

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук



На правах рукописи

Кружков Валерий Игоревич

**Моделирование области достижимости формы плазмы в
токамаке**

Специальность 1.2.2 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Коньков Артем Евгеньевич

Москва — 2026

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Численный метод построения ОД для модели с постоянными параметрами в установившемся режиме .	12
1.1 Обзор методов оценки области достижимости	12
1.2 Моделирование области достижимости в установившемся режиме.	15
1.3 Математическое моделирование системы управления плазмой с постоянными параметрами	18
1.4 Выводы по Главе 1	29
Глава 2. Численный метод оценки ОД для модели с переменными параметрами	31
2.1 Постановка задачи	31
2.2 Последовательное моделирование области достижимости по каналам	33
2.3 Оценка ОД для токамака Глобус-М2	39
2.4 Выводы по Главе 2	44
Глава 3. Комплекс программ для моделирования плазменных разрядов	46
3.1 Пользовательский интерфейс	46
3.2 Реализация верхней и нижней оценок области достижимости . . .	50
3.3 Рекуррентное вычисление расширенных матриц связи	52
3.4 Итеративное вычисление оценки ОД	55
3.5 Выводы по Главе 3	58
Глава 4. Математическое моделирование систем магнитного управления в токамаке	60
4.1 Синтез математических моделей, связывающих сигналы магнитной диагностики и форму плазмы	60

4.2	Математическое моделирование и численные методы для оценки ОУ	75
4.3	Математическое моделирование системы управления плазмой в токамаке КТМ в рабочем и экстремальном режимах	83
4.4	Выводы по Главе 4	91
Заключение		93
Список сокращений и условных обозначений		96
Список литературы		98
Приложение А. Акт о внедрении результатов диссертационной работы		114
Приложение Б. Патент Российской Федерации на изобретение № 2787571		117
Приложение В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ		118

Введение

Актуальность темы исследования. Определение областей достижимости (ОД) — фундаментальная задача теории управления [1—5]. Классические подходы к её решению сталкиваются с принципиальными вычислительными ограничениями при работе с высокоразмерными системами [1; 3; 4; 6—8]. Экспоненциальный рост сложности, необходимость построения выпуклых оболочек в многомерных пространствах и трудности учёта переменных параметров делают эти методы неприменимыми ко многим современным задачам. В таких случаях исследователи вынуждены ограничиваться оценками сверху или использовать существенно упрощённые модели, что снижает ценность результатов [4]. Особенно остро эта проблема стоит в области управления плазмой в термоядерных установках-токамаках, где модели могут содержать десятки переменных состояния [9].

Областью достижимости управляемой системы из начального состояния $x(0) = 0$ называется множество всех конечных состояний $x(T)$, которых можно достичь за конечное время T , используя допустимые управляющие воздействия, удовлетворяющие заданным ограничениям [10].

Токамаки [11] являются наиболее перспективными устройствами для будущего управляемого термоядерного синтеза (УТС) [12—18]. Принцип их действия основан на создании магнитного поля, удерживающего высокотемпературную плазму. В аксиально-симметричной конфигурации токамака важную роль играет *форма плазмы* — геометрическое место точек, ограничивающих плазменный шнур в полоидальном сечении. Полоидальное сечение — это вертикальное сечение тороидальной камеры токамака плоскостью R, Z , проходящей через её вертикальную ось симметрии. Для описания формы используются большой и малый радиусы, вытянутость, треугольность, а также более детальные характеристики: зазоры между границей плазмы и лимитером по нескольким направлениям и координаты ударных точек. Знание формы плазмы необходимо для управления конфигурацией магнитного поля и предотвращения контакта плазмы с элементами установки [19]. Прямое измерение формы плазмы в токамаке невозможно из-за экстремальных условий в камере. Поэтому ее параметры восстанавливаются косвенно: по сигналам внешней магнитной диагностики [9;

20; 21] или по оптическим изображениям [22] с помощью вычислительных алгоритмов, решающих обратную задачу равновесия.

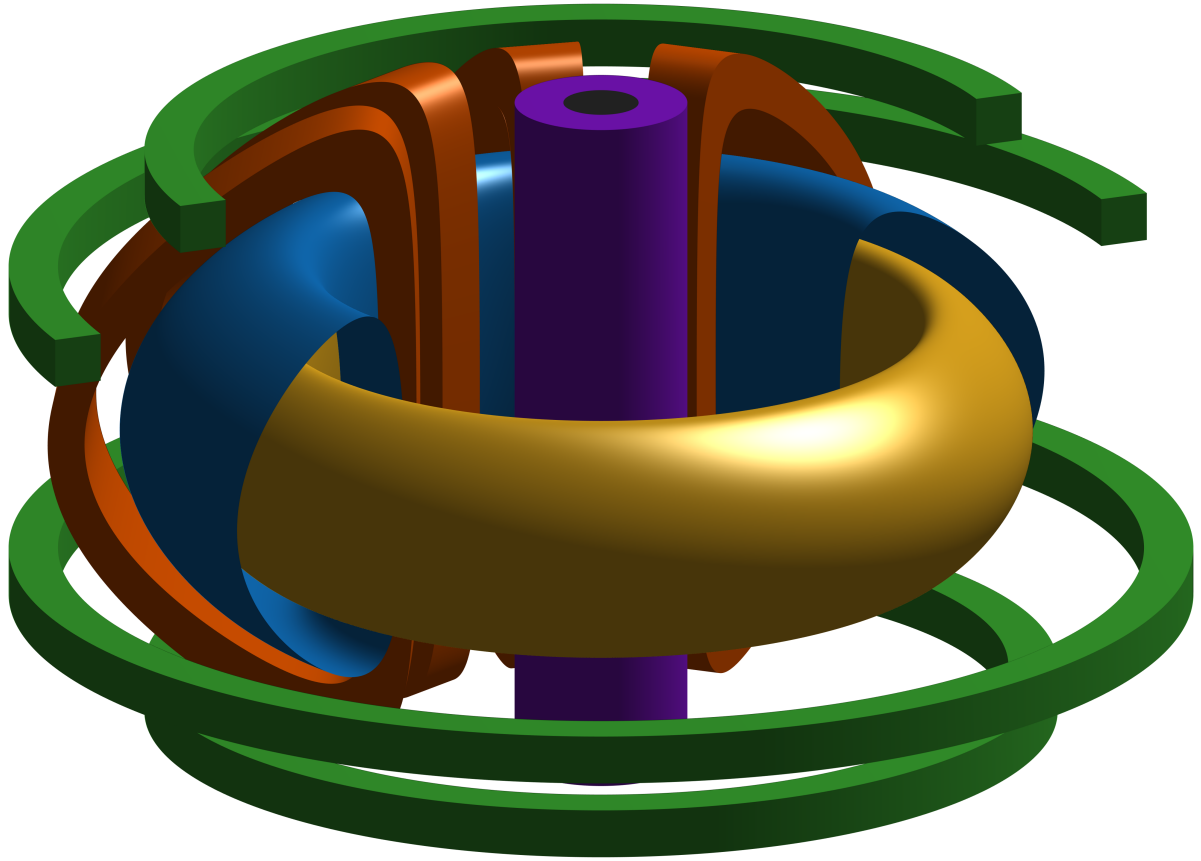


Рисунок 1 — Принципиальная схема токамака. Желтый — плазма, синий — вакуумная камера (в разрезе), красный — обмотки тороидального поля (показана часть), фиолетовый — индуктор, зеленый — обмотки полоидального поля (верхние в разрезе)

Современные токамаки, как правило, имеют вытянутое по вертикали сечение плазмы. Это улучшает удержание, но порождает *неустойчивость вертикального положения*: малое возмущение может привести к экспоненциальному росту смещения плазмы [23]. Поэтому для безопасного проведения экспериментов необходима система управления с обратной связью [13—16; 24; 25]. Ограниченность управляющего воздействия (напряжения на обмотках) приводит к ограниченной *области управляемости* по вертикали — множества начальных отклонений, из которых плазму можно вернуть в равновесное состояние. Знание её границ позволяет избежать аварийных ситуаций и правильно планировать сценарии разряда.

Особый интерес представляют *сферические токамаки* (рис. 2) с малым аспектным отношением, обладающие повышенной устойчивостью и эффектив-

ностью использования магнитного поля [14; 26—28]. Модели такой установки (Глобус-М2) служат одним из объектов исследования в диссертационной работе.

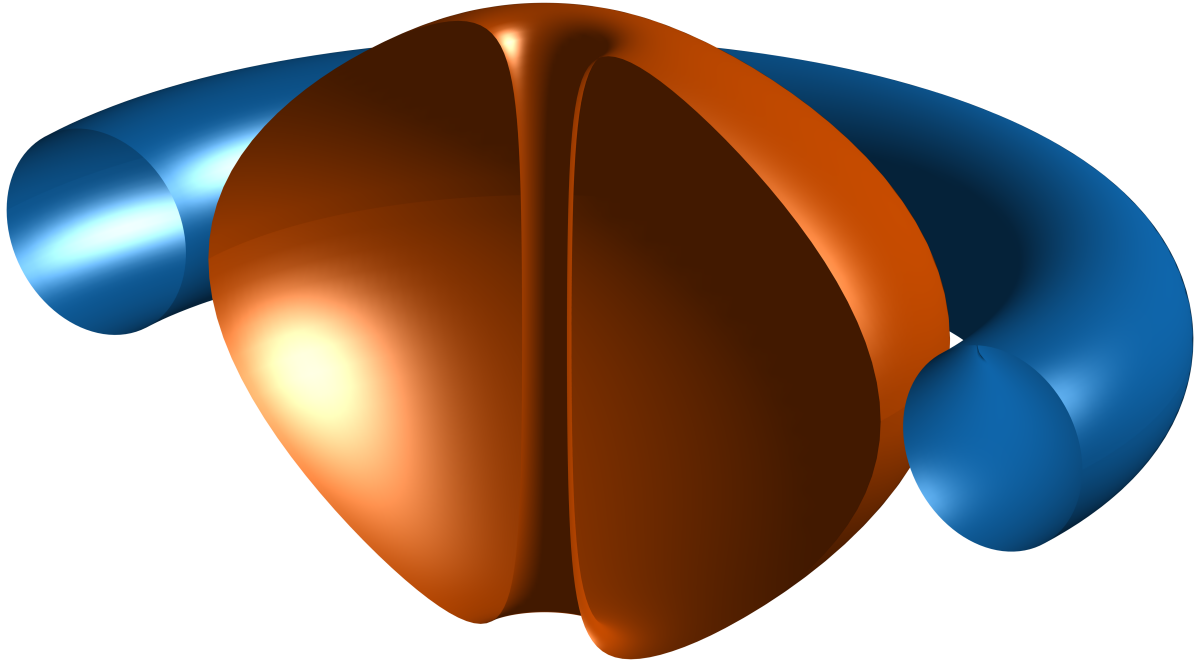


Рисунок 2 — Сравнение конфигураций традиционного и сферического токамаков. Синим показан тор с аспектным отношением $A = 5$, вытянутостью $k = 1$, и треугольностью $\delta = 0$. Красным — с параметрами $A = \frac{8}{7}$, $k = 1,7$, $\delta = 0,75$

Помимо задачи стабилизации вертикального положения, в процессе подготовки экспериментов требуется формирование магнитной конфигурации с заданной *формой плазмы*. Однако не любая желаемая конфигурация достижима при существующих технических ограничениях на напряжения и токи в обмотках полоидального поля, а также на допустимые зазоры между плазмой и стенками вакуумной камеры. Следовательно, необходима предварительная оценка *области достижимости* формы плазмы — множества параметров, которые могут быть реализованы в рамках заданных ограничений. Такая оценка позволяет повысить эффективность планирования экспериментов и снизить риски.

Для управления плазмой в реальном времени, помимо оценок области управляемости и области достижимости, необходимы также *быстрые методы восстановления её формы* по сигналам внешней магнитной диагностики. Итерационные алгоритмы, такие как FCDI [9], обеспечивают высокую точность, но требуют значительных вычислительных затрат. Вместе с тем, для планирования сценариев экспериментов, в частности в интервалах между разрядами,

возникает потребность в многократном быстром просчёте возможных конфигураций плазмы при варьируемых параметрах. В таких условиях целесообразно применение упрощённых аппроксимационных моделей, построенных на основе идентификации по экспериментальным данным, полученным с помощью эталонных алгоритмов. Это позволяет проводить оперативное моделирование и заблаговременно оценивать достижимость желаемых параметров формы плазмы, что повышает эффективность подготовки экспериментов.

Степень научной разработанности темы. Широко развиты методы оценки области достижимости для моделей объектов с числом состояний не более 3-х, а также подходы для моделей высокого порядка, основанные на оценках сверху (Поляк Б. Т. [1; 29–32], Щербаков П. С. [1; 3; 29; 30], Хлебников М. В. [1; 4; 32], Тюлюкин В. А. [6; 33; 34], Черноусько Ф. Л. [10; 35–39], Овсеевич А. И. [37–42], Ушаков В. А. [43–49], Формальский А. М. [50–55], Балашов М. В. [56]). Применительно к системам магнитного управления плазмой в токамаке эта тема разработана слабо. В ряде работ затрагивается тема многомерного управления формой плазмы с точки зрения ее связи с изменением токов в управляющих обмотках, что является основой оценки многомерной области достижимости формы плазмы (Maviglia F. [57], Mele A. [58]).

Проблема области управляемости по вертикали была рассмотрена при математическом моделировании одного из проектов токамака ИТЭР, по результатам оценки ОУ была выработана рекомендация расположить дополнительные обмотки горизонтального поля внутри камеры [59]. Для проекта IGNITOR было найдено оптимальное расположение НФС с критерием оптимизации в виде размера области управляемости по вертикали внутри обмотки тороидального поля, вблизи вакуумной камеры [60].

Подходы на основе идентификации использовались для оценки параметров плазмы в реальном времени в токамаке COMPASS (Великобритания) [61], сферическом токамаке START (Великобритания) [62], ASDEX-Upgrade (Германия) [63], D-IIID (США) [64], моделях ИТЭР [65]. Код восстановления EFIT был аппроксимирован нейронными сетями [21]. Показана применимость нейронной сети в обратной связи при математическом моделировании системы управления токамака Глобус-М2 [66].

В работах Коренева П. С. [9; 67] на основе данных токамака Глобус-М2 выполнено восстановление равновесных конфигураций плазмы с помощью кода FCDI. Полученные распределения магнитного потока и границы плазмы

легли в основу линейных математических моделей с постоянными и переменными параметрами.

Объектом исследования являются линейные динамические модели плазмы в токамаке с ограниченными входами и выходами, а также системы магнитного управления плазмой в токамаках.

Предметом исследования выступают численные методы и комплексы программ для нахождения реализуемых конфигураций плазмы в токамаке и математического моделирования плазменных экспериментов.

Целью является проведение математического моделирования плазменных экспериментов, которое включает развитие численных методов построения многомерной области достижимости, реализованных в виде проблемно-ориентированного комплекса программ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**.

1. Разработать численный метод оценки многомерной области достижимости модели плазмы в токамаке с постоянными параметрами в установившемся режиме.
2. Разработать численный метод нахождения точек внутри области достижимости модели плазмы в токамаке с переменными параметрами.
3. Реализовать разработанные численные методы в составе проблемно-ориентированного комплекса программ для математического моделирования плазменного эксперимента.
4. Разработать математическую модель, связывающую внешние магнитные измерения с оценкой формы плазмы в токамаке, предназначенную для оперативного моделирования плазменных экспериментов.
5. Провести математическое моделирование систем магнитного управления плазмой в токамаках в рабочих и экстремальных режимах.

Методы исследования базируются на системном подходе, объединяющем математическое моделирование, численные методы и программную реализацию.

Научная новизна:

- 1) разработан численный метод оценки многомерной области достижимости для линейных моделей с постоянными параметрами и ограниченными управлениями, отличающийся от известных подходов использованием симплекс-метода для анализа влияния отклонений

выходов на изменение управляющих сигналов в установившемся режиме и позволяющий находить верхние и нижние границы достижимых отклонений формы плазмы;

- 2) разработан численный метод нахождения точек внутри области достижимости, отличающийся от существующих возможностью использования моделей с переменными параметрами высокого порядка;
- 3) создан проблемно-ориентированный комплекс программ, реализующий разработанные численные методы п.п. 1) и 2), и внедренный в практику экспериментов на токамаке Глобус-М2;
- 4) разработана математическая модель, связывающая внешние магнитные измерения с оценкой формы плазмы в токамаке, отличающаяся низкой вычислительной сложностью, что обеспечивает высокое быстродействие при применении на целевой машине реального времени;
- 5) проведено математическое моделирование систем магнитного управления плазмой в токамаках Глобус-М2 и КТМ, отличающееся рассмотрением экстремальных режимов работы системы с использованием полных нелинейных моделей исполнительных устройств.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью и полнотой исходных положений и непротиворечивостью математических выкладок. Программная реализация разработанных методов выполнена в среде MATLAB с применением пакета HiGHS для решения задач линейного программирования. Результаты теоретических исследований подтверждены средствами математического моделирования, они находятся в полном соответствии с общеизвестными результатами, дополняют и развивают их. Общая структура и подход к решению вышеозначенных задач опубликованы в рецензируемых журналах.

Соответствие паспорту специальности Работа соответствует специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по следующим пунктам паспорта специальности.

- п. 3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.
- п. 7. Качественные или аналитические методы исследования математических моделей (технические науки).

- п. 8. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.
- п. 9. Постановка и проведение численных экспериментов, статистический анализ их результатов, в том числе с применением современных компьютерных технологий (технические науки).

Теоретическая значимость работы состоит в том, что разработанные численные методы позволяют оценивать область достижимости широкого класса линейных динамических моделей с десятками переменных состояния, ограниченными входами и выходами.

Практическая значимость состоит в том, что разработанный комплекс программ позволяет оперативно, в течение 10-минутной паузы между плазменными разрядами, проводить моделирование эволюции формы плазмы в токамаке, и уже на этапе моделирования отбрасывать заведомо нереализуемые сценарии плазменного разряда, что повышает эффективность и качество плазменных экспериментов.

Реализация результатов работы. Разработанные методы построения областей достижимости реализованы в виде проблемно-ориентированного комплекса программ. Комплекс программ установлен на подключенной к базе данных разрядов токамака Глобус-М2 ЭВМ для повышения эффективности планирования экспериментов за счет отсеивания сценариев, противоречащих ограничениям электромагнитной системы, что подтверждается актом о внедрении результатов диссертационной работы.

Основные положения, выносимые на защиту:

- 1) численный метод оценки многомерной области достижимости формы плазмы линейных моделей с постоянными параметрами и ограничениями на входы, использующий анализ матрицы, связывающей входы и выходы в установившемся режиме (п. 7);
- 2) численный метод нахождения точек внутри области достижимости линейных моделей с переменными параметрами и ограничениями на входы и выходы (п. 7);
- 3) комплекс программ, реализующий разработанные численные методы оценки области достижимости для моделирования плазменных экспериментов в токамаке (п. 3);

- 4) математические модели, связывающие внешние магнитные измерения с формой плазмы (п. 8);
- 5) результаты математического моделирования систем магнитного управления плазмой в токамаках в рабочих и экстремальных режимах (п. 7, п. 9).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

- научных семинарах лаборатории № 41 ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН,
- 17-й Всероссийской школе-конференции молодых учёных «Управление большими системами» (УБС-2021, Москва),
- международном симпозиуме «Интеллектуальные системы» (INTELS-2022, Москва),
- 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB-2020, Москва),
- 46th EPS Conference on Plasma Physics (EPS-2019, Милан).

Связь с планами научных исследований. Работа проводилась в рамках плановых фундаментальных научных исследований ИПУ РАН, поддержана грантами РНФ №№ 21-79-20180, 21-79-20180-П.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, индексируемых в международных базах данных и приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1, 4 — в трудах конференций, 1 — в прочих изданиях. Зарегистрированы 1 патент и 1 программа для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 3 приложений. Полный объём диссертации составляет 118 страниц, включая 43 рисунка и 1 таблицу. Список литературы содержит 154 наименования.

Глава 1. Численный метод построения ОД для модели с постоянными параметрами в установившемся режиме

Глава посвящена численному методу построения многомерной ОД. Рассматривается численный метод оценки области достижимости для математической модели токамака с постоянными параметрами в установившемся режиме и ограничениями на управляющие воздействия. Результаты главы опубликованы в работах автора [144–147].

1.1 Обзор методов оценки области достижимости

Областью достижимости управляемой системы из начального состояния $x(0) = 0$ называется множество всех конечных состояний $x(T)$, которых можно достичь за конечное время T , используя допустимые управляющие воздействия, удовлетворяющие заданным ограничениям [5; 10; 51]. Задача построения или оценки областей достижимости широко изучалась в теории управления. В [51] для непрерывных линейных систем с постоянными параметрами и симметричными ограничениями на модуль, энергию и/или импульс, были установлены свойства областей достижимости. Пусть $Q(T)$ — область достижимости системы за время T . Тогда, выполняются следующие свойства:

1. **Выпуклость:** $Q(T)$ выпукло. Если $x_1, x_2 \in Q(T)$, то для любого $\lambda \in [0, 1]$ точка $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ также принадлежит $Q(T)$.
2. **Монотонность по времени:** семейство $\{Q(T)\}$ монотонно не убывает с ростом T , т. е. если $T_1 < T_2$, то $Q(T_1) \subseteq Q(T_2)$.
3. **Симметричность:** множество $Q(T)$ симметрично относительно начала координат: если $x \in Q(T)$, то $-x \in Q(T)$.
4. **Замкнутость:** при ограничениях на управление типа модуль множество $Q(T)$ является замкнутым (содержит все свои предельные точки).

Эти свойства играют важную роль при построении как точных, так и аппроксимационных методов оценки областей достижимости. В частности, монотонность позволяет изучать предельное поведение при $T \rightarrow \infty$, а симметричность упрощает анализ.

В зависимости от способа представления множества и вычислительной стратегии можно выделить несколько основных классов методов.

Эллипсоидальные методы аппроксимируют область достижимости эллипсоидом в фазовом пространстве [10; 38; 39]. Эллипсоид задаётся центром и матрицей квадратичной формы, что соответствует евклидовой l_2 -норме. Достоинства таких оценок – компактное представление, эффективное решение для линейных систем, возможность работы с высокой размерностью. Недостатки – методы дают лишь внешнюю оценку и ограниченно применимы для моделей с переменными параметрами.

В рамках данного подхода можно выделить несколько направлений. Работы [10; 38; 39] посвящены построению внешних эллипсоидов, содержащих множество достижимости. Для непрерывных систем эволюция параметров эллипсоида описывается дифференциальными уравнениями, вытекающими из принципа максимума. В [42] получены явные формулы для таких эллипсоидов в случае систем с ограниченными управлениями. Для дискретных динамических систем [31] развиты алгоритмы, основанные на минимизации следа матрицы эллипсоида. Доказана сходимость рекуррентных оценок к предельному эллипсоиду, содержащему предельное множество достижимости. Важную роль при этом играет выбор весовой матрицы, позволяющий повысить точность аппроксимации. В [68] приведены методы, позволяющие связать ограничения на входные воздействия в виде эллипсоидов и внутренние оценки множества достижимости, также в виде эллипсоидов. Развитие эллипсоидальных подходов применительно к системам с запаздыванием представлено в работах [69; 70], получены условия в виде линейных матричных неравенств (ЛМН), гарантирующие, что эллипсоид содержит множество достижимости системы с ограниченными внешними возмущениями.

Полиэдрические методы строят аппроксимацию области достижимости в виде многогранника (полиэдра). Они подразделяются на подходы, использующие фиксированную сетку направлений [71], и адаптивные методы, которые уточняют многогранник в направлениях наибольшего отклонения. Для линейных систем с полиэдральными ограничениями на управление и возмущения предложен подход, основанный на решении сопряжённого уравнения: нормали граней полиэдра эволюционируют аналитически через матричную экспоненту, что позволяет вычислить положение каждой опорной гиперплоскости в любой момент времени [72]. Метод эффективен как для линейных, так и для некото-

рых классов нелинейных систем, но требует априорного выбора числа граней начального полиэдра.

Для систем умеренной размерности (не более 6–8) разработаны методы, позволяющие строить полиэдральную аппроксимацию множеств достижимости с любой наперёд заданной точностью [73]. Используется расчёт опорной функции через принцип максимума Понтрягина и последующая аппроксимация методом уточнения оценок. Метод учитывает кусочно-постоянные коэффициенты и импульсные воздействия, позволяет оптимизировать параметры дискретизации.

В [74] предложен метод, основанный на итеративном построении внутреннего многогранника: для каждой грани текущего полиэдра решается выпуклая оптимизационная задача, новая опорная точка добавляется в вершины, и полиэдр обновляется. Процесс останавливается при достижении заданной точности. Метод даёт внутреннюю аппроксимацию с контролируемой погрешностью.

Для дискретных линейных систем с ограниченным по модулю управлением в [75] предложен метод аппроксимации множества достижимости путём разложения системы на инвариантные подпространства, соответствующие действительным и комплексным собственным значениям. Для каждого блока (1×1 или 2×2) строится полигональная аппроксимация, затем они объединяются обратным преобразованием в многогранник в исходном пространстве. Метод позволяет получать внешние полиэдральные оценки для устойчивых диагонализуемых систем.

Значительное число работ посвящено анализу точной полиэдральной структуры множеств достижимости и управляемости для дискретных систем с интегральными ограничениями на управление. В [55] исследованы множества достижимости для систем с одним скалярным управлением при одновременном наложении ограничений по модулю и импульсу. Показано, что множества являются многогранниками, их структура определяется расположением собственных значений матрицы системы относительно единичной окружности.

В [76; 77] получены необходимые и достаточные условия ограниченности предельных множеств достижимости. Показано, что эти множества являются строго выпуклыми и могут быть аппроксимированы многогранниками с любой точностью.

Зонотопы – специальный класс центрально-симметричных выпуклых многогранников, задаваемых центром и набором генераторов. В [78] предложен

метод построения внешней оценки ОД для систем в непрерывном времени с постоянными параметрами и ограничениями на неопределенность в виде l_∞ -нормы при помощи зонотопов, хорошо масштабируемый на системы высокой размерности.

Другой класс методов сводит многошаговую оценку ОД к рекуррентному вычислению одношаговых оценок, которые требуют построения выпуклой оболочки множества точек в n -мерном пространстве состояний [6—8]. Количество гиперграней такого многогранника может расти экспоненциально с увеличением размерности n и числа вершин N :

$$F(n, N) = \begin{cases} \frac{2N}{n} C_{N-n/2-1}^{n/2-1}, & \text{для четных } n, \\ 2C_{N-\lfloor n/2 \rfloor - 1}^{\lfloor n/2 \rfloor}, & \text{для нечетных } n, \end{cases}$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — округление вниз, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний. Таким образом, $F(n, N) = O(N^{\lfloor n/2 \rfloor})$, что свидетельствует об экспоненциальном росте сложности с увеличением числа вершин [79; 80].

Вычислительная сложность перечисленных методов делает их применение затруднительным для моделей высокого порядка, характерных для систем управления плазмой в токамаках (размерность моделей достигает десятков переменных состояния) [9; 67; 81]. Они не учитывают переменные параметры модели плазмы, не позволяют накладывать ограничения на выходные сигналы, дают лишь внешнюю или только внутреннюю оценку, не предназначены для эффективного поиска конкретных реализуемых точек и существенно ограничены по размерности пространства состояний.

1.2 Моделирование области достижимости в установившемся режиме.

В данной главе развита методика оценки области достижимости, строящей область в равномерной l_∞ -норме, где расстояние определяется как $\rho(x) = \max_i |x_i|$ [82]. Такой выбор обусловлен спецификой задачи: поскольку строится область достижимости по составляющим формы плазмы, оценка в l_∞ -норме позволяет одним числом охарактеризовать допустимое отклонение любого из

этих зазоров. Задача разбита на построение верхней (внешней) и нижней (внутренней) оценок. Для вычисления нижней оценки используется симплекс-метод, и хотя симплекс-метод в худшем случае имеет экспоненциальную сложность, на практике он демонстрирует полиномиальную сходимость в среднем [83], что обеспечивает вычислительную эффективность при работе с моделями плазмы в токамаке.

Рассмотрим линейную стационарную модель, заданную в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^p$ – вектор управляющих воздействий, $y \in \mathbb{R}^m$ – вектор выходных переменных, A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что система устойчива и матрица A обратима, а управления ограничены по модулю:

$$|u_j| \leq u_{j \max}, \quad j = 1, \dots, p.$$

В установившемся режиме ($\dot{x} = 0$) связь между выходами и управлениями определяется матрицей:

$$y = -CA^{-1}Bu = Mu.$$

Таким образом, задача оценки области достижимости выходов сводится к исследованию множества $\{y = Mu : |u_j| \leq u_{j \max}\}$.

Назовем верхней оценкой для каждой выходной переменной y_i ($i = 1, \dots, m$) максимальное значение, которого можно достичь при независимом выборе управлений:

$$\begin{aligned}y_i &\rightarrow \max_u, \\ y_i &= \sum_{j=1}^p M_{ij}u_j, \\ |u_j| &\leq u_{j \max}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Поскольку целевая функция линейна, а ограничения независимы по переменным u_j , максимум достигается на границе области: $u_j = \text{sign}(M_{ij})u_{j \max}$. Следовательно,

$$y_{i \max} = \sum_{j=1}^p |M_{ij}| u_{j \max}. \tag{1.2}$$

Эта формула даёт аналитическое выражение для верхней границы области достижимости. Верхняя граница представляет собой гиперпрямоугольник в пространстве размерности m .

Нижняя оценка характеризует максимальное отклонение, которое можно гарантированно получить одновременно по всем выходам. Для её нахождения сначала вычисляются вспомогательные величины $y_{i \max}$ – максимальные отклонения по каждому выходу при условии, что все остальные выходы равны нулю:

$$\begin{aligned} y_i &\rightarrow \max, \\ y &= Mu, \\ y_k &= 0, k \neq i, \\ |u_j| &\leq u_{j \max}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Эта задача является задачей линейного программирования (ЛП) и может быть решена симплекс-методом [83–85].

Пусть найдены значения $y_{i \max}$. Тогда, благодаря линейности и выпуклости, можно показать, что одновременное отклонение всех выходов на величину $y_{\max}$ достижимо, если

$$\sum_{i=1}^m \frac{y_{\max}}{y_{i \max}} \leq 1. \tag{1.4}$$

Отсюда получаем максимальное гарантированное одновременное отклонение:

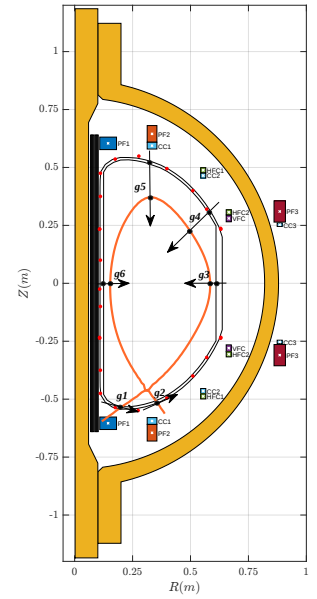
$$y_{\max} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{y_{i \max}} \right)^{-1}. \tag{1.5}$$

Таким образом, нижняя оценка области достижимости имеет вид гиперкуба с центром в начале координат и стороной $2y_{\max}$, вписанного в истинную область достижимости.

Предложенный метод применим к линейным моделям с постоянными параметрами при ограничениях на модуль и не требует построения полного многогранника.



а)



б)

Рисунок 1.1 — а) Токамак Глобус-М2 б) Вертикальное сечение с полоидальной системой, датчиками магнитной диагностики (красные точки) и точками на сепаратрисе ($g1 - g6$)

1.3 Математическое моделирование системы управления плазмой с постоянными параметрами

Сферический токамак Глобус-М2 (рис. 1.1а) является модернизированной версией установки Глобус-М, запущенной в ФТИ им. А.Ф. Иоффе в 1999 году [28; 86—88]. Он входит в число ведущих сферических токамаков мира наряду с NSTX (США) [89; 90], MAST (Великобритания) [91] и предназначен для исследований физики плазмы и отработки технологий управляемого термоядерного синтеза.

Основные параметры установки приведены в таблице 1. Характерными чертами являются малое аспектное отношение ($R_0/a = 1,5$), возможность создания вытянутой по вертикали плазмы и использование двух методов дополнительного нагрева [13; 28; 92; 93].

Форма плазмы в Главах 1 и 4.1 представлены положениями 2-х ударных точек (g_1, g_2) на вакуумной камере и значениями 4-х зазоров ($g_3 - g_6$) между плазмой и вакуумной камерой (рис. 1.16). Ударные точки представляют собой точки пересечения сепаратрисы и лимитера. Их координаты g_1 и g_2 задаются как расстояние от точки на внутренней стенке лимитера с координатой $Z = 0$

Таблица 1 — Основные параметры токамака Глобус-М2 [28]

Большой радиус плазмы, R (м)	0,36
Малый радиус плазмы, a (м)	0,24
Аспектное отношение, R/a	1,5
Вытянутость плазменного шнура	$< 2,0$
Треугольность плазменного шнура	$< 0,5$
Тороидальное магнитное поле (Тл)	1
Ток плазмы (МА)	0,5
Температура электронов (кэВ)	$< 0,7$
Температура ионов (кэВ)	$< 1,0$
Дополнительный нагрев NBI (кэВ/МВт)	30/1
Дополнительный нагрев ICRH (МГц/МВт)	7,5/0,3
Энергетическое время жизни (мс)	5 – 10
Длительность импульса (с)	$< 0,7$

вдоль его поверхности до соответствующей точки. Зазор g_3 рассчитывается как расстояние между точкой на внешней стенке вакуумной камеры и границей плазмы по горизонтальной линии, g_4 – расстояние между камерой и границей плазмы вдоль линии с полоидальным углом 45° , g_5 – расстояние по вертикали до верхней стенки вакуумной камеры, g_6 – расстояние между точкой на внутренней стенке вакуумной камеры и плазмой по горизонтали. Значения g_1 – g_6 описывают форму плазмы в конфигурации с одной нижней X-точкой, характерной для рассматриваемых разрядов. Возможно другое описание формы границы плазмы в токамаке, но предложенные ниже численные методы являются универсальными.

Управление плазмой осуществляется с помощью обмоток полоидального поля (рис. 1.16). Обмотки горизонтального (ОГУП, HFC) и вертикального (ОВУП, VFC) управляющих полей, запитанные через быстродействующие тиристорные инверторы тока, управляют положением плазмы [94]. Центральный соленоид (CS), корректирующая обмотка (CC) и 3 полоидальные обмотки (PF) могут быть использованы для управления формой плазмы (рис. 1.16) [87]. Также в главах 1 и 2 обмотка PF2 разделена на верхнюю и нижнюю составляющие. Таким образом магнитное управление плазмой в токамаке осуществляется посредством восьми сигналов – напряжений в управляющих обмотках.

В диссертационной работе используются математические модели плазмы в токамаке, входами в которых являются напряжения на управляющих обмот-

ках, а выходами – токи в этих обмотках, ток плазмы, координаты магнитной оси и форма плазмы. Получение соответствующих моделей для токамака Глобус-М2 основано на физических законах и приведено в [9]. В текущей главе для построения математических моделей использованы экспериментальные данные пяти разрядов: №№ 37239, 37255, 37257, 37702 на токамаке Глобус-М2 и один разряд № 31648 на токамаке Глобус-М. Эти разряды различаются значениями тока плазмы, длительностью диверторной фазы и характером эволюции формы плазмы, что позволяет охватить различные режимы работы установок. Номера разрядов соответствуют порядковым номерам в архивах экспериментальных данных и используются для однозначной идентификации конкретных реализаций плазменных разрядов.

Электромагнитные процессы в токамаке описываются законом Кирхгофа для контуров, образованных обмотками полоидального поля, пассивными элементами вакуумной камеры и плазменным шнуром. Движение плазмы как целого подчиняется второму закону Ньютона в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Линеаризация этих уравнений в окрестности равновесного состояния и переход к отклонениям позволяют представить динамику плазмы в стандартной форме пространства состояний:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t),\end{aligned}\tag{1.6}$$

где $x(t) = [\delta Z(t), \delta \dot{Z}(t), \delta I^\top(t)]^\top$ — вектор состояния, $u(t) = \delta U(t)$ — вектор напряжений на управляющих обмотках, $y(t) = [\delta Z(t), \delta R(t), \delta I^\top(t), \delta G^\top(t)]^\top$ — вектор выходов. Символ δ применяется для обозначения отклонений от сценария. Отсутствие матрицы прямой связи соответствует физическому принципу: токи в плазме и обмотках не могут измениться мгновенно при изменении напряжения [9]. Индекс i соответствует временным точкам, для которых построена модель. Важное свойство моделей плазмы: все они имеют ровно один неустойчивый действительный полюс $\lambda_{\text{unst}} > 0$, что соответствует неустойчивости плазмы по вертикали. Данный результат согласуется с опытом построения линейных моделей плазмы для других установок типа токамак [19; 95].

