

Модели движения, коммуникации и принятия решений для мобильных агентов в условиях неопределенности

Александр Кузнецов

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Лаборатория 90

28 апреля 2022 г.

- Доклад посвящен, во-первых, проблеме построения оптимального или близкого к такому маршрута агентом, не имеющим полного знания о местности, не полностью осведомленного о цели или же имеющего противоречащие друг другу цели.
- Во-вторых, в докладе рассматривается проблема коммуникации агентов друг с другом. Например, роботы с направленными антеннами должны для обмена информацией периодически переориентироваться друг на друга, что мешает как движению этих агентов, так и связи с другими агентами группы.
- В-третьих, в докладе рассматривается вероятностная модель распространения агентов, например, насекомых.

Ландшафт $\mathcal{L}_l(n \times m)$ – это прямоугольник из $n \times m = N$ клеток ω_{ij} , $(i, j) \in l \subset \mathbb{Z}^2$ равного размера, принадлежащих к l различным классам, причем к классу i принадлежит N_i клеток, то есть $\sum_{i=1}^l N_i = N$. Конфигурационная энтропия ландшафта $\mathcal{L}_l(n \times m)$

$$S(\mathcal{L}_l(n \times m)) = - \sum_{i=1}^l \frac{N_i}{N} \ln \frac{N_i}{N}$$

характеризует неоднородность состава ландшафта в целом.

Пусть задана система агентов $Ag = \{ag_1, \dots, ag_k\}$, которые перемещаются по ландшафту $\mathcal{L}_l(n \times m)$.

- Для каждого агента задана начальная клетка и конечная клетка.
- У всех агентов есть общий «слой», соответствующего объективной реальности,
- у каждого агента есть «слой», соответствующий сведениям о реальности, известным именно этому агенту.

Более детальное описание – world-space cellular automaton

«Психоход» можно рассматривать и как двумерный «world-space cellular automaton», и как одномерный «robot-space cellular automaton». Состояние ячейки (i, j) автомата представляет собой вектор

$$e_{ij} = (id_{ij}, u_{ij}),$$

где id_{ij} – уникальный идентификатор агента в ячейке ($id_{ij} = 0$, если ячейка свободна), u_{ij} – проходимость ячейки в ходах.

Более детальное описание – robot-space cellular automaton

Состояние агента с идентификатором id представляет собой вектор

$$ag_{id} = (type_{id}, w_{id}, d_{id}, current_{id}, target_{id}, error_{id}, \dots),$$

где $type_{id}$ – тип агента, w_{id} – количество ходов, оставшихся до преодоления клетки, d_{id} – направление движения, $current_{id}$ – текущая клетка, $target_{id}$ – целевая клетка, $error_{id}$ – накопленная ошибка дискретизации.

Клеточный автомат – пример

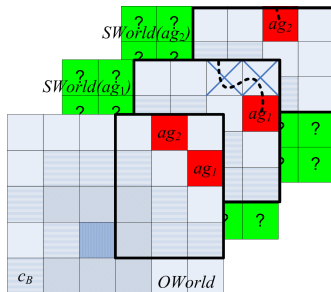


Рис.: Пример клеточного автомата

Отметим, что предлагаемый автомат можно отнести к т.н. рефлексивным клеточным автоматам. Каждый ход каждый агент выбирает направление движения так, чтобы минимизировать функцию

$$\Lambda(M; \alpha, \beta, \gamma, T_{max}) = \alpha \tilde{T}_h(M) + \beta \sum_{(i,j) \in M} \theta(f_{ij}) + \gamma \sum_{(i,j) \in M} vis_{ij}(ag),$$

где $\tilde{T}_h(M)$ соответствует времени прохождения маршрута, $vis_{ij}(ag)$ – количеству уже посещенных клеток в маршруте.

Движению агента, задаваемому клеточным автоматом, соответствует задача обхода препятствий агентом, движущимся в области Ω из точки A в точку B по маршруту $r(t)$, $t \in [0, T]$ на изменяющейся со временем местности за кратчайшее время T , которая имеет вид

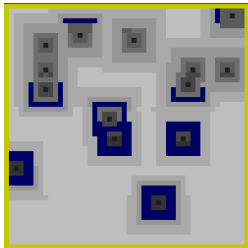
$$\|\dot{r}(t)\| = v(t, r(t)), \quad (1)$$

$$r(0) = A, \quad r(T) = B, \quad (2)$$

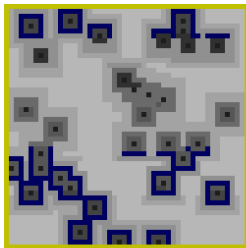
$$T \rightarrow \min. \quad (3)$$

Для решения (1)-(3) и для его «клеточного приближения» r_h справедлива оценка

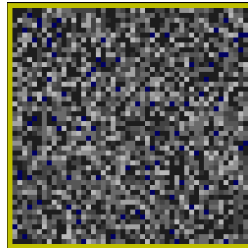
$$|r(l(t)) - r_h(l_h(t))| \leq (h\sqrt{2} + \tau)(e^{\|\nabla_{(t,x,y)} v\|_{C([0,T] \times \Omega)} K} - 1) + h\sqrt{2}.$$



(a) $S = 1.6$, $N_{obst} = 14$



(b) $S = 1.8$, $N_{obst} = 33$



(c) $S = 2.0$

Рис.: Примеры ландшафтов

Алгоритм генерации ландшафтов по данной конфигурационной энтропии

Вектор $\mathbf{V} = (N_1, \dots, N_l)$ количеств клеток каждого класса.
Алгоритм построения векторов $\mathbf{V} = (N_1, \dots, N_l)$ по энтропии S следующий

1. Решить уравнение

$$S = -\frac{\beta(1 - \beta^l) - (1 - \beta)l\beta^l}{(1 - \beta)(1 - \beta^l)} \ln \beta + \ln \frac{1 - \beta^l}{1 - \beta},$$

относительно β .

2. По найденному решению $0 \leq \beta \leq 1$ определить $N_1 = N(1 - \beta)(1 - \beta^l)^{-1}$.
3. Построить вектор $\mathbf{V}_0 = (N_1, \beta N_1, \dots, \beta^{l-1} N_1)$, округлить компоненты \mathbf{V}_0 до целых и случайно переставить их, получив вектор \mathbf{V} , при этом необходимо проследить, чтоб сумма всех компонент \mathbf{V} равнялась N .

Алгоритм построения ландшафта $\mathcal{L}(N, I) = \{L_{ij}\}$ по вектору \mathbf{V} таков:

1. Всем клеткам $\mathcal{L}(N, I)$ присваивается класс -1.
2. По равномерному закону генерируется пара целых чисел $(i, j) \in I$.
3. По равномерному закону генерируется целое число $1 \leq k \leq I$, такое что $N_k \neq 0$.
4. Если класс L_{ij} равен -1, устанавливается, что класс L_{ij} равен k и $N_k := N_k - 1$.
5. Повторяется шаг 2, пока $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$.

