На правах рукописи

Хомутов Дмитрий Константинович

МЕТОДЫ СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК В МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕСВЯЗНОЙ СЕТЬЮ

Специальность: 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.

Научный руководитель: **Агаев Рафиг Паша оглы**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Фомичев Василий Владимирович**
доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», заведующий кафедрой нелинейных динамических систем и процессов управления,

Рогозин Александр Викторович
кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», старший научный сотрудник лаборатории дискретной и комбинаторной оптимизации

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук

Защита состоится 17 сентября 2026 года в 15:30 на заседании диссертационного совета 24.1.107.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук по адресу: 117342, Москва, вн. тер. г. муниципальный округ Коньково, ул. Профсоюзная, 65, стр. 2.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН и на сайте www.ipu.ru.
Отзывы на автореферат просьба направлять по почтовому адресу:
117997, ГСП-7, г. Москва, Варшавское шоссе, д. 45, ИПУ РАН.

Автореферат разослан «___» ____________ 20___ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.107.02, канд. физ.-мат. наук Тремба Андрей Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многоагентные системы с запаздыванием представляют большой интерес для исследования и встречаются во многих областях. Такие системы основаны на взаимодействии нескольких интеллектуальных автономных агентов, что используется, например, в задачах децентрализованного управления групповым движением, где участники корректируют свою скорость и положение исходя из характеристик своих соседей. При этом агентам не нужно знать о топологии всей сети, и нет необходимости в «центре», управляющем всеми агентами. Более того, агенты могут не только двигаться в заданном направлении, но и сохранять заданную формацию.

Однако в силу различных причин в подобных системах может возникать запаздывание. Модели управления транспортным потоком – частный случай группового движения, в котором запаздывание возникает из-за человеческого фактора: времени, необходимого водителю на обнаружение изменения ситуации во время движения, времени на реакцию и прочее. Такие модели, в частности, используются в задачах автоматизации транспортных средств для обеспечения безопасности дорожного движения и эффективного использования автомагистралей.

Запаздывания возникают в моделях, использующихся для анализа динамики цен на рынке товаров. На цену товара влияют спрос и предложение в данный момент времени, на которые, в свою очередь, влияют информация о прошлых ценах и задержки производства товара соответственно. Фактор задержки в производстве влияет на устойчивость рыночных моделей и может привести к неустойчивости, в то время как задержки при получении информации о ценах на взаимосвязанных рынках могут иметь стабилизирующий эффект. Запаздывание в процессе производства товаров возникает из-за времени, которое нужно для транспортировки материалов, настройки оборудования и самого производства.

В отличие от предыдущего примера, сеть взаимодействия может не иметь связности, с чем, например, сталкивается задача PageRank. Так в качестве вершин орграфа взяты веб-страницы, а направленная дуга между вершинами показывает наличие ссылки одной веб-страницы на другую. Такая система взаимодействия основана на несвязной сети, из-за чего может существовать несколько решений задачи PageRank. Также в протоколах управления в многоагентных системах с несвязной сетью коммуникаций возникает необходимость в согласовании характеристик для любых начальных значений. Для решения данной задачи применяются методы регуляризации.

В моделях, описывающих биологические системы, также возникает запаздывание. При анализе роста числа клеток необходимо учитывать время, которое требуется на деление клетки. Схожий принцип используется в эпидемиологических моделях. Анализ роста популяции должен учитывать, что новая особь не может дать потомство, пока не созреет и не станет репродуктивной. В модели роста численности популяции Вольтерра учитывается тот факт, что с увеличением плотности популяции уменьшается скорость ее роста. В связи с чем на скорость роста популяции влияет численность популяции в прошлом, что, например, учитывается в модели «хищник - жертва». В генетических сетях запаздывание возникает в силу времени протекания реакции. В фиксированный момент времени могут протекать реакции, которые не влияют на текущее состояние системы, но будут влиять на ее состояние через некоторое время. При описании модели дыхательного процесса необходимо учесть, что циркуляция углекислого газа в крови происходит с задержкой.

Во всех перечисленных предметных областях используются непрерывные дифференциальные и дискретные разностные модели с запаздыванием, основанные на взаимодействии скорости изменения текущих параметров системы с их состоянием в прошлые моменты времени, на чем основаны модели многоагентных систем с информационными влияниями и запаздыванием. Исследуемые в диссертационной работе задачи и предлагаемые методы являются актуальными для современных динамических систем, а рассматриваемые модели могут быть применимы в перечисленных выше предметных областях. Полученные результаты могут быть также применимы при анализе характеристик как многоагентных систем второго порядка, так и технических систем управления с запаздыванием.

Степень разработанности проблемы. Работы по дифференциально-разностным уравнениям впервые появились в 18-м веке в работах Лапласа и Эйлера. По-видимому, в те времена не было необходимости в глубоком теоретическом исследовании в области дифференциально-разностных уравнений при решении практических задач. Лишь в 1911 г. появилось более подробное исследование немецкого математика Э. Шмидта. С развитием промышленности и применением устройств управления с 1936 г. начали появляться научные работы A. Callender, D. Hartree, A. Porter, A. Stevenson и пр. по системам управления с запаздыванием. Такие системы могут быть заданы как в дискретном, так и в непрерывном времени. Акцент в данной диссертационной работе сделан на развитие методов анализа систем, заданных в непрерывном времени.

