Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук

На правах рукописи

Кокунько Юлия Георгиевна

Методы и алгоритмы динамического дифференцирования и сглаживания сигналов, задающих траектории мобильных роботов

Специальность 2.3.1.
Системный анализ, управление и обработка информации, статистика
(технические науки)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д-р техн. наук, проф.
Краснова Светлана Анатольевна

Москва – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В настоящее время беспилотные мобильные роботы, к которым относятся рассматриваемые в работе колесные платформы и беспилотные летательные аппараты (БПЛА) самолетного типа, востребованы в различных сферах и области их применения постоянно расширяются. Роботы управляются дистанционно или имеют различные степени автономности, но в обоих случаях базовая задача управления состоит в путевой стабилизации или отслеживании задающих воздействий, генерируемых в режиме online или спроектированных в режиме offline с заданным временным графиком. Для реализации высокоточных алгоритмов траекторного управления требуется информация о координатах текущей путевой точки и их производных до n-го порядка (n – максимальный элемент вектора относительного порядка многоканальной системы), что порождает проблему дифференцирования задающих сигналов. Замкнутая следящая система или система программного управления дадут хорошую производительность только в том случае, когда эталонная траектория движения является плавной и достижимой для робота. Если она имеет особые точки, в которых нарушаются проектные ограничения на скорость, ускорение или рывок транспортного средства, то в них следует ожидать всплески по управляющим моментам. Если такие точки встречаются регулярно, то это приведет к преждевременному износу исполнительного механизма или к аварии. При традиционном подходе для построения гладкой траектории мобильного робота на первом этапе определяется набор путевых точек желаемого маршрута. Их соединяют отрезками или ступенчатыми функциями и получают в первом приближении путь следования робота в рабочем пространстве. Для создания первичной траектории вводят дополнительную координату, которая задает желаемое время появления объекта в каждой путевой точке. На втором этапе используют различные геометрические или аналитические построения для того, чтобы сгладить первичную ломаную в сочленениях и получить реализуемый путь следования или траекторию. Наибольшее распространение в настоящее время получили кубические B-сплайны, задающие траекторию и ее производные в аналитическом виде. Их коэффициенты рассчитываются по координатам пяти контрольных точек, что обеспечивает гладкое изменение кривизны траектории [4, 9, 48, 52, 53, 98, 128, 136]. Но для получения гладких кривых сложной формы нужно увеличивать число контрольных точек в каждом сочленении, что приводит к увеличению времени счета алгоритма. Дополнительные проблемы возникают при необходимости плавного соединения сегментов сплайнов и соблюдения проектных ограничений на скорость и ускорение робота. Таким образом, алгоритмы аналитического сглаживания опорных ломаных с множеством узлов и в комплексе решающие все указанные проблемы, могут оказаться достаточно громоздкими, что затрудняет их применение на бортовых компьютерах в реальном времени, а заранее спланированные траектории становятся непригодными при изменении обстановки на маршруте. Для высокоточного, безаварийного траекторного управления механическими объектами и обеспечения маневренности при движении в динамической среде требуется разработка робастных и простых в вычислительной реализации методов для комплексного решения проблем дифференцирования и сглаживания опорных траекторий в реальном времени, что свидетельствует об актуальности темы работы.

Степень разработанности темы диссертационного исследования. В системах автоматического управления для дифференцирования внешних и внутренних сигналов вместо численного дифференцирования традиционно используют динамические дифференциаторы. Они построены по принципу наблюдателей состояния для канонических систем с неопределенным входом. Для подавления неопределенностей применяются «силовые» корректирующие воздействия различного типа.

Линейные дифференциаторы–наблюдатели с глубокими обратными связями (Khalil H.K. [99], Дылевский А.В. и Лозгачев Г.И. [13], Коровин С.К. и Фомичев В.В. [28], Уткин В.А. и Краснова С.А. [40] и др.) демонстрируют хорошую производительность при дифференцировании гладких сигналов. Однако при наличии особых точек, в которых производные терпят разрыв, оценочные сигналы имеют сильные всплески, которые увеличиваются с ростом порядка оцениваемой производной, что сужает область их применения.

Другой класс дифференциаторов – наблюдатели с ограниченными по модулю разрывными корректирующими воздействиями, функционирующие в скользящем режиме, которые не порождают всплесков и пригодны для обработки кусочно-дифференцируемых сигналов, но качество (гладкость) оценочных сигналов в установившемся режиме часто уступает линейным наблюдателям. Вместо базового дифференциатора на традиционных скользящих режимах первого порядка (Уткин В.И. [142], Уткин В.А. и Краснова С.А. [40], Spurgeon S. [135] и др.), требующего ввода низкочастотных фильтров, бóльшую популярность приобрели дифференциаторы на скользящих режимах второго и более высоких порядков (Levant A. [119, 120], Basin M., Shtessel Yu., Edwards C., Fridman L. [72, 88, 134] и др.]). Они помехозащищены и демонстрируют лучшее качество оценивания по сравнению с дифференциаторами на скользящих режимах первого порядка, но проблематичны в настройке, требовательны к разрядной сетке и шагу дискретизации, что является сдерживающим фактором для использования этих алгоритмов в бортовых компьютерах мобильных роботов.

Альтернативный подход, сочетающий преимущества линейных дифференциаторов и наблюдателей на скользящих режимах, но свободный от их недостатков, – наблюдатели с непрерывными и ограниченными S-образными (кусочно-непрерывными или сигмовидными) корректирующими воздействиями (Краснова С.А., Уткин А.В. [31, 33, 37, 39, 41]). На основе наблюдателя стандартной структуры с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, при синтезе которых реализуется каскадный принцип и метод разделения движений, представляется перспективным разработка дифференциатора без собственных движений, который сохранит базовые преимущества, но будет более прост в настройке и микропроцессорной реализации.

При специальной настройке и/или дополнительном наращивании динамического порядка за счет фильтров нижних частот можно получить помехозащищенные наблюдатели–дифференциаторы того или иного типа, решающие одновременно проблемы дифференцирования и фильтрации. Однако ключевой принцип настройки наблюдателей состоит в обеспечении минимальной ошибки наблюдения, поэтому они не подходят для сглаживания опорных сигналов и порождения реализуемых траекторий с учетом проектных ограничений.

Для комплексного решения проблемы дифференцирования, фильтрации и сглаживания векторных сигналов целесообразно взять за основу концепцию следящего дифференциатора, изначально предназначенного для дифференцирования зашумленных сигналов (Han J.Q., Wang W., Hongyinping F., Shengjia L., Ibraheem I.K. и др.). В современных публикациях [78, 86, 92, 93, 127] достаточно полно представлены методы построения следящих дифференциаторов второго порядка, которые отслеживают и фильтруют зашумленный сигнал, и восстанавливают его первую производную. Однако процедуры настройки следящих дифференциаторов общего вида недостаточно формализованы, проблемы ограничения производных и сглаживания обрабатываемого сигнала в указанных публикациях не изучались. Учитывая, что проектирование автономных мобильных роботов является важным современным вызовом, представляется актуальной разработка (альтернативных по отношению к аналитическим) динамических методов сглаживания опорных траекторий с автоматическим учетом проектных ограничений на скорость, ускорение и рывок транспортного средства. В качестве базового метода, позволяющего учитывать ограничения на переменные состояния и управления на стадии синтеза, при проектировании следящего дифференциатора представляется перспективным использовать блочный принцип управления с сигмовидными обратными связями (Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А. [2, 10, 11, 69]).

Объект исследования – системы траекторного управления мобильными роботами (колесными платформами и БПЛА самолетного типа).

Предмет исследования – методы и алгоритмы динамического дифференцирования и сглаживания опорных траекторий, а также синтез на их основе следящих систем с подавлением/компенсацией внешних возмущений.

Цель диссертационного исследования – разработка робастных и простых в вычислительной реализации методов и алгоритмов синтеза динамических дифференциаторов и обратных связей, обеспечивающих безаварийное траекторное управление мобильными роботами в условиях действия внешних неконтролируемых возмущений.

Данная цель определила следующие, основные **задачи работы**:

1) провести сравнительный анализ динамических дифференциаторов различного типа;

2) разработать алгоритм каскадного синтеза дифференциатора–наблюдателя без собственных движений с кусочно-линейными корректирующими воздействиями для восстановления производных детерминированных кусочно-гладких сигналов с заданной точностью за заданное время;

3) разработать метод и алгоритмы блочного синтеза следящих дифференциаторов с сигмовидными обратными связями для восстановления производных и динамического сглаживания кусочно-непрерывных сигналов с учетом заданных ограничений;

4) применить разработанные динамические дифференциаторы в системах траекторного управления беспилотными колесными платформами;

5) разработать с применением следящих дифференциаторов комплекс алгоритмов планирования движения одиночного робота на полигоне;

6) используя предложенные дифференциаторы для восстановления неизмеряемых внутренних и внешних сигналов, разработать системы управления движением центра масс беспилотного летательного аппарата, обеспечивающие подавление/компенсацию внешних возмущений.

Методы исследования: аналитическая геометрия, линейная алгебра и математический анализ; разделы теории управления: инвариантность и устойчивость; каскадный синтез, основанный на принципе разделения движений; блочный синтез следящих систем с нелинейными локальными связями.

Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

1) разработан алгоритм каскадного синтеза дифференциатора–наблюдателя без собственных движений с кусочно-линейными корректирую-

щими воздействиями, отличающийся более простой настройкой (по сравнению с аналогичным наблюдателем стандартной структуры) и вычислительной реализацией (по сравнению с дифференциаторами на скользящих режимах);

2) предложен универсальный и простой в вычислительной реализации метод динамического сглаживания на основе следящих дифференциаторов, позволяющих получить в сигнальном виде плавные и реализуемые эталонные траектории и их производные требуемого порядка без выполнения аналитических расчетов в реальном времени (в отличие от сплайновой интерполяции);

3) разработан алгоритм блочного синтеза следящего дифференциатора с сигмовидными обратными связями, в отличие от существующих решений обеспечивающий выполнение заданных ограничений на переменные состояния дифференциатора, т. е. на производные сглаженной траектории;

4) для систем управления движением центра масс колесной платформы и БПЛА самолетного типа разработаны регуляторы с сигмовидными обратными связями, в отличие от существующих решений обеспечивающие подавление внешних возмущений и отслеживание заданной траектории с заданной точностью при выполнении проектных ограничений на переменные состояния и управления;

5) разработан комплекс алгоритмов для планирования движения одиночного робота на полигоне, отличающийся применением предложенных в работе следящих дифференциаторов.

Достоверность полученных научных результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата, подтверждается результатами численного моделирования и применения на практике.

Соответствие паспорту специальности. Работа соответствует специальности 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» в части системного анализа, управления и обработки информации по следующим пунктам паспорта специальности.

п. 1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

п. 2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

п. 4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

п. 5. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

п. 12. Визуализация, трансформация и анализ информации на основе компьютерных методов обработки информации.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость заключается в развитии методов динамического дифференцирования и формализации метода динамического сглаживания сигналов с учетом заданных ограничений, а также распространение сигмовидных обратных связей на задачи синтеза инвариантных систем слежения для колесных платформ и БПЛА.

Разработанные дифференциаторы–наблюдатели без собственных движений с кусочно-линейными корректирующими воздействиями универсально применимы в системах автоматического управления для дифференцирования кусочно-гладких детерминированных сигналов с небольшим числом особых точек, когда в сглаживании сигнала нет необходимости и требуется как можно точнее воспроизвести его производные любого требуемого порядка. Области применения: для восстановления производных задающих воздействий, поступающих из автономного источника; для восстановления производных измеряемых датчиками сигналов; а также для восстановления внешних возмущений по их воздействию на объект управления. Разработанный дифференциатор: имеет простую реализацию и настройку; является робастным и не требует перенастройки при изменении формы дифференцируемого сигнала и его динамических характеристик в допустимых пределах; не дает всплески оценочных сигналов с ростом порядка восстанавливаемой производной; быстро сходится, что позволяет не учитывать его динамику при синтезе обратной связи.

Разработанные следящие дифференциаторы с сигмовидной коррекцией позволяют одновременно отфильтровывать, сглаживать и дифференцировать кусочно-непрерывные и зашумленные сигналы. Их применение для генерации плавных реализуемых траекторий в совокупности с предложенными алгоритмами составления первичных негладких 3D и 4D траекторий, проходящих через заданные путевые точки на плоскости или в пространстве с обеспечением заданного времени движения; достижения эталонной траектории, а также визуализации безопасного коридора с учетом габарита транспортных средств, является удобным и наглядным инструментом для планирования движений и полигонов, а также для обработки сигналов примитивных траекторий в режиме реального времени на бортовых компьютерах для информационного обеспечения следящих систем. Применение предлагаемого подхода, не требовательного к вычислительным ресурсам, повысит маневренность и одновременно безопасность, а также степень автономности мобильных роботов.

Реализация результатов работы. Разработанные следящие дифференциаторы и алгоритмы управления для БПЛА в условиях ветровых возмущений программно реализованы в симуляторе 3D обстановки для моделирования фигур пилотажа и полетных заданий ООО «ПЛАЗ», а также интегрированы в виртуальный полигон ООО «УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ» для планирования траекторий и симуляции полета в различных атмосферных условиях, что подтверждается актами о внедрении.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту:

1) алгоритм каскадного синтеза дифференциатора–наблюдателя без собственных движений с кусочно-линейной коррекцией, обеспечивающий восстановление производных любого требуемого порядка детерминированных кусочно-гладких сигналов с заданной точностью за заданное время (п. 2, п. 4);

2) метод динамического сглаживания опорных траекторий с использованием следящих дифференциаторов, позволяющий получить в сигнальном виде плавные и реализуемые эталонные траектории и их производные требуемого порядка (п. 1, п. 2);

3) алгоритм блочного синтеза следящего дифференциатора с сигмовидными обратными связями, обеспечивающий выполнение ограничений на восстанавливаемые производные при динамическом сглаживании кусочно-непрерывных сигналов (п. 4, п. 5);

4) комплекс алгоритмов планирования движения одиночного робота на полигоне, который включает: составление опорной негладкой 3D-траектории и ее сглаживание; плавный перевод объекта из произвольных начальных условий с учетом ограничений в стартовую точку маршрута; визуализацию безопасного коридора с учетом габаритов транспортного средства (п. 2, п. 12);

5) комплексные конструктивные решения по синтезу статической и динамической обратной связи с использованием дифференциаторов различных типов в системах траекторного управления центром масс беспилотных колесных платформ и БПЛА самолетного типа в условиях действия внешних возмущений, обеспечивающие заданные характеристики процесса слежения и выполнение проектных ограничений на переменные состояния и управления (п. 4, п. 5).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих всероссийских и международных научно-технических конференциях: Всероссийское совещание по проблемам управления, ВСПУ (Москва, 2019, 2024); Всероссийская Мультиконференция по проблемам управления, МКПУ (Санкт-Петербург, 2020, 2022); Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами», УБС (Тамбов, 2019; Москва, 2021; Челябинск, 2022; Воронеж, 2023; Новочеркасск, 2024); XXI Международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах», ПУМСС (Самара, 2019); Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», конференция Пятницкого (Москва, 2020, 2022); Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем», MLSD (Москва, 2019–2024); Международная научно-техническая конференция «Автоматизация», RusAutoCon (Сочи, 2021); International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM (Sochi, 2021); IFAC TECIS (Moscow, 2021); International Conference on Industrial Engineering, ICIE (Sochi, 2022).

Связь с планами научных исследований. Работа проводилась в рамках плановых фундаментальных научных исследований ИПУ РАН, поддержана грантом РФФИ 20-01-00363 А.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 32 статьи, из них 17 – в рецензируемых журналах (в том числе: 5 – в журналах К1 Перечня ВАК по специальности 2.3.1 (технические науки); 6 – в журналах WoS Q1, Q2); 10 публикаций в сборниках, индексируемых Scopus; 5 – в сборниках трудов конференций. Получено Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и трех приложений.

В первой главе приведен краткий обзор современных методов динамического дифференцирования незашумленных/зашумленных сигналов. Рассмотрены аспекты реализуемости и методы построения эталонных траекторий мобильных роботов. Сформулированы гипотезы и содержательные постановки задач диссертационного исследования с обоснованием методов их решения.

Во второй главе разработан алгоритм каскадного синтеза динамического дифференциатора с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, обеспечивающий восстановление за заданное время с заданной точностью производных любого конечного порядка кусочно-дифференцируемого детерминированного сигнала. Методической основой является каскадный синтез наблюдателей состояния с кусочно-линейной коррекцией для систем с неопределенным входом. Приведены результаты численного моделирования и сравнительного анализа дифференциаторов различных типов.

В третьей главе разработаны метод и алгоритмы синтеза динамических следящих дифференциаторов с сигмовидными корректирующими воздействиями, обеспечивающих сглаживание и дифференцирование кусочно-непрерывных сигналов с учетом заданных ограничений на производные любого конечного порядка. Методической основой является блочный синтез следящих систем с сигмовидными локальными связями, предназначенный для объектов с несогласованными возмущениями. Указываются факторы, влияющие на выбор динамического порядка следящего дифференциатора, отмечены его универсальные свойства. Приводятся результаты численного моделирования.

В четвертой главе разработанные методы динамического дифференцирования и сглаживания детерминированных сигналов применяются для беспилотных колесных платформ в задачах путевой стабилизации и слежения. Разработан комплекс алгоритмов для планирования движения одиночного робота на полигоне с применением следящих дифференциаторов. Все алгоритмы сопровождаются результатами численного моделирования.

В пятой главе рассматривается проблема автоматического управления движением центра масс беспилотного летательного аппарата в условиях действия внешних неконтролируемых возмущений. В рамках блочного подхода разработаны регуляторы двух типов с сигмовидными обратными связями для подавления внешних возмущений и с применением дифференциаторов–наблюдателей для восстановления неизмеряемых переменных состояния. С использованием следящего дифференциатора и наблюдателя ветровых возмущений с сигмовидной коррекцией реализован комбинированный закон управления с линейной стабилизирующей составляющей и с компенсацией ветровых возмущений на основе полученных оценок. Приведены результаты сравнительного анализа разработанных регуляторов и численного моделирования в рамках виртуальных полигонов ООО «ПЛАЗ» и ООО «УИТ».

В заключении сформулированы выводы по результатам диссертационного исследования.

Глава 1 Современное состояние проблем динамического дифференцирования сигналов и построения реализуемых эталонных траекторий

Глава имеет обзорно-постановочный характер. В разделе 1.1 вводится проблема дифференцирования задающих воздействий и методологическая база для ее решения. В разделе 1.2 приводятся известные методы синтеза динамических дифференциаторов в рамках теории наблюдателей состояния и возмущений, описываются их достоинства и недостатки. В разделе 1.3 обсуждается концепция следящих дифференциаторов. В разделе 1.4 рассматриваются аспекты реализуемости и методы построения эталонных траекторий мобильных роботов. В разделе 1.5 выдвигаются гипотезы и содержательные постановки задач диссертационного исследования, обосновываются методы их решения.

1.1 Описание проблемы дифференцирования сигналов

Во многих практических задачах возникает необходимость в дифференцировании сигналов в реальном времени. В системах автоматического управления дифференцирование и внутренних и внешних сигналов требуется для синтеза обратной связи, активного подавления возмущений, диагностики неисправностей и пр. Однако операции численного дифференцирования (в отличие от численного интегрирования), основанные на вычислении конечных разностей [3], или более сложные вычислительные алгоритмы [14] редко применяется в системах автоматического управления. Они не работоспособны при зашумленных измерениях, так как усиливают амплитуду помех, а погрешности оценивания накапливаются с ростом порядка восстанавливаемой производной. Использование многомерных фильтров нижних частот порождает запаздывание [85], что может привести к потере устойчивости замкнутой системы. Учитывая, что качество дифференцирования сигнала напрямую влияет на производительность замкнутой системы, целесообразно для решения этой проблемы использовать методы динамического дифференцирования, основанные на теории наблюдателей состояния. В данной работе проблема динамического дифференцирования в реальном времени будет рассматриваться, прежде всего, применительно к задающим воздействиям, поступающим в систему управления из автономного источника в виде непрерывных сигналов. Она актуальна для беспилотных мобильных роботов, для которых базовая задача состоит в путевой стабилизации и отслеживании заданной траектории. Для синтеза высокоточной системы слежения и формирования управления (программного или в форме обратной связи) нужно восстановить производные задающих воздействий до n-го порядка, где n – относительный порядок системы, а именно, число дифференцирований регулируемых переменных, которые должны отслеживать задающие воздействия, до появления управления [55, 94, 95].

Для объектов управления с однотипными режимами работы и простым контуром движения, описываемым одним аналитическим выражением, эта проблема решается с помощью составления динамического генератора задающих воздействий, или эталонной модели, или аналитического описания желаемой траектории, что дает информацию о производных целевых сигналов требуемого порядка. Однако в системах управления автономными движущимися объектами на плоскости или в пространстве полное аналитическое описание сложной траектории, которая представлена разными линиями на разных временны́х интервалах, является трудоемким процессом (см. раздел 1.4).

Если в системе слежения проектируемый планировщик или аналитическое описание задающих воздействий отсутствуют и известны только их текущие значения, то тогда производные задающих воздействий, так же как и внешние возмущения, полагаются неизвестными ограниченными функциями времени. В такой постановке возможны два подхода к синтезу следящей системы в зависимости от предложений о гладкости производных задающих воздействий.

Первый подход (в предположении о гладкости задающих воздействий) основан на комплексном решении задачи наблюдения. Он предназначен для дифференциально плоских систем, приводимых к канонической форме «вход –

выход» относительно ошибок слежения в координатном базисе смешанных переменных (функций от переменных состояния, внешних возмущений и задающих воздействий, а также их производных), по которым формируется обратная связь [31, 32, 36, 37, 39–41, 68]. В этой форме, на основе которой строится наблюдатель смешанных переменных и возмущений, все неопределенности являются согласованными, т. е. действуют по одним каналам с управляющими воздействиями. Это позволяет реализовать комбинированное управление, компенсирующее возмущения на основе полученных оценок, и простые линейные стабилизирующие регуляторы. Однако для оценивания внешних возмущений без использования их динамической модели приходится применять так называемые «силовые» методы подавления неопределенностей. К ним относятся: глубокие обратные связи (линейные регуляторы с большими коэффициентами усиления); разрывные управления с организацией скользящих режимов первого и более высоко порядков; их гибриды в виде S-образных функций.

Второй подход обычно применяется в предположении о негладкости задающих воздействий, когда их производные, трактуемые как внешние несогласованные возмущения, неизвестны и не подлежат оцениванию. Тогда допустимые «силовые» методы используются непосредственно при синтезе локальных связей и в законе управления [2, 56, 69]. При этом несогласованные негладкие возмущения не могут быть полностью подавлены из-за физических ограничений на переменные состояния и управления, что приводит к бóльшей ошибке слежения, чем в первом подходе, но структура регулятора упрощается.

В общем случае, для создания высокоточных систем слежения требуются гладкие и реализуемые эталонные траектории, а также информация о производных задающих воздействий до n-го порядка включительно. Если переменные состояния объекта управления полностью измеряются и комплексное решение задачи наблюдения не применяется, то тогда ставится задача проектирования и синтеза автономного динамического дифференциатора задающих воздействий с целью получения информации об их производных. Эти алгоритмы, реализуемые в вычислительной среде в реальном времени, не требуют ни численного дифференцирования данных сигналов, ни их аналитического описания.