Алгоритм построения ландшафта (основанный на КА):

1. Всем клеткам ландшафта присваивается класс -1
2. По равномерному закону случайно размещается N_l клеток класса l .
3. Определяется локальная функция перехода класса клетки (i, j) как $Cl_{ij} := cl$, $cl = Cl_{i'j'}$, где (i', j') – случайно выбранная клетка из окрестности $V_1(i, j)$, $N(cl) > 0$, если таковая существует. Если таких клеток нет, то устанавливается, что $Cl_{ij} = Cl_{ij} - 1$.
4. При каждом назначении клетке класса Cl устанавливается $N(Cl) := N(Cl) - 1$.
5. Пока количество клеток класса -1 отлично от 0, повторяются такты функционирования автомата.

Генерировалось по 50 случайных ландшафтов с заданной конфигурационной энтропией и вычислялась зависимость количества значений достигших целевой области агентов N_{ag} от такта времени t . Кривая соответствует функции $N = 24.46(1 - \text{erf}(2.02 - 0.01t))$.

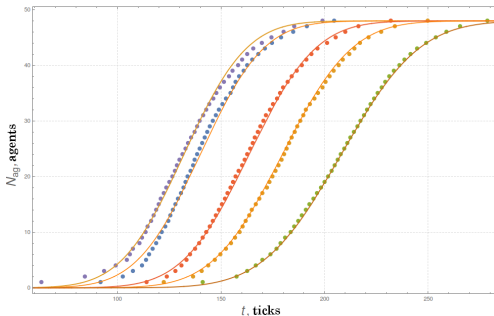


Рис.: Зависимость количества агентов N от времени t

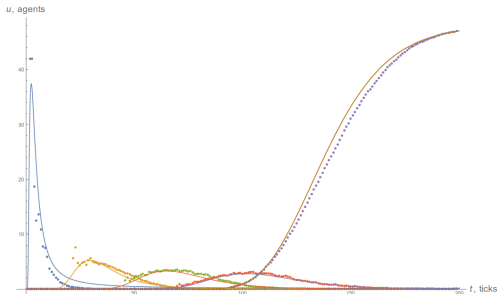


Рис.: Зависимость концентрации агентов от времени

$$u(x, t) = 24(\operatorname{erf}((-2.04693x - 1.03949)t^{-1/2} + 4.66438x^{-3/2} + 1.08597x^{-1/2} + 0.926477) - \operatorname{erf}((-2.04693x - 1.03949)t^{-1/2} + 1.08597x^{-1/2} + \operatorname{sgn}(48 - x)0.845118)).$$

Задача для уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{P_1(\sqrt{x}, \sqrt{t})}{Q_1(\sqrt{x}, \sqrt{t})} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{P_2(\sqrt{x}, \sqrt{t})}{Q_2(\sqrt{x}, \sqrt{t})} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u(x, 0) = u_0 \delta(x - 1),$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_0 \theta(x - x_{\max}),$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

Выигрыш времени

$$\overline{win} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} \frac{T_{top}^i}{T_{bok}^i}.$$

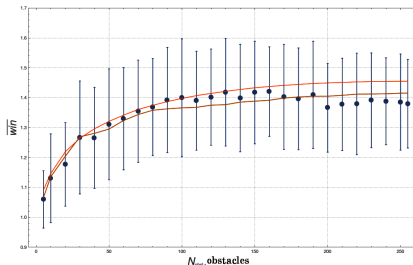


Рис.: Выигрыш времени

Оранжевая линия на рисунке соответствует кривой $y = (S(\rho_{obst}) + 1) \ln 9$.

Назовем графом формации системы Ag размеченный граф $F = (Ag', E, \phi)$, $Ag' \subseteq Ag$, $E \subseteq Ag^2$, функция разметки $\phi : E \rightarrow M \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, вершинами которого являются агенты, а ребра описывают расстояния между агентами. Множество всех возможных графов формаций будем обозначать как \mathcal{F} . Обозначим функцию, сопоставляющую каждому $t \in [0, T]$ граф формации системы агентов в этот момент F_t как \mathbf{F} . Обозначим множество всех изоморфизмов Ag как $\mathcal{G} = \{iso : Ag \leftrightarrow Ag\}$, множество всех допустимых изоморфизмов как $\mathcal{G}_a \subseteq \mathcal{G}$. Если $iso \in \mathcal{G}_a$ является изоморфизмом графов F_1 и F_2 , то положим

$$w(iso; F_1, F_2) = \left(\sum_{ag', ag'' \in F_1} |\phi(ag', ag'') - \phi(iso(ag'), iso(ag''))|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть в графе $iso(F_1)$ не смежны m_1 пар вершин (ag_i, ag_j) , таких что их прообразы $(iso^{-1}(ag_i), iso^{-1}(ag_j))$ смежны в F_1 и, наоборот, смежны m_2 пар вершин (ag'_i, ag'_j) , таких что их прообразы $(iso^{-1}(ag'_i), iso^{-1}(ag'_j))$ не смежны в F_1 . Также пусть в графах F_1 и F_2 существуют максимальные изоморфные подграфы F_{1B} и F_{2B} , содержащие m_3 пар вершин.

Обозначим $\phi_{\max} = \max M$ и $w(iso; F_1, F_2) = w(iso; F_{1B}, F_{2B})$. Назовем абсолютным весом отображения $iso : F_1 \rightarrow F_2$ величину $W_a(iso, F_1, F_2) = w(iso; F_1, F_2) + \phi_{\max} m_1 + \phi_{\max} m_2$, а относительным весом – величину

$$W_r(iso, F_1, F_2) = \frac{W_a(iso, F_1, F_2)}{\phi_{\max}(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Определим биотопическое расстояние между графами $F_1 = (Ag_1, E_1)$, $F_2 = (Ag_2, E_2)$, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ относительно $iso : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ – изоморфизма графов, следующим образом. Пусть iso переводит подграф F_{1B} графа F_1 в подграф F_{2B} графа F_2 , $F_{1B} = (Ag_B, E_B)$ и F_{1B} – максимальный изоморфный подграф. Тогда

$$\mu(iso; F_1, F_2) = \frac{|Ag_1 \setminus Ag_B| + |Ag_2 \setminus iso(Ag_B)|}{|Ag_1| + |Ag_2| - |Ag_B|}.$$

Определим расстояние между графами $F_1 = (Ag_1, E_1)$, $F_2 = (Ag_2, E_2)$ как

$$\rho(F_1, F_2) = \min_{iso \in \mathcal{G}_a} (\alpha \mu(iso; F_1, F_2) + \beta W_r(iso; F_1, F_2)), \quad (4)$$

где $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

$E = \{-1, 1\}$ (т.е. рассматриваются обычные ориентированные графы), $\mu_E(e_1, e_2) = \frac{1}{2}|e_1 - e_2|$, $\mu_V(v_1, v_2) = 1/2$, для любых круглых вершин $\textcircled{v_1}, \textcircled{v_2} \in V$, таких что $v_1 \neq v_2$ и $\mu_V(v_1, v_2) = 1$, если одна из вершин, например $\textcircled{v_1}$ – круглая, а вторая, например $\diamond v_2$ – квадратная.

Пусть отображение $iso : a_i \mapsto b_i, i = \overline{1, 5}$, содержится в \mathcal{G}_a .

Также пусть $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1/2$. Согласно определения,

1. $\mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = 0$.
2. $W(iso_a) = |-1 - 1|/2 + 1 = 2$.
3. Таким образом, $\rho(\Gamma_0, \Gamma_1) = 0 + 1 = 1$.

