

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



**Хомутов Дмитрий Константинович**

**МЕТОДЫ СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК  
В МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ  
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕСВЯЗНОЙ СЕТЬЮ**

Специальность: 2.3.1 — Системный анализ, управление и обработка  
информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Агаев Рафиг Паша оглы

Москва — 2026

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Основные определения и известные результаты</b>	<b>14</b>
1.1. Базовая модель консенсуса в многоагентных системах первого порядка с запаздыванием . . . . .	14
1.2. Устойчивость базовой модели консенсуса и графовая интерпретация собственного проектора . . . . .	18
1.3. Обзор методов исследования и основных моделей многоагентных систем с запаздыванием . . . . .	20
1.3.1. Основные методы анализа устойчивости систем . . . . .	20
1.3.2. W-функция Ламберта . . . . .	22
1.3.3. Системы с частичным запаздыванием . . . . .	27
1.3.4. Примеры протоколов в многоагентных системах с запаздыванием . . . . .	30
1.3.5. Скорость сходимости моделей в многоагентных системах .	37
1.3.6. Методы достижения консенсуса в многоагентных системах с несвязной структурой . . . . .	42
<b>Глава 2. Базовый протокол консенсуса с запаздыванием</b>	<b>45</b>
2.1. Граничное значение запаздывания . . . . .	45
2.2. Максимальная степень сходимости . . . . .	47
2.3. Связь асимптотического поведения и собственного проектора .	53
2.3.1. Асимптотическое поведение устойчивого базового протокола консенсуса . . . . .	53
2.3.2. Асимптотическое поведение устойчивого протокола без самозапаздывания . . . . .	56
2.4. Числовой пример . . . . .	58

2.5. Выводы по главе 2 . . . . .	61
<b>Глава 3. Протоколы консенсуса с частичным запаздыванием</b>	<b>62</b>
3.1. Обобщенный протокол консенсуса . . . . .	62
3.1.1. Устойчивость обобщенного протокола . . . . .	63
3.1.2. Асимптотическое поведение устойчивого обобщенного протокола . . . . .	70
3.2. Дополненный протокол консенсуса . . . . .	72
3.2.1. Устойчивость дополненного протокола . . . . .	72
3.2.2. Альтернативный метод исследования устойчивости дополненного протокола . . . . .	80
3.2.3. Асимптотическое поведение дополненного протокола . . . . .	85
3.2.4. Числовой пример . . . . .	90
3.3. Выводы по главе 3 . . . . .	91
<b>Глава 4. Достижение консенсуса в системах с несвязной структурой и запаздыванием</b>	<b>94</b>
4.1. Метод ортогональной проекции в задаче о консенсусе . . . . .	94
4.1.1. Связь между псевдообратной матрицей и методом ортогональной проекции . . . . .	94
4.1.2. Числовой пример . . . . .	101
4.2. Протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием . . . . .	103
4.2.1. Устойчивость протокола латентного консенсуса . . . . .	104
4.2.2. Асимптотическое поведение протокола латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями . . . . .	109
4.3. Выводы по главе 4 . . . . .	112
<b>Заключение</b>	<b>113</b>
Список сокращений и условных обозначений . . . . .	115
Список литературы . . . . .	116

# Введение

**Актуальность темы.** Многоагентные системы с запаздыванием представляют большой интерес для исследования и встречаются во многих областях. Такие системы основаны на взаимодействии нескольких интеллектуальных автономных агентов, что используется, например, в задачах децентрализованного управления групповым движением, где участники корректируют свою скорость и положение исходя из характеристик своих соседей. При этом агентам не нужно знать о топологии всей сети, и нет необходимости в «центре», управляющем всеми агентами. Более того, агенты могут не только двигаться в заданном направлении, но и сохранять заданную формацию (см. например [81, 82, 113, 116]).

Однако в силу различных причин в подобных системах может возникать запаздывание. Модели управления транспортным потоком – частный случай группового движения, в котором запаздывание возникает из-за человеческого фактора: времени, необходимого водителю на обнаружение изменения ситуации во время движения, времени на реакцию и прочее [45, 48, 61, 72]. Такие модели, в частности, используются в задачах автоматизации транспортных средств для обеспечения безопасности дорожного движения и эффективного использования автомагистралей (см. например [120]).

Запаздывания возникают в моделях, использующихся для анализа динамики цен на рынке товаров [46]. На цену товара влияют спрос и предложение в данный момент времени, на которые, в свою очередь, влияют информация о прошлых ценах и задержки производства товара соответственно. Фактор задержки в производстве влияет на устойчивость рыночных моделей и может привести к неустойчивости, в то время как задержки при получении информации о ценах на взаимосвязанных рынках могут иметь стабилизирующий эффект [89]. Запаздывание в процессе производства товаров возникает

из-за времени, которое нужно для транспортировки материалов, настройки оборудования и самого производства [106].

В отличие от предыдущего примера, сеть взаимодействия может не иметь связности, с чем, например, сталкивается задача PageRank. Так в качестве вершин орграфа взяты веб-страницы, а направленная дуга между вершинами показывает наличие ссылки одной веб-страницы на другую [49]. Такая система взаимодействия основана на несвязной сети, из-за чего может существовать несколько решений задачи PageRank (см. подробнее, например, в [22]). Также в протоколах управления в многоагентных системах с несвязной сетью коммуникаций возникает необходимость в согласовании характеристик для любых начальных значений. Для решения данной задачи применяются методы регуляризации [12].

В моделях, описывающих биологические системы, также возникает запаздывание [44, 88]. При анализе роста числа клеток необходимо учитывать время, которое требуется на деление клетки [43]. Схожий принцип используется в эпидемиологических моделях (см. например [42]). Анализ роста популяции должен учитывать, что новая особь не может дать потомство, пока не созреет и не станет репродуктивной [62]. В модели роста численности популяции Вольтерра учитывается тот факт, что с увеличением плотности популяции уменьшается скорость ее роста. В связи с чем на скорость роста популяции влияет численность популяции в прошлом, что, например, учитывается в модели «хищник - жертва» [54]. В генетических сетях запаздывание возникает в силу времени протекания реакции. В фиксированный момент времени могут протекать реакции, которые не влияют на текущее состояние системы, но будут влиять на ее состояние через некоторое время [112]. При описании модели дыхательного процесса необходимо учесть, что циркуляция углекислого газа в крови происходит с задержкой [114].

Во всех перечисленных предметных областях используются непрерывные дифференциальные и дискретные разностные модели с запаздыванием, основанные на взаимодействии скорости изменения текущих параметров си-

стемы с их состоянием в прошлые моменты времени, на чем основаны модели многоагентных систем с информационными влияниями и запаздыванием. Исследуемые в диссертационной работе задачи и предлагаемые методы являются актуальными для современных динамических систем, а рассматриваемые модели могут быть применимы в перечисленных выше предметных областях. Полученные результаты могут быть также применимы при анализе характеристик как многоагентных систем второго порядка, так и технических систем управления с запаздыванием.

**Степень разработанности проблемы.** Работы по дифференциально-разностным уравнениям впервые появились в 18-м веке в работах Лапласа и Эйлера. По-видимому, в те времена не было необходимости в глубоком теоретическом исследовании в области дифференциально-разностных уравнений при решении практических задач. Лишь в 1911 г. появилось более подробное исследование немецкого математика Э. Шмидта. С развитием промышленности и применением устройств управления с 1936 г. начали появляться научные работы по системам управления с запаздыванием (см. например, [50, 69]). Такие системы могут быть заданы как в дискретном, так и в непрерывном времени. Акцент в данной диссертационной работе сделан на развитие методов анализа систем, заданных в непрерывном времени.

Начиная со второй половины прошлого века получены значимые результаты в области теории устойчивости систем управления с запаздыванием. Подходы, применяемые в разработанных методах анализа устойчивости, можно условно поделить на анализ положения нулей соответствующей характеристической функции и на применение прямого метода Ляпунова. В методах, разработанных в данной диссертационной работе, применяется первый подход.

Характеристической функцией линейных систем с запаздыванием является трансцендентная функция. Если нули данной функции находятся левее мнимой оси, то соответствующая система устойчива. Однако, трансцен-

дентная функция имеет бесконечное счетное множество корней, что следует, например, из разложения экспоненты в ряд Тейлора, которое преобразует трансцендентную функцию в полином бесконечной степени. Устойчивость квазиполиномов исследуется, например, в работах [25, 71, 95, 96]. После знаменитого обзора [52]  $W$ -функции Ламберта появилась серия работ (например [74, 76, 109]), в которых данная функция использовалась для явного выражения корней квазиполиномов. Другой подход заключается в анализе частотных характеристик соответствующих систем и основывается на критериях Михайлова и Найквиста. Данные критерии связывают устойчивость замкнутой системы и поведение годографа открытой системы. В работах [35, 36] приведены методы анализа устойчивости замкнутой системы с отрицательной запаздывающей обратной связью. Аналогичные методы, использующие данный подход, приведены в работах [24, 27, 38, 63, 64, 80] и пр.

Второй подход использует прямой метод Ляпунова, заключающийся в построении такой функции, для которой выполнены определенные матричные неравенства. Данный метод получил свое развитие в виде метода Красовского функционалов Ляпунова [20], метода Разумихина функций Ляпунова [26], в работах [13, 23, 59, 60, 94] и пр.

Многоагентные системы с информационными воздействиями занимают центральное место среди всех многоагентных систем. Агенты получают данные от своих соседей, на основе чего меняют свои характеристики, и тем самым происходит процесс согласования характеристик. При анализе протоколов консенсуса в многоагентных системах ставится задача достижения агентами согласованной характеристики при любых начальных значениях. Для случая, когда передача информации между агентами проходит без запаздывания, разработано достаточно много методов анализа, устанавливающих связь сходимости протокола с лесной структурой соответствующей сети коммуникаций [10, 75, 97, 104, 105]. Однако добавление параметра запаздывания существенно усложняет данную задачу – при больших значениях запаздывания вектор характеристик агентов может не иметь конечно-

го предела, т.е. теряется асимптотическая устойчивость. Также существенно усложняется задача исследования асимптотического поведения устойчивого протокола управления, т.к. на него влияет параметр запаздывания. В работах [13, 66, 73, 92, 101, 108, 121, 122, 126] разработаны методы анализа многоагентных систем с запаздыванием, которые основаны на подходах, описанных выше.

**Объектом исследования** являются многоагентные системы с информационными влияниями и запаздыванием.

**Предметом исследования** являются методы анализа устойчивости, степени сходимости и асимптотического поведения протоколов консенсуса с запаздыванием и несвязной структурой.

**Целью диссертации** является разработка методов анализа устойчивости протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием и несвязной структурой и асимптотического поведения устойчивых протоколов консенсуса.

Данная цель определила следующие **задачи**:

- Разработать методы анализа базового протокола управления в многоагентных системах с запаздыванием для установки значения запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости.
- Расширить методы анализа устойчивости протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием для нахождения условия независимости устойчивости от запаздывания и граничного значения запаздывания.
- Разработать методы анализа асимптотического поведения устойчивых протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием для нахождения условия достижения консенсуса агентами при любом векторе начальных значений.
- Применить методы и алгоритмы регуляризации для многоагентных систем с запаздыванием и несвязной структурой.

**Соответствие паспорту специальности.** Работа выполнена в соответствии со следующими пунктами паспорта специальности 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»:

- П. 1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
- П. 3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
- П. 4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод нахождения значения запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости в базовом протоколе управления в многоагентных системах с запаздыванием с действительным спектром лапласовской матрицы (соответствует п.3, п.4 паспорта специальности 2.3.1).
2. Условие независимости устойчивости от запаздывания и граничное значение запаздывания для протоколов управления в многоагентных системах с частичным запаздыванием (соответствует п.1 паспорта специальности 2.3.1).
3. Анализ асимптотического поведения и метод вычисления предельных характеристик агентов в многоагентных системах с запаздыванием с помощью собственного проектора соответствующей лапласовской матрицы, который позволяет получить условие достижения консенсуса (соответствует п.1, п.4 паспорта специальности 2.3.1).

4. Графовая интерпретация метода ортогональной проекции в общем случае с небазовыми агентами и представление выражения для консенсуса с помощью псевдообратной матрицы при его применении (соответствует п.1 паспорта специальности 2.3.1).
5. Анализ протокола латентного консенсуса (с добавлением слабых фоновых связей) и метод вычисления граничного значения запаздывания и предельных характеристик агентов в многоагентных системах с несвязной сетью и запаздыванием при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям (соответствует п.4 паспорта специальности 2.3.1).

#### **Научная новизна.**

1. С помощью  $W$ -функции Ламберта получено выражение для запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости базового протокола консенсуса с запаздыванием, зависящее только от минимального ненулевого и максимального собственных значений матрицы с действительным спектром.
2. Для протоколов управления в многоагентных системах с частичным запаздыванием получены условие независимости устойчивости от запаздывания и граничное значение запаздывания, которые зависят от спектральных свойств соответствующей лапласовской матрицы.
3. С помощью алгебраических методов теории графов впервые установлена связь между асимптотическим поведением характеристик агентов при применении устойчивых протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием и лесной структурой сети коммуникаций.
4. Доказано, что метод ортогональной проекции является естественным обобщением протокола консенсуса и характеризуется элементами первой строки псевдообратной матрицы, для которых также дана графовая

интерпретация. Результат использован для вычисления предельных характеристик агентов.

5. Для многоагентных систем с запаздыванием и несвязной сетью коммуникаций проанализирован протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием, позволяющий достичь консенсус при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям.

**Теоретическая значимость работы** заключается в развитии теории устойчивости систем управления с запаздыванием, получении явного выражения характеристик систем управления с запаздыванием, условий независимости устойчивости данных систем от запаздывания и условий достижения агентами согласованной характеристики при любом векторе начальных значений.

**Практическая значимость работы** обуславливается возможностью применения полученных результатов в протоколах управления многоагентными системами второго порядка, системах с устойчивой матрицей и в моделях, которые были приведены в актуальности темы диссертационной работы.

**Методы исследования.** Линейная алгебра, дифференциальные уравнения с запаздыванием, алгебраическая теория графов, теория управления, комплексный анализ, в частности, операционное исчисление и многозначная  $W$ -функция Ламберта.

**Достоверность** полученных научных результатов подтверждается корректностью и непротиворечивостью математических выкладок, полученных в результате применения строгих математических методов. Полученные результаты подтверждены с помощью компьютерного моделирования и опубликованы в рецензируемых печатных и электронных изданиях.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, все-

российских школах-конференций молодых ученых «Управление большими системами», УБС (Челябинск, 2022; Воронеж, 2023; Новочеркасск, 2024; Тамбов, 2025), Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD-2021, Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) 2022, Международной научно-технической конференции «Автоматизация» (RusAutoCon, Сочи, 2023), «Всероссийском совещании по проблемам управления» (ВСПУ-2024).

**Личный вклад.** Все основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно.

**Публикации.** Результаты диссертационной работы отображены в 13 научных работах, из которых 2 статьи [5, 33] в рецензируемых изданиях по специальности 2.3.1 (физ.-мат.), относящихся к категории К1 Перечня ВАК, 3 статьи [3, 4, 6] в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1, и 8 публикаций [1, 2, 28–32, 40] в сборниках трудов международных и всероссийских конференций.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Диссертация содержит 12 рисунков. Полный объем диссертации составляет 128 страниц. Список литературы содержит 128 наименований.

Первая глава посвящена основным понятиям и известным результатам в теории многоагентных систем с запаздыванием. Рассматривается базовая модель консенсуса в многоагентных системах первого порядка с запаздыванием, в которой динамика характеристик агентов описывается системой дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Приведены известные результаты исследования устойчивости базовой модели консенсуса и графовая интерпретация собственного проектора.

Вторая глава посвящена исследованию степени сходимости и анализу асимптотического поведения базового протокола управления в многоагент-

ных системах с запаздыванием. В первом разделе приведено короткое доказательство теоремы о граничном значении базового протокола консенсуса с запаздыванием. Во втором разделе предложен метод нахождения значения запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости в базовом протоколе консенсуса с запаздыванием с действительным спектром лапласовской матрицы. В третьем разделе приведен метод вычисления предельных характеристик агентов при применении базового протокола консенсуса с запаздыванием и условие достижения консенсуса при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям.

В третьей главе рассматриваются протоколы консенсуса в многоагентных системах с частичным запаздыванием. Для протоколов консенсуса с частичным запаздыванием рассматриваются следующие задачи: нахождение условия независимости устойчивости соответствующего протокола от запаздывания; нахождение граничного значения запаздывания, если его устойчивость зависит от запаздывания; нахождение формулы асимптотического поведения соответствующего устойчивого протокола консенсуса. В первом разделе рассмотрен обобщенный протокол консенсуса с запаздыванием. Во втором разделе рассмотрен дополненный протокол консенсуса, в котором агенты получают информацию от части агентов без запаздывания, а от остальных агентов – с запаздыванием.

В четвертой главе рассматриваются протоколы консенсуса в многоагентных системах с несвязной сетью. В первом разделе рассмотрен метод ортогональной проекции в общем случае с небазовыми агентами. Приведена графовая интерпретация данного метода и выражение для консенсуса с помощью псевдообратной матрицы при его применении. Во втором разделе рассмотрен протокол латентного консенсуса с добавлением слабых фоновых связей.

## Глава 1

# Основные определения и известные результаты

### 1.1. Базовая модель консенсуса в многоагентных системах первого порядка с запаздыванием

Многоагентная система – это система, образованная несколькими взаимодействующими интеллектуальными автономными агентами. Многоагентную систему с информационными влияниями и множеством агентов  $V = \{1, \dots, n\}$  удобно представить в виде орграфа связей  $\Gamma = (V, E)$ , где  $E \subset V \times V$  – множество взвешенных дуг. Если агент  $j$  влияет на агента  $i$  с весом  $a_{ij} > 0$ , то существует дуга из вершины  $j$  в вершину  $i$  с тем же весом. Обозначим такую дугу через  $(j, i)$ . Если агент  $j$  не влияет на агента  $i$ , то  $a_{ij} = 0$ . Матрица  $A = (a_{ij})$  называется матрицей коммуникаций.

Исходящий лес в  $\Gamma$  – подграф в  $\Gamma$ , в котором нет циклов, а в каждую вершину входит не более одной дуги. Вершина  $j$  является корнем исходящего леса, если нет входящих в нее дуг. Множество  $\mathcal{F}_k(\Gamma)$  – множество всевозможных исходящих лесов в  $\Gamma$ , содержащих  $k$  дуг. Множество  $\mathcal{F}_k^{j \rightarrow i}(\Gamma)$  – множество всевозможных исходящих лесов в  $\Gamma$ , в которых  $j$  является корнем, а  $i$  достижима из  $j$ .

Орграф  $\Gamma$  называется сбалансированным, если для любой вершины из  $\Gamma$  сумма весов входящих в нее дуг равна сумме весов исходящих из нее дуг.

**Определение 1.1.** [7] Весом исходящего леса является произведение весов всех его дуг.

**Определение 1.2.** [7] Вес множества лесов – это сумма весов всех лесов, входящих в данное множество. Например, вес множества  $\mathcal{F}_k(\Gamma)$  – сумма

весов всевозможных исходящих лесов в  $\Gamma$ , содержащих  $k$  дуг, и обозначается  $\epsilon(\mathcal{F}_k(\Gamma))$ .

**Определение 1.3.** [7] Непустое подмножество вершин  $K$  орграфа  $\Gamma = (V, E)$  называют базовой бикомпонентой, если все вершины, принадлежащие  $K$ , взаимно достижимы, и нет дуг  $(i, j)$ , где  $j \in K, i \in V \setminus K$ . Множество вершин всех базовых бикомпонент обозначим через  $\mathcal{K}$ . Множество вершин, не принадлежащих базовым бикомпонентам, обозначим через  $\bar{\mathcal{K}} = V \setminus \mathcal{K}$ , и назовем их небазовыми.

**Определение 1.4.** Назовем орграф  $\Gamma$  связным, если в нем существует хотя бы одна вершина, из которой достижимы все остальные вершины. Если такой вершины нет, то орграф  $\Gamma$  назовем несвязным.

Очевидно, что если орграф  $\Gamma$  содержит одну базовую бикомпоненту, то орграф будет связным. Если в орграфе есть несколько базовых бикомпонент, то такой орграф будет несвязным.

Пусть  $K_1, \dots, K_m$  – базовые бикомпоненты в орграфе  $\Gamma$ . Нумерация агентов происходит следующим образом: сначала нумеруются агенты из  $K_1, \dots, K_m$ , а затем агенты, не принадлежащие ни одной базовой бикомпоненте.

Лапласовская матрица  $L = (l_{ij})$ , соответствующая орграфу  $\Gamma$ , строится следующим образом:

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i; \\ \sum_{k \neq i} a_{ik}, & j = i. \end{cases}$$

При выбранной нумерации лапласовская матрица будет иметь вид:

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_m & 0 \\ * & * & \cdots & * & L_R \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $m$  — число базовых бикомпонент в соответствующем орграфе,  $*$  — блоки, которые в общем случае — ненулевые,  $L_R$  — подматрица  $L$ , строки и столбцы которой соответствуют всем небазовым вершинам.

Обозначим через  $\sigma(L)$  спектр матрицы  $L$ . Исходя из определения очевидно, что  $L\mathbf{1} = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{1}$  и  $\mathbf{0}$  — вектор-столбцы размерности  $n$ , состоящие из единиц и нулей соответственно. Таким образом для  $L$  ноль всегда является собственным значением, более того, для нулевого собственного значения алгебраическая кратность совпадает с геометрической. Ненулевые собственные значения матрицы  $L$  имеют положительные действительные части, что можно проверить, например, с помощью теоремы Гершгорина. Если орграф связей неориентированный, то  $L$  — симметричная, положительно полуопределенная.

Отметим, что если лапласовская матрица  $L$  соответствует сбалансированному орграфу, то  $L^T\mathbf{1} = \mathbf{0}$ .

**Определение 1.5.** [47] Индексом  $v$  квадратной матрицы  $A$  является размер наибольшей жордановой клетки с нулевой диагональю в ее жордановой форме или минимальное число  $v$ , при котором  $\text{rank}(A^v) = \text{rank}(A^{v+1})$ .

**Определение 1.6.** [107] Собственным проектором квадратной матрицы  $A$ , соответствующий нулевому собственному значению, называется такая идемпотентная матрица  $A^+$ , что  $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{N}(A^v)$  и  $\mathcal{R}(A^v) = \mathcal{N}(A^+)$ , где  $v$  — индекс матрицы  $A$ ,  $\mathcal{R}(X)$  и  $\mathcal{N}(X)$  — образ и ядро матрицы  $X$  соответственно.

Для любой прямоугольной матрицы  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  существует единственная матрица  $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , для которой выполняются следующие четыре условия: 1)  $A^+AA^+ = A^+$ ; 2)  $AA^+A = A$ ; 3)  $(AA^+)^* = AA^+$ ; 4)  $(A^+A)^* = A^+A$ . Матрицу  $A^+$  называют *псевдообратной по Муру-Пенроузу*.

В матричных обозначениях следуем монографии [34]. Для  $A$  обозначим через  $A_{ij}$  подматрицу, получаемую удалением  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца  $A$ . Также для подматрицы, образуемой строками с номерами из множества  $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$  и столбцами с номерами из множества  $\beta \subseteq \{1, \dots, n\}$ , примем

обозначение  $A\binom{\alpha}{\beta}$ .<sup>1</sup>

Рассмотрим базовый протокол консенсуса в многоагентной системе первого порядка с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t), & t \geq 0; \\ u_i(t) = -\sum_{j \neq i} a_{ij} (x_i(t - \tau) - x_j(t - \tau)), & i = 1, \dots, n; \\ x_i(\theta) = \phi_i(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

где  $x_i(t)$  – характеристика  $i$ -го агента в момент времени  $t$ ,  $\phi_i(\theta)$  – начальная функция, определенная на  $\theta \in [-\tau, 0]$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Данный протокол имеет матричный вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -Lx(t - \tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  – вектор-столбец характеристик агентов в момент времени  $t$ ,  $\phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \dots, \phi_n(\theta))^T$ .

В случае, когда в системе возникает запаздывание, характеристический полином системы преобразуется в квазиполином, который далее будем называть характеристической функцией. Для системы (1.2) характеристической функцией будет

$$F(s) = \det(sI + e^{-\tau s}L) = s^k \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} (s + \lambda e^{-\tau s}) = s^k \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} f_\lambda(s) = s^k G(s), \quad (1.3)$$

где  $k$  – кратность нулевого собственного значения,  $f_\lambda(s) = s + \lambda e^{-\tau s}$ . В силу того, что 0 всегда будет нулем характеристической функции  $F(s)$ , необходимо ввести понятия устойчивости системы, сходимости системы к консенсусу и, по аналогии со степенью устойчивости, степень сходимости системы.

---

<sup>1</sup>При перечислении номеров строк или столбцов, как обычно, между индексами не ставится запятая. В некоторых работах через  $A\binom{\alpha}{\beta}$  обозначают минор подматрицы.

**Определение 1.7.** Будем говорить, что протокол (1.2) устойчив, если решение  $x(t)$  соответствующей системы имеет конечный предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , т.е. если соответствующая система асимптотически устойчива.

**Определение 1.8.** Протокол (1.2) сходится к консенсусу, если существует конечный предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c\mathbf{1}$ , где  $x(t)$  – решение системы (1.2),  $c \in \mathbb{R}$  – некая константа, значение консенсуса. В таком случае говорят, что в системе (1.2) достигается асимптотический консенсус или просто – достигается консенсус.

Пусть в протоколе (1.2) дана начальная функция  $\phi(\theta) = x_0$ . Если протокол (1.2) сходится к консенсусу, и его значение равно среднему арифметическому компонент вектора  $x_0$ , то говорят, что в системе достигается усредненный консенсус или протокол сходится к усредненному консенсусу.

**Определение 1.9.** Назовем степенью сходимости системы (1.2) величину  $\zeta_0 = -\max(\operatorname{Re}(s))$ , где  $s$  – ноль функции  $G(s) = \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} f_\lambda(s)$ .

## 1.2. Устойчивость базовой модели консенсуса и графовая интерпретация собственного проектора

**Теорема 1.1.** [68] Протокол (1.2) устойчив, если  $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \neq 0} \frac{1}{|\lambda|} \left( \frac{\pi}{2} - \arg \lambda \right)$ , где  $\lambda \in \sigma(L)$ .

**Предложение 1.1.** *Индекс лапласовской матрицы  $L$  равен 1 [51].*

Отметим, что собственный проектор  $L^\dagger$  для лапласовской матрицы  $L$  является неотрицательной стохастической матрицей. В общем случае  $L^\dagger$  для произвольной лапласовской матрицы – не обязательно симметричная матрица, т.е. такой проектор не всегда является ортогональным для несимметричной матрицы.

У нулевого собственного значения матрицы  $L$  алгебраическая и геометрические кратности совпадают, и ее значение совпадает с количеством базовых бикомпонент в соответствующем орграфе  $\Gamma$ .

**Теорема 1.2.** [7] Пусть лапласовской матрице  $L$  соответствует орграф  $\Gamma$ . Тогда

1.  $\text{rank}(L) = n - \text{rank}(L^\dagger)$ ;
2.  $LL^\dagger = L^\dagger L = \mathbf{0}_{n \times n}$ , где  $\mathbf{0}_{n \times n}$  – квадратная матрица размерности  $n \times n$ , состоящая из нулей;

3.

$$(I + pL)^{-1} = \frac{1}{r_\Gamma(p)}(Q_0(\Gamma) + pQ_1(\Gamma) + \dots + p^{n-m}Q_{n-m}(\Gamma)),$$

где  $p > 0$ ,  $r_\Gamma(p) = \sum_{k=0}^{n-m} p^k \epsilon(\mathcal{F}_k(\Gamma))$ ,  $Q_k = (q_{ij}^k)$ ,  $q_{ij}^k = \epsilon(\mathcal{F}_k^{j \rightarrow i}(\Gamma))$ ,  $m$  – количество базовых бикомпонент в  $\Gamma$ . Отметим, что коэффициенты  $\epsilon(\mathcal{F}_k(\Gamma))$  и матрицы  $Q_k(\Gamma)$  можно получить с помощью метода Фаддеева определения скалярных коэффициентов характеристического многочлена матрицы  $L$  и матричных коэффициентов присоединенной матрицы к  $L$  (см. [8]).

4.  $\lim_{p \rightarrow +\infty} (I + pL)^{-1} = \frac{1}{\epsilon(\mathcal{F}_{n-m}(\Gamma))} Q_{n-m}(\Gamma) = L^\dagger$ ;
5.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Lt} = L^\dagger$ .

**Теорема 1.3.** [15] Если  $\text{rank}(L^\dagger) = m$ , то при выбранной нумерации матрица  $L^\dagger$  имеет вид:

$$L^\dagger = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_m & \mathbf{0} \\ B_1 & B_2 & \dots & B_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  – стохастическая матрица размерности  $n_i \times n_i$ , все строки которой равны  $(a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)})$ , причем  $a_j^{(i)} > 0$  для всех  $j = 1, \dots, n_i$ ,  $B_i$  является матрицей размерности  $(n_{m+1} \times n_i)$ ,  $s$ -я строка которой равна  $l_{si}(a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)})$ , причем  $n_{m+1} \geq 0$ ,  $l_{si} \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^m l_{si} = 1$ ,  $\mathbf{0}$  – матрица, состоящая из нулей, соответствующего размера.

**Теорема 1.4. Матричная теорема о деревьях.** [79] Алгебраическое дополнение любого элемента  $i$ -й строки лапласовской матрицы равно суммарному весу остовных исходящих из  $i$ -й вершины деревьев.

Заметим, что если в лапласовской матрице орграфа какой-либо столбец заменить на столбец из единиц, то определитель полученной матрицы будет равным весу множества всех остовных исходящих деревьев.

### 1.3. Обзор методов исследования и основных моделей многоагентных систем с запаздыванием

#### 1.3.1. Основные методы анализа устойчивости систем

Устойчивость линейных систем с запаздыванием характеризуется расположением корней соответствующей характеристической функции. Если действительная часть корней меньше нуля, то соответствующая система устойчива.

В случае систем с запаздыванием характеристическая функция является квазиполиномом, который имеет бесконечное счетное множество корней, которые не имеют явного аналитического выражения, что существенно усложняет их локализацию. В работе [25] рассматриваются квазиполиномы вида  $h(z, e^z)$ , где  $h(x, y)$  – полином от двух переменных. В частности, если  $h(z, e^z)$  содержит главный член, то для полиномов такого вида получены достаточные условия устойчивости, которые связаны с нулями действительной и мнимой частей функции  $H(iy) = h(iy, e^{iy})$ . Для некоторых квазиполиномов аналитическое выражение нулей в явном виде содержит  $W$ -функцию Лам-

берта, которая в свою очередь задается в неявном виде. Данная функция будет подробно разобрана в следующем разделе, а ее применение – во второй главе.

