

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук

УДК 519.83+330.46
ББК 22.185

На правах рукописи



Петров Илья Владимирович

МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ИГРАХ НА СЕТЯХ С ЛИНЕЙНЫМ НАИЛУЧШИМ
ОТВЕТОМ

Специальность 2.3.4 — Управление в организационных системах

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель: д.ф.-м.н.
Чхартишвили Александр Гедеванович

Москва — 2025

Оглавление

Введение	4
1 Структурные характеристики социально-экономических систем	12
1.1 Сети и управление	13
1.2 Формальные подходы к описанию сетевого взаимодействия и задач управления	23
1.3 Связь с другими областями	30
2 Задачи управления в теоретико-игровых моделях на сети с линейным наилучшим ответом	32
2.1 Игры с линейным наилучшим ответом	33
2.1.1 Выигрыш игроков и линейный наилучший ответ	33
2.1.2 Математические модели сетевых эффектов: координация, конкуренция, сотрудничество и информированность	36
2.1.3 Анализ равновесия в играх с линейным наилучшим ответом	45
2.1.4 Динамика наилучших ответов	47
2.2 Задачи управления	49
2.2.1 Целевые функции и бюджетные ограничения центра	49
2.2.2 Управление в линейно-квадратичной игре на сети	53
2.3 Заключение	56
2.4 Выводы по главе 2	58
3 Управление структурой взаимодействия в теоретико-игровых моделях на сети с линейным наилучшим ответом	59
3.1 Задача управления в линейно-квадратичной игре	60
3.1.1 Описание игры	61
3.1.2 Задачи управления и репрезентативный агент	62
3.1.3 Примеры	71
3.1.4 Заключение	74

3.2	Задача управления в рефлексивной игре с точечной структурой информированности	75
3.2.1	Рефлексивные игры и структура информированности агентов	77
3.2.2	Задача стимулирования для рефлексивной игры	81
3.2.3	Примеры	83
3.2.4	Заключение	85
3.3	Задача управления в игре социальных норм	86
3.3.1	Описание игры и задачи управления	87
3.3.2	Взаимодействие кластеров в модели социальных норм	89
3.3.3	Примеры	93
3.3.4	Заключение	96
3.4	Выводы по главе 3	97
4	Применение методов управления структурой взаимодействия	99
4.1	Отраслевой анализ сетевых эффектов	99
4.2	Сетевые эффекты в задаче оценки коммерческих компаний	107
4.3	Выводы по главе 4	116
	Заключение	117
	Список литературы	119
	Приложение А	141
	Приложение Б	143

Введение

Актуальность темы. Научный интерес к вопросам управления сетевым взаимодействием агентов разной природы начал возникать в середине XX века с появлением концепции сетей. Сети были призваны описывать системы взаимодействующих агентов, при этом – в отличие от графа как математического объекта, строго формализующего характер связи – не конкретизируя механизмы взаимодействия. В работах исследователей в области социологии, экономики и права сетевой характер взаимодействия подразумевает наличие формальных и неформальных связей между агентами, которое приводит к взаимозависимости в процессах принятия решений, распространения (например, информации, активности, заболеваний) и другим эффектам.

Спецификой социально-экономических систем в целом, и организационных в частности, является наличие индивидуальных стимулов участников взаимодействия, что нашло отражение в возникновении теории игр как инструмента описания конфликтных ситуаций. С конца XX века сетевой и теоретико-игровой подходы начали использоваться совместно.

Одновременно с этим развивались и формальные методы анализа и управления системами с сетевой структурой. В теории автоматического управления и её приложениях огромную популярность среди исследователей получили так называемые усредняющие системы, частным случаем которых являются модели консенсуса и, в особенности, классическая модель ДеГроота, в которой изучается динамика формирования консенсуса мнений в сетевой структуре. При этом математические методы описания систем агентов, взаимодействующих стратегически, обладают специфическими особенностями, а описываемые ими механизмы взаимодействия зачастую отличны от консенсуса. Однако решения, принимаемые агентами под влиянием взаимодействия с другими, всё так же порождают неэффективность, что делает актуальными разработку и исследование различных методов управления.

С начала 2000-х было предложено несколько подходов к управлению, основанных на сетевых характеристиках агентов в социально-экономических системах. Особую популярность обрели подходы к управлению взаимодействием

агентов в экономике: модели конкуренции и сотрудничества компаний, межбанковское взаимодействие, модели потребления общественных благ. Возник ряд теоретико-игровых моделей, тесно связанных с эконометрическими моделями идентификации влияния окружения агента на его поведение, в которых исследователи моделируют взаимосвязь между выбором агента и выбором его соседей.

Отправной точкой в математических моделях влияния сетевой структуры на исход взаимодействия агентов между собой является концепция эндогенных социальных эффектов. В исследованиях в области микроэкономики и эконометрики влияние этих эффектов на индивидуальное поведение принято называть эффектами окружения (англ. peer effects). С появлением и развитием концепции сетей возникла возможность учитывать индивидуальные связи между людьми – сетевые эффекты – что позволило уточнить существующие модели, а также разрешить ряд технических особенностей их идентификации.

По этой причине особую популярность получили теоретико-игровые модели, в которых наилучший ответ игрока зависит от действий его соседей линейно. Игры с линейным наилучшим ответом можно рассматривать как генеративные модели эффектов окружения/сетевых эффектов: если в центре внимания авторов эконометрических моделей находится задача идентификации этих эффектов и выявления причинно-следственных связей на основе реальных данных, то игры на сетях предоставляют теоретическую основу для объяснения того, как формируются эффекты окружения, моделируя стратегическое поведение агентов. В теоретико-игровых моделях фокус внимания направлен на роль структуры взаимодействия: как она влияет на равновесие в игре; к чему, с точки зрения агрегированных характеристик, приводят локальные эффекты взаимодействия узлов; какие узлы и связи играют ключевую роль.

Степень разработанности темы диссертационного исследования. За последние десятилетия было получено множество результатов в рамках изучения структуры реальных сетей, механизмов их формирования и того, как сети влияют на поведение их участников. В исследованиях сетевых моделей стратегического взаимодействия авторы изучают вопрос о том, каким образом следует учитывать информацию о сетях при решении задач управления. Сетевые эффекты являются примерами «внешних эффектов» или «экстерналий» (англ. externalities), что с точки зрения теоретико-игровых моделей взаимодей-

ствия означает, что равновесие при наличии внешних эффектов неэффективно. В этом ключе можно сказать, что игры с линейным наилучшим ответом описывают влияние линейных внешних эффектов в действиях игроков, связанных с их окружением.

Традиционно внешние эффекты рассматривались как источник неэффективности, а классическим способом использования или противодействия внешним эффектам является прямое вмешательство в процесс взаимодействия агентов. Это привело к возникновению понятия «сетевых интервенций» или «сетевого вмешательства» (англ. network interventions). Существует широкий спектр моделей, включая модели с эффектом перетока (англ. spillover), игры координации, игры конкуренции и сотрудничества, модели влияния информированности агентов, демонстрирующих различные внешние эффекты - стратегической дополнителности и заменимости, а также использующие различные виды функций окружения (локальное агрегирование, локальное усреднение). При этом, разработан ряд стратегий сетевых интервенций, и интерес представляет оценка применимости и эффективности этих методов, однако большинство исследований посвящено управлению индивидуальными характеристиками агентов; гораздо меньше внимания уделяется задаче управления структурой взаимодействия.

Таким образом, актуальность темы диссертационного исследования обусловлена важностью для современной теории управления в организационных системах учета сетевых характеристик взаимодействия и управления этими характеристиками.

Объектом исследования являются теоретико-игровые модели сетевого взаимодействия с линейным наилучшим ответом.

Предметом исследования являются модели управления структурой взаимодействия агентов в играх на сетях с линейным наилучшим ответом.

Целью диссертационной работы является разработка моделей эффективного управления структурой взаимодействия агентов в играх на сетях с линейным наилучшим ответом.

Данная цель определила следующие основные **задачи работы**:

1. Выявление специфики теоретико-игровых моделей взаимодействия агентов в сетевых структурах, описание и классификация теоретико-игровых моделей с линейным наилучшим ответом и типов управляющих воздействий.

2. Формальная постановка задачи управления структурными характеристиками взаимодействия, обзор существующих моделей теоретико-игрового взаимодействия агентов и соответствующих задач управления.

3. Исследование моделей теоретико-игрового взаимодействия с линейным наилучшим ответом для различных содержательно обоснованных вариантов целевых функций агентов, разработка методов структурного управления, позволяющих повысить эффективность управления по сравнению с известными методами управления сетевым взаимодействием.

Методы исследований. В основе проведенного исследования лежит аппарат современной теории игр, теории активных систем, теории графов и методов оптимизации. Для формализации объекта исследования используются методы математического моделирования.

Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

1. Выявлена специфика теоретико-игровых моделей взаимодействия агентов в сетевых структурах, описаны и классифицированы теоретико-игровые модели с линейным наилучшим ответом, описаны и классифицированы типы управляющих воздействий.

2. Формализована задача управления структурными характеристиками теоретико-игрового взаимодействия агентов.

3. Исследованы модели теоретико-игрового взаимодействия с линейным наилучшим ответом для различных содержательно обоснованных вариантов целевых функций агентов, разработаны методы структурного управления, проведено их сравнение с известными методами управления сетевым взаимодействием. Показано, что учет сетевых связей между агентами позволяет повысить эффективность управления по сравнению с известными методами управления сетевым взаимодействием.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата, доказанными математическими утверждениями, результатами математического и компьютерного моделирования.

Соответствие паспорту специальности. Работа соответствует специальности 2.3.4. «Управление в организационных системах» (технические науки) по следующим пунктам паспорта специальности:

— п.1. Разработка теоретических основ управления в организационных си-

стемах.

– п.2. Разработка математических моделей и критериев эффективности, качества и надёжности организационных систем.

– п.3. Разработка методов и алгоритмов решения задач управления в организационных системах.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы позволяют разрабатывать и обосновывать механизмы эффективного управления структурными характеристиками сетевого взаимодействия социально-экономических агентов. Общность подхода к исследованию и реализации методов структурного управления позволяет распространить полученные в диссертационном исследовании теоретические результаты на широкий круг моделей игр на сети с линейным наилучшим ответом. Эффективность разработанных в диссертационной работе методов структурного управления подтверждена аналитическими результатами и результатами численного моделирования.

Реализация и внедрение результатов работы. Результаты работы использованы в АКБ «Абсолют Банк» (ПАО), что подтверждается актом о внедрении результатов диссертационной работы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Классификация моделей, классификация и формализация постановок задач управления для теоретико-игровых моделей с линейным наилучшим ответом позволяют единообразно описывать и анализировать различные подходы к описанию сетевого взаимодействия и решения задач управления (п.1 паспорта специальности 2.3.4.).

2. Формализованная и исследованная задача управления структурой взаимодействия в линейно-квадратичной игре позволяет оценивать эффективность выбора различных методов управления в задаче центра (п.3 паспорта специальности 2.3.4.).

3. Разработанная модель рефлексивной игры с точечной структурой информированности позволяет наиболее полно описать равновесие и провести сравнительное описание решений задачи стимулирования для случаев полной и неполной информированности агентов (п.2 и п.3 паспорта специальности 2.3.4.).

4. Формализованная и исследованная задача управления структурой взаимодействия в игре социальных норм позволяет получить описание свойств

модели и оценить эффективность выбора различных методов управления (п.3 паспорта специальности 2.3.4.).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах «Теория управления организационными системами», «Модели сложных сетей» и «Экспертные оценки и анализ данных» Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, семинаре «Математическая экономика» Центрального экономико-математического института РАН, представлялись на конференциях: XIV Всероссийское совещание по проблемам управления, ВСПУ (Москва, 2024); Чтения по инструментальным методам в экономических и социальных исследованиях памяти Е. Г. Ясина (Москва, 2024); Российский экономический конгресс (Екатеринбург, 2023); IFAC World Congress (Берлин, 2020; Йокогама, 2023); Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами» (Воронеж, 2018; Тамбов, 2019; Москва, 2021; Челябинск, 2022; Воронеж, 2023; Новочеркасск, 2024); Всероссийская научная конференция МФТИ (Москва, 2019, 2020, 2023); 22-я Апрельская международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества (Москва, 2021); Конференция молодых ученых по математической экономике и экономической теории, МЕЕТ (Санкт-Петербург, 2021); совместная конференция сообществ «International Network for Social Network Analysis» и «Network Science Society», «Networks» (виртуальная, 2021), European Meeting on Game Theory (виртуальная, 2021); 2-я Октябрьская международная научная конференция по проблемам теоретической экономики «Человеческие качества и человеческое поведение в экономической теории» (Москва, 2020); 13-я Мультиконференция по проблемам управления, МКПУ (Санкт-Петербург, 2020); 12-я Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем», MLSD (Москва, 2019).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 5 – в рецензируемых научных изданиях категории К1 Перечня ВАК [6, 7, 8, 9, 49], одна глава в книге [47] и 10 работ – в сборниках трудов конференций [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 210].

Личный вклад соискателя. Все исследования, представленные в диссертационной работе, новые постановки и решения задач, формулировки и доказательства утверждений, вычислительные эксперименты выполнены лично соискателем. Из совместных публикаций в диссертацию без ссылок включен

лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Работа изложена на 143 страницах, содержит 19 иллюстраций и 20 таблиц. Список цитируемой литературы включает 239 наименований.

Содержание работы. Во введении обоснована актуальность темы, представлены: краткий обзор современного состояния исследований, цель и задачи работы, ее научная новизна и практическая значимость, структура и краткое содержание глав.

В **главе 1** проведен обзор исследований, связанных с использованием в разработке, анализе и оценке эффективности методов управления данными о сетевом взаимодействии агентов. Рассмотрены теоретические исследования, посвященные концепции сетевых интервенций: представлены классификации стратегий управления сетевым взаимодействием и методология анализа. Особое внимание уделено эмпирическим работам, посвященным реализации и оценке методов управления стратегическим взаимодействием агентов.

В **главе 2** рассмотрены некооперативные теоретико-игровые модели на сетях, в которых агенты взаимодействуют стратегически, принимая решения, направленные на максимизацию собственного выигрыша. Центральное место в анализе занимает концепция линейного наилучшего ответа, определяющая оптимальную стратегию агента в зависимости от действий его соседей по сети. Исследованы различные классы игр: с эффектами стратегической дополнителности и заменимости, а также модели локального агрегирования и усреднения. Проанализированы задачи управления в таких моделях, включая задачи анализа социального оптимума и вмешательства центра (сетевые интервенции).

В **главе 3** сформулированы задачи управления структурой взаимодействия в теоретико-игровых моделях с линейным наилучшим ответом в соответствии с предложенной классификацией: различными видами взаимодействия и сетевыми эффектами.

Формализована и исследована задача управления структурой взаимодействия в линейно-квадратичной игре: в явном виде найдено критическое значение сетевого эффекта, выше которого эффективность структурного управления превышает эффективность целевых трансфертов. Исследованы различные, в том числе комбинированные стратегии управления в случае структуры сети,

состоящей из взаимодействующих групп агентов.

Разработана модель рефлексивной игры с точечной структурой информированности, в явном виде найдено равновесие в игре, проведено сравнительное описание решений задачи стимулирования для случаев полной и неполной информированности агентов. В качестве примера приводится формулировка задачи информационного управления, аналогичной задаче стимулирования в игре локального общественного блага на сети: показан пример механизма сообщения информации центром, при котором случаи общего знания и неполной информированности агентов в пределе дают одинаковый ответ.

Формализована и исследована задача управления структурой взаимодействия в игре социальных норм. Проведенный анализ показал, что добавление связей между кластерами агентов с различной продуктивностью способно повысить суммарные усилия игроков, хотя и снижает общий уровень их выигрышей. В частности, показано, что при увеличении числа связей между кластерами происходит перераспределение социальных норм, приводящее к значительному росту усилий агентов с низкой продуктивностью за счет небольшого снижения усилий более продуктивных агентов. Найдено оптимальное значение вероятности связи между кластерами, при котором достигается максимум агрегированных исходов агентов в равновесии. Приведенные пример и численные эксперименты демонстрируют, что даже небольшие изменения в структуре сети способны оказывать значительное влияние на исход игры.

В **главе 4** рассмотрены теоретические и практические аспекты использования данных о сетевых характеристиках экономических агентов (коммерческих компаний) для выявления взаимосвязей между экономическими показателями компаний и оценки рисков в задаче скоринга. В работе анализируются данные с 2012 по 2021 г., включающие сотни тысяч связей и уникальных объектов. Важной частью исследования является построение графов взаимосвязей между компаниями, анализ структуры таких сетей, а также выявление сетевых эффектов, влияющих на экономическую активность компаний. Продемонстрированы методы, благодаря которым появляется возможность использования теоретических результатов о стратегическом поведении взаимосвязанных агентов на практике.

В заключении сформулированы выводы по результатам диссертационного исследования.

Глава 1. Структурные характеристики социально-экономических систем

В последние десятилетия наблюдается рост числа исследований, посвященных анализу влияния социальных и экономических связей. Чаще всего исследования в области социологии, микроэкономики или эконометрики сосредоточены на выявлении эффектов, благодаря которым склонность агентов – людей или организаций – к определенному поведению меняется в зависимости от поведения других участников их сети. С этой точки зрения взаимодействие подразумевает не только факт наличия связи между участниками, но и взаимосвязь между принятием решений. Концепция сетей (англ. networks) является эффективным инструментом описания и анализа экономических отношений и последние десятилетия сети активно применяются в анализе экономических явлений [146, 158, 125]. Различные типы сетей могут играть важную роль в экономике: производственные сети связывают компании, которые зависят друг от друга в поставках сырья и комплектующих; финансовые сети соединяют компании, банки и кредитные учреждения, создавая систему взаимных обязательств и рисков; социальные связи определяют, как информация распространяется в обществе, влияя на принятие решений людьми.

В анализе сетевого взаимодействия основными элементами являются узлы (англ. nodes) и связи (англ. edges/links). Понятие узлов (или вершин сети) носит довольно общий характер: это могут быть отдельные лица, организации, страны или совокупности таких объектов. Связь между двумя узлами означает отношения между ними; связи могут быть неориентированными (ненаправленными), ориентированными (направленными) — когда информация или ресурсы передаются только в одну сторону, при этом отличают взаимные направленные связи (англ. reciprocal links), когда взаимодействие обоюдное (например, связи взаимного цитирования публикаций или сайтов).

Взаимозависимость в принятии решений между агентами может обеспечиваться разными типами связей или отношений между участниками, которые исследователи делят на две группы – формальные и неформальные [28]. К формальным принято относить те связи, которые в том или ином виде документаль-

но «закреплены» между участниками. Примерами могут служить различные виды правовых отношений – договоры, контракты, соглашения; финансовые транзакции между банками, предприятиями и физическими лицами; коллаборации в рамках научно-исследовательской деятельности, оформленные в виде совместных исследовательских грантов, зарегистрированных патентов или совместных публикаций. Неформальные отношения, как правило, не имеют документального подтверждения и обеспечивают взаимосвязь в принятии решений посредством норм, репутационных или доверительных механизмов. Примерами выступают знакомство и общение между руководителями предприятий на промышленных конференциях, взаимодействие между учеными в рамках научно-исследовательских семинаров или знакомства и дружба между людьми. Одной из ключевых характеристик взаимодействия является передача информации и поэтому, по мере развития и распространения информационных технологий, граница между формальными и неформальными связями становится тоньше: так, например, неформальные дружеские отношения теперь можно закрепить, используя онлайн-социальные сети.

Существующие на текущий момент исследования сетевого взаимодействия показывают, что формирование социально-экономических связей поддается измерению и структура сети имеет существенное значение. Различное положение агентов в сети может существенно повлиять как на индивидуальные, так и на агрегированные результаты взаимодействия. Понимание структуры сетей позволяет выявлять узлы с высокой значимостью и группы узлов с тесными связями, которые могут играть ключевую роль в распространении информации или рисков, что делает их важными для остальных участников и всей сети в целом и позволяет предсказывать эффекты внешних воздействий. В данной главе рассматриваются примеры того, как подход на основе данных о структуре сети используется в прикладных задачах, связанных с исследованием взаимодействия различных видов агентов.

1.1. Сети и управление

В англоязычной литературе феномен управления сетевыми структурами социально-экономического взаимодействия, который описывает процесс использования данных сетей социального взаимодействия для изменения результатов деятельности участников сети, характеризуется термином «сетевые интервен-

ции» или «сетевое вмешательство» (англ. *network interventions*). Термин обрел особую популярность после публикации работы [230] с одноименным названием и изначально формулировался скорее в контексте социологических исследований. Автор приводит следующие стратегии сетевых интервенций, каждая из которых имеет различные тактические альтернативы:

- индивидуальные (англ. *individual*) – идентификация ключевых участников сети, выбранных на основе некоторых сетевых характеристик;
- групповые (англ. *segmentation*) – сегментация сети, при которой вмешательство направлено на группы людей;
- индукционные (англ. *induction*), при которых происходит возбуждение сети таким образом, что активируются новые взаимодействия между участниками – т. н. каскады, которые могут носить информационный/поведенческий и др. характер (см., например, [170]);
- структурные (англ. *alteration*), при которых изменениям подвергаются связи между участниками и сеть взаимодействия в целом.

Ряд авторов [5, 221] выделяют институциональные интервенции, подчеркивая специфику вмешательства, направленного на изменение правил/ограничений взаимодействия. Управляющие органы или, в случае информационных технологий - разработчики технологий информационного взаимодействия, могут изменять правила взаимодействия между участниками, устанавливать формальные или технические ограничения на взаимодействие участников сетевых отношений, регулировать «стоимость» создания или удаления связей между участниками.

Существует множество примеров использования сетевых отношений в задачах управления социально-экономическими системами, некоторые из них приведены в таблице 1.1.

Ниже будут подробно рассмотрены первые три случая из таблицы 1.1: эти примеры продемонстрируют основные аспекты разработки и реализации сетевых интервенций, необходимые данные и методы их сбора, а также ключевые проблемы, препятствующие эффективной разработке и оценке эффектов от реализованных мер.

Таблица 1.1. Примеры использования сетевых отношений в задачах управления социально-экономическими системами

Экономическое явление	Вмешательство	Данные	Авторы
Выход финансовой организации на новый рынок	Распространение информации о появлении новой организации	Социологические опросы населения, на основании которых были идентифицированы сети социальных отношений	Banerjee и др. [68]
Политика в сфере здравоохранения	Идентификация влиятельных в своих группах учеников и обучение их тому, как действовать во время неформального общения вне класса, чтобы побудить своих сверстников не употреблять табачную продукцию	Социологические опросы учащихся, на основании которых были идентифицированы сети социальных отношений	Campbell и др. [102], см. таблицу 2
Разработка программ экономического развития	Формирование и развитие региональных исследовательских ассоциаций в целях повышения стимулирования взаимодействия между организациями, диффузии технологий и сетевых эффектов	Информация об участии предприятий в исследовательских ассоциаций и их патентной активности	См. таблицу 1.4.
Миграционная политика	Повышения информированности мигрантов об их новом месте пребывания (способах трудоустройства, возможностях проживания и т. п.)	Социологические опросы мигрантов, на основании которых были идентифицированы сети социальных отношений	Barsbai [71]
Политика в сфере регулирование банковской системы	Исследование влияния новостных сообщения и регуляторных мер центрального банка, а также структуры сети межбанковского взаимодействия	Данные о межбанковских операциях и корреляции финансовых показателей	Brunetti [97]
Политика в сфере научных исследований	Стимулирование междисциплинарных исследований	Публикационная активность ученых и их участие в грантах	Sciabolazza [218]
Политика в сфере образования	Оценка краткосрочных и долгосрочных эффектов влияния мероприятий, предшествующих началу обучения, на взаимодействие и формирование связей между учащимися	Опросы студентов университета	Boda [84]

Выход финансовой организации на новый рынок

В 2006 году индийский банк «BSS»¹ столкнулся с задачей распространения информации о своих финансовых услугах среди жителей 75 деревень. По разным причинам банк не мог воспользоваться традиционными на тот момент методами распространения информации, в результате начав выявлять ключевых жителей и привлекая их для устной передачи информации. До выхода BSS на данный рынок исследователи изучили социальные сети деревень, выявив три подхода к измерению влияния людей: центральность по степени (прямое влияние), по собственному вектору (влияние окружения) и диффузионную центральность (способность распространять информацию). Они обнаружили, что информация обычно передается в течение трех итераций — от источника к друзьям и далее, но не выходит за пределы третьего круга. Результаты показали, что эффективность распространения информации зависела от центральности источников. В деревнях, где изначальные носители информации имели высокую центральность по собственному вектору, число заемщиков было в три раза выше, чем там, где этот показатель был низким. Авторы исследования [68] собрали две волны данных о социальных сетях в 75 индийских деревнях со средним числом жителей около 1000 человек, составили карту социальных сетей в каждой деревне, задав более десятка вопросов о социальных связях местным жителям.

Сети и здравоохранение

В работе [223] разработан подход к выявлению группы влиятельных учеников средней школы для эффективного распространения идей по укреплению здоровья среди своих сверстников. Анкета для выявления, разработанная в ходе обширной экспериментальной работы в рамках рандомизированного контролируемого исследования (англ. randomized controlled trial, RCT), была заполнена более 10 тысячами учеников 8-го класса (в возрасте 12–13 лет) в 59 школах (30 экспериментальных, 29 контрольных). Влиятельные учащиеся, выявленные в 30 школах, были обучены распространению информации о влиянии курения на здоровье посредством неформальных контактов со сверстниками. Хотя студенты и преподаватели выразили сомнения в пригодности некоторых молодых

¹Подробнее об этом исследовании рассказано в [159].

людей, привлеченных в качестве ключевых источников распространения информации, в результате реализованных мер на 22% снизилась вероятность того, что они будут регулярно курить, по сравнению с контрольными школами.

Можно отметить, что в целом наблюдается растущий интерес к пониманию влияния социальных связей на поведение, связанное со здравоохранением. Социальные связи используют или изменяют их характеристики для создания, ускорения или поддержания поведения, влияющего на индивидуальное здоровье. В работе [157] проведен систематический обзор в целях изучения эффективности управления социальными связями для изменения поведения в отношении здоровья. Авторы проанализировали базы данных рандомизированных контролируемых испытаний за период с 1990 по 2019 год на предмет использования данных о социальных связях и представили результаты в виде анализа эффективности, классификации по типу интервенций и используемым методам для более 40 релевантных исследований. В таблице 1.2 представлены некоторые примеры исследований, проанализированных авторами. В качестве критерия эффективности сетевых интервенций авторы использовали показатель отношения шансов (англ. odds ratio, OR), который в данном случае характеризует наличие эффекта от реализованных мер. Значение показателя больше единицы означает, что целевые значения в экспериментальной группе (той, в которой были реализованы меры) в лучшую сторону превышают значения контрольной группы. Этот показатель представлен в последнем столбце таблицы, наряду с информацией временном интервале, на котором OR принял максимальные значения. n_e и n_c означают число участников в экспериментальной и контрольной группах, соответственно.

Диффузия технологий и проблема оценки эффективности создания индустриальных кластеров

Оценка экономических эффектов совместной научно-исследовательской деятельности коммерческих компаний связана с феноменом «диффузии технологий» или «перетока технологий» (англ. R&D spillovers). Под диффузией технологий понимают вторичные эффекты от научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок (НИОКР, англ. Research and development, R&D), возникающие вследствие совместной реализации этих проектов несколькими организациями (эффекты разделения труда и распределения рисков, межорга-

Таблица 1.2. Примеры сетевых интервенций, реализованных в рамках экспериментов в области здравоохранения (фрагмент, источник [157])

Авторы	Дизайн исследования	Целевая группа	n_e	n_c	Целевые показатели	OR
	Индивидуальные					
Campbell et al, [223]	Вмешательство состояло в идентификации влиятельных учеников и обучении их тому, как действовать во время неформального общения вне класса, чтобы побудить своих сверстников не употреблять табачную продукцию	12–13-летние учащиеся средней школы	5,358	5,372	Число учащихся, употребляющих табачную продукцию	1.31, до 6 мес.
Kim et al, [171]	Вмешательство состояло в распространении информации путем идентификации наиболее влиятельных жителей о пользе нескольких типов товаров: (а) поливитаминов при дефиците питательных элементов и (б) средствах очистки воды	Жители деревни; средний возраст	3,74	1,599	Доли проданных купленных населением	1.05, до 6 мес.
	Групповые					
Shaya et al, [220]	Сравнение эффективности двух методов посещения учебных курсов по профилактике диабета: индивидуального (классического) и группового, в котором участникам предлагалось сформировать малую группу (3–4 чел.) из числа родственников, близких друзей и др. для совместного посещения образовательных курсов.	Люди, страдающие диабетом; средний возраст 53 года	68	70	Изменение показателей крови.	3.61, до 6 мес.
Cobb et al, [111]	Эксперимент с использованием электронных средств связи (социальные сети, электронная почта и мобильная связь), в ходе которого участники ежедневно получали предложения относительно небольших действий, направленных на улучшение здоровья	Здоровые взрослые люди; средний возраст 47 лет	752	751	Субъективные показатели общего благополучия по шкале от 0 до 100.	1.40, до 6 мес.
	Индукционные					
Wing et al, [235]	Желающим избавиться от лишнего веса и записавшимся на соответствующие курсы (включающие консультации с диетологом, упражнения и др.) исследователи предлагали привлечь к курсам своих членов семьи, коллег или друзей. Исследовались успехи, достигнутые как инициаторами активности, так и тех, кто был привлечен своими друзьями или коллегами.	Люди с избыточным весом; средний возраст 43 лет	128	38	Потеря лишнего веса	2.05, от 6 до 12 мес.
Latkin et al, [183]	В целях предотвращения распространения ВИЧ участникам предлагалось пройти образовательные курсы, в рамках которых их обучали поведенческим аспектам снижения угрозы распространения (взаимодействию с окружением, страдающим наркотической зависимостью или ВИЧ)	Люди с низким доходом, страдающие наркотической зависимостью и/или контактирующие с таковыми хотя бы раз в неделю; средний возраст 39 лет	167	83	Субъективная оценка частоты столкновения с социальными девиациями.	3.65, до 6 мес.
	Структурные					
Litt et al, [190]	В целях предотвращения употребления алкоголя каждому из участников предлагалось оценить отношения со своим окружением по различным показателям (характер отношений, продолжительность и отношение к употреблению алкоголя) и изменить свою сеть социальной поддержки путем прекращения старых отношений и создания новых	Люди, страдающие алкогольной зависимостью; средний возраст 45 лет	140	70	Длительность периода воздержания от алкоголя	3.97, до 6 мес.

низационного обучения, обмена информацией и других взаимных отношений) [14, 129]. Предположительно, эти эффекты происходят по двум каналам [204].

Один из таких эффектов проявляется на этапе НИОКР, когда исследователи могут получать новые знания из научных журналов и конференционных презентаций, применяя их в своих исследованиях. Они могут обнаружить, что аналогичная работа ведется в другой компании, и обратиться с предложением о сотрудничестве для устранения узких мест в своих разработках. Вероятность подобных вторичных эффектов, распространения знаний или кооперации выше при большей схожести исследовательских направлений обеих сторон и ниже, если компании конкурируют на одних и тех же рынках. Этот показатель оценивается через распределение расходов на НИОКР по исследовательским областям и называется «близостью НИОКР» (англ. R&D proximity) [164].

Другой эффект связан с использованием компанией промежуточных товаров, закупаемых в других отраслях. Когда в результате научно-исследовательских разработок улучшаются характеристики оборудования, производимого в одной отрасли, это способствует росту производительности и снижению затрат в отраслях, использующих данное оборудование. Такие побочные эффекты называют «потокотом НИОКР» (англ. R&D flow) и обычно измеряют как произведение расходов исходной отрасли на НИОКР и доли ее продаж в отрасли, получающей вторичный эффект [227].

Наличие таких внутриотраслевых (англ. intra-industry) и межотраслевых (англ. inter-industry) эффектов разработки технологий является отличительной особенностью «кэйрэцу» [225], возникших вследствие инициативы правительства по созданию исследовательских ассоциаций, создание которых называют в качестве одной из причин высоких показателей экономического развития Японии в послевоенный период [204, 145]. Сотрудничество состояло в реализации краткосрочного (несколько лет) совместного исследовательского проекта, финансируемого предприятиями совместно с государством. Иногда в рамках сотрудничества создавались совместные лаборатории, однако в большинстве случаев организации брали на себя реализацию отдельных частей проекта в рамках собственных исследовательских лабораторий и в последствии обменивались результатами.

В работах [145, 150], посвященных феномену исследовательских ассоциаций в Японии, было показано, что возникновение ассоциаций имело позитивные

Таблица 1.3. Этапы развития кластеров промышленных предприятий

Первый этап (2001-2005 гг.) Период запуска промышленных кластеров	Второй этап (2006-2010 гг.) Период развития промышленных кластеров	Третий этап (2011-2020 гг.) Период автономного роста индустриальных кластеров
Запущено около 20 проектов промышленных кластеров, правительство активно работало в сотрудничестве с кластерами, разработанными автономно местными органами власти, образуя «сети, в которых видно каждое лицо», которые служат основой для промышленных кластеров.	План призывает продолжать способствовать формированию сети, а также развивать конкретные предприятия. В то же время план способствует реформированию корпоративного управления и созданию новых компаний. Реализация является гибкой, при этом рассматриваются конкретные проекты и запускаются новые проекты по мере необходимости.	При дальнейшем содействии формированию сетей и развитию конкретных предприятий, план призывает к деятельности промышленных кластеров для достижения финансовой независимости и автономного роста.

последствия, однако с точностью идентифицировать экономический эффект от создания таких ассоциаций не представляется возможным в силу разнообразия экономической политики, проводимой государством. Несмотря на сложности в оценке эффектов, министерство экономики, торговли и промышленности Японии (METI) в 2001 году запустило новую программу² по поддержке региональных кластеров, которая активно использовала термины и концепции сетевого взаимодействия: «Региональные малые и средние предприятия, университеты и государственные учреждения должны формировать горизонтальные сети, которые распространяются как паутина, совместно использовать свои интеллектуальные и бизнес-ресурсы и способствовать партнерству между предприятиями, университетами и государственными учреждениями, и развитию деловой среды, в которой новые предприятия могут создаваться одно за другим». Основные этапы реализации программы представлены в таблице 1.3.

Результатами первого этапа стало создание «...19 проектов, направленных на формирование промышленных кластеров в сфере ИТ, биоинженерии,

²Industrial Cluster Project 2009 [Electronic resource] // The Ministry of Economy, Trade and Industry. [https://www.meti.go.jp/policy/local_economy/tiikiinnovation/source/2009Cluster\(E\).pdf](https://www.meti.go.jp/policy/local_economy/tiikiinnovation/source/2009Cluster(E).pdf)
Industrial Cluster Second Term Medium-Range Project // The Ministry of Economy, Trade and Industry. https://www.meti.go.jp/policy/local_economy/tiikiinnovation/source/2ndplan_outline_eng.pdf

экологических технологий и производства. Проекты были начаты с участниками около 6100 компаний и 250 университетов в общей сложности в Японии; были созданы сети для партнерства между промышленным и академическим сообществами, между предприятиями и между различными отраслями, а также были проведены определенные мероприятия. . . . В течение срока действия плана сотрудники и координаторы десяти отделений METI посетили в общей сложности около 18 000 компаний (некоторые – дважды и более), и в общей сложности около 6 800 исследователей. Они также провели 1200 семинаров (в которых приняли участие в общей сложности 200 000 человек), 1400 встреч представителей деловых кругов и исследователей (в которых приняли участие в общей сложности 120 000 человек) и 400 бизнес-сессий (с участием 163 000 человек)».

Можно сказать, что все эти количественные оценки являются прекрасными примерами, характеризующими изменение структуры, свойства и силы взаимодействия между компаниями. Хотя сам проект активно использует терминологию сетевого анализа – тезисы о «поддержке формирования сетей», «соединения кластеров», «формировании сетей для поддержки создания новых предприятий» – в качестве показателей эффективности реализации предложенной программы сетевые метрики не использовались. В результате множество исследователей, анализирующих эффективность данной программы, вынуждены самостоятельно идентифицировать сети стратегического взаимодействия, используя опосредованные показатели. Примеры работ, посвященных анализу эффективности реализации проектов развития и поддержки индустриальных кластеров, приведены в таблице 1.4.