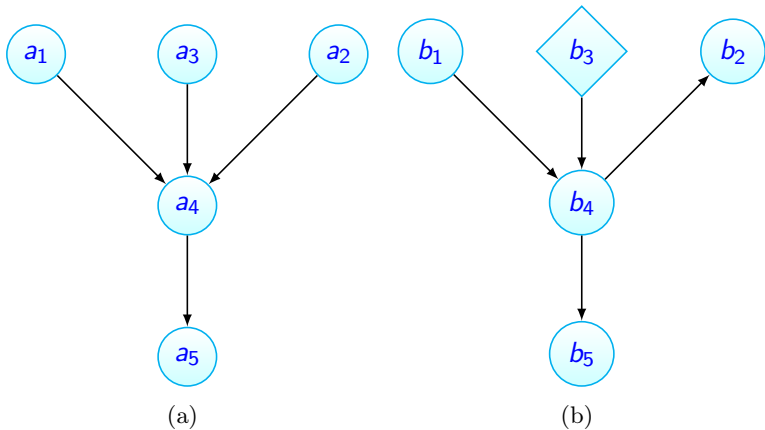


Рис.: Поиск расстояния между графами

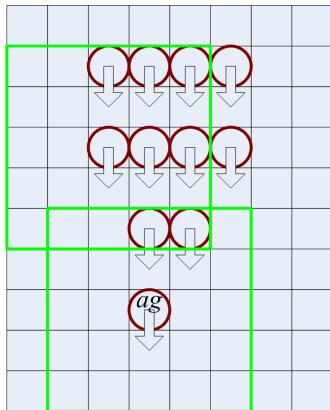


Рис.: Группа совместно движущихся агентов

Граф формации агентов из Ag может быть однозначно представлен как квадратная матрица смежности $G = (g^{ij})$ размером $n \times n$. Будем считать, что $g^{ii} = 0$, если вершины, соответствующей агенту ag_i , в графе нет, иначе положим $g^{ii} = 1$. Если $i \neq j$, $g^{ii} \neq 0$, $g^{jj} \neq 0$ положим $g^{ij} = \frac{\phi(ag_i, ag_j)}{\phi_{\max}}$. Если $g^{ii} = 0$ или $g^{jj} = 0$, положим $g^{ij} = 1$.

Обозначим множество таких матриц как \mathfrak{F} . Расстояние между матрицами $g_1, g_2 \in \mathfrak{F}$ определим как

$$\rho_{\mathfrak{F}}(g_1, g_2) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\gamma_{ij} f(g_1^{ij}, g_2^{ij}))^2 \right)^{1/2}, \quad (5)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & xy \neq 0 \vee x^2 + y^2 = 0, \\ 2, & xy = 0 \wedge x^2 + y^2 > 0, \end{cases} \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = j, \\ \beta, & i \neq j. \end{cases}$$

Можно определить сложение и вычитание графов формаций и соответствующих им матриц. Пусть $g_1, g_2 \in \mathfrak{F}$. Положим $h = (h^{ij}) = g_1 + g_2$, если

$$h^{ii} = g_1^{ii} \vee g_2^{ii}$$

$$h^{ij} = \psi(g_1^{ij}, g_2^{ij}), i \neq j,$$

где ψ – симметричная неотрицательная функция, неубывающая по каждому из аргументов, например \max .

Назовем шаблоном формации для агента ag набор клеток $\rho_i(ag, t) \in \mathbb{Z}^2$, $i = \overline{1, n}$. Пусть агент находится в точке $\omega \in \mathbb{Z}^2$, в его окрестности находятся агенты с координатами $r_j(t) \in \mathbb{Z}^2$, $j = \overline{1, m}$. Он выбирает в такт t перемещение в направлении $d = (d_1, d_2)$, $d_1, d_2 = \overline{-1, 1}$, так чтобы, например,

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^n \|r_i(t) - (\omega + d + \rho_i(ag, t))\| + \alpha_1 |n(d) - m(d)| \rightarrow \min .$$

Если говорить более широко, то агент выбирает направление движения так, чтоб расстояние между графом получившейся формации и графом шаблона формации было наименьшим.

Шаблоны формаций – примеры

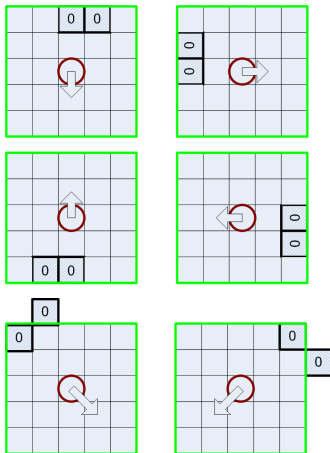
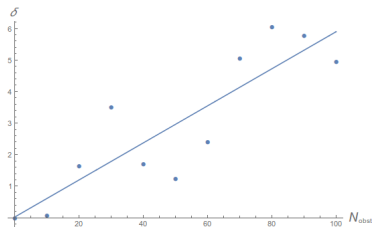


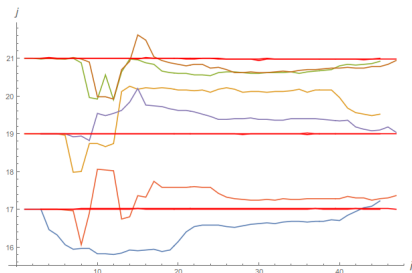
Рис.: Примеры шаблона формации для агента *ag*

Исследовалась зависимость скорости организации строя и степень соответствия получившегося строя заданному при движении агентов от количества случайно разбросанных по ландшафту препятствий. Результаты приведены на рис. 9 для ландшафта из 48×48 клеток и формации из 6 агентов, с препятствиями в 4 клетки и радиусом обзора агента в 5 клеток.

На рис. 9(a) показана зависимость максимального среднего отклонения строя δ в клетках от заданного от количества препятствий N_{obst} (50 экспериментов), на рис. 9(b) показан пример траекторий агентов при $N_{obst} = 50$ в сравнении с траекториями агентов, движущимся по ландшафту без препятствий.



(a)



(b)

Рис.: Зависимость максимального отклонения строя от количества препятствий и пример траекторий агентов.

Пусть у нас по-прежнему агенты перемещаются по области Ω . При этом агент ag_i видит обстановку $O_j \subseteq \Omega$ полностью только на отрезке r_j^i своей траектории r^i . Обозначим траекторию, склеенную из таких отрезков как $r^i = r_1^i | r_2^i | \dots | r_n^i$. Введем также обозначения $r_{\leq k}^i = r_1^i | \dots | r_k^i$, $r_{> k}^i = r_{k+1}^i | \dots | r_n^i$. Внутри O_j оптимальный по времени кусок траектории может быть построен стандартными методами вариационного исчисления или же дискретной оптимизации.

Обозначим также как $\Theta(r)$ время прохождения агентом ag_i пути по траектории r^i от начальной точки $A^i \in \Omega$ до конечной точки $B^i \in \Omega$. Каждый агент хочет выбрать траекторию, минимизирующую Θ , однако не в силах это сделать из-за коллизий и неполной осведомленности. Таким образом, задачу можно свести к игре, в которой каждый агент ag_i выбирает свой кусок пути r_i , чтоб его путь был самым быстрым. При этом за k -й тур этой игры каждый агент ag_i получает выигрыш $-\Theta(r_{\leq k}^i)$. Если агент обладает искаженным знанием о среде своего перемещения, то он максимизирует не Θ , а Θ_1 , который, по некоторой норме (например, по операторной норме) сравним с Θ :

$$\|\Theta - \Theta_1\| < \varepsilon.$$

Пусть $Q_f \subseteq Q$ – множество вершин-идентификаторов агентов, принадлежащих к стороне f , $E_f \subseteq Q_f \times Q_f$ – множество ребер, определяющее связность агентов. Определим граф потребностей в связи стороны f как $\Pi_f = (Q_f, E_f)$.