Начиная со второй половины прошлого века получены значимые результаты в области теории устойчивости систем управления с запаздыванием. Подходы, применяемые в разработанных методах анализа устойчивости, можно условно поделить на анализ положения нулей соответствующей характеристической функции и на применение прямого метода Ляпунова. В методах, разработанных в данной диссертационной работе, применяется первый подход.

Характеристической функцией линейных систем с запаздыванием является трансцендентная функция. Если нули данной функции находятся левее мнимой оси, то соответствующая система устойчива. Однако, трансцендентная функция имеет бесконечное счетное множество корней, что следует, например, из разложения экспоненты в ряд Тейлора, которое преобразует трансцендентную функцию в полином бесконечной степени. Устойчивость квазиполиномов исследуется в работах таких исследователей как A. Cela, N. Hayes, X.G. Li, S.I. Niculescu, Л.С. Понтрягина и пр. После знаменитого обзора R. M. Corless и др. W-функции Ламберта появилась серия работ Y. Cheng, T. Damm, C. Hwang, E. Jarlebring, T. Mori, M. Shinozaki и пр., в которых данная функция использовалась для явного выражения корней квазиполиномов. Другой подход заключается в анализе частотных характеристик соответствующих систем и основывается на критериях Михайлова и Найквиста. Данные критерии связывают устойчивость замкнутой системы и поведение годографа открытой системы. В работах Я.З. Цыпкина приведены методы анализа устойчивости замкнутой системы с отрицательной запаздывающей обратной связью. Аналогичные методы, использующие данный подход, приведены в работах таких исследователей как В.Б. Колмановский, Б.Т. Поляк, В.Л. Харитонов, Л.Э. Эльсгольц, J. Chen, K. Gu, J.K. Hale, S.M.V. Lunel и пр.

Прямой метод Ляпунова заключается в построении такой функции, для которой выполнены определенные матричные неравенства. Данный метод получил свое развитие в виде метода Красовского функционалов Ляпунова, метода Разумихина функций Ляпунова и в работах таких авторов как Л.Б. Рапопорт, А.Л. Фрадков, И.Б. Фуртат, М.В. Хлебников, E. Fridman, S.I. Niculescu и пр.

Многоагентные системы с информационными воздействиями занимают центральное место среди всех многоагентных систем. При получении данных от своих соседей агенты изменяют свои характеристики. На основе такого взаимодействия происходит процесс согласования характеристик. При анализе протоколов консенсуса в многоагентных системах ставится задача достижения агентами согласованной характеристики при любых начальных значениях. Для случая, когда передача информации между агентами проходит без запаздывания, разработано достаточно много методов анализа, устанавливающих связь сходимости протокола с лесной структурой соответствующей сети коммуникаций, чему посвящены работы таких исследователей как Р.П. Агаев, С.Э. Парсегов, П.Ю. Чеботарев, E.M. Atkins, R.W. Beard, A. Jadbabaie, J. Lin, A.S. Morse, R.M. Murray, R. Olfati-Saber, W. Ren и пр. Однако добавление параметра запаздывания существенно усложняет данную задачу – при больших значениях запаздывания вектор характеристик агентов может не иметь конечного предела, т.е. теряется асимптотическая устойчивость. Также существенно усложняется задача исследования асимптотического поведения устойчивого протокола управления, т.к. на него влияет параметр запаздывания. В работах таких авторов как А.Е. Поляков, А.В. Проскурников, F. Allgower, A.L. Bertozzi, J. Cao, D.V. Dimarogonas, M. Fu, S. Hara, T. Hayakawa, W. Hou, K.H. Johansson, U. Munz, A. Papachristodoulou, A. Seuret, H. Sugatat, W. Yang, W. Yu, W.X. Zheng и пр. разработаны методы анализа многоагентных систем с запаздыванием, которые основаны на подходах, описанных выше.

Объектом исследования являются многоагентные системы с информационными влияниями и запаздыванием.

Предметом исследования являются методы анализа устойчивости, степени сходимости и асимптотического поведения протоколов консенсуса с запаздыванием и несвязной структурой

Целью диссертации является разработка методов анализа устойчивости протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием и несвязной структурой и асимптотического поведения устойчивых протоколов консенсуса.

Данная цель определила следующие **задачи**:

- Разработать методы анализа базового протокола управления в многоагентных системах с запаздыванием для установки значения запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости.
- Расширить методы анализа устойчивости протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием для нахождения условия независимости устойчивости от запаздывания и граничного значения запаздывания.
- Разработать методы анализа асимптотического поведения устойчивых протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием для нахождения условия достижения консенсуса агентами при любом векторе начальных значений.
- Применить методы и алгоритмы регуляризации для многоагентных систем с запаздыванием и несвязной структурой.

