

«Аппроксимационные методы решения фундаментальных и прикладных NP-трудных задач теории расписаний и их применение в интеллектуальных системах»

ОТЧЕТ
по результатам работы
молодежной научной школы
за период с мая 2021 г. по апрель 2022 г.
Лаборатория №68
Теории расписаний и дискретной оптимизации,
Институт Проблем Управления РАН, Москва
www.orsot.ru



Состав научной группы



Лазарев
А.А.,
д.ф.-м.н.,
г.н.с.,
1958 г.р.



Гафаров
Е.Р.,
д.ф.-м.н.,
в.н.с.,
1983 г.р.



Лемтюжникова
Д.В.,
к.ф.-м.н.,
с.н.с.,
1988 г.р.



Правдивец
Н.А.,
н.с., 1991 г.р.



Тюняткин
А.А.,
техник, 2000
г.р.



Сомов М.Л.,
техник, 1999
г.р.



Галахов С.А.,
техник, 1998
г.р.



Гришин Е.М.,
инженер, 1999 г.р.



Барашов Е.Б.,
инженер, 1999
г.р.



Букуева Е.С.,
техник, 2000 г.р.



Кудинов И.Д.,
математик,
1999 г.р.

Средний возраст участников: 29 лет.

	Книги, бро- шюры	WoS/ Scopus	РИНЦ	Прочие пуб- лика- ци	Всего пуб- лика- ций	Конф.
Лазарев А.А.		6	3	6	15	6
Гафаров Е.Р.	1	1		1	3	1
Лемтюжникова Д.В.	2	4	2	6	12	5
Правдивец Н.А.		2	2	5	9	6
Галахов С.А.		1			1	1
Гришин Е.М.		1	1	7	9	6
Барашов Е.Б.		1		5	6	6
Сомов М.Л.		2		1	3	2
Тюняткин А.А.		1	1	3	5	2
Букуева Е.С.				2	2	2
Кудинов И.Д.	1			2	2	2
Всего	4	6	4	22	38	19

Q1 - 1

- Исследования, направленные на конструирование наиболее эффективных метрик для задач теории расписаний и поиск новых полиномиально или псевдополиномиально разрешимых классов примеров, которые могут быть использованы в методе нахождения приближённого решения задач теории расписаний на основе метрик, который ранее был разработан в лаборатории.
- Создание новых и усовершенствование ранее разработанных в лаборатории алгоритмов решения практической задачи составления расписания технического обслуживания транспортных средств. Тестирование разработанных методов и алгоритмов на реальных данных.
- Разработка алгоритмов планирования основных технологических операций.

- Исследование возможности применения алгоритмов для повышения эффективности работы интеллектуальных систем.
- Исследование возможности применения интеллектуальных методов для создания более гибких систем составления расписания, основанных на знаниях. В том числе, но не ограничиваясь, для решения задачи экстренного перепланирования расписания.

1. Проведены исследования, направленные на модификацию существующих метрик для задач теории расписаний и поиск новых полиномиально или псевдополиномиально разрешимых классов примеров.
2. Созданы новые и усовершенствованы ранее разработанные в лаборатории алгоритмы решения практической задачи составления расписания технического обслуживания транспортных средств. Проведено тестирование разработанных методов и алгоритмов на реальных данных.
3. Проведен анализ комплекса подзадач, которые при совместном решении помогут значительно сократить время простоев и, следовательно, повысить пропускную способность железнодорожного транспорта.
4. Разработаны алгоритмы планирования основных технологических операций и алгоритмы планирования работы операционных отделений больницы.
5. Модифицированы алгоритмы интерполяции и аппроксимации.
6. Исследованы возможности применения интеллектуальных методов для создания более гибких систем составления расписания, представленные методом устойчивости.

- Стипендия Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам, осуществляющих перспективные научные исследования и разработки по приоритетным направлениям модернизации российской экономики (Д.В. Лемтюжникова)
- Грант "Развитие системы профильного обучения в образовательных организациях города Москвы" (Д.В. Лемтюжникова, И.Д. Кудинов)
- Грант фонда Базис за участие в конкурсе «Стипендии для поступающих на Физический факультет (категория «Магистрант»)» (Е.М. Гришин)
- Грант фонда Базис за участие в конкурсе «Стипендии для поступающих на Физический факультет (категория «Магистрант»)» (С.А. Галахов)
- Грант фонда Базис за участие в конкурсе «Стипендии для поступающих на Физический факультет (категория «Магистрант»)» (Е.Б. Барашов)

Преподавание

- Московский государственный университет (А.А.Лазарев)
- Московский физико-технический институт (Д.В. Лемтюжникова)
- Высшая школа экономики (Н.А. Правдивец)
- Московский авиационный институт (Д.В. Лемтюжникова)
- Школа № 1329 (Е.М. Гришин)
- "Ассоциация победителей олимпиад"(Е.Б. Барашов)

Популяризация науки

- проведение научно-популярных интерактивов в рамках проекта «Научные субботы» (Д.В. Лемтюжникова)
- создание и проведение серии семинаров для педагогов по теме «Семантический анализ текста» в рамках проекта предпрофессионального образования «Академический класс в московской школе» (Д.В. Лемтюжникова)
- создание трех программ и проведение КПК по направлениям "Управление проектами" и "Искусственный интеллект"(Д.В. Лемтюжникова, И.Д. Кудинов)

1. Проведение численных экспериментов для исследования эффективности различных алгоритмов решения NP-трудных задач, включающее изучение специальных подслучаев задач, меры полиномиальной (псевдополиномиальной) неразрешимости, радиуса устойчивости и пр.
2. Получение расчетов на различных моделях с применением различных методов решения на промышленных примерах при условии применения различных методов решения.
3. Получение решений NP-трудных задач с гарантированной абсолютной погрешностью целевой функции посредством разработки гибридного метода, основанного на интерполяции, метриках и решении двойственных задач в комбинации с классическими методами решения.
4. Разработка новых декомпозиционных алгоритмов.
5. Создание и применение базы примеров задач, их решений и значений сложности нахождения этих решений.
6. Поиск новых полиномиальных случаев, которые возможно будет использовать в интерполяционном подходе.
7. Использование интерполяционного подхода в приложении к практическим задачам – например, к задаче составления расписаний работы операционных комнат.



Основная информация

Дата рождения: 26.10.1988

Образование: высшее (Крымский федеральный университет)

Должность: старший научный сотрудник

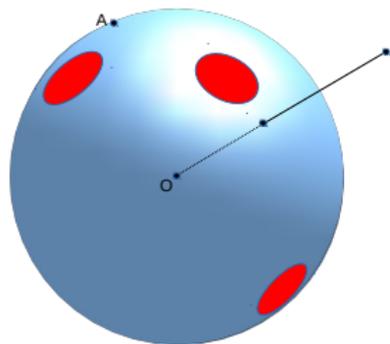
Степень: кандидат физико-математических наук

Результаты по тематике МНШ

Разработана концепция теории количественного измерения сложности NP-трудных задач, разработан метрический подход для задач дискретной оптимизации и задач теории расписаний с несколькими приборами, разработаны интерполяционный подход и его модификации: метрическая интерполяция и аппроксимационно-интерполяционный подходы, проведены эксперименты для железнодорожных задач, задач управления поставками, задач планирования работы операционного отделения.

NP-трудная в сильном смысле задача $1 \mid r_j \mid L_{\max} : r_j, p_j, d_j, \quad j = 1, \dots, n$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ — максимальное расстояние до разрешимых областей



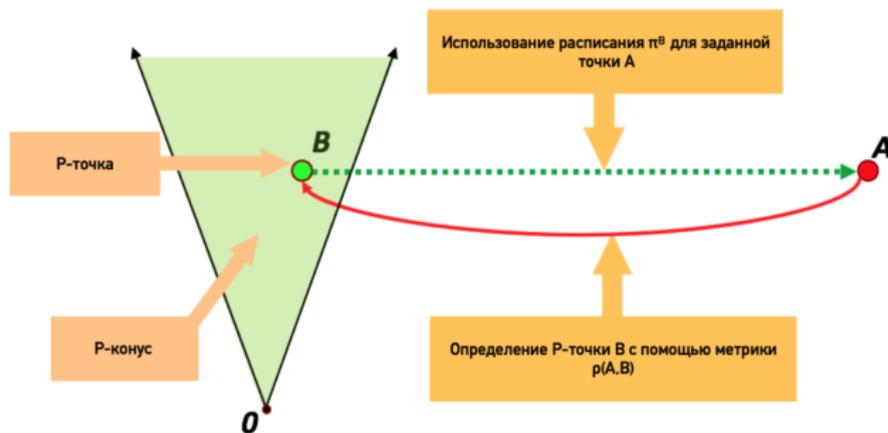
$3n$ -мерное пространство

Утверждение 1. Для точек на луче множество оптимальных расписаний совпадает.

Утверждение 2. Для каждой NP-трудной задачи существует количественное измерение сложности.

Гипотеза. Существует некоторая предельная величина сложности для каждой NP-трудной задачи.

1. Метрический подход
2. Интерполяционный подход
3. Декомпозиционный подход
4. Аппроксимационный подход
5. Двойственный подход
6. Подход с позиции устойчивости



$$\left\{ \begin{array}{l}
 (x^d - y^d + x^r - y^r) + \sum_{j \in N} x_j^p \rightarrow \min \\
 y^d \leq d_j^A - d_j^B \leq x^d \quad \text{for all } j \in N, \\
 y^r \leq r_j^A - r_j^B \leq x^r \quad \text{for all } j \in N, \\
 -x_j^p \leq p_j^A - p_j^B \leq x_j^p \quad \text{for all } j \in N, \\
 0 \leq x_j^p \quad \text{for all } j \in N, \\
 XR^B + YP^B + ZD^B \leq H.
 \end{array} \right. \quad (1)$$

Пусть задана некоторая матрица $n \times n$: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Три случая

Примеры Джексона: $X \cdot r^T = 0$.

Примеры Лазарева: $X \cdot (d^T - r^T - p^T) \geq 0$, $X \cdot d^T \leq 0$.

Примеры Хогевена: $X \cdot (d^T - p^T) \leq E \cdot r^T + \beta \leq E d^T$.

Теорема 1

Примеры Джексона, Лазарева или Хогивена полиномиально разрешимы.

Метрикой для A и B называется функция, удовлетворяющая свойствам:

$$\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B; \quad (2)$$

$$\rho(A, B) = \rho(B, A); \quad (3)$$

$$\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C) \text{ для всех } A, B, C; \quad (4)$$

$$\rho(A, B) = \rho_d(A, B) + \rho_r(A, B) + \rho_p(A, B), \quad (5)$$

где $\rho_d(A, B) = \max_{j \in N} \{d_j^A - d_j^B\} - \min_{j \in N} \{d_j^A - d_j^B\}$; $\rho_r(A, B) = \max_{j \in N} \{r_j^A - r_j^B\} -$

$\min_{j \in N} \{r_j^A - r_j^B\}$; $\rho_p(A, B) = \sum_{j \in N} \left(\max_{i \in M} (p_{ij}^A - p_{ij}^B)_+ + \max_{i \in M} (p_{ij}^A - p_{ij}^B)_- \right)$.