Частотные методы анализа устойчивости линейных систем заключаются в анализе годографа амплитудно-фазовой характеристики. Стоит отметить, что знаменатель передаточной функции совпадает с характеристической функцией соответствующей системы. Согласно критерию Найквиста, устойчивость замкнутой системы с положительной обратной связью зависит от количества полюсов с положительной действительной частью передаточной функции соответствующей открытой системы и от количества оборотов вокруг точки  $(-1, i0)$  ее годографа. Так если открытая система устойчива, и ее годограф не охватывает точку  $(-1, i0)$ , то замкнутая система также устойчива [23].

В работе [35] рассматривается замкнутая система с запаздывающей отрицательной обратной связью, для которой получен критерий устойчивости с помощью годографа соответствующей открытой системы. В частности получены уравнения, с помощью которых можно найти критические значения запаздывания. Если таких значений нет, то устойчивость замкнутой системы не зависит от запаздывания. Наименьшее критическое значение запаздывания называется граничным значением  $\tau_0$ . Если граничное значение запаздывания является единственным критическим значением, то замкнутая система будет устойчива тогда и только тогда, когда значение запаздывания меньше граничного. Однако если существует несколько критических значений запаздывания, то при увеличении запаздывания в системе возникают интервалы устойчивости и неустойчивости.

Другой подход при анализе устойчивости систем с запаздыванием общего вида заключается в применении прямого метода Ляпунова, в частности, метода Красовского функционалов Ляпунова [20] и метода Разумихина функций Ляпунова [26] (более подробно о применении функции Ляпунова см., например, в книгах [13, 63] и работах [59, 60, 108]).

### 1.3.2. $W$ -функция Ламберта

За последние 20 лет после знаменитой статьи [52] появилась серия работ [41, 55, 76, 109, 123] по теории управления с запаздыванием, где применяется  $W$ -функция Ламберта.  $W$ -функция Ламберта  $W(z)$  определяется как  $z = W(z)e^{W(z)}$ , т.е.  $W(z)$  является обратной функцией к  $f(z) = ze^z$ . Применение этой функции оказалось очень эффективным и в ряде случаев позволяет доказать необходимые утверждения более коротким способом.

В работе [83] приведена демографическая модель, основанная на уравнении Эйлера-Лотки, показывающая темп роста популяции, который задан в неявном виде при постоянных условиях окружающей среды. С помощью  $W$ -функции Ламберта данный параметр можно выразить в явном виде, что позволяет исследовать его зависимость от запаздывания – возраста, в котором новая особь станет репродуктивной.

В [41] введена обобщенная матричная  $W$ -функция Ламберта для решения систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием в векторно-матричной форме:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + By(t - \tau), \quad (1.5)$$

где  $y \in \mathbb{R}^n$ . С помощью асимптотического представления (в виде разложения в ряд в нуле) приведен анализ устойчивости системы (1.5). В качестве примера предложенный подход применен для нахождения аналитического решения конкретной линейной задачи, что позволило также получить область устойчивости для трех ветвей  $W$ -функции Ламберта.

В монографии [124] приведено применение  $W$ -функции Ламберта, в частности матричной  $W$ -функции Ламберта, для исследования систем с запаздыванием. В главе 3 показана локализация собственных значений системы с запаздыванием, из которой следует, что устойчивость системы определяется нулевой ветвью  $W$ -функции Ламберта. Аналогичный вывод был получен в [74], где исследуются нули трансцендентной функции, являющейся характеристической функцией системы с запаздывающей обратной связью. Это

также показано в лемме 1.1, и используется в данной работе при исследовании степени сходимости системы (1.2).

В работе [109] исследована система (1.5) в которой матрицы  $A$  и  $B$  одновременно триангуляризуемы, что позволяет свести матричное уравнение к скалярному. Было приведено необходимое и достаточное условие робастной устойчивости соответствующей системы при выполнении некоторых неравенств с неопределенными коэффициентами. Аналогично результатам из [109] в [76] также получено выражение для спектра системы (1.5) с одновременно приводимыми к треугольной форме или коммутирующими матрицами  $A$  и  $B$  (пересекающиеся утверждения из [109] и [76] были получены одновременно и независимо).

Более подробно рассмотрим метод вычисления первичной (primary) матричной  $W$ -функции Ламберта, изложенный в [55]. Предложенный в [55] итерационный метод (4.4) авторы называют устойчивым вариантом упрощенного метода Ньютона, а именно итераций  $y_{k+1} = (y_k^2 + ae^{-y_k})/(y_k + 1)$ . Поскольку данная формула непосредственно получается из  $y_{k+1} = y_k - f(y_k)/f'(y_k)$ , в [55] речь идет о методе Ньютона-Рафсона. Для определения первичной (primary)  $W$ -функции Ламберта, удовлетворяющей уравнению  $We^W - A = 0$ , выражающейся многочленом от  $A$ , используется разложение Шура для  $A$ , т.е. вместо матрицы  $A$  используется ее форма Шура  $T = Q^T A Q$ , где  $T$  – блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой имеют порядок 1, если он соответствует действительному собственному значению, и порядок 2, если он соответствует паре комплексных собственных значений. Также матрица Шура  $T$  представляется в виде блочно-треугольной матрицы с двумя блоками на диагонали:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Предложенный метод Ньютона с выбранными начальными матрицами для каждого диагонального блока  $T_{11}$  и  $T_{22}$  приводит к матрицам  $X_{11} = W_k(T_{11})$  и  $X_{22} = W_k(T_{22})$ . Недостающий блок  $X_{12}$  находится уравнением

Сильвестра (см. [55]). Таким образом получается

$$W_k(T) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Обратным преобразованием  $A = QTQ^T$  вычисляется первичная матрица  $W_k(A)$ , удовлетворяющая уравнению  $W_k(A)e^{W_k(A)} - A = 0$ .

В [115] рассматриваются трансцендентные функции вида

$$p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n q_i(e^{-\lambda\tau_1}, e^{-\lambda\tau_2}, \dots, e^{-\lambda\tau_m})\lambda^{n-i},$$

где  $\tau_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  – параметры запаздывания,  $q_i(x_1, \dots, x_m)$  – полиномы относительно  $x_1, \dots, x_m$ . Для оценки устойчивости необходимо найти корень  $p(\lambda)$  с наибольшей действительной частью. Для этого были предложены две итерационные схемы, использующие  $W$ -функции Ламберта, с начальным условием  $\lambda_0$ , которое является нулем  $p(\lambda)$ . Однако, сходимость итерационных методов зависит от выбора начального условия, которое должно быть достаточно близко к искомому значению, для чего предложено решить отдельное полиномиальное уравнение.

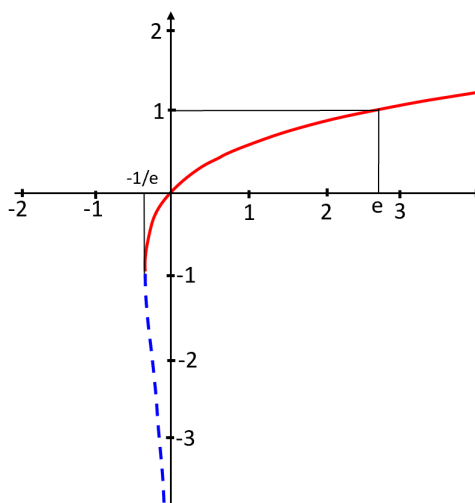
В отечественной литературе  $W$ -функция Ламберта представлена в физических задачах в книге [18], где, в частности, приведены результаты по конформным отображениям с помощью  $W$ -функции Ламберта, действующими на прямоугольные области на  $z$ -плоскости.

В работе [19] для системы, описываемой уравнением  $x^{(\alpha)}(t) = Bx(t-1)$  с единичной задержкой и производной целого или дробного порядка  $\alpha$ , приведен анализ устойчивости с помощью  $W$ -функции Ламберта. В [21] исследован запас устойчивости систем автоматического управления с отрицательной запаздывающей обратной связью для скалярного случая. С помощью  $W$ -функции Ламберта установлено выражение для нулей трансцендентной характеристической функции в явном виде, и показано, что запасы устойчивости по амплитуде и по фазе значительно снижаются с введением элемента запаздывания. В [14] рассматривается процесс управления нелинейным динамическим объектом, являющийся черным ящиком. С помощью  $W$ -функции

Ламберта установлено достаточное условие устойчивости непрерывного решения полинома Вольтерра I рода, использующийся для процесса идентификации. В [17] рассматривается задача сравнения чисел  $x^y$  и  $y^x$ . Так получены области на вещественной плоскости, где  $x^y > y^x$ , и области, где  $x^y < y^x$ , а уравнения границ содержат  $W$ -функцию Ламберта. Более того, аналогичным образом решена обобщенная задача сравнения чисел  $x^{y^\alpha}$  и  $y^{x^\alpha}$ , где  $\alpha > 0$ .  $W$ -функция Ламберта также применяется для нахождения параметров законов распределения случайных величин (см. [16, 39]).

При изложении некоторых свойств  $W$ -функции Ламберта будут использованы результаты из знаменитой статьи [52] (см., также [53]). В русскоязычной литературе  $W$ -функция Ламберта описана в книге [18].

Действительная  $W$ -функция Ламберта  $W(x)$ , как в случае комплексной переменной, определяется как решение функционального уравнения  $W(x)e^{W(x)} = x$ .



**Рис. 1.1.** Две ветви (сплошная и пунктирная линии) функции Ламберта для действительного случая.

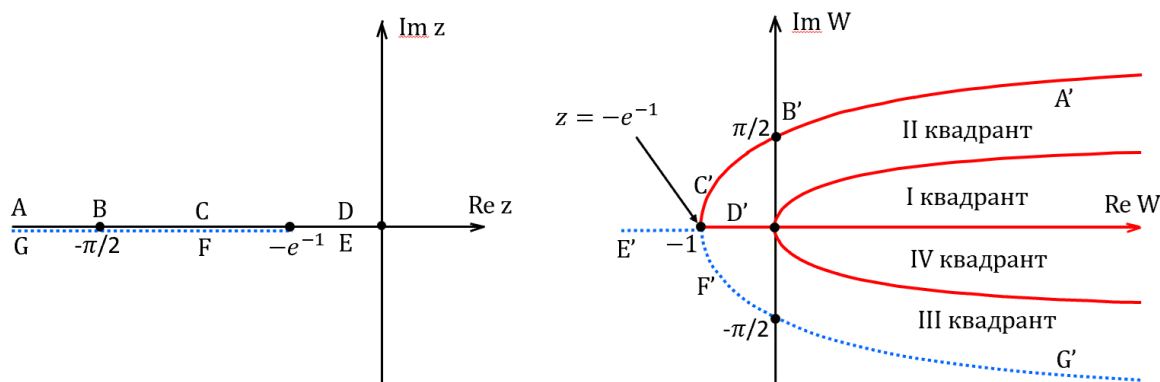
Функция  $W(x)$  определена на промежутке  $-e^{-1} \leq x < +\infty$ , где принимает значение от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Для отрицательных значений аргумента  $W(x)$  отрицательна и двузначна. В точке  $(-e^{-1}, -1)$  график делится на две ветви: верхняя ветвь – главная или нулевая ветвь  $W_0(x)$ ; нижняя ветвь или  $-1$ -я

ветвь  $W_{-1}(x)$ . На рис. 1.1 нулевая ветвь нарисована сплошной линией, а  $-1$ -я – пунктирной.

В комплексной области  $W$ -функция Ламберта является многозначной. Комплексной плоскости ставится в соответствие множество значений функций  $w = W_k(z)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ . Областью определения для  $W_0(z)$  является вся комплексная плоскость с разрезом  $(-\infty, -e^{-1}]$ , т.е. с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси:  $\{z : -\infty < \operatorname{Re}(z) \leq -e^{-1}, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ . Для других ветвей ( $k \neq 0$ ), область определения представляет собой всю плоскость с разрезом  $(-\infty, 0]$ , т.е.  $\{z : -\infty < \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ . Отметим, что приведенные разрезы до точек разветвления позволяют определить однозначные ветви функции Ламберта, которые не переходят друг в друга. Так как  $W(z)e^{W(z)} = z$ , то, приравняв действительные и мнимые части обоих значений, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x = e^u(u \cos v - v \sin v); \\ y = e^u(v \cos v + u \sin v). \end{cases} \quad (1.6)$$

В (1.6) из условия  $y = 0$  получим выражение  $u = -v \operatorname{ctg} v$ ,  $-\pi < v < \pi$ , определяющее границу между множеством значений ветви  $W_0$  и множествами значений ветвей  $W_{-1}$  и  $W_1$  (см. рис. 1.2).



**Рис. 1.2.** Отображение мнимой и действительной осей функцией  $W_0(z)$  нарисовано сплошной линией. Пунктирной линией указаны отображение разреза функцией  $W_{-1}(z)$  и интервала  $(-e^{-1}, 0)$ , определяющей верхнюю границу ветви  $W_{-1}(z)$

**Замечание 1.1.** Для кривой  $u = -v \operatorname{ctg} v$  точка  $v = 0$  является точкой устранимого разрыва. Однако в силу того, что  $W_0(-e^{-1}) = -1$  и  $W_{-1}(-e^{-1}) = -1$ , граница между областями не будет иметь разрыва.

Кривые, разделяющие области значений других ветвей определяются следующими множествами точек (см. [52]):

$$\{(u, v) : u = -v \operatorname{ctg} v, 2\pi k < \pm v < (2k + 1)\pi\}, k = 1, 2, \dots$$

Заметим, что при одном значении  $k$  получаются две кривые, задающие границы между ветвями  $W_k, W_{k+1}$  и  $W_{-k}, W_{-k-1}$ .

При доказательстве основных результатов понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.1.** [109] Для любого  $z \in \mathbb{C}$  верно

$$\max\{\operatorname{Re}(W_k(z)) : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \operatorname{Re}(W_0(z)).$$

### 1.3.3. Системы с частичным запаздыванием

Рассмотрим системы с частичным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) \quad (1.7)$$

с начальной функцией  $x(\theta) = \phi(\theta)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$ . Система (1.7) встречается во многих моделях в различных предметных областях. В модели транскрипции и трансляции генов матрица  $A_0$  является матрицей вероятности перехода из одного узла решетки в другой. При этом различные химические реакции влияют на процесс перехода с запаздыванием, что отображено матрицей  $A_1$ . При этом в силу того, что химические реакции протекают за разное время, система (1.7) может включать в себя несколько элементов с различным запаздыванием [112]. В модели численности клеток крови матрица элемента без запаздывания отвечает за скорость потери клеток крови во время циркуляции. Элемент с запаздыванием отвечает за поток крови из предыдущих отсеков [58]. Схожий принцип используется в нейронной сети

Хопфилда, в которой компоненты вектора  $x(t)$  – это значения напряжения на входе соответствующих нейронов. Скорость изменения напряжения зависит от сопротивления нейрона и передачи электрического сигнала между нейронами, которая проходит с некоторым запаздыванием в силу ограниченной скорости [94]. Такие модели в общем виде включают в себя функцию передачи  $F$ :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1F(x(t - \tau)).$$

Отметим, что уравнение (1.7) в скалярном виде, т.е. в котором  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}$ , изучалось многими авторами. Например, еще в 1950 г. в [71] были изучены корни трансцендентной функции, являющейся характеристической функцией скалярного разностно-дифференциального уравнения. (Также см. [38] и пример 2.4 в [63]).

Более общий случай

$$\dot{y}(t) - cy(t - \tau) = -ay(t) - by(t - \tau) \quad (1.8)$$

был изучен в [94], где рассматривалась задача устойчивости в зависимости от действительных чисел  $a, b$  и  $c$ .

Характеристическая функция системы (1.7) определяется следующим образом:

$$F(s) = \det(sI - A_0 - A_1e^{-s\tau}). \quad (1.9)$$

Известно, что функция  $F(s)$  целая (аналитическая во всей комплексной плоскости) и все ее нули на комплексной плоскости расположены следующим образом: существует действительное число  $\eta$  такое, что нет нулей  $s$ , для которых  $\operatorname{Re}(s) > \eta$ , и только для конечного числа нулей выполняется  $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \eta$ .

Система (1.7) изучалась многими авторами (см., например, [38, 63, 64, 80, 95, 96] и библиографию в [94]). Достаточное условие устойчивости системы (1.7) в зависимости от граничного значения  $\tau$  дано в [94] с использованием линейного матричного неравенства и метода Ляпунова. Зависимость устой-

чивости от параметра запаздывания была исследована в [63] с помощью обобщенного спектра матриц  $A_0$  и  $A_1$ , т.е. с помощью обобщенных собственных значений  $\lambda$ , которые определяются уравнением  $\det(A_0 - \lambda A_1) = 0$ . Независимости устойчивости системы от величины запаздывания посвящено немало работ. Например, в [63] доказана следующая теорема.

**Теорема 1.5.** [63] [Теорема 2.1] Если матрицы  $A_0$  и  $A_0 + A_1$  в системе (1.7) устойчивы и выполняется условие

$$\rho((i\omega I - A_0)^{-1}A_1) < 1, \quad \forall \omega > 0, \quad (1.10)$$

где  $\rho(X)$  – спектральный радиус матрицы  $X$ , то система (1.7) устойчива при любом  $\tau \geq 0$ .

Другое условие независимости устойчивости от запаздывания было получено ранее в 1981 году в работе [91]. Авторы ввели понятие матричной меры для матрицы  $A$  – значение  $\mu(A) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(A + A^T)$ , где  $\lambda_{\max}(X)$  – максимальное собственное значение симметричной матрицы  $X$ . Тогда если для матриц  $A_0, A_1$  из системы (1.7) выполняется условие

$$-\mu(A_0) > \|A_1\|,$$

где  $\|X\|$  – евклидова норма матрицы  $X$ , то система (1.7) устойчива.

В случае, когда условие (1.10) не выполняется, приведена следующая теорема для нахождения граничного значения запаздывания.

**Теорема 1.6.** [63] [Теорема 2.2] Положим, что система (1.7) устойчива при  $\tau = 0$ . Пусть  $\text{rank}(A_1) = q$  и положим

$$\bar{\tau}_j = \begin{cases} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\theta_k^j}{\omega_k^j}, & \text{если } \lambda_j(i\omega_k^j I - A_0, A_1) = e^{-i\theta_k^j}, \quad \omega_k^j \in (0, \infty), \quad \theta_k^j \in [0, 2\pi]; \\ \infty & \text{если } \underline{\rho}(i\omega I - A_0, A_1) > 1, \quad \forall \omega \in (0, \infty), \end{cases}$$

где  $\underline{\rho}(A, B) = \min\{|\lambda| : \det(A - \lambda B) = 0\}$ . Тогда система (1.7) будет устойчива для всех  $\tau < \bar{\tau} = \min_{1 \leq j \leq q} \bar{\tau}_j$ .

В [96] исследовано влияние параметра запаздывания на устойчивость линейных динамических систем с запаздыванием. Для этой цели авторы предложили частотный метод анализа.

В [95] приведены свойства спектра квазиполинома (1.7) и изучена связь между максимально допустимой кратностью собственных значений и спектральной абсциссой — наибольшей действительной частью спектра матрицы динамической системы.

Для многоагентной системы с информационными влияниями зависимость граничного значения запаздывания от спектра матрицы Лапласа представляет большой интерес и является нетривиальной задачей. Однако протоколу консенсуса с временной задержкой посвящено сравнительно немного работ. Тем не менее, как было отмечено выше, несколько разделов книги [13] посвящены отдельным аспектам проблем сетевого управления с запаздыванием.

#### 1.3.4. Примеры протоколов в многоагентных системах с запаздыванием

В [108] для многоагентных систем предложен другой, не менее реалистичный протокол, в котором агент при согласовании характеристик в момент времени  $t$  берет свое состояние в этот же момент времени:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t), & t \geq 0; \\ u_i(t) = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i(t) - x_j(t - \tau)), & i = 1, \dots, n; \\ x_i(\theta) = \phi_i(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1.11)$$

где  $\mathcal{N}_i$  — множество агентов, дуги из которых входят в вершину  $i$ . Систему (1.11) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -\mu Ix(t) + Ax(t - \tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1.12)$$

где  $\mu$  – сумма элементов строк матрицы  $A$ , которая считается одинаковой для всех строк матрицы  $A$ . Тогда матрицы  $A$  и  $L$  связаны следующим образом:  $L = \mu I - A$ .

Согласно теореме 1.1, устойчивость протокола (1.2) всегда зависит от запаздывания, и граничное значение запаздывания зависит от спектральных свойств. Однако система (1.12) устойчива при любом  $\tau$ .

Схожее взаимодействие агентов, как в модели (1.12), было предложено в [128] в дискретном протоколе консенсуса с запаздыванием:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k); \\ u_i(k) = -\epsilon\kappa \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (|a_{ij}|x_i(k) - a_{ij}x_j(k - \tau_{ji})), \end{cases} \quad (1.13)$$

где  $\kappa > 0$  – коэффициент усиления управления,  $\epsilon$  – интервал дискретизации,  $\tau_{ji} > 0$  – запаздывание при передаче информации от агента  $j$  к агенту  $i$ . Предполагается, что запаздывания ограничены сверху некоторым параметром  $\tau_{max} < \infty$ . Показано, что на сходимость протокола не влияют запаздывания, а влияет наличие остовного дерева в соответствующем графе.

Более общий протокол был предложен в [118], где топология многоагентных систем переключается в различные интервалы времени. Предполагается, что набор таких топологий конечен. Тогда при наложении определенных условий на данные топологии протокол будет сходиться к консенсусу, определяющийся выпуклой оболочкой начальных состояний агентов.

В работе [101] рассмотрено аналогичное взаимодействие агентов:

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)\phi_{jk}(t, y_{jk}(t - \tau_{jk}(t))); \\ y_{jk}(t) = x_k(t) - x_j(t), \end{cases}$$

где на функции  $a_{jk}(t)$  и  $\tau_{jk}(t)$  и на оргграфы связей наложены определенные ограничения. Для таких протоколов получено достаточное условие сходимости протокола. В частности, если  $\phi_{jk}(x) = x$ , то данное условие преобразуется в следующее неравенство (следствие 6 в [101]):

$$\max_k \bar{\tau}_{jk} \leq \left( 2 \sum_{m=1}^n \bar{a}_{jm} \right)^{-1}, \forall j = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Если применить неравенство (1.14) для базового протокола консенсуса с запаздыванием (1.2) с симметричной лапласовской матрицей, то, в силу того, что  $\lambda_{\max} < 2 \max_i \sum_{j \neq i} a_{ij}$  согласно теореме Гершгорина, получим  $\tau < \frac{1}{\lambda_{\max}}$ . С другой стороны в силу теоремы 1.1 для симметричного случая граничное значение запаздывания  $\tau_0 = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}} > \frac{1}{\lambda_{\max}}$ . Таким образом полученная оценка не является необходимым условием сходимости протокола (1.2).

В работе [119] рассматривается протокол консенсуса с частичным запаздыванием, который имеет вид

$$\dot{x}(t) = aIx(t) - bfLx(t - \tau), \quad (1.15)$$

где  $a, b$  – константы,  $f$  – коэффициент обратной связи,  $L$  – симметричная лапласовская матрица с простым нулевым собственным значением. Для системы (1.15) рассматривается задача нахождения наибольшего граничного запаздывания  $\tau_0$  (в работе [119] данное значение обозначено через  $\tau^*$ ) относительно  $f$ . Авторы установили связь между  $\tau_0$  и спектром лапласовской матрицы. Собственные значения матрицы  $L$  можно обозначить через  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Тогда при фиксированном  $f$  граничное значение запаздывания можно вычислить как

$$\tau(f) = \min_{\lambda_i, i=2, \dots, n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i^2 b^2 f^2 - a^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\lambda_i^2 b^2 f^2 - a^2}}{a} \right) = \quad (1.16)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 b^2 f^2 - a^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{\lambda_n^2 b^2 f^2 - a^2}}{a} \right). \quad (1.17)$$

Если  $\lambda_2 \neq \lambda_n$ , то

$$\tau_0 = \sup_f \tau(f) = \frac{1}{a \sqrt{\frac{\lambda_n^2}{\lambda_2^2} - 1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\lambda_n^2}{\lambda_2^2} - 1} \right). \quad (1.18)$$

В статье [125] рассмотрена следующая модель в многоагентных системах второго порядка с запаздыванием:

$$\dot{y}(t) = (\tilde{L}_1 \otimes I_n)y(t) + (\tilde{L}_2 \otimes I_n)y(t - \tau), \quad (1.19)$$

где  $\tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{L}_2 = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ -\alpha L_n & -\beta L_n \end{bmatrix}$ .

В [125] доказано, что если сеть коммуникации содержит остовное дерево и выполняется условие

$$\frac{\beta^2}{\alpha} > \max_{2 \leq i \leq n} \frac{\text{Im}^2(\mu_i)}{\text{Re}(\mu_i)[\text{Re}^2(\mu_i) + \text{Im}^2(\mu_i)]},$$

то в модели (1.19) консенсус достигается тогда и только тогда когда

$$\tau < \min_{2 \leq i \leq n} \left( \frac{\theta_{i1}}{\omega_{i1}} \right),$$

где  $0 \leq \theta_{i1} < 2\pi$ ,  $\cos \theta_{i1} = [\text{Re}(\mu_i)\alpha - \text{Im}(\mu_i)\omega_{i1}\beta]/\omega_{i1}^2$ ,  $\sin \theta_{i1} = [\text{Re}(\mu_i)\omega_{i1}\beta + \text{Im}(\mu_i)\alpha]/\omega_{i1}^2$ ,  $\omega_{i1} = \sqrt{\frac{\|\mu_i\|^2\beta^2 + \sqrt{\|\mu_i\|^4\beta^4 + 4\|\mu_i\|^2\alpha^2}}{2}}$  и  $\mu_i$  – ненулевое собственное значение лапласовской матрицы  $L$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ .

В [84] изучена проблема консенсуса в дискретных по времени много-агентных системах второго порядка с неравномерными временными задержками (здесь под неравномерными временными задержками имеются в виду зависимость задержки от номеров агентов) и динамически изменяющейся топологией связи:

$$\begin{aligned} x_i((k+1)T) &= x_i(kT) + v_i(kT)T, \\ v_i((k+1)T) &= v_i(kT) + u_i(kT)T, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\begin{aligned} u_i(k) &= -p_0 v_i(k) + p_1 \sum_{s_j \in N_i(k)} a_{ij}(k)(x_j(k - \tau_{ij}) - x_i(k)) + \\ &+ p_2 \sum_{s_j \in N_i(k)} a_{ij}(k)(v_j(k - \tau_{ij}) - v_i(k)). \end{aligned}$$

Здесь  $p_0, p_1, p_2 > 0$ ,  $\tau_{ij}$  – коммуникационная задержка передачи данных между агентами.

Работа [85] по сути является непрерывным аналогом [84]. В [85] приведено (теорема 1) достаточное условие достижения усредненного консенсуса в

многоагентной системе с протоколом второго порядка с запаздыванием и переключающейся топологией. Данный результат основан на совместной связности множества топологий, каждая из которых действует на соответствующем промежутке  $[t_{r_j}, t_{r_{j+1}})$ . При этом предполагается, что подинтервалы  $[t_{r_0}, t_{r_1}), [t_{r_1}, t_{r_2}), \dots, [t_{r_{m_r-1}}, t_{r_{m_r}})$ , где  $t_{r_0} = t_r$ ,  $t_{r_{m_r}} = t_{r+1}$ , являются разбиением интервала  $[t_r, t_{r+1})$ , на котором вышеупомянутые топологии (в общем - несвязные) совместно связны.

С помощью преобразования координат и знаменитой теоремы Дж. Вольфовича (J. Wolfowitz) о произведении стохастических, неприводимых и апериодических матриц [117], в [84] приведены достаточные условия для достижения консенсуса в (1.20) всеми агентами с произвольными ограниченными неравномерными временными задержками и динамически изменяющимися ориентированными графами связей. При этом отдельные оргграфы связей могут не иметь остовных деревьев.

В работе [77] рассмотрены многошаговые протоколы передачи данных для улучшения скорости сходимости. В частности, был рассмотрен двухшаговый протокол с запаздыванием. Согласно этому протоколу каждый агент влияет не только на своих соседей, а также влияет на агентов, находящихся на нескольких узлах от него, с определённой задержкой. Например, если агент  $i$  влияет на агента  $j$ , а агент  $j$  влияет на агента  $k$ , то в двухшаговом протоколе добавляется влияние агента  $i$  на агента  $k$  с запаздыванием  $2\tau$ . Данный протокол имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= u_i(t), \\ u_i(t) &= - \sum_{j \in N_i} a_{ij} \left( (x_i(t - \tau) - x_j(t - \tau)) + \sum_{k \in N_j} a_{jk} (x_i(t - 2\tau) - x_k(t - 2\tau)) \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Для протокола (1.21) в [77] было найдено граничное значение запаздывания, которое всегда не превышает граничного значения запаздывания базового протокола консенсуса с запаздыванием (1.2). Об изменении скорости сходимости характеристик агентов более подробно пойдет речь в разделе 1.3.5.

Следующий протокол второго порядка с запаздыванием был рассмотрен в [73]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= ax_i(t) + bv_i(t) + k_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}[x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)] + \\ &\quad + k_2 \sum_{j=1}^N a_{ij}[v_j(t - \tau) - v_i(t - \tau)], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Как отмечено в [73], в таких протоколах предполагается, что значение запаздывания  $\tau$  одно и то же для всех агентов. Поэтому, в приложениях, где  $x_i(t)$  мгновенно становится известен узлу  $i$ , этот сигнал необходимо задержать перед применением в  $\dot{v}_i(t)$ .

Заметим, что последний протокол аналогичен предыдущим протоколам второго порядка. Но здесь авторы предлагают протокол с ошибками относительно характеристик одного – первого агента. Для этого вместо  $x_i(t)$  и  $v_i(t)$  используются  $\hat{x}_i(t) = x_i(t) - x_1(t)$  и  $\hat{v}_i(t) = v_i(t) - v_1(t)$ .

Модель (1.22) в составном (composite) виде при  $\hat{z}(t) = (\hat{x}^T(t), \hat{v}^T(t))^T$  имеет следующее векторно-матричное представление:

$$\dot{\hat{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0_{N-1} & I_{N-1} \\ aI_{N-1} & bI_{N-1} \end{bmatrix} \hat{z}(t) - \begin{bmatrix} 0_{N-1} & 0_{N-1} \\ k_1 \hat{L} & k_2 \hat{L} \end{bmatrix} \hat{z}(t - \tau). \quad (1.23)$$

В [73] установлено, что если в (1.23) при  $\tau = 0$  консенсус достигается, то для случая с ненулевой задержкой консенсус достигается тогда и только тогда, когда

$$0 \leq \tau < \min_{r \in \{2, \dots, N\}} \frac{k\pi + \arctg \Psi_r}{\omega_r}, \quad (1.24)$$

где

$$\Psi_r = \frac{\phi_r(\omega_r^2 + a) + \varphi_r b \omega_r}{\phi_r b \omega_r - \varphi_r(\omega_r^2 + a)},$$

$$\phi_r = k_2 \omega_r \operatorname{Re}(\lambda_r) + k_1 \operatorname{Im}(\lambda_r), \quad \varphi_r = k_2 \omega_r \operatorname{Im}(\lambda_r) - k_1 \operatorname{Re}(\lambda_r).$$

При этом  $k$  – минимальное целое число, для которого правая часть выражения (1.24) достигает минимума, а  $\omega_r$  – решение уравнения

$$(\omega_r^2 + a)^2 + b^2\omega_r^2 - (k_1^2 + k_2^2\omega_r^2)|\lambda_r|^2 = 0.$$

Ранее в работе [125] рассматривался частный случай протокола (1.23) при  $a = b = 0$ . Так теорема 14 в [73] обобщает результаты, полученные в [125].