Как было показано выше, зачастую и структура сетевого взаимодействия может быть идентифицирована с трудом или вовсе недоступна внешнему наблюдателю. Задача, таким образом, состоит в идентификации связей между агентами. В попытке выявления сетей стратегического взаимодействия используются различные методы идентификации, такие как

— осуществление полевых экспериментов и контролируемых испытаний, посвященных сбору и анализу информации о взаимодействии, которые подразумевают непосредственное взаимодействия с участниками с использованием тестирования, опросов (в частности, методика «Aggregated Relational Data» [96]) и др. Примером являются упомянутые ранее данные о распространении микро-

Таблица 1.4. Исследования, посвященные оценке и анализу сетевых эффектов политики создания производственных кластеров

Авторы	Исследование	Страна	Данные	Методы
Kajikawa [168]	Анализ структуры сетей торговых отношений между промышленными организациями	Япония	Торговые связи – продажи и закупки – между промышленными предприятиями	Методы сетевого анализа
Mori [199]	Оценка воздействия региональной кластерной политики - описательная статистика сетевой структуры	Япония	Торговые связи – продажи и закупки – между промышленными предприятиями и регионами	Методы сетевого анализа
Nishimura [203]	Оценка изменения продуктивности НИОКР от участия предприятий в кластерной политике	Япония	Опросы группы предприятий	Эконометрические методы
Whetsell [234]	Анализ эффектов экономической политики на стратегическое взаимодействие между предприятиями	Япония, США	Лонгитюдные данные об экономической активности и патентной активности предприятий	Методы сетевого анализа и эконометрические методы
Jaffe [164]	Выявление сетевых эффектов НИОКР; одна из основополагающих работ по данной теме.	США	Данные о затратах предприятий на НИОКР и их патентной активности	Эконометрические методы
Garone L. [128]	Идентификация сетевых эффектов, возникающих в следствии кластерной политики	Бразилия	Индивидуальные показатели экономической деятельности промышленных предприятий	Эконометрические методы
Russo [215]	Оценка того, способствует ли выбранная региональная инновационная политика созданию хорошо функционирующих сетей - описательная статистика сетевой структуры	Италия	Данные о взаимодействии между участниками проекта кластерной политики	Методы сетевого анализа

финансирования в Индии ([68]), данные национального лонгитюдного исследования здоровья подростков (англ. AddHealth)³;

— методы, основанные на выявлении статистических взаимосвязей между показателями активности участников [132, 173, 182];

— методы, использующие допущения о характере взаимодействия участников сетевых отношений. В случае исследования сетей коммерческих организаций естественно предположить о стратегическом способе взаимодействия компаний между собой. Таким образом, появляется возможность перейти от абстрактной графовой структуры к теоретико-игровому моделированию взаимодействия организаций с дальнейшим решением задачи идентификации структуры взаимодействия [186, 239].

Отдельного внимания заслуживают полевые эксперименты. В данный момент полевые эксперименты и рандомизированные контролируемые испытания играют ключевую роль в определении важности сетевого взаимодействия для экономических результатов [125]. Самым известным примером таких данных являются панельные данные «AddHealth», существуют централизованные базы данных подобных исследований, например, база данных «AEA RCT Registry»⁴. Значительную популярность набирают поведенческие эксперименты с использованием цифровых платформ и, в частности, в рамках онлайн-социальных сетей. Обзор таких исследований представлен в работе [61]. В таблице 1.5 приведены некоторые примеры масштабных исследований в сети интернет.

1.2. Формальные подходы к описанию сетевого взаимодействия и задач управления

Научный интерес к вопросам управления сетевым взаимодействием агентов разной природы начал возникать в середине XX века с появлением концепции сетей. Сети были призваны описывать системы взаимодействующих агентов, при этом – в отличие от графа как математического объекта, строго формализующего характер связи – не конкретизируя механизмы взаимодействия. В работах исследователей в области социологии [63, 195], экономики [169, 127], права [172, 185] сетевой характер взаимодействия подразумевает наличие формальных и неформальных связей между агентами, которые не всегда возможно

³<https://addhealth.cpc.unc.edu/>

⁴<https://www.socialscienceregistry.org/>

Таблица 1.5. Примеры масштабных экспериментов, проведенных на основе онлайн-взаимодействия (фрагмент, источник: [61])

Авторы	Тема	Изучаемое явление	Ресурс	Масштаб
Aral [62]	Распространение продукта	Анализ силы связей и социального влияния	Использование приложения в социальной сети Facebook	1.3 млн. пользователей
Varna [69]	Распространение продукта	Социальное влияние на внедрение платных продуктов	Платная подписка на сервис Last.fm	40 т. - экспериментальная группа, 1.2 млн – контрольная группа
Bakshy [65]	Социальная коммерция и реклама	Распространение рекламы посредством социального взаимодействия	Социальная реклама в сети Facebook	23 млн. пользователей, 148 т. рекламных объявлений, 101 млн. взаимодействий пользователь-объявление
Bakshy [66]	Обмен информацией	Социальное влияние и распространение информации	Новостная лента в сети Facebook	253 млн. пользователей, 76 млн. новостных объявлений, 1.2 млрд. пар пользователь-новость
Muchnik [201]	Эффекты «стадного поведения» в рейтинговании	Эффекты социального влияния на показатели рейтингов.	Рейтинги на неназванном сайте-агрегаторе новостей	116 тыс. пользователей, 101 тыс. комментариев, 10 млн. пар пользователь-комментарий
Centola [105]	Поведение в отношении здоровья	Поведенческие эффекты социального влияния и гомофилии	Искусственно созданная сеть	700 пользователей
Bond [86]	Голосование	Голосование	Кампания по регистрации голосующих в Facebook	61 млн. пользователей
Rand [212]	Кооперация и координация	Игра общественного блага с наказаниями	Ресурс Amazon Mechanical Turk	785 пользователей, 40 игровых сессий
Leider [184]	Просоциальное поведение	Исследование различных типов альтруизма	Приложения в сети Facebook	2 волны - 802 и 2360 студентов
Horton [155]	Онлайн-рынок труда	Функции и провалы рынка	ODesk Online Labor Market	-
Tucker [228]	Двусторонние рынки (англ. Two-Sided Markets)	Эволюция двустороннего рынка покупателей и продавцов	Профильная платформа по продаже и покупке товаров	3314 продавцов

описать математически, но которые приводят к взаимозависимости в процессах принятия решений, распространения (например, информации, активности, заболеваний) и др.

Спецификой многих социальных систем является наличие индивидуальных стимулов участников взаимодействия, что нашло отражение в возникновении – в примерно то же время – теории игр как инструмента описания конфликтных ситуаций. Можно привести следующую классификацию типов агентов по методам обработки информации:

– рациональные агенты (например, в рамках концепции байесовской рациональности), которых также можно разделить на выбирающих ответ, наилучший в краткосрочной перспективе – «близоруких» (англ. *myopic*), и стратегических, выбирающих ответ оптимальный с точки зрения некоторой теоретико-игровой концепции (например, равновесия Нэша);

– «наивные» (англ. *naïve*) – в эту категорию зачастую включают правило ДеГроота, согласно которому агенты формируют собственные представления, усредняя наблюдаемые мнения других агентов.

Существует ряд ранних работ, посвященных выявлению типов агентов в лабораторных и полевых исследованиях [156, 181, 109], при этом с отсутствием сравнительного анализа различных механизмов научения в рамках одной и той же подвергающейся исследованию группы [8]. В работе [107] была предпринята попытка выявления типов агентов на нескольких наборах реальных данных – результаты демонстрируют, что социальные группы состоят из смеси рациональных (байесовских) и наивных (действующих по ДеГрооту) агентов, и что соотношение между типами варьируется для различных наборов данных. Так, в случае серии поведенческих экспериментов с участием жителей 19 индийских деревень выявлено 10% населения, поведение которых согласуется с концепцией байесовской рациональности, в то время как поведение остальных больше соответствует механизму социальных норм или следованием выбору своих соседей в сети социальных отношений. В том же эксперименте, но уже среди студентов Технологического института Мехико, доля результатов, согласующихся с концепцией байесовских рациональности достигла 50%. Число экспериментов для каждой из групп составляло 95 и 50 соответственно, число участников – 665 и 350 соответственно. В своем исследовании авторы идентифицировали четыре паттерна научения, позволяющих различить агентов, действующих

в соответствии с правилами Байеса и ДеГроота в модели с неполной информацией и определили ключевую сетевую характеристику, разделяющую типы обучения, характеризующуюся сильно связанной компонентой графа. В работе [147] проведено менее масштабное экспериментальное исследование со схожими результатами: авторы обнаружили, что испытуемые принимают решения, согласующиеся с обновлением по ДеГрооту в 80%–98% случаев, причем ошибки прогноза обусловлены позицией агента в сети. Однако в их исследовании центральное место занимает следующее наблюдение: соответствие реального процесса научения агентов «наивному» правилу ДеГроота наблюдается только в сравнительной статике, в то время как динамика достижения консенсуса в лабораторных экспериментах предполагает использование более сложных правил обработки информации. Авторы идентифицируют эти эвристики, тестируют широкий класс других правил научения и модифицируют классическую модель ДеГроота, позволяя агентам корректировать вес своих предшествующих состояний.

С конца XX века сетевой и теоретико-игровой подходы начали использоваться совместно. Игры, в которых агенты связаны между собой сетевой структурой (или сетевая структура является результатом их взаимодействия), используют результаты теории графов и сетевых исследований для определения влияния структуры графа на стратегическое поведение. Одновременно с этим развивались и формальные методы анализа и управления сетевыми системами. В теории автоматического управления и её приложениях огромную популярность среди исследователей получили так называемые усредняющие системы, частным случаем которых являются модели консенсуса [51, 24, 25, 26] и, в особенности, классическая модель ДеГроота [5], в которой изучается динамика формирования консенсуса мнений в сетевой структуре. При этом математические методы описания систем агентов, взаимодействующих стратегически, обладают специфическими особенностями, а описываемые ими механизмы взаимодействия зачастую отличны от консенсуса [6, 7]. Однако решения, принимаемые агентами под влиянием взаимодействия с другими, всё так же порождают неэффективность, что делает актуальными разработку и исследование различных методов управления.

С начала 2000-х было предложено несколько подходов к управлению, основанных на сетевых характеристиках агентов в социально-экономических си-

стемах. Особую популярность обрели подходы к управлению взаимодействием агентов в экономике: модели конкуренции и сотрудничества компаний, межбанковское взаимодействие, модели потребления общественных благ. Возник ряд теоретико-игровых моделей, тесно связанных с эконометрическими моделями идентификации влияния окружения агента на его поведение, в которых исследователи моделируют взаимосвязь между выбором агента и выбором его соседей.

Отправной точкой в математических моделях взаимосвязи исходов агентов между собой является концепция «эндогенных социальных эффектов» (англ. *endogenous social effects*)⁵ [193]. В зависимости от контекста, в работах по социологии и социальной психологии в качестве примеров таких эффектов приводятся «влияние окружения» (англ. *peer influences*), социальные нормы (англ. *social norms*), «эффект соседей» (англ. *neighborhood effects*), «социальное взаимодействие» (англ. *social interactions*), «стадное поведение» (англ. *herd behavior*), конформность (англ. *conformity*) и др. Иными словами, агенты (люди, организации и др.) только под влиянием взаимодействия друг с другом начинают учиться, подражать или имитировать поведение своего окружения, что никак не связано с внешней средой.

В исследованиях в области микроэкономики и эконометрики влияние такого взаимодействия на индивидуальное поведение принято называть «эффектами окружения» (англ. *peer effects*)⁶[91]. Эффекты окружения определяются как корреляция действий среди представителей одной референтной группы. Для идентификации таких эффектов была предложена модель *Linear-in-Means* (*LiM*) [193], изучающее влияние социальных взаимодействий на поведение и результаты индивидов в группе. Модель используется для анализа того, как поведение или характеристики группы (в исходной постановке – средние значения) влияют на поведение отдельного её члена.

Исторически под группами понимали части одной популяции (например, жители одной общины, одноклассники, коллеги, компании, конкурирующие на одном рынке), что в эконометрических моделях эффектов окружения отража-

⁵Для многих терминов в литературе на русском языке не возникло устоявшихся переводов - в этом случае термины взяты в кавычки.

⁶Несмотря на обилие прикладных исследований (например, [211, 121]), в литературе встречаются разрозненные варианты перевода, такие как «эффекты сообучения/сверстников», реже - «эффекты окружения/среды».

лось в объясняющей переменной, характеризующей поведение одной из пересекающихся групп. С появлением и развитием концепции сетей возникла возможность учитывать индивидуальные связи между людьми – «сетевые эффекты»⁷, что позволило уточнить существующие модели, а также разрешить ряд технических особенностей их идентификации [91]. Вопросам идентификации таких моделей посвящены работы [193, 197, 91, 60], обзоры [92, 56], посвященные результатам эконометрических исследований, а также работы [231, 180], посвященные идентификации эффектов окружения в полевых и лабораторных экспериментах.

Особую популярность получили игры, в которых наилучший ответ игрока зависит от действий его соседей линейно. Игры с линейным наилучшим ответом можно рассматривать как генеративные модели эффектов окружения/сетевых эффектов: если в центре внимания авторов эконометрических моделей находится задача идентификации этих эффектов и выявления причинно-следственных связей на основе реальных данных, то игры на сетях предоставляют теоретическую основу для объяснения того, как формируются эффекты окружения, моделируя стратегическое поведение агентов. В теоретико-игровых моделях фокус внимания направлен на роль структуры взаимодействия: как она влияет на равновесие в игре; к чему, с точки зрения агрегированных характеристик, приводят локальные эффекты взаимодействия узлов; какие узлы и связи играют ключевую роль.

Существует множество примеров количественной оценки влияния группового поведения на индивидуальные результаты. В большинстве случаев под переменной x_i понимается усилие или действие агента (англ. effort или action), которые он совершает в интересующем исследователей процессе. Стандартными примерами в литературе служат следующие:

– образовательные процессы – наверное, наиболее популярная область приложений. [216, 211, 121, 90]. В качестве переменной x_i может использоваться средний балл студента, либо результаты социологических опросов. Если эконо-

⁷В работе [188], посвященной теории отраслевых рынков, авторы предложили использовать термин «сетевые эффекты» к рынкам с возрастающей отдачей от масштаба (см, например, [50]), а термин «сетевые экстерналии» - к рынкам, на которых действия агентов порождают неэффективные равновесия. Некоторые из приведенных ниже моделей действительно отражают взаимодействие фирм на рынках [175, 135], тем не менее в понимании [188] термины не всегда уместны. Принимая это во внимание, ниже термин «сетевые эффекты» будет применяться и как синоним «peer effects», и в более широком смысле: к ситуациям зависимости действий одного участника от действий тех, с кем он связан сетью.

метрические модели изучают, как успеваемость студентов зависит от их окружения, то теоретико-игровая постановка формализует стратегический характер усилий: например, студенты выбирают затрачиваемое на обучение время или участие в дополнительных активностях, при этом учитывая выбор своих однокурсников или друзей;

— социальные нормы и девиантное поведение – существует множество ситуаций, в которых неэтичное поведение распространяется в социальных сетях. Например, некоторые корпоративные культуры поощряют слабые этические нормы [119], а наличие неэтичных одноклассников в академическом контексте повышает соблазн студентов к мошенничеству [104, 27]. В этом случае модели теоретико-игрового взаимодействия позволяют исследовать, какую роль социальные нормы играют в выборе усилий отдельных участников и их позицию в структуре сети. В этом случае в качестве переменной x_i используют индикаторную функцию, характеризующую совершение определенного действия;

— сети преступников [101] – исторически первый пример⁸, послуживший основой для модели [67] и задаче выявления ключевого игрока (см. раздел 2.2.2), x_i – профиль преступника (англ. crime effort profile). Эконометрические модели оценивают, как связи между агентами влияют на проявление девиантного поведения [118]. Игры на сетях показывают, как эффекты стратегической дополнителности (или заменимости, см. раздел 2.1.1) усилий взаимодействующих агентов распространяются через сеть;

— конкуренция и сотрудничество фирм [175]. В данном случае x_i – объем выпуска (нормированный объем продаж). Авторы исследуют влияние коллаборации в рамках НИОКР. В общем случае исследователей интересует вопрос о роли межфирменных отношений в экономическом развитии: влиянии экзогенного расширения деловых сетей на производительность фирм и о механизмах, лежащих в их основе [100].

Основная критика эконометрических моделей идентификации сетевых эффектов связана с проблемой эндогенности [193, 60], а именно корреляции между признаками агентов и их действиями, а также между окружением и ошибкой модели. Для борьбы с эндогенностью предложены различные методы, такие как двухшаговый метод наименьших квадратов с использованием инструментальных переменных, модели нелинейной регрессии и др. (см. обзоры [56, 92]).

⁸<https://lens.monash.edu/2019/08/06/1375976/network-science-identifying-key-players-in-collective-dynamics>

Интерес к линейным моделям главным образом мотивирован ключевой ролью сети в анализе влияния узлов друг на друга, равновесия и задач управления. За последние десятилетия было получено множество результатов в рамках изучения структуры реальных сетей, механизмов их формирования и того, как сети влияют на поведение их участников. В исследованиях сетевых моделей стратегического взаимодействия авторы изучают вопрос о том, каким образом следует учитывать информацию о сетях при решении задач управления.

Сетевые эффекты являются примерами «внешних эффектов» или «экстерналий» (англ. externalities) – ситуации, в которой благополучие человека зависит от действий других людей без взаимно согласованной компенсации [161]. С точки зрения теоретико-игровых моделей взаимодействия это означает, что равновесие при наличии внешних эффектов неэффективно (см. раздел 2.1.1). Можно сказать, что игры с линейным наилучшим ответом описывают влияние линейных внешних эффектов в действиях игроков, связанных с их окружением.

В экономике внешние эффекты всегда рассматривались как источник неэффективности (т. н. «провалов рынка»), а классическим способом использования или противодействия внешним эффектам является прямое вмешательство в экономический процесс (или экономический интервенционизм). Аналогично, возникло понятие «сетевых интервенций» или « сетевого вмешательства» (англ. network interventions) – процесс использования данных сетей социального взаимодействия для изменения результатов деятельности участников сети⁹. В англоязычной литературе термин «сетевые интервенции» обрел особую популярность после публикации статьи [230] с аналогичным названием, в которой формулировался скорее в контексте социологических исследований. Существуют различные стратегии сетевых интервенций, и интерес представляет оценка применимости и эффективности этих методов.

1.3. Связь с другими областями

В обзоре [51] рассматриваются основные задачи и приложения сетевого управления (англ. control of networks), изучающей вопросы управления в динамических системах взаимосвязанных агентов (в частности, такими задачами как групповое, кооперативное, мультиагентное/многоагентное управление).

⁹Сетевые интервенции можно рассматривать в качестве аналога термина «сетевое управление», используемого для технических систем.

Пусть $x_i(t) \in \mathbb{R}$ – вектор состояния в момент времени t узлов сети, $i = 1, \dots, n$, состоящей из элементов g_{ij} , отражающих связь между вершинами i и j в графе G . Авторами отмечается, что широкий класс сетевых мультиагентных систем описывается в непрерывном времени моделями вида

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_i, u_i) + \sum_{j=1}^N g_{ij}(t) f_{ij}(x_i, x_j), \quad (1.1)$$

где функции $F_i(\cdot)$ и $f_{ij}(\cdot)$ характеризуют локальную динамику агента и его взаимодействие с другими агентами, соответственно. При этом наиболее распространенными являются сети, в которых взаимодействия агентов зависят только от их разногласий (расхождения их состояний) и наиболее полно исследованы в настоящий момент линейные сетевые системы с функцией $f_{ij}(x_i, x_j)$ вида:

$$f_{ij}(x_i, x_j) = x_i - x_j, \quad (1.2)$$

и в дальнейшем обзор посвящен именно таким моделям. В то же время, подобная (1.1) постановка справедлива не только для моделей консенсуса, но и для теоретико-игровых моделей взаимодействия, при этом функция $f_{ij}(x_i, x_j)$ носит особую специфику (см. разделы 2.1.1 и 2.1.4).

С описанными ниже моделями тесно связаны и модели межотраслевого баланса [54, 55]; схожая проблематика исследовалась в работах, посвященных динамическим моделям межотраслевого баланса [19, 18, 17] и оптимального планирования [16].

Различным способам описания теоретико-игрового взаимодействия на сети посвящены работы [34, 146], задачам управления в случае стратегического формирования сетей [11, 12] и анализу равновесия в таких играх [45, 48], задачам управления в моделях ограниченной рациональности [35, 36] (подробнее в разделе 2.1.2). При этом в данной работе не рассмотрены кооперативные игры [30], хотя несколько вариантов кооперативного решения для описанных ниже игр предложены в [202, 124, 236].

Отдельно стоит отметить работы, посвященные задачам управления в моделях социальных сетей [5, 15], моделях смешанного социального влияния (механизмов ассимилятивного/диссимилятивного влияния и ограниченного доверия) [179]. Как будет показано ниже, подобные модели так же можно рассматривать в качестве моделей стратегического взаимодействия.

Глава 2. Задачи управления в теоретико-игровых моделях на сети с линейным наилучшим ответом

В предыдущей главе кратко описана история развития сетевых моделей стратегического взаимодействия и задач управления, отмечена значительная роль моделей идентификации сетевых эффектов (эффектов окружения). В данной главе будут рассмотрены некооперативные игры на сетях, в которых агенты взаимодействуют стратегически, принимая решения, направленные на максимизацию собственного выигрыша. Центральное место в анализе займет концепция линейного наилучшего ответа, определяющая оптимальную стратегию агента в зависимости от действий его соседей по сети: целью данной главы является обзор моделей и методов управления, которые были предложены для случая линейной зависимости функции наилучшего ответа игроков от действий соседей в рамках сетевого теоретико-игрового взаимодействия.

Будет рассмотрен широкий спектр моделей, включая модели с эффектом перетока, игры координации, игры конкуренции и сотрудничества, и модели влияния информированности агентов. Особое внимание уделено анализу сетевых эффектов – стратегической дополнителности и заменимости, а также различным видам функций окружения (локальное агрегирование, локальное усреднение). Рассматривается влияние структуры сети на равновесие Нэша и социальный оптимум. Отдельный раздел посвящен задачам управления, в которых центр стремится изменить равновесие системы через изменение стимулов агентов или сетевой структуры.

Глава состоит из следующих разделов: в первой части описаны игры с линейным наилучшим ответом – классификация игр, инструменты их анализа, а также примеры игр и задачи управления, решаемые в сравнительной статике. Во второй части приводится описание задач центра, стремящегося изменить равновесный исход игры: классификация методов управления, примеры, а также описание решения ряда задач управления сетевым взаимодействием агентов.

2.1. Игры с линейным наилучшим ответом

2.1.1. Выигрыш игроков и линейный наилучший ответ

Рассмотрим некооперативную одношаговую игру на сети с полной информацией. Множество агентов $N = \{1, \dots, n\}$ на сети, заданной матрицей смежности $G = \{g_{ij}\} \in \{0, 1\}^{n \times n}$, $g_{ii} = 0$, взаимодействуют стратегически т. е. пытаются получить наибольшую выгоду, учитывая действия других игроков: каждый участник i выбирает некоторое неотрицательное действие x_i и получает выигрыш v_i от принятого решения. Функция выигрыша (или функция платежа/полезности, англ. payoff/utility function)

$$v_i(x) = f(x_i, z(x_{-i}, G)) \quad (2.1)$$

включает в себя зависимость от собственного действия x_i игрока i , а именно – выгоды и издержки, которые он получает от выбранного действия, и зависимость от сетевых эффектов – действий других игроков $x_{-i} = \{x_j\}_{j \neq i}$, которая представлена в виде функции окружения игрока $z(x_{-i}, G)$, учитывающей структуру сети (подробнее о характере этой зависимости ниже). Помимо этих двух компонент в модель могут входить так называемые чистые экстерналии (англ. pure externalities) – зависимость выигрыша агента от других, экзогенных параметров, которые не связаны с действиями игроков.

Агенты максимизируют собственный выигрыш, для чего каждому агенту i необходимо наилучшим образом отвечать на действия других агентов x_{-i} :

$$BR_i(x_{-i}, G) = \text{Arg max}_{x_i \geq 0} v_i(x_i, z(x_{-i}, G)). \quad (2.2)$$

Функция $BR_i(x_{-i})$ носит название функции наилучших ответов игроков (англ. best response/reply function): она не зависит от действий самого игрока i и является его оптимальным ответом на действия других участников. Профиль $x^* = \{x_i^*\}_{i \in n}$ называется равновесием Нэша в чистых стратегиях в такой игре, если для всех i

$$x_i^* = BR_i(x_{-i}^*, G). \quad (2.3)$$

Каждый агент подвержен влиянию прямых (direct) и косвенных (indirect) сетевых эффектов. Прямой эффект на агента i оказывают его соседи по сети (вершины, смежные с вершиной i). Косвенные эффекты возникают в силу сетевого характера взаимодействия: на агента оказывают опосредованное влияние

соседи его соседей, соседи соседей его соседа и т.д. Аналогичные рассуждения справедливы и для влияния связей в сети на действия агентов: прямой эффект от ребра графа G получают вершины, соединенные этим ребром, а косвенный – другие вершины, связанные с исходной парой вершин.

Ключевым аспектом игры является характер зависимости игрока i от действий его соседей по сети: в играх с линейным наилучшим ответом функция наилучших ответов игрока i является одноэлементным множеством и линейно зависит от его окружения $z_i(x_{-i}, G)$, и тогда равновесие в такой игре – решение системы линейных алгебраических уравнений, являющихся наилучшими ответами игроков, при условии $x \geq 0$ (вопрос существования равновесия является отдельной задачей). В данный момент распространена следующая классификация функций окружения игрока:

– локальное агрегирование (англ. local aggregate): $z(x_{-i}, G) = \beta \sum_j g_{ij} x_j$ - выигрыш каждого игрока зависит от суммы действий его соседей по сети;

– локальное усреднение (англ. local average): $z(x_{-i}, G) = \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j$, где d_i – степень узла i – выигрыш каждого игрока зависит от среднего действий его соседей по сети,

где параметр $\beta \in \mathbb{R}$ оказывает мультипликативный эффект и характеризует силу сетевого взаимодействия (или «социальный мультипликатор» [140]). В отсутствии сетевой компоненты (т.е. при $g_{ij} = 1$ для всех i, j) оба класса сводятся к играм с аддитивным агрегированием, см. в [29, 165], в которых на каждого агента влияет одна и та же совокупность стратегий других агентов, в то время как в играх на сетях эта совокупность зависит от агента и сети.

Различие между классами состоит в том, как агент i учитывает (или наблюдает) активность своих соседей по сети. В отличие от локального агрегирования, при котором изменение действия агента j напрямую влияет на агента i , в случае усреднения агент i ориентируется на среднюю характеристику своего окружения, вне зависимости от того, каким высоким или низким является вклад агента j . Иными словами, модели локального агрегирования призваны описывать эффекты перетока - распространения вклада одних участников на других, в то время как модели локального усреднения отражают поведенческие аспекты, связанные с ролью окружения в выборе агента. Как показано в работах [208, 229], модели локального агрегирования и усреднения¹ различны

¹В этой связи стоит отметить модели ресурсных [21]: по-существу, в этих моделях оба механизма - агре-

как с точки зрения свойств функции выигрыша, так и в сравнительной статике и решениях задач управления. В частности, различна и роль параметра β : в играх локального агрегирования увеличение силы сетевого взаимодействия монотонно увеличивает предельный выигрыш игроков, в то время как в модели локального усреднения это не так (см. раздел 2.1.2).

Другим основанием классификации, предложенным в [98] (в т. ч. и для не сетевых моделей), является знак перед функцией окружения, в зависимости от которого теоретико-игровые модели получают различную интерпретацию:

- модели с эффектом «стратегической дополнителности» (англ. *strategic complementarity*, [232]) и, соответственно, положительный сетевой эффект, при котором вклад соседа j игрока i увеличивает предельный выигрыш игрока i (примерами служат модели из [67, 208]);

- модели с эффектом «стратегической заменимости» (англ. *strategic substitutability*) и, соответственно, отрицательный сетевой эффект, при котором вклад соседа j игрока i уменьшает предельный выигрыш игрока i (примерами служат модели из [35, 93, 229]).

Формально, речь идет о знаке второй смешанной производной выигрыша игрока по собственному действию и действию его соседей: если $g_{ij} = 1$, то для игр с эффектом стратегической дополнителности $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} > 0$, а для игр с эффектом стратегической заменимости $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} < 0$. Иными словами, в действиях агентов проявляются положительные (отрицательные) локальные сетевые экстерналии: для игр со стратегической дополнителностью (заменимостью) увеличение усилий других игроков (x_{-i}) приводит к тому, что более высокие действия игрока i приносят относительно большую (меньшую) выгоду по сравнению с более низкими усилиями этого игрока. Примеры моделей и наилучшие ответы игроков представлены в таблице 2.1.

В рамках любой экономической модели обычно выделяют идеальное состояние системы, характеризующееся максимальным общественным благосостоянием. В случае задач управления, речь идет о так называемом «первом по предпочтительности исходе игры» (англ. *first-best outcome/contract*, или *social optimum*), по аналогии с задачами агент-принципал теории контрактов [53]. В работах, посвященных задачам управления в играх с линейным наилучшим ответом, под общественным благосостоянием почти всегда понимается сумма

гирование и усреднение - используются одновременно, но не в теоретико-игровой постановке.

Таблица 2.1. Примеры основных моделей игр с линейным наилучшим ответом

	Стратегическая дополнительность (англ. strategic complementarity)	Стратегическая заменяемость (англ. strategic substitutability)
Локальное агрегирование (англ. local aggregate)	«Линейно-квадратичная игра» $BR_i = b_i + \beta \sum_j g_{ij} x_j$	«Игра локального общественного блага» $BR_i = b_i - \beta \sum_j g_{ij} x_j$
Локальное усреднение (англ. local average)	«Социальные нормы в сети» $BR_i = (1 - \beta)b_i + \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j$	«Модель антиконформизма» $BR_i = (1 - \beta)b_i - \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j$

выигрышей всех агентов (подробнее об этом – в разделе 2.2.1):

$$W = \sum_{i=1}^n v_i,$$

а социальный оптимум – т. е. решение задачи $\max_x W$ и соответствующие ему равновесные стратегии x^O и выигрыши W^O – исследуется в рамках сравнительной статики, подразумевающей, что агенты стремятся максимизировать не собственные функции выигрыша, а благосостояние всех агентов в сумме. Как будет показано ниже на примере отдельных игр, равновесие Нэша в них никогда не является социальным оптимумом: сетевой эффект приводит либо к заниженным, либо к завышенным действиям агентов, тем самым делая актуальными анализ моделей и разработку методов управления в таких играх.

2.1.2. Математические модели сетевых эффектов: координация, конкуренция, сотрудничество и информированность

Игра координации

Классическая модель социального влияния и динамики мнений в сети [130, 116], являющаяся частным случаем задачи консенсуса, имеющей важные приложения в задачах управления в технических системах [51], может рассматриваться и как микроэкономическая модель стратегического принятия решений агентами. [142].

А именно, пусть n агентов стремятся максимизировать свой индивидуаль-

ный выигрыш, характеризующийся функцией

$$v_i = - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} (x_i - x_j)^2. \quad (2.4)$$

Иными словами, агенту невыгодно делать выбор (например, выбор технологии или языка), который отличается от выбора соседей. Функция $v_i(x)$ вогнута, и условий первого порядка достаточно для получения системы наилучших ответов игроков – оптимальный ответ игрока i на действия своих соседей по сети,

$$BR(x_{-i}, G) = \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j, \quad (2.5)$$

совпадает с моделью динамики мнений. Так, модель ДеГроота можно интерпретировать как игру, в которой участники хотят продемонстрировать поведение, похожее на поведение своих соседей по сети, для чего они наилучшим образом реагируют на их действия.

В такой игре любой профиль действий, в котором все агенты совершают одно и то же действие, представляет собой равновесие Нэша. Помимо этого, агенты не обладают индивидуальными характеристиками, отличающими их друг от друга. В силу этого большую популярность получила модель, отражающая взаимодействие агентов, находящихся под влиянием индивидуальных навыков и усредненного поведения своего окружения.

Социальные нормы в сети

С точки зрения теоретико-игрового взаимодействия интерес представляет другой вариант модели ДеГроота, предложенный [131] (модель Фридкина-Джонсена описывает динамику наилучших ответов игроков, анализу динамики посвящена, например, работа [138]), в которой каждый узел i дополнительно поддерживает постоянное внутреннее мнение. Существует несколько популярных вариантов данной модели в теоретико-игровой постановке - в частности, модель с неполной информацией, в которой агенты пытаются определить некоторое состояние мира [144]. В этом случае интерпретация модели близка к известной игре «конкурса красоты» (англ. «beauty contest») [200].

Ниже будет рассмотрена модель локального агрегирования или модель социальных норм (англ: social-norm model)[229]. Каждый игрок получает выиг-

рыш²

$$v_i = b_i x_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right) \left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j \right)^2 - \frac{1}{2} x_i^2, \quad (2.6)$$

где $b_i > 0$ отражает индивидуальную продуктивность агента i , а $\beta > 0$ – склонность к конформизму (*англ. taste for conformity*). Агенты совершают затратные действия ($-x_i^2/2$), при этом сравнивая свой индивидуальный вклад ($b_i x_i$) со средним вкладом своих соседей по сети, стараясь минимизировать различие между своим действием и средним действием своей группы. В силу большой роли слагаемого $\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j = \bar{x}_i$ в других публикациях, в которых оно фигурирует в контексте социологических исследований, авторы называют его *социальной нормой* агента i .

Из условий первого порядка $\partial u_i / \partial x_i = 0$ находим наилучшие ответы игроков:

$$x_i = (1 - \beta)b_i + \beta \bar{x}_i, \quad (2.7)$$

которые представимы в матричном виде:

$$x = (1 - \beta)b + \beta \hat{G}x, \quad (2.8)$$

где $\hat{G} = \{\hat{g}_{ij} = g_{ij}/d_i\}^{n \times n}$. При $\beta < 1$ равновесие Нэша в чистых стратегиях существует и единственно:

$$x^* = (1 - \beta)(I - \beta \hat{G})^{-1}b. \quad (2.9)$$

Первое что необходимо отметить – это эффект индивидуальной продуктивности. Хотя влияние b_i на v_i^* всегда положительно, взаимовлияние продуктивности агентов может иметь разнонаправленный характер:

$$\frac{\partial v_i^*}{\partial b_j} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \iff x_i^* \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \bar{x}_i^*, \quad (2.10)$$

²Можно рассмотреть другие функции выигрыша игроков, например,

$$v_i = b_i x_i - \frac{\theta}{2} \sum_j \frac{g_{ij}}{d_i} (x_i - x_j)^2 - \frac{x_i^2}{2},$$

или

$$v_i = b_i x_i - \theta x_i \sum_j \frac{g_{ij}}{d_i} x_j - \frac{1 + \theta}{2} x_i^2,$$

где $\theta = \frac{\beta}{1 - \beta}$. Наблюдение авторов [229] состоит в том, что перечисленные функции выигрышей объединяет функция наилучших ответов, однако, даже если равновесные усилия x^* одинаковы, анализ благосостояния и его сравнительная статистика могут отличаться, поскольку равновесные полезности и, следовательно, благосостояние различны.

т. е. равновесная полезность агента i возрастает (убывает) в ответ на небольшое изменение продуктивности b_j агента j тогда и только тогда, когда равновесный ответ игрока i больше (меньше) его равновесной социальной нормы. Основным интересом представляет зависимость исхода игры от параметра β . Авторы показывают, что в общем случае эта зависимость немонотонна и переходят к рассмотрению двух крайних случаев:

– чистый индивидуализм ($\beta = 0$) – равновесный ответ каждого игрока равен его индивидуальной продуктивности

$$\lim_{\beta=0} \sum_j x_j^* = \sum_j b_j;$$

– полный конформизм: ($\beta \rightarrow 1$) – все агенты выбирают одинаковый уровень действий, равный средневзвешенной индивидуальной продуктивности

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \sum_j x_j^* = n \sum_j \bar{d}_j b_j,$$

где \bar{d} – вектор нормализованных степеней вершин, $\bar{d}_i = d_i / \sum_j d_j$. Будет ли совокупный вклад $\sum_j x_j^*$ выше при чистом индивидуализме ($\beta = 0$) или при полном конформизме ($\beta \rightarrow 1$) зависит от корреляции между продуктивностью b и распределением по степеням вершин:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \sum_j x_j^* \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_j x_j^* \iff \text{Corr}(\bar{d}, \alpha) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0. \quad (2.11)$$

Когда α и \bar{d} положительно (отрицательно) коррелируют, т. е. агенты с более высокой производительностью занимают более (менее) центральные позиции в сети, тогда полный конформизм увеличивает (уменьшает) совокупные усилия.

Социальный оптимум в модели или решение задачи

$$\max_x \quad b^T x - \frac{1}{2} x^T H(\beta) x, \quad (2.12)$$

где $H(\beta) := I + \frac{\beta}{1-\beta} (I - \widehat{G})^T (I - \widehat{G})$, достигается решением следующей системы наилучших ответов игроков:

$$x_i = (1 - \beta) b_i + \beta \bar{x} + \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} (x_j - \bar{x}_j). \quad (2.13)$$

Отличием оптимума от равновесия Нэша в игре является наличие последнего слагаемого – влияния собственного действия агента на социальную норму своих соседей. В равновесии Нэша, принимая решение о своих индивидуальных усилиях, агенты не учитывают этот фактор, что создает экстерналию, которая может быть как положительной, так и отрицательной: если i и j соседи, то

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \iff x_i \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \bar{x}_i. \quad (2.14)$$

Другими словами, когда агент j прилагает усилия x_j , он оказывает положительное (отрицательное) внешнее воздействие на своего соседа i тогда и только тогда, когда усилия i выше (ниже) социальной нормы i . Оптимум достигается в том случае, когда равновесные ответы игроков соответствуют их индивидуальной продуктивности

$$x^O = b. \quad (2.15)$$

В этом случае выделяется класс регулярных сетей, для которых совокупные усилия в сети всегда оптимальны: $x^* = x^O = b$. Это происходит потому, что в регулярных сетях положительные и отрицательные внешние эффекты, оказываемые агентами на своих соседей, в точности уравновешиваются, так что совокупный эффект оптимален.

