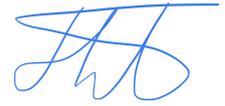


На правах рукописи



Лысенко Павел Владимирович

**ТРАЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РИСКА  
ОБНАРУЖЕНИЯ ПОДВИЖНЫХ  
ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧЕ УКЛОНЕНИЯ**

Специальность 05.13.01 —  
«Системный анализ, управление и обработка информации (в  
отраслях информатики, вычислительной техники и  
автоматизации)»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН).

Научный руководитель: доктор технических наук, член-корреспондент РАН

**Галяев Андрей Алексеевич**

Официальные оппоненты: **Миллер Борис Михайлович**,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН,  
главный научный сотрудник

**Мунасыпов Рустэм Анварович**,

доктор технических наук, профессор,  
Уфимский государственный авиационный технический университет,  
заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов

Ведущая организация: ВУНЦ ВМФ «Военно-морская академия имени Адмирала Флота Советского Союза Н.Г. Кузнецова».

Защита состоится 16 июня 2022 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д002.226.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН по адресу: г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН и на сайте [www.ipu.ru](http://www.ipu.ru).

Автореферат разослан “\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2022 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д002.226.02,  
кандидат физико-математических наук



Е.Г. Мусатова

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## **Актуальность темы исследования**

Задачи планирования маршрута подвижных объектов обычно связаны с задачами планирования пути (path planning, сокращенно РР) и планирования траектории (trajectory planning, сокращенно ТР). Задача планирования пути состоит в определении точек пространства, через которые должен пройти управляемый подвижный объект (УПО), чтобы достичь заданного пункта назначения из начальной позиции, в то время как описание движения подвижного объекта во времени считается задачей планирования траектории. Эти задачи возникают при планировании траекторий уклонения от обнаружения, например, беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) или автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА), а также управляемых, в том числе пилотируемых, подвижных объектов и групп таких объектов.

Совершенствование возможностей разнообразных беспилотных УПО в последние десятилетия привело к развитию новой математической области исследований, посвященной задачам управления как подкласса задач поиска-уклонения, получивших в англоязычной литературе название «Path Planning in Threat Environment». В русскоязычной литературе эта область науки получила название теории планирования траектории УПО в конфликтной среде.

Под конфликтной средой здесь понимается наличие в области движения УПО одного или нескольких объектов, оказывающих негативное воздействие на УПО. Целью такого воздействия может считаться, например, обнаружение объекта. В свою очередь цель управления УПО при движении в конфликтной среде состоит в минимизации негативного воздействия, создаваемого конфликтующими объектами. В качестве критерия оптимизации в задачах уклонения от обнаружения используется риск обнаружения, зависящий от методов и алгоритмов поиска, определяемый через вероятность обнаружения и являющийся функционалом от траектории движения УПО.

Развитие морской робототехники приводит к повышению эффективности использования специальных систем и образцов вооружения военно-морских сил, расширению их функциональных возможностей, обеспечению безопасности жизнедеятельности экипажей подводных лодок, надводных кораблей и вспомогательных судов, а также летательных аппаратов морской авиации при выполнении боевых задачи и задач обеспечения, включая специаль-

ные, подводно-технические и аварийно-спасательные работы. Что невозможно без совершенствования систем управления робототехническими системами и УПО, их интеллектуализации и информационной поддержки принимаемых решений.

Общемировой тенденцией развития морской робототехники военного назначения является акцент на повышении автономности действий подводных и надводных аппаратов, что связано с их возможностями по сверхпродолжительному (от недель до года) пребыванию в морской среде, и соответственно с возможностями системы интеллектуального управления, в том числе движением УПО, с обоснованным выбором целеуказания, обеспечивающей комплексное и эффективное решение типовых задач в автономном режиме в неопределенной и конфликтной средах. Поэтому решение конкретных РР/ТР задач зависит от эффективности работы бортовых алгоритмов УПО.

Исследуемые в диссертационной работе задачи и весь класс подобных ТР-задач чрезвычайно актуален для современных военных приложений, а рассматриваемые в постановках УПО могут быть моделями АНПА или БПЛА для практических применений. Полученные решения могут быть полезны при разработке алгоритмов реального времени для бортовых модулей планирования маршрутов этих объектов, а решение данных ТР-задач может существенно снизить величину риска обнаружения и обеспечить большую безопасность АНПА на найденном оптимальном маршруте в задаче уклонения от обнаружения.

Таким образом, с учетом вышесказанного, проблема поиска оптимальных траекторий УПО в задачах уклонения от обнаружения, исследуемая в работе, является актуальной.

### **Степень научной разработанности темы**

Задача об оптимизации закона уклонения УПО от одиночного стационарного обнаружителя в случае движения объекта на постоянной скорости рассмотрена во многих статьях. В некоторых работах предлагается постановка задачи с расширенным критерием оптимизации, который включает дополнительный регуляризирующий функционал. Отдельные авторы рассматривали задачу уклонения от обнаружения при наличии энергетического ограничения на движение УПО. Постановка с переменной скоростью тоже исследована в ряде статей. Для задач, в которых количество сенсоров больше одного,

аналитическое решение получить не удаётся, однако может быть приведен численный алгоритм для произвольного числа одинаковых сенсоров, независимо принимающих излучаемый УПО сигнал. В основе предложенного подхода лежит алгоритм Дейкстры для графа, построенном на квадратной сетке на плоскости. Также такой подход используется в других статьях. Галяевым А.А. предложена замена переменных для исследуемых задач оптимизации траектории УПО при уклонении от обнаружения, которая отождествляет вещественные координаты объекта с комплексными. Достаточно полный обзор алгоритмов планирования пути для беспилотных аппаратов, находящих оптимальный или субоптимальный маршрут между начальной и конечной точкой в морской среде, приведен в различных обзорах. Эти алгоритмы включают алгоритм кратчайшего пути на основе графа, известный как  $A^*$ , алгоритм искусственного потенциального поля, последовательное квадратичное программирование и так далее. Также часто используется подход, основанный на поведении муравьиной колонии. В последние годы, благодаря прогрессу нейронных сетей, все более популярными становятся подходы глубокого обучения и, в частности, глубокого обучения с подкреплением. В литературе преобладают методы решения в виде численных алгоритмов, тогда как аналитический вывод результатов часто затруднен для многих постановок.