Параметры, необходимые для построения моделей: распределение плотности тока $J(z, r, t)$, координаты магнитной оси $R(t), Z(t)$, токи в обмотках $I(t)$, восстанавливаются по экспериментальным данным с помощью итерационного

Исполнительное устройство системы управления положением плазмы в токамаке Глобус-М2 — тиристорные инверторы тока, работающие в автоколебательном режиме и нагруженные на обмотки горизонтального и вертикального полей (рис. 1.2 и 1.3) [94]. При синтезе регуляторов инвертор аппроксимируется пропорциональным звеном, что является грубым приближением. Это обстоятельство, наряду с параметрической неопределённостью, связанной с эволюцией плазмы в ходе разряда, обуславливает необходимость применения робастных регуляторов.

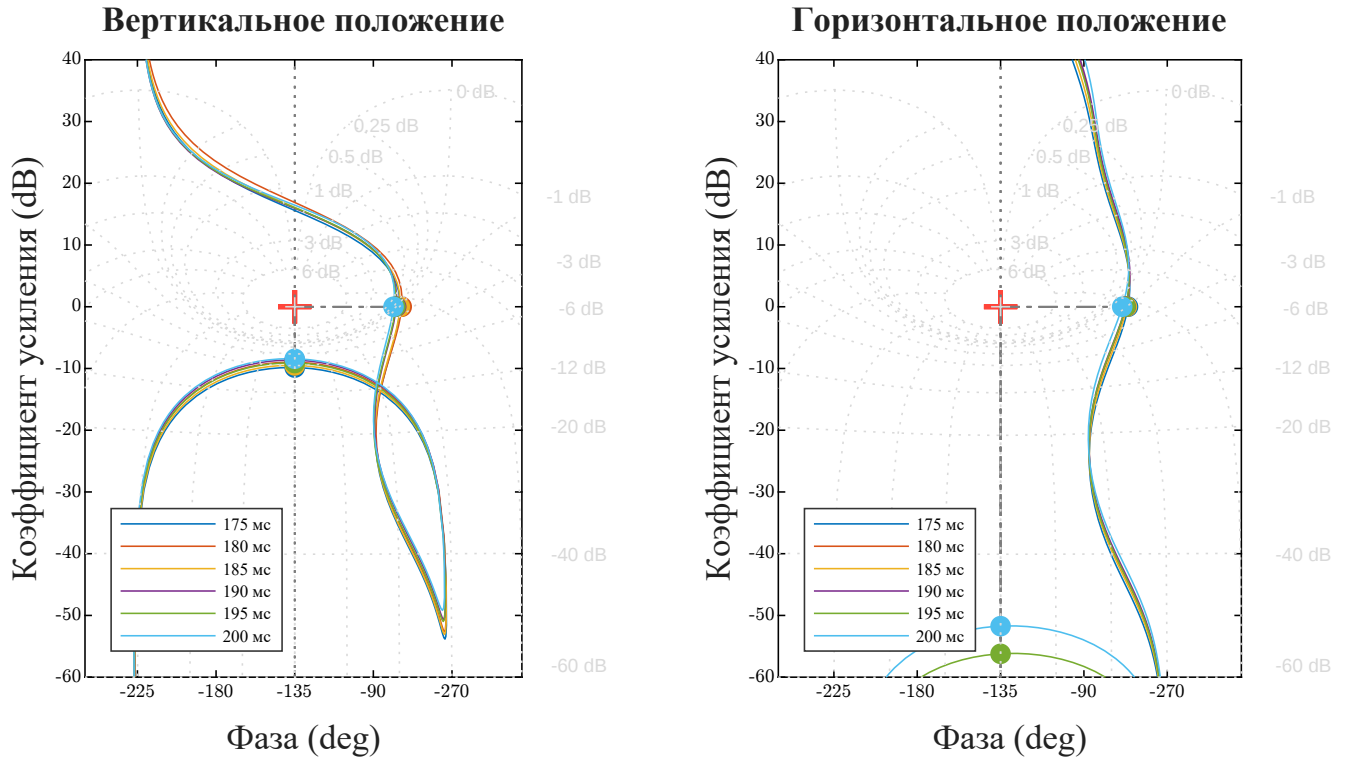


Рисунок 1.4 — Набор диаграмм Николса для моделей плазмы, соответствующих различным моментам на протяжении разряда с ПИД-регуляторами, настроенными методом QFT

Для синтеза регуляторов выбран метод количественной теории обратной связи (QFT) [97], позволяющий настраивать ПИД-регуляторы с учётом параметрической неопределённости, заданной массивом линейных моделей плазмы. ПИД-регуляторы широко применяются в системах управления плазмой (EAST [98], NSTX [99], TCV [100; 101] и др.) и в данной работе используются в каскадной структуре. Настройка ПИД-регуляторов

$$C_{PID}(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D \frac{s}{\tau_F s + 1},$$

где K_P , K_I , K_D — параметры регулятора, τ_F — постоянная времени фильтра, s — переменная Лапласа, выполнена в среде MATLAB с применением QFT Control

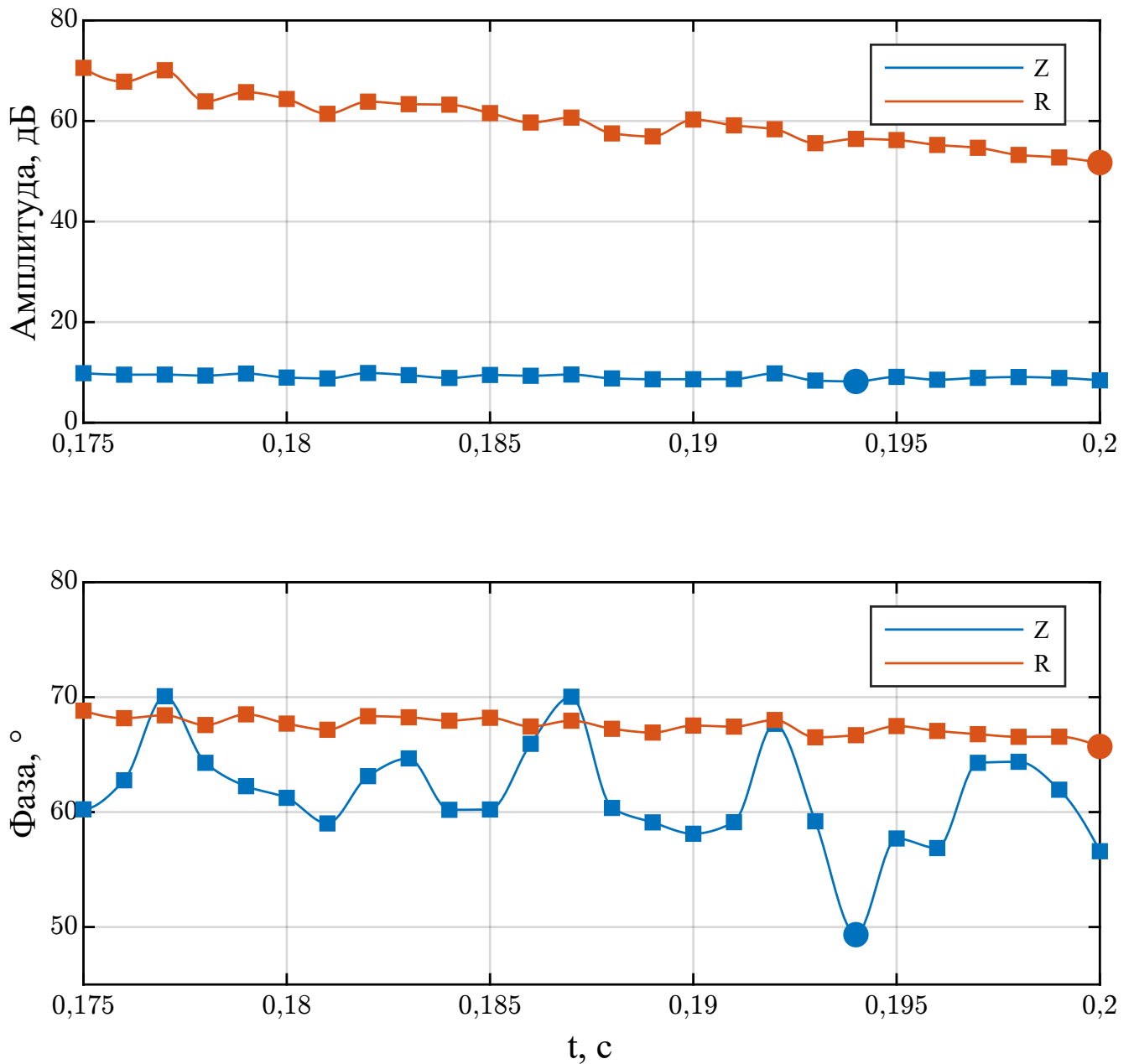


Рисунок 1.5 — Динамика запасов по фазе и амплитуде. Круговые отметки обозначают минимальные запасы по фазе и амплитуде в системе. Здесь и далее (см. рисунки 1.9, 1.10 и 4.12) сплошные линии между точками получены методом РСНП [96]

Toolbox [97] для моделей разряда № 37239 токамака Глобус-М2 [9]. Минимальные запасы устойчивости по амплитуде и фазе составили 8,2 дБ и 49,3° для канала вертикального положения, 51,7 дБ и 65,7° для горизонтального (рис. 1.4 и 1.5) [102]. Время переходного процесса при ступенчатом входном воздействии составляет около 10 мс при перерегулировании порядка 20% (рис. 1.6).

При графическом представлении использовался подход кусочно-кубического интерполяционного полинома Эрмита (РСНП) [96; 103]. В данном

контексте интерполяция применялась для получения непрерывных оценок запасов по фазе и амплитуде между дискретными моментами времени, которым соответствуют отдельные линейные стационарные модели плазмы (рис. 1.5, 1.9, 1.10 и 4.12).

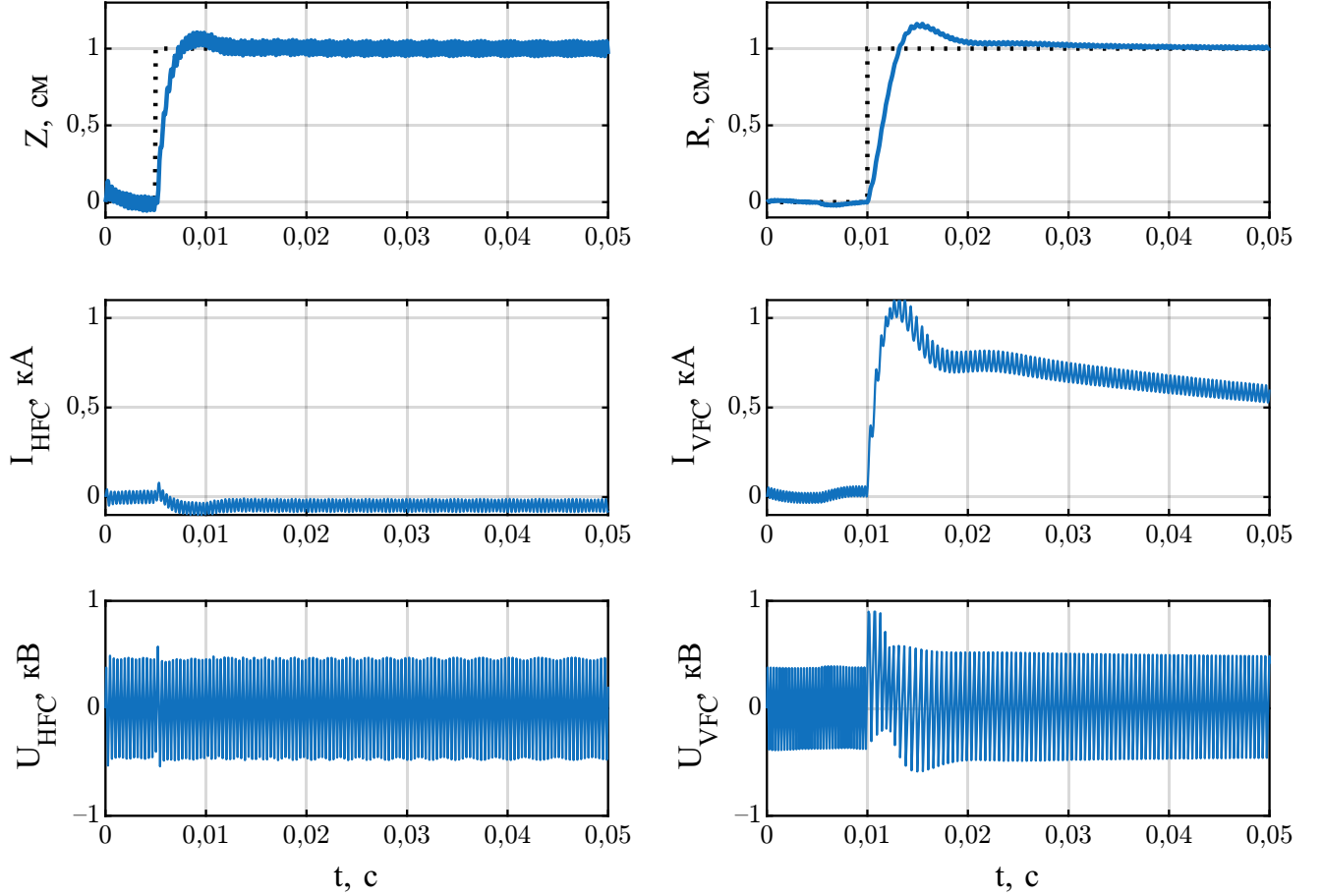


Рисунок 1.6 — Переходные процессы для модели плазмы соответствующей 185 мс разряда с полными моделями инверторов тока и ПИД-регуляторами, настроенными методом QFT

Для уменьшения перерегулирования при управлении вертикальным положением плазмы и для ускорения переходного процесса в контур был добавлен пре-фильтр (рис. 1.2) с передаточной функцией $PF(s) = \frac{10^3}{s+10^3}$. Влияние пре-фильтра на переходную функцию и робастные свойства системы показаны на рис. 1.7а.

Аналогично была произведена настройка ПИД-регуляторов по каналам управления токами в обмотках полоидального поля. Рассмотрим полученную замкнутую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{cl}x(t) + B_{cl}u(t), \\ y(t) &= C_{cl}x(t); \end{aligned} \tag{1.7}$$

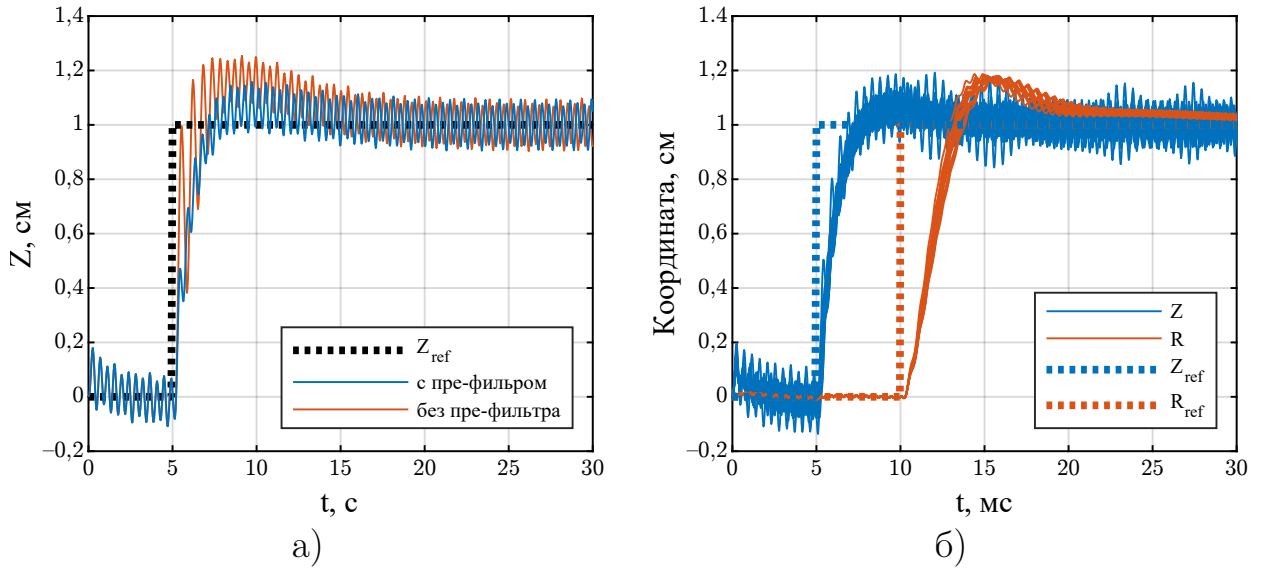


Рисунок 1.7 — а) Переходный процесс в контуре управления вертикальным положением плазмы с пре-фильтром и без него при ступенчатом входном воздействии. Перегулирование уменьшено с 29 % до 17 %, время переходного процесса с 7 мс до 5 мс, б) Набор переходных процессов для систем с моделями плазмы, соответствующих различным моментам плазменного разряда

где $x \in \mathbb{R}^{n_{cl}}$, $u \in \mathbb{R}^6$, $y \in \mathbb{R}^6$, а матрицы A_{cl} , B_{cl} , C_{cl} соответствуют замкнутой системе с 6-ю регуляторами. Размерность $n_{cl} = 36$ возникает за счёт добавления состояния интеграторов и фильтров ПИД-регуляторов к исходным состояниям модели плазмы. В (1.7) в качестве шести входных сигналов используются напряжения на CS, CC и PF-обмотках, выходами являются токи в этих обмотках, в качестве модели плазмы – модель, соответствующая 185 мс разряда. В установившемся режиме $x(t) = \text{const}$ или, другими словами, $\dot{x} = 0$. Подставляя $\dot{x} = 0$ в (1.7) получим:

$$0 = A_{cl}x + B_{cl}u \Rightarrow x = -A_{cl}^{-1}B_{cl}u; \quad (1.8)$$

$$y = C_{cl}x = -C_{cl}A_{cl}^{-1}B_{cl}u.$$

Обозначая $M = -C_{cl}A_{cl}^{-1}B_{cl}$, получаем из (1.8) матричную связь между входами и выходами системы в установившемся режиме, иначе говоря, на нулевой частоте:

$$y = -C_{cl}A_{cl}^{-1}B_{cl}u = Mu.$$

Таким образом, M – это матричное отношение между входными и выходными сигналами системы на нулевой частоте. Она может быть использована для построения развязывающей матрицы, тогда вектор управляющих сигналов

$u = M^{-1}\tilde{u}$ (рис. 1.2), в контуре с устойчивой замкнутой системой теоретически обеспечивает асимптотическое развязывание каналов управления: после затухания переходных процессов каждый выход y отслеживает соответствующий входной сигнал $\tilde{u}$, и взаимное влияние каналов отсутствует.

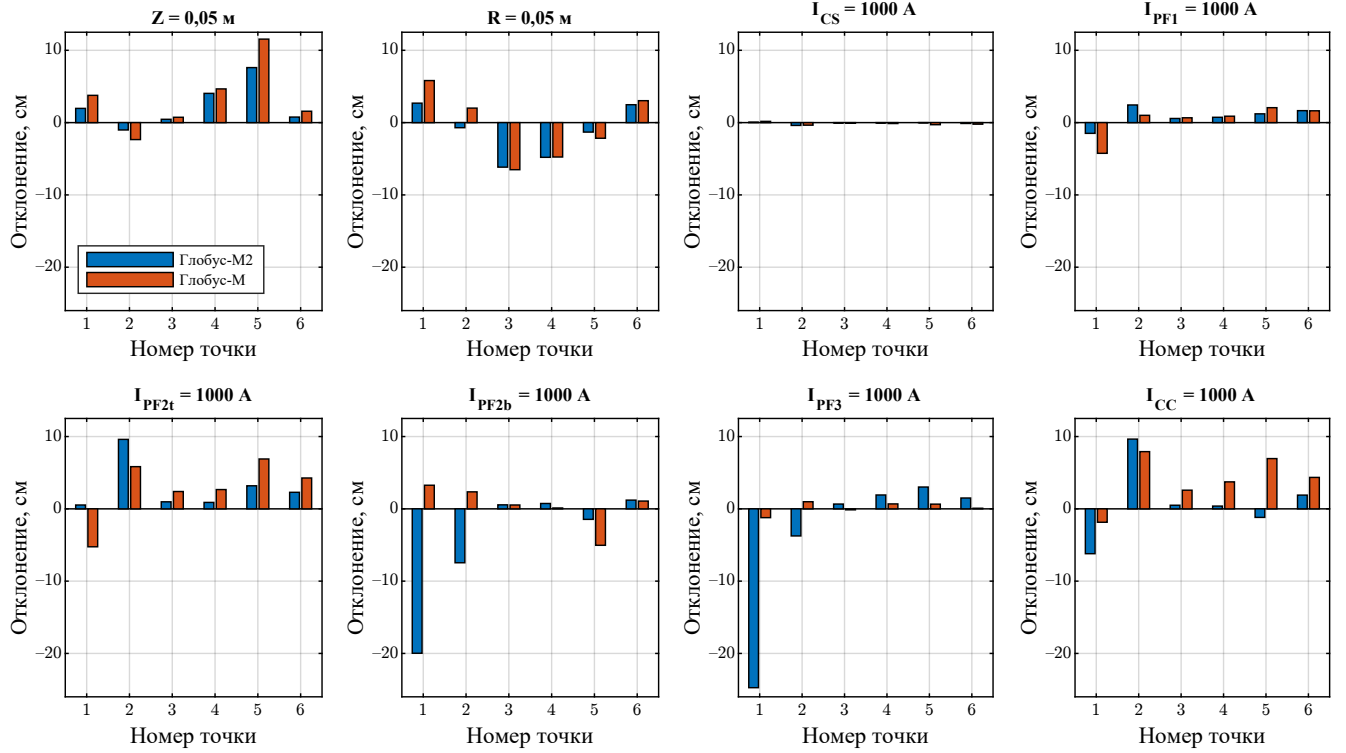


Рисунок 1.8 — Матричная связь формы сепаратрисы плазмы и уставок по положению и току в обмотках полоидального поля для разряда № 37239 токамака Глобус-М2 и № 31648 для Глобус-М на 185 мс разряда

Для оценки области достижимости формы плазмы в установившемся режиме используется матричная связь между входами и выходами. В рассматриваемой расширенной замкнутой системе, управляющими сигналами служат задающие воздействия по токам в шести обмотках полоидального поля, а также по вертикальному и горизонтальному положению плазмы (всего восемь входов). Модели такой системы в пространстве состояний записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t); \\ x &\in \mathbb{R}^{42}, u \in \mathbb{R}^8, y \in \mathbb{R}^6, A_i \in \mathbb{R}^{42 \times 42}, B_i \in \mathbb{R}^{42 \times 8}, C_i \in \mathbb{R}^{6 \times 42}.\end{aligned}$$

Здесь выходной вектор y включает шесть параметров формы плазмы ($g_1 \dots g_6$), а матрицы A_i, B_i, C_i соответствуют i -му моменту времени диверторной фазы

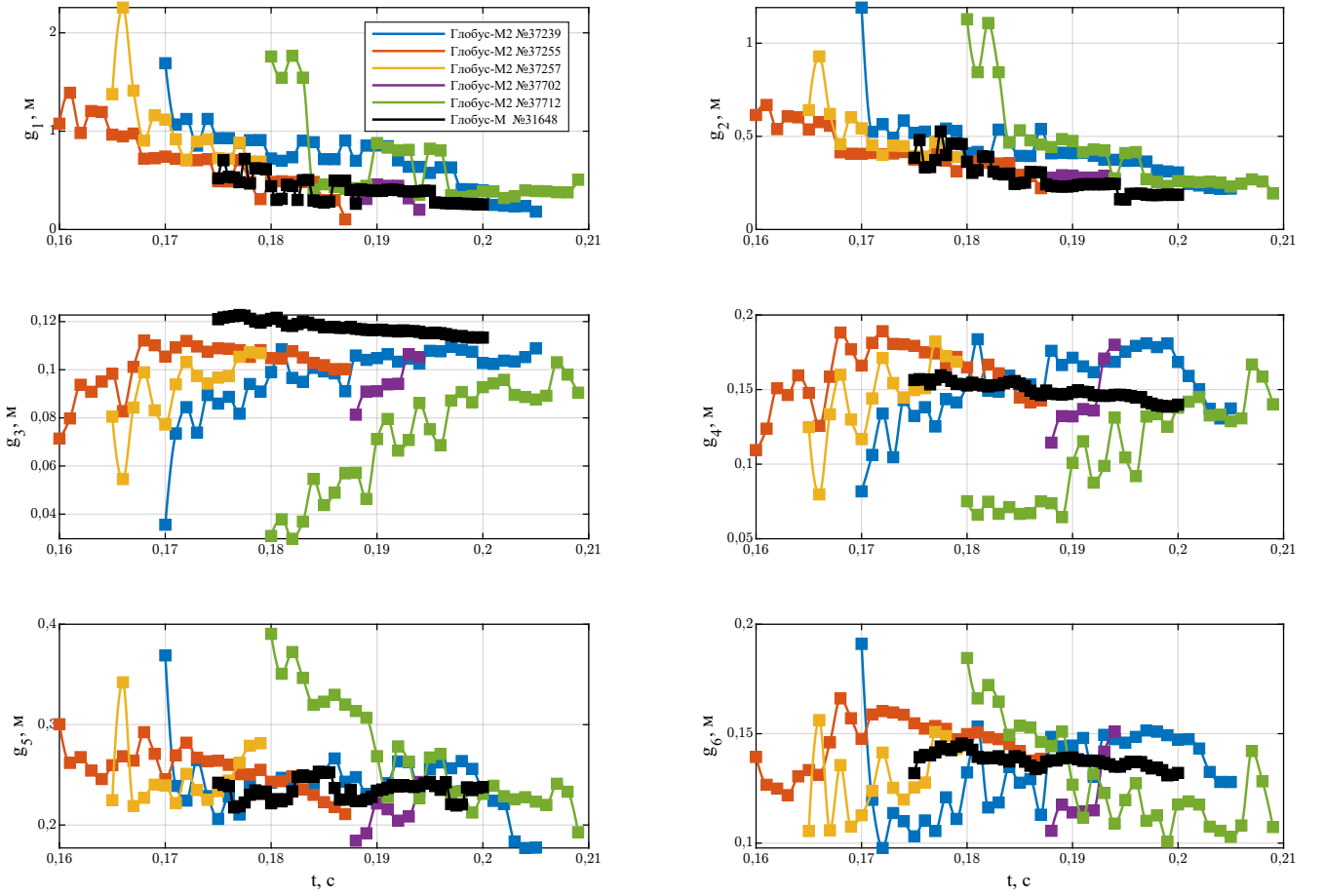


Рисунок 1.9 — Динамика верхней оценки области достижимости по параметрам формы границы плазмы на протяжении разряда в сферическом токамаке Глобус-М/М2

плазменного разряда для замкнутой системы с 8-ю регуляторами. На основе этих моделей вычисляется матрица связывающая входы и выходы в установившемся режиме, которая и используется для оценки области достижимости.

$$y = -C_i A_i^{-1} B_i u = M_i u. \quad (1.9)$$

С помощью матрицы M_i можно получить связь выходных сигналов с изменением входных (рис. 1.8). По результатам оценки матричной связи формы плазмы и управляющих сигналов можно сделать вывод, что ток в центральном соленоиде (CS) оказывает наименьшее влияние на форму.

Для каждого параметра формы g_i максимальное независимое отклонение, верхняя оценка ОД, вычисляется по формуле (1.2):

$$g_{i \max} = \sum_{j=1}^8 |M_{i,j}| u_{j \max},$$

где $u_{j\max} = 5$ см для уставок по положению и 1000 А для токов. Динамика верхних оценок для шести разрядов (пять на Глобус-М2 и один на Глобус-М) представлена на рис. 1.9. Верхние оценки для ударных точек g_1, g_2 достигают 50 см, а для остальных зазоров — около 10 см, что сопоставимо с размерами вакуумной камеры (большой радиус 36 см, малый 24 см). Следовательно, по отдельности каждый зазор может быть изменён в широких пределах.

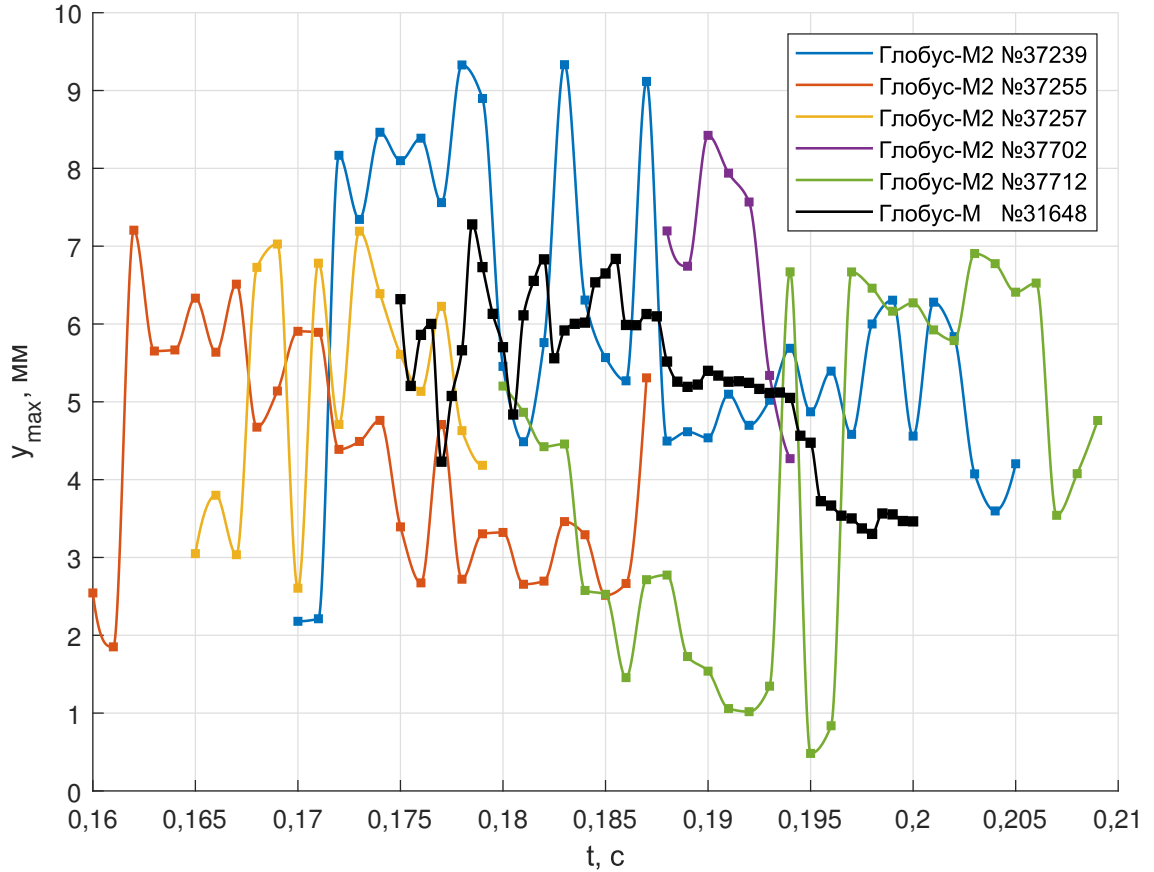


Рисунок 1.10 — Динамика нижней оценки области достижимости формы сепаратрисы плазмы на протяжении диверторной фазы разрядов в сферическом токамаке Глобус-М/М2

Для нахождения нижней оценки сначала решаются вспомогательные задачи линейного программирования (см. (1.3)) — максимизация каждого зазора при нулевых остальных. Например, для разряда № 37239 в момент 175 мс получено $g_{1\max} = 116$ мм, $g_{2\max} = 92$ мм, $g_{3\max} = 45$ мм, $g_{4\max} = 38$ мм, $g_{5\max} = 52$ мм, $g_{6\max} = 67$ мм. Затем по формуле (1.5) вычисляется гарантированное одновременное отклонение:

$$g_{\max} = \left(\frac{1}{116} + \frac{1}{92} + \frac{1}{45} + \frac{1}{38} + \frac{1}{52} + \frac{1}{67} \right)^{-1} \approx 5,4 \text{ мм.}$$

Это означает, что все шесть зазоров можно одновременно сместить в пределах $\pm 5,4$ мм, не нарушая ограничений на управления. Динамика нижней оценки для исследованных разрядов приведена на рис. 1.10. Нижняя оценка колеблется от 1 до 10 мм, в среднем составляя 5–6 мм, что на порядок меньше верхних оценок. Это свидетельствует о сильной взаимосвязи параметров формы: одновременное изменение всех зазоров существенно ограничено по сравнению с изменением каждого по отдельности.

Таким образом, разработанный метод позволяет количественно оценить достижимые диапазоны для каждого зазора (верхняя оценка) и пределы одновременного управления формой (нижняя оценка). Полученные результаты необходимо учитывать при планировании сценариев плазменных разрядов на токамаке Глобус-М2.

1.4 Выводы по Главе 1

В главе разработаны численные методы оценки многомерной области достижимости формы плазмы для линейных моделей токамака с постоянными параметрами в установившемся режиме. Основой методов является матрица, связывающая установившиеся значения управляющих сигналов и выходных параметров формы.

Для оценки максимальных независимых отклонений каждого из параметров формы предложен аналитический метод, основанный на матрице связывающей входы и выходы в установившемся режиме. Получены выражения для верхних оценок области достижимости, позволяющие определять предельно достижимые значения каждого зазора. Показано, что верхние оценки для ударных точек достигают 50 см, а для остальных зазоров составляют около 10 см, что значительно превышает типичные рабочие смещения.

Для оценки одновременных отклонений всех параметров формы разработан численный метод, сводящий исходную задачу к набору задач линейного программирования. Нижняя оценка области достижимости найдена с помощью симплекс-метода, что обеспечивает точность и вычислительную эффективность по сравнению с переборными алгоритмами. Полученные нижние оценки состав-

ляют в среднем 5 мм, что на порядок меньше верхних и свидетельствует о сильной взаимосвязи между каналами управления формой.

Предложенные методы применены к экспериментальным данным пяти разрядов токамака Глобус-М2 и одного разряда Глобус-М. Установлено, что область достижимости формы плазмы изменяется в ходе разряда, что необходимо учитывать при планировании сценариев экспериментов. Разработанные методы являются инструментом для количественной оценки предельных возможностей магнитной системы и выбора реалистичных целей управления.

Глава 2. Численный метод оценки ОД для модели с переменными параметрами

Глава посвящена постановке задачи оценки области достижимости для линейных моделей с переменными параметрами (LTV) при ограничениях на входные и выходные сигналы. В ней описано рекуррентное вычисление матриц, связывающих последовательность входных сигналов с выходом системы на заданном шаге, а также построение области достижимости по форме плазмы на основе экспериментальных данных разрядов токамака Глобус-М2. Результаты главы опубликованы в работе автора [148].

2.1 Постановка задачи

Методы оценки области достижимости (ОД), рассмотренные в Главе 1, основаны на анализе установившегося режима ($\dot{x} = 0$) для набора LTI-моделей. Хотя подход, использующий матричную связь $y = Mu$ и сводящий задачу к линейному программированию, эффективен, он имеет три фундаментальных ограничения: 1) не учитывает динамику переходных процессов; 2) не отражает эволюцию параметров плазмы в течение разряда; 3) метод разделения на верхнюю и нижнюю оценки, при котором ОД аппроксимируется описанным гиперпрямоугольником и вписанным гиперкубом (рис. 2.1), может приводить к существенной неопределённости из-за большой разницы между этими оценками.

В данной главе предлагается развитие методики, направленное на устранение этих ограничений. Основная задача состоит в оценке ОД с учётом динамики системы в рамках LTV-модели. Ключевым усовершенствованием является переход от одновременной оценки всех выходов к поэлементному, другими словами, итеративному, оцениванию. Этот метод, применимый к нахождению ОД в установившемся режиме, заключается в последовательном нахождении верхней оценки для одного выхода при фиксации значений ранее оценённых выходов. Такой подход позволяет найти реализуемую форму плазмы в заданный момент времени.