Теорема 2

Пусть пример B наследует все параметры примера A , $\tilde{\pi}^B$ — приближенное решение примера B , удовлетворяющего $L_{\max}^B(\tilde{\pi}^B) - L_{\max}^B(\pi^B) \leq \delta_B$. Тогда

$$0 \leq L_{\max}^A(\tilde{\pi}^B) - L_{\max}^A(\pi^A) \leq \rho(A, B) + \delta_B. \quad (6)$$

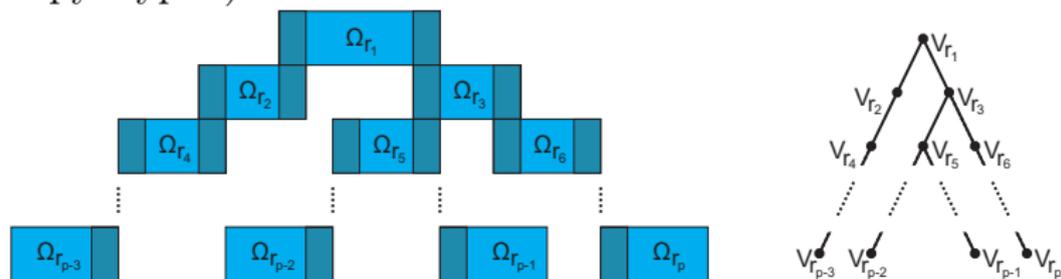
$$\bigcup_{r=1}^k U_r = M = \{1, \dots, m\}; \quad (1)$$

$$\bigcup_{r=1}^k S_r = N = \{1, \dots, n\}; \quad (2)$$

$$U_{r_1} \cap U_{r_2} = \emptyset, r_1 \neq r_2; \quad (3)$$

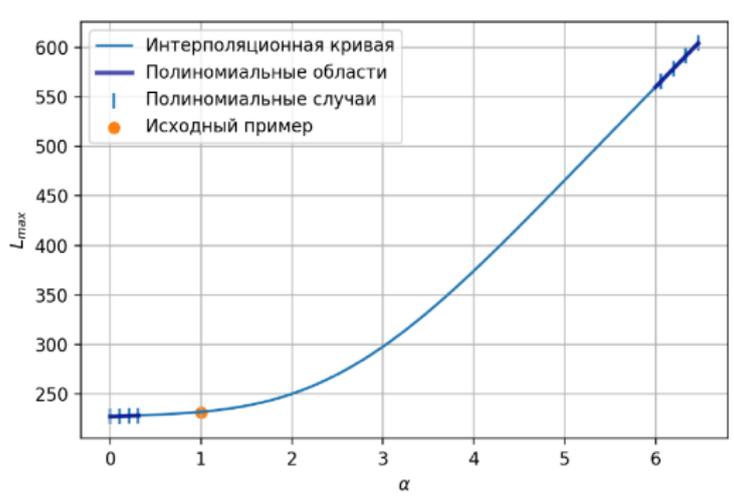
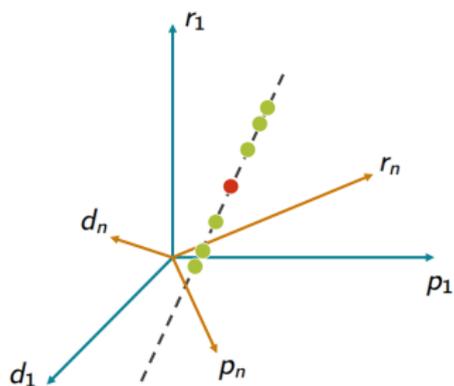
$$S_{r_1} \cap S_{r_2} \cap S_{r_3} = \emptyset; \quad (4)$$

Граф задачи, не имеющий циклов, для которого выполняются свойства (1-4), называется блочно-древовидной структурой (БД структурой).

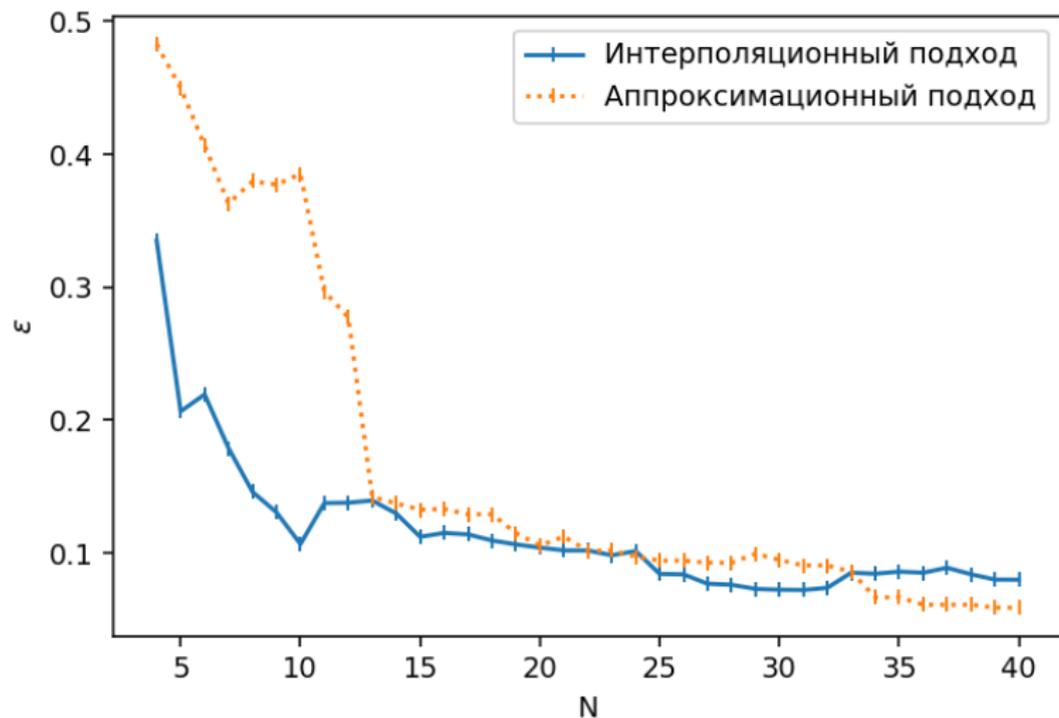


Гипотеза. Чем более сбалансирована БД структура, которую можно выделить в задаче, тем менее трудна соответствующая задача.

- - Исходный пример
- - Узлы интерполяции (Лагранж)
- - Узлы интерполяции (Чебышев)

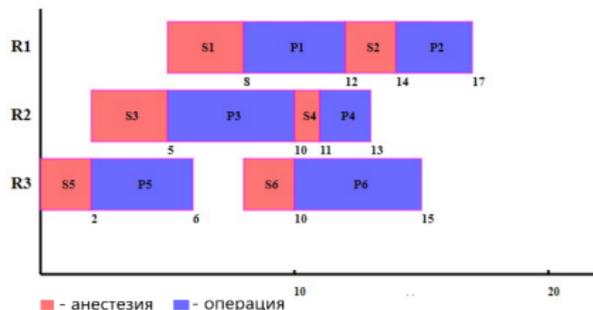
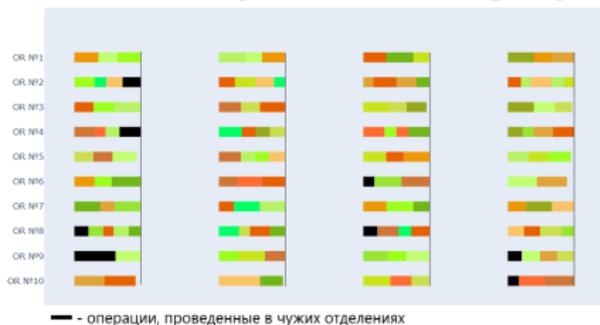


Пространство примеров размерности n .

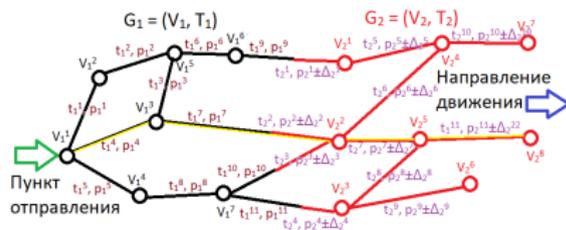
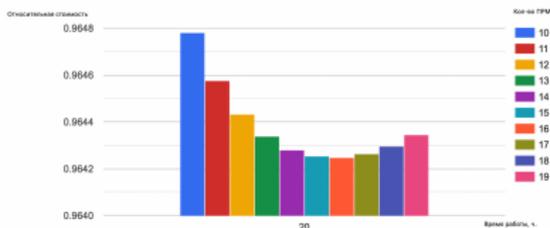


Зависимость средней относительной ошибки от размерности задачи.

1. Задачи увеличения пропускной способности операционных



2. Транспортные задачи





Основная информация

Дата рождения: 5.12.1991

Образование: высшее (Воронежский государственный университет)

Должность: научный сотрудник

Результаты по тематике МНШ

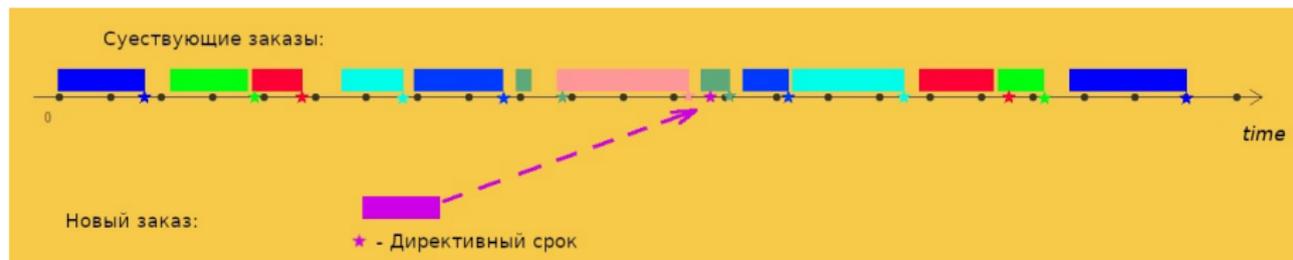
Разработаны методы и алгоритмы решения задач производственного планирования с использованием двойственного подхода.



Рассмотрены задачи планирования производства и планирования работы нефтепровода.

Трёхуровневая система планирования





- Существует множество заказов, которые должны быть выполнены.
- Необходимо добавить новый заказ в существующее расписание.

Можно ли его добавить с учётом директивных сроков?

Формализация задачи верхнего уровня

- n заказов, $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- r_j – момент поступления заказа j
- p_j – продолжительность выполнения заказа j
- d_j – директивный срок заказа j

Прерывания в выполнении заказов запрещены.
Принудительные простои не допускаются.

π – расписание (перестановка заказов)

Задача $1|r_j|F_{\max}$

NP-трудная задача

Целевая функция

$F_{jk}(\pi) = P_j - f(C_j(\pi) - d_j)$ – штраф за заказ j , при условии его размещения на k -ое место в расписании $\pi = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$.

C_j – момент завершения выполнения заказа j

$f(t)$ – неубывающая функция штрафа за просрочку

P_j – стоимость выполнения заказа (прибыль)

Оптимальное значение целевой функции

$$\mu^* = \min_{\pi \in \Pi(N)} \max_{k=1, \dots, n} F_{jk}(\pi),$$

где $\Pi(N)$ — множество всех допустимых расписаний для n заказов.