В данной работе в качестве методологической базы для синтеза динамических дифференциаторов задающих воздействий рассматриваются оба описанных выше подхода, т. е. синтез динамического дифференциатора в виде:

1) наблюдателя состояния системы с согласованными возмущениями в предположении о гладкости задающих воздействий (см. раздел 1.2);

2) следящей системы с несогласованными возмущениями без требований гладкости задающих воздействий (см. раздел 1.3).

1.2 Методы синтеза динамических дифференциаторов в виде наблюдателей состояния

В данном разделе приводится краткий обзор известных методов динамического дифференцирования детерминированных непрерывных сигналов в рамках первого подхода. Рассматриваются принципы построения и настройки динамических дифференциаторов по аналогии с наблюдателями состояния с «силовыми» корректирующими воздействиями, которые предназначены для объектов с неопределенным входом.

Сигнал, подлежащий дифференцированию, полагается непрерывным и гладким. Ставится задача восстановить его производные до n-го порядка включительно в предположении, что его $(n+1)$-я производная ограничена по модулю. Для описания сигнала и его n производных вводится виртуальная каноническая система (n+1)-го порядка с неопределенным входом вида

$$\dot{f}_i = f_{i+1},\ i=\overline{1,n+1}, \tag{1.1}$$

$$\left|f_{n+2}(t)\right| \le F_{n+2}, t \ge 0. \tag{1.2}$$

Измеряемым выходом системы (1.1) полагается известный сигнал $f_1(t) \in R$, ее переменными состояния – производные данного сигнала, подлежащие восстановлению, а неизвестным входом – (n+1)-я производная $f_{n+2}(t) \in R$ (1.2).

Идея динамического дифференцирования заключается в том, что на основе системы (1.1) строятся наблюдатели состояния различной структуры с различными корректирующими воздействиями, обеспечивающие сходимость переменных дифференциатора–наблюдателя к выходному сигналу и его производным. В результате целенаправленного синтеза переменные наблюдателя воспроизводят (как правило, с заданной точностью) неизвестные производные данного сигнала, что решает задачу его дифференцирования. Соответствующие наблюдатели производных по принципу построения разделяются на два вида:

– со стандартной структурой полноразмерного наблюдателя, копирующей структуру наблюдаемой модели (1.1);

– собственно дифференциаторы, не имеющие собственной динамики.

1.2.1 Наблюдатель производных стандартной структуры

Стандартный наблюдатель, служащий для целей дифференцирования, копирует структуру виртуальной модели (1.1) и имеет вид

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + v_i,\ i = \overline{1,n};\ \dot{z}_{n+1} = v_{n+1}, \tag{1.3}$$

где $z = (z_1, ..., z_{n+1})^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n+1}$ – вектор состояния, v_i $(i = \overline{1,\ n+1})$ – корректирующие воздействия наблюдателя, которые формируются на основе измерений $f_1(t)$ и переменных наблюдателя так, чтобы обеспечить стабилизацию системы относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_i = f_i - z_i$, $i = \overline{1, n+1}$, имеющую вид

$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - v_i,\ i = \overline{1,\ n},\ \dot{\varepsilon}_{n+1} = f_{n+2} - v_{n+1}. \tag{1.4}$$

Особенность системы (1.4) заключается в наличии в последнем уравнении неизвестного сигнала $f_{n+2}(t) = f_1^{(n+1)}(t)$, который трактуется как возмущение.

Сначала рассмотрим частные случаи, при которых возможна асимптотическая стабилизация системы (1.4). Если есть основание полагать, что дифференцируемый сигнал описывается алгебраическим полиномом с максимальной степенью $\bar{n} \in \mathrm{N}$, то тогда $f_1^{(\bar{n}+1)}(t) \equiv 0$. При $\bar{n} = n$ неопределенного входа в системе (1.4) нет и можно использовать стандартную линейную обратную связь

$$v_1 = a_1\varepsilon_1,\ v_2 = a_2\varepsilon_1,\ ...,\ v_{n+1} = a_{n+1}\varepsilon_1, \tag{1.5}$$

где $a_i\ (i = \overline{1, n+1})$ – коэффициенты гурвицева полинома

$$\prod_{i=1}^{n+1}(\lambda-\lambda_i)=\lambda^{n+1}+a_1\lambda^n+a_2\lambda^{n-1}+...+a_n\lambda+a_{n+1}, \lambda_i\in C:\operatorname{Re}\lambda_i<0,\ i=\overline{1,n+1},$$

что обеспечивает в системах (1.4) и (1.3) асимптотические равенства

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon_i(t)=0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty}z_i(t)=f_i(t),\ t=\overline{1,\ n+1}. \qquad (1.6)$$

Если есть основания полагать, что $\bar{n}$-я производная $f_1^{(\bar{n})}(t)$ дифференцируемого сигнала удовлетворяет лемме Барбалата, то тогда $\lim\limits_{t\to+\infty}f_1^{(\bar{n}+1)}(t)=0$. При $\bar{n}=n$ в замкнутой системе (1.4)–(1.5) с затухающим возмущением также обеспечивается асимптотическая стабилизация (1.6).

В указанных случаях $(\bar{n}+1)$-я производная дифференцируемого сигнала и все последующие тождественно равны нулю или затухают. Если $1\le\bar{n}<n$, то тогда динамический порядок наблюдателя (1.3) можно понизить на $n-\bar{n}$. Если $n<\bar{n}<\infty$, то тогда асимптотически точное дифференцирование можно обеспечить путем повышения динамического порядка наблюдателя (1.3) на $\bar{n}-n$ с тем, чтобы «избавиться» от неопределенного входа.

Если возмущение $f_{n+2}(t)$ не равно нулю, не затухает, но ограничен (1.2), то для его подавления применяют методы теории скользящих режимов [15, 40, 56, 58, 142] или глубокие обратные связи [13, 28, 32, 43, 60, 99, 124], когда линейная коррекция (1.5) дополняется большим коэффициентом $l>>1$:

$$v_1=a_1l\varepsilon_1,\ v_2=a_2l^2\varepsilon_1,\ ...,\ v_{n+1}=a_{n+1}l^{n+1}\varepsilon_1, \qquad (1.7)$$

что обеспечивает в замкнутой системе (1.4), (1.7) стабилизацию ошибок наблюдения с заданной точностью. Известным недостатком линейных наблюдателей с большими коэффициентами является большое перерегулирование в начале переходных процессов [23, 99, 101, 144], что приводит к перерегулированию и в объекте управления, обратная связь в котором формируется по сигналам наблюдателя. Если дифференцируемый сигнал является непрерывным, но негладким (кусочно-гладким), то возникают особые точки, в которых его производные не существуют (терпят разрывы первого рода), что порождает множественные переходные процессы в системе (1.4) и всплески оценочных сигналов.

С теоретической точки зрения задачу дифференцирования негладкого сигнала следует признать некорректной. Поэтому на практике такие сигналы предварительно пропускают через сглаживающие фильтры, увеличивающие динамический порядок наблюдателя [15]. Другой подход – ограничить всплески оценочных сигналов путем ограничения по модулю линейных корректирующих воздействий наблюдателя [31, 33, 41]:

$$\begin{aligned}
&v_1 = p_1 \mathrm{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \left[\begin{array}{l} p_1 \mathrm{sign}(\varepsilon_1), |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ p_1 l_1 \varepsilon_1, |\varepsilon_1| \le 1/l_1; \end{array}\right. \\
&v_i = p_i \mathrm{sat}(l_i v_{i-1}) = \left[\begin{array}{l} p_i \mathrm{sign}(v_{i-1}), |v_{i-1}| > 1/l_i, \\ p_i l_i v_{i-1}, |v_{i-1}| \le 1/l_i, \ i = \overline{2, n+1}. \end{array}\right.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Кусочно-линейные корректирующие воздействия с насыщением (1.8) имеют по два настраиваемых коэффициента: $p_i > 0$ – амплитуду, от которой зависит скорость оценивания; $l_i > 0$ – тангенс угол наклона, который играет роль большого коэффициента в малой окрестности нуля, от него зависит точность оценивания. Будем говорить, что если $|\varepsilon_1| \le 1/l_1$, $|v_{i-1}| \le 1/l_i$, $i = \overline{2, n+1}$, то соответствующие корректирующие воздействия v_i, $i = \overline{1, n+1}$, (1.8) находятся в «линейной зоне».

В работе [31] в рамках синтеза одноканальной системы слежения при действии внешних возмущений наблюдатель типа (1.3), (1.8) применялся для оценивания смешанных переменных по измерениям ошибки слежения. Получены иерархические системы неравенств для выбора коэффициентов кусочно-линейных корректирующих воздействий, при которых за заданное время $T > 0$ с заданными точностями $\delta_i > 0$ оценивались неизмеряемые переменные канонической системы. В решаемой задаче использование этого подхода обеспечит

$$|\varepsilon_i(t)| = |f_i(t) - z_i(t)| \le \delta_i, \ i = \overline{1, n+1}; \ |f_{n+2}(t) - v_{n+1}(t)| \le \delta_{n+2}, t \ge T. \tag{1.9}$$

Первая группа неравенств (1.9) означает, что переменные наблюдателя (1.3) служат оценками соответствующих производных задающего сигнала. Из последнего неравенства следует, что корректирующее воздействие $v_{n+1}(t)$ может служить оценкой неизвестного входа. Как следствие, для оценивания n производных можно использовать наблюдатель, порядок которого по сравнению с (1.3) понижен на 1, при этом n-я производная будет трактоваться как возмущение, а ее оценкой будет служить корректирующее воздействие $v_n(t)$ [31].

Основное преимущество наблюдателя (1.3), (1.8) по сравнению с наблюдателем с глубокими обратными связями (1.3), (1.7) заключается в том, что корректирующие воздействия (1.8) всюду ограничены, поэтому ограничены и всплески оценочных сигналов в начале переходных процессов, которые порождаются сменой формы выходного кусочно-гладкого сигнала. Наоборот, в линейном наблюдателе из-за иерархии больших коэффициентов (1.7) всплески увеличиваются с ростом порядка оцениваемой производной [101]. Таким образом, применение наблюдателя (1.3), (1.8) расширяет класс допустимых сигналов (за счет кусочно-гладких функций), оценочные сигналы производных которых могут быть непосредственно использованы в практических приложениях без дополнительных ограничений управляющих воздействий.

Преимуществом наблюдателя (1.3), (1.8) является также каскадная процедура настройки на основе иерархии неравенств, не требующая составления эталонных характеристических полиномов (в отличие от (1.5)). Стоит заметить, что в указанных выше частных случаях применение корректирующих воздействий (1.8) не только обеспечивает асимптотические оценки (1.6), но и дает возможность последовательно управлять темпами сходимости переменных замкнутой системы. Но для настройки амплитуд и в частных, и в общих случаях требуется определять области изменения ошибок наблюдения в процессе регулирования [31, 41], что усложняет вычислительный аспект, а также приводит к консервативным (завышенным) расчетным оценкам для выбора амплитуд корректирующих воздействий. Эту проблему можно обойти, если использовать дифференциаторы–наблюдатели, не имеющие собственных движений.

1.2.2 Наблюдатели производных без собственных движений

Дифференциатор–наблюдатель, который, в отличие от (1.3), не имеет собственной динамики, копирует только размерность виртуальной модели (1.1):

$$\dot{z}_i = v_i,\ i = \overline{1, n+1}. \tag{1.10}$$

Тогда относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_i = f_i - z_i$, $i = \overline{1, n+1}$ имеем систему

$$\dot{\varepsilon}_i = f_{i+1} - v_i,\ i = \overline{1,\ n+1}. \tag{1.11}$$

Особенность системы (1.11): в каждом i-м уравнении есть неизвестные сигнала $f_1^{(i)}(t) = f_{i+1}(t)$, которые трактуются как ограниченные возмущения

$$\left| f_{i+1}(t) \right| \le F_{i+1}, i = \overline{1, n+1}, t \ge 0. \tag{1.12}$$

Это требует применения специальных (каскадных) подходов к стабилизации системы (1.11), основанных на методе разделения движений. Основой является процедура синтеза разрывных корректирующих воздействий с последовательной организацией скользящих режимов в виртуальном пространстве ошибок наблюдения [40, 72, 88, 119, 120, 134, 135, 142]. Приведем базовую схему.

В первом уравнении системы (1.11) на основе измерений формируется $v_1 = M_1 \mathrm{sign} \varepsilon_1$, а при $F_2 < M_1 = \mathrm{const} > 0$ выполняется достаточное условие $\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 < 0$ возникновения за конечное время $t_1 > 0$ скользящего режима на поверхности $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\} \Rightarrow z_1 = f_1$. Согласно методу эквивалентного управления [58] при $t > t_1$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_1 = f_2 - v_{1\mathrm{eq}} = 0$ имеем $v_{1\mathrm{eq}}(t) = f_2(t)$. Для восстановления этого непрерывного сигнала вводится низкочастотный фильтр первого порядка с малой постоянной времени $\mu_1 > 0$:

$$\mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + v_1,\ \lim_{\mu_1 \to +0} \tau_1(t) = v_{1\mathrm{eq}}(t) = f_2(t), \tag{1.13}$$

который служит для усреднения высокочастотных сигналов переключения $v_1 = M_1 \mathrm{sign} \varepsilon_1$. Выход фильтра (1.13) используется для синтеза корректирующего воздействия во втором уравнении (1.11): $v_2 = M_2 \mathrm{sign}(\tau_1 - z_2) = = M_2 \mathrm{sign}(f_2 - z_2) = M_2 \mathrm{sign} \varepsilon_2$. При $F_3 < M_2 = \mathrm{const} > 0$ выполняется достаточное условие $\varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 < 0$ возникновения за теоретически конечное время $t_2 > t_1$ (т. е. с точностью до затухающего собственного движения переменной фильтра (1.13)) скользящего режима на поверхности $S_2 = \{S_1 \cap \varepsilon_2 = 0\} \Rightarrow z_2 = f_2$. При $t > t_2$ из уравнения статики $\dot{\varepsilon}_2 = f_3 - v_{2\mathrm{eq}} = 0$ имеем эквивалентное управление

$v_{2\text{eq}} = f_3$. Этот непрерывный сигнал, полученный с выхода фильтра, аналогичного (1.13), используется для формирования разрывной коррекции в третьем уравнении (1.11): $v_3 = M_3\text{sign}(\tau_2 - z_3) = M_3\text{sign}(f_3 - z_3) = M_3\text{sign}\varepsilon_3$, $F_4 \le M_3 = \text{const} > 0$ и т. д. Динамический порядок замкнутой виртуальной системы (1.11) постепенно понижается. В итоге формируется $v_{n+1} = M_{n+1}\text{sign}(\tau_n - z_{n+1}) = M_{n+1}\text{sign}(f_{n+1} - z_{n+1}) = M_{n+1}\text{sign}\varepsilon_{n+1}$, где

$$\mu_n \dot{\tau}_n = -\tau_n + v_n, \ \lim_{\mu_n \to +0} \tau_n(t) = v_{n\text{eq}}(t) = f_{n+1}(t),$$

при $F_{n+2} < M_{n+1} = \text{const} > 0$ выполняется достаточное условие $\varepsilon_{n+1}\dot{\varepsilon}_{n+1} < 0$ и за теоретически конечное время $t_{n+1} > t_n > ... > t_1$ возникает скользящий режим на поверхности $S_{n+1} = \{S_n \bigcap \varepsilon_{n+1} = 0\} \Rightarrow z_{n+1} = f_{n+1}$, $S_n = \{S_{n-1} \bigcap \varepsilon_n = 0\}$.

Таким образом, дифференциатор–наблюдатель (1.10) в описанной реализации имеет разрывные корректирующие воздействия и суммарный динамический порядок $2n+1$, так как дополняется n низкочастотными фильтрами:

$$\begin{aligned} & v_1 = M_1\text{sign}(f_1 - z_1), v_i = M_i\text{sign}(\tau_{i-1} - z_i), i = \overline{2, n+1}; \\ & \mu_i \dot{\tau}_i = -\tau_i + v_i, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

За теоретически конечное время выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1(t) = 0 \Leftrightarrow z_1(t) = f_1(t), t > t_1) \Rightarrow (\varepsilon_2(t) = 0 \Leftrightarrow z_2(t) = f_2(t), t > t_2 > t_1) \Rightarrow \\ & \Rightarrow ... \Rightarrow (\varepsilon_{n+1}(t) = 0 \Leftrightarrow z_{n+1}(t) = f_{n+1}(t), t > t_{n+1} > ... > t_1). \end{aligned}$$

Амплитуды разрывной коррекции, выбираемые на основе простых неравенств $F_{i+1} < M_i$, $i = \overline{1, n+1}$, ограничены и не приводят к всплескам оценочных сигналов. Малые постоянные времени фильтров (1.14) назначаются на основе иерархии, обратно пропорциональной иерархии больших коэффициентов [142].

Представленный алгоритм порождает традиционный скользящий режим (или скользящий режим первого порядка), который последовательно возникает за конечное время на пересечении поверхностей $\varepsilon_i = 0, i = 1, 2, ..., n+1$, при этом переменные ε_i непрерывны, а их производные $\dot{\varepsilon}_i$ – разрывные, но ограничены по модулю. Однако точное дифференцирование (1.14) обеспечивается только в теории при возникновении идеальных скользящих режимов с бесконечной частотой переключения разрывных корректирующих воздействий. На практике из-за различного рода неидеальностей возникает реальный скользящий режим в пограничном слое поверхностей переключения, поэтому к оценочным сигналам примешиваются паразитные высокочастотные помехи с небольшой амплитудой (так называемое явление «чаттеринга» [15, 58, 142, 143]) даже при отсутствии помех в дифференцируемом сигнале, что снижает качество оценивания.

Один из путей повышения качества оценивания дифференциаторов с разрывными управлениями – это увеличение порядка скольжения, а именно, порождение скользящего режима второго порядка на пересечении гиперповерхностей $\varepsilon_i = 0,\ \dot{\varepsilon}_i = 0, i = 1,2,...,n$ [15]. При этом переменные ε_i и их первые производные $\dot{\varepsilon}_i$ непрерывны, а вторые производные $\ddot{\varepsilon}_i$ – разрывные, но ограничены по модулю. Алгоритм, в котором указанные соотношения выполняются за конечное время, получил название «супер-скручивание» (англ. “super-twisting”). Он позволяет добиться лучшего качества оценочных сигналов, т. е. большего приближения к идеальному скольжению при большей неидеальности. Соответствующий дифференциатор–наблюдатель (1.10) имеет следующую коррекцию:

$$\begin{aligned} &v_1 = a_1 |f_1 - z_1|^{(n+1)/(n+2)} \operatorname{sign}(f_1 - z_1) - z_2, \\ &v_2 = a_2 |v_1 - z_2|^{n/(n+1)} \operatorname{sign}(v_1 - z_2) - z_3, ..., \\ &v_n = a_n |v_{n-1} - z_n|^{1/2} \operatorname{sign}(v_{n-1} - z_n) - z_{n+1}, v_{n+1} = a_{n+1} \operatorname{sign}(v_n - z_{n+1}). \end{aligned} \tag{1.15}$$

В работе [119] показано, что при выполнении (1.12) и надлежащем выборе коэффициентов $a_i > 0, i = \overline{1, n+1}$ переменные дифференциатора–наблюдателя (1.10), (1.15) за конечное время восстанавливают производные без дополнительной фильтрации разрывных корректирующих воздействий, а именно:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_1(t) = 0 \Leftrightarrow z_1(t) = f_1(t), t > t_1) \Rightarrow (\dot{\varepsilon}_1(t) = 0 \Leftrightarrow v_1(t) = f_2(t), t > t_2 > t_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\varepsilon_2(t) = 0 \Leftrightarrow z_2(t) = f_2(t), t > t_3 > t_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\dot{\varepsilon}_2(t) = 0 \Leftrightarrow v_2(t) = f_3(t), t > t_4 > t_3) \Rightarrow ... \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\varepsilon_{n+1}(t) = 0 \Leftrightarrow z_{n+1}(t) = f_{n+1}(t), t > t_{2n+1} > t_{2n}). \end{aligned} \tag{1.16}$$

По сравнению с классическим дифференциатором–наблюдателем на скользящих режимах (1.10), (1.14) динамический порядок дифференциатора

(1.10), (1.15) не повышается и равен $(n+1)$, но закон коррекции существенно усложняется. Кроме того, отсутствует конструктивная процедура для выбора коэффициентов $a_i > 0, i = \overline{1, n+1}$ корректирующих воздействий (1.15).

«Основным препятствием на пути идеального дифференцирования является физическая неосуществимость идеального дифференциатора и неустранимое противоречие между точностью операции дифференцирования и операцией фильтрации помех» [15, с. 262]. В работе [119] показано, что при специальной настройке дифференциатор (1.10), (1.15) может обеспечить дифференцирование с некоторой точностью зашумленного сигнала (в отличие от дифференциатора на скользящих режимах первого порядка (1.10), (1.14), который теряет работоспособность при шумах в измерениях).

В системах автоматического управления для решения проблемы фильтрации измерений традиционно используют фильтр Калмана [16], который также выполняет функцию наблюдателя состояния, если комплект датчиков не полный. Стоит отметить, что при оценивании принципиально невозможно отделить полезный сигнал от шума, если они действуют в одной полосе частот. При определенных условиях фильтр Калмана можно настроить оптимальным образом по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценивания [133]. Для реализации фильтра Калмана требуется точное знание параметров модели объекта, либо их адекватная идентификация, что не всегда возможно.

По этой причине в рассмотренных наблюдателях (1.3), (1.10) при дифференцировании зашумленного сигнала стандартная линейная коррекция Калмана [45, 133] будет неэффективной, так как в виртуальных системах (1.4), (1.11), подлежащих стабилизации, присутствуют неконтролируемые возмущения. Известны гибридные наблюдатели [100], в которых корректирующие воздействия содержат и линейную, и разрывную функции. Последняя служит для подавления возмущений. Другой подход при синтезе линейных дифференциаторов–наблюдателей заключается в расширении пространства состояний виртуальной системы (1.1), которая дополняется фильтром нижних частот, на вход которого подается зашумленный сигнал [71, 85]. По переменным фильтра формируются линейные корректирующие воздействия расширенного наблюдателя, что улучшает фильтрующие свойства алгоритма.

Следует отметить, что во всех дифференциаторах–наблюдателях, в которых реализуется принцип разделения движений, предельные ошибки оценивания увеличиваются по модулю с ростом порядка оцениваемой производной. Для улучшения точности наблюдателей на скользящих режимах (любого порядка) при микропроцессорной реализации требуется уменьшать шаг дискретизации. Это приводит к очевидным вычислительным затратам и увеличению времени счета. Достижимая точность обусловлена разрядностью процессора.

В данной работе в качестве дифференцируемых сигналов, в первую очередь, рассматриваются задающие воздействия для технических объектов управления, к которым предъявляется требование достижимости. Задающие воздействия, которые отслеживают выходные переменные механических и электромеханических объектов, должны определять допустимое движение в рабочем пространстве и быть реализуемыми объектом. Так, заданный путь следования мобильного робота на плоскости или в пространстве должен быть достаточно гладким и иметь ограниченную непрерывную кривизну, так как робот не может мгновенно изменить направление движения. Если есть основания полагать, что заданные кривые являются гладкими и реализуемыми, то задача восстановления их производных, а также фильтрации решается указанными выше методами с помощью динамических дифференциаторов со специальными настройками. Однако на практике заданный маршрут, составленный в первом приближении, не является гладким. Например, это может быть ломаная, соединяющая путевые точки. Поэтому дополнительно возникает проблема сглаживания задающих сигналов в реальном времени с учетом ограничений на скорость и ускорение объекта управления.

