

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Котюков Александр Михайлович

**Нахождение положения равновесия динамических систем
методами накрывающих отображений и точек совпадения
с приложениями к моделям типа Аллена**

2.3.1 — Системный анализ, управление
и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
кандидат физико-математических наук, доцент
Павлова Наталья Геннадьевна

Москва
2026

Оглавление

Введение	4
1 Описание классов моделей M_o, M_c и постановка задачи	11
1.1 Описание модели	11
1.2 Примеры моделей из классов M_o и M_c	12
1.2.1 Модель типа Аллена–Эрроу–Дебре	13
1.2.2 Модели типа Аллена с постоянными эластичностями . . .	14
1.2.3 Модель типа Аллена с непостоянными эластичностями . .	18
2 Методы исследования положения равновесия в классах моделей M_o и M_c	21
2.1 Накрывающие отображения и точки совпадения	21
2.2 Метод нахождения положения равновесия динамических систем .	25
2.3 Принцип сжимающих отображений	31
2.4 Системы линейных уравнений и неравенств	33
2.5 Выводы главы 2	34
3 Положение равновесия в моделях с внешним воздействием из класса M_o	36
3.1 Положение равновесия в открытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями	36
3.1.1 Достаточные условия существования положения равновесия	36
3.1.2 Устойчивость положения равновесия	44
3.1.3 Метод нахождения положения равновесия	45
3.1.4 Модельный пример	46
3.1.5 Достаточные условия существования положения частичного равновесия	55
3.1.6 Метод нахождения положения частичного равновесия . . .	57

3.1.7	Модельный пример	58
3.2	Положение равновесия в открытой модели типа Аллена с непостоянными эластичностями	62
3.2.1	Достаточные условия существования положения равновесия	62
3.2.2	Метод нахождения положения равновесия	68
3.2.3	Модельный пример	69
3.3	Выводы главы 3	79
4	Положение равновесия в моделях без внешнего воздействия из класса M_c	80
4.1	Положение равновесия в модели типа Аллена–Эрроу–Дебре . . .	80
4.1.1	Достаточные условия существования положения равновесия	80
4.1.2	Метод нахождения положения равновесия	81
4.1.3	Модельный пример	82
4.2	Положение равновесия в закрытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями	90
4.2.1	Необходимые условия и достаточные условия существования положения равновесия	90
4.2.2	Единственность положения равновесия	95
4.2.3	Модельный пример	105
4.3	Выводы главы 4	112
	Заключение	113
	Список литературы	115

Введение

Актуальность исследования

Равновесные состояния играют важную роль при исследовании сложных динамических систем. Равновесным состоянием, или равновесием, называют такое состояние системы, при котором она способна самостоятельно поддерживать свое существование сколь угодно долго при отсутствии внешних воздействий [36]. Если система способна вернуться в равновесное состояние после того, как она была выведена из него внешними воздействиями или динамикой самой системы, то такое равновесное состояние называется устойчивым [34]. Устойчивые равновесные состояния являются основой для эффективного функционирования системы и ее долговечности.

Помимо обычных положений равновесия также исследуют устойчивость положений частичного равновесия, т.е. равновесных состояний по части переменных. Такая задача естественным образом возникает в различных приложениях, например, теории управления и стабилизации [12].

Исследование вопросов, связанных с равновесием в сложных системах, может быть целесообразно в различных областях науки. Так, например, в биологии активно исследуются модели распространения инфекционных заболеваний и эпидемий, в которых положение равновесия позволяет определить критический уровень переносчиков заболевания (см., например, [50], [10]); в экологии широко исследуются модели загрязнения окружающей среды, очистки сточных вод и прогнозирования аварийных ситуаций нефтеперерабатывающих предприятий, в которых равновесные состояния служат индикатором для принятия экстренных мер (см., например, [14]); подобные вопросы могут возникать при моделировании транспортных макросистем (см., например, [1]), в которых равновесное состояние позволяет определить места высокой концентрации транспортных потоков, а также целесообразность инвестиций, и другие (см., например, [40, 31]).

Задача о нахождении положения равновесия сводится к решению системы

алгебраических уравнений, вообще говоря, нелинейных. Часто в анализе возникает задача определения равновесных состояний, удовлетворяющих определенным ограничениям. В силу ограничений к системе добавляются неравенства, что значительно усложняет ее решение. Задача такого рода очень важна при анализе экономических систем, в частности, при производственном планировании, определении конкурентного равновесия (см., например, [39]) и государственном регулировании цен. Система, сформированная внутри отдельно взятого государства, непосредственно влияет на уровень доходов [23], прибыль компаний [24], инвестиционную активность [9], трудоустройство [37] и другие аспекты жизни общества. Регулирование цен является одной из основных задач органов государственной власти как при плановой экономике, так и при рыночной [33]. На сегодняшний день отсутствует возможность определить ориентир для действенной ценовой политики, позволяющей учесть интересы как поставщиков товаров и услуг, так и потребителей в лице населения. Одним из подходов к решению этой проблемы может служить понятие положения равновесия.

Долгое время считалось, что рыночная экономика должна развиваться в условиях совершенной конкуренции, без вмешательства государства [38]. Тем не менее, масштабные экономические кризисы, начиная с 1920-х годов показали, что невмешательство государства в рыночные отношения может привести к крайне негативным последствиям, и что даже при рыночной экономике влияние государства должно сохраняться, поскольку рыночные системы могут оказаться неустойчивыми по отношению к сильным внешним воздействиям [28]. Таким образом, вопрос устойчивости равновесных состояний играет важную роль в исследовании экономических процессов.

Настоящее исследование посвящено развитию методов анализа положений равновесия и частичного равновесия в системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств, с помощью теории накрывающих отображений и точек совпадения, а также приложения полученных результатов при исследовании динамических систем типа Аллена.

Степень разработанности темы исследования

Математические методы исследования сложных систем, в частности, методы теории накрывающих отображений и точек совпадения развивались Аваковым Е.Р., Арутюновым А.В., Гельманом Б.Д., Дмитруком А.В., Дыхтой В.А., Жуковским Е.С., Жуковским С.Е., Милютиным А.А., Обуховским В.В.,

Шоке Г. и другими. Среди современных приложений математических методов к исследованию сложных экономических систем можно выделить работы Бекларяна Л.А., Измаилова А.Ф., Новикова Д.А., Павловой Н.Г., Чхартишвили А.Г., Шананина А.А. и других. Аналогичный подход используется при исследовании и иных систем. Здесь можно отметить работы Галяева А.А., Новикова Д.А., Орлова Ю.Н., Самуйлова К.Е., Самсонюк О.Н., Уткина А.В., Хлебникова М.В. и других.

Математический подход к исследованию экономических систем широко применяется многими учеными, начиная с Л. Вальраса [11]. Он рассмотрел некоторый эмпирический процесс «нащупывания» равновесных цен как итерационного процесса, в ходе которого на каждом цикле между участниками рынка происходит обмен товаров, после которого определяются новые цены с целью сократить разницу между предложением и спросом (здесь спрос – это количество проданного товара).

Непосредственные вычисления проводились для различных линейных экономических моделей, в том числе. для модели чистого обмена Эрроу–Дебре, модели олигополии Курно и некоторых других. Работы по анализу положения равновесия в нелинейных моделях в то же время немногочисленны.

Таким образом, существует потребность в разработке математических методов для исследования систем, динамика которых определяется совокупностью нелинейных уравнений, в частности, разностью отображений метрических пространств.

Цель исследования

Целью диссертационной работы является развитие методов исследования равновесных состояний, удовлетворяющих заданным ограничениям, в системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств, с применением полученных результатов для анализа моделей типа Аллена.

Для достижения поставленной цели были определены следующие **задачи**.

- 1) Развить методы исследования равновесных состояний в системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств, с помощью результатов теории точек совпадения и накрывающих отображений.
- 2) Исследовать различные модели из класса моделей типа Аллена с внеш-

ним воздействием (модель типа Аллена–Эрроу–Дебре, открытая модель типа Аллена с постоянными и непостоянными эластичностями) методами теории накрывающих отображений и точек совпадения, а также функционального анализа, на предмет положения равновесия и его свойств.

- 3) Исследовать различные модели из класса моделей типа Аллена без внешнего воздействия (модель типа Аллена–Эрроу–Дебре, закрытая модель типа Аллена) методами линейной алгебры, функционального анализа, а также теории накрывающих отображений и точек совпадения, на предмет положения равновесия и его свойств.

Объект исследования – системы, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств.

Предмет исследования – равновесные состояния динамических систем, а также их свойства, такие как единственность и устойчивость к малым возмущениям параметров системы.

Методы исследования

В работе используются методы линейной алгебры, математического анализа, функционального анализа, численных методов, а также теории накрывающих отображений и точек совпадения.

Научная новизна исследования

Научная новизна исследования состоит в разработке метода нахождения положений равновесия в динамических системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств. С помощью теоремы о точках совпадения была доказана сходимость алгоритма поиска положения равновесия. Полученные результаты успешно применены в исследовании различных динамических моделей типа Аллена, в рамках которого получены условия существования положения равновесия, исследованы его свойства.

Теоретическая значимость

Методы, разработанные в настоящей диссертации, не требуют невырожденности матрицы Якоби и гладкость отображений, определяющих динамику рассматриваемой системы, что является основой для использования многих общеизвестных методов. Сходимость предложенного алгоритма поиска точки совпадения доказана без априорных предположений гладкости рассматриваемых отображений.

Практическая значимость

Результаты настоящей диссертационной работы могут быть использованы для исследования различных динамических моделей, в том числе построенных по реальным статистическим данным. Разработанные методы могут быть использованы для формализации и решения задач управления, а также поддержки и принятия решений в биологии, физике, экологии и других научных областях.

Апробация результатов

Достоверность полученных утверждений подтверждена строгими математическими рассуждениями и проведением численных экспериментов.

Результаты работы были доложены на различных российских и международных конференциях: Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем», Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами», Международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». Результаты диссертации обсуждались на семинаре «Оптимизация и нелинейный анализ» под руководством Арутюнова А.В., Жуковского С.Е. и Павловой Н.Г. в ИПУ РАН, семинаре «Теория автоматического управления» под руководством Хлебникова М.В. и Резкова И.Г., а также семинара кафедры высшей математики под руководством Иванова Г.Е. в МФТИ.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

В первой главе описан исследуемый класс моделей и формализована поставленная задача. Рассматривается класс моделей, динамика которых описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в виде разности двух отображений метрических пространств. Задача состоит в развитии методов поиска положения равновесия в рассматриваемой модели, удовлетворяющих заданным ограничениям в виде неравенств. Описаны несколько экономических моделей, на примере которых продемонстрировано приложение полученных результатов.

Вторая глава посвящена методам исследования рассматриваемого класса моделей. В первом разделе представлены необходимые определения и известные результаты теории накрывающих отображений и точек совпадения, с помощью которых решается поставленная задача. Во втором разделе предложен метод поиска положения равновесия для моделей из рассматриваемого класса, которые удовлетворяют условиям существования точки совпадения двух отображений. В третьем разделе описаны вспомогательные результаты из функционального анализа, а в четвертом разделе – результаты линейной алгебры, которыми можно воспользоваться при исследовании более простых моделей из рассматриваемого класса.

В третьей главе наглядно продемонстрировано применение разработанных методов в исследовании моделей с внешним воздействием, описанных в первой главе. В первом разделе исследована открытая модель Аллена с постоянными эластичностями, для которой получены условия существования положения равновесия и частичного равновесия, а также исследован вопрос об устойчивости и единственности положения равновесия. Проиллюстрировано, как положение равновесия зависит от входных параметров модели. Во втором разделе исследована открытая модель Аллена с непостоянными эластичностями. Для нее получены условия существования положения равновесия и продемонстрировано, как положение равновесия зависит от входных параметров модели.

В четвертой главе исследован класс моделей без внешнего воздействия. В первом разделе исследована модель Аллена–Эрроу–Дебре, для которой получены достаточные условия существования положения равновесия и проиллюстрировано, как положение равновесия зависит от входных параметров модели. Во втором разделе исследована закрытая модель Аллена, для которой получены необходимые условия и достаточные условия существования положения равновесия, а также полностью исследован вопрос о единственности положения равновесия. Так же, как и для предыдущих моделей, показано, как положение равновесия зависит от входных параметров.

В заключении приведены соображения касательно полученных результатов и оценка дальнейших перспектив развития данного исследования.

Полный объем диссертации составляет 120 страниц с 139 иллюстрациями и 1 таблицей. Список литературы содержит 50 наименований.

Положения, выносимые на защиту и соответствие пунктам паспорта специальности 2.3.1:

- 1) Метод нахождения положения равновесия сложных динамических систем, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств (пункт 1: Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта).
- 2) Условия существования положения равновесия для двух моделей типа Аллена с внешним воздействием (открытых моделей типа Аллена с постоянными и непостоянными эластичностями) (пункт 4: Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта).
- 3) Условия существования положения равновесия и его свойства для двух моделей типа Аллена без внешнего воздействия (модели Аллена–Эрроу–Дебре и закрытой модели типа Аллена) (пункт 4: Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта).

Личный вклад. Все основные результаты и расчеты получены лично автором.

Связь с планами научных исследований

Работа выполнялась при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект №20-01-00610) и грантов Российского научного фонда (проекты №20-11-20131, №22-11-00042).

Публикации. Основные положения и выводы диссертационного исследования опубликованы в 8 научных работах, из числа которых одна статья в рецензируемом научном издании по специальности 2.3.1 (физ.-мат.), относящемся к категории К1 Перечня ВАК [21], две работы в журналах, индексируемых в международных базах данных и приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1 [45, 46], 4 публикации – в сборниках трудов международных и всероссийских конференций [47, 48, 20, 19], одна статья в прочих изданиях [18].

1. Описание классов моделей \mathbb{M}_o , \mathbb{M}_c и постановка задачи

В диссертационной работе рассматривается класс моделей, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств. Такие модели часто встречаются в различных областях науки. Например, в биологии широко известна модель Лотки–Вольтерры, описывающая поведение двух групп биологических особей, модели распространения инфекционных заболеваний и эпидемий. В экологии исследуются модели очистки сточных вод и прогнозирования аварийных ситуаций на нефтеперерабатывающих предприятиях. Подобные модели могут возникать при моделировании транспортных макросистем, а также различного рода маятников и иных механических систем. Подобные модели можно встретить и в экономике, на примере нескольких из которых будет продемонстрированы результаты диссертационного исследования.

1.1. Описание модели

Перейдем к формальному описанию модели. Рассмотрены два класса систем, динамика которых определяется нормальной автономной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = F_i(x) - G_i(x) + q_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.1)$$

$$\dot{x}_i = F_i(x) - G_i(x), \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.2)$$

Здесь $m \leq n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m$; $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$, $G(x) = (G_1(x), \dots, G_m(x))$.

Определение 1.1. Будем говорить, что модель σ_o принадлежит классу моделей с внешним воздействием \mathbb{M}_o (модель σ_c принадлежит классу моделей без внешнего воздействия \mathbb{M}_c), если ее динамика определяется системой вида (1.1) ((1.2)).

Диссертационное исследование посвящено исследованию систем (1.1), (1.2) на предмет положения равновесия, удовлетворяющего определенным ограничениям, т.е. решения систем следующего вида:

$$F_i(x) - G_i(x) + q_i = 0, \quad x \in M, \quad i = \overline{1, m}; \quad (1.3)$$

$$F_i(x) - G_i(x) = 0, \quad x \in M, \quad i = \overline{1, m}; \quad (1.4)$$

где $M \subset \mathbb{R}^n$ – заданное множество.

Определение 1.2. Если $m = n$, то решения систем (1.3), (1.4) называются положением равновесия в моделях $\sigma_o \in \mathbb{M}_o$, $\sigma_c \in \mathbb{M}_c$, соответственно. Если $m < n$, то решения систем (1.3), (1.4) называются положениями частичного равновесия в моделях σ_o , σ_c , соответственно.

Вектор q зачастую выполняет роль внешнего постоянного воздействия на моделируемую систему. В модели Лотки–Вольтерры в качестве такого воздействия может выступать охотничий и рыболовный промысел или естественное вымирание видов. В модели очистки сточных вод в качестве постоянного воздействия можно взять допустимое увеличение отходов либо темп природной очистки водоема. В задачах физики вектор q может выступать постоянно действующей внешней силой, такой как сила притяжения или постоянный воздушный поток.

Интерес для исследования представляют как модели из класса \mathbb{M}_o , так и модели из подкласса \mathbb{M}_c . Отсутствие вектора постоянного внешнего воздействия позволяет использовать общеизвестные результаты для получения условий существования положений равновесия и частичного равновесия, а также исследования их свойств, таких как, например, единственность и устойчивость по отношению к малому изменению входных параметров.

В диссертации показано, что наличие дополнительного слагаемого q может сильно повлиять на структуру модели и, как следствие, сделать применение тех или иных общеизвестных методов нахождения равновесия невозможным.

1.2. Примеры моделей из классов \mathbb{M}_o и \mathbb{M}_c

Теперь перейдем к описанию экономических моделей, на которых будет рассмотрено приложение разработанных методов.

Введем обозначение $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = \overline{1, n}\}$.

1.2.1. Модель типа Аллена–Эрроу–Дебре

Данная модель является обобщением известной модели Эрроу–Дебре [43] и была описана в [2]. Пусть заданы числа $m \in \mathbb{N}, m \leq n$; $I \in \mathbb{R}_+$, векторы $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, a_j \geq 0, j = \overline{1, n}$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (0; 1)^n$, $C = (C_1, \dots, C_m) \in \mathbb{R}_+^m$ и такая матрица \mathfrak{B} размерности $m \times n$ с компонентами $\beta_{ij} > 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, что:

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} < 1, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.5)$$

Пусть заданы векторы $c_1 = (c_{11}, \dots, c_{1n}), c_2 = (c_{21}, \dots, c_{2n}) \in \mathbb{R}_+^n$ такие, что $c_{1i} < c_{2i}, i = \overline{1, n}$.

Предположим, что

$$\langle c_2, a \rangle < I. \quad (1.6)$$

Функция $S_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ в данной модели определяется формулой:

$$S_i(p) = K_i \prod_{j=1}^n p_j^{-\beta_{ij}} - L_i p_i^{-1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.7)$$

где

$$K_i = \frac{C_i b_i^{\sum_{j=1}^n \beta_{ij}} \prod_{j=1}^n \beta_{ij}^{\beta_{ij}}}{\left(\sum_{k=1}^n \beta_{ki} \right)^{-\sum_{l=1}^n \beta_{kl}}}, \quad L_i = \sum_{s=1}^m \frac{b_s \beta_{si}}{\sum_{j=1}^n \beta_{sj}}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.8)$$

Функция $D_i : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ определяется формулой:

$$D_i(p_1, \dots, p_n) = a_i + \frac{\alpha_i (I - \langle p, a \rangle)}{p_i \sum_{k=1}^n \alpha_k}, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.9)$$

Данная модель возникла при описании макроэкономики региона, в котором присутствуют две группы участников – производители и потребители. Производители создают товары, тратя на i -й товар объем финансовых средств b_i . C_i являются коэффициентами нейтрального технического прогресса, а β_{ij} высту-

пают в роли эластичностей по ресурсам. Покупатели имеют бюджет I , который они тратят на приобретение необходимого количества i -го товара в объеме a_i , а затем остаток средств тратят на приобретение товаров в соответствии с ценностью i -го товара α_i . Цена на i -й товар обозначена через p_i , которая должна удовлетворять ограничениям $c_{1i} < p_i < c_{2i}$, $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим систему:

$$\dot{p}_i = D_i(p) - S_i(p), \quad i = \overline{1, m}; \quad (1.10)$$

где D определено формулой (1.9), а S – формулой (1.7).

Определение 1.3. Моделью типа Аллена–Эрроу–Дебре назовем следующий набор параметров $\sigma_{ad} = (c_1, c_2, I, a, \alpha, C, \mathfrak{B})$, удовлетворяющий (1.5), (1.6) и определяющий систему (1.10). Множество всех таких моделей обозначим через Σ_{ad} .

Легко видеть, что эта модель принадлежит подклассу \mathbb{M}_c .

Параметры модели имеют следующий экономический смысл: векторы c_1, c_2 задают естественные ограничения на цены товаров, I – бюджетные ограничения производителей товаров, вектор a описывает минимальные количества товаров, которые не являются предметом выбора и приобретаются в любом случае, вектор α описывает относительную «ценность» каждого товара, на которую ориентируется потребитель после того, как приобрел товары в соответствии с вектором a , вектор C описывает коэффициенты нейтрального технического прогресса, а матрица \mathfrak{B} определяет эластичности предложения по ресурсам.

1.2.2. Модели типа Аллена с постоянными эластичностями

Рассмотрим отображения спроса

$$D : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \quad D(p) = (D_1(p), \dots, D_n(p)),$$

и предложения

$$S : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \quad S(p) = (S_1(p), \dots, S_n(p)).$$

Эти отображения в будущем будут иметь специальный вид.

Предположим, что нам известны векторы $p^* \in P$, $D^* \in \mathbb{R}_+^n$, $D^* = (D_1^*, \dots, D_n^*)$ и $S^* \in \mathbb{R}_+^n$, $S^* = (S_1^*, \dots, S_n^*)$, которые связаны соотношением:

$$D^* = D(p^*), \quad (1.11)$$

$$S^* = S(p^*). \quad (1.12)$$

Пусть также известна матрица $\mathcal{E} = (E_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, где элементы $E_{ij} \in \mathbb{R}$ удовлетворяют равенству

$$E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) \frac{p_j}{D_i(p)}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.13)$$

Аналогично определим матрицу $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ с элементами $\tilde{E}_{ij} \in \mathbb{R}$, которые удовлетворяют равенству

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p) \frac{p_j}{S_i(p)}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.14)$$

Из (1.13), (1.14) мы получаем системы уравнений в частных производных относительно неизвестных функций D_i и S_i

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \frac{E_{ij} D_i(p)}{p_j}, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p) = \frac{\tilde{E}_{ij} S_i(p)}{p_j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.16)$$

Решая задачи (1.11), (1.15) и (1.12), (1.16), мы можем получить явный вид отображений спроса D и предложения S .

Теорема 1.1 ([47]). *Набор параметров $(p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}})$ однозначно определяют отображения*

$$D : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \quad S : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n. \quad (1.17)$$

по формулам:

$$D_i(p_1, \dots, p_n) = D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.18)$$

$$S_i(p_1, \dots, p_n) = S_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.19)$$

Доказательство. Мы приведем доказательство только для отображения D . Доказательство для отображения S проводится аналогично, если мы заменим D_i на S_i , $i = \overline{1, n}$; E_{ij} на \tilde{E}_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$; а выражения (1.11), (1.15) на (1.12), (1.16) соответственно.

Пусть задана модель σ_o . Докажем, что (1.18) является решением задачи (1.11), (1.15). Для этого сначала вычислим

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) = \frac{D_i^* E_{ij}}{p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставим (1.18) в (1.11):

$$D_i(p^*) = D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} (p_j^*)^{E_{ij}} = D_i^*, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теперь подставим (1.18) в (1.15) и получим

$$E_{ik} = \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) p_k \left(D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \right)^{-1} = \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) \frac{p_k}{D_i(p)}.$$

Таким образом, (1.18) является решением (1.11), (1.15).

Теперь докажем, что решение задачи (1.11), (1.15) единственно. Для этого рассмотрим следующее выражение

$$\begin{aligned} d \left(D_i(p) \prod_{j=1}^n p_j^{-E_{ij}} \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) \prod_{j=1}^n p_j^{-E_{ij}} - \frac{D_i(p) E_{ik}}{p_k} \prod_{j=1}^n p_j^{-E_{ij}} \right) dp_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) \prod_{j=1}^n p_j^{-E_{ij}} - \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) \prod_{j=1}^n p_j^{-E_{ij}} \right) dp_k = 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Здесь первое равенство выполнено по определению дифференциала сложной функции, второе равенство – по определению эластичности спроса по цене, а последнее очевидно.

Система (1.20) эквивалентна системе (1.15). Также заметим, что система

(1.20) эквивалентна следующей системе:

$$D_i(p) \prod_{j=1}^n p_j^{-E_{ij}} = C_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.21)$$

Эквивалентность последних двух систем вытекает из следствия теоремы о среднем [17]. Так как система (1.21) должна удовлетворять условию (1.11), мы получаем, что

$$D_i(p^*) \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} = D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} = C_i.$$

Поскольку последнее выражение однозначно определяет константы C_i , в силу эквивалентности всех приведенных выше систем мы получаем, что решение задачи (1.11), (1.15) единственно. \square

Пусть наконец известен вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ такой, что $a_i \geq 0$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим систему:

$$\dot{p} = D(p) - S(p) + a, \quad (1.22)$$

где D определено формулой (1.18), а S – формулой (1.19).

Определение 1.4. Открытой моделью типа Аллена с постоянными эластичностями назовем набор параметров

$$\sigma_o = (c_1, c_2, a, p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}),$$

определяющий систему (1.22). Множество таких моделей обозначим через Σ_o .

Заметим, что данная модель принадлежит классу \mathbb{M}_o .

Параметры моделей из класса Σ_o имеют экономический смысл. Под открытостью здесь подразумевается наличие вектор импорта a , векторы c_1, c_2 задают ограничения на цены, векторы S^*, D^* – это известные значения спроса и предложения при известных ценах p^* , а матрицы $\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}$ – матрицы эластичностей спроса и предложения по цене соответственно.

В диссертации также рассматривается модель из класса \mathbb{M}_c , в которой отсутствует вектор a . В ней рассматривается система

$$\dot{p} = D(p) - S(p), \quad (1.23)$$

где D определено формулой (1.18), а S – формулой (1.19).

Определение 1.5. Замкнутой моделью типа Аллена с постоянными эластичностями называется набор параметров

$$\sigma_c = (c_1, c_2, p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}),$$

определяющий систему (1.23). Множество таких моделей обозначим через Σ_c .

Легко видеть, что данная модель принадлежит классу \mathbb{M}_c .

1.2.3. Модель типа Аллена с непостоянными эластичностями

В предыдущих моделях матрицы \mathcal{E} и $\tilde{\mathcal{E}}$ состояли из действительных чисел. Теперь опишем модели, в которых эти матрицы в качестве элементов содержат функции от p .

Пусть $\lambda_{ij}, \tilde{\lambda}_{ij}, \chi_{ij}, \tilde{\chi}_{ij} \in \mathbb{R}$ и

$$E_{ij}(p) = \lambda_{ij} p_j^{\chi_{ij}}, \quad \tilde{E}_{ij}(p) = \tilde{\lambda}_{ij} p_j^{\tilde{\chi}_{ij}}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.24)$$

Обозначим $\mathcal{E}(p) = (E_{ij}(p))_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{E}_{ij}(p))_{i,j=\overline{1,n}}$. Для функций $E_{ij}(p)$ и $\tilde{E}_{ij}(p)$ предполагаются выполненными следующие соотношения:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{E_{ij}(p) D_i(p)}{p_j}, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_j} = \frac{\tilde{E}_{ij}(p) S_i(p)}{p_j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.26)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1.2 ([48]). *Набор $(p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}(p), \tilde{\mathcal{E}}(p))$ однозначно определяет отображения спроса и предложения по формулам*

$$D_i(p) = D_i^* \prod_{j=1}^n \exp \left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} (p_j^{\chi_{ij}} - (p_j^*)^{\chi_{ij}}) \right), \quad i = \overline{1, n}; \quad (1.27)$$

$$S_i(p) = S_i^* \prod_{j=1}^n \exp \left(\frac{\tilde{\lambda}_{ij}}{\tilde{\chi}_{ij}} (p_j^{\tilde{\chi}_{ij}} - (p_j^*)^{\tilde{\chi}_{ij}}) \right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.28)$$

Отображения D и S , определенные формулами (1.27) и (1.28) являются решениями задач (1.11), (1.25) и (1.12), (1.26) соответственно.

Доказательство. Доказательство проведем только для отображения D , поскольку для отображения S оно будет аналогично. Покажем, что (1.27) – решение (1.25), (1.11). Для этого вычислим:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) = \frac{\lambda_{ik}}{p_k} D_i^* \prod_{j=1}^n \exp \left(\frac{\lambda_{ij} p_j^{\chi_{ij}}}{\chi_{ij}} (p_j^{\chi_{ij}} - p_j^{*\chi_{ij}}) \right) = \lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}} \frac{D_i(p)}{p_k}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Более того,

$$D_i(p^*) = D_i^* \prod_{j=1}^n \exp \left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} (p_j^{*\chi_{ij}} - p_j^{*\chi_{ij}}) \right) = D_i^*, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теперь докажем, что решение задачи (1.25), (1.11) единственно в модели σ_f . Для этого рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} & d \left(D_i(p) \prod_{j=1}^n \exp \left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) \prod_{j=1}^n \exp \left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) - D_i(p) \frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k} \prod_{j=1}^n \exp \left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k} D_i(p) - D_i(p) \frac{\lambda_{ik} p_k^{\chi_{ik}}}{p_k} \right) \prod_{j=1}^n \exp \left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна следующей системе:

$$D_i(p) \prod_{j=1}^n \exp \left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{\chi_{ij}} \right) = C_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Эта система должна удовлетворять условию (1.11), т.е.:

$$D_i^* \prod_{j=1}^n \exp \left(-\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} p_j^{*\chi_{ij}} \right) = C_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Поскольку выражение C_i в этом равенстве единственно, все системы выше в силу эквивалентности имеют единственное решение. \square

Пусть наконец известен вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ такой, что $a_i \geq 0$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим систему:

$$\dot{p} = D(p) - S(p) + a, \quad (1.29)$$

где D определено формулой (1.27), а S – формулой (1.28).

Определение 1.6. Открытой моделью типа Аллена с непостоянными эластичностями назовем набор $\sigma_f = (a, c_1, c_2, p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}(p), \tilde{\mathcal{E}}(p))$, где элементы $E_{ij}(p)$ и $\tilde{E}_{ij}(p)$ матриц $\mathcal{E}(p)$ и $\tilde{\mathcal{E}}(p)$ соответственно определены формулами (1.24), а сам набор определяет систему (1.29). Множество всех таких моделей обозначим через Σ_f .

Легко видеть, что данная модель принадлежит классу \mathbb{M}_o .

Замечание 1.1. Заметим, что $\Sigma_o \not\subset \Sigma_f$. Действительно, если в модели $\sigma_f \in \Sigma_f$ элементы матриц \mathcal{E} и $\tilde{\mathcal{E}}$ являются постоянными величинами, то $\chi_{ij} = 0 \ \forall i, j = \overline{1, n}$. Однако в таком случае формулы (1.27), (1.28) не имеют смысла.

Выводы главы 1

В данной главе были описаны модели, динамика которой определяется разностью отображений метрических пространств. В модели Аллена–Эрроу–Дебре правая часть системы получена как решение задач условной максимизации, в моделях типа Аллена с постоянными и непостоянными эластичностями – как решение систем дифференциальных уравнений с начальным условием. Доказаны теоремы, которые гарантируют существование и единственность отображений, входящих в правую часть. Рассматриваемая задача имеет довольно общий вид, что создает широкий круг приложений для методов, разработанных в следующей главе.

Результаты главы опубликованы в работах [20, 47, 48].

2. Методы исследования положения равновесия в классах моделей \mathbb{M}_o и \mathbb{M}_c

Как было отмечено в предыдущей главе, положение равновесия в модели \mathbb{M}_o является решением уравнения:

$$F(x) - G(x) + q = 0, \quad x \in M \subset X. \quad (2.1)$$

Здесь X, Y – метрические пространства, $x \in X$, $q \in Y$, $F, G : X \rightarrow Y$.

В зависимости от вида отображений и метрических пространств для исследования вопроса о поиске решения уравнения (2.1) могут применяться некоторые общеизвестные результаты. Так, если $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, а F, G – линейные операторы, то уравнение (2.1) представляет собой систему линейных уравнений и неравенств. Если же $Y = X$ – произвольное метрическое пространство, а $G \equiv \text{Id}$ – тождественный оператор, то задача сводится к нахождению неподвижной точки отображения F . В более общем случае можно воспользоваться результатами теории накрывающих отображений и точек совпадения, которые представлены далее.

2.1. Накрывающие отображения и точки совпадения

Сначала приведем определение точки совпадения двух отображений. Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Пусть заданы отображения $\Phi, \Psi : X \rightarrow Y$.

Определение 2.1 ([5]). Точка $\xi \in X$ называется точкой совпадения отображений $\Psi, \Phi : X \rightarrow Y$, если

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi).$$

Существование точки совпадения тесно связано с понятием накрывающего отображения. Сформулируем соответствующее определение.

Через $B_X(x, r)$ обозначим шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$, аналогично обозначим $B_Y(y, r)$.

Определение 2.2 ([5]). Пусть $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r), \quad \forall x \in X, \quad r > 0.$$

Очевидно, что если отображение Ψ является α -накрывающим, то оно является α' -накрывающим при любом $0 < \alpha' < \alpha$. Точную верхнюю грань всех $\alpha > 0$ таких, что отображение Ψ является α -накрывающим, обозначим через $\text{cov}(\Psi)$.

Нас будет интересовать накрывание отображений не на всем пространстве X , а на его подмножестве. Приведем соответствующее определение. Пусть $M \subseteq X$ – подмножество с непустой внутренностью.

Определение 2.3 ([44]). Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется α -накрывающим на множестве $M \subseteq X$, если для любых $x \in M$, $r > 0$ таких, что $B_X(x, r) \subseteq M$, выполнено включение

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha > 0$, что отображение Ψ является α -накрывающим на множестве M , обозначим через $\text{cov}(\Psi|M)$.

В дальнейшем нам также потребуется определение накрывание отображения в точке.

Определение 2.4 ([44]). Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется α -накрывающим в точке $x \in \text{int } M$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что $B_X(x, \delta) \subset M$ и

$$\Psi(B_X(x, \delta)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha \delta).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha > 0$, что отображение Ψ является α -накрывающим в точке $x \in X$, обозначим через $\text{cov}(\Psi|x)$.

Приведем результаты из теории накрывающих отображений и точек совпадения, позволяющие оценить $\text{cov}(\Psi)$, $\text{cov}(\Psi|M)$ и $\text{cov}(\Psi|x)$.