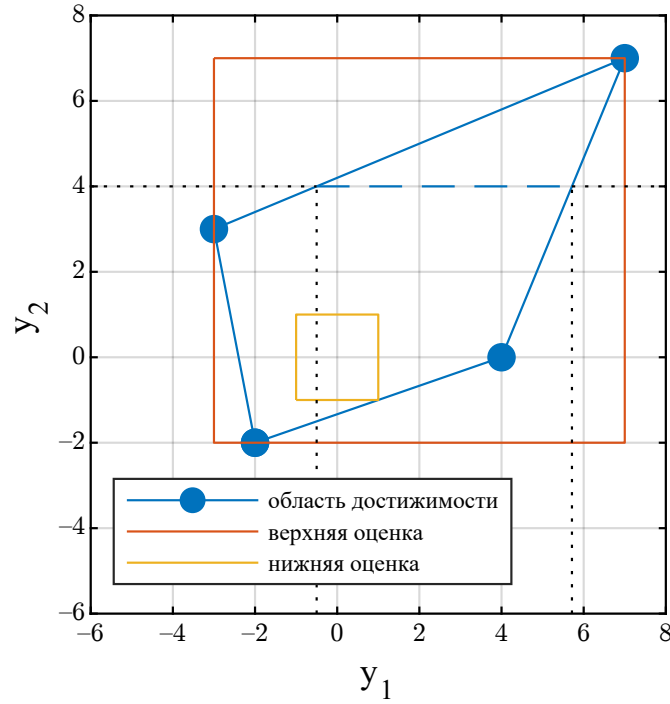


Рисунок 2.1 — Иллюстрация нижней и верхней оценок области достижимости в двумерном случае. Пунктирная линия $y_2 = 4$ показывает фиксацию значения одного из выходов, а штриховая линия соответствует области достижимости по координате y_1

Таким образом, в главе решается комплексная задача: существующий аппарат оценки на основе ЛП обобщается на LTV-случай, а для повышения точности вводится процедура итеративного оценивания. Это позволяет получить оценки достижимых состояний системы управления плазмой с учётом её эволюции в течение разряда.

Рассмотрим дискретную модель объекта в пространстве состояний размерности n , у которой p входов и две группы выходов размерности m и r , с переменными параметрами:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k, \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k, \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_k x_k + \tilde{D}_k u_k, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $k \in [1, T]$, матрицы A_k , B_k , C_k , $\tilde{C}_k$, D_k , $\tilde{D}_k$ имеют соответствующие размерности, x_k — вектор состояний, u_k — вектор управления, y_k — выходные векторы, ОД которых исследуется и $\tilde{y}_k$ — выходные векторы, на которые наложены ограничения. Рассматриваются ограничения следующего вида:

– на вектор начальных состояний

$$X_1 = \{x : x \in \mathbb{R}^n, x_{\min}^{(i)} \leq x^{(i)} \leq x_{\max}^{(i)}, i \in [1, n]\}, x_1 \in X_1; \quad (2.2)$$

– на управления на каждом шаге

$$P = \{u : u \in \mathbb{R}^p, u_{\min}^{(i)} \leq u^{(i)} \leq u_{\max}^{(i)}, i \in [1, p]\}, u_k \in P; \quad (2.3)$$

– на вторую группу выходных векторов на каждом шаге

$$F = \{\tilde{y} : \tilde{y} \in \mathbb{R}^r, \tilde{y}_{\min}^{(i)} \leq \tilde{y}^{(i)} \leq \tilde{y}_{\max}^{(i)}, i \in [1, r]\}, \tilde{y}_k \in F. \quad (2.4)$$

Верхний индекс $x^{(i)}$ означает i -й элемент вектора x .

Областью достижимости состояний в системе (2.1) с ограничениями (2.2, 2.3, 2.4) на конец T -го шага аналогично [2; 5; 6] будем называть множество

$$G(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T) = \{x_T : x_T \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \in [1, T-1], \\ x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \tilde{y}_k = \tilde{C}_k x_k + \tilde{D}_k u_k, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F\}. \quad (2.5)$$

Областью достижимости выходов будем называть множество

$$Y(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T) = \{y_T : y_T \in \mathbb{R}^m, \\ y_T = C_T x_T + D_T u_T, x_T \in G(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T), u_T \in P\}. \quad (2.6)$$

В [6] показано, что множество (2.5) при ограничениях вида (2.2, 2.3) представляет собой выпуклый многогранник с конечным числом вершин. Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что и (2.6) при ограничениях такого же вида – также выпуклый многогранник с конечным числом вершин.

2.2 Последовательное моделирование области достижимости по каналам

Найдём матричное соотношение между векторами начальных состояний x_1 , управляющих воздействий u_i и вектором состояний на k -м шаге для модели (2.1). Поскольку $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$, вектор состояний может быть вычислен по формулам:

$$x_2 = A_1 x_1 + B_1 u_1,$$

$$x_3 = A_2 x_2 + B_2 u_2 = A_2(A_1 x_1 + B_1 u_1) + B_2 u_2,$$

...

$$x_k = A_{k-1} \cdots A_1 x_1 + A_{k-1} \cdots A_2 B_1 u_1 + A_{k-1} \cdots A_3 B_2 u_2 + \cdots + B_{k-1} u_{k-1}.$$

Используя соотношение $y_k = C_k x_k + D_k u_k$, получим значения выходного вектора:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 x_1 + D_1 u_1, \\ y_2 &= C_2 x_2 + D_2 u_2 = C_2(A_1 x_1 + B_1 u_1) + D_2 u_2, \\ &\dots \\ y_k &= C_k(A_{k-1} \cdots A_1 x_1 + A_{k-1} \cdots A_2 B_1 u_1 + \cdots + B_{k-1} u_{k-1}) + D_k u_k. \end{aligned}$$

Объединим векторы начальных значений и управляющих сигналов на всех шагах до k -го включительно в вектор-столбец

$$U_k = [x_1^\top, u_1^\top, \dots, u_k^\top]^\top,$$

и введём обозначение

$$M_k = [C_k A_{k-1} \cdots A_1, C_k A_{k-1} \cdots A_2 B_1, C_k A_{k-1} \cdots A_3 B_2, \dots, C_k B_{k-1}, D_k].$$

Тогда получим матричную связь между всеми управляющими сигналами, начальным состоянием и вектором выхода на k -м шаге:

$$y_k = M_k U_k,$$

где $M_k \in \mathbb{R}^{m \times (kp+n)}$, $U_k \in \mathbb{R}^{(kp+n)}$.

Аналогично найдём значения второй группы выходных сигналов на шагах $[1, k]$:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \tilde{C}_1 x_1 + \tilde{D}_1 u_1, \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{C}_2 x_2 + \tilde{D}_2 u_2 = \tilde{C}_2(A_1 x_1 + B_1 u_1) + \tilde{D}_2 u_2, \\ &\dots \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_k(A_{k-1} \cdots A_1 x_1 + A_{k-1} \cdots A_2 B_1 u_1 + \cdots + B_{k-1} u_{k-1}) + \tilde{D}_k u_k. \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{M}_k &= [\tilde{C}_k A_{k-1} \cdots A_1, \tilde{C}_k A_{k-1} \cdots A_2 B_1, \tilde{C}_k A_{k-1} \cdots A_3 B_2, \dots, \tilde{C}_k B_{k-1}, \tilde{D}_k], \\ H_k &= \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 & 0_{r \times p(k-1)} \\ \tilde{M}_2 & 0_{r \times p(k-2)} \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{M}_{k-1} & 0_{r \times p} \\ & \tilde{M}_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y}_k = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{k-1} \\ \tilde{y}_k \end{bmatrix} = H_k U_k, \end{aligned}$$

где $0_{r \times p}$ – нулевая матрица соответствующей размерности.

При расчётах динамики ОД удобно также рекуррентное представление формул для вычисления матричной связи:

$$\begin{aligned} M_1 &= D_1, \quad H_1 = \tilde{M}_1 = \tilde{D}_1, \\ M_k &= [C_k Q_k, D_k], \quad \tilde{M}_k = [\tilde{C}_k Q_k, \tilde{D}_k], \quad k \in [2, T], \\ H_k &= \begin{bmatrix} H_{k-1} & 0_{r(k-1) \times p} \\ & \tilde{M}_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где Q_k – вспомогательная матрица, вычисляемая итерационно:

$$\begin{aligned} Q_2 &= [A_1, B_1], \\ Q_k &= [A_{k-1} Q_{k-1}, B_{k-1}], \quad k \in [3, T]. \end{aligned}$$

Предлагается алгоритм последовательной, иначе говоря, поэлементной, оценки области достижимости. Его основная идея заключается в том, что границы для компонент выходного вектора находятся не одновременно, а последовательно, шаг за шагом. На каждом новом шаге значение одной из ранее оценённых компонент фиксируется, что позволяет уточнить допустимый диапазон для остальных переменных с учётом этой дополнительной информации. Такой итеративный процесс позволяет целенаправленно находить управляющие воздействия, реализующие конкретную желаемую комбинацию выходных сигналов – определённую конфигурацию плазмы.

Первый шаг алгоритма аналогичен подходу из п. 1.2 и заключается в нахождении верхней оценки области достижимости по всем компонентам выходного вектора. Эту оценку можно найти, решив m задач на максимум

$$\begin{aligned} \max \{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \\ \tilde{Y}_T = H_T U_T, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], i \in [1, m] \}; \end{aligned} \quad (2.8)$$

и минимум

$$\begin{aligned} \min \{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \\ \tilde{Y}_T = H_T U_T, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], i \in [1, m] \}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $M_k^{(i)}$ – строка матрицы M_k . Задачи (2.8) и (2.9) являются задачами линейного программирования, которые могут быть решены симплекс-методом [85], методом внутренней точки [104; 105] и др. Вообще говоря, системы уравнений (2.8) и (2.9) могут быть несовместными, рассмотрим достаточные условия существования решения.

Решение существует, если выполнено одно из двух утверждений: заданы ограничения только на начальное состояние и управления (2.2) и (2.3), $r = 0$ или верхние и нижние ограничения на начальные условия, управления и выходы разных знаков. В первом случае системы (2.8) и (2.9) всегда имеют хотя бы одно решение, поскольку нет ограничений на выходные сигналы, а хотя бы один входной сигнал, например $u_k^{(i)} = u_{\min}^{(i)}$, $i \in [1, n]$, реализуем и, как следствие, хотя бы один выходной сигнал реализуем.

При наличии ограничений на часть выходов (2.4) и $r \neq 0$, достаточным, но не необходимым, для существования решения условием является:

$$\begin{cases} x_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq x_{\max}^{(i)}, i \in [1, n], \\ u_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq u_{\max}^{(i)}, i \in [1, p], \\ \tilde{y}_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq \tilde{y}_{\max}^{(i)}, i \in [1, r]. \end{cases} \quad (2.10)$$

Это несложно проверить подстановкой нулевого вектора в качестве управляющего сигнала на каждом шаге. Такое дополнительное условие на ограничения является естественным для линейных систем.

Таким образом, на первом шаге для каждой составляющей выходного вектора найден интервал, в котором она может изменяться $y_{T \min 1}^{(i)} \leq y_T^{(i)} \leq y_{T \max 1}^{(i)}$, $i \in [1, m]$. Пользователю предлагается выбрать одну из компонент и зафиксировать ее значение. Не нарушая общности, будем считать, что зафиксировано значение первой компоненты: $y_T^{(1)} = y^{(1)}$.

Рассмотрим второй шаг алгоритма. Для нахождения верхней оценки по оставшимся $(m - 1)$ компонентам необходимо решить следующие задачи на максимум:

$$\begin{cases} y_T^{(1)} = M_T^{(1)} U_T, \\ \max \{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \\ \tilde{Y}_T = H_T U_T, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], i \in [2, m] \}, \end{cases} \quad (2.11)$$

и на минимум:

$$\begin{cases} y_T^{(1)} = M_T^{(1)} U_T, \\ \min \{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \\ \tilde{Y}_T = H_T U_T, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], i \in [2, m] \}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Таким образом, на втором шаге будут найдены новые оценки $y_{T \min 2}^{(i)} \leq y_T^{(i)} \leq y_{T \max 2}^{(i)}$, $i \in [2, m]$. Аналогично проделав оставшиеся этапы алгоритма, после m шагов получим задачу

$$\begin{cases} y_T = M_T U_T, \\ \tilde{Y}_T = H_T U_T, \\ x_1 \in X_1, \quad u_k \in P, \quad \tilde{y}_k \in F, \quad k \in [1, T], \end{cases} \quad (2.13)$$

где $y_T \in Y(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T)$ — реализуемое значение выходного вектора. Задачи (2.11) — (2.13) также являются задачами линейного программирования и имеют решение, поскольку добавляющееся на каждом шаге ограничение на выходной сигнал типа равенства является совместным с остальными уравнениями, так как оно удовлетворяет ограничениям аналогичной задачи на предыдущем шаге. Решением задачи (2.13) является вектор $U_T^* \in \mathbb{R}^{(kp+n)}$, содержащий начальные условия $x_1^* \in X_1$ и программное управление $u_k^* \in P$, $j \in [1, T]$, реализующие выход y_T .

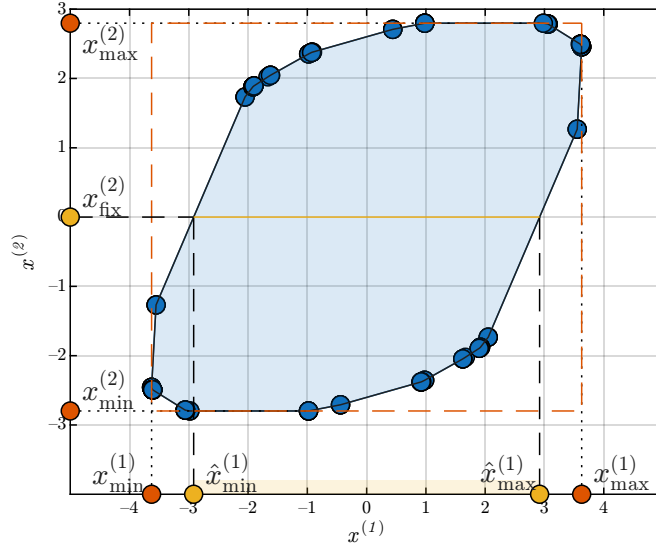


Рисунок 2.2 — Область достижимости, полученная методом динамического программирования [8] (синий контур) и методом последовательной оценки (красные и жёлтые точки). Область ограниченная красной штриховой линией соответствует оценке после первого шага алгоритма, жёлтая линия — уточнённой оценке после фиксации одного из выходов

Для демонстрации работоспособности и практической применимости предложенного алгоритма последовательной оценки области достижимости рассмотрим пример из работы [8]. Этот пример позволяет наглядно сравнить

результаты, полученные методом динамического программирования, с результатами итеративного подхода, а также проиллюстрировать его этапы.

Рассматриваемая модель объекта имеет вид:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,8877 & -0,012 \\ 0,0258 & 0,4215 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{18}(k-1) & \sin \frac{\pi}{36}(k-1) \\ -\sin \frac{\pi}{36}(k-1) & \cos \frac{\pi}{18}(k-1) \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_k; \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k; \end{cases} \quad (2.14)$$

с ограничениями на управляющие воздействия и вектор начальных состояний:

$$|x_1^{(1)}| \leq 5, |x_1^{(2)}| \leq 5, |u^{(1)}| \leq 1, |u^{(2)}| \leq 1,5.$$

В работе [8] рассматривается область достижимости по состоянию, в то время как в настоящем исследовании — по выходу. Для обеспечения корректного сравнения в модели (2.14) выбрана единичная матрица выхода $C = I_2$, что делает вектор состояния равным вектору выхода. Отметим, что в данном примере отсутствуют дополнительные ограничения на выходные сигналы, то есть $r = 0$.

Область достижимости вектора состояний после 70 временных шагов, найденная методом динамического программирования [6; 8], показана на рис. 2.2 синим контуром. Предложенный алгоритм на первом шаге даёт верхнюю оценку области достижимости для каждой компоненты в виде интервалов: $x_{\min}^{(i)} \leq x^{(i)} \leq x_{\max}^{(i)}$, $i \in [1, 2]$, что соответствует прямоугольнику, описанному вокруг истинной области. Первый шаг нахождения области достижимости показан на рис. 2.2 красным: $-3,6276 \leq x^{(1)} \leq 3,6276$, $-2,7982 \leq x^{(2)} \leq 2,7982$.

На втором шаге, в соответствии с логикой последовательной оценки, пользователь фиксирует значение одной из компонент. Пусть, например, $x^{(2)} = x_{\text{fix}}^{(2)} = 0$. Алгоритм затем вычисляет суженный интервал достижимых значений для оставшейся компоненты $x^{(1)}$ при этом дополнительном ограничении. Результат второго шага показан на рис. 2.2 жёлтым отрезком: $-2,9178 \leq x^{(1)} \leq 2,9178$. Наконец, на заключительном шаге пользователь может задать конкретное, реализуемое значение в пределах этого отрезка (например, $x^{(1)} = 1,5$), и алгоритм вычислит одно из возможных программных управлений, которое обеспечивает достижение заданной точки $(x^{(1)}, x^{(2)}) = (1,5; 0)$ на 70-м шаге.

Приведённый пример наглядно демонстрирует ключевые особенности предложенного метода. Во-первых, он позволяет получать внешние оценки области достижимости (красный прямоугольник) и последовательно уточнять их, сужая множество возможных значений по выбранным координатам (жёлтый отрезок). Во-вторых, метод не только оценивает множество достижимых выходов системы, но и предоставляет конкретные управляющие воздействия для реализации заданной целевой точки, что может быть полезно для ряда задач. Наконец, несмотря на свою итеративную природу, алгоритм сохраняет вычислительную эффективность, сводя каждый шаг к задаче линейного программирования, и может быть применён к моделям высокой размерности.

2.3 Оценка ОД для токамака Глобус-М2

Описанный выше метод получения области достижимости был применён для нахождения возможных конфигураций формы плазмы в токамаке Глобус-М2. Были рассмотрены изменяющиеся во времени линейные модели и ограничения на входные и выходные сигналы.

В отличие от оценок в установившемся режиме, рассмотренных в Главе 1, здесь используется LTV-модель, учитывающая эволюцию параметров плазмы в течение разряда. Кроме того, по сравнению с подходом, изложенным в Главах 1 и 4, где форма плазмы описывалась четырьмя зазорами и двумя координатами ударных точек, в данном разделе для описания границы плазмы используется 24 зазора, что позволяет более детально и точно оценивать достижимые конфигурации (рис. 2.3). Также, в отличие от Главы 4, проводились измерения не только токов в управляющих обмотках, но и напряжений на них.

Таким образом, были рассмотрены экспериментальные, другими словами, сценарные, данные на интервале времени, соответствующем диверторной фазе и включающие: напряжения на обмотках $U_{PF,k} = [U_{HFC,k}, U_{VFC,k}, U_{CS,k}, U_{CC,k}, U_{PF1,k}, U_{PF3,k}]^T$, токи в обмотках $I_{PF,k} = [I_{HFC,k}, I_{VFC,k}, I_{CS,k}, I_{CC,k}, I_{PF1,k}, I_{PF3,k}]^T$, восстановленные методом FCDI зазоры $G_k = [g_{1,k}, \dots, g_{24,k}]^T$ и вертикальное положение центра плазменного шнура Z_k с шагом дискретизации 0,1 мс.

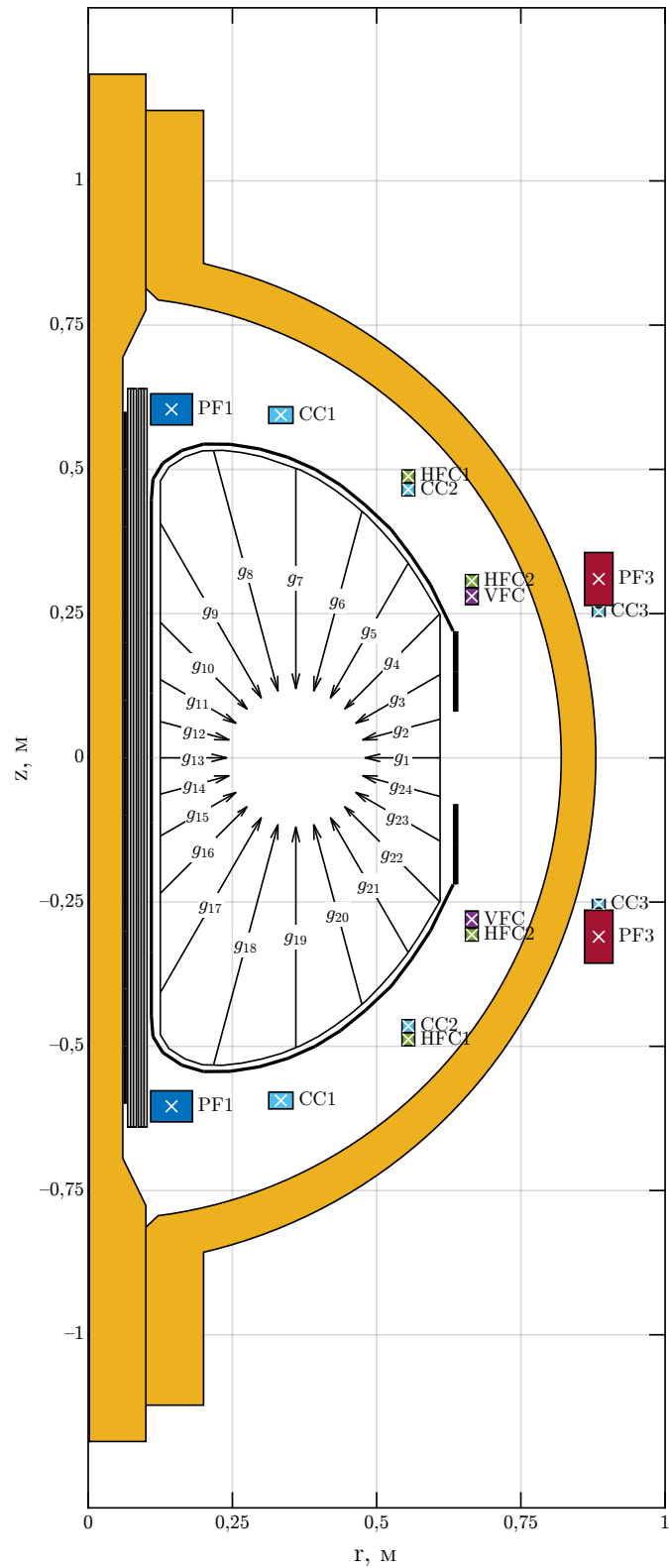


Рисунок 2.3 — Вертикальное сечение токамака Глобус-М2. Стрелками показаны 24 направления, вдоль которых измеряются 24 зазора $g_1 - g_{24}$ между лимитером токамака и границей плазмы

Для оценки возможностей токамака получать конфигурации плазмы построена его линейная модель аналогично тому, как это описано в п. 1.3. Модели токамака Глобус-М2 [9; 67] построены по экспериментальным данным разря-

дов №№ 41805, 41835 и 41867 в отклонениях от экспериментальных сигналов в дискретном времени с переменными параметрами:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k \delta u_k, \\ \delta y_k &= C_k x_k, \\ \delta \tilde{y}_k &= \tilde{C}_k x_k, \end{cases} \quad (2.15)$$

где $x \in \mathbb{R}^{17}$, $\delta u = [\delta U_{HFC}, \delta U_{VFC}, \delta U_{CS}, \delta U_{CC}, \delta U_{PF1}, \delta U_{PF3}]^T \in \mathbb{R}^6$ – отклонения от сценарных напряжений в управляющих обмотках, $\delta y = [\delta g_1, \dots, \delta g_{24}]^T \in \mathbb{R}^{24}$ – изменения формы относительно сценарных сигналов, $\delta \tilde{y} = [\delta Z, \delta I_{HFC}, \delta I_{VFC}, \delta I_{CS}, \delta I_{CC}, \delta I_{PF1}, \delta I_{PF3}]^T \in \mathbb{R}^7$ – изменения вертикального положения плазмы и токов в управляющих обмотках. Матрицы стационарных линейных моделей $\hat{A}_i$, $\hat{B}_i$, $\hat{C}_i$ вычислены на соответствующем интервале времени с 0,13 по 0,24 с с шагом 1 мс и интерполируются по линейному закону:

$$A_k = \alpha \hat{A}_i + (1 - \alpha) \hat{A}_{i+1}, \quad (2.16)$$

где $\alpha \in [0; 0,1; \dots 0,9; 1]$. Аналогично вычисляются матрицы B и C .

В данной главе диссертационной работы рассматриваются отклонения управляющих сигналов от их сценарных значений при следующих ограничениях: нулевые начальные условия ($x_1^{(j)} = 0$, $j \in [1, 17]$); допустимые отклонения напряжений в управляющих обмотках не более ± 100 В для каждой из шести обмоток ($|\delta u^{(j)}| \leq 100$ В, $j \in [1, 6]$); ограничение на отклонение по неустойчивому вертикальному положению центра плазменного шнура $|\delta Z| \leq 1$ см; а также ограничения на отклонения токов в обмотках: $|\delta I_{HFC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{VFC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{CS}| \leq 5$ кА, $|\delta I_{CC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{PF1}| \leq 500$ А, $|\delta I_{PF3}| \leq 500$ А.

Напряжения в управляющих обмотках в ходе эксперимента меняются в диапазоне $\pm 1,6$ кВ. Типичные значения токов в обмотках HFC, VFC и CC составляют около 0,5 кА, в обмотке PF1 — 1,5 кА, в обмотке PF3 — 3 кА; ток в обмотке CS изменяется в интервале от 0,5 до 2,5 кА. Величины вертикального смещения центра плазмы имеют порядок 1 см (рис. 2.4). Поскольку все рассматриваемые отклонения малы относительно рабочих диапазонов сигналов, для последующих вычислений можно применять линейные модели плазмы, что обеспечивает адекватность описания.

Таким образом, уравнения модели (2.15) вместе с заданными ограничениями на каждом шаге полностью соответствуют постановке задачи,

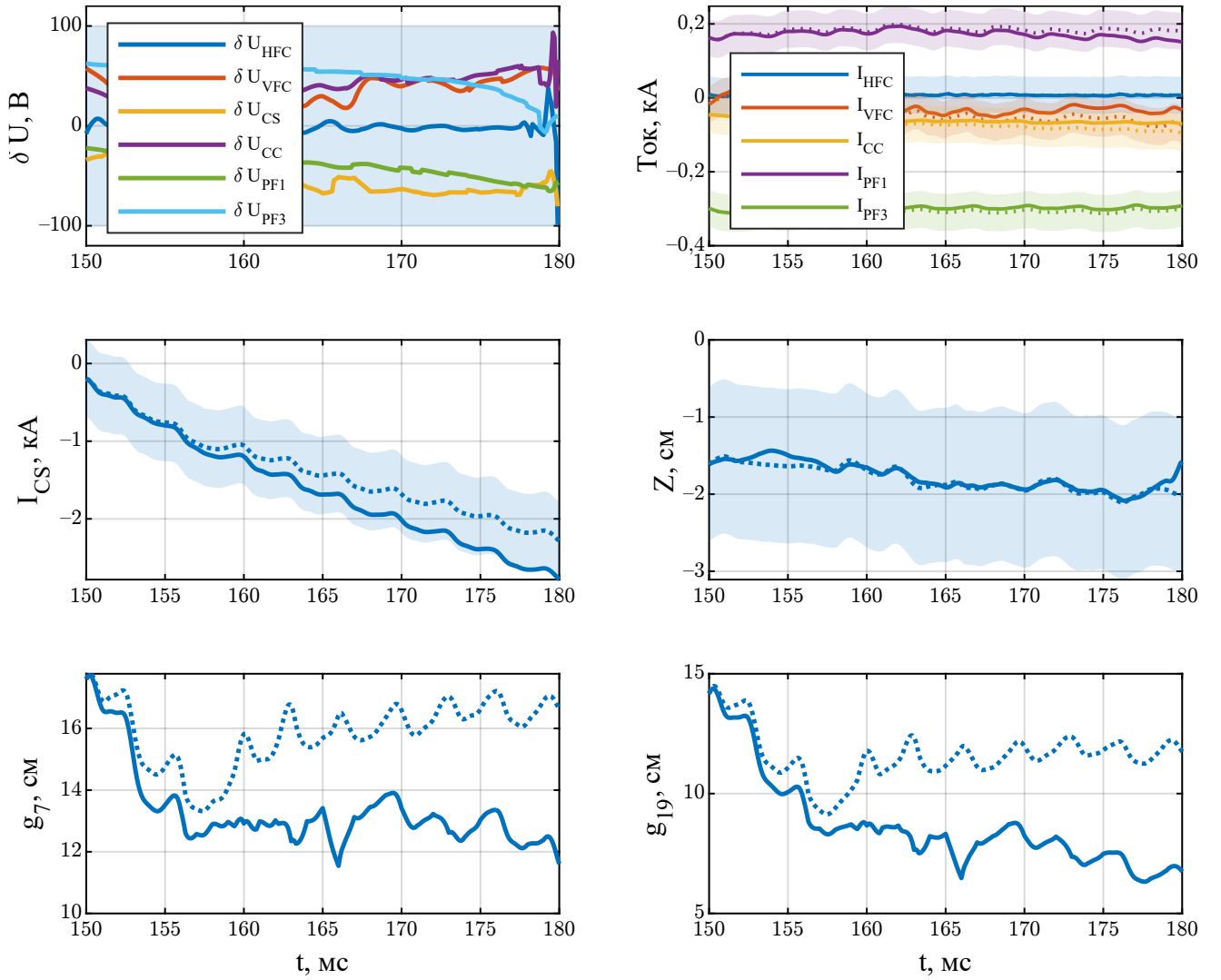


Рисунок 2.4 — Результат моделирования плазмы с изменённым управлением, реализующим через 30 мс отклонения по составляющим формы $\delta g_7 = -5$ см и $\delta g_{19} = -5$ см, что приводит к дополнительному вытягиванию плазмы по вертикали. Учтены ограничения на вертикальное смещение плазмы, напряжения и токи в управляющих обмотках. Пунктирные линии соответствуют сценарным значениям, сплошные — реализованным отклонениям, полутона — допустимым отклонениям. Разряд № 41805

сформулированной в (2.1)–(2.4), и удовлетворяют достаточному условию существования решения (2.10).

Проанализируем возможность изменения составляющих формы плазмы g_7 и g_{19} , соответствующих верхней и нижней точкам плазменного шнура. Изменение этих величин позволяет влиять на вертикальную вытянутость плазмы: уменьшение зазоров между границей плазмы и стенкой вакуумной камеры со-

ответствует увеличению вытянутости. Начальное значение вектора состояний будем считать нулевым.

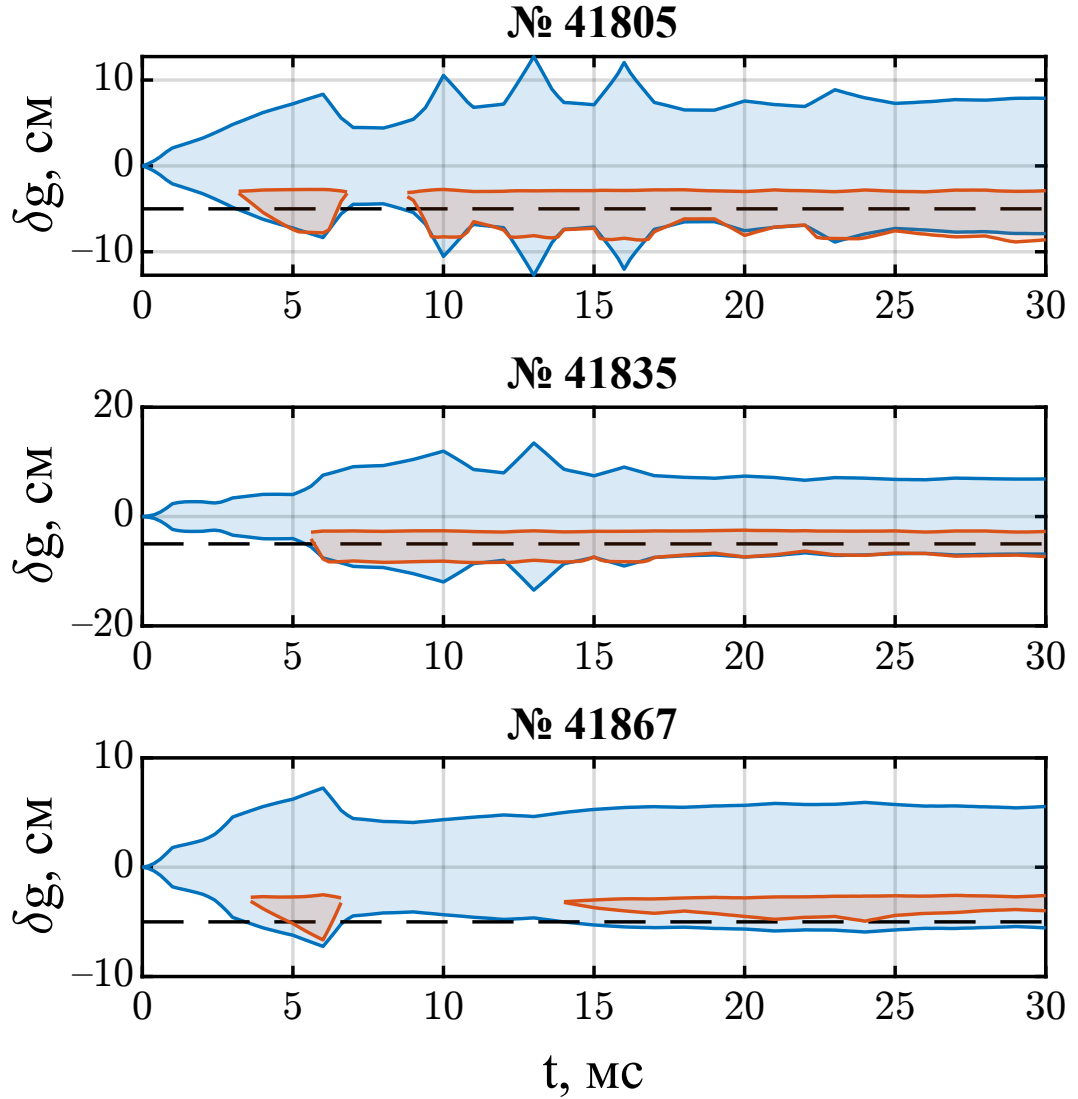


Рисунок 2.5 — Изменение области достижимости на протяжении диверторной фазы разряда. Синим показана область достижимости по отклонению для зазора δg_7 , красным — для зазора δg_{19} при условии $\delta g_7 = -5$ см в те моменты времени, когда такое условие осуществимо. Время указано от начала диверторной фазы

Применяя предложенный алгоритм к модели, соответствующей разряду № 41805, получаем, что через 30 мс (300 временных шагов) отклонения выходных переменных δg_7 и δg_{19} ограничены следующими интервалами:

$$-7,9 \leq \delta g_7 \leq 7,9; \quad -8,6 \leq \delta g_{19} \leq 8,6,$$

где отклонения выражены в сантиметрах. На втором шаге алгоритма зафиксируем $\delta g_7 = -5,0$ см; тогда получим:

$$\delta g_7 = -5,0; \quad -8,6 \leq \delta g_{19} \leq -2,9.$$

Наконец, на последнем шаге можно зафиксировать значение $\delta g_{19} = -5,0$ см и получить программное управление, обеспечивающее заданные отклонения выходных переменных на 5 см. Динамика системы при найденном программном управлении показана на рис. 2.4.

Таким образом, показано, что, используя обмотки полоидального поля, можно увеличить вертикальную вытянутость плазмы в существующей конфигурации токамака Глобус-М2.

Проанализируем изменение областей достижимости для этих составляющих формы во времени. Рассмотрим плазменные разряды №№ 41805, 41835, 41867. Вычислим возможное отклонение по δg_7 . В случае, если отклонение δg_7 может достигать -5 см, фиксируем это значение и находим область достижимости по δg_{19} . Результаты представлены на рис. 2.5, время отсчитывается от начала диверторной фазы. На графике видна сильная связь между противоположными зазорами: отклонение составляющей δg_7 неизбежно приводит к отклонению составляющей δg_{19} в том же направлении.