Ключевую роль индивидуальная продуктивность играет и в задаче добавления и удаления связей между агентами – центр принимает во внимание только продуктивность агентов, при этом информация о структуре сети не играет роли:

1. добавление ключевых связей (англ. key-link adding): в любой сети добавление связи между двумя агентами с высокой (низкой) производительностью не только увеличивает (уменьшает) усилия этих двух агентов, но и увеличивает (уменьшает) усилия всех остальных агентов в сети;

2. удаление ключевых связей (англ. key-link removing): независимо от структуры сети центр должен удалить связь между двумя наиболее продуктивными агентами.

Решение задачи стимулирования будет рассмотрено ниже, при анализе управления в линейно-квадратичной игре в разделе 2.2.2.

Линейно-квадратичная игра

Линейно-квадратичная игра на сети, предложенная в [67], является одной из наиболее известных моделей игры на сети. Функция выигрыша игрока i

$$v_i = x_i(b_i + \beta \sum_j g_{ij}x_j) - \frac{x_i^2}{2} \quad (2.16)$$

включает выгоду от собственного действия $x_i b_i$ и действий соседей $\beta \sum_j g_{ij}x_j x_i$, а также квадратичные издержки от принятого решения, $x_i^2/2$. Параметр $b_i > 0$ является предельным выигрышем игрока i , не зависящим от действий соседей (англ. standalone marginal return). Параметр β отражает характер зависимости от действий соседей по сети: при $\beta > 0$ действия игроков комплементарны (англ. strategic complements), а при $\beta < 0$ действия соседей взаимозаменяют друг друга (англ. strategic substitutes).

В случае линейно-квадратичной игры условия первого порядка

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = b_i + \beta \sum_j g_{ij}x_j - x_i = 0 \quad (2.17)$$

приводят к следующим функциям наилучшего ответа:

$$BR_i(x_{-i}) = b_i + \beta \sum_j g_{ij}x_j \quad (2.18)$$

В матричном виде систему наилучших ответов можно представить как

$$(I - \beta G)x = b$$

где I - единичная матрица. Если матрица $(I - \beta G)$ обратима (подробнее об этом в разделе 2.1.3), то равновесие Нэша существует и единственно: равновесные ответы игроков в матричном виде

$$x^* = (I - \beta G)^{-1}b \quad (2.19)$$

Идея авторов модели [67] заключалась в создании связи между концепцией равновесия Нэша и мерами центральности узлов на сети: рассмотрим сеть с матрицей смежности G и скаляр β . Тогда вектор центральностей [85] параметра β

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k G^k = (I - \beta G)^{-1}1,$$

отражает общее число путей в G , которые начинаются в вершине i . Параметр β – коэффициент затухания, который снижает относительный вес путей наибольшей длины. Таким образом, равновесие Нэша в линейно-квадратичной игре на графе в точности совпадает с центральностью Боначича.

В работе [76] была рассмотрена более общая модель: авторы рассмотрели произвольную взвешенную сеть, множеством допустимых действий агента $x_i \in [0, L]$ и наилучшим ответом игроков

$$BR_i(x_{-i}) = \min(b_i + \beta \sum_j g_{ij}x_j, L), \quad (2.20)$$

тогда, при $L = \inf$ получается исходная модель.

В работе [152] была исследована сравнительная статика модели: социальный оптимум, т. е. решение задачи $\max_x \sum v_i$, приводит к следующей системе наилучших ответов игроков

$$b_i - x_i + \beta \sum_j g_{ij}x_j + \beta \sum_j g_{ij}x_j = 0, \quad (2.21)$$

или

$$x_i^O = BR_i(x_{-i}) + \beta \sum_j g_{ij}x_j, \quad (2.22)$$

т. е. равновесные усилия слишком малы, потому что каждый агент игнорирует положительное влияние (или положительную экстерналию, возникающую вследствие эффекта комплементарности) своего действия на выбор своих соседей. В результате равновесие в игре оказывается неэффективным. Т. к. действия агентов в силу этого эффекта всегда занижены, центр в задаче стимулирования всегда выбирает однонаправленные вмешательства – либо все агенты получают дополнительные субсидии, либо, наоборот, облагаются штрафами/налогом (подробнее об этом см. в разделе 2.2.2).

Очевидно так же, что и структура сети монотонно влияет на социальный оптимум: для случая симметричных матриц в работе [113] показано, что для двух матриц Σ и Σ' , таких что $\Sigma = -I + \beta G$, а $\Sigma' > \Sigma$ если $\sigma'_{ij} > \sigma_{ij}$ для всех i, j , то

$$x^*(\Sigma') > x^*(\Sigma). \quad (2.23)$$

В работе [174] была предложена модель формирования сети, в которой агенты выбирают себе тех, с кем создавать связь, исходя из максимизации собственной выгоды по формуле 2.16. Из указанных свойств функции следует, что

наибольшую выгоду будут получать агенты с наибольшим показателем центральности, а другие агенты будут стремиться создать с ними связь.

Игра локального общественного блага

Игры на сетях с эффектом стратегической заменимости описывают ситуацию, в которой действия одного агента снижают стимулы для соседей увеличивать свои усилия. Такие игры моделируют конкурентные сценарии, например, конкуренцию за ограниченные ресурсы, рынки или выгоды, где игроки связаны через сеть взаимодействия, а их стратегии взаимозаменяемы. Этот эффект противоположен эффекту стратегической дополнителности, при котором действия одного агента стимулируют увеличение усилий соседей.

В модели локальных общественных благ на сети (англ. local public goods game on network) агенты принимают решения о своих индивидуальных вкладах в производство некоторого неисключаемого блага (агентов нельзя исключить из его потребления), которое приносит пользу как им самим, так и их соседям по сети. Во многих исследованиях данная модель получила интерпретацию как модель теории отраслевых рынков [222], в частности олигополии [4], а некоторые версии получили развитие в области деловых игр и поведенческих экспериментов [178]. Эта модель тесно связана с теорией олигополии, поскольку в обеих рассматриваются стратегическое взаимодействие между игроками, чьи действия обладают эффектом стратегической заменимости.

Пусть фирма i производит некоторое количество товара x_i , а её прибыль $v_i(x) = x_i p(\sum_j x_j) - cx_i$, где $p(\sum_j x_j)$ – обратная функция спроса, c – издержки. В случае, когда обратная функция спроса линейна, прибыль фирмы i можно записать как

$$v_i = x_i \left(b - \left(x_i + \beta \sum_j g_{ij} x_j \right) \right) - cx_i, \quad (2.24)$$

где $g_{ij} = g_{ji} = 1$ означает, что продукция фирмы i и товары фирмы j являются взаимозаменяемыми, β – степень заменимости товаров, а b – размер рынка. Более общие сетевые модели рассмотрены в [81, 175]. Похожие модели рассматривались в работах [13, 52] где они дополнялись параметром r_i агента, характеризующим тип i -го агента – эффективность или квалификацию его

деятельности. Функция выигрыша игроков

$$v_i = x_i(b - \sum_j x_j) - \frac{x_i^2}{2r_i}, \quad (2.25)$$

а наилучший ответ на произвольном графе G можно представить как

$$(Ir^{-1} + \beta G)x = b. \quad (2.26)$$

В работе [175] была сформулирована модель, учитывающая эффекты стратегической дополнителности и заменимости одновременно: фирмы конкурируют на рынках, при этом сотрудничая в рамках научно-исследовательских разработок (англ. Cournot oligopoly game with spillover effect of R&D collaborations). Наилучший ответ игрока в данной модели принимает вид:

$$x_i = b_i - \rho \sum_j b_{ij}x_j + \beta \sum_j g_{ij}x_j, \quad (2.27)$$

где B – матрица конкуренции между фирмами (связь между фирмами возникает в том случае, если они конкурируют на одном рынке), а G – матрица сотрудничества в рамках НИОКР. Равновесие, при достаточно нетривиальных условиях, существует и единственно:

$$x^* = (I + \rho b - \beta G)^{-1}b. \quad (2.28)$$

Всюду выше рассматривался случай общего знания – ситуация, при которой каждый агент обладает полной информацией об индивидуальных характеристиках других агентов, структуре связей и т. д. Одним из подходов к анализу асимметрии информации являются модели рефлексивных игр. Рефлексивная игра [36] – модель принятия агентами решений на основании иерархии их представлений о поведении оппонентов. Если структура информированности агентов в такой игре имеет конечную сложность – т. н. точечная структура информированности [35] – можно построить граф рефлексивной игры \bar{G} , наглядно демонстрирующий взаимосвязь между действиями агентов, участвующих в равновесии. В случае линейного наилучшего ответа игроков³:

$$BR_i(x_{-i}) = b_i - \beta \sum_j \bar{g}_{ij}x_j, \quad (2.30)$$

³В оригинальной статье была рассмотрена модель

$$v_i = x_i(b - \sum_j \hat{g}_{ij}x_j) - \frac{x_i^2}{2} \quad (2.29)$$

и $g_{ii} = 1$.

информационное равновесие может быть найдено по формуле [49]:

$$x^* = (I + \beta \bar{G})^{-1} b, \quad (2.31)$$

где вектор b отражает информированность агентов, а \bar{G} – граф рефлексивной игры. Вершины графа \bar{G} соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, а дуги графа \bar{G} отражают взаимную информированность агентов.

Решение многих задач управления (в т. ч. в сравнительной статике) в описанной модели близки к решениям задач в линейно-квадратичной игре на сети. Для случая, когда равновесие в модели единственно, авторы [134] рассмотрели задачу стимулирования – её описанию посвящен раздел 2.2.2.

2.1.3. Анализ равновесия в играх с линейным наилучшим ответом

Доказательство существования и единственности равновесия в описанных выше примерах обычно осуществляется двумя способами: через теоремы о существовании решения системы линейных алгебраических уравнений (как, например, в [67]), или через доказательства существования потенциальной функции игры.

Игры с линейным наилучшим ответом принадлежат классу потенциальных игр. Впервые концепция потенциальных игр была предложена в работе [198]. Основная идея заключается в доказательстве существования функции, которая позволяет описать результат стратегического взаимодействия игроков с помощью скалярной функции⁴. Функция φ является потенциальной функцией игры (potential function/best-reply potential), если для любых x_i, x'_i, x_{-i} и для всех $i \in N$ верно

$$\varphi(x_i, x_{-i}) - \varphi(x'_i, x_{-i}) = v_i(x_i, x_{-i}) - v_i(x'_i, x_{-i}). \quad (2.32)$$

Игры с линейным наилучшим ответом обладают потенциальной функцией (в общем случае она может быть не единственной): например [162], в матричном виде её можно записать как

$$\varphi(x) = x^T \mathbf{1} - \frac{1}{2} x^T (I \pm \beta G) x. \quad (2.33)$$

⁴В работе [217] показано, что для некоторых классов игр потенциальная функция является функцией Ляпунова динамики игры, что позволяет использовать метод функций Ляпунова для анализа равновесия [205]

Максимум потенциальной функции соответствует равновесию Нэша. Достаточным условием существования единственного решения является вогнутость потенциальной функции. Так как матрица вторых производных $\nabla^2\varphi(x) = -(I \pm \beta G)$, то $\varphi(x)$ строго вогнута тогда и только тогда, когда матрица $I \pm \beta G$ положительно определена: для любого $y \neq 0$

$$y^T(I \pm \beta G)y > 0. \quad (2.34)$$

Для игр локального агрегирования, в зависимости от знака перед βG , необходимым и достаточным условием существования и единственности равновесия является либо $\beta\lambda_{max}(G) < 1$ в случае игр с эффектом стратегической дополнителности ($-$), либо $\beta|\lambda_{min}(G)| < 1$ в случае игр с эффектом стратегической заменимости ($+$), где $\lambda_{max}(G)$ и $\lambda_{min}(G)$ – наибольшее и наименьшее собственное значение матрицы G , соответственно. В играх локального усреднения этих условий не требуется: в качестве G выступает строчностохастическая матрица, для которой $\lambda_{max}(G) = 1$, и тогда условием существования будет являться $\beta < 1$.

Существенным отличием игр с эффектом стратегической заменимости является существование углового решения (англ. corner equilibrium) [95]: потенциальная функция перестает быть вогнутой, и из свойств игры иметь неотрицательные стратегии x^* возникает ситуация, в которой одни игроки – пассивные агенты – бездействуют, $x_i = 0$, а другие – активные агенты – выбирают максимально допустимое действие – $x_j = b_j$. В этой ситуации условие существования равновесия связано с наличием в графе G максимального независимого множества, которое, как и число равновесий, может быть не единственным: активные игроки не должны быть связаны между собой.

В случае несимметричной матрицы G достаточным условием для существования равновесия является положительно-определенность эрмитовой компоненты матрицы $G = \frac{G+G^T}{2}$ и, следовательно, $1 + \delta\lambda_{max(min)}(\frac{G+G^T}{2}) > 0$. Однако, в случае игр с эффектом стратегической заменимости анализ динамики наилучших ответов сложнее (см. ниже).

В работах [113, 202] показано, что равновесие в игре с линейным наилучшим ответом является решением линейной задачи о дополнителности (англ. linear complementarity problem, LCP). В работе [205] показано, что задача LCP является подклассом задач вариационного неравенства – анализу игр в этом

ключе⁵ (в т. ч. в случае нелинейного наилучшего ответа) посвящены работы [194, 205, 238] и ссылки в них. В работе [205] авторы, используя формулировку равновесия Нэша в терминах решения задачи вариационного неравенства, исследуют связь между параметризацией игры и матрицей частных производных оператора наилучших ответов (матрицей Якоби, англ. *Jacobian of the game*), а также влиянием свойств матрицы Якоби на существование и единственность равновесия, сходимостью динамики наилучших ответов в дискретном и непрерывном времени.

2.1.4. Динамика наилучших ответов

Выше взаимодействие между агентами сформулировано в виде одношаговой некооперативной игры, однако описанное взаимодействие можно представить альтернативным образом. В работе [219] систему (2.18) сформулировали как линейную аффинную динамическую систему в непрерывном времени:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b, \quad (2.35)$$

где $A = \beta G - I$. Или, для каждого агента i

$$\frac{dx_i}{dt} = b_i + \beta \sum_j g_{ij} x_j - x_i. \quad (2.36)$$

Решением системы или установившимся значением состояния системы является величина

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= -A^{-1}b \\ &= -(\beta G - I)^{-1}b \\ &= (I - \beta G)^{-1}b. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Интерес представляет и разностная аппроксимация уравнения (2.35)⁶, которая позволяет установить взаимосвязь между шагом дискретизации и сетевым эф-

⁵Формулировка равновесия Нэша в терминах решения вариационного неравенства является обобщением свойства игры быть потенциальной [198]

⁶В совокупности, у формулы (2.19) имеется как минимум три интерпретации: это равновесие теоретико-игровой модели, равновесие линейной аффинной динамической системы, а также показатель центральности узлов сети.

фектом β :

$$\begin{aligned} \frac{x(t+1) - x(t)}{\delta} &= Bx(t) + b, \\ x(t+1) &= \delta(Bx(t) + b) + x(t) = \\ &= (\delta\beta G - \delta I + I)x(t) + \delta b. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Таким образом, конкретное значение множителя перед матрицей взаимодействия связано как с непосредственным влиянием окружения на выбор агента, так и с шагом дискретизации в модели. Помимо этого, наилучшие ответы игроков могут быть ограничены в силу специфики анализа различных жизненных ситуаций: в большинстве случаев (уровень усилий в моделях коллективного поведения, количество продукции в моделях производства товаров или услуг и др.) наилучший ответ не может быть отрицательным; в популярном кейсе исследования образовательных процессов агенты выбирают уровень усилий, как правило измеряющийся в часах – наилучшие ответы ограничены 0 снизу и 24 сверху, а также предполагаются быть целочисленными. Все эти аспекты влекут за собой ограничения в выборе инструментов для анализа динамики в таких играх [94]. Обсуждению взаимосвязи между теоретико-игровой интерпретацией и теорией динамических систем, в т. ч. для модели выше, посвящена книга [37].

В теоретико-игровой терминологии процедура поиска равновесия игроками носит название «нащупывания» (франц. *tatonnement*) равновесия, например, «нащупывания по Нэшу/Курно» (франц. *Nash/Cournot tatonnement*). В играх с эффектом стратегической заменимости равновесие, стабильное относительно дискретного нащупывания по Нэшу, влечет стабильность равновесия относительно непрерывной динамики наилучших ответов, однако обратное неверно [95]. Сходимость непрерывной динамики наилучшего ответа к равновесию Нэша в таких играх была показана в работе [79], случай влияния дальновидных агентов рассмотрен в [73].

В случае игры на ориентированном графе G динамика наилучших ответов может заикливаться. В работе [74] авторы ввели два класса направленных сетей, для которых динамика наилучших ответов сходится к единственному равновесию: один из классов определяется возможностью изменить параметры игры специальным образом так, чтобы динамика новой игры совпала с динамикой исходной; другой класс сетей тесно связан с критерием Колмогорова

обратимости цепи Маркова⁷

2.2. Задачи управления

2.2.1. Целевые функции и бюджетные ограничения центра

Управляющий орган (или центр/центральный планировщик, англ. *central planner*) получает информацию о выигрышах участников и может повлиять на их действия, вообще говоря, в разные моменты времени и различными способами. Вследствие этого результаты взаимодействия агентов меняются, становятся более желательными для центра. Предметом управления могут являться различные элементы системы – действия агентов, их стимулы, структура взаимодействия и другие характеристики.

В случае игр с линейным наилучшим ответом, задача управления формулируется в виде задачи оптимизации, которую в общем виде можно представить как

$$\max_u W(x, u) \quad (2.39)$$

при ограничениях

$$x \geq 0, \quad x = BR(x), \quad K(u, u_0) \leq C, \quad (2.40)$$

где u – параметр игры, на который оказывается воздействие в процессе управления, u_0 – исходное значение параметра, $K(u, u_0)$ – функция затрат, C – константа. Как было показано выше, в случае анализа сравнительной статики и социального оптимума, в качестве управляющего воздействия может рассматриваться и сам вектор x наилучших ответов игроков. Таким образом, рассматривается двухшаговая игра, в которой на первом шаге центр осуществляет управление, а на втором агенты разыгрывают равновесие.

Хотя одна и та же функция наилучших ответов может соответствовать различным функциям выигрыша, решение задачи управления может различаться в зависимости от того, какую функцию стремится максимизировать центральный планировщик:

– увеличение/снижение агрегированных результатов игроков:

$$W = \sum_i x_i \longrightarrow \max$$

⁷О связи между ориентированными графами и критерием Колмогорова см. также в [1, 2]

– увеличение суммы выигрышей участников – социальный оптимум по Бентаму:

$$W = \sum_i v_i \longrightarrow \max$$

– увеличение выигрышей наименее «обеспеченных» участников – социальный оптимум по Роулзу:

$$W = \min_i v_i \longrightarrow \max$$

Проблеме выбора целевых функций центра в таких задачах на данный момент уделено мало внимания (см, например, работу [160]), а наиболее популярным выбором служит функция общественного благосостояния – сумма выигрышей агентов.

Существует несколько классификаций задач управления, применимых к рассматриваемым моделям [34, 230, 221, 213]. В работе [230] приведены следующие стратегии сетевых интервенций, каждая из которых имеет различные тактические альтернативы:

- индивидуальные (англ. *individual*) – идентификация ключевых участников сети, выбранных на основе некоторых сетевых характеристик;
- групповые (англ. *segmentation*) – сегментация сети, при которой вмешательство направлено на отдельные группы узлов;
- структурные (англ. *alteration*), при которых изменениям подвергаются связи между участниками и сеть взаимодействия в целом;
- индукционные (англ. *induction*), при которых происходит возбуждение сети таким образом, что активируются новые взаимодействия между участниками – т. н. каскады, которые могут носить информационный/поведенческий и др. характер (подробнее смотрите, например, [170]).

Ряд авторов [34, 221] выделяют институциональные интервенции, подчеркивая специфику вмешательства, направленного на изменение правил взаимодействия. Помимо этого, в [34] задача управления составом участников выделяется в отдельный класс, в то время как в [230] этот класс задач отнесен к задачам управления структурой взаимодействия.

В работах, посвященных управлению в играх с линейным наилучшим ответом, в качестве u может быть выбран состав игроков $i \in N$, стимулы b или структура взаимодействия G . Ниже описаны решение некоторых задач, а в таблице представлены работы в соответствии с приведенной классификацией,

Таблица 2.2. Задачи управления в играх с линейным наилучшим ответом

Тип задачи	Описание	Работы
Индивидуальные	Идентификация ключевых участников сети, выбранных на основе некоторых сетевых характеристик	Galeotti, Goyal, 2009 [137], Candogan, Bimpikis, Ozdaglar, 2012 [103], Bloch, Querou, 2013 [82], Fainmesser, Galeotti, 2016 [126], Demange, 2017 [117], Galeotti, Golub, Goyal, 2020 [134], Kor, Zhou, 2023 [177], Belhaj, Deroian, Safi, 2023 [78], Jeong, Shin, 2024 [166], Dasaratha, Golub, Shah, 2024 [115]
Структурные	Изменениям подвергаются связи между участниками и сеть взаимодействия в целом	Borgatti, 2006 [88], Ballester, Calvo-Armengol, Zenou, 2006 [67], Corbo, Calvo-Armengol, Parkes, 2006 [112], Corbo, Calvo-Armengol, Parkes, 2007 [113], Golub, Lever, 2010 [143], Konig, Tessone, Zenou, 2014 [174], Belhaj, Bervoets, Deroian, 2016 [75], Матвеев, Королев, 2016 [31], Hiller, 2017 [153], Harkins, 2020 [151], Li, 2023 [187], Sun, Zhao, Zhou, 2023 [224]

Управление стимулами агентов

В этих работах рассматриваются задачи управления, в которых центр изменяет индивидуальные характеристики деятельности агентов. Задачи стимулирования, в которых центр стремится максимизировать общественное благосостояние в моделях с эффектом стратегической дополнителности, рассмотрены в [117, 134] (в т. ч. для игры координации [166]). Задачи определения цен монополистом при наличии локальных экстерналий потребления рассмотрены в [103, 82], в которых исследовалась взаимосвязь между центральностью потребителей в сети и ценами и объемами, которые им предлагает монополист.

Управление структурой

В данных работах центр корректирует уровень активности путем изменения структуры сети. Создание или удаление связей при таком управлении влияет на центральность агентов, что приводит к изменению равновесия. Исследователи изучают оптимальные сети с точки зрения центра. Авторы [174] показали, что среди простых сетей сети, максимизирующих вогнутую функцию центра, выделяется класс вложенных расщепляемых графов (англ. nested split graph, NSG). В работе [75] показано, что любая сеть, не являющаяся NSG, допускает создание связей между агентами, улучшающее благосостояние в линейно-

квадратичной игре на сети.

Управление в условиях неопределенности

Многие авторы прибегают к анализу устойчивости предложенных методов управления относительно внешних возмущений или вероятностной неопределенности (например, [95, 134, 207, 136] и др.). Важно, что данные о самой структуре сети зачастую труднодоступны (см. например, [96, 233]), в связи с чем возник ряд работ, моделирующих как вероятностную, так и игровую неопределенность о сетевой структуре.

Так, в работе [126] центр выбирает оптимальный уровень цен для агентов, располагая информацией только о распределении по степеням вершин сети. Другой случай – структура сети является наблюдаемой, но местоположение или личность агентов – это частная информация [83]. Иными словами, центр не в состоянии отличить сети, идентичные с точностью до перестановки вершин. Существенным в данном дизайне игры является то, что вектор x^* равновесных ответов игроков теперь является контрактом, который центр предлагает агентам. Авторы предъявляют классы сетевых структур, для которых оптимальные контракты центра совместимы со стимулами агентов и их коалиций.

Идентификация сети

Одной из важнейших задач является задача идентификации сети. Существует несколько методов, позволяющих решить эту задачу на основе данных о серии исходов игры, основанных на статистическом подходе (графовые методы регуляризации) [182], методах оптимизации [186] и методах машинного обучения [214]. Отдельное направление исследований – решение задач двухуровневой оптимизации⁸[239], в которой предполагается, что наблюдаемые равновесные ответы игроков возникают в результате оптимизации агентами структуры взаимодействия с точки зрения функции общественного благосостояния.

Другой подход идентификации сети основан на информации о динамике наилучших ответов игроков и решении задачи управления [120]. Центр не знает структуры сети в игре, но имеет возможность наблюдать за наилучшими ответами игроков и манипулировать действиями некоторых из них. Авторы

⁸Исследование задачи двухуровневой оптимизации восходит к исследованию игр Штакельберга, где внешняя (или внутренняя) задача оптимизирует действия лидера (или последователя) [154]

показывают, что критерий идентифицируемости структуры сети эквивалентен ранговому критерию управляемости системы, приведенной к специальному виду и применяют алгоритм [167], разработанный для идентификации устойчивых линейных систем.

2.2.2. Управление в линейно-квадратичной игре на сети

Возможно, первой и наиболее исследованной с точки зрения задач управления является линейно-квадратичная игра на сети, для которой существует множество постановок задач управления (см. [67, 88] и ссылки выше). Ниже для данной игры будет рассмотрено несколько задач, решение которых наглядно демонстрирует особенности и специфику задач управления в играх с линейным наилучшим ответом. Выигрыш игроков в модели

$$v_i = x_i(b_i + \beta \sum_j g_{ij}x_j) - \frac{x_i^2}{2} \quad (2.41)$$

и равновесие в игре:

$$x^* = (I - \beta G)^{-1}b.$$

Исторически, первой задачей была задача выявления ключевого игрока (англ. key player problem). Ключевой игрок – игрок, удаление которого оказывает наибольшее влияние на совокупный результат. Пусть G – исходная (симметричная) матрица смежности, G^{-i} – новая матрица, полученная из матрицы G путем заполнения нулями строки и столбца, соответствующих i -ой вершине. Тогда задача центра $\max_{i \in N} [x^*(G) - x^*(G^{-i})]$ или, что эквивалентно

$$\min_{i \in N} x^*(G^{-i}). \quad (2.42)$$

Пусть $M = \{m_{ij}\} = (I - \beta G)^{-1}$, а $K = \{k_{ij}\} = (I - \beta G)^{-1}1$. Авторами вводится специальный показатель центральности (англ. intercentrality measure), учитывающий и индивидуальную центральность игроков, и вклад в центральность других:

$$c_i = \frac{k_i^2}{m_{ii}}.$$

Авторы показали, что вершина с наибольшим значением c_i решает задачу (2.42).

Другая задача была рассмотрена в работе [134] – задача стимулирования (англ. incentive-targeting problem): центр стремится максимизировать функцию общественного благосостояния в равновесии:

$$W = \sum_i v_i = \frac{1}{2} x^T x \longrightarrow \max_b \quad (2.43)$$

Таким образом, центр вносит изменения в предельный выигрыш игроков, независимый от действий соседей $\hat{b} \rightarrow b$, что интерпретируется как изменение стимулов игроков (например, денежные субсидии фирмам). Бюджетное ограничение центра:

$$K(b, \hat{b}) = \sum_i (b_i - \hat{b}_i)^2 \leq C. \quad (2.44)$$

Решением является эффективная сетевая эвристика:

$$\hat{b}_{nh} = b + \sqrt{C} \mu_1(n) \quad (2.45)$$

где $\mu_1(\mu_n)$ – собственный вектор матрицы G , соответствующий максимальному (минимальному) собственному значению для случая положительных (отрицательных) значений коэффициента β .

Как было указано выше, выбор целевой функции центра оказывает значительное влияние на результат. Если в данной задаче вместо максимизации суммы выигрышей перейти к максимизации агрегированного результата участников

$$W = \sum_i x_i \longrightarrow \max_b,$$

решением будет распределение бюджета, пропорциональное индивидуальному вкладу игроков:

$$\hat{b}_{nh} = b + \sqrt{C} x^*.$$

Разница между функциями состоит в том, что сумма выигрышей учитывает и сами действия, и их различия: $\sum_i u_i = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 = \hat{x}^2 + \sigma^2$, где \hat{x} – среднее, σ^2 – дисперсия.

Предложенная функция затрат (2.44) обладает рядом свойств, позволяющих авторам распространить полученные результаты на некоторые другие

функции [133]. Одним из выделяющихся случаев является пример линейных затрат центра:

$$K(b, \hat{b}) = \sum_i |b_i - \hat{b}_i| \leq C \sim N.$$

В этой ситуации решение – передать весь бюджет единственному игроку i^* , $\hat{b}_{i^*} = b_{i^*} + C$, который выбирается исходя из вклада игроков в результат вмешательства центра.

Интересно провести сравнение с решением задачи стимулирования для модели локального усреднения: для достижения оптимума общественного благосостояния без ограничений на бюджет в линейно-квадратичной игре

$$\sum_i v_i = \sum_i \left[(b_i + s_i)x_i + \beta \sum_j g_{ij}x_i x_j - \frac{x_i^2}{2} \right] \longrightarrow \max_s, \quad (2.46)$$

центру необходимо выбрать $s_i^O = \beta \sum_j g_{ij}x_j$. Исходя из свойств игры эта величина будет всегда положительна, а центр будет субсидировать более центральных игроков в сети.

Как было показано ранее, в модели социальных норм, агенты создают как положительные, так и отрицательные экстерналии для своих соседей. Как результат, в задаче стимулирования [229] агентов

$$\sum_i v_i = \sum_i \left[(b_i + s_i)x_i - \frac{\theta}{2} \left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j \right)^2 - \frac{x_i^2}{2} \right] \longrightarrow \max_s, \quad (2.47)$$

решением которой является вектор s^O , состоящий из компонент

$$s_i^O = \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} \left(x_j - \sum_{k=1}^n \frac{g_{jk}}{d_j} x_k \right), \quad (2.48)$$

центр субсидирует (облагает налогом) тех агентов, чьи соседи прилагают усилия выше (ниже) своих социальных норм (в отличии от линейно-квадратичной игры, в которой центр вынужден всегда стимулировать агентов из-за создаваемых ими положительных экстерналий). Другими словами, центру необходимо субсидировать агентов, прилагающих усилия ниже, чем в среднем прилагают их соседи, и облагать налогом тех, кто прилагает усилия выше, чем их соседи.

Важно отметить, что изменение исходного вектора индивидуальных характеристик b до последнего момента подразумевалось как задача с ненулевым

бюджетом, в то время как в реальных приложениях имеет место ситуация, в которой центр перераспределяет ресурсы между агентами без дополнительных ресурсов. Условию сбалансированного бюджета, т. е. корректирующим субсидиям и налогам (англ. *rigouvian tax*), посвящена работа [135].

Работы [112, 113] посвящены задаче нахождения структуры взаимодействия, максимизирующей целевую функцию центра. С ростом β решения задач центра по максимизации агрегированных результатов и суммы выигрышей совпадают, а среди всех сетей максимум доставляют те, которые обладают наибольшим собственным значением матрицы смежности. Случай задачи управления комбинацией нескольких активностей (когда x_i становится вектором) рассмотрен в [177]. Случаи одновременного использования нескольких различных стратегий управления рассмотрены, например, в [176, 210].

2.3. Заключение

В данной главе подробно рассмотрены вопросы управления стратегическим взаимодействием агентов на сети в случае, когда зависимость агента от действий других описывается линейной функцией наилучших ответов. Равновесие Нэша в таких играх не является социальным оптимумом из-за наличия экстерналий, что мотивирует разработку механизмов управления, таких как выявление ключевых агентов, стимулирование агентов, создание или удаление связей, направленных на увеличение эффективности коллективного взаимодействия. Некоторые из других направлений исследований, активно развивающихся в данный момент, заслуживают отдельного внимания.

Нелинейный наилучший ответ

Задачам управления в играх с нелинейным наилучшим ответом посвящены работы [77, 59, 99]. В работе [90] предложена общая модель сетевых эффектов, нелинейный наилучший ответ в которой включает в себя модель локального усреднения в качестве частного случая. Нелинейность реализована в виде CES-функции с параметром эластичности β :

$$\bar{x} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.49)$$

а наилучший ответ игрока принимает вид

$$BR_i = (1 - \lambda_2)\alpha_i + (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\sum_{j=1}^n g_{ij}x_j^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.50)$$

При $\beta = 1$ возникает модель LIM. Когда β очень велико, возникает модель $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \bar{x}_{-i}(\beta) = \max_j \{x_j\}$, в которой агент ориентируется только на того своего соседа по сети, который прилагает наибольшие усилия, в то время как когда β принимает высокие отрицательные значения, преобладает модель $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \bar{x}_{-i}(\beta) = \min_j \{x_j\}$, в которой агент ориентируется на соседа демонстрирующего наименьшие усилия.

Игры на мультиплексных сетях

Во многих случаях ранее рассматривалась взаимосвязь агентов в рамках одной сети. Однако, зачастую агенты поддерживают множество типов взаимоотношений, таких как сотрудничество, взаимопомощь и заимствование и др, [106]. Одним из способов описания такого взаимодействия являются мультиплексные сети: многослойные сети, в которых запрещена связь между одной вершинами разных слоев, которые призваны описывать сосуществование различных типов отношений между агентами [108]. Анализу таких игр посвящены работы [123, 237].

Сети с большим числом вершин и графовые функции

Некоторые сети, встречающиеся в прикладных исследованиях, настолько велики, что анализ становится затруднительным или невозможным [114]. В работе [192] был предложен инструмент для анализа больших сетей и асимптотического поведения последовательности графов с растущим числом вершин. Графовая функция (англ. graph function, graphon) — объект, который обобщает дискретные графы на случай больших сетей, представленных в непрерывном пределе. В работе [207] описанные выше игры были перенесены на случай предельного объекта: игроки теперь представлены как точки на интервале $i \in [0, 1]$, а вероятность связи между ними описывается через графовую функцию $W(i, j)$, определенную на единичном квадрате. Динамика в таких играх исследуется в работе [57], задачи управления рассмотрены в [206, 210].

2.4. Выводы по главе 2

В данной главе рассмотрены математические модели сетевого взаимодействия агентов и методы управления в таких системах. Основное внимание уделяется играм с линейным наилучшим ответом, в которых действия агентов линейно зависят от действий их соседей в сети. Исторически модели стратегического взаимодействия развивались на пересечении теории игр и эконометрики, что позволило описывать влияние структуры связей на поведение агентов и эффективность взаимодействий, при этом верифицируя полученные результаты на практике. Рассмотрены концепции эффектов окружения и сетевых экстерналий, которые определяют зависимость поведения одного агента от действий связанных с ним соседей. Исследуются различные классы игр: с эффектами стратегической дополнителности и заменимости, а также модели локального агрегирования и усреднения. Анализируются задачи управления в таких моделях, включая задачи анализа социального оптимума и вмешательства центра (сетевые интервенции). Показано, что сетевые модели стратегического взаимодействия могут эффективно использоваться для анализа социальных и экономических систем, а методы управления позволяют устранить неэффективность, вызванную экстерналиями, и улучшить результаты взаимодействия агентов.

Глава 3. Управление структурой взаимодействия в теоретико-игровых моделях на сети с линейным наилучшим ответом

Как было показано в главе 2, несмотря на схожесть в анализе игр, равновесий и постановок задач управления, игры с линейным наилучшим ответом могут демонстрировать различные эффекты взаимодействия, что отличает их друг от друга на качественном уровне.

Одним из ключевых различий является природа сетевых эффектов — они могут быть как положительными (стратегическая дополнительность), так и отрицательными (стратегическая заменимость). В играх с эффектом стратегической дополнительности действия соседей усиливают стимулы агентов к увеличению собственных усилий (например, в линейно-квадратичной игре или модели социальных норм). В противоположность этому, в играх с эффектом стратегической заменимости рост активности одного агента снижает стимулы его соседей, что может создавать эффект конкуренции за ограниченные ресурсы (как в моделях локальных общественных благ или олигополистической конкуренции).

Различия между моделями проявляется и в типе функций окружения. Игры с локальным агрегированием моделируют ситуации, в которых агенты реагируют на суммарное воздействие соседей, что характерно для процессов коллективного поведения, таких как совместные инвестиции или распространение инноваций. В играх с локальным усреднением, напротив, агенты ориентируются на среднюю активность окружения, что ближе к моделям социального влияния, где индивиды стараются подстраиваться под нормы группы. Эти различия приводят к различным механизмам достижения равновесия и различным эффектам при изменении сетевой структуры.