Двойственная задача

Оптимальное значение целевой функции исходной задачи

$$\mu^* = \min_{\pi \in \Pi(N)} \max_{k=1, \dots, n} F_{j_k}(\pi).$$

Оптимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$\nu^* = \max_{k=1, \dots, n} \min_{\pi \in \Pi(N)} F_{j_k}(\pi).$$

Лемма. Пусть $F_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, – произвольные неубывающие функции штрафа задачи $1 \mid r_j \mid F_{\max}$. Тогда $\nu_n \geq \nu_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, то есть $\nu^* = \nu_n$.

Трудоёмкость алгоритма $O(n^2)$.

Теорема

Пусть $F_j(t), j = 1, 2, \dots, n$, — произвольные неубывающие функции штрафа задачи $1 \mid r_j \mid F_{\max}$. Тогда $\mu^* \geq \nu^*$.

Алгоритм решения двойственной задачи

1. Составить расписание $\pi^r = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ в порядке неубывания моментов поступления: $r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq \dots \leq r_{i_n}$.
2. Найти $F_{i_k}(C_{i_k}(\pi_k)), k = 1, 2, \dots, n$, для расписания $\pi_k = (\pi^r \setminus i_k, i_k)$.
3. Найти $\nu^* = \min_{k=1, \dots, n} F_{i_k}(C_{i_k}(\pi_k))$ и работу i_k , для которой это значение достигается.

Метод ветвей и границ решения исходной задачи

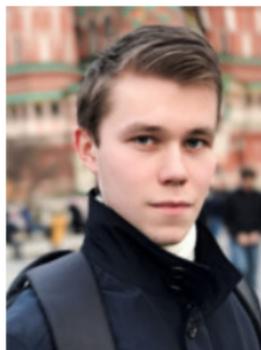
1. Сформировать список примеров из единственного примера.
2. Выбрать в списке пример с минимальной оценкой ν^* .
3. Найти работу f с минимальным директивным сроком и заменить исходный пример на два подпримера:
 - Поставить работу f на текущее место в расписании;
 - Запретить постановку работы f на текущее место.
4. Если $\{\pi_1\} = N$, то все работы расставлены и $\pi^* = \operatorname{argmin}\{F_{\max}(\pi_1), F_{\max}(\pi^*)\}$.
5. Удалить все примеры, для которых оценка $\nu' \geq F_{\max}(\pi^*)$.
6. Если список примеров не пуст, перейти к шагу 2.

Схема метода

1. Постановка задачи верхнего уровня
2. Решение методом ветвей и границ
 - Разбиение на две подзадачи
 - Постановка двойственной задачи
 - Получение нижней оценки
 - Удаление нецелесообразных подзадач
3. Получение решения исходной задачи
4. Построение более детализованного плана

Трёхуровневая система планирования





Основная информация

Дата рождения: 18.08.1998

Образование: высшее (Московский государственный университет)

Должность: инженер

Результаты по тематике МНШ

Предложена модель для задачи зарядки электроприборов.

Разработана модель для решателя Gurobi.

В роли вещей выступают электроустройства:

- ценность – скорость их зарядки,
- вес – временной интервал их зарядки,
- разрез – возможность прерывания зарядки устройства.

Необходимо распределить вещи из множества N по рюкзакам множества M . Определим вектор назначения $y_n := (y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nm})$, где каждая y_{nm} – доля изделия n , упакованного в рюкзак m .

Каждый из y_n удовлетворяет:

$$\sum_{m \in M} y_{nm} \leq D_n, \forall n \in N \quad (7)$$

$$\sum_{n \in N} y_{nm} \leq C_m, \forall m \in M \quad (8)$$

$$0 \leq y_{nm} \leq Y_{nm}, \forall n \in N, \forall m \in M \quad (9)$$

В качестве целевой функции была выбрана функция минимизации отклонения получаемого уровня заряда от оптимального:

$$\min_{y_n} \sum_{n \in N} \max(\text{opt} - f(y_n), 0) \quad (10)$$

Проблема планирования операций в многоклассовой, многоресурсной хирургическом отделении (другой подход).

$\vec{w} = \{w_{in}\}$ количество пациентов класса i с операцией в течение n дней;

$\vec{b} = \{b_{in}\}$ количество пациентов класса i , которые должны забронировать операцию за n дней заранее;

$\vec{z} = \{z_{jn}\}$ вместимость операционной j на n день.

Некоторые ограничения задачи

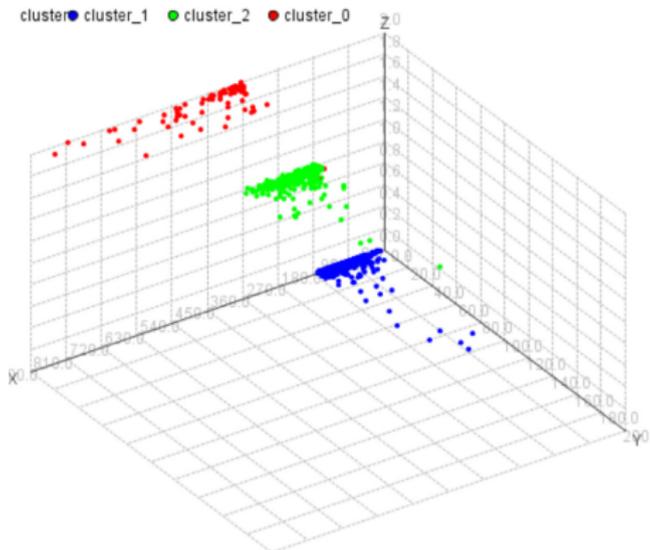
$\sum_{i \in I} l_i (b_{in} + w_{in}) \leq z_{j,t+n}$ ограничение на вместимость;

$b_{in} = 0$ невозможность записи на некоторые дни

$\vec{w} = \{w_{in}\} \rightarrow \{w_{in} - D_{in}^s + b_{in}\}$ изменчивость записи из за смертей пациентов.

Целевая функция включает в себя штрафы за незабронированные места, неиспользуемые ресурсы отделений и за превышение койко-мест.

Результаты расчета для 3 видов отделений. X - время ожидания, Y - время после операции.



Результаты численного эксперимента



Основная информация

Дата рождения: 09.02.1999

Образование: высшее (Московский Государственный Университет)

Должность: инженер

Результаты по тематике МНШ

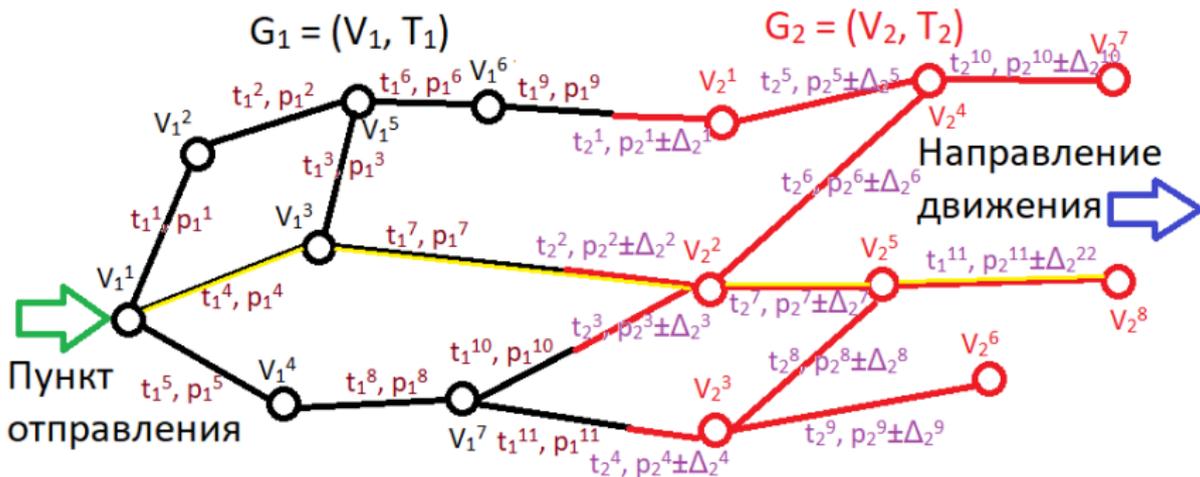
Исследуются методы оценки радиуса устойчивости прикладных задач дискретной оптимизации.

Решена задача оптимизации пункта перевалки морской порт - железная дорога.

$O_g(p)$ – шар с центром в точке p и радиусом g . Шар называется шаром устойчивости для G_S (S – оптимальное расписание задачи G при входных данных p), если для любого вектора $p' \in O_g(p) \cap R_q$ расписание S остается оптимальным. Максимальный радиус g называется радиусом устойчивости $g_S^F(p)$, где F – целевая функция.

Пусть S расписание, а $F_0(S)$ – значение целевой функции, а $F(S)$ – действительное значение целевой функции с учетом сбоев. Изменение значения целевой функции при сбоях $\delta(S) = F(S) - F_0(S)$. Введем числовой коэффициент $r \in [0, 1]$. Для расписания S можно определить робастность $R(S) = r \cdot E[F(S)] + (1 - r) \cdot E[\delta(S)]$.

Пусть есть некоторое решение S задачи и значение целевой функции $F_0(S)$. Необходимо найти такое расписание, что $F_0(S) \rightarrow \min$ и $R(S) \rightarrow \max$. Для полученного решения также найти радиус устойчивости $g_S^F(P) \rightarrow \max$. Причем $P = P_1 + P_2 = \{p_1^i, t_1^i \in T_1\} \cup \{p_2^i, t_2^i \in T_2\}$ и $P_1 = \text{const}, P_2 \neq \text{const}$.



Радиус устойчивости в классическом смысле:

$$\rho_s(A) = \max_{\tau_j \in \overline{\phi(\tau)}} \min_{\tau_i \in \phi(\tau)} \frac{(p(\tau_j) + l(\tau_j)) - (p(\tau) + l(\tau))}{|\tau_i| - |\tau_i \cap \tau_j| - 1}.$$

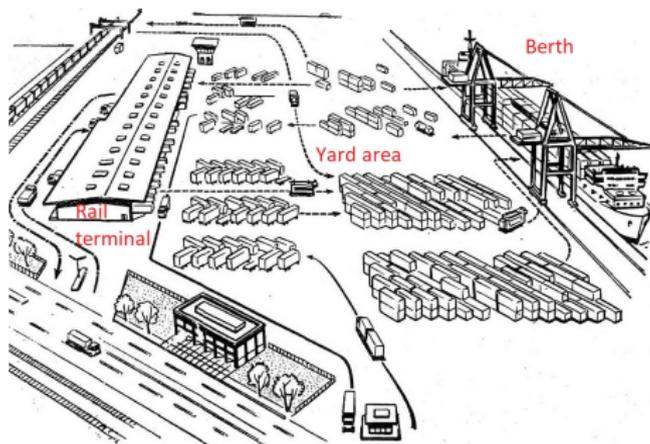
Радиус устойчивости в совокупности для непрерывного случая:

$$\rho_g(A) = \sum_{\tau_i \in \phi(\tau)} \max\{0, \min_{\tau_j \in \overline{\phi(\tau)}} (p(\tau_j) + l(\tau_j)) - (p(\tau) + l(\tau_i))\}.$$

Радиус устойчивости в совокупности для дискретного случая:

$$\rho_{gd}(A) = \rho_g(A) + (N - 1)\Delta.$$

Необходимо как можно быстрее и дешевле доставить грузы в пункт назначения. Грузы приходят в порт на кораблях, которые должны быть назначены на разгрузку на конкретный причал в конкретный момент времени, после чего должны быть сформированы грузовые составы, которые отправляются по железной дороге в пункт назначения



Были составлены две модели. Ограничения в них прописываются по-разному.