2.4 Выводы по Главе 2

В главе предложен численный метод нахождения точек внутри области достижимости модели плазмы с переменными параметрами, преодолевающий вычислительные ограничения классических подходов за счёт сведения задачи к последовательности задач линейного программирования. Метод основан на рекуррентном построении расширенных матриц связи между входными сигналами и выходом на каждом шаге, а также на итеративной фиксации компонент выходного вектора, что позволяет находить реализуемые конфигурации формы плазмы в заданный момент времени с учётом эволюции параметров.

Метод применён для анализа возможностей управления формой плазмы в токамаке Глобус-М2. Показано, что система управления полоидальным полем

способна обеспечить увеличение вытянутости плазмы по вертикали (отклонения зазоров g_7 и g_{19} до нескольких сантиметров в сторону уменьшения) при соблюдении ограничений на напряжения и токи в ЭМС токамака и сохранении положительных зазоров между плазмой и лимитером на всём рассматриваемом диапазоне времени. При этом установлено, что достижимость требуемых отклонений зависит от момента времени: в некоторые фазы разряда желаемая конфигурация может быть недостижима, что необходимо учитывать при планировании экспериментов. Метод позволяет не только оценить достижимые диапазоны, но и синтезировать конкретные программные управления для реализации заданных конфигураций.

Глава 3. Комплекс программ для моделирования плазменных разрядов

Глава посвящена реализации разработанных численных методов оценки многомерной области достижимости формы плазмы в составе проблемно-ориентированного комплекса программ для математического моделирования плазменного эксперимента в токамаке. Комплекс реализует методы, описанные в главе 1 (оценка области достижимости для LTI-моделей в установившемся режиме) и главе 2 (оценка для LTV-моделей), и обеспечивает полный цикл расчёта: загрузку экспериментальных данных, задание ограничений на управляющие и выходные сигналы, вычисление матричных связей, решение оптимизационных задач, визуализацию полученных областей и формирование программных управлений. Результаты главы опубликованы в работах автора [149; 150].

3.1 Пользовательский интерфейс

Разработанный в главах 1 и 2 метод последовательной оценки области достижимости предполагает выполнение большого объёма вычислительных операций. К ним относятся формирование расширенных матриц связи M_k , H_k , Q_k для каждого момента времени, многократное решение задач линейного программирования для различных фиксированных значений выходов, а также обработка и визуализация получаемых интервальных оценок. Ручное выполнение этих расчётов в среде универсальных математических пакетов трудоёмко, особенно при работе с реальными данными плазменных разрядов, включающими сотни временных шагов и десятки диагностических сигналов.

В данной главе описывается разработанный автором программный комплекс, реализованный в среде MATLAB и предназначенный для автоматизации предложенных методов оценки ОД. Комплекс обеспечивает загрузку и предобработку экспериментальных данных с установки Глобус-М2 (токи, напряжения, зазоры), итеративное вычисление матричных связей M_k , H_k , а также решение серий оптимизационных задач (2.8)–(2.12) с помощью встроенных решателей



Рисунок 3.1 — Интерфейс приложения, вкладка «Загрузка» («Load»), Разряд № 41085. Доступен выбор ограничений на управляющие и выходные сигналы, показаны токи и напряжения в обмотках и область возможных отклонений по этим сигналам

линейного программирования. Предусмотрены функции визуализации динамики области достижимости во времени, построения двумерных сечений и экспорта полученных программных управлений для дальнейшего использования.

Пользовательский интерфейс приложения для определения достижимых конфигураций формы плазмы состоит из двух основных вкладок: «Загрузка» («Load») и «Сечения» («Sections»). На вкладке «Загрузка» (рис. 3.1) реализована возможность загрузки модели вида (3.2), задания ограничений на сигналы согласно (3.1) и просмотра графиков экспериментальных сигналов. Также доступен выбор алгоритма и точности решения оптимизационной задачи: симплекс-метод [85; 106; 107] или метод внутренней точки [104; 108]. Возможна организация решения задачи с использованием параллельных вычислений для одновременного расчета ОД различных выходов $y^{(j)}$.

Экспериментальные данные плазменных разрядов токамака Глобус-М2 включают измерения напряжений и токов в обмотках полоидального магнитного поля, а также восстановленные по магнитным измерениям координаты центра плазменного шнура и зазоры между границей плазмы и лимитером с

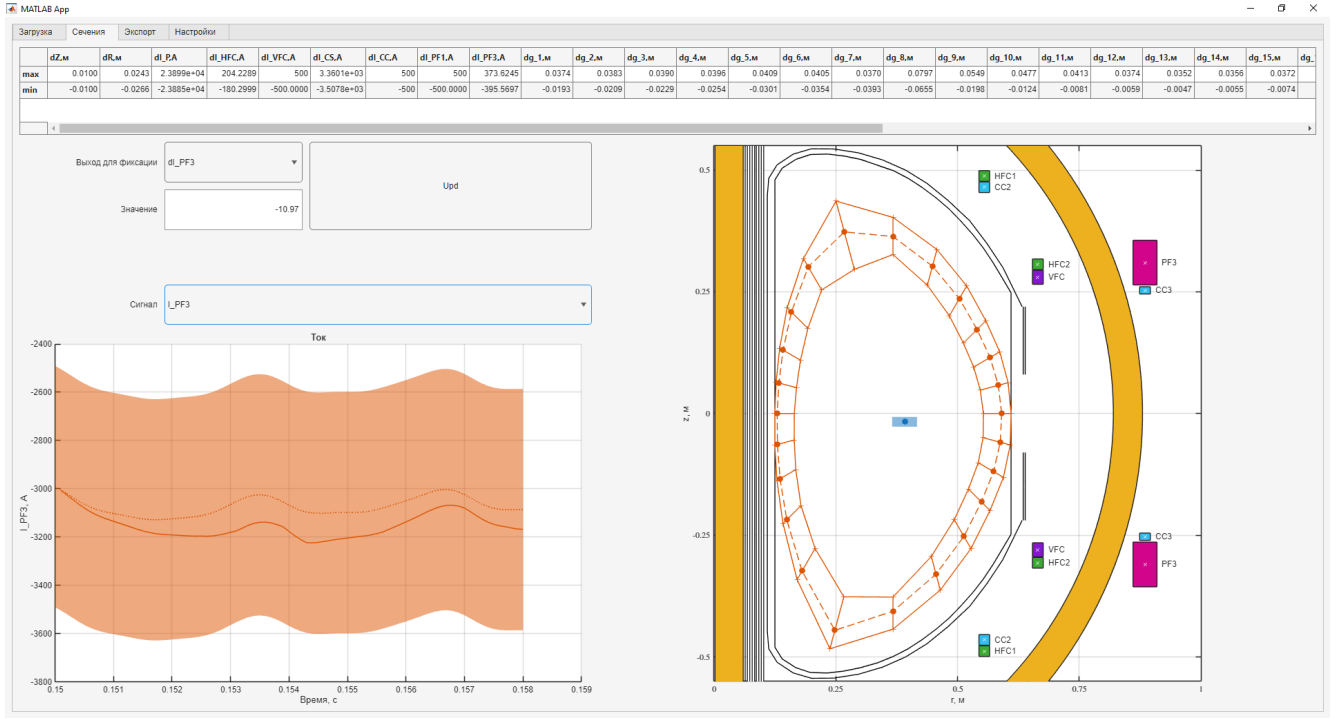


Рисунок 3.2 — Интерфейс приложения, элемент вкладки «Сечения» («Sections»), Разряд № 41085, $t = 158$ мс. Область возможных изменений каждой из составляющей вертикального (полоидального) сечения плазмы и окно просмотра графиков отклоненных входных и выходных сигналов реализующих одну из допустимых точек внутри области достижимости, пунктиром показан сценарный сигнал, сплошным – отклоненный, реализующий выбранную форму плазмы, заливкой – область допустимых отклонений

шагом дискретизации 100 мкс. Восстановление равновесия плазмы выполнялось с помощью алгоритма FCDI-IT [20]. Ограничения на эти сигналы могут быть заданы как на отклонения от сценария, так и на полные сигналы (рис. 3.1). Таким образом ограничения на отклонения на каждом шаге определяются следующим образом:

$$\begin{cases} y_{\min} \leq y_k + \delta y_k \leq y_{\max} \\ \delta y_{\min} \leq \delta y_k \leq \delta y_{\max} \end{cases} \quad \Downarrow \quad \max(\delta y_{\min}, y_{\min} - y_k) \leq \delta y_k \leq \min(\delta y_{\max}, y_{\max} - y_k). \quad (3.1)$$

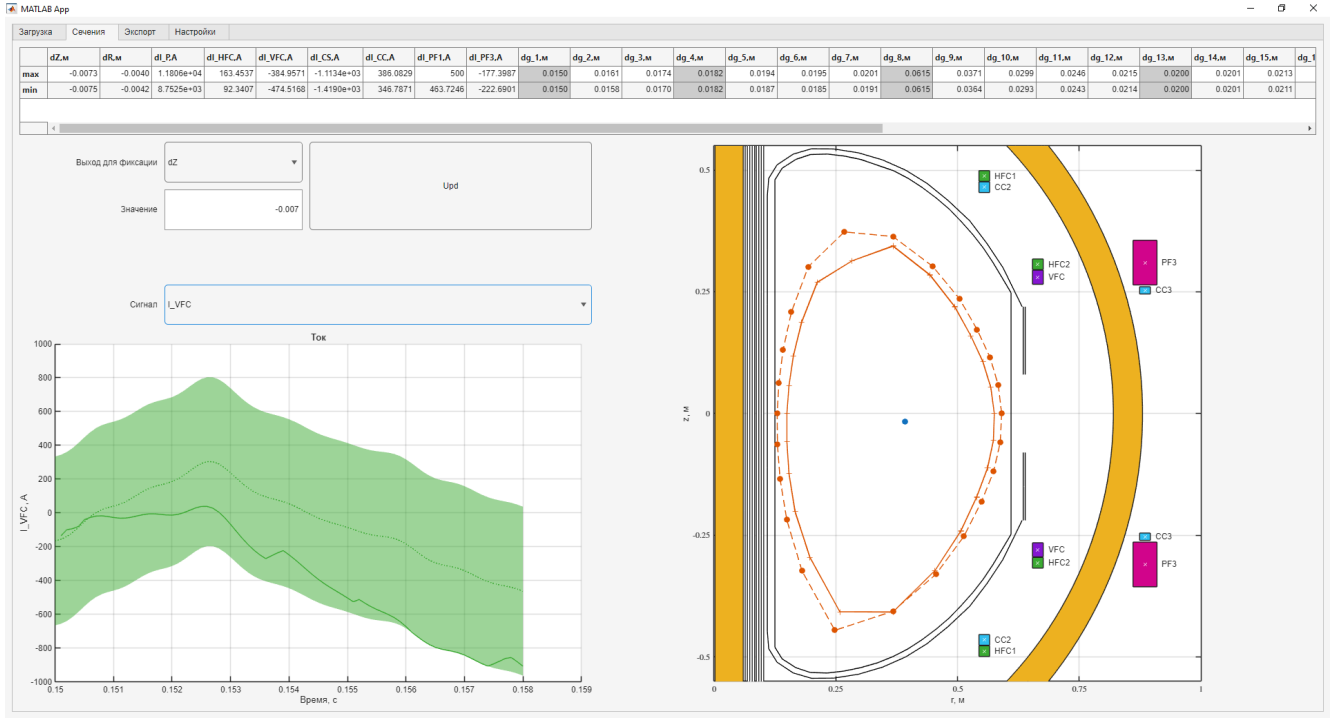


Рисунок 3.3 — Рабочая область приложения. Показана возможная отклоненная формы плазмы и окно просмотра графиков отклоненных входных и выходных сигналов реализующих одну из допустимых точек внутри области достижимости, пунктиром показан сценарный сигнал, сплошным – отклоненный, реализующий выбранную форму плазмы, заливкой – область допустимых отклонений

Линейные модели плазмы в токамаке Глобус-М2 с переменными параметрами представлены в виде [151]:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k \delta u_k, \\ \delta y_k = C_k x_k, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $x \in \mathbb{R}^{17}$ – вектор состояний, $\delta u = [\delta U_{HFC}, \delta U_{VFC}, \delta U_{CS}, \delta U_{CC}, \delta U_{PF1}, \delta U_{PF3}]$ – отклонения напряжений от сценарных значений в управляющих обмотках, $\delta y = [\delta Z, \delta R, \delta I_P, \delta I_{HFC}, \delta I_{VFC}, \delta I_{CS}, \delta I_{CC}, \delta I_{PF1}, \delta I_{PF3}, \delta g_1, \dots, \delta g_{24}]$ – отклонения по положению, току плазмы, току в обмотках и по зазорам.

3.2 Реализация верхней и нижней оценок области достижимости

Разработанные в главе 1 численные методы оценки области достижимости формы плазмы для линейных стационарных (ЛТИ) моделей в установившемся режиме реализованы в составе комплекса программ в виде набора функций, доступных через пользовательский интерфейс.

Основным элементом метода является матрица связывающая входы и выходы в установившемся режиме (1.9), которая связывает вектор управляющих воздействий u (уставки по токам обмоток и положению плазмы) с выбранным набором выходных параметров. Комплекс программ позволяет пользователю самостоятельно определять состав выходного вектора: это могут быть шесть параметров формы (g_1 – g_6), как это было рассмотрено в главе 1, 24 зазора, характеризующих полоидальное сечение, как было рассмотрено в главе 2, или произвольное подмножество интересующих величин. Такой подход даёт возможность оценивать достижимость как всей формы плазмы в целом, так и отдельных её характеристик.

Для вычисления верхней оценки области достижимости (максимального независимого отклонения каждого выхода) в приложении реализована функция `app.compute_upper_est()`. Она использует аналитическое выражение, следующее из линейности моделей (1.1) и (1.2), и позволяет для каждого выбранного выхода определить предельное значение при условии, что остальные выходы могут изменяться произвольно. Результаты визуализируются в виде графиков динамики верхних оценок на протяжении разряда.

Для вычисления нижней оценки (максимального отклонения, достижимого одновременно по всем выбранным выходам) используется функция `app.compute_lower_est()`. На первом этапе для каждого выхода решается задача линейного программирования, что позволяет получить вспомогательные оценки (1.3) — (1.5). Затем на основе полученных значений вычисляется гарантированное одновременное отклонение. Решение оптимизационных задач выполняется симплекс-методом, реализованным во встроенном решателе MATLAB (`linprog`).

Ниже приведены фрагменты кода, реализующие вычисление верхней и нижней оценок области достижимости для ЛТИ-модели в установившемся режиме.

Листинг 3.1: Вычисление верхней оценки области достижимости для LTI-модели

```

function compute_upper_est(app)
    app.y_upper = zeros(app.out_sz, 1);
    for i = 1:app.out_sz
        row = app.M(i, :);
5       app.y_upper(i) = sum(abs(row) .* app.u_max);
    end
end

```

Листинг 3.2: Вычисление нижней оценки области достижимости для LTI-модели

```

function compute_lower_est(app)
    y_max_aux = zeros(n_out, 1);

    for i = 1:app.out_sz
5       f = -app.M(i, :)' ;
        Aeq = app.M(setdiff(1:app.out_sz, i), :);
        beq = zeros(app.out_sz - 1, 1);
        lb = app.u_min;
        ub = app.u_max;
10      [~, fval] = linprog(f, [], [], Aeq, beq, lb, ub, app.
options);
        y_max_aux(i) = -fval;
    end
    app.y_lower = 1 / sum(1 ./ y_max_aux);
end

```

Обе функции интегрированы в интерфейс приложения: пользователь выбирает разряд и момент времени, после чего вызывается соответствующая функция, а результаты отображаются в графическом виде. При необходимости расчёт может быть выполнен для последовательности временных срезов, что позволяет получить динамику оценок на протяжении разряда.

Интерфейс приложения позволяет пользователю загрузить LTI-модель для выбранного момента времени, задать ограничения на управляющие сигналы и выходные переменные, а затем получить как верхние, так и нижние оценки в численном и графическом виде. Результаты могут быть экспортированы для дальнейшего использования при планировании экспериментов.

Таким образом, реализованные в комплексе программ LTI-методы обеспечивают гибкость в выборе контролируемых параметров формы плазмы и

позволяют оперативно оценивать предельные возможности магнитной системы в различных режимах работы установки.

3.3 Рекуррентное вычисление расширенных матриц связи

Для реализации алгоритма последовательной оценки области достижимости необходимо сформировать расширенные матрицы M_k и H_k для каждого момента времени по формуле (2.7). В разработанном MATLAB-приложении эта задача решается функцией `precalc()`, которая выполняется перед основными оптимизационными расчётами. Функция выполняет интерполяцию параметров LTV-модели на каждый дискретный шаг, формирует матрицы связи и векторы ограничений.

На первом этапе определяются параметры временной сетки:

```
Ts_grid = app.model.SamplingGrid.time;
Ts = app.model.Ts;
T_int = round((Ts_grid(2) - Ts_grid(1))/Ts);
```

Переменная `T_int` задаёт число шагов дискретизации между узлами решётки LTV-модели, необходимое для линейной интерполяции матриц A_i, B_i, C_i .

Формируются списки индексов `non_inf_y_list_max` и `non_inf_y_list_min` для компонент с конечными границами:

```
for j = 1:app.out_sz
    if ~isinf(app.y_max_r(j)) || ...
        non_inf_y_list_max(non_inf_y_list_max_ind) = j;
    end
5    % аналогично для минимума
end
```

Выполняется проход по всем временным шагам. На каждом шаге вычисляются интерполированные значения матриц A, B, C согласно формуле (2.16):

```
C = app.model(:, :, k).C * (k*T_int + 1 - i)/T_int + ...
    app.model(:, :, k + 1).C * (i - ((k-1)*T_int + 1))/T_int;
```

Индексы k и i отслеживают текущий узел решётки и шаг дискретизации. Матрица M_k строится рекуррентно. Для первых шагов:

```
if i == 2
    M = B;
```

```

    Z = C*M;
    app.F = Z;
5   M_restr = app.F(:, :);
    app.M_max = M_restr;
    app.Z_restr_max = M_restr(non_inf_y_list_max, :);
    app.Z_restr_min = M_restr(non_inf_y_list_min, :);
end

```

Для последующих шагов:

```

    if i > 2
        M = [A * M, B];
        Z = C*M;
    app.F = Z;
5   M_restr = app.F(:, :);
    app.M_max = [app.M_max; zeros((i-2)*app.out_sz, app.inp_sz);
M_restr];
    app.Z_restr_max = [app.Z_restr_max; zeros((i-2)*app.
non_inf_y_list_max_sz, app.inp_sz); M_restr(
non_inf_y_list_max, :)]];
    % аналогично для минимума
end

```

Здесь `app.M_max` хранит полную матрицу M_k , а `app.Z_restr_max` и `app.Z_restr_min` — матрицы H_k для ограниченных выходов.

На каждом шаге заполняются векторы нижних и верхних границ:

```

app.lb = [app.lb; app.u_min];
app.ub = [app.ub; app.u_max];
app.b_max = [app.b_max; app.y_max_r(non_inf_y_list_max, :)]];
app.b_min = [app.b_min; -app.y_min_r(non_inf_y_list_min, :)]];

```

При необходимости учитываются отклонения от сценарных значений зазоров.

По окончании цикла матрицы готовы для последующего решения задач линейного программирования и пользователь переходит к оценке области достижимости.

Функция `GO()` реализует первый этап последовательной оценки области достижимости: вычисление верхних и нижних границ для всех компонент выходного вектора y_T . Для этого решаются $2m$ задач линейного программирования (максимизация и минимизация для каждого выхода). Функция поддерживает два режима работы: последовательный и параллельный (с использованием `parfor`), что позволяет ускорить расчёты на многоядерных процессорах.

Перед запуском оптимизации формируются матрицы ограничений:

```

| [L, ~] = size(app.b_max);
| L = L / app.non_inf_y_list_max_sz;
| A_lp = [app.Z_restr_max; -app.Z_restr_min];
| b = [app.b_max; app.b_min];
5 | Aeq = [];
| beq = [];

```

Здесь `app.Z_restr_max` и `app.Z_restr_min` соответствуют матрицам H_k для ограниченных выходов, а `app.b_max` и `app.b_min` — правым частям ограничений. Переменная `L` определяет число временных шагов.

Если включён флаг `app.CheckBox_UseParallel`, вычисления выполняются в цикле `parfor` по всем $2m$ задачам. Для каждой задачи выбирается соответствующий столбец матрицы `app.F`, которая хранит M_T и вызывается функция `linprog`. Одним из ее параметров выступает `options_loop`, где хранится в том числе информация о выбранном методе решения задачи ЛП: симплекс-метод или метод внутренней точки. Результаты сохраняются в массивах `X_add` и `y_add`, а затем распределяются по выходам:

```

| parfor j_add = 1:app.out_sz*2
|     j = floor((j_add - 1)/2) + 1;
|     M_maximize = F_loop(j, :);
|     if mod(j_add - 1, 2) == 0
5 |         [X_add(:, j_add), fval] = linprog(-M_maximize', A_lp, b,
|         Aeq, beq, lb_loop, ub_loop, options_loop);
|         y_add(j_add) = -fval;
|     else
|         [X_add(:, j_add), fval] = linprog(M_maximize', A_lp, b,
|         Aeq, beq, lb_loop, ub_loop, options_loop);
|         y_add(j_add) = fval;
10 |     end
| end

```

В результате для каждого выхода получаются два вектора управлений (`app.X(1,:,j)` и `app.X(2,:,j)`) и две границы (`y_max(j)`, `y_min(j)`).

При отключённом параллельном режиме используется обычный цикл `for` с индикацией прогресса. Для каждого выхода последовательно решаются задачи минимизации и максимизации:

```

| for j = 1:app.out_sz
|     f = app.F(j, :);

```

```

    [app.X(2, :, j), fval] = linprog(f', A_lp, b, Aeq, beq, app.
lb, app.ub, app.options);
    app.y_lim(2, j) = fval;
5    [app.X(1, :, j), fval] = linprog(-f', A_lp, b, Aeq, beq, app
.lb, app.ub, app.options);
    app.y_lim(1, j) = -fval;
end

```

После завершения расчётов таблица `app.Table_Outputs_limits` заполняется найденными границами, формируется изображение полоидального сечения токамака с допустимыми отклонениями по каждому из компонент формы плазмы, активируются элементы интерфейса для второго шага: выбор фиксируемого выхода и его значения. Вызываются функции обновления графиков `gaps_plot` и `signal_plot`, отображающие полученные результаты. Таким образом, функция `GO()` полностью реализует первый этап алгоритма и подготавливает данные для последующих итераций.

3.4 Итеративное вычисление оценки ОД

Функция `upd()` реализует второй и последующие шаги алгоритма последовательной оценки области достижимости. На вход поступает значение фиксируемого выхода, выбранное пользователем в интерфейсе. Для оставшихся свободных компонент заново решаются задачи линейного программирования с добавленным ограничением–равенством, соответствующим зафиксированному значению.

В начале функции определяется индекс выбранного выхода и его фиксированное значение:

```

    value = convertCharsToStrings(app.DropDown_y_fix_name.Value);
    ind = -1;
    for i = 1:app.out_sz
        if value == app.model.OutputName{i}
5        ind = i;
        end
    end
    val = app.EditField_y_fix_val.Value;
    app.y_lim(:, ind) = val;
10 app.Table_Outputs_limits.Data = app.y_lim;

```

```
| app.out_status(1, ind) = 1;
```

Массив `app.out_status` отмечает, какие выходы уже зафиксированы. Для визуализации соответствующая ячейка таблицы затеняется серым цветом.

Далее формируются списки зафиксированных выходов и их значений, а также обновляется выпадающий список доступных для выбора выходов:

```
| y_fixed_list = [];
| y_fixed_val_list = [];
| Items = string([]);
| for i = 1:app.out_sz
5 |     if app.out_status(1, i) == 1
|         y_fixed_list(end + 1) = i;
|         y_fixed_val_list(end + 1) = app.y_lim(1, i);
|     else
|         Items(end + 1) = convertCharsToStrings(app.model.
|         OutputName{i});
10 |     end
| end
```

Матрицы ограничений `A_lp` и `b` остаются теми же, что и на первом шаге, но добавляется новое ограничение—равенство для фиксированных выходов:

```
| A_lp = [app.Z_restr_max; -app.Z_restr_min];
| b = [app.b_max; app.b_min];
| beq = y_fixed_val_list;
| M_eq = app.F(y_fixed_list, :);
5 | Aeq = M_eq;
```

Как и в функции `GO()`, поддерживаются два режима вычислений. В параллельном режиме с помощью `parfor` решаются задачи для всех оставшихся выходов (как на максимум, так и на минимум):

```
| parfor j_add = 1:app.out_sz*2
|     j = ((j_add - 1) - mod(j_add - 1, 2))/2 + 1;
|     if out_status_loop(j) == 0
|         M_maximize = F_loop(j, :);
5 |         if mod(j_add - 1, 2) == 0
|             [X_add(:, j_add), fval] = linprog(-M_maximize', A_lp, b,
|             Aeq, beq, lb_loop, ub_loop, options_loop);
|             y_add(j_add) = -fval;
|         else
|             [X_add(:, j_add), fval] = linprog(M_maximize', A_lp, b,
|             Aeq, beq, lb_loop, ub_loop, options_loop);
10 |             y_add(j_add) = fval;
```

```

        end
    end
end

```

Результаты затем присваиваются соответствующим элементам массивов `app.X` и `app.y_lim`.

В последовательном режиме используется цикл `for` с индикацией прогресса:

```

5   for j = 1:app.out_sz
        if app.out_status(j) == 0
            M_maximize = app.F(j, :);
            [app.X(2, :, j), fval] = linprog(M_maximize', A_lp, b, Aeq
, beq, app.lb, app.ub, app.options);
            app.y_lim(2, j) = fval;
            [app.X(1, :, j), fval] = linprog(-M_maximize', A_lp, b,
Aeq, beq, app.lb, app.ub, app.options);
            app.y_lim(1, j) = -fval;
        end
    end
end

```

После завершения расчётов обновляется таблица с границами, актуализируется изображение вертикального сечения и изменяется содержимое выпадающего списка:

```

    app.Table_Outputs_limits.Data = app.y_lim;
    app.DropDown_y_fix_name.Items = Items;

```

Для визуализации вычисляется программное управление, соответствующее либо одному из предельных значений по оставшимся незафиксированным выходам, если они есть, либо итоговое решение, удовлетворяющее всем фиксированным значениям:

```

5   if ind2plot ~= -1
        app.u_tmp = reshape(app.X(2, :, ind2plot), [app.inp_sz, L]);
    else
        [X_fin, ~] = linprog([], A_lp, b, Aeq, beq, app.lb, app.ub,
app.options);
        app.u_tmp = reshape(X_fin, [app.inp_sz, L]);
    end

```

Аналогично вычисляются и отображаются выходные сигналы, после чего вызываются функции обновления графиков.

Таким образом, функция `upd()` обеспечивает итеративный процесс последовательной оценки, на каждом шаге учитывая уже зафиксированные значения

и сужая допустимые диапазоны для оставшихся выходных переменных. По достижении последнего шага (все выходы зафиксированы) находится программное управление, реализующее заданную точку в пространстве выходов.

Расчет потенциального уменьшения верхнего и нижнего зазоров между плазмой и лимитером, представленного в разделе 2.3, был проведен с помощью описываемого комплекса программ в режиме параллельного программирования с использованием симплекс-метода для решения задач ЛП. Для одного разряда времена работы на CPU Intel Core Ultra 7 265K составили: рекуррентное вычисление матриц связывающих входные и выходные сигналы – 2,7 с, вычисление верхней оценки ОД по 2-м зазорам – 3,4 с, уточнение оценки по зазору g_{19} с учетом зафиксированного g_7 – 14,6 с, вычисление программного управления, реализующего конфигурацию с двумя отклоненными точками и моделирование динамики плазмы с рассчитанным управлением – 7,1 с.

3.5 Выводы по Главе 3

В главе разработан проблемно-ориентированный комплекс программ, реализующий предложенные в главах 1 и 2 численные методы оценки многомерной области достижимости формы плазмы в токамаке. Комплекс объединяет два подхода: анализ для линейных (LTI) моделей с постоянными параметрами в установившемся режиме и для изменяемых во времени моделей (LTV) учитывающих эволюцию плазмы.

Для моделей с постоянными параметрами реализованы функции вычисления матрицы связывающей входы и выходы, построения верхней и нижней оценок области достижимости в установившемся режиме. Пользователь имеет возможность выбирать произвольный набор выходных параметров формы, что обеспечивает гибкость при планировании экспериментов.

Для моделей с переменными параметрами в комплексе реализован алгоритм последовательной оценки области достижимости: рекуррентное формирование расширенных матриц связи, решение серий задач линейного программирования, итеративное уточнение диапазонов при фиксации значений отдельных выходов, а также синтез программного управления для достижения заданной конфигурации. В соответствии с итеративным уточнени-

ем обновляется изображение вертикального сечения токамака с диапазонами изменений составляющих формы.

Интерфейс приложения обеспечивает загрузку экспериментальных данных, настройку ограничений, визуализацию динамики области достижимости, отображение границ и построение двумерных сечений. Для ускорения расчётов предусмотрена возможность параллельного выполнения оптимизационных задач. Разработанный комплекс позволяет проводить математическое моделирование плазменных экспериментов, в том числе во время технологической паузы между разрядами, оценивая реализуемость желаемых конфигураций формы плазмы с учётом всех технических ограничений электромагнитной системы установки.

Глава 4. Математическое моделирование систем магнитного управления в токамаке

В разделе 4.1 рассматривается синтез математических моделей, связывающих внешние магнитные измерения и форму плазмы в токамаке Глобус-М2. В разделе 4.2 – моделирование и численные методы для построения ОУ по вертикали. В разделе 4.3 – математическое моделирование нелинейной системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ. Результаты главы опубликованы в работах автора [151–154].

4.1 Синтез математических моделей, связывающих сигналы магнитной диагностики и форму плазмы

В разделе приводится построение математических моделей, связывающих магнитные измерения вне вакуумной камеры и форму плазмы в токамаке Глобус-М2. В качестве эталонного метода рассматривается алгоритм FCDI. Для повышения быстродействия, проводится идентификация алгоритма FCDI с помощью линейной регрессии (статическая матрица) и полносвязных нейронных сетей.

Управление формой и положением плазмы в режиме реального времени требует алгоритмов быстрой оценки её геометрических параметров на основе средств магнитной диагностики. Хотя итерационные алгоритмы (например, FCDI) решают задачу восстановления равновесия с высокой точностью, они являются вычислительно затратными, поэтому для оперативного моделирования, в том числе, между плазменными разрядами во время экспериментальной кампании полезны быстрые методы нахождения формы плазмы. В данном разделе представлены результаты разработки и сравнения двух быстрых методов оценки формы плазмы для токамака Глобус-М2: простейшего метода статической матрицы, проводящей аффинное преобразование сигналов магнитной диагностики, и более общего нелинейного метода на основе искусственных нейронных сетей. Оба метода аппроксимируют зависимость параметров формы от магнит-

ных измерений, что позволяет получать оценку за время, на порядки меньшее, чем требуется для сходимости FCDI.

Диагностический комплекс токамака Глобус-М2 включает магнитные, оптические, СВЧ- и рентгеновские измерения [109; 110]. Магнитная диагностика, основанная на законе Фарадея, является основной для управления плазмой в реальном времени. Внешние магнитные измерения позволяют получать информацию о полоидальном магнитном потоке ψ и токе плазмы I_p [13; 19; 111].

В диссертационной работе в качестве эталонного алгоритма для восстановления формы плазмы по внешним магнитным измерениям используется код FCDI (Flux-Current Distribution Identification) [9]. Данный алгоритм основан на минимизации функционала невязки между измеренными и расчётными значениями полоидального потока, а также тока плазмы, минимизация проводится итерационно с применением регуляризации [112; 113]. Восстановление равновесной конфигурации плазмы по магнитным измерениям осуществляется с использованием уравнения Грэда–Шафранова, связывающего распределение полоидального магнитного потока с тороидальной плотностью тока [17; 114].

Плазменный разряд состоит из нескольких фаз. Фаза, на протяжении которой плазма находится внутри вакуумной камеры и не касается стенок, называется диверторной фазой [18]. В токамаке Глобус-М2 длительность диверторной фазы составляет около 30 мс [28]. В диссертационной работе были обработаны временные ряды 51 разряда Глобус-М2. Алгоритм FCDI использовался для получения формы плазмы в этих разрядах на диверторной фазе. Типичный вид экспериментальных сигналов и результатов восстановления формы методом FCDI представлен на рис. 4.1.

Для каждого из разрядов доступны магнитные измерения $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(50)}$, где $y^{(i)} \in \mathbb{R}^{33 \times s_i}$, i – номер разряда, $i \in [1; 50]$, где каждый $s_i = T_i/\tau$, T_i – длительность разряда, $\tau = 1$ мс – шаг дискретизации. По экспериментальным данным алгоритм FCDI восстанавливает распределение тока плазмы и координаты границ плазмы для диверторных фаз разрядов [9]. Рассчитанные сигналы формы плазмы представлены положениями 2 ударных точек (g_1, g_2) на вакуумной камере и значениями 4 зазоров $(g_3 - g_6)$ между плазмой и вакуумной камерой (рис. 1.16) $g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(50)}$; $g^{(i)} \in \mathbb{R}^{6 \times s_i}$. Алгоритм FCDI, описанный выше, служит в работе эталонным источником данных о форме плазмы $g^{(i)}$ для обучения и валидации быстрых методов.