Система связи может изменяться в каждый момент $t \in \mathbb{Z}$, $t = \overline{0, N}$ функционирования клеточного автомата в зависимости от дальности агентов, особенностей местности, применения средств радиоэлектронной борьбы и т.п. Зададим граф системы связи соответствующим образом, чтоб отразить это:

$$\Gamma_f(t) = (V_f(t), C, \varphi_f(t, \cdot)),$$

где $f = \overline{1, 2}$, $V_f(t) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid f_{ij}(t) = f\}$ – множество клеток, в которых в данный момент t находятся агенты стороны f , $C = \{c_1, \dots, c_l\}$ – множество каналов, $\varphi_f(t, \cdot) : C \rightarrow V_f(t) \times V_f(t)$ – функция инцидентности. При этом граф связи должен «напоминать» граф потребностей.

Необходимо выяснить зависимость средней пропускной способности ad hoc сети от свойств местности, скорости движения агентов и конфликта, предельной дальности радиостанции.

Отдельно можно рассматривать случай, когда радиостанции в составе иерархической телекоммуникационной сети не обладают полной информацией обо всей сети, возможных видах других радиостанций, сетевой иерархии и т.п. и при получении сообщений строят граф, моделирующий сеть, анализируя сообщения от других станций. При этом возникает необходимость сравнивать получающийся граф с некоторым базовым графом внутри самой станции и находить свое место в собранном исходя из сообщений графе сети, зная свое место в базовом графе сети.

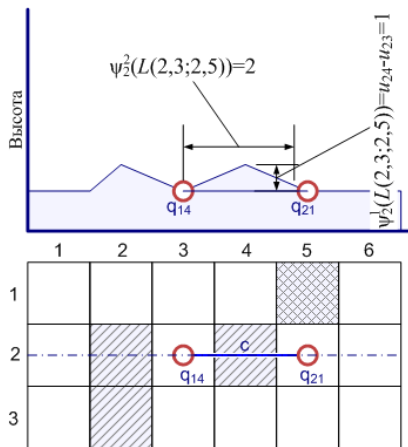


Рис.: Фрагмент графа связи

ПО «Психоход» написано на C++14 и состоит из вычислительного ядра, графической подсистемы и интерпретатора скриптов Lua.

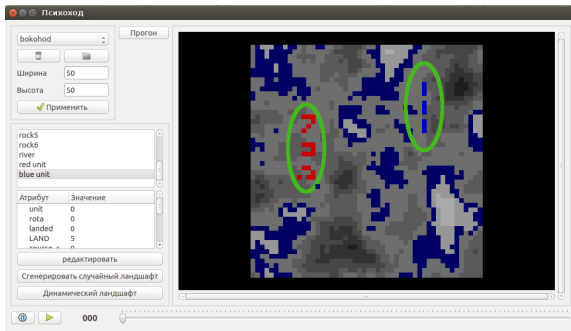


Рис.: Главное окно ПО «Психоход»

Пусть агенты из множества $Ag = \{ag_1, \dots, ag_m\}$ перемещаются по местности и должны периодически синхронизировать по радиосвязи информацию друг о друге и о других объектах, замеченных в процессе движения. За каждым агентом $ag_i \in Ag$ закреплен свой участок ответственности и агент должен, во-первых, выполнить свои непосредственные задачи на этом участке (эта задача имеет приоритет α_i), а затем – поддерживать актуальность информации a_i о других агентах системы с наименьшими возможными издержками e_i . Поддержание актуальности информации о других агентах фактически соответствует поддержанию линии связи между данным агентом и другими агентами.

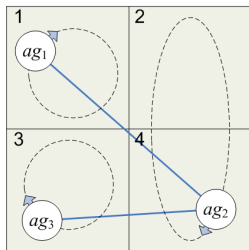


Рис.: Агенты, патрулирующие свои участки. Пунктирные линии обозначают траектории агентов, сплошные – линии связи

Если каждый агент обладает всенаправленной антенной и нет ограничений на время передачи данных, то задача тривиальна, так как обмен информации возможен практически в любой момент времени.

Однако, если в целях повышения скрытности и для экономии ресурса электропитания агенты снабжены направленными антеннами и (или) если агенты могут обмениваться информацией только в определенные моменты времени, то синхронизация агентов сильно затрудняется. Становится необходимым выбирать компромисс между актуальностью информации и расходами энергии на разворот агентов, включение передатчика и возможным снижением скрытности.

Примером описанной системы может быть беспроводная сенсорная сеть которая, например, должна выявлять нарушителя и поддерживать связь между своими элементами с возможно меньшим расходом заряда аккумулятора. Беспроводная сенсорная сеть – это распределенная самоорганизующаяся сеть множества узлов, до нескольких сотен или даже тысяч датчиков и исполнительных устройств, объединённых между собой

Сопоставим агенту ag_i , $i = \overline{1, m}$, в момент времени $t \in T \subseteq \mathbb{N}$ вектор актуальности информации

$$\mathbf{a}(t, \mathbf{S}) = (a_1(t; S_1, \dots, S_m), \dots, a_m(t; S_1, \dots, S_m))$$

и вектор расходов на поддержание актуальности информации

$$\mathbf{e}(t, \mathbf{S}) = (e_1(t; S_1, \dots, S_m), \dots, e_m(t; S_1, \dots, S_m)).$$

Здесь $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_m)$, $S_i \subseteq T$ – множество моментов времени, в которые агент ag_i осуществляет обновление информации, $a_i : T \times (2^T)^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – функция актуальности информации у агента ag_i , $e_i : T \times (2^T)^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – функция затрат на поддержание актуальности информации у агента ag_i .

Задача состоит в том, чтоб подобрать набор моментов синхронизации \mathbf{S} , максимизирующий в каком-то смысле $\mathbf{a}(t, \mathbf{S})$ и минимизирующую $\mathbf{e}(t, \mathbf{S})$.

Будем полагать, что функция актуальности информации и функция затрат на поддержание актуальности информации у всех агентов имеет один и тот же вид:

$$a_i(t, \mathbf{S}) = a(t, \mathbf{S}, \alpha_i(t)), \quad (6)$$

$$e_i(t, \mathbf{S}) = e(t, \mathbf{S}). \quad (7)$$

Здесь $\alpha_i : T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$ – ограниченная функция, определяющая занятость агента. Если агент занят, например наблюдает нечто очень важное, то ему может быть не до рутинной синхронизации. Функция a строго возрастает по третьему аргументу.

Одинаковый вид функций (6), (7) для всех агентов связан с тем, что агенты либо сами являются однотипными устройствами, либо снабжены одинаковыми устройствами связи.

