.

Теорема 16. *Для заданных действительных чисел $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ система* (60)–(61) *робастно устойчива, а ее анизотропиная норма ограничена сверху параметром γ, т.е. $\|F_{\Delta}\|_a < \gamma$, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, а также $n \times n$-матрица $Y = Y^{\top} > 0$, $m \times m$-матрица $\Psi = \Psi^{\top} > 0$, для которых справедливы следующие неравенства:*

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B^\top & D^\top \\ B & -Y & 0 \\ D & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \ M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Y & 0 & YA^\top & YC^\top \\ 0 & -\eta I_m & B^\top & D^\top \\ AY & B & -Y & 0 \\ CY & D & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \tag{65}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & M_D \end{bmatrix}, \ N_2 = \begin{bmatrix} N_A Y & 0 & 0 & 0 \\ N_C Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{66}$$

Перейдем к решению задач синтеза.

Теорема 17. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача 7 разрешима, если существуют числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $Y = Y^\top > 0$, $(m \times m)$-матрица Ψ и $(m_1 \times n)$-матрица Λ такие, что выполнены неравенства*

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B_w^\top & D_{zw}^\top \\ B_w & -Y & 0 \\ D_{zw} & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \ M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Y & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ AY + B_u\Lambda & B_w & -Y & \star \\ C_z Y + D_{zu}\Lambda & D_{zw} & 0 & -I_p \end{bmatrix},$$

$$
M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & M_D \end{bmatrix}, \; N_2 = \begin{bmatrix} N_A Y & 0 & 0 & 0 \\ N_C Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

При этом закон управления можно найти в виде:

$$
F = \Lambda Y^{-1}.
$$

Решение задачи 8 дается в теореме 18.

Теорема 18. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача 8 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Pi = \Pi^\top > 0$, $(m \times m)$-матрица Ψ, $(n \times n)$-матрица Y и $(m_1 \times p)$-матрица K такие, что выполнены следующие неравенства:*

$$
\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{6s} \end{bmatrix} < 0,
$$

$$
\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,
$$

$$
\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{3s} \end{bmatrix} < 0,
$$

причем

$$
\Phi \Pi = I_n.
$$

Здесь

$$
\Omega = \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},
$$

$$
M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & B_u K M_{Cy} & 0 & M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Cy} & M_C & 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix}, \; N_1 = \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \\ N_{Cy} & 0 & 0 & 0 \\ N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_{Dy} & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & * & * \\ B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},
$$

$$
M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix}, \; N_2 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_{Dy} & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

В **главе 6** предлагается расширение анизотропийной теории на задачи технической диагностики отказов в линейных системах, а также синтеза отказоустойчивого управления. Рассмотрены две задачи: оценка отказа измерительных устройств и построение оценивателя отказов с анизотропийным критерием качества, а также оценка исполнительных и измерительных устройств на основе синтеза оценивающего фильтра с анизотропийным критерием. Рассмотрим постановку и решение задачи в случае отказов измерительных устройств:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), & (67)\\ y(k) &= Cx(k) + D_f f(k), & (68) \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $w(k) \in \mathbb{R}^l$ — случайное входное возмущение, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ — управление, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $f(k) \in \mathbb{R}^p$ — функция отказа. Матрицы A, B_w, B_u, C, D_f являются постоянным действительным соответствующих размерностей, а матрица D_f предполагается невырожденной. Тогда задачу диагностики отказов измерительных устройств с анизотропийным критерием качества можно сформулировать в следующем виде.

Задача 9. *Для системы* (67)–(68) *требуется найти такие матрицы* K, F, L *с целью оценки функции отказа* $\widehat{f}(k)$, *для которых справедливы соотношения* $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{E}\, e(k) = 0$, *а также* $\|e(k)\|^2 < \gamma\|w(k)\|^2$ *на множестве всех входных случайных последовательностей* $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *с ограниченным уровнем средней анизотропии* $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a \geqslant 0$. *Число* $\gamma > 0$ *считается известным, а* $\|e(k)\|^2 = \mathbf{E}\, e^\top(k)e(k)$ *и* $\|w(k)\|^2 = \mathbf{E}\, w^\top(k)w(k)$.

