На правах рукописи

Тормагов Тимофей Алексеевич

Задачи полуопределенного программирования в спутниковой навигации и планировании путей колесных роботов

Специальность 2.3.1 —
«Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:	**Рапопорт Лев Борисович**, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Канатников Анатолий Николаевич,** доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры «Математическое моделирование»
	Седова Наталья Олеговна, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный университет», профессор кафедры информационных технологий
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится 1 октября 2026 года в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.107.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук по адресу: 117342, г. Москва, вн. тер. г. муниципальный округ Коньково, ул. Профсоюзная, д. 65, стр. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН и на сайте www.ipu.ru.

Отзывы на автореферат просьба направлять по почтовому адресу: 117997, ГСП-7, г. Москва, Варшавское шоссе, д. 45, ИПУ РАН.

Автореферат разослан "______"________________________ 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.107.02,
кандидат физико-математических
наук — Тремба Андрей Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В данной диссертационной работе рассматриваются подходы к решению реальных практических задач, возникающих в спутниковой навигации и в планировании путей колесных роботов, основанные на переходе к задачам полуопределенного программирования.

В стандартной постановке задачи полуопределенного программирования состоят в минимизации (или максимизации) линейной функции на ограничениях, заданных линейными матричными неравенствами. Полуопределенное программирование является одним из классов задач выпуклой оптимизации, включающим в себя классы задач линейного программирования и конического программирования второго порядка. Свойство выпуклости задач полуопределенного программирования позволяет использовать для их численного решения вычислительно эффективные алгоритмы. Задачи полуопределенного программирования возникают в различных областях техники, например, в автоматическом управлении и обработке сигналов. Однако они редко формулируются напрямую в стандартной постановке. Часто задачи, возникающие на практике, свойством выпуклости не обладают. Это относится в первую очередь к задачам дискретного программирования, а также к некоторым задачам оптимизации с вещественными переменными. Численные методы решения таких задач отличаются высокой трудоемкостью, подчас экспоненциальной. В приложениях широкое распространение получил подход, называемый выпуклой релаксацией. Этот подход состоит в таком ослаблении ограничений исходной задачи, что допустимая область задачи с ослабленными ограничениями (релаксированной задачи) оказывается выпуклой. Вместо исходной задачи рассматривается релаксированная задача, для решения которой могут использоваться вычислительно эффективные методы. Часто они имеют полиномиальную трудоемкость: число операций полиномиально зависит от размерности задачи. При этом для релаксированной задачи минимизации (максимизации) мы получим значение целевой функции равное либо меньшее (большее), чем у исходной. Практическую значимость имеет оценка разницы между этими значениями.

В настоящее время активно развиваются существующие глобальные спутниковые навигационные системы и появляются новые. При совместном использовании сигналов нескольких глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), таких, как ГЛОНАСС, GPS, Бэйдоу и Galileo, для навигационного приемника число видимых спутников может достигать нескольких десятков. При этом сложность решения задачи точного позиционирования экспоненциально зависит от числа обрабатываемых сигналов. Актуальной является задача выбора ограниченного числа видимых спутников, геометрическая конфигурация которых обеспечивает наилучшую точность позиционирования. До последнего времени эта задача не имела метода решения с гарантированной оценкой точности, несмотря на огромное количество опубликованных эвристических алгоритмов. Для определения относительной ориентации твердого тела методом G.Wahba с помощью спутниковых навигационных измерений многоантенного приемника необходим выбор конфигурации базовых линий – набора векторов, попарно соединяющих антенны ГНСС. Одним из критериев выбора может быть число обусловленности матрицы базовых линий, используемой при определении относительной ориентации твердого тела указанным способом. Задачи выбора базовых линий и выбора подмножества видимых спутников являются комбинаторными и могут быть решены точно с использованием перебора. Однако размер множества перебора для ряда случаев не позволяет решать указанные задачи в режиме реального времени на навигационных приемниках. В связи с этим на практике строится приближенное решение. В данной диссертационной работе получен алгоритм выбора спутников с двусторонней оценкой гарантированной точности приближенного решения.

Область применения разработок данного исследования по планированию путей – точное земледелие. В точном земледелии предполагается использование точных навигационных измерений, геоинформационных систем, мониторинга урожайности в целях повышения производительности. Точное земледелие позволяет эффективно использовать посевные площади и сокращать время выполнения работ. Одним из современных направлений развития точного земледелия являются автономные колесные сельскохозяйственные роботы. Эти машины могут проводить посадку растений, мониторинг их состояния, опрыскивание от вредителей, внесение удобрений и сбор урожая. Для работы автономных сельскохозяйственных машин требуются измерения позиции (как правило, с сантиметровой точностью) и относительной ориентации. Достижение требуемой точности позиционирования возможно, например, при использовании ГНСС в фазово-дифференциальном режиме позиционирования в реальном времени (Real Time Kinematic, RTK) с наземной базовой станцией для передачи поправок. Для обеспечения работы автономных роботов на сельскохозяйственном поле требуется с использованием собранных данных строить траектории и расписания их движения. При решении задач планирования путей должны учитываться такие факторы, как рельеф поля, наличие препятствий, ограничение на нормальную кривизну траектории движения сельскохозяйственных машин. Предложенный в диссертационной работе метод позволяет с учетом этих факторов строить пути, покрывающие поле, с помощью решения задач конического программирования второго порядка.

Степень научной разработанности темы. Практическое применение задач полуопределенного программирования и линейных матричных неравенств рассматривается в ряде работ, в частности по системам автоматического управления, синтезу цифровых фильтров и спутниковой навигации. Для задачи выбора спутников ранее предложены методы построения приближенного решения на основе набора правил выбора по углу возвышения и азимуту (совместные работы F. Meng, B. Zhu и S. Wang), анализа вклада отдельных спутников в точность позиционирования (квазиоптимальный алгоритм Ch. Park и J. How, рекурсивный алгоритм M. Liu, M.-A. Fortin и Jr. R. Landry, алгоритм G. Li с соавторами), использования нейронных сетей (работа J. Wei с соавторами). Разработаны методы определения относительной ориентации твердых тел в пространстве с помощью спутниковой навигации при заранее определенных базовых линиях на основе решения задачи G. Wahba с применением SVD-разложения (изложен в работе C. E. Cohen), полуопределенного программирования (предложен Л. Б. Рапопортом). Планирование путей, полностью покрывающих ограниченный участок поверхности, в литературе рассматривается отдельно для плоских и для трехмерных рельефов (серии работ J. Jin и L. Tang, I. A. Hameed и других авторов). Для оптимизации покрытия предложены различные виды целевых функций, учитывающих число разворотов, время разворота между рядами, водную эрозию почвы, кривизну получаемых путей. Для учета препятствий при построении путей разработаны методы, основанные на декомпозиции рабочей области (трапециевидная декомпозиция, декомпозиция бустрофедон, декомпозиция Морзе), поиске на графе (алгоритмы A* и D*), деформации путей с применением штрафных функций (искусственных потенциальных полей, работы J. Chuang, Л. Б. Рапопорта и Р. Ф. Гилимьянова). Также А. В. Пестеревым и Р. Ф. Гилимьяновым рассмотрены особенности применения B-сплайнов для планирования путей колесных роботов.