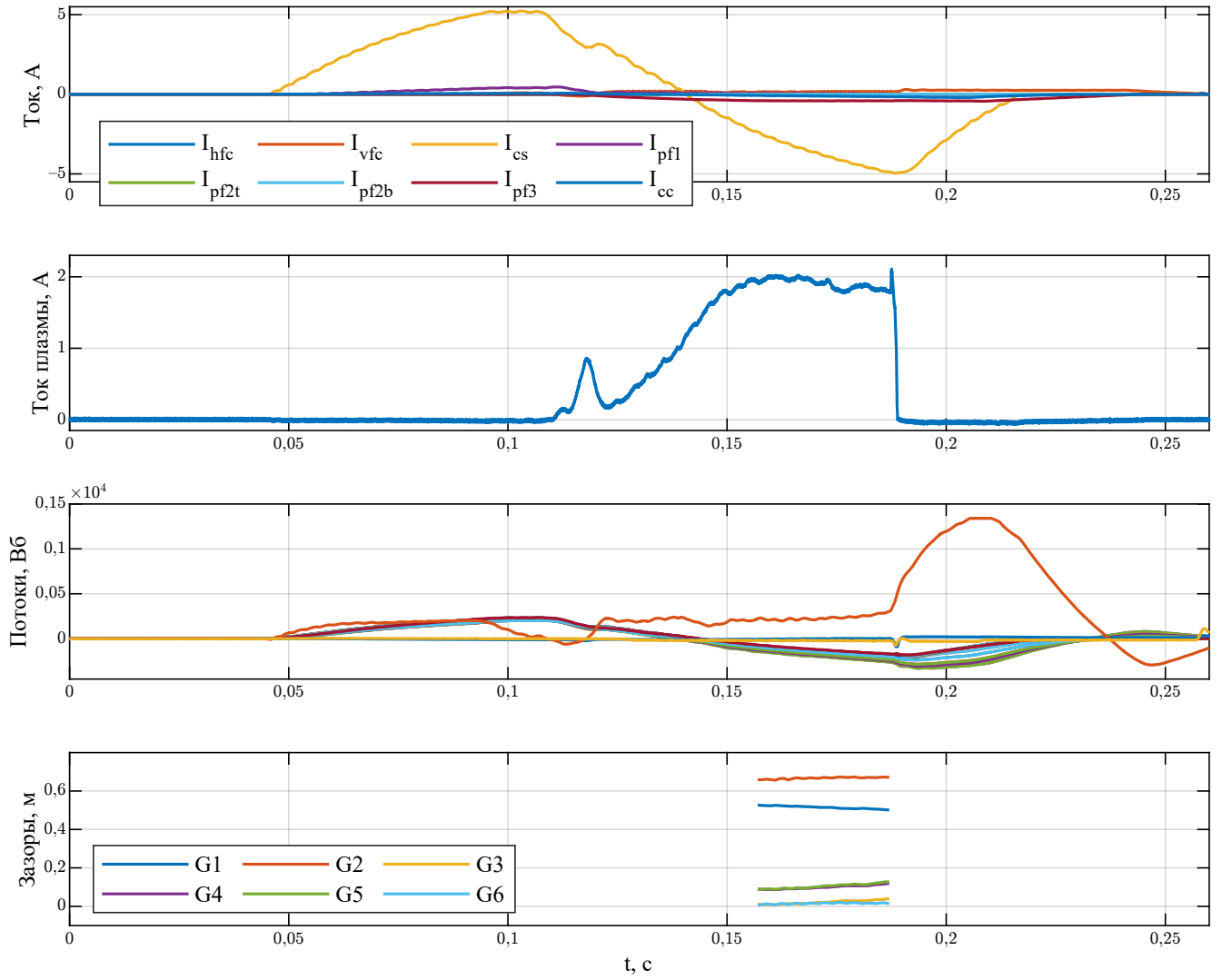


Рисунок 4.1 — Экспериментальные сигналы, разряд № 37255 и зазоры, восстановленные алгоритмом FCDI на диверторной фазе плазменного разряда

В качестве наиболее простого такого отображения рассмотрим метод статической матрицы, который представляет собой линейную регрессионную модель. Предполагается, что в окрестности рабочей точки плазменного разряда зависимость между вектором магнитных измерений y и вектором параметров формы g может быть описана линейным преобразованием с постоянным сдвигом: для любого момента времени $j \in [1; s_i]$ любого разряда $i \in [1; 50]$ оценка формы плазмы $\hat{g}_j^{(i)} \in \mathbb{R}^6$ получается как $\hat{g}_j^{(i)} = Ky_j^{(i)} + \tilde{g}$, где $K \in \mathbb{R}^{6 \times 33}$ — матрица коэффициентов регрессии, $\tilde{g} \in \mathbb{R}^6$ — вектор сдвига. Матрица K и вектор $\tilde{g}$ не зависят от разряда и момента времени и определяются минимизацией среднеквадратичной ошибки восстановления по обучающей выборке. Вектор $\tilde{g}$ будем называть базовыми значениями отклонений формы. Матрица K и вектор $\tilde{g}$ вычисляются посредством минимизации невязки между расчётными и

восстановленными значениями всех 6-ти зазоров во всех 50-ти разрядах во все моменты времени:

$$E(K, \tilde{g}) = \sum_{i=1}^{50} \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^{s_i} (\hat{g}_{jk}^{(i)} - g_{jk}^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^{50} \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^{s_i} (Ky_{jk}^{(i)} + \tilde{g} - g_{jk}^{(i)})^2 \xrightarrow{K, \tilde{g}} \min, \quad (4.1)$$

где $\hat{g}^{(i)} = [\hat{g}_1^{(i)}, \hat{g}_2^{(i)}, \dots, \hat{g}_{s_i}^{(i)}] \in \mathbb{R}^{6 \times s_i}$ — форма плазмы в i -м разряде, $g^{(i)} = [g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_{s_i}^{(i)}] \in \mathbb{R}^{6 \times s_i}$ — матрица восстановленных значений формы в i -м разряде. Поскольку $y^{(i)} = [y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{s_i}^{(i)}] \in \mathbb{R}^{6 \times s_i}$ — матрица измеряемых в эксперименте сигналов i -го разряда, $r^{(i)}(\tilde{g}) = [\tilde{g}, \tilde{g}, \dots, \tilde{g}] \in \mathbb{R}^{6 \times s_i}$ — матрица с тем же количеством столбцов $\tilde{g}$, то уравнения модели можно переписать в матричной форме:

$$\hat{g}^{(i)} = Ky^{(i)} + r^{(i)}(\tilde{g}), \quad \hat{g}^{(i)} \in \mathbb{R}^{6 \times s_i}. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) можно переписать в матричной форме следующим образом:

$$E(K, \tilde{g}) = \sum_{i=1}^{50} \|\hat{g}^{(i)} - g^{(i)}\|^2 \xrightarrow{K, \tilde{g}} \min. \quad (4.3)$$

Пусть $Y = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(50)}]; Y \in \mathbb{R}^{33 \times S}$, где $S = \sum_{i=1}^{50} s_i$, $G = [g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(50)}]; G \in \mathbb{R}^{6 \times S}$ и $\hat{G} = [\hat{g}^{(1)}, \hat{g}^{(2)}, \dots, \hat{g}^{(50)}]; \hat{G} \in \mathbb{R}^{6 \times S}$. Матрица Y содержит все измерения, матрица G — все восстановленные значения формы. Поскольку $\hat{G} = [\hat{g}^{(1)}, \hat{g}^{(2)}, \dots, \hat{g}^{(50)}] = [Ky^{(1)} + r, Ky^{(2)} + r, \dots, Ky^{(50)} + r]$, задача (4.2), (4.3) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} \hat{G}(K, \tilde{g}) &= KY + R(\tilde{g}), \quad \hat{G} \in \mathbb{R}^{6 \times S} \\ E(K, \tilde{g}) &= \|\hat{G}_k(\tilde{g}) - G_k\|^2 \xrightarrow{K, \tilde{g}} \min \Rightarrow \begin{aligned} K(\tilde{g}) &= (G - R(\tilde{g}))Y^\dagger \\ Y^\dagger &= (Y^\top Y)^{-1}Y^\top, \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $R(\tilde{g}) = [\tilde{g}, \tilde{g}, \dots, \tilde{g}] \in \mathbb{R}^{6 \times S}$ — это матрица, составленная из столбцов $\tilde{g}$. Если известна $\tilde{g}$, то задача представляет собой переопределенную систему линейных алгебраических уравнений и может быть решена с помощью обобщённой обратной матрицы: $K(\tilde{g}) = (G - R(\tilde{g}))Y^\dagger$. Тогда $\hat{G}(\tilde{g}) = K(\tilde{g})Y + R(\tilde{g})$. Задача (4.4) эквивалентна следующей:

$$E(\tilde{g}) = \|\hat{G}_k(\tilde{g}) - G_k\|^2 \xrightarrow{\tilde{g}} \min.$$

Эту задачу можно решить итерационным градиентным методом [115–117]:

$$\tilde{g}' = \tilde{g} - \gamma \nabla E(\tilde{g}),$$

что было сделано для получения матрицы K и вектора $\tilde{g}$ по данным 50 разрядов токамака Глобус-M2. Рассчитанные базовые значения:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1 &= 0,5235 \text{ м}, \quad \tilde{g}_2 = 0,6264 \text{ м}, \quad \tilde{g}_3 = 0,0217 \text{ м}, \\ \tilde{g}_4 &= 0,1058 \text{ м}, \quad \tilde{g}_5 = 0,1590 \text{ м}, \quad \tilde{g}_6 = 0,0278 \text{ м}.\end{aligned}$$

Можно показать, что найденные базовые значения – это средние значения восстановленных проекций формы на протяжении всех разрядов [115].

Полученные значения матрицы K и $\tilde{g}$ были протестированы на разряде № 37712 (рис. 4.2), который не использовался для идентификации (рис. 4.2). Средняя квадратичная ошибка (MSE) оценки всех значений формы во все моменты времени составляет $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, время работы ТЕТ составило 6,3 мкс.

Полученная линейная модель в виде статической матрицы обладает простотой и высоким быстродействием, однако она задаёт лишь аффинную связь между магнитными измерениями и параметрами формы. В действительности отображение, реализуемое эталонным алгоритмом FCDI, неизвестно аналитически – имеет место функциональная неопределённость, и его структура может быть существенно нелинейной, поскольку восстановление равновесия плазмы основано на итерационном решении уравнения Грэда–Шафранова. Более того, сигналы магнитной диагностики физически взаимосвязаны, т. к. датчики расположены вблизи друг друга вокруг вакуумной камеры (рис. 1.16), что приводит к сильной коррелированности каналов (рис. 4.1). Экспериментальные сигналы разрядов не гарантируют незатухающего возбуждения регрессора, а классическая операция псевдообращения матрицы регрессоров становится неустойчивой – малые погрешности измерений могут приводить к значительным вариациям коэффициентов. Всё это ограничивает применимость линейной регрессии для построения надёжной аппроксимации. Поэтому вторым подходом в диссертационной работе для аппроксимации алгоритма FCDI исследуются модели на основе искусственных нейронных сетей (ИНС), которые, являясь универсальными аппроксиматорами, способны восстанавливать неизвестные нелинейные зависимости и при этом менее чувствительны к коррелированности входных данных [118].

Самый простой вид искусственной нейронной сети – это однослойный перцептрон [119]. Сигнал со входов, умноженный на веса, суммирующийся со

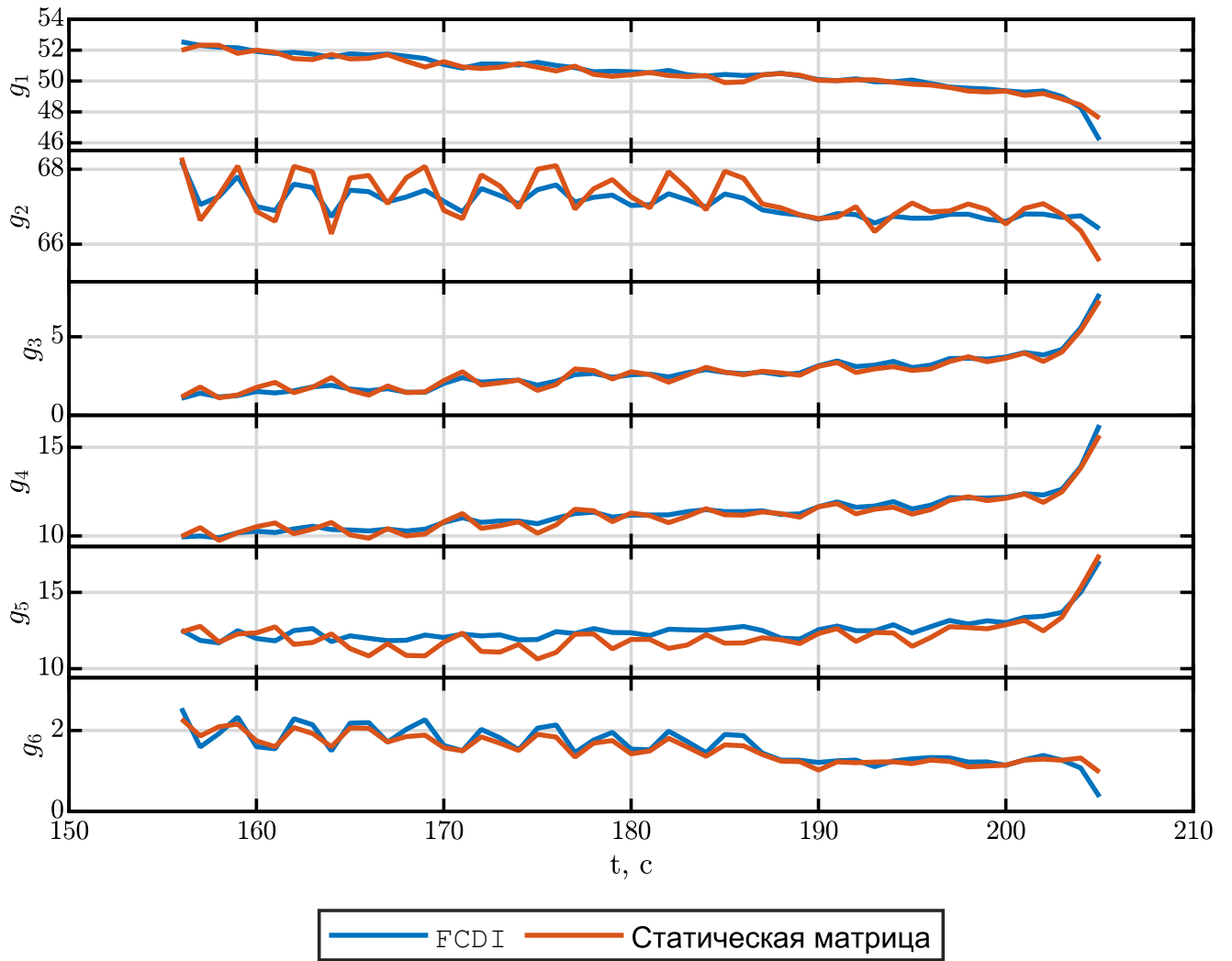


Рисунок 4.2 — Оценка значений зазоров в разряде № 37712 сферического тока-мака Глобус-М2 статичной матрицей

смещением и преобразованный нелинейной функцией активации, записывается следующим образом:

$$\text{output} = \sigma(W \cdot \text{input} + b),$$

где $\sigma(\cdot)$ – монотонная нелинейная функция, input – вектор входных сигналов, output – вектор выходных сигналов, W и b – весовые коэффициенты [120].

Искусственная нейронная сеть, состоящая из набора полносвязных слоёв, называется полносвязной нейронной сетью прямого распространения или многослойным перцептроном [118; 121; 122]. В нейронных сетях такого типа слои соединяются последовательно, без петель (рис. 4.3). Значения x_i называются скрытыми слоями.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sigma_1(W_1 \cdot \text{input} + b_1), \\
x_2 &= \sigma_2(W_2 \cdot x_1 + b_2), \\
&\dots \\
x_{n-1} &= \sigma_{n-1}(W_{n-1} \cdot x_{n-2} + b_{n-1}), \\
\text{output}_{NN} &= W_n \cdot x_{n-1} + b_n;
\end{aligned}$$

где функции активации и размер каждого из скрытых слоёв, вообще говоря, различны.

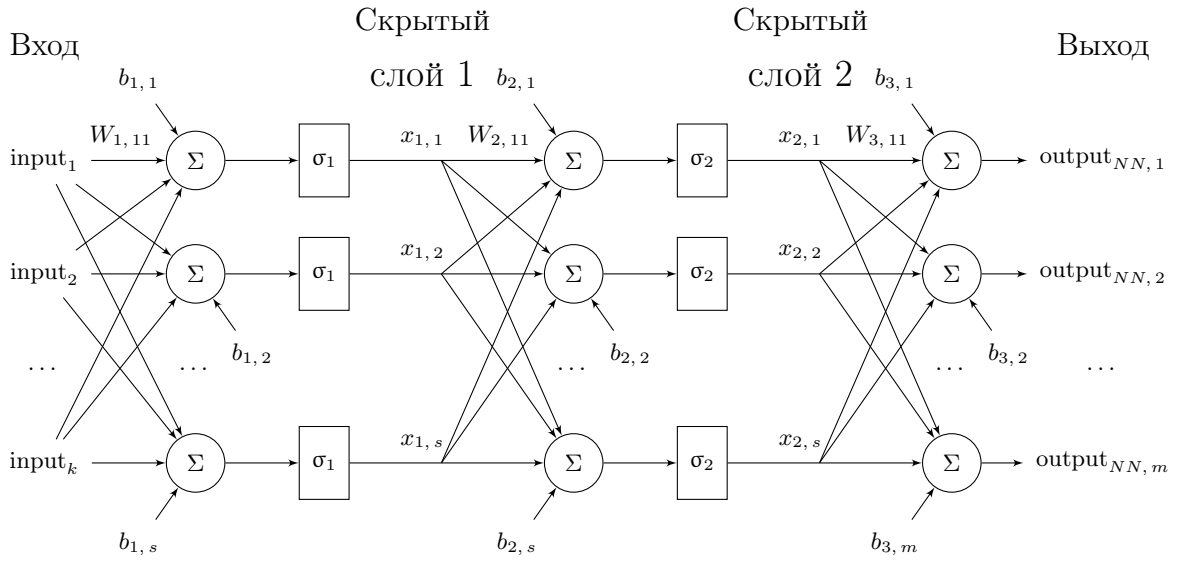


Рисунок 4.3 — Структура полносвязной нейронной сети прямого распространения с двумя скрытыми слоями размером s . Размерность входного вектора — k , выходного — m

Сеть прямого распространения определяет нелинейное отображение, обучение сети — поиск значения параметров, дающих наилучшую аппроксимацию [118; 122]. Нейронная сеть прямого распространения представляет собой суперпозицию простых функций одного переменного и их линейных комбинаций [120]. В [123—125] показано, что полносвязная сеть с достаточно большим числом нейронов может аппроксимировать любую функцию с любой наперед заданной точностью.

В случае оценки формы плазмы по внешним магнитным измерениям нейронная сеть имеет 33 входных сигнала (токи в 8-ми обмотках, ток плазмы и 24 магнитных потока) и 6 выходных сигналов (2 координаты ударных точек и 4 зазора между границей плазмы и лимитером). В общем случае размеры скрытых

слоёв различны, в диссертационной работе рассматривались нейронные сети со скрытыми слоями одинакового размера s .

$$W_1 \in \mathbb{R}^{33 \times s}, W_2, \dots, W_{n-1} \in \mathbb{R}^{s \times s}, W_n \in \mathbb{R}^{s \times 6}, \\ b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}^s, b_n \in \mathbb{R}^6.$$

Ключевым элементом, обеспечивающим возможность аппроксимации нейронной сетью сколь угодно сложных нелинейных зависимостей, является применение нелинейной функции активации $\sigma(\cdot)$ к выходу каждого нейрона [123]. Её наличие принципиально отличает нейронную сеть от линейной модели, поскольку без нелинейности последовательность скрытых слоев вырождалась бы в эквивалент одного линейного преобразования. Хотя в общем случае функции активации могут различаться для разных слоев, в рамках диссертационного исследования для идентификации алгоритма FCDI сравнивались сети с одинаковой функцией активации на всех скрытых слоях. Исследуемый набор составили наиболее распространенные нелинейные функции: ReLU (Rectified Linear Unit), LeakyReLU, ELU (Exponential Linear Unit), сигмоида (Sigmoid), LogSigmoid и гиперболический тангенс (Tanh), аналитические представления которых приведены в (4.5).

$$\begin{aligned} \text{ReLU}(x) &= \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}, \\ \text{LeakyReLU}(x) &= \begin{cases} 0,01x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}, \\ \text{ELU}(x) &= \begin{cases} e^x - 1 & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}, \\ \text{Sigmoid}(x) &= \frac{1}{1 + e^{-x}}, \\ \text{LogSigmoid}(x) &= \log \frac{1}{1 + e^{-x}}, \\ \text{Tanh}(x) = \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Обучение искусственной нейронной сети представляет собой задачу многопараметрической нелинейной оптимизации, целью которой является нахождение таких значений весовых матриц W_i и векторов смещений b_i , которые минимизируют заданную функцию потерь $\mathcal{L}$ на множестве обучающих данных.

В случае идентификации алгоритма оценки формы плазмы в качестве целевой функции используется среднеквадратичная ошибка MSE между векторами предсказанных нейронной сетью и эталонных выходных параметров плазмы, полученных методом FCDI.

$$\mathcal{L}(\text{output}_{NN}, \text{output}_{FCDI}) \xrightarrow{w_i, b_i} \min,$$

$$\mathcal{L}(x, y) = MSE(x, y) = \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 / N.$$

Для минимизации функции потерь наиболее широко применяются методы градиентного спуска. Вычисление градиентов $\nabla \mathcal{L}$ по всем параметрам сети эффективно реализуется с помощью алгоритма обратного распространения ошибки, который представляет собой рекурсивное вычисление производных от выходного слоя ко входному [118; 122].

Поскольку функция потерь нейронной сети является невыпуклой и характеризуется наличием многочисленных локальных минимумов и седловых точек, градиентный спуск не гарантирует сходимости к глобальному минимуму. Для улучшения сходимости и уменьшения влияния шума применяется стохастический градиентный спуск (SGD) и его адаптивные модификации [116–118; 122]. Дополнительным методом повышения устойчивости и скорости обучения является предварительная нормализация входных и выходных данных.

В качестве базового подхода итерационный шаг алгоритма стохастического градиентного спуска записывается следующим образом [117]:

$$\theta_{p+1} = \theta_p - \alpha \nabla_{\theta} \left(\sum_{j=1}^N \mathcal{L}(\text{output}_{NN}(\theta_p, \text{input}), \text{output}_{FCDI}) \right),$$

где $\alpha > 0$ – параметр, задающий величину шага алгоритма, p номер итерации, output_{NN} – предсказание сети, output_{FCDI} – выходной сигнал, полученный алгоритмом FCDI, ∇_{θ} градиент по параметрам сети. Стохастическая составляющая алгоритма заключается в том, что экспериментальный сигнал из обучающего набора выбирается случайным образом на каждой итерации.

Дальнейшим развитием этой идеи является адаптация скорости обучения для каждого параметра индивидуально. Метод RMSProp (Root Mean Square Propagation) – это метод, в котором скорость обучения также адаптируется для каждого из параметров. Идея состоит в том, чтобы разделить скорость

обучения для веса на скользящее среднее значений последних градиентов для этого веса [126]. Реализация RMSProp может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} g_{p+1} &= \nabla_{\theta} \left(\sum_{j=1}^N \mathcal{L}(\text{output}_{NN}(\theta_p, \text{input}), \text{output}_{FCDI}) \right), \\ v_{p+1} &= \beta v_p + (1 - \beta) g_{p+1}^2, \\ \theta_{p+1} &= \theta_p - \alpha \frac{g_{p+1}}{\sqrt{\hat{v}_{p+1} + \varepsilon}}; \end{aligned}$$

где $\beta = 0,99$, $\varepsilon = 10^{-8}$, $v_0 = 0$.

Наиболее эффективным на практике зарекомендовал себя алгоритм Adam (Adaptive Moment Estimation), являющийся усовершенствованием RMSProp, объединенным с методом импульса. Он использует скользящие средние как первых, так и вторых моментов [127]. Реализация алгоритма Adam выражается следующим набором уравнений:

$$\begin{aligned} g_{p+1} &= \nabla_{\theta} \left(\sum_{j=1}^N \mathcal{L}(\text{output}_{NN}(\theta_p, \text{input}), \text{output}_{FCDI}) \right), \\ m_{p+1} &= \beta_1 m_p + (1 - \beta_1) g_{p+1}, \\ v_{p+1} &= \beta_2 v_p + (1 - \beta_2) g_{p+1}^2, \\ \hat{m}_{p+1} &= \frac{m_{p+1}}{1 - \beta_1^{p+1}}, \\ \hat{v}_{p+1} &= \frac{v_{p+1}}{1 - \beta_2^{p+1}}, \\ \theta_{p+1} &= \theta_p - \alpha \frac{\hat{m}_{p+1}}{\sqrt{\hat{v}_{p+1} + \varepsilon}}; \end{aligned}$$

где $\beta_1 = 0,9$, $\beta_2 = 0,999$, $\varepsilon = 10^{-8}$, $m_0 = 0$, $v_0 = 0$.

В диссертационной работе обучение нейронных сетей для задачи идентификации FCDI проводилось с использованием адаптивного алгоритма оптимизации Adam (Adaptive Moment Estimation) в рамках фреймворка глубокого обучения PyTorch. Выбор обусловлен тем, что алгоритм комбинирует преимущества идеи накопления момента и адаптивного изменения шага обучения для каждого параметра, что обеспечивает эффективную и устойчивую сходимость [127].

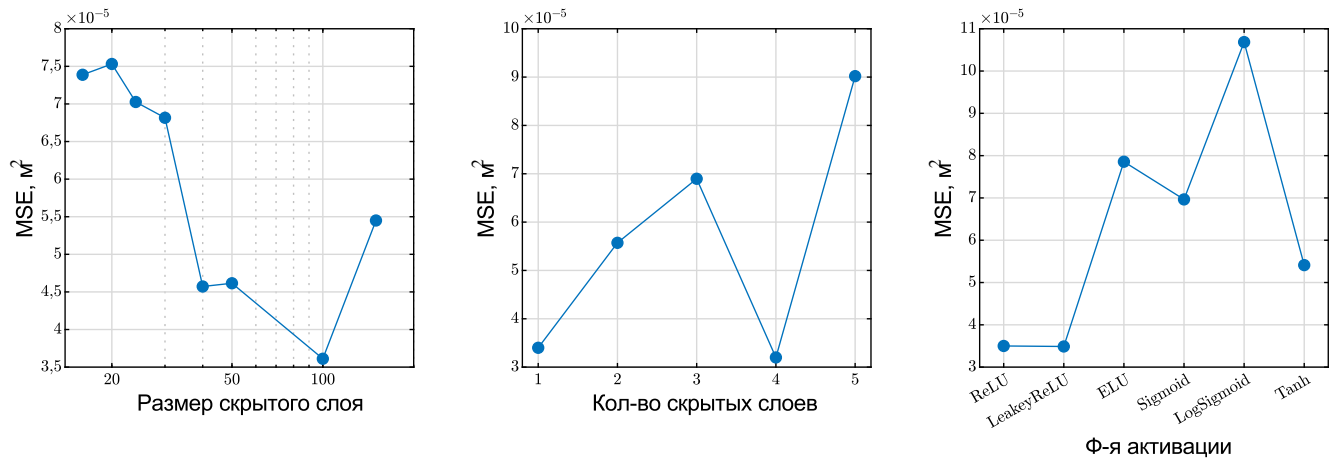


Рисунок 4.4 — Зависимость точности от значений гиперпараметров полносвязной нейронной сети прямого распространения. Точность измеряется на экспериментальных данных

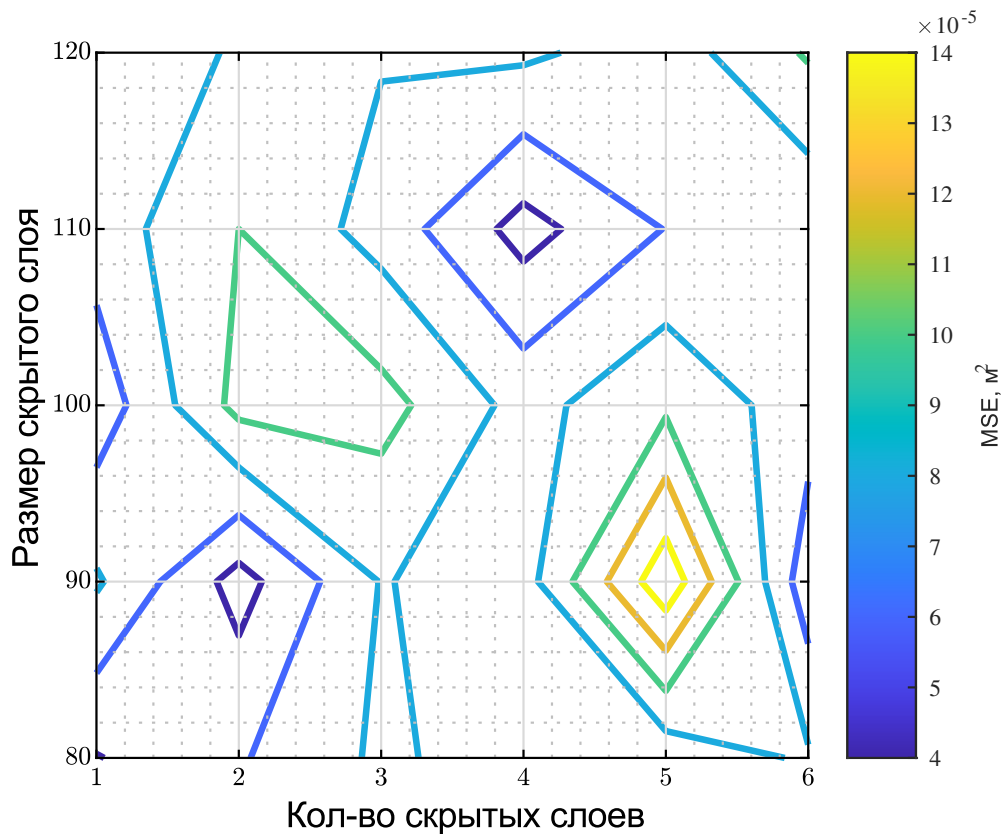


Рисунок 4.5 — Зависимость точности от значений параметров скрытых слоев полносвязной нейронной сети прямого распространения. Точность измеряется на экспериментальных данных

Значения n и s и тип функции активации называются гиперпараметрами нейронной сети. Подбор оптимальных гиперпараметров является критически важным этапом, так как эти параметры непосредственно определяют способность модели к обобщению и её вычислительную сложность [118; 122]. Для

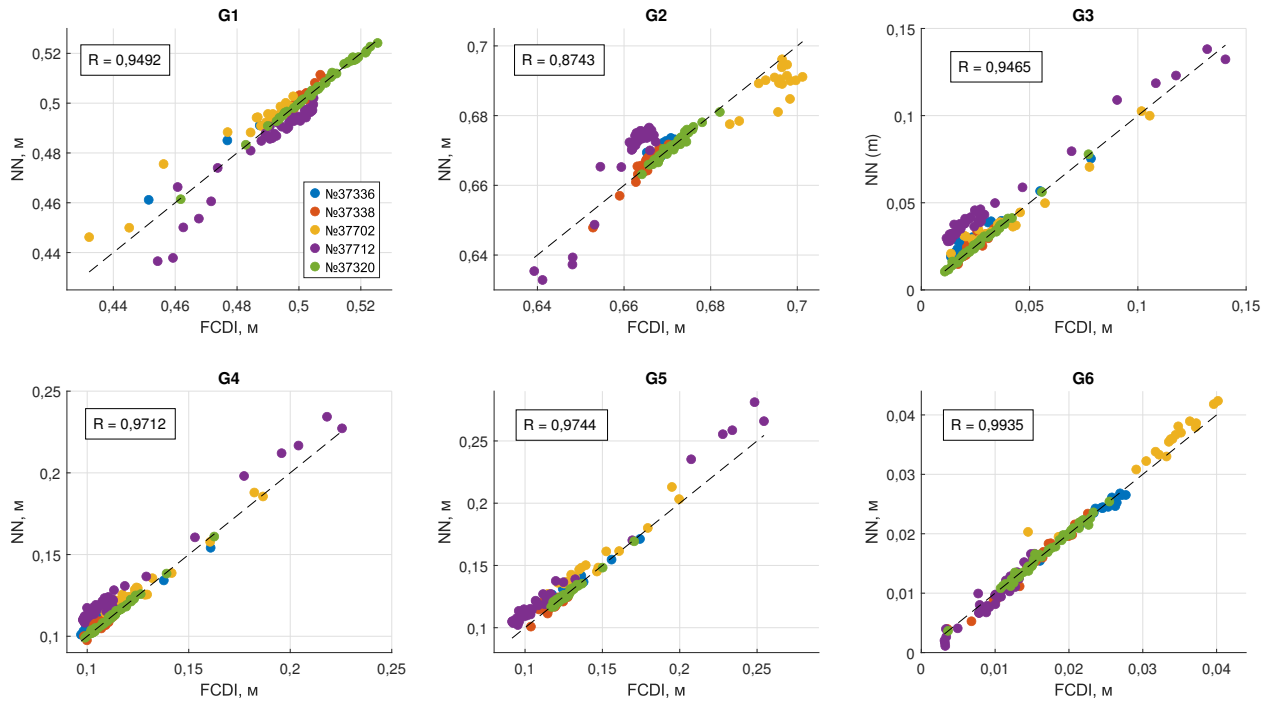


Рисунок 4.6 — Результаты идентификации FCDI полносвязной нейронной сетью прямого распространения с одним скрытым слоем размером 100 нейронов и функцией активации LeakyReLU. Показаны 5 тестовых сигналов разрядов Глобус-М2 №№ 37336, 37338, 37702, 37712 и №37320

решения этой задачи экспериментальные данные были разделены на две части: 46 обучающих разрядов и 5 тестовых разрядов. Таким образом, размер обучающих данных составляет 1795 точек, а размер тестовых данных – 145 точек. Для подбора гиперпараметров было проведено математическое моделирование, в ходе которого на тестовой выборке оценивались предсказания сетей с различными конфигурациями, предварительно настроенные на данных обучающей выборки. Методология поиска включала: а) систематический перебор функций активации из заданного набора (ReLU, LeakyReLU, ELU, Sigmoid, LogSigmoid, Tanh); б) вариацию глубины сети n ; в) изменение ширины скрытых слоёв s . Критерием оптимальности служила среднеквадратическая ошибка (MSE) на тестовой выборке, что обеспечивало оценку качества работы модели на ранее не встречавшихся данных и предотвращало подстройку под шумы обучающего множества. Оптимальная конфигурация, демонстрирующая наилучший баланс между точностью и сложностью, была выбрана для финального обучения.

Таким образом, в данном разделе представлен метод применения полносвязных нейронных сетей для решения задачи оценки формы плазмы в режиме

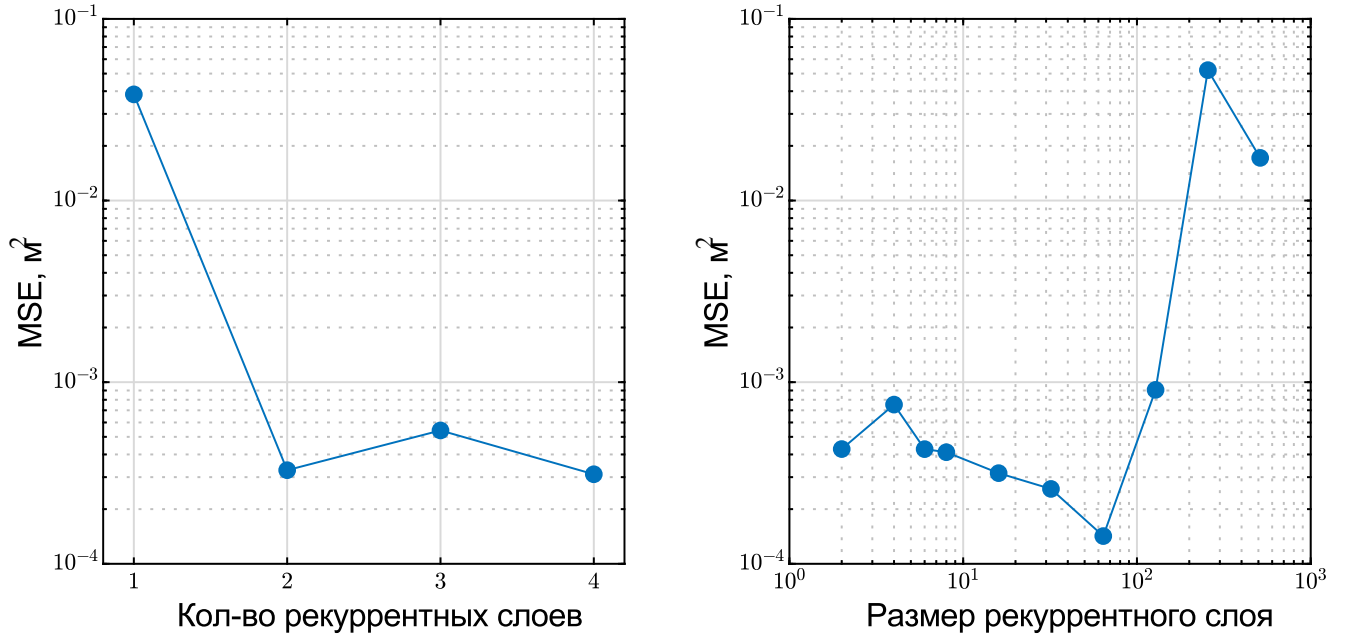


Рисунок 4.7 — Результаты подбора гиперпараметров для рекуррентной нейронной сети: зависимость ошибки на тестовой выборке от размера скрытого состояния и типа функции активации

реального времени. Показано, что ИНС является адекватным инструментом для аппроксимации сложной зависимости между магнитными измерениями и геометрическими параметрами плазмы. Результаты математического моделирования позволили определить оптимальную структуру сети, что подтверждает принципиальную возможность построения быстрого и точного нейросетевого аналога для алгоритма FCDI.

Полносвязная сеть прямого распространения, рассмотренная в предыдущем разделе, отображает текущий вектор измерений в текущую оценку параметров плазмы, не учитывая временную динамику системы. Однако, задача идентификации формы плазмы по своей природе является динамической: значения магнитных потоков и токов представляют собой временные ряды, где текущее состояние закономерно зависит от предыдущих. Для учёта этой временной зависимости применяется архитектура рекуррентных нейронных сетей (Recurrent Neural Network, RNN) [118; 122; 128].