Обычный динамический дифференциатор–наблюдатель не обладает эффектом сглаживания, он настраивается так, чтобы его переменные как можно точнее воспроизводили измеряемый сигнал и его неизмеряемые производные.

Поэтому без предварительной обработки негладкого сигнала дифференциатор–наблюдатель не обеспечивает сглаживания опорных сигналов в особых точках, необходимого для объектов механической природы.

Таким образом, при синтезе динамической системы, предназначенной не только для восстановления производных, но и для сглаживания кусочно-непрерывных детерминированных сигналов, целесообразно использовать не методы теории наблюдения и фильтрации, а методы синтеза систем слежения, применяемые к системам, функционирующим в условиях действия внешних неконтролируемых возмущений без предположения об их гладкости. В качестве основы для построений предлагается использовать концепцию следящего дифференциатора, представленную в следующем разделе. Существенно, что в нем изначально заложены принципы фильтрации помех без дополнительного расширения пространства состояний за счет фильтров различного назначения.

1.3 Следящие дифференциаторы как средство восстановления производных зашумленных сигналов

Следящий дифференциатор, впервые предложенный около 30 лет назад [92], предназначался для восстановления первой производной зашумленного сигнала измерений некоторой переменной состояния объекта управления. Такой дифференциатор представляет собой систему дифференциальных уравнений второго порядка, имеющую каноническую форму вход–выход

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = w, \tag{1.17}$$

где $x_{1,2} \in R$ – переменные дифференциатора, w – входное корректирующее (управляющее) воздействие, которое формируется в виде функции от переменных дифференциатора и внешнего сигнала $f_1(t) \in R$ так чтобы стабилизировать ошибку слежения (невязку между выходной переменной дифференциатора $x_1(t)$ и внешним сигналом) и отфильтровать шумовые помехи, если они присутствуют в измерениях. В отличие от традиционных дифференциаторов–наблюдателей, в системе (117) к $f_1(t)$ не предъявляется требование гладкости.

Достаточно, чтобы эта функция была ограничена и интегрируема на ограниченном интервале. В результате переменные состояния дифференциатора воспроизводят полезный сигнал измерений и его производную (здесь и далее – обобщенную производную, если дифференцируемый сигнал негладкий):

$$x_1(t) \to f_1(t), x_2(t) \to \dot{f}_1(t). \tag{1.18}$$

В [92] показано, что если система $x_1 = x_2, x_2 = h(x_1, x_2)$ имеет решение по Филиппову [59] и асимптотически устойчива $\lim\limits_{t\to\infty} x_{1,2}(t) \to 0,$ то тогда в замкнутой системе (1.17) с управлением $w = r^2 h(x_1 - f_1(t), x_2 / r), r > 0$ обеспечивается $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_0^T \left| x_1 - f_1(t) \right| dt = 0$, т. е. (1.18). При этом фильтрующие свойства, а также характер и скорость сходимости (1.18) зависят от выбора закона управления $h(.)$, коэффициента r и от дополнительных настраиваемых коэффициентов.

В рамках этой концепции за последнее время были предложены следящие дифференциаторы с различными (линейными и нелинейными, непрерывными и разрывными) законами управления [78, 86, 89, 93, 122, 127, 147]. Самым простым является линейный закон управления с одним коэффициентом [127] $w = r^2 (f_1(t) - x_1 - x_2 / r)$, подходящий для постоянных сигналов. Характерно, что аналогичный закон разрывного управления $w = r\operatorname{sign}(f_1(t) - x_1 - 0.5 x_2 \left| x_2 \right| / r)$ при практической реализации рекомендуется заменить на его непрерывный аналог в виде sat-функции [93]. Эта тенденция привела к использованию нелинейных и гладких S-образных аналогов функции знака, которые сохраняют известные преимущества систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме, в допредельной ситуации. В качестве примера приведем законы управления с использованием арктангенса [86] и гиперболического тангенса [93]:

$$\begin{aligned} &w = r^2 (-l_1 \arctan(\gamma_1 (x_1 - f_1(t))) - l_2 \arctan(\gamma_2 x_2 / r)), \\ &w = -r^2 \tanh\left(\frac{\beta x_1 - (1-\alpha) f_1(t)}{\gamma} \right) - r x_2, \end{aligned} \tag{1.19}$$

где $l_{1,2} > 0, \gamma_{1,2} > 0$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ – дополнительные настраиваемые коэффициенты.

В указанных выше источниках для следящих дифференциаторов второго порядка с различными законами управления получены строгие доказательства сходимости (1.18) и помехозащищенности, которые подтверждаются результатами моделирования, натурных экспериментов, а также сравнительного анализа. Показано, что следящие дифференциаторы обладают оптимальной асимптотикой по отношению к входным шумам. При этом лучшую производительность показывают дифференциаторы с нелинейной S-образной коррекцией (1.19).

В рамках изложенной концепции помехозащищенный следящий дифференциатор $(n+1)$-го порядка, предназначенный для восстановления n производных внешнего сигнала, имеет вид

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, \overline{i=1,n}, \dot{x}_{n+1} = w. \tag{1.20}$$

Показано [92], что если система $\dot{x}_i = x_{i+1}, \overline{i=1,n}, \dot{x}_{n+1} = h(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ имеет решение по Филиппову [59] и асимптотически устойчива $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) \to 0, i = \overline{1, n+1}$, то тогда в замкнутой системе (1.20) с управлением

$$w = r^{n+1} h(x_1 - f_1(t), x_2 / r, ..., x_{n+1} / r^n), r > 0 \tag{1.21}$$

обеспечиваются следующие соотношения:

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^T |x_1 - f_1(t)| dt = 0, x_1(t) \to f_1(t), x_2(t) \to \dot{f}_1(t), ..., x_{n+1}(t) \to f_1^{(n)}(t). \tag{1.22}$$

Однако проблемы выбора конкретного закона управления (1.21), обеспечивающего заданные свойства переменных следящего дифференциатора (1.20), и соответствующего синтез дополнительных настраиваемых коэффициентов, основанного на строгих доказательствах, в настоящее время недостаточно изучены.

В следящем дифференциаторе (1.20) внешний сигнал действует только по входу на последнюю переменную (в отличие дифференциаторов–наблюдателей (1.3), (1.10), в которых внешний сигнал как аргумент корректирующих воздействий присутствует в каждом уравнении). Система (1.20) представляет собой цепочку интеграторов, которые даже без специальных настроек будут способствовать сглаживанию и фильтрации входного сигнала. Таким образом, следящий дифференциатор является более подходящим инструментом для дифференцирования кусочно-гладких и зашумленных сигналов. Учитывая бóльшую эффективность нелинейных законов управления (1.19), решение для синтеза (1.21) следует искать в классе гладких и нелинейных S-образных функций.

Одной из таких функций является модификация гиперболического тангенса – сигма-функция $\sigma(x) = \tanh(x/2)$ (см. раздел 3.2), которая успешно заменила функции знака и, соответственно, разрывные управления в задачах наблюдения [37] и слежения [2, 69] при воздействии на объект управления внешних неконтролируемых и несогласованных возмущений, каналы действия которых не совпадают с каналами управляющих воздействий. Представляется перспективным для синтеза следящего дифференциатора общего вида (1.20) взять за основу процедуру блочного синтеза с сигмовидными локальными связями и сигмовидным управлением. В работе [2] с помощью такой процедуры обеспечивалось заданной точность следящей одноканальной системы. В данной работе развитие метода заключается в учете ограничений на переменные состояния и управление, необходимом для порождения достижимых эталонных траекторий с заданными динамическими ограничениями при отслеживании внешних негладких сигналов с помощью следящего дифференциатора (1.20). Цель состоит в построении динамического генератора реализуемых задающих воздействий с S-образными корректирующими воздействиями, с помощью которого комплексно решаются задачи восстановления производных, фильтрации и сглаживания первичных сигналов. В следующем разделе обосновывается необходимость решения такой задачи. Заметим, что в указанных выше публикациях, посвященных следящим дифференциаторам, задача сглаживания полезного сигнала в явном виде не ставилась, исследовались только первые две проблемы.

1.4 Проблема реализуемости эталонных траекторий мобильных роботов

В настоящее время мобильные роботы получили широкое распространение в различных сферах человеческой деятельности: военной, индустриальной, гражданской, социальной. Круг выполняемых ими задач постоянно расширяется. При управлении движущимися автономными объектами задача планирования маршрута является самостоятельной проблемой и наиболее важной частью автономной навигации. Обычно под планированием движения понимается поиск бесконфликтного пути для перемещения твердого тела или кинематической конструкции на плоскости или в пространственно-трехмерной рабочей сцене. Допустимый путь представляет собой непрерывную кривую в конфигурационном пространстве робота. Она должна соединять начальную и конечную точки маршрута, удовлетворять требованиям безопасности и исключать столкновения с внутренними и граничными препятствиями рабочей сцены, а также удовлетворять всем установленным кинематическим и динамическим ограничениям.

В настоящее время количество различных методов планирования пути для мобильных роботов очень велико. При этом каждый год публикуется множество новых алгоритмов и их комбинаций. Факторы, влияющие на выбор тех или иных математических методов для планирования движения, обусловлены миссией робота или группы роботов и особенностями решаемых прикладных задач. К наиболее распространенным факторам относятся: характер постановки планирования движения (локальный или глобальный); геометрическое представление перемещаемого объекта (твердое тело или кинематическая конструкция); свойства окружения (статическое или динамическое); свойства конфигурационного пространства (равномерное распределение допустимых состояний или наличие узких областей); характер запросов планирования (однократный или многократный); комплектность и возможности сенсорной системы, используемые методы автоматического управления движением; мощность вычислительных ресурсов бортовой информационно-управляющей системы и др.

В обзоре [152] методы планирования траекторий разделяют на алгоритмы на основе машинного обучения и на традиционные. Последние включают три основные группы алгоритмов: поиска на графах, на основе выборки данных и различные интерполяционные методы (построение маршрутов в виде аналитических кривых, рассматриваемых далее). Эти точные методы требуют больших вычислительных затрат и не всегда находят применение на практике в режиме реального времени. Поэтому часто прибегают к приближенным методам построения пути на основе графа, называемого дорожной картой. Наиболее популярными являются алгоритмы Дейкстры и A* (англ. “A Star”), основанные на итерационном обходе вершин графа, и их современные улучшенные модификации, которые более эффективно используют вычислительные ресурсы, но уступают по качеству решений [146]. Для сцен с большим количеством препятствий и подвижных объектов применяются популярные на сегодняшний день сэмплинг-методы планирования движения, часто ассоциируемые с методами квази-Монте Карло. К ним относятся методы вероятностных маршрутных сетей PRM (Probabilistic Roadmap Method) и быстрорастущих случайных деревьев RRT (Rapidly-exploring Random Trees), которые позволяют учитывать неголономные ограничения, такие как максимальный радиус поворота колеса робота [74, 97]. Они широко применяются для решения задач поиска путей как в локальной, так и глобальной постановке. С помощью глобальных подходов либо гарантировано находится решение, либо доказывается, что решение не может быть найдено. Однако эти методы могут быть ненадежными в реальных приложениях из-за высоких вычислительных требований и неработоспособными при динамическом изменении окружающей среды. Локальные подходы не гарантируют получение решения, но способны отыскать его с меньшими вычислительными затратами. Они адаптируются к реальным условиям и изменениям окружающей среды. Современным трендом интеллектуальной робототехники является комбинирование разных подходов к планированию движения для нивелирования недостатков отдельных методов [70, 83, 123, 148].

Данное исследование опирается на интерполяционные методы планирования траекторий на плоскости и в пространстве. Побуждающий фактор для специалистов по автоматическому управлению мехатронными объектами состоит в том, что для реализации высокоточных алгоритмов автоматического управления, обеспечивающих движение объекта управления вдоль заданного пути, требуется информация не только о текущих координатах целевой точки, но и об ее производных старшего порядка. Большинство практически важных задач управления по выходу покрываются случаями, когда относительная степень n равна 2 (для механических систем), 3, 4 и 5 (с учетом динамики исполнительных устройств), т. е. для реализации соответствующих следящих систем потребуются производные заданий от 2-го до 5-го порядков включительно.

В задачах путевой стабилизации скорость движения робота часто не контролируется и является постоянной [49, 50]. В задачах траекторного управления нужно определить не только путь следования, но также эталонные скорость и ускорение движения на различных участках криволинейного пути [30, 44]. Для полноценного проектирования системы автоматического управления движением мобильного робота в общем случае требуется информация о координатах эталонной траектории и их производных старших порядков, что, как правило, требует знания аналитического описания траектории движения.

Интерполяционные алгоритмы как раз и заключаются в построении маршрута в виде аналитических кривых [117]. Задача, как правило, решается в два этапа. На первом этапе формируется набор опорных путевых точек в рабочем пространстве робота или полигона. При этом можно использовать указанные выше приближенные методы – алгоритмы на графах, случайных деревьев и др. [81]. На втором этапе по сформированному набору путевых точек строится кривая (путь следования мобильного робота). Если движение происходит в пространстве, то говорят, что это 3D-кривая. Задающее воздействие в виде траектории имеет временную привязку к пути следования: нужно обеспечить нахождение робота в путевых точках в заданные моменты времени, т. е. построить 4D-траекторию. При движении на плоскости пусть следования описывается 2D-кривой, а 3D – соответствующая траектория с учетом времени движения.

При построении аналитического маршрута надо сформировать для мобильного робота допустимый путь или допустимую траекторию. Проблема состоит в том, что полученная кривая, которая обычно задается в параметрическом виде, должна быть представлена гладкими функциями из класса C^n, т. е. в исследуемой области они должны иметь непрерывные производные до n-го порядка включительно. Построенный путь должен удовлетворять ограничениям, связанным с конструкцией мобильного механизма, который не может изменять скорость или направление движения мгновенно. Например, робот, передвигающийся с помощью колес, чаще всего не может без проскальзывания передвигаться в боковом направлении. Следует учитывать ограничения, обусловленные предельными углами поворота колес и скоростью их вращения, т. е. надо обеспечить непрерывность кривизны пути следования.

Таким образом, в задачах траекторного управления важнейшей проблемой является проектирование гладких траекторий с непрерывной кривизной, которые удовлетворяют проектным ограничениям конкретного колесного робота и являются для него достижимыми [140, 150]. Обобщим основные свойства реализуемой траектории для неголономных механических систем: достаточная гладкость (минимальное требование C^2); непрерывная кривизна; абсолютные значения ее первой–третьей производных не должны превышать ограничений робота на развиваемые скорость, ускорение и рывок.

Обеспечить гладкость кривой можно с помощью алгоритмов корректировки опорных точек, который заключается в их итеративном сдвиге и является достаточно трудоемким. Другой подход – это сглаживание ломаных в сочленениях, когда эталонная траектория строится из нескольких кривых и ломаные участки траектории корректируются только в окрестностях стыка кривых. В простейшем случае точки соединяются прямыми линиями, а части отрезков, прилегающих к углу ломаной, заменяются дугой окружности. Формально путь при этом сглаживается, но кривизна кривой в точках соединения прямых или дуг терпит разрыв, что недопустимо. Для преодоления этой проблемы используют различные аналитические методы. Например, траектории, сглаженные с помощью дважды дифференцируемой кривой Безье класса C^2, не имеют разрывы в функции кривизны, но для ее построения используют семь опорных точек. В других методах для получения гладких кривых используются полиномиальные сплайны, клотоиды, обобщенные спирали Корню [125, 131].

Наибольшее распространение получили B-сплайны («базисные сплайны») [4, 9, 48, 52, 53, 63, 98, 128, 132, 136]. Проблема сводится к вычислению полиномиальных коэффициентов степенной функции времени (многочлена), соединяющей несколько соседних точек.

Опишем базовую идею этого метода [3]. Пусть требуется составить график функции $\varphi(x)$ по известным точкам $y(x_i), i=\overline{0,N}$. В качестве аппроксимирующей модели применяется «гибкая» линейка, рассматриваемая как упругий брусок с уравнением свободного равновесия $\varphi^{(4)}(x)=0$. Поэтому в промежутках между каждой парой соседних точек (узлов) имеем многочлен третьей степени, который записывают в виде

$$\varphi(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3, x\in[x_{i-1},x_i], \tag{1.23}$$

а его коэффициенты на каждом интервале определяются из требований прохождения искомой функции через узлы

$$\begin{aligned}&y_{i-1}=\varphi(x_{i-1})=a_i, i=\overline{1,N},\\&y_i=\varphi(x_i)=a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3, h_i=x_i-x_{i-1},\end{aligned} \tag{1.24}$$

непрерывности ее первой и второй производной во всех точках, включая узлы

$$\begin{aligned}&\varphi'(x)=b_i+2c_i(x-x_{i-1})+3d_i(x-x_{i-1})^2\Rightarrow b_{i+1}=b_i+2c_ih_i+3d_ih_i^2,\\&\varphi''(x)=2c_i+6d_i(x-x_{i-1})\Rightarrow c_{i+1}=c_i+3d_ih_i, i=\overline{1,N-1}, x\in[x_{i-1},x_i],\end{aligned} \tag{1.25}$$

а также из естественного предположения о нулевой кривизне на концах:

$$1/(2\varphi''(x_0))=c_1=0, 1/(2\varphi''(x_N))=c_N+3d_Nh_N=0. \tag{1.26}$$

Из совместной системы линейных уравнений (1.24)–(1.26) итерационно определяют $4N$ неизвестных коэффициентов многочлена (1.23).

Использование кубического B-сплайна и 5-и опорных точек позволяет добиться непрерывного, гладкого изменения кривизны траектории. Для составления траектории с учетом проектных ограничений мобильного робота потребуется дополнительная алгоритмизация или увеличение степени многочлена. Например, для ограничения первой производной в работе [137] используется полиномиальная кривая 7-й степени. Кроме того, нужно обеспечить гладкую сшивку отдельных фрагментов траектории [51]. Увеличение числа контрольных точек позволит порождать гладкие кривые различной формы, но при этом геометрические расчеты усложняются, а время счета алгоритма увеличивается. Отдельную проблему составляет задание скорости движения на разных участках, приводящее к громоздким формулам. При отсутствии автоматических механизмов учета ограничений на переменные состояния и управления мобильного робота требуются дополнительные операции по проверке выполнения этих ограничений. С этой целью выполняется численное моделирование замкнутой системы при заданном программном или стабилизирующем управлении и производится коррекция созданного маршрута, если ограничения не выполнены.

Реализация аналитических интерполяционных методов с учетом ограничений на этапе планирования траектории не вызывает трудностей. Однако они не подходят для сглаживания сложных маршрутов с большим количеством опорных точек и фрагментов различной формы в реальном времени из-за большой вычислительной нагрузки и времени вычислений [91]. Кроме того, сложная аналитическая траектория может занимать много памяти при хранении на бортовом компьютере. При составлении маршрута сложной формы с использованием данных методов в реальном времени следует ожидать уменьшение плавности и снижение качества построенной траектории сложной формы, если производительности бортовых вычислительных устройств роботов невысока, а дальность действия бортовых датчиков ограничена.

Суммируем основные недостатки аналитических методов сглаживания:

– проблематичность реализации в реальном времени на бортовом компьютере алгоритмов сглаживания маршрутов сложной формы, которые сопровождаются громоздкими расчетами и увеличением времени счета;

– каждая новая последовательность точек требует индивидуальной организации расчетов коэффициентов многочлена;

– заранее спланированные маршруты могут потребовать при хранении много памяти;

– для ограничения скорости, ускорения и рывка нужна дополнительная алгоритмизация, увеличивающая вычислительную нагрузку.

Вместо описанных аналитических методов представляется перспективным для порождения эталонных реализуемых траекторий использовать динамические модели – генераторы заданий. Однако в существующих методах построения динамических генераторов на основе канонических представлений [5] или моделей объектов управления [30], во-первых, в управляющих воздействиях генератора используется не только опорный сигнал, но и его производные, что требует составления полного аналитического описания пути следования в виде гладких параметрических функций. Во-вторых, имеется возможность учитывать ограничения только на управляющие воздействия объекта управления. Представляется целесообразным для порождения плавных и достижимых траекторий взять за основу следящий дифференциатор (1.20), для реализации которого достаточно только текущих значений опорного сигнала.

1.5 Направления и методы диссертационного исследования

Объектом диссертационного исследования являются сигнальные задающие воздействия для технических объектов управления, в том числе, эталонные траектории мобильных роботов на плоскости и в пространстве. Опишем основные предположения и содержательные постановки решаемых задач.

1. Векторный задающий сигнал, который должны отслеживать выходные (регулируемые) переменные объекта управления, поступает в систему управления в реальном времени из автономного источника, его аналитический вид и его производные заранее не известны. Отсюда следует первая проблема: нужно восстанавливать в реальном времени производные этого сигнала, необходимые для синтеза управления в системе слежения. Порядок производных, подлежащих восстановлению, определяется учитываемой динамической моделью объекта управления и ее относительным порядком.

2. На полезный сигнал могут аддитивно накладываться неконтролируемые помехи. Это порождает вторую проблему, связанную с необходимостью

фильтрации задающих воздействий: нужно выделить полезный сигнал и получить его производные в сигнальном виде.

3. Составляющие полезного сигнала являются непрерывными, но могут оказаться негладкими функциями времени с особыми точками, в которых производные терпят конечные разрывы (например, если заданный путь следования составлен в первом приближении в виде пространственной ломаной, соединяющей опорные путевые точки). Отсюда возникает третья проблема: необходимо сглаживать в реальном времени стыки ломаной, чтобы не допускать выбросов значений производных в особых точках, иначе это приведет к недопустимым выбросам управляющих воздействий. Кроме того, кривизна аппроксимирующей кривой должна удовлетворять ограничениям на скорость и ускорение конкретного робота для того, чтобы задающее воздействие было реализуемым.

Обобщая материал данной главы, можно отметить, что проблема динамического дифференцирования в настоящее время достаточно полно изучена в рамках теории наблюдателей состояния применительно к гладким детерминированным сигналам. В таблице 1.1 приведены качественные оценки («–» – плохо, «±» – удовлетворительно, «+» – хорошо) ряда показателей для рассмотренных в разделе 1.2 дифференциаторов–наблюдателей:

1) дифференциатора без собственных движений на скользящих режимах первого порядка (1.10), (1.14);

2) дифференциатора без собственных движений на скользящих режимах второго порядка (1.10), (1.15);

3) стандартного линейного наблюдателя с глубокой обратной связью (1.3), (1.7);

4) стандартного наблюдателя с кусочно-линейной коррекцией с насыщением (1.3), (1.8);

5) дифференциатора без собственных движений (1.10) с кусочно-линейной коррекцией с насыщением, предлагаемого к разработке.