Другой важный аспект — анализ равновесия и динамики наилучших ответов. В некоторых моделях равновесие Нэша существует и единственно, что упрощает анализ (например, в линейно-квадратичной игре на сети), тогда как в играх с эффектом стратегической заменимости возможно множество равновесий, включая угловые решения, где часть агентов в игре бездействуют. В таких случаях анализ динамики наилучших ответов требует более сложных методов,

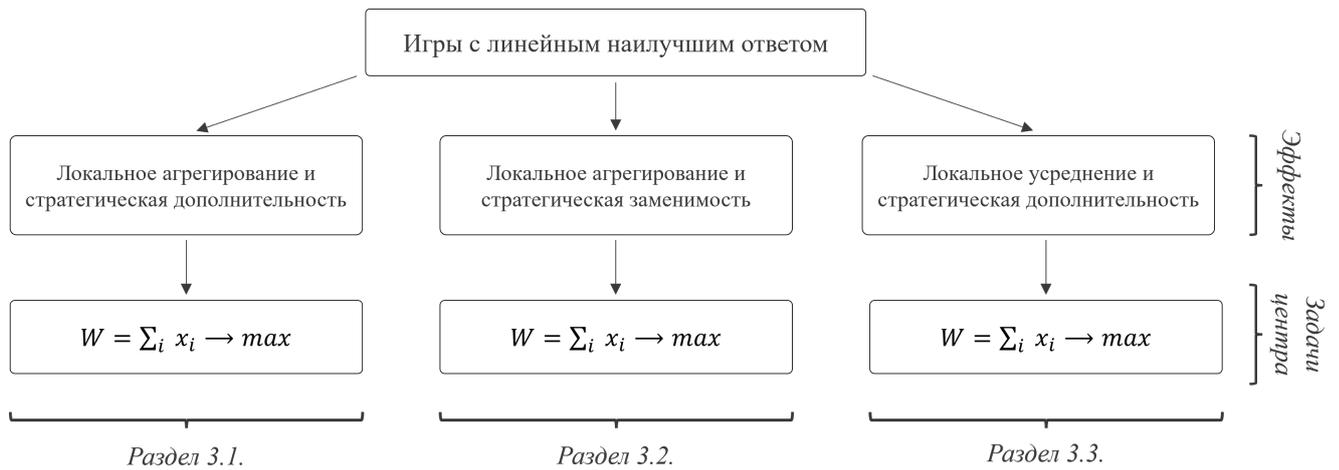


Рисунок 3.1. Структура главы 3

а вмешательство центра может приводить к существенно различным результатам в зависимости от параметров модели.

Эти различия особенно важны при постановке задач управления: методы управления, эффективные в одной модели, могут быть неэффективны или давать противоположные результаты в другой. Таким образом, несмотря на единый формальный подход, различие в сетевых эффектах, динамике наилучших ответов и анализе равновесия делает игры с линейным наилучшим ответом богатым классом моделей, требующим индивидуального подхода к анализу задач управления в каждом отдельном случае. Это определило структуру главы 3 (рис. 3.1), каждый раздел которой посвящен задачам управления в контексте различных сетевых эффектов: в разделе 3.1 исследуется игра с эффектами локального агрегирования и стратегической дополнителности; в разделе 3.2 проводится анализ игры с эффектом стратегической заменимости на примере модели неполной информированности агентов; раздел 3.3. посвящен анализу задачи управления структурой взаимодействия в игре социальных норм. В заключении проведено сравнительное описание полученных результатов с точки зрения их роли в исследовании взаимодействия агентов на сети и эффективности различных механизмов управления. Результаты данной главы опубликованы в работах [47, 210, 49, 39, 40, 41, 42, 46].

3.1. Задача управления в линейно-квадратичной игре

Центр получает информацию о выигрышах участников и может повлиять на их действия, вообще говоря, в разные моменты времени и различными

ми способами. Вследствие этого результаты взаимодействия агентов меняются, становятся более желательными для центра. Предметом управления, как было указано выше, могут являться различные элементы системы - действия агентов, их стимулы, структура взаимодействия (влияния) и другие характеристики [5].

Большое число работ посвящено различным стратегиям управления, однако вопрос о том, какая из стратегий может быть выбрана в той или иной ситуации, все так же является актуальным. Центральным вопросом данного раздела является следующий: имея в распоряжении модель и идентифицированные параметры, какую из стратегий управления нужно выбрать центру, чтобы достичь наилучшего результата?¹ Безусловно, в общем случае ответ на этот вопрос крайне сложен, однако в некоторых ситуациях он может быть достаточно очевидным. Ниже рассмотрен, возможно, наиболее простой случай: игра с линейным наилучшим ответом с однотипными игроками. Несмотря на некоторую тривиальность случая, приведенный пример показывает, насколько важным может быть применение релевантных стратегий управления для получения наилучших результатов.

3.1.1. Описание игры

Рассмотрим модель из класса линейно-квадратичных игр на графах. Интерес исследователей к изучению данного класса игр мотивирован линейной по ответам соседей в сети функцией наилучшего ответа игрока, что упрощает подход к анализу игровой ситуации, но в то же время реализует важные сетевые эффекты, наблюдаемые при взаимодействии реальных экономических агентов. Выигрыш игрока в данной модели включает выгоду от собственного действия и действий соседей, а также квадратичные издержки от принятого решения ([67])

$$v_i = x_i(b_i + \beta \sum_j g_{ij}a_j) - \frac{x_i^2}{2}. \quad (3.1)$$

Параметр $b_i > 0$ – предельный выигрыш, независимый от действий соседей (англ. *standalone marginal return*), параметр $\beta \in \mathbb{R}$ отражает характер зависимости от действий соседей: при $\beta > 0$ действия игроков комплементарны (англ. *strategic complements*), при $\beta < 0$ действия соседей взаимозаменяют друг друга (англ. *strategic substitutes*). Наилучший ответ игрока на действия других

¹Ранние исследования по этой тематике включают работы [44, 43]

получается из условий первого порядка $\partial v / \partial x_i = 0$:

$$BR_i(x_{-i}) = b_i + \beta \sum_j g_{ij} x_j \quad (3.2)$$

или в матричном виде $(I - \beta G)x = b$. Если обратная матрица $(I - \beta G)^{-1}$ существует (т. е. если $\beta \lambda_{max}(G) < 1$, где λ_{max} – наибольшее собственное значение графа G), тогда существует единственное равновесие Нэша в игре: равновесные ответы игроков

$$x^* = (I - \beta G)^{-1} b. \quad (3.3)$$

В задаче управления центр стремится максимизировать общественное благосостояние в равновесии. Последовательность ходов следующая: центр ходит первым и выбирает управление, а затем агенты одновременно выбирают действия. Задача управления заключается в максимизации функции центра при некоторых бюджетных ограничениях, которые в случае управления индивидуальными стимулами агентов обычно выбираются пропорционально количеству агентов в сети. В данной работе для сравнения различных стратегий управления рассматривается безразмерная величина бюджета. Следуя [134], центр стремится максимизировать функцию

$$W = \sum_i v_i \longrightarrow max, \quad (3.4)$$

тогда управление индивидуальными стимулами каждого игрока:

$$b \rightarrow \hat{b}, \quad (3.5)$$

в то время как структурное управление может быть охарактеризовано как:

$$G \rightarrow \hat{G}. \quad (3.6)$$

3.1.2. Задачи управления и репрезентативный агент

Чтобы перейти к случаю репрезентативного агента, воспользуемся представлением исходной матрицы смежности в виде комбинации нескольких взаимосвязанных блоков, состоящих из структурно идентичных агентов. Такая постановка приводит к случаю симметричной стохастической блочной модели (англ. symmetric stochastic block model, symmetric SBM): данная модель и её

расширения часто используется в задачах кластеризации графов, выявлении сообществ и моделирования сетей, наблюдаемых в реальном мире. SBM является расширением модели случайного графа Эрдёша-Реньи на случай произвольного числа кластеров k , каждый из которых в отдельности является моделью случайного графа. Матрица связей между кластерами имеет блочно-диагональный вид. На диагонали находятся вероятности связи p_i , соответствующие моделям случайного графа Эрдёша-Реньи, а межкластерные связи возникают с одинаковой для каждого кластера вероятностью q :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q & \cdots & q \\ q & p_2 & \cdots & q \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ q & \cdots & \cdots & p_k \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & r_k \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Такая постановка – один из частных случаев стохастической блочной модели: в ней матрица P умножается на диагональную матрицу размеров кластеров R , формируя эффективную матрицу взаимодействия PR , где $r_i \in [0, 1]$ – размер блока, $\sum_{i=1}^k r_i = 1$ (при моделировании n выбирается таким, чтобы величины nr_i были целочисленными). Как показано в [64, 207], равновесие в такой игре

$$\bar{x}^* = (I - \beta PR)^{-1} \bar{b}, \quad (3.8)$$

где \bar{b} – вектор предельных выигрышей \bar{b}_i игроков для каждого из кластеров $i \in \{1, \dots, k\}$. Пример описанной сети и равновесие в игре на ней изображены на рис. 3.2. Пусть $n = 500$ агентам, разделенных на четыре кластера размера $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.1$, $r_3 = 0.4$ и $r_4 = 0.2$. Предельный выигрыш агентов в каждом кластере одинаковый и составляет $\bar{b}_i = 1$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Агенты в каждом кластере связаны эквивалентно, $p_i = p = 0.2$, вероятность связи между кластерами $q = 0.003$, а $\beta = 0.5$. На рисунке 3.2 представлена одна реализация графа согласно описанной модели, а слева отмечены равновесные ответы игроков x_i^* . Красной линией отмечены значения \bar{x}^* , рассчитанные на основе (3.8) для взаимодействия кластеров.

Сравнив (3.3) и (3.8) можно привести следующую интерпретацию: если в исходной сети существует n агентов, разделенных на k кластеров, внутри которых агенты структурно идентичны (связаны одинаково) и имеют одно и то же значение предельного выигрыша b_i , то выражение (3.3) описывает равновесные ответы каждого игрока по отдельности, а (3.8) – равновесные ответы каждой

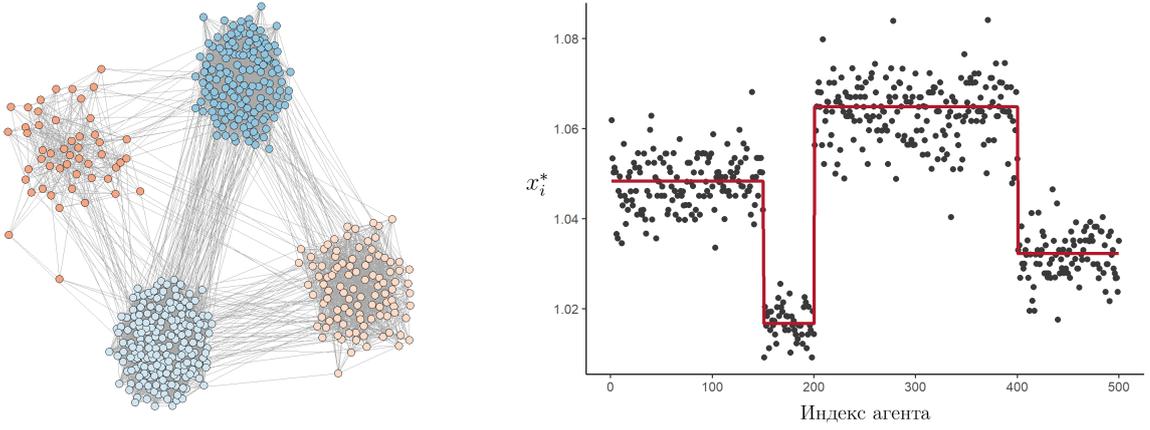


Рисунок 3.2. Пример структуры взаимодействия четырех кластеров (слева) и равновесных ответов игроков (справа)

отдельной группы, или k репрезентативных агентов, каждый из которых представляет один из кластеров.

Для начала рассмотрим случай $k = 1$. Матрицы P , R , I и вектора \bar{b} , \bar{x} становятся одноэлементными со скалярными элементами p , 1 , 1 и b , \bar{x} соответственно. Такая постановка полностью соответствует модели случайного графа Эрдеша-Реньи $G(n, p)$ с числом агентов n и вероятностью связи между вершинами p . Таким образом, функция наилучших ответов игроков принимает вид

$$BR_i(x_{-i}) = b_i + \beta \sum_j g_{ij} a_j \quad \longrightarrow \quad \overline{BR} = b + \beta p \bar{x},$$

равновесие

$$x^* = (I - \beta G)^{-1} b \quad \longrightarrow \quad \bar{x}^* = \frac{b}{1 - \beta p},$$

а условие существования и единственности равновесия:

$$\beta \rho(G) < 1 \quad \longrightarrow \quad \beta p < 1.$$

Пример такой игры представлен на рисунке 3.3. Пусть $p = 0.5$, $\beta = 0.5$, и $b = 1$. Тогда равновесие в игре репрезентативного агента \bar{x}^* равняется $1/(1 - 0.5 \cdot 0.5) = 1.3(3)$ (красная линия), однако для отдельных реализаций графа равновесные ответы игроков могут отличаться от этого значения.

Стоит отметить, что стохастическая блочная модель является примером ступенчатой графовой функции [64]. Графовые функции были введены в [192] и в общем случае представляют собой симметричную функцию $W : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, характеризующую предел последовательности случайных графов. В работе [64] авторы, по аналогии с мерами центральности для конечных графов,

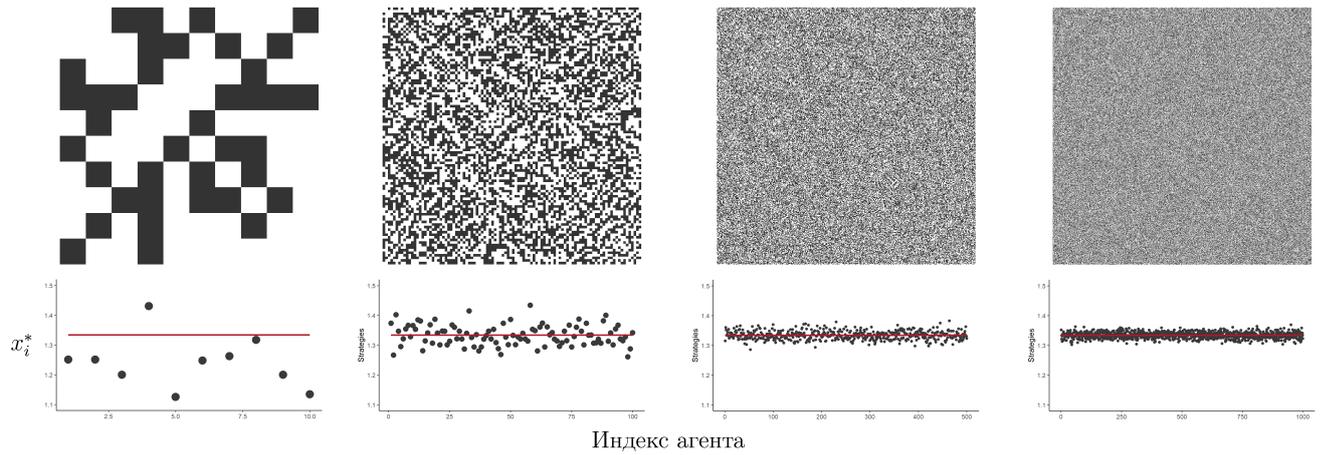


Рисунок 3.3. Пример матриц смежности графа $G(n, p)$ для $p = 0.5$, $n = 10$, 100, 500 и 1000 (сверху) и равновесных ответов игроков в играх на соответствующих графах (снизу)

ввели понятие меры центральности для таких объектов, а в [207] обобщили результаты игр на сетях с линейным наилучшим ответом на конечных графах на случай игр на графовых функциях. В случае игр на сетях в терминах графовых функций [207] происходит переход от конечного набора агентов $i \in \{1, \dots, n\}$ к популяции на отрезке $i \in [0, 1]$, а профиль стратегий x и функция наилучших ответов игроков $BR_i(x_{-i})$ становятся непрерывными функциями, зависящими от W :

$$\overline{BR} = \bar{b} + \beta W(i, j)\bar{x}. \quad (3.9)$$

Таким образом, в данной работе исследован простейший случай, когда все агенты неразличимы: имеют одинаковый предельный выигрыш $b_i = b$ и связаны эквивалентно - что соответствует случаю константной графовой функции

$$W(x, y) = p, \quad p \in [0, 1]. \quad (3.10)$$

Подход к анализу игрового равновесия среди групп однородных агентов является достаточно распространенным, например, при исследовании игр с различными типами вершин [32] а также крайне распространен в исследовании задач управления динамическими процессами в популяционных моделях [149]. Целью, с которой описанный подход выбран в данной работе, является сравнение эффективности различных задач управления. Для того чтобы проанализировать эффективность структурного управления относительно эффективности управления индивидуальными стимулами агентов, ниже рассмотрено два случая:

1. центр имеет возможность управлять и стимулами, и структурой взаимодействия: задача состоит в том, чтобы выбрать оптимальную стратегию в зависимости от параметров игры;

2. задача противоборства [5]: игра двух центров, один из которых стремится нейтрализовать результаты вмешательства другого центра. В этом случае различные управления переводят игру в исходное состояние равновесия.

Управление структурой взаимодействия: сравнение с задачей стимулирования

Пусть имеется один центр, который принимает решение о выборе политики вмешательства: обе стратегии направлены на увеличение функции общественного благосостояния: целевые трансферты (задача стимулирования):

$$b \rightarrow b + \delta,$$

и перестройка сети (структурные интервенции)

$$p \rightarrow p + \delta.$$

Введём следующие обозначения, отражающие стратегию репрезентативного агента в равновесии \bar{x}^* для различных методов управления:

$$\bar{x}^* = \frac{b}{1 - \beta p}, \quad (3.11)$$

$$\bar{x}_T^* = \frac{b + \delta}{1 - \beta p}, \quad (3.12)$$

$$\bar{x}_S^* = \frac{b}{1 - \beta(p + \delta)}. \quad (3.13)$$

Иными словами, ниже под управлением индивидуальными стимулами \bar{x}_T^* подразумевается увеличение предельного выигрыша b агента на величину бюджета δ , что интерпретируется как воздействие, стимулирующее агентов. Аналогично, под управлением структурой взаимодействия \bar{x}_S^* подразумевается изменение вероятности возникновения связи p между вершинами на ту же величину.

Следующее утверждение призвано продемонстрировать взаимосвязь между влиянием на стимулы агентов и влиянием на структуру связей в простейшей ситуации, когда вся система из n агентов может быть охарактеризована одним репрезентативным агентом:

Утверждение 3.1. Если равновесие существует и единственно, т.е. $\beta(p + \delta) < 1$, то следующие утверждения верны:

1. Эффективность индивидуального управления не зависит от величины сетевого эффекта β и пропорциональна бюджету:

$$\frac{\bar{x}_T}{\bar{x}} = 1 + \frac{\delta}{b}; \quad (3.14)$$

2. Эффективность структурного управления возрастает с увеличением сетевого эффекта β :

$$\frac{\bar{x}_S}{\bar{x}} = \frac{1 - \beta p}{1 - \beta(\delta + p)}; \quad (3.15)$$

3. Величина сетевого эффекта β^* , выше которой эффективность структурного управления превышает эффективность индивидуального управления, определяется из

$$\beta^* = \frac{1}{\delta + p + b}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Наблюдения 1-2 получаются при непосредственном вычислении отношения равновесных ответов (3.11) в разных случаях. Чтобы получить 3, сравним равновесные ответы при индивидуальном и структурном управлении и, вычтя одно из другого и приравняв к нулю, получим выражение для β^* . \square

Графически связь между β^* и параметрами модели показана на рисунке 3.4. Основное наблюдение состоит в том, что выражение (3.16) позволяет установить взаимосвязь между тремя величинами, представляющими наибольший интерес в данной задаче - бюджетом δ , индивидуальными стимулами игроков b и структурой взаимодействия p .

Задача противоборства

Ниже рассмотрена задача противоборства двух центров, преследующих противоположные цели. Оба центра одновременно получают информацию о равновесных ответах игроков. Один из центров, обладая некоторым бюджетом, стремится изменить функцию общественного благосостояния W посредством изменения целевых трансфертов $b \rightarrow \hat{b}$, а второй центр стремится воспрепятствовать этому посредством изменения структуры связей $G \rightarrow \hat{G}$.

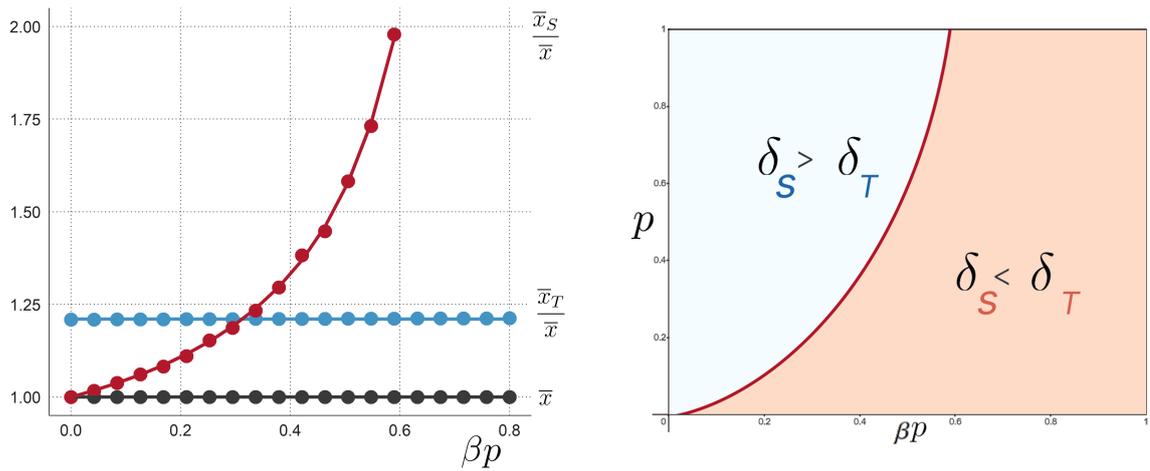


Рисунок 3.4. Слева – пример, демонстрирующий зависимость эффективности управления стимулами и структурой взаимодействия для различных значений сетевого эффекта β . Справа – значение сетевого эффекта β^* , вычисленного по формуле (3.16) при $b = 1$ для различных бюджетов δ и вероятности связи p .

Значение сетевого эффекта β домножено на p для ограничения множества допустимых значений на отрезке $[0, 1]$

В отличие от предыдущего случая, теперь каждая из стратегий управления имеет свой собственный бюджет: δ_T для управления индивидуальными стимулами игроков

$$b \rightarrow b \pm \delta_T,$$

и δ_S для управления структурой взаимодействия

$$p \rightarrow p \mp \delta_S.$$

Задача состоит в том чтобы определить величину затрат центра 2, управляющего структурой, чтобы нейтрализовать воздействие центра 1 на индивидуальные стимулы игроков. Равновесная стратегия репрезентативного агента будет иметь следующий вид:

$$\bar{x}_{\ddagger}^* = \frac{b \pm \delta_T}{1 - \beta(p \mp \delta_S)}. \quad (3.17)$$

Интерес представляют условия на p и β , при которых затраты на изменение сети превышают затраты на изменение стимулов агентов, оказывающих тот же эффект на стратегию репрезентативного агента в равновесии \bar{x}^* . Для этих целей сформулировано

Утверждение 3.2. Если равновесие существует и единственно, т.е. $\beta(p + \delta) < 1$, то

1. затраты на управление структурой и управление стимулами игроков связаны соотношением:

$$\delta_S = \delta_T \frac{(1 - \beta p)}{b\beta}, \quad (3.18)$$

2. при $\beta = \beta^*$ затраты обоих центров равны $\delta_T = \delta_S$, при $\beta > \beta^*$ затраты на изменение структуры ниже, чем затраты на изменение стимулов игроков $\delta_T > \delta_S$.

Доказательство. Чтобы доказать это, нужно сравнить стратегии репрезентативного агента в равновесии без управления, \bar{x}^* (3.1.2), и при наличии управления стимулами и структурой одновременно \bar{x}_\dagger (3.17). Вычитая одно из другого и приравнявая к нулю, мы получаем выражение (3.18) и следствие (2). \square

Выражение (3.18) позволяет получить новую вероятность создания связи в сети, которая необходима для компенсации влияния изменений стимулов игроков. На рисунке 3.4 (справа) показана фазовая диаграмма, на которой сравниваются затраты на различные методы управления в зависимости от параметров игры. Красная линия соответствует случаю, при котором затраты обоих центров равны, $\delta_T = \delta_S$. Численный пример игры двух центров будет рассмотрен ниже.

Очевидно, что в случае произвольной структуры взаимодействия аналитическое выражение для β^* может принимать достаточно сложный вид. Рассмотрим общий случай симметричной стохастической блочной модели (3.7):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q & \cdots & q \\ q & p_2 & \cdots & q \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ q & \cdots & \cdots & p_k \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & r_k \end{bmatrix},$$

и равновесие в такой игре

$$x^* = (I - \beta PR)^{-1}b.$$

Пусть центр, помимо возможности изменения стимулов игроков, обладает воз-

возможностями для изменения связей внутри кластеров:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} p_1 + \delta_1 & q & \cdots & q \\ q & p_2 + \delta_2 & \cdots & q \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ q & \cdots & \cdots & p_k + \delta_k \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} b_1 + \delta_1 \\ b_2 + \delta_2 \\ \vdots \\ b_k + \delta_k \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Тогда в общем случае β^* – решение уравнения

$$\frac{\|x^*(\beta, \hat{P}, b)\|}{\|x^*(\beta, P, \hat{b})\|} = 1 \quad (3.20)$$

где $\|x\| = \sum_i^k x_i$, относительно β при ограничениях $\beta \lambda_{\max}(\hat{P}R) < 1$, которое весьма сложно для анализа. Однако, продолжив рассмотрение структуры типа случайного графа, можно получить некоторые качественные оценки эффективности управления структурой взаимодействия. Рассмотрим управление структурой каждого кластера по отдельности, получив набор β_i^* – критериев эффективности управления структурой взаимодействия для каждого отдельно взятого кластера. Тогда справедливо следующее

Утверждение 3.3. *Наибольшее β_i^* является верхней оценкой критерия эффективности управления структурой взаимодействия $\beta^*(P)$ для всего графа P , выше которой эффективность структурного управления превышает эффективность управления стимулами агентов:*

$$\beta^*(P) < \max\{\beta_i^*(p_i)\}. \quad (3.21)$$

Доказательство. Для начала рассмотрим случай $q = 0$, когда структура графа P представляет собой набор невзаимосвязанных кластеров, каждый из которых представляет собой случайный граф размером nr_i (где n – число узлов/агентов в исходном графе G) с вероятностью связи p_i . Хотя случай кажется вырожденным, в некоторых ситуациях он описывает реальные графы (см. главу 2): графы конкуренции и сотрудничества компаний, социальные эффекты стремления создания связей с похожими узлами и др. Можно показать, что результаты (3.16), полученные выше, имеют место для каждого отдельно взятого кластера матрицы P , взвешенные на размер кластера r_i :

$$\beta_i^*(p_i) = \frac{1}{r_i(\delta + b_i + p_i)}.$$

Тогда наибольшее β_i^* , соответствующее менее связанному кластеру, будет выступать верхней оценкой критерия эффективности управления структурой взаимодействия для всего графа P при $q = 0$

$$\beta^*(P) < \max\{\beta_i^*\}.$$

Легко показать, что внедиагональные элементы q , отличные от нуля, снижают $\beta^*(P)$ (увеличивают эффективность управления структурой взаимодействия). Рассмотрим матрицы

$$P' = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{bmatrix},$$

тогда исходная матрица $P = P' + Q$. По построению набор $\{p_i\}_{i=1}^k$ является набором собственных значений матрицы P' , а $\max\{\beta_i^*\}$ соответствует наименьшему p_i и, соответственно, наименьшему собственному значению λ_{\min} матрицы P' . Для такой постановки в [196] (теорема 7.5.6) показано, что

$$\lambda_{\min}(P) \geq \lambda_{\min}(P') + \lambda_{\min}(Q),$$

что в случае исследуемой структуры графа P (3.7) подтверждает оценку (3.21). \square

Таким образом, полученная в (3.21) оценка для $\beta^*(G)$ является оценкой сверху: в произвольном графе высокая эффективность управления структурой взаимодействия для менее связанного кластера будет гарантировать эффективность управления структурой взаимодействия для всего графа.

3.1.3. Примеры

Численный пример игры двух центров с демонстрацией структуры взаимодействия представлен на рисунке 3.5. Пусть $n = 30$, $p = 0.25$, $\beta = 0.8$, $b = 1$. Равновесие при исходных значениях параметров $\bar{x}^* = 1.25$ (в эксперименте ≈ 1.23). Пусть первый центр стимулирует игроков на величину $\delta_T = 0.1$, при этом возникает новое равновесие $\bar{x}^* = 1.375$ (в эксперименте ≈ 1.36). Согласно (3.16), в данном примере $\beta^* = \beta$, что означает, что центр, управляющий структурой, затратит на управление ресурсы $\delta_S = \delta_T$ т.е. изменит вероятность

создания связи $p = 0.25 - 0.1 = 0.15$, чтобы путем изменения структуры взаимодействия вернуть равновесные стратегии игроков к значению при исходных параметрах $\bar{x}^* = 1.25$ (в эксперименте ≈ 1.24).

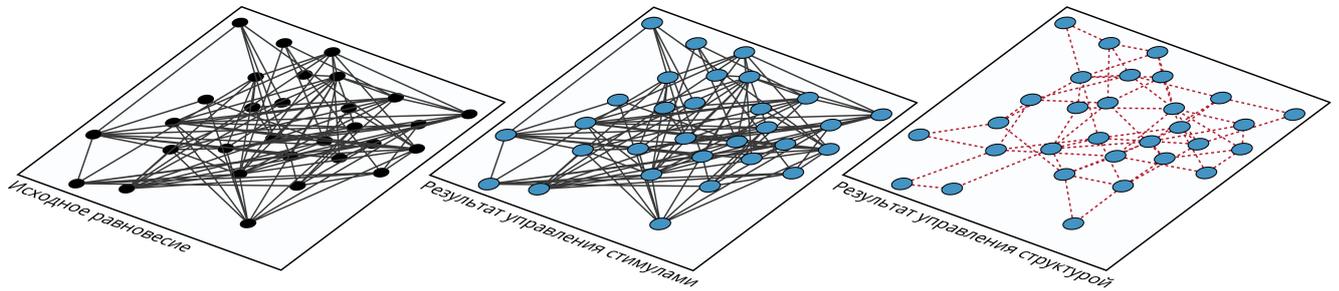


Рисунок 3.5. Численный пример решения задачи двух центров на графе $G(n, p)$ для $n = 30$, $p = 0.25$, $\beta = 0.8$, $b = 1$

Переходя к произвольному числу агентов n предположим, что значения всех параметров из предыдущего примера остаются неизменными, при этом меняется только число агентов n . На рисунке 3.6 представлена диаграмма размаха для результатов численного моделирования результатов игры двух центров для сетей с различным числом агентов n .

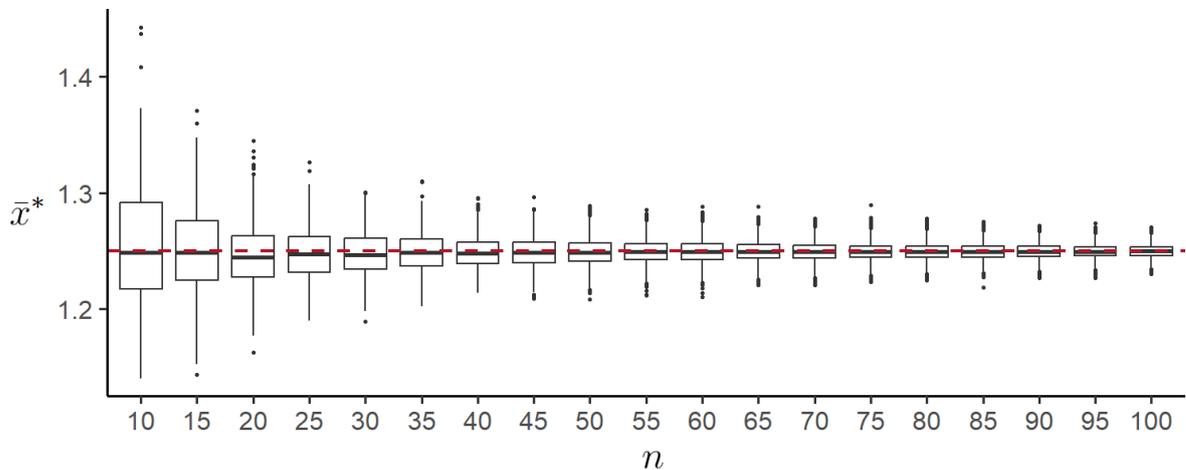


Рисунок 3.6. Численный пример решения задачи двух центров на графе $G(n, p)$ при $p = 0.25$, $\beta = 0.8$, $b = 1$ и различным числом агентов n

По оси x представлено число агентов n ; по оси y представлено среднее значение равновесных стратегий игроков \bar{x}^* . При проведении численного эксперимента использовалась следующая процедура. На первом шаге выбирается число агентов n ; далее, для указанного n генерируется экземпляр случайного графа $G(n, p)$ при $p = 0.15$; эта процедура повторяется n^2 раз. Красной

пунктирной линией отмечено равновесие в игре с репрезентативным агентом, $\bar{x}^* = 1.25$.

Рассмотрим пример задачи управления структурой взаимодействия для случая нескольких кластеров. Пусть

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.5 & q \\ q & 0.2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Благодаря проведенному выше анализу появляется возможность рассмотреть 3 стратегии управления одновременно:

1. $f_T(x^*) = x_1^* + x_2^*$ - сумма действий игроков в равновесии, при котором центр осуществляет управление индивидуальными стимулами b игроков:

$$b_1 = 1 + 0.5, \quad b_2 = 1 + 0.5;$$

2. $f_S(x^*) = x_1^* + x_2^*$ - сумма действий игроков в равновесии, при котором центр осуществляет управление структурой взаимодействия, т. е. элементами p_1 и p_2 :

$$p_1 = 0.5 + 0.5, \quad p_2 = 0.2 + 0.5;$$

3. $f_{mix}(x^*) = x_1^* + x_2^*$ - сумма действий игроков в равновесии, при котором центр использует смешанный механизм управления:

$$p_1 = 0.5 + 0.5, \quad b_2 = 1 + 0.5;$$

Значение β^* , выше которого эффективность структурного управления превышает эффективность управления индивидуальными стимулами для двух кластеров равняется $\beta_1^*(p_1) = 1$ и $\beta_2^*(p_2) = 1.17$ соответственно, что означает, что управление структурой первого кластера будет эффективнее при меньших значениях β .

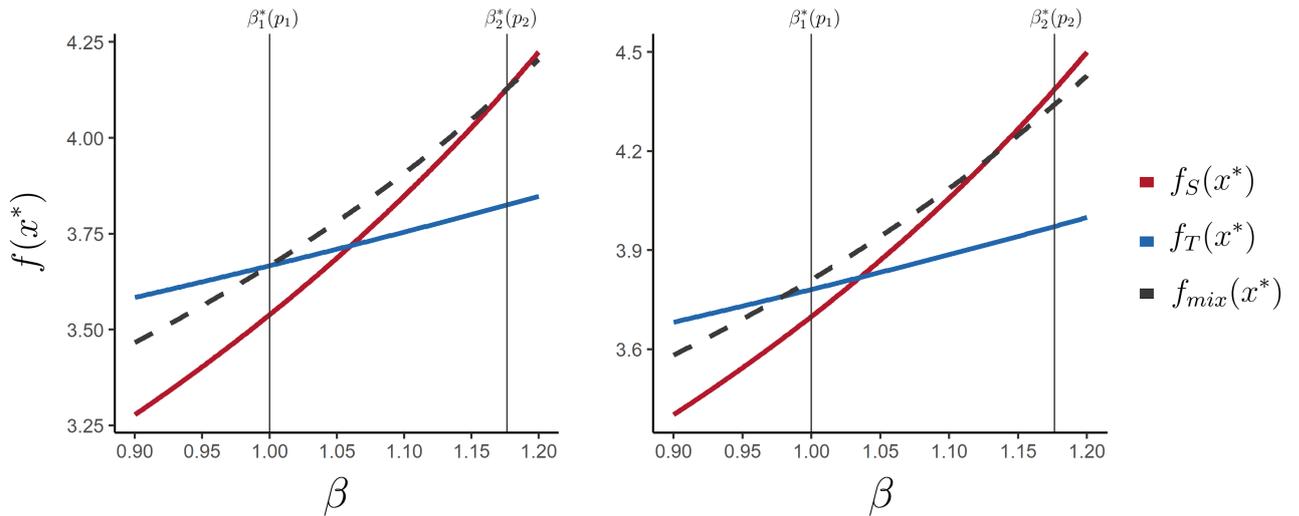


Рисунок 3.7. Численный пример решения задачи управления структурой взаимодействия для случая (3.22) при $q = 0$ (слева) и $q = 0.05$ (справа)

Случай $q = 0$ представлен на рисунке 3.7 (слева). В зависимости от значений параметра β возникает несколько областей, внутри которых эффективны различные методы управления:

1. $\beta < \beta_1^*(p_1)$ – управление индивидуальными стимулами b эффективнее других методов;
2. $\beta_1^*(p_1) < \beta < \beta_2^*(p_2)$ – эффективнее смешанный механизм управления: центру выгодно управлять структурой более связанного кластера, при этом решая задачу стимулирования для менее связанного кластера;
3. $\beta > \beta_2^*(p_2)$ – управление структурой взаимодействия позволяет достичь наибольшего эффекта.

Случай $q = 0.05$ представлен на рисунке 3.7 (справа). Видно, что стратегии центра, перечисленные выше, остаются справедливыми для меньших значений β , что согласуется с утверждением 3.3.

3.1.4. Заключение

В данном разделе для игры с эффектом локального агрегирования проведено сравнение двух подходов к управлению: стимулирования индивидуальных агентов и изменения структуры их взаимодействия в ситуации, когда сеть описывается репрезентативным агентом или группой таких агентов. Показано, что эффективность структурного управления возрастает при увеличении силы се-

тевого эффекта. Очевидно, что различия между управлением в случае детерминированной сети и в случае репрезентативного агента такие же, как между однородным вмешательством и сетевой эвристикой, предложенной в [134]. Авторы показали, что учет в задаче стимулирования топологии сети приводит к значительному увеличению функции целевых функций центра (как агрегированных усилий игроков, так и агрегированных выигрышей): центр стимулирует агентов пропорционально их вкладу в стратегическое взаимодействие. Однако, рассмотрение случая репрезентативного агента позволило значительно упростить анализ равновесия и задач управления. Приведены аналитические результаты, определяющие условия, при которых в задаче центра управление структурой взаимодействия становится более предпочтительным. Численные эксперименты подтвердили теоретические выводы, показав, что в ряде случаев создание новых связей между агентами может быть более эффективной стратегией, чем стимулирование агентов.

3.2. Задача управления в рефлексивной игре с точечной структурой информированности

Ниже рассмотрена модель коллективного поведения агентов в ситуации игровой неопределенности и неполной информированности. В качестве модели принятия решений агентами используется рефлексивная игра, в которой участники принимают решение на основе иерархии представлений о параметрах игры, представлений о представлениях и т. д. В центре внимания данной работы рефлексивные игры с точечной структурой информированности и линейным наилучшим ответом игроков. Показано, что информационное равновесие в таких играх аналогично равновесию Нэша в игре на сети; в явном виде записаны выражения для равновесных ответов игроков, указаны условия существования и единственности равновесия. Приводится формулировка задачи стимулирования, аналогичной задаче стимулирования в игре на сети: показана взаимосвязь между равновесием в игре с общим знанием и равновесием в игре с неполной информированностью, в которой центр сообщает новые стимулы игрокам индивидуально.

Информационная рефлексия – процесс и результат размышлений агента о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие агенты) [36]. Информационная рефлексия

обычно связана с недостаточной взаимной информированностью, и ее результат используется при принятии решений. Одним из способов моделирования принятия решения в ситуации с неполной информированностью являются рефлексивные игры, в которых представления агентов друг о друге формализованы в виде фантомных агентов. Введение понятия фантомного агента позволяет определить рефлексивную игру как игру реальных и фантомных агентов, а также определить информационное равновесие как обобщение равновесия Нэша на случай рефлексивной игры, в рамках которого предполагается, что каждый агент (реальный и фантомный) при вычислении своего субъективного равновесия (равновесия в той игре, в которую он со своей точки зрения играет) использует имеющуюся у него иерархию представлений об объективной и рефлексивной реальности.

Удобным инструментом исследования концепции решения рефлексивной игры – информационного равновесия – является граф рефлексивной игры, в котором вершины соответствуют реальным и фантомным агентам и в каждую вершину-агента входят дуги (их число на единицу меньше числа реальных агентов), идущие из вершин-агентов, от действий которых в субъективном равновесии зависит выигрыш данного агента. Ниже на примере рефлексивной игры с точечной структурой показано, что в отдельных случаях, а именно – в случаях, когда наилучшие ответы игроков линейно зависят от ответов других, связанных с ними агентов, информационное равновесие может быть описано в явном виде в терминах структуры информированности. Для класса игр с линейным наилучшим ответом ранее [134] была сформулирована задача управления стимулами агентов (англ. *incentive targeting problem*) – случай задачи центра, изменяющего параметр функции полезности агентов, являющийся их предельным выигрышем и не зависящий от действий других агентов. В случае рефлексивной игры с точечной структурой информированности изменение данного параметра возможно двумя способами, каждый из которых может быть реализован различными методами: одновременное сообщение нового параметра всем агентам (что эквивалентно решению исходной задачи стимулирования), либо ситуация, в которой о значении нового параметра узнает лишь часть агентов. В данной работе приведен пример механизма сообщения информации центром, когда две эти ситуации – случай общего знания и случай неполной информированности агентов дают эквивалентный ответ.

Ниже, в первом разделе описана рефлексивная игра с точечной структурой информированности из [35]. Во втором разделе показано, что информационное равновесие в такой игре аналогично равновесию Нэша в игре на сети с линейным наилучшим ответом из [4] и может быть сформулировано в терминах структуры информированности; в явном виде записаны выражения для равновесных ответов игроков, указаны условия существования и единственности равновесий. Такая формулировка позволяет рассматривать произвольную структуру связей между игроками и получить равновесие в явном виде. В третьем разделе приводится формулировка задачи информационного управления, аналогичной задаче стимулирования в игре на сети: показана взаимосвязь между равновесием в игре на сети с общим знанием и равновесием в игре с неполной информированностью, в которой центр сообщает новые стимулы игрокам индивидуально.

3.2.1. Рефлексивные игры и структура информированности агентов

Рефлексивная игра Γ_I с конечной структурой информированности I задается кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, v_i(\cdot)_{i \in N}, \Theta, G_I\}$, где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i -го реального агента, Θ – множество возможных значений неопределенного параметра («состояний природы»), $v_i(\cdot) : \Theta \times X \rightarrow \mathbb{R}$ – целевая функция i -го реального агента, $i \in N$, G_I – граф рефлексивной игры.

Неформально, рефлексивная игра представляет собой взаимодействие агентов, рефлексиирующих относительно параметра $\theta \in \Theta$. Агенты имеют друг о друге некоторые представления – истинные (тогда соответствующий агент является реальным) или ложные (тогда агент является фантомным). Например, в сознании 2-го агента присутствует экземпляр («образ») 1-го агента, который либо совпадает с реальным 1-м агентом, либо не совпадает; в случае несовпадения экземпляр 1-го агента является фантомным.

Граф рефлексивной игры, вершины которого представляют агентов, а связи – их взаимные представления друг о друге, состоит из следующих элементов:

- A_i – множество вершин, соответствующих возможным экземплярам i -го агента, $i \in N = \{1, \dots, n\}$; ровно один из них является реальным, прочие (если они есть) являются фантомными агентами;

- $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ – множество всех вершин графа, репрезентирующее всех агентов (далее мы не будем различать агентов и вершины);
- $\theta(a)$ – состояние природы с точки зрения агента $a, a \in A, \theta \in \Theta$;
- $\rho(a)$ – множество не совпадающих с a агентов, которых агент $a \in A$ считает реальными, что отражается на графе в виде стрелок (направленных связей) от этих агентов к a ; множество $v(a) \subset A$ для данного агента $a \in A_i$ состоит из $(n - 1)$ -го элемента, которые принадлежат, соответственно, множествам $A_1 \cup \dots \cup A_{i-1} \cup A_{i+1} \cup \dots \cup A_n$.

Будем считать, что целевые функции всех экземпляров одного и того же реального агента совпадают, т. е. агент $a \in A_i$ стремится максимизировать функцию $v_i(\cdot)$. В этом случае можно определить информационное равновесие – набор действий агентов $x_a, a \in A$, таких, что для всех $i \in N, a \in A_i$

$$x_a \in \underset{x \in X_i}{\text{Argmax}} v_i(\theta(a), x, x_{-a}),$$

где через x_{-a} обозначен набор действий агентов из множества $v(a)$. В работе [35] в качестве примера была рассмотрена рефлексивная игра со следующей целевой функцией реальных агентов:

$$v_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3) x_i - \frac{x_i^2}{2},$$

где $x_i \geq 0, i \in N = \{1, 2, 3\}; \theta \in \Theta = \{1, 2\}$. Далее, в зависимости от различной информированности игроков, для нахождения информационного равновесия необходимо из условий первого порядка $\partial v_i / \partial x_i = 0$ найти наилучшие ответы игроков и решить систему линейных уравнений. Переходя к произвольному числу агентов, можно обобщить целевую функцию (1) агента i в следующем виде:

$$f_a(\theta, x_a, x_{-a}, G_I) = \left(\theta(a) - \beta \sum_b g_{ab} x_b \right) x_a - \frac{x_a^2}{2}, \quad (3.23)$$

где G_I – граф рефлексивной игры, в котором $g_{ab} = 1$ при $b \in \rho(a)$, иначе $g_{ab} = 0, g_{aa} = 0$. Параметр $\beta > 0$ отражает характер зависимости от действий соседей. Система наилучших ответов игроков с функцией (2) принимает следующий вид

$$x_a = \theta(a) - \beta \sum_b g_{ab} x_b,$$

которую можно представить в матричном виде как

$$x = \theta - \beta G_I x$$

или

$$(I + \beta G_I) x = \theta,$$

где I – единичная матрица². Воспользовавшись результатами работы [4], можно сформулировать следующее утверждение, позволяющее найти равновесие в рефлексивной игре с точечной структурой информированности и функцией выигрыша игроков (2) в явном виде:

Утверждение 3.4. *Если $\beta \lambda_{\min} \left(\frac{G_I + G_I^T}{2} \right) < 1$, то информационное равновесие в рефлексивной игре с точечной структурой информированности $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, v_i(\cdot)_{i \in N}, G_I\}$ и функцией выигрыша агента (3.23) существует и единственно:*

$$x^* = (I + \beta G_I)^{-1} \theta. \quad (3.24)$$

Доказательство. Доказательство утверждения 3.4 эквивалентно доказательству утверждения 2 в [95]. Доказательство основывается на свойстве игры быть потенциальной: игра с функцией выигрыша агентов (3.23) обладает потенциальной функцией $\varphi(x) = x^T \mathbf{1} - \frac{1}{2} x^T (I - \beta G_I) x$, максимум которой является равновесием Нэша. Достаточным условием существования единственного решения является вогнутость потенциальной функции. Матрица вторых производных $\nabla^2 \varphi = -(I - \beta G_I)$, и φ строго вогнута тогда и только тогда, когда матрица $I - \beta G_I$ положительно определена: для любого $y \neq 0$, $y^T (I - \beta G_I) y > 0$, что эквивалентно условию $\beta \lambda_{\min} (G_I) < 1$, где $\lambda_{\min} (G_I)$ – наименьшее собственное значение матрицы G_I . Так как матрица G_I несимметрична, речь идет о наименьшем собственном значении эрмитовой компоненты матрицы G_I , $\lambda_{\min} \left(\frac{G_I + G_I^T}{2} \right)$. \square

В такой постановке игра полностью соответствует довольно популярной среди зарубежных исследователей игре с отрицательным сетевым эффектом или игре локального общественного блага [93, 95, 94]. А именно, равновесие Нэша в игре локального общественного блага $x^* = (I + \beta E)^{-1} \theta$, где в качестве сети взаимодействия выступает матрица $E = \{e_{ij}\} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ – граф взаимного

²Нетрудно проверить, что в таком виде модель из оригинальной статьи [35] можно представить как

$$v_i(\theta, x_a, x_{-a}, G_I) = \left(\theta(a) - \sum_b g_{ab} x_b \right) x_a - x_a^2 - \frac{x_a^2}{2},$$

а система наилучших ответов принимает вид $x_a = \frac{\theta(a) - \sum_b g_{ab} x_b}{3}$, или $(3I + G_I) x = \theta$.

влияния агентов (например, сеть знакомств, конкуренции и др.), а информационное равновесие в рефлексивной игре $x^* = (I + \beta G_I)^{-1} \theta$, где в качестве сети взаимодействия используется граф G_I рефлексивной игры. Равновесие в такой игре существует и при $\beta \lambda_{\min} \left(\frac{G_I + G_I^T}{2} \right) > 1$, но ниже мы ограничимся только случаем утверждения 1.

Похожие модели рассматривались в работах [13, 52], в которых модели дополнялись параметром r_i , характеризующим тип i -го агента – эффективность или квалификацию его деятельности. Равновесие для игры в [13] с функцией $v_i(\theta, x_i) = \left(\theta_i - \sum_{j \in N} x_j \right) x_i - \frac{x_i^2}{2r_i}$ на произвольном графе G можно представить как

$$x^* = \left(\frac{1}{r} I + \beta G \right)^{-1} \theta,$$

а равновесие для игры в [52], в которой агенты с функцией выигрыша $v_i(\theta, x_i) = \left(\sum_{j \in N} x_j - \theta \right) x_i - \frac{x_i^2}{2r_i}$ прикладывают усилия x_i к некоторому совместному действию, которое дает положительный вклад в целевые функции агентов в случае, если сумма усилий превышает некоторый порог θ , на произвольном графе G можно представить как

$$x^* = \left(-\frac{1}{r} I + \beta G \right)^{-1} \theta.$$

Аналогично утверждению 3.4, можно рассмотреть игру с положительным сетевым эффектом [67, 134]: ситуацию, в которой каждый агент стремится максимизировать функцию

$$f_a(\theta, x_a, x_{-a}, G_I) = \left(\theta(a) + \beta \sum_b g_{ab} x_b \right) x_a - \frac{x_a^2}{2}. \quad (3.25)$$

Тогда справедливо следующее

Утверждение 3.5. *Если $\beta \lambda_{\max} \left(\frac{G_I + G_I^T}{2} \right) < 1$, то информационное равновесие в рефлексивной игре с точечной структурой информированности $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, v_i(\cdot)_{i \in N}, G_I\}$ и функцией выигрыша агента (3.25) существует и единственно:*

$$x^* = (I - \beta G_I)^{-1} \theta, \quad (3.26)$$

Утверждение 3.5 доказывается аналогично утверждению 3.4 с использованием результатов из [67].

3.2.2. Задача стимулирования для рефлексивной игры

Для игры локального общественного блага в [134] была предложена задача стимулирования³ - управления вектором θ - для максимизации функции общественного благосостояния:

$$W(\theta, G) = \sum_{i \in N} v_i \rightarrow \max_{\theta}$$

Рассмотрим аналогичную задачу для рефлексивной игры с точечной структурой информированности:

$$W(\theta, G_I) = \sum_{i \in N} v_i \rightarrow \max_{\theta}$$

Будем считать, что в данной ситуации изменение стимулов возможно только для реальных агентов (заметим, что «стимулирование фантомных агентов» является, по сути, информационным управлением), однако управляющий орган (центр) может по-разному информировать реальных агентов, тем самым изменяя структуру информированности и порождая новых фантомных агентов. А именно, рассмотрим случай, когда в начале имело место общее знание между агентами, а далее происходит следующий многошаговый информационный процесс: на каждом шаге центр индивидуально сообщает об изменении $\theta_i \rightarrow \hat{\theta}_i$ всем i -м реальным агентам.

Это влияет на граф рефлексивной игры следующим образом. Предположим, что в начальный момент времени агенты $N = \{1, 2, 3\}$ связаны графом взаимного влияния $E = \{e_{ij}\}$ (рис. 3.8 слева, стрелками $i \sim j$ отражена зависимость выигрыша i -го агента от действий j -го агента) и все трое агентов одинаково информированы: состояние природы с точки зрения каждого из агентов $\theta_i = \theta$ для всех i . После первого сообщения центра о новом параметре $\hat{\theta}_i$ каждому из игроков индивидуально, граф взаимного влияния остается без изменений, а в графе рефлексивной игры реальные агенты становятся фантомными, а новыми реальными агентами становятся вершины, возникающие в графе рефлексивной игры путем добавления узла i и связей с теми же вершинами, с которым связан фантомный агент i' в графе взаимного влияния E . При этом

³Формально, в работе [134] изложена задача стимулирования для игры с равновесием $x^* = (I - \beta G)^{-1}\theta$ [10], где параметр β отражает характер зависимости от действий соседей: при $\beta > 0$ действия игроков комплементарны (англ. strategic complements), при $\beta < 0$ действия соседей взаимозаменяют друг друга (англ. strategic substitutes). Таким образом, рассматриваемой задаче соответствует случай игры в [2] при $\beta < 0$.

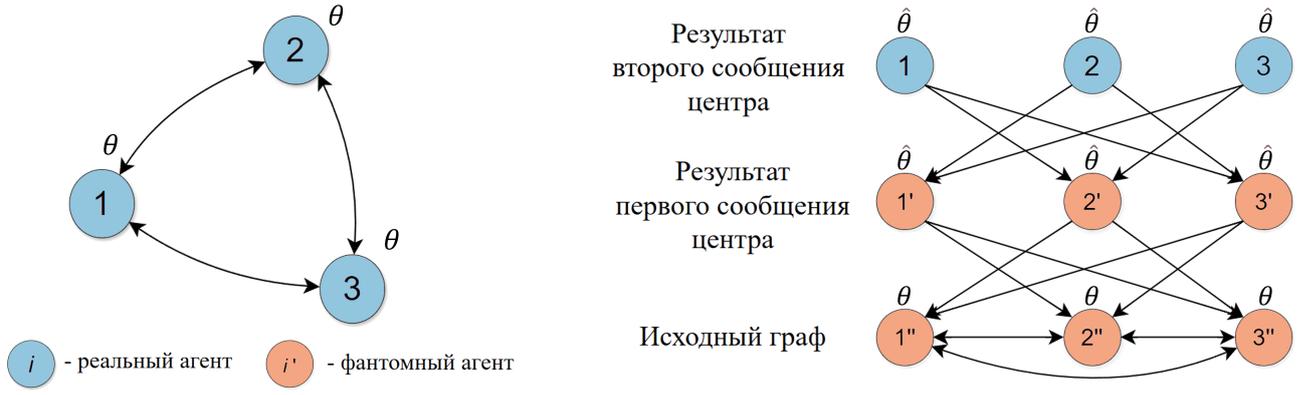


Рисунок 3.8. Процедура передачи сообщений центром и изменение графа рефлексивной игры

для реальных агентов $\theta_i = \hat{\theta}_i$, а для фантомных – $\theta_{i'} = \theta$. Процедуру создания новых связей, возникающих в процессе изменения структуры информированности при $\theta_i \rightarrow \hat{\theta}_i$, можно представить в виде двудольного графа: если вершины i и j связаны в исходном графе E , тогда в новом двудольном графе одна доля – это исходный граф E , а вторая – E' , и имеется связь между вершинами $i \sim j'$ и $i' \sim j$ (рис. 3.8 справа).

Тогда в начальный момент множества A_1, \dots, A_n являются одноэлементными, а структура информированности G_I совпадает с графом взаимного влияния E . Далее на каждом шаге в каждое из множеств $A_i, i \in N$, добавляется один экземпляр \hat{a}_i , который становится реальным агентом; при этом $\theta(\hat{a}_i) = \hat{\theta}_i$, а множество $\rho(\hat{a}_i)$ составляют экземпляры агентов, реальных на предыдущем шаге. Формально, равновесные ответы игроков можно представить следующим образом – равновесие реальных агентов в начальный момент (без сообщений центра):

$$x^* = (I + \beta E)^{-1} \theta.$$

Равновесные ответы реальных агентов после первого сообщения центра:

$$x^{*(1)} = \hat{\theta} - \beta E x^*,$$

а после второго

$$x^{*(2)} = \hat{\theta} - \beta E x^{*(1)}.$$

Равновесные ответы реальных агентов после k -го сообщения центра:

$$x^{*(k)} = \hat{\theta} - \beta E x^{*(k-1)}.$$

При этом число вершин в графе рефлексивной игры после k -го сообщения центра равняется kn . Утверждение 3.6 позволяет описать результат воздействия центра в терминах исходного графа взаимного влияния E

Утверждение 3.6. *Если информационное равновесие в рефлексивной игре с точечной структурой информированности Γ_I существует и единственно, то многошаговая процедура изменения структуры информированности G_I сходится к равновесию в игре с полной информированностью агентов, а именно при $k \rightarrow \infty$*

$$x^{*(k)} \rightarrow (I + \beta E)^{-1} \widehat{\theta}.$$

Доказательство. Путем подстановки нетрудно убедиться, что при $k > 0$ результатом k -го сообщения центра является структура G_I , порождающая следующие равновесные действия агентов

$$x^{*(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \beta^j E^j \widehat{\theta} + (-1)^k \beta^k E^k x^*.$$

При $k \rightarrow \infty$ второе слагаемое $(-1)^k \beta^k E^k x^*$ стремится к 0 в силу ограничения $\beta \lambda_{\min}(E) < 1$. Выражение $\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \beta^j E^j$ в первом слагаемом является разложением матрицы $(I + \beta E)^{-1}$ в ряд Неймана [80]. \square

3.2.3. Примеры

В целях иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример, аналогичный примеру в [35]: выигрыш v_i игрока i характеризуется функцией

$$v_i = (\theta_i - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}$$

для случая $n = 3$ агентов. Наилучшие ответы игроков

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\theta_i - x_2 - x_3}{3}, \\ x_2 = \frac{\theta_i - x_1 - x_3}{3}, \\ x_3 = \frac{\theta_i - x_1 - x_2}{3}. \end{cases}$$

Задача состоит в том, чтобы показать сходимость равновесных стратегий игроков в ситуации неполной информированности к равновесию в игре с полным знанием, для чего достаточно исследовать значения $f(\theta, k) = \sum_{i \in \{1,2,3\}} x_i^*$

Таблица 3.1. Равновесные ответы игроков в зависимости от числа сообщений центра в игре с эффектом стратегической заменимости

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
θ	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_i^*	0.2	0.53	0.31	0.45	0.36	0.42	0.38	0.41	0.39	0.40	0.39	0.40
f	0.6	1.6	0.93	1.37	1.08	1.27	1.14	1.23	1.17	1.21	1.18	1.20

в зависимости от числа сообщений центра (таб. 3.1). При $\theta_{i \in \{1,2,3\}} = 1$ равновесные ответы игроков $x_{i \in \{1,2,3\}}^* = 0.2$, а значение суммы агрегированных действий $f(\theta) = 0.6$. Пусть центр меняет исходные значения $\theta_{i \in \{1,2,3\}} = 1$ на новые $\hat{\theta}_{i \in \{1,2,3\}} = 2$. В случае общего знания об изменении $\theta_i \rightarrow \hat{\theta}_i$ равновесные ответы игроков $x_{i \in \{1,2,3\}}^* = 0.4$, а значение функции $f(\hat{\theta}) = 1.2$. Однако, в ситуации индивидуального информирования агентов об изменении $\theta_i \rightarrow \hat{\theta}_i$, на каждой итерации центр сообщает индивидуально каждому агенту ситуацию, которая имела место на предыдущем шаге. В результате этих сообщений структура информированности меняется. Равновесные ответы игроков и значение суммы агрегированных действий также меняются, в пределе достигая значений случая общего знания.

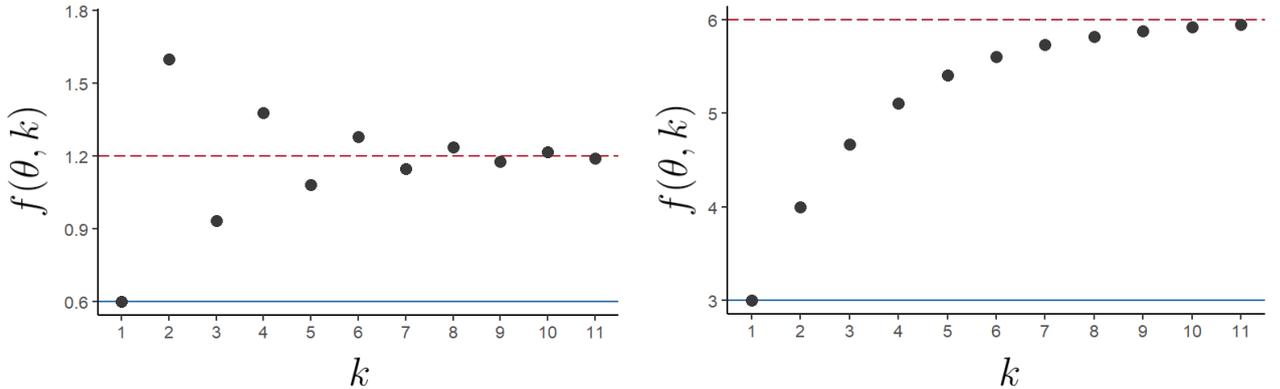


Рисунок 3.9. Агрегированные усилия игроков $f(\theta, k) = \sum_{i \in \{1,2,3\}} x_i^*$ в равновесии в зависимости от числа сообщений центра k в игре с отрицательным (слева) и положительным (справа) сетевым эффектом. Точками отмечены ответ игрока x_i^* в зависимости от сообщения центра. Сплошной линией отмечены равновесные ответы агентов в игре с общим знанием при $\theta_{i \in \{1,2,3\}} = 1$, пунктиром при $\hat{\theta}_{i \in \{1,2,3\}} = 2$

Аналогично, можно рассмотреть игру с эффектом стратегической допол-

Таблица 3.2. Равновесные ответы игроков в зависимости от числа сообщений центра в игре с эффектом стратегической дополнителности

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
θ	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
x_i^*	1	1.33	1.55	1.70	1.80	1.87	1.91	1.94	1.96	1.97	1.98	1.99
W	3	4	4.66	5.11	5.40	5.60	5.74	5.82	5.88	5.92	5.94	5.96

нительности: выигрыш v_i игрока i характеризуется функцией

$$v_i = (\theta_i + x_1 + x_2 + x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2}$$

для случая $n = 3$ агентов. Наилучшие ответы игроков

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\theta_i + x_2 + x_3}{3}, \\ x_2 = \frac{\theta_i + x_1 + x_3}{3}, \\ x_3 = \frac{\theta_i + x_1 + x_2}{3}. \end{cases}$$

Исследуем значения $f(\theta, k) = \sum_{i \in \{1,2,3\}} x_i^*$ в зависимости от числа сообщений центра (таб. 3.2). При $\theta_{i \in \{1,2,3\}} = 1$ равновесные ответы игроков $x_{i \in \{1,2,3\}}^* = 1$, а значение суммы агрегированных действий $f(\theta) = 3$. Пусть центр меняет исходные значения $\theta_{i \in \{1,2,3\}} = 1$ на новые $\hat{\theta}_{i \in \{1,2,3\}} = 2$. В случае общего знания об изменении $\theta_i \rightarrow \hat{\theta}_i$ равновесные ответы игроков $x_{i \in \{1,2,3\}}^* = 2$, а значение функции $f(\hat{\theta}) = 6$.

В ситуации индивидуального информирования об изменении $\theta_i \rightarrow \hat{\theta}_i$ равновесные ответы игроков и значение суммы агрегированных действий меняются постепенно, в пределе достигая значений для случая общего знания.

3.2.4. Заключение

В данном разделе рассмотрена модель коллективного поведения агентов в ситуации игровой неопределенности и неполной информированности. Для рефлексивной игры с точечной структурой информированности показано, что в случае, когда наилучшие ответы игроков линейно зависят от других, связанных с ними агентов, информационное равновесие может быть описано в явном виде

в терминах структуры информированности. Такой подход позволяет интерпретировать пример рефлексивной игры из [35] как игру локального общественного блага с неполной информированностью агентов и описать в матричном виде равновесие в рефлексивной игре с точечной структурой информированности и линейным наилучшим ответом. Кроме того, на основе полученных в данной работе результатов появляется возможность провести сравнительное описание решений задач управления для случаев общего знания и неполной информированности агентов. В качестве примера приводится формулировка задачи информационного управления, аналогичной задаче стимулирования в игре локального общественного блага на сети: в работе показан пример механизма сообщения информации центром, когда случай общего знания и случай неполной информированности агентов в пределе дают одинаковый ответ.

3.3. Задача управления в игре социальных норм

Модель социальных норм [229] описывает процесс принятия агентами решения о собственных усилиях в условиях наличия индивидуальной продуктивности и влияния среднего уровня усилий своего окружения. В контексте сетевого взаимодействия роль социальных норм связана с влиянием окружения, задаваемым структурой сети, связывающей агентов. Ключевым параметром модели является склонность к конформизму, определяющим степень, с которой агенты стремятся минимизировать разницу между своими действиями и социальной нормой. Социальная норма, в свою очередь, представляет собой взвешенное среднее усилий соседей агента в сети.

Анализ, проведенный авторами модели [229] показывает, что равновесие Нэша отличается от социального оптимума из-за наличия экстерналий – внешних эффектов, которые агенты оказывают на своих соседей. В частности, в равновесии агенты игнорируют положительное влияние своих усилий на результаты соседей, что приводит к недостаточным совокупным усилиям. Одним из результатов исследования является выявление условий, при которых равновесие Нэша совпадает с социальным оптимумом, а также разработка методов управления, которые позволяют достичь уровня общественного благосостояния, соответствующего социальному оптимуму. Авторами рассматриваются два основных подхода: управление стимулированием агентов и управление структурой сети. В первом случае центр имеет возможность изменять продуктивность

агентов через субсидии или налоги, чтобы компенсировать положительные или отрицательные экстерналии. Во втором случае центр управляет структурой сети, добавляя или удаляя связи между агентами, что влияет на распределение усилий в сети.

Ниже будет представлено решение задачи центра который, в отличии от оригинальной статьи, стремится максимизировать агрегированные усилия игроков в равновесии. Показано, что добавление связей между группами агентов с разной продуктивностью может иметь позитивный эффект на агрегированные усилия и негативный эффект на общественное благосостояние. Ряд численных экспериментов демонстрируют теоретические результаты для сетей с различным числом агентов.

3.3.1. Описание игры и задачи управления

В модели локального агрегирования или модели социальных норм [229] каждый игрок получает выигрыш

$$v_i = b_i x_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right) \left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j \right)^2 - \frac{1}{2} x_i^2, \quad (3.27)$$

где $b_i > 0$ отражает индивидуальную продуктивность агента i , а $\beta \in [0, 1)$ – склонность к конформизму. Агенты совершают затратные действия $(-x_i^2/2)$, при этом сравнивая свой индивидуальный вклад $(b_i x_i)$ со средним вкладом своих соседей по сети, стараясь минимизировать различие между своим действием и средним действием своей группы. Величина

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j$$

называется социальной нормой агента i . Наилучшие ответы игроков в матричном виде

$$x = (1 - \beta)b + \beta \hat{G}x, \quad (3.28)$$

где $\hat{G} = \{\hat{g}_{ij} = g_{ij}/d_i\}^{n \times n}$. При $\beta < 1$ равновесие Нэша существует и единственно:

$$x^* = (1 - \beta)(I - \beta \hat{G})^{-1}b. \quad (3.29)$$

В задаче управления в игре социальных норм на сети центр стремится максимизировать свою целевую функцию, при этом, как было показано ранее, имея возможность выбрать различные инструменты влияния на результат взаимодействия агентов. В работе авторов модели [229] рассмотрен случай, когда центр стремится максимизировать функцию общественного благосостояния $\sum_i^n v_i$, используя два инструмента: стимулирование агентов и управление структурой взаимодействия. Социальный оптимум в модели, т. е. решение задачи

$$\max_x \sum_{i=1}^n v_i(x),$$

при $x = BR_i(x_{-i})$ для всех i , достигается решением следующей системы наилучших ответов игроков:

$$x_i = (1 - \beta)b_i + \beta\bar{x} + \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} (x_j - \bar{x}_j).$$

Отличием социального оптимума от равновесия Нэша в игре является наличие последнего слагаемого - влияния собственного действия агента на социальную норму своих соседей. В равновесии Нэша, принимая решение о своих индивидуальных усилиях, агенты не учитывают этот фактор, что создает экстерналию, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Оптимум достигается в том случае, когда равновесные ответы игроков соответствуют их индивидуальной продуктивности

$$x^O = b. \tag{3.30}$$

В этом случае выделяется класс регулярных сетей: для них совокупные усилия в сети всегда оптимальны: $x^* = x^O = b$. Это происходит потому, что в регулярных сетях положительные и отрицательные внешние эффекты, оказываемые агентами на своих соседей, в точности уравниваются, так что совокупный эффект оптимален.

Авторы модели рассмотрели несколько задач управления для случая, когда целевой функцией центра является функция общественного благосостояния - сумма выигрышей игроков в равновесии. В задаче стимулирования центр субсидирует агентов, которые оказывают положительное внешнее воздействие на своих соседей, и облагает налогом тех агентов, которые оказывают негативное

внешнее воздействие на своих соседей. В случае управления структурой взаимодействия, рассмотрены 2 случая, в каждом из которых центру безразлична структура сети и необходима информация только о продуктивности агентов:

1. добавление ключевой связи (англ. key-link - adding): в любой сети добавление связи между двумя агентами с высокой (низкой) продуктивностью не только увеличивает (уменьшает) усилия этих двух агентов, но и увеличивает (уменьшает) усилия всех остальных агентов в сети;

2. удаление ключевой связи (англ. key-link - removing): независимо от структуры сети, центр должен удалить связь между двумя наиболее продуктивными агентами в сети.

Ниже будет рассмотрена задача центра, стремящегося максимизировать агрегированные усилия игроков в ситуации двух кластеров: один из них состоит из агентов с высокой индивидуальной продуктивностью, а другой – с низкой. Анализ, проведенный авторами модели, позволяет ответить на вопрос о создании связей внутри групп: при росте связей внутри групп продуктивные агенты становятся более продуктивными, а непродуктивные – более непродуктивными. При этом интерес представляет вопрос о том, может ли рост связей между кластерами повысить усилия игроков в равновесии? Как будет показано далее, создание связей между кластерами может приводить к увеличению агрегированных усилий игроков, но при этом и к снижению их выигрышей и общественного благосостояния.

3.3.2. Взаимодействие кластеров в модели социальных норм

Рассмотрим случай взаимодействия нескольких репрезентативных агентов: множество агентов представлено двумя группами, характеризующимися различной индивидуальной продуктивностью, а структура взаимодействия в каждой из групп соответствует модели случайного графа Эрдеша-Реньи с параметром q . Такая постановка приводит к случаю стохастической блочной модели: матрица Q , отражающая вероятности связей между кластерами, умножается на диагональную матрицу размеров кластеров R , формируя эффективную матрицу взаимодействия $E = QR$, где $r_i \in [0, 1]$ – размер кластера, $r_1 + r_2 = 1$:

$$Q = \begin{bmatrix} q & p \\ p & q \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} e_{11} + e_{12} & 0 \\ 0 & e_{21} + e_{22} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

D – матрица, на диагонали которой находятся суммы строк матрицы E , отражающая степень репрезентативного агента и используемая для нормировки строк матрицы E к единице. Тогда равновесные стратегии игроков в такой игре можно представить как [207]

$$x^* = (1 - \beta)(I - \beta ED^{-1})^{-1}b. \quad (3.32)$$

Ниже без доказательства будет приведен ряд утверждений об агрегированных результатах игроков, которые можно получить прямым вычислением для тех случаев, когда структура взаимодействия агентов принимает наиболее простой вид.

Утверждение 3.7.⁴ *В игре социальных норм с одним репрезентативным агентом,*

$$Q = [q], \quad R = [1], \quad b = [b],$$

равновесные стратегии игроков в точности равны их производительности, а именно

$$\bar{x}^* = b.$$

Это утверждение согласуется со свойствами модели в общем случае [229]: если агенты заранее однородны по продуктивности b , то равновесные уровни усилий одинаковы для всех агентов, независимо от структуры сети. Это отличается от случая модели локального агрегирования: модель локального усреднения получается из модели локального агрегирования путем нормирования сетевого эффекта g_{ij} на степень агента d_i , то есть вместо связи $g_{ij} = g_{ji}$ между агентами, влияние агентов друг на друга становится несимметричным: теперь агенты i и j влияют друг на друга с различным весом $\frac{g_{ij}}{d_i}$ и $\frac{g_{ji}}{d_j}$. Это свойство

⁴Помимо прямого вычисления наилучшего ответа игрока (3.32) при $Q = [q]$, который является примером ступенчатой графовой функцией (англ. step-function graphon), можно рассмотреть случай непрерывной графовой функции: в отличие от игры локального агрегирования теперь матрица связей между узлами должна быть строчностохастической, что в терминах графовой функции отражается компонентой $\int_0^1 W(x, y)dy$, соответствующей степени узлов на предельном объекте. Тогда наилучший ответ игрока можно представить как

$$\overline{BR} = (1 - \beta)b + \beta \frac{\int_0^1 W(x, y)\bar{x}dy}{\int_0^1 W(x, y)dy},$$

что для случая одного репрезентативного агента $W(x, y) = q$ принимает вид

$$\overline{BR} = (1 - \beta)b + \bar{x}\beta,$$

и не зависит от q .

приводит к устранению взаимного влияния агентов в случае однородной структуры взаимодействия.