Каждому агенту ag_i в момент времени $t \in T$ достоверно известны лишь α_i и $S_j \cap \{1, \dots, t-1\}$, $j = \overline{1, m}$. Агент ag_i может делать вывод о росте α_j в момент времени \tilde{t} , если ag_j долгое время не синхронизируется с ag_i , то есть если $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k \in S_i$ и $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k \notin S_j$, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \tilde{t}$. Таким образом, t_0 – первый момент времени, в котором синхронизация ожидается, но не происходит, t_i , $i = \overline{1, k}$ – последующие моменты времени, в которых синхронизация ожидается, но не происходит.

Пусть $Ag = \{ag_1, ag_2\}$, $S_1 = \{1, 2, 5, 7, 10\}$, $S_2 = \{1, 2, 9, 10\}$. В момент времени $t = 5$ агент ag_1 знает лишь об уже прошедших моментах синхронизации с агентом ag_2 , а именно о моментах $S_1 \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\}$ и не знает, что в момент $t = t_0 = 5$ синхронизации не будет, так как $5 \notin S_2$. Причина такого несовпадения моментов возможной синхронизации может быть в том, что ag_2 не должен выходить в $t = 5$ в эфир для снижения своей заметности (о чем он тоже заранее может не знать) или же ag_2 неожиданно стал свидетелем вторжения неприятеля и должен срочно собирать информацию о вторжении, а не следовать рутинной процедуре. Далее, в $t_1 = 7$ синхронизация опять не происходит и ag_1 на основании этого делает вывод, что с ag_2 происходит что-то экстраординарное и т.д. Поэтому изначально ag_1 устанавливает для себя $\alpha_2 = 1$ (нормальный режим работы ag_2), а, например, в $\tilde{t} = 8$ устанавливает $\alpha_2 = 2$ (экстраординарный режим).

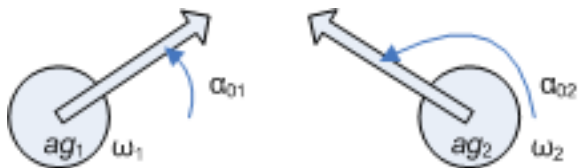


Рис.: Агенты, ориентирующиеся друг на друга

Пусть ag_1 имеет начальный угол наклона относительно оси Ox α_{01} и угловую скорость ω_1 , ag_2 имеет начальный угол наклона относительно оси Ox α_{02} и угловую скорость ω_2 . Тогда угол наклона агента i описывается как $\alpha_i(t) = \alpha_{0i} + \omega_i t$ и ориентация агентов друг на друга в момент времени T может быть описана как выполнение условия

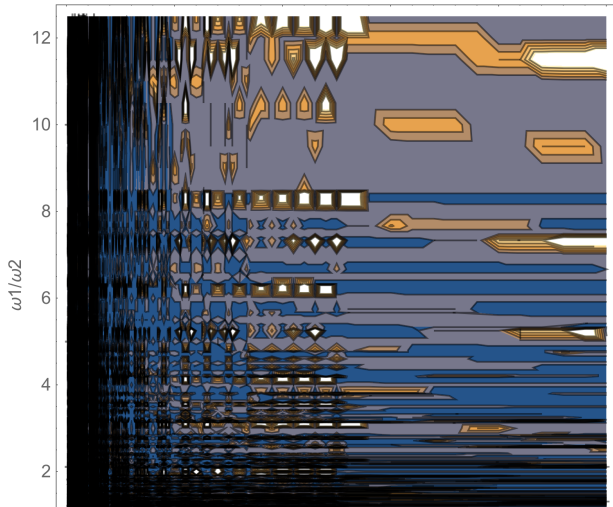
$$|\alpha_1(T) \bmod 2\pi| < \varepsilon,$$

$$|\alpha_2(T) \bmod 2\pi - \pi| < \varepsilon,$$

где mod – операция взятия остатка от деления, ε – допустимое отклонение от идеальной ориентации агентов друг на друга. Если $\alpha_2(T) \text{ mod } 2\pi < 0$, то полагаем $\alpha_2(T) \text{ mod } 2\pi := \alpha_2(T) \text{ mod } 2\pi + 2\pi$.

Модель системы связи – синхронизация роботов

Был проведен вычислительный эксперимент. Положили
 $\varepsilon = 1$, $\omega_j \in \{0.5 + j | j \in 0.25\mathbb{N}, 0.5 + j \leq 2\pi\}$,
 $\alpha_{0j} \in \{0.25 + j | j \in 0.25\mathbb{N}, 0.25 + j < 2\pi\}$, $t = 1, \dots, 99$.

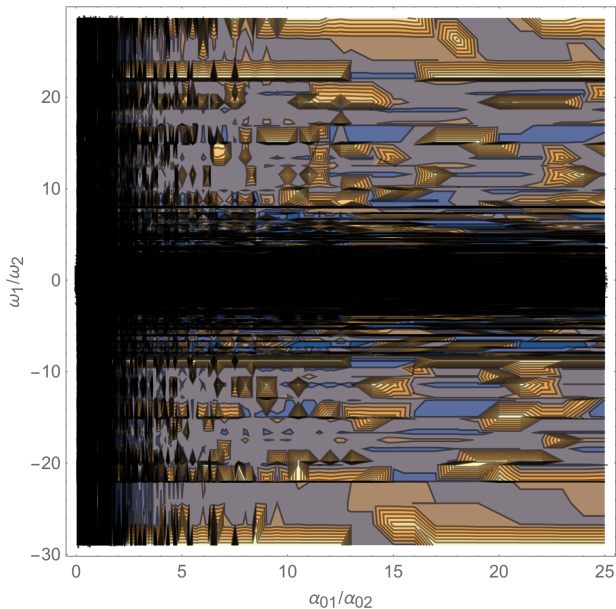


Видно, что есть пики особо неудачного сочетания углов и скоростей, при которых синхронизация агентов довольно затруднена, причем самый продолжительный участок затруднения соответствует $\omega_1 \cong \omega_2$.

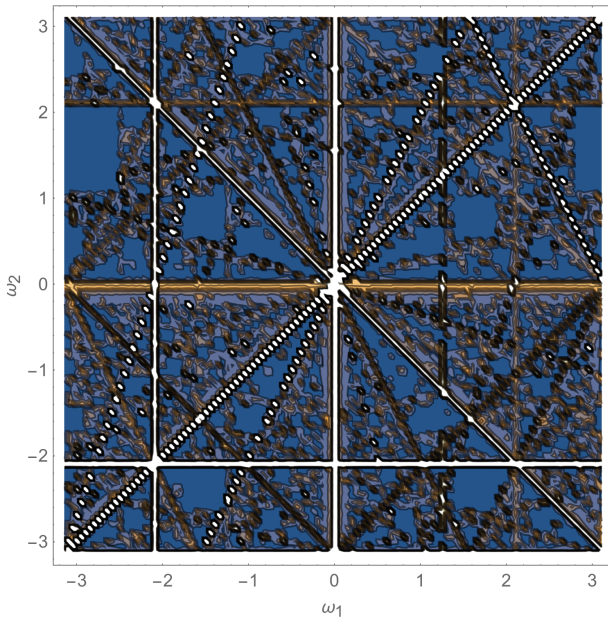
Предположим, что $\omega_i \in \{-\pi + j | j \in 0.25\mathbb{N}, -\pi + j \leq \pi\}$, тогда получим рисунок 15.

Предположим, что агенты могут вращаться в разные стороны $\omega_i \in \{-\pi/2 + j | j \in 0.25\mathbb{N}, -\pi/2 + j \leq \pi/2\}$, тогда получим рисунок 16.