Таблица 1.1 – Сравнительный анализ дифференциаторов–наблюдателей

Свойство / Метод	1	2	3	4	5
Простота настройки	±	–	±	±	+
Простота вычислительной реализации	–	–	+	+	+
Нетребовательность к разрядной сетке и шагу дискретизации	–	–	+	+	+
Качество оценочных сигналов в установившемся режиме	–	±	+	+	+
Ограниченность всплесков оценочных сигналов	+	+	–	+	+
Помехозащищенность	–	+	–	±	±

Можно сделать вывод о том, что в условиях ограниченности вычислительных ресурсов, характерной для бортовых компьютеров мобильных роботов, для детерминированных сигналов предпочтительнее использовать наблюдатели с непрерывной коррекцией, которая обеспечивает и лучшую точность, и лучшее качество (гладкость) восстановленных производных. Как было отмечено, основной недостаток наблюдателя с глубокой обратной связью связан с выбросами оценочных сигналов, возникающими из-за неограниченности линейных корректирующих воздействий. Альтернативный метод заключается в аппроксимации функции знака линейной функцией с насыщением (1.8). Такие наблюдатели сочетают в себе преимущества линейных наблюдателей с большими коэффициентами и наблюдателей на скользящих режимах (в том числе, ограниченность корректирующих воздействий), но свободны от их недостатков. Представляется перспективной разработка дифференциатора (1.10) с кусочно-линейными корректирующими воздействиями. Сильными сторонам такого дифференциатора будут: простая структура, простая настройка и простая вычислительная реализация. Он идеально подойдет для восстановления производных любого требуемого порядка гладких или кусочно-гладких детерминированных сигналов с небольшим количеством особых точек. При дополнительной настройке и/или дополнительном наращивании динамического порядка за счет фильтров нижних частот [71, 85] можно синтезировать помехозащищенные дифференциаторы–наблюдатели того или иного типа, решающие одновременно первую и вторую проблему. Однако это направление исследований не представляется перспективным. Кроме того, все указанные в таблице 1.1 наблюдатели не подходят для решения третьей проблемы – сглаживания опорных сигналов и порождения реализуемых траекторий. При их настройке трудно учитывать ограничения на переменные состояния объекта управления.

Таким образом, первое направление настоящего исследования, представленное в главе 2, – разработка дифференциатора без собственных движений (1.10) с кусочно-линейной коррекцией с насыщением для дифференцирования кусочно-гладких детерминированных сигналов с небольшим количеством особых точек. Он предназначен исключительно для точного дифференцирования в ситуациях, когда в сглаживании сигнала нет необходимости. Методологической базой для его разработки являются методы каскадного синтеза стандартных наблюдателей, основанных на принципе разделения движений [31, 41].

С помощью следящего дифференциатор (1.20) при надлежащей настройке можно комплексно решить все три указанные выше проблемы: и дифференцирование, и фильтрацию, и сглаживание. Но в указанных в разделе 1.3 работах ставились и решались только первая и вторая задачи. Эффекты сглаживания в данных алгоритмах не изучались, процедуры настройки следящих дифференциаторов общего вида недостаточно формализованы. Учитывая, что проектирование автономных мобильных роботов является важным современным вызовом, представляется актуальной разработка (альтернативных по отношению к аналитическим) динамических методов сглаживания опорных траекторий с автоматическим учетом проектных ограничений на скорость, ускорение и рывок транспортного средства.

Таким образом, второе направление настоящего исследования, представленное в главе 3, – разработка универсального и простого в вычислительной реализации следящего дифференциатора (1.20) с сигмовидной коррекцией для дифференцирования и генерации плавных реализуемых траекторий при отслеживании опорных негладких ломаных, задающих движение мобильного робота на плоскости или в пространстве в первом приближении (так называемых примитивных траекторий). Методологической базой для являются методы блочного синтеза следящих систем с нелинейными локальными связями [2, 69]. Проблема фильтрации не является основным предметом данного исследования, но она будет рассмотрена на уровне гипотез и численного моделирования. Строгая формализация процедуры синтеза помехозащищенного следящего дифференциатора составляет предмет будущих исследований автора.

Третье направление настоящего исследования, представленное в разделе 4.2, – разработка простых в вычислительной реализации сопутствующих алгоритмов для планирования движения и погона. К ним относятся методы составления первичных негладких 3D и 4D траекторий, проходящих через заданные путевые точки на плоскости или в пространстве с обеспечением заданного времени движения для последующего сглаживания с помощью следящего дифференциатора; алгоритмы перевода объекта из произвольных начальных условий с учетом проектных ограничений в стартовую точку эталонной траектории, порождаемую следящим дифференциатором; алгоритмы визуализации безопасного коридора с учетом габарита транспортных средств. Методологической базой для их разработки являются формулы аналитической геометрии.

Второе и третье направления в комплексе представляют собой новую, эффективную (простую и универсальную) концепцию для планирования движения и полигонов, а также обработки сигналов примитивных траекторий в режиме реального времени на бортовых компьютерах для информационного обеспечения следящих систем автономных мобильных роботов.

В главах 4 и 5 будут также представлены процедуры синтеза следящих систем для центров масс колесной платформы и беспилотного летательного аппарата самолетного типа с применением дифференциаторов–наблюдателей и следящих дифференциаторов. Будет показано, что при наличии реализуемых задающих воздействий и их производных для решения задачи слежения можно использовать простые линейные ПД-регуляторы.

Глава 2 Каскадный синтез дифференциаторов–наблюдателей детерминированных сигналов с кусочно-линейной коррекцией

В данной главе разработана процедура синтеза динамического дифференциатора с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, обеспечивающего восстановление за заданное время с заданной точностью производных любого конечного порядка кусочно-дифференцируемого детерминированного сигнала. Методической основой является каскадный синтез наблюдателей состояния с кусочно-линейной коррекцией, предназначенный для систем с неопределенным входом [31, 41]. Особенности разработанного дифференциатора: при его синтезе реализуется метод разделения движений с помощью непрерывных, ограниченных по модулю корректирующих воздействий, что позволяет избежать больших выбросов в получаемых оценках; он не имеет собственной динамики, что упрощает настройку по сравнению с базовым алгоритмом [31].

Без ограничения общности, полученные в данной главе результаты применимы к любым детерминированным векторным сигналам, удовлетворяющим нижеследующему описанию. Но для определенности рассматриваются сигналы, служащие задающими воздействиями для технических объектов управления. Базовое исследование выполнено для одноканальной системы.

Глава организована следующим образом. В разделе 2.1 вводятся постановка задачи и предположения о дифференцируемом сигнале. В разделе 2.2 представлена процедура синтеза дифференциатора общего вида. В разделе 2.3 приведены результаты численного моделирования и сравнительного анализа дифференциаторов различных типов.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [19, 26, 101, 107, 109].

2.1 Постановка задачи

Пусть для управляемого объекта с одним входом и одним выходом $y_1(t) \in Y \subset R,\ t \geq 0$, где Y – открытая рабочая область изменения регулируемой переменной, в рамках тех или иных методов синтезирован закон управления, обеспечивающий отслеживание выходной переменной заданного сигнала и зависящий, в том числе, от производных задающего воздействия до *n*-го порядка включительно, где *n* – относительный порядок объекта управления. Задание поступает в систему управления из автономного источника в реальном времени в виде непрерывного детерминированного сигнала $g_1(t) \in G_1 \subset Y,\ t \geq 0$, его аналитическое описание как функции времени неизвестно, но его производные до $(n+1)$-го порядка включительно ограничены

$$\left| g_1^{(i)}(t) \right| \leq G_{i+1}, i = \overline{1, n+1}, t \geq 0, \tag{2.1}$$

где G_{i+1} – известные положительные константы, не превышающие проектные ограничения конкретного объекта управления.

Ставится задача оценивания с заданной точностью производных задающего сигнала до *n*-го порядка включительно с помощью динамического дифференциатора без собственных движений вида (1.10). В качестве основы для построения наблюдателя вводится динамическая модель $(n+1)$-го порядка

$$\dot{g}_i = g_{i+1},\ i = \overline{1, n+1}, \tag{2.2}$$

где измеряемый сигнал $g_1(t)$ полагается выходом; переменными состояния являются его производные $g_1^{(i)}(t) = g_{i+1}$ до *n*-го порядка включительно; входной сигнал $g_1^{(n+1)}(t) = g_{n+2}(t)$ – $(n+1)$-я производная трактуется как внешнее ограниченное возмущение. В силу канонической структуры система (2.2) является наблюдаемой относительно выхода, что является предпосылкой решения задачи оценивания ее состояния.

Предполагается, что $g_1(t)$ как функция времени является непрерывной и кусочно-дифференцируемой, т. е. допускается, что на разных временны́х интервалах она описывается разными аналитическими выражениями. Как следствие, ее производные в общем случае являются кусочно-непрерывными, ограниченными на интервалах и имеют конечное число точек разрыва первого рода, в которых форма сигнала меняется и в которых ограничения (2.1) следует понимать как односторонние. Таким образом, динамическая модель (2.2) порождает достаточно широкий класс функций $g_1(t)$, а именно, множество решений канонической системы $(n+1)$-го порядка с произвольным ограниченным входом $g_{n+2}(t)$. Допускаемые точки конечного разрыва производных можно трактовать как моменты изменения скачком начальных условий в системе (2.2).

В рассматриваемой постановке модель (2.2) является виртуальной и не используется в контуре обратной связи в качестве генератора задающего сигнала, она служит для определения структуры и размерности наблюдателя производных данного сигнала. В других постановках входной сигнал $g_{n+2}(t)$ может зависеть от вектора состояния модели (2.2), а также и от внешних по отношению к модели (2.2) сигналов, в частности от вектора состояния модели объекта управления. В этом смысле (2.2) является обобщением и расширением динамических моделей, используемых для имитации и генерации внешних воздействий в виде экзогенных систем с неизвестными начальными условиями [47, 55]. В работе [57] рассматривался генератор заданий с неопределенными параметрами. В робастной постановке задача наблюдения его состояний дополнялась идентификацией неизвестных параметров с привлечением методов теории систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме.

И целевые сигналы, и возмущения являются внешними воздействиями для объекта управления. Но в задачах получения оценок производных задающих воздействий и внешних возмущений есть принципиальные отличия. Во-первых, в отличие от внешних возмущений целевые сигналы не действуют непосредственно на объект управления, а поступают в контроллер, где используются для формирования управления. Во-вторых, обычно задающие воздействия полагаются известными, что позволяет построить автономный наблюдатель для оценивания их производных, который не зависит от процессов, протекающих в объекте управления. Внешние возмущения, как правило, неизвестны и оцениваются по их воздействию на объект управления с использованием для построения наблюдателя возмущений модели объекта управления [33, 35]. В случае, когда наблюдатель возмущений строится на основе виртуальной динамической модели возмущений, он функционирует совместно с объектом управления, сигналы которого используются для коррекции такого наблюдателя [6, 8, 47, 61, 75, 129]. В-третьих, задача получения оценок производных задающих воздействий, как показано в данной главе, всегда имеет решение и не зависит от постановки задачи управления. В то же время задача получения оценок возмущений и их производных не всегда разрешима, в частности, когда для измерения доступны только выходы объекта управления, как правило, удается получить оценки только смешанных сигналов (комбинаций переменных состояния объекта управления и внешних возмущений) [31, 41].

2.2 Процедуры каскадного синтеза

2.2.1 Общий случай

В данном подразделе представлен основной теоретический результат. Для системы (2.2) вводится дифференциатор–наблюдатель без собственных движений общего вида (1.10). Формализуются особенности каскадного синтеза кусочно-линейных корректирующих воздействий с разделением движений в пространстве ошибок наблюдения и особенности оценивания кусочно-непрерывных сигналов, с учетом которых формулируется теорема о существовании решения задачи оценивания производных предложенным методом.

Приведем еще раз структуру дифференциатора–наблюдателя (1.10), динамика которого зависит только от корректирующих воздействий:

$$\dot{z}_i = v_i,\ i = \overline{1, n+1}, \tag{2.3}$$

где $z_i \in R$ – переменные состояния, $v_i \in R$ – корректирующие воздействия дифференциатора. С учетом (2.2), (2.3) получим систему относительно ошибок наблюдения $\varepsilon_i = g_i - z_i \in R,\ i = \overline{1, n+1}$ вида

$$\dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - v_i,\ i = \overline{1, n+1} \tag{2.4}$$

и следующий вид кусочно-линейных корректирующих воздействий:

$$v_1 = p_1 \mathrm{sat}(l_1\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} p_1 \mathrm{sign}\varepsilon_1, |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ p_1 l_1 \varepsilon_1, |\varepsilon_1| \le 1/l_1; \end{bmatrix}$$
$$v_i = p_i \mathrm{sat}(l_i(v_{i-1} - z_i)) = \begin{bmatrix} p_i \mathrm{sign}(v_{i-1} - z_i), |v_{i-1} - z_i| > 1/l_i, \\ p_i l_i (v_{i-1} - z_i), |v_{i-1} - z_i| \le 1/l_i, \; i = \overline{2, n+1}. \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

В силу структуры системы (2.4) сигналы, на основе которых формируются корректирующие воздействия $v_i, i = \overline{2, n+1}$ (2.5), можно представить в виде

$$v_{i-1} - z_i = g_i - \dot{\varepsilon}_{i-1} - z_i = \varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}, i = \overline{2, n+1}, \tag{2.6}$$

что совпадает с детализацией соответствующих корректирующих воздействий (1.8) системы (1.4), а именно:

$$v_{i-1} = \varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}, i = \overline{2, n+1}. \tag{2.7}$$

Отличие состоит в том, что в системе (2.4) оцениваемые сигналы присутствуют в явном виде и области их изменения априори известны (2.1), что позволяет достаточно просто обеспечить стабилизацию ошибок наблюдения.

Согласно идеологии метода разделения движений [12, 62], реализуемой при каскадном синтезе наблюдателя с кусочно-линейной коррекцией [31, 41], в замкнутой системе (2.4)–(2.5) с учетом (2.6) выбором амплитуд $p_i > 0$, $i = \overline{1, n+1}$ требуется последовательно обеспечить сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны корректирующих воздействий:

$$\begin{gathered} |\varepsilon_1(t)| \le 1/l_1, t \ge t_1 \ge 0 \Rightarrow |v_1(t) - z_2(t)| = |\varepsilon_2(t) - \dot{\varepsilon}_1(t)| \le 1/l_2, t \ge t_2 > t_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varepsilon_3(t) - \dot{\varepsilon}_2(t)| \le 1/l_3, t \ge t_3 > t_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}(t) - \dot{\varepsilon}_n(t)| \le 1/l_{n+1}, t \ge t_{n+1} > t_n. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Особенность каскадного синтеза заключается в том, что только в первом уравнении системы (2.4)–(2.5) равенство знаков регулируемой переменной и ее корректирующего воздействия имеет место на протяжении всего процесса: $\mathrm{sign}\varepsilon_1(t) = \mathrm{sign} v_1(t), t \ge 0$. Для остальных уравнений $\mathrm{sign}\varepsilon_i(t) = \mathrm{sign} v_i(t)$, $i = \overline{2, n+1}$ гарантируется только вне областей (2.8) при достаточном затухании производных ошибок наблюдения в предыдущих уравнениях.

Грубой (первичной) настройкой дифференциатора будем называть процедуру, в которой время оценивания $T>0$ априори не устанавливается. Выбором коэффициентов корректирующих воздействий (2.5) обеспечивается последовательная сходимость ошибок наблюдения в заданные окрестности нуля, при этом не учитываются: скорости сходимости в линейные зоны (2.8) и затухания производных ошибок наблюдения, а также ошибки уравнений статики, т. е. полагается, что $\dot{\varepsilon}_i(t)\approx 0,\, t>t_i, i=\overline{1,n}$. В этих допущениях на основе (2.8) и достаточных условий устойчивости имеем первичные нижние оценки для выбора коэффициентов кусочно-линейной коррекции (2.5), обеспечивающих сходимость ошибок наблюдения в некоторые окрестности нуля:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_i\dot{\varepsilon}_i=\varepsilon_i(g_{i+1}-p_i\mathrm{sign}\varepsilon_i)\le|\varepsilon_i|(G_{i+1}-p_i)<0\Rightarrow p_i>G_{i+1},\\&|\varepsilon_i|=|g_i(t)-z_i(t)|\le 1/l_i<\delta\Rightarrow l_i>1/\delta, i=\overline{1,n+1}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Замечание 2.1. Для простоты изложения в оценках (2.9) и далее области сходимости различных ошибок наблюдения, имеющих различные единицы измерения, будем единообразно обозначать δ и придавать им одинаковые числовые значения $\delta>0$, но в соответствующих единицах измерения по умолчанию.

Второе неравенство (2.9) можно использовать и для первичной настройки больших коэффициентов базового наблюдателя (1.3), (1.8) в силу (2.7). Однако и грубая ($p_i>|\varepsilon_{i+1}(t,p_{i+1})|, i=\overline{1,n}; p_{n+1}>G_{n+2}$ [31]), и тонкая (т. е. с обеспечением заданного времени сходимости с учетом быстрых движений) настройка его амплитуд уже не является автономной, как в первом выражении (2.9), а основана на иерархии неравенств (как будет показано в подразделе 2.2.2, выбор допустимой величины $p_i, i=\overline{n,1}$ зависит от принятого значения p_{i+1}). Преимущество дифференциатора (2.3), (2.5) по сравнению с базовым наблюдателем (1.3), (1.8) заключается в том, что независимый выбор его амплитуд сохранится и при тонкой настройке с учетом заданного времени сходимости. Кроме того, диапазоны изменения оценочных сигналов (2.1), как правило, меньше расчетных максимальных значений соответствующих ошибок наблюдения в начале переходного процесса, что при прочих равных обеспечит заданное время оценивания с меньшими амплитудами и, как следствие, уменьшит перерегулирование.

При необходимости порядок дифференциатора (2.3) может быть понижен на единицу, если использовать корректирующее воздействие последнего уравнения в качестве оценочного сигнала для *n*-й производной (аналогично последнему неравенству (1.9)). Более того, корректирующие воздействия при выполнении уравнений статики могут служить оценками не только входного сигнала, но и всех остальных производных: $\dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - v_i \approx 0 \Rightarrow v_i(t) \approx g_{i+1}(t),\ i = \overline{1, n+1}$. Однако на практике в качестве оценочных сигналов производных до *n*-го порядка рекомендуется использовать соответствующие переменные дифференциатора: $z_i(t) \approx g_i(t),\ i = \overline{1, n+1},\ \ t \geq T$. Причина заключается в том, что при каждой смене формы задающего сигнала корректирующие воздействия $v_i(t) \leq p_i,\ i = \overline{2, n+1}$ могут выходить на предельные значения (в отличие от переменных наблюдателя, которые в общем случае этих пиков не достигают), что приведет к большей ошибке оценивания и негладкости оценочных сигналов в начале переходных процессов. По указанным причинам для оценивания $1 < n$ незатухающих производных целесообразно использовать полноразмерный дифференциатор (2.3), (2.5) порядка n+1. Далее рассматривается его тонкая настройка без соблюдения точности оценивания входного сигнала. При необходимости получения оценки ненулевой производной порядка n+1 рекомендуется использовать дифференциатор порядка n+2.

Для сокращения времени оценивания целесообразно установить в дифференциаторе (2.3) следующие начальные значения с учетом измерений $g_1(t)$:

$$z_1(0) = g_1(0) \Rightarrow \varepsilon_1(0) = 0,\ z_i(0) = 0 \Rightarrow \varepsilon_i(0) = g_i(0), |\varepsilon_i(0)| \leq G_i, i = \overline{2, n+1}.$$

Соответствующие оценки начальных условий ошибок наблюдения являются опорными при тонкой настройке дифференциатора гладкого сигнала с непрерывными производными, которая в рамках используемого подхода обеспечит

$$|g_1(t) - z_1(t)| \leq \delta,\ t \geq 0;\ \ |g_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, i = \overline{2, n+1},\ \ t \geq T.$$

Формализуем особенности процесса оценивания кусочно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих (2.1) с учетом следующих требований. Пусть минимальный интервал времени, на котором $g_1(t)$ является $n+1$ раз дифференцируемой функцией, равен $\tau_{\min} \le \tau_j - \tau_{j-1}$, $j = 1, 2, ...,$ где $[\tau_{j-1}; \tau_j)$ – текущий интервал времени, на котором сигнал является гладким. В точках $\tau_1, \tau_2, ...:$ $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ...$ его производные могут иметь конечные разрывы. Каждая следующая такая точка допускается не раньше, чем через $\tau_{\min}$. Соответственно при настройке коэффициентов дифференциатора следует положить $T << \tau_{\min}$, тогда ошибки наблюдения будут находиться в заданной окрестности нуля в интервалах

$$\left|\varepsilon_i(t)\right| \le \delta,\ \tau_{j-1} + T \le t < \tau_{\min} \le \tau_j, j = 1, 2, ..., i = \overline{2, n+1};\ \left|\varepsilon_1\right| \le \delta, t \ge 0. \quad (2.10)$$

Максимальные величины скачков производных $\left|g_i(\tau_j + 0) - g_i(\tau_j - 0)\right| \le 2G_i$, $i = \overline{2, n+1}$ с учетом $z_i(\tau_j - 0) \approx g_i(\tau_j - 0)$ примем в качестве консервативных расчетных оценок начальных условий системы (2.4) для всех интервалов:

$$\left|\varepsilon_1(\tau_{j-1})\right| \le \delta, \left|\varepsilon_i(\tau_{j-1})\right| \le 2G_i, i = \overline{2, n+1}, j = 1, 2, ... \quad (2.11)$$

Данные оценки позволяют не учитывать особые точки $\tau_1, \tau_2, ...$ и выполнить тонкую настройку коэффициентов коррекции (2.5), рассматривая только наименьший интервал $t \in [0; \tau_{\min})$, где $g_1(t)$ является гладкой функцией с непрерывными производными. Коэффициенты, выбранные исходя из расчетных начальных условий (2.11), а также выполнение $T << \tau_{\min}$ обеспечат нахождение ошибок наблюдения в заданной окрестности нуля в указанное время (2.10).