В [110] исследуется следующий протокол второго порядка с запаздыванием и переменной неориентированной топологией:

$$\dot{\delta}(t) = \sum_{k=1}^r L_k \delta(t - \tau_k(t)), \quad (1.25)$$

где  $\delta = x - \text{Ave}(x)\mathbf{1}$ ,  $\text{Ave}(x)$  – среднее арифметическое компонент вектора  $x$ ,  $r \leq n(n-1)/2$ ,  $\tau_k(\cdot) \in \{\tau_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$ . Матрица  $L_k = (l_{ij}^k)$  определена как

$$l_{ij}^k = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i, \tau_k(\cdot) = \tau_{ij}(\cdot) \\ 0, & j \neq i, \tau_k(\cdot) \neq \tau_{ij}(\cdot) \\ \sum_{j=1}^n l_{ij}^k, & j = i. \end{cases}$$

В [110] доказано, что если  $0 \leq \tau_k(t) \leq h_k$ ,  $\dot{\tau}_k(t) \leq d_k$  и любая топология  $G_k$  связная, то для любого  $0 \leq d_k < 1$ ,  $k = 1, \dots, r$ , существует  $h_k > 0$ , такой, что для любого переключающегося сигнала  $\sigma(\cdot)$  протокол (1.25) обеспечивает асимптотический консенсус. Метод вычисления  $h_k$  приведен в теореме 3 из [110].

Ещё один протокол второго порядка с запаздыванием был рассмотрен в [122] для многоагентных систем с неориентированной топологией:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & -\gamma I_N \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0_N & 0_N \\ A & \gamma A \end{bmatrix} z(t - \tau). \quad (1.26)$$

В отличие от протокола (1.23) здесь рассматриваются не отклонения оценок относительно оценок какого-то агента (например, первого), а реальные параметры – состояния и скорости агентов. В лемме 1 из [122] приведены необходимые и достаточные условия, зависящие от  $\tau$  и  $\gamma$ , достижения консенсуса в многоагентной системе с протоколом (1.26). Доказано, что для определения

$\tau$  и  $\gamma$ , гарантирующие консенсус, из собственных значений симметричного лапласовской матрицы играет роль только максимальное значение  $\lambda_n$ .

Поиском оптимальной пары – топологии сети и параметра  $\gamma$  в (1.26) авторы также решают задачу поиска максимальной скорости сходимости.

Еще один протокол сходимости к заданной конфигурации для много-агентной системы второго порядка с запаздыванием предложен в [86]. В данной статье исследуется управление строем для сети динамических агентов второго порядка с неоднородными задержками связи. Желаемая стационарная формация достигается путём введения разной собственной задержки для каждого агента. Здесь предложен следующий алгоритм управления строем:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) &= p_i(t), \\ \dot{p}_i(t) &= -\gamma_i p_i(t) - k_i \sum_{j \in N_i} a_{ij} [(p_i(t - T_i) - p_j(t - \tau_{ij})) + \\ &\quad + \gamma_i ((q_i(t - T_i) - c_i^*) - (q_j(t - \tau_{ij}) - c_j^*))], \end{aligned} \quad (1.27)$$

где  $q_i \in \mathbb{R}^2$  – состояние агента  $i$ ,  $p_i \in \mathbb{R}^2$  – его скорость,  $u_i$  – управление,  $c_i \in \mathbb{R}^2$  – вектор предписанного положения агента  $i$  в заданной конфигурации,  $\gamma_i, k_i$  – параметры управления,  $T_i$  – собственная задержка агента  $i$ ,  $\tau_{ij} \geq 0$ . Основным результатом [86] изложен в следующей теореме.

**Теорема 1.7.** *Если в многоагентной системе с протоколом (1.27) из  $n$  агентов с постоянной топологией взаимосвязей, которая имеет остовное дерево, выполняется условие*

$$2T_i k_i \sum_{j \in N_i} a_{ij} < 1, \forall i,$$

*то система асимптотически достигает желаемой геометрической формы на плоскости, и скорость каждого агента асимптотически сходится к нулю.*

### 1.3.5. Скорость сходимости моделей в многоагентных системах

Для протоколов консенсуса в многоагентной системе без запаздывания с симметричной лапласовской матрицей скорость сходимости является доста-

точно хорошо изученной характеристикой. Базовый протокол консенсуса без запаздывания имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = u_i(t), & t \geq 0; \\ u_i(t) = -\sum_{j \neq i} a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), & i = 1, \dots, n; \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.28)$$

или матричный вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -Lx(t), & t \geq 0; \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Решением уравнения (1.29) будет  $x(t) = e^{-Lt}x_0$ , где  $e^{-Lt}$  – матричная экспонента, которая определяется разложением в ряд Тейлора:

$$e^{-Lt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-Lt)^n}{n!}.$$

**Теорема 1.8.** [37] [Теорема 1] Если  $x(t)$  – решение системы (1.29), то  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^+ x_0$ .

С другой стороны формула для функции  $f(A)$ , определенной на спектре  $A$ , имеет вид (см. [15]):

$$f(A) = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{v_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj},$$

где  $\lambda_k \in \sigma(A)$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,  $s$  – число различных собственных значений  $A$ ,  $v_k$  – индекс собственного значения  $\lambda_k$ , и при  $s = 1$ ,  $Z_{10} = I$ , при  $s > 1$

$$Z_{k0} = \prod_{i \neq k} \left( I - \left( \frac{A - \lambda_k I}{\lambda_i - \lambda_k} \right)^{v_k} \right)^{v_i},$$

$$Z_{kj} = \frac{1}{j!} Z_{k0} (A - \lambda_k I)^j,$$

$j = 0, \dots, v_k - 1$ . Для **симметричного** случая индексы всех собственных значений матрицы  $L$  равны 1, и

$$e^{-Lt} = \sum_{k=1}^s e^{-\lambda_k t} Z_{k0}. \quad (1.30)$$

Исходя из выражения (1.30) скорость сходимости протокола (1.29) характеризуется соответствующими степенями экспонентами, т.е. наименьшим ненулевым собственным значением лапласовской матрицы  $L$ . Чем больше минимальное ненулевое собственное значение, тем быстрее сходится протокол (1.29).

Аналогичный вывод для базового протокола консенсуса (1.29) с симметричной лапласовской матрицей был получен в работе [97] с помощью применения функции Ляпунова квадратичной формы (см. теорему 8 в [97]).

Стоит отметить, что характеристической функцией системы (1.29) является

$$F(s) = \det(sI + L) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} (s + \lambda).$$

Тогда степенью сходимости системы (1.29) с симметричной матрицей  $L$  является минимальное ненулевое собственное значение матрицы  $L$ , и, таким образом, для симметричного случая скорость сходимости системы (1.29) характеризуется степенью сходимости.

В знаменитой статье [56] рассматривается симметричная лапласовская матрица  $L$ , соответствующая неориентированному графу  $G$ , с собственными значениями  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 = a(G) \leq \dots \leq \lambda_n$ . Для числа  $a(G)$  было предложено название алгебраическая связность графа  $G$ , известное также как число Фидлера. В работе [56] показана связь алгебраической связности графа со связностью по ребрам и связностью по вершинам – минимальное число ребер или вершин соответственно, чье удаление приведет к потере связности графа. Тем самым  $a(G)$  может характеризовать связность графа  $G$ . При этом если  $a(G) \neq 0$ , то  $a(G)$  также характеризует скорость сходимости протокола (1.29). Таким образом, чем больше  $a(G) \neq 0$ , тем больше связность графа  $G$  и тем быстрее протокол (1.29) сходится.

Данный факт был использован в работе [77], которая была упомянута

выше. В частности, в данной работе разрабатывались модификации базового протокола консенсуса без запаздывания (1.29), которые позволяли бы быстрее достичь агентам согласованной характеристики. Так был предложен двухшаговый протокол консенсуса, который имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j \in N(i)} a_{ij} \left( x_i(t) - x_j(t) + \sum_{k \in N(j)} a_{jk} (x_i(t) - x_k(t)) \right),$$

с начальным условием  $x(0) = x_0$ , и где  $N(i)$  – множество соседей  $i$ -й вершины. В таком протоколе агент отправляет информацию не только о своем состоянии, но и о состоянии своих соседей. В матричном виде такой протокол будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -\bar{L}x(t), & t \geq 0; \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где  $\bar{L} = L + \hat{L}$ , где  $\hat{L}$  соответствует графу  $\hat{G}$ , который получается из исходного графа  $G$  следующим образом: если в графе  $G$  существует путь из вершины  $j$  в вершину  $i$ , состоящий из двух дуг с весами  $a_{jk}$  и  $a_{ki}$ , то в графе  $\hat{G}$  существует дуга из  $j$  в  $i$  с весом  $a_{jk}a_{ki}$ . Если из вершины  $j$  в вершину  $i$  не существует пути из двух дуг, то в графе  $\hat{G}$  также не существует дуги из  $j$  в  $i$ . Пусть  $\bar{G}$  – граф, соответствующий  $\bar{L}$ . Доказано, что  $a(\bar{G}) \geq a(G) + a(\hat{G})$ , и, таким образом, двухшаговый протокол консенсуса сходится быстрее базового протокола консенсуса. В работах [78, 100, 127] также разрабатываются различные модификации протоколов консенсуса и систем управления сетями, увеличивающие скорость сходимости.

Однако, при применении двухшагового протокола с запаздыванием (1.21), скорость сходимости ухудшается по сравнению с базовым протоколом консенсуса с запаздыванием, несмотря на увеличение алгебраической связности (см. рис.6 в [77]). Таким образом исследование скорости сходимости в многоагентных системах с запаздыванием является более сложной задачей, о чем далее будет упомянуто подробнее.

Исследование изменения скорости сходимости базового протокола консенсуса без запаздывания при изменении структуры соответствующего графа было проведено в [102]. В частности, были получены условия, при которых алгебраическая связность не изменяется при добавлении дополнительных дуг. В данной работе рассматривается также случай с запаздыванием, который будет затронут в данной главе и результаты по которому будут обсуждены ниже.

В работе [87] рассматривается задача построения простых орграфов с заданным количеством вершин и дуг, для которых алгебраическая связность будет максимальной.

В работах [65, 70] рассматривается базовый протокол консенсуса (1.29), в котором матрица  $L$  построена на невзвешенном неориентированном случайном графе, т.е. вероятность того, что между агентами  $i$  и  $j$  есть ребро, равна  $p$ . В [70] было установлено, что характеристики агентов сходятся на множество  $\mathbb{R}^n$ , в то время как в [65] рассматриваются оценки вероятностных величин, характеризующих скорость сходимости.

Другой подход заключается в оценке времени, за которое протокол сойдется к консенсусу. Например, в работе [98] рассматривается задача достижения консенсуса в многоагентной системе (1.29) за заданное время. Полученные с помощью функции Ляпунова оценки не зависят от начальных условий, а только от характеристик системы и протокола. В работе [99] авторы рассматривают аналогичную задачу для модификации протокола (1.29), в которой взаимодействие агентов определяется функциями расстояний  $\phi_{ij}$ :

$$\dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(x_i(t) - x_j(t));$$

$$\phi_{ij} = -\alpha(a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)))^\mu - \beta(a_{ij}(x_i(t) - x_j(t)))^v,$$

где  $\alpha, \beta > 0$ ,  $\mu \in (0, 1)$ ,  $v > 1$ .

Скорость сходимости многоагентных систем с запаздыванием является гораздо более сложной задачей. Так решение системы (1.2) с помощью метода

шага можно получить на определенном отрезке длиной  $\tau$ , и оно будет выражаться как конечная сумма полиномов, степень которых зависит от выбора отрезка.

Другой подход заключается в представлении решения системы (1.2) с помощью нулей характеристической функции (1.3):

$$x(t) = \sum_{r=1}^{\infty} e^{s_r t} p_r(t), \quad (1.31)$$

где  $s_r$  – корень характеристической функции,  $p_r$  – полином, степень которого меньше кратности  $s_r$ . В таком представлении степень сходимости системы (1.2) в общем случае не характеризует скорость сходимости, а является аппроксимацией экспоненциальной скорости сходимости характеристик агентов (более подробно см. в [90, 103]). Другой подход был применен в работе [93], в которой была получена верхняя оценка скорости сходимости дискретного протокола консенсуса с запаздыванием. Таким образом характеристика скорости сходимости как протоколов консенсуса с запаздыванием, так и без запаздывания в общем случае является достаточно трудной и интересной задачей, на решение которой будут направлены будущие исследования.

### 1.3.6. Методы достижения консенсуса в многоагентных системах с несвязной структурой

Согласно теореме 1.2 и теореме 2.2, если протокол (1.2) устойчив,  $\phi(\theta) = x_0$  и  $0$  – простое собственное значение лапласовской матрицы  $L$ , то протокол (1.2) сходится к консенсусу при любом векторе  $x_0$ . Однако, если  $0$  – кратное собственное значение лапласовской матрицы  $L$ , то для произвольного вектора  $x_0$  консенсус может не достигаться. Тогда возникает вопрос: как изменить протокол, чтобы получить консенсус при любом векторе начальных значений? Такая проблема регуляризации возникает не только в многоагентных системах, но и также в задачах кластеризации на несвязном орграфе. В этом случае после некоторых изменений исходной стохастической матрицы вектор стационарного распределения, используемый для взвешивания кла-

стеров в задаче спектральной кластеризации, определяется однозначно с точностью до множителя.

К немногочисленным работам по многоагентным системам с несвязным орграфом связей относятся [11, 12]. В [12] ставится задача сопоставления “наиболее естественного” консенсуса, который достигается при минимально возможном изменении многоагентной системы. Для данного значения авторами было предложено название латентный консенсус. Так в [12] исследовано несколько протоколов латентного консенсуса. В основе этих протоколов лежит добавление дополнительных дуг, приводящих к консенсусу при любом векторе начальных характеристик агентов. Эти методы аналогичны методу, применяемому в PageRank для ранжирования страниц в Интернете. Например, при методе фоновых связей к орграфу добавляется полный граф с малыми весами. Такой протокол имеет следующее представление:

$$\dot{x}(t) = -(L + \delta D)x(t), \quad (1.32)$$

где  $\delta > 0$ ,  $D = I - \mathbf{1}v^T$ ,  $v_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n v_i = 1$ .

В [12] в частности доказано, что если  $x(t)$  – решение системы (1.32), то

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{1}v^T L^\dagger x(0).$$

Если  $v = \frac{1}{n}\mathbf{1}$ , то имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = EL^\dagger x(0),$$

где  $E$  – матрица с элементами  $n^{-1}$ .

Регуляризация “в духе” PageRank приводит к усреднению строк собственного проектора.

Другой метод регуляризации – метод ортогональной проекции, был предложен в [11]. Его также можно применить как для модели ДеГроота –  $x_k = Px_{k-1}$ , так и для непрерывного протокола с несвязной сетью. Согласно этому методу, пространство всевозможных начальных мнений ортогональным проектором, т.е. симметричной идемпотентной матрицей  $S$ , отображается на подпространство  $Q_L$  – область сходимости процедуры ДеГроота.

Образ  $\mathcal{R}(S)$  матрицы  $S$  совпадает с линейной оболочкой векторов, состоящих из линейно независимых столбцов матрицы  $I - P$  и вектора из единиц. Если  $x_0$  — вектор начальных мнений, а  $x'_0$  — преобразованный вектор, то  $\|x'_0 - x_0\|$  будет минимальной, поскольку матрица  $S$  — ортогональный проектор. Некоторые координаты преобразованного вектора могут иметь отрицательные знаки, если даже исходный вектор начальных характеристик был положительным. Однако  $P^\infty S$  является не только стохастической матрицей, но и матрицей единичного ранга. Поэтому, если вектор начальных значений  $x_0$  имеет только положительные координаты, то результирующий вектор  $P^\infty S x_0$  также будет положительным, и состоять из одинаковых элементов. Поэтому применение метода ортогональной проекции как для модели ДеГроота, так и для непрерывного протокола с несвязной сетью приведет к достижению агентами согласованной характеристики.

## Глава 2

# Базовый протокол консенсуса с запаздыванием

В данной главе рассматривается система (1.2) с постоянной начальной функцией. В теореме 1.1 приведено необходимое и достаточное условие устойчивости такой системы. Для устойчивой системы (1.2) ставятся следующие задачи:

1) Для системы с матрицей  $L$ , которая имеет действительный спектр и простое нулевое собственное значение, получить значение запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости.

2) Для системы с произвольной матрицей  $L$  получить асимптотическое поведение и условие достижения консенсуса для любого вектора начальных значений.

### 2.1. Граничное значение запаздывания

Как было отмечено выше, теорема 1.1 для любой устойчивой матрицы  $A$  была доказана в [68] (см. теорему 3.4). В данном разделе будет приведено ее короткое доказательство для системы (1.2) с помощью  $W$ -функции Ламберта.

Рассмотрим характеристическую функцию системы (1.2):

$$F(s) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} (s + \lambda e^{-\tau s}) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} f_{\lambda}(s) = sG(s). \quad (2.1)$$

Рассмотрим нули функции  $G(s)$ . Уравнение

$$f_{\lambda}(s) = s + \lambda e^{-\tau s} = 0 \quad (2.2)$$

представим в виде  $\tau s e^{\tau s} = -\tau \lambda$ . Поскольку  $W(z)e^{W(z)} = z$ , то  $\tau s$  ( $s$  – корень уравнения (2.2)) будет значением  $W$ -функции Ламберта в  $-\tau \lambda$ , т.е.

$$W(-\tau\lambda) = \tau s. \quad (2.3)$$

В силу леммы 1.1 для устойчивости системы (1.2) достаточно рассмотреть корень  $s = \frac{1}{\tau}W_0(-\tau\lambda)$ . Обозначим  $\lambda = a + ib \in \sigma(L) \setminus \{0\}$ . Стоит отметить, что для лапласовских матриц  $a > 0$ .

Тогда в силу (2.3) и леммы 1.1 граничное значение запаздывания, обеспечивающее отрицательность действительных частей нулей функции  $f_\lambda(s)$ , будет определяться равенством

$$W_0(-\tau\lambda) = iv,$$

которое можно записать как

$$ive^{iv} = -\lambda\tau. \quad (2.4)$$

Из (2.4) непосредственно получим

$$\begin{cases} v \sin v = a\tau; \\ v \cos v = -b\tau. \end{cases} \quad (2.5)$$

Тогда из (2.5) получим  $\operatorname{tg} v = -\frac{a}{b}$ .

Пусть  $\varphi = |\arg(\lambda)|$ ,  $\rho = |\lambda|$ . Рассмотрим все возможные случаи  $b$ .

а)  $b = 0$ . В этом случае  $-\tau\lambda$  принадлежит отрицательной части действительной оси и  $W_0(-\tau\lambda) = W_0(-\frac{\pi}{2})$  (см. рис. 1.2). Очевидно, что  $-\tau\lambda = -\frac{\pi}{2}$  и  $\tau = \frac{\pi}{2\lambda}$ .

б)  $b < 0$ . В этом случае  $-\tau\lambda$  принадлежит второму квадранту и, как видно из рис. 1.2,  $0 < v < \pi/2$ . Поэтому  $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi) \Rightarrow v = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ;

в) Если  $b > 0$ , то  $-\tau\lambda$  принадлежит третьему квадранту и, согласно рис. 1.2,  $-\pi/2 < v < 0$ . Поэтому  $\operatorname{tg} v = -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ . Следовательно,  $v = \varphi - \frac{\pi}{2}$ .

В случае б) подставив  $v = \frac{\pi}{2} - \varphi$  в (2.4), получим

$$i \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = -\rho\tau e^{-i\varphi}.$$

Умножив обе части на  $-i$  получим:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = \rho\tau e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \rho\tau. \quad (2.6)$$

В случае в) подставив  $v = \varphi - \frac{\pi}{2}$  в (2.4), получим

$$i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})} = -\rho\tau e^{i\varphi};$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})} = -i\rho\tau e^{i\varphi} = \rho\tau e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \rho\tau. \quad (2.7)$$

Итак, из (2.6) и (2.7) следует

$$\tau = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Тогда с учетом пункта а) граничным значением запаздывания для системы (1.2) будет  $\tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ .

## 2.2. Максимальная степень сходимости

Рассмотрим систему (1.2), в которой матрица  $L$  имеет простое нулевое собственное значение и действительный спектр, т.е.  $\sigma(L) = \{0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n\}$ . Частным случаем является система (1.2) с симметричной матрицей  $L$ , т.е. граф  $\Gamma$ , соответствующий  $L$ , будет связным и неориентированным. Для рассматриваемой системы рассмотрим следующую задачу: найти значение  $\tau^*$ , при котором достигается максимальная степень сходимости. Стоит отметить, что данное значение  $\tau^* \in [0, \tau_0)$ , где  $\tau_0$  – граничное значение запаздывания из теоремы 1.1, которое можно вывести с помощью  $W$ -функции Ламберта как было показано в разделе выше.

Для нахождения  $\tau^*$  нам понадобится проанализировать поведение функции  $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$  при фиксированном  $\lambda$  на промежутке  $-\pi/2 < -\tau\lambda < 0$  (при  $-\tau\lambda < -\pi/2$  действительные части  $W_0(-\tau\lambda)$  положительны).

**Лемма 2.1.** 1) Действительная часть функции  $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$  возрастает на промежутке  $-\pi/2 < -\tau\lambda < -e^{-1}$ ; 2) на промежутке  $-e^{-1} < -\tau\lambda < 0$  эта функция убывает.

**Доказательство леммы 2.1.** 1) При  $-\tau\lambda < -\frac{1}{e}$ , т.е. при  $\tau > \frac{1}{e\lambda}$  функция  $s = \frac{1}{\tau}W_0(-\tau\lambda)$  принимает комплексные значения. В силу того, что  $W_0(-\frac{\pi}{2}) = i\frac{\pi}{2}$  и  $\operatorname{Re}(W_0(x)) < 0$  при  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ , то при  $-\frac{\pi}{2} < -\tau\lambda < -\frac{1}{e}$ , т.е. при  $\frac{1}{e\lambda} < \tau < \frac{\pi}{2\lambda}$ ,  $\operatorname{Re}(s) < 0$ . На данном интервале с увеличением  $\tau$  уменьшается величина  $\frac{1}{\tau}$ , как и модуль действительной части  $W_0(-\tau\lambda)$ . Таким образом действительная часть  $s = \frac{1}{\tau}W_0(-\tau\lambda)$  приобретает отрицательное значение и по модулю убывает с увеличением  $\tau$ , т.е. возрастает на рассматриваемом промежутке.

2) В силу того, что

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))},$$

имеет место

$$s' = \left( \frac{W_0(-\tau\lambda)}{\tau} \right)'_{\tau} = -\frac{W_0^2(-\tau\lambda)}{\tau^2(1+W_0(-\tau\lambda))}.$$

С другой стороны, на промежутке  $-\frac{1}{e} < -\tau\lambda < 0$ , т.е. при  $0 < \tau < \frac{1}{e\lambda}$  значения функции  $W_0(-\tau\lambda)$  отрицательны и больше  $-1$  (см. рис. 1.1). Поэтому функция  $s = \frac{1}{\tau}W_0(-\tau\lambda)$  убывает на промежутке  $0 < \tau < \frac{1}{e\lambda}$  по  $\tau$ . На данном промежутке  $-e\lambda < s < -\lambda$ .  $\square$

**Замечание 2.1.** В работе [102] в следствии 16 было получено, что действительная часть  $s$  убывает на промежутке  $\tau \in (0, \frac{\pi}{2\lambda})$ , что противоречит лемме 2.1. Это можно объяснить тем, что в работе [102] рассматривается лишь случай, когда мнимая часть  $s$  ненулевая, т.е. когда  $\tau \in (\frac{1}{e\lambda}, \frac{\pi}{2\lambda})$ , что уже не противоречит лемме 2.1.

**Предложение 2.1.** Пусть  $s_0$  – решение уравнения  $f_{\lambda}(s) = s + \lambda e^{-\tau s} = 0$  ( $\lambda > 0$ ) с максимальной действительной частью. Тогда  $\arg \min_{\tau} \operatorname{Re}(s_0) = \tau_{\lambda}^* = \frac{1}{e\lambda}$ .

**Доказательство предложения 2.1.** Если  $s_0$  – решение уравнения  $s + \lambda e^{-\tau s} = 0$ , то согласно (2.2) и (2.3)  $\tau s_0$  определится многозначной функцией  $W(-\tau\lambda)$ . С другой стороны, в силу леммы 1.1 максимальная действитель-

ная часть  $s_0$  можно определить функцией  $\frac{1}{\tau}W_0(-\tau\lambda)$ . Также, в силу предложения 2.1 минимальная действительная часть функции  $\frac{1}{\tau}W_0(-\tau\lambda)$  достигается при  $-\tau\lambda = -\frac{1}{e}$ , т.е. при  $\tau = \frac{1}{e\lambda}$ .  $\square$

**Следствие 2.1.** *Для скалярного дифференциального уравнения с запаздыванием*

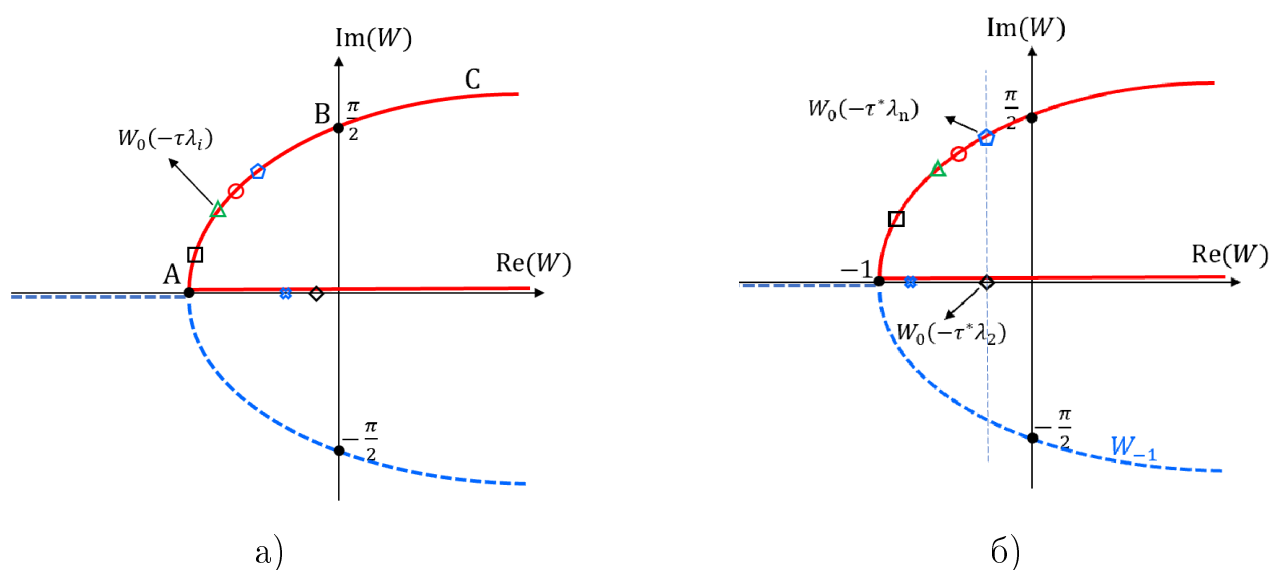
$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t - \tau) \quad (2.8)$$

*с начальным условием  $y(\theta) = y_0 \neq 0$  при  $\theta \in [-\tau, 0]$  максимальная степень устойчивости достигается при  $\tau = \frac{1}{e\lambda}$ .*

Доказательство следствия 2.1 следует из того, что характеристической функцией скалярного уравнения (2.8) будет функция  $f_\lambda(s) = s + \lambda e^{-\tau s}$ , и тогда максимальная степень устойчивости уравнения (2.8) достигается при значении  $\tau$  из леммы 2.1. Данное значение приближенно было найдено в [36].

**Лемма 2.2.** *Пусть для каждого  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ , минимальная действительная часть решения уравнения (2.2) достигается при  $\tau_{\lambda_i}^*$ . Тогда: 1) если  $\lambda_2 < \lambda_n$ , то максимальная степень сходимости системы (1.2) достигается при  $\tau^* \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$ ; 2) если  $\lambda_2 = \lambda_n = \lambda$ , то  $\tau^* = \tau_\lambda^*$ .*

**Доказательство леммы 2.2.** 1) Очевидно, что  $\tau_{\lambda_n}^* < \dots < \tau_{\lambda_2}^*$ . Пусть  $\tau^*$  – значение запаздывания, которое обеспечивает максимальную степень сходимости для системы (1.2). Покажем, что  $\tau^* \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$ . Действительно, если  $\tau^* \leq \tau_{\lambda_n}^*$ , то все значения  $W_0(-\tau^*\lambda_i)$ ,  $i = 2, \dots, n$ , действительны и принадлежат интервалу  $(-1, 0)$  действительной оси. При этом ближе всего к мнимой оси будет лежать корень, соответствующий  $\lambda_2$ . Тогда при увеличении значения  $\tau^*$  корень, соответствующий  $\lambda_2$  будет отодвигаться от мнимой оси, тем самым увеличивая степень сходимости системы. А если  $\tau^* \geq \tau_{\lambda_2}^*$ , то все значения  $W_0(-\tau^*\lambda_i)$ ,  $i = 2, \dots, n$ , содержат мнимую часть и принадлежат дуге  $AC$  (см. рис.2.1 а)). При этом наибольшую действительную часть будет



**Рис. 2.1.** а) Значения  $W_0(-\tau\lambda)$ . б) Значения  $W_0(-\tau^*\lambda_2)$  и  $W_0(-\tau^*\lambda_n)$  при  $\tau = \tau^*$ . Пунктирной линией указано отображение  $W_{-1}(z)$ , отображение  $W_0(z)$  приведено сплошной линией.

иметь корень, соответствующий  $\lambda_n$ . В этом случае, уменьшая значение  $\tau^*$ , можно увеличить степень сходимости системы.

Итак, максимальная степень сходимости системы (1.2) будет достигнута при  $\tau = \tau^* \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$ , при котором

$$W_0(-\tau^*\lambda_2) = \operatorname{Re}(W_0(-\tau^*\lambda_n)). \quad (2.9)$$

2) Если у лапласовской матрицы все ненулевые собственные значения  $\lambda$  равны между собой, то степень сходимости определится тем ненулевым числом  $\lambda$  и будет равна  $e\lambda$ .  $\square$

Таким образом, для любого  $\tau \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$ ,  $W_0(-\tau\lambda_n)$  будет находиться на дуге  $AC$ , а  $W_0(-\tau\lambda_2)$  будет принадлежать интервалу  $(-1, 0)$  (см. рис. 2.1а)).