Модель системы связи – синхронизация роботов



Модель системы связи – синхронизация роботов



Далее задача сводится к минимизации функции

$T(\alpha_{01}, \alpha_{02}; \omega_1, \omega_2)$, такой что для $T_s = T(\alpha_{01}, \alpha_{02}; \omega_1, \omega_2)$

$$T_s = \min\{T : |\alpha_1(T) \bmod 2\pi| < \varepsilon \wedge |\alpha_2(T_s) \bmod 2\pi - \pi| < \varepsilon\}.$$

Поскольку агенты ничего не знают о своем взаимном расположении, то имеет смысл вероятностное понимание этой задачи:

$$P\{|T(\alpha_{01}, \alpha_{02}; \omega_1, \omega_2) - T_{ps}| < \gamma\} = 1 - \delta.$$

В случае, если агенты ничего не знают о своем взаимном расположении и скорости, то вопрос управления угловой скоростью агента лишен смысла. В этом случае следует подбирать для агента оптимальную серию угловых скоростей

$$\{(t_1, \omega_1), (t_2, \omega_2), \dots, (t_n, \omega_n)\},$$

которая обеспечит с заданной надежностью синхронизацию с другим агентом, который изменяет свою угловую скорость

Пусть агенты могут ориентироваться только строго друг на друга, т.е. $\varepsilon = 0$.

$$(\alpha_1 + \omega_1 t) \bmod 2\pi = 0,$$

$$(\alpha_2 + \omega_2 t) \bmod 2\pi = \pi,$$

$$\alpha_i \in [0, 2\pi), \omega_i \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Данные уравнения можно интерпретировать также как

$$\alpha_1 + \omega_1 t = 2\pi n,$$

$$\alpha_2 + \omega_2 t = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Эта система уравнений имеет следующее решение

$$t = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \pi}{\omega_1 - \omega_2},$$

$$n = -\frac{\alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1 + \pi\omega_1}{2\pi(\omega_1 - \omega_2)} \in \mathbb{Z}.$$

Для выполнения условий на решение необходимо, чтобы

$$\omega_1 - \omega_2 > 0,$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 \geq \pi,$$

$$\alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1 + \pi\omega_1 \leq 0$$

или

$$\omega_1 - \omega_2 < 0,$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi,$$

$$\alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1 + \pi\omega_1 \geq 0.$$

Вычислим средние значения

$$\mathbb{E}t = -\frac{\mathbb{E}\alpha_1 - \mathbb{E}\alpha_2 + \pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2},$$

$$\mathbb{E}n = -\frac{\omega_2 \mathbb{E}\alpha_1 - \omega_1 \mathbb{E}\alpha_2 + \pi \omega_1}{2\pi(\omega_1 - \omega_2)} = -\frac{\omega_2 \pi - \omega_1 \pi + \pi \omega_1}{2\pi(\omega_1 - \omega_2)} = \frac{\omega_2}{2(\omega_2 - \omega_1)}.$$

$$\omega_2 = 2k(\omega_2 - \omega_1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\omega_1 = (2k - 1)\omega_1, \quad k > 1.$$

Случайное блуждание является фундаментальным объектом теории вероятностей, уравнений математической физики и чрезвычайно важной прикладной моделью. Модели случайных блужданий нашли применение в физике, химии, биологии, механике, социологии и др.

Первая работа Пирсона о применении случайных блужданий к описанию моделей миграции и физических процессов была написана в конце 19 – начале 20 века.

В 1880 году британским физиком-теоретиком лордом Релеем была исследована задача теории звука, которая математически эквивалентна проблеме случайного блуждания.

В сентябре 1904 года нобелевский лауреат Рональд Росс представил диффузионную модель случайной миграции малярийных комаров.

Однако исторические и современные работы этой тематики в основном касаются дискретного случая случайного блуждания, в частности, например, когда блуждание происходит по решетке, ориентированной параллельно прямоугольным координатным осям k -мерного евклидова пространства. Сравнительно мало внимания уделяется непрерывному случаю случайного блуждания, в котором направление блуждающего объекта может непрерывно меняться от одного шага к другому.

Почему же так происходит?

Принципиальное отличие математической модели случайного блуждания с произвольным, непрерывно меняющимся углом направления перемещающегося объекта, от блуждания по сетке состоит в использовании обобщенного сдвига вместо обычного. Обобщенный сдвиг представляет собой сингулярный интегральный оператор, а соответствующие ему дифференциальные уравнения содержат оператор Бесселя вместо обычной производной. В этой работе мы представим математическое описание модели непрерывного случайного блуждания, в которой направление блуждающего объекта может непрерывно меняться от одного шага к другому и покажем, что она подтверждается экспериментальными данными.

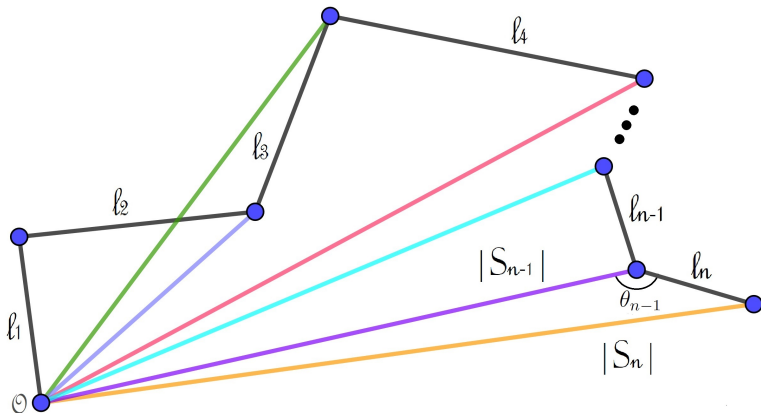


Рис.: Схема миграции на n -м перемещении.

Пусть агенты $Ag = \{a_1, \dots, a_s\}$ расположены в начале координат.

В момент времени t_0 агент a_i имеет положение X_0 . Затем он начинает радиально распрыгиваться из центра и в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n он смещается на X_1, X_2, \dots, X_n .

В результате в момент времени t_n имеем $S_n = X_0 + \sum_{m=1}^n X_m$.

Смещения полагаются независимыми. Заданы плотности $p_m(X_m)$ вероятностей X_m .

Необходимо найти плотность вероятностей S_n .

Пусть l_m – длина прыжка с номером m , $m = 1, \dots, n$,

$Pr(|S_n| \leq r) = Pr(|S_n| \leq r; l_1, l_2, \dots, l_n)$ – вероятность того, что S_n лежит внутри круга радиуса r с центром в начале координат O .