Ключевое отличие RNN от полносвязной сети прямого распространения заключается во введении скрытого состояния h_t , которое выступает в роли памяти сети, аккумулируя информацию о предыстории последовательности. На каждом временном шаге t новое скрытое состояние вычисляется на основе текущего входного сигнала input_t и предыдущего скрытого состояния h_{t-1} . RNN с одним скрытым состоянием записывается следующим образом:



Рисунок 4.8 — Стенд реального времени для полунатурного моделирования систем управления плазмой в токамаке. Состоит из двух ЦМРВ, которые соединены по принципу обратной связи: один компьютер играет роль модели управляемой установки, а другой — многомерного регулятора

$$h_t = \sigma_h(W_{ih} \cdot \text{input}_t + W_{hh} \cdot h_{t-1} + b_h),$$

$$\text{output}_t = \sigma_y(W_{ho} \cdot h_t + b_o).$$

В контексте задачи идентификации FCDI: $\text{input}_t \in \mathbb{R}^{33}$ — вектор измерений в момент времени t , $\text{output}_t \in \mathbb{R}^6$ — оценка параметров плазмы. Матрицы весов и векторы смещений определяются как:

$$W_{ih} \in \mathbb{R}^{s \times 33}, W_{hh} \in \mathbb{R}^{s \times s}, W_{ho} \in \mathbb{R}^{6 \times s}, b_h \in \mathbb{R}^s, b_o \in \mathbb{R}^6,$$

где s — размер скрытого состояния, являющийся гиперпараметром модели.

Таким образом, рекуррентная архитектура позволяет модели не только устанавливать сложные нелинейные связи между измерениями и целевыми параметрами, но и учитывать эволюцию этих связей во времени, что теоретически может повысить точность и устойчивость оценки формы плазмы в динамических режимах разряда.

Для проверки применимости разработанных нейросетевых моделей в контуре управления плазмой и оценки их вычислительной производительности было проведено полунатурное моделирование. Эксперименты выполнены

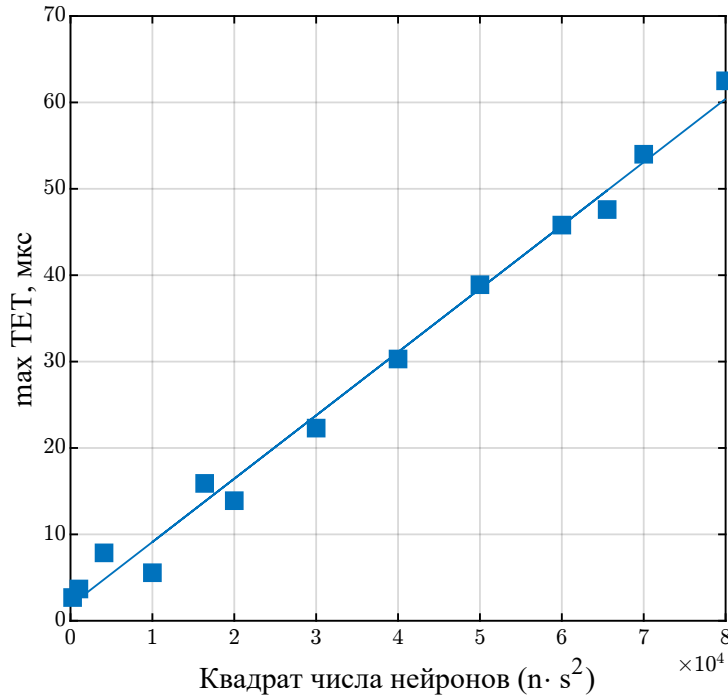


Рисунок 4.9 — Зависимость времени выполнения задачи (TET) от количества нейронов

на специализированной имитационной платформе, использующей компьютеры Speedgoat (рис. 4.8) и операционную систему реального времени SimulinkRT [129; 130]. Модели нейронных сетей, обученные в среде PyTorch, были экспортированы и интегрированы в среду MATLAB с использованием библиотеки SciPy для обеспечения совместимости.

Полученные модели различной архитектуры тестировались в режиме реального времени (рис. 4.9). Целью тестирования была проверка гипотезы о том, что время оценки формы плазмы нейронной сетью пропорционально квадрату количества нейронов. Эта зависимость возникает из-за полносвязной структуры сети, где каждый нейрон слоя l связан со всеми нейронами слоя $l + 1$, что приводит к вычислительной сложности, квадратичной относительно размера слоя. Результаты измерений подтвердили данную зависимость и позволили получить следующую количественную оценку:

$$TET(n, s) = a \cdot n \cdot s^2 + b, \quad a = 7,33 \cdot 10^{-10} \text{ с}, \quad b = 1,79 \cdot 10^{-6} \text{ с}. \quad (4.6)$$

Для оперативного моделирования формы плазмы, например при подготовке сценариев экспериментов в промежутках между разрядами, время выполнения алгоритма оценки не является критическим, однако предпочтительно использовать модели с невысокой вычислительной сложностью, чтобы

обеспечить возможность многократных численных экспериментов. Полученная в работе зависимость времени выполнения от архитектуры нейронной сети (4.6) показывает, что сети со 100–150 нейронами в скрытых слоях обеспечивают приемлемое быстроедействие даже при использовании в режиме, близком к реальному времени, что делает их удобным инструментом для оперативного планирования.

4.2 Математическое моделирование и численные методы для оценки ОУ

Определение границ области управляемости (ОУ) вертикального положения плазмы является критически важной задачей при проектировании и эксплуатации систем магнитного управления плазмой в токамаке. Данная область задаёт множество начальных состояний, из которых возможно безопасное выведение плазмы в равновесное положение при заданных ограничениях на работу управляющих обмоток. Выход за её пределы в процессе управления приводит к неконтролируемому перемещению плазмы и её контакту со стенками вакуумной камеры, что создаёт риск повреждения элементов установки и прекращения разряда [131].

Для неустойчивой по вертикали плазмы, управление которой ограничено по напряжению в обмотках, множество состояний, из которых её можно стабилизировать, является ограниченным подмножеством фазового пространства. Это подмножество, называемое областью управляемости, формально определяется как множество начальных состояний x_0 , для каждого из которых существует допустимое (удовлетворяющее заданным ограничениям) управляющее воздействие $u(t)$, способное перевести систему в равновесное положение $x = 0$ за конечное время [50; 51; 132]. Таким образом, задача анализа ОУ сводится к нахождению множества всех таких начальных условий x_0 .

Оценка области управляемости по вертикали сводится к нахождению максимального начального отклонения Z_0 по вертикальной координате, при котором система управления ещё может вернуть плазму в состояние с нулевым вертикальным смещением за конечное время, не выходя за пределы допустимого управляющего воздействия. Вследствие линейности и симметрии модели

максимальные отклонения в положительном и отрицательном направлениях равны по модулю. Формально, пусть состояние системы описывается вектором $x = [z, 0, \dots, 0]^T$, где z — вертикальное смещение, а остальные компоненты вектора состояний равны нулю. Задача определения границы области управляемости формулируется как поиск максимального начального отклонения по координате z при нулевых начальных условиях для остальных переменных:

$$Z_0^{\max} = \max\{\delta > 0 \mid \exists u(t) : \|u(t)\| \leq u_{\max}, \mathbf{x}(0) = [\delta, 0, \dots, 0]^T, \\ \lim_{t \rightarrow T} z(t) = 0, T < \infty\}.$$

Таким образом, область управляемости в данной постановке описывает множество начальных состояний с ненулевым вертикальным смещением, из которых возможно погасить это смещение за конечное время с помощью допустимого управления.

Для сферического токамака Глобус-М2 [28] в диссертационной работе выполнена сравнительная оценка области управляемости двумя методами: путём математического моделирования и аналитического расчёта. Результаты, полученные обоими методами, представлены в следующих разделах.

В рамках постановки задачи, рассматриваемой в данной главе, использовано ограничение на максимальное напряжение в обмотке горизонтального поля, которое является управляющим воздействием для вертикального положения: $u_{\max} = 900$ В. Остальные семь управляющих сигналов, входящих в линейную модель системы (1.6), при оценке области управляемости по вертикали полагаются равными нулю.

Численное моделирование проводилось в среде MATLAB/Simulink. Идея оценки области управляемости состоит в моделировании динамики плазмы в токамаке с различными начальными отклонениями по вертикальной координате и максимальным возвращающим воздействием (рис. 4.10 и 4.11).

Для эффективного поиска границы области управляемости $Z_0^{\max}$ был применён численный метод бинарного поиска [133]. Его суть состоит в последовательном сужении интервала $[Z_{\min}, Z_{\max}]$, содержащего искомое значение. На каждом шаге проверяется принадлежность текущего пробного отклонения Z_{test} области управляемости с помощью математического моделирования. В зависимости от результата проверки — Z_{test} является допустимым или недопустимым начальным условием, одна из границ интервала заменяется на Z_{test} . Ширина

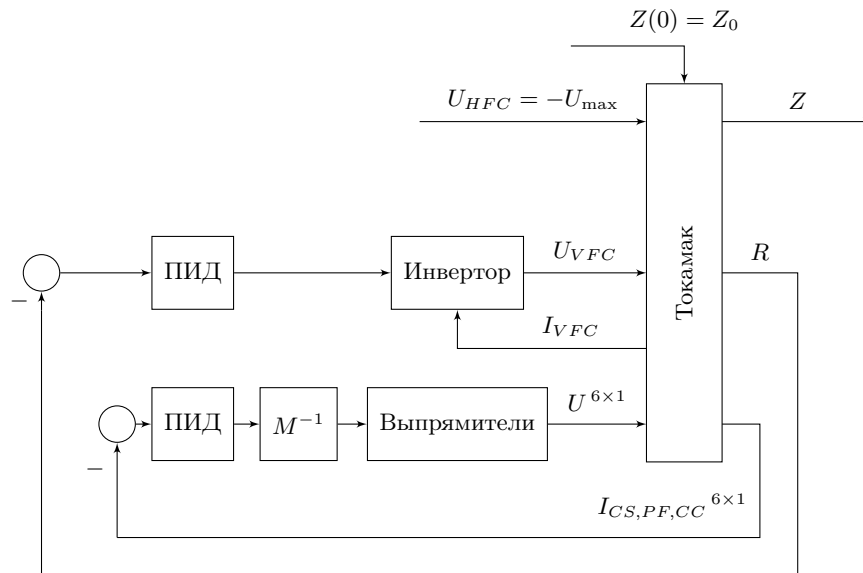


Рисунок 4.10 — Структурная схема системы, применяемой для оценки области управляемости по вертикали

интервала на каждом шаге уменьшается вдвое, что обеспечивает быструю сходимость к $Z_0^{\max}$ с заданной точностью.

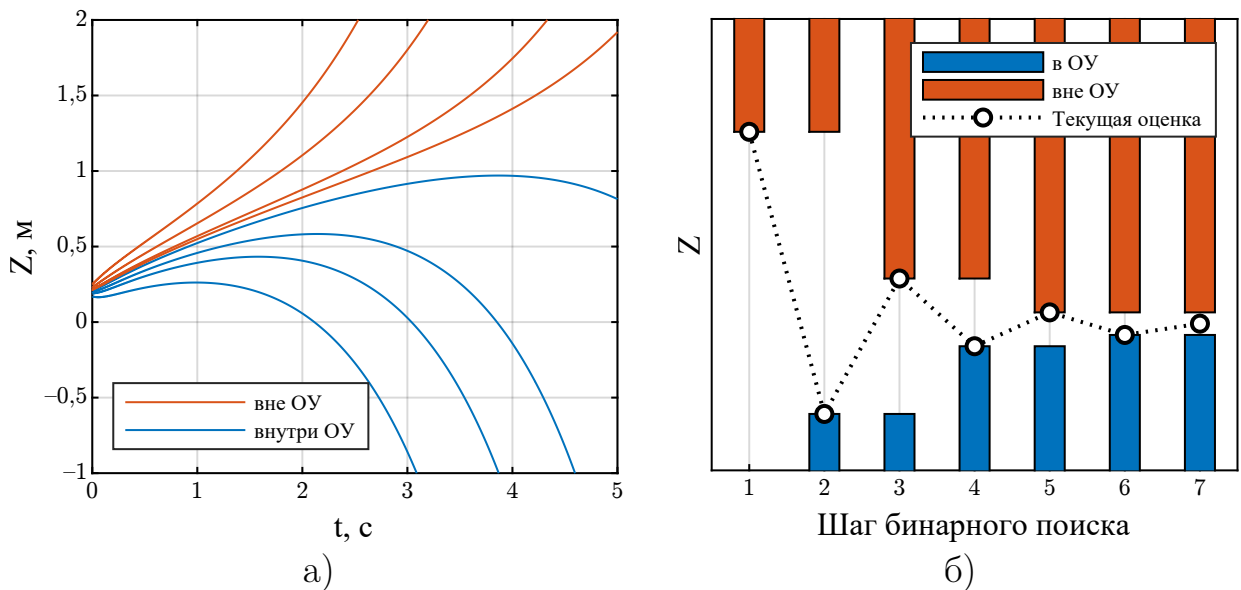


Рисунок 4.11 — а) результаты моделирования системы с различными начальными отклонениями по вертикали и максимальным напряжением на обмотке НФС б) принцип работы бинарного поиска для оценки области управляемости, красной и синей точкой отмечены начальные смещения вне и в области управляемости, более крупно выделены точки, проверенные на текущем шаге

Полученные в результате численного моделирования оценки границ области управляемости показали полное совпадение с результатами, найденными аналитическим методом. Поскольку аналитический метод требует меньших

вычислительных затрат, то именно он был выбран в качестве основного инструмента для оценки $Z_0^{\max}$ в данной работе. Соответствующие сравнительные результаты будут представлены далее.

Важным преимуществом численного подхода является возможность определить не только предельное смещение $Z_0^{\max}$, которое может быть скомпенсировано системой управления, но и максимальное отклонение плазмы от равновесия Z_{peak} в процессе парирования этого начального возмущения (см. рис. 4.11а). Это позволяет при оценке области управляемости учитывать не только динамические возможности системы, но и геометрические ограничения, накладываемые размерами плазменного шнура и вакуумной камеры (см. рис. 1.16). В рамках настоящей диссертационной работы геометрические ограничения при управлении вертикальным положением не учитывались; их исследование представляет собой предмет будущей работы.

Альтернативным и более эффективным с вычислительной точки зрения подходом к оценке области управляемости является аналитический метод, основанный на приведении уравнений системы в пространстве состояний к каноническому виду. Идея метода заключается в переходе к базису собственных векторов матрицы A , что позволяет выделить из системы неустойчивую одномерную подсистему. Анализ управляемости в новом базисе для неустойчивой моды и последующий обратный переход позволяют получить точную оценку максимального допустимого отклонения с учётом ограничений на управляющее воздействие [134].

Для аналитической оценки области управляемости по вертикали используется та же структура системы управления, что и при численном моделировании (см. рис. 4.10). Динамика рассматриваемой системы включает в себя модель плазмы, ПИД-регуляторы по горизонтальному положению и RF-токам и выражается ЛТИ-моделью. Инвертор тока в контуре управления представляется пропорциональным звеном. В результате рассматривается система с одним входом $u(t) = U_{HFC}(t)$ (напряжение на обмотке горизонтального поля) и одним выходом $y(t) = Z(t)$ (вертикальное положение плазмы):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t);\end{aligned}\tag{4.7}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^1, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

где $n = 40$. Вектор состояний включает в себя состояния плазмы и динамику регуляторов. Матрицы A, B, C в текущем разделе описывают данную расширенную систему.

Для выделения неустойчивой моды, определяющей поведение вертикального положения плазмы, перейдём к базису, в котором матрица A имеет блочно-диагональный вид. Поскольку неустойчивое собственное значение $\lambda_{\text{unst}} > 0$ является вещественным, а остальные собственные значения (устойчивые) могут быть как вещественными, так и комплексно-сопряжёнными, существует невырожденная матрица $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$, столбцами которой являются собственные векторы A , такая что

$$AQ = Q\Lambda,$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_{\text{unst}}, \Lambda_s)$, а Λ_s — блок, соответствующий устойчивым модам (диагональный для вещественных собственных значений или содержащий блоки 2×2 для комплексно-сопряжённых пар).

Выполним замену переменных $\hat{x} = Q^{-1}x$. Тогда система (4.7) примет вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = \Lambda \hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \quad y(t) = \hat{C}\hat{x}(t),$$

где $\hat{B} = Q^{-1}B$, $\hat{C} = CQ$. Благодаря блочной структуре Λ уравнение для компоненты $\hat{x}_{\text{unst}}$, соответствующей неустойчивому собственному значению, оказывается независимым от остальных переменных:

$$\dot{\hat{x}}_{\text{unst}}(t) = \lambda_{\text{unst}}\hat{x}_{\text{unst}}(t) + \hat{b}_{\text{unst}}u(t),$$

где $\hat{b}_{\text{unst}}$ — компонента вектора $\hat{B}$, отвечающая этой моде. Остальные моды описываются устойчивыми уравнениями и при нулевых начальных условиях не влияют на динамику вертикального смещения.

Начальное значение $\hat{x}_{\text{unst}}(0)$ связано с начальным вертикальным смещением z через матрицу Q . Поскольку вектор состояния $x(0)$ имеет единственную ненулевую компоненту z в позиции, соответствующей координате Z , получаем

$$\hat{x}_{\text{unst}}(0) = z \cdot (Q^{-1})_{\text{unst},k},$$

где $(Q^{-1})_{\text{unst},k}$ — элемент матрицы Q^{-1} , связывающий неустойчивую моду с выходом z .

Для того чтобы система могла вернуть плазму в равновесное положение, необходимо обеспечить $\dot{\hat{x}}_{\text{unst}} < 0$ при $\hat{x}_{\text{unst}} > 0$. Максимальное значение $\hat{x}_{\text{unst}}$,

которое может быть скомпенсировано при ограничении $|u(t)| \leq u_{\max}$, определяется из условия равенства нулю производной при максимальном управлении:

$$\hat{x}_{\text{unst}}^{\max} = \frac{|\hat{b}_{\text{unst}}| u_{\max}}{\lambda_{\text{unst}}}.$$

Приравнивая это значение к $\hat{x}_{\text{unst}}(0)$, получаем выражение для максимального начального отклонения по вертикали:

$$z^{\max} = \frac{|\hat{b}_{\text{unst}}| u_{\max}}{\lambda_{\text{unst}} |(Q^{-1})_{\text{unst},k}|}. \quad (4.8)$$

На основе формулы (4.8) в среде MATLAB был разработан комплекс программ для аналитической оценки границы области управляемости по вертикали. Полученные результаты полностью совпали с оценками, найденными методом численного моделирования (см. раздел 4.2). Поскольку аналитический метод обеспечивает точное решение за меньшее время, в отличие от итерационного численного метода, точность которого зависит от заданного числа итераций, он был выбран в качестве основного.

Данный метод был применён для анализа пяти разрядов в токамаке Глобус-М2 (№ 37239, 37255, 37257, 37702, 37712) и одного разряда в Глобус-М (№ 31648). Динамика изменения оценки области управляемости $z^{\max}$ на протяжении этих разрядов представлена на рис. 4.12.

На практике ключевыми переменными определяющими динамику вертикального движения плазмы, являются ток в обмотке горизонтального поля I_{HFC} и вертикальное смещение Z . В линейной модели вида (4.7) этим переменным соответствуют определённые элементы вектора состояния x . Обозначим индексы этих переменных как k_I и k соответственно, так что $x_{k_I} = I_{\text{HFC}}$ и $x_k = Z$. Учёт только этих двух ключевых переменных при пренебрежении остальными позволяет существенно упростить анализ, получая наглядную двумерную проекцию области управляемости.

Применяя метод диагонализации и учитывая только две физические переменные, условие управляемости для неустойчивой моды $\hat{x}_{\text{unst}}$, соответствующей собственному значению $\lambda_{\text{unst}} > 0$, можно записать в виде:

$$|\hat{x}_{\text{unst}}| = |(Q^{-1})_{\text{unst},k_I} I_{\text{HFC}} + (Q^{-1})_{\text{unst},k} Z| \leq \frac{|\hat{b}_{\text{unst}}| u_{\max}}{\lambda_{\text{unst}}}, \quad (4.9)$$

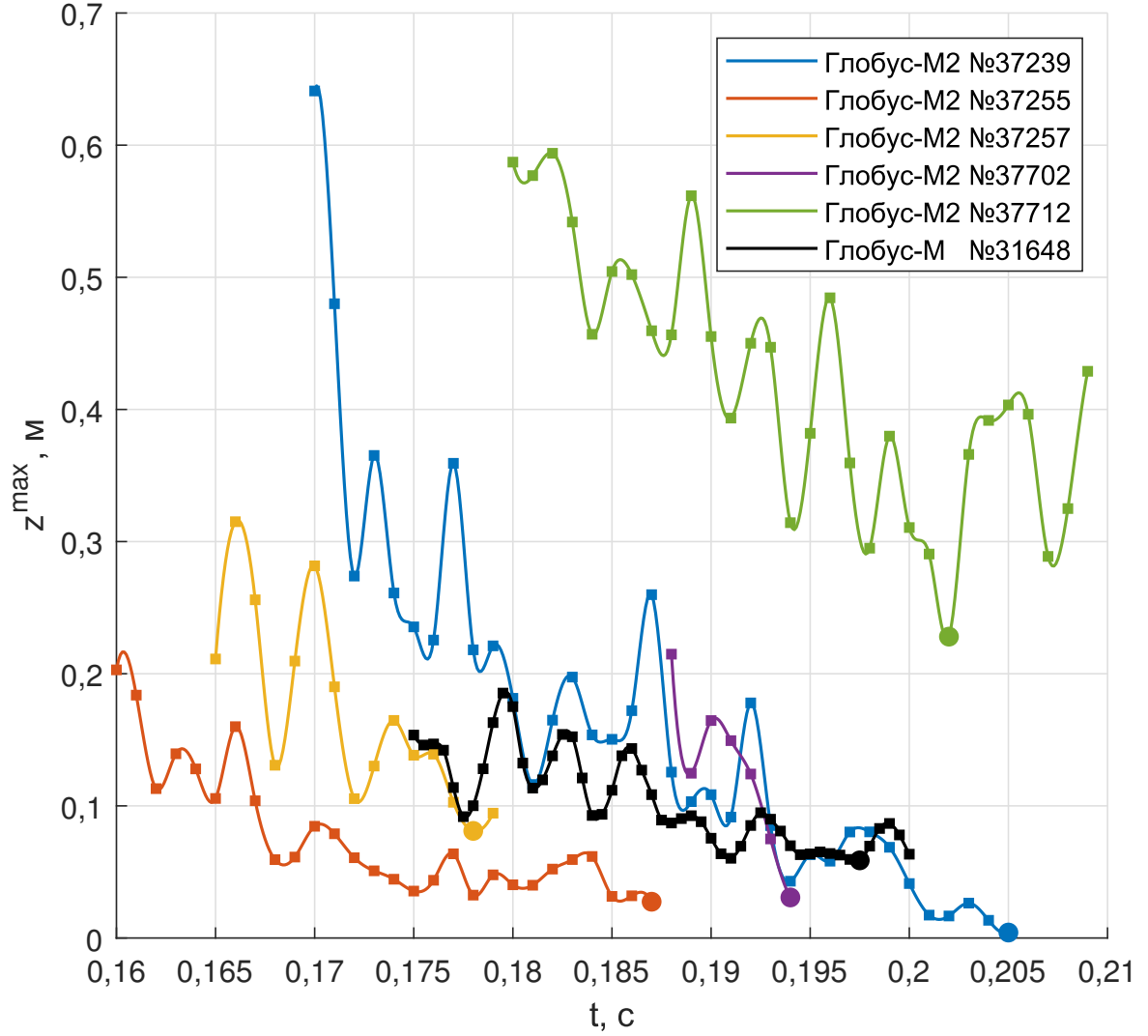


Рисунок 4.12 — Динамика оценки области управляемости неустойчивого вертикального положения плазмы на протяжении разряда в сферическом токамаке Глобус-М/М2

где $(Q^{-1})_{\text{unst}, k_I}$ и $(Q^{-1})_{\text{unst}, k}$ — элементы матрицы Q^{-1} , соответствующей неустойчивой моде, в столбцах с индексами k_I и k . Эти элементы представляют собой весовые коэффициенты, связывающие неустойчивую моду с токами в обмотке и вертикальным смещением.

Уравнение (4.9) задаёт на плоскости (I_{HFC}, Z) область в виде полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми. Эту полосу удобно параметризовать, введя $Z_{\text{eq}}(I_{\text{HFC}})$ — центр полосы, и $Z_{\max}$ — полуширину полосы. Центр определяется из условия $\hat{x}_{\text{unst}} = 0$:

$$Z_{\text{eq}}(I_{\text{HFC}}) = -\frac{(Q^{-1})_{\text{unst}, k_I}}{(Q^{-1})_{\text{unst}, k}} \cdot I_{\text{HFC}}. \quad (4.10)$$

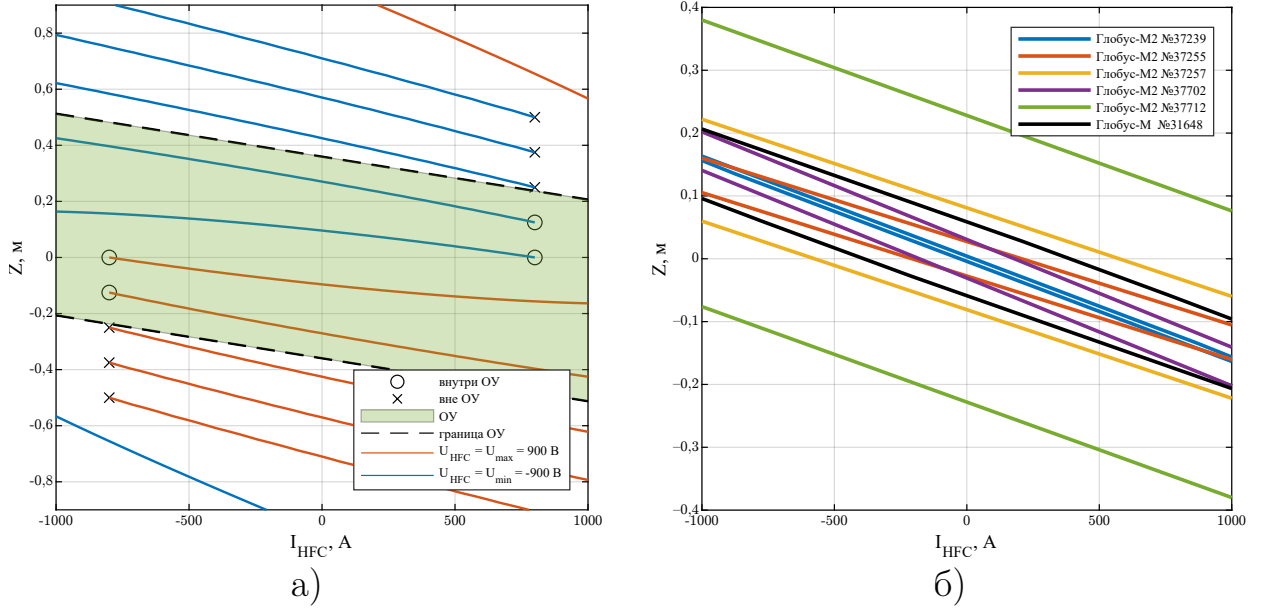


Рисунок 4.13 — а) Границы области управляемости и проекции фазовой траектории на плоскость (I_{HFC}, Z) для модели Глобус-М2 на 197 мс разряда № 37712 при максимальном 900 В и минимальном -900 В напряжениях на НФС. Кружками обозначены точки в области управляемости, крестиками обозначены точки вне области управляемости; зелёная штриховка соответствует области управляемости. б) Минимальная область управляемости на протяжении разрядов на плоскости (I_{HFC}, Z)

Максимальное допустимое отклонение от этой линии, при котором система остаётся управляемой, находится из неравенства (4.9):

$$|Z - Z_{eq}(I_{HFC})| < z^{\max}, \quad \text{где} \quad z^{\max} = \frac{|\hat{b}_{unst}| u_{\max}}{\lambda_{unst} |(Q^{-1})_{unst,k}|}. \quad (4.11)$$

Таким образом, для сохранения управляемости текущее состояние (I_{HFC}, Z) должно находиться внутри полосы шириной $2z^{\max}$ вокруг линии Z_{eq} .

Метод, основанный на формулах (4.10) и (4.11), был применён для анализа области управляемости на плоскости в течение разрядов № 37239, 37255, 37257, 37702, 37712 (токамак Глобус-М2) и № 31648 (токамак Глобус-М). Полученные результаты, иллюстрирующие минимальные границы на фазовой плоскости и пример проекций фазовых траекторий представлены на рис. 4.13.

В данном разделе диссертационной работы решена задача оценки области управляемости вертикального положения плазмы, что позволило установить границы между рабочими и экстремальными режимами функционирования системы управления. Разработанный аналитический метод, основанный на диагонализации модели, дал явную зависимость границы области от параметров

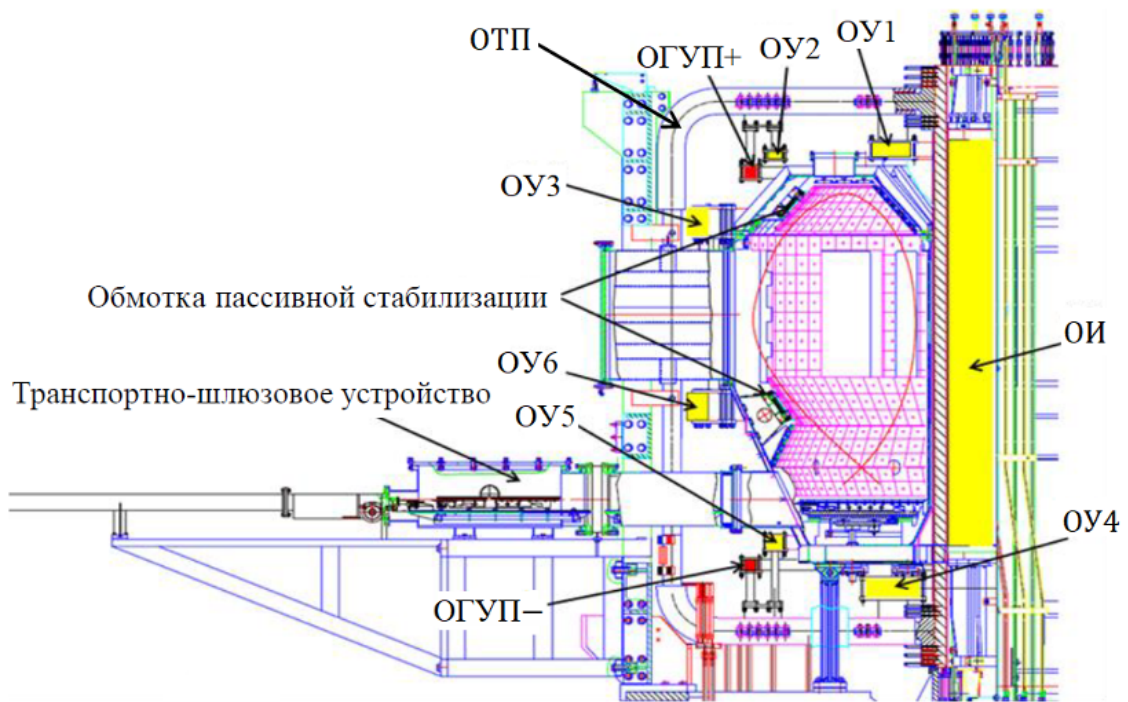


Рисунок 4.14 — Полоидальное сечение токамака КТМ [135; 136]

системы и был применён к серии экспериментальных разрядов. Проведённое математическое моделирование в экстремальных режимах, соответствующих работе на границе области управляемости, подтвердило корректность полученных оценок. Таким образом, определена максимально допустимая величина начального отклонения плазмы, которая может быть парирована при заданных ограничениях на управляющее воздействие, что является ключевым ограничением для синтеза системы управления.

4.3 Математическое моделирование системы управления плазмой в токамаке КТМ в рабочем и экстремальном режимах

В разделе представлены результаты математического моделирования каскадной системы управления вертикальным положением плазмы, разработанной для токамака КТМ. Рассматривается математическая модель плазмы с переменными параметрами и насыщением. По результатам моделирования проводится оценка запасов устойчивости, области управляемости и необходимая электрическая мощность системы управления в условиях нестационарности плазмы и возможных запаздываний в контурах.

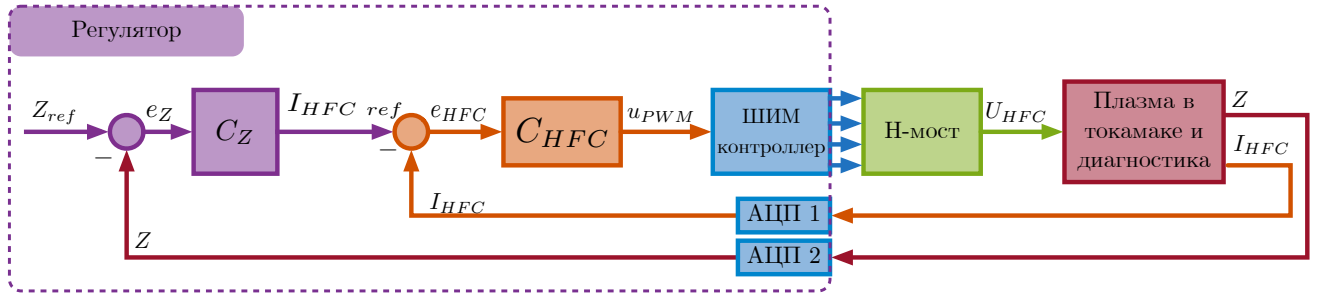


Рисунок 4.15 — Структурная схема цифровой каскадной системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ с инвертором напряжения в режиме ШИМ

Токамак КТМ (Казахстанский токамак материаловедческий) [135; 136] расположен в г. Курчатов (Казахстан), предназначен для испытаний материалов в условиях, близких к термоядерным нагрузкам. На рис. 4.14 приведено полоидальное сечение токамака, показано расположение управляющих обмоток. Для управления вертикальным положением плазмы используется обмотка горизонтального управляющего поля (ОГУП, HFC). Электрическая цепь ОГУП описывается уравнением

$$L\dot{I}_{HFC}(t) + RI_{HFC}(t) = U_{HFC}(t),$$

где $R = 212$ мОм — сопротивление обмотки, а $L = 17$ мГн — индуктивность. В дискретном виде с шагом $T_s = 1$ мс передаточная функция ОГУП имеет вид

$$P_{HFC}(z) = \frac{R^{-1}(1 - \exp(-T_s R/L))}{z - \exp(-T_s R/L)}, \quad I_{HFC}(z) = P_{HFC}(z)U_{HFC}(z),$$

где z — переменная Z-преобразования [137].

Объектом исследования в данном разделе выступили математические модели вертикального движения плазмы и системы управления токамака КТМ.

Модели плазмы получены по экспериментальным данным двух наиболее типичных плазменных разрядов с током плазмы 500 кА и вытянутостью 1,4–1,6 (отношение вертикального и горизонтального диаметров плазмы), этим разрядам соответствуют номера № 5121 и № 5126 [138–140]. Параметры плазмы изменяются в течении разряда, поэтому рассматриваются разностные уравнения в пространстве состояний с переменными параметрами [81].