Если действительная часть  $W_0(-\tau\lambda_n)$  меньше  $W_0(-\tau\lambda_2)$ , то, увеличивая  $\tau$ , можно добиться случая, когда  $\operatorname{Re}(W_0(-\tau\lambda_n)) = W_0(-\tau\lambda_2)$ . А если  $\operatorname{Re}(W_0(-\tau\lambda_n)) > W_0(-\tau\lambda_2)$ , то убавляя  $\tau$  можно достичь их равенства (см. рис. 2.1б)).

**Теорема 2.1.** Пусть  $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}$  и  $\xi = -\arccos(q) \cdot \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$ . Тогда макси-

мальная степень сходимости  $\zeta_0$  достигается при  $\tau = \tau^* = \frac{-\xi e^\xi}{\lambda_2}$ , значение которой равно  $\zeta_0 = \frac{\lambda_2}{e^\xi}$ .

**Доказательство теоремы 2.1.** Как следует из предложения 2.2, собственные значения  $\lambda_i, i = 3, \dots, n-1$ , не влияют на  $\tau^*$ . Поэтому  $\tau^*$  можно найти исходя из равенства (2.9).

Обозначим  $W_0(-\tau^* \lambda_2) = u$ ,  $W_0(-\tau^* \lambda_n) = u + iv$ .

Отметим, что  $-\tau^* \lambda_n$  принадлежит лучу  $(-\infty, -e^{-1}]$  (см. рис. 1.2). Тогда для  $W_0(-\tau^* \lambda_n)$  справедливо, что  $u = -v \operatorname{ctg} v$ .

Итак, из  $W_0(-\tau^* \lambda_2) = \operatorname{Re}(W_0(-\tau^* \lambda_n))$  имеем:

$$\begin{cases} -\tau^* \lambda_2 = ue^u; \\ -\tau^* \lambda_n = e^u(u \cos v - v \sin v); \\ u = -v \operatorname{ctg} v. \end{cases} \quad (2.10)$$

Пусть  $u = 0$ . Тогда система (2.10) примет вид:

$$\begin{cases} -\tau^* \lambda_2 = 0; \\ -\tau^* \lambda_n = -v \sin v; \\ 0 = -v \operatorname{ctg} v. \end{cases}$$

Тогда  $\tau = 0$ , а значит

$$\begin{cases} -v \sin v = 0; \\ -v \operatorname{ctg} v = 0. \end{cases}$$

Однако данная система не имеет решения, т.к. функция  $\operatorname{ctg} v$  не определена в нулях функции  $\sin v$ , в частности при  $v = 0$ . Таким образом  $u = 0$  не является решением системы (2.10). Тогда преобразуем второе уравнение системы (2.10):

$$-\tau^* \lambda_n = ue^u \left( \cos v - \frac{v}{u} \sin v \right).$$

В силу того, что  $u = -v \operatorname{ctg} v$ , имеет место

$$\cos v - \frac{v}{u} \sin v = \cos v + \frac{\sin^2 v}{\cos v} = \frac{1}{\cos v}.$$

Тогда система (2.10) примет вид

$$\begin{cases} -\tau^* \lambda_2 = ue^u; \\ -\tau^* \lambda_n = ue^u \frac{1}{\cos v}; \\ u = -v \operatorname{ctg} v. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений получим

$$v = \arccos(q),$$

где  $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}$ . Подставляя полученное выражение в третье уравнение, получим

$$u = -\arccos(q) \operatorname{ctg}(\arccos(q)).$$

Стоит отметить, что

$$\operatorname{ctg}(\arccos(q)) = \frac{\cos(\arccos(q))}{\sin(\arccos(q))} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Тогда  $u = -\frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \arccos(q)$ . Обозначим это значение через  $\xi$ . Тогда значение  $\tau^*$  можно получить из первого уравнения системы (2.10):

$$\tau^* = -\frac{\xi e^\xi}{\lambda_2},$$

а значение максимальной степени сходимости будет  $\zeta_0 = -\frac{\xi}{\tau^*} = \frac{\lambda_2}{e^\xi}$ .  $\square$

**Замечание 2.2.** После некоторых преобразований можно показать, что граничное значение запаздывание протокола (1.15), найденного в [119] и выраженного формулой (1.18), можно также выразить через  $\xi$  как  $\tau_0 = -\frac{\xi}{a}$ . Несмотря на такое совпадение, в работе [119] и в данной главе решаются разные задачи для разных протоколов консенсуса, и результаты никак не связаны.

## 2.3. Связь асимптотического поведения и собственного проектора

### 2.3.1. Асимптотическое поведение устойчивого базового протокола консенсуса

Как показано в предыдущем разделе, увеличение степени сходимости системы (1.2) с фиксированной лапласовской матрицей возможно с помощью изменения запаздывания. Однако изменится ли асимптотическое поведение системы (1.2) при изменении запаздывания? В частности, изменится ли значение консенсуса при изменении запаздывания и какое условие достижения консенсуса устойчивой системы (1.2) при любом векторе начальных значений? В данном разделе будет установлена связь асимптотического поведения и нормированной матрицей максимальных исходящих лесов, которая является собственным проектором матрицы  $L$ .

**Предложение 2.2.** 1) Пусть  $L$  – произвольная лапласовская матрица, нулевое значение которой имеет кратность  $m$ . Тогда для любого  $z \in \mathbb{C}$

$$(I + zL)^{-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-m} \sigma_k z^k} \sum_{k=0}^{n-m} z^k Q_k,$$

где  $\sigma_k, Q_k, k \in \{1, \dots, n - m\}$  – коэффициенты и матрицы соответственно, полученные с помощью метода Фаддеева определения коэффициентов характеристического многочлена матрицы  $L$  и матричных коэффициентов присоединенной матрицы к  $L$ .

2) Для  $z \in \mathbb{C}$  справедливо, что  $\lim_{z \rightarrow \infty} (I + zL)^{-1} = L^\dagger$ .

**Доказательство предложения 2.2.** 1) Данный пункт доказывается по аналогии с доказательством следствия из теоремы 8 в [8], при учете того, что  $\sigma'_k = z^k \sigma_k$  и  $Q'_k = z^k Q_k$ , где  $\sigma_k, Q_k$  – скалярные и матричные коэффициенты, полученные с помощью метода Фаддеева для матрицы  $L$ , а  $\sigma'_k, Q'_k$  – скалярные и матричные коэффициенты, полученные с помощью метода Фаддеева для матрицы  $zL$ .

2) В силу пункта 1

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (I + zL)^{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-m} \sigma_k z^k} \sum_{k=0}^{n-m} z^k Q_k.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на  $z^{n-m}$ . Тогда при устремлении  $z$  к бесконечности в числителе и знаменателе дроби останутся коэффициенты  $\sigma_{n-m}$  и  $Q_{n-m}$  соответственно. Тогда в силу пункта 4 теоремы 1.2

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-m} \sigma_k z^k} \sum_{k=0}^{n-m} z^k Q_k = \frac{1}{\sigma_{n-m}} Q_{n-m} = L^+.$$

□

**Теорема 2.2.** Пусть протокол (1.2) устойчив,  $\phi(\theta) = x_0$ . Тогда

1) если  $x(t)$  – решение системы (1.2), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^+ x_0.$$

2) если  $\theta$  – простое собственное значение матрицы  $L$ , то протокол (1.2) будет сходиться к консенсусу при любом векторе  $x_0$ .

**Доказательство теоремы 2.2.** 1) Рассмотрим преобразование Лапласа  $x(t - \tau)$ :

$$\mathcal{L}(x(t - \tau)) = \int_0^{\infty} e^{-ts} x(t - \tau) dt.$$

Обозначим  $u = t - \tau$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t - \tau)) &= \int_{-\tau}^{\infty} e^{-(u+\tau)s} x(u) du = \int_{-\tau}^0 e^{-(u+\tau)s} x(u) du + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-(u+\tau)s} x(u) du = \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) x_0 + e^{-\tau s} X(s). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Отметим, что  $x(0) = \phi(0) = x_0$ . Тогда преобразованием Лапласа системы (1.2) будет

$$sX(s) - x_0 = - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx_0 - e^{-\tau s} LX(s);$$

$$sX(s) + e^{-\tau s} LX(s) = x_0 - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx_0;$$

$$X(s) = (sI + e^{-\tau s}L)^{-1} \left( I - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0.$$

Так как протокол (1.2) устойчив, то согласно теореме о конечном значении

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI + e^{-\tau s}L)^{-1} \left( I - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0 = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{e^{-\tau s}}{s} L \right)^{-1} \left( I - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0. \end{aligned}$$

Т.к.  $\frac{e^{-\tau s}}{s} \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow 0$ , то согласно предложению 2.2

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{e^{-\tau s}}{s} L \right)^{-1} = L^\dagger.$$

В силу того, что  $\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) = \tau$  и  $L^\dagger L = \mathbf{0}_{n \times n}$ , получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^\dagger (I - \tau L)x_0 = L^\dagger x_0 - \tau L^\dagger Lx_0 = L^\dagger x_0.$$

2) Если 0 – простое собственное значение матрицы  $L$ , то  $\text{rank}(L) = n - 1$ . Тогда матрица  $L^\dagger$  будет стохастической матрицей единичного ранга, и  $L^\dagger x_0 = c\mathbf{1}$ , где  $c$  зависит от выбора вектора  $x_0$ .  $\square$

**Замечание 2.3.** Схожий результат был получен в [111] для много-агентных систем вида (1.2) с сильно связным графом, где значение консенсуса представляется в виде выпуклой оболочки начальных значений  $\gamma^T x_0$ , где  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \gamma^T L = 0; \\ \sum_{j=1}^n \gamma_j = 1. \end{cases}$$

С другой стороны, исходя из определения собственного проектора  $L^+$  и теоремы 1.2,  $L^+ = \mathbf{1}\gamma^T$ . Таким образом теорема 2.2 обобщает результат из [111] для общего случая многоагентных систем.

### 2.3.2. Асимптотическое поведение устойчивого протокола без самозапаздывания

Отметим, что в работе [108] рассматривается базовый протокол консенсуса без самозапаздывания (1.12) с симметричной матрицей  $A$ . Асимптотическое поведение системы (1.12) при  $\phi(\theta) = x_0$  выражается следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = U_2 x_0 \mathbf{1}, \quad (2.12)$$

где  $U_2$  – последняя строка матрицы  $W^{-1}$ , для которой выполняется

$$W^{-1} L W = \begin{pmatrix} L_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{pmatrix},$$

где  $L_S$  – диагональная матрица, на главной диагонали которой ненулевые собственные значения  $L$ . Очевидно, что матрица  $W$  существует, если  $0$  – простое собственное значение  $L$ . Таким образом  $W$  – матрица, которая переводит  $L$  в жорданову форму, в которой нулевое собственное значение находится на последней строке. Однако представление (2.12) не показывает связь значения консенсуса с лесной структурой орграфа многоагентной системы и неприменимо для многоагентной системы с несвязной сетью. Поэтому далее будет представлен альтернативный вывод асимптотического поведения для системы (1.12) по аналогии с теоремой 2.2.

**Теорема 2.3.** Пусть  $x(t)$  – решение системы (1.12) с начальным условием  $\phi(\theta) = x_0$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^+ x_0.$$

**Доказательство теоремы 2.3.** Согласно (2.11)

$$\mathcal{L}(x(t - \tau)) = \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) x_0 + e^{-\tau s} X(s).$$

Тогда преобразованием Лапласа системы (1.12) будет

$$sX(s) - x_0 = -\mu X(s) + e^{-\tau s} AX(s) + \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Ax_0;$$

$$sX(s) + \mu X(s) - e^{-\tau s} AX(s) = x_0 + \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Ax_0;$$

$$X(s) = (sI + \mu I - e^{-\tau s} A)^{-1} \left( I + \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) A \right) x_0.$$

Так как система (1.12) устойчива, то согласно теореме о конечном значении

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s (sI + \mu I - e^{-\tau s} A)^{-1} \left( I + \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) A \right) x_0 = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{s} (\mu I - Ae^{-\tau s}) \right)^{-1} \left( I + \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) A \right) x_0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу того, что  $A = \mu I - L$ , то предел (2.13) имеет вид:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{s} (\mu(1 - e^{-\tau s})I + e^{-\tau s}L) \right)^{-1} \left( I + \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) (\mu I - L) \right) x_0. \quad (2.14)$$

Отметим, что первую матрицу в пределе (2.14) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} \left( I + \frac{1}{s} (\mu(1 - e^{-\tau s})I + e^{-\tau s}L) \right)^{-1} &= \left( \left( 1 + \frac{\mu(1 - e^{-\tau s})}{s} \right) I + \frac{e^{-\tau s}}{s} L \right)^{-1} = \\ &= \left( \frac{s + \mu(1 - e^{-\tau s})}{s} \right)^{-1} \left( I + \frac{e^{-\tau s}}{s + \mu(1 - e^{-\tau s})} L \right)^{-1}, \end{aligned}$$

вторую матрицу в пределе (2.14) можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \left( I + \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) (\mu I - L) \right) &= \left( \left( 1 + \mu \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) I - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) = \\ &= \left( \frac{s + \mu(1 - e^{-\tau s})}{s} \right) \left( I - \frac{1 - e^{-\tau s}}{s + \mu(1 - e^{-\tau s})} L \right). \end{aligned}$$

В силу того, что  $\frac{e^{-\tau s}}{s + \mu(1 - e^{-\tau s})} \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow 0$ , то в силу предложения 2.2  $\left( I + \frac{e^{-\tau s}}{s + \mu(1 - e^{-\tau s})} L \right)^{-1} \rightarrow L^+$  при  $s \rightarrow 0$ . Также  $\frac{1 - e^{-\tau s}}{s + \mu(1 - e^{-\tau s})} \rightarrow \frac{\tau}{1 + \mu\tau}$  при  $s \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^+ \left( I - \frac{\tau}{1 + \mu\tau} L \right) x_0 = L^+ x_0.$$

□

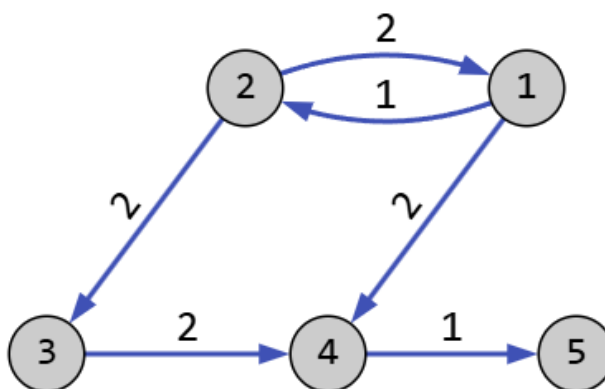
## 2.4. Числовой пример

Как было отмечено ранее, степень сходимости не всегда характеризует скорость сходимости. Данное соответствие может выполняться если решение соответствующей системы представимо в виде линейной комбинации экспонент. Так, исходя из выражения (1.31),  $x(t)$  можно представить в таком виде, если максимальный размер любой клетки жордановой формы  $L$  будет равен 1, т.е. матрица  $L$  имеет простую структуру или диагонализируемая. Для такой системы в данном разделе будет приведен числовой пример.

На рис. 2.2 приведен орграф для пяти агентов. На дугах указаны веса влияний агентов. Лапласовская матрица орграфа имеет вид:

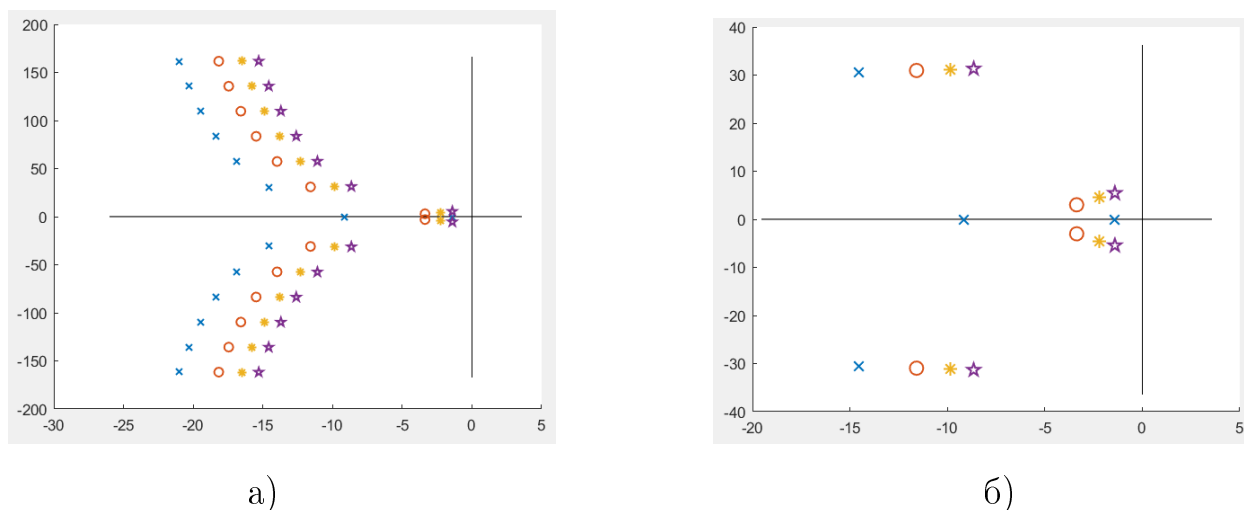
$$L = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$L$  имеет следующий спектр:  $\sigma(L) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ . Все собственные значения  $L$  являются простыми, а значит все клетки в жордановой форме  $L$  имеют единичный размер. Согласно теореме 2.1, определяем:  $\lambda_2 = 1; \lambda_5 =$



**Рис. 2.2.** Орграф связей для пяти агентов.

4;  $q = 1/4$ ,  $-\xi = \arccos(q) \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} = \arccos(1/4) \frac{1/4}{\sqrt{15/16}} \approx 0.3403$ . Тогда при запаздывании  $\tau^* = -\frac{\xi e^\xi}{\lambda_2} \approx 0.2422$  степень сходимости к консенсусу будет максимальной, и ее значение  $\zeta_0 = \frac{\lambda_2}{e^\xi} = 1.4054$ . Корни характеристической функции (1.3) кроме нулевого отмечены на рис. 2.3. Отметим, что граничное значение запаздывания  $\tau_0$  будет равно  $\frac{\pi}{2 \cdot 4} \approx 0.3927$ .



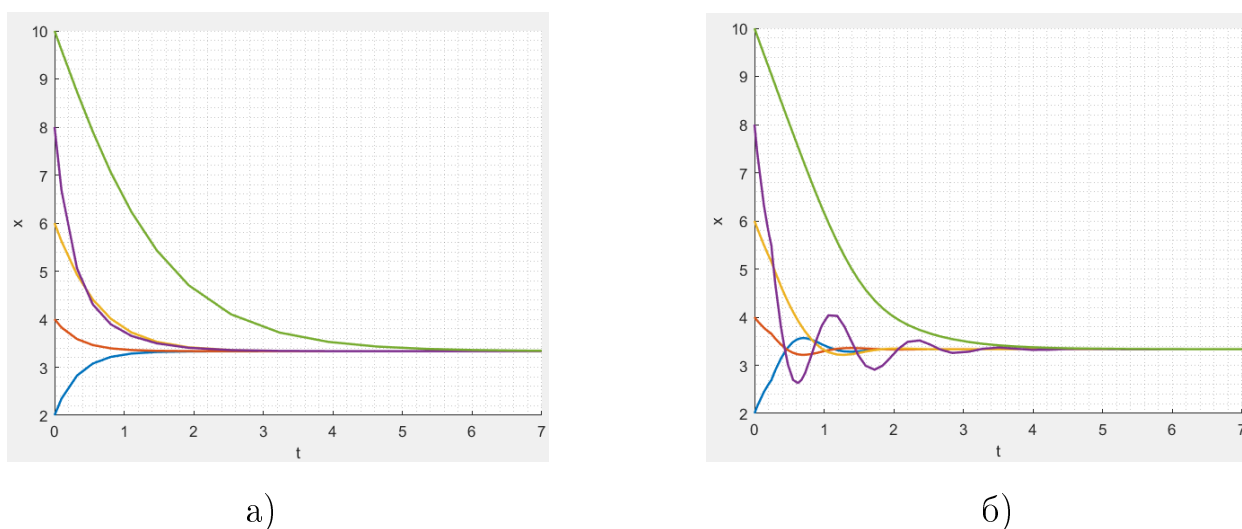
**Рис. 2.3.** а) Локализация корней  $s$  квазимногочлена, вычисленных с помощью  $W$ -функции Ламберта для четырнадцати ветвей. б) Локализация корней  $s$  для четырех ветвей.  $\frac{1}{\tau^*} W_0(-\tau^* \lambda_2) = \frac{1}{\tau^*} \text{Re}(W_0(-\tau^* \lambda_n)) = -1.4054$ .

Собственный проектор лапласовской матрицы  $L$  имеет вид:

$$L^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0 \right).$$

Пусть для системы (1.2)  $\phi(\theta) = x_0$ , и  $x_0 = (2, 4, 6, 8, 10)^T$ . Тогда если  $\tau < \tau_0$  и  $x(t)$  – решение системы (1.2), то  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^+ x_0 = \frac{10}{3} \mathbf{1}$ .

Внизу на рис. 2.4а приведен график достижения консенсуса без запаздывания с вектором начальных значений  $x_0$ . Видно, что при запаздывании  $\tau^* \approx 0.2422$  и с начальной функцией  $\phi(\theta) = x_0$  агенты приходят к консенсусу быстрее, чем без запаздывания (рис. 2.4б).



**Рис. 2.4.** а) Достижение консенсуса без запаздывания. б) Достижение консенсуса с запаздыванием  $\tau^* \approx 0.2422$ .

В этом примере видно, что для несимметричной матрицы простой структуры увеличение степени сходимости привело к увеличению скорости сходимости. Однако, если несимметричная матрица содержит жордановы клетки размерности больше единицы, то такое соответствие может нарушаться. Иначе говоря, увеличение степени сходимости не всегда приводит к увеличению скорости сходимости.

Заметим, что, как следует из численного примера, увеличение степени

сходимости приводит к появлению колебаний в переходном процессе. В отличие от традиционных систем управления, где для подавления колебаний могут быть использованы фильтры, демпфирующие устройства и т.п., в многоагентных системах нам пока не известны методы решения этой проблемы. Так при групповом движении это может привести к столкновениям между агентами.

## 2.5. Выводы по главе 2

В данной главе с помощью  $W$ -функции Ламберта была исследована зависимость степени сходимости от запаздывания в многоагентной системе первого порядка. Для линейной системы с запаздыванием, в которой лапласовская матрица имеет действительный спектр, получено выражение для запаздывания  $\tau^*$ , обеспечивающего максимальную степень сходимости. Доказано, что значение  $\tau^*$  зависит только от минимального ненулевого и максимального собственных значений лапласовской матрицы с действительным спектром. Благодаря  $W$ -функции Ламберта было получено новое, короткое доказательство для граничного значения запаздывания. Полученные результаты могут быть применены для произвольной системы вида (1.2) с устойчивой симметричной матрицей.

С помощью методов алгебраической теории графов и операционного исчисления получена формула асимптотического поведения характеристик агентов при применении устойчивого базового протокола консенсуса с запаздыванием. Доказано, что при постоянной функции, соответствующей начальным условиям, на предельные характеристики агентов влияет собственный проектор соответствующей лапласовской матрицы и вектор начальных значений, при этом запаздывание не влияет на предельные характеристики агентов. Также установлено, что если лапласовская матрица имеет простое нулевое собственное значение, то агенты достигают консенсуса при любом векторе начальных значений.

Результаты данной главы опубликованы в работах [2, 6, 32].

## Глава 3

# Протоколы консенсуса с частичным запаздыванием

В данной главе будут рассматриваться протоколы консенсуса в многоагентных системах с частичным запаздыванием, система дифференциальных уравнений с запаздыванием в которых имеет вид (1.7). Для таких протоколов рассматриваются следующие задачи:

1. найти условие независимости устойчивости соответствующего протокола от запаздывания;
2. найти граничное значение запаздывания для соответствующего протокола, если его устойчивость зависит от запаздывания;
3. найти формулу асимптотического поведения устойчивого протокола консенсуса для постоянной начальной функции, найти условие достижения консенсуса для любого вектора начальных значений.

### 3.1. Обобщенный протокол консенсуса

В данном разделе будет рассмотрен обобщенный протокол консенсуса первого порядка в многоагентных системах, который имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -aLx(t) - bLx(t - \tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq b$ . В частности, если  $a = 0$ , то протокол (3.1) примет вид (1.2).

### 3.1.1. Устойчивость обобщенного протокола

Характеристическая функция системы (3.1) является трансцендентной функцией и имеет вид

$$F(z) = \det(zI + aL + be^{-\tau z}L). \quad (3.2)$$

Если  $\lambda_j \in \sigma(L)$  – собственное значение матрицы  $L$ , то  $F(z)$  можно представить как

$$F(z) = \prod_{j=1}^n f_{\lambda_j}(z) = \prod_{j=1}^n (z + a\lambda_j + b\lambda_j e^{-\tau z}).$$

Пусть  $f_{\lambda_j}(z)$  – характеристическая функция системы для скалярного случая:

$$f_{\lambda_j} = Q(z) - P(z)e^{-\tau z} = z + a\lambda_j + b\lambda_j e^{-\tau z} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

где  $Q(z) = z + a\lambda_j$ ,  $P(z) = -b\lambda_j$ .

Для исследования устойчивости квазимногочлена воспользуемся методом Цыпкина [35], основанным на критерии Найквиста для случая с запаздыванием. Для этой цели квазимногочлен  $Q(z) - P(z)e^{-\tau z}$  примем за характеристическую функцию системы с отрицательной запаздывающей обратной связью и его устойчивость оценим по амплитудно-фазовой характеристике соответствующей разомкнутой системы с запаздыванием.

Амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы с запаздыванием представим как (более подробно см. [35])

$$W_{\tau}(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} e^{-i\tau\omega} = -\frac{b\lambda_j}{i\omega + a\lambda_j} e^{-i\tau\omega} = -\frac{\beta}{i\omega + \alpha} e^{-i\tau\omega}, \quad (3.4)$$

где  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = a\lambda_j$ ,  $\beta = \beta_1 + i\beta_2 = b\lambda_j$ . Для простоты у  $\alpha$  и  $\beta$  опустим нижний индекс, который указывает на  $j$ -е собственное значение матрицы  $L$ .

Далее аргумент собственного значения  $\lambda_j$  обозначим через  $\varphi_j$ , т.е. положим  $\varphi_j = \arg(\lambda_j)$ . Пусть

$$W(i\omega) = -\frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} = -\frac{\beta_1 + i\beta_2}{\alpha_1 + i(\omega + \alpha_2)} = -\frac{(\beta_1 + i\beta_2)(\alpha_1 - i(\omega + \alpha_2))}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} =$$

$$-\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} - i\frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = u(\omega) + iv(\omega) = W^0(\omega)e^{i\gamma(\omega)}, \quad (3.5)$$

и

$$W_\tau(i\omega) = W(i\omega)e^{-i\tau\omega} = W^0(\omega)e^{i\gamma(\omega)}e^{-i\tau\omega}. \quad (3.6)$$

После некоторых преобразований можно показать, что

$$\left(u(\omega) + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(v(\omega) + \frac{b\text{Im}(\lambda_j)}{2a\text{Re}(\lambda_j)}\right)^2 = R^2, \quad (3.7)$$

где  $R = \frac{b|\lambda_j|}{2a\text{Re}(\lambda_j)}$ , т.е. функция  $W(z)$  мнимую ось конформно отображает в окружность. Отметим, что при  $\omega = 0$ ,  $y = 0$ , и  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} x(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} y(\omega) = 0$ .

Следующее предложение следует из (3.5) и тождества (3.7).

**Предложение 3.1.** *Амплитудно-фазовая характеристика  $W(i\omega)$  является окружностью на комплексной плоскости с центром в точке  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b\text{Im}(\lambda_j)}{2a\text{Re}(\lambda_j)}\right)$  и радиусом  $R = \frac{b|\lambda_j|}{2a\text{Re}(\lambda_j)}$ .*

Заметим, что

$$v = \frac{\beta_1\omega}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2}. \quad (3.8)$$

Согласно [35] выражение (3.5) назовем амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой эквивалентной системы без запаздывания. Устойчивость разомкнутой эквивалентной системы следует из выражения  $Q = s + a\lambda$ , где  $a > 0$ , а действительные части  $\lambda$  положительны. Амплитудно-фазовую характеристику замкнутой системы с запаздыванием представим как

$$\frac{W_\tau(i\omega)}{1 - W_\tau(i\omega)}. \quad (3.9)$$

В силу критерия Найквиста эквивалентная система устойчива, если точка  $(1, i0)$  лежит вне характеристики, и неустойчива, если точка  $(1, i0)$  лежит внутри нее.

В следующем предложении приведено достаточное условие устойчивости системы (3.1).

**Предложение 3.2.** Система (3.1) устойчива при любом значении  $\tau \geq 0$ , если

$$\frac{a}{b} > \max_{\lambda_j \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\cos \varphi_j}. \quad (3.10)$$

**Доказательство предложения 3.2.** Если выполняется условие (3.10), то для любого  $\lambda_j \in \sigma(L) \setminus \{0\}$  справедливо

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{\cos \varphi_j}.$$

Из последнего неравенства следует:

$$\frac{a^2}{b^2} > \frac{\operatorname{Re}^2(\lambda_j) + \operatorname{Im}^2(\lambda_j)}{\operatorname{Re}^2(\lambda_j)} \implies \alpha_1^2 > |\beta|^2.$$

Тогда

$$|W(i\omega)| = \sqrt{\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2}} < \sqrt{\frac{|\beta|^2}{|\beta|^2 + (\omega + \alpha_2)^2}} \leq 1.$$

Таким образом, если  $\frac{a}{b} > \max_{\lambda_j \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\cos \varphi_j}$ , то  $|W_0(i\omega)| < 1$ , и протокол (3.1) устойчив для любого  $\tau$ .  $\square$

**Замечание 3.1.** Доказательство предложения 3.2 также можно получить из знаменитого метода Поляка об устойчивости и робастной устойчивости однотипной системы, состоящей из одинаковых звеньев и усилителей, опубликованного в [24]. Согласно [24], если  $W(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$  собственная (степень  $A(s)$  не больше степени  $B(s)$ ) и не имеет правых полюсов, то для устойчивости  $D(W(s))$  все корни  $D(p)$  должны лежать вне круга радиуса  $\|W(s)\|_\infty$ :

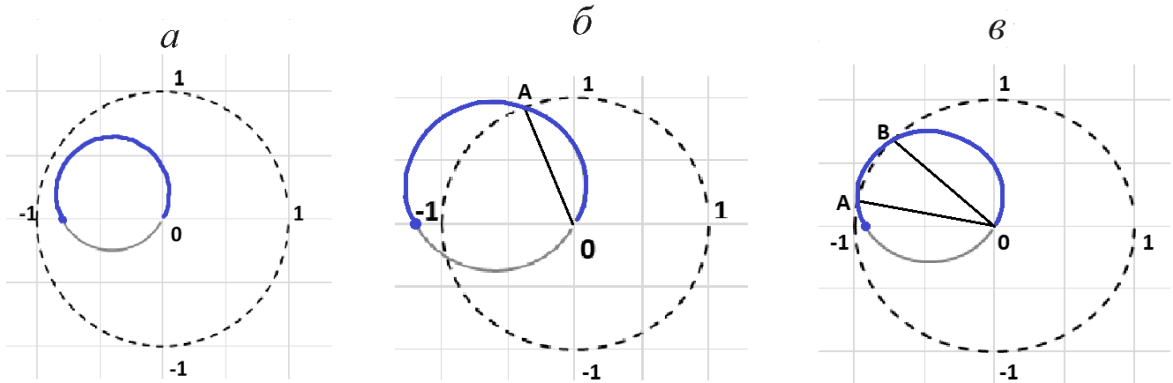
$$\|p_i\| > \|W(s)\|_\infty. \quad (3.11)$$

В рассматриваемом здесь случае  $W(s) = -\frac{P(s)}{Q(s)}$  собственная, не имеет правых полюсов. Исследуется на устойчивость знаменатель дроби (3.9), т.е.  $D(p) = 1 - p$ . Согласно предложению 3.2 для всех  $s$  имеет место  $\|W(s)\| < 1$ , т.е. выполняется условие (3.11).