Априори моменты времени $\tau_1, \tau_2, ...$ и $\tau_{\min} > 0$ неизвестны. Если текущий интервал окажется меньше принятого при настройке времени оценивания $T > \tau_j - \tau_{j-1}$, то тогда на этом интервале заданная точность оценивания (2.10) в общем случае достигнута не будет, можно только гарантировать ограниченность ошибок оценивания: $\left|\varepsilon_i(\tau_j)\right| \le 2G_i + (G_{i+1} + p_i)(\tau_j - \tau_{j-1}), i = \overline{2, n+1}.$

В предположении о том, что $T << \tau_{\min}$, имеет место следующая

Теорема 2.1. Если в системе (2.4)–(2.5) условия (2.1) выполняются, то тогда для любых конечных начальных условий $\varepsilon_i(0), i=\overline{1,n+1}$ и сколь угодно малых δ, $T>0$ найдутся такие положительные действительные числа p_i^*, l_i^*, что $\forall p_i, l_i:\ p_i > p_i^*,\ l_i > l_i^*,\ i=\overline{1,n+1}$ справедливы неравенства

$$\left|\varepsilon_i(t)\right| = \left|g_i(t) - z_i(t)\right| \le \delta, \quad i=\overline{1,n+1}, t \ge T. \tag{2.12}$$

Доказательство теоремы 2.1. В силу (2.11) начальные значения в системе (2.4) ограничены:

$$\left|\varepsilon_1(0)\right| \le \delta, \left|\varepsilon_i(0)\right| \le 2G_i, 2G_i >> \delta, i=\overline{2,n+1}. \tag{2.13}$$

Разделим отрезок времени $[0;T]$ на $2n$ отрезка с помощью точек $0=t_0<t_1<t_2<...<t_{2n-1}<t_{2n}=T$ и формализуем во времени желаемое поведение ошибок наблюдения и их производных, обеспечивающих (2.12):

$$\begin{aligned}
&\left|\varepsilon_1(t)\right| \le \delta, t \ge t_0, \left|\dot\varepsilon_1(t)\right| \le \Delta_{1,1}, t \ge t_1, \left|\ddot\varepsilon_1(t)\right| \le \Delta_{1,2}, t \ge t_2, ..., \left|\varepsilon_1^{(n)}(t)\right| \le \Delta_{1,n}, t \ge t_n;\\
&\left|\varepsilon_2(t)\right| \le \delta, t \ge t_2, \left|\dot\varepsilon_2(t)\right| \le \Delta_{2,1}, t \ge t_3, \left|\ddot\varepsilon_2(t)\right| \le \Delta_{2,2}, t \ge t_4, ...,\\
&\left|\varepsilon_2^{(n-1)}(t)\right| \le \Delta_{2,n-1}, t \ge t_{n+1},\\
&\left|\varepsilon_3(t)\right| \le \delta, t \ge t_4, \left|\dot\varepsilon_3(t)\right| \le \Delta_{3,1}, t \ge t_5, \left|\ddot\varepsilon_3(t)\right| \le \Delta_{3,2}, t \ge t_6, ...,\\
&\left|\varepsilon_3^{(n-2)}(t)\right| \le \Delta_{3,n-2}, t \ge t_{n+2}, ...,\\
&\left|\varepsilon_{n-1}(t)\right| \le \delta, t \ge t_{2(n-1)-2}, \left|\dot\varepsilon_{n-1}(t)\right| \le \Delta_{n-1,1}, t \ge t_{2(n-1)-1},\\
&\left|\ddot\varepsilon_{n-1}(t)\right| \le \Delta_{n-1,2}, t \ge t_{2(n-1)};\\
&\left|\varepsilon_n(t)\right| \le \delta, t \ge t_{2n-2}, \left|\dot\varepsilon_n(t)\right| \le \Delta_{n,1}, t \ge t_{2n-1}; \Delta_{i,j} < \delta, i=\overline{1,n}, \ j=\overline{1, n+1-i};\\
&\left|\varepsilon_{n+1}(t)\right| \le \delta, \ t \ge t_{2n}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

С учетом (2.6), (2.8) перепишем первые неравенства в строках (2.14):

$$\begin{aligned}
&\left|\varepsilon_1(t)\right| \le 1/l_1 \le \delta, t \ge t_0;\\
&\left|v_{i-1}(t) - z_i(t)\right| = \left|\varepsilon_i(t) - \dot\varepsilon_{i-1}(t)\right| \le 1/l_i \Leftrightarrow \left|\varepsilon_i(t)\right| \le 1/l_i + \Delta_{i-1,1} \le \delta,\\
&t \ge t_{2i-2}, i=\overline{2,n+1}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны (2.15) обеспечивается выбором амплитуд $p_i > 0$, а размеры линейных зон и выполнение остальных, вспомогательных неравенств (2.14) – выбором больших коэффициентов $l_i > 0$, $i = \overline{1, n+1}$. В системе (2.4)–(2.5) $|\varepsilon_1(0)| \le \delta$ и $\operatorname{sign} v_1(t) = \operatorname{sign}\varepsilon_1(t), t \ge 0$ по построению, требуется обеспечить первое неравенство (2.15) выбором $p_1 > 0$, который совпадает с первичной настройкой (первое неравенство (2.9)), а именно:

$$\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 (g_2 - p_1 \operatorname{sign}\varepsilon_1) \le |\varepsilon_1|(G_2 - p_1) < 0 \Rightarrow p_1 > G_2. \tag{2.16}$$

В остальных уравнениях системы (2.4) совпадение знаков $\operatorname{sign} v_i(t) = \operatorname{sign}\varepsilon_i(t)$, $i = \overline{2, n+1}$ может не иметь места при $0 \le t \le t_{2(i-1)-1}$ и гарантируется только при $t > t_{2(i-1)-1}$ вне окрестности $|\varepsilon_i| \le \Delta_{i-1,1}$. В общем случае значения $\varepsilon_i(t)$ растут по модулю на интервале $[0; t_{2(i-1)-1}]$, нужно обеспечить их сходимость в области (2.15) за время $t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}$ выбором $p_i, i = \overline{2, n+1}$.

Детализируем первичную настройку амплитуд с учетом начальных условий (2.13) и заданного времени сходимости

$$p_i \ge \frac{|\varepsilon_i(t_{2(i-1)-1})|}{t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}} + G_{i+1}, |\varepsilon_i(t_{2(i-1)-1})| \le 2G_i + (G_{i+1} + p_i) t_{2(i-1)-1}, \ i = \overline{2, n+1}, \ t \ge 0,$$

откуда имеем:

$$p_i \ge \frac{2G_i + (G_{i+1} + p_i) t_{2(i-1)-1}}{t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}} + G_{i+1} \Rightarrow p_i = \frac{2G_i + G_{i+1} t_{2(i-1)}}{t_{2(i-1)} - 2t_{2(i-1)-1}}, i = \overline{2, n+1}, \tag{2.17}$$

где $2t_{2(i-1)-1} < t_{2(i-1)}$. Положим, например, все нечетные временные интервалы одинаковыми $\Delta t = t_{2i-1} - t_{2i-2} > 0$, $i = \overline{1, n}$, а для четных установим $\Delta t = t_{2(i-1)} - 2t_{2(i-1)-1}$, $i = \overline{2, n+1}$, тогда

$$t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1} = (3 \cdot 2^{i-2} - 1)\Delta t, \ i = \overline{2, n+1}, \tag{2.18}$$

откуда имеем верхнюю оценку для выбора $\Delta t > 0$:

$$t_{2n} = 3(1 + 2 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1})\Delta t \le T \Rightarrow 0 < \Delta t \le \frac{T}{3(2^n - 1)}. \tag{2.19}$$

С учетом (2.16)–(2.19) имеем нижние оценки для выбора амплитуд, обеспечивающих сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны (2.15) за заданное время:

$$p_1^* = G_2,\ p_i^* = \frac{2G_i + G_{i+1}3(2^{i-1}-1)\Delta t}{(3\cdot 2^{i-2}-1)\Delta t} = \frac{2G_i/\Delta t + G_{i+1}3(2^{i-1}-1)}{(3\cdot 2^{i-2}-1)}, i=\overline{2,n+1}. \quad (2.20)$$

В отличие от базового наблюдателя (1.3), (1.8) в дифференциаторе (2.3), (2.5) амплитуды выбираются независимо друг от друга. Для настройки больших коэффициентов рассмотрим уравнения системы (2.4)–(2.5) с учетом (2.6) в линейных зонах, куда они попадают в указанные интервалы времени:

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_1 = g_2 - p_1 l_1 \varepsilon_1, |\varepsilon_1| \le 1/l_1, t \ge 0, \\ &\dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - p_i l_i(\varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}), |\varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}| \le 1/l_i, t \ge t_{2i-2}, i=\overline{2,n+1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из достаточных условий устойчивости $\varepsilon_i\dot{\varepsilon}_i < 0$ найдем нижние оценки для выбора $l_i > 0$, $i=\overline{1,n+1}$, обеспечивающих заданную точность оценивания (2.12), а также установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации первых производных ошибок оценивания, разделив заданную величину δ на две части, например, пополам:

$$\begin{aligned} &|\varepsilon_1(t)| \le \delta\,(t\ge 0) \Rightarrow l_1 > \frac{G_2}{p_1\delta}; \\ &|\varepsilon_i(t)| \le \underbrace{\frac{G_{i+1}}{p_i l_i}}_{\delta/2} + \underbrace{|\dot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/2} \le \delta\,(t \ge t_{2i-2}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow l_i > \frac{2G_{i+1}}{p_i\delta}, |\dot{\varepsilon}_{i-1}| \le \Delta_{i-1,1} = \frac{\delta}{2},\ i=\overline{2,n+1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для обеспечения стабилизации с заданной точностью производных ошибок наблюдения (2.14) разработана итерационная процедура из n шагов.

Шаг 1. Выбором l_i, $i=\overline{1,n}$ нужно также обеспечить сходимость первых производных ошибок наблюдения $\dot{\varepsilon}_i(t)$ в установленные области (2.22) за время $t_{2i-1} - t_{2i-2} = \Delta t$ (2.14) из начальных условий $|\dot{\varepsilon}_i(t_{2i-2})| = G_{i+1} + p_i$ (2.21). Оценим на указанных интервалах решения вспомогательной системы

$$\ddot{\varepsilon}_1 = g_3 - p_1 l_1 \dot{\varepsilon}_1;\ \ddot{\varepsilon}_i = g_{i+2} - p_i l_i(\dot{\varepsilon}_i - \ddot{\varepsilon}_{i-1}), i=\overline{2,n} \quad (2.23)$$

и установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации вторых производных ошибок оценивания, разделив величины $\Delta_{i,1} = \delta/2$ на части:

$$
\begin{gathered}
|\dot{\varepsilon}_1(t)| \le \underbrace{(G_2+p_1)e^{-p_1 l_1 \Delta t}}_{\delta/4} + \underbrace{\frac{G_3}{p_1 l_1}}_{\delta/4} \le \Delta_{1,1} = \frac{\delta}{2}\ (t \ge t_1) \Rightarrow \\
\Rightarrow l_1 > \frac{1}{p_1}\max\left\{\frac{4G_3}{\delta}; \frac{1}{\Delta t}\ln\frac{4(G_2+p_1)}{\delta}\right\}; \\
|\dot{\varepsilon}_i(t)| \le \underbrace{(G_{i+1}+p_i)e^{-p_i l_i \Delta t}}_{\delta/8} + \underbrace{\frac{G_{i+2}}{p_i l_i}}_{\delta/8} + \underbrace{|\ddot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/4} \le \Delta_{i,1} = \frac{\delta}{2}(t \ge t_{2i-1}) \Rightarrow \\
\Rightarrow l_i > \frac{1}{p_i}\max\left\{\frac{8G_{i+2}}{\delta}; \frac{1}{\Delta t}\ln\frac{8(G_{i+1}+p_i)}{\delta}\right\}, |\ddot{\varepsilon}_{i-1}| \le \Delta_{i-1,2} = \frac{\delta}{4}, i=\overline{2,n}.
\end{gathered} \tag{2.24}
$$

Шаг 2. Выбором l_i, $i=\overline{1,n-1}$ нужно также обеспечить сходимость вторых производных ошибок наблюдения $\ddot{\varepsilon}_i(t)$ в установленные области (2.24) за время $t_{2i}-t_{2i-1}=(3\cdot 2^{i-1}-1)\Delta t$ (2.14), (2.18) из начальных условий $|\ddot{\varepsilon}_i(t_{2i-1})| = G_{i+2}+p_i$ (2.23). Оценим на указанных интервалах решения вспомогательной системы $\dddot{\varepsilon}_1 = g_4 - p_1 l_1 \ddot{\varepsilon}_1$; $\dddot{\varepsilon}_i = g_{i+3} - p_i l_i(\ddot{\varepsilon}_i - \ddot{\varepsilon}_{i-1}), i=\overline{2,n-1}$ и установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации третьих производных ошибок оценивания, разделив величины $\Delta_{i,2}=\delta/4$ на части:

$$
\begin{gathered}
|\ddot{\varepsilon}_1(t)| \le \underbrace{(G_3+p_1)e^{-p_1 l_1 2\Delta t}}_{\delta/8} + \underbrace{\frac{G_4}{p_1 l_1}}_{\delta/8} \le \frac{\delta}{4}(t \ge t_2) \Rightarrow \\
\Rightarrow l_1 > \frac{1}{p_1}\max\left\{\frac{8G_4}{\delta}; \frac{1}{2\Delta t}\ln\frac{8(G_3+p_1)}{\delta}\right\}; \\
|\ddot{\varepsilon}_i(t)| \le \underbrace{(G_{i+2}+p_i)e^{-p_i l_i (3\cdot 2^{i-1}-1)\Delta t}}_{\delta/16} + \underbrace{\frac{G_{i+3}}{p_i l_i}}_{\delta/16} + \underbrace{|\dddot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/8} \le \Delta_{i,2} = \frac{\delta}{4}\ (t \ge t_{2i}) \Rightarrow \\
\Rightarrow l_i > \frac{1}{p_i}\max\left\{\frac{16G_{i+3}}{\delta}; \frac{1}{(3\cdot 2^{i-1}-1)\Delta t}\ln\frac{16(G_{i+2}+p_i)}{\delta}\right\}, \\
|\dddot{\varepsilon}_{i-1}| \le \Delta_{i-1,3} = \frac{\delta}{8}, i=\overline{2,n-1},
\end{gathered}
$$

и т. д. На каждом шаге количество рассматриваемых больших коэффициентов и размерность вспомогательных систем понижаются на один. Таким образом, на последнем, n-м шаге выбором l_1 нужно обеспечить сходимость $\varepsilon_1^{(n)}(t)$ в область, установленную на предыдущем шаге, например, указанным выше образом $\Delta_{1,n}=\delta/2^n$, за время t_n-t_{n-1} (2.14) из начальных условий $\left|\varepsilon_1^{(n)}(t_{n-1})\right|=G_{n+1}+p_1$. Оценка решения вспомогательного уравнения $\varepsilon_1^{(n+1)}=g_{n+2}-p_1 l_1\varepsilon_1^{(n)}$ дает следующий результат:

$$\left|\varepsilon_1^{(n)}(t)\right|\le\underbrace{(G_{n+1}+p_1)e^{-p_1 l_1(t_n-t_{n-1})\Delta t}}_{\delta/2^{n+1}}+\underbrace{\frac{G_{n+2}}{p_1 l_1}}_{\delta/2^{n+1}}\le\frac{\delta}{2^n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1>\frac{1}{p_1}\max\left\{\frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta};\frac{1}{(t_n-t_{n-1})\Delta t}\ln\frac{2^{n+1}(G_{n+1}+p_1)}{\delta}\right\},$$

если n – нечетное, то $t_n-t_{n-1}=\Delta t$, если четное, то $t_n-t_{n-1}=(3\cdot 2^{n/2-1}-1)\Delta t$.

Учитывая, что логарифмическая функция медленно возрастает, множитель при Δt, определяющий длину четного интервала (2.18), есть натуральное число и $1/\Delta t>1/((3\cdot 2^{i-1}-1)\Delta t)$, можно упростить конечный результат, полагая этот множитель равным единице в формулах, полученных на четных шагах.

Неравенства для выбора больших коэффициентов (2.22) и типа (2.24), полученные на разных шагах процедуры, должны выполняться одновременно. С учетом указанного упрощения объединим их и получим итоговые нижние оценки, при которых решение поставленной задачи (2.12) обеспечивается с учетом быстрых движений и погрешностей уравнений статики:

$$l_{n+1}^*=\frac{2G_{n+2}}{p_{n+1}\delta},\quad l_n^*=\frac{1}{p_n}\max\left\{\frac{2G_{n+1}}{\delta};\frac{8G_{n+2}}{\delta};\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{8(G_{n+1}+p_n)}{\delta}\right\},$$

$$l_{n-1}^*=\frac{1}{p_{n-1}}\max\left\{\frac{2G_n}{\delta};\frac{8G_{n+1}}{\delta};\frac{16G_{n+2}}{\delta};\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{8(G_n+p_{n-1})}{\delta};\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{16(G_{n+1}+p_{n-1})}{\delta}\right\},$$

$$\begin{gathered}l_3^*=\frac{1}{p_3}\max\left\{\frac{2G_4}{\delta};\frac{2^3G_5}{\delta};\frac{2^4G_6}{\delta};\ldots;\frac{2^nG_{n+2}}{\delta};\right.\\ \left.\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^3(G_4+p_3)}{\delta};\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^4(G_5+p_3)}{\delta};\ldots;\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^n(G_{n+1}+p_3)}{\delta}\right\},\end{gathered}\qquad(2.25)$$

$$l_2^* = \frac{1}{p_2}\max\left\{\frac{2G_3}{\delta};\frac{2^3G_4}{\delta};\frac{2^4G_5}{\delta};...;\frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta};\right.$$

$$\left.\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^3(G_3+p_2)}{\delta};\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^4(G_4+p_2)}{\delta};...;\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^{n+1}(G_{n+1}+p_2)}{\delta}\right\},$$

$$l_1^* = \frac{1}{p_1}\max\left\{\frac{G_2}{\delta};\frac{2^2G_3}{\delta};\frac{2^3G_4}{\delta};...;\frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta};\right.$$

$$\left.\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^2(G_2+p_1)}{\delta};\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^3(G_3+p_1)}{\delta};...;\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{2^{n+1}(G_{n+1}+p_1)}{\delta}\right\}.$$

Таким образом, существуют p_i^* (2.20) и l_i^* (2.25), что $\forall p_i, l_i:\ p_i > p_i^*$, $l_i > l_i^*$, $i=\overline{1,n+1}$ неравенства (2.12) будут выполнены. Теорема 2.1 доказана.

Оценки для выбора больших коэффициентов (2.25), полученные из достаточных условий, могут оказаться консервативными, особенно для систем (2.4) большой размерности. При практическом применении данной процедуры рекомендуется опираться на заданные значения $G_i, i=\overline{2,n+2}$, $\delta>0$, $T>0$ и при необходимости снижения расчетных оценок: учитывать множители при Δt в формулах, полученных на четных шагах процедуры; использовать другой способ разделения $\Delta_{i,j}\,(i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n+1-i})$ на части, отводя меньшую долю при оценке затухающих собственных движений производных. Прием с разделением на части областей сходимости производных ошибок наблюдения позволил сделать независимым друг от друга выбор больших коэффициентов (2.25). Можно использовать другую, связную процедуру настройки, в ходе которой последовательно (снизу вверх) из достаточных условий фиксируются значения $l_i^*, i=\overline{n+1,1}$, с учетом которых области сходимости старших производных определяются по остаточному принципу. Такая процедура будет более трудоемкой, но может привести к менее консервативным расчетным оценкам.

Замечание 2.2. Полученные результаты без ограничения общности распространяются на случай многоканальных систем с многими входами и многими выходами. При необходимости n раз продифференцировать векторный сигнал $g_1 = (g_{11}, g_{12}, ..., g_{1m})^{\mathrm{T}}$ нужно составить блочный дифференциатор (2.3) размерности $(n+1)\times m$, где $z_i = (z_{i1}, z_{i2}, ..., z_{im})^{\mathrm{T}}$, $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{im})^{\mathrm{T}}$,

$$v_{1j} = p_{1j}\mathrm{sat}(l_{1j}\varepsilon_{1j}) = \left[\begin{array}{l} p_{1j}\mathrm{sign}\varepsilon_{1j}, |\varepsilon_{1j}| > 1/l_{1j}, \\ p_{1j}l_{1j}\varepsilon_{1j}, |\varepsilon_{1j}| \le 1/l_{1j}; \end{array}\right. \quad i = \overline{2, n+1},\ j = \overline{1, m},$$
$$v_{ij} = p_{ij}\mathrm{sat}(l_{ij}(v_{i-1,j} - z_{ij})) = \left[\begin{array}{l} p_{ij}\mathrm{sign}(v_{i-1,j} - z_{ij}), |v_{i-1,j} - z_{ij}| > 1/l_{ij}, \\ p_{ij}l_{ij}(v_{i-1,j} - z_{ij}), |v_{i-1,j} - z_{ij}| \le 1/l_{ij}. \end{array}\right. \tag{2.26}$$

При этом все j-е цепочки

$$\dot{z}_{ij} = v_{ij},\ i = \overline{1, n+1},\ j = \overline{1, m} \tag{2.27}$$

являются автономными и настраиваются независимо друг от друга по указанной выше схеме. Для снижения вычислительно нагрузки целесообразно использовать во всех цепочках одинаковые одноименные параметры, полученные для «худшего» случая $p_i = \max\{p_{ij}\}_{j=\overline{1,m}}$, $l_i = \max\{l_{ij}\}_{j=\overline{1,m}}$, $i = \overline{1, n+1}$, взяв за основу максимальные покомпонентные или векторные оценки производных (2.1).

Полученные в доказательстве теоремы 2.1 результаты и алгоритм настройки (2.20), (2.25) имеют важное теоретическое значение, так как демонстрируют возможность обеспечить любую заданную точность дифференцирования за любое заданное время. Учитывая, что переходные процессы в дифференциаторе очень быстрые, при его настройке достаточно использовать менее консервативную грубую настройку коэффициентов коррекции (2.9). В этой схеме неравенства для настройки больших коэффициентов упрощены

$$|\varepsilon_i| = |g_i(t) - z_i(t)| \le 1/l_i < \delta \Rightarrow l_i > 1/\delta, i = \overline{1, n+1}.$$

Указанные нижние границы являются достаточными (избыточными), в установившемся режиме достигается лучшая точность при меньших коэффициентах усиления. Но с ростом динамического порядка дифференциатора точность восстановления старших производных будет последовательно ухудшаться.

Из теоремы 2.1 следует существование динамического дифференциатора любого конечного порядка. Однако эти алгоритмы реализуются на практике в вычислительной среде. Поэтому и максимально возможная размерность дифференциатора, и достигаемая точность оценивания ограничены машинным эпсилоном $\mathrm{macheps} > 0 : 1 + \mathrm{macheps} = 1,$ значение которого зависит от разрядности сетки применяемой ЭВМ и принятой в конкретном трансляторе структуры представления действительных чисел (количества бит, отводимых на мантиссу и на порядок) [3]. Более эффективным является распределение разрядов при хранении чисел с плавающей точкой. Например, для хранения больших 1 000 000.0 и маленьких 0.000001 положительных чисел в формате с фиксированной точкой потребуется 13 разрядов: 0 000 000. 000 000, а с плавающей точкой 1.e+6 и 1.e-6 разрядов потребуется меньше. Для ЭВМ, поддерживающих стандарт IEEE 754, фиксировано количество бит в представлении чисел с одинарной точностью (32 бита) и с двойной точностью (64 бита). Самое маленькое и самое большое нормализованные числа, а также машинный эпсилон равны

$$2^{-126} \approx 1.18 \times 10^{-38},\ (1 - 2^{-24}) \times 2^{128} \approx 3.4 \times 10^{38},\ \mathrm{macheps} = 2^{-23};$$
$$2^{-1022} \approx 2.23 \times 10^{-308}, (1 - (1/2)^{53}) \times 2^{1024} \approx 1.8 \times 10^{308},\ \mathrm{macheps} = 2^{-52}.$$

Однако указанные показатели могут не достигаться на бортовых компьютерах мобильных роботов. Из (2.5) следует, что в стационарном режиме корректирующие воздействия дифференциатора представимы в виде:

$$\begin{gathered} v_1 = p_1 l_1 \underbrace{\varepsilon_1}_{\delta}, v_2 = p_2 l_2 (\underbrace{p_1 l_1 \varepsilon_1 - z_2}_{\delta}), v_3 = p_3 l_3 (\underbrace{p_2 l_2 (p_1 l_1 \varepsilon_1 - z_2) - z_3}_{\delta}), \ldots, \\ v_{n+1} = p_{n+1} l_{n+1} p_n l_n \ldots p_1 l_1 \varepsilon_1 + p_{n+1} l_{n+1} p_n l_n \ldots p_2 l_2 z_2 + \ldots + p_{n+1} l_{n+1} z_{n+1}, \end{gathered} \tag{2.28}$$

что позволяет дать грубые оценки самых больших положительных чисел $p^{n+1} l^{n+1}$, где $p = \max\{G_i\}$, $l = \max\{l_i\}, i = \overline{1, n+1}$. Пусть $A > 0$ и $a > 0$ – самое большое число и самое маленькое число, которые реализуемы в конкретном процессоре с конкретным транслятором. Тогда при фиксированном значении n можно указать предельно достижимую точность оценивания δ^*, и наоборот, исходя из желаемой точности оценивания определить максимально возможный динамический порядок дифференциатора $(n^* + 1) \in \mathrm{N}$, при котором эта точность обеспечивается для ошибок наблюдения всех производных:

$$n = \text{const}: p^{n+1}l^{n+1} \le A \Rightarrow l^* = \sqrt[n+1]{A / p^{n+1}}, a \le \delta^* \le 1/l^*,$$
$$a \le \delta = 1/l = \text{const}: p^{n+1}l^{n+1} \le A \Rightarrow 1 < n^* + 1 \le \log_{pl} A. \qquad (2.29)$$

2.2.2 Сравнительный анализ процедур настроек дифференциаторов третьего порядка

В данном подразделе в целях сравнительного анализа конкретизированы процедуры настройки дифференциаторов–наблюдателей двух типа с кусочно-линейными корректирующими воздействиями для оценивания первой и второй производных, т. е. имеющих третий порядок. Они предназначены для следящих систем механических объектов с относительной степенью 2.