В [44] было также показано, что если X, Y – банаховы пространства, а $\Psi : X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в каждой точке открытого множества $M \subset X$

и $\Psi'(x)$ является α -накрывающим в каждой точке $x \in M$ с общей константой $\alpha > 0$, то отображение Ψ является α' -накрывающим на M с любой константой $\alpha' < \alpha$, т.е.

$$\text{cov}(\Psi|M) = \inf_{x \in \text{int } M} \text{cov}(\Psi|x). \quad (2.2)$$

В случае, когда отображение Ψ является линейным сюръективным оператором из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k , справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1 ([6]). *Пусть $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ – сюръективный линейный оператор. Тогда*

$$\text{cov}(\Psi) \geq \frac{1}{\|\Psi^*(\Psi\Psi^*)^{-1}\|}, \quad (2.3)$$

где Ψ^* – оператор, сопряженный к Ψ .

Здесь и далее норма произвольного линейного оператора Q , действующего из нормированного пространства $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ в нормированное пространство $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ определена формулой:

$$\|Q\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Qx\|_{\mathcal{Y}}.$$

В прошлой главе был упомянут вопрос об устойчивости положения равновесия в моделях класса \mathbb{M}_o . Следующая теорема гарантирует устойчивость этого решения как точки совпадения двух отображений.

Теорема 2.1 ([2]). *Предположим, что пространство X полно, заданы точка $x_0 \in X$ и числа $\alpha > 0, \beta \geq 0, R > 0$, причем $\alpha > \beta$, а точка x_0 является точкой совпадения отображений Ψ и Φ , т.е. $\Psi(x_0) = \Phi(x_0)$. Пусть также имеет место:*

- 1) *для любого натурального n отображение Ψ_n является α -накрывающим на $B_X(x_0, R)$ и замкнутым;*
- 2) *для любого натурального n отображение Φ_n удовлетворяет условию Липшица с константой β на множестве $B_X(x_0, R)$;*
- 3) *$\rho_Y(\Psi_n(x_0), \Psi(x_0)) \rightarrow 0, \rho_Y(\Phi_n(x_0), \Phi(x_0)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.*

Тогда существует номер $\bar{n} > 0$ и последовательность $\{x_n\} \subset X$ такие,

что $\Psi_n(x_n) = \Phi_n(x_n) \quad \forall n > \bar{n}$, $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$ и, более того,

$$\rho_X(x_n, x_0) \leq \frac{\rho_Y(\Psi_n(x_0), \Psi(x_0)) + \rho_Y(\Psi_n(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta} \quad \forall n > \bar{n}.$$

Сформулируем условия, гарантирующие существование точки совпадения для α -накрывающего отображения и отображения, удовлетворяющего условию Липшица. Соответствующая теорема доказана в [44].

Теорема 2.2 ([44]). Пусть пространство X полное и заданы $\alpha > 0$, $x_0 \in X$ и $R > 0$. Пусть также $\Psi : X \rightarrow Y$ является α -накрывающим на $B_X(x, R)$ и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного $\beta < \alpha$ и любого отображения $\Phi : B_X(x_0, R) \rightarrow Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq (\alpha - \beta)R,$$

для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi \in X$, т.е. $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать отображения Ψ и Φ , действующие из $B_X(x_0, r)$, где $r > 0$. Для того, чтобы воспользоваться теоремами 2.1, 2.2, и 2.3, нам необходимо, чтобы эти отображения действовали в одно и то же метрическое пространство. Для этого была доказана следующая лемма.

Лемма 2.2 ([21]). Пусть выполнены условия Теоремы 2.2 и существует число $R > 0$ такое, что

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq (\alpha - \beta)R. \quad (2.4)$$

Тогда $\Phi(B_X(x_0, R)) \subseteq \Psi(B_X(x_0, R))$.

Доказательство. Пусть $x \in B(x_0, R)$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Phi(x), \Psi(x_0)) &\leq \rho_Y(\Phi(x), \Phi(x_0)) + \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0)) \leq \\ &\leq \beta \rho_X(x, x_0) + (\alpha - \beta)R \leq \beta R + (\alpha - \beta)R = \alpha R \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x) \in \Psi(B(x_0, R))$, и отсюда в силу произвольности выбора точки x имеем $\Phi(B_X(x_0, R)) \subseteq \Psi(B_X(x_0, R))$. \square

Наряду с условиями существования положения равновесия существует идея построения последовательности [7], которая сходится к точке совпадения двух отображений и послужит для создания метода нахождения положения равновесия систем (1.1) и (1.2), а также его реализации.

Процедура устроена следующим образом. Зафиксируем $x_0 \in X$ и построим по индукции x_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ такие, что

$$\rho_X(x_{i+1}, x_i) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)), \quad (2.5)$$

$$\rho_Y(\Psi(x_{i+1}), \Phi(x_i)) \leq \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)), \quad (2.6)$$

где

$$\delta > 0 : \beta + \alpha\delta < \alpha. \quad (2.7)$$

Существование данной последовательности вытекает из того, что отображение Ψ является α -накрывающим. В [7] была доказана сходимость этой процедуры к точке совпадения.

Теорема 2.3 ([7]). *Пусть пространство X полное, отображение Ψ является α -накрывающим и его график $\text{grh}(\Psi) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = \Psi(x)\}$ замкнут, а отображение Φ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$.*

Тогда для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $\{x_i\}$, которая удовлетворяет условиям (2.5), (2.6) при всех i , и любая такая последовательность сходится к некоторой точке совпадения $\xi = \xi(x_0)$, для которой справедливо неравенство

$$\rho_Y(\xi, x_0) \leq (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

2.2. Метод нахождения положения равновесия динамических систем

Предложенная процедура и теорема 2.3. описывают условия существования последовательности, сходящейся к точке совпадения, но не предъявляют саму последовательность. На их основе предлагается следующий метод поиска положений равновесия в динамических системах, реализующий построение сходящейся такой последовательности.

Для этого динамика системы представляется в виде (2.1), где отображение

$F+q$ является накрывающим, а G удовлетворяет условию Липшица. Далее применяется алгоритм поиска точки совпадения для отображений $\Psi(x) = F(x) + q$ и $\Phi(x) = G(x)$.

Напомним важное определение из функционального анализа, которое требуется нам для формулировки метода нахождения.

Определение 2.5 ([22]). Множество $M \subset X$ называется вполне ограниченным, если у него существует конечная ε -сеть, то есть $\exists \{x_1, \dots, x_n\} \in X : \forall x \in M \exists i \in \overline{1, n} : \rho_X(x, x_i) \leq \varepsilon$.

Используя неравенства (2.5), (2.6), мы можем составить следующий алгоритм при условии, что пространство X конечномерно, а множество M вполне ограничено. Далее в этом разделе мы предполагаем выполненными условия теоремы 2.2.

Алгоритм 1

Шаг 0. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения, $x_0 \in M$ – начальное приближение, $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса, положить номер итерации $i = 0$.

Шаг 1. Проверить выполнение неравенства $\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) < \varepsilon$. Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить $\sigma_i = \delta/2 \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))$ и построить σ_i -сеть Z на множестве $B_X(x_i, \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)))$ (в силу того, что $B_X(x_i, \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))) \subset M$ и M – вполне ограничено, эта σ_i -сеть конечна).

Шаг 3. Поочередно брать точки $\tilde{x} \in Z \cap B_X(x_i, \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)))$ и проверять выполнение неравенства:

$$\rho_Y(\Psi(\tilde{x}), \Phi(x_i)) \leq \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)).$$

Если подходящая под условие точка найдена, то перейти к шагу 4. Если нет, то уменьшить σ_i в два раза, построить новую сеть и повторить перебор.

Шаг 4. Положить $x_{i+1} = \tilde{x}$, увеличить i на единицу и перейти к шагу 2.

Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 2.4 (О сходимости Алгоритма 1, [21]). Пусть пространство X полно, $M \subset X$ – вполне ограниченное множество и заданы $x_0 \in X$, $R > 0$ такие, что $B_X(x_0, R)$ вполне ограничено в X . Далее, пусть отображение Ψ является α -

накрывающим на $B_X(x_0, R)$ и замкнутым, а отображение Φ удовлетворяет условию Липшица на $B_X(x_0, R)$ с константой $\beta < \alpha$.

Тогда для любого $\delta > 0$ такого, что $\beta + \alpha\delta < \alpha$,

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) < (\alpha - (\beta + \alpha\delta))R,$$

Алгоритм 1 сходится за конечное число шагов, причем

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)). \quad (2.8)$$

Доказательство. Доказательство проводится путем индуктивного построения последовательности, удовлетворяющей (2.5), (2.6). Докажем сначала, что существует x_1 , такой, что $\Psi(x_1) = \Phi(x_0)$. Положим

$$r_0 = \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) < \alpha^{-1} (\alpha - (\beta + \alpha\delta))R \leq R.$$

Следовательно, $B_X(x_0, r_0) \subseteq B_X(x_0, R)$. Далее, в силу определения накрывающего отображения на множестве:

$$\Psi(B_X(x_0, r_0)) \supseteq B_Y(\Psi(x_0), \alpha r_0).$$

Отсюда мы получаем, что $\Phi(x_0) \in \Psi(B_X(x_0, r_0))$, т.к. $\alpha r_0 = \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))$. Следовательно, существует $x_1 \in B_X(x_0, r_0)$ такое, что

$$\Psi(x_1) = \Phi(x_0).$$

Пусть теперь $x_1 \in B_X(x_0, R)$ такой, что выполнено (2.5), (2.6) при $i = 0$. Покажем, что $x_1 \in B_X(x_0, r_0)$. Положим

$$r_1 = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_0.$$

Покажем, что $B_X(x_1, r_1) \subset B_X(x_0, R)$. В самом деле, для любого $x \in B_X(x_1, r_1)$

имеем

$$\begin{aligned}
\rho_X(x_0, x) &\leq \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x) \leq \\
&\leq \delta \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + r_1 = \delta r_0 + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_0 \leq \\
&\leq (\alpha^{-1}(\alpha - (\beta + \alpha\delta))R) \left(1 + \delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) = R \left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \leq R.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\delta < 1$ в силу условия $\beta + \alpha\delta < \alpha$. Теперь покажем, что $\Phi(x_1) \in \Psi(B_X(x_1, r_1))$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\rho_Y(\Phi(x_1), \Psi(x_1)) &\leq \rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_0)) + \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_1)) \leq \\
&\leq \beta \rho_X(x_1, x_0) + \delta \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha} + \delta \right) \alpha r_0 = \alpha r_1.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x_1) \in B_Y(\Psi(x_1), \alpha r_1)$. Поскольку Ψ является α -накрывающим на $B_X(x_0, R)$, имеем:

$$\Psi(B_X(x_1, r_1)) \supseteq B_Y(\Psi(x_1), \alpha r_1).$$

Отсюда следует, что $\Phi(x_1) \in \Psi(B_X(x_1, r_1))$. Следовательно, существует $x_2 \in B_X(x_1, r_1)$ такой, что $\Psi(x_2) = \Phi(x_1)$.

Далее, возьмем $x_2 \in B_X(x_0, R)$, которое удовлетворяет (2.5), (2.6) при $i = 2$. Положим

$$r_2 = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_1.$$

Покажем, что $B_X(x_2, r_2) \subseteq B_X(x_0, R)$. В самом деле, если $x \in B_X(x_2, r_2)$, то

$$\begin{aligned}
\rho_X(x_0, x) &\leq \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x_2) + \rho_X(x_2, x) \leq \\
&\alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) + r_2 = \\
&= r_0 + r_1 + r_2 = \left(1 + \delta + \frac{\beta}{\alpha} + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) r_0 \leq \left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right)^{-1} r_0 \leq R.
\end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\Phi(x_2) \in \Psi(B_X(x_2, r_2))$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Phi(x_2), \Psi(x_2)) &\leq \rho_Y(\Phi(x_2), \Phi(x_1)) + \rho_Y(\Phi(x_1), \Psi(x_2)) \leq \\ &\leq \beta \rho_X(x_2, x_1) + \delta \rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) \leq \\ &\leq \alpha^{-1} \beta \rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) + \delta \rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \alpha r_1 = \alpha r_2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x_2) \in B_Y(\Psi(x_2), \alpha r_2)$. Поскольку Ψ является α -накрывающим на $B_X(x_0, R)$, имеем

$$\Psi(B_X(x_2, r_2)) \supseteq B_Y(\Psi(x_2), \alpha r_2).$$

Таким образом, $\Phi(x_2) \in \Psi(B_X(x_2, r_2))$. Отсюда следует, что существует $x_3 \in B_X(x_2, r_2)$ такой, что

$$\Psi(x_3) = \Phi(x_2).$$

Далее, пусть построены x_1, \dots, x_{k-1} . Возьмем x_k , удовлетворяющее (2.5), (2.6) и положим

$$r_k = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_{k-1}.$$

Покажем, что $B_X(x_k, r_k) \subseteq B_X(x_0, R)$. Действительно, если $x \in B_X(x_k, r_k)$, то:

$$\begin{aligned} \rho_X(x_0, x) &\leq \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x_2) + \dots + \rho_X(x_{k-1}, x_k) + \rho_X(x_k, x) \leq \\ &\leq r_0 + r_1 + \dots + r_{k-1} + r_k = \left(1 + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^{k-1} \right) r_0 \leq \left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^{-1} \right)^{-1} r_0 \leq R. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Теперь покажем, что $\Phi(x_k) \in \Psi(B_X(x_k, r_k))$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Phi(x_k), \Psi(x_k)) &\leq \rho_Y(\Phi(x_k), \Phi(x_{k-1})) + \rho_Y(\Phi(x_{k-1}), \Psi(x_k)) \leq \\ &\leq \beta \rho_X(x_k, x_{k-1}) + \delta \rho_Y(\Phi(x_{k-1}), \Psi(x_{k-1})) \leq \beta \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_{k-1})) + \\ &\quad + \delta \rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_{k-1})) = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_{k-1})) \leq \\ &\leq \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_{k-1} \leq \alpha r_k. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x_k) \in B_Y(\Psi(x_k), \alpha r_k)$. Поскольку Ψ является α -накрывающим на $B_X(x_0, R)$, то $\Psi(B_X(x_k, r_k)) \supseteq B_Y(\Psi(x_k), \alpha r_k)$. Отсюда следует, что существует $x_{k+1} \in B_X(x_0, R)$ такой, что $\Psi(x_{k+1}) = \Phi(x_k)$. Продолжая процесс по индукции, мы получаем необходимую последовательность $\{x_k\}$.

Покажем теперь, что на шаге 3 Алгоритма 1 за конечное число шагов на каждом шаге i точка, удовлетворяющая (2.5), (2.6), будет найдена.

Выше мы получили, что для любого x_i существует такая точка x_{i+1} , что $\rho_Y(\Psi(x_{i+1}), \Phi(x_i)) = 0$. Требуется показать, что любого i и $\delta > 0$ множество

$$M_i = \{x \in B_X(x_i, \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))) : \rho_Y(\Psi(x), \Phi(x_i)) < \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))\}$$

имеет непустую внутренность. Пусть это не так, т.е. $\forall x' \in M_i$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists x'' : \rho_X(x', x'') \leq \varepsilon$ и $\rho_Y(\Psi(x''), \Phi(x_i)) \geq \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))$. Возьмем $x' \in M_i$ и последовательность $\varepsilon_n = 1/2^n$. Согласно предположению существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty : \rho_Y(\Psi(x_n), \Phi(x_i)) \geq \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))$. Полагая $n \rightarrow \infty$, мы получаем, что $x_n \rightarrow x'$, т.к. $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и, следовательно, $\rho_X(x_n, x') \rightarrow 0$. Более того, в силу предположения относительно замкнутости графика отображения Ψ имеем $\rho_Y(\Psi(x'), \Phi(x_i)) \leq \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))$. Но $x' \in M_i$, откуда следует, что $\rho_Y(\Psi(x'), \Phi(x_i)) < \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))$. Противоречие.

Таким образом, $\exists \varepsilon > 0 : B_X(x_i, \varepsilon) \subset M_i$. Следовательно, множество M_i имеет непустую внутренность.

Поскольку M вполне ограничено, то вполне ограничены также и множества $B_X(x_i, \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)))$ для любого i . Следовательно, на каждом из них всякая ε -сеть будет конечна. Таким образом, уменьшая шаг сетки на шаге 3 Алгоритма 1, мы получим, что за конечное число шагов искомая точка будет найдена.

Из (2.6) мы получаем, что построенная последовательность является фундаментальной. В самом деле,

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) &\leq \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_{i-1})) + \rho_Y(\Phi(x_{i-1}), \Phi(x_i)) \leq \\ &\leq \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_{i-1})) + \beta \rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq \delta \rho_Y(\Psi(x_{i-1}), \Phi(x_{i-1})) + \beta \rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq \\ &\leq \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \rho_Y(\Psi(x_{i-1}), \Phi(x_{i-1})). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) \leq \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^i \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \quad \forall i.$$

В силу (2.5) мы получаем, что

$$\rho_X(x_i, x_0) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) \leq \alpha^{-1} \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^i \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Наконец, поскольку $\delta + \beta/\alpha < 1$, мы получаем, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной и

$$\rho_X(x_i, x_0) \leq (\alpha - (\alpha\delta + \beta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Так как пространство X полное, $\{x_k\}$ сходится к точке $\xi \in B_X(x_0, R)$. Используя непрерывность отображения Φ и замкнутость отображения Ψ , мы переходим к пределу и получаем, что существует точка совпадения отображений Ψ и Φ , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ с помощью Алгоритма 1 за конечное число шагов будет найдена точка ξ такая, что $\rho_Y(\Psi(\xi), \Phi(\xi)) < \varepsilon$, и неравенство (2.8). \square

В результате применения Алгоритма 1 положение равновесия в системах (1.1) и (1.2) будет найдено с произвольной заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Предложенный метод состоит в том, чтобы рассмотреть положение равновесия в системах (1.1) и (1.2) как точку совпадения отображений из правых частей систем, проверить выполнение условий теоремы существования точки совпадения, проверить выполнения условия теоремы о сходимости Алгоритма 1, а затем применить Алгоритм 1.

Замечание 2.1. Заметим, что если X – конечномерное банахово пространство, то условие вполне ограниченности множества M выполняется автоматически.

Теперь рассмотрим несколько частных случаев, в которых применимы более простые методы нахождения положения равновесия и которые будут использованы в главах 3 и 4.

2.3. Принцип сжимающих отображений

Если в модели из класса \mathbb{M}_0 одно из двух отображений F, G (без ограничений общности, F) является биективным, то вопрос о существовании решения систе-

мы (2.1) сводится к поиску неподвижной точки отображения $F^{-1} \circ G$. Напомним определение неподвижной точки, а также принцип сжимающих отображений. Помимо существования, теорема о неподвижной точке гарантирует также и ее единственность.

Пусть дано метрическое пространство (X, ρ_X) с метрикой ρ_X .

Определение 2.6 ([22]). Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой отображения $H : X \rightarrow X$, если

$$Hx = x.$$

Существование неподвижной точки можно гарантировать в том случае, если отображение H является сжимающим.

Определение 2.7 ([22]). Отображение $H : X \rightarrow X$ называется сжимающим, если существует такое число $c < 1$, что для любых $x', x'' \in X$ выполнено

$$\rho_X(Hx', Hx'') \leq c\rho_X(x', x'').$$

Для формулировки теоремы о существовании неподвижной точки нам потребуется два известных определения из функционального анализа.

Определение 2.8 ([22]). Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется фундаментальной, если она удовлетворяет критерию Коши, т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N_ε , что $\rho_X(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ для всех $n', n'' > N_\varepsilon$.

Определение 2.9 ([22]). Если в пространстве X любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого же пространства, то это пространство называется полным.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.5 (Принцип сжимающих отображений, [22]). *Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве X , имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Напомним, что в общем случае отображение Ψ может не быть биективным, и тогда принцип сжимающих отображений применить нельзя. Однако предложенный выше алгоритм все еще может быть применен.

2.4. Системы линейных уравнений и неравенств

Некоторые модели из класса \mathbb{M}_o можно линеаризовать. Тогда для получения условий существования равновесия можно воспользоваться теоремами о совместности систем линейных уравнений и неравенств. Приведем соответствующие известные результаты.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2.10)$$

Здесь $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

В дальнейшем нам потребуется известная теорема Кронекера-Капелли вместе со следствием из нее.

Обозначим

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathcal{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Теорема 2.6 (Теорема Кронекера–Капелли, [42]). *Система линейных уравнений (2.10) совместна (т.е. имеет решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т.е. когда $\text{rank } \mathcal{A} = \text{rank } \overline{\mathcal{A}}$.*

Теорема 2.7 ([42]). *Если система линейных уравнений (2.10) совместна, то она определена (т.е. ее решение единственно) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных, т.е. $\text{rank } \mathcal{A} = n$.*

Теперь рассмотрим систему линейных неравенств ранга $r > 0$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 \leq 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 \leq 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - b_m \leq 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

Для этой системы в [41] были получены условия существования решения, которыми мы воспользуемся в следующей главе.

Теорема 2.8 (Теорема 3, [41]). *Необходимым и достаточным условием совместности системы линейных неравенств (2.11) является существование такого отличного от нуля определителя r -го порядка*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{j_1 i_1} & \dots & a_{j_1 i_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_r i_1} & \dots & a_{j_r i_r} \end{vmatrix},$$

что для всех $j = 1, 2, \dots, t$ выполняются соотношения

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{j_1 i_1} & \dots & a_{j_1 i_r} & a_{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j_r i_1} & \dots & a_{j_r i_r} & a_{j_r} \\ a_{j r_1} & \dots & a_{j r_j} & a_j \end{vmatrix} \geq 0.$$

Данные теоремы будут использованы для получения условий существования положения равновесия в модели закрытого рынка, частном случае модели открытого рынка. В общем случае линеаризовать систему положения равновесия не получится, и для получения условий существования мы воспользуемся результатами функционального анализа и теории накрывающих отображений и точек совпадения.

2.5. Выводы главы 2

С помощью результатов теории накрывающих отображений и точек совпадения был предложен метод нахождения положения равновесия в системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств,

одно из которых является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица. Метод основан на алгоритме поиска точек совпадения с доказанной сходимостью. Данный алгоритм вкуче с теоремами о точках совпадения, а также принципом сжимающих отображений и теоремами о совместности систем линейных уравнений и неравенств применен для исследования положения равновесия или частичного равновесия в нескольких моделях из класса \mathbb{M}_o и подкласса \mathbb{M}_c . В следующей главе будут исследованы модели из класса \mathbb{M}_o с внешним воздействием.

Результаты данной главы опубликованы в работе [21].

3. Положение равновесия в моделях с внешним воздействием из класса \mathbb{M}_o

В главе исследованы модели из класса \mathbb{M}_o . К ним относятся модели типа Аллена открытого рынка с постоянными эластичностями из Σ_o и непостоянными эластичностями Σ_f .

3.1. Положение равновесия в открытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями

В модели $\sigma_o \in \Sigma_o$ отображение предложения является биективным, что позволяет использовать принцип сжимающих отображений. Помимо существования он гарантирует единственность положения равновесия. Помимо этого, рассмотрен вопрос о существовании положения частичного равновесия и доказана его устойчивость к малым изменениям параметров модели с помощью теоремы об устойчивости точек совпадения к малым возмущениям.

3.1.1. Достаточные условия существования положения равновесия

Рассмотрим модель $\sigma_o \in \Sigma_o$. Покажем, что S – биекция, если $\det \tilde{\mathcal{E}} \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$S(p) = s, \quad s \in S(P) \tag{3.1}$$

относительно $p \in P$. Уравнение (3.1) представляет собой систему

$$S_i(p) = s_i, \quad i = \overline{1, n},$$

которая эквивалентна следующей системе

$$S_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}} = s_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.2}$$

Взяв логарифм от левой и правой частей в каждом уравнении системы (3.2), мы получим эквивалентную систему:

$$\ln S_i^* + \sum_{j=1}^n (\tilde{E}_{ij} \ln p_j - \tilde{E}_{ij} \ln p_j^*) = \ln s_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

Отсюда мы получаем следующую эквивалентную систему

$$\sum_{j=1}^n \tilde{E}_{ij} \ln p_j = \ln \left(\frac{S_i}{S_i^*} \right) + \sum_{j=1}^n \tilde{E}_{ij} \ln p_j^*. \quad (3.4)$$

Поскольку $\det \tilde{\mathcal{E}} \neq 0$, то система (3.4) совместна по теореме 2.6, а по теореме 2.7 ее решение единственно. Следовательно, по эквивалентности всех приведенных выше систем мы получаем, что решение уравнения (3.1) тоже единственно.

Таким образом, отображение S биективно. Следовательно, существует обратное отображение S^{-1} и мы можем рассмотреть оператор $B : P \rightarrow \mathbb{R}_+^n$:

$$B(p) = S^{-1}(D(p) - a), \quad p \in P. \quad (3.5)$$

Здесь и далее через $\text{lip}(B|P)$ обозначим точную нижнюю грань всех β таких, что отображение B удовлетворяет условию Липшица на P с константой β .

Теорема 3.1 ([45]). *Пусть параметры модели $\sigma_o \in \Sigma_o$ удовлетворяют следующим условиям:*

- 1) $\det \tilde{\mathcal{E}} \neq 0$;
- 2) $B(P) \subset P$;
- 3) $\text{lip}(B) < 1$.

Тогда в модели σ_o существует единственный вектор равновесных цен $p^0 \in P$.

Доказательство. Рассмотрим пространства $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ где $X = Y = \mathbb{R}_+^n$, а метрики ρ_X и ρ_Y определены формулами

$$\rho_X(x, y) = \max_{i=\overline{1, n}} \frac{2|x_i - y_i|}{c_{2i} - c_{1i}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n); \quad (3.6)$$

$$\rho_Y(x, y) = \max_{i=\overline{1, n}} |y_i - x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n). \quad (3.7)$$

Заметим, что в выбранных метриках $P = B_X(\tilde{c}, 1)$. Для использования принципа сжимающих отображений нам будет достаточно полноты множества P внутри \mathbb{R}_+^n .

В силу условия 2) отображение B действует в себя, а в силу условия 3) отображение B является сжимающим. Тогда по теореме 2.5 существует единственное решение p^0 уравнения $B(p) = p$, т.е.

$$S^{-1}(D(p^0) - a) = p^0,$$

откуда

$$D(p^0) = S(p^0) + a.$$

Следовательно, в модели σ_o существует единственное положение равновесия $p^0 \in P$. \square

Замечание 3.1. Легко видеть, что проверка условий существования положения равновесия в модели σ_o сводится к оценке константы Липшица отображения B . Однако, данная задача может быть трудоемкой. Приведем более простые для проверки условия, которые могут гарантировать единственное положение равновесия в модели σ_o .

Положим

$$\bar{\alpha}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \sum_{k=1}^n \frac{|\tilde{F}_{ki}| \max\{c_{1i}^{1-\tilde{E}_{ki}}, c_{2i}^{1-\tilde{E}_{ki}}\}}{S_k^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{kj}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \min\{c_{1i}^{\tilde{E}_{kj}}, c_{2i}^{\tilde{E}_{kj}}\}}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,n}} D_i^* \left(\prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \times \\ \times \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \max_{m=1,2} \{c_{mk}^{E_{ik}-1}\} \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \max_{m=1,2} \{c_{mj}^{E_{ij}}\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\bar{\gamma}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|, \quad (3.10)$$

где \tilde{F}_{ij} – элемент матрицы $\tilde{\mathcal{F}}$, обратной к матрице $\tilde{\mathcal{E}}$, а $\tilde{c} = \frac{c_1 + c_2}{2}$.

Теорема 3.2 ([45]). Пусть параметры модели $\sigma_o \in \Sigma_o$ удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \det \tilde{\mathcal{E}} \neq 0;$$

$$2) \bar{\gamma}(\sigma_o) < \bar{\alpha}(\sigma_o) - \bar{\beta}(\sigma_o).$$

Тогда в модели σ_o существует единственное положение равновесия $p^0 \in \text{int } P$.

Доказательство. Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) , где $X = Y = \mathbb{R}_+^n$, а метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами, определенными формулами (3.18), (3.19) соответственно. Рассмотрим отображения $D, S : X \rightarrow Y$.

Наша цель – применить теорему 2.2. Сначала оценим $\text{lip}(S^{-1}|S(P))$. Заметим, что отображение S удовлетворяет условиям теоремы об обратном отображении, согласно которой для любого вектора $p \in \text{int } P$

$$\frac{\partial S^{-1}}{\partial s}(S(p)) = \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1}.$$

Из (1.14) имеем

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_k}(p) = \frac{S_i^* \tilde{E}_{ik}}{p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}.$$

Следовательно,

$$\text{lip}(S^{-1}|S(P)) = \sup_{p \in \text{int } P} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1} \right\|.$$

Таким образом, для того, чтобы вычислить $\text{lip}(S^{-1}|S(P))$, нам надо найти $\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1}$. Сначала найдем $\det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1}$. Обозначим

$$\pi_i = \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}.$$

Тогда:

$$\det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1} = \begin{vmatrix} \tilde{E}_{11} S_1^* p_1^{-1} \pi_1 & \dots & \tilde{E}_{1n} S_1^* p_n^{-1} \pi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{E}_{n1} S_n^* p_1^{-1} \pi_n & \dots & \tilde{E}_{nn} S_n^* p_n^{-1} \pi_n \end{vmatrix} =$$

Вынесем из каждой строчки этого определителя множитель $S_i^* \pi_i$, $i = \overline{1, n}$,

а из каждого столбца – множитель p_k^{-1} , $k = \overline{1, n}$:

$$= \prod_{i=1}^n \left(\frac{S_i^*}{p_i} \pi_i \right) \begin{vmatrix} \tilde{E}_{11} & \dots & \tilde{E}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{E}_{n1} & \dots & \tilde{E}_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{S_i^*}{p_i} \pi_i \right) \det \mathcal{E}.$$

Аналогичным образом мы можем найти элементы присоединенной матрицы к матрице $\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)$. Обозначим через \mathcal{S}_{ik} алгебраическое дополнение элемента $\frac{\partial S_i}{\partial p_k}(p)$ матрицы $\frac{\partial S}{\partial p}(p)$, а через $\tilde{\mathcal{E}}_{ik}$ – алгебраическое дополнение элемента \tilde{E}_{ik} матрицы $\tilde{\mathcal{E}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ik} &= (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial p_1}(p) & \dots & \frac{\partial S_i}{\partial p_{k-1}}(p) & \frac{\partial S_i}{\partial p_{k+1}}(p) & \dots & \frac{\partial S_i}{\partial p_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial S_{i-1}}{\partial p_1}(p) & \dots & \frac{\partial S_{i-1}}{\partial p_{k-1}}(p) & \frac{\partial S_{i-1}}{\partial p_{k+1}}(p) & \dots & \frac{\partial S_{i-1}}{\partial p_n}(p) \\ \frac{\partial S_{i+1}}{\partial p_1}(p) & \dots & \frac{\partial S_{i+1}}{\partial p_{k-1}}(p) & \frac{\partial S_{i+1}}{\partial p_{k+1}}(p) & \dots & \frac{\partial S_{i+1}}{\partial p_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial S_n}{\partial p_1}(p) & \dots & \frac{\partial S_n}{\partial p_{k-1}}(p) & \frac{\partial S_n}{\partial p_{k+1}}(p) & \dots & \frac{\partial S_n}{\partial p_n}(p) \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{i+k} \left(\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n p_m^{-1} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n S_l^* \pi_l \right) \begin{vmatrix} \tilde{E}_{11} & \dots & \tilde{E}_{1,k-1} & \tilde{E}_{1,k+1} & \dots & \tilde{E}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{E}_{i-1,1} & \dots & \tilde{E}_{i-1,k-1} & \tilde{E}_{i-1,k+1} & \dots & \tilde{E}_{i-1,n} \\ \tilde{E}_{i+1,1} & \dots & \tilde{E}_{i+1,k-1} & \tilde{E}_{i+1,k+1} & \dots & \tilde{E}_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{E}_{n1} & \dots & \tilde{E}_{n,k-1} & \tilde{E}_{n,k+1} & \dots & \tilde{E}_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n p_m^{-1} \right) \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n S_l^* \pi_l \right) \tilde{\mathcal{E}}_{ik}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)_{ik}^{-1} = \left(\det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1} \right)^{-1} \mathcal{S}_{ik} = \frac{p_i \tilde{F}_{ik}}{S_k^* \pi_k},$$

где \tilde{F}_{ik} – элемент матрицы $\tilde{\mathcal{F}}$, обратной к $\tilde{\mathcal{E}}$.

Теперь мы можем оценить $\text{lip}(S^{-1}|S(P))$. Для любого $p \in P$ имеем:

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1} \right\| = \max_{\|s\|_2=1} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^{-1} s \right\| = \\
& = \max_{\|s\|_2=1} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \left| \sum_{k=1}^n \frac{p_i \tilde{F}_{ik}}{S_k^* \pi_k} s_k \right| \leq \max_{\|s\|_2=1} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^n \left| \frac{p_i \tilde{F}_{ki}}{S_k^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{kj}} p_j^{\tilde{E}_{kj}}} s_k \right| \leq \\
& \leq \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \sum_{k=1}^n \frac{p_i |\tilde{F}_{ki}|}{S_k^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{kj}} p_j^{\tilde{E}_{kj}}} \leq \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \sum_{k=1}^n \frac{p_i^{1-\tilde{E}_{ki}} |\tilde{F}_{ki}|}{S_k^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{kj}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j^{\tilde{E}_{kj}}} \leq \\
& \leq \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \sum_{k=1}^n \frac{|\tilde{F}_{ki}| \max\{c_{1i}^{1-\tilde{E}_{ki}}, c_{2i}^{1-\tilde{E}_{ki}}\}}{S_k^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{kj}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \min\{c_{1i}^{\tilde{E}_{kj}}, c_{2i}^{\tilde{E}_{kj}}\}} = \frac{1}{\bar{\alpha}(\sigma_o)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{lip}(S^{-1}|S(P)) = \sup_{p \in \text{int } P} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)^{-1} (p) \right\| \leq \frac{1}{\bar{\alpha}(\sigma_o)}. \quad (3.11)$$

Теперь мы оценим $\text{lip}(D|P)$, что проводится аналогично. Из (1.13) следует, что для любого $p \in P$

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) = \frac{D_i^* E_{ik}}{p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| &= \max_{\|x\|_1=1} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p)x \right\| = \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p)x_k \right| \leq \\
&\leq \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^n \frac{D_i^* |E_{ik}|}{p_k} |x_k| \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \leq \\
&\leq \max_{i=\overline{1,n}} D_i^* \left(\prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^n |E_{ik}| p_k^{E_{ik}-1} \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n p_j^{E_{ij}} \leq \\
&\leq \max_{i=\overline{1,n}} D_i^* \left(\prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \max_{m=1,2} \{c_{mk}^{E_{ik}-1}\} \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \max_{m=1,2} \{c_{mj}^{E_{ij}}\} = \bar{\beta}(\sigma_o).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{lip}(D|P) = \max_{p \in P} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| \leq \bar{\beta}(\sigma_o). \quad (3.12)$$

Из неравенств (3.11), (3.12) и условия 2) мы получаем, что существуют такие числа $\alpha > 0, \beta > 0$, что $\bar{\gamma}(\sigma_o) < \alpha - \beta$ и отображение D удовлетворяет на P условию Липшица с константой β , а отображение S удовлетворяет условию Липшица на $S(P)$ с константой $1/\alpha$.