**Замечание 3.2.** Еще одно доказательство предложения 3.2 можно получить как следствие из теоремы 2.1 в [63] (см. пример 2.6 там же), применив ее для системы (3.1).

В [67] обобщенный частотный метод, похожий на частотный метод анализа однопольных систем [24], применен для анализа многоагентных систем со взаимодействующими агентами. Также в [67] в примере 2 было рассмотрено инерционное звено с запаздыванием. Однако для его устойчивости применен обобщенный частотный метод для дробно-рациональной функции, не являющейся трансцендентной.

Отметим, что при выполнении неравенства (3.10) окружность амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы строго принадлежит единичному кругу с центром в  $(0, 0)$  (рис. 3.1а).



**Рис. 3.1.** Положение годографа  $W_0(i\omega)$  относительно единичной окружности: а)  $W_0$  не пересекает единичную окружность; б)  $W_0$  пересекает единичную окружность в точке  $A$ ; в)  $W_0$  пересекает единичную окружность в точках  $A$  и  $B$ .

**Теорема 3.1.** Пусть множество

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\} \mid a \leq \frac{1}{\cos \varphi_j} b \right\}$$

не пусто. Тогда действительные части корней квазимногочлена (3.3) отрицательны, если

$$\tau < \tau_0^j = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2}\right)}{\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} - \alpha_2}, \quad (3.12)$$

и система (3.1) устойчива при любом  $\tau < \tau_0$ , где  $\tau_0 = \min_{\lambda_j \in \Lambda} \tau_0^j$ .

**Доказательство теоремы 3.1.** Задачу консенсуса системы с протоколом (3.1) будем исследовать с помощью квазимногочлена (3.3) с параметрами  $\lambda_j$  или  $\bar{\lambda}_j$ . Протокол (3.1) устойчив, если для каждого  $\lambda_j \in \Lambda$  соответствующий квазимногочлен (3.3) устойчив.

Итак, для фиксированного  $\lambda_j$  исследуем устойчивость квазимногочлена (3.3).

Увеличение запаздывания  $\tau$  может привести к тому, что точка  $(1, i0)$  будет лежать внутри амплитудно-фазовой характеристики  $W_\tau(i\omega)$ . Значение  $\tau$ , при котором нули функции (3.3) переходят мнимую ось или при котором точка  $(1, i0)$  принадлежит  $W_\tau(i\omega)$ , называют критическим. Такие времена и частоты определяются условием

$$W_\tau(\omega) = 1, \quad (3.13)$$

или же

$$W^0(\omega)e^{i\gamma(\omega)}e^{-i\tau\omega} = 1. \quad (3.14)$$

Для выполнения (3.14) должно быть:

$$1) W^0(\omega) = \frac{|\beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2}} = 1; \quad 2) \gamma(\omega) - \tau\omega = -2\pi n,$$

где  $n$  – целое положительное число.

Условие  $|W^0(\omega)| = 1$  выполняется, когда  $(\omega + \alpha_2)^2 = |\beta|^2 - \alpha_1^2$ , т.е.

$$\omega = \pm\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} - \alpha_2. \quad (3.15)$$

Тогда

$$u = -\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = -\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2}; \quad (3.16)$$

$$v = -\frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1(\omega + \alpha_2)}{\alpha_1^2 + (\omega + \alpha_2)^2} = -\frac{\alpha_1\beta_2 \pm \beta_1\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2}.$$

Из второго условия, т.е.  $\gamma(\omega) - \tau\omega = -2\pi n$ , следует:

$$\cos \gamma(\omega) = \cos(\tau\omega - 2\pi n);$$

$$\cos \gamma(\omega) = \cos \tau\omega. \quad (3.17)$$

Рассмотрим подробнее  $\gamma(\omega)$ . В силу  $u^2 + v^2 = 1$  (поскольку  $(u, v)$  – точка пересечения с единичной окружностью),  $\cos \gamma(\omega) = u$ , и из (3.15), (3.16) и (3.17) получим:

$$\tau_0^j = \frac{\arccos u}{\omega} = \frac{\arccos \left( -\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2} \right)}{\pm\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} - \alpha_2}. \quad (3.18)$$

Если  $\lambda_j$  – комплексное собственное значение лапласовской матрицы  $L$ , то устойчивость (3.3) исследуем для  $\lambda_j$  и  $\bar{\lambda}_j$ . Знаменатель правой части (3.18) достигает максимального значения при отрицательной мнимой части рассматриваемой пары собственных значений и положительном знаке перед корнем, т.е. при  $\omega = \sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} + |\alpha_2|$ . Аналогично, числитель – убывающая неотрицательная функция: чем больше значение  $u = \left( -\frac{\beta_1\alpha_1 \pm \beta_2\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2} \right)$ , тем меньше значение функции  $\arccos(u)$ . Поэтому минимальное значение  $\tau_0^j$  достигается при собственном значении с отрицательной мнимой частью, и граничное значение определяется выражением (3.12). Тогда граничное значение задержки для (3.1) определяется как  $\tau_0 = \min_{\lambda_j \in \Lambda} \tau_0^j$ .  $\square$

Согласно [35], если  $W(j0) < -1$  (рис. 3.1б), то имеется одна критическая частота. В этом случае  $\frac{a}{b} < 1$ , критическое значение запаздывания определяется единственным образом и является граничным: если  $\tau < \tau_0^j$ , то квазимногочлен (3.3) устойчив, а при  $\tau > \tau_0^j$  – неустойчив.

При выполнении условий теоремы 3.1, если  $|W(j0)| < 1$ , то амплитудно-фазовая характеристика два раза пересекает единичную окружность и имеются две критические частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , где  $\omega_1 < \omega_2$ , соответ-

ствующие точкам  $A$  и  $B$  из рис. 3.1в. По этим критическим частотам определяются два критических значения запаздывания  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно. В этом случае при  $\tau < \tau_2$  система устойчива, и  $\tau_2$  является граничным значением устойчивости системы. Если  $\tau_1 > \tau > \tau_2$ , то система неустойчива. Если  $\tau > \tau_2$ , то дальнейшее увеличение  $\tau$  приводит к чередованию неустойчивости и устойчивости системы. Если точки  $A$  и  $B$  достаточно близки, т.е. разница значений  $\tau_1$  и  $\tau_2$  достаточно мала, то возможно сколь угодно число интервалов устойчивости и неустойчивости.

**Следствие 3.1.** *Если  $L$  – симметричная лапласовская матрица,  $b = 1$  и  $a = 0$ , то из (3.12) для каждого собственного значения получим:*

$$\tau_0^j = \frac{\arccos 0}{\lambda_j} = \frac{\pi}{2\lambda_j}.$$

Заметим, что  $\tau_0 = \frac{\pi}{2\lambda_{max}}$ . Этот результат совпадает с результатом, приведенным в [97]. Однако для скалярного случая данная оценка была приведена в [35] в качестве примера и неоднократно была получена в различной литературе.

Пусть в (3.12)  $b = 1$  и  $a = 0$ . Тогда для собственного значения  $\lambda_j$  в силу отрицательности  $\beta_2 = b\text{Im}(\lambda_j) = \text{Im}(\lambda_j)$  выполняется

$$\tau_0^j = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta_2}{|\beta|}\right)}{|\lambda_j|} = \frac{\arccos(\sin|\varphi_j|)}{|\lambda_j|} = \frac{\pi/2 - |\varphi_j|}{|\lambda_j|}.$$

**Следствие 3.2.** *Если  $L$  – произвольная лапласовская матрица,  $b = 1$  и  $a = 0$ , то*

$$\tau_0 = \min_{\lambda_j \neq 0} \frac{1}{|\lambda_j|} \left( \frac{\pi}{2} - |\varphi_j| \right).$$

Это выражение совпадает с результатом об устойчивости произвольной матрицы, полученным в [68].

**Следствие 3.3.** *Если  $L = 1$ , т.е. рассматривается скалярный случай уравнения (3.1), то из (3.12) получим:*

$$\tau_0 = \frac{\arccos\left(-\frac{ab}{b^2}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Полученное выражение совпадает с граничным значением  $\tau$  для скалярного уравнения (2.22) из [38] (см. пример 2.4 из [38]).

**Следствие 3.4.** *Если матрица  $L$  имеет действительный спектр, то граничное значение  $\tau_0$  при условии  $b > a$  можно вычислить, подставив в формулу (3.18)  $\alpha_2 = 0$  и  $\beta_2 = 0$ :*

$$\tau_0 = \min_{\lambda \neq 0} \frac{\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)}{\lambda \sqrt{b^2 - a^2}}. \quad (3.19)$$

В работе [119] рассматривался протокол (1.15), характеристическая функцией которого является

$$F(z) = \prod_{j=1}^n (z + a + b\lambda_j e^{-\tau z}).$$

Тогда подставив вместо  $a$  значение  $\frac{a}{\lambda_j}$  и вместо  $b$  значение  $b f$  в формулу 3.19, получим формулу (1.16), которая была получена авторами в [119]. Стоит отметить, что для протокола (1.15) с фиксированным  $f$  и для протокола (3.12) с матрицей  $L$  с действительным спектром граничное значение запаздывания будет зависеть от максимального собственного значения.

### 3.1.2. Асимптотическое поведение устойчивого обобщенного протокола

**Теорема 3.2.** *Пусть система (3.1) устойчива и  $\phi(\theta) = x_0$ . Тогда если  $x(t)$  – решение системы (3.1), то*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^+ x_0,$$

*т.е. вектор, к которому сходится протокол (3.1), не зависит от коэффициентов  $a$  и  $b$ , а также от  $\tau$ .*

**Доказательство теоремы 3.2.** Рассмотрим преобразование Лапласа функции  $x(t - \tau)$  при  $\phi(\theta) = x_0$ :

$$\mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = \int_0^{\infty} e^{-ts} x(t - \tau) dt.$$

Пусть  $u = t - \tau$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ts} x(t - \tau) dt &= \int_{-\tau}^{\infty} e^{-(u+\tau)s} x(u) du = \\ &= \int_{-\tau}^0 e^{-(u+\tau)s} x(u) du + \int_0^{\infty} e^{-(u+\tau)s} x(u) du. \end{aligned}$$

В силу того, что  $\phi(\theta) = x_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t - \tau)\} &= \int_{-\tau}^0 e^{-(u+\tau)s} x_0 du + e^{-\tau s} \int_0^{\infty} e^{-us} x(u) du = \\ &= \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) x_0 + e^{-\tau s} X(s). \end{aligned}$$

Тогда в силу того, что  $x(0) = x_0$ , преобразованием Лапласа системы будет

$$sX(s) - x_0 = -aLX(s) - e^{-\tau s} bLX(s) - b \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx_0;$$

$$X(s) = (sI + aL + be^{-\tau s} L)^{-1} \left( I - b \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0.$$

Так как система (3.1) устойчива, то согласно теореме о конечном значении:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI + aL + be^{-\tau s} L)^{-1} \left( I - b \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0 = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{a + be^{-\tau s}}{s} L \right)^{-1} \left( I - b \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{a + be^{-\tau s}}{s} \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow 0$ , то в силу предложения 2.2

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{a + be^{-\tau s}}{s} L \right)^{-1} = L^{\dagger}.$$

Стоит отметить, что  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} = \tau$ . Тогда в силу теоремы 1.2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L^{\dagger} (I - b\tau L) x_0 = L^{\dagger} x_0.$$

□

**Следствие 3.5.** *Если условие теоремы 3.2 выполнено и 0 – простое собственное значение матрицы  $L$ , то протокол (3.1) сходится к консенсусу, значение которого равно значению консенсуса базового протокола (1.28).*

## 3.2. Дополненный протокол консенсуса

В данном разделе будет рассмотрен дополненный протокол консенсуса первого порядка в многоагентной системе, который имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -L_1 x(t) - \gamma L_2 x(t - \tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.20)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $L_1$  и  $L_2$  – нормированные лапласовские матрицы, т.е.  $0 \leq |l_{ij}| \leq \frac{1}{n}$ ,  $i \neq j$ , а матрица  $K = L_1 + L_2$  – лапласовская матрица полного графа с весами всех дуг  $\frac{1}{n}$ ,  $\gamma \in (0, 1]$ .

В данном разделе спектр матрицы  $\sigma(L_1)$  будет рассматриваться с учетом кратности, т.е.  $\sigma(L_1)$  может содержать одинаковые элементы. Обозначим  $\sigma'(L_1)$  – спектр матрицы без одного нулевого собственного значения.

### 3.2.1. Устойчивость дополненного протокола

Характеристической функцией системы (3.20) будет

$$F(z) = \det(zI + L_1 + \gamma L_2 e^{-\tau z}).$$

### Предложение 3.3.

$$F(z) = z \prod_{\lambda \in \sigma'(L_1)} (z + \lambda + \gamma e^{-\tau z} (1 - \lambda)). \quad (3.21)$$

**Доказательство предложения 3.3.** Матрицу  $K$  можно представить в виде  $K = I - \frac{1}{n}E$ , где  $E$  – матрица из единиц. Пусть жорданова форма  $\Lambda_K$  имеет вид  $\Lambda_K = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$ , и  $S$  – матрица, преобразующая  $K$  в  $\Lambda_K$ :

$$S^{-1}KS = \Lambda_K.$$

В силу того, что  $\mathbf{1}$  – правый собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, то  $\mathbf{1}$  является первым столбцом матрицы  $S$ . Из этого следует, что

$$S^{-1}L_1S = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & L_1^S \end{pmatrix},$$

где  $L_1^S$  – некоторая матрица,  $\sigma(L_1^S) = \sigma'(L_1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(z) &= \det(zI + L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2) = \det(S^{-1}(zI + L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2)S) = \\ &= \det(zI + S^{-1}L_1S + \gamma e^{-\tau z} S^{-1}(K - L_1)S) = \\ &= \det(zI + \gamma e^{-\tau z} \Lambda_K + (1 - \gamma e^{-\tau z}) S^{-1}L_1S) = \\ &= \det\left(zI + \gamma e^{-\tau z} \Lambda_K + (1 - \gamma e^{-\tau z}) \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & L_1^S \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} z & & & \\ & z + \gamma e^{-\tau z} & & \\ & & \ddots & \\ & & & z + \gamma e^{-\tau z} \end{pmatrix} + (1 - \gamma e^{-\tau z}) \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & L_1^S \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Обозначим через  $I_{n-1}$  единичную матрицу размерности  $(n-1) \times (n-1)$ . Тогда

$$F(z) = z \det((z + \gamma e^{-\tau z})I_{n-1} + (1 - \gamma e^{-\tau z})L_1^S) =$$

$$\begin{aligned}
&= z \prod_{\lambda \in \sigma'(L_1)} (z + \gamma e^{-\tau z} + (1 - \gamma e^{-\tau z})\lambda) = \\
&= z \prod_{\lambda \in \sigma'(L_1)} (z + \lambda + \gamma e^{-\tau z}(1 - \lambda)).
\end{aligned}$$

□

**Замечание 3.3.** Если  $\gamma = 1$ , то формула (3.21) будет иметь вид  $\det(zI + L_1 + e^{-\tau z}L_2) = z \prod_{\lambda \in \sigma'(L_1)} (z + \lambda + e^{-\tau z}(1 - \lambda))$ . Это можно “интерпретировать” следующим образом: если  $\lambda \in \sigma'(L_1)$ , то  $(1 - \lambda) \in \sigma'(L_2)$ , что дополняет результат, полученный в [9].

Отметим, что первое нулевое собственное значение матрицы  $L_1$  не влияет на устойчивость протокола (3.20), при этом характеристическая функция протокола (3.20) состоит из произведения характеристических функций скалярных уравнений:

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t) - \gamma(1 - \lambda)y(t - \tau). \quad (3.22)$$

Если решение уравнения (3.22) устойчиво для всех  $\lambda \in \sigma'(L_1)$ , то протокол (3.20) также устойчив.

Если  $\lambda = 0$ , то уравнение (3.22) станет скалярным уравнением с запаздыванием вида

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t - \tau). \quad (3.23)$$

Граничное значение запаздывания для уравнения (3.23) можно получить, например, как следствие из результата, полученного в [68].

**Предложение 3.4.** *Решение уравнения (3.23) устойчиво, если  $\tau < \frac{\pi}{2\gamma}$ .*

Для остальных случаев характеристическую функцию уравнения (3.22) представим в виде

$$f(z) = z + \lambda + \gamma(1 - \lambda)e^{-\tau z} = Q(z) - P(z)e^{-\tau z}. \quad (3.24)$$

Для исследования устойчивости квазиполинома (3.24) воспользуемся методом Цыпкина, который основан на критерии Найквиста. Примем квазиполином  $Q(z) - P(z)e^{-\tau z}$  за характеристическую функцию эквивалентной системы с отрицательной запаздывающей обратной связью. Устойчивость оценим с помощью амплитудно-фазовой характеристики соответствующей разомкнутой системы, которая будет иметь вид:

$$W_\tau(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}e^{-i\tau\omega} = -\frac{\gamma(1 - \lambda)}{i\omega + \lambda}e^{-i\tau\omega}.$$

Характеристической функцией разомкнутой системы будет функция  $Q(z) = z + \lambda$ . В силу того, что  $\lambda$  имеет положительную действительную часть, разомкнутая система будет устойчивой. Амплитудно-фазовая характеристика системы с запаздывающей обратной связью будет иметь вид  $\frac{W_\tau}{1 - W_\tau}$ . Тогда, согласно критерию Найквиста, если точка  $(1, i0)$  лежит вне годографа  $W_\tau(i\omega)$ , то решение уравнения (3.22) будет устойчивым.

Пусть  $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda)$ ,  $\beta = \operatorname{Im}(\lambda)$  и

$$W_\tau(i\omega) = W_0(i\omega)e^{-i\tau\omega}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_0(i\omega) &= -\frac{\gamma(1 - \alpha) - i\gamma\beta}{i\omega + \alpha + i\beta} = -\frac{(\gamma(1 - \alpha) - i\gamma\beta)(\alpha - i(\omega + \beta))}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} = \\ &= -\frac{\gamma(1 - \alpha)\alpha - \gamma\beta(\omega + \beta) + i(-\gamma\alpha\beta - \gamma(1 - \alpha)(\omega + \beta))}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} = \\ &= -\gamma\frac{(1 - \alpha)\alpha - \beta(\omega + \beta)}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} - i\gamma\frac{-\alpha\beta - (1 - \alpha)(\omega + \beta)}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} = u + iv. \end{aligned} \quad (3.25)$$

**Предложение 3.5.** Пусть  $\gamma = 1$ . Тогда преобразование  $W_0(z)$  отображает мнимую ось в окружность:

$$\left(u - \frac{\alpha - 1}{2\alpha}\right)^2 + \left(v - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = R^2,$$

$$\text{где } R = \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2 + \beta^2}}{2\alpha}.$$

**Доказательство предложения 3.5.** Обозначим  $z = x + iy$ ,  $w = W_0(z) = u + iv$ . Очевидно, что

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},$$

где  $\bar{z}$  – комплексно-сопряженное к  $z$ . В силу того, что  $w = -\frac{1-\lambda}{z+\lambda}$ , можно выразить  $z$  как

$$z = \frac{\lambda - 1}{w} - \lambda = \frac{(\lambda - 1)\bar{w}}{|w|^2} - \lambda.$$

Тогда

$$\bar{z} = \frac{\overline{(\lambda - 1)\bar{w}}}{|w|^2} - \bar{\lambda}.$$

Так как  $z = iy$ , то  $x = \frac{z + \bar{z}}{2} = 0$ , что можно записать в виде:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \left( \frac{(\lambda - 1)\bar{w}}{|w|^2} - \lambda + \frac{\overline{(\lambda - 1)\bar{w}}}{|w|^2} - \bar{\lambda} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{(\alpha - 1 + i\beta)(u - iv)}{u^2 + v^2} - \alpha - i\beta + \frac{(\alpha - 1 - i\beta)(u + iv)}{u^2 + v^2} - \alpha + i\beta \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( -2\alpha + \frac{2(\alpha - 1)u + 2\beta v}{u^2 + v^2} \right) = -\alpha + \frac{(\alpha - 1)u + \beta v}{u^2 + v^2} \Rightarrow \frac{(\alpha - 1)u + \beta v}{u^2 + v^2} = \alpha. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \frac{\alpha - 1}{\alpha}u + \frac{\beta}{\alpha}v; \\ u^2 - \frac{\alpha - 1}{\alpha}u + \frac{(\alpha - 1)^2}{4\alpha^2} + v^2 - \frac{\beta}{\alpha}v + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} &= \frac{(\alpha - 1)^2}{4\alpha^2} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}; \end{aligned}$$

$$\left(u - \frac{\alpha - 1}{2\alpha}\right)^2 + \left(v - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{(\alpha - 1)^2 + \beta^2}{4\alpha^2}.$$

□

Далее понадобится следующее очевидное выражение

$$|W_\tau(i\omega)| = |W_0(i\omega)| = \sqrt{\frac{\gamma^2((1 - \alpha)^2 + \beta^2)}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2}}.$$

**Предложение 3.6.** 1) Если  $\gamma^2(1 - \alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 < \alpha^2$  для всех  $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma'(L_1)$ , то устойчивость протокола (3.20) не зависит от запаздывания.

2) Пусть матрице  $L_1 = (l_{ij}^1)$  соответствует неориентированный граф  $G_1$ , а матрице  $L_2 = (l_{ij}^2)$  — неориентированный граф  $G_2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\min_i l_{ii}^1 > \frac{3n-4}{4n}$ . Тогда устойчивость протокола (3.20) не будет зависеть от запаздывания.

**Доказательство предложения 3.6.** 1) Доказательство этого пункта непосредственно следует из вышеприведенного выражения для  $|W_0(i\omega)|$ .

2) В силу того, что  $G_1$  и  $G_2$  неориентированные графы, то матрицы  $L_1$  и  $L_2$  имеют действительные спектры. Тогда согласно теореме Гершгорина

$$\max_{\lambda \in \sigma(L_2)} \lambda \leq 2 \max_i l_{ii}^2.$$

В силу того, что  $L_1 + L_2 = K$ , то максимальный элемент матрицы  $L_2$  можно выразить с помощью минимального элемента  $L_1$  как

$$\max_i l_{ii}^2 = \frac{n-1}{n} - \min_i l_{ii}^1 = 1 - \min_i l_{ii}^1 - \frac{1}{n}.$$

Тогда второе минимальное собственное значение графа  $G_1$ , т.е. минимальное значение из  $\sigma'(L_1)$ , можно оценить как

$$\min_{\lambda \in \sigma'(L_1)} \lambda = 1 - \max_{\lambda \in \sigma(L_2)} \lambda \geq 1 - 2 \max_i l_{ii}^2 = 1 - 2 \left(1 - \min_i l_{ii}^1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2 \min_i l_{ii}^1 - 1 + \frac{2}{n}.$$

Таким образом имеем

$$\min_{\lambda \in \sigma'(L_1)} \lambda \geq 2 \min_i l_{ii}^1 - 1 + \frac{2}{n}.$$

Согласно условию теоремы  $\min_i l_{ii}^1 > \frac{3n-4}{4n}$ , поэтому

$$\min_{\lambda \in \sigma'(L_1)} \lambda \geq 2 \min_i l_{ii}^1 - 1 + \frac{2}{n} > 2 \frac{3n-4}{4n} - 1 + \frac{2}{n} = \frac{6n-8-4n+8}{4n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, если  $\min_i l_{ii}^1 > \frac{3n-4}{4n}$ , то  $\lambda > \frac{1}{2}$ ,  $\lambda \in \sigma'(L_1)$ , и, согласно пункту 1), устойчивость протокола (3.20) не будет зависеть от запаздывания.

□

**Теорема 3.3.** Пусть множество

$$\Lambda = \{ \lambda \in \sigma'(L_1) \mid \gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 \geq \alpha^2 \}.$$

не пусто. Для всех действительных  $\lambda \in \Lambda$  вычислим значения

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\lambda}{\gamma(1-\lambda)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 - \lambda^2}},$$

а для пар комплексно-сопряженных  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  значения

$$\tau_\lambda^{1,2} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\alpha)\alpha \mp \beta \sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2 + \beta^2)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2 \mp \beta}};$$

$$\tau_\lambda = \min\{|\tau_\lambda^1|, \tau_\lambda^2\}.$$

Тогда протокол (3.20) устойчив при любом  $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ .

**Доказательство теоремы 3.3.** Найдем критические частоты для скалярного уравнения (3.22) при фиксированном  $\lambda$  из выражения

$$|W_\tau(i\omega)| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2}} = 1.$$

Тогда

$$\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 = \alpha^2 + (\omega + \beta)^2;$$

$$(\omega + \beta)^2 = \gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2;$$

$$\omega + \beta = \pm\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}.$$

Тогда точка  $(1, i0)$  лежит на годографе  $W_\tau(i\omega)$ , если

$$\arg(W_0(i\omega)) - \tau\omega = 2\pi n;$$

$$\cos(\arg(W_0(i\omega))) = \cos(\tau\omega).$$

Стоит отметить, что  $\cos(\arg(W_0(i\omega))) = u$ . Тогда

$$\tau = \frac{\arccos(u)}{\omega}.$$

Подставим критическое значение  $\omega$  в (3.25) и получим:

$$u = -\frac{\gamma(1-\alpha)\alpha - \gamma\beta(\omega + \beta)}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} = -\frac{(1-\alpha)\alpha \mp \beta\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2 + \beta^2)}.$$

Так как функция  $\arccos(u)$  – положительная, то для нахождения граничного значения запаздывания нужны только положительные критические частоты  $\omega$ .

Заметим, что если  $\lambda \in \mathbb{R}$ , т.е.  $\alpha = \lambda$ ,  $\beta = 0$ , то критическими частотами будут  $\omega = \pm\sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 - \lambda^2}$ . Тогда для положительной критической частоты граничным значением запаздывания будет

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\lambda)\lambda}{\gamma(1-\lambda)^2}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 - \lambda^2}} = \frac{\arccos\left(-\frac{\lambda}{\gamma(1-\lambda)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 - \lambda^2}}. \quad (3.26)$$

Если в формулу (3.26) подставить  $\lambda = 0$ , то получится граничное значение запаздывания из предложения 3.4. Таким образом формула (3.26) обобщает результат из предложения 3.4.

Если  $\lambda \in \mathbb{C}$  и  $\beta > 0$ , то при  $|\lambda|^2 > |\gamma(1-\lambda)|^2$  обе критические частоты будут отрицательными, что означает, что устойчивость решения уравнения (3.22) не будет зависеть от запаздывания. В связи с этим для удобства представления результата возьмем пару комплексно-сопряженных  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ . Тогда двум критическим частотам соответствуют следующие значения запаздывания:

$$\tau_\lambda^{1,2} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\alpha)\alpha \mp \beta\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2 + \beta^2)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2} \mp \beta};$$

$$\tau_\lambda^{3,4} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\alpha)\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2 + \beta^2)}\right)}{-\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 - \alpha^2} \mp \beta}.$$

Стоит отметить, что  $\tau_\lambda^3 < 0$ , и  $\tau_\lambda^1 = -\tau_\lambda^4$ . Тогда для пары комплексно-сопряженных  $\lambda$  граничным значением запаздывания будет  $\tau_\lambda = \min\{|\tau_\lambda^1|, \tau_\lambda^2\}$ .

Тогда решения всех рассматриваемых скалярных уравнений (3.22) будут устойчивы для любых  $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ , а значит протокол (3.20) будет устойчивым.  $\square$

### 3.2.2. Альтернативный метод исследования устойчивости дополненного протокола

Рассмотрим устойчивость системы (3.20) с помощью теорем 1.5 и 1.6. Для этого рассмотрим обобщенные собственные значения  $\lambda$  матриц  $(i\omega I - L_1)$  и  $\gamma L_2$ , которые определяются уравнением:

$$\det(i\omega I - L_1 - \lambda\gamma L_2) = 0.$$

Пусть  $\Lambda_K = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$  – жорданова форма  $K$ , матрица  $S$  преобразует  $K$  в  $\Lambda_K$ , т.е.  $S^{-1}KS = \Lambda_K$ . Как было отмечено выше,  $\mathbf{1}$  – правый собственный вектор матрицы  $K$ , соответствующий нулевому собственному значению, то  $\mathbf{1}$  является первым столбцом матрицы  $S$ . Из этого следует, что

$$S^{-1}L_1S = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0} & L_1^S \end{pmatrix},$$

где  $\sigma(L_1^S) = \sigma'(L_1)$ . Аналогично предложению 3.3 рассмотрим определитель полученной для обобщенных собственных значений матрицы отдельно:

$$\begin{aligned} \det(i\omega I - L_1 - \lambda\gamma L_2) &= \det(i\omega I - L_1 - \lambda\gamma(K - L_1)) = \\ &= \det(i\omega I - \lambda\gamma K - (1 - \lambda\gamma)L_1) = \det(S^{-1}(i\omega I - \lambda\gamma K - (1 - \lambda\gamma)L_1)S) = \\ &= \det(i\omega I - \lambda\gamma S^{-1}KS - (1 - \lambda\gamma)S^{-1}L_1S) = \\ &= \det\left(i\omega I - \lambda\gamma\Lambda_K - (1 - \lambda\gamma)\begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0} & L_1^S \end{pmatrix}\right) = \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} i\omega & & & \\ & i\omega - \lambda\gamma & & \\ & & i\omega - \lambda\gamma & \\ & & & i\omega - \lambda\gamma \end{pmatrix} - (1 - \lambda\gamma)\begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0} & L_1^S \end{pmatrix}\right) = \\ &= i\omega \det((i\omega - \lambda\gamma)I - (1 - \lambda\gamma)L_1^S) = i\omega \prod_{\mu \in \sigma'(L_1)} (i\omega - \lambda\gamma - (1 - \lambda\gamma)\mu). \end{aligned}$$

Таким образом можно выразить обобщенное собственное значение через собственное значение матрицы  $L_1$ :

$$i\omega - \lambda\gamma - (1 - \lambda\gamma)\mu = 0;$$

$$\lambda = \frac{i\omega - \mu}{\gamma(1 - \mu)}.$$

Рассмотрим  $j$ -е обобщенное собственное значение матриц  $(i\omega I - L_1)$  и  $\gamma L_2$ . Тогда для вычисления  $\bar{\tau}_j$  необходимо найти такие  $\omega_k^j, \theta_k^j$ , чтобы

$$\frac{i\omega_k^j - \mu_j}{\gamma(1 - \mu_j)} = e^{-i\theta_k^j}.$$

Пусть  $\alpha_j = \operatorname{Re}(\mu_j)$ ,  $\beta_j = \operatorname{Im}(\mu_j)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{i\omega_k^j - \mu_j}{\gamma(1 - \mu_j)} = \frac{i\omega_k^j - \alpha_j - i\beta_j}{\gamma(1 - \alpha_j - i\beta_j)} = \frac{-\alpha_j + i(\omega_k^j - \beta_j)}{\gamma((1 - \alpha_j) - i\beta_j)} = \\ &= \frac{((1 - \alpha_j) + i\beta_j)(-\alpha_j + i(\omega_k^j - \beta_j))}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)} = \\ &= \frac{-\alpha_j(1 - \alpha_j) - \beta_j(\omega_k^j - \beta_j) + i(-\alpha_j\beta_j + (1 - \alpha_j)(\omega_k^j - \beta_j))}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)} = \\ &= -\frac{\alpha_j(1 - \alpha_j) + \beta_j(\omega_k^j - \beta_j)}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)} + i\frac{-\alpha_j\beta_j + (1 - \alpha_j)(\omega_k^j - \beta_j)}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)} = u + iv. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Далее понадобится следующее выражение:

$$|\lambda_j| = \sqrt{\frac{\alpha_j^2 + (\omega_k^j - \beta_j)^2}{\gamma^2((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}}.$$

**Предложение 3.7.** Если для всех  $\mu_j \in \sigma'(L_1)$  выполняется неравенство  $\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 < \alpha_j^2$ , то протокол (3.20) устойчив при любом значении запаздывания.