Объектом исследования являются оптимизационные задачи, возникающие в спутниковой навигации и ее применении к планированию путей колесных роботов.

Предмет исследования — формализация и способы решения оптимизационных задач, возникающих при применении методов спутниковой навигации к управлению колесными роботами.

Целью исследования является построение вычислительно эффективных методов решения следующих задач:

– выбора оптимального множества навигационных сигналов, используемых в позиционировании;
– выбора базовых линий, используемых при определении относительной ориентации твердого тела по измерениям от нескольких навигационных антенн;

– планирования путей с ограниченной нормальной кривизной, покрывающих заданный ландшафт с препятствиями.

Соответствие области исследования научной специальности. Работа соответствует следующим направлениям исследований, указанным в паспорте специальности 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки).

п. 2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

п. 4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Положения, выносимые на защиту.

1. Формализация релаксированной задачи выбора подмножества видимых спутников ограниченного размера по критерию параметра геометрического снижения точности по местоположению и времени в виде полуопределенного программирования (соответствует п.2 паспорта специальности).
2. Метод и алгоритм выбора спутников, используемых при вычислении позиции, с двусторонней оценкой точности (соответствует п.4 паспорта специальности).
3. Метод и алгоритм оценки оптимального выбора базовых линий для определения относительной ориентации твердого тела в пространстве на основе спутниковой навигации (соответствует п.4 паспорта специальности).
4. Формализация построения покрытия заданного трехмерного ландшафта путями в виде задачи конического программирования второго порядка (соответствует п.2 паспорта специальности).
5. Формализация деформации путей для обхода препятствий колесным роботом с ограничением на кривизну реализуемой траектории в виде задачи конического программирования второго порядка (соответствует п.2 паспорта специальности).
6. Метод построения покрытия трехмерного ландшафта путями колесных роботов с механизмом руления поворотом передних колес (соответствует п.4 паспорта специальности).

Научная новизна исследования заключается в том, что рассматриваемые практические задачи формализованы в виде задач полуопределенного программирования, что позволило построить вычислительно эффективные алгоритмы их решения. Для выбора множества навигационных спутников новизна также заключается в том, что построен алгоритм с двусторонней оценкой точности. Для построения путей условия на нормальную кривизну траектории сформулированы в виде конусных ограничений, что позволяет строить покрытие заданного ландшафта решением задач выпуклой оптимизации.

Достоверность полученных в исследовании результатов подтверждается использованием строгого математического аппарата, а также результатами вычислительных экспериментов.

Теоретическая значимость работы заключается в математической формализации нескольких задач навигации и точного земледелия с использованием полуопределенного программирования, формализации ограничений на нормальную кривизну траектории в виде конусных ограничений, построении двусторонних оценок точности решения задач выбора спутников и конфигурации базовых линий.

Практическая значимость работы состоит в разработке алгоритмов решения в режиме реального времени ряда задач, возникающих в спутниковой навигации и планировании путей колесных роботов. При этом вычислительная эффективность предложенных алгоритмов достигается за счет использования полуопределенного программирования.

Апробация работы. Результаты данной диссертационной работы докладывались автором на научном семинаре «Автоматическое управление» (Москва, ИПУ РАН, в 2021 году и в 2025 году), на научном семинаре международной общественной организации «Академия навигации и управления движением» и журнала «Гироскопия и навигация» (Санкт-Петербург, в 2022 году), на Международной конференции Optimization and Applications (Черногория, Петровац, OPTIMA-2019 и OPTIMA-2021), на Международной научной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)» (Москва, ИПУ РАН, STAB-18, STAB-20 и STAB-22), на 13-ом Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, ИПУ РАН, ВСПУ-2019), на Всероссийской научной конференции МФТИ (Долгопрудный, МФТИ, в 2018 году, в 2020 году и в 2021 году).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 17 научных работах. В их число входят три статьи [1—3] в рецензируемых научных изданиях категории К1 Перечня ВАК по специальности 2.3.1 (физ.-мат.) и в приравниваемых к ним научных изданиях, индексируемых международными наукометрическими базами данных. Шесть докладов в сборниках материалов научных конференций [4—9] индексируются системой Scopus. Остальные работы [10—17] опубликованы в иных сборниках материалов научных конференций.

Личный вклад автора. Методы, алгоритмы и формализации задач, полученные в данном исследовании, разработаны автором лично. Автором доказаны сформулированные в диссертации математические утверждения, реализованы основанные на них алгоритмы и выполнялась экспериментальная проверка результатов с помощью компьютерного моделирования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность проведенного исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы. Сформулирована цель исследования и положения, выносимые на защиту. Приведены сведения об апробации и публикациях автора по теме работы.

В **первой главе** приводится постановка задачи полуопределенного программирования, ее частных случаев: конического программирования второго порядка и линейного программирования; обсуждаются вопросы о выпуклой релаксации комбинаторных задач и о методах численного решения задач полуопределенного программирования.

Вторая глава посвящена задаче выбора рабочего созвездия из не более чем m навигационных спутников ГНСС по критерию GDOP. Рабочим созвездием называют множество видимых спутников, используемых навигационным приемником при позиционировании. Параметр GDOP отражает для выбранного рабочего созвездия спутников суммарное снижение точности позиционирования антенны ГНСС приемника по местоположению и по времени. При отсутствии информации об ошибках измерений, обусловленных другими причинами (ошибки эфемерид, многолучевость), следует выбрать рабочее созвездие, GDOP которого наименьший.