Соответствие паспорту специальности. Работа выполнена в соответствии со следующими пунктами паспорта специальности 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»:

- П. 1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
- П. 3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
- П. 4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Метод нахождения значения запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости в базовом протоколе управления в многоагентных системах с запаздыванием с действительным спектром лапласовской матрицы (соответствует п.3, п.4 паспорта специальности 2.3.1).
2. Условие независимости устойчивости от запаздывания и граничное значение запаздывания для протоколов управления в многоагентных системах с частичным запаздыванием (соответствует п.1 паспорта специальности 2.3.1).
3. Анализ асимптотического поведения и метод вычисления предельных характеристик агентов в многоагентных системах с запаздыванием с помощью собственного проектора соответствующей лапласовской матрицы, который позволяет получить условие достижения консенсуса (соответствует п.1, п.4 паспорта специальности 2.3.1).
4. Графовая интерпретация метода ортогональной проекции в общем случае с небазовыми агентами и представление выражения для консенсуса с помощью псевдообратной матрицы при его применении (соответствует п.1 паспорта специальности 2.3.1).
5. Анализ протокола латентного консенсуса (с добавлением слабых фоновых связей) и метод вычисления граничного значения запаздыва-

ния и предельных характеристик агентов в многоагентных системах с несвязной сетью и запаздыванием при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям (соответствует п.4 паспорта специальности 2.3.1).

Научная новизна.

1. С помощью W-функции Ламберта получено выражение для запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости базового протокола консенсуса с запаздыванием, зависящее только от минимального ненулевого и максимального собственных значений матрицы с действительным спектром.
2. Для протоколов управления в многоагентных системах с частичным запаздыванием получены условие независимости устойчивости от запаздывания и граничное значение запаздывания, которые зависят от спектральных свойств соответствующей лапласовской матрицы.
3. С помощью алгебраических методов теории графов впервые установлена связь между асимптотическим поведением характеристик агентов при применении устойчивых протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием и лесной структурой сети коммуникаций.
4. Доказано, что метод ортогональной проекции является естественным обобщением протокола консенсуса и характеризуется элементами первой строки псевдообратной матрицы, для которых также дана графовая интерпретация. Результат использован для вычисления предельных характеристик агентов.
5. Для многоагентных систем с запаздыванием и несвязной сетью коммуникаций проанализирован протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием, позволяющий достичь консенсус при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии теории устойчивости систем управления с запаздыванием, получении явного выражения характеристик систем управления с запаздыванием, условий независимости устойчивости данных систем от запаздывания и условий достижения агентами согласованной характеристики при любом векторе начальных значений.

Практическая значимость работы обуславливается возможностью применения полученных результатов в протоколах управления многоагентными системами второго порядка, системах с устойчивой матрицей и в моделях, которые были приведены в актуальности темы диссертационной работы.

Методы исследования. Линейная алгебра, дифференциальные уравнения с запаздыванием, алгебраическая теория графов, теория управления, комплексный анализ, в частности, операционное исчисление и многозначная W-функция Ламберта.

Достоверность полученных научных результатов подтверждается корректностью и непротиворечивостью математических выкладок, полученных в результате применения строгих математических методов. Полученные результаты подтверждены с помощью компьютерного моделирования и опубликованы в рецензируемых печатных и электронных изданиях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, всероссийских школах-конференций молодых ученых «Управление большими системами», УБС (Челябинск, 2022; Воронеж, 2023; Новочеркасск, 2024; Тамбов, 2025), Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD-2021, Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) 2022, Международной научно-технической конференции «Автоматизация» (RusAutoCon, Сочи, 2023), «Всероссийском совещании по проблемам управления» (ВСПУ-2024).

Публикации. Результаты диссертационной работы отображены в 13 научных работах, из которых 2 статьи [1, 2] в рецензируемых изданиях по специальности 2.3.1 (физ.-мат.), относящихся к категории К1 Перечня ВАК, 3 статьи [3–5] в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1, и 8 публикаций [6–13] в сборниках трудов международных и всероссийских конференций.

Личный вклад. Все основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Диссертация содержит 12 рисунков. Полный объем диссертации составляет 128 страниц. Список литературы содержит 128 наименований.

Содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, определяется цель исследования, перечисляются основные результаты и практическая ценность работы, а также рассматривается краткое содержание диссертации.

Первая глава посвящена основным понятиям и известным результатам в теории многоагентных систем с запаздыванием. Многоагентная система – это система, образованная несколькими взаимодействующими интеллектуальными автономными агентами. Многоагентную систему с множеством агентов $V = \{1, ..., n\}$ удобно представить в виде орграфа связей $\Gamma = (V, E)$, где $E \subset V \times V$ – множество взвешенных дуг. Если агент j влияет на агента i с весом a_{ij}, то существует дуга из вершины j в вершину i с тем же весом. Обозначим такую дугу через (j, i). Если агент j не влияет на агента i, то $a_{ij} = 0$. Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей коммуникаций.

Исходящий лес в Γ – подграф в Γ, в котором нет циклов, а в каждую вершину входит не более одной дуги. Вершина j является корнем исходящего леса, если нет входящих в нее дуг.