Для виртуальной динамической модели третьего порядка

$$\dot{g}_1 = g_2, \dot{g}_2 = g_3, \dot{g}_3 = g_4(t), \ \left|g_1^{(i)}(t)\right| \le G_{i+1}, i = 1,2, t \ge 0$$

разработанный в предыдущем подразделе дифференциатор без собственных движений (2.3), а также выражения (2.4), (2.5) имеют вид

$$\dot{z}_1 = v_1, \dot{z}_2 = v_2, \dot{z}_3 = v_3, \ \varepsilon_i = g_i - z_i,$$
$$\dot{\varepsilon}_1 = g_2 - v_1, \dot{\varepsilon}_2 = g_3 - v_2, \dot{\varepsilon}_3 = g_4 - v_3, \qquad (2.30)$$

$$v_1 = p_1 \text{sat}(l_1\varepsilon_1) = \begin{cases} p_1 \text{sign}\varepsilon_1, |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ p_1 l_1 \varepsilon_1, |\varepsilon_1| \le 1/l_1; \end{cases}$$
$$v_i = p_i \text{sat}(l_i(v_{i-1} - z_i)) = \begin{cases} p_i \text{sign}(v_{i-1} - z_i), |v_{i-1} - z_i| > 1/l_i, \\ p_i l_i (v_{i-1} - z_i), |v_{i-1} - z_i| \le 1/l_i, \ i = 2,3. \end{cases} \qquad (2.31)$$

Неравенства для тонкой настройки коэффициентов корректирующих воздействий $p_i > 0, l_i > 0, i = 1,2,3$ (2.31) с учетом заданной точность и времени оценивания (2.12), полученные по аналогии с (2.20), (2.25), имеют следующий вид:

$$p_1^* = G_2, p_2^* = \frac{2G_2 + 3G_3\Delta t}{\Delta t} = \frac{18G_2}{T} + 3G_3,$$
$$p_3^* = \frac{2G_3 + 9G_4\Delta t}{\Delta t} = \frac{18G_3}{T} + 9G_4; \qquad (2.32)$$
$$l_1^* = \frac{1}{p_1} \max\left\{\frac{G_2}{\delta}; \frac{4G_3}{\delta}; \frac{8G_4}{\delta}; \frac{1}{\Delta t}\ln\frac{4(G_2 + p_1)}{\delta}; \frac{1}{2\Delta t}\ln\frac{8(G_3 + p_1)}{\delta}\right\},$$

$$l_2^* > \frac{1}{p_2}\max\left\{\frac{2G_3}{\delta};\frac{8G_4}{\delta};\frac{1}{\Delta t}\ln\frac{8(G_3+p_2)}{\delta}\right\},\ l_3^* = \frac{2G_4}{p_3\delta},$$

где $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$ и аналогично (2.18)–(2.19)

$$\Delta t = t_1 = t_3 - t_2 = t_{2(i-1)} - 2t_{2(i-1)-1} > 0, i = 2,3,\ t_4 = 9\Delta t \le T \Rightarrow 0 < \Delta t \le T/9.$$

Неравенства для грубой настройки имеют вид (2.9).

Рассматривается также базовый наблюдатель стандартной структуры с целью продемонстрировать и сравнить процедуру его настройки [31]. Выражения (1.3), (1.4) для третьего порядка принимают вид:

$$\begin{aligned}&\dot z_1 = z_2 + v_1, \dot z_2 = z_3 + v_2, \dot z_3 = v_3, \varepsilon_i = g_i - z_i,\\ &\dot\varepsilon_1 = \varepsilon_2 - v_1, \dot\varepsilon_2 = \varepsilon_3 - v_2, \dot\varepsilon_3 = g_4(t) - v_3,\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}&v_1 = p_1\mathrm{sat}(l_1\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} p_1\mathrm{sign}\varepsilon_1, \ |\varepsilon_1| > 1/l_1;\\ p_1l_1\varepsilon_1,\ |\varepsilon_{1j}| \le 1/l_1,\ p_1, l_1 = \mathrm{const} > 0;\end{bmatrix}\\ &v_i = p_i\mathrm{sat}(l_iv_{i-1}) = \begin{bmatrix} p_i\mathrm{sign}v_{i-1}, \ |v_{i-1}| > 1/l_i;\\ p_il_iv_{i-1},\ |v_{i-1}| \le 1/l_i,\ p_i, l_i = \mathrm{const} > 0, i = 2,3.\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.34}$$

В обоих наблюдателях устанавливаются следующие начальные значения:

$$z_1(0) = g_1(0),\ z_i(0) = 0, i = 2,3. \tag{2.35}$$

Допуская смену формы непрерывного сигнала $g_1(t)$ на интервале наблюдения, для настройки коэффициентов корректирующих воздействий (2.34) принимаются оценки, аналогичные (2.13):

$$|\varepsilon_1(0)| \le \delta, |\varepsilon_i(0)| \le 2G_i, i = 2,3. \tag{2.36}$$

Обоснуем возможность получения с помощью наблюдателя (2.33) оценок первой $g_2(t)$ и второй $g_3(t)$ производных с заданными показателями

$$|g_i(t) - z_i(t)| \le \delta,\ t \ge T > 0,\ i = 2, 3 \tag{2.37}$$

с помощью процедуры настройки корректирующих воздействий (2.34) [31].

Процедура настройки базового наблюдателя стандартной структуры. Разделим интервал оценивания на отрезки $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$ и формализуем желаемое поведение переменных виртуальной системы (2.33)–(2.34), обеспечивающее решение поставленной задачи (2.37):

$$
\begin{aligned}
&1)\ |\varepsilon_1(t)| \le 1/l_1 \le \delta,\ t \ge 0;\\
&2)|\varepsilon_2(t)-v_1(t)| \le \Delta_2 < \delta \Leftrightarrow v_1(t)=\varepsilon_2(t)-\alpha_2(t),\ |\alpha_2(t)| \le \Delta_2,\ t \ge t_1;\\
&3)|v_1(t)| \le 1/l_2 \Leftrightarrow |\varepsilon_2(t)| \le \Delta_2 + 1/l_2 \le \delta,\ t \ge t_2;\\
&4)|\varepsilon_3(t)-v_2(t)| \le \Delta_3 < \delta \Leftrightarrow v_2(t)=\varepsilon_3(t)-\alpha_3(t),\ |\alpha_3(t)| \le \Delta_3,\ t \ge t_3;\\
&5)|v_2(t)| \le 1/l_3 \Leftrightarrow |\varepsilon_3(t)| \le \Delta_3 + 1/l_3 \le \delta,\ t \ge t_4.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Нечетные неравенства в (2.38), которые означают попадание (и нахождение) в линейные зоны аргументов соответствующих корректирующих воздействий (2.34), обеспечиваются выбором амплитуд $p_j, j=\overline{1,3}$. Вне линейных зон система (2.33), (2.34) представима в виде:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - p_1 \mathrm{sign}\varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - p_2 \mathrm{sign}(\varepsilon_2 - \alpha_2), \dot{\varepsilon}_3 = g_4(t) - p_3 \mathrm{sign}(\varepsilon_3 - \alpha_3).$$

Достаточные условия для грубой настройки амплитуд имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_i^T \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^T (\varepsilon_{i+1} - p_i \mathrm{sign}\varepsilon_i) \le |\varepsilon_i|(|\varepsilon_{i+1}| - p_i) < 0 \Rightarrow\\
&\Rightarrow p_i > |\varepsilon_{i+1}|, i=\overline{1,3}, \varepsilon_4 := g_4.
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Сходимость ошибок наблюдения $\varepsilon_i(t), i=2,3$ в указанные области (2.38) гарантируется только при $t > t_{2i-3}$, отсюда имеем области их изменения с учетом (2.36): $|\varepsilon_2(t)| \le E_2 = 2G_2 + (E_3 + p_2)t_1$, $|\varepsilon_3(t)| \le E_3 = 2G_3 + (G_4 + p_3)t_3$, $t \ge 0$.

С учетом (2.39) и данных оценок получим неравенства для последовательного (снизу вверх) выбора амплитуд, которые обеспечивают на интервалах $[t_3;t_4]$, $[t_1;t_2]$ сходимость ошибок наблюдения $\varepsilon_3(t), \varepsilon_2(t)$ соответственно в указанные области нуля (2.38), а также выполнение первого неравенства (2.38):

$$
\begin{aligned}
&p_3 > G_4 + \frac{E_3 - \delta}{t_4 - t_3} = G_4 + \frac{2G_3 + (G_4 + p_3)t_3 - \delta}{t_4 - t_3}\\
&\Rightarrow p_3 > \frac{2G_3 + G_4 t_4 - \delta}{t_4 - 2t_3}, t_2 < t_3 < \frac{t_4}{2};\\
&p_2 > E_3 + \frac{E_2 - \delta}{t_2 - t_1} = E_3 + \frac{2G_2 + (E_3 + p_2)t_1 - \delta}{t_2 - t_1} \Rightarrow\\
&\Rightarrow p_2 > \frac{2G_2 + E_3 t_2 - \delta}{t_2 - 2t_1} = \frac{2G_2 + (2G_3 + (G_4 + p_3)t_3)t_2 - \delta}{t_2 - 2t_1},\ 0 < t_1 < \frac{t_2}{2};
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

$$p_1 > E_2 = 2G_2 + (E_3 + p_2)t_1.$$

В линейных зонах в указанных интервалах система (2.33), (2.34) имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - p_1 l_1 \varepsilon_1,\, t \ge 0; \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - p_2 l_2 (\varepsilon_2 - \alpha_2), t \ge t_2; \\ &\dot{\varepsilon}_3 = g_4(t) - p_3 l_3 (\varepsilon_3 - \alpha_3), t \ge t_4. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Из достаточных условий устойчивости получим неравенства для выбора больших коэффициентов наблюдателя, обеспечивающих заданную точность стабилизации ошибок наблюдения (2.37):

$$\varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 \le |\varepsilon_1| (E_2 - p_1 l_1 |\,\varepsilon_1\,|) < 0 \Rightarrow l_1 > E_2 /(p_1 \delta),$$

$$\varepsilon_2^T \dot{\varepsilon}_2 \le |\varepsilon_2| (E_3 - p_2 l_2 (|\,\varepsilon_2\,| - \Delta_2)) < 0 \Rightarrow l_2 > E_3 /(p_2 (\delta - \Delta_2)),$$

$$\varepsilon_3^T \dot{\varepsilon}_3 \le |\varepsilon_3| (G_4 - p_3 l_3 (|\,\varepsilon_3\,| - \Delta_3)) < 0 \Rightarrow l_3 > G_4 /(p_3 (\delta - \Delta_3)).$$

Для оценок больших коэффициентов, обеспечивающих выполнения четных неравенств (2.38) (т. е. стабилизацию производных ошибок наблюдения $\dot{\varepsilon}_1(t), \dot{\varepsilon}_2(t)$), оценим решения первого и второго уравнения системы (2.41) на интервалах $[0; t_1]$, $[t_2; t_3]$ соответственно:

$$|\varepsilon_1(t_1)| \le \frac{E_2}{p_1 l_1} + \frac{p_1 - E_2}{p_1 l_1} e^{-p_1 l_1 t_1} \Rightarrow |\varepsilon_2(t) - v_1(t)| \le \Delta_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p_1 - E_2) e^{-p_1 l_1 t_1} \le \Delta_2 \Rightarrow l_1 > \frac{1}{t_1 p_1} \ln \frac{p_1 - E_2}{\Delta_2};$$

$$|\varepsilon_2(t_3)| \le \frac{E_3}{p_2 l_2} + \Delta_2 + \frac{p_2 - E_3}{p_2 l_2} e^{-p_2 l_2 (t_3 - t_2)} \Rightarrow |\varepsilon_3(t) - v_2(t)| \le \Delta_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p_2 - E_3) e^{-p_2 l_2 (t_3 - t_2)} \le \Delta_3 \Rightarrow l_2 > \frac{1}{(t_3 - t_2) p_2} \ln \frac{p_2 - E_3}{\Delta_3}.$$

С учетом этих оценок приведем последовательность действий при настройке коэффициентов наблюдателя (2.33), (2.34), обеспечивающих (2.38) и (2.37):

1) исходя из заданного времени оценивания $T > 0$ и с учетом $t_1 < t_2 / 2$, $t_3 < t_4 / 2$, зафиксировать моменты времени $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$;

2) выбрать значения амплитуд $p_i, i = \overline{3,1}$ на основе нижних оценок (2.40);

3) принять значение $0 < \Delta_3 < \delta$ и на основе нижней оценки выбрать

$$l_3 > G_4 /(p_3 (\delta - \Delta_3)); \tag{2.42}$$

4) принять значение $0 < \Delta_2 < \delta$ и на основе нижней оценки выбрать

$$l_2 > \frac{1}{p_2} \max\left\{ \frac{E_3}{\delta - \Delta_2}; \frac{1}{t_3 - t_2} \ln \frac{p_2 - E_3}{\Delta_3} \right\}; \tag{2.43}$$

5) на основе нижней оценки выбрать

$$l_1 > \frac{1}{p_1} \max\left\{ \frac{E_2}{\delta}; \frac{1}{t_1} \ln \frac{p_1 - E_2}{\Delta_2} \right\}. \tag{2.44}$$

В неравенствах (2.40) продемонстрирована указанная в подразделе 1.2.1 зависимость выбора амплитуд в верхних уравнениях от принятых значений амплитуд в нижних уравнениях. В этом состоит принципиальное отличие базового наблюдателя стандартной структуры (2.33) от дифференциатора (2.30), где настройки амплитуд осуществляются независимо друг от друга (2.32).

2.3 Результаты моделирования

Для верификации разработанных алгоритмов было проведено численное моделирование в среде MATLAB-Simulink с методом интегрирования Эйлера с постоянным шагом 0,001 для тестового кусочно-дифференцируемого сигнала

$$g_1(t) = \begin{cases} 4 - t^2, \ t \in [0;2); \\ 0{,}5(t-2)^3, t \in [2;4); \\ 4, t \in [4;6); \\ 4e^{-(t-6)}, t \in [6;+\infty). \end{cases} \tag{2.45}$$

Эксперимент 2.1. Проведено сравнение дифференциаторов–наблюдателей с кусочно-линейными корректирующими воздействиями стандартной структуры и без собственных движений. Настройка коэффициентов проводилась с учетом целевых показателей $T = 0{,}1\ [c]$, $\delta = 0{,}02$ (2.37).

Для базового наблюдателя стандартной структуры (2.33)–(2.34) при моделировании были приняты следующие параметры:

$$p_1 = 180, p_2 = 100, p_3 = 20; l_1 = l_2 = l_3 = 30. \tag{2.46}$$

Для разработанного дифференциатора без собственных движений (2.30), (2.31):

$$p_1 = 100, p_2 = 50, p_3 = 13; l_1 = l_2 = 50, l_3 = 70. \tag{2.47}$$

На рисунках 2.1–2.3 представлены графики тестового сигнала $g_1(t)$ (2.45), его первой $\dot{g}_1(t) = g_2$, второй $\ddot{g}_1(t) = g_3$ производных и их оценок $z_{1,2,3}(t)$ (снизу), а также ошибок наблюдения $\varepsilon_i(t) = g_i(t) - z_i(t)$, $i = \overline{1,3}$ (сверху). Графики слева получены для базового наблюдателя (2.33)–(2.34), (2.46), а справа – для дифференциатора без собственных движений (2.30)–(2.31), (2.47).

В таблице 2.1 для ошибок наблюдения $\varepsilon_i, i = \overline{1,3}$ на интервале $t \in [2;4)$ представлены: время регулирования t_i : $|\varepsilon_i(t)| \le 0{,}02, t \in [t_i;4)$; точность в установившемся режиме δ_i и величина перерегулирования $\varepsilon_{\max,i} \ge |\, \varepsilon_i(t)\,|,\ t \in [2;t_i)$.

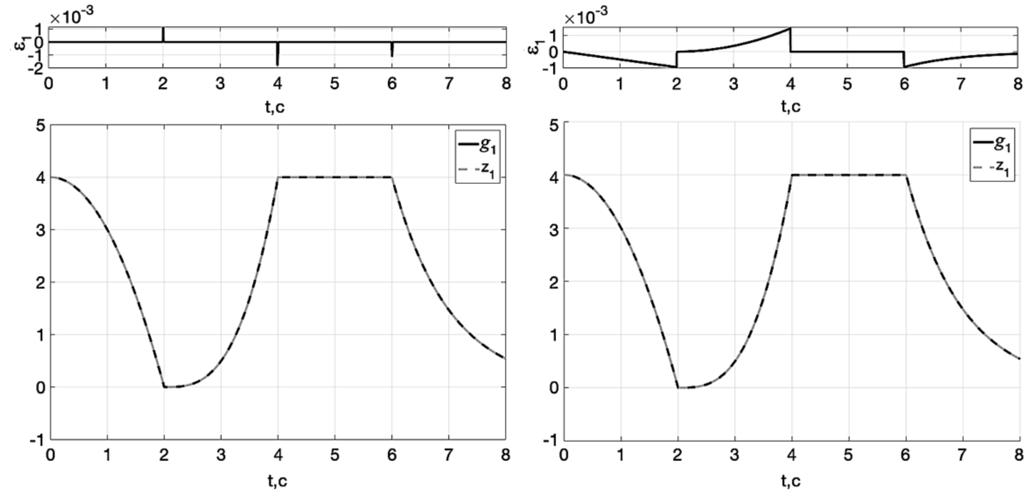


Рисунок 2.1 – Эксперимент 2.1: $\varepsilon_1(t) = g_1(t) - z_1(t)$ (сверху), $g_1(t), z_1(t)$ (снизу)

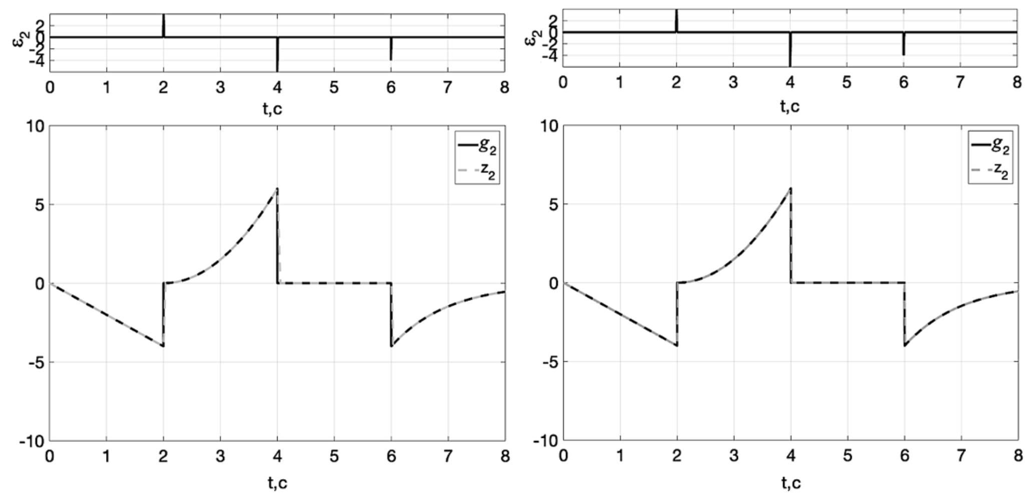


Рисунок 2.2 – Эксперимент 2.1: $\varepsilon_2(t) = g_2(t) - z_2(t)$ (сверху), $g_2(t), z_2(t)$ (снизу)

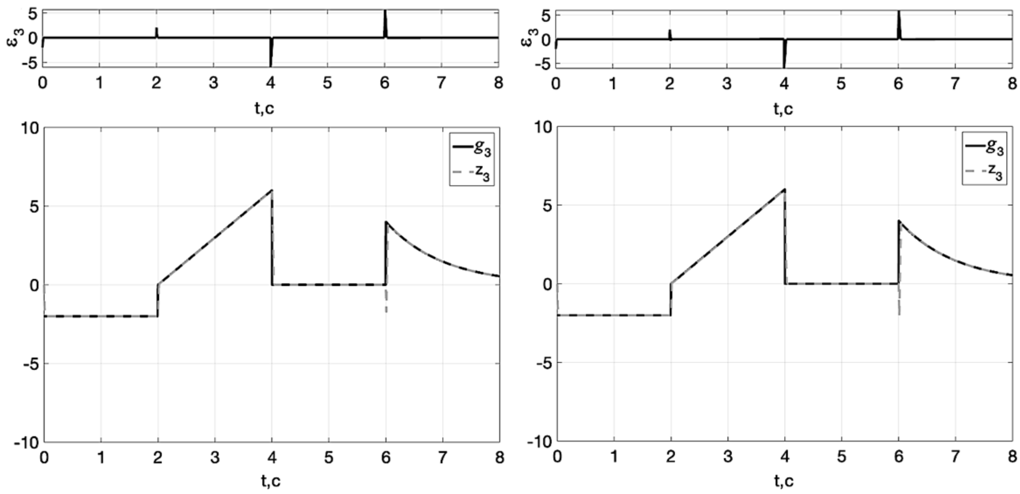


Рисунок 2.3 – Эксперимент 2.1: $\varepsilon_3(t) = g_3(t) - z_3(t)$ (сверху), $g_3(t), z_3(t)$ (снизу)

Таблица 2.1 – Значения показателей качества оценивания

Сигнал	Наблюдатель (2.33)–(2.34)			Дифференциатор (2.30)–(2.31)		
	t_i, с	δ_i	$\varepsilon_{\max,i}$	t_i, с	δ_i	$\varepsilon_{\max,i}$
$\varepsilon_1 = g_1 - z_1$	2	5×10^{-11}	7×10^{-4}	2	1×10^{-3}	$1{,}1\times10^{-3}$
$\varepsilon_2 = g_2 - z_2$	2,008	5×10^{-6}	3,999	2,005	3×10^{-3}	3,999
$\varepsilon_3 = g_3 - z_3$	2,018	8×10^{-3}	1,999	2,014	10×10^{-3}	1,999

Графики, представленные на рисунках 2.1–2.3 справа и слева, практически не отличаются друг от друга, что свидетельствует об эффективности разработанного дифференциатора без собственных движений (2.30) с кусочно-линейными корректирующими воздействиями (2.31).

Эксперимент 2.2. Для тестового сигнала (2.45) сравнивались наблюдатели стандартной структуры (1.3) четвертого порядка: с кусочно-линейными корректирующими воздействиями (1.8) и коэффициентами

$$p_1 = 150,\ p_2 = 116,\ p_3 = p_4 = 150;\ l_1 = l_2 = 30,\ l_3 = l_4 = 10; \qquad (2.48)$$

и с линейной коррекцией с большим коэффициентом (1.7)

$$a_1 = 8,\ a_2 = 24,\ a_3 = 32,\ a_4 = 16,\ l = 168. \qquad (2.49)$$

Настройка (2.48), (2.49) выполнялась так, чтобы обеспечить примерно одинаковое время переходных процессов $T = 0{,}1$ $[c]$ и точность оценивания $\delta = 0{,}02$.