Теорема 19. *Для заданного уровня средней анизотропии входного случайного возмущения* $a \geqslant 0$ *и положительного числа* $\gamma > 0$ *задача 9 разрешима, если существуют такие матрицы* $P > 0$, G_1, G_2, H, $\Psi > 0$, Z_1, Z_2 *и число* $\eta > \gamma^2$ *для которых справедливы неравенства*

$$\begin{bmatrix} -P+I & 0 & \Phi \\ 0 & -\eta I & T_w^\top G \\ \Phi^\top & G^\top T_w & -G-G^\top+P \end{bmatrix} < 0,$$

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/l} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_l & T_w^\top H \\ H^\top T_w & -H-H^\top+P \end{bmatrix} < 0,$$

где $T_w = \begin{bmatrix} B_w \\ -CB_w \end{bmatrix}$, $G^\top = \begin{bmatrix} G_1 & \varepsilon G_2 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$, $\varepsilon = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$, $\Phi = S^\top G = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$, $\varphi_{11} = G_1A + Z_1C - \varepsilon G_2CA - \varepsilon Z_2C$, $\varphi_{12} = Z_1 - \varepsilon Z_2$, $\varphi_{21} = -Z_2C - G_2CA$, $\varphi_{22} = -Z_2$.

Вспомогательные матрицы Q *и* R *определяются из соотношений*

$$R = \left(G_2^{-1}Z_2 - CG_1^{-1}Z_1\right)^{-1},\ Q = G_1^{-1}Z_1R.$$

Матрицы наблюдателя вычисляются по формулам

$$F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & -I \end{bmatrix},\ K = \begin{bmatrix} I + QC & Q \\ RC & R \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Более того, функция отказа датчиков может быть найдена в виде:

$$\widehat{f}(k) = \begin{bmatrix} 0 & D_f^{-1} \end{bmatrix} \widehat{\overline{x}}(k). \tag{69}$$

На основе рассмотренного метода можно предложить схему реализации отказоустойчивого управления (маскирование отказа), которая реализуется следующим образом. Оценка функции отказа $\widehat{f}(k)$ может быть получена с использованием выражения (69). Тогда, вычитая слагаемое $D_f\widehat{f}(k)$ из измеряемого выхода, получаем

$$y_m(k) = y(k) - D_f\widehat{f}(k).$$

Заменим текущие измерения $y(t)$ на скомпенсированные измерения $y_m(k)$. Тогда выход системы (67)–(68) будет определяться выражением

$$y(k) = Cx(k) + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} e(t).$$

Если в системе не происходит отказа, то ошибка оценивания равна нулю и система работает в обычном режиме. В случае возникновения отказов датчиков математическое ожидание ошибки $e(k)$ асимптотически стремится к нулю в результате применения маскирующей процедуры.

Чтобы воспользоваться данной методикой при синтезе отказоустойчивых систем, необходимо выполнить следующую последовательность действий.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Рассмотрим объект в виде:

$$x_p(k+1) = A_p x_p(k) + B_{up}u(k) + B_{wp}w(k), \tag{70}$$
$$y_p(k) = C_p x_p(k) + D_f f(k), \tag{71}$$

где $x_p(k) \in \mathbb{R}_p^n$ — состояние объекта управления, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайное внешнее гауссовское возмущение с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$, $u(k) \in \mathbb{R}^q$ — сигнал управления, $y_p(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $f(k) \in \mathbb{R}^p$ — вектор отказа датчиков.

Для системы (70)–(71) синтезируется регулятор по выходу с необходимым критерием качества в виде:

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_{uc}y_p(k), \tag{72}$$
$$u(k) = C_c x_c(k), \tag{73}$$

где $x_c(k) \in \mathbb{R}_c^n$ — состояние регулятора.

Шаг 2. С помощью процедуры, описанной в теореме 19 строится наблюдатель отказов для замкнутой системы с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} A_p & B_{up}C_c \\ B_cC_p & A_c \end{bmatrix},\ B_u = \begin{bmatrix} B_{up} \\ 0 \end{bmatrix},\ B_w = \begin{bmatrix} B_{wp} \\ 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} C_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. В случае, если $\mid \hat{f}(k) \mid > \alpha$, где α — вектор, компоненты которого задают порог чувствительности к наличию сбоя в системе, то применяется закон управления по маскированному выходу $y_m(k)$. В противном случае, управление ищется с помощью выражения (73).