Определение 1.1. Весом исходящего леса является произведение весов всех его дуг.

Определение 1.2. Вес множества лесов – это сумма весов всех лесов, входящих в данное множество.

Определение 1.3. Непустое подмножество вершин K орграфа $\Gamma = (V, E)$ называют базовой бикомпонентой, если все вершины, принадлежащие K, взаимно достижимы, и нет дуг (i, j), где $j \in K$, $i \in V \backslash K$. Множество вершин всех базовых бикомпонент обозначим через $\mathcal{K}$. Множество вершин, не принадлежащих базовым бикомпонентам, обозначим через $\bar{\mathcal{K}} = V \backslash \mathcal{K}$, и назовем их небазовыми.

Определение 1.4. Назовем орграф Γ связным, если в нем существует хотя бы одна вершина, из которой достижимы все остальные вершины. Если такой вершины нет, то орграф Γ назовем несвязным.

Очевидно, что если орграф Γ содержит одну базовую бикомпоненту, то орграф будет связным. Если в орграфе есть несколько базовых бикомпонент, то такой орграф будет несвязным.

Лапласовская матрица $L = (l_{ij})$, соответствующая орграфу Γ, строится следующим образом: $l_{ij} = -a_{ij}$ если $j \neq i$, и $l_{ii} = \sum_{k \neq i} a_{ik}$. Ноль всегда будет собственным значением матрицы L, его алгебраическая и геометрические кратности совпадают, и это значение совпадает с количеством базовых бикомпонент в соответствующем орграфе Γ.

Определение 1.5. Собственным проектором лапласовской матрицы L, соответствующий нулевому собственному значению, называется такая идемпотентная матрица $L^{\vdash}$, что $\mathcal{R}(L^{\vdash}) = \mathcal{N}(L)$ и $\mathcal{R}(L) = \mathcal{N}(L^{\vdash})$, где $\mathcal{R}(X)$ и $\mathcal{N}(X)$ – образ и ядро матрицы X соответственно. Для лапласовской матрицы $L^{\vdash}$ также будет стохастической матрицей.

Базовый протокол консенсуса в многоагентной системе первого порядка с запаздыванием имеет матричный вид:

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\
u(t) = -Lx(t-\tau), & t \geq 0; \\
x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0],
\end{cases} \tag{1.1}
$$

где $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T$ – вектор-столбец характеристик агентов в момент времени t, $x_i(t)$ – характеристика i-го агента в момент времени t, $\phi(\theta) = (\phi_1(\theta), ..., \phi_n(\theta))^T$ – вектор начальных функций.

Определение 1.6. Будем говорить, что протокол (1.1) устойчив, если решение $x(t)$ соответствующей системы имеет конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, т.е. если соответствующая система асимптотически устойчива.

Определение 1.7. Протокол (1.1) сходится к консенсусу, если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = c\mathbf{1}$, где $x(t)$ – решение системы (1.1), c – некая константа, значение консенсуса. В таком случае говорят, что в системе (1.1) достигается асимптотический консенсус или просто – достигается консенсус.

Определение 1.8. Назовем степенью сходимости системы (1.1) величину $\zeta_0 = -\max(\mathrm{Re}(s))$, где s – ноль функции $G(s) = \prod_{\lambda\in\sigma(L)\setminus\{0\}} f_\lambda(s)$.

Степень сходимости системы (1.1) в общем случае не характеризует скорость сходимости, а является аппроксимацией экспоненциальной скорости сходимости характеристик агентов.

Теорема 1.1. *Протокол* (1.1) устойчив, если $\tau < \tau_0 = \min\limits_{\lambda\neq 0} \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} - \arg\lambda\right)$, где $\lambda \in \sigma(L)$.

Действительная W-функция Ламберта $W(x)$, как и в случае комплексной переменной, определяется как решение функционального уравнения $W(x)e^{W(x)} = x$. В комплексной области W-функция Ламберта является многозначной. Комплексной плоскости ставится в соответствие множество значений функций $w = W_k(z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Лемма 1.1. *Для любого* $z \in C$ *верно*

$$\max\{\mathrm{Re}(W_k(z)) : k = 0, \pm1, \pm2, ...\} = \mathrm{Re}(W_0(z)).$$

Во второй главе рассматривается система (1.1), в которой матрица L имеет действительный спектр, т.е. $\sigma(L) = \{0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_n\}$. Для такой системы рассматривается следующая задача: найти значение τ^*, при котором достигается максимальная степень сходимости.

Рассмотрим характеристическую функцию системы (1.1):

$$F(s) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L)\setminus\{0\}} (s + \lambda e^{-\tau s}) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L)\setminus\{0\}} f_\lambda(s) = sG(s). \tag{2.1}$$

Рассмотрим нули функции $G(s)$. Уравнение

$$f_\lambda(s) = s + \lambda e^{-\tau s} = 0 \tag{2.2}$$

представим в виде $\tau s e^{\tau s} = -\tau\lambda$. Поскольку $W(z)e^{W(z)} = z$, то τs (s – корень уравнения (2.2)) будет значением W-функции Ламберта в $-\tau\lambda$, т.е. $W(-\tau\lambda) = \tau s$. Тогда в силу леммы 1.1 для анализа степени сходимости системы (1.1) достаточно рассмотреть корень $s = \frac{1}{\tau}W_0(-\tau\lambda)$.