**Объектом исследования** являются оптимальные траектории управляемых подвижных объектов.

**Предметом исследования** являются аналитические методы и алгоритмы поиска оптимальных траекторий управляемых подвижных объектов.

**Целью диссертационного исследования** является повышение эффективности управления подвижными объектами в задачах уклонения от обнаружения путем оптимизации траекторий движения и скоростных режимов методами оптимального управления и вариационного исчисления.

Для достижения данной цели были **поставлены и решены следующие задачи:**

1. Задача планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на длину траектории.
2. Задача планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на кривизну траектории.

3. Задача планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрицы излучения.

### **Область исследования**

Работа выполнена в соответствии со следующими пунктами паспорта специальности 05.13.01 "Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)":

- п.1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- п.2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- п.3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- п.4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

**Методологическую основу работы** составили методы вариационного исчисления, методы оптимального управления, а также методы компьютерного моделирования.

**Достоверность** полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью и полнотой исходных положений, достоверностью, воспроизводимостью и непротиворечивостью математических выкладок. Результаты теоретических исследований подтверждены средствами компьютерного моделирования.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Модель обнаружителя с формализацией функционала риска обнаружения для случая малого отношения сигнал/шум как критерия оптимизации для задач планирования траектории (соответствует п.1, п.2, п.3 паспорта специальности 05.13.01).
2. Метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траектории УПО при уклонении

- от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на длину траектории (соответствует п.2, п.4 паспорта специальности 05.13.01).
3. Метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на кривизну траектории (соответствует п.2, п.4 паспорта специальности 05.13.01).
  4. Метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая выполнения достаточных условий оптимальности траекторий (соответствует п.2, п.4 паспорта специальности 05.13.01).
  5. Метод и алгоритм построения двухзвенной оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая невыполнения достаточных условий оптимальности траекторий (соответствует п.2, п.4 паспорта специальности 05.13.01).

**Научная новизна** диссертации заключается в следующем:

1. Новизна постановки задачи планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на кривизну траектории заключается в том, что в качестве УПО рассмотрен объект, обладающий динамикой машины Дубинса, которая действует в условиях обнаружения и решает задачу уклонения по критерию риска обнаружения. Произведено сравнение с решением известной задачи быстрогодействия для машины Дубинса.
2. Новизна постановки задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения заключается в формализации критерия риска обнаружения с введением в него мультипликативной составляющей, зависящей от направленности излучения объекта. В отличие от известных задач для изотропных индикатрис излучения, рассмотренная постановка позволяет находить аналити-

ческие решения для более широкого класса задач уклонения, аналитически строить траектории уклонения с оптимальным скоростным режимом.

3. Научная новизна заключается в разработке методов решения предложенных постановок задач на основе их полного аналитического решения, анализе и классификации получаемых решений. Предложен метод определения вида оптимальной траектории в задаче планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения, основанный на положительности гессиана индикатрисы излучения. При невыполнении условия положительности гессиана индикатрисы излучения предложен метод построения двухзвенных оптимальных траекторий УПО.

**Теоретическая значимость работы** заключается в развитии математической теории планирования траектории УПО в конфликтных средах (задачах уклонения от обнаружения) и рассмотрении новых для данной области науки постановок, связанных с наличием фазовых, интегральных и динамических ограничений на движение объекта.

**Практическая значимость работы** заключается в том, что полученные научные результаты могут использоваться в создании оперативно-советующих систем стратегически важных подвижных объектов и бортовых планировщиков миссий беспилотных летательных и подводных аппаратов, а именно в алгоритмах получения опорных траекторий для этих управляемых объектов.

#### **Апробация работы.**

Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на научном семинаре ИПУ РАН «Управление по неполным данным» под руководством чл.-корр. РАН, д.т.н. Галяева А.А., а также на ведущих отечественных и зарубежных конференциях: Мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2018, МКПУ-2020), Всероссийском совещании по проблемам управления (ВСПУ XIII), 7th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT), Международной конференции «Оптимальное управление и дифференциальные игры», посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина.

## **Реализация и внедрение результатов работы**

Результаты использовались для выполнения работ при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90215, а также в разработке системы поддержки принятия решений в рамках ОКР «Странник», выполненной по гособоронзаказу. Подтверждением практической ценности полученных результатов служит акт внедрения результатов работы, выданный АО «Морские неакустические комплексы и системы» и приведенный в приложении А.

### **Публикации.**

Результаты диссертационной работы отражены в 13 публикациях, в том числе в 3 статьях в журналах из списка ВАК, 3 статьях в журналах, входящем в Russian Science Citation Index, 7 статьях, входящих в Science Citation Index Expanded Web of Science, из них 3 статьи в журналах Q1, и 7 статьях, индексируемых наукометрической базой Scopus, а также 6 докладах на конференциях, опубликованных в материалах этих конференций.

**Личный вклад автора.** Все результаты исследования, изложенные в диссертационной работе, получены автором лично. Постановки задач исследования осуществлялись совместно с научным руководителем.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность и практическая значимость темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования, проведен краткий анализ научных публикаций по тематике задач планирования траекторий управляемых подвижных объектов, а также представлены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационного исследования, и сформулирована научная новизна.

**В первой главе** проведен обзор различных постановок задач планирования траектории движения УПО. Кратко изложена научная история развития таких постановок. Приведен анализ современных приложений рассматриваемых задач для управления БПЛА и АНПА, который показывает, что данные задачи являются актуальными в виду развития беспилотников самого разного назначения.

Приведен анализ основных наиболее распространенных в литературе постановок задач уклонения УПО от обнаружения, а также численные алго-

ритмы планирования траекторий, на основании чего можно сделать вывод, что большинство статей фокусируются на численных методах решения задач в виду сложности получения аналитических решений. Тем самым подтверждается важность разработки аналитических моделей и методов планирования траекторий, которые являются темой исследования данной диссертационной работы.

**Во второй главе** рассматриваются задача планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на длину траектории и задача планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничения на кривизну траектории. Кроме того, в этой главе сформулирована математическая модель обнаружителя, выведен риск обнаружения как критерий оптимизации всех рассматриваемых в диссертационном исследовании задач и сформулирован общий вид задачи уклонения УПО от обнаружения.