Теперь покажем, что отображение B является сжимающим. Прежде всего заметим, что

$$\text{lip}(S^{-1} \circ (D - a)|P) \leq \text{lip}(S^{-1}|(D - a)(P)) \cdot \text{lip}(D - a|P).$$

Действительно, если $D : X \rightarrow Y$ – липшицево с константой Липшица $\text{lip}(D|P)$, а $S^{-1} : Y \rightarrow X$ – липшицево с константой $\text{lip}(S^{-1}|(D - a)(P))$, то для любых $p', p'' \in P$ выполнено

$$\begin{aligned}
\|B(x') - B(x'')\| &= \|(S^{-1} \circ (D - a))(x') - (S^{-1} \circ (D - a))(x'')\| \leq \\
&\leq \text{lip}(S^{-1}|(D - a)(P)) \|(D - a)(x') - (D - a)(x'')\| \leq \\
&\leq \text{lip}(S^{-1}|(D - a)(P)) \cdot \text{lip}(D - a|P) \|x' - x''\|,
\end{aligned}$$

откуда вытекает требуемое неравенство. Далее, очевидно, что

$$\text{lip}(D - a|P) = \text{lip}(D|P),$$

поскольку для любых $p', p'' \in P$ выполнено $\|D(p') - a - (D(p'') - a)\| = \|D(p') - D(p'')\| = \text{lip}(D|P)\|p' - p''\|$. Наконец, покажем, что

$$\text{lip}(S^{-1}|(D - a)(P)) \leq \text{lip}(S^{-1}|S(P)).$$

Для этого достаточно показать, что $(D - a)(P) \subseteq S(P)$. Пусть $y \in (D - a)(P)$. Тогда существует $x \in P$ такой, что $(D - a)(x) = y$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \rho_Y((D - a)(x), S(\tilde{c})) &= \rho_Y(D(x) - a, S(\tilde{c})) \leq \rho_Y(D(x), D(\tilde{c})) + \\ &+ \rho_Y(D(\tilde{c}), S(\tilde{c}) + a) < \beta \rho_X(x, \tilde{c}) + \alpha - \beta \leq \beta + \alpha - \beta = \alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, $y \in B_Y(S(\tilde{c}), \alpha)$. Далее, поскольку отображение S^{-1} является α -липшицевым, то

$$\rho_X(S^{-1}(S(\tilde{c})), S^{-1} \circ (D - a)(x)) \leq \frac{1}{\alpha} \rho_Y(S(\tilde{c}), (D - a)(x)) \leq 1,$$

откуда мы получаем, что $(D - a)(x) \in S(P)$. Таким образом, $(D - a)(P) \subseteq S(P)$.

Теперь оценим величину $\text{lip}(B|P)$:

$$\begin{aligned} \text{lip}(B|P) &\leq \text{lip}(S^{-1}|(D - a)(P)) \cdot \text{lip}(D - a|P) \leq \\ &\leq \text{lip}(S^{-1}|S(P)) \cdot \text{lip}(D|P) = \frac{1}{\alpha} \beta < 1, \end{aligned}$$

Так как $\beta < \alpha$.

Наконец, покажем, что $B(P) \subseteq P$. Действительно, для любого $p \in P$ имеем:

$$\rho_X(B(p), \tilde{c}) = \rho_X(S^{-1} \circ (D - a)(p), S^{-1}(S(\tilde{c}))) \leq \frac{1}{\alpha} \rho_Y((D - a)(p), S(\tilde{c})) < 1.$$

Таким образом, отображение B является сжимающим. Поскольку P – полное метрическое пространство, по теореме 2.5 мы получаем, что существует единственное решение p^0 уравнения $B(p) = p$, откуда непосредственно вытекает, что в модели σ_o существует единственное положение равновесия $p^0 \in P$. \square

3.1.2. Устойчивость положения равновесия

Покажем, что при выполнении условий теоремы 3.2 положение равновесия в модели открытого рынка устойчиво к малым возмущениям.

Теорема 3.3 ([47]). *Пусть модель σ_o удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2 и последовательность моделей $\{\sigma_o^N\} \subset \Sigma_o$ сходится к σ_o . Тогда для любого вектора равновесных цен $p \in P$ в модели σ_o существует натуральное число $\bar{N} > 0$ и последовательность $\{p^N\} \subset \mathbb{R}_+^n$ такие, что:*

1. *при любом $N > \bar{N}$ вектор p^N является вектором равновесных цен в модели σ^N ;*
2. *$p^N \rightarrow p$ при $N \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на применение теоремы 2.1. Сначала проведем вспомогательные построения. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$v_1^\varepsilon = \tilde{c} - (1 - \varepsilon)(\tilde{c} - c_1), \quad v_2^\varepsilon = \tilde{c} + (1 - \varepsilon)(c_2 - \tilde{c}),$$

$$M^\varepsilon = [v_{11}^\varepsilon, v_{21}^\varepsilon] \times \dots \times [v_{n1}^\varepsilon; v_{n2}^\varepsilon].$$

Очевидно, что для любого положительного $\varepsilon < 1$ справедливы $v_{j1}^\varepsilon < v_{j2}^\varepsilon$, $j = \overline{1, n}$ и включение $M^\varepsilon \subset P^N$ для любого $N > N_1(\varepsilon)$.

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) , где $X = Y = \mathbb{R}_+^n$, а метрики ρ_X , ρ_Y порождены нормами (3.18), (3.19) соответственно.

Выберем произвольные положительные числа α и β такие, что $\bar{\beta}(\sigma_o) < \beta < \alpha < \bar{\alpha}(\sigma_o)$. В силу непрерывности функций $\bar{\alpha}(\cdot)$, $\bar{\beta}(\cdot)$ существует положительное число $\varepsilon_2 < 1$ такое, что

$$\bar{\beta}(a, v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}) < \beta, \quad \alpha < \bar{\alpha}(a, v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}})$$

для любого $\varepsilon < \varepsilon_2$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_2(\varepsilon) > 0$ такой, что

$$\bar{\beta}(a^N, v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, p^{*N}, S^{*N}, D^{*N}, \mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N) < \beta, \quad \alpha < \bar{\alpha}(a^N, v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, p^{*N}, S^{*N}, D^{*N}, \mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N)$$

для любого $N > N_2(\varepsilon)$. Положим $\varepsilon = 2^{-1} \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $N_3 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\} + 1$. Пусть $S^N, D^N : X \rightarrow Y$ – функции спроса и предложения соответственно в модели $\sigma^N = (a^N, v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, p^{*N}, S^{*N}, D^{*N}, \mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N)$.

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3.2, получаем, что отображения S^N при любом $N > N_3$ являются накрывающими относительно M^ε с константой накрывания $\bar{\alpha}(a^N, v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, p^{*N}, S^{*N}, D^{*N}, \mathcal{E}^N, \tilde{\mathcal{E}}^N)$. Следовательно, они являются α -накрывающими относительно M^ε , а функции D^N при любом $N > N_3$ на множестве M^ε удовлетворяют условию Липшица с константой $\beta < \alpha$.

Выберем произвольное $R > 0$ такое, что $B_X(p, R) \subset M^\varepsilon$. Из формул (1.7), (1.9) следует, $S^N \rightarrow S, D^N \rightarrow D$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, по теореме 2.1 существует номер $\bar{N} > N_3$ и последовательность $\{p^N\} \subset B_X(p, R)$ такие, что $S^N(p^N) + a = D^N(p^N)$ и $p^N \rightarrow p$ при $N \rightarrow \infty$. Поскольку $p^N \in B_X(p, R) \subset M^\varepsilon \subset P^N = [c_{11}, c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}, c_{2n}]$ для любого $N > \bar{N}$, то вектор P^N является вектором равновесных цен в модели σ^N . \square

3.1.3. Метод нахождения положения равновесия

Данный метод является модификацией Алгоритма 1 с поправкой на специфику конкретной модели.

Алгоритм 2

Шаг 0. Вычислить константы $\bar{\alpha}(\sigma_o)$ и $\bar{\beta}(\sigma_o)$ по формулам (3.8), (3.9). Зафиксировать метрики ρ_X и ρ_Y по формулам (3.6), (3.7).

Шаг 1. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения, $p_0 \in P$ – начальное приближение, $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса, положить номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства

$$\max_{i=1, n} |S(p_k) + a - D(p_k)| < \varepsilon,$$

где $D(p)$ определено формулой (1.18), а $S(p)$ – формулой (1.19). Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 3. Используя приближение p_k , вычислить $h_k = (h_{k1}, \dots, h_{kn})$ по формуле

$$|h_{ki}| \leq \frac{c_{2i} - c_{1i}}{2\alpha} \max_{j=\overline{1,n}} \frac{|S_j(p_k) + a - D_j(p_k)|}{c_{2j} - c_{1j}}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (3.13)$$

Шаг 4. На $B_{\mathbb{R}^n}(p_k, h_k)$ построить σ_k -сеть Z при

$$\sigma_k = \frac{\delta}{2} \max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)|.$$

Шаг 5. Поочередно брать точки $\tilde{x} \in Z \cap B_{\mathbb{R}^n}(p_k, h_k)$ и проверять выполнение неравенства:

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S(p) + a - D(p_k)| \leq \sigma_k \max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)|. \quad (3.14)$$

Если подходящая под условие точка найдена, то перейти к шагу 6. Если нет, то уменьшить σ_i в два раза, построить новую сеть и повторить перебор.

Шаг 6. Положить $p_{k+1} = \tilde{p}$, увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

3.1.4. Модельный пример

Проиллюстрируем применение метода на нескольких моделях $\sigma_o \in \Sigma_o$ и установим закономерности между входными параметрами и положением равновесия.

Случай $n = 1$. Рассмотрим следующую модель $\sigma_o \in \Sigma_o$:

$$\begin{aligned} a &= 7.99, \quad c_1 = 77.36, \quad c_2 = 138.17, \quad p^* = 85.46, \\ S^* &= 50.74, \quad D^* = 66.77, \quad E = -0.13, \quad \tilde{E} = 0.49. \end{aligned}$$

Используя Алгоритм 2, мы получаем следующее положение равновесия:

$$p^0 = 107.8562405, \quad \rho_Y(S(p^0) + a, D(p^0)) = 0.00000975.$$

Заметим, что равновесная цена p^0 оказалась ниже, чем p^* , что может говорить о недостаточно эффективном ценообразовании в моделируемом регионе.

В данной модели легко прослеживается связь между положением равновесия и входными параметрами.

Параметр a обратно пропорционален положению равновесия. При возрастании параметра a возрастает значение функции $S + a$. Поскольку $E < 0$, мы получаем, что значение функции D будет возрастать, если положение равновесия p^0 будет убывать.

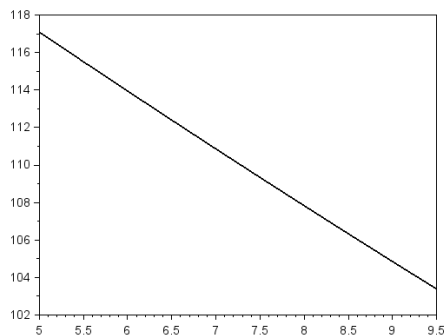


Рис. 3.1. Зависимость p^0 от a ($n = 1$).

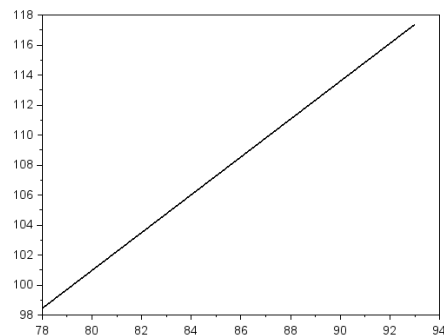


Рис. 3.2. Зависимость p^0 от p^* ($n = 1$).

Параметр p^* прямо пропорционален положению равновесия. При возрастании этого параметра значение функции S будет убывать, поскольку $\tilde{E} > 0$, а значение функции D – возрастать, так как $E < 0$. Так как $|E| < |\tilde{E}|$, мы получаем, что функция S убывает быстрее функции D . Следовательно, положение равновесия будет возрастать.

Изменение параметров c_1, c_2 не влияет на равновесные цены (рис. 3.3, 3.4).

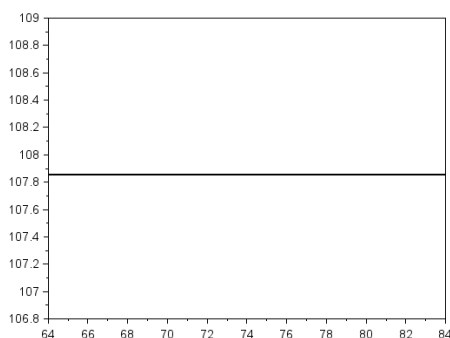


Рис. 3.3. Зависимость p^0 от c_1 ($n = 1$).

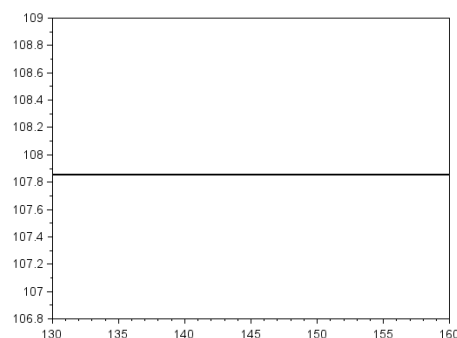


Рис. 3.4. Зависимость p^0 от c_2 ($n = 1$).

Параметр S^* обратно пропорционален положению равновесия (рис. 3.5). При возрастании параметра S^* значение функции S будет также возрастать. По-

сколькx $E < 0$, для возрастания значения D положение равновесия должно убывать.

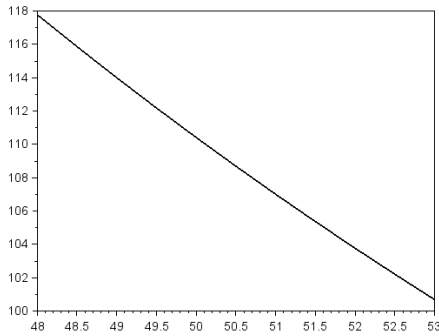


Рис. 3.5. Зависимость p^0 от S^* ($n = 1$).

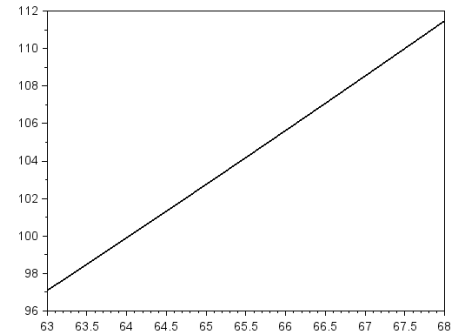


Рис. 3.6. Зависимость p^0 от D^* ($n = 1$).

Параметр D^* прямо пропорционален положению равновесия (рис. 3.6). При возрастании параметра D^* значение функции D возрастает. Поскольку $\tilde{E} > 0$, для возрастания значения функции S необходимо, чтобы положение равновесия возрастало.

Положение равновесия находится в прямой зависимости от параметра E (рис. 3.7). Если параметр E возрастает, то значение функции D будет возрастать, поскольку $p^0 > p^*$. Следовательно, так как $\tilde{E} > 0$, положения равновесия будет возрастать.

Положение равновесия обратно пропорционально параметру \tilde{E} (рис. 3.8). При возрастании этого параметра значение функции S будет возрастать, так как $\tilde{E} > 0$. Так как $E < 0$, для возрастания значения функции D положение равновесия должно убывать.

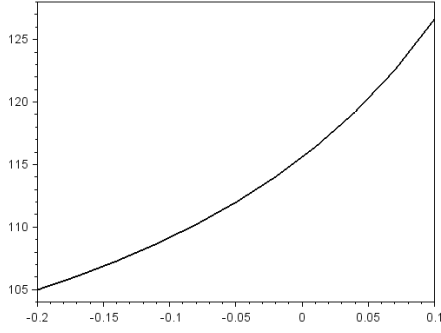


Рис. 3.7. Зависимость p^0 от E ($n = 1$).

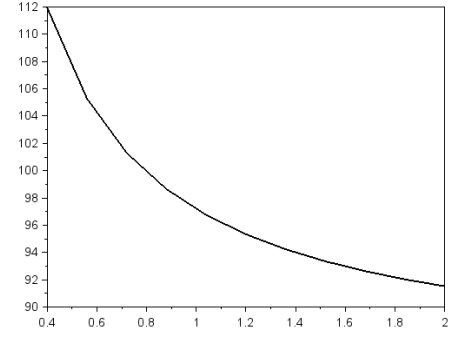


Рис. 3.8. Зависимость p^0 от \tilde{E} ($n = 1$).

Случай $n = 2$. Рассмотрим следующую модель из Σ_o :

$$\begin{aligned} a &= (44.88, 49.73)^T, \quad c_1 = (69.09, 55.33)^T, \quad c_2 = (160.32, 99.16)^T, \\ p^* &= (108.15, 83.69)^T, \quad S^* = (808.64, 632.05)^T, \quad D^* = (855.30, 674.91)^T, \\ E &= \begin{pmatrix} -0.0003 & -0.0021 \\ -0.0013 & 0.0094 \end{pmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{pmatrix} 0.0375 & 0.0878 \\ -0.088 & 0.0311 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С помощью Алгоритма 2 было найдено следующее положение равновесия:

$$p^0 = (121.88, 81.54)^T, \quad \rho_Y(S(p^0) + a, D(p^0)) = 0.00000187.$$

В данной модели $p_1^0 > p_1^*$, $p_2^0 < p_2^*$, что говорит о переоценённости первого товара и недооценённости второго товара.

В данной модели взаимосвязь между положением равновесия и входными параметрами установить достаточно трудно. Выясним, как положение равновесия будет зависеть от входных параметров модели с помощью предложенного алгоритма.

С помощью метода нахождения положения равновесия были получены следующие результаты (рис. 3.9–3.28).

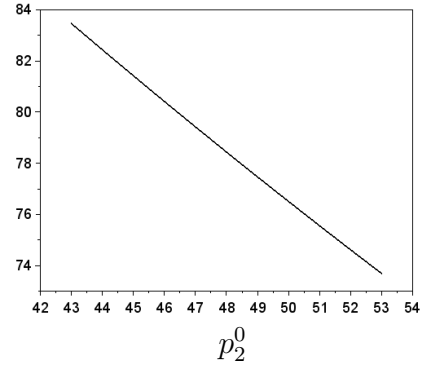
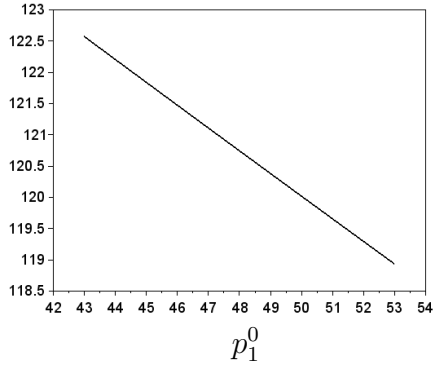


Рис. 3.9. Зависимость положения равновесия от $a_1(n = 2)$.

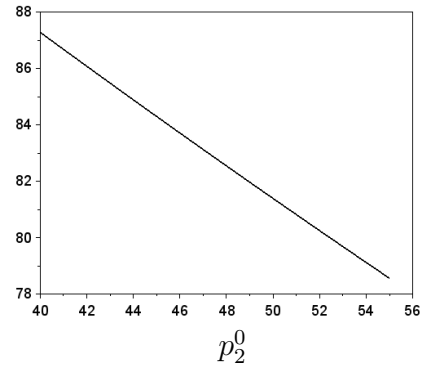
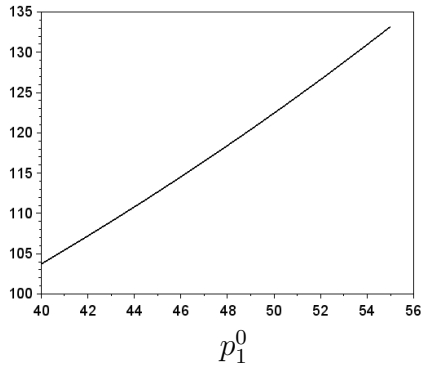


Рис. 3.10. Зависимость положения равновесия от $a_2(n = 2)$.

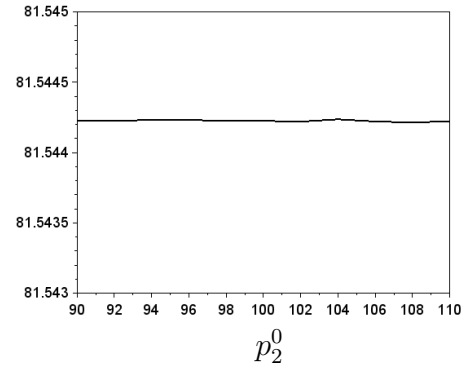
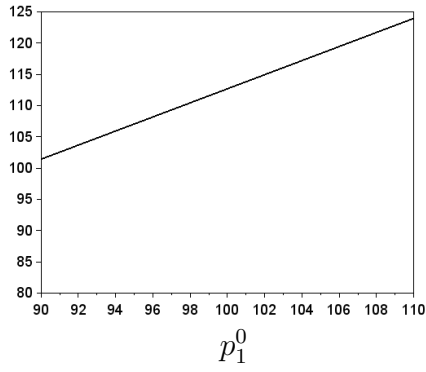


Рис. 3.11. Зависимость положения равновесия от $p_1^*(n = 2)$.

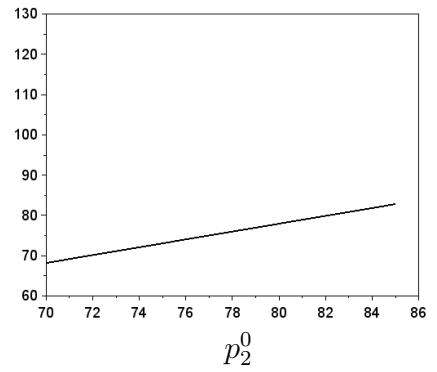
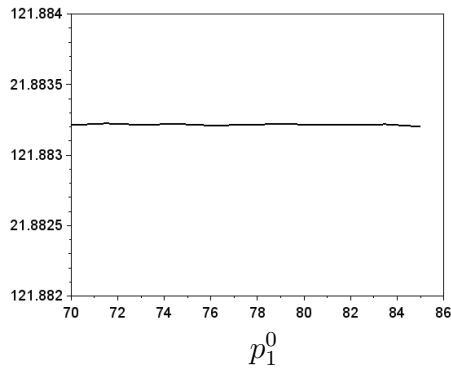


Рис. 3.12. Зависимость положения равновесия от $p_2^*(n = 2)$.

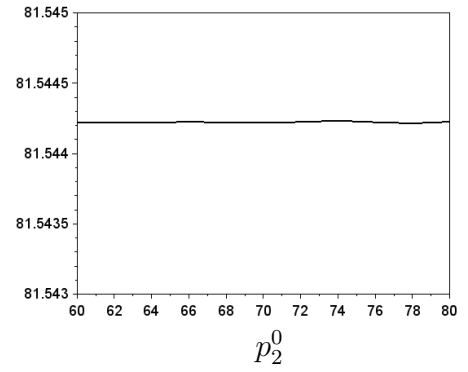
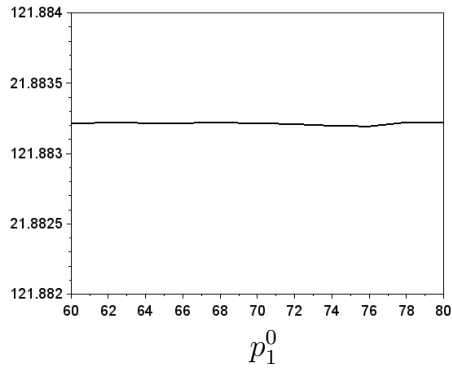


Рис. 3.13. Зависимость положения равновесия от $c_{11}(n = 2)$.

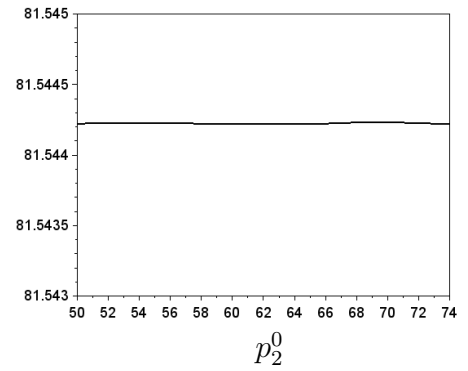
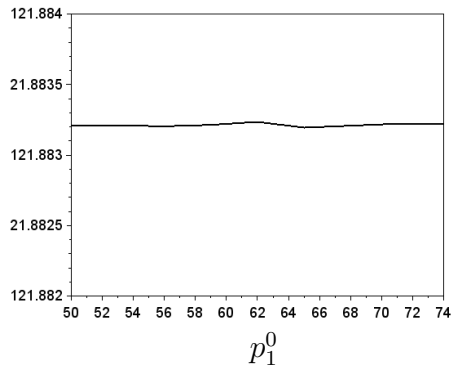


Рис. 3.14. Зависимость положения равновесия от $c_{12}(n = 2)$.

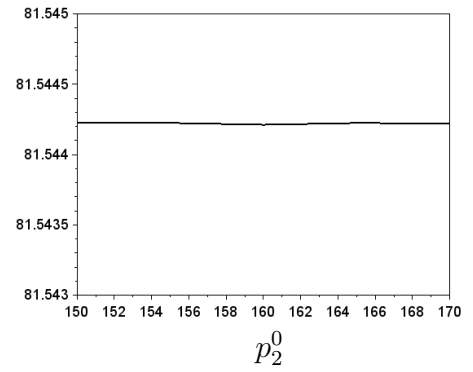
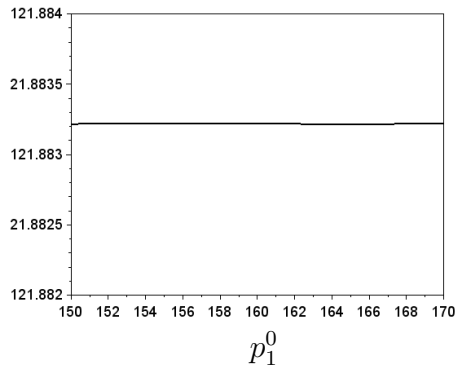


Рис. 3.15. Зависимость положения равновесия от $c_{21}(n = 2)$.

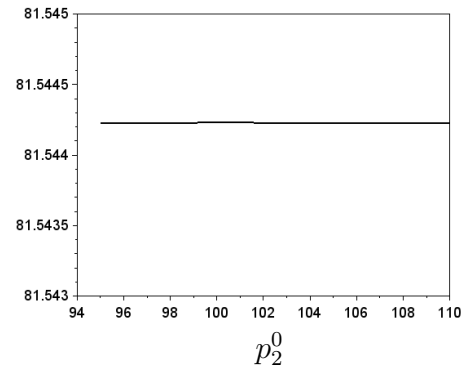
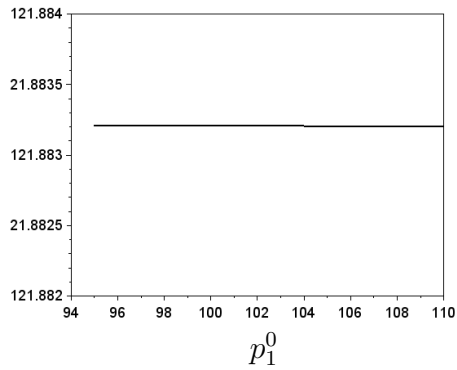


Рис. 3.16. Зависимость положения равновесия от $c_{22}(n = 2)$.

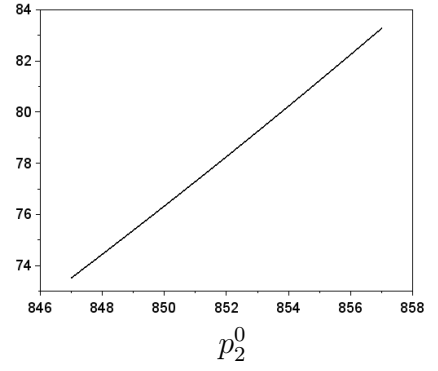
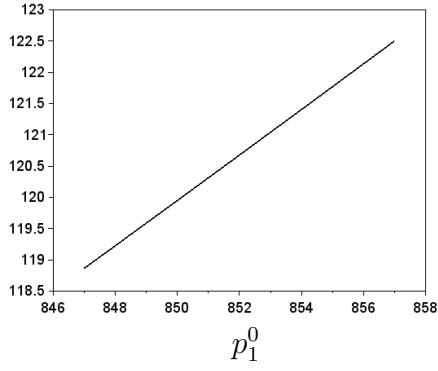


Рис. 3.17. Зависимость положения равновесия от $D_1^*(n = 2)$.

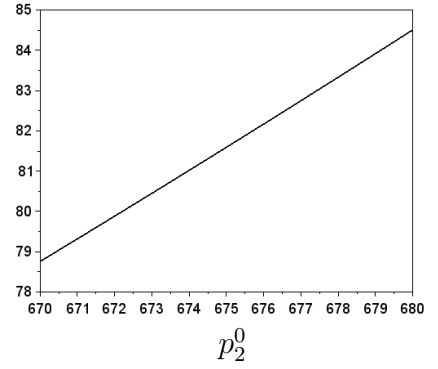
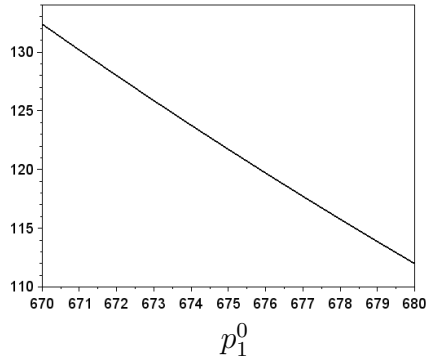


Рис. 3.18. Зависимость положения равновесия от $D_2^*(n = 2)$.

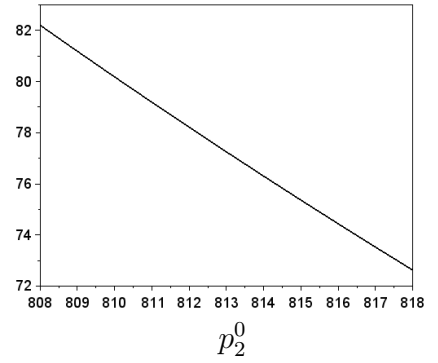
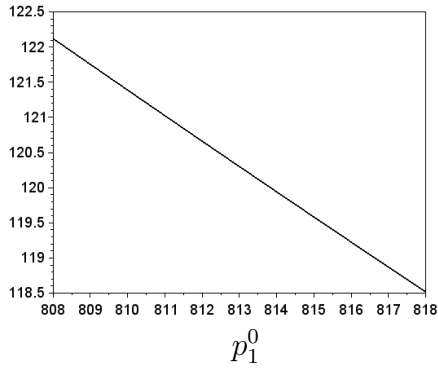


Рис. 3.19. Зависимость положения равновесия от $S_1^*(n = 2)$.

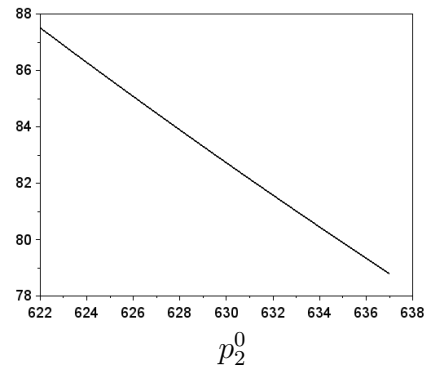
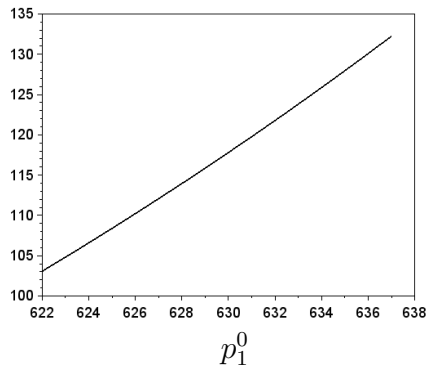


Рис. 3.20. Зависимость положения равновесия от $S_2^*(n = 2)$.

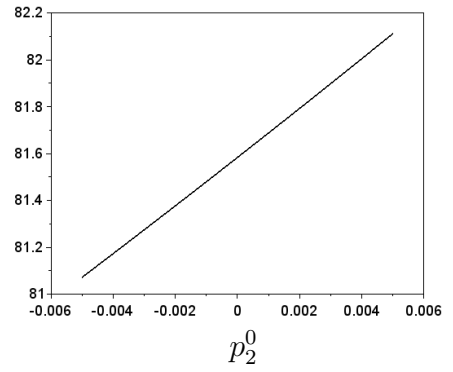
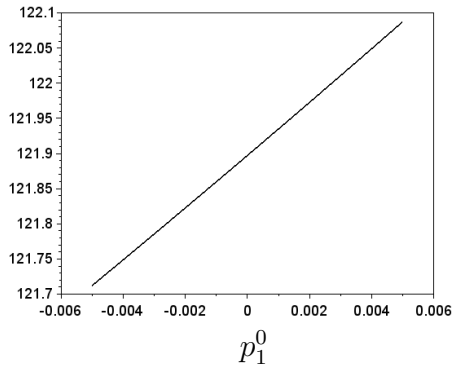


Рис. 3.21. Зависимость положения равновесия от $E_{11}(n = 2)$.

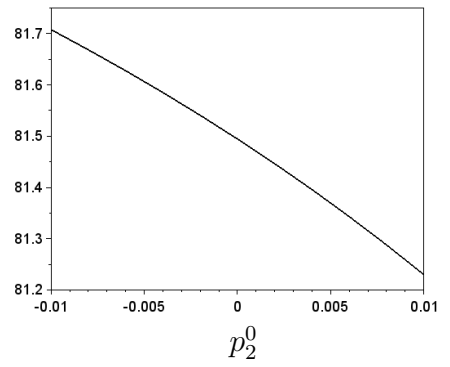
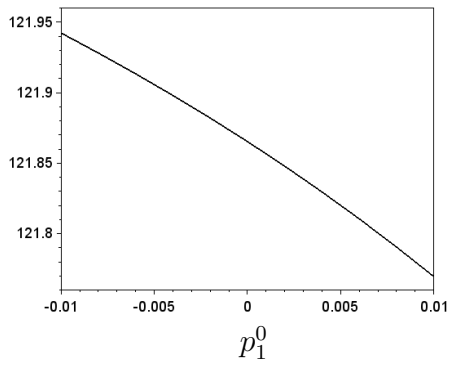


Рис. 3.22. Зависимость положения равновесия от $E_{12}(n = 2)$.