Предложение 2.1. *Пусть* s_0 *– решение уравнения* $f_\lambda(s) = s + \lambda e^{-\tau s} = 0$ *(*$\lambda > 0$*) с максимальной действительной частью. Тогда* $\arg\min\limits_{\tau} \mathrm{Re}(s_0) = \tau^*_\lambda = \frac{1}{e\lambda}$.

Следствие 2.1. *Для скалярного дифференциального уравнения с запаздыванием* $\dot{y}(t) = -\lambda y(t - \tau)$, *с начальным условием* $y(\theta) = y_0 \neq 0$ *при* $\theta \in [-\tau, 0]$, *максимальная степень устойчивости достигается при* $\tau = \frac{1}{e\lambda}$.

Теорема 2.1. *Пусть* $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}$ *и* $\xi = -\arccos(q) \cdot \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$. *Тогда максимальная степень сходимости* ζ_0 *достигается при* $\tau = \tau^* = \frac{-\xi e^\xi}{\lambda_2}$, *значение которой равно* $\zeta_0 = \frac{\lambda_2}{e^\xi}$.

Таким образом, увеличение степени сходимости системы (1.1) с фиксированной лапласовской матрицей возможно с помощью изменения запаздывания. Однако изменится ли асимптотическое поведение системы (1.1) при изменении запаздывания? В частности, изменится ли значение консенсуса при изменении запаздывания и какое условие достижения консенсуса устойчивой системы (1.1) при любом векторе начальных значений?

Теорема 2.2. *Пусть протокол* (1.1) *устойчив,* $\phi(\theta) = x_0$. *Тогда*

1) если $x(t)$ *– решение системы* (1.1), *то*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = L^{\vdash} x_0.$$

2) если 0 – простое собственное значение матрицы L, *то протокол* (1.1) *будет сходиться к консенсусу при любом векторе* x_0.

В третьей главе исследуются устойчивость и сходимость протоколов консенсуса в многоагентных системах с частичным запаздыванием.

Обобщенный протокол консенсуса первого порядка в многоагентных системах имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -aLx(t) - bLx(t-\tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{3.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $a \geq 0$, $b > 0$, $a \neq b$. В частности, если $a = 0$, то протокол (3.1) примет вид (1.1).

Предложение 3.1. *Система* (3.1) *устойчива при любом значении* $\tau \geq 0$, *если*

$$\frac{a}{b} > \max_{\lambda_j \in \sigma(L)\setminus\{0\}} \frac{1}{\cos\varphi_j}.$$

Теорема 3.1. *Пусть множество* $\Lambda = \left\{\lambda \in \sigma(L)\setminus\{0\} \mid a \leq \frac{1}{\cos\varphi_j} b\right\}$ *не пусто. Для каждого* $\lambda_j \in \Lambda$ *вычислим значения*

$$\tau_0^j = \frac{\arccos\left(-\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2}}{|\beta|^2}\right)}{\sqrt{|\beta|^2 - \alpha_1^2} - \alpha_2}. \tag{3.2}$$

Тогда система (3.1) *устойчива при любом* $\tau < \tau_0$, *где* $\tau_0 = \min\limits_{\lambda_j \in \Lambda} \tau_0^j$.

Теорема 3.2. *Пусть система* (3.1) *устойчива и* $\phi(\theta) = x_0$. *Тогда если* $x(t)$ *– решение системы* (3.1), *то*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = L^{\vdash} x_0,$$

т.е. вектор, к которому сходится протокол (3.1), *не зависит от коэффициентов* a *и* b, *а также от* τ.

Дополненный протокол консенсуса первого порядка в многоагентной системе имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -L_1 x(t) - \gamma L_2 x(t-\tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{3.3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, L_1 и L_2 – нормированные лапласовские матрицы, т.е. $0 \leq |l_{ij}| \leq \frac{1}{n}$, $i \neq j$, а матрица $K = L_1 + L_2$ – лапласовская матрица полного графа с весами всех дуг $\frac{1}{n}$, $\gamma \in (0, 1]$.

Для данного протокола спектр матрицы $\sigma(L_1)$ будет рассматриваться с учетом кратности, т.е. $\sigma(L_1)$ может содержать одинаковые элементы. Обозначим через $\sigma'(L_1)$ – спектр матрицы без одного нулевого собственного значения, E – матрица размерности $n \times n$, состоящая из единиц.

Предложение 3.2. *1) Если* $\gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 < \alpha^2$ *для всех* $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma'(L_1)$, *то устойчивость протокола* (3.3) не зависит от запаздывания.