В подразделе 2.1 рассматривается вероятность необнаружения УПО при пассивном наблюдении в случае малого отношения сигнал/шум. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.1.** *На  $i$ -том такте наблюдения вероятность необнаружения УПО при пассивном наблюдении при малом отношении сигнал/шум равна*

$$P_{nd_i} = 1 - \alpha - \Phi'(\Phi^{-1}(1 - \alpha)) \cdot \left( \Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{\sqrt{N_F N_H}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sigma_s^2(i)}{\sigma_\xi^2(i)},$$

где  $\Phi$  – функция стандартного нормального распределения,  $\alpha$  – вероятность ложной тревоги,  $N_F$  и  $N_H$  – постоянные параметры обнаружителя,  $\sigma_s$  и  $\sigma_\xi$  – дисперсии сигнала и шума соответственно.

Общая вероятность обнаружения УПО формально соответствует вероятности наступления события обнаружения хотя бы один раз в серии из  $N$  наблюдений и для независимых событий (наблюдений) рассчитывается по формуле  $P_d = 1 - \prod_{i=1}^N P_{nd_i}$ , или, если ввести понятие «риск обнаружения»:

$$R = \sum_{i=1}^N R_i, \tag{1}$$

где  $R_i = -\ln P_{nd_i}$  – риск на  $i$ -ом такте обнаружения. Последняя сумма представляется в виде интеграла, который будем называть функционалом риска обнаружения

$$R = \int_0^T \frac{\sigma_s^2(t)}{\sigma_\xi^2(t)} dt. \quad (2)$$

Таким образом, задача планирования траектории движения УПО при уклонении от обнаружителя определяется как двухточечная задача вариационного исчисления для функционала риска обнаружения (2) или как задача оптимального управления. При этом рассматривается один неподвижный обнаружитель, расположенный в начале координат. Начальная и конечная точки траектории  $A$  и  $B$  всегда заданы, а время движения может быть фиксировано или не фиксировано, так же как и направления векторов начальной и конечной скорости УПО.

Пусть шум  $\sigma_\xi$  в каждой точке траектории является постоянной величиной, не зависящей от времени. Тогда функционал (2) зависит только от мгновенного уровня сигнала  $S(t)$ , принимаемого обнаружителем

$$\frac{\sigma_s^2(t)}{\sigma_\xi^2(t)} \sim S(t).$$

Следовательно, оптимизационная задача состоит в минимизации вдоль траектории риска обнаружения, который имеет вид

$$R = \int_0^T S(t) dt. \quad (3)$$

На движение УПО могут быть наложены различные ограничения: ограничения на скорость движения, на длину траектории, на радиус разворота и т.п.

Рассматриваемые далее в исследовании постановки являются модификациями описанной в данном подразделе общей задачи. Так, в подразделе 2.2 рассматривается задача планирования траектории УПО при уклонении от обнаружителя при наличии ограничения на длину траектории.

**Задача 2.1.** Найти траекторию движения УПО и закон изменения ориентации его вектора скорости, доставляющие минимум функционалу

$$R = \int_0^T \left(\frac{v}{r}\right)^2 dt. \quad (4)$$

Здесь  $v$  – скорость УПО, а  $r$  – расстояние между УПО и обнаружителем. Граничные условия заданы в виде

$$x(0) = x_A, \quad x(T) = x_B, \quad y(0) = y_A, \quad y(T) = y_A,$$

где  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$  – начальная и конечная точки маршрута.

Время  $T$  движения по траектории фиксировано, на модуль скорости  $v$  наложено ограничение  $v = v_0 = \text{const}$ , т.е. фиксирована максимальная длина траектории.

После перехода в полярные координаты  $(r, \varphi)$  и замены переменной  $\rho = \ln r$ ,  $\rho \in (-\infty, +\infty)$ , т.к.  $r \in (0, +\infty)$ , функционал (4) принимает вид

$$R(\rho(\cdot)) = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \exp(-\rho) \sqrt{1 + \rho'^2} d\varphi \quad (5)$$

при ограничении на длину траектории

$$\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \exp(\rho) \sqrt{1 + \rho'^2} d\varphi \leq vT.$$

Задача решается как задача вариационного исчисления. Необходимые условия экстремума выражаются через уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho + \int_{\rho_B}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \varphi_B - \varphi_A, \\ C(\exp(-\rho_Q) + \lambda \exp(\rho_Q)) = 1, \\ \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho + \int_{\rho_B}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{vT}{C}. \end{cases} \quad (6)$$

Решения уравнения Эйлера-Лагранжа представляются в виде эллиптических интегралов Лежандра первого и второго рода. Данный факт устанавливают следующие леммы.

**Лемма 2.1.**

$$\int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{1}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \frac{\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)}{aC}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi_A, k) &= \int_0^{\xi_A} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}}, \\ k &= \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}, \\ a &= \sqrt{\frac{\lambda}{k}}, \\ \xi_A &= ar_A. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\tilde{F}(\xi, k)$  – нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода.

**Лемма 2.2.**

$$\begin{aligned} \int_{\rho_A}^{\rho_Q} \frac{\exp(\rho)(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))}{\sqrt{C^2(\exp(-\rho) + \lambda \exp(\rho))^2 - 1}} d\rho = \\ = \left(1 + \frac{\lambda}{k^2 a^2}\right) \frac{\tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(\xi_A, k)}{aC} - \frac{\lambda}{k^2 a^2} \frac{\tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(\xi_A, k)}{aC}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\xi, k) &= \int_0^{\xi} \frac{\sqrt{1 - k^2\xi^2}}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \\ k &= \frac{1 - 2\lambda C^2 - \sqrt{1 - 4\lambda C^2}}{2\lambda C^2}, \\ a &= \sqrt{\frac{\lambda}{k}}, \\ \xi_A &= ar_A. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\tilde{E}(\xi, k)$  – нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода.