Постановка задачи оптимизации. Для каждого из спутников $s = 1, \ldots, n$ определим двоичную переменную x_s, которая принимает значение 1, если спутник используется для позиционирования, и 0 – если не используется. Также введем n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Пусть число ГНСС систем, используемых для позиционирования, равно J. Тогда минимальное количество спутников p, которое необходимо для решения навигационных уравнений, равно $J + 3$. GDOP рабочего созвездия может быть вычислен по формуле

$$\mathrm{GDOP} = \phi(x) = \sqrt{\mathrm{trace}(H^T \mathrm{diag}(x) H)^{-1}}, \tag{1}$$

где H — матрица размера $n \times p$, строки которой формируются определенным образом и содержат направляющие косинусы и временные характеристики спутников ГНСС, $\mathrm{diag}(x)$ — диагональная матрица с элементами x_s, $s = 1, \ldots, n$, на диагонали, $\mathrm{trace}(\cdot)$ — след матрицы. Пусть $j(s)$ — индекс системы, содержащей спутник s. Задачу выбора не более, чем m спутников из n возможных математически можно записать следующим образом.

Задача 2.1 (выбора спутников). *Найти*

$$\min_x \operatorname{trace}(H^T \operatorname{diag}(x) H)^{-1}, \tag{2}$$

при ограничениях

$$x_s \in \{0,1\},\ s = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$p \leq \sum_{s=1}^{n} x_s \leq m, \tag{4}$$

$$\sum_{s:\ j(s)=j} x_s \geq 1, j = 1, \ldots, J. \tag{5}$$

Выпуклая релаксация. Задача 2.1 относится к комбинаторной оптимизации. Размер множества перебора не позволяет решать ее точно в системах реального времени. В связи с этим используются приближенные методы выбора спутников ГНСС. Существующие методы приближенного решения данной задачи, как правило, не позволяют построить приемлемых оценок гарантированной точности. В данной диссертации для построения такой оценки предлагается решать релаксированную задачу следующего вида.

Задача 2.2 (релаксированная задача выбора спутников). *Найти*

$$\min_x \operatorname{trace}(H^T \operatorname{diag}(x) H)^{-1} \tag{6}$$

при ограничениях (4), (5) *и*

$$x_s \in [0,1],\ s = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Задача 2.2 отличается от 2.1 только условием (7), которое является релаксацией ограничения (3). В диссертации доказаны две леммы относительно задачи 2.2.

Лемма 2.1. *Задача оптимизации 2.2 является выпуклой.*

Лемма 2.2. *Значение критерия оптимизации для оптимального решения задачи 2.2 является нижней оценкой квадрата GDOP оптимального рабочего созвездия, определяемого решением задачи 2.1.*

Для того, чтобы применять существующие методы численного решения задачи 2.1, ее можно свести к задачам полуопределенного программирования. Для этого в диссертации приводятся следующие три задачи выпуклой оптимизации и утверждения относительно их оптимальных решений. Здесь и далее запись вида $A \succeq 0$ означает неотрицательную определенность некоторой симметричной матрицы A; I_p — единичную матрицу размерности $p \times p$; e_j — единичный вектор, j-я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю.

Задача 2.3. *Найти*

$$\min_{x,P} \operatorname{trace} P \tag{8}$$

при ограничениях (4), (5), (7) *и*

$$\begin{bmatrix} H^T \operatorname{diag}(x) H & I_p \\ I_p & P \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{9}$$

Лемма 2.3. *Для оптимального решения x^*, P^* задачи 2.3 выполняется равенство*

$$P^* = \left(H^T \operatorname{diag}(x^*) H\right)^{-1}. \tag{10}$$

Задача 2.4. *Найти*

$$\min_{x, q_1, \ldots, q_p} \sum_{j=1}^{p} q_j \tag{11}$$

при ограничениях (4), (5), (7) *и*

$$\begin{bmatrix} H^T \operatorname{diag}(x) H & e_j \\ e_i^T & q_j \end{bmatrix} \succeq 0, \ j = 1, ..., p. \tag{12}$$

Лемма 2.4. *Оптимальные решения задач 2.2, 2.3 и 2.4 по переменной x совпадают.*

Задача 2.5. *Найти*

$$\min_{x_s,\, w_j,\, t_{js},\, j=1,\ldots,p,\, s=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{s=1}^{n} t_{js} \tag{13}$$

при ограничениях (4), (5), (7) *и*

$$H^T w_j = e_j, \ w_j = \left(w_{j1}, \ldots, w_{jn}\right)^T, \ j = 1, \ldots, p, \tag{14}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2w_{js} \\ x_s - t_{js} \end{pmatrix} \right\| \leq x_s + t_{js}, \ j = 1, \ldots, p, \ s = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Здесь и далее будет обозначать как $\|\cdot\|$ евклидову норму вектора.

При решении задач полуопределенного программирования численными методами можно считать, что в пределах вычислительной точности если $(x_1^*, \ldots, x_n^*, w_1^*, \ldots, w_p^*, t_{11}^*, \ldots, t_{pn}^*)$ — оптимальное решение задачи 2.5, то $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ — оптимальное решение задачи 2.2.

Алгоритм выбора спутников с двухсторонней оценкой точности. Совпадение оптимальных решений релаксированных задач по переменной x означает, что можно решить релаксированную задачу 2.2 путем решения задачи полуопределенного программирования 2.3 или 2.4 либо конического программирования второго порядка 2.5. В работе приводится следующий алгоритм приближенного решения задачи выбора спутников для двух ГНСС, использующий предположение (не всегда выполняющееся) о близости решения исходной задачи комбинаторной оптимизации 2.1 и релаксированной задачи 2.2.

Алгоритм 2.1 (выбора спутников из двух ГНСС).

1. Решается релаксированная задача для всех спутников при условии, что выбирается хотя бы один спутник каждой ГНСС.
2. Определяются решения релаксированной задачи для спутников только первой и только второй ГНСС. Задача решается только в том случае, когда к выбранной ГНСС относятся хотя бы четыре спутника.
3. Для всех трех случаев выбираются m спутников с наибольшими значениями x_s для решения релаксированной задачи (выбор ближайшего подходящего решения).
4. Из рабочих созвездий, полученных на предыдущем шаге, выбирается то, GDOP которого минимален.

Приведенный алгоритм обобщается на случай трех и более ГНСС систем: нужно решать релаксированную задачу для каждой ГНСС системы, и всех комбинаций их использования.

На основе леммы 2.2 получена оценка гарантированной точности предложенного метода. Пусть x^* — решение исходной комбинаторной задачи 2.1, $\widetilde{x}$ — решение релаксированной задачи 2.2, $\widehat{x}$ — результат выбора спутников по приближенному алгоритму. Тогда GDOP оптимального рабочего созвездия равен $\phi(x^*)$, а GDOP выбранного рабочего созвездия — $\phi(\widehat{x})$. Тогда справедлива двухсторонняя оценка

$$\phi(\widetilde{x}) \leq \phi(x^*) \leq \phi(\widehat{x}). \tag{16}$$

Оценка (16) получается в процессе работы алгоритма при решении релаксированной задачи.

Результаты экспериментов. Предложенный метод проверен на реальных данных, полученных навигационным приемником в течение 12-часового интервала времени. Разница между GDOP параметрами оптимального и реализованного рабочих созвездий не превышала 0,2, что не приводит к заметной потере точности позиционирования. Эксперимент подтвердил высокую точность и вычислительную эффективность предложенного метода.

Третья глава посвящена задаче выбора базовых линий при определении относительной ориентации твердого тела в пространстве с помощью спутниковой навигации. Предполагается, что на некотором твердом теле (например, на корпусе колесного робота) закреплено n навигационных антенн A_1, …, A_n, подключенных к одному навигационному приемнику. Векторы, соединяющие попарно навигационные антенны, называют базовыми линиями. Каждая антенна принимает сигналы от спутников ГНСС.

С помощью спутниковых навигационных измерений по методу G. Wahba определяется относительная ориентация твердого тела в пространстве. Точность определения ориентации зависит от обусловленности матрицы $X_0X_0^T$, где X_0 — матрица базовых линий в системе координат, связанной с телом.

Постановка задачи оптимизации. Рассмотрим задачу выбора $n-1$ базовой линии, обеспечивающих наилучшую обусловленность матрицы $X_0X_0^T$. Функцию, определяющую число обусловленности для матрицы, будем обозначать cond(). Базовые линии будем учитывать только с одним направлением, поскольку противоположно направленные базовые линии вносят одинаковый вклад в вычисления. Пусть Y – матрица, строками которой являются координаты всевозможных базовых линий, число которых $m = n\,(n-1)\,/2$. Введем бинарные переменные s_k, $k = 1, \ldots, m$, для которых значение 1 соответствует выбору базовой линии с номером k, а значение 0 соответствует тому, что базовая линия не используется. Обозначим $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)^T$. Для рассматриваемых бинарных переменных также будем использовать обозначение s_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, $s_{ij} \equiv s_{ji}$, где i и j – номера навигационных антенн A_i и A_j, которые соответствующая базовая линия соединяет. Пусть W — множество всех навигационных антенн, закрепленных на рассматриваемом твердом теле. Задача выбора базовых линий может быть математически сформулирована следующим образом.

Задача 3.1. *Найти*

$$\min_s \operatorname{cond}\left(Y \operatorname{diag}(s)\, Y^T\right) \tag{17}$$

при ограничениях

$$s_k \in \{0;\ 1\},\ k = 1,\ \ldots,\ m, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{m} s_k = n-1, \tag{19}$$

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} s_{ij} \geq 1,\ i = 1, \ldots,\ n, \tag{20}$$

где $s_k \equiv s_{ij}$ если базовая линия k соединяет антенны A_i и A_j. Если также потребовать, чтобы составленный из них граф являлся остовным деревом, требуется добавить хотя бы одно из следующих двух условий:

$$\forall \bar{V} \subset W, \bar{V} \neq \varnothing, \bar{V} \neq W \qquad \sum_{A_i \in \bar{V},\ A_j \notin \bar{V}} s_{ij} \geq 1, \tag{21}$$

$$\forall \bar{V} \subset W, \bar{V} \neq \varnothing, \bar{V} \neq W \qquad \sum_{A_i \in \bar{V},\ A_j \in \bar{V},\ i<j} s_{ij} \leq \left|\bar{V}\right| - 1. \tag{22}$$

Линейная релаксация. Размер множества перебора для задачи 3.1 составляет C_m^{n-1}, а с ограничением (21) или (22) — n^{n-2} (теорема Кэли о числе остовных деревьев). Наряду с задачей комбинаторной оптимизации 3.1, в работе предлагается рассмотреть ее релаксацию.

Задача 3.2. *Найти*

$$\min_s \operatorname{cond}\left(Y \operatorname{diag}(s)\, Y^T\right) \tag{23}$$

при ограничениях (19)–(20) *и*

$$s_k \in [0;\ 1]\,,\ k = 1,\ \ldots,\ m, \tag{24}$$

а также (21) *или* (22) *в случае поиска остовного дерева.*

Для сведения задачи 3.2 к полуопределенному программированию можно применить уже существующие методы. Один из них основан на масштабировании переменных, а другой является итеративным. Задачи полуопределенного программирования, полученные с помощью этих методов, приведены в диссертации.

Алгоритм выбора базовых линий сформулирован следующим образом.

Алгоритм 3.1 (выбора базовых линий).

1. Определить положение всех n навигационных антенн в системе координат, связанной с телом.
2. Определить матрицу всевозможных базовых линий Y.
3. Решить релаксированную задачу оптимизации 3.2 для матрицы Y в помощью метода масштабирования либо итерационного метода. Оптимальное решение релаксированной задачи — набор значений $\widetilde{s}_k$, $k = 1, \ldots, m$.
4. Перейти от вещественных значений $\widetilde{s}_k \in [0, 1]$ к бинарным $\hat{s}_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, \ldots, m$, с помощью одного из (предложенных в работе) методов оценки.
5. Выбрать базовые линии, которым соответствуют $\hat{s}_k = 1$, $k = 1, \ldots, m$.

Подстановкой значений $\widetilde{s}_k$ в целевую функцию (23) можно получить нижнюю оценку числа обусловленности.

Вычислительный эксперимент проводился на сгенерированном наборе данных из 1000 различных конфигураций антенн для $n = 4$ и $n = 5$. Из результатов эксперимента видно, что есть определенный процент совпадения с точным решением для приведенных значений n, при этом даже в случае неточного решения число обусловленности матрицы получается примерно того же порядка, что и в точном решении.

Четвертая глава посвящена задаче построения путей колесных роботов, покрывающих заданную поверхность в трехмерном пространстве. Предполагается, что рельеф достаточно пологий. При планировании путей, покрывающих заданный ландшафт, как правило, требуется минимизировать перекрытие соседних рядов и полностью исключить пропуски в покрытии (за исключением областей вблизи препятствий, которые могут обрабатываться отдельно).

Для решения этой задачи обычно используются почти параллельные траектории. Их построение может проводиться относительно некоторого начального пути. Предположим, что ширина рабочего инструмента сельскохозяйственной машины $\bar{d}$. На расстоянии $\bar{d}$ от исходного пути с одной стороны (или с обеих, если это возможно) строится следующий путь, который далее используется в качестве начального. Затем процедура повторяется, пока вся поверхность не будет покрыта рядами.

Во всех точках спланированной траектории движения колесных роботов с механизмом руления поворотом передних колес должно выполняться условие на нормальную кривизну u траектории

$$\|u\| < u_{\max}, \tag{25}$$

где $u_{\max}$ – максимальная реализуемая нормальная кривизна траектории, определяемая характеристиками робота. Колесные роботы с дифференциальным приводом способны совершить разворот на месте, выполнение условия (25) для их траекторий не требуется.

Описание поверхности и путей. При работе с трехмерным ландшафтом можно использовать локальную декартову систему координат $(x,\ y,\ z)$. Чтобы определить поверхность, по которой движутся роботы, необходимо задать функцию $z(x,\ y)$, возвращающую для известных координат x, y координату z точки на поверхности. Для задания траекторий движения колесных роботов в данной работе используются однородные кубические B-сплайны. Сплайновая кривая $r(t) \in R^3$ полностью задается по определенному правилу набором своих контрольных точек $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R^3$. Также используется дополнение набора контрольными точками

$$r_0 = 2r_1 - r_2,\ r_{n+1} = 2r_n - r_{n-1}, \tag{26}$$

в результате чего концы сплайновой кривой $r(t)$ совпадают с r_1 и r_n.

Построение соседней сплайновой кривой $\widetilde{r}(t)$ по заданной начальной кривой $r(t)$ сводится к нахождению ее контрольных точек. Будем считать, что контрольные точки для $r(t)$ расположены на приблизительно равных расстояниях друг от друга $D_s = \|r_{i-1} - r_i\| \approx \|r_i - r_{i+1}\|$. Контрольные точки нового пути $\widetilde{r}_i$ зададим через перемененные d_i, $i = 1, \ldots n$, так, что $\widetilde{r}_i = r_i + d_i N_i$, где $N_i = (N_i^x, N_i^y, N_i^z)$ единичный вектор направления поиска. Значение d_i соответствует смешению контрольной точки в единицах длины при построении соседнего пути. Если положить $d_i = \bar{d}$ для всех возможных i, то для следующего сплайна может нарушиться условие на кривизну (25) или возникнуть самопересечение («ласточкин хвост»). Для обеспечения возможности спрямления разрешим небольшое перекрытие путей. Для исключения пропусков в покрытии и ограничения перекрытия (по ширине) необходимо потребовать, чтобы $\gamma\bar{d} \le d_i \le \bar{d}$, где $\gamma \in (0, 1]$.

Условия на нормальную кривизну траектории в виде конусного ограничения. Рассмотрим случай плоского поля с декартовой системой координат (x, y). Для компонент вектора r_i будем использовать обозначения x_i, y_i, где $r_i = (x_i, y_i)$. Обозначим как $r^{(i)\prime}(t)$ и $r^{(i)\prime\prime}(t)$ первую и вторую производные элементарного сплайна по параметру. В работе доказаны следующие леммы.

Лемма 4.1. *Для элементарного B-сплайна $r^{(i)}(t)$ максимальное значение $\|r^{(i)\prime\prime}(t)\|$, $0 \le t \le 1$ достигается при $t = 0$ или $t = 1$.*

Лемма 4.2 (необходимое условие реализуемости пути). *Если условия $\|u^{(i)}(t)\| \le u_{\max}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ выполняются для плоского однородного кубического B-сплайна с эквидистантными контрольными точками r_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$, причем $D_s = \|r_{i-1} - r_i\|$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, то*

$$\|r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}\| \le u_{\max} {D_s}^2 \tag{27}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 4.3 (достаточные условия). *Если для плоского однородного кубического B-сплайна с контрольными точками $r_i + N_i d_i$, $i = 1, \ldots, n$, и дополнением* (26) *выполнены условия*

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{i-1} + N^x_{i-1} d_{i-1} - 2(x_i + N^x_i d_i) + x_{i+1} + N^x_{i+1} d_{i+1} \\ y_{i-1} + N^y_{i-1} d_{i-1} - 2(y_i + N^y_i d_i) + y_{i+1} + N^y_{i+1} d_{i+1} \end{pmatrix} \right\| \le u_{\max} \hat{h}_i(d_{i-1}, d_{i+1}), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} 4\hat{h}_i(d_{i-1}, d_{i+1}) = (x_{i+1} - x_{i-1})^2 + 2(x_{i+1} - x_{i-1})(N^x_{i+1} d_{i+1} - N^x_{i-1} d_{i-1}) + \\ + (y_{i+1} - y_{i-1})^2 + 2(y_{i+1} - y_{i-1})(N^y_{i+1} d_{i+1} - N^y_{i-1} d_{i-1}), \end{aligned} \tag{29}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, то для точек стыка элементарных сплайнов норма вектора кривизны ограничена значением $u_{\max}$:

$$\|u^{(i)}(0)\| \le u_{\max},\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{30}$$

Лемма 4.4 (достаточные условия). *Если для плоского однородного кубического B-сплайна с контрольными точками $r_i + N_i d_i$, $i = 1, \ldots, n$, и дополнением* (26) *выполнены условия*

$$\left\| \begin{pmatrix} x_{i-1} + N^x_{i-1} d_{i-1} - 2(x_i + N^x_i d_i) + x_{i+1} + N^x_{i+1} d_{i+1} \\ y_{i-1} + N^y_{i-1} d_{i-1} - 2(y_i + N^y_i d_i) + y_{i+1} + N^y_{i+1} d_{i+1} \end{pmatrix} \right\| \le u_{\max} \hat{l}_i(d_{i-1}, d_{i+1}), \tag{31}$$

$$
\begin{aligned}
&4\hat{l}_i(d_{i-1},\, d_{i+1}) = \left(x_{i+1} + \bar{d}N^x_{i+1} - x_{i-1} - \bar{d}N^x_{i-1}\right)^2 + \\
&+ 2\left(x_{i+1} + \bar{d}N^x_{i+1} - x_{i-1} - \bar{d}N^x_{i-1}\right)\left(N^x_{i-1}(\bar{d} - d_{i-1}) - N^x_{i+1}(\bar{d} - d_{i+1})\right) + \\
&+ \left(y_{i+1} + \bar{d}N^y_{i+1} - y_{i-1} - \bar{d}N^y_{i-1}\right)^2 + \\
&+ 2\left(y_{i+1} + \bar{d}N^y_{i+1} - y_{i-1} - \bar{d}N^y_{i-1}\right)\left(N^y_{i-1}(\bar{d} - d_{i-1}) - N^y_{i+1}(\bar{d} - d_{i+1})\right),
\end{aligned} \tag{32}
$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, *то для точек стыка элементарных сплайнов норма вектора кривизны ограничена значением* $u_{\max}$ *:*

$$\|u^{(i)}(0)\| \le u_{\max},\ i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1. \tag{33}$$

Для неплоской поверхности длины векторов нормальной кривизны и кривизны пути могут отличаться. Предположим, что ландшафт является достаточно пологим: в окрестности радиусом $\max(D_s, \bar{d})$ его поверхность можно описать наклонной плоскостью, т.е. главные кривизны поверхности достаточно малы. Тогда значения $\|u^{(i)}(t)\|$ можно оценить модулем кривизны сплайна, формирующегося при проецировании четверки контрольных точек на эту наклонную плоскость. Пусть r'_i — единичный вектор касательной для точки $r^{(i)}(0)$ на исходной кривой. Введем двумерную декартову систему координат $(\widetilde{x},\ \widetilde{y})$, оси которой $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ сонаправлены с векторами r'_i и N_i соответственно. В системе $(\widetilde{x},\ \widetilde{y})$ можно записать следующие условия, соответствующие (27), (28) и (31).

$$\left\|\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{i-1} + \widetilde{N}^x_{i-1}d_{i-1} + \widetilde{x}_{i+1} + \widetilde{N}^x_{i+1}d_{i+1} \\ \widetilde{y}_{i-1} + \widetilde{N}^y_{i-1}d_{i-1} - 2d_i + \widetilde{y}_{i+1} + \widetilde{N}^y_{i+1}d_{i+1} \end{pmatrix}\right\| \le u_{\max}D_s^2, \tag{34}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{i-1} + \widetilde{N}^x_{i-1}d_{i-1} + \widetilde{x}_{i+1} + \widetilde{N}^x_{i+1}d_{i+1} \\ \widetilde{y}_{i-1} + \widetilde{N}^y_{i-1}d_{i-1} - 2d_i + \widetilde{y}_{i+1} + \widetilde{N}^y_{i+1}d_{i+1} \end{pmatrix}\right\| \le u_{\max}\widetilde{h}_i(d_{i-1},\, d_{i+1}), \tag{35}$$

$$
\begin{aligned}
&4\widetilde{h}_i(d_{i-1},\, d_{i+1}) = (\tilde{x}_{i+1} - \widetilde{x}_{i-1})^2 + 2(\widetilde{x}_{i+1} - \widetilde{x}_{i-1})(\widetilde{N}^x_{i+1}d_{i+1} - \widetilde{N}^x_{i-1}d_{i-1}) + \\
&+ (\widetilde{y}_{i+1} - \widetilde{y}_{i-1})^2 + 2(\widetilde{y}_{i+1} - \widetilde{y}_{i-1})(\widetilde{N}^y_{i+1}d_{i+1} - \widetilde{N}^y_{i-1}d_{i-1}),
\end{aligned} \tag{36}
$$

$$\left\|\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{i-1} + \widetilde{N}^x_{i-1}d_{i-1} + \widetilde{x}_{i+1} + \widetilde{N}^x_{i+1}d_{i+1} \\ \widetilde{y}_{i-1} + \widetilde{N}^y_{i-1}d_{i-1} - 2d_i + \widetilde{y}_{i+1} + \widetilde{N}^y_{i+1}d_{i+1} \end{pmatrix}\right\| \le u_{\max}\widetilde{l}_i(d_{i-1},\, d_{i+1}), \tag{37}$$

$$
\begin{aligned}
&4\widetilde{l}_i(d_{i-1},\, d_{i+1}) = \left(\widetilde{x}_{i+1} + \bar{d}\widetilde{N}^x_{i+1} - \widetilde{x}_{i-1} - \bar{d}\widetilde{N}^x_{i-1}\right)^2 + \\
&+2\left(\widetilde{x}_{i+1} + \bar{d}\widetilde{N}^x_{i+1} - \widetilde{x}_{i-1} - \bar{d}\widetilde{N}^x_{i-1}\right)\left(\widetilde{N}^x_{i-1}(\bar{d} - d_{i-1}) - \widetilde{N}^x_{i+1}(\bar{d} - d_{i+1})\right) + \\
&+\left(\widetilde{y}_{i+1} + \bar{d}\widetilde{N}^y_{i+1} - \widetilde{y}_{i-1} - \bar{d}\widetilde{N}^y_{i-1}\right)^2 + \\
&+2\left(\widetilde{y}_{i+1} + \bar{d}\widetilde{N}^y_{i+1} - \widetilde{y}_{i-1} - \bar{d}\widetilde{N}^y_{i-1}\right)\left(\widetilde{N}^y_{i-1}(\bar{d} - d_{i-1}) - \widetilde{N}^y_{i+1}(\bar{d} - d_{i+1})\right),
\end{aligned} \tag{38}
$$

где для каждого элементарного сплайна константы $(\widetilde{x}_{i-1}, \widetilde{y}_{i-1})$ и $(\widetilde{x}_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1})$ — координаты в $(\widetilde{x},\ \widetilde{y})$ проецируемых точек исходной кривой r_{i-1} и r_{i+1}, а $(\widetilde{N}^x_{i-1}, \widetilde{N}^y_{i-1})$ и $(\widetilde{N}^x_{i+1}, \widetilde{N}^y_{i+1})$ — проекции на плоскость $(\widetilde{x},\ \widetilde{y})$ векторов нормалей N_{i-1} и N_{i+1}. Важно отметить, что у каждой точки i своя наклонная плоскость $(\widetilde{x},\ \widetilde{y})$, для других точек эти проекции могут отличаться.

Задача SOCP для построения соседнего пути. Новые соседние пути предлагается получать как решение следующей задачи.

Задача 4.1 (построения соседнего пути в виде SOCP). *Найти*

$$\min_{u,d_0,\ldots d_{n+1}} \ \beta\frac{\|u\|}{u_{\max}} - (\bar{d})^{-1}\sum_{i=0}^{n+1} d_i, \tag{39}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, *при ограничениях* (37) *для* $i = 1, \ldots, n$,

$$\gamma\bar{d} \le d_i \le \bar{d},\ i = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{40}$$

$$0 \le u_i \le u_{\max},\ i = 1, \ldots, n, \tag{41}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{i-1} + \widetilde{N}^x_{i-1} d_{i-1} + \widetilde{x}_{i+1} + \widetilde{N}^x_{i+1} d_{i+1} \\ \widetilde{y}_{i-1} + \widetilde{N}^y_{i-1} d_{i-1} - 2d_i + \widetilde{y}_{i+1} + \widetilde{N}^y_{i+1} d_{i+1} \end{pmatrix}\right\| \le u_i D_s^2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{42}$$

В задаче 4.1 параметр β ($\beta \ge 0$) является безразмерным и отвечает за компромисс между спрямлением траекторий и перекрытием соседних дорожек. После того, как путь получен, он параметризуется эквидистантными контрольными точками. Затем относительно него строится следующий путь. Процедура повторяется то тех пор, пока все поле не будет покрыто. После того, как все пути построены, производится их обрезка на границе поля. Если задача 4.1 оказалась несовместной, то это означает, что указанным методом при данном начальном пути и параметре β построение путей невозможно. В таком случае нужно либо выбрать другую начальную кривую, либо, уменьшая γ, разрешить большее по ширине перекрытие дорожек. Значение $\gamma = 0$ всегда отвечает совместной задаче при корректном задании параметров.

Задача SOCP для учета препятствий. Предположим, что покрытие поля путями построено без учета препятствий. Требуется деформировать пересекающие препятствия пути так, чтобы они были реализуемы. Направления N_i поиска новых положений контрольных точек выберем точно также, как и для построения соседнего пути. d_i будут отвечать смещениям контрольных точек вдоль этих направлений. Для дополнения сплайновой кривой положим $d_0 = d_{n+1} = 0$. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 4.2 (деформации пути в виде SOCP). *Найти*

$$\min_q \ q_{n+1} \tag{43}$$

при ограничениях (35) *при* $q_i = d_i$ *для* $i = 1, \ldots, n$,

$$\left\| w^{\mathrm{T}} q \right\| \le q_{n+1}, \tag{44}$$

$$\overline{d_i} \le q_i \le \overline{\overline{d_i}},\ i = 1,\ \ldots,\ n, \tag{45}$$

где q_i — i*-я компонента вектора* $q \in R^{n+1}$.

Для оптимального решения задачи первые n компонент вектора q равны смещениям контрольных точек, которые требуется провести: $d_i = q_i$, $i = 1,\ \ldots,\ n$. Значения $\overline{d_i}$ и $\overline{\overline{d_i}}$, $i = 1, \ldots, n$ определяют геометрические ограничения на отклонения контрольных точек вдоль направления N_i, обусловленные препятствиями и границами поля. При этом для каждого препятствия выбирается направление обхода. Первые n компонент вектора $w \in R^{n+1}$ являются фиксированными значениями весовой функции, которые могут быть выбраны как одинаковыми, так и зависящими от расположения контрольных точек относительно препятствий. Последняя компонента вектора w равна нулю: $w_{n+1} = 0$. Критерий оптимизации (43) в сочетании с условием (44) позволяет минимизировать смещения контрольных точек и сократить пропуски в покрытии, образующиеся при объезде препятствий из-за ограничения на нормальную кривизну пути.

Если задача деформации пути 4.2 оказалась несовместной, а допустимый путь в заданных границах существует, то это может быть обусловлено невозможностью выполнения условий на кривизну при смещении точек вдоль выбранных направлений. Невозможность выполнения ограничений на кривизну может быть обусловлена тем, что при больших смещениях нарушается равномерность расположения контрольных точек. Кроме того проекции на плоскость $(x,\ y)$ направлений поиска N_i могут пересекаться, что приводит к решениям с самопересекающимися траекториями, для которых, как правило, нарушается условие на кривизну. Перечисленные проблемы предлагается решать применением следующего алгоритма деформации пути, основанного на ослаблении ограничений задачи.

Алгоритм 4.1 (деформации пути для учета препятствий).

1. Решается задача 4.2 при исходном ограничении $u_{\max}$. Если решение найдено, то производится перепараметризация траектории равномерно расположенными контрольными точками. Задача 4.2 решается повторно для текущего расположения контрольных точек. Если решение найдено, то оно возвращается в качестве ответа.
2. Решается задача 4.2 для текущего расположения контрольных точек для максимального значения нормальной кривизны равного $u_{\max} + \Delta$, $\Delta > 0$. Если оптимальное решение найдено, то производится перепараметризация траектории равномерно расположенными контрольными точками и выполняется возврат на шаг 1. Если не найдено, то значение Δ увеличивается, после чего повторяются действия шага 2.

Алгоритм 4.1 на каждом этапе его работы предполагает выбор шага изменения кривизны Δ. От того как этот выбор произведен, зависит, сколько итераций алгоритма потребуется выполнить, прежде чем решение задачи будет найдено.

Результаты экспериментов. Для проверки работоспособности метода проводились полевые и модельные эксперименты, в ходе которых была доказана его применимость.

Заключение содержит выводы и результаты диссертационного исследования.

Основные результаты диссертационной работы

Основные результаты диссертационной работы следующие.

1. Разработаны метод и алгоритм приближенного решения задачи выбора оптимального рабочего созвездия из не более чем m навигационных спутников по критерию GDOP, основанные на решении релаксированых задач. Получена формализация релаксированных задач в виде задач полуопределенного программирования, сформулированы и доказаны леммы об их оптимальных решениях. Получена двусторонняя оценка точности приближенного решения. Работоспособность предложенного метода проверена в 12-часовом тесте, результаты которого показали высокую точность решения задачи, практическую применимость двусторонней оценки точности, приемлемую скорость решения на вычислительном устройстве.
2. Получены метод и алгоритм приближенного решения задачи выбора базовых линий при определении относительной ориентации твердого тела в пространстве. Вычислительные эксперименты на сгенерированных данных доказали применимость метода.
3. Получено решение возникающей при применении колесных роботов в точном земледелии задачи планирования путей ограниченной нормальной кривизны. Сформулированы и доказаны леммы о необходимых и достаточных условиях на кривизну пути при размещении контрольных точек B-сплайна. На основе задач конического программирования второго порядка предложены методы построения путей, покрывающих заданную поверхность, и их деформации для учета препятствий. За счет того, что в основе этих методов лежат задачи выпуклой оптимизации, реализующие их алгоритмы являются вычислительно эффективными, что подтверждено экспериментами с реальными ландшафтами. Полевые эксперименты доказали применимость результатов построения путей для планирования работ одного или нескольких автономных колесных роботов на одном поле.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях категории К1 Перечня ВАК по специальности 2.3.1 (физ.-мат.) и в приравниваемых к ним научных изданиях, индексируемых международными наукометрическими базами данных

1. *Рапопорт Л. Б.*, *Тормагов Т. А.* Применение методов выпуклой релаксации для оптимизации множества навигационных спутников // Проблемы управления. — 2019. — № 4. — С. 65—71. — DOI: 10.25728/pu.2019.4.7. — Перевод:
   Rapoport L. B., Tormagov T. A. Relaxation Methods for Navigation Satellites Set Optimization // Automation and Remote Control. — 2020. — Vol. 81, no. 9. — P. 1711—1721. — DOI: 10.1134/S0005117920090106.
2. *Тормагов Т. А.*, *Генералов А. А.*, *Шавин М. Ю.*, *Рапопорт Л. Б.* Задачи управления движением автономных колесных роботов в точном земледелии // Гироскопия и навигация. — 2022. — Т. 30, 1 (116). — С. 39—60. — Перевод:
   Tormagov T. A., Generalov A. A., Shavin M. Y., Rapoport L. B. Motion Control of Autonomous Wheeled Robots in Precision Agriculture // Gyroscopy and Navigation. — 2022. — Vol. 13, no. 1. — P. 23—35. — DOI: 10.1134/S2075108722010072.
3. *Тормагов Т. А.* Метод деформации путей ограниченной кривизны для колесных роботов в точном земледелии на основе конического программирования второго порядка // Автоматика и телемеханика. — 2024. — № 2. — С. 46—59. — DOI: 10.31857/S0005231024020037. — Перевод:
   Tormagov T. A. Path Deformation Method with Constraints on Normal Curvature for Wheeled Robots in Precision Agriculture Based on Second-Order Cone Programming // Automation and Remote Control. — 2024. — Vol. 85, no. 2. — P. 134—143. — DOI: 10.31857/S0005117924020037.

Публикации в сборниках материалов научных конференций, индексируемых Scopus

4. *Rapoport L.*, *Tormagov T.* Using of the SDP relaxation method for optimization of the satellites set chosen for positioning // Proceedings of the 31st International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, ION GNSS+ 2018. — Institute of Navigation, 2018. — P. 3812—3820. — DOI: 10.33012/2018.15994.

5. *Rapoport L.*, *Tormagov T.* Attitude determination with multiple antennas using SDP relaxation // Proceedings of the 31st International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, ION GNSS+ 2018. — Institute of Navigation, 2018. — P. 3859—3867. — DOI: 10.33012/2018.16035.
6. *Rapoport L.*, *Tormagov T.* An Approximate Solution of a GNSS Satellite Selection Problem Using Semidefinite Programming // Communications in Computer and Information Science. 1145 CCIS. — 2020. — P. 137—149. — DOI: 10.1007/978-3-030-38603-0_11.
7. *Rapoport L.*, *Generalov A.*, *Shavin M.*, *Tormagov T.* Navigation and Control Problems in Precision Farming // 2021 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). — 2021. — 9470810. — DOI: 10.23919/ICINS43216.2021.9470810.
8. *Tormagov T.*, *Rapoport L.* Coverage Path Planning for 3D Terrain with Constraints on Trajectory Curvature Based on Second-Order Cone Programming // Advances in Optimization and Applications. Communications in Computer and Information Science, 1514. — 2021. — P. 258—272. — DOI: 10.1007/978-3-030-92711-0_18.
9. *Tormagov T.*, *Rapoport L.* Coverage Path Planning with Constraints on Normal Curvature for a Three-dimensional Terrain with Obstacles // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). — 2022. — P. 1—2. — DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807549.

Публикации в иных сборниках материалов научных конференций

10. *Рапопорт Л. Б.*, *Тормагов Т. А.* Использование метода полуопределённой релаксации для оптимизации состава спутниковых навигационных сигналов // Материалы 14-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). — 2018. — С. 346—349.
11. *Тормагов Т. А.*, *Рапопорт Л. Б.* Метод выбора GNSS спутников на основе SOCP // Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 19-25 ноября 2018 года. Радиотехника и компьютерные технологии. — 2018. — С. 41—42.
12. *Рапопорт Л. Б.*, *Тормагов Т. А.* Оптимизация выбора базовых линий в задаче определения ориентации твердого тела // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). — 2019. — С. 465—469.

13. *Тормагов Т. А.*, *Рапопорт Л. Б.* Метод выбора базовых линий на основе полуопределенного программирования в задаче определения ориентации твердого тела // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии», посвященной 100-летию со дня рождения профессора А.А. Шестакова (Елец, 16-17 сентября 2020 г.) — 2020. — С. 27—32.

14. *Тормагов Т. А.* Задача планирования заправок опрыскивателя на одном поле // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ 23–29 ноября 2020 года. Радиотехника и компьютерные технологии. — 2020. — С. 27—28.

15. *Рапопорт Л. Б.*, *Генералов А. А.*, *Тормагов Т. А.*, *Шавин М. Ю.* Задачи навигации и управления движением в точном земледелии // В сборнике: XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. — 2021. — С. 352—359.

16. *Тормагов Т. А.* Планирование покрывающих путей при ограничении на кривизну траектории на основе задачи конического программирования второго порядка // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 29 ноября – 03 декабря 2021 г. Радиотехника и компьютерные технологии. — 2021. — С. 65—67.

17. *Тормагов Т. А.*, *Рапопорт Л. Б.* Построение покрывающих путей с ограничением на нормальную кривизну для трехмерного ландшафта с препятствиями // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого): Материалы XVI Международной научной конференции (1-3 июня 2022 г., Москва). — 2022. — С. 433—436.

Личный вклад соискателя в публикациях с соавторами. [1; 4; 6; 10; 11] — формализация в виде задач полуопределенного программирования и алгоритм выбора навигационных спутников, численные эксперименты, доказательство утверждений об оптимальных решениях релаксированных задач. [5; 12; 13] — формализация в виде задачи полуопределенного программирования и алгоритмы выбора базовых линий многоантенным навигационным приемником, численные эксперименты. [2; 7—9; 15; 17] — математические постановки, формализации и методы решения задач построения путей и расписания движения, доказательства вспомогательных утверждений.

Научное издание

Тормагов Тимофей Алексеевич

Задачи полуопределенного программирования в спутниковой навигации и планировании путей колесных роботов

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 26.05.2026. Формат $60 \times 90/16$.
Усл. печ. л. 1,38. Уч.-изд. л. 1.
Тираж 100 экз. Заказ № 13120.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии "Переплетофф".
Адрес: г. Долгопрудный, ул. Циолковского, д. 4.
Тел.: 8 (495) 408-66-02. www.perepletoff.ru