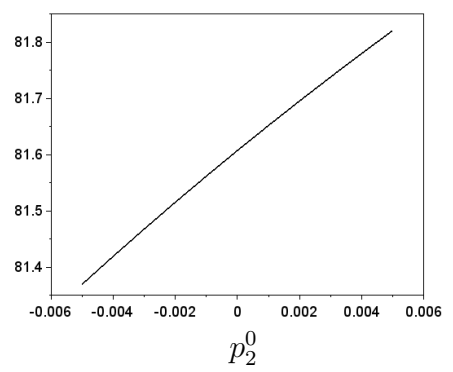
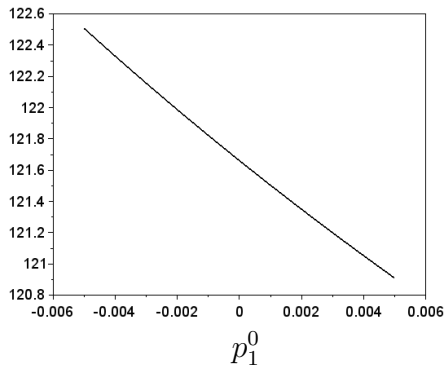


Рис. 3.23. Зависимость положения равновесия от $E_{21}(n = 2)$.

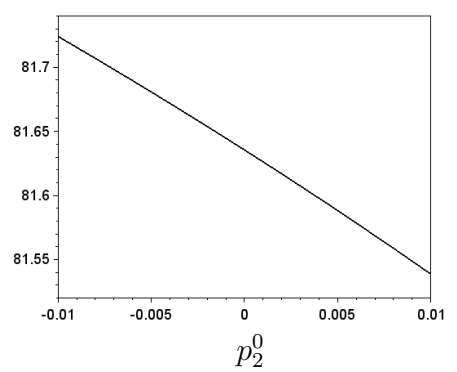
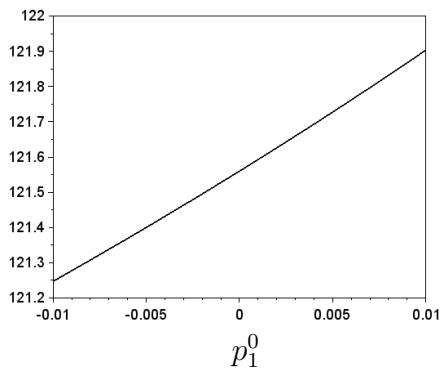


Рис. 3.24. Зависимость положения равновесия от $E_{22}(n = 2)$.

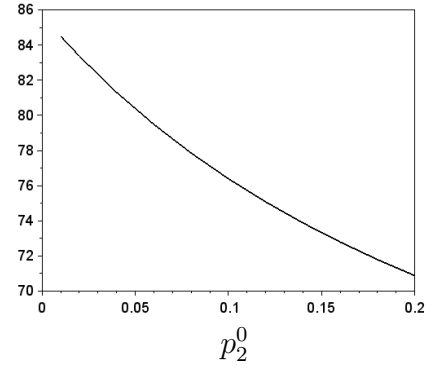
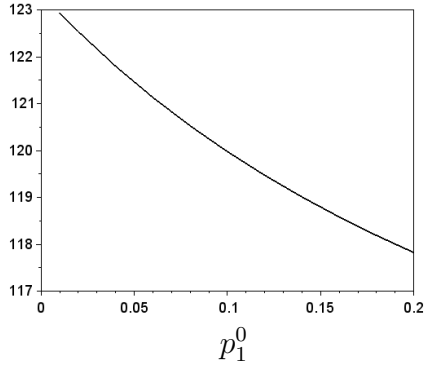


Рис. 3.25. Зависимость положения равновесия от $\tilde{E}_{11}(n = 2)$.

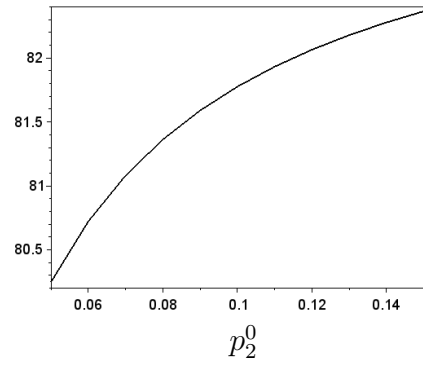
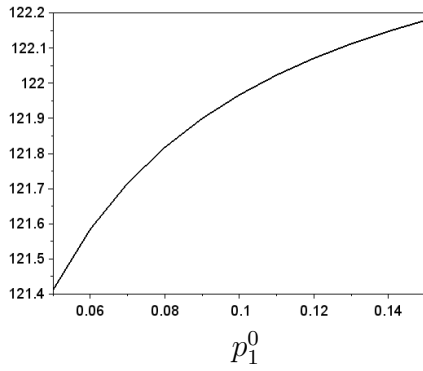


Рис. 3.26. Зависимость положения равновесия от $\tilde{E}_{12}(n = 2)$.

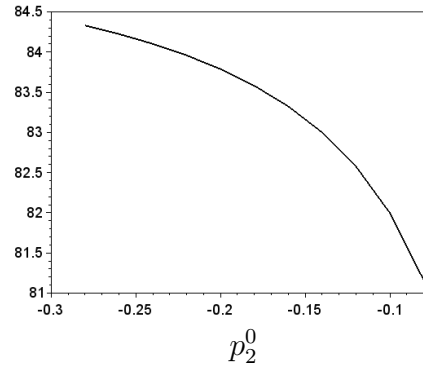
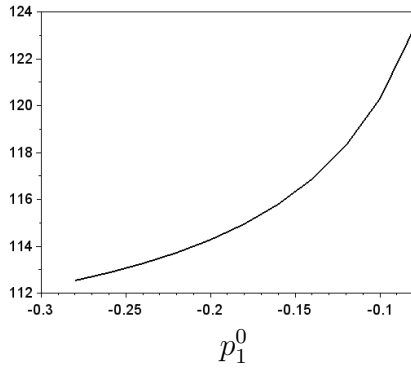


Рис. 3.27. Зависимость положения равновесия от $\tilde{E}_{21}(n = 2)$.

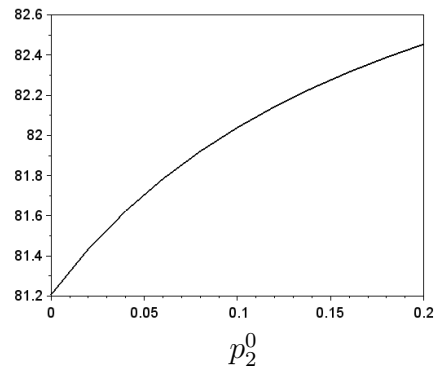
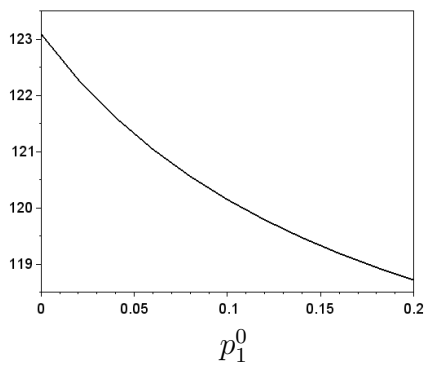


Рис. 3.28. Зависимость положения равновесия от $\tilde{E}_{22}(n = 2)$.

3.1.5. Достаточные условия существования положения частичного равновесия

Напомним определение из Главы 1.

Определение 3.1 ([21]). Положением частичного равновесия в модели σ_o назовем такой вектор $\hat{p} \in P$, что

$$S_i(\hat{p}) + a_i = D_i(\hat{p}), \quad i = \overline{1, m}, \quad m \leq n.$$

Задача состоит в том, чтобы получить условия, при которых в модели σ_o существует положение частичного равновесия.

Замечание 3.2. Здесь мы рассматриваем отображения

$$\tilde{S}, \tilde{D} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^m, \quad \tilde{S} = P \circ S, \quad \tilde{D} = P \circ D,$$

где $P : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ – оператор проектирования из \mathbb{R}_+^n в \mathbb{R}_+^m , определяемый следующей формулой

$$P = \begin{pmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times n-m} \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица.

Используя теорему о точках совпадения, мы можем получить достаточные условия существования положения частичного равновесия. Введем обозначения:

$$\hat{\alpha}(\sigma_o) = \min_{p \in P} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^T \right)^{-1} \right\|^{-1}, \quad (3.15)$$

$$\hat{\beta}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1, m}} D_i^* \left(\prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \max_{l=1,2} \left\{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \max_{l=1,2} c_{lj}^{E_{ij}}, \quad (3.16)$$

$$\hat{\gamma}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1, m}} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|. \quad (3.17)$$

Теорема 3.4 ([21]). Пусть параметры модели σ_o удовлетворяют условиям:

$$1) \det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^T \neq 0;$$

$$2) \hat{\gamma}(\sigma_o) < \hat{\alpha}(\sigma_o) - \hat{\beta}(\sigma_o).$$

Тогда в модели σ_o существует положение частичного равновесия $\hat{p} \in \text{int } P$.

Доказательство. В пространстве \mathbb{R}^n определим две нормы:

$$\|x\|_1 = \max_{i=1, n} \frac{2|x_i|}{c_{2i} - c_{1i}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n); \quad (3.18)$$

$$\|y\|_2 = \max_{i=1, n} |y_i|, \quad y = (y_1, \dots, y_n). \quad (3.19)$$

Рассмотрим отображения $D, S : (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$, где $X = Y = \mathbb{R}_+^n$, а метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно.

Сначала оценим $\text{lip}(D|P)$. Из равенства

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \frac{E_{ij} D_i(p)}{p_j}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| &= \max_{\|x\|_1=1} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p)x \right\|_2 = \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, m} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p)x_k \right| = \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, m} \left| \sum_{k=1}^n E_{ik} \frac{D_i(p)}{p_k} x_k \right| = \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, m} \left| \sum_{k=1}^n E_{ik} \frac{D_i^*}{p_k} x_k \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \right| \leq \\ &\leq \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, m} \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{D_i^*}{p_k} |x_k| \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \leq \\ &\leq \max_{i=1, m} D_i^* \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \leq \\ &\leq \max_{i=1, m} D_i^* \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \left(\prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \max_{l=1, 2} \left\{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n p_j^{E_{ij}} \leq \\ &\leq \max_{i=1, m} D_i^* \left(\prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \max_{l=1, 2} \left\{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \max_{l=1, 2} c_{lj}^{E_{ij}} = \hat{\beta}(\sigma_o). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{lip}(D|P) = \max_{p \in P} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| \leq \hat{\beta}(\sigma_o).$$

Теперь перейдем к оценке величины $\text{cov}(S|P)$. Из [44] известно, что

$$\text{cov}(S|P) = \min_{p \in P} \text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right).$$

Кроме того, в силу Леммы 2.1 мы имеем

$$\text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \geq \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^T \right)^{-1} \right\|^{-1} = \tilde{\alpha}(p),$$

В силу условия 1) норма в последнем выражении конечна.

Следовательно,

$$\text{cov}(S|P) = \min_{p \in P} \text{cov}(S|p) \geq \min_{p \in P} \text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \geq \min_{p \in P} \tilde{\alpha}(p) = \hat{\alpha}(\sigma_o).$$

В силу условия 2) и неравенств

$$\text{cov}(S|P) \geq \hat{\alpha}(\sigma_o), \text{lip}(D|P) \leq \hat{\beta}(\sigma_o)$$

следует, что существуют такие α, β , что $\hat{\gamma}(\sigma_o) < \alpha - \beta$, отображение S является α -накрывающим на P , а отображение D удовлетворяет условию Липшица на P с константой β . Поскольку P – полное метрическое пространство, то по теореме 2.2 существует вектор $\hat{p} \in \text{int } P$ такой, что

$$S(\hat{p}) + a = D(\hat{p}).$$

Более того, в силу условия 2) мы получаем, что $\hat{p} \in \text{int } P$, так как в силу теоремы 2.2

$$\rho_X(\hat{p}, \tilde{c}) \leq \frac{\rho_Y(S(\tilde{c}), D(\tilde{c}))}{\alpha - \beta} < 1.$$

□

3.1.6. Метод нахождения положения частичного равновесия

Ниже приведена модификация Алгоритма 1 для модели типа Аллена открытого рынка с постоянными эластичностями.

Алгоритм 3

Шаг 0. Вычислить константы $\bar{\alpha}(\sigma_o)$ и $\bar{\beta}(\sigma_o)$ по формулам (3.15), (3.16). Зафиксировать метрики ρ_X и ρ_Y по формулам (3.6), (3.7).

Шаг 1. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения, $p_0 \in P$ – начальное приближение, $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса, положить номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)| < \varepsilon,$$

где $D(p)$ определено формулой (1.18), а $S(p)$ – формулой (1.19). Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 3. Используя приближение p_k , вычислить $h_k = (h_{k1}, \dots, h_{kn})$ по формуле

$$|h_{ki}| \leq \frac{c_{2i} - c_{1i}}{2\alpha} \max_{j=\overline{1,n}} \frac{|S_j(p_k) + a - D_j(p_k)|}{c_{2j} - c_{1j}}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (3.20)$$

Шаг 4. На $B_{\mathbb{R}^n}(p_k, h_k)$ построить σ_k -сеть Z при

$$\sigma_k = \frac{\delta}{2} \max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)|.$$

Шаг 5. Поочередно брать точки $\tilde{x} \in Z \cap B_{\mathbb{R}^n}(p_k, h_k)$ и проверять выполнение неравенства:

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S(p) + a - D(p_k)| \leq \sigma_k \max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)|. \quad (3.21)$$

Если подходящая под условие точка найдена, то перейти к шагу 6. Если нет, то уменьшить σ_i в два раза, построить новую сеть и повторить перебор.

Шаг 6. Положить $p_{k+1} = \tilde{p}$, увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

3.1.7. Модельный пример

Случай $n = 2, m = 1$. Рассмотрим вопрос о существовании положения равновесия в следующей модели из Σ_{op} (здесь были опущены параметры модели,

не использующиеся при ее исследовании)

$$a_1 = 27.5, \quad c_1 = (61.91, 43.75)^T, \quad c_2 = (143.62, 75.40)^T, \quad p^* = (69.59, 43.93)^T, \\ S^* = 34.17, \quad D^* = 71.41, \quad \mathcal{E} = (0.14, 0.53)^T, \quad \tilde{\mathcal{E}} = (0.63, 0.93)^T,$$

т.е. решения уравнения

$$S_1^* \left(\frac{p_1}{p_1^*} \right)^{\tilde{E}_{11}} \left(\frac{p_2}{p_2^*} \right)^{\tilde{E}_{12}} + a_1 = D_1^* \left(\frac{p_1}{p_1^*} \right)^{E_{11}} \left(\frac{p_2}{p_2^*} \right)^{E_{12}} \quad (3.22)$$

С помощью Алгоритма 3 было найдено следующее положение равновесия:

$$\hat{p} = (115.99, 62.09)^T, \quad \rho_Y(S(p^0) + a, D(p^0)) = 0.00000951.$$

Легко видеть, что $p_1^0 > p_1^*$, $p_2^0 > p_2^*$. Это говорит о том, что цена на товары может быть увеличена, поскольку $S_1^* < D_1^*$.

Здесь также легко проследить зависимость между положением равновесия и входными параметрами. Проиллюстрируем это ниже.

Параметр a_1 в модели обратно пропорционален положению частичного равновесия (рис. 3.29). С возрастанием этого параметра возрастает значение функции $S + a$. Поскольку $\tilde{E}_{12} > E_{12} > 0$, мы получаем, что положение равновесия будет убывать.

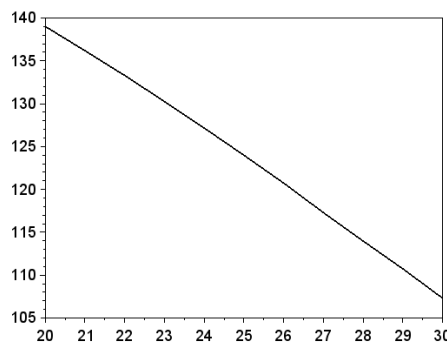


Рис. 3.29. Зависимость p_1^0 от a_1 ($n = 2, m = 1$).

Положение равновесия находится в прямой зависимости от параметров p_1^*, p_2^* (рис. 3.30–3.31), так как $\tilde{E}_{11} > E_{11} > 0$, $\tilde{E}_{12} > E_{12} > 0$.

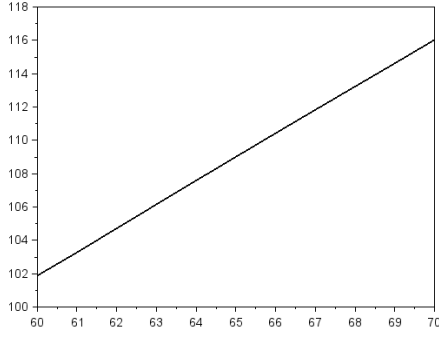


Рис. 3.30. Зависимость p_1^0 от p_1^* ($n = 2, m = 1$).

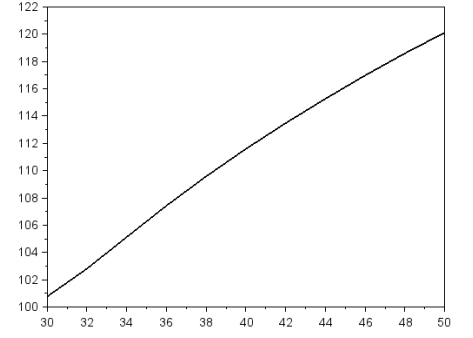


Рис. 3.31. Зависимость p_1^0 от p_2^* ($n = 2, m = 1$).

Параметр S^* обратно пропорционален положению равновесия (рис. 3.32). Так как при возрастании значения функции $S + a$ возрастает при возрастании параметра S^* , то положение равновесия будет убывать, поскольку $\tilde{E}_{11} > E_{11} > 0$. В силу тех же рассуждений параметр D^* оказывает обратный эффект по сравнению с параметром S^* (рис. 3.33).

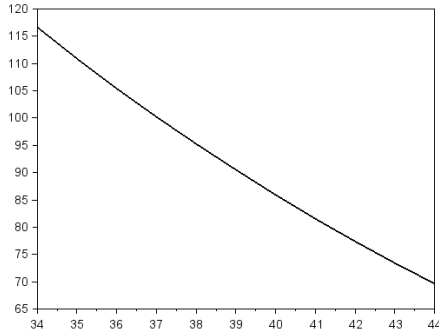


Рис. 3.32. Зависимость p_1^0 от S_1^* ($n = 2, m = 1$).

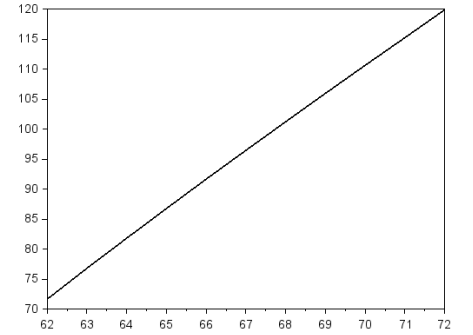
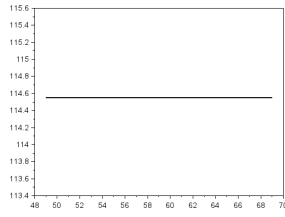
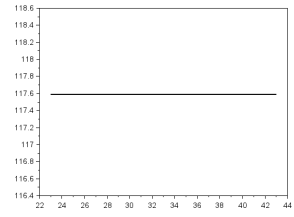


Рис. 3.33. Зависимость p_1^0 от D_1^* ($n = 2, m = 1$).

Параметры $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$, очевидно, не оказывают влияние на положение равновесия в модели (рис. 3.34–3.35).

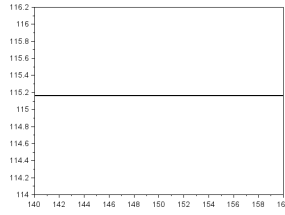


c_{11}

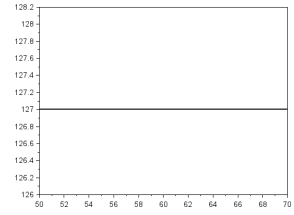


c_{12}

Рис. 3.34. Зависимость p_1^0 от c_1 ($n = 2, m = 1$).



c_{21}



c_{22}

Рис. 3.35. Зависимость p_1^0 от c_2 ($n = 2, m = 1$).

Параметры E_{11} и E_{12} прямо пропорциональны положению равновесия по первому аргументу (рис. 3.36, 3.37). При возрастании параметра E_{11} возрастает правая часть уравнения (3.22). Для достижения равенства в уравнении равновесная цена будет возрастать, так как $\tilde{E}_{11} < \tilde{E}_{11}$. В силу этого же условия равновесная цена возрастает при возрастании параметра \tilde{E}_{12} .

Параметры \tilde{E}_{11} и \tilde{E}_{12} обратно пропорциональны положению равновесия (рис. 3.38, 3.39). Это следует из тех же соображений, что и в случае изменения параметров E_{11}, E_{12} .

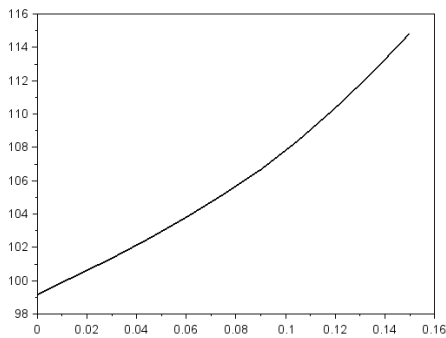


Рис. 3.36. Зависимость p_1^0 от E_{11} ($n = 2, m = 1$).

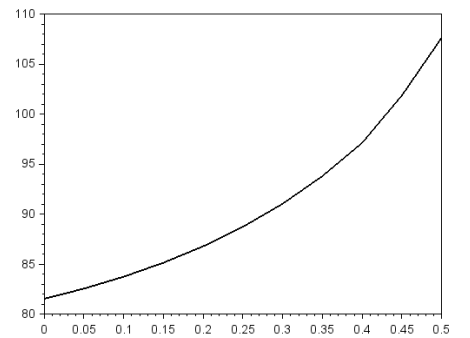


Рис. 3.37. Зависимость p_1^0 от E_{12} ($n = 2, m = 1$).

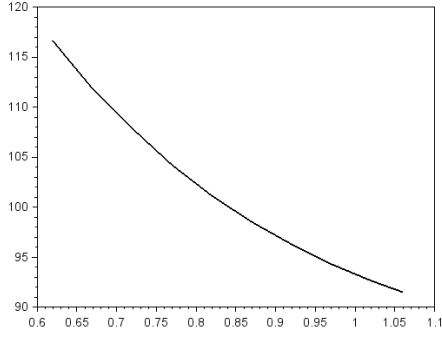


Рис. 3.38. Зависимость p_1^0 от \tilde{E}_{11} ($n = 2, m = 1$).

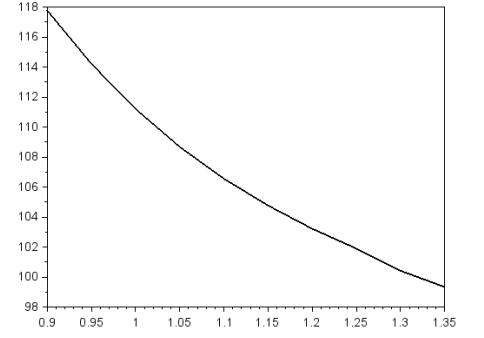


Рис. 3.39. Зависимость p_1^0 от \tilde{E}_{12} ($n = 2, m = 1$).

3.2. Положение равновесия в открытой модели типа Аллена с непостоянными эластичностями

3.2.1. Достаточные условия существования положения равновесия

Следующий пример показывает, что в модели $\sigma_f \in \Sigma_f$ отображение S , определенное формулой (1.28), может быть не биективно и применить принцип сжимающих отображений нельзя.

Пример 3.1. Пусть $n = 2$ и

$$c_1 = (1, 0.5), \quad c_2 = (5, 8), \quad S^* = (1, 1), \quad p^* = (1, 1),$$

$$\tilde{\lambda}_{11} = 2, \quad \tilde{\lambda}_{12} = -2, \quad \tilde{\lambda}_{21} = 3, \quad \tilde{\lambda}_{22} = -3,$$

$$\tilde{\chi}_{11} = 2, \quad \tilde{\chi}_{12} = 1, \quad \tilde{\chi}_{21} = 1, \quad \tilde{\chi}_{22} = -3.$$

Тогда

$$P = \{p = (p_1, p_2) \mid 1 \leq p_1 \leq 5, \quad 0.5 \leq p_2 \leq 8\}$$

и отображение S принимает вид

$$S_1(p) = e^{(p_1^2-1)} e^{-2(p_2-1)},$$

$$S_2(p) = e^{3(p_1-1)} e^{(p_2^{-3}-1)}.$$

Рассмотрим уравнение $S(p) = s, s = (e^7, e^{10})$ в виде следующей системы:

$$\begin{cases} e^{(p_1^2-1)} e^{-2(p_2-1)} = e^7, \\ e^{3(p_1-1)} e^{(p_2^{-3}-1)} = e^{10}. \end{cases}$$

Прологарифмируем эту систему

$$\begin{cases} p_1^2 - 1 - 2(p_2 - 1) = 7, \\ 3(p_1 - 1) + p_2^{-3} - 1 = 10. \end{cases}$$

Данная система имеет два решения, принадлежащих P :

$$\begin{cases} p_1 = 2.664 \\ p_2 = 0.550 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} p_1 = 4.666 \\ p_2 = 7.886 \end{cases}$$

(получены численно методом Ньютона). Следовательно, отображение S не будет биективным.

Воспользуемся теоремой о точках совпадения. Введем обозначения

$$\bar{\alpha}(\sigma_f) = \min_{p \in P} \left(\left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \right)^{-1} \right\| \right)^{-1}, \quad (3.23)$$

$$\bar{\beta}(\sigma_f) = \max_{i=1, n} D_i^* \prod_{j=1}^n \max_{m=1, 2} \left(\exp \left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}} (c_{mj}^{\chi_{ij}} - p_j^{*\chi_{ij}}) \right) \right) \sum_{k=1}^n \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \frac{|\lambda_{ik}|}{c_{1k}}, \quad (3.24)$$

$$\bar{\gamma}(\sigma_f) = \max_{i=1, n} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|. \quad (3.25)$$

Теорема 3.5 ([48]). Пусть параметры модели σ_f удовлетворяют условиям:

- 1) $\det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \neq 0$;
- 2) $\bar{\gamma}(\sigma_f) < \bar{\alpha}(\sigma_f) - \bar{\beta}(\sigma_f)$.

Тогда в модели σ_f существует положение равновесия $p^0 \in \text{int } P$.

Доказательство. Рассмотрим метрические пространства $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$, где $X = Y = \mathbb{R}_+^n$, а метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ по формулам

(3.18) и (3.19) соответственно. Наша цель – воспользоваться теоремой 2.2. Для этого нам необходимо оценить $\text{cov}(S|P)$. В [44] было показано, что

$$\text{cov}(S|P) = \min_{p \in P} \text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right),$$

а также

$$\text{cov}(S|p) = \text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right).$$

В свою очередь, по Лемме 2.1 имеем

$$\text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \geq \left(\left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \right)^{-1} (p) \right\| \right)^{-1} = \tilde{\alpha}(p).$$

Таким образом,

$$\text{cov}(S|P) = \min_{p \in P} \text{cov}(S|p) \geq \min_{p \in P} \tilde{\alpha}(p) = \bar{\alpha}(\sigma_f).$$

Теперь оценим $\text{lip}(D|P)$. Сначала вычислим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| &= \max_{\|x\|_1=1} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p)x \right\|_2 = \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, n} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p)x_j \right| = \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, n} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} p_j^{\chi_{ij}} \frac{D_i}{p_j} x_j \right| = \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, n} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} p_j^{\chi_{ij}-1} x_j D_i^* \prod_{k=1}^n \exp \left(\frac{\lambda_{ik}}{\chi_{ik}} (p_k^{\chi_{ik}} - (p_k^*)^{\chi_{ik}}) \right) \right| \leq \\ &\leq \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |\lambda_{ij}| \max \left\{ c_{1j}^{\chi_{ij}-1}, c_{2j}^{\chi_{ij}-1} \right\} D_i^* \prod_{k=1}^n \max_{m=1, 2} \exp \left(\frac{\lambda_{ik}}{\chi_{ik}} (c_{mk}^{\chi_{ik}} - (p_k^*)^{\chi_{ik}}) \right) = \\ &= \bar{\beta}(\sigma_f). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{lip}(D|P) = \max_{p \in P} \frac{\partial D}{\partial p}(p) \leq \bar{\beta}(\sigma_f).$$

Из условия 2) и неравенств

$$\text{cov}(D) \geq \bar{\alpha}(\sigma_f), \quad \text{lip}(S) \leq \bar{\beta}(\sigma_f)$$

следует, что существуют положительные числа α и β такие, что $\bar{\beta}(\sigma_f) < \beta < \alpha < \bar{\alpha}(\sigma_f)$, отображение S является α -накрывающим на P , а отображение β удовлетворяет условию Липшица на P с константой β . Так как P – полное метрическое пространство, то по теореме 2.2 существует вектор $p^0 \in \text{int } P$ такой, что

$$S(p^0) + a = D(p^0),$$

а в силу условия 2)

$$\rho_X(p^0, \tilde{c}) \leq \frac{\rho_Y(D(\tilde{c}), S(\tilde{c}))}{\alpha - \beta} < 1.$$

Следовательно, в модели σ_f существует положение равновесия $p^0 \in \text{int } P$. \square

В случае, если $\chi_{ij} = \tilde{\chi}_{ij} = 1$ для всех $i, j = \overline{1, n}$, мы можем гарантировать единственность положения равновесия. В этом случае

$$E_{ij}(p) = \lambda_{ij}p_j, \quad \tilde{E}_{ij}(p) = \tilde{\lambda}_{ij}p_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (3.26)$$

Введем обозначения:

$$\Lambda = \{\tilde{\lambda}_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}, \quad (3.27)$$

$$\bar{\alpha}(\sigma_l) = \left(\max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \sum_{k=1}^n \frac{|\tilde{\mu}_{ik}|}{S_k^*} \prod_{j=1}^n \max_{m=1,2} \left\{ \exp \left(\tilde{\lambda}_{kj}(p_j^* - c_{mj}) \right) \right\} \right)^{-1}, \quad (3.28)$$

$$\bar{\beta}(\sigma_l) = \max_{i=\overline{1,n}} D_i^* \prod_{j=1}^n \max_{m=1,2} \left\{ \exp \left(\lambda_{ij}(c_{mj} - p_j^*) \right) \right\} \sum_{k=1}^n \frac{2|\lambda_{ik}|}{c_{2k} - c_{1k}}, \quad (3.29)$$

$$\bar{\gamma}(\sigma_l) = \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|. \quad (3.30)$$

Теорема 3.6 ([48]). Пусть параметры модели σ_f удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \det \Lambda \neq 0;$$

$$2) \bar{\gamma}(\sigma_l) < \bar{\alpha}(\sigma_l) - \bar{\beta}(\sigma_l).$$

Тогда в модели σ_f существует единственное положение равновесия $p^0 \in P$.

Доказательство. Покажем, что существует S^{-1} . Для этого нужно показать,

что отображение S биективно. Для этого рассмотрим систему уравнений:

$$S_i^* \prod_{j=1}^n \exp \left(\tilde{\lambda}_{ij} (p_j - p_j^*) \right) = s_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.31)$$

Взяв логарифм от левой и правой частей каждого уравнения этой системы, получим

$$\ln S_i^* + \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_{ij} (p_j - p_j^*) = \ln s_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.32)$$

Отсюда мы получаем систему линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_{ij} p_j = \ln \frac{s_i}{S_i^*} + \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_{ij} p_j^*, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.33)$$

Так как $\det \Lambda \neq 0$, система (3.33) по теореме 2.6 совместна, а по теореме 2.7 имеет единственное решение

$$p_i = \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_{ij} \ln \frac{s_j}{S_j^*} + p_i^*, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.34)$$

где μ_{ij} – элемент матрицы, обратной к Λ . Следовательно, отображение S является биекцией и отображение S^{-1} существует.

Рассмотрим оператор

$$B : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \quad B(p) = S^{-1}(D(p) - a).$$

Повторяя рассуждения, полученные в доказательстве теоремы 2.2, мы получим, что

$$\text{lip}(B|P) \leq \text{lip}(S^{-1}|S(P)) \cdot \text{lip}(D|P).$$

и $B(P) \subseteq P$.

Теперь нам необходимо оценить величины $\text{lip}(S^{-1}|S(P))$ и $\text{lip}(D|P)$. Сперва оценим величину $\text{lip}(S^{-1}|S(P))$. Из (3.34) мы получаем, что:

$$S_i^{-1}(s) = p_i^* + \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_{ij} \ln \frac{s_j}{S_j^*}.$$

Тогда для любого $s \in S(P)$

$$\frac{\partial S_i^{-1}}{\partial s_k}(s) = \frac{\tilde{\mu}_{ik}}{s_k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial S^{-1}}{\partial s}(s) \right\| &= \max_{\|x\|_2=1} \left\| \frac{\partial S^{-1}}{\partial s}(s) \right\|_1 = \max_{\|x\|_2=1} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial S_i^{-1}}{\partial s_k}(s) x_k \right| \leq \\ &\leq \max_{\|x\|_2=1} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \sum_{k=1}^n |\mu_{ik}| \frac{|x_k|}{s_k} \leq \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \sum_{k=1}^n \frac{|\mu_{ik}|}{c_{1k}} = \bar{\beta}(\sigma_l). \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем, что

$$\text{lip}(S^{-1}|S(P)) = \max_{s \in S(P)} \left\| \frac{\partial S^{-1}}{\partial s}(s) \right\| \leq \frac{1}{\bar{\alpha}(\sigma_l)}.$$

Теперь оценим величину $\text{lip}(D|P)$. Для этого сначала оценим $\left\| \frac{\partial D}{\partial p} \right\|$:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| &= \max_{\|x\|_1=1} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) x \right\|_2 = \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,n}} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) x_k \right| = \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=\overline{1,n}} \left| \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} D_i(p) x_k \right| \leq \max_{i=\overline{1,n}} \left| \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} x_k D_i^* \prod_{j=1}^n \exp(\lambda_{ij}(p_j - p_j^*)) \right| \leq \\ &\leq \max_{i=\overline{1,n}} D_i^* \prod_{j=1}^n \max_{m=1,2} \{ \exp(\lambda_{ij}(c_{mj} - p_j^*)) \} \sum_{k=1}^n \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} |\lambda_{ik}| = \bar{\beta}(\sigma_l). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{lip}(D|P) = \max_{p \in P} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| \leq \bar{\beta}(\sigma_l).$$

Из условия 2) и неравенств

$$\text{lip}(S^{-1}|S(P)) \leq \frac{1}{\bar{\alpha}(\sigma_l)}, \quad \text{lip}(D|P) \leq \bar{\beta}(\sigma_l)$$

мы получаем, что существуют такие числа $\alpha > 0, \beta > 0$, что $\bar{\gamma}(\sigma_l) < \alpha - \beta$, отображение S^{-1} удовлетворяет на $S(P)$ условию Липшица с константой $1/\alpha$, а отображение D удовлетворяет условию Липшица на P с константой $\bar{\beta}(\sigma_l)$.