Была рассмотрена каскадная система управления с ПИД-регуляторами. Внутренний каскад управляет током в ОГУП I_{HFC} , внешний — вертикальным

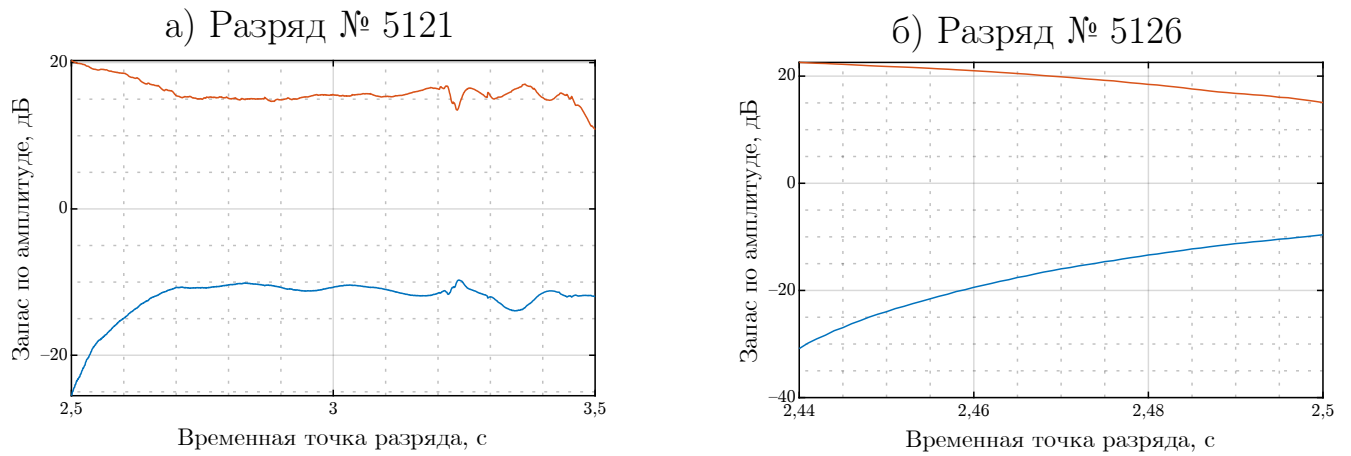


Рисунок 4.16 — Запас робастной устойчивости по амплитуде линейной модели замкнутой системы управления

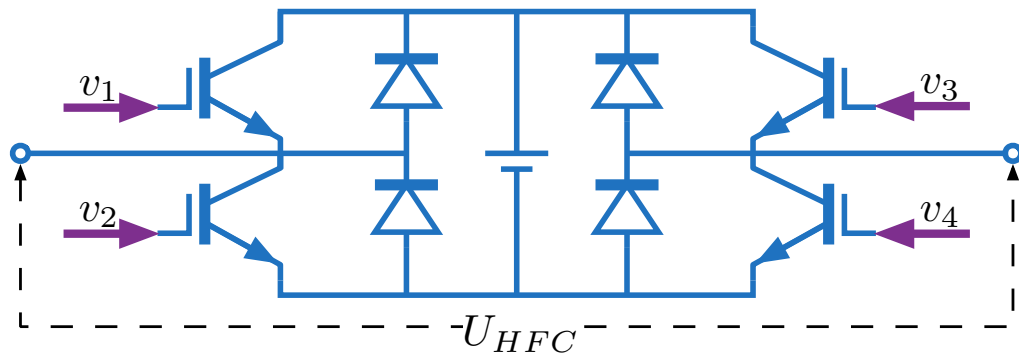


Рисунок 4.17 — Принципиальная схема Н-моста

положением Z (рис. 4.15). Для настройки регуляторов была использована линейная модель инвертора напряжения, полученная методом [141] и итеративный метод настройки робастных регуляторов [142], основанный на применении техники линейных матричных неравенств (ЛМН) [1].

С использованием параметров настроенных ПИД-регуляторов, был получен массив передаточных функций разомкнутых систем, где каждая передаточная функция соответствует различным моментам диверторной фазы плазменного разряда [135]. Робастность здесь и далее понимается как способность системы сохранять устойчивость при изменении параметров плазмы в пределах, заданных этим массивом.

Для массива передаточных функций проведен линейный анализ устойчивости. На рис. 4.16 приведены запасы робастной устойчивости по амплитуде, а на рис. 4.18 — по запаздыванию.

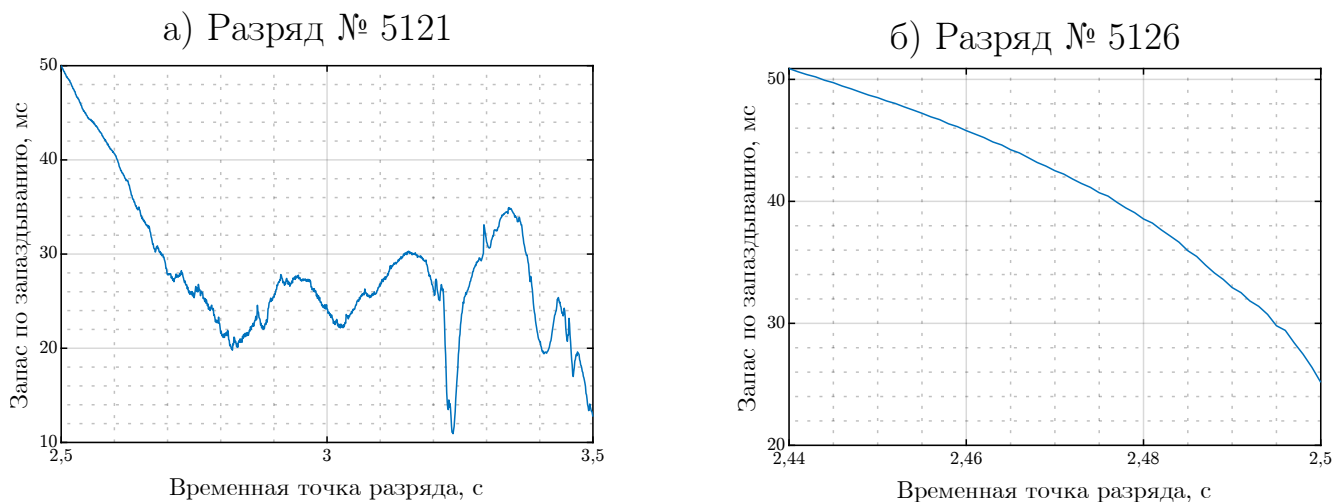


Рисунок 4.18 — Запас робастной устойчивости по запаздыванию линейной модели замкнутой системы управления

Запас робастной устойчивости по запаздыванию был вычислен по формуле:

$$T_M = \frac{\varphi_M}{\omega_c} \frac{\pi}{180^\circ},$$

где φ_M — запас робастной устойчивости по фазе, ω_c — частота среза (частота, при которой АЧХ передаточной функции разомкнутой системы первый раз пересекает уровень 1) [143]. Минимальный запас робастной устойчивости по амплитуде составляет 10 дБ (рис. 4.16). Минимальный запас робастной устойчивости по запаздыванию (рис. 4.18) составляет 10 мс. Минимальные запасы приходится на конец плазменных разрядов, это связано с уменьшением характерного времени развития неустойчивости в течении разрядов (рис. 4.21). Эти минимальные запасы, полученные при анализе линейных моделей, будут использованы далее при сравнении с запасами, рассчитанными для нелинейных моделей.

Для более точной оценки запасов устойчивости было проведено математическое моделирование нелинейной системы. Нелинейность вызвана полной моделью инвертора напряжения (рис. 4.17), учетом насыщения по току и напряжению в ОГУП, а также использована изменяемая во времени модель вертикального движения плазмы (LTV). На рис. 4.19 показаны диаграммы устойчивости нелинейной системы управления. По горизонтальной оси отложена величина введенного в контур управления дополнительного коэффициента усиления, по вертикальной оси — величина запаздывания. Зелеными точками отмечены конфигурации усиления и запаздывания, при которых система

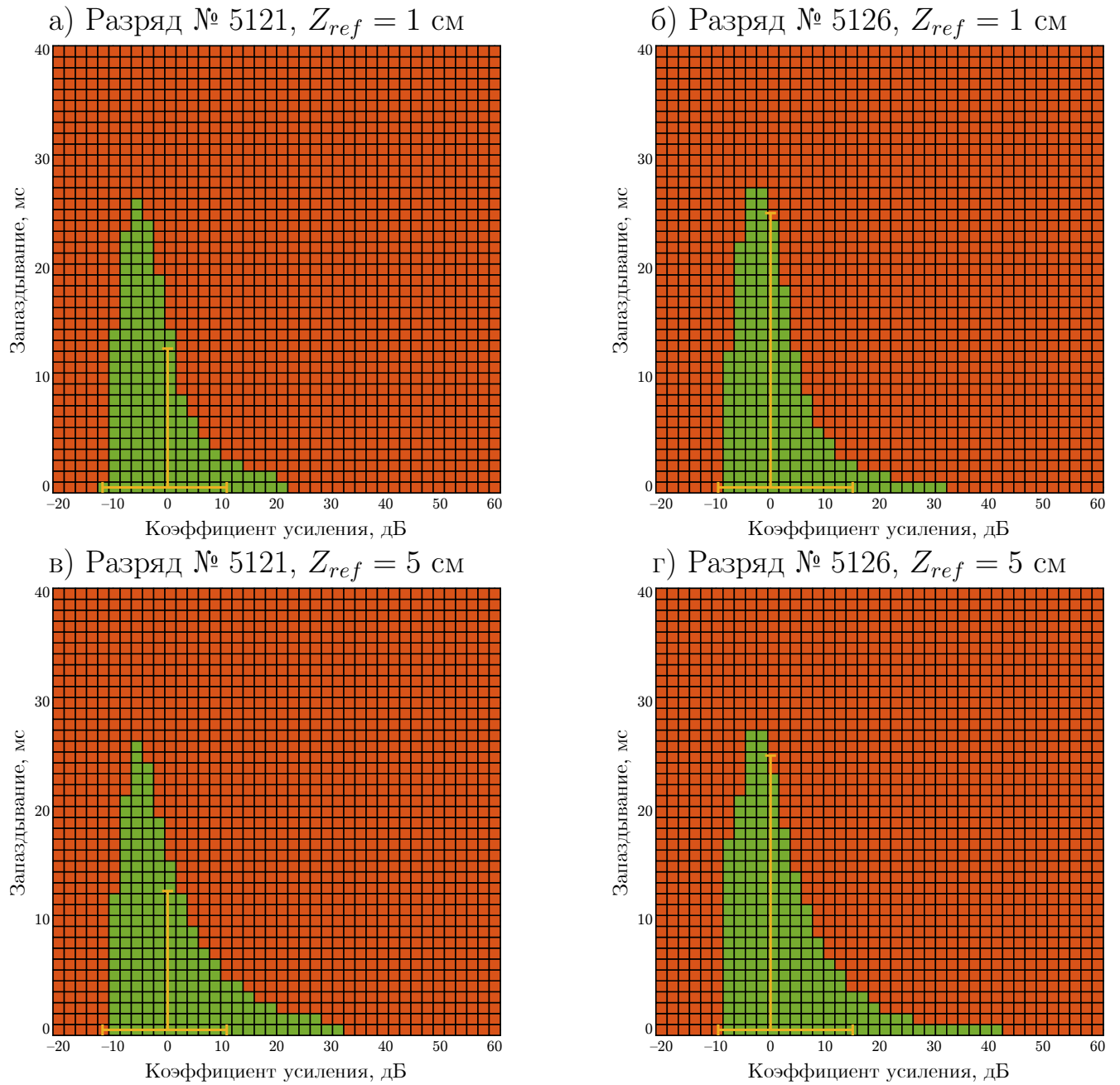


Рисунок 4.19 — Диаграмма устойчивости нелинейной системы управления

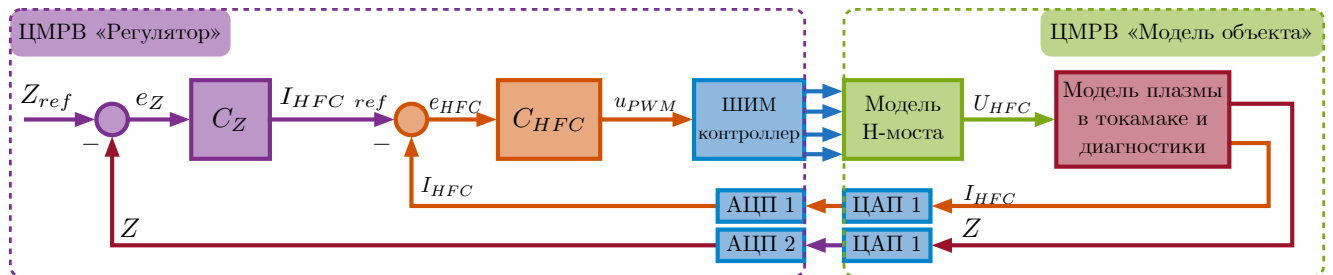


Рисунок 4.20 — Структурная схема цифровой каскадной системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ при проведении полунатурного моделирования

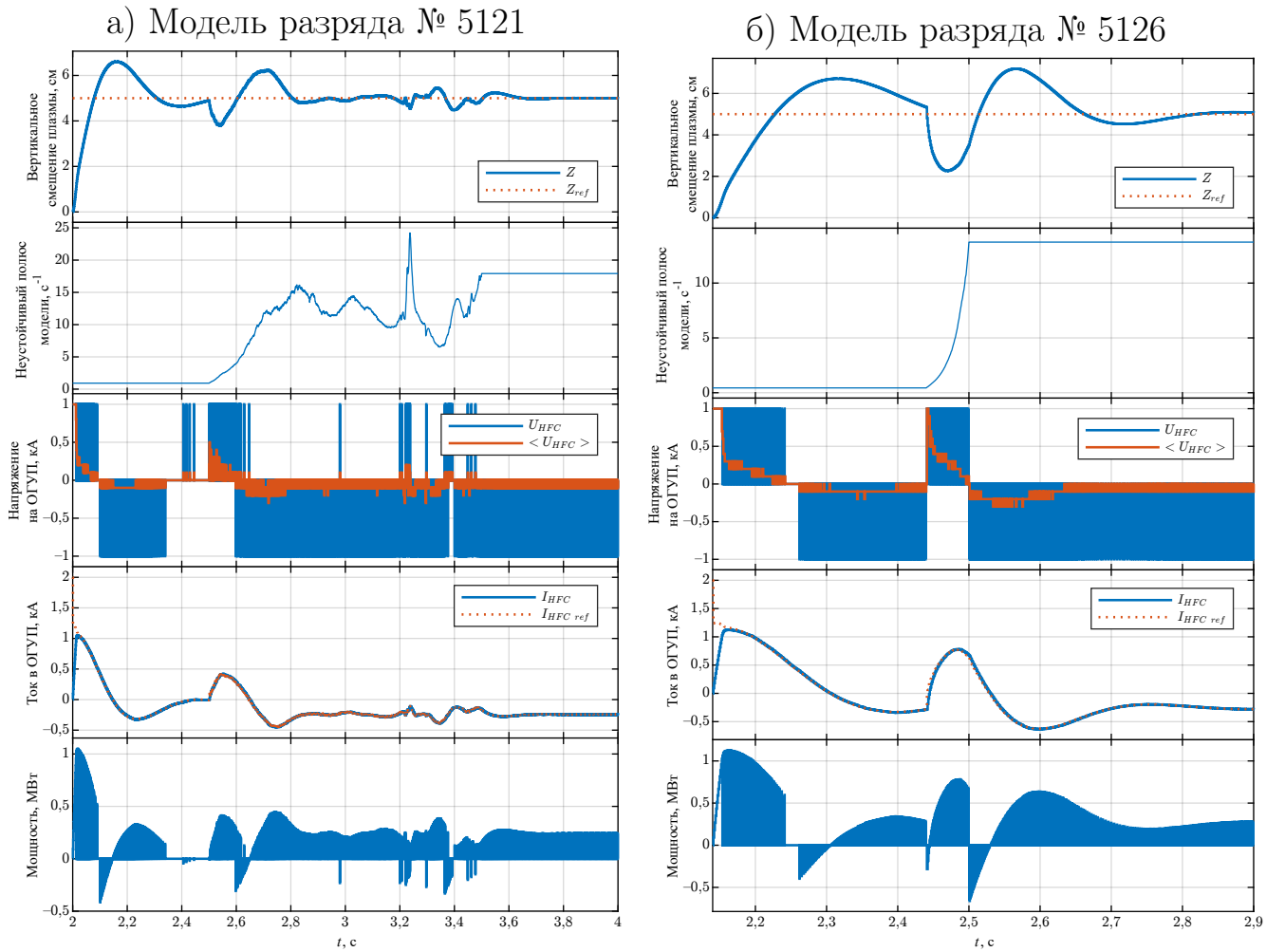


Рисунок 4.21 — Моделирование системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ. Задающее воздействие по вертикальному смещению плазмы

$$Z_{ref} = 5 \text{ см}$$

асимптотически устойчива. Желтым показаны минимальные запасы робастной устойчивости по амплитуде и запаздыванию, полученные с использованием линейных моделей соответствующих разрядов (рис. 4.16 и 4.18).

Для проверки работоспособности и оценки характеристик синтезированной цифровой системы управления было проведено полунатурное моделирование на стенде реального времени. Моделирование выполнялось на двух целевых машинах реального времени (рис. 4.8), что позволило физически разделить модели объекта управления и управляющего устройства, приблизив условия испытаний к реальным.

На ЦМРВ «Регулятор» была развернута система управления, содержащая оба каскада ПИД-регуляторов и ШИМ-контроллер. На ЦМРВ «Модель объекта» выполнялись модели вертикального движения плазмы и силовой части,

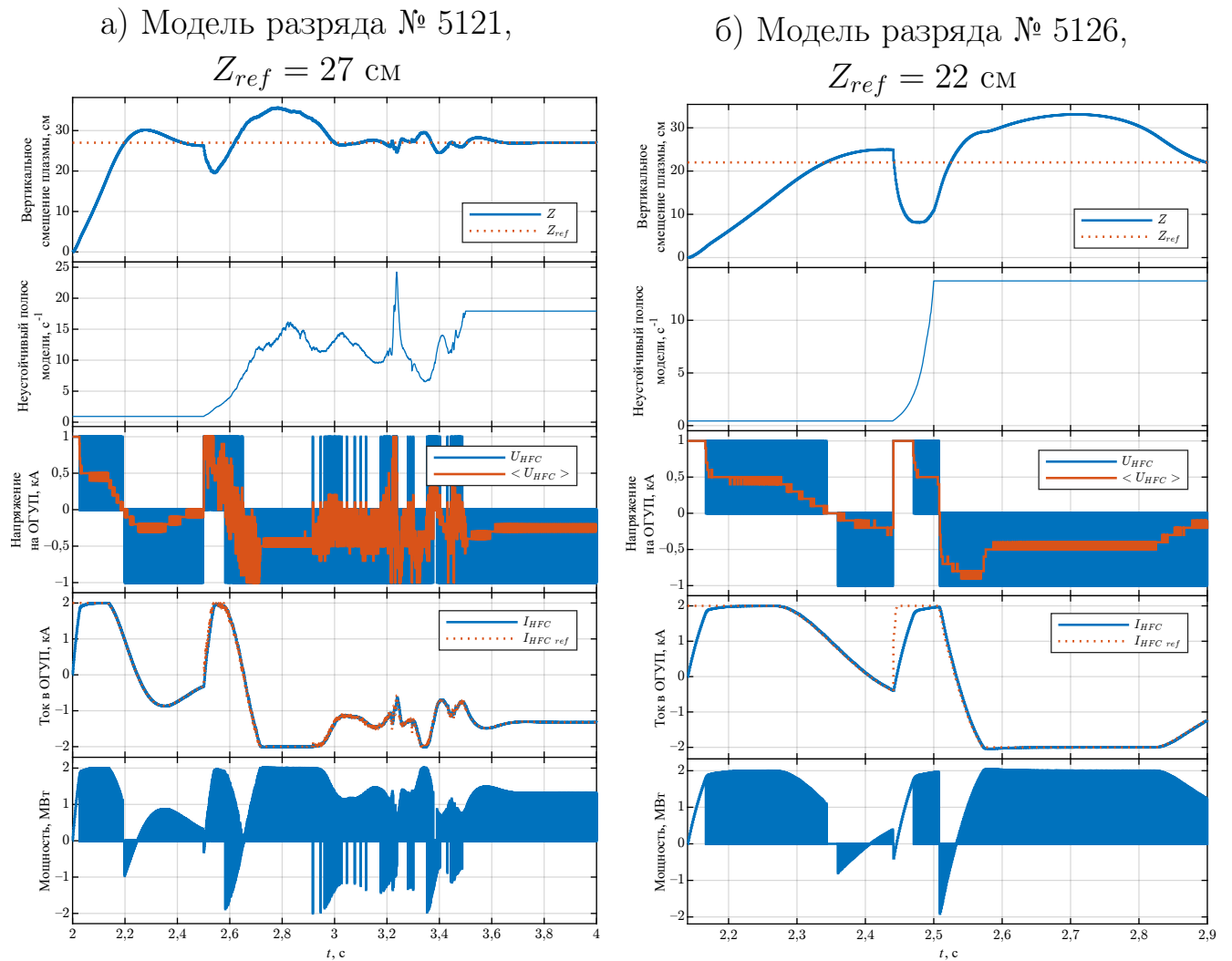


Рисунок 4.22 — Моделирование системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ с максимально возможным задающим воздействием на вертикальное положение плазмы

реализованные в среде Simscape Electrical. Структурная схема стенда представлена на рис. 4.20.

На рис. 4.21 представлены результаты полунатурного моделирования, иллюстрирующие работу синтезированной системы при отработке ступенчатого задания по вертикальному положению плазмы $Z_{ref} = 5$ см. Помимо переходного процесса по координате Z , на графиках приведены соответствующие временные зависимости напряжения, тока и потребляемой мощности в цепи питания обмотки горизонтального поля, а также динамика величины неустойчивого полюса модели плазмы в ходе разряда. Результаты для двух различных разрядов (№ 5121 и № 5126) демонстрируют, что регулятор обеспечивает приемлемое качество управления: время переходного процесса составляет порядка нескольких десятков миллисекунд при незначительном перерегулировании. Пи-

ковая мощность, потребляемая инвертором напряжения, не превышает 1,2 МВт, таким образом мощности силового преобразователя установки КТМ (2 МВт) достаточно для питания системы управления.

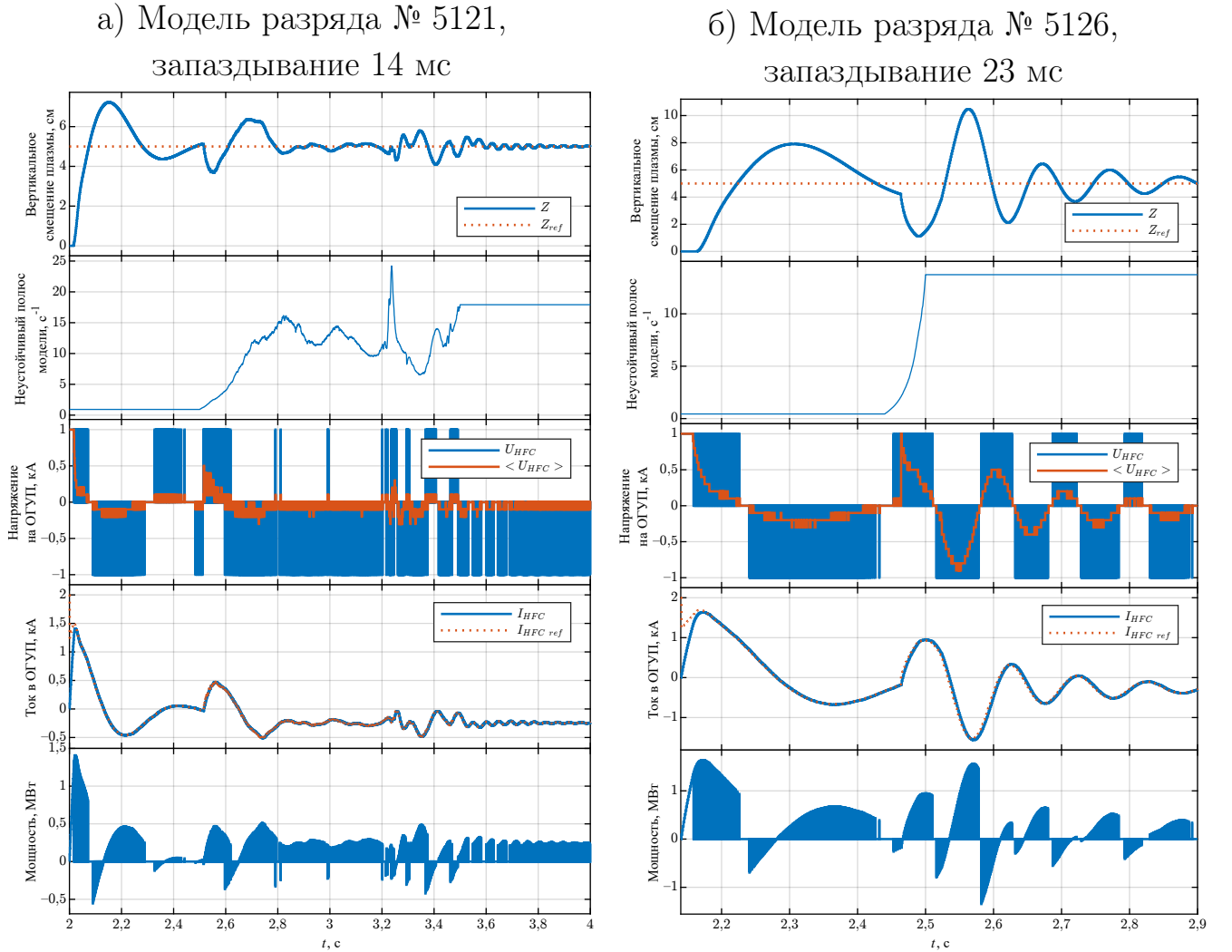


Рисунок 4.23 — Моделирование системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ с максимально возможным запаздыванием в контуре обратной связи

Для оценки предельных возможностей системы управления проведено математическое моделирование в экстремальных условиях. На рис. 4.22 показаны переходные процессы при максимально достижимых в модели смещениях плазмы ($Z_{ref} = 27$ см для разряда № 5121 и $Z_{ref} = 22$ см для разряда № 5126), при которых система сохраняет устойчивость. Поскольку на практике смещение более 10 см приводит к контакту плазмы с лимитером, полученные результаты свидетельствуют, что синтезированная система обеспечивает управление во всём диапазоне.

Кроме того, исследована устойчивость системы к запаздыванию в контуре обратной связи (рис. 4.23). Установлено, что система сохраняет работоспособность при введении запаздывания до 14 мс (для модели разряда № 5121) и до 23 мс (для модели разряда № 5126).

В работе [81] была получена верхняя оценка области управляемости, составившая 23 см для разряда № 5121 и 26 см для разряда № 5126. Фактически достигнутые в моделировании значения (27 см и 22 см соответственно) близки к этим оценкам. Расхождение для разряда № 5121 (на 4 см) объясняется тем, что аналитическая оценка, основанная на модели с максимальным значением неустойчивого полюса, соответствует не конечной, а промежуточной фазе разряда, в которой неустойчивость не успевает полностью развиться. Аналогичным образом объясняется и превышение экспериментально полученного допустимого запаздывания 14 мс (рис. 4.23,а) над минимальным из рассчитанных по линейным моделям.

4.4 Выводы по Главе 4

В главе решены задачи разработки быстрых математических моделей формы плазмы по внешним магнитным измерениям и математического моделирования систем магнитного управления плазмой в токамаках в рабочих и экстремальных режимах.

Для оперативного восстановления формы плазмы по сигналам магнитной диагностики предложены две аппроксимационные модели: статическая матрица и полносвязная нейронная сеть. Обе модели воспроизводят отображение, реализуемое эталонным алгоритмом FCDI, и позволяют получать оценку параметров формы за время, на порядки меньшее, чем требуется для сходимости итерационного алгоритма. Сравнительный анализ показал, что наилучший баланс точности и быстродействия обеспечивает нейросетевая модель с одним скрытым слоем из 100 нейронов и функцией активации LeakyReLU. Разработанные модели могут использоваться для оперативного моделирования формы плазмы, в том числе в промежутках между разрядами экспериментальной кампании.

Для оценки области управляемости по вертикали для математических моделей токамака Глобус-М2 применён известный аналитический метод, основан-

ный на диагонализации модели и выделении неустойчивой моды. Проведённое математическое моделирование подтвердило корректность полученных оценок. Установлено, что область управляемости уменьшается в течение разряда, что необходимо учитывать при планировании сценариев.

Для токамака КТМ выполнено полунатурное моделирование каскадной системы управления вертикальным положением плазмы. Исследованы рабочие режимы (ступенчатое задание 5 см) и экстремальные режимы: максимально достижимые смещения (до 27 см) и предельные запаздывания в контуре (до 23 мс). Показано, что система сохраняет устойчивость во всём диапазоне, а достигнутые в моделировании граничные смещения и запаздывания согласуются с оценками области управляемости, полученными в [81]. Потребляемая мощность не превышает 1,2 МВт при ограничении силового преобразователя 2 МВт.

Заключение

В диссертационной работе предложены вычислительно эффективные алгоритмы анализа областей достижимости. Основные полученные результаты следующие:

1. Разработан численный метод оценки многомерной области достижимости формы плазмы для линейных стационарных (LTI) моделей в установившемся режиме с ограничениями на управления. Метод основан на анализе матрицы, связывающей входы и выходы в установившемся режиме, и сведении задачи к линейному программированию, что позволяет получать как верхние (независимые), так и нижние (совместные) оценки достижимых отклонений параметров формы. Применение метода к данным разрядов Глобус-М2 и Глобус-М показало, что верхние оценки для ударных точек около 50 см, для зазоров — около 10 см, а нижняя оценка одновременного изменения шести параметров формы составляет в среднем 5 мм, что свидетельствует о сильной связи между каналами управления и компонентами формы.
2. Разработан численный метод нахождения точек внутри области достижимости для изменяющихся во времени линейных моделей (LTV). Метод основан на рекуррентном формировании расширенных матриц связи, последовательном оценивании выходов и сведении исходной многомерной задачи к серии задач линейного программирования. Метод позволяет учитывать динамику системы и эволюцию параметров плазмы в течение разряда, а также находить программные управления, реализующие заданную конфигурацию формы. Для токамака Глобус-М2 показана возможность одновременного изменения противоположных зазоров g_7 и g_{19} на 5 см, что соответствует дополнительному вытягиванию плазмы по вертикали.
3. Разработанный численный метод для LTI- и LTV-моделей реализован в составе проблемно-ориентированного комплекса программ для математического моделирования плазменного эксперимента в токамаке. Комплекс, реализованный в среде MATLAB, обеспечивает загрузку экспериментальных данных, рекуррентное вычисление матричных связей, решение оптимизационных задач, визуализацию области дости-

жимости и синтез программных управлений. Комплекс программ был внедрен на УНУ «Сферический токамак Глобус-М», и позволил находить реализуемую форму плазмы в виде 24-х зазоров между плазмой и лимитером токамака. Функциональность программного комплекса направлена на повышение эффективности планирования экспериментов за счет отсеивания сценариев, противоречащих ограничениям электромагнитной системы.

4. Проведено математическое моделирование систем магнитного управления плазмой в токамаках в рабочих и экстремальных режимах. Для токамака КТМ выполнено полунатурное моделирование каскадной системы управления вертикальным положением. Установлено, что система сохраняет устойчивость при смещениях до 27 см и запаздываниях до 23 мс. Для токамака Глобус-М2 с помощью аналитического метода оценена область управляемости по вертикали на протяжении разрядов; результаты верифицированы математическим моделированием. Показано, что область управляемости уменьшается в течение разряда, что необходимо учитывать при планировании экспериментов.
5. Разработана математическая модель, связывающая внешние магнитные измерения с формой плазмы в токамаке Глобус-М2 для оперативного моделирования. В качестве эталонного использован итерационный алгоритм FCDI. Предложены две аппроксимационные модели: статическая матрица (линейная регрессия) и полносвязная нейронная сеть. Разработанные модели пригодны для оперативного моделирования формы плазмы, в том числе в промежутках между разрядами.

Дальнейшая работа будет направлена, во-первых, на адаптацию метода для других токамаков, имеющих другие конфигурации управляющих обмоток и параметры источников питания, а также иную форму камеры, во-вторых, на усовершенствование методов оценки ОД посредством уточнения моделей отклоненных от сценариев. Это позволит преодолеть ограничение малых отклонений от сценарных значений и расширить диапазон рассматриваемых входных и выходных сигналов.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему учителю д. т. н., профессору Юрию Владимировичу Митришкину (26.11.1946 — 22.01.2024) за постановку задачи и научное руководство.

Автор благодарит разработчиков проекта *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за предоставленный L^AT_EX-шаблон.

Список сокращений и условных обозначений

Adam	Adaptive Moment Estimation
CC	Correction coil
CS	Central solenoid
EAST	Experimental Advanced Superconducting Tokamak
ELU	Exponential Linear Unit
FCDI	Flux-Current Distribution Identification
ICRH	Ion cyclotron resonance heating
LTI	Linear Time-Invariant. Линейная модель с постоянными параметрами
LTV	Linear Time-Varying. Изменяющаяся во времени линейная модель.
MAST	Mega Ampere Spherical Tokamak
MSE	Mean squared error. Среднеквадратичная ошибка
NBI	Neutral-beam injection
NSTX	National Spherical Torus Experiment
PCHIP	Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial
PF	Poloidal field
QFT	Quantitative Feedback Theory. Количественная теория обратной связи
ReLU	Rectified Linear Unit
RMSProp	Root Mean Square Propagation
RNN	Recurrent Neural Network
TCV	Variable Configuration Tokamak
TET	Task Execution Time. Время выполнения задачи на каждом временном шаге
АЧХ	Амплитудно-частотная характеристика
ИНС	Искусственная нейронная сеть
KTM	Казахстанский токамак материаловедческий
ЛМН (LMI)	Линейное матричное неравенство (Linear Matrix Inequality)
ЛП	Линейное программирование

ОВУП (VFC)	Обмотка вертикального управляющего поля (Vertical Field Coil)
ОГУП (HFC)	Обмотка горизонтального управляющего поля (Horizontal Field Coil)
ОД	Область достижимости
ОУ	Область управляемости
ПИД	Пропорционально-интегрально-дифференциальный
СВЧ	Сверхвысокие частоты
УТС	Управляемый термоядерный синтез
ЦМРВ (RTTM)	Целевая машина реального времени (Real-Time Target Machine)
ШИМ	Широтно-импульсная модуляция
ЭВМ	Электронная вычислительная машина

Список литературы

1. *Поляк, Б. Т.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков. — Москва : ЛЕНАНД, 2014. — С. 560.
2. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — Наука, 1968. — 476 с.
3. *Щербаков, П. С.* Множества достижимости линейных систем: определения, основные свойства, аппроксимации / П. С. Щербаков // Труды 11-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых УБС. — 2014. — С. 15—19.
4. *Хлебников, М. В.* Внешняя оценка множества достижимости линейной динамической системы / М. В. Хлебников // Стохастическая оптимизация в информатике. — 2016. — Т. 12. — С. 112—122.
5. *Афанасьев, В. Н.* Теория оптимального управления непрерывными динамическими системами. Аналитическое конструирование / В. Н. Афанасьев. — Издательство физического факультета МГУ, 2011.
6. *Тюлюкин, В. А.* Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы / В. А. Тюлюкин, А. Ф. Шориков // Автоматика и Телемеханика. — 1993. — Т. 4. — С. 115—127.
7. *Булаев, В. В.* Модификация общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейных дискретных управляемых систем / В. В. Булаев, А. Ф. Шориков // Информационные технологии и системы: труды Шестой Международной научной конференции. — 2017. — С. 47—52.
8. *Булаев, В. В.* Модифицированный алгоритм построения областей достижимости линейных дискретных динамических систем / В. В. Булаев, И. О. Осипов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». — 2018. — Т. 18, № 1. — С. 56—62.

9. *Коренев, П. С.* Реконструкция равновесного распределения параметров плазмы токамака по внешним магнитным измерениям и построение линейных плазменных моделей / П. С. Коренев, Ю. В. Митришкин, М. И. Патров // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2016. — Т. 17. — С. 254—266.
10. *Черноусько, Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. / Ф. Л. Черноусько. — НАУКА, 1988. — 320 с.
11. *Artsimovich, L.* Tokamak devices / L. Artsimovich // Nuclear Fusion. — 1972. — Vol. 12, no. 2. — P. 215—252.
12. *Арцимович, Л. А.* Управляемые термоядерные реакции / Л. А. Арцимович. — Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 468 с.
13. Управление плазмой в токамаках. Ч. 1. Проблема управляемого термоядерного синтеза. Токамаки. Компоненты систем управления / Ю. В. Митришкин [и др.] // Проблемы управления. — 2018. — Т. 1. — С. 2—20.
14. Управление плазмой в токамаках. Ч. 2. Системы магнитного управления / Ю. В. Митришкин [и др.] // Проблемы управления. — 2018. — Т. 2. — С. 2—30.
15. Управление плазмой в токамаках. Ч. 3.1. Системы магнитного управления / Ю. В. Митришкин [и др.] // Проблемы управления. — 2019. — Т. 3. — С. 3—15.
16. Управление плазмой в токамаках. Ч. 3.2. Моделирование и реализация систем управления плазмой в ITER и конструкции DEMO / Ю. В. Митришкин [и др.] // Проблемы управления. — 2019. — Т. 4. — С. 15—26.
17. *Wesson, J.* Tokamaks / J. Wesson, D. J. Campbell. — Clarendon Press, 1997. — (Oxford engineering science series).
18. *Глухих, В. А.* Физико-технические основы управляемого термоядерного синтеза : Учебное пособие / В. А. Глухих, В. А. Беляков, А. Б. Минеев. — Издательство Политехнического университета, 2006. — С. 348.
19. *Ariola, M.* Magnetic Control of Tokamak Plasmas / M. Ariola, A. Pironti. — 2nd ed. — Springer Cham, 2016. — P. 203. — (Advances in Industrial Control).