Рассмотрим систему, динамика которой задана в пространстве состояний в форме

$$x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k) + B_w w(k) + Ff(k), \tag{74}$$
$$y(k) = Cx(k) + D_w w(k) + Hf(k) \tag{75}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайное внешнее гауссовское возмущение с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$, $u(k) \in \mathbb{R}^q$ — сигнал управления, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $f(k) \in \mathbb{R}^s$ — вектор отказа. Матрицы A, B_u, B_w, F, C, D_w, H являются постоянными матрицами соответствующих размерностей. Без потери общности полагаем, что $u(k) = 0$. Заметим также, что $f(k) = \begin{bmatrix} f_a^\top(k) & f_s^\top(k) \end{bmatrix}^\top$ — обобщенное описание сбоев датчиков $f_s(k)$ и приводов $f_a(k)$.

Для решения проблемы диагностики будем искать оцениватель отказов в виде следующего фильтра:

$$x_f(k+1) = A_f x_f(k) + B_f y(k), \tag{76}$$
$$\widehat{f}(k) = C_f x_f(k) + D_f y(k) \tag{77}$$

где $x_f(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние фильтра, а выход системы $\widehat{f}(k) \in \mathbb{R}^s$ является оценкой функции отказа.

задача оценки функции отказа в терминах анизотропийной нормы можно сформулировать следующим образом.

Задача 10. *Для системы* (74)–(75) *и обобщенного вектора возмущения* $d = \begin{bmatrix} w^\top(k) & f^\top(k) \end{bmatrix}^\top$ *с конечной мощностной нормой и ограниченным уровнем средней анизотропии* $\overline{\mathbf{A}}(D) \leqslant a$ $(a \geqslant 0)$ *найти динамический фильтр в форме* (76)–(77), *который гарантирует выполнение неравенства*

$$|\!|\!| T_{de} |\!|\!|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(D) \leqslant a} \frac{\|e\|_{\mathcal{P}}}{\|d\|_{\mathcal{P}}} < \gamma \tag{78}$$

для некоторого наперед заданного числа $\gamma > 0$. *Здесь* $e(k)$ *— ошибка оценивания функции отказа.*

Параметры анизотропийного оценивателя отказов можно вычислить с использованием приведенной ниже теоремы.

Теорема 20. *Для заданных чисел $\gamma > 0$ и $a \geqslant 0$ анизотропийный оцениватель отказов с реализацией в пространстве состояний (76)–(77) с уровнем подавления внешних возмущений, равным $|||T_{de}|||_a < \gamma$, существует, если справедливы следующие матричные неравенства*

$$\eta - \left(e^{-2a}\det\Psi\right)^{1/s} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m+s} & \star & \star & \star \\ B_1 & -Y_{11} & \star & \star \\ X_{11}B_1 + \widehat{B}_f D_{21} & -I_n & -X_{11} & \star \\ D_{11} + \widehat{D}_f D_{21} & 0 & 0 & -I_s \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & I_n \\ I_n & X_{11} \end{bmatrix} > 0$$

и

$$\begin{bmatrix} -Y_{11} & \star & \star & \star & \star & \star \\ -I_n & -X_{11} & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\eta I_{(m+s)} & \star & \star & \star \\ AY_{11} & A & B_1 & -Y_{11} & \star & \star \\ \widehat{A}_f & X_{11}A + \widehat{B}_f C & X_{11}B_1 + \widehat{B}_f D_{21} & -I_n & -X_{11} & \star \\ \widehat{C}_f & \widehat{D}_f C & D_{11} + \widehat{D}_f D_{21} & 0 & 0 & -I_s \end{bmatrix} < 0$$

для некоторых матричных переменных $\Psi > 0$, $X_{11} > 0$, $Y_{11} > 0$, $\widehat{A}_f$, $\widehat{B}_f$, $\widehat{C}_f$, $\widehat{D}_f$ и числа $\eta > \gamma^2$.