В бинарной модели:

$$\sum_{B \in B} \sum_{\theta = \max\{0, t - p_b\}}^t x(B, M, \theta) \leq 1, \forall M \in M, \forall t \in T. \quad (11)$$

⇓

В целочисленной модели:

$$t(B_i, M, n + 1) \geq (t(B_j, M, n) + p_{B_j, M} \cdot \delta(B_j, M, n)) \cdot \delta(B_i, M, n + 1), \quad (12)$$

$$\forall M \in M \quad \forall B_i, B_j \in B \quad \forall n \in N,$$

$$\sum_{B \in B} \delta(B, M, n) \leq 1, \quad \forall M \in M, \quad \forall n \in N, \quad (13)$$

$$\delta(\bar{B}, M, n + 1) \leq \sum_{B \in B \setminus \{\bar{B}\}} \delta(B, M, n), \quad \forall \bar{B} \in B, \quad \forall M \in M, \quad \forall n \geq 2. \quad (14)$$

Корабли х Причалы	Бинарная модель		Целочисленная модель	
	Время	Погрешность	Время	Погрешность
4 х 3	4 сек.	0 %	0.8 сек.	0 %
4 х 4	4 сек.	0 %	0.13 сек.	0 %
4 х 5	2 сек.	0 %	0.14 сек.	0 %
5 х 3	113 сек.	0 %	64 сек.	0 %
5 х 5	327 сек.	0 %	3600 сек.	3 %
5 х 7	21 сек.	0 %	46 сек.	0 %
13 х 6	3600 сек.	2.8 %	3600 сек.	2.8 %
13 х 8	3600 сек.	8.7 %	3600 сек.	2.6 %
13 х 10	3600 сек.	9.2 %	3600 сек.	4.5 %
15 х 8	3600 сек.	1 %	3600 сек.	1 %
15 х 10	3600 сек.	4.8 %	3600 сек.	0.9 %
15 х 12	3600 сек.	8.5 %	3600 сек.	3.4 %



Основная информация

Дата рождения: 05.01.1999

Образование: студент (Московский Государственный Университет)

Должность: инженер

Результаты по тематике МНШ

Предложена постановка задачи оптимизации работы грузового фронта. Модифицирован алгоритм аппроксимации весовых коэффициентов целевой функции на основе интерполяции.

Параметры оснащённости грузового фронта:

- Тип и количество ПРМ – Y ;
- Режим работы – 8, 12, 16 или 24 часа – T ;
- Объем маневровых работ у грузового фронта, что выражается количеством подач групп вагонов под грузовые операции в сутки – X .

Критерием оптимизации выступает функционал годовых приведенных расходов.

Функционал годовых приведенных расходов для грузового фронта:

$$(X, Y, T) = \alpha_1 Y + \alpha_2 \frac{1}{XY} + \alpha_3 X + \alpha_4 YT + \alpha_5 T + \alpha_6 \left[\frac{T}{X} + \frac{(24 - T)^2}{24} \right]$$

$$+ \alpha_7 YT + \alpha_8 \frac{X-1}{XY} + \alpha_9 \frac{1}{X} + \alpha_{10} \frac{1}{(X-1)XY} + \alpha_{11} \frac{X}{T-X \cdot \tau_m},$$

где X, Y, T – параметры оснащённости грузового фронта; X – количество подач вагонов на грузовой фронт в сутки; Y – количество ПРМ данного типа; T – количество часов работы грузового фронта в сутки.

Коэффициенты при переменных учитывают следующие виды расходов:

- α_1 - сумма амортизационных и годовых приведенных расходов, составляющих долю от капитальных затрат на одну ПРМ;
- α_2 - стоимость простоев подвижного состава под погрузочно-разгрузочными операциями;
- α_3 - стоимость маневровых работ;
- α_4 - расходы на оплату труда бригады механизаторов, обслуживающих одну ПРМ;
- α_5 - расходы на оплату труда складскому персоналу;
- α_6 - расходы, связанные с неполносуточным режимом работы грузового фронта;

Коэффициенты при переменных учитывают следующие виды расходов:

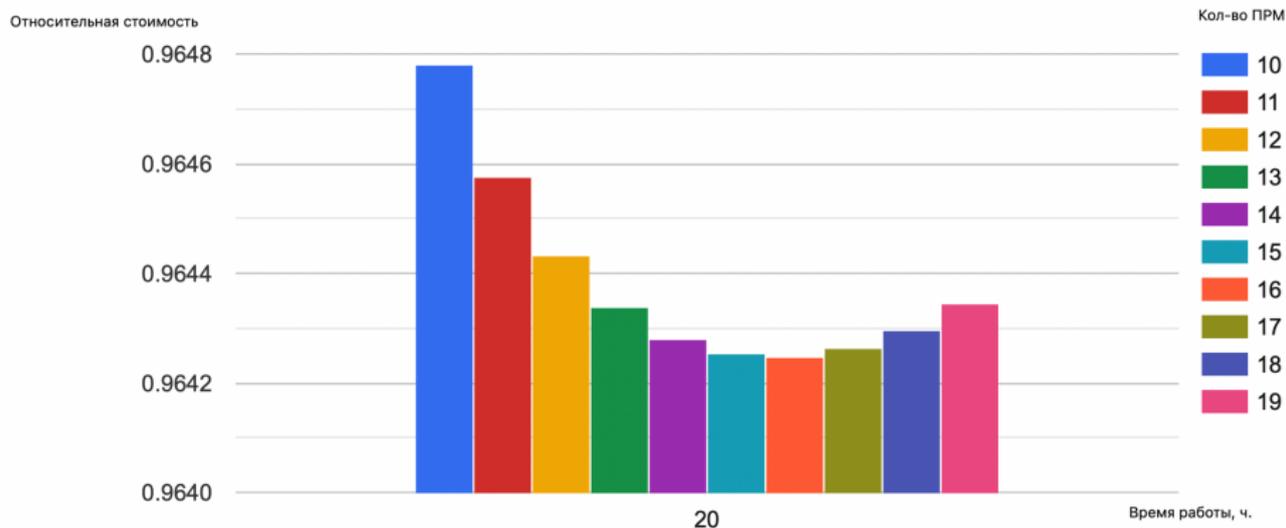
- α_7 - расходы на оплату энергоносителей;
- α_8 – расходы, связанные с вагоно-часами ожидания подачи групп вагонов на подъездной путь склада;
- α_9 – приведенные расходы на содержание эстакады повышенного пути;
- α_{10} - коэффициент увеличения объема операций погрузки-выгрузки;
- α_{11} – дополнительное время ожидания подачи и уборки вследствие занятости маневрового локомотива и расходы, обусловленные этим ожиданием.

1. Исходная информация (задается).
2. Определяется типоразмерный ряд погрузочных машин, необходимых для выполнения работ в заданных условиях (ряд вариантов механизации).
3. Разрабатываются технологические схемы использования машин для каждого комплекта или типа машин: разрабатывается компоновочная схема склада, определяются направления и объемы грузопотоков, размеры склада и грузового фронта.
4. Рассчитываются технические показатели процесса.
5. Рассчитываются стоимостные показатели процесса для всех анализируемых вариантов.
6. Выбирается оптимальный вариант оснащенности по величине минимальных годовых приведенных (или удельных приведенных) расходов переработки груза.

Рассмотрим следующий сценарий: у нас имеется один грузовой состав, состоящий из 75 вагонов. Разгрузка производится посредством проиллюстрированной ПРМ.



Результаты для 20-часового режима работы грузового фронта для различного числа ПРМ.



- 1 прибор
- Отношения предшествования отсутствуют
- Множество работ $J = \{1, \dots, n\}$
- Моменты поступления на прибор $r_j = 0, j \in J$
- Длительности обслуживания требований $p_j, j \in J$
- Оптимальные расписания $\pi_k^*, k \in \overline{1, N}$

$$1 \parallel \sum_j w_j C_j$$

..., $\pi_{-2}, \pi_{-1}, \pi_0, \pi_1?$

$$I = \{p_1, \dots, p_n\}$$

Множество примеров I_k , $k \in \overline{1, N}$

Оптимальные расписания π_k^* , $k \in \overline{1, N}$

Необходимо аппроксимировать значения весовых коэффициентов w_j , $j = \overline{1, n}$

Задача аппроксимации:

Система неравенств относительно весовых коэффициентов w_j является исходной системой неравенств задачи аппроксимации:

$$\frac{w_{j_1^k}}{p_{j_1^k}} \geq \frac{w_{j_2^k}}{p_{j_2^k}} \geq \dots \geq \frac{w_{j_n^k}}{p_{j_n^k}} \quad (15)$$

Алгоритм аппроксимации весовых коэффициентов целевой функции основан на решении эффективной системы неравенств:

$$i, j \in (1, \dots, n), i \neq j$$

$$K = (k), k = \overline{1, N}$$

$$K_{i,j} = (k \in K : \pi_k^* = (\dots, i, \dots, j, \dots))$$

$$K_{j,i} = (k \in K : \pi_k^* = (\dots, j, \dots, i, \dots,))$$

$$X(i, j) = \max_{k \in K_{j,i}} \left(\frac{p_j^k}{p_i^k} \right)$$

$$Y(i, j) = \max_{k \in K_{i,j}} \left(\frac{p_j^k}{p_i^k} \right)$$

$$w_j = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\prod_{i \neq 1} (n - \frac{1}{2} - i)}{\prod_{m \neq 1} (n - \frac{1}{2} - m)} \xi(k, j)$$