**Доказательство предложения 3.7.** Рассмотрим  $\underline{\rho}(i\omega I - L_1, \gamma L_2)$ :

$$\underline{\rho}(i\omega I - L_1, \gamma L_2) = \min\{|\lambda| : \det(i\omega I - L_1 - \lambda\gamma L_2) = 0\} =$$

$$= \min_{\mu_j \in \sigma'(L_1)} \sqrt{\frac{\alpha_j^2 + (\omega_k^j - \beta_j)^2}{\gamma^2((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}}.$$

В силу того, что  $\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 < \alpha_j^2$  для всех  $\mu_j \in \sigma'(L_1)$ ,  $\underline{\rho}(i\omega I - L_1, \gamma L_2)$  можно оценить снизу

$$\underline{\rho}(i\omega I - L_1, \gamma L_2) \geq \min_{\mu_j \in \sigma'(L_1)} \sqrt{\frac{\alpha_j^2}{\gamma^2((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}} > 1.$$

Тогда в силу Теоремы 1.5,  $\bar{\tau} = \infty$ , что означает независимость устойчивости протокола от запаздывания.  $\square$

**Теорема 3.4.** Пусть множество

$$\Lambda = \{\mu_j \in \sigma'(L_1) : \gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 \geq \alpha_j^2\}$$

не пусто. Для каждого действительного  $\mu_j \in \Lambda$  вычислим значение

$$\bar{\tau}_j = \frac{\arccos\left(-\frac{\mu_j}{\gamma(1 - \mu_j)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1 - \mu_j)^2 - \mu_j^2}},$$

а для пары комплексно-сопряженных  $\mu_j = \alpha_j \pm i\beta_j \in \Lambda$  – значения

$$\tau_j^{1,2} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1 - \alpha_j)\alpha_j \mp \beta_j \sqrt{\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2}}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2} \mp \beta_j};$$

$$\bar{\tau}_j = \min\{|\tau_j^1|, \tau_j^2\}.$$

Тогда протокол (3.20) будет устойчив при любом  $\tau < \bar{\tau} = \min \bar{\tau}_j$ .

**Доказательство теоремы 3.7.**

Если  $\mu_j \in \sigma'(L_1)$  и  $\mu_j \notin \Lambda$ , то для обобщенного собственного значения  $\lambda_j$ , соответствующего  $\mu_j$ , справедливо, что  $|\lambda_j| > 1$ , а значит по Теореме 1.6 соответствующее значение  $\tau_j = \infty$ .

В силу того, что множество  $\Lambda$  не пусто, для  $\lambda_j$ , соответствующего  $\mu_j \in \Lambda$ , найдутся такие  $\omega_k^j, \theta_k^j$ , что  $\lambda_j = e^{-i\theta_k^j}$ . Для таких  $\omega_k^j, \theta_k^j$  справедливо, что  $|\lambda_j| = 1$ , что можно представить как

$$|\lambda_j| = \sqrt{\frac{\alpha_j^2 + (\omega_k^j - \beta_j)^2}{\gamma^2((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}} = 1;$$

$$\alpha_j^2 + (\omega_k^j - \beta_j)^2 = \gamma^2((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2);$$

$$\omega_{1,2}^j = \pm \sqrt{\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2} + \beta_j.$$

Подставим получившиеся значения в действительную часть  $\lambda_j$  (3.27):

$$u = -\frac{\alpha_j(1 - \alpha_j) + \beta_j(\omega_k^j - \beta_j)}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)} = -\frac{(1 - \alpha_j)\alpha_j \pm \beta_j\sqrt{\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2}}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}.$$

С другой стороны, так как  $\lambda_j = e^{-i\theta_k^j}$ , действительную часть  $\lambda_j$  можно представить как

$$u = \cos(-\theta_k^j).$$

Тогда

$$\theta_{1,2}^j = -\arccos\left(-\frac{(1 - \alpha_j)\alpha_j \pm \beta_j\sqrt{\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2}}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}\right).$$

Отметим, что необходимо рассматривать лишь положительные значения  $\tau$ . Рассмотрим действительные  $\mu_j \in \Lambda$ . Тогда  $\frac{\theta_1^j}{\omega_1^j} < 0$ , поэтому

$$\bar{\tau}_j = \frac{\theta_2^j}{\omega_2^j} = \frac{\arccos\left(-\frac{\mu_j}{\gamma(1 - \mu_j)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1 - \mu_j)^2 - \mu_j^2}}.$$

Рассмотрим пару комплексно-сопряженных собственных значений  $\mu_j = \alpha_j \pm \beta_j$ . Тогда для вычисления  $\bar{\tau}_j$  необходимо найти минимальное положительное значение из

$$\tau_j^{1,2} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1 - \alpha_j)\alpha_j \mp \beta_j\sqrt{\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2}}{\gamma((1 - \alpha_j)^2 + \beta_j^2)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1 - \alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2} \mp \beta_j};$$

$$\tau_j^{3,4} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\alpha_j)\alpha_j \pm \beta_j \sqrt{\gamma^2(1-\alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2}}{\gamma((1-\alpha_j)^2 + \beta_j^2)}\right)}{-\sqrt{\gamma^2(1-\alpha_j)^2 + \gamma^2\beta_j^2 - \alpha_j^2} \mp \beta_j}.$$

Отметим, что  $\tau_j^3 < 0$  и  $\tau_j^1 = -\tau_j^4$ . Тогда для пары комплексно-сопряженных собственных значений  $\tau_j = \min\{|\tau_j^1|, \tau_j^2\}$ , и в силу теоремы 1.6 протокол (3.20) устойчив для всех  $\tau < \bar{\tau} = \min \bar{\tau}_j$ .  $\square$

### 3.2.3. Асимптотическое поведение дополненного протокола

Для исследования асимптотического поведения протокола (3.20) необходимы следующие вспомогательные леммы.

**Лемма 3.1.** *Для фиксированных  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  и нормированных лапласовских матриц  $L_1$  и  $L_2$ , суммой которых является нормированная лапласовская матрица полного графа  $K$ , справедливо, что*

$$\text{rank}(L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2) = \text{rank}(L_1 + \gamma L_2) = n - 1,$$

где  $z \in \mathbb{C}$  и  $z$  находится в достаточно малой окрестности нуля.

**Доказательство леммы 3.1.** Если  $z = 0$  или  $\tau = 0$ , то равенство очевидно, поэтому далее считаем, что  $z \neq 0$  и  $\tau \neq 0$ . Представим матрицу  $L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2$  следующим образом:

$$L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2 = L_1 + L_2 + (\gamma e^{-\tau z} - 1)L_2 = K + (\gamma e^{-\tau z} - 1)L_2.$$

Тогда по аналогии с доказательством предложения 3.3, если  $S$  – матрица, преобразующая  $K$  в ее жорданову форму  $\Lambda_K = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$ , то

$$S^{-1} L_2 S = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & L_2^S \end{pmatrix},$$

где  $L_2^S$  – некоторая матрица,  $\sigma(L_2^S) = \sigma'(L_2)$ . Тогда

$$S^{-1} (K + (\gamma e^{-\tau z} - 1)L_2) S = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{n-1,1} & I_{n-1} + (\gamma e^{-\tau z} - 1)L_2^S \end{pmatrix},$$

где  $I_{n-1}$  – единичная матрица размерности  $(n-1) \times (n-1)$ . Тогда собственными значениями матрицы  $I_{n-1} + (\gamma e^{-\tau z} - 1)L_2^S$  будут  $\mu = 1 + (\gamma e^{-\tau z} - 1)\lambda$ , где  $\lambda \in \sigma(L_2^S)$ . Отметим, что если  $\lambda = 0$ , то соответствующее  $\mu = 1$ , и если  $\lambda = 1$ , то  $\mu = \gamma e^{-\tau z}$ , и  $\gamma e^{-\tau z} \neq 0$  при любом  $z$ . Поэтому далее предполагаем, что  $\lambda \neq 0$  и  $\lambda \neq 1$ .

Рассмотрим случаи, когда  $\mu = 0$ . При фиксированном  $\lambda$  выражение  $\mu = 0$  имеет вид

$$1 + (\gamma e^{-\tau z} - 1)\lambda = 0 \Rightarrow e^{-\tau z} = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Данное равенство выполняется при  $z = z_k$ , где

$$z_k = -\frac{1}{\tau} \left( \ln \left| \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \right| + i \left( \arg \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + 2\pi k \right) \right).$$

С увеличением модуля  $k$  соответствующие точки  $z_k$  будут отдаляться от точки  $z = 0$ . Тогда для фиксированного  $\lambda$  найдется такой  $k_0$ , что  $\min_k |z_k| = |z_{k_0}|$ . Следовательно, для всех рассматриваемых  $\lambda$  среди всех точек  $z_k$  найдется точка  $\tilde{z}$  с наименьшим модулем. Тогда найдется такая окрестность  $U(0)$  точки  $z = 0$ , что если  $z \in U(0)$ , то  $|z| < |\tilde{z}|$ , т.е. окрестность  $U(0)$  не будет содержать ни одной точки  $z_k$ . Тогда в окрестности  $U(0)$  матрица  $I_{n-1} + (\gamma e^{-\tau z} - 1)L_2^S$  будет невырожденной, а значит  $\text{rank}(L_1 + \gamma e^{-\tau z}L_2) = n - 1$ .  $\square$

**Лемма 3.2.** Для фиксированных  $\gamma \in (0, 1]$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , нормированных лапласовских матриц  $L_1$  и  $L_2$ , суммой которых является нормированная лапласовская матрица полного графа  $K$ , и  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  справедливо

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{z} (L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2) \right)^{-1} = (L_1 + \gamma L_2)^\dagger.$$

**Доказательство леммы 3.2.** Рассмотрим метод Фаддеева для вычисления скалярных и матричных коэффициентов характеристического многочлена матрицы  $L_1 + \gamma L_2$  и присоединенной матрицы к  $L_1 + \gamma L_2$ . Отметим, что 0 является простым собственным значением данной матрицы. Тогда  $Q_{k+1} + (L_1 + \gamma L_2)Q_k = \sigma_{k+1}I$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , где  $\sigma_{k+1} = \frac{\text{Tr}((L_1 + \gamma L_2)Q_k)}{k+1} = \frac{\text{Tr}(L_1 Q_k) + \text{Tr}(\gamma L_2 Q_k)}{k+1}$ ,  $\text{Tr}(X)$  – след матрицы  $X$ , т.е. сумма элементов на главной диагонали,  $Q_0 = I$ ,  $\sigma_0 = 1$ ,  $Q_n = \mathbf{0}_{n \times n}$  – матрица, состоящая из нулей,  $\sigma_n = 0$ . Отметим, что в силу теоремы 1.2,  $\frac{Q_{n-1}}{\sigma_{n-1}} = (L_1 + \gamma L_2)^\dagger$ .

Далее рассмотрим метод Фаддеева для матрицы  $L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2$ , в которой  $z \in U(0)$ , где  $U(0)$  – окрестность из леммы 3.1. Тогда 0 также будет простым нулевым собственным значением данной матрицы,  $Q'_{k+1} + (L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2)Q'_k = \sigma'_{k+1}I$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $\sigma'_{k+1} = \frac{\text{Tr}((L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2)Q'_k)}{k+1} = \frac{\text{Tr}(L_1 Q'_k) + e^{-\tau z} \text{Tr}(\gamma L_2 Q'_k)}{k+1}$ ,  $Q'_0 = Q_0 = I$ ,  $\sigma'_0 = \sigma_0 = 1$ ,  $Q'_n = \mathbf{0}_{n \times n}$ ,  $\sigma'_n = 0$ . Тогда при  $z \rightarrow 0$  итеративно можно получить, что  $\sigma'_1 \rightarrow \sigma_1$ ,  $Q'_1 \rightarrow Q_1$ ,  $\sigma'_2 \rightarrow \sigma_2$ ,  $Q'_2 \rightarrow Q_2, \dots$ ,  $\sigma'_{n-1} \rightarrow \sigma_{n-1}$ ,  $Q'_{n-1} \rightarrow Q_{n-1}$ .

Рассмотрим  $\lim_{z \rightarrow 0} (I + \frac{1}{z}(L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2))^{-1}$ . В силу предложения 2.2, в окрестности  $U(0)$  данный предел можно представить как:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{z}(L_1 + \gamma e^{-\tau z} L_2) \right)^{-1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \sigma'_k \left(\frac{1}{z}\right)^k} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{z}\right)^k Q'_k.$$

Домножим числитель и знаменатель на  $z^{n-1}$ . В силу того, что все матрицы  $Q'_k$  и скалярные величины  $\sigma'_k$  имеют конечные пределы при  $z \rightarrow 0$  и в силу теоремы 1.2, следует, что

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \sigma'_k \left(\frac{1}{z}\right)^k} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{z}\right)^k Q'_k = \frac{Q_{n-1}}{\sigma_{n-1}} = (L_1 + \gamma L_2)^\dagger.$$

□

**Лемма 3.3.** Если  $L_1$  и  $L_2$  – нормированные лапласовские матрицы и  $L_1 + L_2 = K$ , то

$$(L_1 + \gamma L_2)^\dagger = \frac{1}{n} E \left( I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1}.$$

**Доказательство леммы 3.3.** В случае  $\gamma \in (0, 1)$  представим матрицу  $(L_1 + \gamma L_2)$  в виде

$$(L_1 + \gamma L_2) = (L_1 + \gamma K - \gamma L_1) = ((1 - \gamma)L_1 + \gamma K) = (1 - \gamma) \left( L_1 + \frac{\gamma}{1 - \gamma} K \right).$$

Отметим, что в силу определения собственного проектора для любого  $c \in \mathbb{R}$  справедливо, что  $(cL)^\dagger = L^\dagger$ . Тогда в силу Леммы 8 в [12]

$$(L_1 + \gamma L_2)^\dagger = \left( (1 - \gamma) \left( L_1 + \frac{\gamma}{1 - \gamma} K \right) \right)^\dagger = \frac{1}{n} E \left( I + \frac{1 - \gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1}. \quad (3.28)$$

Если  $\gamma = 1$ , то  $L_1 + \gamma L_2 = K$ , и  $K^\dagger = \frac{1}{n} E$ , что является частным случаем формулы (3.28) при  $\gamma = 1$ .  $\square$

**Замечание 3.4.** Стоит отметить, что  $\lim_{\gamma \rightarrow 0} (L_1 + \gamma L_2)^\dagger = \frac{1}{n} E L_1^\dagger$ . Если 0 – простое собственное значение матрицы  $L_1$ , то  $\frac{1}{n} E L_1^\dagger = L_1^\dagger$ . Однако в общем случае  $\frac{1}{n} E L_1^\dagger \neq L_1^\dagger$ , т.к.  $\frac{1}{n} E L_1^\dagger$  является матрицей единичного ранга. На основе этого строится протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями, который позволяет агентам в многоагентной системе с несвязной сетью достичь консенсуса при любом векторе начальных значений (более подробно см. в [12]). Данный протокол был применен для многоагентных систем с информационными влияниями и запаздыванием в главе 4.

**Теорема 3.5.** Пусть протокол (3.20) устойчив, и  $x(t)$  – решение системы (3.20). Тогда

1) если  $\phi(\theta) = x_0$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} E \left( I + \frac{1 - \gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1} (I - \gamma \tau L_2) x_0;$$

2) если

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-\tau, 0); \\ x_0, & \theta = 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} E \left( I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1} x_0.$$

**Доказательство теоремы 3.5.** По аналогии с доказательством теоремы 3.2 преобразование Лапласа функции  $x(t - \tau)$  при  $\phi(\theta) = x_0$ :

$$\mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) x_0 + e^{-\tau s} X(s).$$

Тогда в силу того, что  $x(0) = x_0$ , то преобразованием Лапласа системы (3.20) будет

$$sX(s) - x_0 = -L_1 X(s) - \gamma e^{-\tau s} L_2 X(s) - \gamma \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L_2 x_0;$$

$$X(s) = (sI + L_1 + \gamma e^{-\tau s} L_2)^{-1} \left( I - \gamma \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L_2 \right) x_0.$$

Тогда согласно теореме о конечном значении:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(sI + L_1 + \gamma e^{-\tau s} L_2)^{-1} \left( I - \gamma \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L_2 \right) x_0 = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{s} (L_1 + \gamma e^{-\tau s} L_2) \right)^{-1} \left( I - \gamma \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L_2 \right) x_0. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} = \tau$ . В силу леммы 3.2 следует, что  $\lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{s} (L_1 + \gamma L_2 e^{-\tau s}) \right)^{-1} = (L_1 + \gamma L_2)^{\dagger}$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (L_1 + \gamma L_2)^{\dagger} (I - \gamma \tau L_2) x_0.$$

Тогда согласно лемме 3.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n} E \left( I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1} (I - \gamma \tau L_2) x_0.$$

2) Для случая, когда начальная функция имеет вид (3.29), доказательство производится аналогично, учитывая то, что  $\mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = e^{-\tau s} X(s)$ .

□

**Замечание 3.5.** При больших значениях запаздывания матрица  $(I - \gamma\tau L_2)$  может содержать отрицательные элементы. Тогда  $(I - \gamma\tau L_2)$  не будет стохастической, что может привести к отрицательным элементам в векторе  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  при  $\phi(\theta) = x_0$ . Для предотвращения данной ситуации следует наложить ограничение  $\gamma\tau < \frac{1}{\max_i l_{ii}^2}$ , где  $L_2 = (l_{ii}^2)$ .

**Следствие 3.6.** Пусть протокол (3.20) устойчив, и  $\gamma\tau < \frac{1}{\max_i l_{ii}^2}$ . Тогда протокол (3.20) сходится к консенсусу при любой постоянной начальной функции  $\phi(\theta) = x_0$

Доказательство следствия 3.6 следует из того, что матрица  $\frac{1}{n}E \left( I + \frac{1-\gamma}{\gamma} L_1 \right)^{-1} (I - \gamma\tau L_2)$  является стохастической матрицей единичного ранга.

**Следствие 3.7.** Пусть протокол (3.20) устойчив,  $\gamma = 1$ ,  $x(t)$  – решение (3.20) и  $\phi(\theta) = x_0$ . Если  $L_2$  – матрица сбалансированного графа, то  $x(t)$  будет сходиться к усредненному консенсусу при любом  $\tau$ .

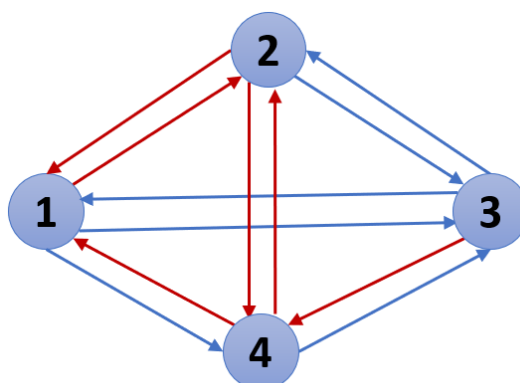
Доказательство следствия 3.7 следует из того, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{1}{n}E(I - \tau L_2)x_0$  и что  $EL_2 = \mathbf{0}_{n \times n}$ .

### 3.2.4. Числовой пример

Пусть многоагентная система представлена оргграфом, изображенном на рис. 3.2, в котором все дуги имеют одинаковый вес. Тогда матрицы  $L_1$  и  $L_2$  имеют вид

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\gamma = 1$ , и начальная функция  $\phi(\theta) = x_0 = (2, 4, 6, 8)^T$ . Спектром матрицы  $L_1$  будет  $\sigma(L_1) = (0; 0.25; 0.3455; 0.9045)$ . Тогда  $\sigma'(L_1) =$



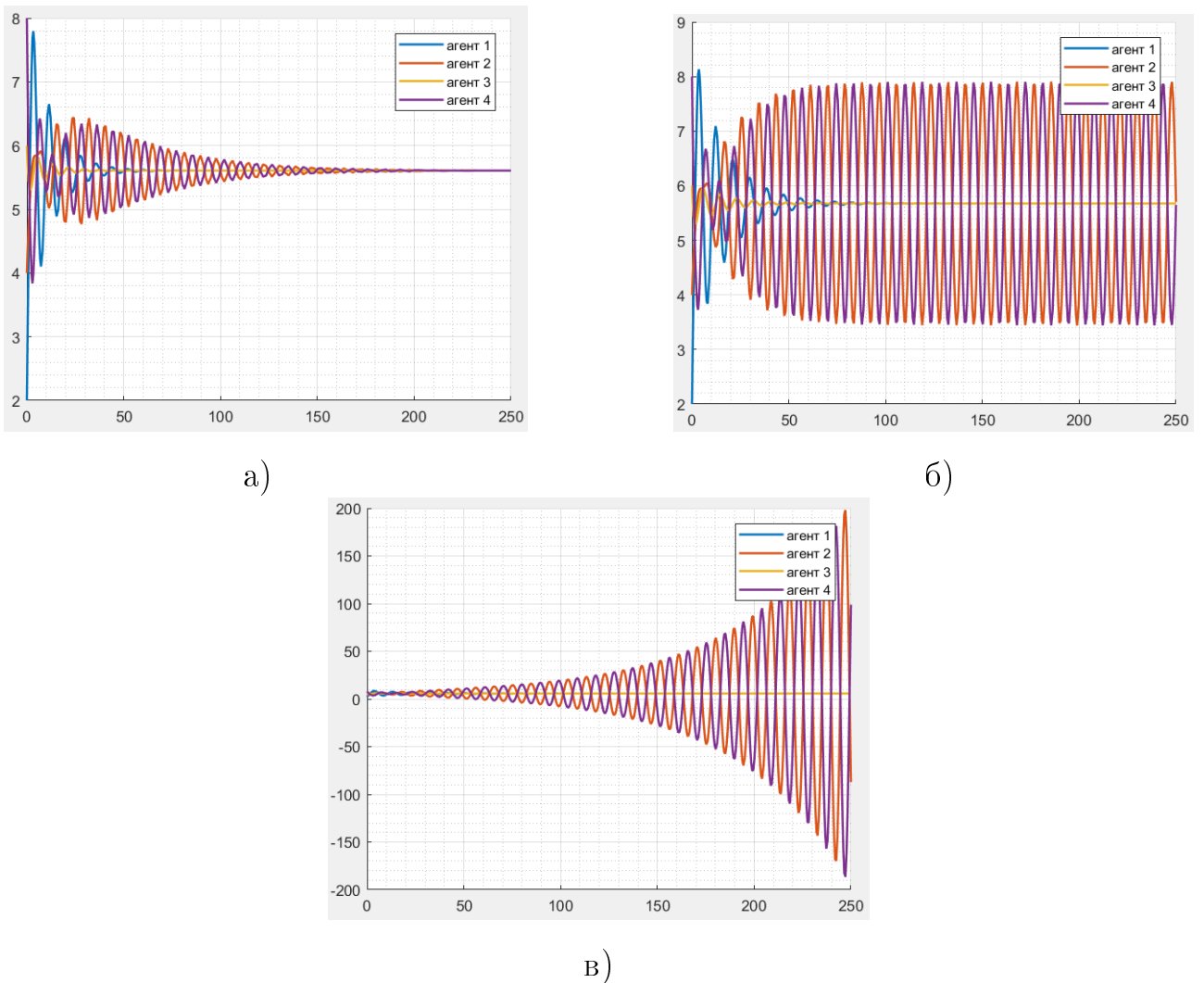
**Рис. 3.2.** Ограф связей для четырех агентов. Синими дугами обозначена передача информации между агентами без запаздывания, красными – с запаздыванием.

$(0.25; 0.3455; 0.9045)$ , а множество  $\Lambda = \{0.25, 0.3455\}$ . Согласно теореме 3.3, граничным значением запаздывания протокола (3.20) будет  $\tau_0 = \min\{2.702, 3.826\} = 2.702$ . На рис. 3.3 представлено поведение характеристик агентов при различных значениях запаздывания. При  $\tau = 0.9\tau_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 5.608(1, 1, 1, 1)^T$ ,  $x(250) \approx 5.608(1, 1, 1, 1)^T$ .

### 3.3. Выводы по главе 3

В данной главе с помощью частотных методов анализа устойчивости и методов алгебраической теории графов были исследованы характеристики протоколов консенсуса с частичным запаздыванием.

В первом разделе исследован обобщенный протокол консенсуса с запаздыванием. Получено условие, при котором устойчивость протокола консенсуса не зависит от запаздывания. В случае нарушения этого условия найдено выражение для граничного значения запаздывания. Также исследовано асимптотическое поведение данного протокола. Доказано, что если в многоагентной системе с запаздыванием для любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям, консенсус достигается, то он определяется произведением собственного проектора на вектор начальных значений. Полученное в работе выражение для граничного значения  $\tau$  обобщает некоторые



**Рис. 3.3.** Динамика характеристик агентов а) при  $\tau = 0.9\tau_0 = 2.432$ , б) при  $\tau = \tau_0 = 2.702$ , в) при  $\tau = 1.1\tau_0 = 2.972$ .

ранее полученные формулы.

Во втором разделе был рассмотрен протокол согласования характеристик в многоагентной системе с запаздыванием, в которой агенты получают информацию от части агентов без запаздывания, а от остальных - с запаздыванием. Для такого протокола получено условие независимости устойчивости от запаздывания. Также получено граничное значение запаздывания, которое зависит от спектральных свойств лапласовской матрицы. В случае устойчивости протокола получено асимптотическое поведение многоагентной системы для разных начальных условий и, как следствие, условие достиже-

ния консенсуса при любом векторе начальных значений.

Результаты данной главы опубликованы в работах [4, 5, 29, 31, 40].

## Глава 4

# Достижение консенсуса в системах с несвязной структурой и запаздыванием

### 4.1. Метод ортогональной проекции в задаче о консенсусе

#### 4.1.1. Связь между псевдообратной матрицей и методом ортогональной проекции

В работе [11] был рассмотрен частный случай многоагентных систем с несвязной сетью, когда соответствующий орграф связей содержит только вершины из множества  $\mathcal{K}$ , т.е. из множества вершин всех базовых бикомпонент. Была дана графовая интерпретация метода ортогональной проекции с помощью матриц  $X$  и  $Z$  (см. п.3. теоремы 3 в [11]). В данном разделе рассмотрим общий случай, когда орграф связей, помимо отдельных базовых бикомпонент, также содержит вершины, не принадлежащие множеству  $\mathcal{K}$ . Покажем, что метод ортогональной проекции является естественным обобщением протокола достижения консенсуса.

Ортогональный проектор  $S$  на подпространство  $Q_L = \mathcal{R}(L) \oplus \text{Span}(\mathbf{1})$  представляется в виде

$$S = UU^+ = U(U^T U)^{-1} U^T, \quad (4.1)$$

где  $U$  – матрица полного столбцового ранга, полученная из  $L$  отбрасыванием по одному столбцу, соответствующему какой-либо вершине из каждой базовой бикомпоненты орграфа, и добавлением столбца  $\mathbf{1}_n$  в качестве первого,  $U^+$  – псевдообратная по Муру-Пенроузу.

Пусть  $E_{10}$  – квадратная матрица порядка  $n$ , первый столбец которой состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю.

Вначале предположим, что  $\text{rank}(L) = n-1$ . В этом случае нет необходимости в регуляризации, и для любого вектора начальных значений консенсус достигается, и  $L^\dagger = E_{10}U^{-1}$ .

Если  $\text{rank}(L) < n-1$ , то

$$L^\dagger S = L^\dagger U U^+ = E_{10}U^+, \quad (4.2)$$

т.е. в обоих случаях консенсус однозначно определяется первой строкой псевдообратной матрицы для  $U$ : в первом случае  $U^{-1}$ , а во втором –  $U^+$ . Таким образом имеет место следующее предложение.

**Предложение 4.1.**

- 1) Если  $\text{rank}(L) = n-1$ , то  $L^\dagger S = L^\dagger I = E_{10}U^{-1}$ .
- 2) Если  $\text{rank}(L) < n-1$ , то  $L^\dagger S = E_{10}U^+$ .

Из предложения 4.1 следует, что если в системе достигается консенсус, то он однозначно определяется нормированными весами множества остовных исходящих деревьев орграфа коммуникаций. В свою очередь, эти веса, согласно теореме 1.4, однозначно определяются первой строкой матрицы  $U^{-1}$ . В силу предложения 4.1, метод ортогональной проекции является естественным обобщением согласования характеристик и определяется в общем случае первой строкой псевдообратной по Муру-Пенроузу матрицы  $U$ . Известно, что (см., например, Приложении А в [47]) элементы псевдообратной матрицы, также как для невырожденной матрицы, можно представить с помощью миноров исходной матрицы следующим образом:

$$u_{1i_1}^+ = \frac{\sum_{i_2 < \dots < i_r} \det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}}{\sum_{k_1 < \dots < k_r} \left( \det U \begin{pmatrix} k_1 \dots k_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \right)^2}. \quad (4.3)$$

Используя (4.3), далее мы охарактеризуем метод ортогональной проекции и элементы матрицы  $U^+$  с помощью лесной структуры орграфа связей. Для этого нам понадобятся следующие предложения, в предположении, что матрица  $L$  имеет представление (1.1). Важно отметить, что  $\det L_R$  равен весу множества остовных исходящих деревьев орграфа  $\Gamma_\xi$ , полученного из  $\Gamma$

“склеиванием” всех вершин из  $\mathcal{K}$  в одну вершину  $\xi$  (см. [57]). На рис. 4.16 приведен орграф “склеиванием” базовых вершин орграфа из рис. 4.1а.

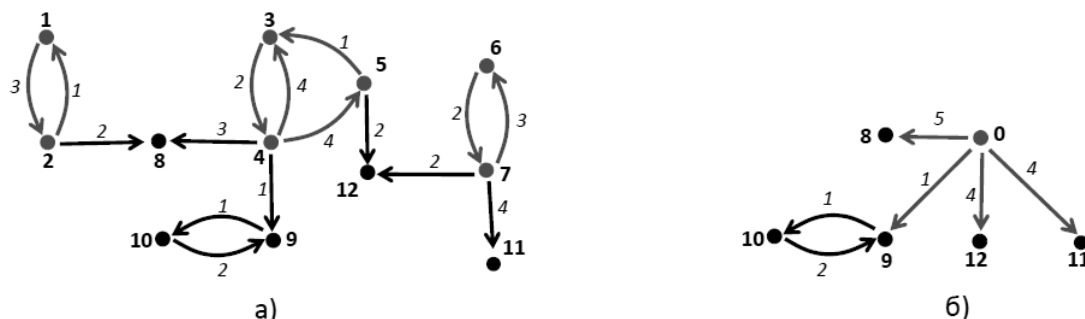


Рис. 4.1. а) Исходный орграф  $\Gamma$ . б) Орграф  $\Gamma_\xi$

**Предложение 4.2.** 1) Миноры  $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$  и  $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  равны нулю, если они получаются путем вычеркивания хотя бы одной строки, соответствующей вершине из  $\bar{\mathcal{K}}$ .

2) Минор  $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  равен нулю, если множество  $\{i_2, \dots, i_r\}$  содержит все вершины одной базовой бикомпоненты.

3) Абсолютное значение ненулевого минора  $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  равно произведению  $\det L_R$  на вес множества всех исходящих лесов на  $\mathcal{K}$  с корнями из вершин  $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_2, \dots, i_r\}$ .

**Доказательство предложения 4.2.** 1) Матрица  $U$  имеет следующий вид:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \cdots & l_{1k'} & \mathbf{0}_{1,n-k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & l_{k2} & \cdots & l_{kk'} & \mathbf{0}_{1,n-k} \\ \mathbf{1}_{n-k,1} & * & * & * & L_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & U_1 \\ 1 & \ddots \\ \vdots & U_v \\ \mathbf{1}_{n-k,1} & * & * & L_R \end{pmatrix},$$

где  $k' = k - m + 1$ ,  $k = \sum_{i=1}^m v_i$  ( $m$  – число базовых бикомпонент), а матрица  $L_R$  – квадратная и невырожденная. Предположим, что упомянутый минор был получен путем вычеркивания строк, среди которых есть хотя бы одна строка с номером из множества  $\{k+1, \dots, n\}$ . Тогда подматрица  $U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$

будет иметь блочно-треугольный вид, правый нижний квадратный блок  $L_{R'}$  которой содержит нулевую строку. Поэтому  $\det L_{R'} = 0$ , и  $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = 0$ .

2) Пусть множество  $\{i_2, \dots, i_r\}$  содержит все вершины  $\{j_1, \dots, j_{v_s}\}$  одной  $s$ -й базовой бикомпоненты. Тогда подматрица со строками  $\{j_1, \dots, j_{v_s}\}$  содержит всего  $v_s - 1$  ненулевых столбцов. Минор  $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  состоит из членов, каждый из которых есть произведение  $r - 1$  элементов подматрицы, взятых из различных строк и столбцов. Поэтому каждый такой член содержит нулевой множитель, и минор  $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  равен нулю.

3) Если минор  $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  отличен от нуля, то согласно пункту 2), множество  $\{i_2, \dots, i_r\}$  состоит из  $v_s - 1$  строк ( $s = 1, \dots, m$ ) из каждой базовой бикомпоненты и строк, соответствующих вершинам из  $\bar{\mathcal{K}}$ . Очевидно, что минор равен определителю блочно-диагональной матрицы, т.е.

$$\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} U'_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & U'_m & \\ & * & & L_R \end{pmatrix},$$

где матрица  $U'_i$  получена из  $U_i$  вычеркиванием одной, например,  $i_k$ -й строки. Согласно матричной теореме о деревьях, определитель матрицы  $U'_i$  равен минору любого элемента  $i_k$ -й строки  $U_i$  и его абсолютное значение равно сумме весов всех исходящих деревьев из  $i_k$ -й вершины  $i$ -й базовой бикомпоненты. Это рассуждение верно для любого блока  $U'_t$ .

Таким образом, абсолютное значение ненулевого минора  $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  равно произведению  $\det L_R$  на вес множества всех исходящих лесов на  $\mathcal{K}$  с корнями  $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_2, \dots, i_r\}$ .  $\square$

**Предложение 4.3.** Пусть  $\{j_1, \dots, j_{v_s}\}$  — множество всех вершин некоторой базовой бикомпоненты  $s$ , содержащееся в  $\{i_1, \dots, i_r\}$ , и пусть в нем нет вершин других базовых бикомпонент. Тогда:

1)

$$\left| \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \right| = \sum_{p=1}^{v_s} \left| \det U \begin{pmatrix} K_p \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \right|, \quad (4.4)$$

где  $K_p = (i_1 \dots i_r) \setminus j_p$ ,  $p = 1, \dots, v_s$ ;

2)  $\det U \begin{pmatrix} j_p K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$  и  $\det U \begin{pmatrix} K_p \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$ ,  $p = 1, \dots, v_s$ , имеют один и тот же знак.

**Доказательство предложения 4.3.** 1) Не уменьшая общности, предположим, что вершины пронумерованы так, что  $j_p = p$ ,  $p = 1, \dots, v_s$ . Пусть в множестве вершин  $\{i_1, \dots, i_r\}$  подмножество  $\{i_1, \dots, i_{r'}\}$ , где  $r' = r - |\bar{K}|$ , является подмножеством множества базовых вершин. Рассмотрим определитель  $\det U \begin{pmatrix} 1 \dots v_s \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$  и представим его в блочном виде как

$$\det \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \dots & l_{1v_s} & 0_{1,r'-v_s} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & l_{v_s 2} & \dots & l_{v_s v_s} & 0_{1,r'-v_s} & 0 \\ \mathbf{1}_{r'-p,1} & 0_{r'-p,1} & \dots & 0_{r'-p,1} & Q_{r'-v_s} & 0 \\ * & * & * & * & * & L_R \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} Q_{v_s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & Q_{r'-v_s} & \mathbf{0} \\ * & * & L_R \end{pmatrix}.$$

Согласно матричной теореме о деревьях 1.4, алгебраическое дополнение первого элемента любой  $k$ -й строки блока  $Q_{v_s}$  равно сумме весов деревьев, исходящих из вершины  $k$ . Поэтому определитель матрицы  $Q_{v_s}$  равен сумме весов всех исходящих деревьев базовой бикомпоненты с множеством вершин  $\{1, \dots, v_s\}$ , а  $|\det U \begin{pmatrix} 1 \dots v_s \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}|$  — произведению суммы весов всех исходящих деревьев базовой бикомпоненты с вершинами  $\{1, \dots, v_s\}$  на  $|\det Q_{r'-v_s}|$ , который равен сумме весов максимальных исходящих лесов на  $\mathcal{K} \setminus \{1 \dots v_s\}$  с вершинами:  $\mathcal{K} \setminus \{i_1, \dots, i_{r'}\}$ , и на  $\det L_R$ . Таким образом, выполняется равенство (4.4).

2) Покажем, что знаки миноров  $\det U \begin{pmatrix} j_p K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$  и  $\det U \begin{pmatrix} K_p \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$ ,  $p = 1, \dots, v_s$ , совпадают.

Заметим, что  $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{v_s} (-1)^{1+k+l} \det U_{k1}^s \xi = (-1)^l \zeta \xi$ , где  $l$  — число строк в  $U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$  до  $s$ -й базовой бикомпоненты,  $U^s = (\mathbf{1}_{v_s} U_s)$ ,  $\zeta > 0$  — вес множества всех исходящих деревьев в  $s$ -й базовой бикомпоненте,  $\xi$  — произведение определителей других блоков. Поскольку  $U \begin{pmatrix} j_p K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$  отличается от  $U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$  перестановкой одной строки, их определители могут отличаться только знаком и имеет место

$$\det U \begin{pmatrix} j_p K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} (-1)^{l+p-1} = (-1)^{2l+p-1} \zeta \xi,$$

где  $p$  – номер строки в  $s$ -м блоке.

Итак, знак  $\det U \begin{pmatrix} j_p K_p \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$  равен  $(-1)^{p-1} \xi$ . Легко можно установить, что  $\det U \begin{pmatrix} K_p \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  имеет знак  $(-1)^{p+1} \xi$ .  $\square$

Отметим, что  $(i_1 \dots i_r) \setminus j_p$  означает, что из упорядоченного набора  $(i_1 \dots i_r)$  удален элемент  $j_p$ . А запись  $j_p K_p$  указывает на то, что к упорядоченному набору  $K_p$  слева добавлен элемент  $j_p$ .

Используя предложения 4.2 и 4.3, можно доказать следующую теорему, которая впервые была доказана в [11] для системы без небазовых агентов.

**Теорема 4.1.** *Для системы с произвольным орграфом связей сумма элементов первой строки матрицы  $U^+$  равна 1:*

$$\sum_{i=1}^n u_{1i}^+ = 1.$$

**Доказательство теоремы 4.1.** В силу (4.3) сумму элементов первой строки  $U^+$  можно записать как

$$\sum_{i_1 \in N} u_{1i_1}^+ = \frac{\Sigma_{\mathcal{K}} + \Sigma_{\bar{\mathcal{K}}}}{D}, \quad (4.5)$$

где  $\Sigma_{\mathcal{K}}$  соответствует элементам из  $\mathcal{K}$ , член  $\Sigma_{\bar{\mathcal{K}}}$  – вершинам из  $\bar{\mathcal{K}} = N \setminus \mathcal{K}$ , а

$$D = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \left( \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \right)^2.$$

Согласно п.1 предложения 4.2, если множество  $\{i_1, \dots, i_r\}$  содержит не все вершины из  $\bar{\mathcal{K}}$ , то соответствующий член  $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$  в представлении  $D$  равен нулю. Также, в силу п.1 предложения 4.2 имеет место

$$\Sigma_{\bar{\mathcal{K}}} = \sum_{i_1 \in \bar{\mathcal{K}}} \sum_{i_2 < \dots < i_r} \det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = 0.$$

Отметим, что в  $\Sigma_{\mathcal{K}}$  и  $D$  входит множитель  $\det L_R$ . Доказательство равенства единице соотношения  $\frac{\Sigma_{\mathcal{K}}}{D}$  приведено в [1].  $\square$

Итак, метод ортогональной проекции в многоагентных системах с любым оргграфом связей и вектором начальных значений  $x_0$  приводит к консенсусу в протоколе (1.29), и консенсус определяется произведением

$$(u_{11}^+, \dots, u_{1n}^+)x_0^T.$$

В частности, если оргграф связей содержит остовное дерево, то в этом случае матрица  $U$  будет квадратной, невырожденной, и, согласно (4.3), выполняется

$$u_{1i}^+ = u_{1i}^{-1} = \frac{|\det U \begin{pmatrix} (1\dots n) \setminus i \\ 2\dots n \end{pmatrix}| \det U}{(\det U)^2} = \frac{|\det U \begin{pmatrix} (1\dots n) \setminus i \\ 2\dots n \end{pmatrix}|}{\det U} = l_{1i}^+.$$

Последнее равенство следует из теоремы 1.4, согласно которой,  $|\det U \begin{pmatrix} (1\dots n) \setminus i \\ 2\dots n \end{pmatrix}|$  совпадает с алгебраическим дополнением любого элемента  $i$ -й строки лапласовской матрицы оргграфа связей.

**Предложение 4.4.** *Если  $i_1$  и  $j_1$  принадлежат одной базовой компоненте, то  $\frac{u_{1i_1}^+}{u_{1j_1}^+} = \frac{l_{1i_1}^+}{l_{1j_1}^+}$ .*

**Доказательство предложения 4.4.** Справедливость данного предложения следует из представления  $u_{1k_1}^+$ . Действительно, все соответствующие множители  $\det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$ ,  $\det U \begin{pmatrix} j_1 \dots j_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix}$  в выражении (4.3) для  $u_{1i_1}^+$  и  $u_{1j_1}^+$  отличаются только знаком, а  $\det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  и  $\det U \begin{pmatrix} j_2 \dots j_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix}$  – весами исходящих деревьев из  $i_1$  и  $j_1$ .  $\square$

Используя предложение 4.3, числитель выражения (4.3) можно представить как

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2 < \dots < i_r} \det U \begin{pmatrix} i_2 \dots i_r \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_r} \left( \det U \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \right)^2 = \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{q_s} \varrho_{si}^2, \end{aligned}$$

где  $q_s = (v_1 v_2 \dots v_m) / v_s$ ,  $s = 1, \dots, m$ . Для каждой базовой бикомпоненты  $s$  с множеством вершин  $N_s$  число  $\varrho_{si}$  равно произведению веса множества всех

деревьев в бикомпоненте  $s$  на вес максимальных исходящих лесов с фиксированными вершинами.

Пусть  $P_1 = \{1, \dots, v_1\}$  – множество вершин первой базовой бикомпоненты. Согласно выражению (4.3),

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{i=1}^{m_1} u_{1i}^+ = D^{-1} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{K_i} \det U \begin{pmatrix} K_i \\ 2 \dots r \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} i K_i \\ 1 \dots r \end{pmatrix} = \\ &= D^{-1} \sum_{m_1+1 < \dots < i_r} \left( \det U \begin{pmatrix} P_1 i_{m_1+1} \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \right)^2 = D^{-1} \sum_{i=1}^{q_1} \varrho_{1i}^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $K_t = (1 \dots m_1 i_{m_1+1} \dots i_r) \setminus t$ ,  $t = 1, \dots, m_1$ . Напомним, что в (4.6) для каждой базовой бикомпоненты  $s$  число  $\varrho_{si}$  равно произведению веса множества всех деревьев базовой бикомпоненты  $s$  на произведение весов всех деревьев с фиксированными корнями из остальных базовых бикомпонент, и определителя блока  $L_R$ . С помощью (4.6) можно определить отношение сумм весов в разных бикомпонентах.

Если оргграф состоит из одной базовой бикомпоненты с множеством вершин  $m_1 = n$ , то из (4.6) в силу  $\sum_{i=1}^n \det U \begin{pmatrix} N \setminus i \\ 2 \dots n \end{pmatrix} = \det U \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ 1 \dots n \end{pmatrix} = \det U$  непосредственно следует:

$$W_1 = D^{-1} \sum_{i=1}^n \det U \begin{pmatrix} N \setminus i \\ 2 \dots n \end{pmatrix} \det U = \frac{\det U \det U}{(\det U)^2} = 1.$$

#### 4.1.2. Числовой пример

Рассмотрим многоагентную систему с оргграфом связей, приведенным на рис. 4.1. Также рассмотрим матрицы  $L_R^0$  и  $U$ , первая из которых соответствует оргграфу со “склеенными” в вершину  $\mathbf{0}$  базовыми бикомпонентами:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad L_R^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выясним, из каких величин складывается элемент  $u_{16}^+$  матрицы  $U^+$ . Сумма в числителе выражения (4.3) для  $u_{16}^+$  содержит шесть ненулевых слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение двух миноров. Одно из слагаемых равно

$$\det U \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 12 \\ 2 & 3 & \dots & 10 \end{pmatrix} \det U \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & \dots & 12 \\ 1 & 2 & \dots & 10 \end{pmatrix}.$$

Согласно п.3 предложения 4.2 абсолютное значение ненулевого минора  $\det U \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 12 \\ 2 & 3 & \dots & 10 \end{pmatrix}$  равно произведению веса множества всех исходящих лесов на  $\mathcal{K}$  с корнями  $\{2, 4, 6\} = \{1, \dots, 12\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 8, \dots, 12\}$  на  $\det L_R = 80$ .

На рис. 4.2а и рис. 4.2б приведены оба леса на множестве вершин  $\mathcal{K} = \{1, \dots, 7\}$ , исходящие из корней  $\{2, 4, 6\}$ . Вес первого леса равен 8, второго — 32, т.е. сумма весов этих лесов равна 40. Если это число умножим на вес дерева, показанного на рис. 4.1б, т.е. на 80, то получится  $\det U \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 12 \\ 2 & 3 & \dots & 10 \end{pmatrix} = 40 \cdot 80 = 3200$ .

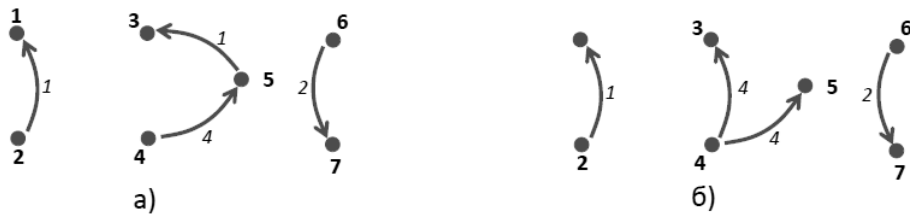
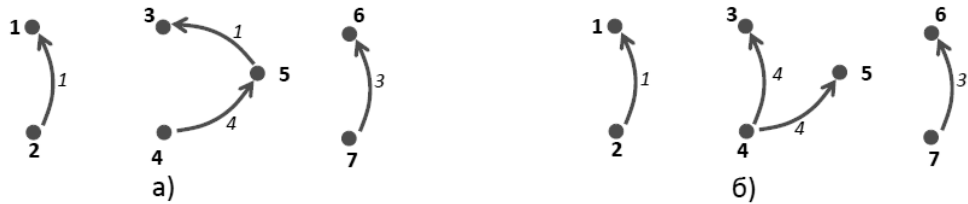


Рис. 4.2. Леса на множестве вершин  $\mathcal{K} = \{1, \dots, 7\}$ , исходящие из корней  $\{2, 4, 6\}$

Аналогичную графовую интерпретацию имеет минор  $\det U \begin{pmatrix} 1^3 5 6 8 \dots 12 \\ 2 3 \dots 10 \end{pmatrix} = -60 \cdot 80 = -4800$ , абсолютное значение которого равно произведению веса множества всех исходящих лесов на  $\mathcal{K}$  с корнями  $\{1 \dots 12\} \setminus \{1 3 5 6 8 \dots 12\} = \{2 4 7\}$  на  $\det L_R = 80$ .

На рис. 4.3 приведены оба леса, исходящие из корней  $\{2, 4, 7\}$ : вес первого леса равен 12, а второго равен 48, т.е. сумма весов двух лесов равна 60. Итак,  $\det U \begin{pmatrix} 1^3 5 7 8 \dots 12 \\ 2 3 \dots 10 \end{pmatrix} = -60 \cdot 80 = -4800$ .



**Рис. 4.3.** Леса на множестве вершин  $\mathcal{K} = \{1, \dots, 7\}$ , исходящие из корней  $\{2, 4, 7\}$

С другой стороны, если применить предложение 4.3 для базовой би-компоненты  $\{6, 7\}$ , то получим:

$$\begin{aligned} \left| \det U \begin{pmatrix} 6 1 3 5 7 8 \dots 12 \\ 1 2 \dots 10 \end{pmatrix} \right| &= \left| \det U \begin{pmatrix} 7 1 3 5 6 8 \dots 12 \\ 1 2 \dots 10 \end{pmatrix} \right| = \\ \left| \det U \begin{pmatrix} 1 3 5 7 8 \dots 12 \\ 2 3 \dots 10 \end{pmatrix} \right| &+ \left| \det U \begin{pmatrix} 1 3 5 6 8 \dots 12 \\ 2 3 \dots 10 \end{pmatrix} \right| = 3200 + 4800 = 8000. \end{aligned}$$

Продолжая вычисления, получим, что  $u_{11}^+ \approx 0.22$ ,  $u_{12}^+ \approx 0.073$ ,  $u_{13}^+ \approx 0.094$ ,  $u_{14}^+ \approx 0.235$ ,  $u_{15}^+ \approx 0.023$ ,  $u_{16}^+ \approx 0.141$ ,  $u_{17}^+ \approx 0.212$ ,  $u_{18}^+ = \dots = u_{112}^+ = 0$ . Если положить, что начальным условиям соответствует вектор  $x_0 = (1, 2, 3, \dots, 11, 12)^T$ , то значение достигаемого консенсуса вычисляется как  $(u_{11}^+, \dots, u_{112}^+)x_0^T \approx 4.03$ .

## 4.2. Протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием

В случае, когда кратность нулевого собственного значения больше 1, для достижения латентного консенсуса в [12] был предложен протокол ла-

тентного консенсуса со слабыми фоновыми связями. В случае многоагентной системы с запаздыванием данный протокол примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -\delta D x(t) - L x(t - \tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (4.7)$$

где  $\delta > 0$ ,  $D = I - V$ ,  $V = \mathbf{1}v^\top$ ,  $\sum_i v_i = 1$ . В данном разделе спектры матриц  $L$  и  $D$  будут рассматриваться с учетом кратности, т.е. в них могут быть одинаковые элементы. Обозначим  $\sigma'(L)$  – спектр лапласовской матрицы  $L$  без одного нулевого собственного значения.

Для минимизации изменений протокола (1.2), устойчивость и асимптотическое поведение протокола (4.7) будут рассмотрены при  $\delta \rightarrow 0$ .

#### 4.2.1. Устойчивость протокола латентного консенсуса

Характеристической функцией уравнения (4.7) будет

$$F(z) = \det(zI + \delta D + L e^{-\tau z}).$$

Рассмотрим следующее вспомогательное предложение.

**Предложение 4.5.** *Жордановой формой матрицы  $D$  будет являться матрица*

$$\Lambda_D = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство предложения 4.5.** Как было упомянуто ранее,  $D = I - V$ , где  $V = \mathbf{1}v^\top$ . Стоит отметить, что  $\sigma(V) = (0, \dots, 0, 1)$ . Также  $\mathbf{1}v^\top \mathbf{1}v^\top = \mathbf{1}v^\top$ , что означает, что  $V$  – идемпотентная матрица. Тогда жордановой формой матрицы  $V$  будет матрица

$$\Lambda_V = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\Lambda_V = S^{-1}VS; P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-2)} & 1 \\ \mathbf{0}_{(n-2) \times 1} & I_{(n-2) \times (n-2)} & \mathbf{0}_{(n-2) \times 1} \\ 1 & \mathbf{0}_{1 \times (n-2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда рассмотрим преобразование матрицы  $D$  с помощью матрицы  $SP$ .

$$\begin{aligned} (SP)^{-1}DSP &= P^{-1}S^{-1}DSP = P^{-1}S^{-1}(I - V)SP = P^{-1}(I - \Lambda_V)P = \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} I_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix} = \Lambda_D. \end{aligned}$$

Таким образом посредством матрицы преобразования  $SP$  получена жорданова форма  $\Lambda_D$  матрицы  $D$ .  $\square$

**Предложение 4.6.** *Характеристическую функцию системы (4.7)  $F(z)$  можно представить как произведение квазиполиномов*

$$F(z) = z \prod_{\lambda \in \sigma'(L)} (z + \delta + e^{-\tau z} \lambda).$$

**Доказательство предложения 4.6.** Согласно предложению 4.5  $\Lambda_D = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$  является жордановой формой матрицы  $D$ . Пусть  $\Lambda_D = S^{-1}DS$ . Так как  $\mathbf{1}$  – собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, то матрица  $S$  будет иметь вид  $S = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & * \end{pmatrix}$ . Тогда  $LS = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & * \end{pmatrix}$ , а матрицу  $S^{-1}LS$  можно представить как

$$S^{-1}LS = \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & R_L \end{pmatrix},$$

где  $R_L$  – некая матрица,  $\sigma(R_L) = \sigma'(L)$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(z) &= \det(zI + \delta D + Le^{-\tau z}) = \det(S^{-1}(zI + \delta D + Le^{-\tau z})S) = \\ &= \det(zI + \delta S^{-1}DS + e^{-\tau z} S^{-1}LS) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det \left( zI + \delta \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix} + e^{-\tau z} \begin{pmatrix} 0 & * \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & R_L \end{pmatrix} \right) = \\
&= z \det((z + \delta)I_{n-1} + e^{-\tau z} R_L) = z \prod_{\lambda \in \sigma'(L)} (z + \delta + e^{-\tau z} \lambda).
\end{aligned}$$

□

Обозначим получившиеся квазиполиномы как

$$f_\lambda(z) = z + \delta + e^{-\tau z} \lambda. \quad (4.8)$$

Если нули квазиполиномов  $f_\lambda(z)$ ,  $\lambda \in \sigma'(L)$ , находятся левее мнимой оси, то протокол (4.7) будет устойчивым.

Отметим, что если  $\lambda = 0$ , то квазиполином 4.8 будет устойчивым, так как  $\delta > 0$ . Поэтому далее будем рассматривать ненулевые собственные значения  $\lambda$ . Обозначим через  $\sigma''(L)$  спектр лапласовской матрицы  $L$  без нулевых собственных значений.

Устойчивость квазимногочлена (4.8) при фиксированном  $\lambda$  будет оценена с помощью метода Цыпкина. Для этого данный квазимногочлен  $f_\lambda(z)$  примем за характеристический многочлен эквивалентной системы с отрицательной запаздывающей обратной связью, который может быть представлен в виде

$$f_\lambda(z) = z + \delta + e^{-\tau z} \lambda = Q(z) - P(z)e^{-\tau z}.$$

Тогда амплитудно-фазовая характеристика эквивалентной системы будет

$$W_\tau(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} e^{-i\tau\omega} = -\frac{\lambda}{i\omega + \delta} e^{-i\tau\omega} = W_0(i\omega) e^{-i\tau\omega}.$$

В силу того что  $\delta > 0$ , следует, что корень  $Q(z)$  будет меньше нуля. Это означает, что соответствующая разомкнутая система будет устойчивой. Тогда, согласно методу Цыпкина, если график  $W_\tau(i\omega)$  не будет содержать внутри себя точку  $(1, i0)$ , то квазимногочлен (4.8) будет устойчивым, и не устойчивым в ином случае. Случай, когда график  $W_\tau(i\omega)$  проходит через точку  $(1, i0)$ , называется критическим.

Обозначим  $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda)$ ,  $\beta = \operatorname{Im}(\lambda)$ . Тогда функцию  $W_0(i\omega)$  можно представить как

$$W_0(i\omega) = -\frac{\alpha + i\beta}{\delta + i\omega} = -\frac{\alpha\delta + \omega\beta}{\delta^2 + \omega^2} - i\frac{-\omega\alpha + \delta\beta}{\delta^2 + \omega^2} = u + iv.$$

Рассмотрим  $|W_\tau(i\omega)|$ . Очевидно, что  $|W_\tau(i\omega)| = |W_0(i\omega)|$ . Тогда

$$|W_\tau(i\omega)| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2 + \omega^2}}.$$

**Предложение 4.7.** Пусть для каждого  $\lambda \in \sigma''(L)$  выполнено условие

$$\alpha^2 + \beta^2 < \delta^2.$$

Тогда устойчивость протокола (4.7) не будет зависеть от  $\tau$ .

Доказательство предложения непосредственно следует из вышеприведенного выражения для  $|W_\tau(i\omega)|$ .

**Следствие 4.1.** При  $\delta \rightarrow 0$  устойчивость протокола (4.7) всегда будет зависеть от  $\tau$ .

**Теорема 4.2.** Пусть при фиксированном  $\delta$  множество

$$\Psi = \{\lambda \in \sigma''(L) \mid \alpha^2 + \beta^2 \geq \delta^2\}$$

непусто. Для каждого  $\lambda \in \Psi$  вычислим значение

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta + \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}.$$

Тогда протокол (4.7) будет устойчив тогда и только тогда, когда  $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda$ .

**Доказательство теоремы 4.2.** Найдем критические частоты, при которых  $|W_0(i\omega)| = 1$ .

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\delta^2 + \omega^2}} = 1; \quad \alpha^2 + \beta^2 = \delta^2 + \omega^2; \quad \omega = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}.$$

График  $W_0(i\omega)$  будет пересекать точку  $(1, i0)$ , если

$$\arg(W_0(i\omega)) - \tau\omega = 2\pi n;$$

$$\cos(\arg(W_0(i\omega))) = \cos(\tau\omega + 2\pi n);$$

$$\cos(\arg(W_0(i\omega))) = \cos(\tau\omega).$$

Стоит отметить, что  $\cos(\arg(W_0(i\omega))) = u$ . Тогда граничное  $\tau_\lambda$  можно вычислить как

$$\begin{aligned} \cos(\tau_\lambda\omega) &= u; \\ \tau_\lambda &= \frac{\arccos(u)}{\omega} = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta \pm \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что при отрицательном значении  $\omega$  значение  $\tau_\lambda$  будет также отрицательным. Поэтому далее будет рассматриваться только положительное значение  $\omega$ . Тогда квазимногочлен (4.8) будет устойчивым тогда и только тогда, когда  $\tau < \tau_\lambda$ , где

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta + \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \delta^2}}.$$

Квазимногочлены (4.8) для каждого  $\lambda \in \Psi$  будут устойчивыми тогда и только тогда, когда  $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda$ . А значит и протокол (4.7) будет устойчивым тогда и только тогда, когда  $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda$ .  $\square$

**Теорема 4.3.** *При  $\delta \rightarrow 0$  протокол (4.7) будет устойчивым тогда и только тогда, когда  $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma''(L)} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\pi}{2} - |\arg \lambda|\right)$ . Иными словами, при  $\delta \rightarrow 0$  граничное значение запаздывания стремится к значению, полученному в теореме 1.1.*

**Доказательство теоремы 4.3.** При  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\Psi = \sigma''(L)$ . Таким образом, для всех  $\lambda \in \sigma''(L)$  устойчивость квазимногочлена (4.8) будет зависеть от  $\tau$ .

Квазимногочлен (4.8) при  $\delta \rightarrow 0$  будет устойчивым тогда и только тогда, когда  $\tau < \tau_\lambda$ , где

$$\begin{aligned} \tau_\lambda &= \frac{\arccos\left(-\frac{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \\ &= \frac{1}{|\lambda|}(\arccos(\sin(-\arg \lambda))) = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} + \arg \lambda\right). \end{aligned}$$

Тогда при  $\delta \rightarrow 0$  протокол (4.7) будет устойчивым тогда и только тогда, когда  $\tau < \tau_0$ , где

$$\tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda = \min_{\lambda \in \sigma''(L)} \frac{1}{|\lambda|} \left( \frac{\pi}{2} + \arg \lambda \right). \quad (4.9)$$

Если  $\sigma''(L)$  содержит комплексное собственное значение  $\lambda$ , то содержит и комплексно-сопряженное  $\bar{\lambda}$ . Тогда для нахождения  $\tau_0$  достаточно будет рассмотреть комплексные собственные значения с отрицательным аргументом, а формулу (4.9) можно преобразовать следующим образом:

$$\tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma''(L)} \frac{1}{|\lambda|} \left( \frac{\pi}{2} - |\arg \lambda| \right),$$

что совпадает со значением, полученным в теореме 1.1.  $\square$

#### 4.2.2. Асимптотическое поведение протокола латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями

Далее рассмотрим асимптотическое поведение протокола (4.7). Для этого необходимы следующие вспомогательные леммы.

**Лемма 4.1.** Для фиксированных  $\delta > 0$ ,  $\tau$ , матрицы  $D = I - \mathbf{1}v^T$ ,  $\sum_i v_i = 1$ , и лапласовской матрицы  $L$  справедливо, что

$$\text{rank}(\delta D + e^{-\tau z} L) = \text{rank}(\delta D + L) = n - 1,$$

где  $z \in \mathbb{C}$  и  $z$  находится в достаточно малой окрестности нуля  $U(0)$ .

**Доказательство леммы 4.1.** В силу того, что  $\Lambda_D = \text{diag}(0, 1, \dots, 1)$  является жордановой формой  $D$ , то доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.1.  $\square$

**Лемма 4.2.** Для рассматриваемых матриц  $D$  и  $L$ , фиксированных  $\tau, \delta > 0$ , и  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$  справедливо

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{z} (\delta D + e^{-\tau z} L) \right)^{-1} = (\delta D + L)^+.$$

**Доказательство леммы 4.2.** Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 3.2, используя лемму 4.1.  $\square$

**Лемма 4.3.** [12]

1.  $(L + \delta D)^+ = \mathbf{1}v^\top (I + \frac{1}{\delta}L)^{-1}$ ;
2.  $\lim_{\delta \rightarrow 0} (L + \delta D)^+ = \mathbf{1}v^\top L^+$ .

**Теорема 4.4.** Пусть дан устойчивый протокол консенсуса (4.7) с начальной функцией  $\phi(\theta) = x_0$ . Тогда

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{1}v^\top (I + \frac{1}{\delta}L)^{-1} (I - \tau L)x_0$ ;
2.  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{1}v^\top L^+ x_0$ .

Таким образом, протокол (4.7) будет сходиться к консенсусу при любом векторе  $x_0$ .

**Доказательство теоремы 4.4.** По аналогии с доказательством теоремы 3.2 преобразованием Лапласа  $x(t - \tau)$  будет:

$$\mathcal{L}(x(t - \tau)) = \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) x_0 + e^{-\tau s} X(s).$$

Тогда преобразованием Лапласа системы (4.7) будет

$$\begin{aligned}
sX(s) - x_0 &= -\delta DX(s) - e^{-\tau s} LX(s) - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx_0; \\
sX(s) + \delta DX(s) + e^{-\tau s} LX(s) &= x_0 - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) Lx_0; \\
X(s) &= (sI + \delta D + e^{-\tau s} L)^{-1} \left( I - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0.
\end{aligned}$$

Так как протокол (4.7) сходится, то согласно теореме о конечном значении

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} s(sI + \delta D + e^{-\tau s} L)^{-1} \left( I - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0 = \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{s}(\delta D + e^{-\tau s} L) \right)^{-1} \left( I - \left( \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} \right) L \right) x_0.
\end{aligned}$$

Отметим, что в силу леммы 4.2

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( I + \frac{1}{s}(\delta D + e^{-\tau s} L) \right)^{-1} = (L + \delta D)^\dagger.$$

Таким образом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = (L + \delta D)^\dagger (I - \tau L)x(0) = \mathbf{1}v^\top \left( I + \frac{1}{\delta}L \right)^{-1} (I - \tau L)x_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{1}v^\top \left( I + \frac{1}{\delta}L \right)^{-1} (I - \tau L)x_0 = \\
&= \mathbf{1}v^\top L^\dagger (I - \tau L)x_0 = \mathbf{1}v^\top L^\dagger x_0.
\end{aligned}$$

В силу того, что матрица  $\mathbf{1}v^\top L^\dagger$  является стохастической матрицей единичного ранга, протокол (4.7) будет сходиться к консенсусу при любом векторе  $x_0$ .  $\square$

### 4.3. Выводы по главе 4

В первом разделе доказано, что метод проекции является естественным обобщением протокола консенсуса, и значение консенсуса определяется произведением первой строки псевдообратной матрицы  $U^+$  и вектора начальных значений. Для элементов первой строки псевдообратной матрицы  $U^+$  также дана графовая интерпретация.

Во втором разделе был рассмотрен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием для достижения агентами консенсуса при постоянной функции, соответствующей начальным условиям. Граничное значение запаздывания предложенного протокола с уменьшением весов фоновых связей приближается к граничному значению запаздывания базового протокола с запаздыванием. При этом предложенный протокол позволяет достичь агентам консенсус при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям, что решает поставленную задачу.

Результаты данной главы опубликованы в работах [1, 3, 28, 30, 33].

# Заключение

В диссертационной работе разработаны методы анализа протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием и несвязной структурой. С помощью предложенных методов для базового протокола консенсуса с запаздыванием получено выражение для запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости, которое зависит только от минимального ненулевого и максимального собственных значений соответствующей лапласовской матрицы с действительным спектром. Для протоколов управления в многоагентных системах с частичным запаздыванием получены условие независимости устойчивости от запаздывания и граничное значение запаздывания, которые зависят от спектральных свойств соответствующей лапласовской матрицы. С помощью алгебраических методов теории графов установлена связь между асимптотическим поведением характеристик агентов при применении устойчивых протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием и лесной структурой сети коммуникаций. Для многоагентных систем с несвязной сетью и запаздыванием рассмотрены способы достижения консенсуса при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям. Показано, что предложенный ранее метод ортогональной проекции является естественным обобщением протокола консенсуса, и доказано, что значение консенсуса определяется первой строкой псевдообратной матрицы, для элементов которой также дана графовая интерпретация. Рассмотрен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием, который позволяет достичь агентам согласованной характеристики при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям.

В работе получены следующие основные результаты, обладающие научной новизной:

- 1) Разработан метод нахождения значения запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости в базовом протоколе управления в многоагентных системах с запаздыванием с действительным спектром лапласовской матрицы.

2) Получено условие независимости устойчивости от запаздывания и граничное значение запаздывания для протоколов управления в многоагентных системах с частичным запаздыванием.

3) Проведен анализ асимптотического поведения и предложен метод вычисления предельных характеристик агентов в многоагентных системах с запаздыванием с помощью собственного проектора соответствующей лапласовской матрицы, который позволяет получить условие достижения консенсуса.

4) Приведена графовая интерпретация метода ортогональной проекции в общем случае с небазовыми агентами и получено представление выражения для консенсуса с помощью псевдообратной матрицы при его применении.

5) Проведен анализ протокола латентного консенсуса (с добавлением слабых фоновых связей) и предложен метод вычисления граничного значения запаздывания и предельных характеристик агентов в многоагентных системах с несвязной сетью и запаздыванием при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям.

Разработанные методы анализа многоагентных систем с запаздыванием позволят распространить полученные результаты на протоколы в многоагентных системах второго порядка с запаздыванием.

## Список сокращений и условных обозначений

$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
$\otimes$	произведение Кронекера
$\operatorname{Re}(z)$	действительная часть комплексного числа $z$
$\operatorname{Im}(z)$	мнимая часть комплексного числа $z$
$\arg(z)$	аргумент комплексного числа $z$
$\mathbf{1}$	вектор-столбец, состоящий из единиц
$\mathbf{0}$	вектор-столбец, состоящий из нулей
$\mathcal{R}(X)$	образ или линейная оболочка столбцов матрицы $X$
$\mathcal{N}(X)$	ядро или ноль-пространство матрицы $X$
$X^T$	транспонированная матрица к $X$
$X^{-1}$	обратная матрица к $X$
$X^+$	псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу к матрице $X$
$\sigma(X)$	спектр квадратной матрицы $X$
$\sigma'(X)$	спектр квадратной матрицы $X$ без одного нулевого собственного значения
$\sigma''(X)$	спектр квадратной матрицы $X$ без нулевых собственных значений
$X^\dagger$	собственный проектор квадратной матрицы $X$
$\operatorname{rank}(X)$	ранг матрицы $X$
$\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$	диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся числа $a_1, \dots, a_n$

## Список литературы

1. Агаев Р. П., Хомутов Д. К. Регуляризация при согласовании характеристик в многоагентных системах и ее графовая интерпретация / Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021). — Москва: ИПУ РАН, 2021. — С. 349–356. — Переводная версия: Agaev R.P., Khomutov D.K. Graph Interpretation of the Method of Orthogonal Projection for Regularization in Multiagent Systems / 14th International Conference "Management of Large-scale System Development"(MLSD). — М.:IEEE, 2021. — Р. 1–4.
2. Агаев Р. П., Хомутов Д. К. Исследование асимптотического поведения многоагентной системы с несвязной структурой / Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого). — Москва: ИПУ РАН, 2022. — С. 16–19. — Переводная версия: Agaev R., Khomutov D. On the Asymptotic Behavior of a Multiagent Systems with Arbitrary Structure and Time-Delays / 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). — Moscow: IEEE, 2022. — Р. 1–3.
3. Агаев Р. П., Хомутов Д. К. О свойствах метода ортогональной проекции в задаче о консенсусе // *Автоматика и телемеханика*. — 2023. — № 5. — С. 3–20. — Переводная версия: Agaev R.P., Khomutov D.K. On the properties of orthogonal projection method for reaching consensus // *Automation and Remote Control*. — 2023. — Vol. 84, no. 5. — Р. 457–469.
4. Агаев Р. П., Хомутов Д. К. О граничном значении запаздывания и асимптотике непрерывного протокола консенсуса первого порядка // *Автоматика и телемеханика*. — 2024. — № 6. — С. 83–96. — Переводная версия: Agaev R.P., Khomutov D.K. On the boundary value of the time-delay and the asymptotic behavior of a continuous first-order consensus protocol // *Automation and Remote Control*. — 2024. — Vol. 85, no. 6. — Р. 610–620.
5. Агаев Р. П., Хомутов Д. К. Анализ протокола согласования характеристик с дополнительными связями и запаздыванием // *Проблемы управления*. — 2026. — № 2. — С. 3–13.
6. Агаев Р. П., Хомутов Д. К. Оценка запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости, в задачах согласования характеристик // *Автоматика и телемеханика*. — 2026. — № 2. — С. 83–97. — Переводная версия: Agaev R.P., Khomutov D.K. Delay estimation to ensure

the maximum degree of convergence in consensus problems // Automation and Remote Control. – 2026. – Vol. 87, no. 2. – P. 159–169.

7. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и ее применения // *Автоматика и телемеханика*. — 2000. — № 9. — С. 15–43.
8. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Остовные леса орграфа и их применение // *Автоматика и телемеханика*. — 2001. — № 3. — С. 108–133.
9. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Лапласовские спектры орграфов и их приложения // *Автоматика и телемеханика*. — 2005. — № 5. — С. 47–62.
10. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Согласование характеристик в много-агентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // *Автоматика и телемеханика*. — 2009. — № 3. — С. 136–151.
11. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Метод проекции в задаче о консенсусе и регуляризованный предел степеней стохастической матрицы // *Автоматика и телемеханика*. — 2011. — № 12. — С. 38–59.
12. Агаев Р. П., Чеботарев П. Ю. Модели латентного консенсуса // *Автоматика и телемеханика*. — 2017. — № 1. — С. 106–120.
13. Амелина Н. О., Ананьевский М. С., Андриевский Б. Р., Граничин О. Н., Джунусов И. А., Матвеев А. С., Проскурников А. В., Пчёлкина И. В., Селиванов А. А., Фрадков А. Л., Фридман Э. М., Фуртат И. Б. Проблемы сетевого управления / под ред. А.Л. Фрадкова. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.
14. Апарцин А. С. К исследованию устойчивости решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода // *Автоматика и телемеханика*. — 2011. — № 6. — С. 95–102.
15. Гантмахер Ф. Теория матриц. — Физматлит, 2010.
16. Дегтярев И. С., Перегудов М. А., Колмыков Р. Ю., Колмыкова А. С. Алгоритм определения параметров обобщенного закона распределения Эрланга второго порядка // *Вестник Тамбовского государственного технического университета*. — 2024. — Т. 30, № 3. — С. 438–445.

17. *Дубинов А. Е.* Решение обобщенного сравнения степенных выражений с помощью W-функции Ламберта // *Вестник НИЯУ МИФИ.* — 2025. — Т. 14, № 4. — С. 357–367.
18. *Дубинов А. Е., Дубинова А. Е., Сайков С. К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. — Саров: Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики. Российский федеральный ядерный центр, 2006.
19. *Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.* Характеристические корни и область устойчивости одной динамической системы с запаздыванием // *Автоматика и телемеханика.* — 2005. — № 8. — С. 22–23.
20. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматлит, 1959.
21. *Мичурин Р. А., Николаев В. Т.* Использование W-функций Ламберта при построении области устойчивости систем автоматического управления со звеном запаздывания // *Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Экономика.* — 2013. — № 3 (24). — С. 191–197.
22. *Поляк Б. Т., Тремба А. А.* Решение задачи PageRank для больших матриц с помощью регуляризации // *Автоматика и телемеханика.* — 2012. — № 11. — С. 144–166.
23. *Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б.* Математическая теория автоматического управления: учеб. пособие. — М.: ЛЕНАНД, 2019.
24. *Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // *Автоматика и телемеханика.* — 1996. — № 11. — С. 91–104.
25. *Понтрягин Л. С.* О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // *Известия Российской академии наук. Серия математическая.* — 1942. — Т. 6, № 3. — С. 115–134.
26. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // *Прикладная математика и механика.* — 1956. — Т. 20. — С. 500–512.
27. *Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г.* Методы теории автоматического управления. — М.: Наука, 1971.

28. *Хомутов Д. К.* Исследование асимптотического поведения многоагентных систем с пропорциональным изменением влияния к фиксированному агенту / Труды 18-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2022, Челябинск). — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2022. — С. 558–563.
29. *Хомутов Д. К.* Сходимость многоагентной системы первого порядка с запаздыванием / Труды 19-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2023, Воронеж). — Воронеж: Воронежский государственный технический университет (Воронеж), 2023. — С. 69–74.
30. *Хомутов Д. К.* Протокол латентного консенсуса с фоновыми связями и запаздыванием / Труды 20-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2024, Новочеркасск). — Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова, 2024. — С. 62–66.
31. *Хомутов Д. К.* Сходимость протокола консенсуса с частичным запаздыванием / Сборник научных трудов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). — Москва: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2024. — С. 3200–3204.
32. *Хомутов Д. К.* О скорости сходимости в моделях консенсуса с запаздыванием / Труды 21-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2025, Тамбов). — Тамбов: Издательский центр ФГБОУ ВО ТГТУ, 2025. — С. 96–100.
33. *Хомутов Д. К.* Протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием // *Управление большими системами.* — 2025. — Т. 114. — С. 138–155.
34. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
35. *Цыпкин Я. З.* Устойчивость систем с запаздывающей обратной связью // *Автоматика и телемеханика.* — 1946. — Т. 7, № 2-3. — С. 107–129.
36. *Цыпкин Я. З.* Степень устойчивости систем с запаздывающей обратной связью // *Автоматика и телемеханика.* — 1947. — Т. 8, № 3. — С. 145–156.

37. Чеботарев П. Ю., Агаев Р. П. Об асимптотике в моделях консенсуса // *Управление большими системами: сборник трудов.* — 2013. — № 43. — С. 55–77.
38. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
39. Яровая Е. Б., Стоянов Й., Костяшин К. К. Об условиях, при которых вероятностное распределение однозначно определяется своими моментами // *Теория вероятностей и ее применения.* — 2019. — Т. 64, № 4. — С. 725–745.
40. Agaev R., Khomutov D. On the critical value of time-delay in multiagent systems / 2023 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). — Sochi: IEEE, 2023. — P. 1034–1039.
41. Asl F., Ulsoy A. G. Analysis of a system of linear delay differential equations // *J. Dyn. Sys., Meas., Control.* — 2003. — Vol. 125, no. 2. — P. 215–223.
42. Babasola O., Kayode O., Peter O. J., Onwuegbuche F. C., Oguntolu F. A. Time-delayed modelling of the COVID-19 dynamics with a convex incidence rate // *Informatics in Medicine Unlocked.* — 2022. — Vol. 35. — P. 101124.
43. Baker C. T. H., Bocharov G. A., Paul C. A. H., Rihan F. A. Modelling and analysis of time-lags in some basic patterns of cell proliferation // *Journal of Mathematical Biology.* — 1998. — Vol. 37, no. 4. — P. 341–371.
44. Baker C. T. H., Bocharov G. A., Rihan F. A. A report on the use of delay differential equations in numerical modelling in the biosciences. — Manchester, UK: Manchester Centre for Computational Mathematics, 1999.
45. Bando M., Hasebe K., Nakanishi K., Nakayama A. Analysis of optimal velocity model with explicit delay // *Physical Review E.* — 1998. — Vol. 58, no. 5. — P. 5429–5435.
46. Belair J., Mackey M. C. Consumer memory and price fluctuations in commodity markets: an integrodifferential model // *Journal of Dynamics and Differential Equations.* — 1989. — Vol. 1, no. 3. — P. 299–325.
47. Ben-Israel A., Greville T. N. E. Generalized inverses: theory and applications. — New York: Springer New York, 2003.

48. *Bose A., Ioannou P. A.* Analysis of traffic flow with mixed manual and semi-automated vehicles // *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. — 2004. — Vol. 4, no. 4. — P. 173–188.
49. *Brin S., Page L.* The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine // *Computer Networks and ISDN Systems*. — 1998. — Vol. 30, no. 1-7. — P. 107–117.
50. *Callender A., Hartree D. R., Porter A.* Time-lag in a control system // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. — Vol. 235, no. 756. — P. 415–444.
51. *Chebotarev P., Agaev R.* Forest matrices around the Laplacian matrix // *Linear Algebra and Its Application*. — 2002. — Vol. 356, no. 1–3. — P. 253–274.
52. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert W function // *Advances in Computational Mathematics*. — 1996. — no. 5. — P. 329–359.
53. *Corless R. M., Hare D. E., Jeffrey D. J.* Unwinding the branches of the Lambert W function // *The Mathematical Scientist*. — 1996. — Vol. 21. — P. 1–7.
54. *Cushing J. M.* Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. — Springer Science and Business Media, 2013.
55. *Fasi M., Higham N. J., Iannazzo B.* An algorithm for the matrix Lambert W function // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. — 2015. — Vol. 36, no. 2. — P. 669–685.
56. *Fiedler M.* Algebraic connectivity of graphs // *Czechoslovak Mathematical Journal*. — 1973. — Vol. 23, no. 2. — P. 298–305.
57. *Fiedler M., Sedlacek J.* O W-basich orientovanych grafu // *Casopis pro Pěstování Matematiky*. — 1958. — Vol. 83, no. 2. — P. 214–225.
58. *Foley C., Mackey M. C.* Dynamic hematological disease: a review // *Journal of Mathematical Biology*. — 2009. — Vol. 58. — P. 285–322.
59. *Fridman E.* New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems // *Systems and Control Letters*. — 2001. — Vol. 43, no. 4. — P. 309–319.

60. *Furtat I., Fridman E., Fradkov A.* Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2017. — Vol. 63, no. 1. — P. 298–305.
61. *Gartner N. H., Messer C. J., Rathi A.* Traffic flow theory A state of the art report: revised monograph on traffic flow theory. — Turner Fairbank Highway Research Center, 2002.
62. *Gopalsamy K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. — Dordrecht: Springer, 1992. — Vol. 74.
63. *Gu K., Chen J., Kharitonov V. L.* Stability of time-delay systems. — Berlin: Birkhäuser, 2003.
64. *Hale J. K., Lunel S. M. V.* Introduction to functional differential equations. — New York: Springer Science and Business Media, 2013.
65. *Hale M., Egerstedt M.* Convergence rate estimates for consensus over random graphs / 2017 American Control Conference (ACC). — Seattle, USA: IEEE, 2017. — P. 1024–1029.
66. *Hara S., Hayakawa T., Sugatani H.* Stability analysis of linear systems with generalized frequency variables and its applications to formation control / 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. — New Orleans, USA: IEEE, 2007. — P. 1459–1466.
67. *Hara S., Tanaka H., Iwasaki T.* Stability analysis of systems with generalized frequency variables // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2013. — Vol. 59, no. 2. — P. 313–326.
68. *Hara T., Sugie J.* Stability region for systems of differential-difference equations // *Funkcialaj Ekvacioj*. — 1996. — Vol. 39, no. 1. — P. 69–86.
69. *Hartree D. R., Porter A., Callender A., Stevenson A.* Time-lag in a control system II // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*. — 1937. — Vol. 161, no. 907. — P. 460–476.
70. *Hatano Y., Mesbahi M.* Agreement over random networks // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 11. — P. 1867–1872.
71. *Hayes N.* Roots of the transcendental equations associated with a certain differential-difference equation // *J. London Math Soc.* — 1950. — Vol. 1, no. 3. — P. 226–232.

72. *Helbing D.* Traffic and related self-driven many-particle systems // *Reviews of Modern Physics.* — 2001. — Vol. 73, no. 4. — P. 1067.
73. *Hou W., Fu M., Zhang H., Wu Z.* Consensus conditions for general second-order multi-agent systems with communication delay // *Automatica.* — 2017. — Vol. 75. — P. 293–298.
74. *Hwang C., Cheng Y.-C.* A note on the use of the Lambert W function in the stability analysis of time-delay systems // *Automatica.* — 2005. — Vol. 41, no. 11. — P. 1979–1985.
75. *Jadbabaie A., Lin J., Morse A. S.* Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 2003. — Vol. 48, no. 6. — P. 988–1001.
76. *Jarlebring E., Damm T.* The Lambert W function and the spectrum of some multidimensional time-delay systems // *Automatica.* — 2007. — Vol. 43, no. 12. — P. 2124–2128.
77. *Jin Z., Murray R. M.* Multi-hop relay protocols for fast consensus seeking / Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. — 2006. — P. 1001–1006.
78. *Kelly F. P., Maulloo A. K., Tan D. K. H.* Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability // *Journal of the Operational Research Society.* — 1998. — Vol. 49, no. 3. — P. 237–252.
79. *Kirchhoff G.* Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird // *Annalen der Physik.* — 1847. — Vol. 148, no. 12. — P. 497–508.
80. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied Theory of Functional Differential Equations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
81. *Lafferriere G., Caughman J., Williams A.* Graph theoretic methods in the stability of vehicle formations / Proceedings of the 2004 American Control Conference. — Boston, USA: IEEE, 2004. — P. 3729–3734.
82. *Lafferriere G., Williams A., Caughman J., Veerman J.* Decentralized control of vehicle formations // *Systems and Control Letters.* — 2005. — Vol. 54, no. 9. — P. 899–910.

83. *Lehtonen J.* The Lambert W function in ecological and evolutionary models // *Methods in Ecology and Evolution*. — 2016. — Vol. 7, no. 9. — P. 1110–1118.
84. *Lin P., Jia Y.* Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies // *Automatica*. — 2009. — Vol. 45. — P. 2154–2158.
85. *Lin P., Jia Y.* Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly-connected topologies // *Automatica*. — 2010. — Vol. 55. — P. 778–784.
86. *Liu C. L., Tian Y. P.* Formation control of multi-agent systems with heterogeneous communication delays // *International Journal of Systems Science*. — 2009. — Vol. 40, no. 6. — P. 627–636.
87. *Lu S., Gamarra M., Liu J.* Fast consensus over almost regular directed graphs / 2025 American Control Conference (ACC). — Denver, USA: IEEE, 2025. — P. 1593–1598.
88. *MacDonald N.* Biological delay systems: linear stability theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
89. *Matsumoto A., Szidarovszky F.* Asymptotic dynamics in a multi-market delayed cobweb model // *Computational Economics*. — 2025. — Vol. 65, no. 2. — P. 877–912.
90. *Mori T., Fukuma N., Kuwahara M.* On an estimate of the decay rate for stable linear delay systems // *International Journal of Control*. — 1982. — Vol. 36, no. 1. — P. 95–97.
91. *Mori T., Kuwahara M.* A Way to Stabilize Linear Systems With Delay // *IFAC Proceedings Volumes*. — 1981. — Vol. 14, no. 2. — P. 165–170.
92. *Munz U., Papachristodoulou A., Allgower F.* Delay robustness in consensus problems // *Automatica*. — 2010. — Vol. 46, no. 8. — P. 1252–1265.
93. *Nedić A., Ozdaglar A.* Convergence rate for consensus with delays // *Journal of Global Optimization*. — 2010. — Vol. 47, no. 3. — P. 437–456.
94. *Niculescu S. I.* Delay effects on stability: a robust control approach. — London: Springer London, 2002.

95. *Niculescu S. I., Boussaada I.* Counting characteristic roots of linear delay differential equations. Part II // *Controlling Delayed Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications*. — 2022. — Vol. 604. — P. 157–193.
96. *Niculescu S. I., Li X. G., Cela A.* Counting characteristic roots of linear delay differential equations. Part I // *Controlling Delayed Dynamics: Advances in Theory, Methods and Applications*. — 2022. — Vol. 604. — P. 117–155.
97. *Olfati-Saber R. M., Murray R. M.* Consensus Problem in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2004. — Vol. 49, no. 9. — P. 1520–1533.
98. *Parsegov S., Polyakov A., Shcherbakov P.* Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment / 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC). — Maui, USA: IEEE, 2012. — P. 7732–7737.
99. *Parsegov S., Polyakov A., Shcherbakov P.* Fixed-time consensus algorithm for multi-agent systems with integrator dynamics // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2013. — Vol. 46, no. 27. — P. 110–115.
100. *Peluso S., Turcu A., Palmieri R., Losa G., Ravindran B.* Making fast consensus generally faster / 2016 46th Annual IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN). — Toulouse, France: IEEE, 2016. — P. 156–167.
101. *Proskurnikov A. V.* Average consensus in networks with nonlinearly delayed couplings and switching topology // *Automatica*. — 2013. — Vol. 49, no. 9. — P. 2928–2932.
102. *Qu J., Ji Z., Lin C., Yu H.* Fast consensus seeking on networks with antagonistic interactions // *Complexity*. — 2018. — Vol. 2018, no. 1. — P. 7831317.
103. *Ramirez A., Sipahi R., Mondie S., Garrido R.* Fast consensus in a large-scale multi-agent system with directed graphs using time-delayed measurements // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. — 2019. — Vol. 377, no. 2153. — P. 20180130.
104. *Ren W., Beard R. W.* Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2005. — Vol. 50, no. 5. — P. 655–661.

105. *Ren W., Beard R. W., Atkins E. M.* Information consensus in multivehicle cooperative control // *IEEE Control Systems Magazine*. — 2007. — Vol. 27, no. 2. — P. 71–82.
106. *Riddalls C. E., Bennett S.* The stability of supply chains // *International Journal of Production Research*. — 2002. — Vol. 40, no. 2. — P. 459–475.
107. *Rothblum G.* Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius // *Mathematical Programming Study*. — 1976. — Vol. 6. — P. 188–201.
108. *Seuret A., Dimarogonas D. V., Johansson K. H.* Consensus under communication delay / 47th IEEE Conference on Decision and Control. — Cancun, Mexico: IEEE, 2008. — P. 4922–4927.
109. *Shinozaki M., Mori T.* Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results // *Automatica*. — 2006. — Vol. 42, no. 10. — P. 1791–1799.
110. *Sun Y. G., Wang L., Xie G.* Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays // *Systems and Control Letters*. — 2008. — Vol. 57, no. 2. — P. 175–183.
111. *Tan F., Liu D., Guan X.* Consensus value of multi-agent networked systems with time-delay / 2009 IEEE/INFORMS International Conference on Service Operations, Logistics and Informatics. — Chicago, USA: IEEE, 2009. — P. 179–184.
112. *Ugander J.* Delay-depend stability of genetic regulatory networks. — Lund: Department of Automatic Control, Lund University, 2008.
113. *Veerman J., Lafferriere G., Caughman J. S., Williams A.* Flocks and formations // *Journal of Statistical Physics*. — 2005. — Vol. 121, no. 5. — P. 901–936.
114. *Vielle B., Chauvet G.* Delay equation analysis of human respiratory stability // *Mathematical Biosciences*. — 1998. — Vol. 152, no. 2. — P. 105–122.
115. *Wang Z., Hu H.* Calculation of the rightmost characteristic root of retarded time-delay systems via Lambert W function // *Journal of Sound and Vibration*. — 2008. — Vol. 318, no. 4-5. — P. 757–767.

116. *Williams A., Lafferriere G., Veerman J.* Stable motions of vehicle formations / Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. — Seville, Spain: IEEE, 2005. — P. 72–77.
117. *Wolfowitz J.* Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices // *Proceedings of American Mathematical Society.* — 1963. — Vol. 15. — P. 733–736.
118. *Xia H., Huang T.-Z., Shao J.-L., Yu J.-Y.* Group consensus of multi-agent systems with communication delays // *Neurocomputing.* — 2016. — Vol. 171. — P. 1666–1673.
119. *Xu J., Zhang H., Xie L.* Input delay margin for consensusability of multi-agent systems // *Automatica.* — 2013. — Vol. 49, no. 6. — P. 1816–1820.
120. *Yang H. H., Peng H.* Development of an errorable car-following driver model // *Vehicle System Dynamics.* — 2010. — Vol. 48, no. 6. — P. 751–773.
121. *Yang W., Bertozzi A. L., Wang X.* Stability of a second order consensus algorithm with time delay / 2008 47th IEEE Conference on Decision and Control. — Cancun, Mexico: IEEE, 2008. — P. 2926–2931.
122. *Yang W., Wang X. and Shi H.* Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay // *Systems and Control Letters.* — 2013. — Vol. 62, no. 3. — P. 269,276.
123. *Yi S., Nelson P. W., Ulsoy A. G.* Analysis and control of time delayed systems via the Lambert W function // *IFAC Proceedings Volumes.* — 2008. — Vol. 41, no. 2. — P. 13414–13419.
124. *Yi S., Nelson P. W., Ulsoy A. G.* Time-delay systems: analysis and control using the Lambert W function. — New Jersey: World Scientific, 2010.
125. *Yu W., Chen G., M. C.* Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems // *Automatica.* — 2010. — Vol. 46, no. 6. — P. 1089–1095.
126. *Yu W., Zheng W. X., Chen G., Ren W., Cao J.* Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data // *Automatica.* — 2011. — Vol. 47, no. 7. — P. 1496–1503.
127. *Zhang H.-T., Chen M. Z., Stan G.-B.* Fast consensus via predictive pinning control // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers.* — 2011. — Vol. 58, no. 9. — P. 2247–2258.

128. *Zou C., Yu L., Yang S., Ou L.* Minimal-time complex consensus for multi-agent systems with time delay // *IET Control Theory and Applications*. — 2022. — Vol. 16, no. 12. — P. 1182–1193.