Рассмотрены симметричный и несимметричный случаи краевых условий. Оптимальный закон изменения скорости определяется касательной к траектории движения и имеет вид

$$\begin{cases} v_x(\varphi) = \frac{\rho'(\varphi) \cos(\varphi) - \sin \varphi}{\sqrt{\rho'(\varphi)^2 + 1}} v, \\ v_y(\varphi) = \frac{\rho'(\varphi) \sin(\varphi) + \cos \varphi}{\sqrt{\rho'(\varphi)^2 + 1}} v. \end{cases} \quad (11)$$

Средствами языка Python был разработан программный модуль, позволяющий перебором по  $(\lambda, k)$  для заданных граничных условий находить набор  $(\lambda, C, \xi_A, k)$ , строить оптимальную траекторию и вычислять значение функционала.

В подразделе 2.2 рассмотрена задача планирования траектории УПО при уклонении от обнаружителя при наличии ограничения на кривизну траектории.

**Задача 2.1.** *Динамика УПО имеет вид:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos \theta, \\ \dot{x}_2 = \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u, \end{cases} \quad (12)$$

где  $x_1, x_2$  - координаты на плоскости, а  $\theta$  - угол поворота вектора скорости.

Система координат нормирована так, что линейная скорость постоянна и равна единице,  $v = 1$ .

На управление наложено ограничение, связанное с максимально возможной кривизной траектории

$$|u| \leq K. \quad (13)$$

Требуется перевести объект из начальной точки  $A$  в конечную точку  $B$ , при этом в обеих заданы направления вектора скорости:

$$x_1(0) = x_{1A}, x_2(0) = x_{2A}, x_1(T) = x_{1B}, x_2(T) = x_{2B}, \theta(0) = \theta_A, \theta(T) = \theta_B. \quad (14)$$

Конечное время  $T$  движения нефиксировано. Движение происходит в зоне действия обнаружителя, расположенного в начале координат. Критерием оптимизации служит интегральный риск обнаружения на траектории от  $A$  до  $B$ , который с учётом условия  $v = 1$ , равен

$$R = \int_A^B \frac{ds}{x_1^2 + x_2^2} = \int_0^T \frac{dt}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (15)$$

Применение принципа максимума непосредственно к Задаче 2.1 невозможно в виду наличия особенности у подинтегральной функции критерия оптимизации (15) в точке  $(0, 0)$ . Однако с помощью замены переменных можно избавиться от этой особенности. Переход в координатную плоскость  $(\rho, \varphi, \theta)$  позволяет переписать постановку Задачи 2.1. Новая постановка лишена недостатков первоначальной задачи, поскольку подинтегральная функция не име-

ет особенностей на всей области определения, бесконечное число раз непрерывно дифференцируема, а значит, можно применить принцип максимума Понтрягина.

Представлены леммы, которые устанавливают эквивалентность необходимых условий оптимальности для двух постановок задачи, а значит, дальнейшее исследование Задачи 2.1 с функцией Понтрягина (16) обоснованно.

**Лемма 2.3.** *Функция Понтрягина для Задачи 2.1 имеет вид*

$$H(x_1, x_2, \theta, u, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = \Psi_1 \cos \theta + \Psi_2 \sin \theta + \Psi_3 u - \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (16)$$

где  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  – сопряженные переменные.

Согласно принципу максимума

$$\max_{u \in [-K, K]} H(x^*, u, \Psi) = H(x^*, u^*, \Psi). \quad (17)$$

Закон оптимального управления имеет вид

$$u^* = \text{sign}(\Psi_3) = \begin{cases} K, & \Psi_3 > 0, \\ u_o^*(t), |u_o^*(t)| < K, & \Psi_3 = 0, \\ -K, & \Psi_3 < 0. \end{cases} \quad (18)$$

здесь  $u_o^*(t)$  – управление в случае особого режима. В случае  $\Psi_3 \neq 0$  оптимальное управление принимает крайнее значение своего допустимого множества, то есть УПО движется по окружности максимально возможной кривизны (минимального радиуса).

**Лемма 2.4.** *Оптимальный закон управления  $u_o^*$  в особом режиме для Задачи 2.1 удовлетворяет уравнению*

$$u_o^* = \frac{2(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1)}{r^2}, \quad (19)$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  – модуль радиус-вектора УПО.

**Замечание 2.1.** *Вид оптимальной траектории, соответствующей интервалу особого управления в решении Задачи 2.1 совпадает с видом оптимальной траектории из решения аналогичной задачи без ограничения на кривизну траектории.*

По аналогии с решением задачи быстрогодействия для машины Дубинса результат представляет собой траекторию с тремя интервалами управления: начальным и конечным с предельными значениями кривизны траектории и интервалом с особым управлением между ними. Но в отличие от решения классической задачи, траектория УПО при особом управлении представляет собой дугу окружности, проходящую через начало координат, что совпадает с решением аналогичной задачи при отсутствии ограничения на кривизну траектории. На рисунке 1 продемонстрирован полученный результат.

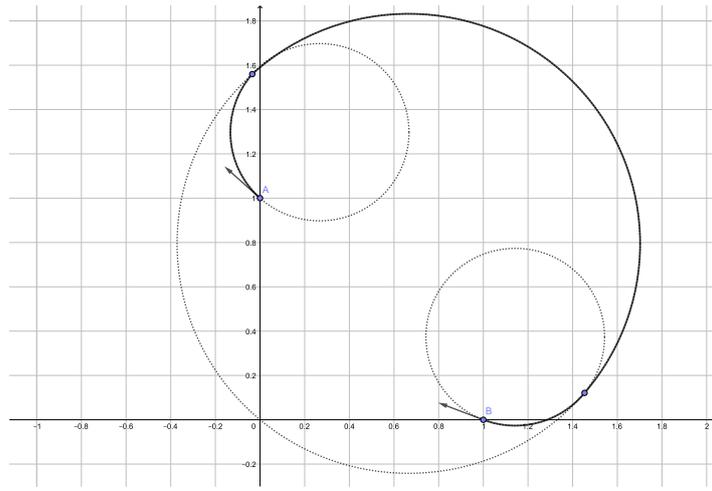


Рис. 1 — Пример оптимальной траектории, содержащей дугу с особым режимом управления

**В третьей главе** рассматривается задача уклонения от обнаружения УПО, обладающего неоднородной индикатрисой излучения.