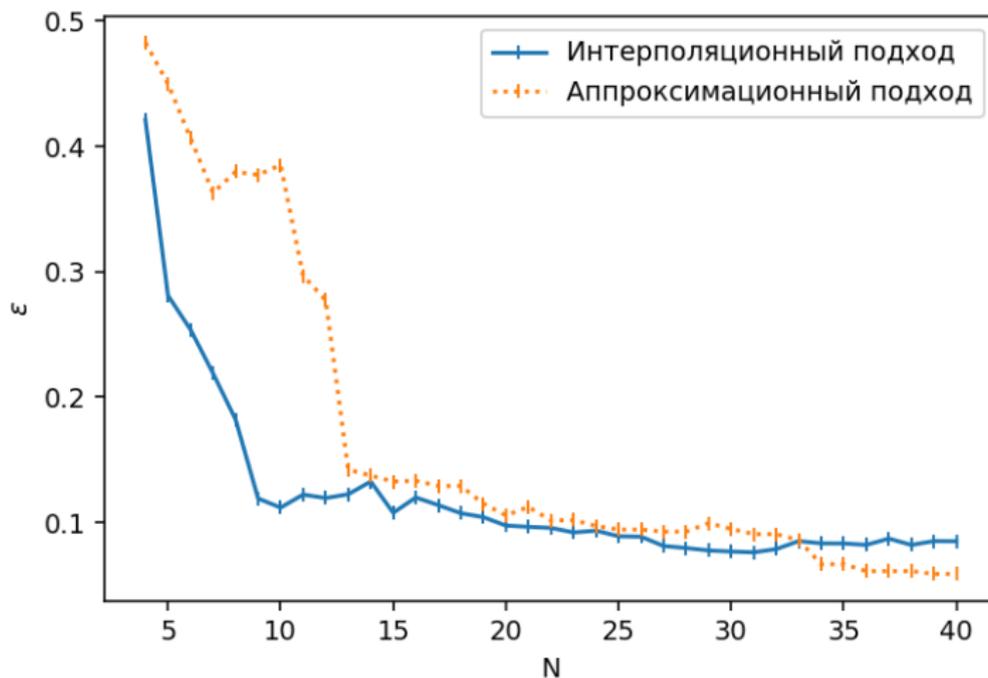
Для сравнения найденных w_j и истинных w_j^0 значений весовых коэффициентов оба набора нормируются (масштабирование допускается из-за линейности целевой функции):

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

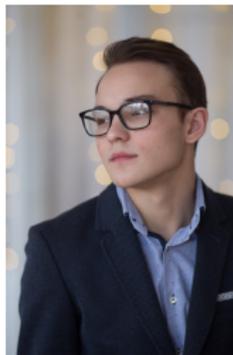
$$w_j := \frac{w_j}{\|w\|}, w_j^0 := \frac{w_j^0}{\|w^0\|}$$

Мера эффективности алгоритма $\epsilon(N, n)$ это средний j модуль относительного отклонения найденных нормированных значений w_j от их истинных нормированных значений w_j^0 , используемых при генерации данных:

$$\epsilon(N, n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{|w_j - w_j^0|}{\|w_j^0\|}$$



Зависимость погрешности аппроксимации от размера выборки.



Основная информация

Дата рождения: 16.12.1999

Образование: студент (Московский Государственный Университет)

Должность: техник

Результаты по тематике МНШ

Исследована задача планирования операций в операционные комнаты. В качестве модели была рассмотрена задача о назначениях. Также были разработаны приближенные декомпозиционные алгоритмы для сокращения времени вычислений.

p_j - длительность операции j , $\forall j \in J$;

w_{ij} - вес операции j , если она проводится в операционной i , $\forall i \in M$;

D - множество дней, когда можно проводить операции, в нашем случае это $d = 1, 2, 3, 4$ (Понедельник, Вторник, Среда, Четверг);

A - время работы операционной в течение дня (11 часов).

Переменные модели:

$x_{ij}^d = 1$, если операция j назначена в операционную i в день d , и равна 0 в другом случае.

Целевая функция:

$$\sum_{d \in D} \sum_{i \in M} \sum_{j \in J} x_{ij}^d p_j w_{ij} \rightarrow \max. \quad (16)$$

Ограничения:

$$\sum_{d \in D} \sum_{i \in M} x_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in J; \quad (17)$$

$$\sum_{j \in J} p_j x_{ij}^d \leq A, \quad \forall i \in M, \forall d \in D. \quad (18)$$

Алгоритм 1

Переменные модели:

$x_i^d = 1$, если операция i проводится в день d , и равняется 0 в другом случае.

Целевая функция:

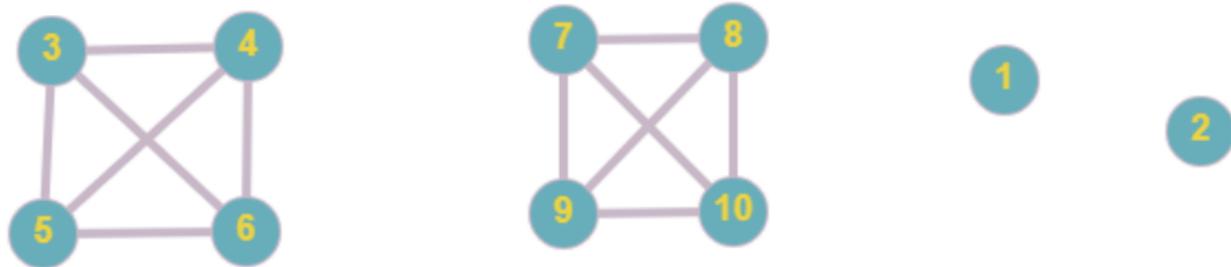
$$\sum_{d \in D} \sum_{i \in I} x_i^d p_i \rightarrow \max. \quad (19)$$

Ограничения:

$$\sum_{d \in D} x_i^d \leq 1, \quad \forall i \in I; \quad (20)$$

$$\sum_{i \in I} p_i x_i^d \leq A, \quad \forall d \in D. \quad (21)$$

Решается 10 параллельных задач для каждого отделения, далее алгоритмом перераспределяем операции более оптимально, чтобы закрыть большие окна.



Декомпозиционный граф для Алгоритма 2

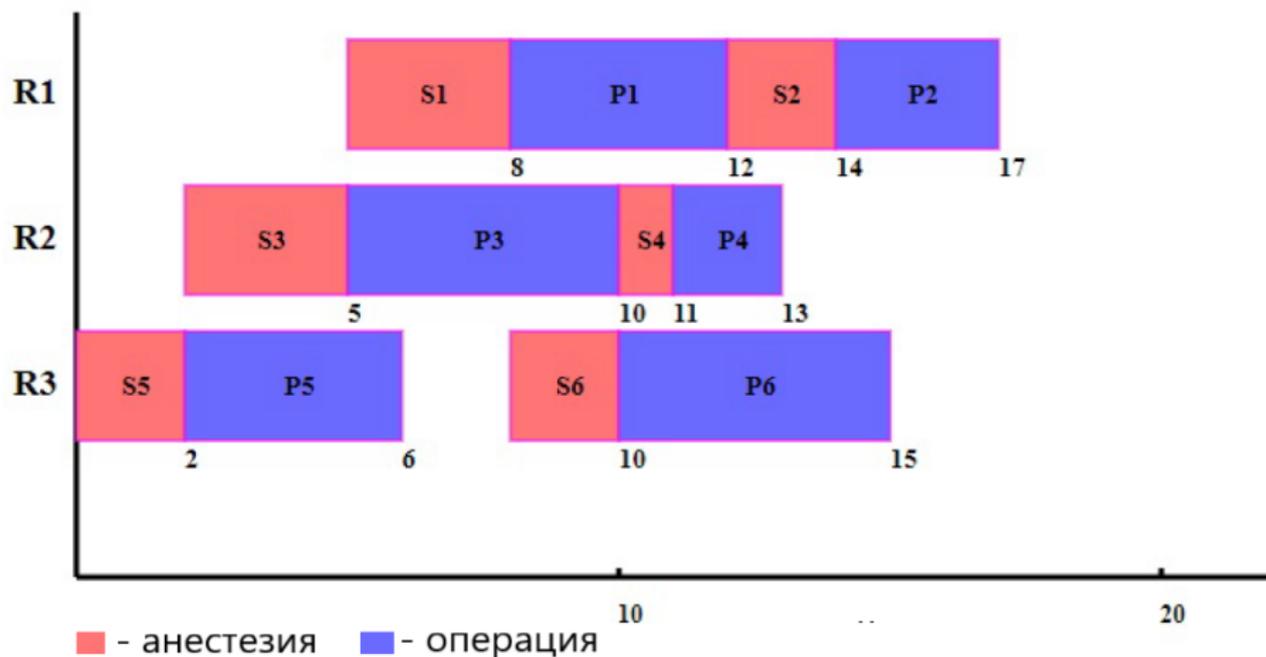
Таблица: Среднее значения результатов

Среднее	Точный подход	Алгоритм 1	Алгоритм 2
Время выч., секунды	730	2.2	17.5
Окна, час	6.7	20.2	11.1
Гостевые операции	14.4	21.3	11.2

Публикация в журнале Q1 по данной задаче:

Лазарев А.А., Лемтюжникова Д.В., Сомов М.Л. Decomposition of the Knapsack Problem for Increasing the Capacity of Operating Rooms // Mathematics. 2022. V. 10 No 5. С. <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/5/784>.

Задача планирования работы операционных



Пример расписания

Переменные модели:

$x_{ij} = 1$, если работа i предшествует работе j ;

$y_{jl} = 1$, если операция j проводится с анестезиологом l .

Целевая функция:

$$C_{\max} \rightarrow \min \quad (22)$$

Ограничения:

$$x_{ij} + x_{ji} = 1, \quad \forall i, j \in R_k; \quad (23)$$

$$t_j > t_i + s_i + p_i + M(x_{ij} - 1), \quad \forall i, j \in R_k; \quad (24)$$

$$t_i > t_j + s_j + p_j + M(x_{ji} - 1), \quad \forall j, i \in R_k; \quad (25)$$

$$\sum_{l \in L} y_{il} = 1, \quad \forall i \in R; \quad (26)$$

$$t_j > t_i + s_i + M(x_{ij} - 1) + M(y_{il} + y_{jl} - 2), \quad \forall i \in R_{k_1}, \forall j \in R_{k_2}, k_1 \neq k_2, \forall l \in L; \quad (27)$$

$$t_i > t_j + s_j + M(x_{ji} - 1) + M(y_{jl} + y_{il} - 2), \quad \forall i \in R_{k_1}, \forall j \in R_{k_2}, k_1 \neq k_2, \forall l \in L; \quad (28)$$

$$C_{\max} \geq t_j + s_j + p_j, \quad \forall j \in R; \quad (29)$$

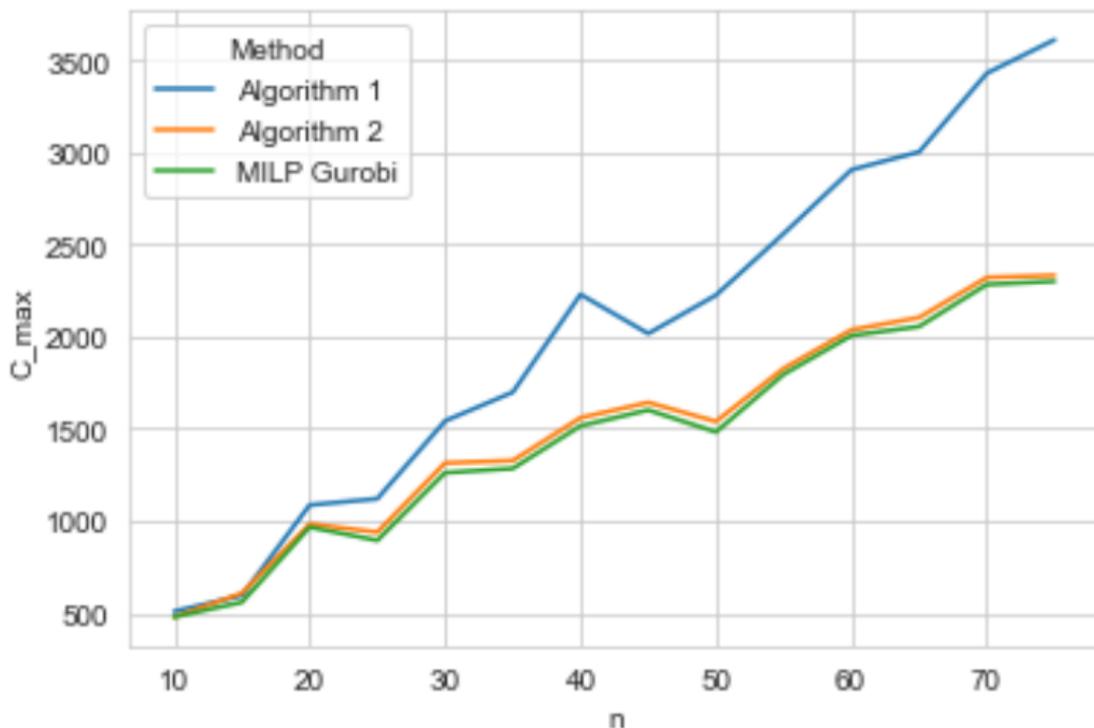


График зависимости целевой функции от количества операций



Основная информация

Дата рождения: 16.07.2000

Образование: студент (Московский Государственный Университет)

Должность: техник

Результаты по тематике МНШ

Найдены две новых полиномиально разрешимых области для задачи $1|\Gamma_j|L_{\max}$, на основе этих областей разработан полиномиальный алгоритм оценки целевой функции задачи $1|\Gamma_j|L_{\max}$. Показан способ применения интерполяционного подхода.