Напомним определение функции Бесселя первого рода

$$J_{\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin(\phi) - \alpha\phi)} d\phi - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x(r - \frac{1}{r})}}{r^{\alpha+1}} dr.$$

Определим нормализованную функцию Бесселя первого рода j_{ν}

$$j_{\eta}(x) = \frac{2^{\eta}\Gamma(\eta + 1)}{x^{\eta}} J_{\eta}(x),$$

$$Pr(|S_n| \leq r) = \chi(r) \frac{2^{1-\frac{\nu}{2}} r^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^{\infty} J_{\frac{\nu}{2}}(rt) \prod_{m=1}^n j_{\frac{\nu}{2}-1}(l_m t) t^{\frac{\nu}{2}-1} dt.$$

Так как

$$\frac{d}{dr} r^{\frac{\nu}{2}} J_{\frac{\nu}{2}}(rt) = tr^{\frac{\nu}{2}} J_{\frac{\nu}{2}-1}(rt),$$

то дифференцируя $Pr(|S_n| \leq r)$ по r , получаем функцию плотности распределения

$$f_n(r) = \chi(r) \frac{2^{1-\frac{\nu}{2}} r^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \int_0^{\infty} t J_{\frac{\nu}{2}-1}(rt) \prod_{m=1}^n j_{\frac{\nu}{2}-1}(l_m t) t^{\frac{\nu}{2}-1} dt.$$

Для $\nu = 2$ получаем модель **Клювера** движения агентов по плоскости с равной вероятностью выбора любого угла θ_m между $-\pi$ и π . В этой модели вероятность того, что после n прыжков расстояние от начальной точки будет меньше или равно r

$$Pr(|S_n| \leq r) = \chi(r)r \int_0^{\infty} J_1(rt) \prod_{m=1}^n J_0(l_m t) dt$$

и плотность вероятности

$$f_n(r) = \chi(r)r \int_0^{\infty} t J_0(rt) \prod_{m=1}^n J_0(l_m t) dt.$$

Заметим, что $j_0(x) = J_0(x)$

Если $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$, то получается модель

Пирсона–Рэлэя

$$\Pr(|S_n| \leq r) = \chi(r)r \int_0^{\infty} J_1(rt) J_0^n(lt) dt,$$

$$f_n(r) = \chi(r)r \int_0^{\infty} t J_0(rt) J_0^n(lt) dt.$$

Полагая $l = vl_1$, получим

$$\Pr(|S_n| \leq r) = \chi(r)r \int_0^{\infty} J_1(rt) J_0^n(vl_1 t) dt = \chi(r) \frac{r}{v} \int_0^{\infty} J_1\left(\frac{r}{v}\tau\right) J_0^n(l_1\tau) d\tau$$

Далее будет показано, что $v > 0$ имеет смысл модули скорости агента.

В настоящее время хорошо известны многоагентные, т.е. имитационные модели распространения эпидемии, распространения лесного пожара, миграций животных, менее известны модели по типу клеточных автоматов в механике сплошных сред и т.п. Поскольку для работы многоагентной модели необходимо просчитывать перемещения и взаимодействия каждого агента, то при значительном количестве агентов требования к вычислительной мощности у такой модели могут быть очень велики. Например, для моделирования пандемии может оказаться необходимым учитывать взаимодействия сотен миллионов агентов. В этом случае представляется целесообразным использовать модели на основе дифференциальных уравнений.

Пусть задано множество агентов $Ag = \{ag_1, \dots, ag_m\}$, каждый агент ag_i имеет параметры (x_i, y_i) – координаты, l_i – длина прыжка, v_i – скорость, φ_i – направление движения относительно оси ординат, ψ_i – направление движения относительно плоскости xOy (в трехмерном случае), $i = \overline{1, m}$. Все агенты первоначально находятся в начале координат и далее начинают движение по прямой в направлении, определяемом углами φ_i и (в трехмерном случае) ψ_i . В качестве среды многоагентного моделирования была использована свободно распространяемая система NetLogo.

Многоагентная модель

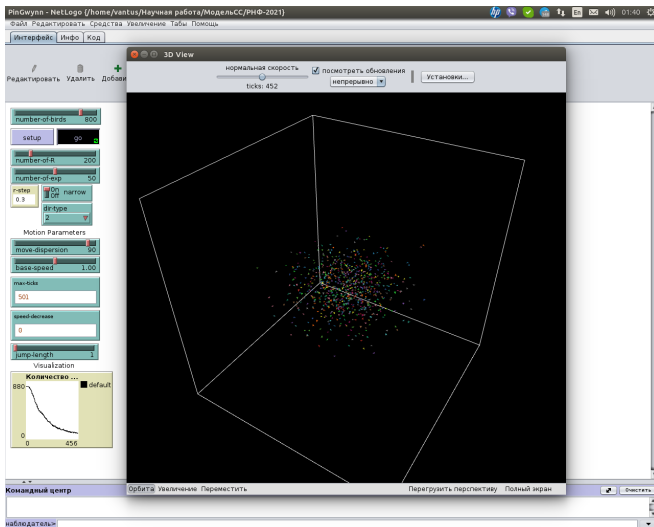
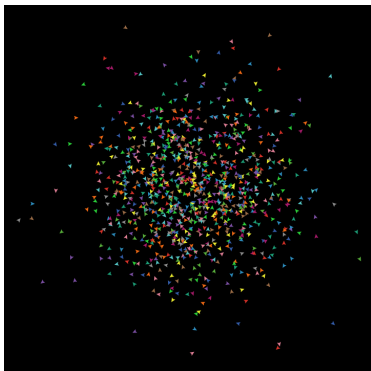


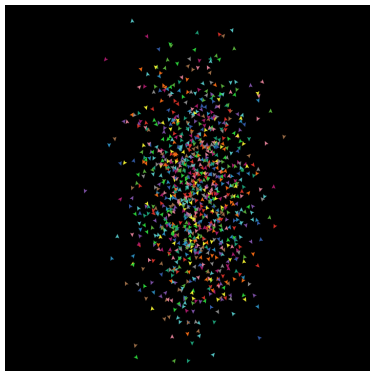
Рис.: Модель движения агентов в NetLogo

Изотропный и анизотропный случаи

В изотропной модели, соответствующей четным ν , угол направления агента $\varphi \in [0, 2\pi)$ относительно оси Oy и угол наклона агента $\psi \in [0, 2\pi)$ относительно плоскости xOy в трехмерном случае являлись равномерно распределенными случайными величинами, которые вычислялись каждый такт дискретного времени. Во анизотропной модели, соответствующей нечетным или нецелым ν , агент выбирал в одномерном случае угол $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \pi$ с равными вероятностями, а потом выбирал дополнительно добавлял к нему $\varphi_1 \in [-\alpha, \alpha)$, $\alpha \leq \pi$, в итоге совершая движение под углом $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. В двумерном случае агент выбирал угол направления агента $\varphi \in [0, 2\pi)$ относительно оси Oy как равномерно распределенную случайную величину, а угол наклона агента относительно плоскости xOy – как равномерно распределенную случайную величину $\psi \in [-\alpha, \alpha)$.



(a) Движение агентов при равной вероятности выбора любого направления движения



(b) Движение агентов, предпочитающих движение вдоль оси Oy

Рис.: Две модели движения агентов, $t = 375$

В ходе экспериментов подсчитывалась величина $\rho(t, r) = N(t, r)/m$, где $N(t, r)$ – количество агентов в круге радиуса r с центром в начале координат в момент времени t . Для размерностей $n = 2$ и $n = 3$ и для различных видов движения агентов были проведены несколько вычислительных экспериментов, по 51 эксперименту в каждом. По значениям функции ρ в моменты времени n и для радиусов r в этих экспериментах было вычислено среднее значение $\bar{\rho}(n, r)$, которое сравнивалось с $Pr(|S_n| \leq r)$, $\nu = 2$ и $\nu = 3$. В качестве меры оценки качества предсказания использовалась R^2 , определенная для $\{y_1, \dots, y_l\}$ со средним значением \bar{y} и для предсказанных значений $\{f_1, \dots, f_l\}$ как

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^l (y_i - f_i)^2}{\sum_{i=1}^l (y_i - \bar{y})^2}.$$

Пусть $m = 1000$, $l_i = 1$, $v_i = 1$, $i = \overline{1, m}$, агенты движутся по плоскости по изотропной модели. В качестве примера можно привести зависимости, приведенные на рисунках на следующих слайдах. Для $\bar{\rho}(n, 4.5)$ коэффициент детерминации $R^2 = 0.993696$ (первые 150 моментов времени), для $\bar{\rho}(15, r)$ коэффициент детерминации $R^2 = 0.9967$ (r от 0.3 до 9 с шагом 0.3), близкие значения получались и при других значениях параметров.