20. Усовершенствованный алгоритм FCDI для восстановления равновесия плазмы в токамаке / П. С. Коренев [и др.] // Письма в ЖТФ. — 2023. — Т. 49, № 7. — С. 36—39.
21. Deep neural network Grad-Shafranov solver constrained with measured magnetic signals / S. Joung [et al.]. — 2019.
22. Optical boundary reconstruction of Tokamak plasmas for feedback control of plasma position and shape / G. Hommen [et al.] // The Review of scientific instruments. — 2010. — Vol. 81. — P. 113504.
23. Арцимович, Л. А. Токамак с некруглым сечением плазменного витка / Л. А. Арцимович, В. Д. Шафранов // Письма в ЖЭТФ. — 1972. — Т. 15, № 1. — С. 72.
24. Арсенин, В. В. Подавление неустойчивостей плазмы методом обратной связи (обзор) / В. В. Арсенин, В. А. Чуянов // Успехи физических наук. — 1977. — Т. 123. — С. 83—129.
25. De Tommasi, G. Plasma Magnetic Control in Tokamak Devices / G. De Tommasi // Journal of Fusion Energy. — 2019. — Vol. 38. — P. 406—436.
26. Freidberg, J. P. Plasma Physics and Fusion Energy / J. P. Freidberg. — Cambridge University Press, 2008.
27. Advancing Fusion by Innovations: Smaller, Quicker, Cheaper / M. P. Gryaznevich [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2015. — Vol. 591, no. 1. — P. 012005.
28. Spherical tokamak Globus-M2: Design, integration, construction / V. B. Minaev [et al.] // Nuclear Fusion. — 2017. — Vol. 57. — P. 066047.
29. Поляк, Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. — Москва : Наука, 2002. — С. 303.
30. Поляк, Б. Т. Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков // Стохастическая оптимизация в информатике. — 2008. — С. 3—24.

31. Назин, А. В. О сходимости внешних эллипсоидальных аппроксимаций областей достижимости линейных дискретных динамических систем / А. В. Назин, С. А. Назин, Б. Т. Поляк // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 8. — С. 39—61.
32. Поляк, Б. Т. Математическая теория автоматического управления / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, Л. Б. Рапопорт. — Москва : ЛЕНАНД, 2019. — С. 504.
33. Тюлюкин, В. А. Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы / В. А. Тюлюкин, А. Ф. Шорилов // Негладкие задачи оптимизации и управление. — Свердловск : УрО АН СССР, 1988. — С. 55—61.
34. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Программный комплекс «PROGNOZ-2022» для реализации построения и минимаксного оценивания областей достижимости (прогнозных множеств) линейных дискретных управляемых динамических систем / А. Ф. Шорилов, В. А. Тюлюкин ; Институт экономики Уральского отделения РАН. — № 2022667288 ; заявл. 22.09.2022 ; опубл. 29.09.2022, 2022667943 (Рос. Федерация).
35. Chernousko, F. L. Ellipsoidal Bounds on Reachable Sets of Dynamical Systems with Matrices Subjected to Uncertain Perturbations / F. L. Chernousko, D. Y. Rokityanskii // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2000. — Vol. 104, no. 1. — P. 1—19.
36. Chernousko, F. L. Optimal Ellipsoidal Estimates of Uncertain Systems: An Overview and New Results / F. L. Chernousko // Coping with Uncertainty: Robust Solutions / ed. by K. Marti, Y. Ermoliev, M. Makowski. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. — P. 141—161.
37. Ovseevich, A. I. Methods of Ellipsoidal Estimation for Linear Control Systems / A. I. Ovseevich, F. L. Chernousko // Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC). — Seoul, Korea, 07/06/2008—07/11/2008. — P. 15345—15348.
38. Chernousko, F. Properties of the Optimal Ellipsoids Approximating the Reachable Sets of Uncertain Systems / F. Chernousko, A. Ovseevich // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2004. — Vol. 120.

39. *Ovseevich, A.* Properties of optimal ellipsoids approximating attainable sets for systems with uncertainties / A. Ovseevich, F. Chernousko // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2004. — Vol. 43. — P. 8—18.
40. *Овсеевич, А. И.* Особенности границ областей достижимости и задачи наблюдаемости / А. И. Овсеевич // Тезисы 5-й Всероссийской школы «Математические методы навигации». — Москва : Издательство механико-математического факультета МГУ, 1994. — С. 30—32.
41. *Ovseevich, A. I.* Singularities of Attainable Sets / A. I. Ovseevich // Russian Journal of Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 5, no. 3. — P. 389—398.
42. *Овсеевич, А. И.* Явные формулы для эллипсоидов, аппроксимирующих области достижимости / А. И. Овсеевич, Ю. В. Тарабанько // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 33—44.
43. *Ушаков, В. А.* Построение и аппроксимация областей достижимости: обзор существующих решений и выбор программного обеспечения / В. А. Ушаков // Региональная информатика и информационная безопасность: сборник трудов межрегиональной конференции и Санкт-Петербургской международной конференции. — Санкт-Петербург : Региональная общественная организация «Санкт-Петербургское Общество информатики, вычислительной техники, систем связи и управления», 2018. — С. 253—257.
44. *Ушаков, В. А.* Области достижимости и проектирующие операторы в задачах оптимального управления / В. А. Ушаков // Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. — Москва : Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2019. — С. 1037—1042.
45. *Ушаков, В. А.* Подход к построению и аппроксимации областей достижимости на основе проективной геометрии / В. А. Ушаков // Труды 5-ой Международной научной конференции «Технологическая перспектива в рамках евразийского пространства: новые рынки и точки экономического роста». — Санкт-Петербург : Центр научно-производственных технологий «Астерион», 2019. — С. 480—483.

46. *Ushakov, V.* Approximation a Reachability Area in the State Space for a Discrete Task / V. Ushakov // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Vol. 1226. — Springer Nature Switzerland AG, 2020. — P. 617—624.
47. *Ушаков, В. А.* Построение областей достижимости в пространстве возмущений для оценивания робастности планов информационного взаимодействия группировки подвижных объектов / В. А. Ушаков // *Материалы IV Международного семинара по информационным, вычислительным и управляющим системам для распределённых сред (ICCS-DE 2022)*. — Иркутск : Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, 2022. — С. 127—129.
48. *Ушаков, В. А.* Построение областей достижимости с использованием методов машинного обучения / В. А. Ушаков // *Прикладной искусственный интеллект: перспективы и риски: сборник докладов Международной научной конференции*. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2024. — С. 359—361.
49. *Sokolov, B. V.* Formation Reachability Area as a Data Vector Using a Dynamic Model for Controlling Information Processes in the Automated Control System for Moving Objects / B. V. Sokolov, V. A. Ushakov // *Proceedings of the Workshop "Models and Methods for Researching Information Systems in Transport 2020" on the Basis of the Departments «Information and Computer Systems» and «Higher Mathematics»*. Vol. 2803. — St. Petersburg : CEUR-WS, 2020. — P. 67—75. — (CEUR Workshop Proceedings).
50. *Формальский, А. М.* Управление движением неустойчивых объектов / А. М. Формальский. — ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 232 с.
51. *Формальский, А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами / А. М. Формальский. — НАУКА, 1974. — 368 с.
52. *Формальский, А. М.* Об угловых точках областей достижимости / А. М. Формальский // *Прикладная математика и механика*. — 1983. — Т. 47, № 4. — С. 566—574.
53. *Бугров, Д. И.* Зависимость от времени областей достижимости систем третьего порядка / Д. И. Бугров, А. М. Формальский // *Прикладная математика и механика*. — 2017. — Т. 81, № 2. — С. 154—164.

54. *Formalsky, A. M.* On the Geometric Properties of Reachable and Controllable Sets for Linear Discrete Systems / A. M. Formalsky, A. N. Sirotin // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2004. — Vol. 122, no. 2. — P. 257—284.
55. *Сиротин, А. Н.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях / А. Н. Сиротин, А. М. Формальский // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 12. — С. 17—32.
56. *Балашов, М. В.* Некоторые теоретико-множественные операции с множеством достижимости линейной управляемой системы / М. В. Балашов, А. А. Тремба // материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко. — 2022. — С. 20—22.
57. Poloidal field circuits sensitivity studies and shape control in FAST / F. Maviglia [et al.] // Fusion Engineering and Design. — 2011. — Vol. 86. — P. 1076—1079.
58. Design and implementation of a model-based hierarchical architecture for plasma shape control in the TCV tokamak / A. Mele [et al.] // Plasma Physics and Controlled Fusion. — 2025. — Vol. 67.
59. Experimental vertical stability studies for ITER performance and design / D. A. Humphreys [et al.] // Nuclear Fusion. — 2009. — Vol. 49. — P. 115003.
60. New horizontal and vertical field coils with optimised location for robust decentralized plasma position control in the IGNITOR tokamak / Y. V. Mitrishkin [et al.] // Fusion Engineering and Design. — 2021. — Vol. 174. — P. 112993.
61. Real-Time Control of a Tokamak Plasma Using Neural Networks / C. M. Bishop [et al.] // Neural Computation. — 1994. — Vol. 7.
62. *Gryaznevich, M. P.* Equilibrium reconstruction on the START spherical tokamak using a neural network / M. P. Gryaznevich, C. G. Windsor // Iranian Physical Journal. — 2007.
63. *Coccorese, E.* Identification of noncircular plasma equilibria using a neural network approach / E. Coccorese, F. Morabito, R. Martone // Nuclear Fusion. — 2002. — Vol. 34. — P. 1349.

64. *Lister, J. B.* Fast non-linear extraction of plasma equilibrium parameters using a neural network mapping / J. B. Lister, H. Schnurrenberger // Nuclear Fusion. — 1991. — Vol. 31, no. 7. — P. 1291.
65. Identification of plasma equilibria in ITER from magnetic measurements via functional parameterization and neural networks / R. Albanese [et al.] // Fusion Technology. — 1996. — Vol. 30, no. 2. — P. 219—236.
66. The plasma shape control system in the tokamak with the artificial neural network as a plasma equilibrium reconstruction algorithm / A. A. Prokhorov [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2020. — Vol. 53. — P. 857—862.
67. Система магнитного управления плазмой реального времени с алгоритмом восстановления равновесия в обратной связи для токамака Глобус-М2 / А. Е. Коньков [и др.] // Физика плазмы. — 2023. — Т. 49, № 12. — С. 1348—1356.
68. *Kurzhanski, A. B.* Ellipsoidal techniques for reachability analysis: Internal approximation / A. B. Kurzhanski, P. Varaiya // Systems & Control Letters. — 2000. — Vol. 41. — P. 201—211.
69. *Kim, J.-H.* Improved ellipsoidal bound of reachable sets for time-delayed linear systems with disturbance / J.-H. Kim // Automatica. — 2008. — Vol. 44. — P. 2940—2943.
70. *Sheng, Y.* Improved reachable set bounding for linear time-delay systems with disturbances / Y. Sheng, Y. Shen // Journal of the Franklin Institute. — 2016. — Vol. 353.
71. *Graettinger, T. J.* Hyperplane method for reachable state estimation for linear time-invariant systems / T. J. Graettinger, B. H. Krogh // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1991. — Vol. 69, no. 3. — P. 555—588.
72. *Hwang, I.* Polytopic Approximations of Reachable Sets Applied to Linear Dynamic Games and a Class of Nonlinear Systems / I. Hwang, D. M. Stipanović, C. J. Tomlin // Polytopic Approximations of Reachable Sets. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2005. — P. 3—17. — Also in: Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 312.

73. *Брусникина, Н. Б.* Аппроксимация с гарантированной точностью множеств достижимости для линейной динамической системы, подверженной импульсным воздействиям / Н. Б. Брусникина, А. В. Лотов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47, № 11. — С. 1855—1864.
74. *Hu, R.* Polyhedral approximation method for reachable sets of linear delay systems / R. Hu, L. Shao, Y. Cong // IET Control Theory & Applications. — 2020. — Vol. 14, no. 12. — P. 1548—1556.
75. *Gayek, J. E.* Approximating Reachable Sets for n-dimensional Linear Discrete Systems / J. E. Gayek, M. E. Fisher // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 1987. — Vol. 4, no. 2. — P. 149—160.
76. *Ибрагимов, Д. Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление / Д. Н. Ибрагимов, А. Н. Сиротин // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2023. — № 6. — С. 3—32.
77. *Ибрагимов, Д. Н.* Об условиях ограниченности множеств достижимости и управляемости для линейных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями первого порядка на скалярное управление / Д. Н. Ибрагимов, С. С. Самонов // Моделирование и анализ данных. — 2025. — Т. 15, № 1. — С. 51—80.
78. *Girard, A.* Reachability of Uncertain Linear Systems Using Zonotopes / A. Girard // Proceedings of the 8th International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC 2005). Vol. 3414. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2005. — P. 291—305. — (Lecture Notes in Computer Science).
79. *Препарата, Ф.* Вычислительная геометрия: Введение: пер. с англ. / Ф. Препарата, М. Шеймос. — Мир, 1989.
80. *Klee, V.* Convex polytopes and linear programming / V. Klee // Proc. IBM Sci. Comput. Symp. Combinatorial Problems, IBM, White Plains, USA. — 1966. — P. 123—158.
81. Оценка области управляемости вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ с катушкой HFC / П. С. Корнев [и др.] // ВАНТ. Серия: Термоядерный синтез. — 2024. — Т. 47, № 3. — С. 49—59.

82. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — Наука, 2019. — С. 543.
83. Borgwardt, K. The simplex method: A probabilistic analysis (Algorithms and Combinatorics (Study and Research Texts)). / К. Borgwardt. — Springer-Verlag, 1987.
84. Карманов, В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. — Наука, 1986.
85. Pan, P.-Q. A Revised Dual Projective Pivot Algorithm for Linear Programming / P.-Q. Pan // SIAM Journal on Optimization. — 2005. — Vol. 16. — P. 49—68.
86. Сферический токамак Глобус-М / В. К. Гусев [и др.] // Журнал технической физики. — 1999. — Т. 69. — С. 58—62.
87. Globus-M spherical tokamak / V. K. Gusev [et al.] // Technical Physics. — 1999. — Vol. 44. — P. 1054—1057.
88. The Globus-M2 spherical tokamak: the first results / V. B. Minaev [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — Vol. 1094. — P. 012001.
89. Overview of results from the National Spherical Torus Experiment (NSTX) / D. A. Gates [et al.] // Nuclear Fusion. — 2009. — Vol. 49. — P. 104016.
90. Overview of the physics and engineering design of NSTX upgrade / J. Menard [et al.] // Nuclear Fusion. — 2012. — Vol. 52. — P. 083015.
91. Overview of physics results from MAST towards ITER/DEMO and the MAST Upgrade / H. Meyer [et al.] // Nuclear Fusion. — 2013. — Vol. 53. — P. 104008.
92. Постановка экспериментов по ВЧ нагреву плазмы на сферическом токамаке "Глобус-М" при частотах выше ионной циклотронной / В. В. Дьяченко [и др.] // Журнал технической физики. — 2003. — Т. 73. — С. 126—131.
93. Комплекс нейтральной инжекции сферического токамака Глобус-М / В. К. Гусев [и др.] // Журнал технической физики. — 2007. — Т. 77. — С. 28—43.

94. *Kuznetsov, E. A.* Current inverter as self-oscillating actuator in applications for plasma position control systems in the Globus-M/M2 and T-11M tokamaks / E. A. Kuznetsov, Y. V. Mitrishkin, N. M. Kartsev // Fusion Engineering and Design. — 2019. — Vol. 143. — P. 247—258.
95. *Skogestad, S.* Multivariable Feedback Control: Analysis and Design / S. Skogestad, I. Postlethwaite. — John Wiley & Sons, 2007.
96. *Kahaner, D.* Numerical Methods and Software / D. Kahaner, C. B. Moler, S. Nash. — Prentice Hall, 1988. — (Prentice-Hall series in computational mathematics).
97. *García-Sanz, M.* Robust Control Engineering: Practical QFT Solutions / M. García-Sanz. — 2017. — P. 1—556.
98. Plasma current, position and shape feedback control on EAST / Q. P. Yuan [et al.] // Nuclear Fusion. — 2013. — Vol. 53. — P. 043009.
99. Plasma boundary shape control and real-time equilibrium reconstruction on NSTX-U / M. Boyer [et al.] // Nuclear Fusion. — 2018. — Vol. 58.
100. The Control of Tokamak Configuration Variable Plasmas / J. Lister [et al.] // Fusion Technology. — 1997. — Vol. 32.
101. *Ambrosino, G.* Magnetic control of plasma current, position, and shape in Tokamaks - A survey of modeling and control approaches / G. Ambrosino, R. Albanese // Control Systems, IEEE. — 2005. — Vol. 25. — P. 76—92.
102. *Dorf, R.* Modern Control Systems, 13th Edition / R. Dorf, R. Bishop. — 2017.
103. *Fritsch, N. F.* Monotone Piecewise Cubic Interpolation / N. F. Fritsch, R. E. Carlson // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 1980. — Vol. 17. — P. 238—246.
104. *Дикин, И. И.* Итеративное решение задачи линейного и квадратичного программирования / И. И. Дикин // Доклады АН СССР. Т. 174. — 1967. — С. 747—748.
105. *Nesterov, Y.* Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming / Y. Nesterov, A. Nemirovskii. — Society for Industrial, Applied Mathematics, 1987. — (Studies in Applied and Numerical Mathematics).

106. *Dantzig, G. B.* The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints / G. B. Dantzig, A. Orden, P. Wolfe // Pacific Journal of Mathematics. — 1955. — Vol. 5, no. 2. — P. 183—195.
107. *Юдин, Д. Б.* Задачи и методы линейного программирования / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольцштейн. — Советское радио, 1964.
108. *Zhang, Y.* Solving Large-Scale Linear Programs by Interior-Point Methods under the MATLAB Environment / Y. Zhang // Optimization Methods and Software. — 1996. — Vol. 10.
109. The Globus-M diagnostics design / V. V. Bulanin [et al.] // Plasma Devices and Operations. — 2001. — Vol. 9. — P. 129—142.
110. Review of Globus-M spherical tokamak results / V. K. Gusev [et al.] // Nuclear Fusion. — 2015. — Vol. 55. — P. 104016.
111. Magnetic diagnostics on Globus-M tokamak / S. E. Bender [et al.] // Plasma Devices and Operations. — 2001. — Vol. 9. — P. 143—157.
112. *Forsythe, G. E.* Computer methods for mathematical computations / G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler. — Prentice Hall, 1977. — P. 270.
113. *Lazarus, E. A.* Control of the vertical instability in tokamaks / E. A. Lazarus, J. B. Lister, G. H. Neilson // Nuclear Fusion. — 1990. — Vol. 30. — P. 111—141.
114. *Шафранов, В. Д.* Равновесие плазмы в магнитном поле / В. Д. Шафранов // Вопросы теории плазмы. — 1963. — Т. 2. — С. 92—131.
115. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. — 2-е, исправленное и дополненное. — М. : ЛЕНАНД, 2014. — С. 392.
116. *Tian, Y.* Recent Advances in Stochastic Gradient Descent in Deep Learning / Y. Tian, Y. Zhang, H. Zhang // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 3.
117. *Robbins, H.* A Stochastic Approximation Method / H. Robbins, S. Monroe // The Annals of Mathematical Statistics. — 1951. — Vol. 22, no. 3. — P. 400—407.
118. *Goodfellow, I.* Deep Learning / I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville. — MIT Press, 2016.

119. *Rosenblatt, F.* The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain / F. Rosenblatt // Psychol. Review. — 1958. — Vol. 65. — P. 386—408.
120. *Терехов, В. А.* Нейросетевые системы управления / В. А. Терехов, И. Ю. Тюкин, Д. Б. Ефимов. — Высшая школа, 2002. — 181 с.
121. *Schmidhuber, J.* Deep Learning in Neural Networks: An Overview / J. Schmidhuber // Neural Networks. — 2014. — Vol. 61.
122. *Гудфеллоу, Я.* Глубокое обучение = Deep Learning / Я. Гудфеллоу, И. Бенджиро, А. Курвилль. — ДМК-Пресс, 2017. — 652 с.
123. *Girosi, F.* Networks and the Best Approximation Property / F. Girosi, T. Poggio // Biological Cybernetics. — 2002. — Vol. 63.
124. *Hecht-Nielsen, R.* Kolmogorov's Mapping Neural Network Existence Theorem / R. Hecht-Nielsen //. Vol. 3. — 1987. — P. 11—13.
125. *Kůrková, V.* Kolmogorov's Theorem Is Relevant / V. Kůrková // Neural Computation. — 1991. — Vol. 3. — P. 617—622.
126. *Tieleman, T.* Lecture 6.5-RmsProp: Divide the Gradient by a Running Average of Its Recent Magnitude / T. Tieleman, G. Hinton // Coursera: Neural Networks for Machine Learning. — 2012. — Vol. 4. — P. 26—31.
127. *Kingma, D.* Adam: A Method for Stochastic Optimization / D. Kingma, J. Ba // International Conference on Learning Representations. — 2014.
128. *Schmidt, R. M.* Recurrent Neural Networks (RNNs): A Gentle Introduction and Overview / R. M. Schmidt // arXiv. — 2019. — arXiv: [1912.05911](https://arxiv.org/abs/1912.05911) [cs.LG].
129. Digital Twin in manufacturing: A categorical literature review and classification / W. Kritzinger [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — Vol. 51, no. 11. — P. 1016—1022. — 16th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing INCOM 2018.
130. *Mitrishkin, Y. V.* Plasma Magnetic Control Systems in D-shaped Tokamaks and Imitation Digital Computer Platform in Real Time for Controlling Plasma Current and Shape / Y. V. Mitrishkin // Advances in Systems Science and Applications. — 2022. — Vol. 22(1). — P. 1—14.

131. Chapter 3: MHD stability, operational limits and disruptions / Т. С. Hender [et al.] // Nuclear Fusion. — 2007. — Vol. 47. — S128.
132. *Степаньянц, Г. А.* О структуре законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость систем управления с неустойчивым объектом / Г. А. Степаньянц, Н. С. Тарарощенко // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 4. — С. 774—775.
133. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы. — 9-е изд / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — Лаборатория знаний, 2020. — С. 636.
134. *Mitrishkin, Y. V.* Stabilization of Unstable Vertical Position of Plasma in T-15 Tokamak. I. / Y. V. Mitrishkin, N. M. Kartsev, S. M. Zenckov // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75. — P. 281—293.
135. Kazakhstan tokamak for material testing conceptual design and basic parameters / V. Korotkov [et al.] // Fusion Engineering and Design. — 2001. — Vol. 56. — P. 831—835.
136. Электротехнический комплекс системы импульсного электропитания токамака КТМ / Д. Б. Зарва [и др.] // ВАНТ. Серия: Термоядерный синтез. — 2018. — Т. 41, № 2. — С. 59—70.
137. *Митришкин, Ю. В.* Сравнительное исследование систем управления реального времени вертикальным положением плазмы в токамаке с разными источниками питания обмотки горизонтального управляющего поля / Ю. В. Митришкин, А. Е. Коньков, П. С. Коренев // ВАНТ. Серия: Термоядерный синтез. — 2022. — Т. 45, № 3. — С. 34.
138. Исследования в области управляемого термоядерного синтеза в Республике Казахстан / Э. Г. Батырбеков [и др.] // ВАНТ. Серия: Термоядерный синтез. — 2024. — Т. 47, № 2. — С. 15—22.
139. Comparison of Operating Parameters of the KTM Tokamak with Operating Ranges of the Facility / N. A. Kirneva [et al.] // Physics of Atomic Nuclei. — 2023. — Vol. 86, no. 7. — P. 1663—1666.
140. Исследования в области управляемого термоядерного синтеза в Республике Казахстан / Э. Г. Батырбеков [и др.] // ВАНТ. Серия: Термоядерный синтез. — 2024. — Т. 47, № 2. — С. 15—22.

141. *Konkov, A. E.* Comparison Study of Power Supplies in Real-Time Robust Control Systems of Vertical Plasma Position in Tokamak / A. E. Konkov, Y. V. Mitrishkin // IFAC-PapersOnLine. — 2022. — Vol. 55, no. 9. — P. 327—332.
142. *Konkov, A. E.* Synthesis Methodology for Discrete MIMO PID Controller with Loop Shaping on LTV Plant Model via Iterated LMI Restrictions / A. E. Konkov, Y. V. Mitrishkin // Mathematics. — 2024. — Vol. 12, no. 6. — P. 810.
143. *Åström, K.* Computer Controlled System Theory and Design. Vol. 31 / K. Åström, B. Wittenmark. — 1984.

Публикации автора по теме диссертации

144. *Mitrishkin, Y. V.* Methodology of Plasma Shape Reachability Area Estimation in D-Shaped Tokamaks / Y. V. Mitrishkin, V. I. Kruzhkov, P. S. Korenev // Mathematics. — 2022. — Vol. 10. — P. 4605.
145. *Кружков, В. И.* Настройка системы управления положением плазмы и полоидальными токами токамака Глобус-М2 и реализация на стенде реального времени / В. И. Кружков // Труды 17-й Всероссийской школы-конференции молодых учёных «Управление большими системами» (УБС'2021, Москва). — Москва — Звенигород : Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2021. — С. 704—710.
146. *Mitrishkin, Y. V.* Estimation of controllability region of unstable vertical plasma position and plasma separatrix multivariable reachability area of a spherical tokamak / Y. V. Mitrishkin, V. I. Kruzhkov, M. I. Patrov // Proceedings of the 46th EPS Conference on Plasma Physics. — Milan, Italy, 07/2019. — P4.1095.
147. *Mitrishkin, Y. V.* Two-cascade multiloop control system of a plasma shape in a tokamak with decoupling and robust PID-controllers / Y. V. Mitrishkin, V. I. Kruzhkov // Proceedings of the 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). — 2020. — P. 1—4.

148. *Кружков, В. И.* Метод нахождения точек внутри области достижимости для линейной дискретной модели объекта высокого порядка с переменными параметрами / В. И. Кружков // Автоматика и телемеханика. — 2026. — № 7. — С. 6—22.
149. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа для итерационного нахождения области достижимости формы плазмы в токамаке по линейным моделям с переменными параметрами / В. И. Кружков, А. Е. Коньков ; Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук. — № 2025682596 ; заявл. 25.08.2025 ; опубл. 25.08.2025, 2025682596 (Рос. Федерация).
150. Комплекс программ для вычисления реализуемых конфигураций плазмы в токамаке Глобус-М2 / В. И. Кружков [и др.] // Письма в ЖТФ. — 2026. — № 10. — С. 48—54.
151. New Identification Approach and Methods for Plasma Equilibrium Reconstruction in D-Shaped Tokamaks / Y. V. Mitrishkin [et al.] // Mathematics. — 2021. — Vol. 10. — P. 40.
152. Полунатурное моделирование цифровой системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ / А. Е. Коньков [и др.] // Автоматика и телемеханика. — 2025. — № 1. — С. 63—79.
153. *Kruzhkov, V. I.* Real-Time Hardware Identification of Complex Dynamical Plant by Artificial Neural Network Based on Experimentally Processed Data by Smart Technologies / V. I. Kruzhkov, Y. V. Mitrishkin, E. A. Pavlova // Engineering Proceedings. — 2023. — Vol. 33, no. 1. — P. 17.
154. *Патент 2787571 Рос. Федерация, МПК G 21 B 1/00.2787571* / Ю. В. Митришкин [и др.] ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"(МГУ). — № 2022117882 ; заявл. 30.06.2022 ; опубл. 11.01.2023, Бюл. № 2 ; приоритет 30.06.2022. — 20 с.

Приложение А

Акт о внедрении результатов диссертационной работы



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
 Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук
 (ФТИ им. А.Ф. Иоффе)
 ул. Политехническая, д. 26, г. Санкт-Петербург, 194021
 Тел. (812) 297-22-45, факс (812) 297-10-17
post@mail.ioffe.ru, <http://www.ioffe.ru>
 ОКПО 02698463, ОГРН 1037804006998, ИНН 7802072267, КПП 780201001

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по научной работе,
 доктор физ.-мат. наук

Брунков П.Н.



(подпись)

М.П.

“24” февраля 2026 г.

Акт о внедрении результатов диссертационной работы на соискание ученой степени

кандидата технических наук

КРУЖКОВА Валерия Игоревича

Комиссия в составе ведущего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Сахарова Николая Владимировича (председатель), ведущего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Минаева Владимира Борисовича, ведущего научного сотрудника, к.ф.-м.н. Петрова Юрия Викторовича и научного сотрудника Жильцова Никиты Сергеевича рассмотрела результаты практического внедрения в физический эксперимент на УНУ «Сферический токамак Глобус-М» диссертационного исследования Кружкова Валерия Игоревича по теме «Моделирование области достижимости формы плазмы в токамаке» выполненной под научным руководством старшего научного сотрудника ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, к.ф.-м.н. Конькова Артема Евгеньевича.

Объект внедрения

Численный метод нахождения реализуемой формы плазмы с учетом ограничений, накладываемых электромагнитной системой и размерами вакуумной камеры основан на оценке области достижимости выходов линейной модели плазмы с переменными параметрами при заданных ограничениях на выходы и входы. Метод реализован в виде комплекса программ в среде MATLAB и позволяет итеративно находить форму плазмы, которая может быть получена

посредством магнитного управления в заданный момент времени диверторной фазы плазменного разряда.

Пользовательский интерфейс комплекса программ (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025682596 РФ, 2025) состоит из двух основных вкладок: «Загрузка» и «Сечения». «Загрузка» – для загрузки линейной модели плазмы, экспериментальных данных разряда (напряжения и токи в обмотках, восстановленные зазоры между границей плазмы и лимитером токамака), задания ограничений на управляющие и выходные сигналы, выбора алгоритма оптимизации (симплекс-метод или метод внутренней точки). «Сечения» – для визуализации полоидального сечения токамака, отображения сценарной границы плазмы и области возможных изменений по каждому из 24-х зазоров (Рис. 1). Интерфейс позволяет интерактивно выбирать желаемое значение в пределах области достижимости, после чего метод последовательно пересчитывает реализуемые конфигурации, формируя новую форму плазмы и определяя соответствующие управляющие сигналы.

Подключение комплекса программ к базе данных плазменных разрядов токамака Глобус-М2 обеспечено разработанным с.н.с. Коньковым А. Е. программным пакетом «Tokamak Datasets Processing Toolbox», позволяющим осуществлять обработку экспериментальных данных плазменного разряда в среде MATLAB.

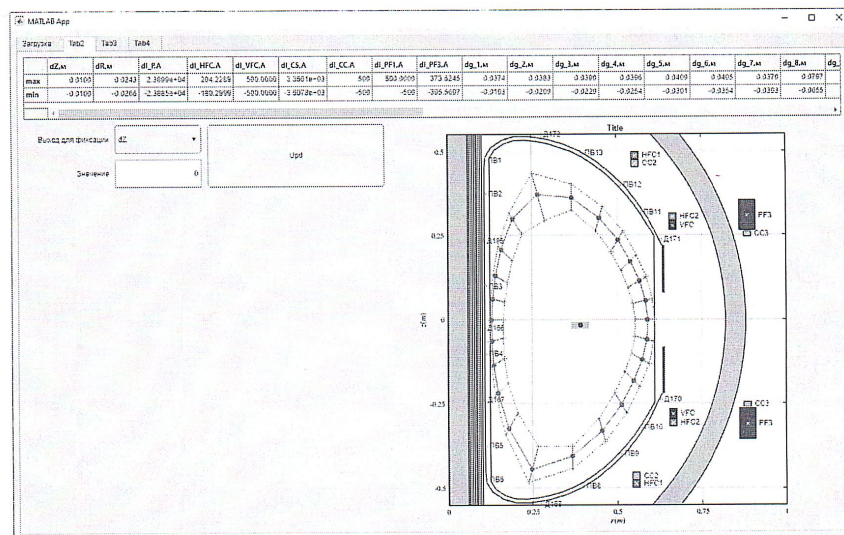


Рис. 1. Интерфейс комплекса программ, вкладка «Сечения», Разряд № 41805, $t = 158$ ms. Область возможных изменений каждой из составляющей полоидального сечения плазмы.

Процедура внедрения

На подключенной к локальной базе данных разрядов токамака ЭВМ с установленным программным пакетом «Tokamak Datasets Processing Toolbox» был установлен комплекс программ «Программа для итерационного нахождения области достижимости формы плазмы в токамаке по линейным моделям с переменными параметрами».

Заключение комиссии

Комиссия установила, что программное обеспечение было внедрено на УНУ «Сферический токамак Глобус-М» 12 декабря 2025 г., и позволило находить реализуемую форму плазмы в виде 24-х зазоров между плазмой и лимитером токамака. Функциональность программного комплекса направлена на повышение эффективности планирования экспериментов за счет отсеивания сценариев, противоречащих ограничениям электромагнитной системы.

Председатель комиссии

Члены комиссии



Сахаров Н.В.

Минаев В.Б.

Петров Ю.В.

Жильцов Н.С.

Приложение Б

Патент Российской Федерации на изобретение № 2787571

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



(19) RU (11)

2 787 571⁽¹³⁾ C1

(51) МПК

G21B 1/00 (2006.01)

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

(12) ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ К ПАТЕНТУ

(52) СПК

G21B 1/00 (2022.08)

(21)(22) Заявка: 2022117882, 30.06.2022

(24) Дата начала отсчета срока действия патента:
30.06.2022Дата регистрации:
11.01.2023

Приоритет(ы):

(22) Дата подачи заявки: 30.06.2022

(45) Опубликовано: 11.01.2023 Бюл. № 2

Адрес для переписки:

119234, Москва, ул. Ломоносовский пр-кт, 27,
строение 1, Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова, Фонд
"Национальное интеллектуальное развитие"

(72) Автор(ы):

Митришкин Юрий Владимирович (RU),
Коньков Артем Евгеньевич (RU),
Корнев Павел Сергеевич (RU),
Кружков Валерий Игоревич (RU)

(73) Патентообладатель(и):

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования "Московский государственный
университет имени М.В.Ломоносова" (МГУ)
(RU)(56) Список документов, цитированных в отчете
о поиске: Корнев П.С.и др. Реконструкция
равновесного распределения параметров
плазмы токамака по внешним магнитным
измерениям и построение линейных
плазменных моделей. Мехатроника,
автоматизация и управление. Том 17, N4, 2016,
с. 254-265. DOI: 10.17587/mau.17.254-266. RU
2702137 C1, 04.10.2019. RU 2633517 C1,
13.10.2017. WO 2012064767 A1, 18.05.2012. RU
(см. прод.)(54) СПОСОБ БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ПЛАЗМЫ В КАМЕРЕ
ТОКАМАКА В ТЕЧЕНИЕ ДИВЕРТОРНОЙ ФАЗЫ ПЛАЗМЕННЫХ РАЗРЯДОВ

(57) Реферат:

Изобретение относится к способу определения формы плазмы в камере токамака в течение диверторной фазы плазменных разрядов. На первом этапе способа по ряду уже проведенных плазменных разрядов и входо-выходным сигналам вне плазмы восстанавливают равновесие плазмы, т.е. распределение полоидального потока и тороидального тока. На основе этих распределений определяют положение плазменной сепаратрисы и тем самым определяют соответствие между входными сигналами (на магнитных петлях и зондах Мирнова, на поясах Роговского, измеряющих ток плазмы и токи в обмотках полоидального

поля) и выходными сигналами, которыми являются расстояния между сепаратрисой и первой стенкой токамака (зазоры). На втором этапе настраивают средства оценки зазоров: статическую матрицу, наблюдатель состояния, нейронную сеть по входным и выходным магнитным сигналам на ряде разрядов в течение каждого разряда. После этого применяют данные средства для оценки зазоров и ударных точек в темпе наблюдений (в реальном времени) в течение разрядов плазмы, что позволяет оцененные сигналы применять для управления формой плазмы в обратной связи системы магнитного управления плазмой. Техническим результатом

RU 2 787 571 C 1

RU 2 787 571 C 1

Приложение В

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2025682596

**«Программа для итерационного нахождения области
достижимости формы плазмы в токамаке по линейным
моделям с переменными параметрами»**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт проблем управления им.
В.А. Трапезникова Российской академии наук (RU)*

Авторы: *Кружков Валерий Игоревич (RU), Коньков Артем
Евгеньевич (RU)*



Заявка № **2025681048**
Дата поступления **14 августа 2025 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **25 августа 2025 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов