

## ОТЗЫВ

официального оппонента

на диссертацию Котюкова Александра Михайловича

«Исследование положения равновесия динамических систем методами накрывающих отображений и точек совпадения с приложениями к экономическим моделям», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 2.3.1 — Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

### Актуальность темы и общая характеристика работы

Диссертационная работа А.М. Котюкова посвящена развитию методов исследования равновесных состояний динамических систем, динамика которых описывается разностью отображений метрических пространств, с применением полученных результатов к анализу экономических моделей рынка типа Аллена. Тема диссертации является актуальной как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

Проблема нахождения равновесных состояний в сложных системах является одной из фундаментальных задач системного анализа и теории управления. Равновесные состояния выступают ключевыми индикаторами в различных прикладных областях: от биологических моделей распространения эпидемий до транспортных макросистем и экономических моделей ценообразования. В последнем случае определение равновесных цен представляет самостоятельный практический интерес, связанный с задачами государственного регулирования и ценовой политики. Особую актуальность работе придает тот факт, что большинство известных методов анализа равновесия (например, итерационные схемы типа «нащупывания» цен Вальраса) либо требуют дополнительных предположений о гладкости отображений и невырожденности матрицы Якоби, либо становятся чрезмерно сложными при моделировании реальных нелинейных процессов. Предложенный в диссертации подход, основанный на теории накрывающих отображений и точек совпадения, позволяет ослабить эти предположения и обеспечивает более широкую применимость разработанных методов.

### Содержание и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 50 наименований. Общий объем работы составляет 120 страниц. Структура работы является логичной и последовательной.

В первой главе описан класс моделей  $Mo$ , динамика которых определяется нормальной автономной системой дифференциальных уравнений вида (1.1). Формализована задача поиска положения равновесия, удовлетворяющего заданным ограничениям (1.2), в рассматриваемых моделях — в виде неравенств. Далее подробно описаны экономические модели, выступающие объектом приложения: модель типа Аллена–Эрроу–Дебре, открытые и закрытые модели типа Аллена с постоянными и непостоянными эластичностями. Для каждой модели получены явные формулы для правых частей систем уравнений. В частности, доказаны Теоремы 1.1 и 1.2 о единственности представления отображений через эластичности — постоянные и переменные соответственно.

Во второй главе изложены теоретические методы исследования. Приведены определения и известные результаты теории  $\alpha$ -накрывающих отображений и точек совпадения (по работам Арутюнова А.В., Авакова Е.Р., Гельмана Б.Д., Дмитрука А.В., Обуховского В.В. и др.), в том числе теоремы о существовании точки совпадения (Теорема

2.2), об устойчивости (Теорема 2.1) и оценки константы накрытия (Лемма 2.1). Центральным результатом главы является Теорема 2.4 о сходимости предложенного Алгоритма 1 поиска точек совпадения, доказательство которого выполнено индуктивным построением последовательности, удовлетворяющей условиям (2.5)–(2.6). Заслуживает внимания то, что алгоритм корректен без априорных предположений гладкости отображений.

В третьей главе разработанные методы применены к моделям класса  $M_o$  с возмущением. Для открытой модели Аллена с постоянными эластичностями (Теорема 3.1) установлены достаточные условия существования единственного положения равновесия с помощью принципа сжимающих отображений, а также исследован вопрос об устойчивости. Для модели с непостоянными эластичностями (Теорема 3.3) получены достаточные условия существования равновесия с применением теории накрывающих отображений. Численные эксперименты (более 90 графиков зависимостей) наглядно иллюстрируют влияние параметров на положение равновесия.

В четвертой главе исследован подкласс моделей  $M_c$  без возмущения. Для модели Аллена–Эрроу–Дэбре из [2] проведен численный эксперимент, показывающий влияние параметров на положение равновесия. Для закрытой модели проведен полный анализ: получены необходимые и достаточные условия существования и единственности равновесия (Теоремы 4.5–4.8), включая исчерпывающую классификацию для случая  $n = 2$ .

### **Научная новизна и значимость результатов**

Научная новизна диссертации состоит в нескольких взаимосвязанных направлениях.

Во-первых, разработан метод поиска точек совпадения (Алгоритм 1), основанный на итерационном построении  $\varepsilon$ -сетей на вложенных шарах, и доказана его сходимость за конечное число шагов (Теорема 2.4). В отличие от классического метода Ньютона и его модификаций, данный алгоритм не требует невырожденности матрицы Якоби и гладкости рассматриваемых отображений. Этим он выгодно отличается также от итерационного алгоритма, предложенного ранее А.В. Арутюновым в работе [7], где сходимость доказана лишь в пределе, тогда как в рассматриваемой диссертации — за конечное число шагов при условии вполне ограниченности множества.

Во-вторых, получены новые достаточные условия существования положения равновесия для ряда экономических моделей типа Аллена: открытой модели с постоянными эластичностями (Теорема 3.1), открытой модели с непостоянными эластичностями (Теорема 3.3). Для закрытой модели получены как необходимые, так и достаточные условия, а также полностью исследован вопрос о единственности.

В-третьих, установлена устойчивость положения равновесия к малым возмущениям параметров модели (§3.1.2), что имеет важное значение для прикладной интерпретации и практического применения результатов.

### **Место работы в контексте существующих исследований**

Автор развивает и адаптирует фундаментальные результаты теории накрывающих отображений, заложенные А.А. Милютиним (принцип накрытия и его обобщения) и развитые А.В. Арутюновым — в частности, в работе, посвященной теории накрывающих отображений в метрических пространствах (Доклады РАН, 2007). Формализм  $\alpha$ -накрывающего отображения и теоремы о точках совпадения из работы Арутюнова, Авакова, Гельмана, Дмитрука и Обуховского (Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2009), составляют математическую основу настоящего исследования. Вклад диссертанта состоит в доведении общей теории до конкретного алгоритма с доказательством конечной сходимости, а также в получении верифицируемых условий существования равновесия

для моделей, которые могут быть применены для моделирования экономических систем. Таким образом, работа А.М. Котюкова вписывается в традицию московской школы оптимального управления и нелинейного анализа.

Модели, рассматриваемые в диссертации, восходят к классическим работам Л. Вальраса, К. Эрроу и Ж. Дебре (Econometrica, 1954), а также к модели потребления Стоуна–Гири. Применение производственных функций типа Кобба–Дугласа с эластичностями по ресурсам роднит данную работу с традицией Р. Аллена. Непосредственные предшественники рассматриваемого исследования — работы А.В. Арутюнова, С.Е. Жуковского и Н.Г. Павловой (ЖВМиМФ, 2013; Мат. моделирование, 2016), в которых равновесные цены впервые были интерпретированы как точки совпадения двух отображений. Диссертация расширяет этот подход на более общие классы моделей, включая модели с непостоянными эластичностями и моделями с внешними возмущениями. Среди смежных подходов к исследованию конкурентного равновесия следует упомянуть алгоритмы линейной комплементарности Л. Матиезена (Operations Research, 1985), итерационные вычисления равновесия Курно (Thorlund-Petersen, 1990) и дискретные процедуры ценовой подстройки Ж. Тюнстры (J. Economic Dynamics and Control, 2000). Подход диссертанта отличается от перечисленных тем, что оперирует в абстрактной метрической постановке, допускающей нелинейные и негладкие модели.

### Замечания и рекомендации

При общей высокой оценке работы имеется ряд замечаний, которые, по мнению оппонента, не умаляют ценности результатов, но могли бы быть учтены при доработке текста и в дальнейших исследованиях.

#### 1. *Стилистические и грамматические неточности.*

а) Имеется ряд опечаток, например: на стр. 8 содержится ошибка: «В первой главе изложены описана исследуемая модель»; на стр. 15 допущена опечатка «происллюстрировать» вместо «проиллюстрировать».

б) Во введении (стр. 4–6) встречаются чрезмерно длинные предложения, что затрудняет чтение, например:

«Так, например, в биологии активно исследуются модели распространения инфекционных заболеваний и эпидемий, в которых положение равновесия позволяет определить критический уровень переносчиков заболевания (см., например, [65], [11]); в экологии широко исследуются модели загрязнения окружающей среды, очистки сточных вод и прогнозирования аварийных ситуаций нефтеперерабатывающих предприятий, в которых равновесные состояния служат индикатором для принятия экстренных мер (см., например, [16]); подобные вопросы могут возникать при моделировании транспортных макросистем (см., например, [1]), в которых равновесное состояние позволяет определить места высокой концентрации транспортных потоков, а также целесообразность инвестиций, и другие (см., например, [45, 33]).»

#### 2. *Математические неточности.*

а) К «математической небрежности» можно отнести постановку задачи в самом начале диссертации, на стр. 11-12, что сразу бросается в глаза:

«Рассмотрен класс систем, динамика которых определяется нормальной автономной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = F(x) - G(x) + q. \quad (1.1)$$

Здесь  $X, Y$  – метрические пространства,  $x \in X, q \in Y, F, G: X \rightarrow Y$  – заданы.

Диссертационное исследование посвящено исследованию системы (1.1) на предмет положения равновесия, удовлетворяющего определенным ограничениям, т.е. решения уравнения следующего вида:

$$F(x) - G(x) + q = 0, x \in M. \quad (1.2)$$

Здесь  $M \subset X$  – заданное множество.»

Для того, чтобы можно было рассматривать сумму и разность, нужно, как минимум, иметь алгебраическую структуру — группы (возможно абелевой, в соответствии с аддитивными обозначениями), а поскольку рассматриваемые пространства метрические, то логично предполагать, что группа является топологической. Более естественным представляется считать заданной структуру линейного (топологического) пространства — например, пространства Фреше.

б) В определении вектора  $z_2$  в формуле (1.3) на стр. 12 допущена опечатка:  $z_2 = (z_{11}, \dots, z_{1m})$  — здесь компоненты должны быть  $z_{21}, \dots, z_{2m}$ .

в) В определении вектора  $q$  на стр. 11–12: указано  $q \in R^m$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$  — размерность не согласована.

### *3. Замечания по содержанию и изложению.*

а) Желательно более подробно обсудить вопрос выбора параметра  $\delta$  в Алгоритме 1 (с. 33–34). Автор справедливо отмечает в Заключение (с. 136), что «встает вопрос выбора параметра  $\delta$ », однако в диссертации этот вопрос не получил достаточного внимания. Численные эксперименты могли бы включать анализ чувствительности сходимости алгоритма к выбору  $\delta$ .

б) Численные эксперименты проведены на модельных данных. Автор честно отмечает в Заключение, что «остается открытым вопрос о численном эксперименте с реальными данными, которые не удалось получить». Тем не менее, пример с мировым рынком автомобилей (Таблица 4.3, с. 116) демонстрирует принципиальную применимость подхода к реальной статистике, хотя этот пример и относится к простейшему случаю, когда  $n = 1$ . Расширение экспериментальной базы представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

в) Список литературы содержит 50 наименований и в целом адекватно отражает состояние дел в области. Однако, можно рекомендовать дополнить его ссылками на работы по вычислимому общему равновесию (Computable General Equilibrium, CGE), а также на работы Е.С. Жуковского по точкам совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств (Мат. заметки, 2016), которые являются непосредственным развитием используемого аппарата.

### **Апробация результатов и публикации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах, из которых одна — в журнале категории К1 Перечня ВАК («Управление большими системами», 2024), пять — в журналах, индексируемых в международных базах данных (Advances in Systems Science and Applications; Journal of Mathematical Sciences; труды конференций MLSA), и две — в прочих изданиях. Количество и уровень публикаций соответствуют требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук. Результаты работы прошли апробацию на многочисленных российских и международных конференциях, а также обсуждались на профильных семинарах ИПУ РАН (семинар «Оптимизация и нелинейный анализ» под руководством А.В. Арутюнова, С.Е. Жуковского и Н.Г. Павловой) и МФТИ.

### **Заключение**

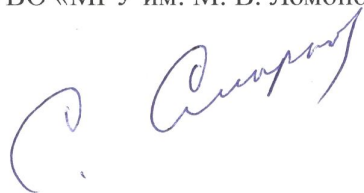
Диссертационная работа А.М. Котюкова представляет собой законченное научное исследование, в котором решена актуальная задача развития методов анализа равновесных состояний в сложных динамических системах, с приложением к моделям типа Аллена. Результаты, выносимые на защиту, — метод анализа сложных динамических систем (п. 1 паспорта специальности 2.3.1), условия существования положения равновесия для открытых моделей (п. 4 паспорта) и для закрытых моделей (п. 4 паспорта) — являются новыми, научно обоснованными и имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Высказанные выше замечания носят частный характер и не влияют на общую положительную оценку работы.

Автореферат и опубликованные работы достоверно отражают содержание диссертации.

Диссертация А.М. Котюкова соответствует требованиям, установленным Положением о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук по специальности 2.3.1 — Системный анализ, управление и обработка информации, статистика (физико-математические науки), а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук, доцент  
профессор кафедры системного анализа  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
ФГБОУВО «МГУ им. М. В. Ломоносова»



С.Н. Смирнов

«03» апреля 2026 г.



Подпись удостоверяю  
информационный специалист по кадрам

  
Т.Г. Коваленко