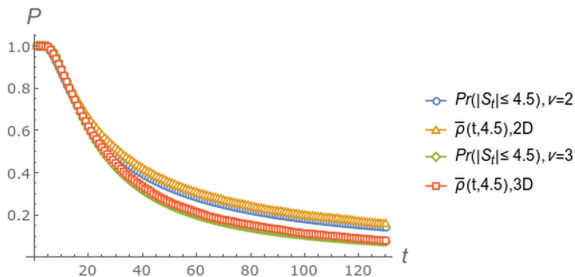


Рис.: Сравнение теоретической и многоагентной моделей при фиксированном радиусе $r = 4.5$ для двумерного (2D) и трехмерного (3D) случаев

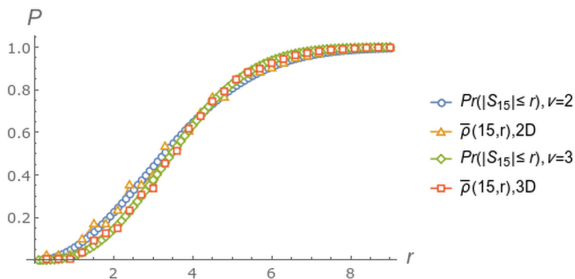


Рис.: Сравнение теоретической и многоагентной моделей при фиксированном времени $n = 15$ для двумерного (2D) и трехмерного (3D) случаев

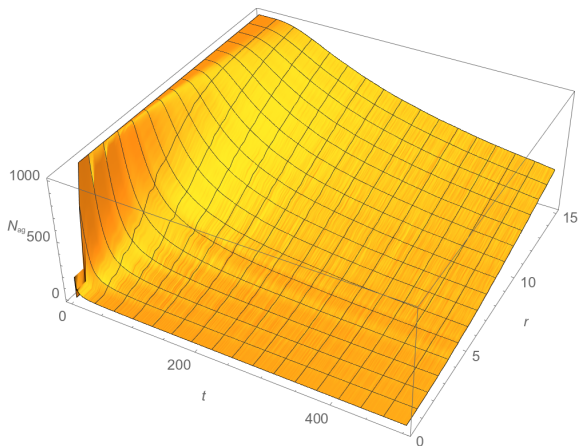


Рис.: Общий вид функции $N_{ag} = m\bar{\rho}$ среднего количества агентов в круге радиуса r в момент времени t для многоагентной модели

Влияние скорости

Параметр v имеет смысл скорости, что подтверждается экспериментами с $v = v_i = 0.5$ и $v_i = 0.25$, $i = \overline{1, m}$. Для $\bar{\rho}(n, 4.5)$ коэффициент детерминации $R^2 = 0.982718$ для $v = 0.25$, а для $v = 0.5$ $R^2 = 0.99165$ (первые 400 моментов времени).

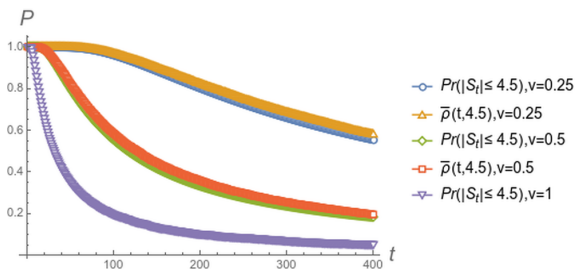
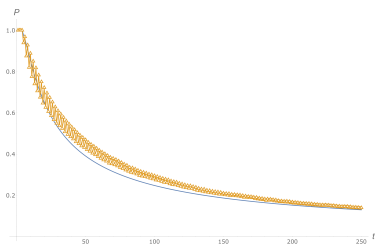


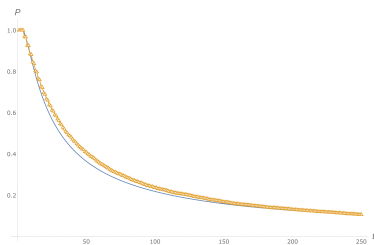
Рис.: Сравнение значений $\bar{\rho}(t, 4.5)$ и непрерывной модели при различных скоростях v движения агентов

Трёхмерный случай

И в этом случае непрерывная модель с $\nu = 3$ хорошо предсказывает поведение многоагентной. Для $\rho(t, 4.5)$ $R^2 = 0.998016$ (первые 130 моментов времени), для $\rho(15, r)$ $R^2 = 0.999029$ (r от 0.3 до 9 с шагом 0.3).



(a) $\nu = 1.5$, $\alpha = 30$



(b) $\nu = 1.7$, $\alpha = 45$

Рис.: Значения $\bar{\rho}(t, 4.5)$ (маркеры) и $Pr(|S_t| \leq 4.5)$ (линия) для анизотропной модели

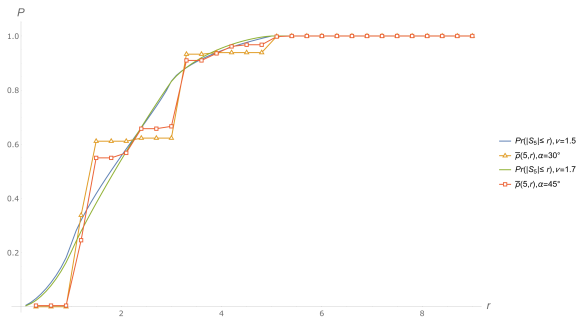


Рис.: Значения $\bar{p}(5, r)$ (маркеры) и $Pr(|S_5| \leq r)$ (линия) для анизотропной модели

Нецелые значения параметра $\nu > 1$ позволяют применять теоретическую модель и к движению агентов по анизотропной модели. Движению агентов на плоскости вдоль выбранного направления с отклонением $0 < \alpha < \pi$ от него будут соответствовать $1 < \nu < 2$ (рисунки 25, 26), в пространстве вдоль выбранной плоскости с отклонением $-\pi < \alpha < \pi$ будут соответствовать $2 < \nu < 3$. Точное соответствие ν и α не изучалось, однако можно сказать, что, например, в двумерном случае $\bar{\rho}(t, 4.5)$ с $\alpha = 30^\circ$ и $Pr(|S_t| \leq 4.5)$ с $\nu = 1.5$ соответствуют друг другу с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.967881$, $\bar{\rho}(t, 4.5)$ с $\alpha = 45^\circ$ и $Pr(|S_t| \leq 4.5)$ с $\nu = 1.7$ соответствуют друг другу с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.988073$ для первых 250 моментов времени.

Спасибо за внимание