Поскольку

$$\text{lip}(B|P) \leq \frac{1}{\alpha}\beta < 1$$

в силу условия 2), мы получаем, что отображение B является сжимающим. Так как P – полное метрическое пространство, то по теореме 2.5 существует единственное решение p^0 уравнения $B(p) = p$, откуда непосредственно вытекает, что в модели σ_f существует единственное положение равновесия p^0 . \square

3.2.2. Метод нахождения положения равновесия

Ниже приведен используемый в численных экспериментах алгоритм поиска положения равновесия в модели открытого рынка с непостоянными эластичностями.

Алгоритм 4

Шаг 0. Вычислить константы $\bar{\alpha}(\sigma_o)$ и $\bar{\beta}(\sigma_o)$ по формулам (3.23), (3.24). Зафиксировать метрики ρ_X и ρ_Y по формулам (3.6), (3.7).

Шаг 1. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения, $p_0 \in P$ – начальное приближение, $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса, положить номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)| < \varepsilon,$$

где $D(p)$ определено формулой (1.27), а $S(p)$ – формулой (1.28). Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 3. Используя приближение p_k , вычислить $h_k = (h_{k1}, \dots, h_{kn})$ по формуле

$$|h_{ki}| \leq \frac{c_{2i} - c_{1i}}{2\alpha} \max_{j=\overline{1,n}} \frac{|S_j(p_k) + a - D_j(p_k)|}{c_{2j} - c_{1j}}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (3.35)$$

Шаг 4. На $B_{\mathbb{R}^n}(p_k, h_k)$ построить σ_k -сеть Z при

$$\sigma_k = \frac{\delta}{2} \max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)|.$$

Шаг 5. Поочередно брать точки $\tilde{x} \in Z \cap B_{\mathbb{R}^n}(p_k, h_k)$ и проверять выполнение

неравенства:

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S(p) + a - D(p_k)| \leq \sigma_k \max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)|. \quad (3.36)$$

Если подходящая под условие точка найдена, то перейти к шагу 6. Если нет, то уменьшить σ_i в два раза, построить новую сеть и повторить перебор.

Шаг 6. Положить $p_{k+1} = \tilde{p}$, увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

3.2.3. Модельный пример

Случай $n = 1$. Рассмотрим следующую модель из Σ_f :

$$\begin{aligned} a &= 20.72665405, \quad c_1 = 65.13793945, \quad c_2 = 123.5268173, \\ p^* &= 112.6758499, \quad S^* = 24.2594986, \quad D^* = 81.36868286, \\ \lambda &= -0.2404059, \quad \tilde{\lambda} = -0.9190364, \quad \chi = -0.4210924, \quad \tilde{\chi} = 0.3925322, \end{aligned}$$

Требуется найти положение равновесия в этой модели, т.е. решение уравнения:

$$S^* \exp \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\chi}} (p^{\tilde{\chi}} - (p^*)^{\tilde{\chi}}) \right) + a = D^* \exp \left(\frac{\lambda}{\chi} (p^{\chi} - (p^*)^{\chi}) \right). \quad (3.37)$$

С помощью алгоритма 4 было получено, что:

$$p^0 = 95.78887984, \quad \rho_Y(S(p^0) + a, D(p^0)) = 0.00000591.$$

Заметим, что $p^0 < p^*$. Поскольку эластичности в данной модели отрицательны, мы получаем, что цены для обеспечения эффективного функционирования системы цена на товар должна быть снижена.

Выясним, как параметры модели влияют на положение равновесия в ней.

Параметр a прямо пропорционален положению равновесия (рис. 3.40).

Параметры модели p^* , S^* , D^* ведут себя так же, как и в предыдущем примере (рис. 3.41, 3.42, 3.43).

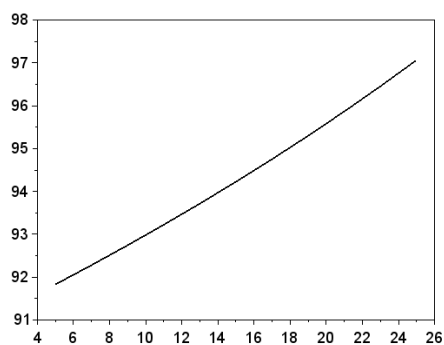


Рис. 3.40. Зависимость p^0 от a ($n = 1$).

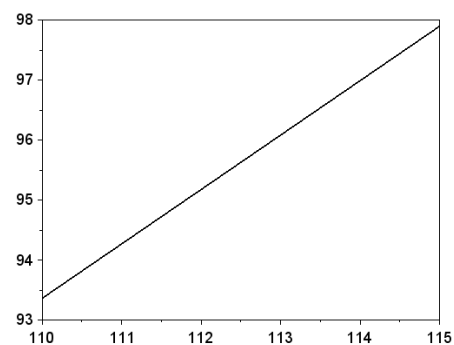


Рис. 3.41. Зависимость p^0 от p^* ($n = 1$).

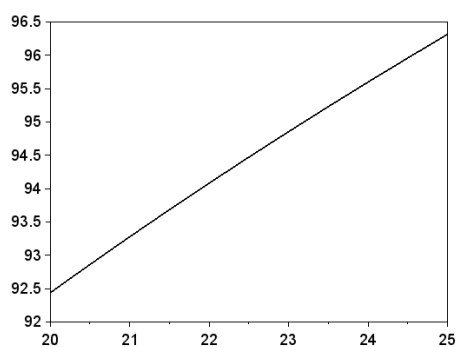


Рис. 3.42. Зависимость p^0 от S^* ($n = 1$).

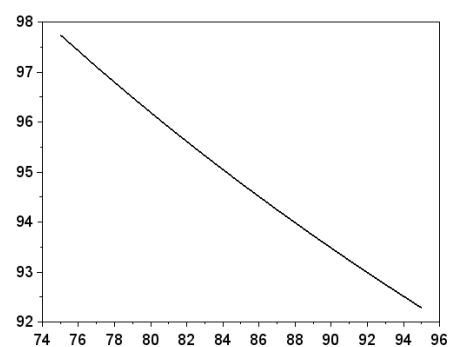


Рис. 3.43. Зависимость p^0 от D^* ($n = 1$).

Так же, как и в предыдущих моделях, изменение параметров c_1, c_2 не влияет на положение равновесия.

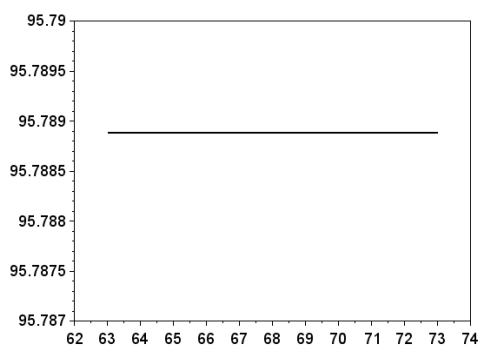


Рис. 3.44. Зависимость p^0 от c_1 ($n = 1$).

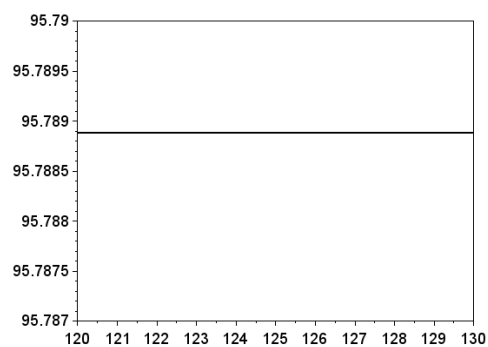


Рис. 3.45. Зависимость p^0 от c_2 ($n = 1$).

Параметр λ прямо пропорционален положению равновесия в модели (рис.

3.46). Это связано с тем, что при увеличении λ возрастает правая часть уравнения (3.37), поскольку $\frac{\lambda}{\chi} (p^\chi - (p^*)^\chi) > 0$. Так как $\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\chi}} (p^{\tilde{\chi}} - (p^*)^{\tilde{\chi}}) > 0$, положение равновесия будет возрастать. По аналогичным соображениям параметр $\tilde{\lambda}$ обратно пропорционален положению равновесия (рис. 3.47).

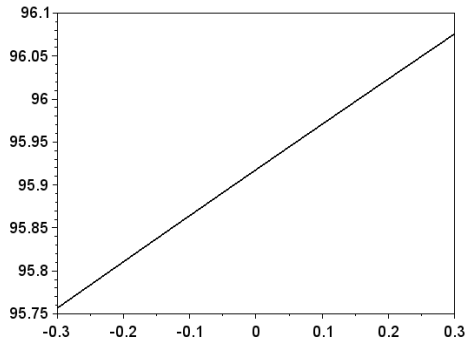


Рис. 3.46. Зависимость p^0 от λ ($n = 1$).

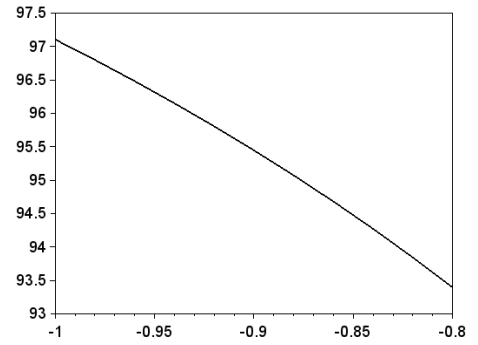


Рис. 3.47. Зависимость p^0 от $\tilde{\lambda}$ ($n = 1$).

Параметр χ при больших отрицательных значениях практически не оказывает влияния на положение равновесия (рис. 3.48). Это связано с тем, что при убывании параметра χ правая часть уравнения (3.37) практически не меняется. Однако как только параметр χ становится положительным, положение равновесия достаточно быстро убывает. Это связано с тем, что показатель степени экспоненты в правой части уравнения (3.37) становится положительным.

По той же причине при возрастании параметра $\tilde{\chi}$ положение равновесия возрастает (рис. 3.49).

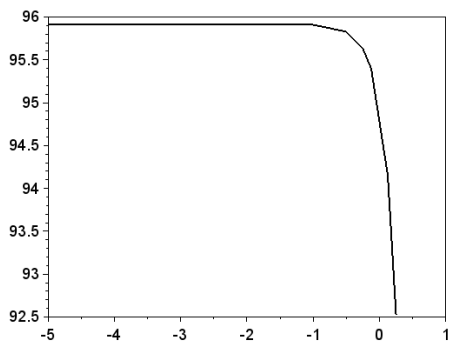


Рис. 3.48. Зависимость p^0 от χ ($n = 1$).

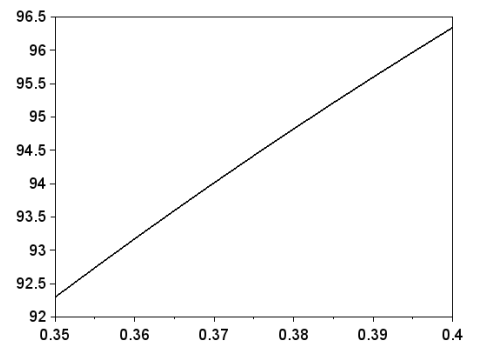


Рис. 3.49. Зависимость p^0 от $\tilde{\chi}$ ($n = 1$).

Случай $n = 2$. Рассмотрим следующую модель из Σ_f :

$$\begin{aligned}
 a &= (98.70, 14.43)^T, \quad c_1 = (6.50, 8.41)^T, \quad c_2 = (6.70, 8.72)^T, \\
 p^* &= (6.54, 8.71)^T, \quad S^* = (712.62, 820.49)^T, \quad D^* = (756.51, 742.27)^T, \\
 \Lambda &= \begin{pmatrix} 0.1048635 & 0.1265929 \\ -0.036955 & -0.1332431 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0.4845996 & 0.9848483 \\ -0.9983824 & 0.2584866 \end{pmatrix}, \\
 \chi_{11} &= -0.0358759, \quad \chi_{12} = 0.0732839, \quad \chi_{21} = 0.0701037, \quad \chi_{22} = 0.0597848, \\
 \tilde{\chi}_{11} &= -0.5309825, \quad \tilde{\chi}_{12} = 0.2899285, \quad \tilde{\chi}_{21} = 0.2106486, \quad \tilde{\chi}_{22} = -0.0253643.
 \end{aligned}$$

С помощью метода нахождения было получено следующее положение равновесия:

$$p^0 = (6.60737586, 8.56597393), \quad \rho_Y(S(p^0) + a, D(p^0)) = 0.00000728.$$

Ниже представлены графики зависимости положения равновесия от входных параметров.

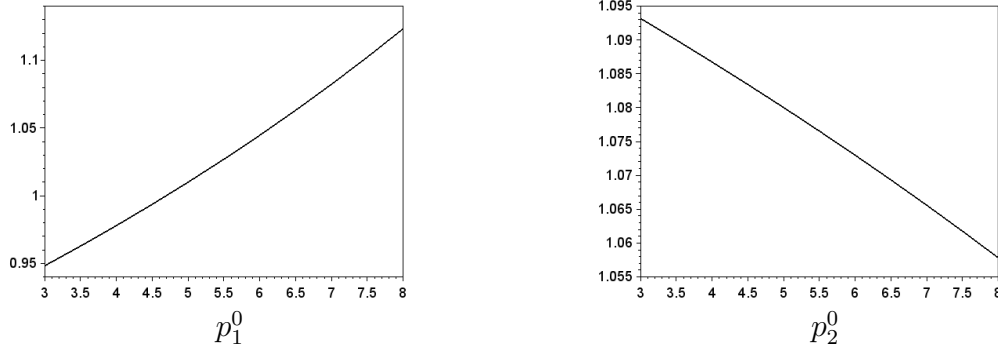


Рис. 3.50. Зависимость положения равновесия от параметра a_1 ($n = 2$)

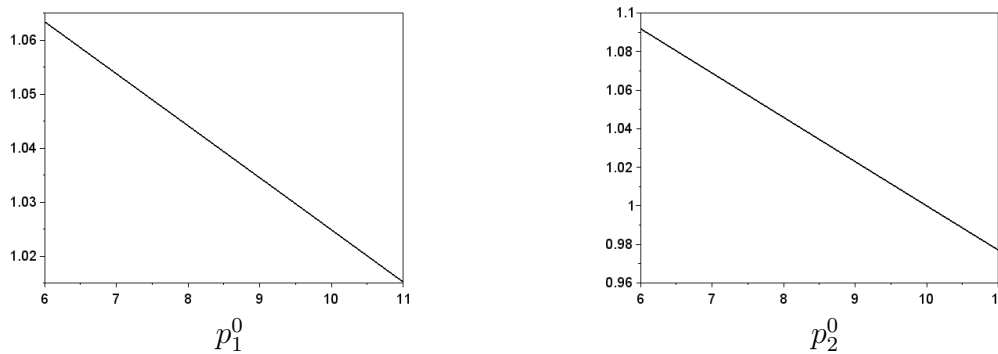


Рис. 3.51. Зависимость положения равновесия от параметра a_2 ($n = 2$)

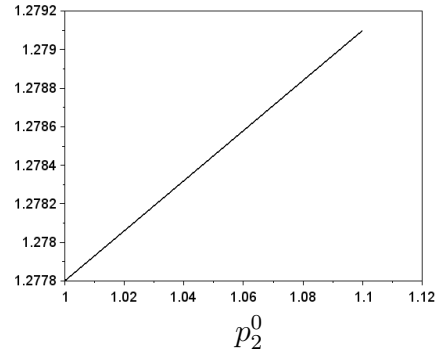
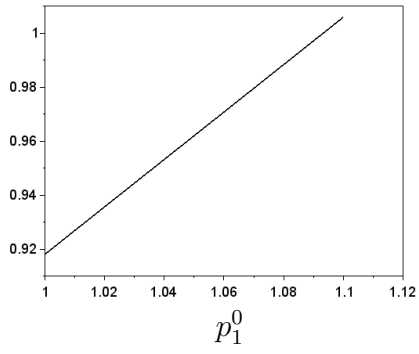


Рис. 3.52. Зависимость положения равновесия от параметра p_1^* ($n = 2$)

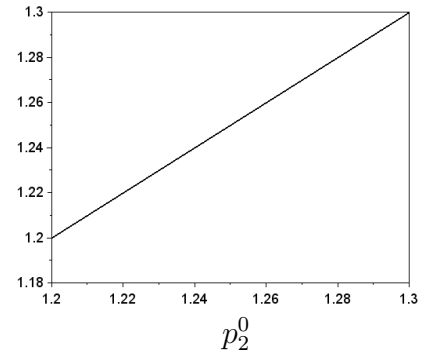
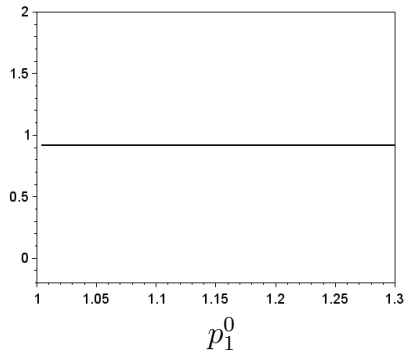


Рис. 3.53. Зависимость положения равновесия от p_2^* ($n = 2$).

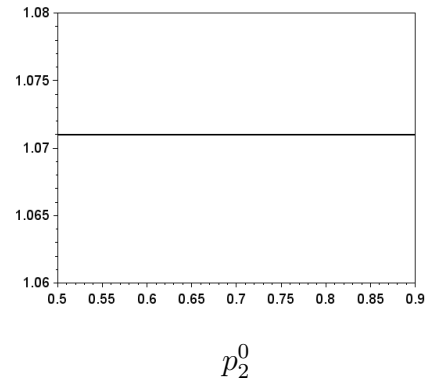
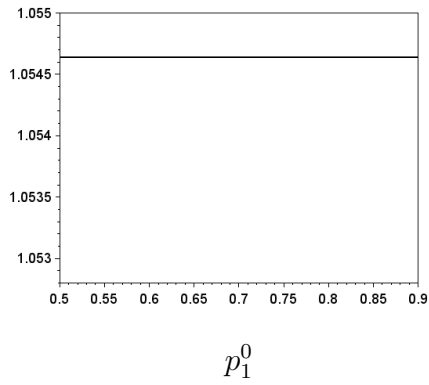


Рис. 3.54. Зависимость положения равновесия от параметра c_{11} ($n = 2$)

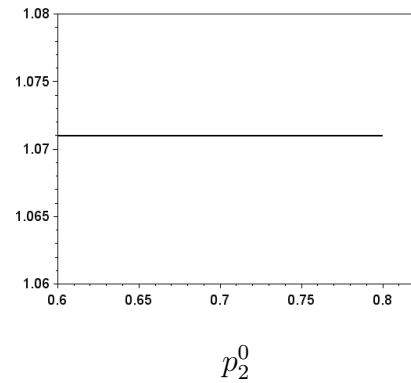
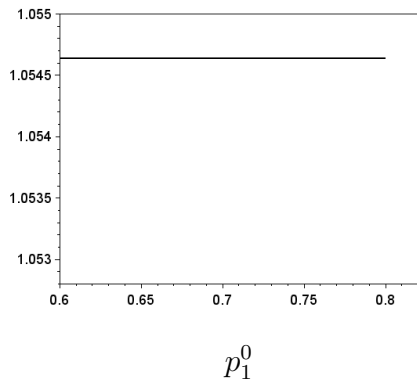


Рис. 3.55. Зависимость положения равновесия от параметра c_{12} ($n = 2$)

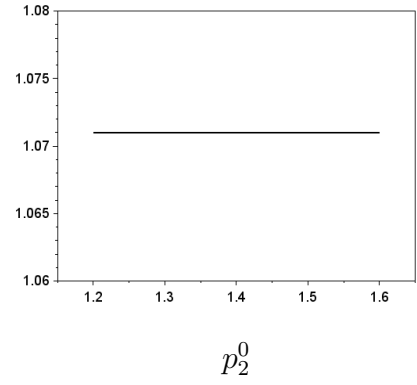
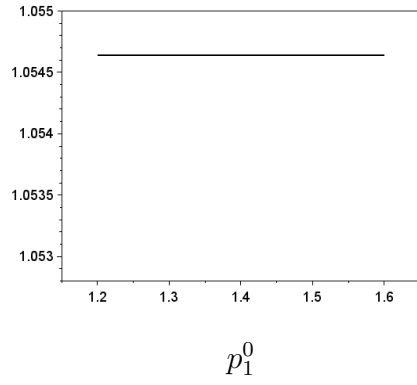


Рис. 3.56. Зависимость положения равновесия от параметра c_{21} ($n = 2$)

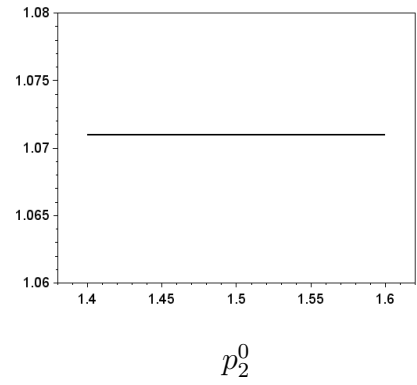
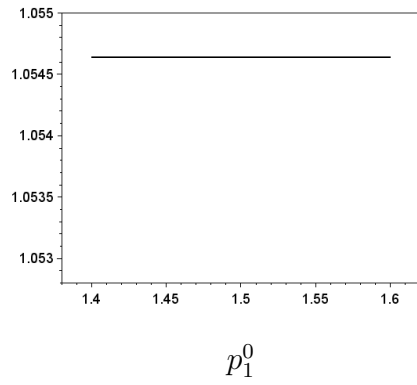


Рис. 3.57. Зависимость положения равновесия от параметра c_{22} ($n = 2$)

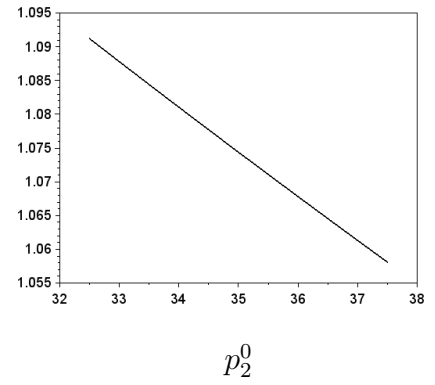
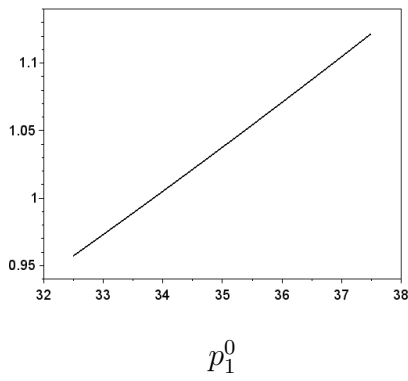


Рис. 3.58. Зависимость положения равновесия от S_1^* ($n = 2$).

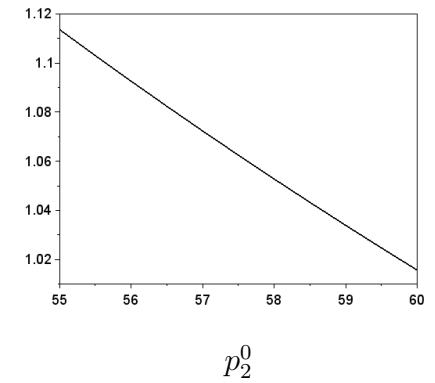
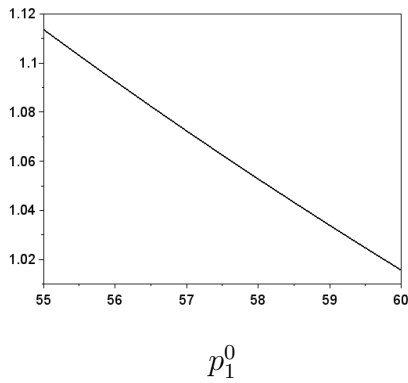


Рис. 3.59. Зависимость положения равновесия от S_2^* ($n = 2$).

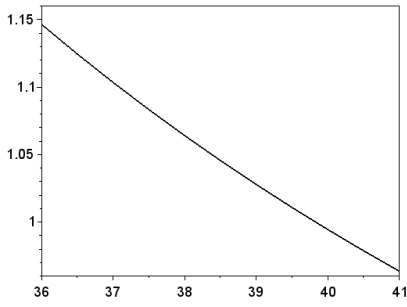
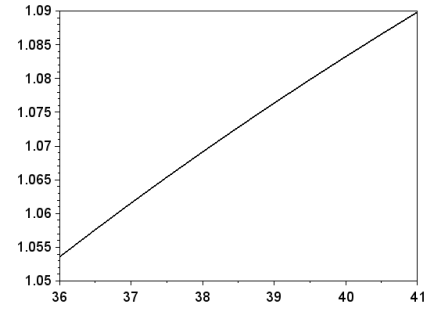

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 3.60. Зависимость положения равновесия от D_1^* ($n = 2$).

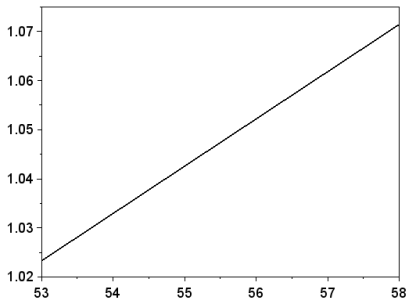
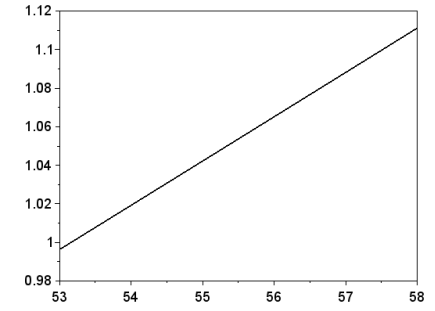

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 3.61. Зависимость положения равновесия от D_2^* ($n = 2$).

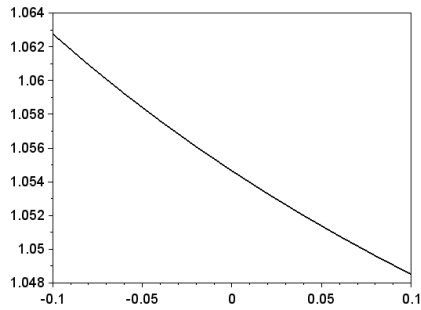
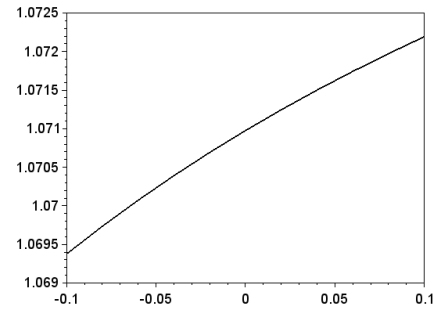

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 3.62. Зависимость положения равновесия от λ_{11} ($n = 2$).

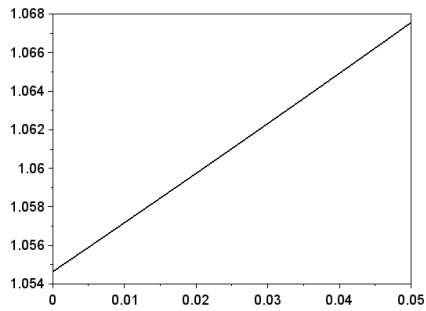
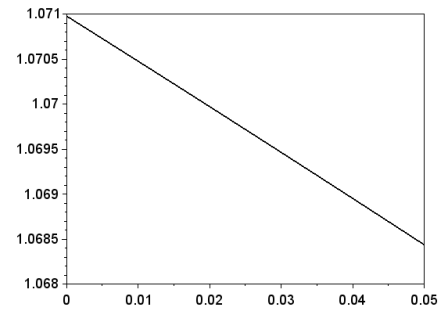

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 3.63. Зависимость положения равновесия от λ_{12} ($n = 2$).

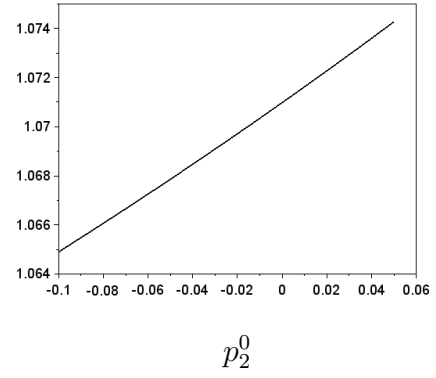
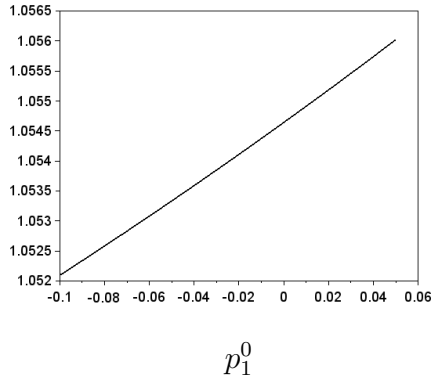


Рис. 3.64. Зависимость положения равновесия от $\lambda_{21}(n=2)$.

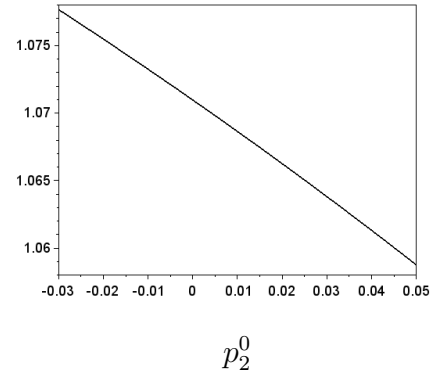
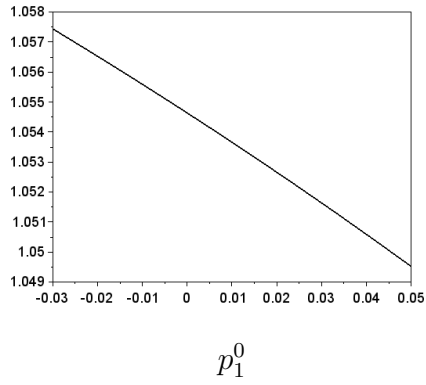


Рис. 3.65. Зависимость положения равновесия от $\lambda_{22}(n=2)$.

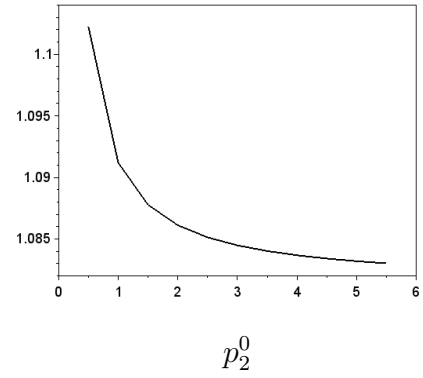
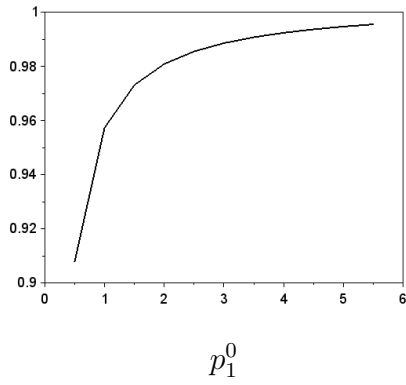


Рис. 3.66. Зависимость положения равновесия от $\tilde{\lambda}_{11}(n=2)$.

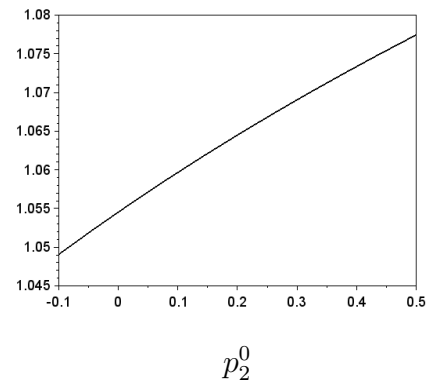
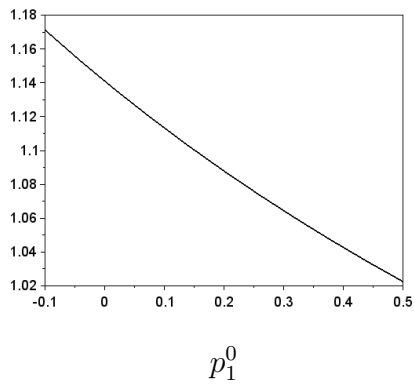


Рис. 3.67. Зависимость положения равновесия от $\tilde{\lambda}_{12}(n=2)$.

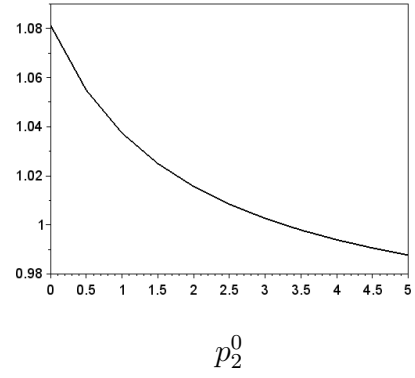
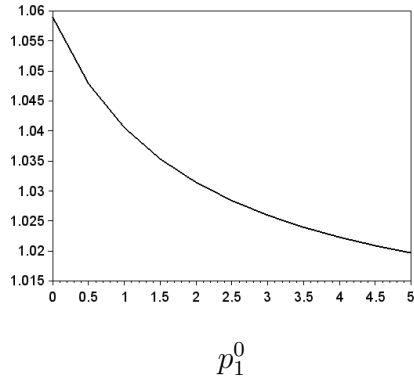


Рис. 3.68. Зависимость положения равновесия от $\tilde{\lambda}_{21}(n = 2)$.