На рисунках 2.4–2.7 представлены графики тестового сигнала $g_1(t)$ (2.45), его трех производных $\dot{g}_1(t) = g_2$, $\ddot{g}_1(t) = g_3$, $\dddot{g}_1(t) = g_4$ и их оценок $z_{1,2,3,4}(t)$ (снизу); ошибок наблюдения $\varepsilon_i(t) = g_i(t) - z_i(t)$, $i = \overline{1,4}$ (сверху). Графики слева получены для наблюдателя (1.3) с кусочно-линейной коррекцией (1.8), (2.48), а справа – для наблюдателя (1.3) с линейной коррекцией с большим коэффициентом (1.7), (2.49). В таблице 2.2 для ошибок наблюдения $\varepsilon_i, i = \overline{1,4}$ на интервале $t \in [2;4)$ представлены: время регулирования t_i : $|\varepsilon_i(t)| \le 0{,}02, t \in [t_i;4)$; точность в установившемся режиме δ_i и перерегулирование $\varepsilon_{\max,i} \ge |\varepsilon_i(t)|, t \in [2;t_i)$.

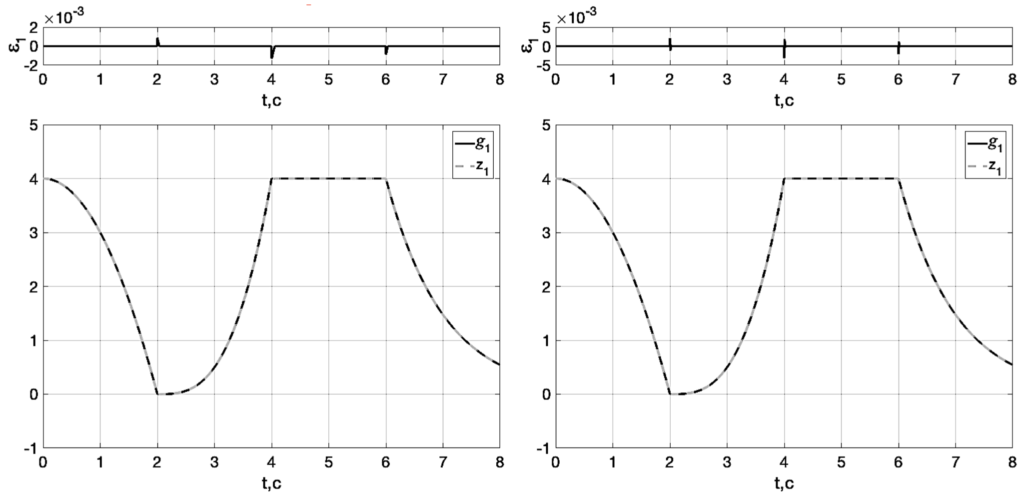


Рисунок 2.4 – Эксперимент 2.2: $\varepsilon_1(t) = g_1(t) - z_1(t)$ (сверху), $g_1(t), z_1(t)$ (снизу)

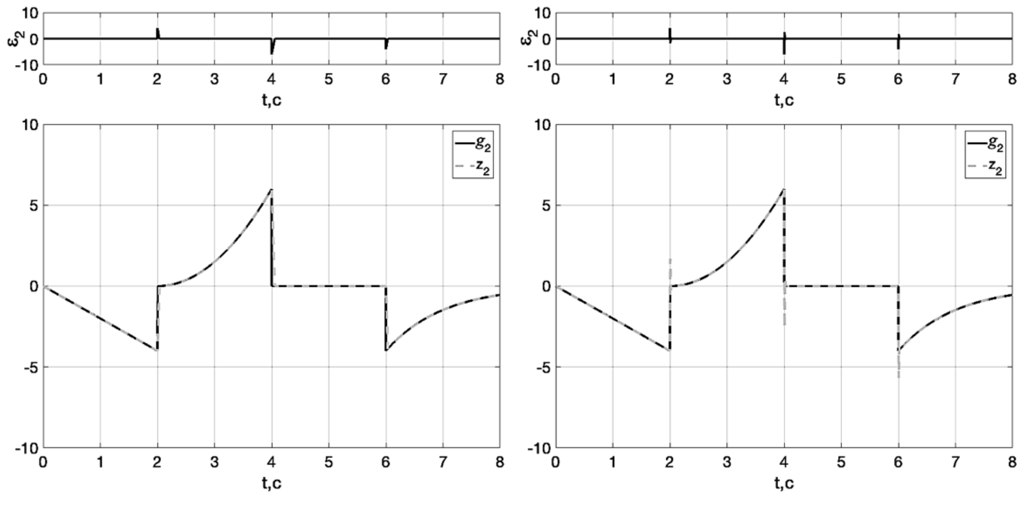


Рисунок 2.5 – Эксперимент 2.2: $\varepsilon_2(t) = g_2(t) - z_2(t)$ (сверху), $g_2(t), z_2(t)$ (снизу)

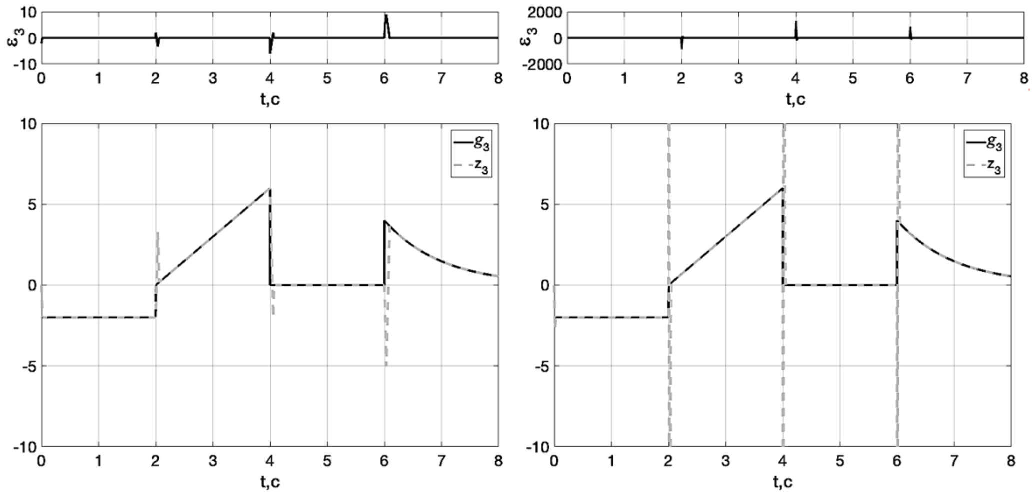


Рисунок 2.6 – Эксперимент 2.2: $\varepsilon_3(t) = g_3(t) - z_3(t)$ (сверху), $g_3(t), z_3(t)$ (снизу)

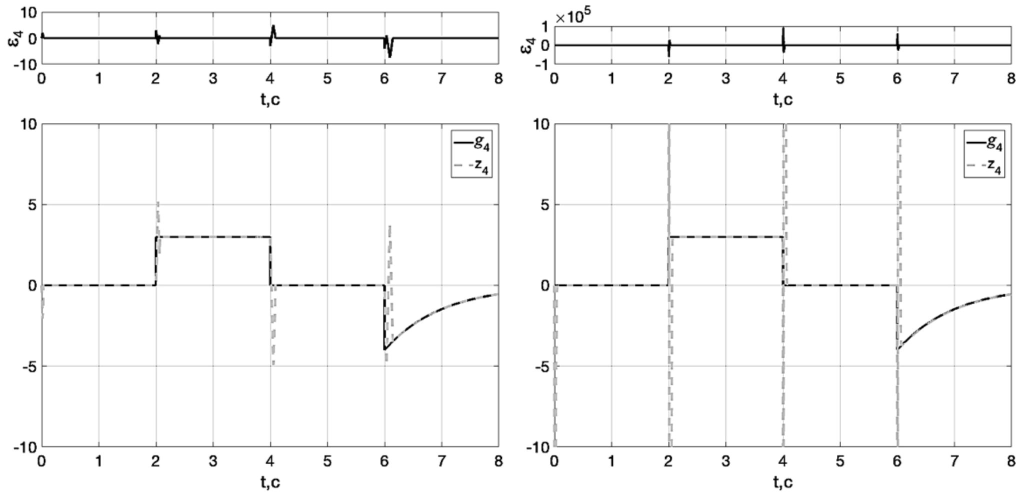


Рисунок 2.7 – Эксперимент 2.2: $\varepsilon_4(t) = g_4(t) - z_4(t)$ (сверху), $g_4(t), z_4(t)$ (снизу)

Таблица 2.2 – Значения показателей качества оценивания

Сигнал	Наблюдатель (1.3) с кусочно-линейной коррекцией (1.8), (2.48)			Наблюдатель (1.3) с линейной коррекцией с большим коэффициентом (1.7), (2.49)		
	t_i, с	δ_i	$\varepsilon_{\max,i}$	t_i, с	δ_i	$\varepsilon_{\max,i}$
$\varepsilon_1 = g_1 - z_1$	2,0308	$1{,}55 \cdot 10^{-15}$	$8{,}70 \cdot 10^{-4}$	2,0247	$1{,}11 \cdot 10^{-15}$	0,0021
$\varepsilon_2 = g_2 - z_2$	2,0342	$2{,}25 \cdot 10^{-4}$	4,0003	2,0333	$2{,}25 \cdot 10^{-4}$	4,0003
$\varepsilon_3 = g_3 - z_3$	2,0570	$3{,}00 \cdot 10^{-4}$	3,1754	2,0557	$3{,}00 \cdot 10^{-4}$	867,8230
$\varepsilon_4 = g_4 - z_4$	2,0743	$1{,}24 \cdot 10^{-5}$	3,0000	2,0722	$7{,}93 \cdot 10^{-9}$	61091,4089

Данные таблицы 2.2 подтверждают преимущество наблюдателя с кусочно-линейной коррекцией при оценивании кусочно-непрерывных производных высоких порядков по сравнению с линейным наблюдателем. В моменты смены формы дифференцируемого сигнала оценочные сигналы производных, полученных с помощью линейного наблюдателя, имеют сильные всплески, которые увеличиваются с ростом порядка оцениваемой производной. Наблюдатели с ограниченной кусочно-линейной коррекцией не выявили указанных проблем и рекомендуются для использования в практических приложениях.

2.4 Выводы по главе 2

Использование теории наблюдателей состояния для виртуальных моделей является конструктивной альтернативой по отношению к численному дифференцированию сигналов. При этом пространство состояний замкнутой системы расширяется только за счет порядка наблюдателей и не требует построения реальных динамических генераторов внешних воздействий и задающих сигналов. Предложенный подход обобщает случай, когда дифференцируемый сигнал порождается известной динамической моделью, до робастной постановки.

Использование кусочно-линейной коррекции обеспечивает инвариантность по отношению к неопределенному входу. Настройка осуществляется на основе неравенств и не требует составления эталонных характеристических полиномов. Выбранные коэффициенты коррекции не нужно перенастраивать при изменении формы оцениваемых производных в установленных диапазонах. По сравнению с линейными наблюдателями, которые показывают хорошую производительность при дифференцировании гладких сигналов, класс допустимых сигналов расширяется за счет кусочно-дифференцируемых составных функций.

Разработанный дифференциатор–наблюдатель с кусочно-линейными корректирующими воздействиями без собственных движений сохраняет преимущества базового наблюдателя стандартной структуры с кусочно-линейной коррекцией, но, в отличие от него, имеет более простую настройку и рекомендуется к использованию в следящих системах мобильных роботов.

Глава 3 Блочный синтез следящих дифференциаторов с учетом проектных ограничений на переменные состояния и управления

В данной главе разработаны метод и алгоритмы синтеза динамических следящих дифференциаторов с сигмовидными корректирующими воздействиями, обеспечивающих сглаживание и дифференцирование детерминированных сигналов с автоматическим учетом заданных ограничений на производные любого конечного порядка. Методологической основой является блочный синтез следящих систем с сигмовидными локальными связями, предназначенный для объектов с несогласованными возмущениями [2, 24, 69]. Особенности разработанного следящего дифференциатора: при его синтезе реализуется блочный принцип управления, согласно которому переменные следующего блока трактуются как виртуальные управления. Это позволило формализовать процедуру настройки следящего дифференциатора $(n+1)$-го порядка в виде системы двойных неравенств, обеспечивающих заданные ограничения.

Без ограничения общности, полученные в данной главе результаты применимы к любым векторным сигналам, удовлетворяющим нижеследующему описанию. Но для определенности рассматриваются сигналы, служащие задающими воздействиями для технических объектов управления. Базовое исследование выполнено для одноканальной системы.

Глава организована следующим образом. В разделе 3.1 приведены свойства сигма-функции и систем с сигмовидным управлением. В разделе 3.2 формализован алгоритм настройки следящего дифференциатора общего вида с учетом ограничений на восстанавливаемые производные дифференцируемого сигнала. В разделе 3.3 обосновывается универсальность предложенного метода. Указываются факторы, влияющие на выбор динамического порядка следящего дифференциатора. Вводятся гипотезы о фильтрующих свойствах следящего дифференциатора. В разделе 3.4 приводятся результаты численного моделирования.

Результаты главы 3 опубликованы в [25, 66–68, 103–104, 110, 113].

3.1 Свойства сигма-функции и сигмовидной обратной связи

В дальнейших построениях в качестве корректирующих воздействий в следящем дифференциаторе будет использоваться модификация гиперболического тангенса $\tanh(x) = 1 - 2/(1+\exp(2x))$, а именно, сигма-функция $\sigma(x) = \tanh(x/2)$ с двумя настраиваемыми коэффициентами

$$p\sigma(lx) = p\left(\frac{2}{1+\exp(-lx)} - 1\right), |\sigma(lx)| < 1. \tag{3.1}$$

где $p = \text{const} > 0$ – амплитуда (при удалении от начала координат), $l = \text{const} > 0$ – тангенс угла наклона в начале координат. Сигма-функция (3.1) относится к классу логистических функций, которые имеют S-образную форму. Перечислим основные свойства сигма-функции: 1) $D(x) = R$ – определена на всей числовой оси; 2) $\sigma(-lx) = -\sigma(lx)$ – нечетная, $|\sigma(lx)| = \sigma(l|x|)$; 3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sigma(lx) = \pm 1$ – ограничена сверху и снизу горизонтальными асимптотами, не имеет экстремумов и возрастает при $x \in R$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma(lx)}{0{,}5lx} = 1$ – является бесконечно малой при $x \to 0$ и эквивалентна линейной функции; 5) $\sigma(lx) \underset{l\to+\infty}{\sim} \operatorname{sign}(x)$ – с ростом угла наклона стремится к функции знака; 6) $\sigma(lx) \in C^{\infty}$ – является гладкой. Сигма-функция легко вычисляется, а ее производная имеет рекурсивный вид

$$p\sigma'(lx) = 0{,}5pl(1 - \sigma^2(lx)),\ 0 < p\sigma'(lx) \le 0{,}5pl,\ x \in R. \tag{3.2}$$

Можно ограничить сигма-функцию снизу кусочно-линейной функцией

$$p|\sigma(lx)| \ge p|\text{sat}(lx)|, p\text{sat}(lx) = \begin{bmatrix} p\sigma(l\Delta)\text{sign}(x), |x| > \Delta > 0, \\ p\sigma(l\Delta)x/\Delta, |x| \le \Delta, \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

и считать ее почти постоянной на интервалах $x \in (-\infty; -\Delta)$ и $x \in (\Delta; +\infty)$, и почти линейной в некоторой окрестности нуля $x \in [-\Delta; +\Delta]$. Обозначим

$$l\Delta = c > 0,\ \lim_{c\to+0} \sigma(c) = +0,\ \lim_{c\to+\infty} \sigma(c) = 1 - 0. \tag{3.4}$$

Для дальнейших построений формализуем свойства дифференциального уравнения с сигма-функцией в правой части. Нейтральная система

$$\dot{x} = -p\sigma(lx) = -p\tanh(lx/2), x \in R, p, l = \text{const} > 0$$

с учетом $\int \coth(kx)dx = (\ln|\sinh(kx)|)/k + C$, $k = l/2$ и обратной функции к гиперболическому синусу $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in R$ имеет решение в явном виде и является устойчивой

$$x(t) = \frac{2}{l}\ln(c_0 e^{-0.5plt} + \sqrt{c_0^2 e^{-plt} + 1}), c_0 \in R, \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

В силу $\sigma(0) = 0$ производная также стремится к нулю: $\lim\limits_{x(t) \to 0} \dot{x}(t) = 0.$

Исследуем свойства сигмовидного управления в задаче стабилизации переменной состояния при действии внешнего возмущения на систему

$$\dot{x} = f(t) + u,\ u = -p\sigma(lx), p, l = \text{const} > 0, \qquad (3.5)$$

где $x \in R$ – переменная состояния, $u \in R$ – управление, $f(t) \in R$ – неизвестная ограниченная функция времени: $|f(t)| \le F = \text{const} > 0, |\dot{f}(t)| \le F_1 = \text{const} > 0, t \ge 0.$ Если $f(t)$ не затухает со временем, то в замкнутой системе (3.5) можно обеспечить стабилизацию переменной состояния с некоторой точностью.

Лемма 3.1. Пусть в системе (3.5) интервал выбора амплитуды $p > 0$ ограничен сверху: $p \le \bar{p}.$ Тогда при любом начальном значении $x(0)$ решение системы $x(t), t \ge 0$ будет ограничено тогда и только тогда, когда $F < \bar{p}.$

Доказательство леммы 3.1. Для анализа устойчивости системы (3.5) используем второй метод Ляпунова и оценим производную функции Ляпунова $V = x^2/2$. Вне области $|x| \le \Delta = c/l$ сигма-функция снизу ограничена постоянной (3.3), с учетом (3.4) имеем: $\dot{V} = x\dot{x} = x(f(t) - p\sigma(lx)) \le |x|(F - p\sigma(c)).$

Если $F > p\sigma(c)$, то $\dot{V} > 0$, и при всех $p < F/\sigma(c)$ система (3.5) не устойчива, ее решение неограниченно $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \infty.$ Если $F = p\sigma(c)$, то $\dot{V} = 0$, система (3.5) нейтральная, находится на границе устойчивости, ее решение можно считать постоянным $x(t) \approx x(0).$ Если $p \le \bar{p} \le F \Leftrightarrow F/\bar{p} \ge 1$, то в силу $0 < \sigma(c) < 1$ (3.1), (3.4) в обоих случаях имеем строгое неравенство $\bar{p} < F/\sigma(c)$, т. е. устойчивость системы (3.5) обеспечить нельзя. Таким образом, доказана необходимость выполнения условия $F < \bar{p}$.

Если $F < p\sigma(c)$, то $\dot{V} < 0$, и при всех $p > F / \sigma(c)$ в силу (3.3) переменная состояния сходится в следующую окрестность:

$$|x(t)| \le \Delta = c / l, \tag{3.6}$$

т. е. решение системы (3.5) ограничено. Если $\bar{p} > F \Leftrightarrow F / \bar{p} < 1$, то существует допустимое значение $c^* : F / \bar{p} < \sigma(c^*) < 1$, при котором имеется непустой интервал для выбора амплитуды $p^* : F / \sigma(c^*) < p^* \le \bar{p}$, обеспечивающей (3.6). Таким образом, доказана достаточность выполнения условия $F < \bar{p}$.

При фиксированных значениях c^*, p^*, выбранных из указанных интервалов, рассмотрим различные варианты начальных условий системы (3.5). Если $|x(0)| \le \Delta$, то неравенство (3.6) справедливо при $t \ge 0$. Если $|x(0)| > \Delta$, то переменная состояния за конечное время $t^* > 0$ достигает указанной области, неравенство (3.6) справедливо при $t \ge t^*$, где

$$\frac{|x(0)| - \Delta}{p^* \sigma(c^*) + F} \le t^* \le \frac{|x(0)| - \Delta}{p^* \sigma(c^*) - F}.$$

Таким образом, если $F < \bar{p}$, то при любых начальных условиях решения системы (3.5) ограничено. Лемма 3.1 доказана.

В области $|x| \le \Delta$ (3.6) сигма-функция снизу ограничена наклонной прямой (3.3) и для производной функции Ляпунова с учетом (3.4) имеем оценку

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(f(t) - p\sigma(lx)) \le |x|(F - p\sigma(c)x / \Delta).$$

При $F < p\sigma(c)$ неравенство $\dot{V} < 0$ справедливо вне области

$$|x| \le \Delta \frac{F}{p\sigma(c)} = \frac{c}{l} \frac{F}{p\sigma(c)} < \Delta = \frac{c}{l}, \tag{3.7}$$

в которую сходится переменная состояния. Радиус области (3.7) меньше, чем первичная оценка (3.6). Для оценки области сходимости производной

$|\dot{x}(t)| \le \Delta_1,\ t > t^*$ переменной системы (3.5) составим вспомогательное уравнение $\ddot{x} = \dot{f} - 0{,}5pl(1 - \sigma^2(lx))\dot{x}$, на основе которого проанализируем достаточные условия: $\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}(\dot{f} - 0{,}5pl(1 - \sigma^2(lx))\dot{x}) \le |\dot{x}|(F_1 - 0{,}5pl(1 - \sigma^2(c))|\dot{x}|) < 0$. При уже выбранных параметрах p, c, l неравенство $\dot{x}\ddot{x} < 0$ справедливо вне области $|\dot{x}(t)| \le 2F_1/(pl(1 - \sigma^2(c))) \le \Delta_1$, в которую стягивается переменная $\dot{x}(t)$ при $t > t^*$. Стабилизация и производной, и переменной состояния (3.6) системы (3.5) обеспечивается выборе

$$l > \max\left\{\frac{c}{\Delta}, \frac{2F_1}{p(1 - \sigma^2(c))\Delta_1}\right\}. \qquad (3.8)$$

Из (3.7) следует, что радиус области сходимости прямо пропорционален параметру $c > 0$ и обратно пропорционален коэффициентам $p, l > 0$. Управление u в системе (3.5) ограничено амплитудой $p : |u(t)| < p, t \ge 0$, а скорость управления $\dot{u}$ зависит также от угла наклона l. Максимальные значения p, l в практических задачах обычно ограничены из физических соображений. В качестве критерия для выбора параметра $c > 0$ примем минимум базовой оценки модуля скорости управления [2]. С учетом (3.2) имеем:

$$\dot{u}(t) = -0{,}5pl(1 - \sigma^2(lx))\dot{x},$$

$$F < p\sigma(c) \Rightarrow |\dot{x}(t)| < F + p < 2p,\ t \ge 0, |\dot{u}(t)| < p^2 l, t \ge 0, p^2 l \ge \frac{F^2}{\sigma^2(c)}\frac{c}{\Delta}.$$

При фиксированных Δ, F целевое условие $c/\sigma^2(c) \to \min,\ c > 0$ выполняется при $c \approx 2{,}2$. Примем $l\Delta = 2{,}2$, $\sigma(2{,}2) \approx 0{,}8; 1/\sigma(2{,}2) \approx 1{,}25$. При этом в указанных интервалах (3.3) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} &0{,}8p \le p|\sigma(lx)| < p, |x| > 2{,}2/l; \\ &0{,}8p\frac{l}{2{,}2}|x| \le p|\sigma(lx)| \le 0{,}8p,\ |x| \le 2{,}2/l. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Далее к системам типа (3.5) будет предъявляться следующее требование:

$$F < 0{,}8\bar{p} \Leftrightarrow 1{,}25F < \bar{p}. \qquad (3.10)$$

3.2 Синтез следящего дифференциатора общего вида

Без ограничения общности рассмотрим принципы построения и алгоритм настройки одноканального следящего дифференциатора (1.20). Для обработки векторных сигналов нужно будет составить несколько таких автономных, независимых друг от друга дифференциаторов по числу обрабатываемых сигналов.