2) Пусть матрице $L_1 = (l^1_{ij})$ соответствует неориентированный граф G_1, а матрице $L_2 = (l^2_{ij})$ – неориентированный граф G_2, $\gamma = 1$, $\min\limits_i l^1_{ii} > \frac{3n-4}{4n}$. Тогда устойчивость протокола (3.3) не будет зависеть от запаздывания.

Теорема 3.3. *Пусть множество* $\Lambda = \left\{\lambda \in \sigma'(L_1) \mid \gamma^2(1-\alpha)^2 + \gamma^2\beta^2 \geq \alpha^2\right\}$ *не пусто. Для всех действительных* $\lambda \in \Lambda$ *вычислим значения*

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\lambda}{\gamma(1-\lambda)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\lambda)^2 - \lambda^2}},$$

а для пар комплексно-сопряженных $\lambda = \alpha \pm i\beta$ *значения*

$$\tau_\lambda^{1,2} = \frac{\arccos\left(-\frac{(1-\alpha)\alpha\mp\beta\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2+\gamma^2\beta^2-\alpha^2}}{\gamma((1-\alpha)^2+\beta^2)}\right)}{\sqrt{\gamma^2(1-\alpha)^2+\gamma^2\beta^2-\alpha^2}\mp\beta};$$

$$\tau_\lambda = \min\{|\tau_\lambda^1|, \tau_\lambda^2\}.$$

Тогда протокол (3.3) устойчив при любом $\tau < \tau_0 = \min\limits_{\lambda\in\Lambda} \tau_\lambda$.

Теорема 3.4. *Пусть протокол* (3.3) устойчив, и $x(t)$ – решение системы (3.3). Тогда

1) если $\phi(\theta) = x_0$, то

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{n}E\left(I + \frac{1-\gamma}{\gamma}L_1\right)^{-1}(I-\gamma\tau L_2)x_0;$$

2) если

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta\in[-\tau,0); \\ x_0, & \theta = 0, \end{cases}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{n}E\left(I + \frac{1-\gamma}{\gamma}L_1\right)^{-1}x_0.$$

В четвертой главе рассматриваются протоколы консенсуса в многоагентных системах с несвязной сетью.

Ортогональный проектор S на подпространство $Q_L = \mathcal{R}(L) \oplus \mathrm{Span}(\mathbf{1})$ представляется в виде

$$S = UU^+ = U(U^TU)^{-1}U^T, \tag{4.1}$$

где U – матрица полного столбцового ранга, полученная из L отбрасыванием по одному столбцу, соответствующему какой-либо вершине из каждой базовой бикомпоненты орграфа, и добавлением столбца $\mathbf{1}_n$ в качестве первого, U^+ – псевдообратная по Муру-Пенроузу.

Пусть E_{10} - квадратная матрица порядка n, первый столбец которой состоит из единиц, а все остальные элементы равны нулю.

Предложение 4.1.

1) Если $\mathrm{rank}(L) = n-1$, *то* $L^\vdash S = L^\vdash I = E_{10}U^{-1}$.

2) Если $\mathrm{rank}(L) < n-1$, *то* $L^\vdash S = E_{10}U^+$.

Из предложения 4.1 следует, что если в системе достигается консенсус, то он однозначно определяется нормированными весами множества остовных исходящих деревьев орграфа коммуникаций. В свою очередь, эти веса однозначно определяются первой строкой матрицы U^{-1}. В силу предложения 4.1, метод ортогональной проекции является естественным обобщением согласования характеристик и определяется в общем случае первой строкой псевдообратной по Муру-Пенроузу матрицы U. Известно, что элементы псевдообратной матрицы, также как для невырожденной матрицы, можно представить с помощью миноров исходной матрицы следующим образом:

$$u^{+}_{1i_1} = \frac{\sum_{i_2<\ldots<i_r} \det U\binom{i_2\ldots i_r}{2\ldots r} \det U\binom{i_1\ldots i_r}{1\ldots r}}{\sum_{k_1<\ldots<k_r} \left(\det U\binom{k_1\ldots k_r}{1\ldots r}\right)^2}. \tag{4.2}$$

Предложение 4.2. *1) Миноры* $\det U\binom{i_1\ldots i_r}{1\ldots r}$ *и* $\det U\binom{i_2\ldots i_r}{2\ldots r}$ *равны нулю, если они получаются путем вычеркивания хотя бы одной строки, соответствующей вершине из* $\bar{\mathcal{K}}$.

2) Минор $\det U\binom{i_2\ldots i_r}{2\ldots r}$ *равен нулю, если множество* $\{i_2, ..., i_r\}$ *содержит все вершины одной базовой бикомпоненты.*

3) Абсолютное значение ненулевого минора $\det U\binom{i_2\ldots i_r}{2\ldots r}$ *равно произведению* $\det L_R$ *на вес множества всех исходящих лесов на* $\mathcal{K}$ *с корнями из вершин* $\{1, ..., n\}\backslash\{i_2, ..., i_r\}$*, где значение* $\det L_R$ *равно весу множества остовных исходящих деревьев ографа* Γ_ξ*, полученного из* Γ *"склеиванием" базовых бикомпонент в одну вершину* ξ.