**Задача 3.1.** Найти такую траекторию  $(r^*(t), \varphi^*(t))$ , которая минимизирует функционал

$$R = \int_0^T \left(\frac{v}{r}\right)^\mu g(\beta) dt, \quad (20)$$

где  $v$  – скорость подвижного объекта,  $r$  – расстояние между обнаружителем и объектом,  $\beta$  – угол поворота объекта относительно направления на обнаружитель, а  $g(\beta)$  – функция индикатрисы излучения. Краевые условия

$$r(0) = r_A, r(T) = r_B, \varphi(0) = \varphi_A, \varphi(T) = \varphi_B.$$

Время  $T$  движения по маршруту от точки  $A$  к точке  $B$  фиксировано.

Как указано в Главе 2, для задач такого рода существует преобразование координат, которое приводит функционал к удобной для последующего исследования форме и к такой системе координат, в которой оптимальные траектории являются геодезическими, т.е. представлены в виде прямых линий. Для рассматриваемой задачи (20) такое преобразование также существует, и с учетом него ранее сформулированная Задача 3.1 эквивалента новой задаче.

**Задача 3.2.** *Требуется найти траекторию  $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$ , которая минимизирует функционал*

$$R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t) dt = \int_0^T (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g \left( \arctan \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \right) dt \quad (21)$$

*с краевыми условиями*

$$\rho(0) = \rho_A, \rho(T) = \rho_B, \varphi(0) = \varphi_A, \varphi(T) = \varphi_B.$$

Записанная в таком виде, исходная Задача более удобна для аналитического решения, так как функционал оптимизации зависит только от производных координат по времени.

Прежде всего следует рассмотреть необходимые условия для экстремальной траектории, т.е. найти кандидатов в оптимальные траектории. В силу формы уравнения (21) этот функционал имеет несколько первых интегралов. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.1.** *Если  $g(\beta)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция, тогда лагранжиан  $S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$  имеет постоянное значение  $S^*$  вдоль экстремальной траектории  $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$ .*

Следующая теорема определяет необходимое условие экстремума траектории, которая может быть решением Задачи 3.2.

**Теорема 3.1.** *Пусть  $0 < g_1 < g(\beta) < g_2$  для всех  $\beta \in [0, 2\pi]$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция угла  $\beta$ , где  $g_1, g_2$  – некоторые константы, а  $\ddot{\rho}(t), \ddot{\varphi}(t)$  существуют и являются непрерывными функциями времени  $t$ . Тогда экстремальная траектория удовлетворяет следующей си-*

стеме уравнений

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \text{const}, \\ \dot{\varphi} = \text{const}. \end{cases} \quad (22)$$

**Следствие 3.1.** Из Теоремы (3.1) следует, что экстремальная траектория является логарифмической спиралью, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$r(\varphi) = r_A \exp\left(\frac{\varphi - \varphi_A}{\varphi_B - \varphi_A} \ln \frac{r_B}{r_A}\right). \quad (23)$$

Следующие две леммы определяют скоростной режим подвижного объекта на экстремальной траектории и величину риска на ней.

**Лемма 3.2.** Закон изменения скорости на экстремальной траектории, удовлетворяющей уравнению (23), имеет вид

$$v(t) = \frac{r_A}{T} \exp\left(\frac{t}{T} \ln \frac{r_B}{r_A}\right) \sqrt{\ln^2 \frac{r_B}{r_A} + (\varphi_B - \varphi_A)^2}. \quad (24)$$

**Лемма 3.3.** Значение функционала (21) на экстремальной траектории (23) равняется

$$R^* = \frac{\left((\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2\right)^{\mu/2}}{T^{\mu-1}} g(\beta^*) = \frac{L^\mu}{T^{\mu-1}} g(\beta^*), \quad (25)$$

где  $\beta^* = \arctan \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\rho_B - \rho_A}$ , и зависит только от краевых условий и

$L = \sqrt{(\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2}$  – длина прямолинейного сегмента между точками  $A$  и  $B$  в пространстве  $(\rho, \varphi)$ .

Доказано, что полученная выше экстремальная траектория, заданная уравнением (23), является оптимальным решением задачи 3.2, т.е. она приводит к сильному минимуму функционал (21). Для этого исследована матрица Гессе.

**Лемма 3.4.** Пусть  $S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, t) = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} g(\beta)$ ,  $g(\beta)$  – трижды непрерывно дифференцируемая функция  $\beta$ , тогда матрица Гессе  $\mathbf{H}$  равна

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\rho}^2} = (-2\dot{\varphi}\dot{\rho}(\mu-1)g'(\beta) + \mu(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2(\mu-1))g(\beta) + g''(\beta)\dot{\varphi}^2)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \\ H_{12} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\rho}\partial \dot{\varphi}} = ((\dot{\rho}^2 - \dot{\varphi}^2)(\mu-1)g'(\beta) + \dot{\rho}\dot{\varphi}((\mu^2 - 2\mu)g(\beta) - g''(\beta)))(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \\ H_{21} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\varphi}\partial \dot{\rho}} = ((\dot{\rho}^2 - \dot{\varphi}^2)(\mu-1)g'(\beta) + \dot{\rho}\dot{\varphi}((\mu^2 - 2\mu)g(\beta) - g''(\beta)))(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \\ H_{22} &= \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{\varphi}^2} = (2\dot{\varphi}\dot{\rho}(\mu-1)g'(\beta) + \mu(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2(\mu-1))g(\beta) + g''(\beta)\dot{\rho}^2)(\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\frac{\mu}{2}-2}, \end{aligned} \quad (26)$$

а сам гессиан как определитель этой матрицы равен

$$\det \mathbf{H} = (\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2)^{\mu-2} (\mu-1) (g^2(\beta)\mu^2 + g(\beta)g''(\beta)\mu - g'^2(\beta)(\mu-1)). \quad (27)$$

Следующая теорема дает достаточное условие оптимальности экстремальной траектории.

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия Теоремы 3.1, Лемм 3.1 и 3.4, и  $\det \mathbf{H} > 0$  для всех значений  $\beta$ . Тогда оптимальная траектория, удовлетворяющая уравнению (22), доставляет сильный минимум функционалу риска (21).