Дано: множество требований N .

Каждое требование $j \in N : j = \{r, p, d\}$.

Расписание $\pi: \pi = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$.

Момент завершения обслуживания $C_{j_i}(\pi)$:

$$C_{j_i}(\pi) = \max \{r_j, C_{j_{i-1}}(\pi)\} + p_j, \quad (30)$$

$$C_{j_1} = r_{j_1} + p_{j_1}. \quad (31)$$

Целевая функция – максимальное временное смещение:

$$\min_{\pi} \max_{i=1..n} L_{j_i}(\pi) = \min_{\pi} \max_{i=1..n} C_{j_i}(\pi) - d_{j_i}. \quad (32)$$

Ограничение:

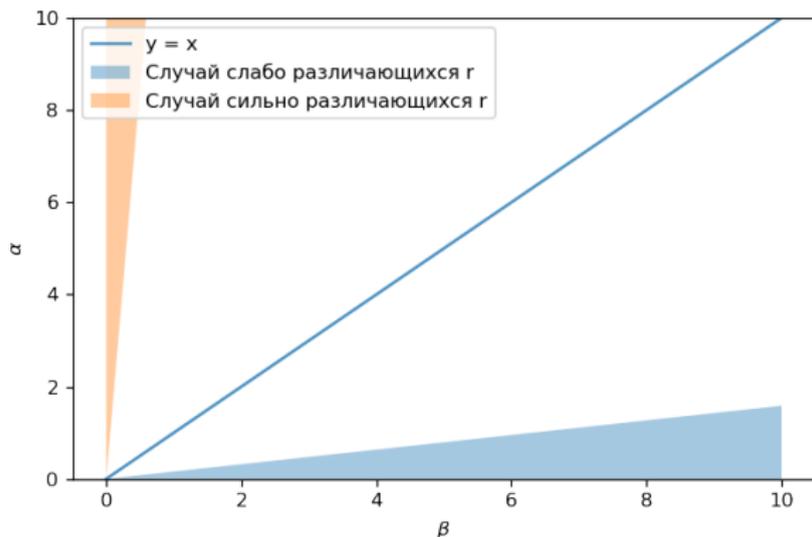
$$L_{j_i}(\pi) < \bar{L} \quad (33)$$

Задача. При добавлении в N нового требования \bar{j} - будет ли выполняться (33)

Идея. Оценить значение ЦФ за полиномиальное время.

Рассматриваем $\bar{N} = N \cup \bar{j}$.

Преобразования: $r' = \alpha r$, $p' = \beta r$.



Полиномиально разрешимые области.

Слабо различающиеся r :

$$0 \leq \alpha \leq \min_{i,j} \frac{r_i}{r_j - r_i}, i, j = 1 \dots n, i \neq j, r_j > r_i \quad (34)$$

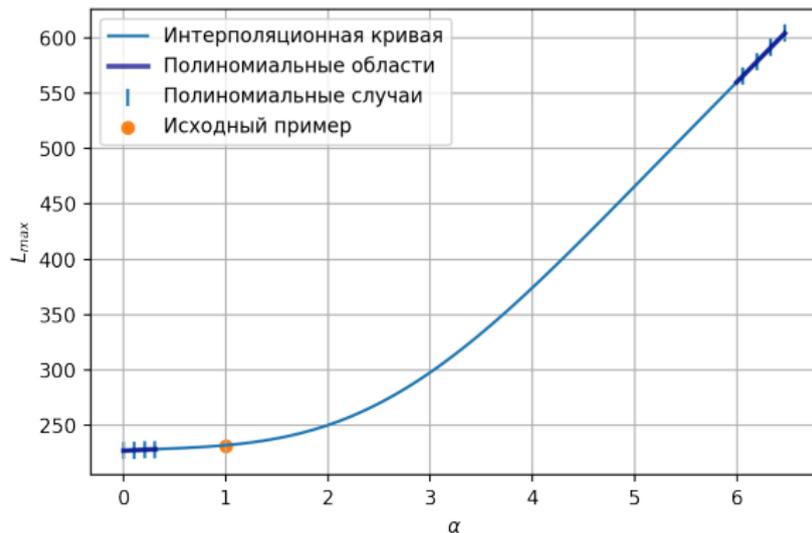
Сильно различающиеся r :

$$\alpha \geq \max_{i,j} \frac{r_i}{r_j - r_i}, i, j = 1 \dots n, i \neq j, r_j > r_i. \quad (35)$$

Функция $L_{\max}(\alpha)$ вещественного аргумента α – оптимальное значение $L_{\max}(\pi)$ для примера A_α , полученного из исходного примера A преобразованием $r' = \alpha r$.

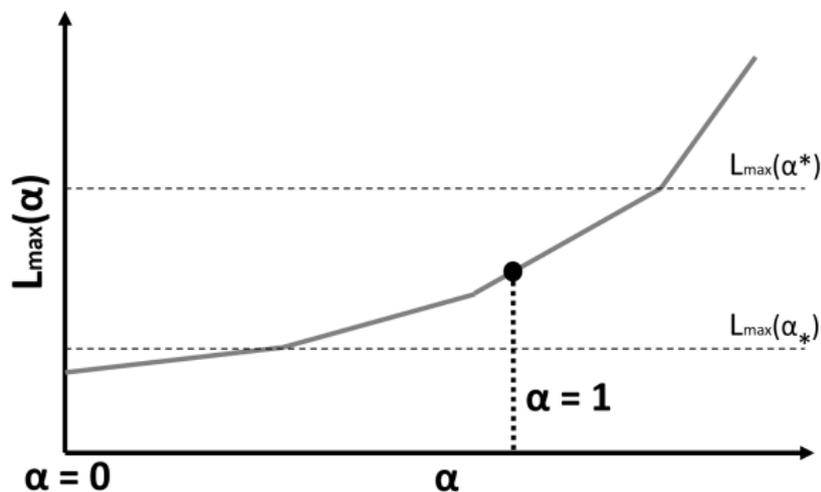
Свойства: непрерывная, монотонно неубывающая, кусочно-линейная с возрастающим угловым коэффициентом.

Узлы интерполяции – в полиномиальных областях.



Формула аппроксимации значения целевой функции исходного примера:

$$L_{\max}^* = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i \neq k} (1 - L_{\max}(\alpha_i))}{\prod_{j \neq k} (1 - L_{\max}(\alpha_j))} L_{\max}(\alpha_k). \quad (36)$$

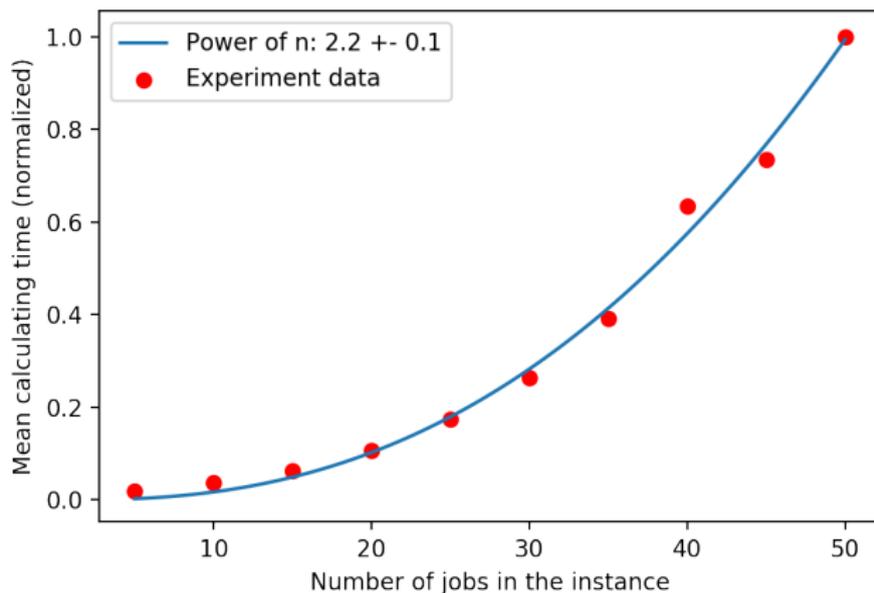


$$\alpha^* = \max \frac{p_i}{r_j - r_i}, \quad i, j = 1 \dots n, \quad i \neq j, \quad r_j > r_i. \quad (37)$$

$$\alpha_* = \min \frac{p_i}{r_j - r_i}, \quad i, j = 1 \dots n, \quad i \neq j, \quad r_j > r_i. \quad (38)$$

(При экспериментально подобранных гиперпараметрах и оптимальной реализации)

$$O(n^2 \log n)$$



Продолжение исследований:

- ▶ Поиск новых полиномиальных и псевдополиномиальных случаев алгоритмами кластеризации,
- ▶ Доказательство аналогичных теорем для преобразований $p' = \beta p$
 $d' = \gamma d$,
- ▶ Использование более сложных полиномиальных случаев (напр. Лазарева) в интерполяционном подходе.



Основная информация

Дата рождения: 23.11.2000

Образование: студент (Московский Государственный Университет)

Должность: техник

Результаты по тематике МНШ

Исследована задача P2 | $p_{гес}, p_j \in \{1, \dots, 2\}$ | C_{\max} , проведены вычислительные эксперименты, показывающие целесообразность применимости метрического подхода на графах с большим числом вершин.