При этом, параметры оценивателя (76)–(77) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} D_f &= \widehat{D}_f, \\ C_f &= (\widehat{C}_f - D_f C Y_{11}) Y_{12}^{-\top}, \\ B_f &= X_{12}^{-1}\widehat{B}_f, \\ A_f &= X_{12}^{-1}(\widehat{A}_f - X_{11}AY_{11} - X_{12}B_f C Y_{11}) Y_{12}^{-\top} \end{aligned}$$

где невырожденные матрицы X_{12} и Y_{12} определяются из выражения

$$Y_{12}X_{12}^{\top} = I_n - Y_{11}X_{11}.$$

Замечание 2. *Факторизация (20) может быть получена с использованием сингулярной декомпозиции как*

$$I_n - Y_{11}X_{11} = U\Sigma V^{\top}, \;\; Y_{12} = U\Sigma, \;\; X_{12} = V.$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертационной работе в рамках решения фундаментальной проблемы теории и практики автоматического управления — понижения влияния внешних возмущений, действующих на линейные динамические системы — были разработаны и предложены новые регулярные методы анализа и синтеза в классе дискретных линейных дескрипторных систем, а также обыкновенных дискретных систем с параметрическими неопределенностями. Разработаны алгоритмы анализа и синтеза робастных систем автоматического управления с использованием аппаратов обобщенных алгебраических уравнений Риккати, а также матричных неравенств и методов выпуклой оптимизации. Кроме того, поставлены и решены задачи диагностики отказов исполнительных и измерительных элементов в дискретных системах с применением анизотропийной теории и теории дескрипторных систем.

1. Построена теория управления дискретными дескрипторными системами для подавления случайных внешних возмущений на основе анизотропийного подхода. В рамках теории анизотропийного управления дискретными дескрипторными системами решена задача анизотропийного анализа дискретных дескрипторных систем с точно известными параметрами. Разработано несколько подходов к вычислению анизотропийной нормы дискретной дескрипторной системы: первый подход основан на аппарате эквивалентных преобразований, второй подход применяет методы решения обобщенных алгебраических уравнений Риккати, третий метод использует аппарат матричных неравенств и выпуклой оптимизации. Наибольшим преимуществом среди трех методов обладает последний, так как позволяет реализовать вычислительно эффективные процедуры оценки анизотропийной нормы дискретной дескрипторной системы с одновременной проверкой ее на допустимость.

2. На основе полученных методик анализа дескрипторных систем разработаны регулярные методы синтеза оптимальных и субоптимальных анизотропийных регуляторов для подавления влияния случайных внешних возмущений. Были решены задачи оптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния, а также задачи субоптимального анизотропийного управления при полной информации и при полном измерении вектора состояния. Было показано, что решение задач анизотропийного синтеза для дескрипторных систем с одной стороны обобщает известные $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ задачи, а с другой стороны — задачи анизотропийного синтеза для обыкновенных дискретных систем. Методы на основе выпуклой оптимизации легко алгоритмизуются, являются вычислительно эффективными и позволяют налагать дополнительные ограничения на замкнутую систему в виде быстродействия и запаса устойчивости, располагая конечные полюсы замкнутой системы в заданной области внутри единичного круга.

3. Поставлены и решены задачи робастного анизотропийного анализа для дискретных дескрипторных систем с ограниченными по норме параметриче-

скими неопределенностями. Получены регулярные методы для оценки верхней границы анизотропийной нормы системы с неопределенностями и проверки ее на робастную допустимость. На основе полученных методов анализа были предложены алгоритмы и методы синтеза робастных анизотропийных регуляторов по состоянию, в том числе и с ограничением на область расположения конечных полюсов замкнутой системы. В рамках $\mathcal{H}_\infty$ теории управления были получены вычислительно эффективные и неконсервативные методы оценки $\mathcal{H}_\infty$ качества и синтеза робастного $\mathcal{H}_\infty$ управления для параметрически неопределенных систем. Численное моделирование показало преимущества по сравнению с существующими методами $\mathcal{H}_\infty$ анализа и синтеза.

4. Решены задачи робастного анизотропийного анализа и синтеза робастных анизотропийных регуляторов для обыкновенных дискретных параметрически неопределенных линейных систем. В качестве параметрических неопределенностей рассматривались политопические и ограниченные по норме параметрические неопределенности. Были решены задачи оценки верхней границы анизотропийного качества для подобных систем, а также задачи синтеза робастного управления при полном и неполном измерении вектора состояния. Сравнительный анализ и численное моделирование показало преимущество разработанных методов по сравнению с классическими $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ подходами к синтезу робастных систем.