Таким образом, положительность определителя матрицы Гессе гарантирует, что логарифмическая спираль является оптимальным решением задачи. Теорема 3.2 позволяет для любой функции  $g(\beta)$  ответить, является ли экстремальная траектория (23) оптимальной или нет. Действительно, знак гессиана (27) зависит от знака третьего множителя, который зависит только от функции  $g(\beta)$ . Если достаточные условия не выполняются, то оптимальная траектория имеет более сложную форму и состоит из нескольких логарифмических спиралей.

Прежде всего, следует рассмотреть случай вырождения уравнений Эйлера-Лагранжа. Дело в том, что два уравнения могут совпадать друг с другом

для некоторой индикатрисы излучения  $g(\beta)$  и некоторых постоянных значений  $C_1, C_2$ .

**Лемма 3.5.** *Функция  $g(\beta) = C|\cos(\gamma - \beta)|^\mu$ , где  $\tan \gamma = \frac{C_2}{C_1}$ , приводит систему уравнений Эйлера-Лагранжа к вырождению.*

Согласно Лемме 3.5 полученная специальная форма функции  $g(\beta)$  вырождает уравнения Эйлера-Лагранжа только при одном конкретном значении параметра  $\gamma$ , отвечающем направлению, связанному с граничными условиями задачи 3.2, выраженными через константы  $C_1$  и  $C_2$ , когда она уже решена.

После анализа вырождения необходимых условий оптимальности рассматриваются и достаточные условия. Одним из интересных для исследования случаев является случай нулевого гессиана (27):

$$g^2(\beta)\mu^2 + g(\beta)g''(\beta)\mu - g'^2(\beta)(\mu - 1) = 0. \quad (28)$$

**Лемма 3.6.** *Функция  $g(\beta)$ , обнуляющая гессиан (27), равна*

$$g(\beta) = C|\cos(\tilde{\beta} - \beta)|^\mu, \quad (29)$$

где  $\tilde{\beta}$  – произвольная константа.

Теперь из сравнения индикатрис излучения  $g(\beta)$ , заданных Леммами 3.5 и 3.6, следует идентичность обоих выражений при фиксированной  $\gamma$  и некотором значении  $\beta_0$ .

Значение риска на оптимальной двузвенной траектории, проходящей через точки  $A, B, C$ , приведено в следующей лемме.

**Лемма 3.7.** *Минимальное значение риска на двузвенной траектории, последовательно проходящей через точки  $A, C, B$  за интервал времени  $T$ , равно*

$$R_{ACB} = \frac{1}{T^{\mu-1}} \left( L_1 g^{1/\mu}(\beta_1) + L_2 g^{1/\mu}(\beta_2) \right)^\mu, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sqrt{(\rho_C - \rho_A)^2 + (\varphi_C - \varphi_A)^2}, \\
L_2 &= \sqrt{(\rho_B - \rho_C)^2 + (\varphi_B - \varphi_C)^2}, \\
\beta_1 &= \arctan \left( \frac{\varphi_C - \varphi_A}{\rho_C - \rho_A} \right), \\
\beta_2 &= \arctan \left( \frac{\varphi_B - \varphi_C}{\rho_B - \rho_C} \right).
\end{aligned} \tag{31}$$

В связи с тем, что реальные индикатрисы излучения УПО имеют более сложную форму, Лемма 3.7 предоставляет простой способ проверки типа оптимальной траектории. Действительно, если в одном из случаев леммы 3.7,  $R_{AC}^* + R_{CB}^* < R_{AB}^*$ , то логарифмическая спираль, напрямую соединяющая точки  $A, B$  не является оптимальной, и двузвенная траектория является предпочтительной в смысле минимизации функционала риска.

Рассмотрение оптимальных двузвенных траекторий в пространстве  $(\rho, \varphi)$  позволяет переписать уравнение (30) в более простом виде.

**Следствие 3.2.** *Минимальное значение риска на двузвенной траектории, последовательно проходящей через точки  $A, C, B$  за интервал времени  $T$  может быть записано как*

$$R_{ACB} = \frac{L_0^\mu}{T^{\mu-1}} \left( \frac{\sin(\beta_2 - \beta_0)g^{1/\mu}(\beta_1) + \sin(\beta_0 - \beta_1)g^{1/\mu}(\beta_2)}{\sin(\beta_2 - \beta_1)} \right)^\mu, \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
L_0 &= \sqrt{(\rho_B - \rho_A)^2 + (\varphi_B - \varphi_A)^2}, \\
\beta_1 &= \arctan \left( \frac{\varphi_C - \varphi_A}{\rho_C - \rho_A} \right), \\
\beta_2 &= \arctan \left( \frac{\varphi_B - \varphi_C}{\rho_B - \rho_C} \right), \\
\beta_0 &= \arctan \left( \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\rho_B - \rho_A} \right).
\end{aligned} \tag{33}$$

Согласно доказательству леммы 3.7 величина риска на двузвенной экстремальной траектории равна

$$R_{ACB}(\beta_1, \beta_2, T_1, T_2) = \frac{L_1^\mu(\beta_1)}{T_1^{\mu-1}} g(\beta_1) + \frac{L_1^\mu(\beta_2)}{T_2^{\mu-1}} g(\beta_2). \tag{34}$$

Следующая теорема конкретизирует результат о структуре оптимальных двузвенных траекторий.

**Теорема 3.3.** *Оптимальные углы  $\beta_1^*, \beta_2^*$  для двузвенной оптимальной траектории не зависят от направления  $\beta_0$  между начальной и конечной точками, полностью определяются индикатрисой излучения  $g(\beta)$  и удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} \left( \frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)} \right)^{1/\mu} = \cos(\beta_2 - \beta_1) + \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)}, \\ \left( \frac{g(\beta_1)}{g(\beta_2)} \right)^{1/\mu} = \cos(\beta_2 - \beta_1) - \frac{1}{\mu} \sin(\beta_2 - \beta_1) \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}. \end{cases} \quad (35)$$

Таким образом, любая оптимальная двузвенная траектория для конкретной функции индикатрисы излучения  $g(\beta)$  строится из отрезков двух оптимальных направлений  $\beta_1^*$  и  $\beta_2^*$ . Более того, легко показать, что на этих отрезках строятся и оптимальные многозвенные траектории.

Следующая лемма определяет систему уравнений, полученную в Теореме 3.3, которая позволяет найти оптимальные углы  $\beta_1^*$  и  $\beta_2^*$ , минимизирующие функционал риска на двузвенной траектории.

**Лемма 3.8.** *Углы  $\beta_1^*, \beta_2^*$  для оптимальной двузвенной траектории могут быть найдены из системы*

$$\begin{cases} \cos(\beta_2 - \beta_1) = \cos(\xi_1 - \xi_2), \\ \frac{g(\beta_2)}{g(\beta_1)} = \left| \frac{\cos^\mu \xi_2}{\cos^\mu \xi_1} \right|, \end{cases} \quad (36)$$

где

$$\begin{cases} \xi_1 = \arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta_1)}{g(\beta_1)}, \\ \xi_2 = \arctan \frac{1}{\mu} \frac{g'(\beta_2)}{g(\beta_2)}. \end{cases} \quad (37)$$

Пример далее иллюстрирует случай двузвенной оптимальной траектории. Индикатриса излучения более сложная и, как показано на рисунке 2, представлена в виде эллипса с косинусной волной

$$g(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.8 \sin(\beta)}} + 0.3 \cos(6\beta).$$

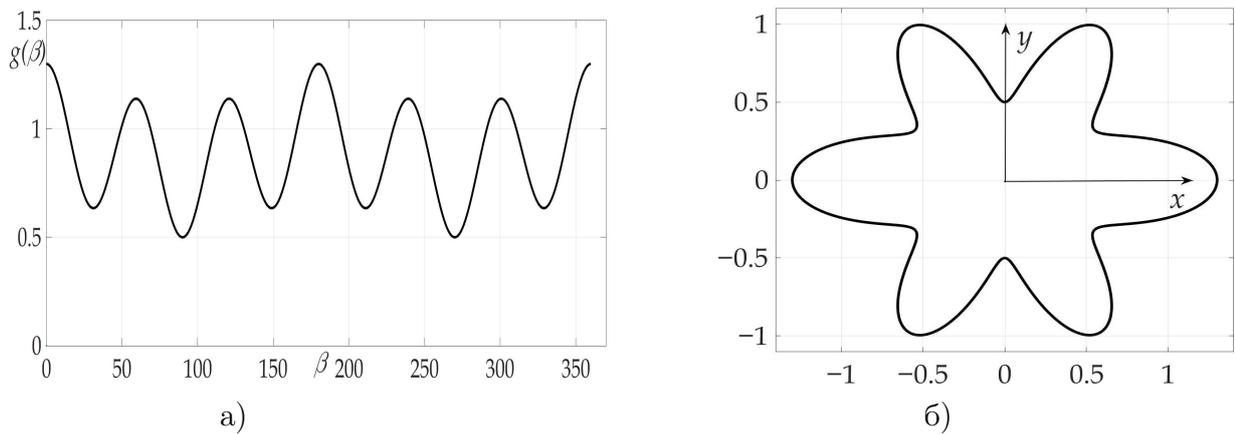


Рис. 2 — Индикатриса излучения как зависимость  $g(\beta)$  в полярных координатах (а) и на декартовой плоскости (б).

Рисунок 3 показывает, что гессиан  $\det H$  не является положительным для всех  $\beta$ , что означает, что достаточные условия оптимальности не выполнены. Как однозвенная  $AB$ , так и двузвенные траектории  $AC_1B$ ,  $AC_2B$  показаны на рисунках 4 и 5. Был разработан программный модуль в Matlab для вычисления оптимальных  $\beta_1^*$ ,  $\beta_2^*$  на основе системы уравнений (36) из леммы 3.8.

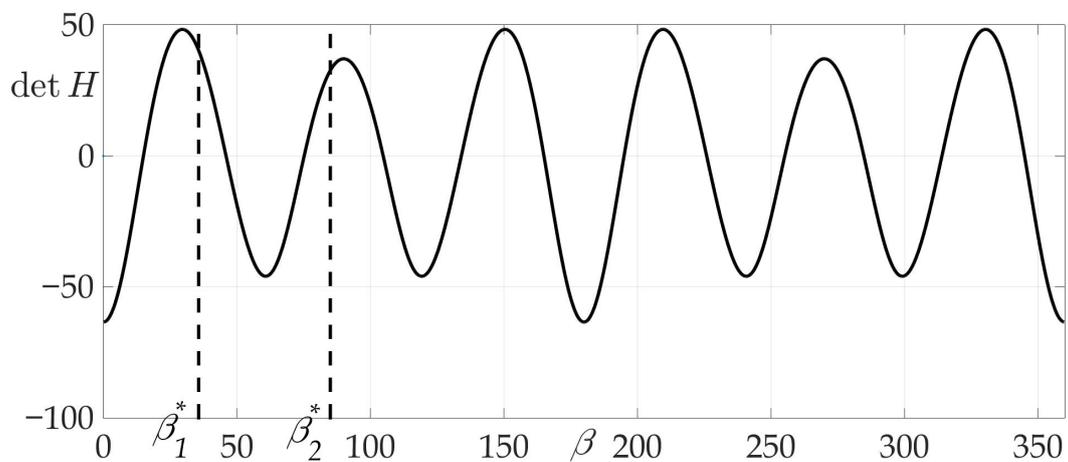


Рис. 3 — Зависимость гессиана  $\det H$  от  $\beta$ .

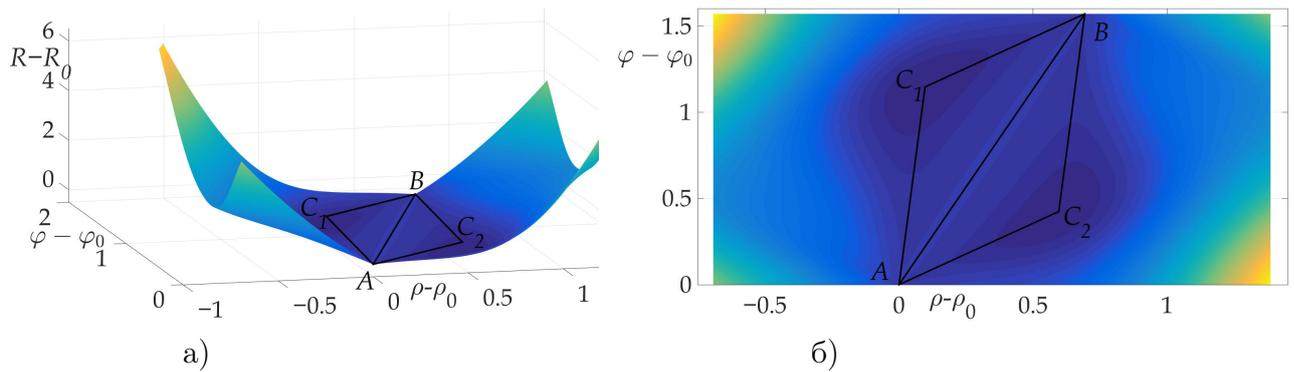


Рис. 4 — Оптимальная траектория в пространстве  $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0, R - R_0)$  (а) и ее проекция на плоскость  $(\rho - \rho_0, \varphi - \varphi_0)$  (б).