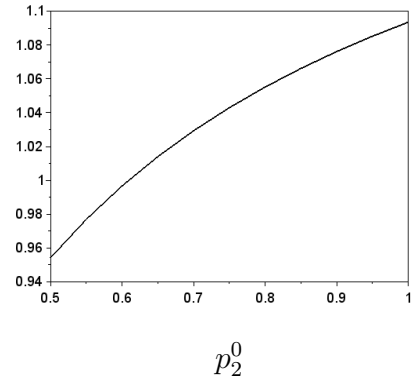
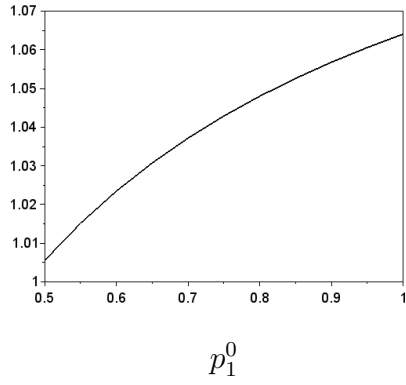


Рис. 3.69. Зависимость положения равновесия от $\tilde{\lambda}_{22}(n = 2)$.

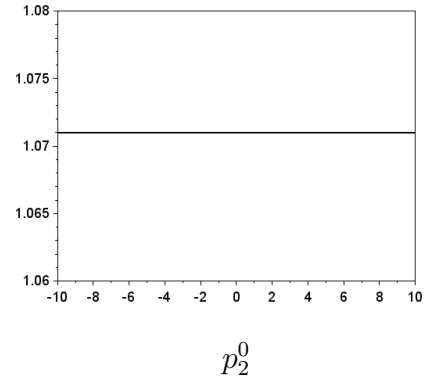
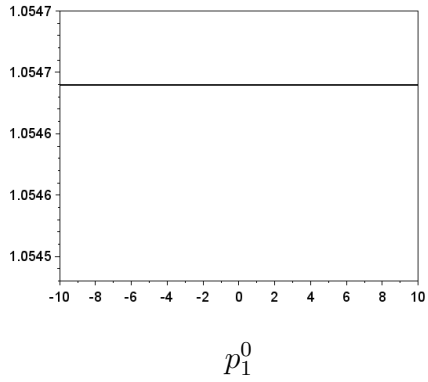


Рис. 3.70. Зависимость положения равновесия от $\chi_{11}(n = 2)$.

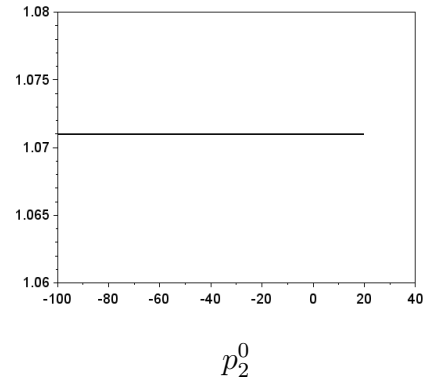
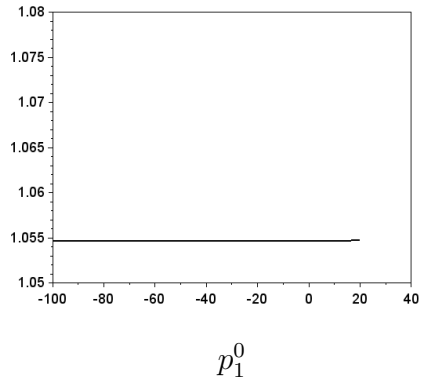


Рис. 3.71. Зависимость положения равновесия от $\chi_{12}(n = 2)$.

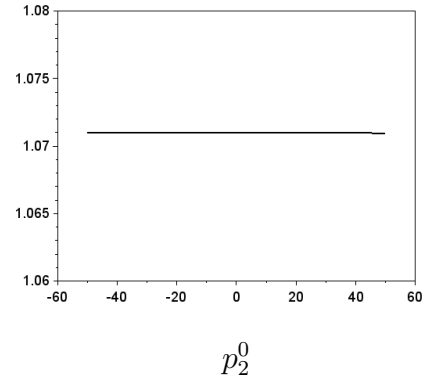
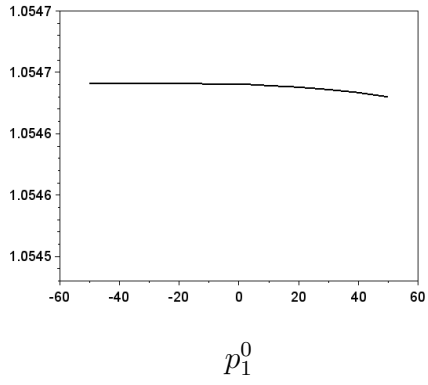


Рис. 3.72. Зависимость положения равновесия от $\chi_{21}(n=2)$.

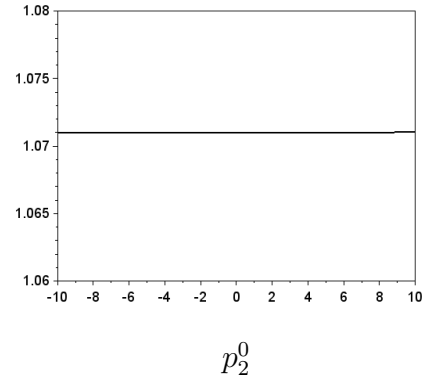
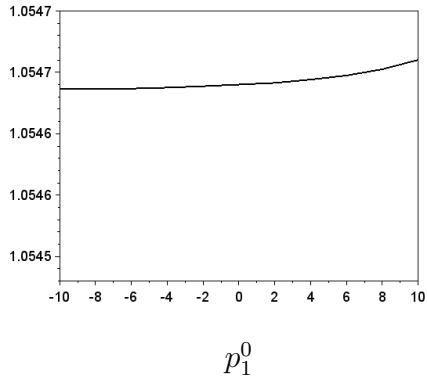


Рис. 3.73. Зависимость положения равновесия от $\chi_{22}(n=2)$.

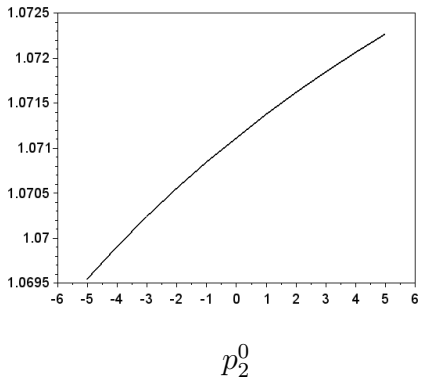
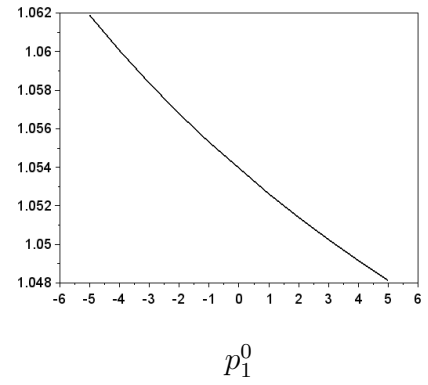


Рис. 3.74. Зависимость положения равновесия от $\tilde{\chi}_{11}(n=2)$.

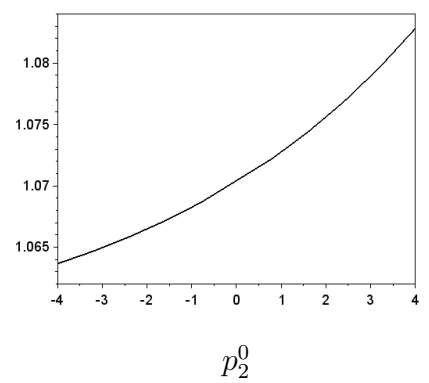
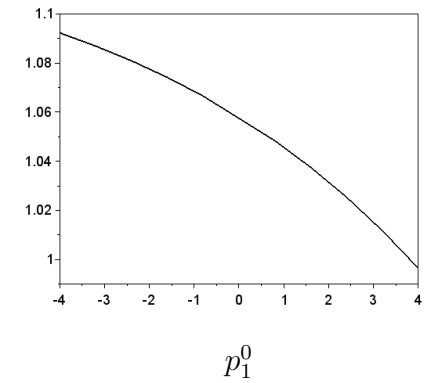


Рис. 3.75. Зависимость положения равновесия от $\tilde{\chi}_{12}(n=2)$.

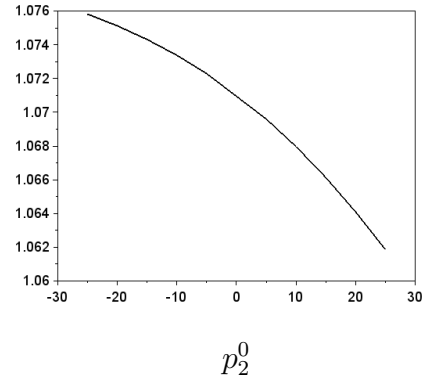
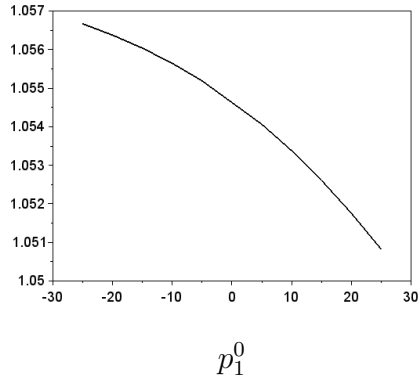


Рис. 3.76. Зависимость положения равновесия от $\tilde{\chi}_{21}(n = 2)$.

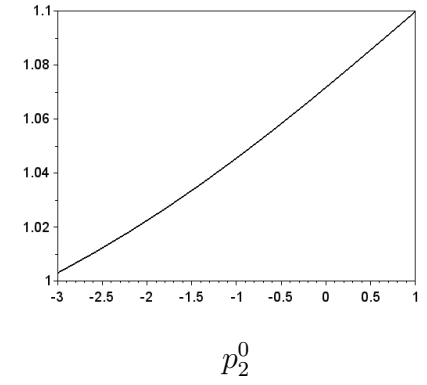
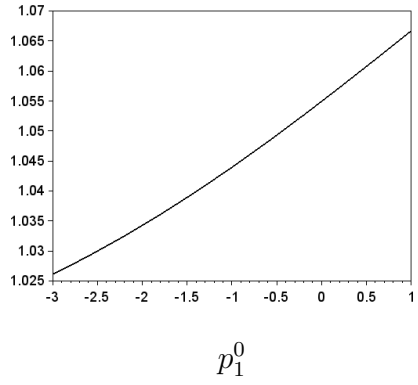


Рис. 3.77. Зависимость положения равновесия от $\tilde{\chi}_{22}(n = 2)$.

3.3. Выводы главы 3

В данной главе изложены результаты исследования моделей класса \mathbb{M}_o . К этим моделям относятся модели из подклассов Σ_o , Σ_f и Σ_l . Для них получены необходимые и достаточные условия существования положения равновесия, а также исследованы его свойства. Помимо этого, на модельных примерах проиллюстрирована зависимость положения равновесия от входных параметров модели, а также верифицированы методы нахождения положения равновесия.

Результаты данной главы опубликованы в работах [19, 45, 47, 48].

4. Положение равновесия в моделях без внешнего воздействия из класса \mathbb{M}_c

4.1. Положение равновесия в модели типа Аллена–Эрроу–Дебре

В данной модели отображения спроса и предложения описываются как решение соответствующих задач максимизации функции полезности потребителей и функции прибыли производителей. Получены достаточные условия существования положения равновесия. Проведен численный эксперимент, выявляющий зависимость положения равновесия от входных параметров модели.

4.1.1. Достаточные условия существования положения равновесия

Достаточные условия существования положения равновесия были получены в [2]. Доказательство основано на применении теоремы о точках совпадения для накрывающего и липшицевого отображений.

Обозначим

$$\bar{\alpha}(\sigma_{ad}) = \min_{i=\overline{1,m}} \left| \frac{L_i(c_{2i} - c_{1i})}{2c_{2i}^2} \right| - \max_{i=\overline{1,m}} \left(K_i \left(\prod_{j=1}^n c_{1j}^{-\beta_{ij}} \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij} \frac{c_{2j} - c_{1j}}{2c_{1j}} \right) \right), \quad (4.1)$$

$$\bar{\beta}(\sigma_{ad}) = \frac{\max_{i=\overline{1,m}} \frac{\alpha_i}{c_{1i}} \left[\frac{(I - \langle c_1, \alpha \rangle + c_{1i} a_i)(c_{2i} - c_{1i})}{c_{1i}^2} + (\langle a, c_2 - c_1 \rangle - a_i(c_{2i} - c_{1i})) \right]}{2 \sum_{k=1}^n \alpha_k} \quad (4.2)$$

$$\bar{\gamma}(\sigma_{ad}) = \max_{i=\overline{1,m}} \left\| a_i + \frac{\alpha_i(2I - \langle a, c_2 + c_1 \rangle)}{(c_{2i} + c_{1i}) \sum_{j=1}^n \alpha_j} + \frac{2L_i}{c_{2i} + c_{1i}} - K_i \prod_{j=1}^n \left(\frac{c_{2j} + c_{1j}}{2} \right)^{-\beta_{ij}} \right\|. \quad (4.3)$$

Теорема 4.1 (Теорема 1, [2]). Пусть параметры модели $\sigma_{ad} \in \Sigma_{ad}$ удовлетворяют условию $\bar{\gamma}(\sigma_{ad}) < \bar{\alpha}(\sigma_{ad}) - \bar{\beta}(\sigma_{ad})$. Тогда в модели σ_{ad} существует

положение равновесия $p^0 \in \text{int } P$.

4.1.2. Метод нахождения положения равновесия

Метод нахождения положения равновесия является модификацией Алгоритма 1 с поправкой на специфику моделей типа Аллена–Эрроу–Дебре. Перейдем к описанию этого метода.

Алгоритм 5

Шаг 0. Вычислить константы $\bar{\alpha}(\sigma_{ad})$ и $\bar{\beta}(\sigma_{ad})$ по формулам (4.1), (4.2). Зафиксировать метрики ρ_X и ρ_Y по формулам (3.6), (3.7).

Шаг 1. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения, $p_0 \in P$ – начальное приближение, $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса, положить номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)| < \varepsilon,$$

где $D(p)$ определено формулой (1.18), а $S(p)$ – формулой (1.19). Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 3. Используя приближение p_k , вычислить $h_k = (h_{k1}, \dots, h_{kn})$ по формуле

$$|h_{kj}| \leq \frac{c_{2j} - c_{1j}}{2\alpha} \max_{j=\overline{1,n}} \frac{|S_j(p_k) + a - D_j(p_k)|}{c_{2j} - c_{1j}}, \quad j = \overline{1,n}. \quad (4.4)$$

Шаг 4. На $B_{\mathbb{R}^n}(p_k, h_k)$ построить σ_k -сеть Z при

$$\sigma_k = \frac{\delta}{2} \max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)|.$$

Шаг 5. Поочередно брать точки $\tilde{x} \in Z \cap B_{\mathbb{R}^n}(p_k, h_k)$ и проверять выполнение неравенства:

$$\max_{i=\overline{1,n}} |S(p) + a - D(p_k)| \leq \sigma_k \max_{i=\overline{1,n}} |S(p_k) + a - D(p_k)|. \quad (4.5)$$

Если подходящая под условие точка найдена, то перейти к шагу 6. Если нет, то уменьшить σ_i в два раза, построить новую сеть и повторить перебор.

Шаг 6. Положить $p_{k+1} = \tilde{p}$, увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

4.1.3. Модельный пример

Случай $n = 1$. Рассмотрим следующую модель из Σ_{ad} :

$$I = 64.3796, \quad a = 1.6159, \quad \alpha = 0.62, \quad C = 28.22, \\ \beta = 0.18, \quad c_1 = 28.88, \quad c_2 = 36.75.$$

Найдем положение равновесия в этой модели, т.е. решение уравнения:

$$\frac{Cb^\beta \beta^{2\beta}}{p^\beta} - \frac{I - b}{p} - 2a = 0. \quad (4.6)$$

Заметим, что в уравнении (4.6) отсутствует параметр α . Используя метод нахождения положения равновесия, мы получаем, что:

$$p^0 = 33.51, \quad \rho_Y(S(p^0), D(p^0)) \approx 0.0000018.$$

Выясним, как параметры модели влияют на положение равновесия в ней.

Положение равновесия находится в прямой зависимости от параметра I (рис. 4.1).

Параметр a мало влияет на положение равновесия (рис. 4.2).

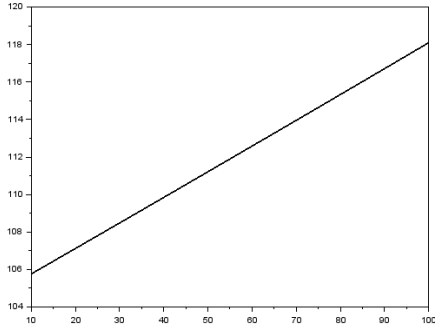


Рис. 4.1. Зависимость p^0 от I ($n = 1$).

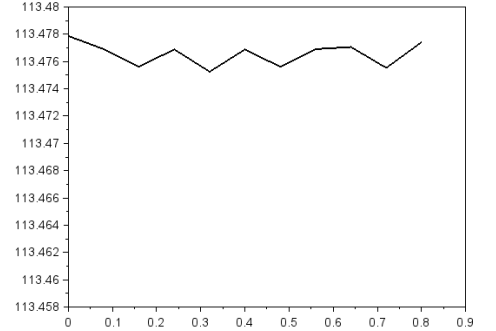


Рис. 4.2. Зависимость p^0 от a ($n = 1$).

Положение равновесия находится в обратной зависимости от параметра C (рис. 4.3).

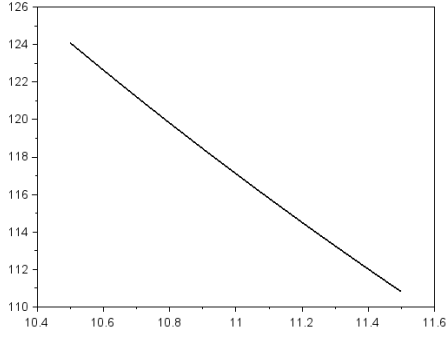


Рис. 4.3. Зависимость p^0 от C
($n = 1$).

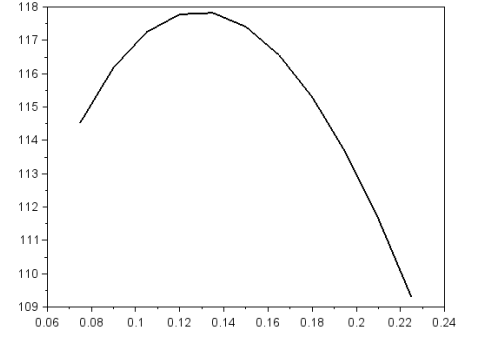


Рис. 4.4. Зависимость p^0 от β
($n = 1$).

Из графика зависимости положения равновесия от параметра β (рис. 4.4) видно, что явная зависимость отсутствует.

Изменение параметров c_1, c_2 , очевидно, не влияет на положение равновесия (рис. 4.5, рис. 4.6). Различия в полученных значениях обуславливаются погрешностью вычислений.

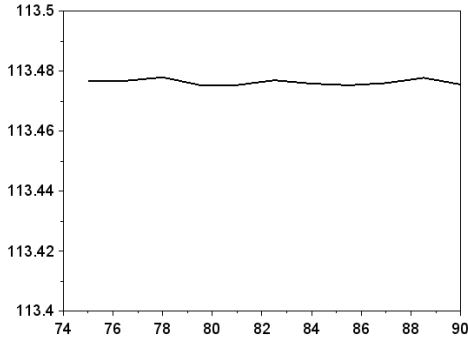


Рис. 4.5. Зависимость p^0 от c_1
($n = 1$).

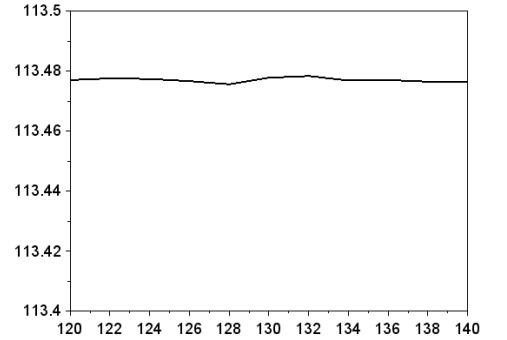


Рис. 4.6. Зависимость p^0 от c_2
($n = 1$).

Случай $n = 2$. Рассмотрим следующую модель из Σ_{ad} :

$$I = 0.32, \quad a = (0.17, 0.25), \quad \alpha = (0.47, 0.34), \quad C = (8.52, 7.31)$$

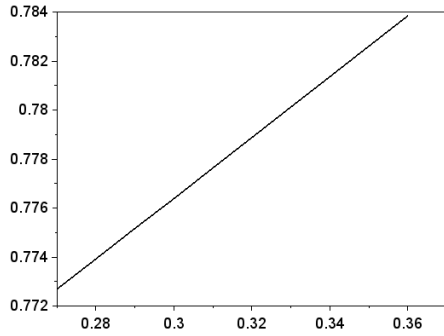
$$c_1 = (0.61, 0.51), \quad c_2 = (0.87, 0.66), \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0.19 & 0.04 \\ 0.07 & 0.42 \end{pmatrix}.$$

С помощью метода нахождения было найдено следующее положение равно-

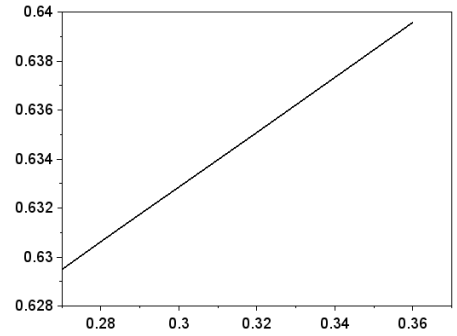
веса:

$$p^0 =, \rho_X(D(p^0), S(p^0)) = .$$

Ниже представлены графики зависимости положения равновесия от входных параметров.

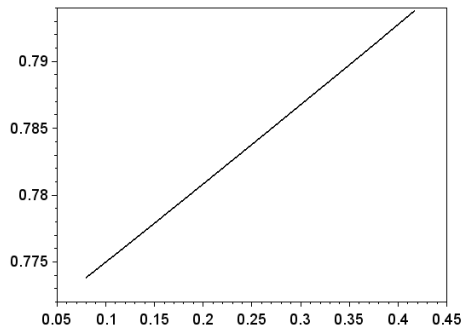


p_1^0

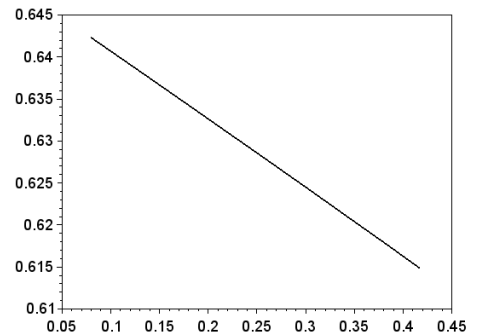


p_2^0

Рис. 4.7. Зависимость положения равновесия от I ($n = 2$).

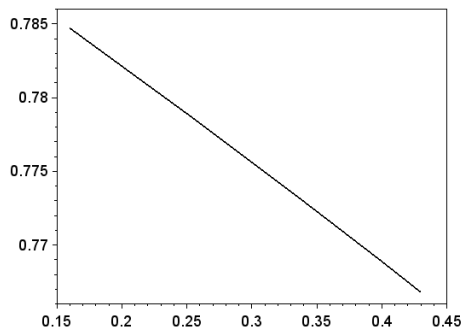


p_1^0

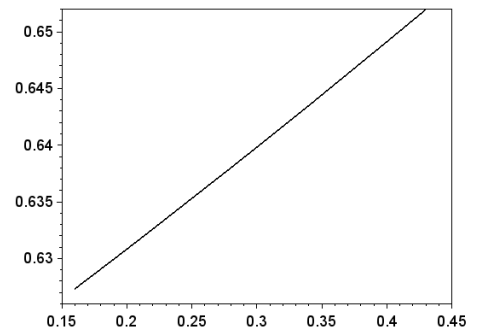


p_2^0

Рис. 4.8. Зависимость положения равновесия от a_1 ($n = 2$).



p_1^0



p_2^0

Рис. 4.9. Зависимость положения равновесия от a_2 ($n = 2$).

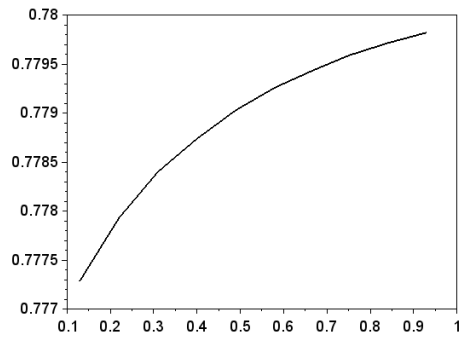
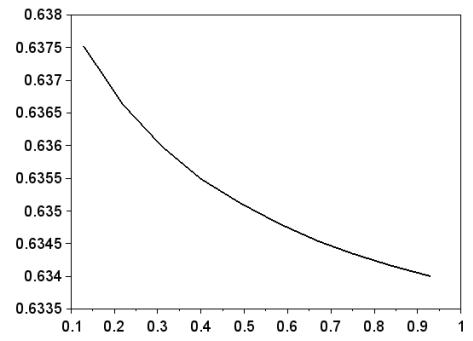

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.10. Зависимость положения равновесия от α_1 ($n = 2$).

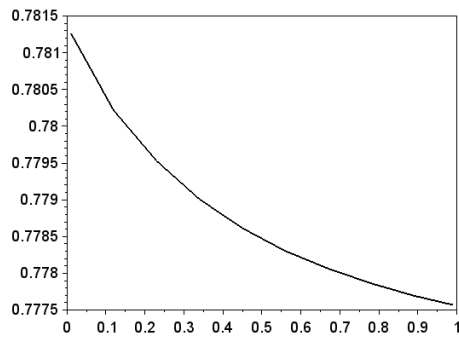
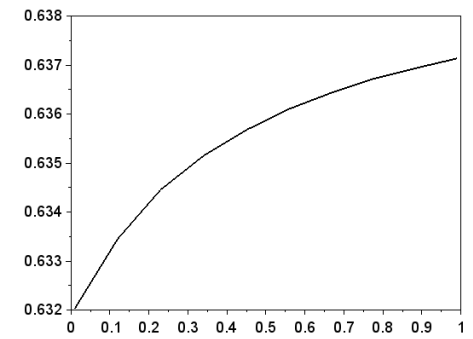

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.11. Зависимость положения равновесия от α_2 ($n = 2$).

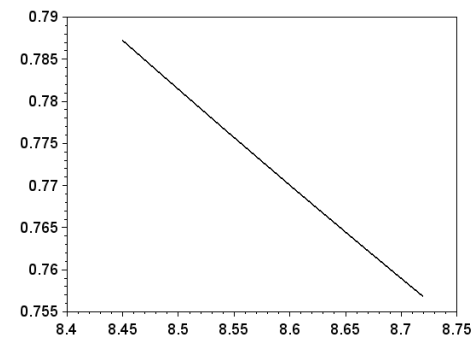
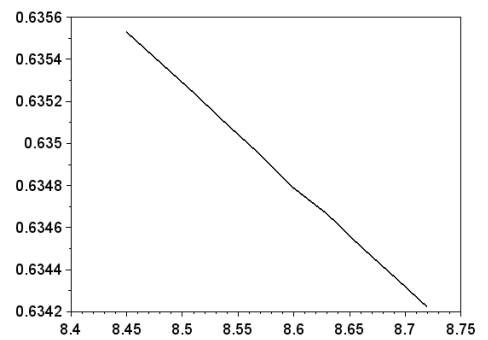
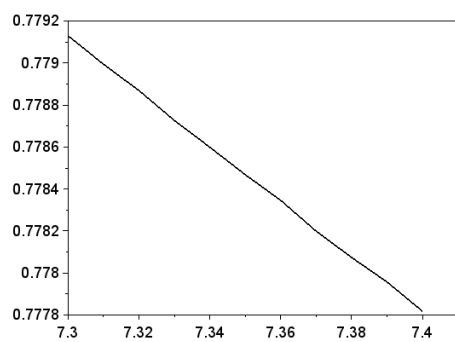
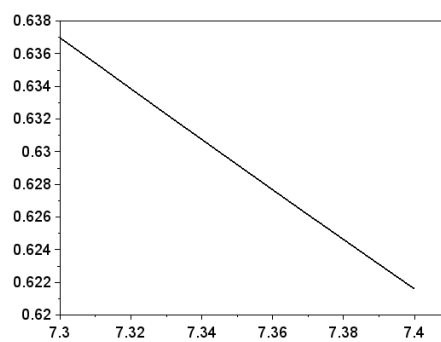

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.12. Зависимость положения равновесия от C_1 ($n = 2$).

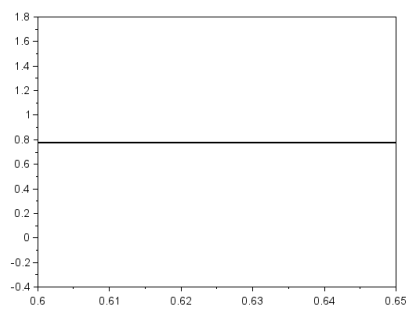


p_1^0

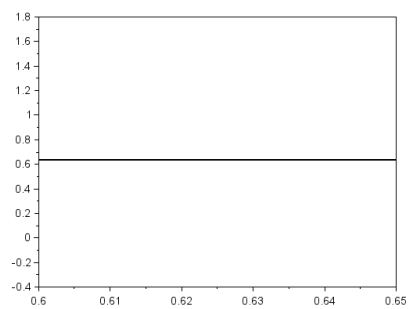


p_2^0

Рис. 4.13. Зависимость положения равновесия от C_2 ($n = 2$).

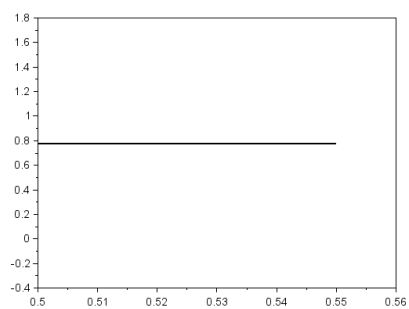


$$p_1^0$$

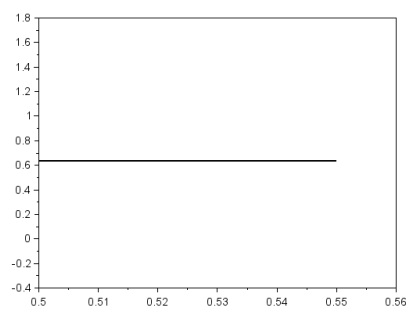


$$p_2^0$$

Рис. 4.14. Зависимость положения равновесия от c_{11} ($n = 2$).

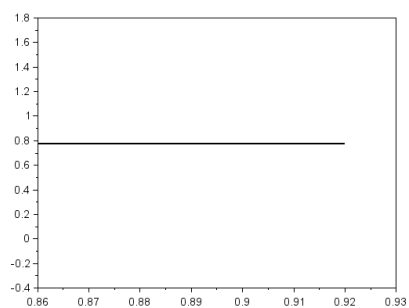


$$p_1^0$$

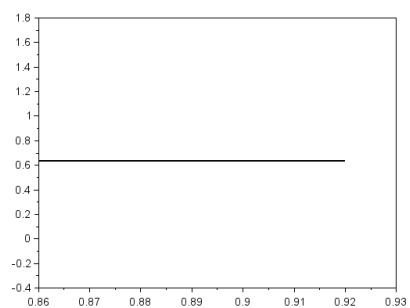


$$p_2^0$$

Рис. 4.15. Зависимость положения равновесия от c_{12} ($n = 2$).

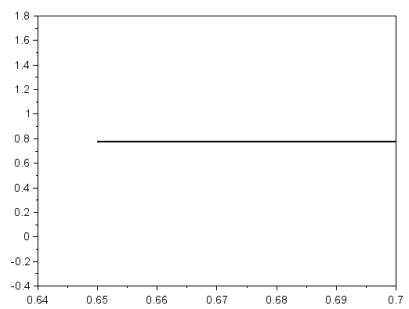


$$p_1^0$$

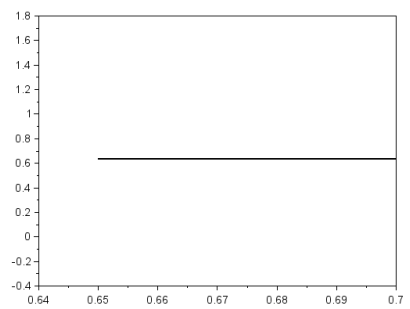


$$p_2^0$$

Рис. 4.16. Зависимость положения равновесия от c_{21} ($n = 2$).



$$p_1^0$$



$$p_2^0$$

Рис. 4.17. Зависимость положения равновесия от c_{22} ($n = 2$).

Случай $n = 2, m = 1$. Рассмотрим следующую модель из Σ_{ad} :

$$I = 2958.93, \quad a = (3.68, 30.01), \quad \alpha = (0.83, 0.62),$$

$$C = 478.22, \quad \mathfrak{B} = (0.16, 0.01), \quad c_1 = (8.52, 86.08), \quad c_2 = (14.57, 96.79).$$

С помощью метода нахождения положения равновесия было получено, что:

$$p^0 = (11.45, 91.11), \quad \rho_Y(S(p^0), D(p^0)) = 0.00000125.$$

Ниже представлено, как параметры модели влияют на положение равновесия в ней. Заметим, что в этой модели рассматривается положение равновесия только по первому аргументу, а второй аргумент остается фиксированным.

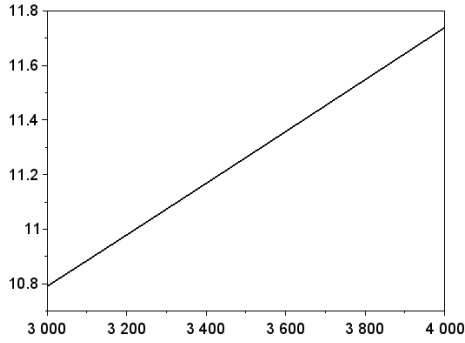


Рис. 4.18. Зависимость p_1^0 от I ($n = 2, m = 1$).

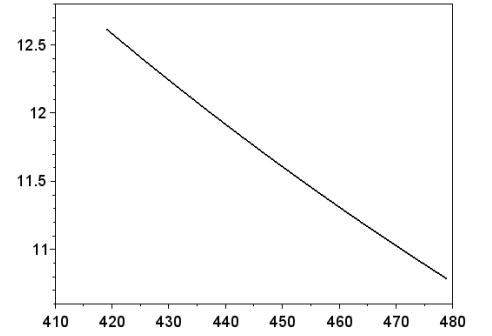


Рис. 4.19. Зависимость p_1^0 от C ($n = 2, m = 1$).

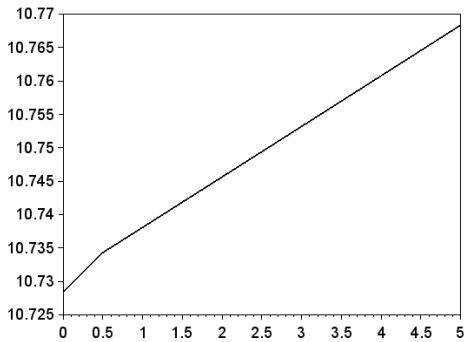


Рис. 4.20. Зависимость p_1^0 от a_1 ($n = 2, m = 1$).

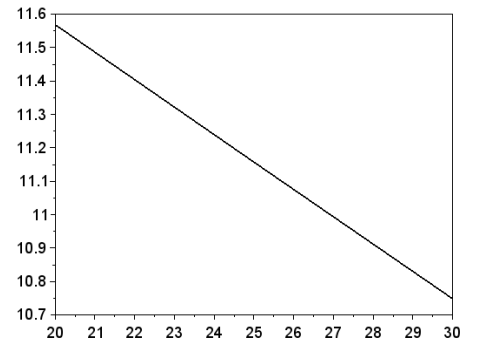


Рис. 4.21. Зависимость p_1^0 от a_2 ($n = 2, m = 1$).

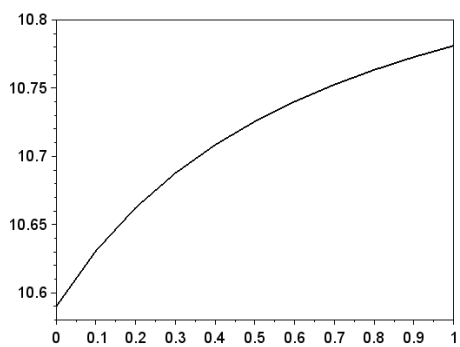


Рис. 4.22. Зависимость p_1^0 от α_1 ($n = 2, m = 1$).

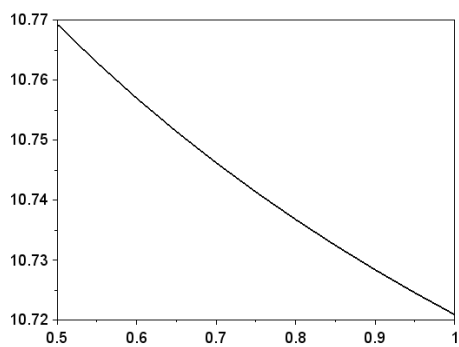


Рис. 4.23. Зависимость p_1^0 от α_2 ($n = 2, m = 1$).

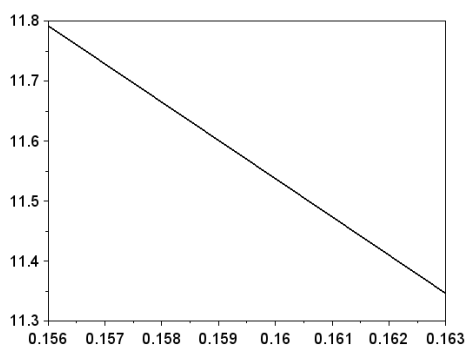


Рис. 4.24. Зависимость p_1^0 от β_{11} ($n = 2, m = 1$).

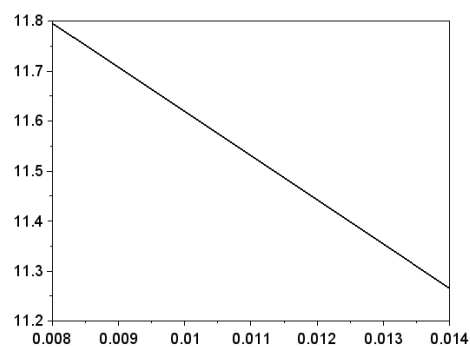
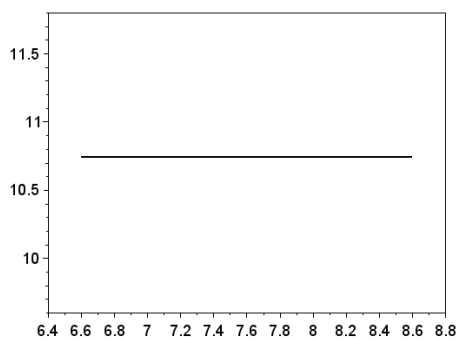
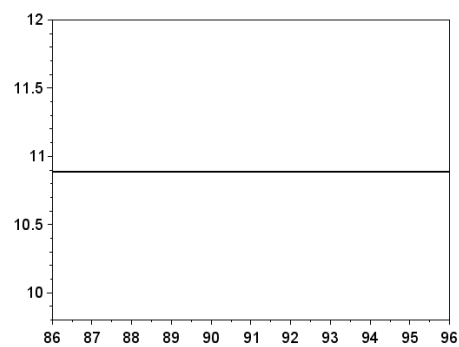


Рис. 4.25. Зависимость p_1^0 от β_{12} ($n = 2, m = 1$).

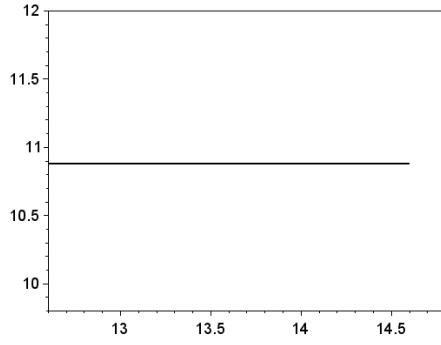


c_{11}

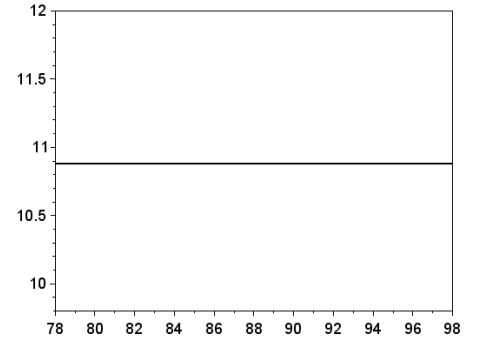


c_{12}

Рис. 4.26. Зависимость p_1^0 от c_1 ($n = 2, m = 1$).



c_{21}



c_{22}

Рис. 4.27. Зависимость p_1^0 от c_2 ($n = 2, m = 1$).

4.2. Положение равновесия в закрытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями

В данной модели отображения спроса и предложения восстанавливаются через соответствующие эластичности. С помощью теоремы 2.6 и следствия 2.7 получены необходимые условия существования положения равновесия. С помощью теоремы 2.8 получены достаточные условия существования положения равновесия. Исследованы случаи единственности и неединственности положения равновесия.

4.2.1. Необходимые условия и достаточные условия существования положения равновесия

Рассмотрим модель $\sigma_c \in \Sigma_c$. Получим условия, при которых в модели σ_c существует положение равновесия. Подставим формулы (1.18) и (1.19) в (1.4) и получим систему уравнений

$$D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} = S_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Возьмем логарифм от левой и правой части

$$\ln D_i^* + \sum_{j=1}^n (E_{ij} \ln p_j - E_{ij} \ln p_j^*) = \ln S_i^* + \sum_{j=1}^n (\tilde{E}_{ij} \ln p_j - \tilde{E}_{ij} \ln p_j^*), \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда получаем систему, линейную по $\ln p_j$, $j = \overline{1, n}$

$$\sum_{j=1}^n (E_{ij} - \tilde{E}_{ij}) \ln p_j = \ln \frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum_{j=1}^n (E_{ij} - \tilde{E}_{ij}) \ln p_j^*, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.7)$$

Введем обозначения

$$a_{ij} = \begin{cases} E_{ij} - \tilde{E}_{ij}, & i, j = \overline{1, n}; \\ \ln \frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum_{k=1}^n (E_{ik} - \tilde{E}_{ik}) \ln p_k^*, & i = \overline{1, n}, j = n+1. \end{cases}$$

Теорема 4.2 (Необходимые условия существования положения равновесия в закрытой модели типа Аллена, [46]). *Пусть в модели $\sigma_c \in \Sigma_c$ существует положение равновесия. Тогда параметры этой модели удовлетворяют условию $\text{rank}(\mathcal{E} - \tilde{\mathcal{E}}) = \text{rank } A$, где $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.*

Доказательство. Доказательство теоремы непосредственно вытекает из теорем 2.6 и 2.7. Если в модели существует положение равновесия p^0 , то система (4.7) совместна, поскольку она имеет решение p^0 . Отсюда по теореме 2.6 следует, что $\text{rank}(\mathcal{E} - \tilde{\mathcal{E}}) = \text{rank } A$. \square

Теперь перейдем к достаточным условиям существования положения равновесия в закрытой модели типа Аллена. Заметим, что из предыдущей теоремы достаточные условия не следуют, поскольку положение равновесия p^0 должно удовлетворять не только системе (4.7), но и условию $p^0 \in P$.

Теорема 4.3 (Достаточные условия существования положения равновесия в закрытой модели типа Аллена, [46]). *Пусть параметры модели $\sigma_c \in \Sigma_c$ удовлетворяют условию:*

$$\forall m = \overline{1, n} \quad \det F_m = 0, \det G_m \geq 0,$$

где

$$F_m = (f_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}}, G_m = (G_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},$$

$$f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i, j = \overline{1, n}; \\ C_{1i}, & i = \overline{1, n}, j = n + 1; \\ E_{mj} - \tilde{E}_{mj}, & i = n + 1, j = \overline{1, n}; \\ \ln \frac{S_m^*}{D_m^*} + \sum_{k=1}^n (E_{mk} - \tilde{E}_{mk}) \ln p_k^*, & i, j = n + 1; \end{cases}$$

$$g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i, j = \overline{1, n}; \\ C_{1i}, & i = \overline{1, n}, j = n + 1; \\ -\delta_{mj}, & i = n + 1, j = \overline{1, n}; \\ C_{1m}, & i, j = n + 1; \end{cases}$$

а δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда в модели σ_c существует положение равновесия.

Доказательство. Пусть вектор $p^0 \in P$ является положением равновесия в модели σ_c . Тогда p^0 является решением следующей системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (E_{ij} - \tilde{E}_{ij}) \ln p_j = \ln \frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum_{j=1}^n (E_{ij} - \tilde{E}_{ij}) \ln p_j^*, \\ p_i \geq c_{1i}, \\ p_i \leq c_{2i}, i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Система (4.8) совместна тогда и только тогда, когда совместна следующая система:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i = B_i, \\ x_i \geq C_{1i}, \\ x_i \leq C_{2i}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.9)$$

Здесь

$$x_i = \ln p_i, \quad b_{ij} = E_{ij} - \tilde{E}_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$B_i = \ln \frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum_{j=1}^n (E_{ij} - \tilde{E}_{ij}) \ln p_j^*, \quad i = \overline{1, n};$$

$$C_{1i} = \ln c_{1i}, i = \overline{1, n}; \quad C_{2i} = \ln c_{2i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Применяя Теорему 2.8, мы получаем, что система (4.9) совместна, если

$$\forall m = \overline{1, n} \quad \det F_m = 0, \det G_m \geq 0,$$

где

$$F_m = (f_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}}, G_m = (G_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},$$

$$f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i, j = \overline{1, n}; \\ C_{1i}, & i = \overline{1, n}, j = n + 1; \\ b_{ij}, & i = n + 1, j = \overline{1, n}; \\ B_i, & i, j = n + 1; \end{cases}$$

$$g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i, j = \overline{1, n}; \\ C_{1i}, & i = \overline{1, n}, j = n + 1; \\ -\delta_{mj}, & i = n + 1, j = \overline{1, n}; \\ C_{1m}, & i, j = n + 1. \end{cases}$$

Отсюда мы легко получаем утверждение теоремы. □

Замечание 4.1. Достаточные условия существования положения равновесия могут быть записаны в следующем альтернативном виде.

Теорема 4.4 ([46]). Пусть параметры модели σ_c удовлетворяют условию:

$$\forall m = \overline{1, n} \quad \det F_m = 0, (-1)^n \det G_m \geq 0,$$

где

$$f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i, j = \overline{1, n}; \\ C_{2i}, & i = \overline{1, n}, j = n + 1; \\ E_{ij} - \tilde{E}_{ij}, & i = n + 1, j = \overline{1, n}; \\ \ln \frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum_{j=1}^n (E_{ij} - \tilde{E}_{ij}) \ln p_j^*, & i, j = n + 1; \end{cases}$$

$$g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i, j = \overline{1, n}; \\ C_{2i}, & i = \overline{1, n}, j = n + 1; \\ -\delta_{mj}, & i = n + 1, j = \overline{1, n}; \\ C_{2m}, & i, j = n + 1. \end{cases}$$

Тогда в модели σ_c существует положение равновесия.

Замечание 4.2. Теоремы 4.3 и 4.4 не эквивалентны.

Пример 4.1. Приведем пример модели, в которой выполняются условия теоремы 4.3 и не выполняются условия теоремы 4.4. Рассмотрим следующую модель:

$$n = 1, \quad c_1 = 326.84, \quad c_2 = 841.41, \quad p^* = 450, \quad S^* = 141.00, \\ D^* = 137.00, \quad E = -0.33, \quad \tilde{E} = -0.24.$$

Проверим выполнение условий теоремы 4.3.

$$\det F_1 = 0, \\ \det G_1 \approx 11.57.$$

Легко, заметить, что $\det F_1 = 0$, $\det G_1 \geq 0$. Теперь проверим выполнение условий теоремы 4.4.

$$\det F_1 \approx -0.05, \\ \det G_1 \approx 12.53.$$

Мы видим, что $\det F_1 < 0$, из-за чего условия теоремы 4.4 не выполнены. Положение равновесия в данной модели находится непосредственным вычислением:

$$p^0 = 326.84.$$

Пример 4.2. Теперь приведем пример обратной ситуации, когда условия теоремы 4.3 не выполнены, а условия теоремы 4.4 выполнены. Рассмотрим следу-

ющую модель:

$$n = 1, \quad c_1 = 11.80, \quad c_2 = 24.19, \quad p^* = 16, \quad S^* = 287.00, \\ D^* = 272.00, \quad E = 0.280701754, \quad \tilde{E} = 0.150659134.$$

Проверим выполнение условий теоремы 4.4.

$$\det F_1 = 0, \\ \det G_1 \approx 6.37075393.$$

Легко, заметить, что $\det F_1 = 0$, $\det G_1 \geq 0$. Теперь проверим выполнение условий теоремы 4.3.

$$\det F_1 \approx -0.10457053, \\ \det G_1 \approx 4.76250510.$$

Мы видим, что $\det F_1 < 0$, из-за чего условия теоремы 4.3 не выполнены. Положение равновесия в данной модели находится непосредственным вычислением:

$$p^0 = 24.17.$$

4.2.2. Единственность положения равновесия

Теперь перейдем к исследованию вопроса о единственности и неединственности положения равновесия в закрытой модели типа Аллена. Для этого возьмем произвольную модель $\sigma_c \in \Sigma_c$ и рассмотрим систему (4.7).

Теорема 4.5 ([46]). *Пусть параметры модели σ_c удовлетворяют условию*

$$E_{ij} = \tilde{E}_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, n}. \quad (4.10)$$

Тогда любой вектор $p \in P$ является положением равновесия в модели σ_c тогда и только тогда, когда $S_i^ = D_i^* \quad \forall i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. В самом деле, пусть в модели σ_c выполнено условие (4.10).

Тогда система (4.7) эквивалентна следующей системе:

$$\ln S_i^* - \ln D_i^* = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.11)$$

Очевидно, что для того, чтобы любой вектор $p \in P$ был положением равновесия в модели σ_c , необходимо и достаточно, чтобы $S_i^* = D_i^* \quad \forall i = \overline{1, n}$. \square

Следствие 4.1 ([46]). Пусть параметры модели σ_c удовлетворяют условию (4.10). Тогда условие

$$\exists i = \overline{1, n} : \quad S_i^* \neq D_i^*$$

является критерием отсутствия положения равновесия в модели σ_c .

Теперь перейдем к более общему случаю. Введем обозначения:

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \quad a_{ij} = E_{ij} - \tilde{E}_{ij};$$

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T, \quad \omega_i = \ln \frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum_{j=1}^n (E_{ij} - \tilde{E}_{ij}) \ln p_j^*.$$

Теорема 4.6 ([46]). Пусть в модели σ_c выполнено условие $\det A \neq 0$. Тогда для того, чтобы существовало единственное положение равновесия

$$p_i^0 = \exp(A^{-1}\omega)_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.12)$$

необходимо и достаточно, чтобы параметры модели удовлетворяли следующему условию:

$$\max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}} \left| (A^{-1}\omega)_i - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \right| \leq 1, \quad (4.13)$$

где $(A^{-1}\omega)_i$ – i -я координата вектора $A^{-1}\omega$.

Доказательство. В условиях леммы система (4.7) совместна по теореме 2.6, поскольку $\det A \neq 0$. Более того, по теореме 2.7 ее решение единственно.

Сначала докажем необходимость. Пусть p^0 , определенное формулой (4.12) – единственное положение равновесия. Тогда p^0 удовлетворяет (4.7). Более того, $p^0 \in P$, т.е.:

$$\ln c_{1i} \leq (A^{-1}\omega)_i \leq \ln c_{2i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.14)$$

где $(A^{-1}\omega)_i$ – i -й элемент вектора $A^{-1}\omega$.

Вычтем из неравенства (4.14) величину $(\ln c_{1i} + \ln c_{2i})/2$:

$$\begin{aligned} \ln c_{1i} - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} &\leq (A^{-1}\omega)_i - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2}, \\ (A^{-1}\omega)_i - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} &\leq \ln c_{2i} - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Тогда

$$-\frac{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}}{2} \leq (A^{-1}\omega)_i - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \leq \frac{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}}{2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда имеем:

$$\left| (A^{-1}\omega)_i - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \right| \leq \frac{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}}{2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Поделив это неравенство на $(\ln c_{2i} - \ln c_{1i})/2 > 0$, получим:

$$\frac{2}{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}} \left| (A^{-1}\omega)_i - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \right| \leq 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, если (4.12) является положением равновесия в модели σ_c , то выполняется условие:

$$\max_{i=\overline{1, n}} \frac{2}{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}} \left| (A^{-1}\omega)_i - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \right| \leq 1.$$

Теперь докажем достаточность. Пусть выполнено условие (4.13). Поскольку $\det A \neq 0$, матрица A обратима и, следовательно, решение системы (4.7) единственно и имеет вид:

$$p = \exp(A^{-1}\omega).$$

Из условия (4.13) мы получаем, что $p \in P$. Таким образом, в модели существует единственное положение равновесия p^0 . \square

Следствие 4.2. Пусть параметры модели σ_c удовлетворяют теореме 4.6 и условию $S_i^* = D_i^*$ для любого $i = \overline{1, n}$. Тогда $p^0 = p^*$.

Пример 4.3. Приведем пример модели, для которой выполняется следствие

4.2. Рассмотрим следующую модель:

$$n = 1, \quad c_1 = 27.00, \quad c_2 = 69.24, \quad p^* = 16, \quad S^* = 89.70, \\ D^* = 89.70, \quad E = 1.684987068, \quad \tilde{E} = 1.113064885.$$

Очевидно, что условия теоремы 4.6 выполнены, поскольку $\det A = \det(E - \tilde{E}) \approx 0.57 \neq 0$. Так как $D^* = S^* = 89.7$, то по следствию 4.2 в этой модели существует единственное положение равновесия $p^0 = p^*$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = k < n$.

Теорема 4.7 ([46]). *В модели σ_c существует бесконечное количество положений равновесия тогда и только тогда, когда параметры модели σ_c удовлетворяют следующим условиям:*

1. $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = k < n$;

- 2.

$$\max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}} \left| \sum_{j=1}^{n-k} C_j w_{ji} - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \right| < 1, \quad (4.15)$$

где векторы W_1, \dots, W_{n-k} составляют ФСР системы (4.7) и

$$W_j = (w_{j1}, \dots, w_{jn}).$$

Доказательство. Пусть $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = k < n$. Тогда по теореме Кронекера–Капелли система совместна, но ее решение не единственно. Пусть

$$W_1, \dots, W_{n-k} \in \mathbb{R}^n$$

– ФСР системы (4.7). Пусть $p \in \mathbb{R}^n$ – решение системы (4.7). Тогда:

$$\ln p_i = \sum_{j=1}^{n-k} C_j w_{ij},$$

где $C_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n-k}$ – некоторые константы. Для того, чтобы p было поло-

жением равновесия в модели, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\ln c_{1i} < \sum_{j=1}^{n-k} C_j w_{ij} < \ln c_{2i}, \quad i = \overline{1, n};$$

где w_{ij} – j -я координата вектора W_i , $i = \overline{1, n}$. Повторяя рассуждения, изложенные при доказательстве Леммы 4.6 получим, что вектор p является положением равновесия в модели σ_c тогда и только тогда, когда

$$\max_{i=\overline{1, n}} \frac{2}{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}} \left| \sum_{j=1}^{n-k} C_j w_{ij} - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \right| < 1.$$

□

Пример 4.4. Продемонстрируем полученные результаты на следующем примере. Пусть $n = 2$, $p^* = (1, 1)$, $c_1 = (1; e)$, $c_2 = (\frac{1}{4e}, 1)$. В зависимости от того, чему равны S^* , D^* и ω^* , количество положений равновесия в такой модели может быть разное. Примеры представлены в Таблице 4.1.

Таблица 4.1. Существование, единственность и неединственность положения равновесия в примере 4.4.

		S^*, D^*, ω^*			
		$(1, 1)$ $(1, 1)$ $(0, 0)$	$(2, 2)$ $(1, 1)$ $(\ln 2, \ln 2)$	$(1, 1)$ $(2, 2)$ $(-\ln 2, -\ln 2)$	$(2, 2)$ $(1, 1/2)$ $(\ln 2, 2 \ln 2)$
A	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Теорема 4.5 $\forall p \in P$	Следствие 4.1 \emptyset	Следствие 4.1 \emptyset	Следствие 4.1 \emptyset
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Следствие 4.2 $(1, 1)$	Теорема 4.6 $(2, 2)$	Теорема 4.6 $(1/2, 1/2)$	Теорема 4.6 $(2, 4)$
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Следствие 4.2 $(1, 1)$	Теорема 4.6 $(2, 2)$	Теорема 4.6 $(1/2, 1/2)$	Теорема 4.6 $(4, 2)$
	$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	Теорема 4.7 $(p_1, 1/p_1), p_1 \in [1; e]$	Теорема 4.7 $(p_1; 4/p_1), p_1 \in [1; e]$	Теорема 4.7 $(p_1; 1/4p_1), p_1 \in [1; e]$	Следствие 4.1 \emptyset
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	Следствие 4.2 $(1, 1)$	Теорема 4.6 $(2, 2)$	Теорема 4.6 $(1/2, 1/2)$	Теорема 4.6 $(2, 8)$

Пример 4.5. В случае $n = 2$ легко получить явные условия существования, единственности и неединственности положения равновесия. В таком случае си-

стема (4.7) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} a_{11} \ln p_1 + a_{12} \ln p_2 &= \omega_1, \\ a_{21} \ln p_1 + a_{22} \ln p_2 &= \omega_2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

с условиями

$$\begin{aligned} \ln c_{11} &\leq \ln p_1 \leq \ln c_{21}, \\ \ln c_{12} &\leq \ln p_2 \leq \ln c_{22}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Теорема 4.8 ([46]). *Пусть $n = 2$. Тогда:*

1. *если $\det A \neq 0$ и*

$$\begin{aligned} \ln c_{11} &\leq \frac{a_{22}\omega_1 - a_{12}\omega_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \leq \ln c_{21}, \\ \ln c_{12} &\leq \frac{a_{11}\omega_2 - a_{21}\omega_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \leq \ln c_{22}, \end{aligned}$$

то в модели существует единственное положение равновесия

$$\left(\frac{a_{22}\omega_1 - a_{12}\omega_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \frac{a_{11}\omega_2 - a_{21}\omega_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right);$$

2. *если $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = 1$ и $a_{i2} = 0 \quad \forall i = \{1, 2\}$, то в модели существует бесконечное количество положений равновесия, сосредоточенных на множестве:*

$$\ln p_1 = \frac{\omega_1}{a_{11}} = \frac{\omega_2}{a_{21}}, \quad c_{12} \leq p_2 \leq c_{22}.$$

3. *если $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = 1$ и $a_{i1} = 0 \quad \forall i = \{1, 2\}$, то в модели существует бесконечное количество положений равновесия, сосредоточенных на множестве:*

$$\ln p_2 = \frac{\omega_1}{a_{12}} = \frac{\omega_2}{a_{22}}, \quad c_{11} \leq p_1 \leq c_{21}.$$

4. *если $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = 1$, $a_{11}a_{12} > 0$ и*

$$\omega_1 = a_{11} \ln c_{11} + a_{12} \ln c_{12},$$

то в модели существует единственное положение равновесия (c_{11}, c_{12}) ;

5. если $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = 1$, $a_{11}, a_{12} > 0$ и

$$\omega_1 = a_{11} \ln c_{21} + a_{12} \ln c_{22},$$

то в модели существует единственное положение равновесия (c_{21}, c_{22}) ;

6. если $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = 1$, $a_{11}a_{12} < 0$ и

$$\omega_1 = a_{11} \ln c_{21} + a_{12} \ln c_{12},$$

то в модели существует единственное положение равновесия (c_{21}, c_{12}) ;

7. если $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = 1$, $a_{11}a_{12} < 0$ и

$$\omega_1 = a_{11} \ln c_{11} + a_{12} \ln c_{12},$$

то в модели существует единственное положение равновесия (c_{11}, c_{12}) ;

8. если $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = 1$ и выполнено одно из двух условий:

- $a_{11}a_{12} > 0$ и

$$a_{11} \ln c_{11} + a_{12} \ln c_{12} < \omega_1 < a_{11} \ln c_{21} + a_{12} \ln c_{22};$$

- $a_{11}a_{12} < 0$ и

$$a_{11} \ln c_{21} + a_{12} \ln c_{12} < \omega_1 < a_{11} \ln c_{11} + a_{12} \ln c_{22};$$

то в модели существует бесконечное количество положений равновесия, определяемых формулой:

$$\ln p_2 = \frac{\omega_1 - a_{11} \ln p_1}{a_{12}}, \quad \ln c_{11} \leq p_1 \leq \ln c_{21}.$$

Доказательство. Рассмотрим все случаи по порядку. 1. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда по теореме 2.6 система (4.16) совместна, а по теореме 2.7 ее решение единствен-

но. Найдем это решение с помощью, например, метода Крамера:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} \omega_1 & a_{12} \\ \omega_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}\omega_1 - a_{12}\omega_2,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \omega_1 \\ a_{21} & \omega_2 \end{vmatrix} = a_{11}\omega_2 - a_{21}\omega_1.$$

Тогда решение данной системы определяется формулой:

$$\ln p_1 = A_1/A = \frac{a_{22}\omega_1 - a_{12}\omega_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$\ln p_2 = A_2/A = \frac{a_{11}\omega_2 - a_{21}\omega_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Осталось лишь потребовать, чтобы выполнялись условия (4.17). Таким образом, если

$$\begin{aligned} \ln c_{11} &\leq \frac{a_{22}\omega_1 - a_{12}\omega_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \leq \ln c_{21}, \\ \ln c_{12} &\leq \frac{a_{11}\omega_2 - a_{21}\omega_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \leq \ln c_{22}, \end{aligned}$$

то в модели положение равновесия единственно. В противном случае положение равновесия в модели не существует.

Пусть теперь $\text{rank } A = \text{rank}(A|\omega) = 1$.

2. В случае, если $a_{i2} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2\}$, система (4.16) эквивалентна следующему уравнению:

$$a_{11} \ln p_1 = \omega_1,$$

откуда следует, что все положения равновесия описываются выражениями:

$$\ln p_1 = \frac{\omega_1}{a_{11}} = \frac{\omega_2}{a_{21}}, \quad c_{12} \leq p_2 \leq c_{22}.$$

3. В случае, когда $a_{i1} = 0$ для $i = 1, 2$, все положения равновесия, аналогично

предыдущему случаю, описываются выражениями:

$$\ln p_2 = \frac{\omega_1}{a_{12}} = \frac{\omega_2}{a_{22}}, \quad c_{11} \leq p_1 \leq c_{21}.$$

В дальнейшем будем полагать, что $a_{ij} \neq 0$, $i, j = \overline{1, 2}$. Тогда все решения системы (4.16) лежат на прямой:

$$\ln p_2 = \frac{\omega_1 - a_{11} \ln p_1}{a_{12}}.$$

Найдем условия, при которых положение равновесия единственно даже в случае, если система (4.16) имеет бесконечное количество решений. Заметим, что наклон прямой, на которой лежат решения системы (4.16), равен $-a_{11}/a_{12}$. Рассмотрим несколько случаев.

4. Пусть $a_{11}a_{12} > 0$. Тогда положение равновесия единственно в двух следующих случаях:

1) если:

$$\ln c_{12} = -\frac{a_{11} \ln c_{11}}{a_{12}} + \frac{\omega_1}{a_{12}}; \quad (4.18)$$

2) если:

$$\ln c_{22} = -\frac{a_{11} \ln c_{21}}{a_{12}} + \frac{\omega_1}{a_{12}}; \quad (4.19)$$

В случае 1) из (4.18) мы получаем, что если

$$\omega_1 = a_{11} \ln c_{11} + a_{12} \ln c_{12},$$

то в модели σ существует единственное положение равновесия $p^0 = (c_{11}, c_{12})$.

5. В случае 2) из (4.19) мы получаем, что если:

$$\omega_1 = a_{11} \ln c_{21} + a_{12} \ln c_{22},$$

то в модели σ существует единственное положение равновесия $p^0 = (c_{21}, c_{22})$.

Если же будет выполнено:

$$a_{11} \ln c_{11} + a_{12} \ln c_{12} < \omega_1 < a_{11} \ln c_{21} + a_{12} \ln c_{22}, \quad (4.20)$$

то в модели существует бесконечное количество положений равновесия, сосре-

доточенных на множестве:

$$\ln p_2 = \frac{\omega_1 - a_{11} \ln p_1}{a_{12}}, \quad \ln c_{11} \leq p_1 \leq \ln c_{21}.$$

6. Пусть $a_{11}a_{12} < 0$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему случаю. Здесь положение равновесия единственно только в случаях:

1) если:

$$\ln c_{22} = -\frac{a_{11} \ln c_{11}}{a_{12}} + \frac{\omega_1}{a_{12}}; \quad (4.21)$$

2) если:

$$\ln c_{21} = -\frac{a_{11} \ln c_{12}}{a_{12}} + \frac{\omega_1}{a_{12}}; \quad (4.22)$$

В случае 1) из (4.21) мы получаем, что если

$$\omega_1 = a_{11} \ln c_{11} + a_{12} \ln c_{22},$$

то в модели σ существует единственное положение равновесия $p^0 = (c_{11}, c_{22})$.

7. В случае 2) из (4.22) мы получаем, что если

$$\omega_1 = a_{11} \ln c_{12} + a_{12} \ln c_{21},$$

то в модели σ существует единственное положение равновесия $p^0 = (c_{12}, c_{21})$.

В случае, если:

$$a_{11} \ln c_{12} + a_{12} \ln c_{21} < \omega_1 < a_{11} \ln c_{11} + a_{12} \ln c_{22}, \quad (4.23)$$

то в модели существует бесконечное количество положений равновесия, сосредоточенных на множестве:

$$\ln p_2 = \frac{\omega_1 - a_{11} \ln p_1}{a_{12}}, \quad \ln c_{11} \leq p_1 \leq \ln c_{21}.$$

8. Последнее утверждение получается из неравенств (4.20) и (4.23) с соответствующими условиями на параметры a_{11}, a_{12} . □

4.2.3. Модельный пример

Условия теорем 4.3 и 4.4 могут быть не выполнены при малом изменении параметров модели, поскольку в таком случае определители в условиях теоремы могут оказаться не равными нулю. Для полноты описания рассмотрим эту модель как частный случай открытой модели типа Аллена и используем метод нахождения положения равновесия из Главы 3.

Случай $n = 1$. Рассмотрим следующую модель $\sigma_c \in \Sigma_c$:

$$c_1 = 97.37, \quad c_2 = 187.03, \quad p^* = 155.79, \\ S^* = 304.60, \quad D^* = 497.32, \quad E = 0.39, \quad \tilde{E} = -5.65.$$

С помощью метода нахождения мы получаем, что

$$p^0 = 143.644902, \quad \rho_Y(S(p^0), D(p^0)) = 0.00000975.$$

Заметим, что $p^0 < p^*$. Поскольку $S^* < D^*$, $|\tilde{E}| > |E|$ и $\tilde{E} < 0$, мы получаем, что для обеспечения эффективного функционирования рынка цена на товар должна быть снижена.

Выясним, как малое изменение параметров модели влияет на положение равновесия в ней. Ниже представлены результаты экспериментов (рис. 4.28–4.34).

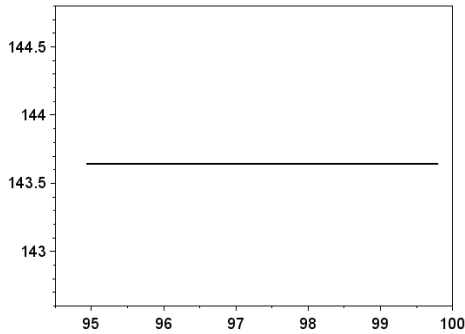


Рис. 4.28. Зависимость p^0 от c_1 ($n = 1$).