Теперь рассмотрим случай неоднородной b , для которого справедливы

Утверждение 3.8. *Равновесие в игре социальных норм с двумя репрезентативными агентами, имеющими различную продуктивность и представляющими два одинаковых, несвязанных между собой кластера,*

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

не зависит от структуры взаимодействия Q , а агрегированные результаты игроков равны

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = b_1 r_1 + b_2 r_2.$$

Утверждение 3.9. *Равновесие в игре социальных норм с двумя репрезентативными агентами, имеющими различную продуктивность и представляющими два одинаковых эквивалентно связанных кластера,*

$$Q = \begin{bmatrix} q & q \\ q & q \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

не зависит от структуры взаимодействия Q , а агрегированные результаты игроков равны

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = b_1 r_1 + b_2 r_2.$$

Утверждения 3.8 и 3.9 фактически являются разными вариантами утверждения 3.7 и будут полезны ниже при анализе процедуры создания связей между кластерами. Подытоживая, игра с однородными продуктивностью и структурой взаимодействия приводит к агрегированным усилиям игроков, не зависящим от структуры взаимодействия. В этих случаях изменение или управление структурой взаимодействия, хоть и возможное технически, не приведет к изменениям в агрегированных усилиях или выигрышах игроков.

Как было показано авторами модели [229], при росте связей внутри групп продуктивные агенты становятся более продуктивными, а непродуктивные - более непродуктивными. Поэтому для простоты рассмотрим случай, при котором внутри кластеров агенты связаны каждый с каждым, а интерес представляет создание связей между такими кластерами:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Тогда задача центра состоит в максимизации агрегированных усилий игроков в равновесии $f = x_1^* + x_2^*$

$$\max_{p \in [0,1]} f. \quad (3.34)$$

При этом, предположим, что центр не несет издержки на изменение p , имея возможность выбрать любое значение на отрезке $[0, 1]$. Основная идея состоит в рассмотрении двух не связанных групп агентов с различной продуктивностью, в целях исследования вопроса о том, возможно ли такое создание связей между кластерами, которое приведет к увеличению агрегированных результатов игроков.

Не ограничивая общности, пусть $\sigma = (b_1 - b_2)(r_1 - r_2) > 0$ – иными словами, в большем кластере находятся более продуктивные агенты. Тогда справедливо

Утверждение 3.10. *В игре социальных норм с двумя репрезентативными агентами, представляющими два полностью связанных кластера таких, что матрицы Q , R и вектор индивидуальных продуктивностей b имеют вид (3.33), а $\sigma > 0$, решением задачи (3.34) является*

$$p^* = \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi} + 1}, \quad (3.35)$$

где $\psi = (1 - \beta)r_1r_2$.

Доказательство. Исследуем знак производной функции f в точке $p = 0$:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p=0} = \frac{\beta}{1 - \beta} \sigma,$$

где множитель $\beta/(1 - \beta)$ при $\beta \in [0, 1)$ положительный, а следовательно, в случае $\sigma > 0$ знак производной будет положительным. При этом в точке $p = 1$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p=1} = -\frac{\beta r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} \sigma,$$

что в случае $\sigma > 0$ ведет к отрицательному знаку производной в точке $p = 1$. На всем промежутке $p \in [0, 1]$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\beta r_1 r_2 (p^2 r_1^2 + p^2 r_2^2 + r_1 r_2 (\beta + p(\beta(p - 2) + p + 2) - 1))}{(r_2 r_1 (-\beta + (\beta + 1)p^2 + 1) + p r_1^2 + p r_2^2)^2} \sigma.$$

Так как интерес представляют нули функции на отрезке $p \in [0, 1]$, исследуем множитель в числителе, в котором p входит как квадратичный член. Приравнявая к нулю, получаем уравнение, имеющее на отрезке $[0, 1]$ единственное решение

$$p^* = \frac{\sqrt{(1 - \beta)r_1r_2}}{\sqrt{(1 - \beta)r_1r_2 + 1}}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial f}{\partial p} > 0$ в точке $p = 0$, а $\frac{\partial f}{\partial p} < 0$ в точке $p = 1$, функция f возрастает при $p \in [0, p^*)$, и убывает при $p \in (p^*, 1]$. Таким образом, p^* является максимумом функции f на отрезке $p \in [0, 1]$. \square

Как было показано ранее (утверждения 3.8 и 3.9), $f(p = 0) = f(p = 1) = b_1r_1 + b_2r_2$. Это означает, что при $\sigma > 0$ в точках $p = 0$ и $p = 1$ агрегированные результаты принимают одинаковое минимальное значение, равное взвешенной продуктивности агентов. Если же $\sigma < 0$, то есть размер кластера продуктивных агентов меньше размера кластера непродуктивных агентов, то ситуация обратная: оптимальным с точки зрения агрегированных результатов является выбор центра $p = 0$ либо $p = 1$ с одинаковым значением целевой функции, при этом p^* будет являться минимумом функции f .

3.3.3. Примеры

Для начала рассмотрим случай малого числа узлов. При условии, что $r_1 > r_2$ и $d_i \neq 0$ для всех i , наиболее подходящим является случай $n = 5$. Рассмотрим случай двух взаимосвязанных кластеров, для которых $r_1 = 0.6$, $r_2 = 0.4$, а вероятность создания связи внутри кластеров равна 1. Для случая $n = 5$ получаем кластеры из трех и двух агентов. Пусть в первом кластере индивидуальная продуктивность агентов $b_i = 1$ для всех i , а во втором кластере $b_j = 0$ для всех j . Тогда вектор индивидуальных продуктивностей b , матрица связей \hat{G} , равновесные стратегии x^* и социальные нормы \bar{x}^* игроков принимают значения

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} \quad x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

В данной ситуации равновесные стратегии игроков совпадают с социально-оптимальными стратегиями и равны их продуктивности, что приводит к агрегированному результату $\sum_i^n x_i^* = \sum_i^n b_i = \sum_i^n x_i^O = 3$ и суммарным выигрышам игроков $\sum_i^n v_i(x^*) = \sum_i^n v_i(x^O) = 1.5$.

Пусть теперь центр располагает возможностью создания связей между кластерами. Согласно (3.35), оптимальное значение вероятности связей между кластерами $p^* \approx 0.22$, что для случая графа (3.36) соответствует добавлению двух связей из 6 возможных. Пусть центр решает создать две новых связи между одним продуктивным агентом и двумя менее продуктивными агентами, тогда

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdot & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \cdot & \frac{1}{2} \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdot \end{pmatrix} \quad x^* = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{x}^* = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Эффект от добавления новых связей носит разнонаправленный характер. С одной стороны, социальная норма агента 3 снижается вследствие возникновения связей с непродуктивными агентами, что также затрагивает и его продуктивных соседей. Оптимальной стратегией трех продуктивных игроков на снижение своей социальной нормы является снижение наилучшего ответа (относительно ситуации без новых связей). С другой стороны, новые связи непродуктивных агентов приводят к значительному росту их социальной нормы, что влечет рост их наилучшего ответа. Как видно из примера, эти изменения различны по величине: снижение результатов продуктивных агентов ниже, чем увеличение результатов непродуктивных агентов, что приводит к агрегированным усилиям игроков

$$\sum_i^n x_i^* = 3.25 > 3 = \sum_i^n b_i = \sum_i^n x_i^O$$

и суммарным выигрышам игроков

$$\sum_i^n v_i(x^*) \approx 1.21 < 1.5 = \sum_i^n v_i(x^O),$$

или увеличению агрегированных результатов на $\sim 9\%$ и снижению суммарного выигрыша на $\sim 19\%$ относительно социального оптимума. Результаты для ше-

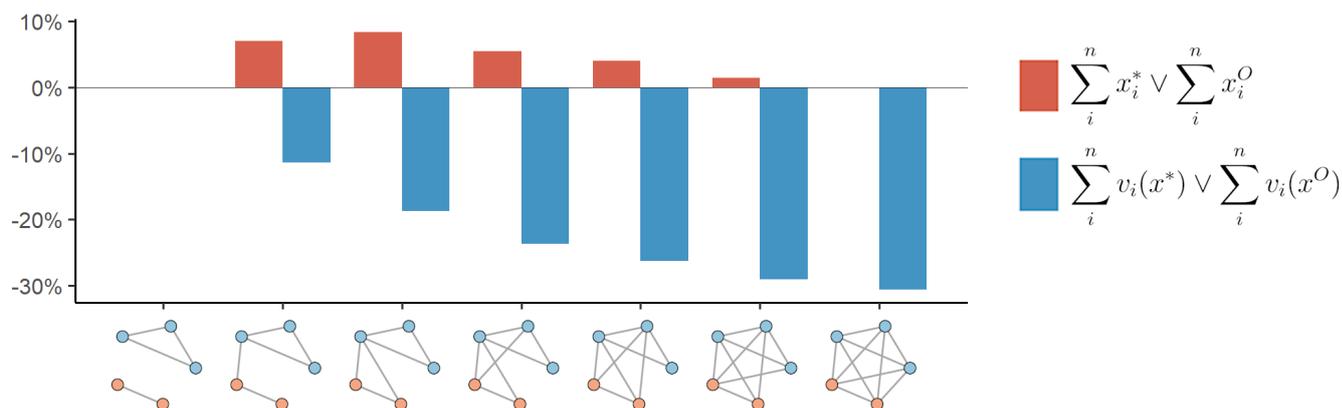


Рисунок 3.10. Различие между суммой выигрышей/агрегированными результатами игроков в равновесии и суммой выигрышей/агрегированными результатами игроков при социальном оптимуме, возникающее при добавлении новых связей в граф (3.36)

сти возможных случаев добавления связей в граф (3.36) представлены на рис. 3.10.

Данный пример показывает, что в случае, когда целевой функцией центра являются агрегированные результаты игроков, путем добавления новых связей центр может достигнуть желаемого результата, что в свою очередь приведет к снижению суммарных выигрышей игроков (или функции общественного благосостояния) относительно социального оптимума. Перспективным направлением дальнейших исследований является разработка такого механизма стимулирование агентов, который бы компенсировал потери игроков при создании новых связей, сохраняя при этом высокий уровень агрегированных результатов.

Переходя к произвольному числу агентов n предположим, что как и в примере выше, пропорция $3/2$ агентов с разной продуктивностью сохраняется с ростом n . На рисунке 3.11 представлена диаграмма размаха для результатов численного моделирования сетевого взаимодействия.

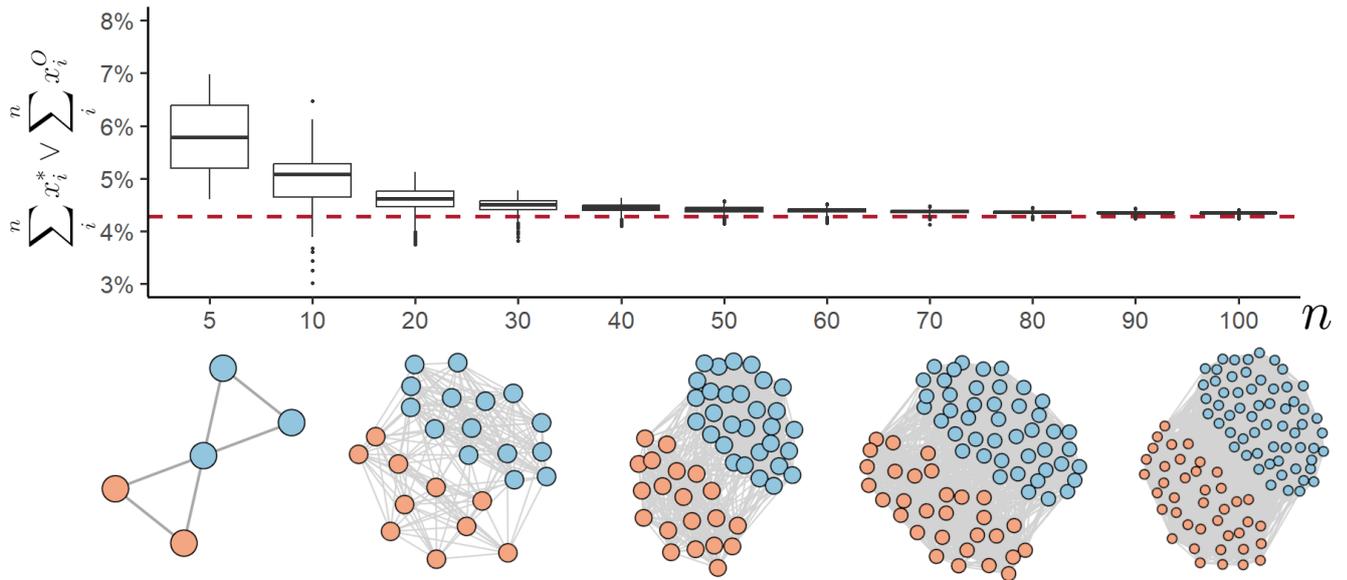


Рисунок 3.11. Различие между агрегированными результатами игроков в равновесии и при социальном оптимуме, возникающее при добавлении новых связей в графы с различным числом агентов n

По оси x представлено число агентов n ; по оси y , как и на рис. 3.10, представлено сравнение агрегированных усилий агентов в равновесии $\sum_i^n x_i^*$ и агрегированных усилий агентов при социальном оптимуме $\sum_i^n x_i^O$. При проведении численного эксперимента использовалась следующая процедура. На первом шаге выбирается число агентов n ; далее, для указанного n генерируется экземпляр стохастической блочной модели на основе (3.33) при $p = p^*$; равновесие в игре на такой сети сравнивается с социальным оптимумом для данного n , равным $\sum_i^n x_i^O = \sum_i^n b_i$. Для $n > 5$ эта процедура повторяется n^2 раз. Важно, что предельный эффект, который можно вычислить, сравнив агрегированные усилия агентов в равновесии (3.33) при $p = p^*$ с агрегированными усилиями при социальном оптимуме, равном $b_1 r_1$, сохраняется с ростом n : для описываемого примера этот эффект равен 4.3%, что на рис. 3.11 отмечено красной пунктирной линией.

3.3.4. Заключение

В данном разделе изучен механизм управления структурой взаимодействия в модели социальных норм на сети, состоящей из двух кластеров с агентами, имеющими различную продуктивность. Основное внимание уделено влиянию структуры сети и уровня конформизма на агрегированные усилия игроков

в равновесии и социальный оптимум.

Проведенный анализ показал, что добавление связей между кластерами агентов с различной продуктивностью способно повысить суммарные усилия игроков, хотя и снижает общий уровень их выигрышей. В частности, показано, что при увеличении числа связей между кластерами происходит перераспределение социальных норм, приводящее к значительному росту усилий агентов с низкой продуктивностью за счет небольшого снижения усилий более продуктивных агентов. Найдено оптимальное значение вероятности связи между кластерами, при котором достигается максимум агрегированных исходов агентов в равновесии. Приведенные пример и численные эксперименты демонстрируют, что даже небольшие изменения в структуре сети способны оказывать значительное влияние на исход игры.

3.4. Выводы по главе 3

Раздел 3.1. посвящен исследованию задачи управления структурой взаимодействия в сравнении с известной задачей стимулирования в игре с эффектом локального агрегирования: несмотря на безусловный позитивный эффект от создания связей на усилия и выигрыш агентов, в разных ситуациях эффективнее использовать разные методы управления. Для предложенной задачи центра найдены условия, при которых выбор управления структурой взаимодействия приведет к лучшим результатам.

Основной результат раздела 3.2 носит методологический характер. Установленная связь с теоретико-игровыми моделями на сетях позволяет использовать разработанный для данной области инструментарий при исследовании рефлексивных игр с точечной структурой информированности. В частности, перспективным направлением дальнейших исследований является применение результатов раздела 3.1 для случая неполной информированности агентов, что позволяют осуществить результаты раздела 3.2.

Раздел 3.3. посвящен анализу задачи управления структурой в модели с эффектом локального усреднения: в отличие от раздела 3.1, в котором эффект локального агрегирования приводил к прямо пропорциональной зависимости усилий и выигрыша агентов от числа связей (чем больше связей, тем выше усилия и выигрыш), наличие связей между агентами может оказывать разнонаправленное влияние на их усилия и выигрыши. Помимо этого, в разделе 3.3.

показана важная взаимосвязь между агрегированными усилиями агентов и общественным благосостоянием в игре с эффектом локального усреднения: в рассмотренном случае решение задачи центра, управляющего структурой, влечет снижение выигрыша игроков, что приводит к вопросу о совместном использовании механизмов стимулирования игроков и управления структурой взаимодействия.

Глава 4. Применение методов управления структурой взаимодействия

Ниже рассмотрены теоретические и практические аспекты использования данных о сетевых характеристиках экономических агентов (коммерческих компаний) для выявления взаимосвязей между экономическими показателями компаний и для оценки рисков в задаче скоринга. Основой исследования служат данные из российской базы бухгалтерской отчетности (РББО) и единого государственного реестра юридических лиц (ЕГРЮЛ). В работе анализируются данные с 2012 по 2021 годы, включающие сотни тысяч связей и уникальных объектов. Важной частью исследования является построение графов взаимосвязей между компаниями: при анализе сетевых эффектов важно учитывать не только прямые, но и косвенные связи между компаниями. Проводится анализ структуры таких сетей, а также выявление эффектов, влияющих на экономическую активность компаний. Основная цель данного раздела – демонстрация методов, благодаря которым появляется возможность использования теоретических результатов о стратегическом поведении взаимосвязанных агентов на практике.

4.1. Отраслевой анализ сетевых эффектов

Сетевой анализ играет ключевую роль в исследовании бенефициарного владения (англ. *beneficial ownership*), предоставляя методы и инструменты для выявления скрытых связей, влияния и структур управления в сложных корпоративных и финансовых системах. Бенефициарный владелец — физическое лицо, владеющее долей участия, прямо или косвенно, что дает ему право на долю дохода или активов корпоративного механизма или возможность контролировать его деятельность или получать от нее выгоду. Сети бенефициарного владения, связанные с субъектами, могут быть сложными и непрозрачными.

Сетевой анализ используется в качестве инструмента для изучения взаимосвязей между членами советов директоров различных компаний. Эти взаимосвязи играют важную роль в корпоративном управлении, влиянии на принятие

решений, формировании коммерческих групп и других формах взаимодействия между компаниями. Использование методов сетевого анализа позволяет выявлять связи и оценивать их влияние на экономические и управленческие процессы. Перекрестное членство в советах директоров (англ. *interlocking directorates*) возникает, когда один человек является членом советов двух или более компаний. Две фирмы имеют прямую взаимосвязь, если директор или руководитель одной фирмы является также директором другой, и косвенную взаимосвязь, если директор каждой из них входит в совет директоров третьей фирмы.

Процедура построения графа связей включает в себя сбор информации о

- узлах сети – ими выступают юридические и физические лица (компании, их директора, владельцы и др.);
- ребрах сети – связях между компаниями (связи управления, владения, и др.).

Данный граф служит основой для анализа сетевых эффектов. В общем случае каждый шаг процедуры, описанной ниже, заслуживает отдельного исследования: существует множество факторов, влияющих на процедуру формирования сети на основе реальных данных, каждый из которых может повлиять на итоговый результат. Поэтому в данной главе представлено, скорее, не полноценное исследование, а проект его возможного дизайна: пример того, как теоретические результаты могут быть использованы на практике.

В основу исследования легли два набора данных: российская база бухгалтерской отчетности (РББО) [87] и сведения из единого государственного реестра юридических лиц (ЕГРЮЛ). Характеристики набора данных из ЕГРЮЛ выглядят следующим образом:

- временной период: с 2002 по 2021 гг.;
- число наблюдений (связей): 24137390;
- число типов связей: 14 (подробнее ниже);
- число уникальных объектов (вершин): 9823474;
- число записей о юр. лицах, владеющих компаниями: 877239;
- число записей о физ. лицах, владеющих компаниями: 22075726.

Пример данных представлен в таблице 4.1. Типы связей возникают на основе справочника¹ категорий участия физических лиц в деятельности юридического лица (таб. 4.2). В дальнейшем будут использованы все типы, не связанные

¹<https://esnsi.gosuslugi.ru/classifiers/1607>

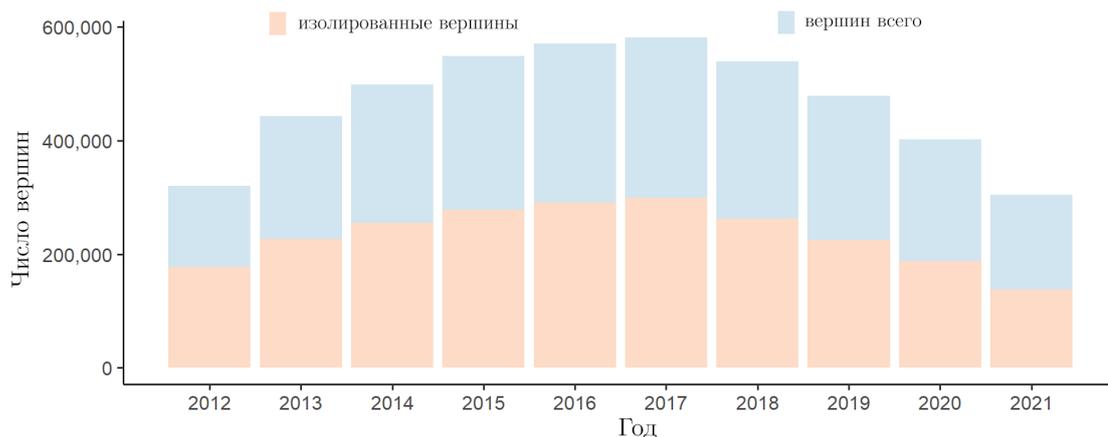


Рисунок 4.1. Статистика числа вершин и числа изолированных вершин в графах

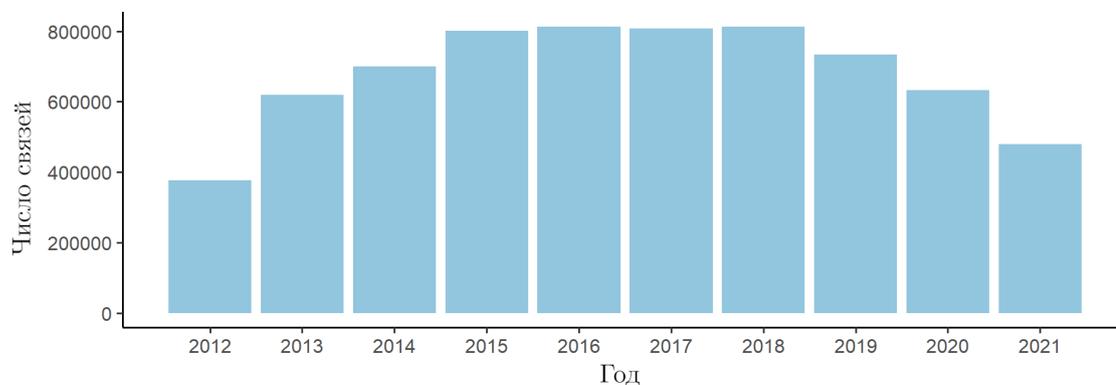


Рисунок 4.2. Статистика числа связей в графах

с процессом ликвидации или внешнего управления организацией.

На основе собранных данных были получены графы, которые условно можно разделить на различные временные интервалы, характеризующиеся актуальными связями. На рисунках 4.1 и 4.2 представлены годовая статистика числа вершин и ребер в графах в период с 2012 по 2021 г.

Статистика демонстрирует, что большая часть связей представляет собой связи между компанией и её владельцем. Хотя по своей природе этот факт вполне объясним и естественен, он негативно сказывается на дальнейшем статистическом анализе взаимосвязей между результатами деятельности участников сети: так как интерес представляет исследование механизмов перетока и распространения экономической активности, с формальной точки зрения проведение анализа взаимосвязи двух компаний, связанных через одного владельца, является невозможным, а практика учреждения компаний другими компаниями является крайне редкой (рис. 4.3).

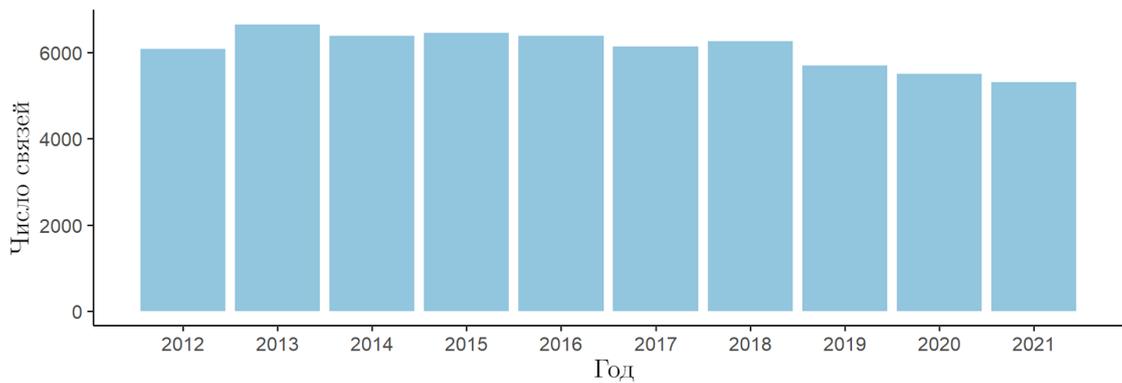


Рисунок 4.3. Число связей, в которых компания являлась учредителем другой компании

Таблица 4.1. Пример таблицы связей между компаниями и владельцами

date	ogrn	founder inn	inn	type	position
2013	10012344321	89012756227	412114361	1	Учредитель
2007	10012345697	163300048548	1641235423	1	Учредитель
2020	10012345697	1680117696	1641235423	2	Директор
2019	10012345697	167302137200	1641235423	1	Учредитель
2005	10012345697	160302594366	1641235423	1	Учредитель
2006	10012345697	163303167409	1641235423	5	Ликвидатор

В этой связи была предпринята процедура формирования сети на основе создания новых связей и исключения из сети физических лиц. Графически данная процедура представлена на рис. 4.4: исходная сеть (слева) трансформируется путем добавления связей между синими вершинами, связанными с красными, и последующим удалением красных вершин (справа). Такая процедура приводит к тому, что большинство вершин графа становятся изолированными (имеют степень 1) (рис. 4.1).

Общая идея подхода к анализу эффектов сетевого взаимодействия состоит в дополнении классических моделей классификации/регрессии вида

$$y = \alpha + f(X, \gamma) + \varepsilon$$

двумя сетевыми компонентами:

$$y = \alpha + z(y, \beta, G) + f(x, \gamma) + z(x, \delta, G) + \varepsilon,$$

где G – матрица связей между агентами, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ – $n \times 1$ вектор наблюдений для зависимой переменной, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – $n \times 1$ вектор наблю-

Таблица 4.2. Типы связей влияния, указанные в справочнике категорий участия физических лиц в деятельности юридического лица

Код	Имя
1	Учредитель (участник) юридического лица
2	Руководитель юридического лица
3	Главный бухгалтер
4	Руководитель ликвидационной комиссии
5	Ликвидатор
6	Конкурсный управляющий
7	Внешний управляющий
8	Иное должностное лицо
9	Представитель управляющей компании
10	Лицо, уполномоченное подписать договор о присоединении
11	Управляющий юридического лица - индивидуальный предприниматель
16	Исполняющий обязанности конкурсного управляющего
17	Исполняющий обязанности внешнего управляющего
18	Участник общества согласно уставу является единоличным исполнительным органом общества (директором)
19	Исполняющий обязанности руководителя юридического лица
20	Представитель, осуществляющий полномочия конкурсного управляющего

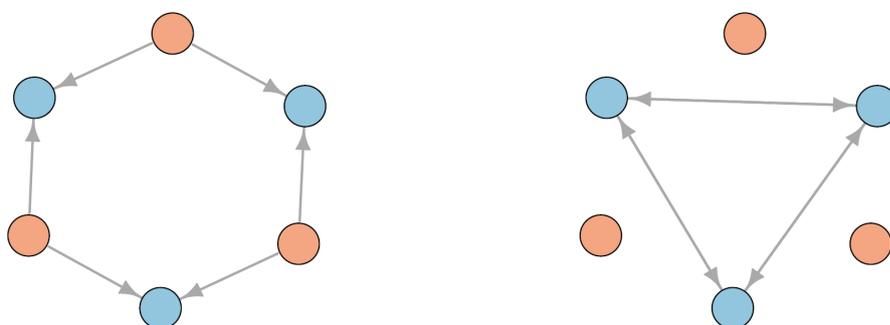


Рисунок 4.4. Пример, демонстрирующий трансформацию исходного графа связей между компаниями (синим) и физическими лицами (красным)

дений для объясняющей переменной², $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$ – случайная ошибка, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ – регрессионные параметры, а

– $z(y, \beta, G)$ - эндогенный (внутренний) эффект окружения: действие агента зависит от действий других агентов;

– $z(x, \delta, G)$ - контекстуальный эффект: действие агента зависит от индивидуальных характеристик других агентов.

При этом, как было показано ранее, корреляция действий и характеристик среды взаимосвязанных агентов может иметь различную функциональную форму – различают следующие функции окружения:

- линейную/нелинейную;
- положительный/отрицательный сетевой эффект;
- локальное агрегирование/усреднение;

Задача состоит в идентификации параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ на реальных данных. Характеристики РББО подробно описаны в исследовании авторов базы данных. В качестве примера ниже использована работа [22], авторы которой исследовали различия в производительности на уровне фирм внутри отраслей. Для этой цели они идентифицировали производственные функции фирм на данных об отчетности компаний: показателях добавленной стоимости, создаваемой фирмой в период времени; объеме капитала фирмы в денежном выражении; объеме затрат на труд фирмы; и показателе инвестиций компаний. Ниже будет исследован вопрос о том, как эти показатели влияют друг на друга в случае, когда взаимосвязаны – имеют общих учредителей, директоров и т. д. Поэтому в дальнейшем, в качестве переменной y будут использованы следующие, логарифмированные финансовые показатели компаний, рассчитанные на основе бухгалтерских балансов.

1. показатель произведенной добавленной стоимости — разница между выручкой и материальными затратами компаний;
2. показатель труда - расходы на оплату труда сотрудников;
3. показатель капитала — балансовая стоимость основных средств;
4. показатель объема инвестиций — разность балансовой стоимости основных средств соседних лет с учетом амортизации (норма амортизации была

²В целях упрощения анализа всюду ниже используется одна переменная в качестве объясняющей, так как основной интерес в исследуемой модели представляет параметр β , характеризующий взаимосвязь зависимых переменных между собой. Однако можно было бы рассмотреть матрицу $X \in \mathbb{R}^{n \times l}$, характеризующую наблюдения l объясняющих переменных.

установлена авторами [22] как 4%).

Данные подготовлены в соответствии с работой [87], в которой авторы воспроизвели исследование [22] на основе базы данных РББО. Отличием является не использование дефляторов, а так же использование первого уровня общероссийского классификатора видов экономической деятельности (ОКВЭД). Важен тот факт, что по своей природе данные об экономической деятельности компаний имеют значительное количество пропусков (подробнее в исследовании авторов) и далеко не всегда покрывают список компаний, возникающий на основе связей между ними. В итоге, после проведенной подготовки данных, возникли следующие наборы данных по годам (таб. 4.3):

Таблица 4.3. Число компаний, используемых в исследовании

Год	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
n	27875	42009	50097	55333	59007	62005	67271	80806	81618	66811

Ниже использована модель локального агрегирования, характеризующая эффект перетока через связи влияния компаний:

$$y = \alpha + \beta Gy + \gamma x + \delta Gx + \varepsilon, \quad (4.1)$$

где в качестве переменной y выступает один из указанных в списке показателей. В соответствии с предложенным в [89] подходом, оценка параметров модели осуществляется нелинейным методом наименьших квадратов (NLS):

$$[\alpha, \gamma, \delta]^T = (\hat{X}^T \hat{X})^{-1} \hat{X}^T y,$$

где $\hat{X} = (I - \beta G)^{-1} X$, $X = [1, x, Gx]$, а β – решение задачи оптимизации:

$$\beta = \arg \min_{\beta} y^T \left[I - \hat{X} \left(\hat{X}^T \hat{X} \right)^{-1} \hat{X}^T \right] y.$$

Как и ранее, наибольший интерес представляет значение коэффициента β , характеризующего силу сетевого эффекта - результаты его идентификации представлены в таблице 4.4 и на рисунке 4.5. В таблице 4.4 в каждой строке приведен год, значение коэффициента β и его стандартной ошибки для указанной в столбце объясняемой переменной, в соответствии с приведенной ранее нумерацией: (1) добавленная стоимость, (2) труд, (3) капитал, (4) инвестиции; p -значения коэффициентов, указанные как *, ** и *** в случаях $p < 0.05$, $p < 0.01$ и $p < 0.001$ соответственно.

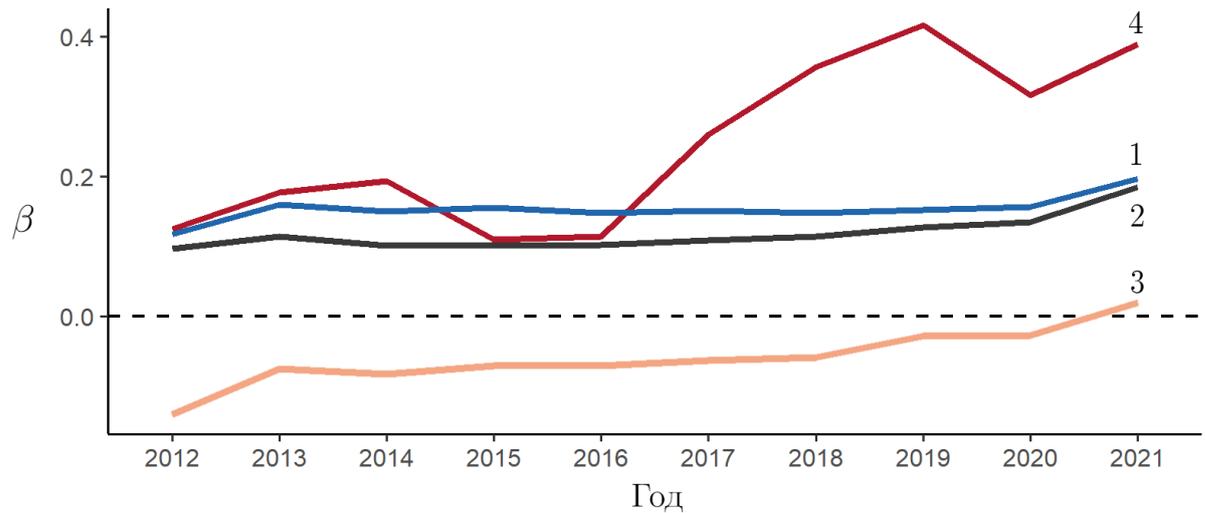


Рисунок 4.5. Значения коэффициента β , идентифицированные на реальных данных

Таблица 4.4. Эндогенный эффект взаимосвязи компаний по годам: значения коэффициента β , идентифицированные на реальных данных

Год	1	2	3	4
2012	0.118*** (0.010)	0.097*** (0.010)	-0.140*** (0.013)	0.125* (0.054)
2013	0.160*** (0.012)	0.114*** (0.008)	-0.075*** (0.015)	0.177*** (0.032)
2014	0.150*** (0.008)	0.101*** (0.008)	-0.082*** (0.010)	0.193*** (0.028)
2015	0.155*** (0.007)	0.101*** (0.008)	-0.071*** (0.009)	0.110*** (0.025)
2016	0.148*** (0.006)	0.102*** (0.007)	-0.070*** (0.009)	0.114* (0.056)
2017	0.151*** (0.006)	0.109*** (0.007)	-0.063*** (0.009)	0.260*** (0.023)
2018	0.148*** (0.006)	0.114*** (0.007)	-0.058*** (0.008)	0.356*** (0.031)
2019	0.152*** (0.008)	0.127*** (0.006)	-0.028*** (0.008)	0.416* (0.193)
2020	0.156 (0.354)	0.134*** (0.006)	-0.027* (0.011)	0.316*** (0.031)
2021	0.197*** (0.024)	0.185*** (0.008)	0.020 (0.011)	0.389*** (0.034)

При анализе экономических кластеров рассмотрим случай тех же модели и метода идентификации, но идентифицируем параметры для каждого кластера независимо. Тогда

$$y(k) = \alpha_k + \beta_k G(k)y(k) + \gamma_k x(k) + \delta_k Gx(k) + \varepsilon,$$

где индекс k отражает использование данных о тех компаниях и связях между ними, основной вид деятельности которых соответствуют k -ому типу деятельности в соответствии с классификатором.

В приложении представлена таблица с результатами идентификации модели на реальных данных об экономической активности компаний за 2019 г. В каждой строке приведено имя кластера (первый уровень классификатора видов экономической деятельности), значение коэффициента β и его стандартной ошибки для указанной в столбце объясняемой переменной, в соответствии с приведенной ранее нумерацией.

Таким образом результаты, полученные на основе реальных данных, приводят к постановке задачи управления структурой взаимодействия, в точности совпадающей с использованной при исследовании задач управления теоретическими моделями в главе 2. Так как проблематика идентификации таких моделей сохранится и в следующем разделе, посвященном анализу рисков в задаче оценке компаний, обсуждение качества полученных оценок и возникающих при этом методологических трудностей приведено в заключении к данной главе.