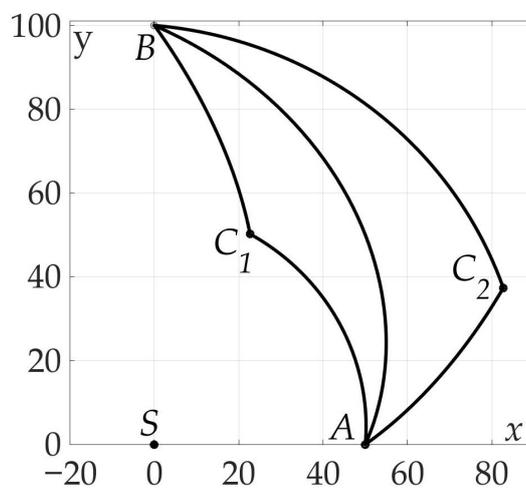


Рис. 5 — Оптимальная траектория на декартовой плоскости.

В данном примере двузвенные траектории предпочтительнее в смысле минимизации риска почти на 37%.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В данной диссертационной работе решены актуальные задачи оптимального планирования маршрута УПО при уклонении от обнаружения при наличии ограничений на длину и кривизну траектории, а так же при наличии у УПО неоднородной индикатрисы излучения.

1. Формализованы математическая модель обнаружителя и функционал риска обнаружения для случая малого отношения сигнал/шум как критерий оптимизации для задач планирования траектории.

2. Разработаны методы построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задач планирования траектории УПО при уклонении от одиночного обнаружителя с учётом ограничений на длину траектории и на кривизну траектории для УПО с динамикой машины Дубинса.
3. Предложен метод построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая выполнения достаточных условий оптимальности траекторий. На основании полученных методов аналитически получены законы изменения скорости УПО и значения риска обнаружения на оптимальной траектории.
4. Разработаны метод и алгоритм построения оптимальной траектории на основе аналитического решения задачи планирования траекторий УПО при уклонении от одиночного обнаружителя при наличии у объекта неоднородной индикатрисы излучения для случая невыполнения достаточных условий оптимальности траекторий. Представлен метод определения типа оптимальной траектории на основе положительности гессиана индикатрисы излучения.
5. Показана эффективность разработанных методов и алгоритмов для планирования движения УПО. На оптимальных траекториях и при оптимальных скоростных режимах движения УПО риск обнаружения значительно уменьшается по сравнению с известными решениями задач уклонения.

Данная диссертационная работа открывает значительное количество возможных направлений будущих исследований. Дальнейшая работа может быть направлена на усложнение и обобщение математических моделей и оптимизационного функционала задачи. В Главах 2, 3 исследована поисковая система, содержащая единственный неподвижный стационарный обнаружитель. Увеличение числа обнаружителей и частот обработки сигналов представляет интересную и важную для приложений задачу. Физические особенности среды, несущей сигнал, такие как коэффициент затухания, также предстоит рассмотреть для получения аналитических оценок при построении

опорных траекторий движения УПО. Разработка бортовых алгоритмов на основе полученных методов построения опорных траекторий УПО является важным направлением будущих работ.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Algorithm for Optimal Two-Link Trajectory Planning in Evasion from Detection Problem of Mobile Vehicle with Non-Uniform Radiation Pattern // *Advances in Systems Science and Applications*, 2021, 21(2), P. 71-82. (Scopus Q3)
2. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. 2D Optimal Trajectory Planning Problem in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // *Sensors*. 2021. Volume 21, Issue 2. 396. P. 1-24.  
DOI: 10.3390/s21020396 (WoS Q1, IF 3.576)
3. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Dobrovidov A.V., Shaikin M.E., Yakhno V.P. Path Planning in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // *Sensors*. 2020. Volume 20, Issue 7. 2076. P. 1-21.  
DOI: 10.3390/S20072076 (WoS Q1, IF 3.275)
4. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Условия оптимальности подвижного объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения // *Доклады Российской Академии Наук. М.: Российская Академия наук*, 2020. Т. 493. № 1. С. 95-98.  
Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Trajectory Optimality Conditions for Moving Object with Nonuniform Radiation Pattern // *Doklady Mathematics*. M.: Pleades Publishing, Ltd, Springer, 2020. Vol. 102. No. 1. P. 342–345. (Scopus Q2, WoS Q4, RSCI, IF 0.548)
5. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Уклонение подвижного объекта от одиночного обнаружителя на заданной скорости // *Проблемы управления*. 2020. № 1. С. 83-91.  
Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Evading a Single Detector by an Object Moving at a Given Speed // *Automation and Remote Control*. 2021. Vol. 82. No. 7. P. 1281–1291. (Scopus Q2, WoS Q4, RSCI, IF 0.520)
6. Галяев А.А., Лысенко П.В., Яхно В.П. Задача планирования оптимального движения объекта через район случайного поиска // *Проблемы управления*. 2017. №5. С. 88-94.  
Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P. Optimal Path Planning for an Object in a Random Search Region // *Automation and Remote Control*. 2018. V. 79 No11. P. 2080-2089. (Scopus Q2, WoS Q4, RSCI, IF 0.520)
7. Galyaev A.A., Lysenko P.V., Rubinovich E.Y. Optimal Stochastic Control in the Interception Problem of a Randomly Tacking Vehicle // *Mathematics*. 2021. 9. 2386. DOI: 10.3390/math9192386 (WoS Q1, IF 2.258)