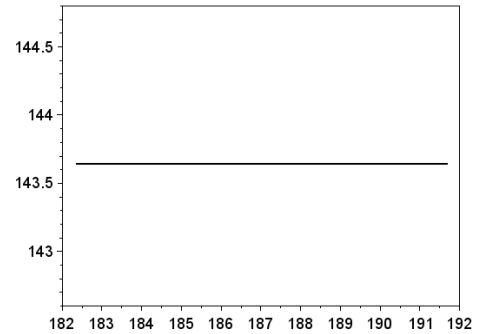


Рис. 4.29. Зависимость p^0 от c_2 ($n = 1$).

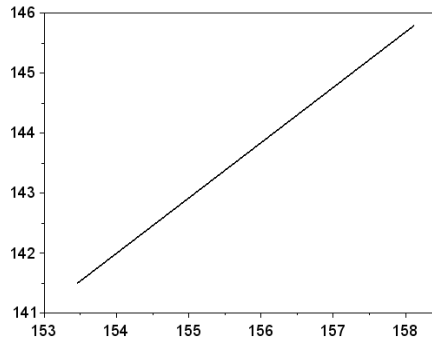


Рис. 4.30. Зависимость p^0 от p^* ($n = 1$).

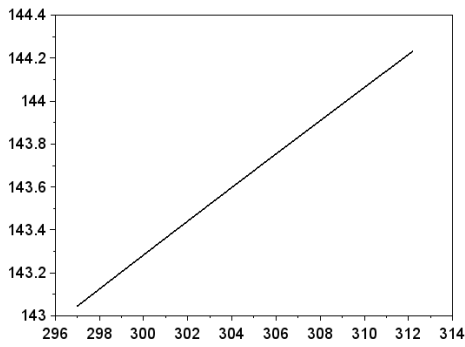


Рис. 4.31. Зависимость p^0 от S^* ($n = 1$).

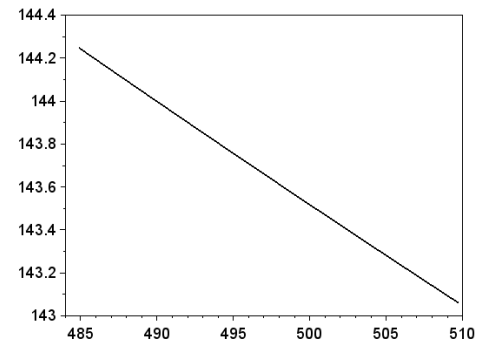


Рис. 4.32. Зависимость p^0 от D^* ($n = 1$).

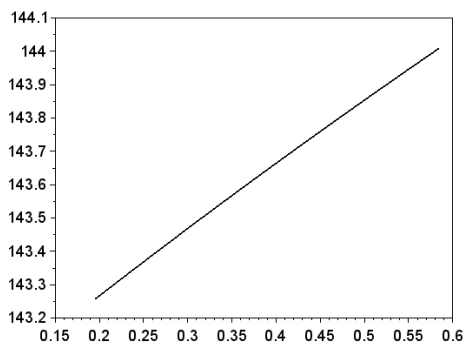


Рис. 4.33. Зависимость p^0 от E ($n = 1$).

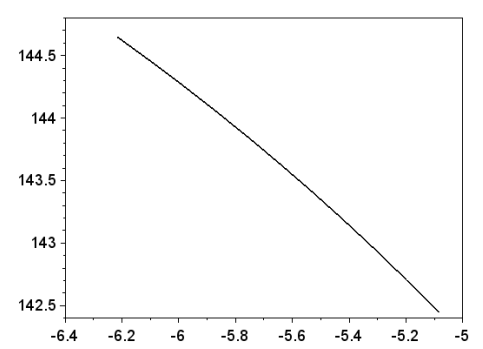


Рис. 4.34. Зависимость p^0 от \tilde{E} ($n = 1$).

Случай $n = 2$. Рассмотрим следующую модель из Σ_c :

$$\begin{aligned} c_1 &= (50.32, 66.58)^T, \quad c_2 = (110.31, 116.67)^T, \\ p^* &= (99.51, 79.61)^T, \quad S^* = (742.26, 662.21)^T, \quad D^* = (745.15, 681.12)^T, \\ E &= \begin{pmatrix} -0.003 & 0.005 \\ -0.004 & 0.004 \end{pmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{pmatrix} -0.070 & -0.037 \\ -0.074 & 0.088 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С помощью алгоритма поиска мы получили, что

$$p^0 = (83.35, 96.17)^T, \quad \rho_Y(S(p^0), D(p^0)) = 0.000022.$$

Выясним, как малое изменение параметров модели влияет на положение равновесия в ней. Результаты экспериментов представлены ниже (рис. 4.35–4.52).

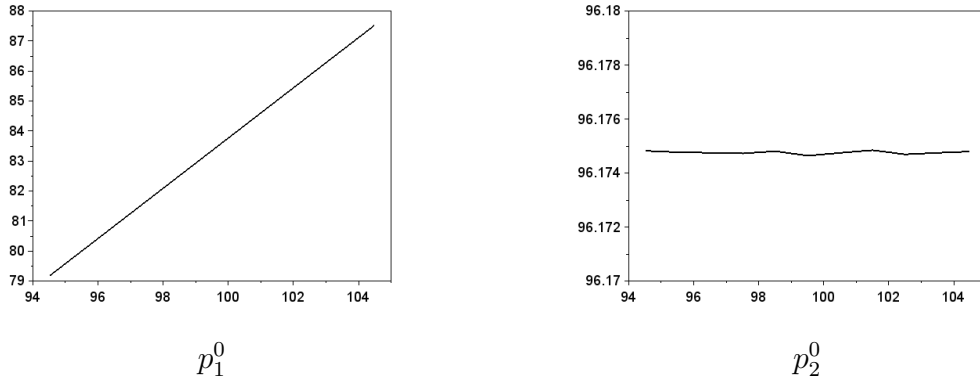


Рис. 4.35. Зависимость положения равновесия от p_1^* ($n = 2$).

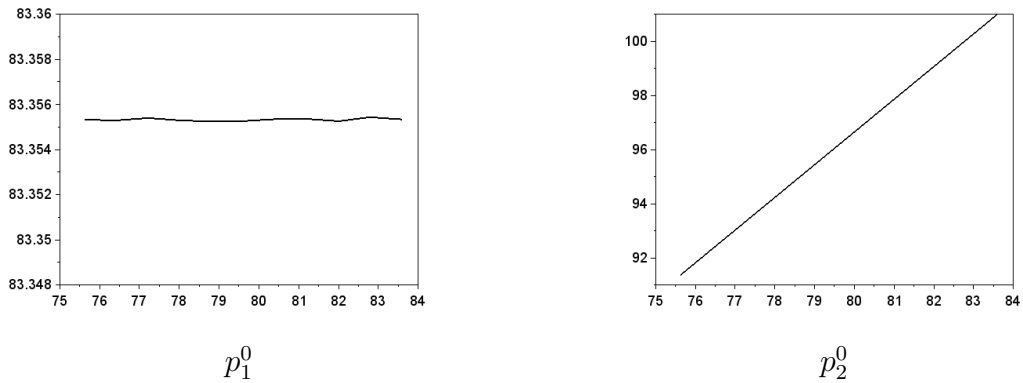


Рис. 4.36. Зависимость положения равновесия от p_2^* ($n = 2$).

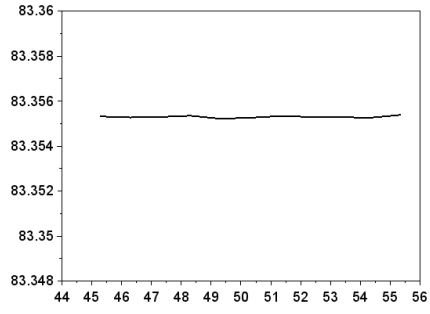
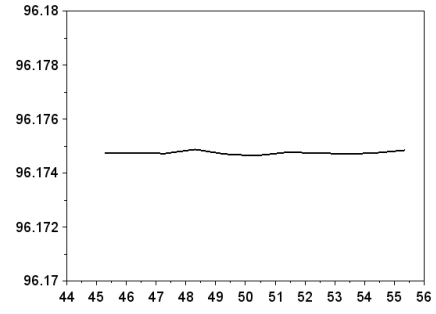

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.37. Зависимость положения равновесия от $c_{11}(n = 2)$.

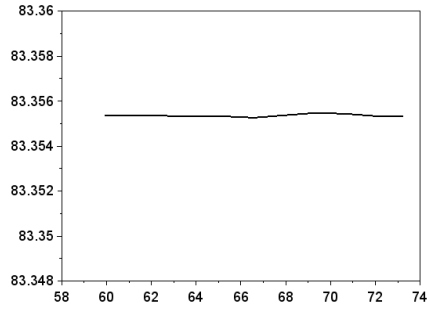
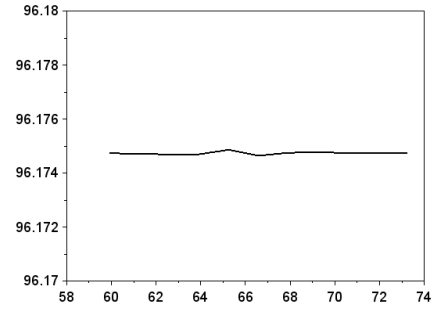

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.38. Зависимость положения равновесия от $c_{12}(n = 2)$.

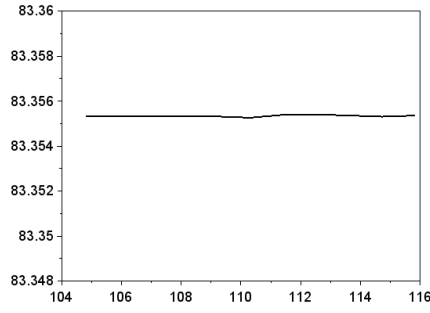
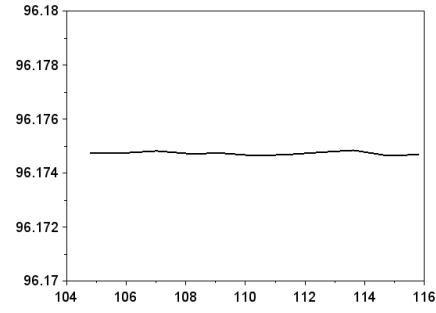

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.39. Зависимость положения равновесия от $c_{21}(n = 2)$.

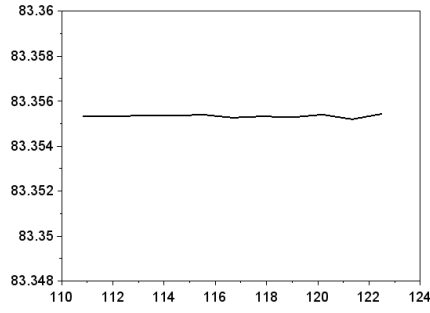
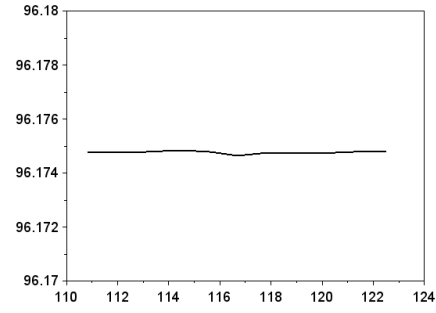

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.40. Зависимость положения равновесия от $c_{22}(n = 2)$.

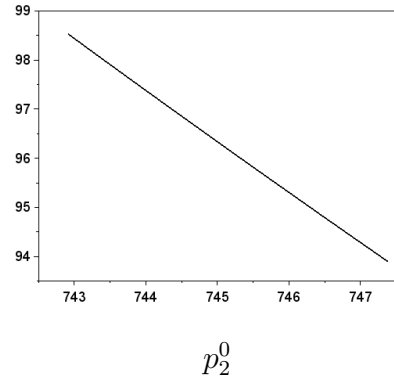
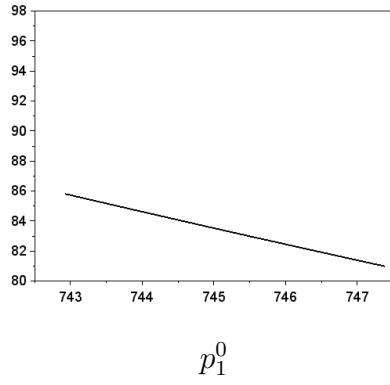


Рис. 4.41. Зависимость положения равновесия от D_1^* ($n = 2$).

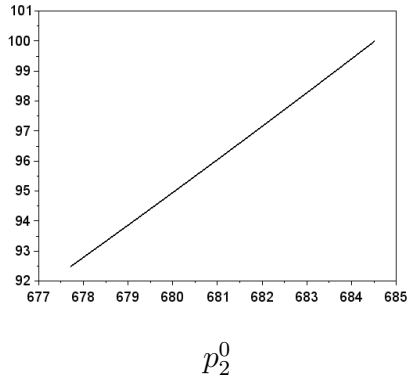
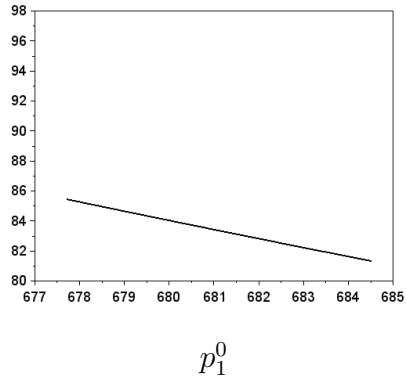


Рис. 4.42. Зависимость положения равновесия от D_2^* ($n = 2$).

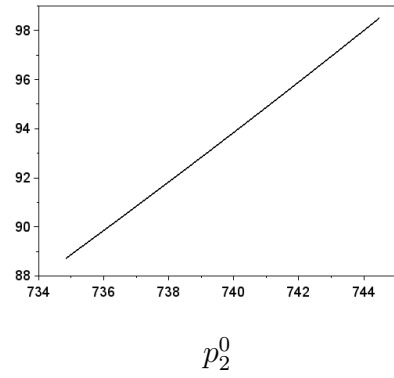
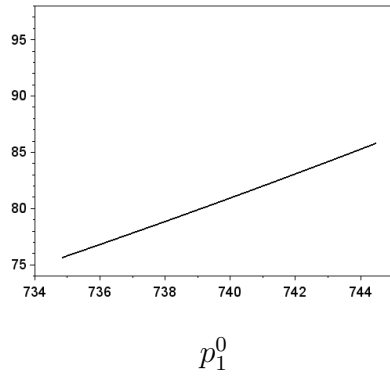


Рис. 4.43. Зависимость положения равновесия от S_1^* ($n = 2$).

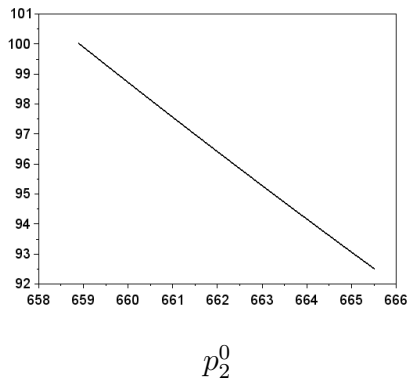
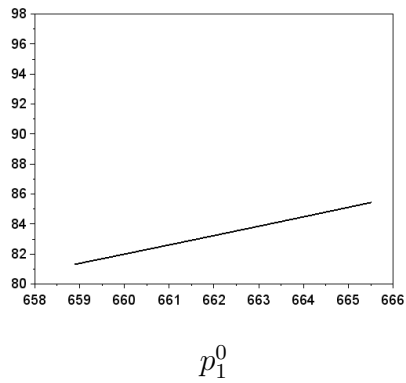


Рис. 4.44. Зависимость положения равновесия от S_2^* ($n = 2$).

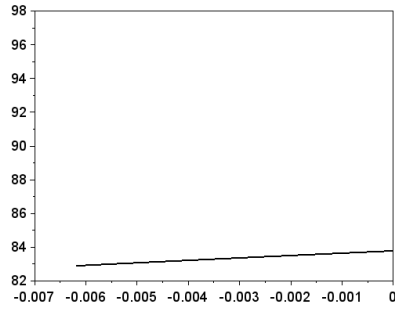
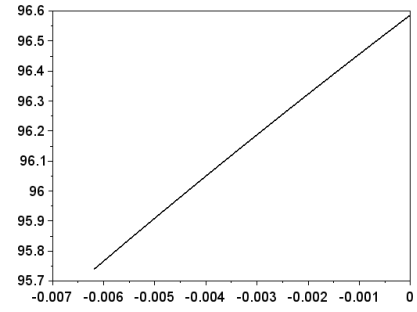

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.45. Зависимость положения равновесия от E_{11} ($n = 2$).

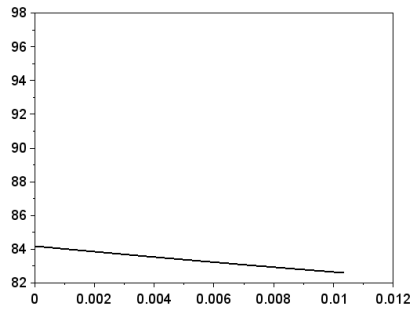
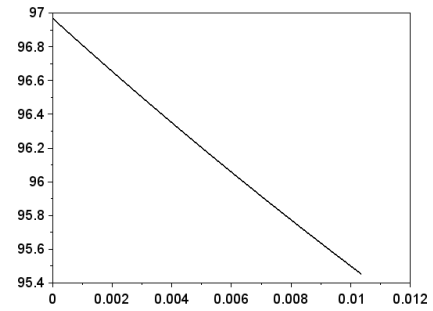

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.46. Зависимость положения равновесия от E_{12} ($n = 2$).

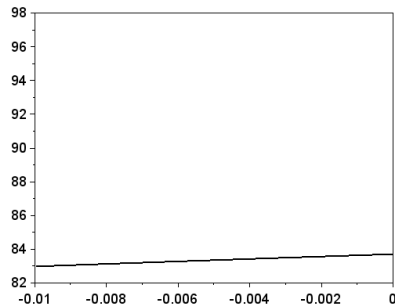
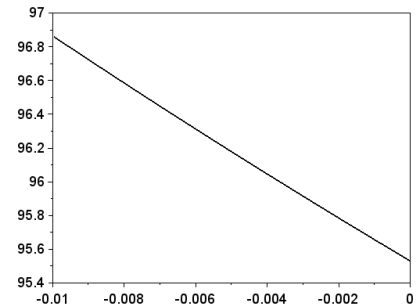

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.47. Зависимость положения равновесия от E_{21} ($n = 2$).

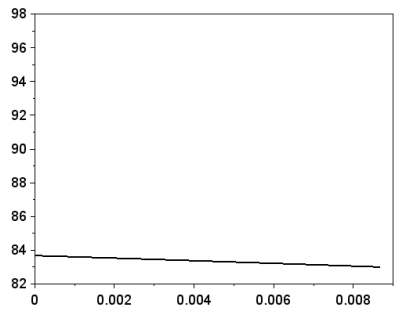
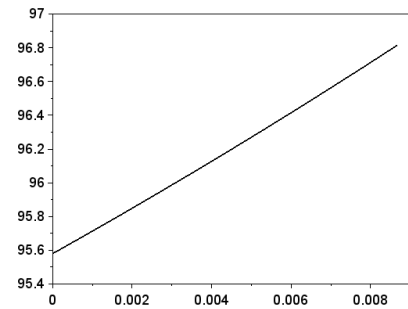

 p_1^0

 p_2^0

Рис. 4.48. Зависимость положения равновесия от E_{22} ($n = 2$).

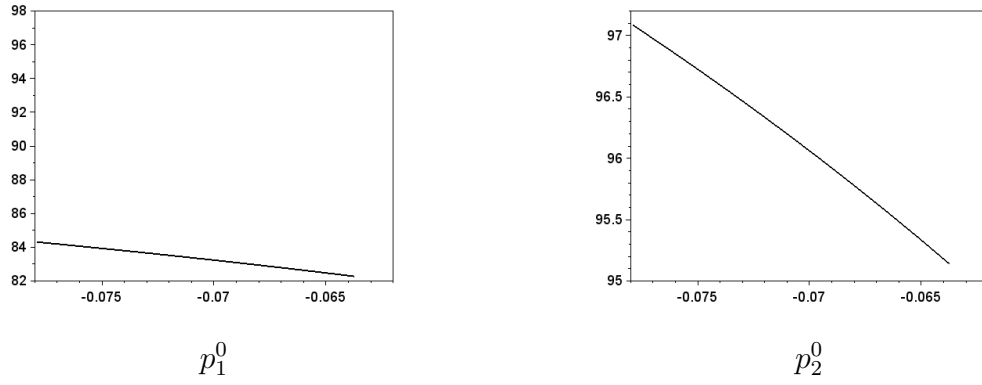


Рис. 4.49. Зависимость положения равновесия от $\tilde{E}_{11}(n=2)$.

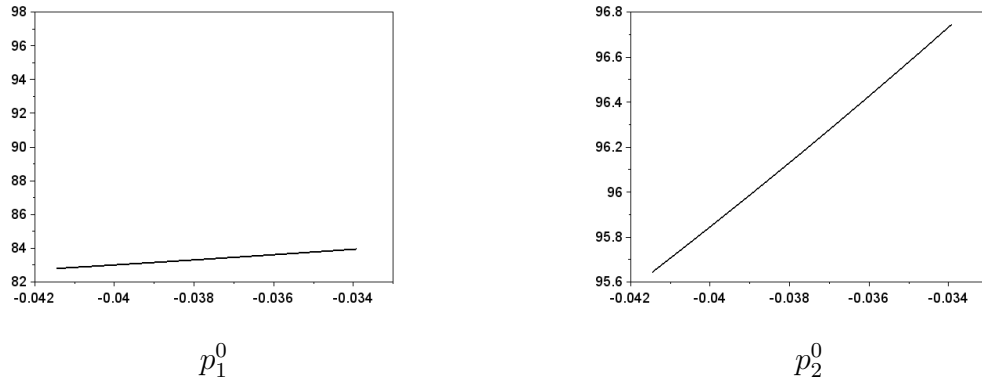


Рис. 4.50. Зависимость положения равновесия от $\tilde{E}_{12}(n=2)$.

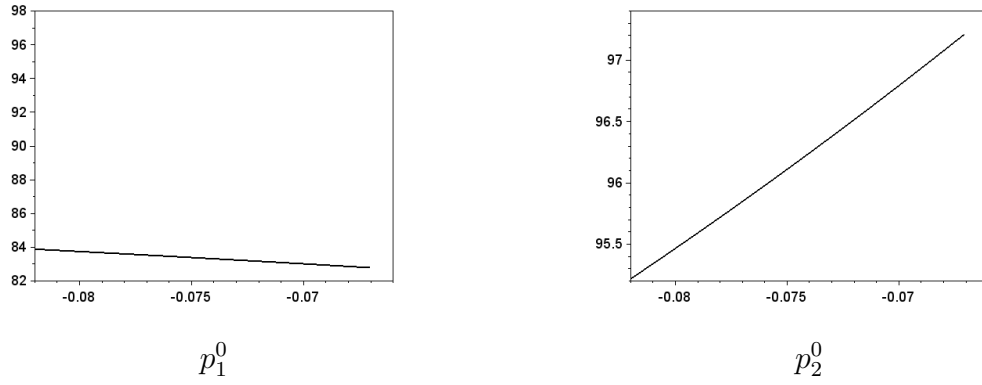


Рис. 4.51. Зависимость положения равновесия от $\tilde{E}_{21}(n=2)$.

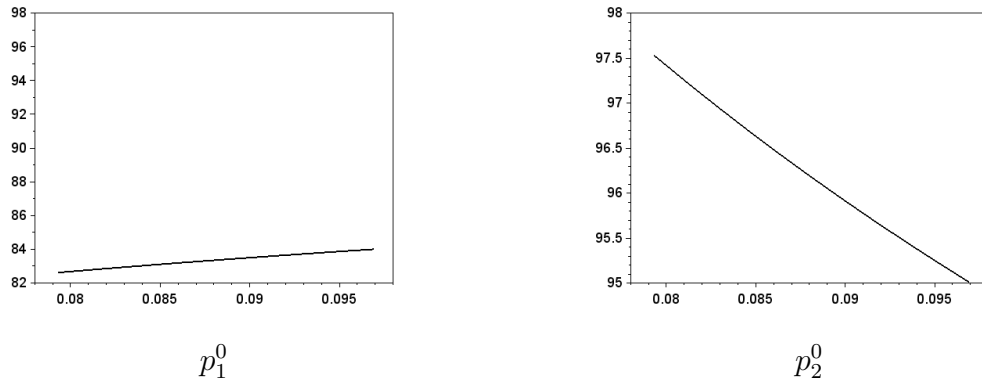


Рис. 4.52. Зависимость положения равновесия от $\tilde{E}_{22}(n=2)$.

4.3. Выводы главы 4

Проведенный анализ моделей рыночной системы позволил получить условия существования положения равновесия. Помимо этого, были исследованы свойства положения равновесия. Была продемонстрирована зависимость положения равновесия от входных параметров системы. Эта зависимость имеет четкую экономическую интерпретацию и может быть использована в дальнейшем при решении задач, связанных с положением равновесия. Так, на множестве положений частичного равновесия вызывает интерес задача о максимизации прибыли государства путем регулирования цен на товары, задача об определении налога на добавленную стоимость, задача о прогнозировании цен с учетом экспертных оценок и прогнозов и другие.

Результаты главы опубликованы в работах [18, 46].

Заключение

В работе был разработан алгоритм поиска точек совпадения для двух отображений, одно из которых является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица. С помощью теории накрывающих отображений и точек совпадения был разработан инструментарий анализа сложных систем, динамика которых описана парой отображений метрических пространств. Полученные результаты были применены к исследованию различных моделей рынка на предмет положения равновесия.

С помощью разработанных теоретических методов были получены достаточные условия существования положения равновесия в модели открытого рынка. Помимо этого, для поиска положения равновесия в системах рынка, описанных в главе 1, был применен созданный алгоритм поиска и разработан соответствующий комплекс программ. Алгоритм поиска построен на широко известном методе случайного поиска, однако в данном алгоритме появляются две особенности, которые значительно упрощают процесс нахождения решения – задание конкретной области поиска и условие поиска в виде неравенства, которому в общем случае удовлетворяет несчетное количество точек.

Работа алгоритма продемонстрирована численными экспериментами, в ходе которого были найдены параметры модели, удовлетворяющие соответствующим достаточным условиям, и с помощью алгоритма поиска были получены векторы равновесных цен. Из результатов численного эксперимента видно, что алгоритм успешно выполняет поставленную задачу с заданной точностью.

Стоит отметить, что в области научного исследования, проведенного в рамках подготовки данной работы, остаются открытые вопросы. Так, например, встает вопрос выбора параметра δ в алгоритме поиска и поиск закономерности между величиной этого параметра и сходимостью алгоритма. Помимо этого, остается не до конца исследованный вопрос о множестве положений равновесия в модели типа Аллена–Эрроу–Дебре, поскольку поиск ответа на этот вопрос сводится к решению систем уравнений, вообще говоря, нелинейных. Помимо

этого, остается открытым вопрос о численном эксперименте с реальными данными, которые не удалось получить в процессе работы над диссертационной работой.

Литература

- [1] Агуреев И.Е., Богма А.Е., Пышный В.А. Динамическая модель транспортной макросистемы // Известия Тульского государственного университета. Технические науки, 2013. – Вып. 6., Ч. 2. – С. 139–145.
- [2] Арутюнов, А.В. , Жуковский, С.Е., Павлова, Н.Г. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013. – Т. 53. – № 2. – С. 225–237.
- [3] Арутюнов, А.В., Павлова, Н.Г., Шананин, А.А. Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Математическое моделирование, 2016. – Т. 28. – № 3. – С. 3–22.
- [4] Арутюнов, А.В., Павлова, Н.Г. Равновесие в моделях рынка, описываемых дифференциальными уравнениями // Дифференциальные уравнения, 2022. – Т. 58. – № 9. – С. 1274–1283.
- [5] Арутюнов, А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады РАН, 2007. – Т. 416. – № 2. – С. 151–155.
- [6] Арутюнов, А.В., Жуковский, С.Е. Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции // Дифференциальные уравнения, 2019. – Т. 55. – № 4. – С. 452–463.
- [7] Арутюнов, А.В. Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012. – Т. 52. – № 11. – С. 1947–1950.
- [8] Арутюнов, А.В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки, 2009. – Т. 86. – № 2. – С. 163–169.

- [9] Бондаренко, Е.В. Влияние инфляции на предпринимательскую и инвестиционную деятельность // Научный вестник: финансы, банки, инвестиции, 2019. – Т. 4, № 49. – С. 229–238.
- [10] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. – М.: Физматлит, 2010. – 400 с.
- [11] Вальрас, Л. Элементы чистой политической экономии. – М.: Изограф, 2000. – 448 с.
- [12] Воротников, В.И., Румянцев, В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.
- [13] Глаголев, К.В., Морозов, А.Н. Применение принципа Ле Шателье–Брауна для интерпретации результатов долговременных измерений флуктуаций напряжения в малых объемах электролита // Машиностроение и компьютерные технологии, 2015. – № 6. – С. 1–9.
- [14] Днекешев А.А., Кушников В.А., Богомоллов А.С., Резчиков А.Ф. Системно-динамическая модель для анализа и прогнозирования аварийных ситуаций нефтеперерабатывающих предприятий / Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2023): труды Шестнадцатой междунар. конф. – М.: ИПУ РАН, 2023. – С. 474–480.
- [15] Дрогобыцкий, И.Н. Системный анализ в экономике: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Математические методы в экономике», «Прикладная информатика». – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2011. – 423 с.
- [16] Закалюкин, И.В. Динамика балки с двумя коньками и системы неявных дифференциальных уравнений // Труды Московского авиационного института, 2011. – № 42. – С. 1–25.
- [17] Зорич, В.А. Математический анализ. Часть I. – Изд. 10-е, испр. – М.: МЦНМО, 2019. – 576 с.

- [18] Котюков, А.М. Итерационный процесс поиска точек совпадения в модели «спрос-предложение» // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2022. – Т. 207. – С. 68–76.
- [19] Котюков А.М. Об устойчивости и неединственности положения равновесия в статической модели открытого рынка / Труды 18-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами». – Челябинск. – 2022. – С. 601–606.
- [20] Котюков А.М., Павлова Н.Г. О положении равновесия в экономических системах / Труды 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). – Москва. – 2024. – С. 260–264.
- [21] Котюков, А.М., Павлова, Н.Г. Алгоритм поиска точек совпадения в сложных системах // Управление большими системами, 2024. – № 107. – С. 6–27.
- [22] Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 572 с.
- [23] Лев, М.Ю. Влияние потребительских цен на уровень доходов в системе экономической безопасности России // Вестник Московской финансово-юридической академии, 2017. – № 1. – С. 92–102.
- [24] Лев, М.Ю. Особенности реализации государственной ценовой политики: социально-экономический аспект // Вестник Института экономики Российской академии наук, 2015. – № 5. – С. 139–149.
- [25] Лопатников, Л.И. Экономико-математический словарь. Словарь современной экономической науки. – Изд. 5, доп. и пер. – М.: Дело, 2003. – 519 с.
- [26] Макенова, А.А. Анализ параметров экологической стабильности степной зоны Омской области // Омский Научный Вестник, 2015. – Т. 2, № 144. – С. 278–280.
- [27] Маршалл, А. Принципы политической экономии. – М.: Прогресс, 1993. – 594 с.
- [28] Милль, Дж. Основы политической экономии. – СПб: типография М.М. Стасюлевича, 1909. – 664 с.

- [29] Неймарк, Ю.И. Математические модели в естествознании и технике: Учебник. – Н. Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. – 401 с.
- [30] Никайдо, Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 519 с.
- [31] Новиков Д.А. Иерархические модели военных действий // Управление большими системами, 2012. – Вып. 37. – С. 25–62.
- [32] Новиков Е.А. Численное моделирование кольцевого модулятора методом решения неявных систем // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки, 2014. – Т. 4, № 32. – С. 17–27.
- [33] Овсиенко, А.А. Роль государства в рыночной экономике // Экономика и бизнес: теория и практика, 2018. – Т. 11, № 2. – С. 34–37.
- [34] Павлов, С.Н. Теория систем и системный анализ: учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2003. – 134 с.
- [35] Румянцев, В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Серия: Математика, Механика, Физика, Астрономия, Химия. – № 4. – С. 9–16.
- [36] Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Высшая школа, 2004. – 616 с.
- [37] Сланченко, Л.И., Сидорова, Д.Г. Влияние экономической ситуации на ценообразование на рынке труда // Общество: политика, экономика, право, 2014. – №2. – С. 33–35.
- [38] Смит, А. Исследование о природе и причинах богатства народов. – М.: Бомбора, 2022. – 1056 с.
- [39] Трегуб, И.В., Трегуб, А.В. Математические и компьютерные модели ценообразования на конкурентном рынке // Вестник МГУЛ – Лесной вестник, 2008. – № 4. – С. 152–159.

- [40] Трубецков, Д.И. Феномен математической модели Лотки–Вольтерры и сходных с ней // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика, 2011. – Т. 19, № 2. – С. 69–88.
- [41] Черников, С.Н. Системы линейных неравенств // Успехи математических наук, 1953. – Т. 8, № 2. – С. 7–73.
- [42] Шафаревич, И.Р., Ремизов, А.О. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Физматлит, 2009. – 512 с.
- [43] Arrow K.J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competitive economy // Econometrica, 1954. – Vol. 22, No. 3. – Pp. 265–290.
- [44] Arutyunov A., Avakov, E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii, V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // Journal of Fixed Points Theory and Applications, 2009. – Vol. 5, No. 1. – Pp. 5–16.
- [45] Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications, 2021. – Vol. 24, No. 4. – Pp. 130–144.
- [46] Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Nonuniqueness of Equilibrium in Closed Market Model // Advances in Systems Science and Applications, 2023. – Vol. 23, No. 2. – Pp. 184–194.
- [47] Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Stability and Non-Uniqueness of Equilibrium in an Open Market Model / 15th International Conference Management of Large-Scale System Development: Proceedings. – Moscow. – 2022. – Pp. 1–4.
- [48] Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Open Market Models with Nonconstant Elasticities / 16th International Conference Management of Large-Scale System Development: Proceedings. – Moscow. – 2023. – Pp. 1–4.
- [49] Pavlova N.G. Applications of the Theory of Covering Maps to the Study of Dynamic Models of Economic Processes with Continuous Time / Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 2020. – Vol. 318. – Pp. 123–129.
- [50] Tkacheva O., Vinogradova M., Utkin A. Analysis of the Behavior of a Three-dimensional Epidemic Model / 2024 17th International Conference on

Management of Large-Scale System Development: Proceedings. – Moscow. – 2024. – Pp. 1–4.