Теорема 4.1. *Для системы с произвольным орграфом связей сумма элементов первой строки матрицы* U^+ *равна 1:*

$$\sum_{i=1}^{n} u^{+}_{1i} = 1.$$

Итак, метод ортогональной проекции в МАС с любым орграфом связей и вектором начальных значений x_0 приводит к консенсусу, и консенсус определяется произведением

$$(u_{11}^{+}, ..., u_{1n}^{+})x_0^T.$$

В частности, если орграф связей содержит остовное дерево, то в этом случае матрица U будет квадратной, невырожденной, и, согласно (4.2), выполняется

$$u_{1i}^{+} = u_{1i}^{-1} = \frac{\left|\det U\binom{(1...n)\setminus i}{2...n}\right| \det U}{(\det U)^2} = \frac{\left|\det U\binom{(1...n)\setminus i}{2...n}\right|}{\det U} = l_{1i}^{\vdash}.$$

Протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t \geq 0; \\ u(t) = -\delta D x(t) - L x(t-\tau), & t \geq 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\delta > 0$, $D = I - V$, $V = \mathbf{1}v^{\top}$, $\sum_i v_i = 1$.

Предложение 4.3. *Пусть для каждого $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(L)$ выполнено условие $\alpha^2 + \beta^2 < \delta^2$. Тогда устойчивость протокола* (4.3) *не будет зависеть от τ.*

Следствие 4.2. *При $\delta \to 0$ устойчивость протокола* (4.3) *всегда будет зависеть от τ.*

Теорема 4.2. *Пусть при фиксированном δ множество $\Psi = \{\lambda \in \sigma(L) \mid \alpha^2 + \beta^2 \geq \delta^2\}$ непусто. Для каждого $\lambda \in \Psi$ вычислим значение*

$$\tau_\lambda = \frac{\arccos\left(-\frac{\alpha\delta + \beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\delta^2}}.$$

Тогда протокол (4.3) *будет устойчив тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \Psi} \tau_\lambda$.*

Теорема 4.3. *При $\delta \to 0$ протокол* (4.3) *будет устойчивым тогда и только тогда, когда $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L)\setminus\{0\}} \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} - |\arg\lambda|\right)$. Иными словами, при $\delta \to 0$ граничное значение запаздывания стремится к значению, полученному в теореме 1.1.*

Теорема 4.4. *Пусть дан устойчивый протокол консенсуса* (4.3) *с начальной функцией* $\phi(\theta) = x_0$*. Тогда*

1. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathbf{1}v^\top \left(I + \frac{1}{\delta}L\right)^{-1}(I - \tau L)x_0$;
2. $\lim_{\delta\to 0}\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathbf{1}v^\top L^{\vdash} x_0$.

Таким образом, протокол (4.3) *будет сходиться к консенсусу при любом векторе* x_0.

Основные результаты диссертационной работы

В диссертационной работе разработаны методы анализа протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием и несвязной структурой. С помощью предложенных методов для базового протокола консенсуса с запаздыванием получено выражение для запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости, которое зависит только от минимального ненулевого и максимального собственных значений соответствующей лапласовской матрицы с действительным спектром. Для протоколов управления в многоагентных системах с частичным запаздыванием получены условие независимости устойчивости от запаздывания и граничное значение запаздывания, которые зависят от спектральных свойств соответствующей лапласовской матрицы. С помощью алгебраических методов теории графов установлена связь между асимптотическим поведением характеристик агентов при применении устойчивых протоколов управления в многоагентных системах с запаздыванием и лесной структурой сети коммуникаций. Для многоагентных систем с несвязной сетью и запаздыванием рассмотрены способы достижения консенсуса при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям. Показано, что предложенный ранее метод ортогональной проекции является естественным обобщением протокола консенсуса, и доказано, что значение консенсуса определяется первой строкой псевдообратной матрицы, для элементов которой также дана графовая интерпретация. Рассмотрен протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием, который позволяет достичь агентам согласованной характеристики при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям.

В работе получены следующие основные результаты, обладающие научной новизной:

1) Разработан метод нахождения значения запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости в базовом протоколе управления в многоагентных системах с запаздыванием с действительным спектром лапласовской матрицы.

2) Получено условие независимости устойчивости от запаздывания и граничное значение запаздывания для протоколов управления в многоагентных системах с частичным запаздыванием.

3) Проведен анализ асимптотического поведения и предложен метод вычисления предельных характеристик агентов в многоагентных системах с запаздыванием с помощью собственного проектора соответствующей лапласовской матрицы, который позволяет получить условие достижения консенсуса.

4) Приведена графовая интерпретация метода ортогональной проекции в общем случае с небазовыми агентами и получено представление выражения для консенсуса с помощью псевдообратной матрицы при его применении.

5) Проведен анализ протокола латентного консенсуса (с добавлением слабых фоновых связей) и предложен метод вычисления граничного значения запаздывания и предельных характеристик агентов в многоагентных системах с несвязной сетью и запаздыванием при любой постоянной функции, соответствующей начальным условиям.

Разработанные методы анализа многоагентных систем с запаздыванием позволят распространить полученные результаты на протоколы в многоагентных системах второго порядка с запаздыванием.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых изданиях по специальности 2.3.1 (физ.-мат.), относящихся к категории К1 Перечня ВАК

1. *Хомутов Д. К.* Протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием // *Управление большими системами.* — 2025. — Т. 2. — С. 83–97.

2. *Агаев Р. П., Хомутов Д. К.* Анализ протокола согласования характеристик с дополнительными связями и запаздыванием // *Проблемы управления.* — 2026. — № 2. — С. 3–13.

Публикации в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам категории К1 Перечня ВАК:

3. *Агаев Р. П., Хомутов Д. К.* О свойствах метода ортогональной проекции в задаче о консенсусе // *Автоматика и Телемеханика.* — 2023. — № 5. — С. 3–20. — Переводная версия: Agaev R.P., Khomutov D.K. On the properties of orthogonal projection method for reaching consensus // Automation and Remote Control. — 2023. — Vol. 84, no. 5. — P. 457–469.

4. *Агаев Р. П., Хомутов Д. К.* О граничном значении запаздывания и асимптотике непрерывного протокола консенсуса первого порядка // *Автоматика и Телемеханика.* — 2024. — № 6. — С. 83–96. — Переводная версия: Agaev R.P., Khomutov D.K. On the boundary value of the time-delay and the asymptotic behavior of a continuous first-order consensus protocol // Automation and Remote Control. — 2024. — Vol. 85, no. 6. — P. 610–620.

5. *Агаев Р. П., Хомутов Д. К.* Оценка запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости, в задачах согласования характеристик // *Автоматика и Телемеханика.* — 2026. — № 2. — С. 83–97. — Переводная версия: Agaev R.P., Khomutov D.K. Delay estimation to ensure the maximum degree of convergence in consensus problems // Automation and Remote Control. — 2026. — Vol. 87, no. 2. — P. 159–169.

Публикации в сборниках трудов конференций:

6. *Агаев Р. П., Хомутов Д. К.* Регуляризация при согласовании характеристик в многоагентных системах и ее графовая интерпретация / Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021). — Москва: ИПУ РАН, 2021. — С. 349–356. — Переводная версия: Agaev R.P., Khomutov D.K. Graph Interpretation of the Method of Orthogonal Projection for Regularization in Multiagent Systems / 14th International Conference "Management of Large-scale System Development"(MLSD). — M.:IEEE, 2021. — P. 1–4.

7. *Агаев Р. П., Хомутов Д. К.* Исследование асимптотического поведения многоагентной системы с несвязной структурой / Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) — Москва: ИПУ РАН, 2022. — С. 16–19. — Переводная версия: Agaev R., Khomutov D. On the Asymptotic Behavior of a Multiagent Systems with Arbitrary Structure and Time-Delays / 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). — Moscow: IEEE, 2022. — P. 1–3.

8. *Хомутов Д. К.* Исследование асимптотического поведения многоагентных систем с пропорциональным изменением влияния к фиксированному агенту / Труды 18-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2022, Челябинск). — Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2022. — С. 558–563.

9. *Agaev R., Khomutov D. K.* On the critical value of time-delay in multiagent systems // 2023 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). — Sochi: IEEE, 2023. — P. 1034–1039.

10. *Хомутов Д. К.* Сходимость многоагентной системы первого порядка с запаздыванием / Труды 19-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2023, Воронеж). — Воронеж: Воронежский государственный технический университет (Воронеж), 2023. — С. 69–74.

11. *Хомутов Д. К.* Протокол латентного консенсуса с фоновыми связями и запаздыванием / Труды 20-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2024, Новочеркасск). — Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова, 2024. — С. 62–66.

12. *Хомутов Д. К.* Сходимость протокола консенсуса с частичным запаздыванием / Сборник научных трудов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). — Москва: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2024. — С. 3200–3204.

13. *Хомутов Д. К.* О скорости сходимости в моделях консенсуса с запаздыванием / Труды 21-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2025, Тамбов). — Тамбов: Издательский центр ФГБОУ ВО ТГТУ, 2025. — С. 96–100.

Вклад автора в работы, опубликованные в соавторстве. В работах [3, 6] – графовая интерпретация метода ортогональной проекции, разработка метода балансировки орграфа пропорциональным изменением влияния агентов. В работах [2,4,7,9] – получение условия независимости устойчивости от запаздывания и граничного значения запаздывания рассматриваемых протоколов. Получение асимптотического поведения и условия достижения агентами консенсуса для устойчивых рассматриваемых протоколов. В работе [5] – получение значения запаздывания, при котором достигается максимальная степень сходимости базового протокола.

Научное издание

Хомутов Дмитрий Константинович

Методы согласования характеристик в многоагентных системах с запаздыванием и несвязной сетью

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 28.05.2026. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 1,6. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 79.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук

117342, г. Москва, вн. тер. г. муниципальный округ Коньково,
ул. Профсоюзная, д. 65, стр. 2

http://www.ipu.ru