4.2. Сетевые эффекты в задаче оценки коммерческих компаний

Оценка (или «скоринг») коммерческих компаний — это процесс оценки рисков или потенциала компаний, часто используемый в кредитовании, оценке контрагента, мониторинге финансовых операций и др. Существуют различные виды математических и алгоритмических скоринговых моделей, используемых для оценки банкротства, мошенничества или поведенческих активности клиентов финансовых организаций [23]. Сетевые эффекты могут способствовать повышению точности скоринга, поскольку позволяют учитывать связи между компаниями, которые могут оказывать существенное влияние на их рискованный профиль.

Одним из успешных примеров может служить исследование АО «Газпромбанк» [20] в котором анализ связей осуществлялся методами социального сете-

вого анализа: числовые метрики, описывающие эти связи (такие как степень узла, расстояние до других вершин, число соседей разного типа и т. д.), в дальнейшем были использованы для решения задачи оценки корпоративных клиентов и привели к следующим результатам:

- количество ближайших соседей (вершин на расстоянии 1) компании гораздо лучше характеризует эту компанию, чем количество более дальних соседей;

- для показателей «Доля компаний с низким рейтингом» и «Доля компаний-банкротов» оптимальный размер круга равен 3 (вершин на расстоянии 3), а для показателей «Доля закрытых компаний», «Доля новообразованных компаний» — 7 (вершин на расстоянии 7).

При учете указанных показателей в модели для оценки субъектов малого и среднего предпринимательства авторы добились улучшения индекса Gini – показателя качества модели – на 11 единиц по сравнению с моделью, построенной только с использованием показателей, рассчитанных на финансовой отчетности.

В общем случае эффект взаимосвязи между действиями агентов можно определить как «эффект окружения» или «сетевой эффект». На основе информации о формальных связях между агентами проводится попытка выявить взаимосвязь между принятием решений агентами и индивидуальными характеристиками агентов: показателями финансовой/бухгалтерской отчетности, уровнем риска и др. Ниже рассмотрена задача оценки вероятности дефолта компаний с использованием данных о взаимосвязи между ними.

В качестве источника информации о несостоятельности компаний используется справочник сведений о правоспособности (статусе) юридического лица³, фрагмент которого представлен в таблице 4.5. Статистика числа компаний, обладающих перечисленными статусами, представлена в таблице 4.6

В качестве объясняющей переменной будут использованы следующие, логарифмированные финансовые показатели компаний, рассчитанные на основе бухгалтерских балансов и являющихся кандидатами на значимые факторы для определения несостоятельности компании:

1. прибыль компании;
2. рентабельность компании;

³<https://esnsi.gosuslugi.ru/classifiers/1609>

Таблица 4.5. Использованные в исследовании статусы компании

Код	Статус
101	Находится в стадии ликвидации
113	В отношении юридического лица возбуждено производство по делу о несостоятельности (банкротстве)
114	В отношении юридического лица в деле о несостоятельности (банкротстве) введено наблюдение
115	В отношении юридического лица в деле о несостоятельности (банкротстве) введено финансовое оздоровление
116	В отношении юридического лица в деле о несостоятельности (банкротстве) введено внешнее управление
117	Юридическое лицо признано несостоятельным (банкротом) и в отношении него открыто конкурсное производство

Таблица 4.6. Число компаний, получивших статусы из таблицы 4.5 в указанный год

Год	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
n	328	431	661	1173	1889	3176	4087	6740	9559	28329

3. коэффициент текущей ликвидности компании;

4. отношение краткосрочных и долгосрочных кредитов к собственному капиталу компании.

Эти данные доступны для еще меньшего числа компаний, что в конечном итоге приводит к рассмотрению наиболее представительного случая: данных за 2020 год с числом наблюдений (компаний) равным 402109, для которых доступна информация о 1716 компаниях, заявивших о своей несостоятельности в 2021 г. Полная таблица со статистикой наблюдений по кластерам представлена в приложении, в таблице 4.7 – фрагмент таблицы для наиболее крупных кластеров. В ней k – индекс кластера, n_v – число компаний в кластере, n_e – число связей между компаниями в кластере, а n_s – число несостоятельных компаний.

Воспользовавшись результатами [89], ниже идентифицируется модель линейной вероятности (англ. linear probability model). Эта модель представляет собой простейшую вероятностную постановку, в которой вероятность может быть оценена методом наименьших квадратов. В данном случае $y_i = 0$ отражает действующую компанию, а $y = 1$ – компанию, ликвидированную или заявившую о своей несостоятельности годом позднее. Задача состоит в идентификации пара-

Таблица 4.7. Число компаний в каждом из кластеров, получивших статусы из таблицы 4.5

k	C	F	G	H	L	M
n_v	42861	48371	120836	21248	44066	35809
n_e	18100	19467	121629	11000	70832	14186
n_s	152	295	533	101	178	138

метров ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) на реальных данных для повышения качества имеющейся модели оценки компаний:

$$y_{\text{статус}} = \alpha + z(y, \beta, G) + \gamma x_{\substack{1, 2, 3 \\ \text{или } 4}} + z(x, \delta, G) + \varepsilon.$$

Параметры ограничены условием $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ и получают следующую интерпретацию: на сколько изменится вероятность компании быть несостоятельной, будучи связанной с несостоятельной компанией (параметр β), либо при увеличении на 1% своего показателя x (параметр γ), либо того же показателя другой компании, связанной с данной (параметр δ). При этом, рассмотрим различные варианты спецификации модели сетевого эффекта:

– для модели с эффектом локального усреднения – вероятность быть несостоятельным зависит от среднего числа несостоятельных соседей по сети (эндогенный эффект) и их средних характеристик (контекстуальный эффект):

$$z(y, \beta, G) = \beta \sum \frac{g_{ij}}{d_i} y_j, \quad z(x, \delta, G) = \delta \sum \frac{g_{ij}}{d_i} x_j;$$

– для модели с эффектом локального агрегирования – вероятность быть несостоятельным зависит от общего числа несостоятельных соседей по сети (эндогенный эффект) и их агрегированных характеристик (контекстуальный эффект):

$$z(y, \beta, G) = \beta \sum g_{ij} y_j, \quad z(x, \delta, G) = \delta \sum g_{ij} x_j$$

Как и ранее, идентификация параметров проводится с использованием нелинейного метода наименьших квадратов. Во всех случаях коэффициенты β и γ оказались не значимы: эндогенный эффект в распространении статуса компании по сети либо отсутствует, либо незначителен. Иные результаты получены для контекстуального эффекта, значимость коэффициента при котором

Таблица 4.8. Контекстуальный эффект взаимосвязи компаний по отраслям: значения коэффициента δ , идентифицированные на реальных данных об экономической активности компаний в 2020 г.

k	Локальное усреднение				Локальное агрегирование			
	1	2	3	4	1	2	3	4
C	-0.28 (0.274)	-0.97 (0.750)	0.10 (0.205)	-0.13 (0.242)	-0.07*** (0.003)	0.09*** (0.000)	0.08*** (0.001)	-0.08*** (0.006)
F	0.64*** (0.102)	0.61** (0.220)	0.07 (0.128)	0.25* (0.117)	0.11*** (0.001)	0.02*** (0.000)	-0.01 (0.050)	-0.00 (0.033)
G	0.25 (0.152)	-0.07 (0.249)	0.02 (0.104)	-0.10 (0.105)	-0.11*** (0.001)	-0.12*** (0.003)	-0.16*** (0.001)	-0.18*** (0.000)
H	0.05 (0.309)	-0.23 (0.694)	0.00 (0.246)	-0.21 (0.322)	-0.09 (0.103)	-0.01 (0.062)	-0.14*** (0.017)	-0.23*** (0.007)
L	-0.11 (0.366)	-0.39 (0.675)	-0.53* (0.228)	-0.43 (0.218)	0.11*** (0.000)	0.11*** (0.000)	0.11*** (0.000)	0.11*** (0.000)
M	-0.59 (0.330)	-0.13 (0.380)	-0.57* (0.247)	-0.49 (0.258)	0.11*** (0.000)	0.10*** (0.000)	0.28*** (0.000)	0.10*** (0.000)

варьируется от кластера к кластеру и между моделями с эффектами усреднения и агрегирования. Полные результаты представлены в приложении, а в таблице 4.8 приведены результаты для наиболее крупных кластеров.

Основной технической особенностью сетевых моделей идентификации является эндогенность переменных, входящих в регрессионное уравнение в правой части. Проблеме эндогенности в линейных моделях посвящено большое число исследований (см., например, обзоры [3, 38]). В частности, проблема эндогенности в сетевых моделях в зарубежной литературе получила название «reflection problem» [193] (см. также обзоры [56, 92]). В ряде работ показано, что проблема эндогенности разрешается самой структурой взаимодействия G , а идентификация параметров моделей проводится с использованием двухшагового МНК или моделей нелинейной регрессии. При этом для борьбы с эндогенностью используются либо модели с фиксированными эффектами, либо модели с инструментальными переменными. В случае нелинейной регрессии использование фиксированных эффектов технически затруднено, а в случае двухшагового МНК с инструментальными переменными тесты, оценивающие качество инструментов (англ. overidentifying restrictions test), как правило говорят об их слабости. Соответственно, высокие показатели значимости параметров регрессии потенциаль-

но могут говорить о том, что проблема эндогенности в полученных результатах не решена. Изучение вопросов реализации моделей нелинейной регрессии, метода инструментальных переменных и методов оценки качества используемых инструментов применительно к сетевым моделям является активной областью исследований. Эти вопросы заслуживают отдельного внимания и не являются предметом проведенного исследования: основной целью являлась демонстрация методов, благодаря которым появляется возможность использования теоретических результатов о стратегическом поведении взаимосвязанных агентов на практике.

Аналогичные рассуждения справедливы и для случая сетевой модели оценки риска несостоятельности компании, которые вкуче с существенно несбалансированной выборкой приводят к смещенным и, вероятно, завышенным оценкам регрессионных параметров. Как показано в [33], в масштабах всей экономики банкротство является редким событием: в среднем доля таких компаний составляет около 1%, что делает некорректным применение стандартных эконометрических методов, а особую значимость имеют подходы к построению моделей на основе несбалансированных выборок и методы предсказания редких событий.

Все это приводит к особой специфике применения полученных результатов на практике и выборе инструментов реализации. В частности, использование систем управления графовыми базами данных позволяет эффективно применить результаты моделирования в качестве инструмента поддержки принятия решений, обеспечивая возможность наглядного исследования каждого отдельно взятого случая, при этом акцентируя внимание на природе связей и разнообразии сетевых эффектов.

Имея в распоряжении всю информацию, полученную статистическими методами, практическое применение идентифицированных коэффициентов осуществляется посредством использования графовой базы данных. Помимо связей владения, в данном контексте существуют множество других типов связей, которые возможно установить между компаниями: географические, виртуальные (адрес электронной почты, сайт компании и др.), совместное участие в коммерческой деятельности или специфических отраслевых классификаторах. Учет связей различной природы позволяет уточнить существующие модели оценки компаний, при этом графовое представление данных и инструменты

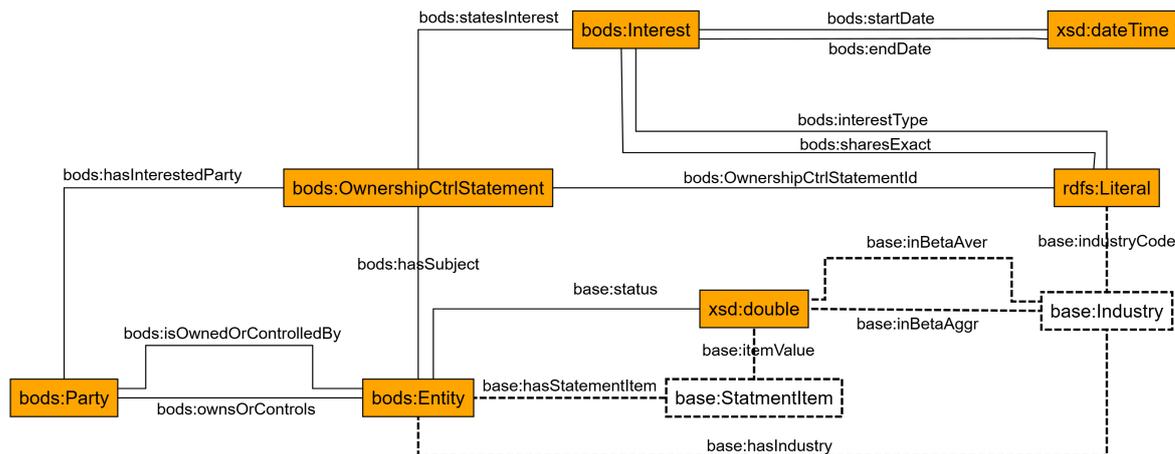


Рисунок 4.6. Онтология, используемая для создания графовой базы данных

работы с ними помогают избежать излишнего обобщения полученных результатов и акцентируют внимание на индивидуальных показателях и отдельных связях между компаниями.

В рамках внедрения полученных в диссертационной работе результатов была разработана база знаний (или граф знаний, англ. knowledge graph) описывающая структуру взаимосвязей между компаниями в формате RDF (англ. Resource Description Framework). Полученная база данных реализована в виде RDF-хранилища, осуществляющего обработку запросов на языке SPARQL (англ. SPARQL Protocol and RDF Query Language) – инструмента для семантического поиска, позволяющего извлекать информацию и выполнять сложные запросы. Такой подход подразумевает трансформацию исходного набора данных, которую можно условно разделить на два этапа:

1. предобработка – очистка и преобразование данных;
2. создание RDF-хранилища – структурированного набора данных на основе онтологической модели.

Для определения сущностей и отношений между ними используется онтологическая модель, основанная на RDF формате базы данных BODS (Beneficial Ownership Data Standard)⁴ которая позволяет моделировать различные отношения между компаниями. Онтология корпоративных связей, учитывающая наличие индивидуальных характеристик (показателей компании и типов связей), представлена на рис. 4.6.

В дополнение к имеющимся в RDF BODS классам (отмечены оранжевым)

⁴<https://github.com/openownership/bodslid>

в онтологии присутствую классы, отражающие наличие финансовых показателей компании («StatementItem»), отрасль, которой принадлежит компания («Industry»), а также дополнительные отношения между классами (дополнительные классы и отношения отмечены пунктирными линиями и контуром). Онтология использует различные пространства имён для описания объектов и их взаимосвязей: в основе лежит технология, обеспечивающая структурированное представление информации, что делает возможной интеграцию с другими системами и базами знаний.

Ключевая особенность онтологии — использование паттерна промежуточных сущностей для моделирования сложных отношений. Вместо прямых связей между компаниями вводятся специальные структуры (классы и отношения между ними), позволяющие учитывать детализированную информацию о взаимосвязях, характеристиках компаний, типов управления и др. Визуально RDF-граф представляет собой ориентированный граф, в котором узлами являются субъекты и объекты, а ребрами – предикаты, которые соединяют узлы и задают семантические отношения между ними. Вместе они образуют триплеты (англ. RDF Triples) «субъект – предикат – объект»: субъект – это начальная точка (узел, из которого исходит связь), предикат – это связь (ребро), определяющая тип отношения, а объект – это конечная точка (узел, на который направлено ребро).

Пример того, какой вид в базе знаний приобретает исходный граф связей между компаниями, построенный в разделе 4.1., представлен на рисунке 4.7. Слева – исходный граф связей, где синим отмечены вершины со статусом «0», оранжевым – со статусом «1», а связь между узлами означает либо участие одной компании в роли учредителя другой, либо наличие общего учредителя-физического лица. В базе знаний вершины графа представляют собой объекты классов: как и ранее, вершины синего и оранжевого цвета представляют собой объекты класса «Entity», при этом теперь они не связаны напрямую. Связь между компаниями определяется, с одной стороны, дополнительным классом, характеризующим информацию об участии в учреждении компании (объекты этого класса отмечены номерами), а с другой – отношениями между классами (их).

Продолжив рассмотрение примера на рис. 4.7, можно показать качественные различия между подходами к анализу взаимосвязей. Семь участвующих в

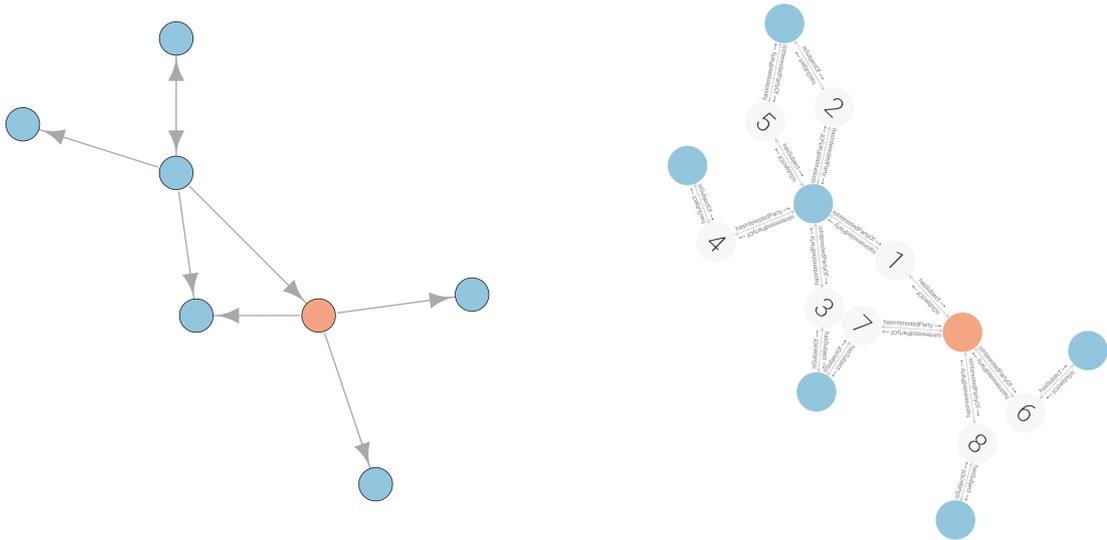


Рисунок 4.7. Сопоставление различных представлений графа взаимосвязей: визуализация графа, построенного на основе матрицы смежности (слева) и фрагмент графа знаний (справа)

примере компаний представляют собой связную компоненту графа всех связей владения: ни одна другая компания не является учредителем изображенных на рисунке и доступная исследователю информация ограничивается лишь набором данных об указанных агентах. В противовес к этому, благодаря подходу на основе структурированных данных и использования более сложных представлений объектов и взаимосвязей между ними, появляется возможность исследования более разнообразных зависимостей между компаниями: на рис. 4.8 представлена часть развернутого вокруг исходных семи компаний графа знаний. В исследуемом наборе данных содержится информация о 6390 компаниях, которые теперь образуют полный граф, состоящий из взаимосвязей между компаниями, отраслями, количественными показателями компаний и идентифицированных статистических показателей, который состоит из 77024 RDF-триплетов.

Разработанная в рамках данной работы онтология и база знаний о связях влияния и показателях компаний продемонстрировали перспективность подхода, позволяя учитывать не только количественные показатели деятельности компаний, но и структуру взаимодействия компаний, а также взаимозависимости между различными индивидуальными характеристиками.

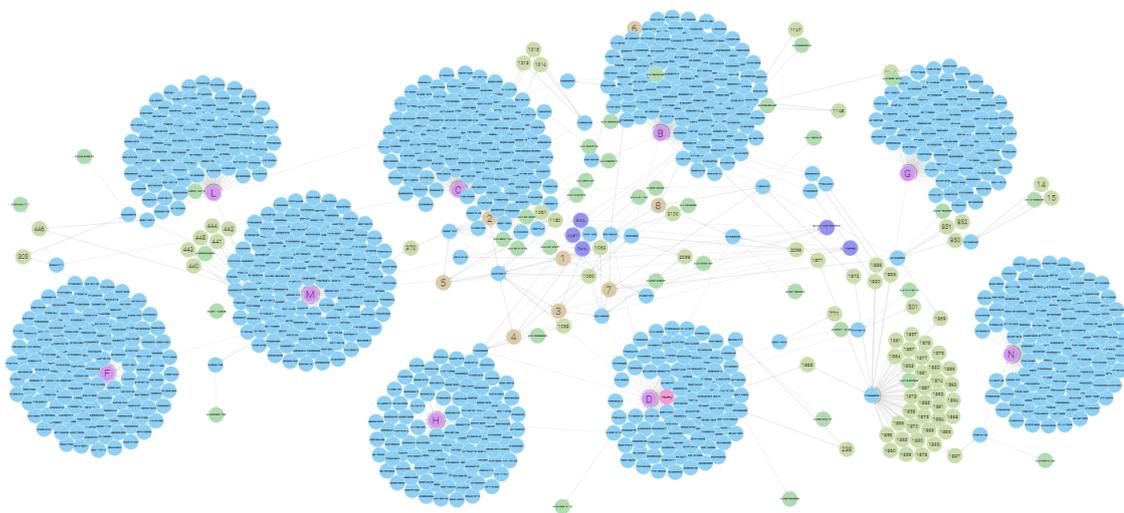


Рисунок 4.8. Взаимосвязи между экземплярами классов в графовой базе данных для примера 4.7

4.3. Выводы по главе 4

В сетевых моделях идентификации ключевой технической особенностью является эндогенность переменных: проблема эндогенности в линейных моделях является активной областью исследований, а для сетевых моделей в зарубежной литературе она известна как «reflection problem». Если параметры регрессии демонстрируют высокую значимость, это может свидетельствовать о нерешённости проблемы эндогенности, что приводит к искажениям в результатах.

Эта же проблема актуальна и для сетевых моделей, применяемых в оценке риска банкротства компаний. В сочетании с несбалансированной выборкой это может приводить к смещённым и завышенным оценкам регрессионных коэффициентов. Применение графовых баз данных позволяет улучшить интерпретацию полученных результатов, обеспечивая визуализацию сетевых взаимосвязей и анализ влияния различных факторов. Такой подход повышает эффективность принятия решений, поскольку позволяет детально изучать структуру связей и учитывать сложные сетевые эффекты. В рамках внедрения полученных в диссертационной работе результатов (Приложение Б) были разработаны онтология и прототип базы данных об оценке риска контрагентов на основе взаимосвязей между ними. Используя описанные выше данные на основе онтологии создана модель представления данных и RDF-хранилище, в совокупности образующие базу знаний о связях влияния и экономических показателях компаний.

Заключение

В диссертационной работе, в рамках исследования стратегического взаимодействия агентов на сети, были разработаны методы управления структурой взаимодействия в теоретико-игровых моделях на сетях с линейным наилучшим ответом. Были рассмотрены игры, моделирующие стратегическое поведение агентов и предоставляющие теоретическую основу для объяснения возникновения сетевых эффектов и механизмов влияния узлов сети друг на друга, демонстрирующие взаимосвязь между структурой сети, равновесием в игре и задачами управления. Были получены следующие результаты:

1. Классификация моделей, классификация и формализация постановок задач управления для теоретико-игровых моделей с линейным наилучшим ответом, которые позволяют единообразно описывать и анализировать различные подходы к описанию сетевого взаимодействия и решения задач управления. Рассмотрены концепции эффектов окружения и сетевых экстерналий, определяющих зависимость поведения одного агента от действий связанных с ним соседей. Исследованы различные классы игр: с эффектами стратегической дополнителности и заменимости, а также модели локального агрегирования и усреднения. Проанализированы задачи управления в таких моделях, включая задачи анализа социального оптимума и вмешательства центра (сетевые интервенции). Показано, что сетевые модели стратегического взаимодействия могут эффективно использоваться для анализа социальных и экономических систем, а методы управления позволяют устранить неэффективность, вызванную экстерналиями, и улучшить результаты взаимодействия агентов.

2. Формализована и исследована задача управления структурой взаимодействия в линейно-квадратичной игре. Полученные результаты позволяют оценить эффективность выбора различных методов управления в задаче центра. Для модели случайного графа Эрдеша – Реньи показано, что, в отличие от структурного управления, эффективность целевых интервенций не зависит от величины сетевого эффекта и пропорциональна имеющемуся бюджету, в явном виде найдено критическое значение сетевого эффекта, выше которого эффективность структурного управления превышает эффективность целевых транс-

фертов. Исследованы различные, в т. ч. комбинированные стратегии управления в случае структуры сети, состоящей из взаимодействующих групп агентов.

3. Разработана модель стимулирования в рефлексивной игре с точечной структурой информированности, которая позволяет наиболее полно описать равновесие и провести сравнительное описание решений задач управления для случаев полной и неполной информированности агентов. Предложенный подход позволяет интерпретировать пример рефлексивной игры из [35] как игру локального общественного блага с неполной информированностью агентов и описать в матричном виде равновесие в рефлексивной игре с точечной структурой информированности и линейным наилучшим ответом. Кроме того, на основе полученных в данной работе результатов появляется возможность провести сравнительное описание решений задач управления для случаев общего знания и неполной информированности агентов. В качестве примера приведена формулировка задачи информационного управления, аналогичной задаче стимулирования в игре локального общественного блага на сети: в работе показан пример механизма сообщения информации центром, когда случай общего знания и случай неполной информированности агентов в пределе дают одинаковый ответ.

4. Формализована и исследована задача управления структурой взаимодействия в игре социальных норм позволяет получить описание свойств модели и оценить эффективность выбора различных методов управления. Проведенный анализ показал, что добавление связей между кластерами агентов с различной продуктивностью способно повысить суммарные усилия игроков, хотя и снижает общий уровень их выигрышей. В частности, показано, что при увеличении числа связей между кластерами происходит перераспределение социальных норм, приводящее к значительному росту усилий агентов с низкой продуктивностью за счет небольшого снижения усилий более продуктивных агентов. Найдено оптимальное значение вероятности связи между кластерами, при котором достигается максимум агрегированных исходов агентов в равновесии. Приведенные пример и численные эксперименты продемонстрировали, что даже небольшие изменения в структуре сети способны оказывать значительное влияние на исход игры.

Литература

1. *Альпин Ю.А.* Теорема Харари о знаковых графах и обратимость цепей Маркова // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXVI, Зап. научн. сем. ПОМИ, 419, ПОМИ, СПб., 2013, 5–15.
2. *Альпин Ю.А., Башкин И.В.* Неотрицательные цепные матрицы и условие Колмогорова // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXXIV, Зап. научн. сем. ПОМИ, 504, ПОМИ, СПб., 2021, 5–20.
3. *Анатольев С.* Оптимальные инструменты // Квантиль. 2007. № 2. С. 61–69.
4. *Гераськин М.И.* Обзор новейших достижений в теории игр олигополии // Автоматика и телемеханика. 2023. № 6. С. 3–25.
5. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: ООО Издательская фирма «Физико-математическая литература», 2010.
6. *Губанов Д.А., Петров И.В.* Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч.1. От основного понятия к математическим моделям формирования // Проблемы управления. 2021. № 1. С. 15–23.
7. *Губанов Д.А., Петров И.В.* Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч.2. Математические сетевые модели формирования сообществ // Проблемы управления. 2021. № 2. С. 18–32.
8. *Губанов Д.А., Петров И.В., Бойко Л.М.* Информационные сообщества в социальных сетевых структурах. Ч.3. Прикладные аспекты выявления и анализа сообществ // Проблемы управления. 2021. № 3. С. 16–24.
9. *Губанов Д.А., Петров И.В., Чхартишвили А.Г.* Многомерная модель динамики мнений в социальных сетях: индексы поляризации // Проблемы управления. 2020. № 3. С. 26–33.
Gubanov D.A., Petrov I.V., Chkhartishvili A.G. Multidimensional model of

- opinion dynamics in social networks: polarization indices // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82. P. 1802–1811.
10. *Губко М.* Задачи управления организационными системами с сетевым взаимодействием участников // Автоматика и телемеханика. 2004. № 8. С. 102–129.
 11. *Губко М.В.* Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I. Обзор теории сетевых игр // Автоматика и телемеханика. 2004. № 8. С. 115–132.
 12. *Губко М.В.* Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. II. Задачи стимулирования // Автоматика и телемеханика. 2004. № 9. С. 131–148.
 13. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: СИНТЕГ, 2002.
 14. *Дирк М.* Экономические эффекты «перетока» результатов научно-технической и инновационной деятельности // Форсайт. 2012. Т. 6, № 4. С. 20–31.
 15. *Дорофеева Ю.А.* Теоретико-игровые модели динамики мнений: автореф... дис. кан. ф.-м. наук. Петрозаводск.: 2021. – 30с.
 16. *Дубовский С., Дюкалов А., Иванов Ю., Токарев В., Уздемир А., Фаткин Ю.* О построении оптимального экономического плана // Автоматика и телемеханика. 1972. № 8. С. 1336–1349.
 17. *Дубовский С., Уздемир А.* Критерии оптимальности и вариационные подходы в динамических моделях экономики // Автоматика и телемеханика. 1974. № 6. С. 951–958.
 18. *Дюкалов А., Иванов Ю., Токарев В.* Теория управления и экономические системы. I. Проблема описания // Автоматика и телемеханика. 1974. № 5. С. 797–810.
 19. *Дюкалов А., Илютович А.* Асимптотические свойства оптимальных траекторий экономической динамики // Автоматика и телемеханика. 1973. № 3. С. 423–434.

20. *Жидков Ю., Кулик В.* Применение графового анализа в кредитовании МСП // Банковское кредитование. 2018. № 3. С. 4—28.
21. *Жилякова Л.Ю., Кузнецов О.П.* Теория ресурсных сетей. М.: Издательский Центр РИОР, 2017.
22. *Каукин А.С., Жемкова А.М.* Аллокация ресурсов и производительность российской промышленности // Экономическая политика. 2023. Т. 18, № 5. С. 68—99.
23. *Клименко Д.А., Мунерман И.В.* Применение систем компьютерной математики для построения скоринговых моделей // Системы компьютерной математики и их приложения. 2017. № 18. С. 84—87.
24. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. I. Асинхронные модели консенсуса // Автоматика и телемеханика. 2019. № 4. С. 3—40.
25. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах II. Метод совместного спектрального радиуса // Автоматика и телемеханика. 2019. № 5. С. 3—31.
26. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах III. Конструктивная устойчивость и стабилизируемость // Автоматика и телемеханика. 2019. № 6. С. 3—27.
27. *Креховец Е.В., Польдин О.В.* Социальные сети студентов: факторы формирования и влияние на учебу // Вопросы образования. 2013. № 4. С. 121—138.
28. *Кузьминов Я. И., Бендукидзе К. А., Юджевич М. М.* Курс институциональной экономики. М.: ГУ-ВШЭ, 2006.
29. *Кукушкин Н.* Равновесие по Нэшу в играх с аддитивным агрегированием // Журнал Экономика и математические методы (ЭММ). 2000. Т. 36, № 4. С. 58—66.
30. *Мазалов В., Чиркова Ю.* Сетевые игры. СПб: Лань. 2018.

31. *Матвеевко В.Д., Королев А.В.* Равновесия в сетевой игре с производством и с экстерналиями знаний // Математическая теория игр и её приложения. 2016. Т. 8, № 1. С. 106—137.
32. *Матвеевко В.Д., Королев А.В.* Типология сетей и равновесия в сетевой игре с производством и экстерналиями знаний // Математическая теория игр и её приложения. 2017. Т. 9, № 3. С. 64—92.
33. *Могилат А.* Оценка финансовой устойчивости российских промышленных компаний, или О чем говорят банкротства // Вопросы экономики. 2019. № 3. С. 101—118.
34. *Новиков Д.А.* Игры и сети // Математическая теория игр и её приложения. 2010. Т. 2, № 1. С. 107—124.
35. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Информационное равновесие: точечные структуры информированности // Автоматика и телемеханика. 2003. № 10. С. 111—122.
36. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексия и управление. М.: Издательство физико-математической литературы. 2012.
37. *Опоицев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. Наука, 1977.
38. *Паган А.* Слабые инструменты // Квантиль. 2007. № 2. С. 71—81.
39. *Петров И.В.* Задача стимулирования в рефлексивной игре Курно с точечной структурой информативности / Труды 20-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2024, Новочеркасск). Новочеркасск: Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, 2024. С. 110—114.
40. *Петров И.В.* Структурные интервенции в играх с линейным наилучшим ответом / Материалы 5-го Российского экономического конгресса «РЭЖ–2023» Том II тематическая конференция «Микроэкономика и теория игр» (Москва, 2023). М.: Институт экономики РАН, 2023.

41. *Петров И.В.* Структурные интервенции в играх с линейным наилучшим ответом / Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ, посвященной 115-летию Л.Д. Ландау (Москва, 2023). М.: МФТИ, 2023. С. 9–12.
42. *Петров И.В.* Управление структурой взаимодействия и задача противоборства в играх с линейным наилучшим ответом / Труды 18-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2022, Челябинск). Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2022. С. 518–522.
43. *Петров И.В.* Управление в играх на случайных графах / Труды 17-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2021, Москва). М.: ИПУ РАН, 2021. С. 261–266.
44. *Петров И.В.* Анализ эффективности методов управления в играх на случайных графах / Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ «Радиотехника и компьютерные технологии» (Москва, 2020). М.: МФТИ, 2020. С. 24–25.
45. *Петров И.В.* О свойствах равновесных конфигураций в играх формирования сетей / Труды 16-й Всероссийской школы-конференция молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2019, Тамбов). Тамбов: ФГБОУ ВО ТГТУ, 2019. С. 342–344.
46. *Петров И.В.* Социальный капитал и экономические результаты: теоретико-игровой анализ / Материалы 2-й Октябрьской международной научной конференции по проблемам теоретической экономики «Человеческие качества и человеческое поведение в экономической теории» (Москва, 2020). М.: ИЭ РАН, 2020. С. 80–87.
47. *Петров И.В.* Социальный капитал и экономические результаты: теоретико-игровой анализ // Человеческие качества и человеческое поведение в экономической науке (Под ред. В.С. Автономова и А.Я. Рубинштейна). 2022. С. 215–233.
48. *Петров И.В.* Сравнительный анализ игр формирования сетей, обладающих потенциальной функцией / Труды 62-й Всероссийской научной конферен-

- ции МФТИ (Москва, 2019). Москва – Долгопрудный – Жуковский: МФТИ, 2019.
49. *Петров И.В., Чхартишвили А.Г.* Задача стимулирования в рефлексивной игре с точечной структурой информированности // Проблемы управления. 2024. № 5. С. 42–48.
 50. *Полтерович В.М.* Интернет, гражданская культура и эволюция механизмов координации // Вестник ЦЭМИ РАН. – 2018. – Т. 1. – Выпуск 1. URL: <https://semi.jes.su/s111111110000102-5-1/>.
 51. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // Автоматика и телемеханика. 2016. № 10. С. 3–39.
 52. *Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г.* Об одной модели информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами: сборник трудов. 2010. № 31. С. 265–275.
 53. *Юджевич М., Подколзина Е., Рябинина А.* Основы теории контрактов: модели и задачи. М.: ГУ ВШЭ. 2002.
 54. *Acemoglu D., Carvalho V.M., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.* The network origins of aggregate fluctuations // *Econometrica*. 2012. Vol. 80, no. 5. P. 1977–2016.
 55. *Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.* Networks, shocks, and systemic risk : tech. rep. / National Bureau of Economic Research. 2015.
 56. *Advani A., Malde B.* Methods to identify linear network models: a review // *Swiss journal of economics and statistics*. 2018. Vol. 154. P. 1–16.
 57. *Al Taha F., Rokade K., Parise F.* Gradient dynamics in linear quadratic network games with time-varying connectivity and population fluctuation // 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE. 2023. P. 1991–1996.
 58. *Algan Y., Dalvit N., Do Q.-A., Le Chapelain A., Zenou Y.* Friendship networks and political opinions: A natural experiment among future French politicians // CESifo Working Paper. 2023. No. 10753, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4636012>

59. *Allouch N.* On the private provision of public goods on networks // *Journal of Economic Theory*. 2015. Vol. 157. P. 527–552.
60. *Angrist J.D.* The perils of peer effects // *Labour Economics*. 2014. Vol. 30. P. 98–108.
61. *Aral S.* Networked experiments // *The Oxford handbook of the economics of networks*. 2016. P. 376–411.
62. *Aral S., Walker D.* Creating social contagion through viral product design: A randomized trial of peer influence in networks // *Management science*. 2011. Vol. 57, no. 9. P. 1623–1639.
63. *Asch S.E.* *Social psychology*. Oxford University Press, 1987.
64. *Avella-Medina M., Parise F., Schaub M.T., Segarra S.* Centrality measures for graphons: Accounting for uncertainty in networks // *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*. 2018. Vol. 7, no. 1. P. 520–537.
65. *Bakshy E., Eckles D., Yan R., Rosenn I.* Social influence in social advertising: evidence from field experiments // *Proceedings of the 13th ACM conference on electronic commerce*. 2012. P. 146–161.
66. *Bakshy E., Rosenn I., Marlow C., Adamic L.* The role of social networks in information diffusion // *Proceedings of the 21st international conference on World Wide Web*. 2012. P. 519–528.
67. *Ballester C., Calvo-Armengol A., Zenou Y.* Who's who in networks. Wanted: The key player // *Econometrica*. 2006. Vol. 74, no. 5. P. 1403–1417.
68. *Banerjee A., Chandrasekhar A.G., Duflo E., Jackson M.O.* The diffusion of microfinance // *Science*. 2013. Vol. 341, no. 6144. P. 1236498.
69. *Bapna R., Umyarov A.* Do your online friends make you pay? A randomized field experiment on peer influence in online social networks // *Management Science*. 2015. Vol. 61, no. 8. P. 1902–1920.
70. *Barabasi A.-L., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. Vol. 286, no. 5439. P. 509–512.

71. *Barsbai T., Licuanan V., Steinmayr A., Tiongson E., Yang D.* Information and the acquisition of social network connections : tech. rep. / National Bureau of Economic Research. 2020.
72. *Bayer P., Hjalmarsson R., Pozen D.* Building criminal capital behind bars: Peer effects in juvenile corrections // *The Quarterly Journal of Economics.* 2009. Vol. 124, no. 1. P. 105–147.
73. *Bayer P., Herings P.J.-J., Peeters R.* Farsighted manipulation and exploitation in networks // *Journal of Economic Theory.* 2021. Vol. 196. P. 105311.
74. *Bayer P., Kozics G., Szoke N.G.* Best-response dynamics in directed network games // *Journal of Economic Theory.* 2023. Vol. 213. P. 105720.
75. *Belhaj M., Bervoets S., Deroan F.* Efficient networks in games with local complementarities // *Theoretical Economics.* 2016. Vol. 11, no. 1. P. 357–380.
76. *Belhaj M., Bramoulle Y., Deroian F.* Network games under strategic complementarities // *Games and Economic Behavior.* 2014. Vol. 88. P. 310–319.
77. *Belhaj M., Deroian F.* Competing activities in social networks // *The BE Journal of Economic Analysis & Policy.* 2014. Vol. 14, no. 4. P. 1431–1466.
78. *Belhaj M., Deroan F., Safi S.* Targeting in networks under costly agreements // *Games and Economic Behavior.* 2023. Vol. 140. P. 154–172.
79. *Bervoets S., Faure M.* Stability in games with continua of equilibria // *Journal of Economic Theory.* 2019. Vol. 179. P. 131–162.
80. *Bhatia R.* Matrix analysis. Springer Science & Business Media, 2013.
81. *Bimpikis K., Ehsani S., Ilkic R.* Cournot competition in networked markets // *Management Science.* 2019. Vol. 65, no. 6. P. 2467–2481.
82. *Bloch F., Querou N.* Pricing in social networks // *Games and economic behavior.* 2013. Vol. 80. P. 243–261.
83. *Bloch F., Shabayek S.* Targeting in social networks with anonymized information // *Games and Economic Behavior.* 2023. Vol. 141. P. 380–402.

84. *Boda Z., Elmer T., Voros A., Stadtfeld C.* Short-term and long-term effects of a social network intervention on friendships among university students // Scientific reports. 2020. Vol. 10, no. 1. P. 2889.
85. *Bonacich P.* Power and centrality: A family of measures // American journal of sociology. 1987. Vol. 92, no. 5. P. 1170–1182.
86. *Bond R.M., Fariss C.J., Jones J.J., Kramer A.D., Marlow C., Settle J.E., Fowler J.H.* A 61-million-person experiment in social influence and political mobilization // Nature. 2012. Vol. 489, no. 7415. P. 295–298.
87. *Bondarkov S., Ledenev V., Skougarevskiy D.* Russian Financial Statements Database: A firm-level collection of the universe of financial statements // arXiv preprint arXiv:2501.05841. 2025.
88. *Borgatti S.P.* Identifying sets of key players in a social network // Computational & Mathematical Organization Theory. 2006. Vol. 12. P. 21–34.
89. *Boucher V., Bramouille Y.* Binary outcomes and linear interactions // CEPR Discussion Paper No. DP15505. 2020.
90. *Boucher V., Rendall M., Ushchev P., Zenou Y.* Toward a general theory of peer effects // Econometrica. 2024. Vol. 92, no. 2. P. 543–565.
91. *Bramouille Y., Djebbari H., Fortin B.* Identification of peer effects through social networks // Journal of econometrics. 2009. Vol. 150, no. 1. P. 41–55.
92. *Bramouille Y., Djebbari H., Fortin B.* Peer effects in networks: A survey // Annual Review of Economics. 2020. Vol. 12. P. 603–629.
93. *Bramouille Y., Kranton R.* Public goods in networks // Journal of Economic theory. 2007. Vol. 135, no. 1. P. 478–494.
94. *Bramouille Y., Kranton R.* Games Played on Networks // The Oxford handbook of the economics of networks. 2016. P. 8–43.
95. *Bramouille Y., Kranton R., D'amours M.* Strategic interaction and networks // American Economic Review. 2014. Vol. 104, no. 3. P. 898–930.

96. *Breza E., Chandrasekhar A.G., McCormick T.H., Pan M.* Using aggregated relational data to feasibly identify network structure without network data // *American Economic Review*. 2020. Vol. 110, no. 8. P. 2454–2484.
97. *Brunetti C., Harris J.H., Mankad S., Michailidis G.* Interconnectedness in the interbank market // *Journal of Financial Economics*. 2019. Vol. 133, no. 2. P. 520–538.
98. *Bulow J.I., Geanakoplos J.D., Klemperer P.D.* Multimarket oligopoly: Strategic substitutes and complements // *Journal of Political economy*. 1985. Vol. 93, no. 3. P. 488–511.
99. *Cai J., Zhang C., Wai H.-T.* Optimal Pricing for Linear-Quadratic Games With Nonlinear Interaction Between Agents // *IEEE Control Systems Letters*. 2024.
100. *Cai J., Szeidl A.* Interfirm relationships and business performance // *The Quarterly journal of economics*. 2018. Vol. 133, no. 3. P. 1229–1282.
101. *Calvo-Armengol A., Zenou Y.* Social networks and crime decisions: The role of social structure in facilitating delinquent behavior // *International Economic Review*. 2004. Vol. 45, no. 3. P. 939–958.
102. *Campbell R., Starkey F., Holliday J., Audrey S., Bloor M., Parry-Langdon N., Hughes R., Moore L.* An informal school-based peer-led intervention for smoking prevention in adolescence (ASSIST): a cluster randomised trial // *The Lancet*. 2008. Vol. 371, no. 9624. P. 1595–1602.
103. *Candogan O., Bimpikis K., Ozdaglar A.* Optimal pricing in networks with externalities // *Operations Research*. 2012. Vol. 60, no. 4. P. 883–905.
104. *Carrell S.E., Malmstrom F.V., West J.E.* Peer effects in academic cheating // *Journal of human resources*. 2008. Vol. 43, no. 1. P. 173–207.
105. *Centola D.* An experimental study of homophily in the adoption of health behavior // *Science*. 2011. Vol. 334, no. 6060. P. 1269–1272.
106. *Chandrasekhar A.G., Chaudhary V., Golub B., Jackson M.O.* Multiplexing in Networks and Diffusion // *arXiv preprint arXiv:2412.11957*. 2024.

107. *Chandrasekhar A.G., Larreguy H., Xandri J.P.* Testing models of social learning on networks: Evidence from two experiments // *Econometrica*. 2020. Vol. 88, no. 1. P. 1–32.
108. *Cheng C., Huang W., Xing Y.* A theory of multiplexity: Sustaining cooperation with multiple relations // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3811181>. 2021.
109. *Choi S.J., Gale D., Kariv S.* Behavioral Aspects of Learning in Social Networks: An Experimental Study // *Advances in Applied Microeconomics*. 2005. Vol. 13. P. 25–61.
110. *Chuang Y., Schechter L.* Social networks in developing countries // *Annual Review of Resource Economics*. 2015. Vol. 7, no. 1. P. 451–472.
111. *Cobb N.K., Poirier J.* Effectiveness of a multimodal online well-being intervention: a randomized controlled trial // *American journal of preventive medicine*. 2014. Vol. 46, no. 1. P. 41–48.
112. *Corbo J., Calvo-Armengol A., Parkes D.* A study of nash equilibrium in contribution games for peer-to-peer networks // *ACM SIGOPS Operating Systems Review*. 2006. Vol. 40, no. 3. P. 61–66.
113. *Corbo J., Calvo-Armengol A., Parkes D.C.* The Importance of Network Topology in Local Contribution Games // *International workshop on web and internet economics*. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007. – P. 388-395.
114. *D'Souza R.M., Bernardo M. di, Liu Y.-Y.* Controlling complex networks with complex nodes // *Nature Reviews Physics*. 2023. Vol. 5, no. 4. P. 250–262.
115. *Dasaratha K., Golub B., Shah A.* Incentive Design With Spillovers // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4853054>. 2024.
116. *DeGroot M.H.* Reaching a consensus // *Journal of the American Statistical association*. 1974. Vol. 69, no. 345. P. 118–121.
117. *Demange G.* Optimal targeting strategies in a network under complementarities // *Games and Economic Behavior*. 2017. Vol. 105. P. 84–103.

118. *Dimant E.* Contagion of pro-and anti-social behavior among peers and the role of social proximity // *Journal of Economic Psychology*. 2019. Vol. 73. P. 66–88.
119. *Dimmock S.G., Gerken W.C., Graham N.P.* Is fraud contagious? Coworker influence on misconduct by financial advisors // *The Journal of Finance*. 2018. Vol. 73, no. 3. P. 1417–1450.
120. *Ding K., Chen Y., Wang L., Ren X., Shi G.* Network learning in quadratic games from best-response dynamics // *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2024. Vol. 32, no. 5, P. 3669-3684.
121. *Dokuka S., Valeeva D., Yudkevich M.* How academic achievement spreads: The role of distinct social networks in academic performance diffusion // *Plos One*. 2020. Vol. 15, no. 7. P. e0236737.
122. *Easley D., Kleinberg J.* *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World.* – Cambridge University Press, 2010.
123. *Ebrahimi R., Naghizadeh P.* United We Fall: On the Nash Equilibria of Multiplex and Multilayer Network Games // arXiv preprint arXiv:2402.06108. 2024.
124. *Elliott M., Golub B.* A network centrality approach to coalitional stability. Preprint, available at <http://www.mit.edu/bgolub/papers/centrality.pdf>. 2012.
125. *Elliott M.L., Goyal S., Teytelboym A.* Networks and economic policy // *Oxford Review of Economic Policy*. 2019. Vol. 35, no. 4. P. 565–585.
126. *Fainmesser I.P., Galeotti A.* Pricing network effects // *The Review of Economic Studies*. 2016. Vol. 83, no. 1. P. 165–198.
127. *Farrell J., Saloner G.* Standardization, compatibility, and innovation // *The RAND Journal of Economics*. 1985. P. 70–83.
128. *Figal Garone L., Maffioli A., Negri J.A. de, Rodriguez C.M., Vazquez-Bare G.* Cluster development policy, SME’s performance, and spillovers: evidence from Brazil // *Small Business Economics*. 2015. Vol. 44. P. 925–948.

129. *Fonseca B.P., Fernandes E., Fonseca M.V.* Collaboration in science and technology organizations of the public sector: A network perspective // *Science and Public Policy*. 2017. Vol. 44, no. 1. P. 37–49.
130. *French Jr J.R.* A formal theory of social power. // *Psychological review*. 1956. Vol. 63, no. 3. P. 181.
131. *Friedkin N.E., Johnsen E.C.* Social influence and opinions // *Journal of mathematical sociology*. 1990. Vol. 15, no. 3/4. P. 193–206.
132. *Friedman J., Hastie T., Tibshirani R.* Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso // *Biostatistics*. 2008. Vol. 9, no. 3. P. 432–441.
133. *Galeotti A., Golub B., Goyal S.* Supplement to «Targeting interventions in networks» // *Econometrica*. 2020. Vol. 88, no. 6. P. 2445–2471.
134. *Galeotti A., Golub B., Goyal S.* Targeting interventions in networks // *Econometrica*. 2020. Vol. 88, no. 6. P. 2445–2471.
135. *Galeotti A., Golub B., Goyal S., Talamas E., Tamuz O.* Taxes and market power: A principal components approach // arXiv preprint arXiv:2112.08153. 2021.
136. *Galeotti A., Golub B., Goyal S., Talamas E., Tamuz O.* Robust Market Interventions // arXiv preprint arXiv:2411.03026. 2024.
137. *Galeotti A., Goyal S.* Influencing the influencers: a theory of strategic diffusion // *The RAND Journal of Economics*. 2009. Vol. 40, no. 3. P. 509–532.
138. *Ghaderi J., Srikant R.* Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate // *Automatica*. 2014. Vol. 50, no. 12. P. 3209–3215.
139. *Giuliani E., Pietrobelli C.* Social network analysis methodologies for the evaluation of cluster development programs // *Inter-American Development Bank Technical Notes*. 2011.
140. *Glaeser E.L., Sacerdote B.I., Scheinkman J.A.* The social multiplier // *Journal of the European Economic Association*. 2003. Vol. 1, no. 2/3. P. 345–353.

141. *Glasscock D.* What is... a Graphon // Notices of the AMS. 2015. Vol. 62, no. 1. P. 46-48
142. *Golub B., Jackson M.O.* How homophily affects the speed of learning and best-response dynamics // The Quarterly Journal of Economics. 2012. Vol. 127, no. 3. P. 1287–1338.
143. *Golub B., Lever C.* The leverage of weak ties: How linking groups affects inequality // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4853054>. 2010.
144. *Golub B., Morris S.* Expectations, networks, and conventions // arXiv preprint arXiv:2009.13802. 2020.
145. *Goto A., Odagiri H.* Innovation in Japan. Oxford University Press, 1997.
146. *Goyal S.* Connections: an introduction to the economics of networks. Princeton University Press, 2012.
147. *Grimm V., Mengel F.* Experiments on belief formation in networks // Journal of the European Economic Association. 2020. Vol. 18, no. 1. P. 49–82.
148. *Gualdani C.* An econometric model of network formation with an application to board interlocks between firms // Journal of Econometrics. 2021. Vol. 224, no. 2. P. 345–370.
149. *Gubar E., Taynitskiy V., Fedyanin, D., Petrov I.* Hierarchical Epidemic Model on Structured Population: Diffusion Patterns and Control Policies // Computation. 2022. Vol. 10. no. 2. P. 31.
150. *Hara T., Kambayashi N., Matsushima N.* Industrial innovation in Japan. Routledge, 2008.
151. *Harkins A.* Network Comparative Statics // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3847211>. 2020.
152. *Helsley R.W., Zenou Y.* Social networks and interactions in cities // Journal of Economic Theory. 2014. Vol. 150. P. 426–466.
153. *Hiller T.* Peer effects in endogenous networks // Games and Economic Behavior. 2017. Vol. 105. P. 349–367.

154. *Hong M., Wai H.-T., Wang Z., Yang Z.* A two-timescale stochastic algorithm framework for bilevel optimization: Complexity analysis and application to actor-critic // *SIAM Journal on Optimization*. 2023. Vol. 33, no. 1. P. 147–180.
155. *Horton J.J., Rand D.G., Zeckhauser R.J.* The online laboratory: Conducting experiments in a real labor market // *Experimental economics*. 2011. Vol. 14. P. 399–425.
156. *Hung A.A., Plott C.R.* Information cascades: Replication and an extension to majority rule and conformity-rewarding institutions // *American Economic Review*. 2001. Vol. 91, no. 5. P. 1508–1520.
157. *Hunter R.F., Hays K. de la, Murray J.M., Badham J., Valente T.W., Clarke M., Kee F.* Social network interventions for health behaviours and outcomes: A systematic review and meta-analysis // *PLoS medicine*. 2019. Vol. 16, no. 9. P. e1002890.
158. *Jackson M.O.* Networks in the understanding of economic behaviors // *Journal of Economic Perspectives*. 2014. Vol. 28, no. 4. P. 3–22.
159. *Jackson M.O.* The human network: How your social position determines your power, beliefs, and behaviors. Vintage, 2019.
160. *Jackson M.O.* Inequality's economic and social roots: the role of social networks and homophily // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3795626>. 2021.
161. *Jackson M.O., Rogers B.W., Zenou Y.* Networks: An economic perspective // arXiv preprint arXiv:1608.07901. 2016.
162. *Jackson M.O., Zenou Y.* Games on networks // *Handbook of game theory with economic applications*. Vol. 4. Elsevier, 2015. P. 95–163.
163. *Jackson M.* Social and Economic Networks. Princeton University Press, 2008.
164. *Jaffe A.B.* Technological opportunity and spillovers of R&D: evidence from firms' patents, profits and market value // *National Bureau of Economic Research Working Paper Series*, 1986. No. 1815.

165. *Jensen M.K.* Aggregative games // Handbook of Game Theory and Industrial Organization, Volume I. Edward Elgar Publishing, 2018. P. 66–92.
166. *Jeong D., Shin E.* Optimal influence design in networks // Journal of Economic Theory. 2024. Vol. 220. P. 105877.
167. *Jongeneel W., Sutter T., Kuhn D.* Efficient learning of a linear dynamical system with stability guarantees // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 68, no. 5. P. 2790–2804.
168. *Kajikawa Y., Takeda Y., Sakata I., Matsushima K.* Multiscale analysis of interfirm networks in regional clusters // Technovation. 2010. Vol. 30, no. 3. P. 168–180.
169. *Katz M.L., Shapiro C.* Network externalities, competition, and compatibility // The American economic review. 1985. Vol. 75, no. 3. P. 424–440.
170. *Kempe D., Kleinberg J., Tardos E.* Maximizing the spread of influence through a social network / Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. 2003. P. 137–146.
171. *Kim D.A., Hwong A.R., Stafford D., Hughes D.A., O'Malley A.J., Fowler J.H., Christakis N.A.* A randomised controlled trial of social network targeting to maximise population behaviour change // Lancet. 2015. Vol. 386, no. 9989. P. 145.
172. *Klausner M.* Corporations, corporate law, and networks of contracts // Virginia Law Review. 1995. Vol. 81, no. 3. P. 757–852.
173. *Koller D.* Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques. The MIT Press, 2009.
174. *Konig M.D., Tessone C.J., Zenou Y.* Nestedness in networks: A theoretical model and some applications // Theoretical Economics. 2014. Vol. 9, no. 3. P. 695–752.
175. *Konig M.D., Liu X., Zenou Y.* R&D networks: Theory, empirics, and policy implications // Review of Economics and Statistics. 2019. Vol. 101, no. 3. P. 476–491.

176. *Kor R., Zhou J.* Welfare and distributional effects of joint intervention in networks // arXiv preprint arXiv:2206.03863. 2022.
177. *Kor R., Zhou J.* Multi-activity influence and intervention // Games and Economic Behavior. 2023. Vol. 137. P. 91–115.
178. *Korgin N.* Introduction to theory of control in organizations for kids via interactive games // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, no. 29. P. 289–294.
179. *Kozitsin I.V.* Optimal control in opinion dynamics models: diversity of influence mechanisms and complex influence hierarchies // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. Vol. 181. P. 114728.
180. *Krupka E.L., Weber R.A.* Identifying social norms using coordination games: Why does dictator game sharing vary? // Journal of the European Economic Association. 2013. Vol. 11, no. 3. P. 495–524.
181. *Kubler D., Weizsacker G.* Limited depth of reasoning and failure of cascade formation in the laboratory // The Review of Economic Studies. 2004. Vol. 71, no. 2. P. 425–441.
182. *Lake B., Tenenbaum J.* Discovering structure by learning sparse graphs // Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society. 2010. Vol. 32. P. 778–783.
183. *Latkin C.A., Sherman S., Knowlton A.* HIV prevention among drug users: outcome of a network-oriented peer outreach intervention. // Health Psychology. 2003. Vol. 22, no. 4. P. 332.
184. *Leider S., Mobius M.M., Rosenblat T., Do Q.-A.* Directed altruism and enforced reciprocity in social networks // The Quarterly Journal of Economics. 2009. Vol. 124, no. 4. P. 1815–1851.
185. *Lemley M.A., McGowan D.* Legal implications of network economic effects // Calif. L. Rev. 1998. Vol. 86. P. 479.
186. *Leng Y., Dong X., Wu J., Pentland A.* Learning quadratic games on networks // International Conference on Machine Learning. PMLR. 2020. P. 5820–5830.

187. *Li X.* Designing weighted and directed networks under complementarities // Games and Economic Behavior. 2023. Vol. 140. P. 556–574.
188. *Liebowitz S.J., Margolis S.E.* Network externality: An uncommon tragedy // Journal of economic perspectives. 1994. Vol. 8, no. 2. P. 133–150.
189. *Lindquist M.J., Zenou Y.* Crime and networks: Ten policy lessons // Oxford Review of Economic Policy. 2019. Vol. 35, no. 4. P. 746–771.
190. *Litt M.D., Kadden R.M., Kabelá-Cormier E., Petry N.* Changing network support for drinking: initial findings from the network support project. // Journal of consulting and clinical psychology. 2007. Vol. 75, no. 4. P. 542.
191. *Litt M.D., Kadden R.M., Kabelá-Cormier E., Petry N.M.* Changing network support for drinking: network support project 2-year follow-up. // Journal of consulting and clinical psychology. 2009. Vol. 77, no. 2. P. 229.
192. *Lovasz L.* Large networks and graph limits. American Mathematical Society colloquium publications, 2012.
193. *Manski C.F.* Identification of endogenous social effects: The reflection problem // The review of economic studies. 1993. Vol. 60, no. 3. P. 531–542.
194. *Melo E.* A variational approach to network games. Fondazione Eni Enrico Mattei (FEEM), 2018.
195. *Merton R.K.* Social theory and social structure. Free Press, 1968.
196. *Meyer C.D.* Matrix analysis and applied linear algebra. SIAM, 2023.
197. *Moffitt R.A.* Policy Interventions, Low-Level Equilibria, and Social Interactions // Social Dynamics. 2001. Vol. 4. P. 45.
198. *Monderer D., Shapley L.S.* Potential games // Games and economic behavior. 1996. Vol. 14, no. 1. P. 124–143.
199. *Mori J., Kajikawa Y., Sakata I.* Evaluating the Impacts of Regional Cluster Policies using Network Analysis // International Association for Management of Technology. 2010. P. 1–9.

200. *Morris S., Shin H.S.* Social value of public information // *American Economic Review*. 2002. Vol. 92, no. 5. P. 1521–1534.
201. *Muchnik L., Aral S., Taylor S.J.* Social influence bias: A randomized experiment // *Science*. 2013. Vol. 341, no. 6146. P. 647–651.
202. *Naghizadeh P., Liu M.* Provision of public goods on networks: on existence, uniqueness, and centralities // *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*. 2017. Vol. 5, no. 3. P. 225–236.
203. *Nishimura J., Okamuro H.* R&D productivity and the organization of cluster policy: An empirical evaluation of the Industrial Cluster Project in Japan // *The Journal of Technology Transfer*. 2011. Vol. 36. P. 117–144.
204. *Odagiri H.* The Japanese business system for creation and diffusion of technological knowledge: time for change? // *Technology and Innovation in Japan*. Routledge, 1998. P. 133–146.
205. *Parise F., Ozdaglar A.* A variational inequality framework for network games: Existence, uniqueness, convergence and sensitivity analysis // *Games and Economic Behavior*. 2019. Vol. 114. P. 47–82.
206. *Parise F., Ozdaglar A.* Analysis and interventions in large network games // *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*. 2021. Vol. 4, no. 1. P. 455–486.
207. *Parise F., Ozdaglar A.* Graphon games: A statistical framework for network games and interventions // *Econometrica*. 2023. Vol. 91, no. 1. P. 191–225.
208. *Patacchini E., Zenou Y.* Juvenile delinquency and conformism // *The Journal of Law, Economics, & Organization*. 2012. Vol. 28, no. 1. P. 1–31.
209. *Patnam M.* Corporate networks and peer effects in firm policies. Emerging Markets Finance Conference, Indira Gandhi Institute of Development Research. 2011.
210. *Petrov I.* Structural Interventions in Linear Best-Response Games on Random Graphs // *IFAC-PapersOnLine*. 2023. Vol. 56, no. 2. P. 2830–2833.

211. *Poldin O., Yudkevich M.* Peer-effects in higher education: a review of theoretical and empirical approaches // *Voprosy obrazovaniya/Educational Studies Moscow*. 2011. No. 4. P. 106–123.
212. *Rand D.G., Nowak M.A.* The evolution of antisocial punishment in optional public goods games // *Nature communications*. 2011. Vol. 2, no. 1. P. 434.
213. *Robins G., Lusher D., Broccatelli C., Bright D., Gallagher C., Karkavandi M., Matous P., Coutinho J., Wang P., Koskinen J., Roden B., Sadewo G.* Multilevel network interventions: Goals, actions, and outcomes // *Social networks*. 2023. Vol. 72. P. 108–120.
214. *Rossi E., Monti F., Leng Y., Bronstein M., Dong X.* Learning to infer structures of network games // *International Conference on Machine Learning*. PMLR. 2022. P. 18809–18827.
215. *Russo M., Rossi F.* Cooperation networks and innovation: A complex systems perspective to the analysis and evaluation of a regional innovation policy programme // *Evaluation*. 2009. Vol. 15, no. 1. P. 75–99.
216. *Sacerdote B.* Peer effects with random assignment: Results for Dartmouth roommates // *The Quarterly journal of economics*. 2001. Vol. 116, no. 2. P. 681–704.
217. *Sandholm W.H.* Population games and evolutionary dynamics. MIT press, 2010.
218. *Sciabolazza V.L., Vacca R., McCarty C.* Connecting the dots: Implementing and evaluating a network intervention to foster scientific collaboration and productivity // *Social Networks*. 2020. Vol. 61. P. 181–195.
219. *Sharkey K.J.* A control analysis perspective on Katz centrality // *Scientific reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 17247.
220. *Shaya F.T., Chirikov V.V., Howard D., Foster C., Costas J., Snitker S., Frimpter J., Kucharski K.* Effect of social networks intervention in type 2 diabetes: a partial randomised study // *J Epidemiol Community Health*. 2014. Vol. 68, no. 4. P. 326–332.

221. *Siciliano M.D., Whetsell T.A.* Strategies of network intervention: A pragmatic approach to policy implementation and public problem resolution through network science // arXiv preprint arXiv:2109.08197. 2021.
222. *Singh N., Vives X.* Price and quantity competition in a differentiated duopoly // The Rand journal of economics. 1984. Vol. 15, no. 4 P. 546–554.
223. *Starkey F., Audrey S., Holliday J., Moore L., Campbell R.* Identifying influential young people to undertake effective peer-led health promotion: the example of A Stop Smoking In Schools Trial (ASSIST) // Health education research. 2009. Vol. 24, no. 6. P. 977–988.
224. *Sun Y., Zhao W., Zhou J.* Structural interventions in networks // International economic review. 2023. Vol. 64, no. 4. P. 1533–1563.
225. *Suzuki K.* R&D spillovers and technology transfer among and within vertical keiretsu groups: Evidence from the Japanese electrical machinery industry // International Journal of Industrial Organization. 1993. Vol. 11, no. 4. P. 573–591.
226. *Tedeschi G., Recchioni M.C., Berardi S.* An approach to identifying micro behavior: How banks' strategies influence financial cycles // Journal of Economic Behavior & Organization. 2019. Vol. 162. P. 329–346.
227. *Terleckyj N.* Direct and indirect effects of industrial research and development on the productivity growth of industries // New developments in productivity measurement. University of Chicago Press, 1980. P. 357–386.
228. *Tucker C., Zhang J.* Growing two-sided networks by advertising the user base: A field experiment // Marketing Science. 2010. Vol. 29, no. 5. P. 805–814.
229. *Ushchev P., Zenou Y.* Social norms in networks // Journal of Economic Theory. 2020. Vol. 185. P. 104969.
230. *Valente T.W.* Network interventions // Science. 2012. Vol. 337, no. 6090. P. 49–53.
231. *Villeval M.C.* Performance Feedback and Peer Effects // Handbook of Labor, Human Resources and Population Economics. 2020. P. 1–38.

232. *Vives X., Vravosinos O.* Strategic complementarity in games // Journal of Mathematical Economics. 2024. P. 103005.
233. *Viviano D.* Policy targeting under network interference // Review of Economic Studies. 2024. rdae041.
234. *Whetsell T.A.* Technology Policy and Complex Strategic Alliance Networks in the Global Semiconductor Industry: An Analysis of the Effects of Policy Implementation on Cooperative R&D Contract Networks, Industry Recovery, and Firm Performance : PhD thesis / Whetsell Travis Aaron. The Ohio State University, 2017.
235. *Wing R.R., Jeffery R.W.* Benefits of recruiting participants with friends and increasing social support for weight loss and maintenance. // Journal of consulting and clinical psychology. 1999. Vol. 67, no. 1. P. 132–138.
236. *Yan C.* Cooperative solutions for network games with quadratic utilities // Contributions to Game Theory and Management. 2023. Vol. 16, no. 1. P. 282–294.
237. *Zenou Y., Zhou J.* Games on Multiplex Networks // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4772575>. 2024.
238. *Zenou Y., Zhou J.* Network Games Made Simple // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4225140>. 2024.
239. *Zhang C., Liu S., Wai H.-T., So A.M.-C.* Network Games Induced Prior for Graph Topology Learning // arXiv preprint arXiv:2410.24095. 2024.

Приложение А

Таблица 9. Эндогенный эффект взаимосвязи компаний по отраслям: значения коэффициента β , идентифицированные на реальных данных об экономической активности компаний в 2019 г. Из таблицы удалена информация о кластерах, в которых для всех случаев y переменная β оказалась не значима.

k	1	2	3	4
A	0.080 (0.059)	0.060 (0.056)	0.074 (0.076)	0.260** (0.084)
B	-0.078 (0.050)	-0.026 (0.052)	-0.091 (0.061)	0.834*** (0.214)
C	0.014 (0.015)	-0.017 (0.016)	-0.027 (0.019)	0.506*** (0.061)
D	0.080 (0.048)	0.037 (0.049)	-0.222*** (0.061)	0.339* (0.169)
E	0.141*** (0.038)	0.052 (0.040)	-0.100 (0.056)	0.140 (0.191)
F	0.133*** (0.019)	0.056** (0.021)	0.086*** (0.024)	0.679*** (0.122)
G	0.183*** (0.022)	0.122*** (0.025)	0.059*** (0.015)	0.545*** (0.049)
H	0.032 (0.024)	0.030 (0.026)	-0.090** (0.031)	0.524*** (0.097)
I	0.208*** (0.036)	0.237*** (0.041)	0.042 (0.050)	0.287 (0.164)
J	0.108*** (0.030)	0.157*** (0.032)	0.021 (0.036)	0.378*** (0.109)
K	0.187*** (0.051)	0.167*** (0.033)	0.054 (0.056)	0.422 (0.259)
M	0.175*** (0.022)	0.152*** (0.022)	0.099*** (0.026)	0.480*** (0.077)
N	0.177*** (0.029)	0.216*** (0.036)	-0.082* (0.041)	0.177 (0.117)
P	0.061 (0.287)	0.087 (0.071)	-0.232* (0.102)	0.095 (0.197)

Таблица 10. Контекстуальный эффект взаимосвязи компаний по отраслям: значения коэффициента δ , идентифицированные на реальных данных об экономической активности компаний в 2020 г. Из таблицы удалена информация о кластерах, в которых отсутствуют несостоятельные компании.

k	Локальное усреднение				Локальное агрегирование			
	1	2	3	4	1	2	3	4
A	0.186 (0.552)	0.372 (0.735)	-0.601 (0.403)	-0.586 (0.395)	0.284*** (0.001)	0.092*** (0.003)	0.286*** (0.001)	0.284*** (0.001)
B	0.119 (0.603)	0.529 (0.573)	-0.044 (0.510)	0.130 (0.541)	0.052 (0.301)	0.130*** (0.034)	-0.141 (0.358)	-0.107 (0.381)
C	-0.282 (0.274)	-0.974 (0.750)	0.103 (0.205)	-0.133 (0.242)	-0.069*** (0.003)	0.093*** (0.000)	0.083*** (0.001)	-0.077*** (0.006)
D	-0.869*** (0.144)	0.566 (1.108)	0.733*** (0.175)	0.673*** (0.188)	-0.169*** (0.003)	-0.082 (0.084)	0.153*** (0.004)	0.153*** (0.004)
E	0.669 (0.444)	0.068 (0.910)	0.526 (0.340)	-0.043 (0.237)	0.613*** (0.013)	0.656*** (0.020)	0.467*** (0.006)	-0.257*** (0.005)
F	0.642*** (0.102)	0.608** (0.220)	0.072 (0.128)	0.251* (0.117)	0.113*** (0.001)	0.024*** (0.000)	-0.005 (0.050)	-0.002 (0.033)
G	0.246 (0.152)	-0.065 (0.249)	0.019 (0.104)	-0.101 (0.105)	-0.110*** (0.001)	-0.117*** (0.003)	-0.155*** (0.001)	-0.181*** (0.000)
H	0.049 (0.309)	-0.232 (0.694)	0.004 (0.246)	-0.206 (0.322)	-0.088 (0.103)	-0.011 (0.062)	-0.137*** (0.017)	-0.228*** (0.007)
I	-0.167 (0.796)	0.634*** (0.160)	0.306 (0.281)	0.465** (0.163)	0.016*** (0.000)	0.083*** (0.000)	-0.012 (0.048)	-0.064*** (0.002)
J	-0.865*** (0.171)	0.444 (0.293)	-0.411 (0.811)	-0.337 (0.480)	-0.468*** (0.000)	-0.194*** (0.002)	-0.202*** (0.001)	-0.239*** (0.001)
K	-0.271 (0.665)	0.582 (0.339)	0.030 (0.540)	0.199 (0.468)	0.135*** (0.004)	0.112*** (0.006)	0.124*** (0.001)	0.071*** (0.002)
L	-0.105 (0.366)	-0.389 (0.675)	-0.526* (0.228)	-0.425 (0.218)	0.110*** (0.000)	0.109*** (0.000)	0.106*** (0.000)	0.106*** (0.000)
M	-0.585 (0.330)	-0.132 (0.380)	-0.570* (0.247)	-0.492 (0.258)	0.109*** (0.000)	0.100*** (0.000)	0.275*** (0.000)	0.104*** (0.000)
N	0.328 (0.377)	-0.999 (1.133)	-0.012 (0.297)	-0.282 (0.370)	-0.330*** (0.002)	-0.269*** (0.005)	-0.064 (0.103)	-0.230*** (0.001)
P	-0.492* (0.225)	-0.999* (0.457)	-0.999** (0.323)	-0.999*** (0.179)	-0.387*** (0.010)	-0.637*** (0.024)	-0.445*** (0.014)	-0.999*** (0.001)
Q	0.337 (0.629)	0.489 (0.421)	0.339 (0.380)	0.438 (0.338)	-0.080 (0.271)	-0.082 (0.195)	0.182*** (0.001)	0.172*** (0.001)
R	-0.702 (1.192)	-0.999*** (0.301)	0.327 (0.580)	-0.999 (0.580)	-0.801*** (0.003)	-0.770*** (0.012)	-0.231*** (0.015)	-0.904*** (0.024)
S	-0.448 (0.305)	0.440 (0.399)	0.799*** (0.147)	0.625** (0.221)	-0.135*** (0.002)	0.009 (0.005)	0.165*** (0.001)	-0.108 (0.110)

Таблица 11. Статистика кластеров.

k	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	P	Q	R	S
n_v	10890	2423	42861	2952	3365	48371	120836	21248	10957	16027	2938	44066	35809	17524	3773	8516	2780	6296
n_e	5478	1011	18100	997	1010	19467	121629	11000	17468	16696	1115	70832	14186	10248	1033	14334	1313	3348
n_s	34	18	152	12	13	295	533	101	46	46	18	178	138	83	16	13	6	14

Приложение Б

АБСОЛЮТ БАНК

«02» декабря 2024 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы

Петрова Ильи Владимировича

«Модели управления структурными характеристиками взаимодействия
в играх на сетях с линейным наилучшим ответом»
на соискание учёной степени кандидата технических наук

АКБ «Абсолют Банк» (ПАО) – крупный банк федерального значения с фокусом на комплексное высокотехнологичное развитие в приоритетных направлениях бизнеса. Банк работает на финансовом рынке более 30 лет и специализируется на работе в сегментах с высоким уровнем экспертизы и уникальными ИТ-решениями. Оценка кредитного риска является одной из наиболее важных задач в деятельности любой кредитной организации, в связи с этим использование подходов, изложенных Ильей Владимировичем в своей диссертационной работе, имело высокое практическое значение.

В диссертационной работе Петрова И.В. предложены методы анализа и управления сетевыми эффектами в системах взаимосвязанных агентов, которые были внедрены в Банке для выработки решений в рамках процедуры оценки риска контрагентов. Внешние эффекты, возникающие в результате взаимосвязи между контрагентами – их финансовыми показателями и индивидуальными характеристиками, оказывают существенное влияние на состояние других, связанных с ними компаний.

Результаты диссертационной работы и проведенная автором идентификация моделей подтвердили эффективность предложенных в работе методов: учет сетевой структуры взаимосвязей, которая ранее не использовалась при принятии решения, позволяет добиться повышения качества модели оценки кредитного риска до 5 п.п. в терминах показателя GINI, в зависимости от полноты и уровня детализации имеющихся данных.

Перспективным направлением дальнейшей работы является усовершенствование предложенных методов путем использования баз данных с дополнительной информацией о характеристиках контрагентов.

Начальник Управления моделирования и
операционных рисков

 Протасов П.С.

Директор Департамента
финансовых рисков

 Егоркин А.А.

Заместитель Председателя
Правления



 Василевский Н.С.