► Рассматриваем класс $P2 \mid \text{prec}, p_j \in \{1, 2\} \mid C_{\max}$:

1. У каждой работы j есть:

а. длительность выполнения $p_j \in \{1, 2\}$;

б. момент начала выполнения $s_j(\pi)$ в соответствии с расписанием π ;

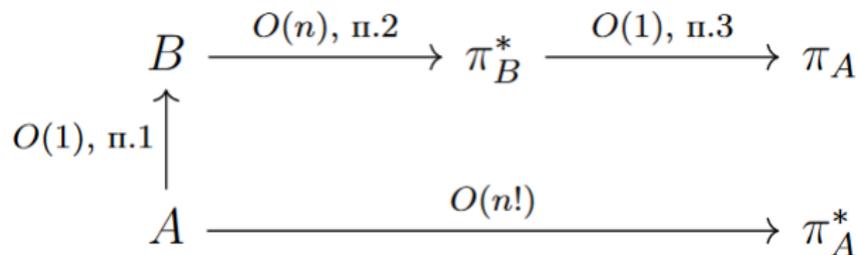
в. момент окончания выполнения $C_j(\pi) = s_j(\pi) + p_j$.

2. Работы выполняются в соответствии с заданным при помощи графа G частичным порядком: для работы j её $s_j(\pi)$ не меньше чем $C_i(\pi)$ предков $i \in \text{prec}_j(G)$.

► Необходимо найти π^* , для которого максимальное $C_j(\pi^*)$ среди всех работ j минимально:

$$\max C_j(\pi^*) = C_{\max}(\pi^*) \rightarrow \min$$

- Вместо решения оригинальной NP-полной задачи A класса $P2 \mid \text{pres}, p_j \in \{1, 2\} \mid C_{\max}, \text{мы}$:



1. Сформируем задачу B класса $P2 \mid \text{pres}, p_j = 1 \mid C_{\max}$, наследующую граф от A.
2. При помощи полиномиального алгоритма найдём оптимальное решение π_B^* задачи B.
3. Применим решение π_B^* к исходной задаче A, получив $\pi_A = \pi_B^*$.

- ▶ Индикаторы, используемые для измерения эффективности метода:
 1. μ определяет долю случаев, для которых алгоритмом не было получено оптимальное решение:

$$\mu = \frac{\bar{K}}{K},$$

где \bar{K} – число сгенерированных случаев, для которых:

$$C_{\max}(\pi_i) - C_{\max}(\pi_i^*) \neq 0;$$

2. Средняя относительная ненулевая ошибка β_{nre} :

$$\beta_{nre} = \frac{1}{\bar{K}} \sum_{i=1}^{\bar{K}} \frac{C_{\max}(\pi_i) - C_{\max}(\pi_i^*)}{C_{\max}(\pi_i^*)};$$

3. Средняя абсолютная ненулевая ошибка β_{nae} :

$$\beta_{nae} = \frac{1}{\bar{K}} \sum_{i=1}^{\bar{K}} (C_{\max}(\pi_{i,A}) - C_{\max}(\pi_{i,A}^*));$$

4. Среднее относительная ошибка β_{re} :

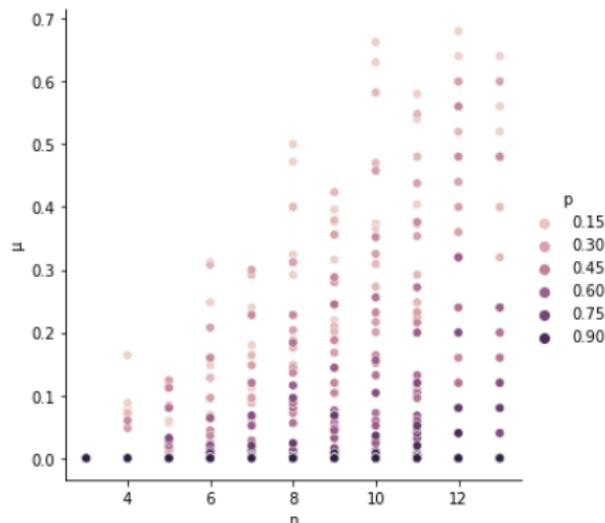
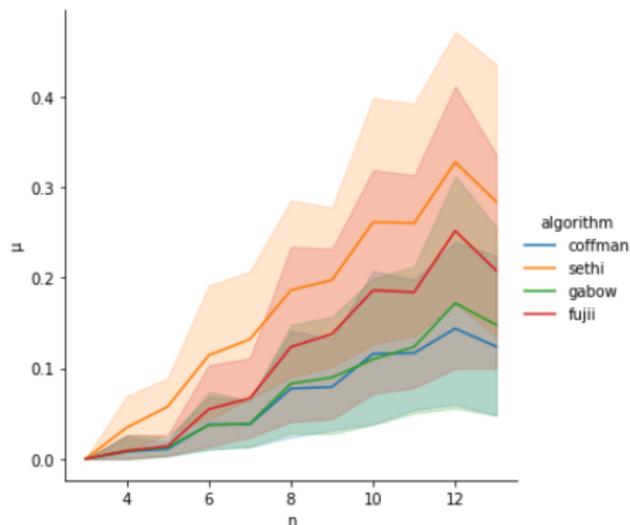
$$\beta_{re} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{C_{\max}(\pi_i) - C_{\max}(\pi_i^*)}{C_{\max}(\pi_i^*)};$$

5. Средняя абсолютная ошибка β_{ae} :

$$\beta_{ae} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (C_{\max}(\pi_{i,A}) - C_{\max}(\pi_{i,A}^*));$$

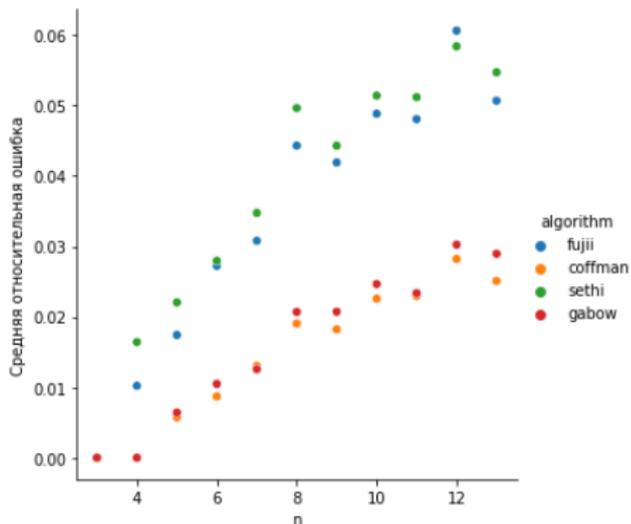
► Было сгенерировано по 250 графов для каждой из задач P2 | прес, $p_j = \{1, 2\}$ | C_{\max} с числом требований $N \in \{3, 13\}$:

График зависимости доли случаев μ , когда алгоритмом не было получено оптимальное решение, от числа вершин n в графе G для различных значений плотности ребер в графе:

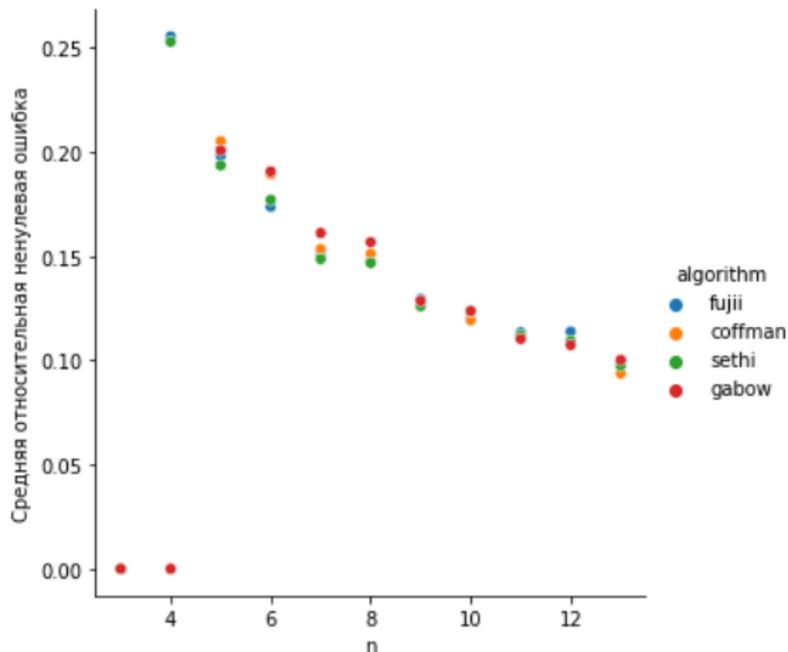


► Было сгенерировано по 1000 графов для каждой из задач $P2 \mid \text{pres}, p_j = \{1, 2\} \mid C_{\max}$ с числом требований $N \in \{3, 14\}$ и плотностью $\rho = 0.3$:

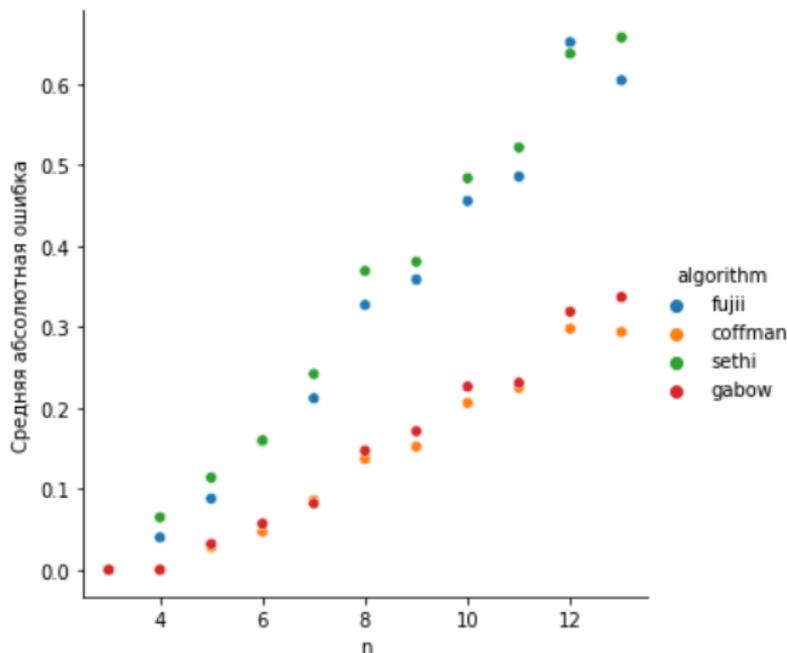
График зависимости средней относительной ошибки β_{re} от числа вершин n в графе G при плотности графа $\rho = 0.3$:



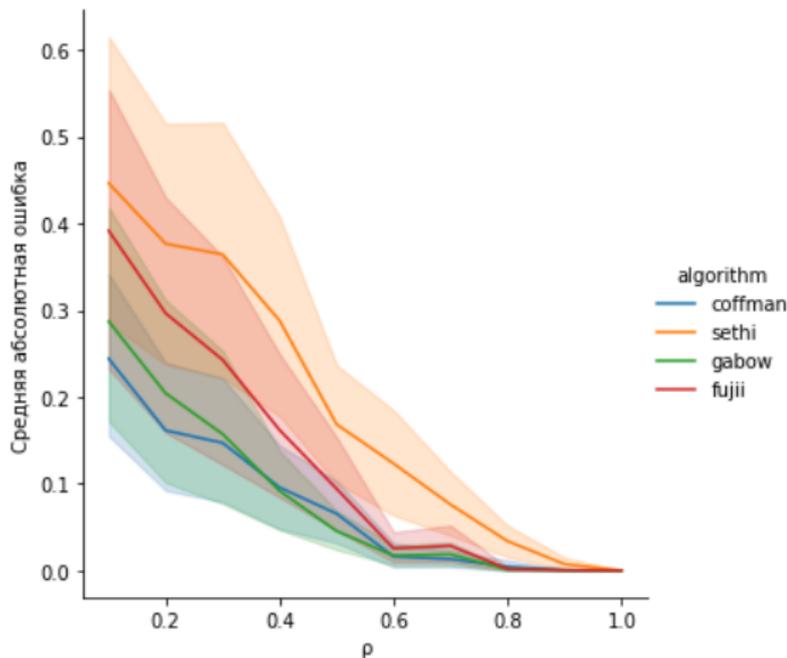
- График зависимости относительной ненулевой ошибки β_{pre} от числа вершин n в графе G при плотности $\rho = 0.3$:



- График зависимости абсолютной ошибки β_{ae} от числа вершин n в графе G при плотности $\rho = 0.3$:

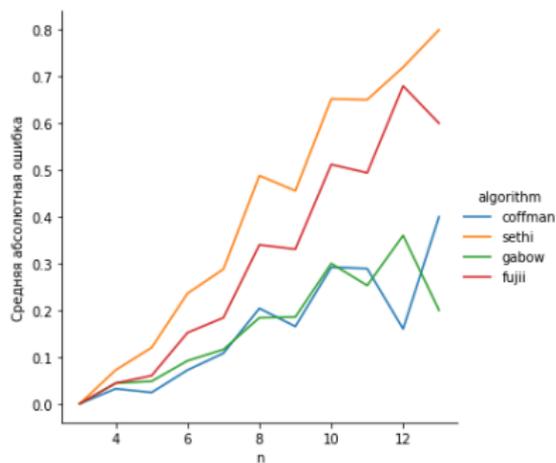
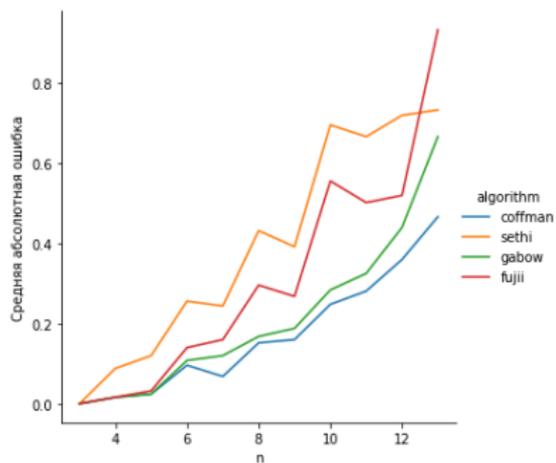


► График зависимости средней абсолютной ошибки β_{ae} от плотности ρ графа G для различных значений числа вершин n при 250 генерациях:



► Также была рассмотрена зависимость величины ошибки при отношениях предшествования, заданных в виде *intree* и *outtree*, однако, за исключением небольших отклонений, предположительно связанных с меньшим числом генераций, зависимости совпадают с данными на ориентированных ациклических данных.

Графики зависимости величины абсолютной ошибки β_{ae} от числа вершин n в графе G для *intree* (слева) и *outtree* (справа):





Основная информация

Дата рождения: 27.10.1999

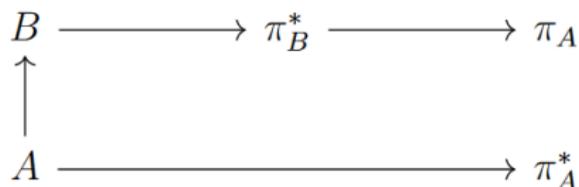
Образование: студент (Московский Авиационный Университет)

Должность: математик

Результаты по тематике МНШ

Получена метрика над пространством примеров класса $R \mid \text{pres}, p_j \mid C_{\max}$, оценивающая погрешность применения решения одного примера к другому.

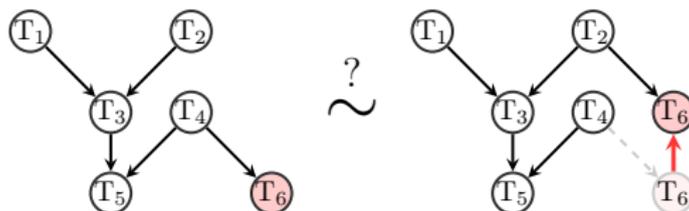
- ▶ Рассматривается полиномиальная схема:



- ▶ Цель: для двух примеров A, B класса $P \mid \text{pres}, p_j \mid C_{\max}$, и их оптимальных расписаний π_A^*, π_B^* , получить псевдометрику

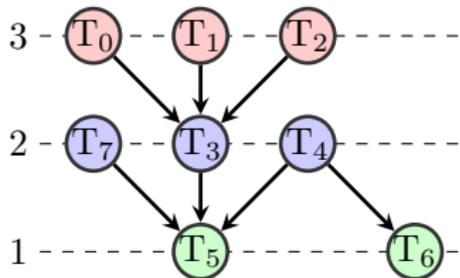
$$0 \leq C_{\max}^A(\pi_A^*) - C_{\max}^A(\pi_B^*) = C_{\max}(\pi_A^*) - C_{\max}(\pi_A) \leq \rho(A, B)$$

- ▶ Подобные псевдометрики уже получены для некоторых задач. Они зависят от параметров задач. Однако, для задач с графом предшествования они не известны.



- ▶ Поделим граф G на уровни:

Уровни:

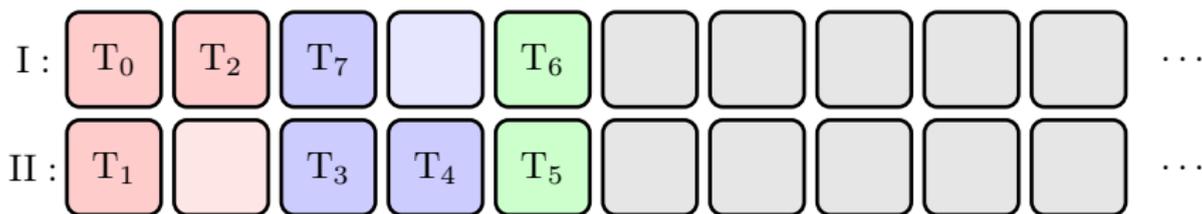


Уровень l_x вершины x определяется рекурсивным выражением:

$$l_x = 1 + \max\{0, \{l_y \mid (x, y) \in G\}\}$$

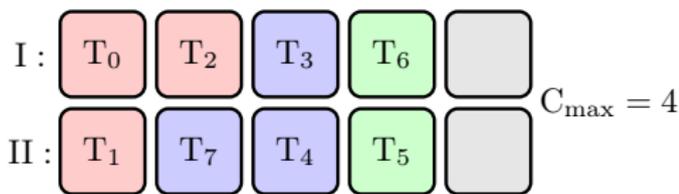
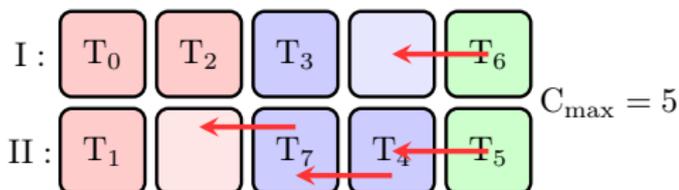
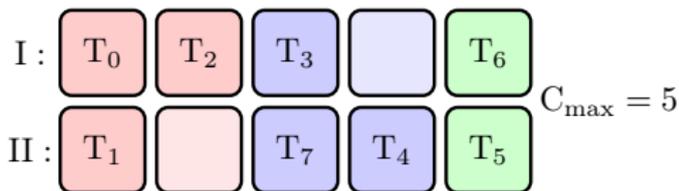
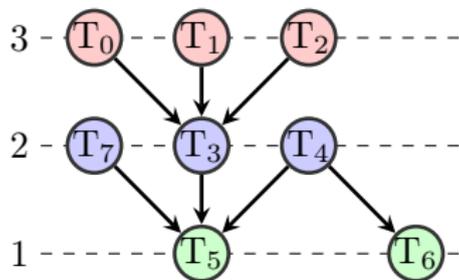
Работы одного уровня всегда могут выполняться одновременно.

- ▶ Назовём блочным решением такое, где в одной колонке расположены работы только одного уровня:

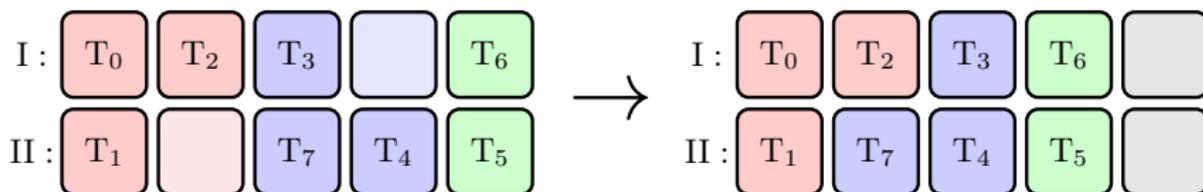


▶ Блочные решения можно упаковать:

Уровни:



▶ Обозначим наименьшее значение целевой функции у блочных расписаний примера А как $\mathcal{P}(A)$.



- ▶ Обозначим $\mathcal{M}^i(\pi, A)$ как суммарное время простоя i -й машины. Разница значений целевых функций блочного расписания π и его упакованной версии $\bar{\pi}$ оценивается сверху в

$$0 \leq C_A(\pi) - C_A(\bar{\pi}) \leq \min_i \mathcal{M}^i(\pi, A) = \mathcal{M}(\pi, A).$$

- ▶ Все оптимальные расписания примера A являются упакованной версией блочного расписания π , значение $\mathcal{M}(\pi, A)$ которого принимает наибольшее значение $\bar{\mathcal{M}}(A)$, а целевая функция которого принимает наименьшее значение $\mathcal{P}(A)$.

- ▶ Значение целевой функции оптимального расписания π^* примера A находится в промежутке

$$C_{\max}(\pi^*) \in [\mathcal{P}(A) - \bar{\mathcal{M}}(A), \mathcal{P}(A)].$$

Вычисление значений $\mathcal{P}(A)$ и $\bar{\mathcal{M}}(A)$ для примера A происходит при помощи полиномиального алгоритма.

- ▶ Метрика:

$$\rho(A, B) = \max(\bar{\mathcal{M}}(A), \bar{\mathcal{M}}(B)) + |\mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A)|.$$

Метрика даёт оценку разницы значений целевых функций двух примеров:

$$\rho(A, B) \geq |C_{\max}(\pi_B^*) - C_{\max}(\pi_A^*)| \geq C_{\max}^A(\pi_B^*) - C_{\max}^A(\pi_A^*).$$

- ▶ Дальнейшие планы:

1. Исследовать зависимость метрики при различных изменениях графа одного из примеров.
2. Изучить идею данной метрики для других классов задач. Возможно, дать обобщение.

Спасибо за внимание!

Лаборатория №68
Теории расписаний и дискретной оптимизации,
Институт Проблем Управления РАН, Москва

www.orsot.ru