5. Решены задачи технической диагностики отказов исполнительных и измерительных устройств, а также синтеза отказоустойчивых систем. В задаче оценивания отказа измерительных элементов диагностический наблюдатель был построен с использованием теории дескрипторных систем. В данном случае функция отказа рассматривалась как фиктивное состояние расширенной алгебро-разностной системы. Предложена методика синтеза отказоустойчивой системы при наличии сбоев датчиков. Численное моделирование подтвердило, что применение анизотропийной теории в задачах технической диагностики и синтеза отказоустойчивых систем может улучшить качество восстановления функции отказа.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

1. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: АНО "Физматлит 2015.

2. *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Control of Discrete-Time Descriptor Systems. Cham: Springer International Publishing, 2018.

Статьи в рецензируемых журналах Wos/Scopus

3. *Курдюков А.П., Андрианова О.Г., Белов А.А., Гольдин Д.А.* Между $LQG/\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ теориями управления // Автоматика и телемеханика. No. 3, 8–76, 2021.

4. *Andrianova O.G., Belov A.A., Kurduykov A.P.* Conditions of anisotropic norm boundedness for descriptor systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. USA: Pleiades Publishing, Ltd, 2015. Vol. 54, No. 1. C. 27–38.

5. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Robust Anisotropy-Based Control for Uncertain Descriptor Systems with Transient Response Constraints // IFAC-PapersOnLine, 2018. V. 51, No. 32. C. 515–520.

6. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Robust performance analysis of linear discrete-time systems in presence of colored noise // European Journal of Control. 2018. Vol. 42. C. 38–48.

7. *Aranovskiy S., Belov A.A., Ortega R., Barabanov N., Bobtsov A.A.* Parameter identification of linear time-invariant systems using dynamic regressor extension and mixing // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2019. Vol. 33, Iss. 6. pp. 1016-1030.

8. *Belov A.A., Kurdyukov A.P.* Calculation of the anisotropic norm of the descriptor system. // Automat. Remote Control, V. 71, pp. 1022–1033, 2010.

9. *Belov A.A.* Anisotropic controller design for descriptor systems with respect to the output variable // Automation and Remote Control. V. 74, No. 11. pp. 1838–1850. 2013.

10. *Belov A.A., Andrianova O.G.* A New Anisotropy-Based Control Design Approach for Descriptor Systems Using Convex Optimization Techniques // IFAC-PapersOnLine, Volume 48, Issue 11, Pages 372–377, 2015.

11. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Anisotropy-based Suboptimal State-Feedback Control Design Using Linear Matrix Inequalities // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 10. C. 1741–1755.

12. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust anisotropy-based control of linear discrete-time descriptor systems with norm-bounded uncertainties // IFAC-PapersOnLine. 2017. Volume 50, Issue 1. C. 15471–15476.

13. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On LMI Approach to Robust State-Feedback $\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-Time Descriptor Systems with Uncertainties in All Matrices // IFAC-PapersOnLine. 2017. Volume 50, Issue 1. C. 15483–15487.

14. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust state-feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties // International Journal of Systems Science. 2019. Vol. 50, No. 6. C. 1303—1312.

15. *Belov A.A., Ortega R., Bobtsov A.A.* Parameter Identification of Linear Discrete-Time Systems with Guaranteed Transient Performance // IFAC-PapersOnLine. 2018. pp. 1038–1043.

16. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust Control Design for Suppressing Random Exogenous Disturbances in Parametrically Uncertain Linear Systems // Automation and Remote Control. V. 81, No 4. P. 649—661. 2020.

17. *Belov A.A.* State-feedback anisotropy-based robust control of linear systems with polytopic uncertainties // Journal of Physics: Conference Series. 2020. 1536. C. 012008 (1–8).

Статьи в сборниках конференций WoS/Scopus

18. *Andrianova O., Belov A.* Anisotropy-based bounded real lemma for linear discrete-time descriptor systems. // Proceedings of the 19th International Conference on Process Control. Shtrbske Pleso, Slovakia: University of Pardubice, pp. 57–62, 2013.

19. *Andrianova O., Kurdyukov A., Belov A., Kustov A.* Anisotropy-based analysis for descriptor systems with nonzero-mean input signals. // Proceedings of 13th European Control Conference (ECC14). Strasbourg, France: EUCA, pp. 430–435, 2014.

20. *Andrianova O.G., Belov A.A.* A Riccati equation approach to anisotropy-based control problem for descriptor systems: state feedback and full information cases / Proceedings of the European Control Conference (ECC-2015, Linz, Austria). Linz: European Control Association (EUCA), 2015. C. 3231–3236.

21. *Andrianova O., Belov A.* Anisotropy-based analysis for descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties. // Proc. of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia. pp. 1–4, 2016.

22. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Suboptimal anisotropy-based control for linear discrete-time systems with norm-bounded uncertainties / Proceedings of the 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2018, Moscow). M.: IEEE, 2018. C. 1–4.

23. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Non-Iterative Solution to Robust Anisotropy-Based Analysis and Control Problems for Uncertain Descriptor Systems / Proceedings of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019). New York: IEEE, 2019. C. 455–460.

24. *Andrianova O.G., Belov A.A.* On Robust Performance Analysis of Linear Systems with Polytopic Uncertainties Affected by Random Disturbances / Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland). New York: IEEE, 2019. C. 1–6 https://ieeexplore.ieee.org/document/8766038.

25. *Belov A., Andrianova O.* Computation of anisotropic norm for descriptor systems using convex optimization // Proceedings of the 19th International Conference on Process Control. Shtrbske Pleso, Slovakia: University of Pardubice, pp. 173–178, 2013.

26. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Suboptimal anisotropy-based control design for discrete-time systems with nonzero-mean input disturbances // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). M.: IEEE, 2016. C. 1–4.

27. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On Anisotropy-Based Control Problem with Regional Pole Assignment for Descriptor Systems // Proceedings of the 21st International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2017). Strbske Pleso, Slovakia: IEEE, 2017. C. 12–17.

28. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On Optimal Anisotropy-Based Control Problem for Discrete-Time Descriptor Systems // Proceedings of the 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018, Zadar, Croatia). Zadar: IEEE, 2018. C. 661–666.

29. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Sensor Fault Estimation for Discrete-Time Systems in Presence of Correlated Noise with Anisotropy-Based Quality Criterion // Proceedings of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019). New York: IEEE, 2019. C. 355-360.

30. *Belov A.A.* Improved Fault Detection and Estimation Filter Design Using Anisotropy-Based Approach // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia). New York: IEEE, 2020. C. 638–643.

31. *Belov A.A.* Random Disturbance Attenuation in Discrete-time Polytopic Systems: Performance Analysis and State-Feedback Control // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia). Saint Petersburg: IEEE, 2020. C. 633–637.

32. *Boichenko V.A., Belov A.A.* On Stochastic Gain of Linear Systems with Nonzero Initial Condition // Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017, Valletta, Malta). Valletta, Malta: IEEE, 2017. С. 817–821.

33. *Iureva R.A., Belov A.A., Margun A.A., Kremlev A.S.* Electric Drive Attack Detection Based on State Observers // Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland). New York: IEEE, 2019. С. 1–5 https://ieeexplore.ieee.org/document/8766015.

Прочие публикации

34. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Линейные дескрипторные системы дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2011. – 90 с.

35. *Белов А.А.* Решение задачи анизотропийного управления дескрипторной системой по выходу // Труды 5-й Российской мультиконференции по проблемам управления, конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург). СПб.: ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор 2012. С. 276-279.

36. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Анизотропийная норма дескрипторной системы. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XII международного семинара, Москва, С. 46 - 48, 2010.

37. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Анизотропийный анализ дескрипторных систем с использованием ЛМН // Труды 11-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2014, Арзамас). Арзамас: ИПУ РАН, 2014. С. 33-45.

38. *Белов А.А., Андрианова О.Г., Гольдин Д.А.* Анизотропийная частотная теорема для линейных дискретных систем с политопическими неопределенностями // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 325-329.