Вновь рассмотрим случай управляемого объекта с одним входом и одним выходом $y(t) \in Y \subset R,\ t \geq 0$, где Y – открытая рабочая область изменения регулируемой переменной. Для любого технического (в том числе, механического или электромеханического) объекта имеются физические (проектные) ограничения на развиваемую скорость, ускорение, а также старшие производные в общем случае до n-го порядка:

$$\left|y^{(i)}\right| \leq Y_i = \text{const} > 0, i = \overline{1,n}. \qquad (3.11)$$

В задачах слежения нужно обеспечить отслеживание выходной переменной заданного сигнала (траектории) $g_1(t) \in Y$. Траектория является допустимой для механического объекта, если она достаточно гладкая, ее кривизна непрерывна, а абсолютные значения производных задающего воздействия не превышают проектные ограничения (3.11):

$$g_1(t) \in C^n,\ \left|g_1^{(i)}(t)\right| \leq G_i < Y_i,\ i = \overline{1,n}, t \in [0;T], \qquad (3.12)$$

где $t \in [0;T]$ – время выполнения конкретного рабочего сценария. Пусть внешний сигнал $g_1(t) \in R$, поступающий в систему управления в реальном времени из автономного источника, частично удовлетворяет (3.12): функция $g_1(t)$ является или непрерывной, но негладкой, или кусочно-непрерывной с конечным числом особых точек (стыков или разрывов первого рода). В этих точках существуют левые и правые первые производные, которые не превышают ограничений на первую производную выходной переменной объекта управления (3.11). В рамках используемого метода выдвигается дополнительное условие (3.10):

$$\left|\dot{g}_1(t)\right| \leq G_1 < 0{,}8Y_1, t \in [0;T]. \qquad (3.13)$$

Ставится задача в реальном времени сгладить задающее воздействие, т. е.

сгенерировать на его основе плавный, допустимый сигнал (3.12), а также восстановить в сигнальном виде его производные до n-го порядка включительно. Для решения поставленной задачи вводится следящий дифференциатор (1.20), который реализуется на бортовом компьютере и имеет размерность $(n+1)$:

$$\dot{x}_i = x_{i+1}, i = \overline{1,n};\ \dot{x}_{n+1} = w, \tag{3.14}$$

где $x_1(t)$ – выходная переменная, $x_i(t)$ – ее $(i-1)$-я производная, $i = \overline{2,n+1}$, $x_1^{(n+1)} = \dot{x}_{n+1}$; $w \in R$ – корректирующее воздействие, которое выбирается в классе гладких ограниченных функций так чтобы, во-первых, обеспечить отслеживание выходной переменной $x_1(t)$ дифференциатора внешнего негладкого сигнала $g_1(t)$ с некоторой точностью. Во-вторых, в замкнутой системе (3.14) нужно обеспечить

$$\left|x_1^{(i)}(t)\right| \le Y_i = \text{const} > 0, t \in [0;T], i = \overline{1,\rho}. \tag{3.15}$$

При $\rho = n$ вводятся ограничения только на переменные состояния системы (3.14), при $\rho = n+1$ – на корректирующее воздействие $w(t)$, а при $\rho = n+2$ дополнительно на производную корректирующего воздействия:

$$\left|w(t)\right| \le Y_{n+1}, \left|\tfrac{d}{dt} w(t)\right| \le Y_{n+2}, t \ge 0.$$

При выполнении данных ограничений переменные генератора (3.14) порождают в сигнальном виде реализуемую для объекта траекторию и ее производные до n-го порядка включительно. Эти переменные являются новыми задающими воздействиями и используются для формирования управляющих воздействий в следящей системе объекта управления. Заметим, что в отличие от традиционной следящей системы задача достижения заданной точности (заданной ошибки слежения в установившемся режиме) в здесь не ставится. Точность отслеживания сигнала $g_1(t)$ выходом дифференциатора $x_1(t)$ является мерой его сглаживания и зависит от конкретных ограничений (3.11), (3.15).

Для синтеза следящего дифференциатора с указанными свойствами предлагается использовать блочный принцип управления и нелинейные обратные связи в виде S-образных гладких и ограниченных сигма-функций (3.1). Запишем систему (3.14) относительно ошибки слежения $e_1 = x_1 - g_1 \in R$ и введем следующие сигмовидные локальные связи и корректирующее воздействие:

$$\begin{aligned} &e_i = x_i + p_{i-1}\sigma(l_{i-1}e_{i-1}), i = \overline{2, n+1}; \\ &w = -p_{n+1}\sigma(l_{n+1}e_{n+1}),\ p_i, l_i = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Получим замкнутую систему относительно новых переменных (3.16) вида

$$\begin{aligned} &\dot{e}_1 = -p_1\sigma(l_1e_1) + e_2 - \dot{g}_1, \\ &\dot{e}_i = -p_i\sigma(l_ie_i) + e_{i+1} + \Lambda_{i-1}, i = \overline{2, n}, \\ &\dot{e}_{n+1} = -p_{n+1}\sigma(l_{n+1}e_{n+1}) + \Lambda_n, \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $\dot{g}_1(t)$ и $\Lambda_i(t) = \frac{d}{dt}(p_i\sigma(l_ie_i)) = 0{,}5p_il_i(1-\sigma^2(l_ie_i))\dot{e}_i$, $|\Lambda_i| \le 0{,}5p_il_i|\dot{e}_i|, i = \overline{1, n}$ рассматриваются как ограниченные возмущения. Их воздействие на ошибку слежения подавляется с помощью сигмовидных фиктивных управлений $p_i\sigma(l_ie_i)$, $i = \overline{1, n+1}$. В системе (3.17) все возмущения согласованы с фиктивными управлениями или корректирующим воздействием (3.16). В отличие от разрывных управлений, с помощью которых достигается полная инвариантность к согласованным возмущениям в скользящем режиме [58], с помощью сигмовидных функций обеспечивается ε-инвариантность.

Установка в следящем дифференциаторе (3.14) начальных значений $x_1(0) = g_1(0)$ $x_i(0) = 0, i = \overline{2, n+1}$ обеспечивает в силу (3.16) нулевые начальные значения для всех переменных состояния в системе (3.17):

$$e_i(0) = 0, i = \overline{1, n+1}, \tag{3.18}$$

следовательно, переменные системы (3.17) при $t = 0$ находятся в областях

$$\begin{aligned} &|e_1(t)| = |x_1(t) - g_1(t)| \le 2{,}2/l_1, \\ &|e_i(t)| = |x_i(t) + p_{i-1}\sigma(l_{i-1}e_{i-1}(t))| \le 2{,}2/l_i, i = \overline{2, n+1}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

С помощью выбора амплитуд $p_i > 0, \overline{1, n+1}$ нужно обеспечить (3.19) при $t \ge 0$. Тогда выход $x_1(t)$ следящего дифференциатора (3.14) будет отслеживать внешний сигнал $g_1(t)$, а остальные переменные $x_i(t), i = \overline{2, n+1}$ будут «отслеживать» ограниченные и гладкие сигмовидные корректирующие воздействия

$p_{i-1}\sigma(l_{i-1}e_{i-1}(t))$. Ошибки слежения зависят от коэффициентов $l_i > 0$, $\overline{1, n+1}$.

Теорема 3.1. В системе (3.17) при выполнении условий (3.13), (3.18) существуют такие положительные действительные числа $\underline{p}_i$, что для любых $p_i : \underline{p}_1 < p_1$, $\underline{p}_i(p_{i-1}) < p_i, i = \overline{2, n+1}$ неравенства (3.19) справедливы при $t \geq 0$.

Доказательство теоремы 3.1. Достаточные условия устойчивости замкнутой системы (3.17) с учетом (3.9) итерационно формализуются по аналогии с достаточными условиями возникновения скользящего режима [58]. В первом уравнении (3.17) вне области $|e_1(t)| \leq 2{,}2/l_1$ с учетом (3.13) справедливы оценки $e_1\dot{e}_1 = e_1(-p_1\sigma(l_1e_1) + e_2 - \dot{g}_1) \leq |e_1|(|e_2| + G_1 - 0{,}8p_1)$. Неравенство $e_1\dot{e}_1 < 0 \Rightarrow |e_1(t)| \leq 2{,}2/l_1$ будет выполнено, если $|e_2(t)| \leq 2{,}2/l_2$, $t > 0$ и

$$2{,}2/l_2 + G_1 < 0{,}8p_1. \tag{3.20}$$

С учетом $|p_1\sigma(l_1e_1)| < p_1$ и (3.20) можно дать консервативную оценку производной ошибки слежения и, следовательно, $\Lambda_1(t)$:

$$|\dot{e}_1(t)| \leq 2p_1, |\Lambda_1(t)| \leq 0{,}5p_1l_1|\dot{e}_1(t)| \leq p_1^2l_1, t \geq 0. \tag{3.21}$$

В i-м ($i = \overline{2, n}$) уравнении (3.17) вне области $|e_i(t)| \leq 2{,}2/l_i$ с учетом (3.21) имеем: $e_i\dot{e}_i = e_i(-p_i\sigma(l_ie_i) + e_{i+1} + \Lambda_{i-1}) \leq |e_i|(|e_{i+1}| + p_{i-1}^2l_{i-1} - 0{,}8p_i), i = \overline{2, n}$. Неравенство $e_i\dot{e}_i < 0 \Rightarrow |e_i(t)| \leq 2{,}2/l_i$ выполняется, если $|e_{i+1}(t)| \leq 2{,}2/l_{i+1}, t \geq 0$ и

$$2{,}2/l_{i+1} + p_{i-1}^2l_{i-1} < 0{,}8p_i,\ i = \overline{2, n}. \tag{3.22}$$

Тогда в силу (3.9), (3.17), (3.22) справедливы следующие оценки:

$$|p_i\sigma(l_ie_i(t))| < p_i, |\dot{e}_i(t)| \leq 2p_i,\ |\Lambda_i(t)| \leq p_i^2l_i, i = \overline{2, n}, t \geq 0. \tag{3.23}$$

И, наконец, в последнем, $(n+1)$-м уравнении системы (3.17) вне области $|e_{n+1}(t)| \leq 2{,}2/l_{n+1}$ с учетом (3.23) получим:

$$e_{n+1}\dot{e}_{n+1} = e_{n+1}(-p_{n+1}\sigma(l_{n+1}e_{n+1}) + \Lambda_n) \leq |e_{n+1}|(p_n^2l_n - 0{,}8p_{n+1}).$$

Неравенство $e_{n+1}\dot{e}_{n+1} < 0 \Rightarrow |e_{n+1}(t)| \leq 2{,}2/l_{n+1}$ будет выполнено, если

$$p_n^2l_n < 0{,}8p_{n+1}. \tag{3.24}$$

Верхние оценки сигмовидного корректирующего воздействия $w(t)$ и его производной, полученные аналогично (3.23), имеют вид

$$\left|w(t)\right| < p_{n+1}, \left|\tfrac{d}{dt}w(t)\right| \le 0{,}5 p_{n+1} l_{n+1} \left|\dot{e}_{n+1}\right| \le p_{n+1}^2 l_{n+1}. \qquad (3.25)$$

Тогда, на основе неравенств (3.20), (3.22), (3.24), нижние оценки для выбора амплитуд сигмовидных функций принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &2{,}75/l_2 + 1{,}25G_1 = \underline{p}_1 < p_1, \\ &2{,}75/l_{i+1} + 1{,}25 p_{i-1}^2 l_{i-1} = \underline{p}_i < p_i,\ i = \overline{2,n}, \\ &1{,}25 p_n^2 l_n = \underline{p}_{n+1} < p_{n+1}. \end{aligned} \qquad (3.26)$$

При выполнении (3.26) переменные замкнутой системы (3.17), (3.18) будут находиться в окрестностях нуля (3.19) при $t \ge 0$. Теорема 3.1 доказана.

Принципиальный момент состоит в том, что следящий дифференциатор (3.14) проектирует разработчик, поэтому имеется возможность установить в виртуальной системе (3.17) нулевые начальные значения невязок (3.18). Но если применять указанную процедуру для синтеза следящей системы объекта управления, то в общем случае обеспечить (3.18) нельзя. Если условия (3.18) не выполнены, то тогда интервалы для выбора амплитуд $p_i > 0, \overline{1, k+1}$, обеспечивающих (3.17) при $t \ge 0$, ограничены не только снизу, но и сверху [2].

Другой фактор, который приводит к ограничениям амплитуд сверху, это ограничения (3.15), накладываемые на переменные состояния и корректирующее воздействие следящего дифференциатора. Условия, при которых неравенства (3.15) будут выполнены при $\rho = n + 2$, с учетом (3.16), (3.25) имеют вид:

$$\begin{aligned} &\left|x_i(t)\right| \le 2{,}2/l_i + p_{i-1} \le Y_{i-1}, i = \overline{2, n+1}; \\ &\left|w(t)\right| < p_{n+1} \le Y_{n+1}, \left|\tfrac{d}{dt}w(t)\right| \le p_{n+1}^2 l_{n+1} \le Y_{n+2}. \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Объединяя (3.26) и (3.7), получим систему двойных неравенств

$$\left[\begin{aligned} &2{,}75/l_2 + 1{,}25G_1 < p_1 \le Y_1 - 2{,}2/l_2, \\ &2{,}75/l_{i+1} + 1{,}25 p_{i-1}^2 l_{i-1} < p_i \le Y_i - 2{,}2/l_{i+1},\ i = \overline{2,n}, \\ &1{,}25 p_n^2 l_n < p_{n+1} \le Y_{n+1}, \\ &p_{n+1}^2 l_{n+1} \le Y_{n+2}. \end{aligned}\right. \qquad (3.28)$$

Консервативные оценки (3.28), полученные из достаточных условий (3.26), (3.27) для «самых худших» случаев, теоретически важны, но могут быть ослаблены при практическом использовании. Поэтому сформулируем дополнительное требование к физическим ограничениям объекта (3.11) и производной задания (3.13): при подстановки в систему (3.28) числовых значений G_i, Y_i, $i = \overline{1, n+2}$ и $l_i = \underline{l}_i = 1, i = \overline{1, n+1}$ она должна быть совместной, т. е. иметь непустое множество решений $p_i > 0, i = \overline{1, k+1}$. Если указанное требование не выполняется, то тогда нужно выбирать амплитуды $p_i, i = \overline{1, n+1}$ только на основе нижних оценок (3.26) при $l_i = \underline{l}_i = 1, i = \overline{1, n+1}$. Тогда в моменты появления особых точек задающих воздействий возможно нарушение ограничений (3.15).

В предположении, что указанное требование выполняется, числовые значение коэффициентов $p_i, i = \overline{n+1, 1}$, равные верхним ограничениям $p_i = \bar{p}_i > \underline{p}_i$, $i = \overline{n+1, 1}$ (3.28), назначаются последовательно, снизу вверх. Это позволяет назначить максимально возможные $l_i = \bar{l}_i > \underline{l}_i, i = \overline{n+1, 1}$, от которых зависят радиусы областей сходимости невязок (3.19).

Указанная итерационная процедура настройки имеет вид:

$$\begin{aligned} &p_{n+1} = \bar{p}_{n+1} = Y_{n+1}, l_{n+1} = \bar{l}_{n+1} = Y_{n+2} / \bar{p}_{n+1}^2, \\ &p_n = \bar{p}_n = Y_n - 2{,}2 / \bar{l}_{n+1}, l_n = \bar{l}_n = (0{,}8\bar{p}_{n+1} - \beta_n) / p_n^2, \\ &p_i = \bar{p}_i \le Y_i - 2{,}2 / \bar{l}_{i+1}, \ l_i = \bar{l}_i = (0{,}8\bar{p}_{i+1} - \beta_i - 2{,}2 / \bar{l}_{i+2}) / \bar{p}_i^2, i = \overline{n-1, 1}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

где $\beta_i, i = \overline{1, n}$ – малые положительные константы, которые вводятся для того, чтобы левые неравенства в системе (3.28) оставались строгими.

В итоге следящий дифференциатор (3.14) с корректирующим воздействием (3.16) реализуется в виде замкнутой системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = x_{i+1}, i = \overline{1, n}; \ \dot{x}_{n+1} = -p_{n+1}\sigma(l_{n+1}e_{n+1}) = \\ &= -p_{n+1}\sigma(l_{n+1}(x_{n+1} + p_n\sigma(l_n(x_n + \\ &+ p_{n-1}\sigma(l_{n-1}(...(x_2 + p_1\sigma(l_1(x_1 - g_1)))...)))))). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Таким образом, доказан следующий критерий ограниченности производных эталонной траектории: для переменных замкнутой системы (3.30) с начальными значениями (3.18) условия (3.15) выполняются тогда и только тогда, когда коэффициенты корректирующих воздействий $p_i, l_i > 0$ удовлетворяют системе неравенств (3.28). В этой формулировке выполнение нижних ограничений можно считать «необходимыми», а верхних – «достаточными» условиями.

Если $g_1(t) \in C^0$, то в силу непрерывности сигма-функции и теоремы о непрерывности сложной функции для выходных переменных системы (3.30) первое условие (3.12) выполняется. Переменные системы (3.30) порождают гладкие ограниченные сигналы, которые используются в регуляторе объекта управления в качестве достижимых задающих воздействий и их производных. Гарантируемая точность отслеживания переменной дифференциатора $x_1(t)$ внешнего сигнала $g_1(t)$ зависит от принятых коэффициентов усиления (3.29):

$$|e_1(t)| = |x_1(t) - g_1(t)| \le 2{,}2\bar{p}_1^2 /(0{,}8\bar{p}_2 - \beta_1 - 2{,}2/\bar{l}_3), t \ge 0. \quad (3.31)$$

Точность стабилизации остальных вспомогательных переменных – невязок e_i, $i = \overline{2, n+1}$ (3.16), (3.19), не принципиальна в контексте решаемой задачи.

Проведем сравнительный анализ следящего дифференциатора (3.30) и дифференциатора–наблюдателя (2.3), (2.5).

Во-первых, в обоих алгоритмах реализуется возможность динамического дифференцирования сигналов, а для подавления возмущений применяются непрерывные аналоги функции знака. В работах [37, 68] введены наблюдатели с сигмовидными корректирующими воздействиями. Результаты моделирования показывают, что в задаче наблюдения они дают незначительный выигрыш по сравнению с кусочно-линейными корректирующими воздействиями с насыщением (2.5), которые более примитивны и проще в реализации, но являются негладкими. Именно поэтому для лучшей производительности следящего дифференциатора, миссия которого, в первую очередь, заключается в сглаживании сигналов, применяются нелинейные гладкие сигмоиды (3.1). В работах [10, 11, 46, 138], наоборот, в задачах управления используются sat-функции, но в рассматриваемой задаче их применение не целесообразно из-за особых точек.

Во-вторых, параметры и кусочно-корректирующих воздействий наблюдателя (2.3), (2.5) ограничиваются только снизу (2.17), (2.20), (2.24), (2.25), но не ограничиваются сверху, поэтому можно обеспечить стабилизацию ошибок наблюдения с любой заданной точностью. В этом состоит миссия наблюдателя. Миссия следящего дифференциатора (3.30) в решаемой задаче состоит в сглаживании внешнего сигнала, достигаемая точность стабилизации ошибки слежения (3.31) зависит от накладываемых ограничений (3.11), (3.28).

В-третьих, в следящем дифференциаторе (3.30) внешний сигнал $g_1(t)$ действует только по входу в последнем уравнении. Поэтому если внешний сигнал зашумлен, то следящий дифференциатор (как цепочка интеграторов) будет обеспечивать его естественную фильтрацию. Качество всех оценочных сигналов можно повысить путем наращивания динамического порядка системы (3.30) (см. подраздел 3.3.4). В наблюдателе (2.3), (2.5) внешний сигнал $g_1(t)$ поступает в каждое уравнение как аргумент корректирующих воздействий. Для его фильтрации нужно уменьшить большие коэффициенты усиления, что приведет к росту ошибок наблюдения. На наш взгляд, следящий дифференциатор (3.30) с соответствующей настройкой параметров более предпочтительно использовать в задачах наблюдениях для канонических систем с неопределенным входом и зашумленным выходом. Математически строгое исследование этой проблемы является предметом будущих исследований автора.

3.3 Факторы выбора динамического порядка следящего дифференциатора

3.3.1 Универсальные свойства следящего дифференциатора

Алгоритм динамического сглаживания (3.30) вместе с настройкой коэффициентов (3.28) обладает рядом универсальных свойств.

Во-первых, его можно использовать в системах автоматического управления для любых технических объектов, динамическая модель которых является дифференциально плоской и представима в каноническом виде. Коэффициенты дифференциатора устанавливаются однократно на подготовительной стадии на основе неравенств (3.28) с учетом ограничений (3.11) конкретного объекта управления. Они не зависят от характеристик внешнего, заранее неизвестного, сигнала $g_1(t)$ и не требуют перенастройки при изменении внешнего сигнала в допустимых пределах (3.12).

Во-вторых, при различных номинальных значениях (3.11) переменные дифференциатора (3.30) будут автоматически порождать в углах различные сглаженные аппроксимации примитивной траектории и ее производных, но в установившемся режиме на прямолинейных участках их форма будет идентичной. Таким образом, можно регулировать степень гладкости эталонной траектории, а также воспроизводить сигналы ее производных любого требуемого порядка путем наращивания/сокращения количества блоков.

В-третьих, с помощью изменения размерности блоков следящего дифференциатора можно автоматически порождать сглаженные траектории с установленными ограничениями в фазовых пространствах различной размерности. Например, система (3.30) при $\forall x_i \in R$ порождает достижимую траекторию для одноканального объекта управления (например, однозвенного манипулятора [103, 104]); при $\forall x_i \in R^2$ – траекторию для колесного робота или конечной точки двухзвенного манипулятора на плоскости [110]; при $\forall x_i \in R^3$ – пространственную траекторию для центра масс летательного аппарата или конечной точки манипулятора в цилиндрическом пространстве [68, 113]. На этом геометрические интерпретации реального мира исчерпываются, но при $\forall x_i \in R^4$, $\forall x_i \in R^5$ и т. д. имеют место абстрактные пространства, в которых функционируют выходные переменные многоканальных систем.

С вычислительной точки зрения алгоритм динамического сглаживания (3.30) представляет собой вычисление вложенных сигмоид и $(n+1)$ операций интегрирования. Их реализация не вызывает трудностей при использовании любого программного обеспечения с любой разрядной сеткой. Время счета алгоритма пренебрежимо мало и не приводит к запаздыванию при работе в реальном времени, когда в следящую систему объекта управления поступают векторные сигналы $x_1(t) \approx g_1(t)$, $x_2(t) \approx \dot{g}_1(t)$, $x_3(t) \approx \ddot{g}_1(t)$ и т. д.

Важным свойством следящего дифференциатора (3.30) является возможность варьировать его динамический порядок (количество его блоков) в зависимости от условий решаемой задачи. Основными факторами, влияющими на выбор размерности следящего дифференциатора, являются:

1) используемые методы синтеза управления в следящей системе мобильного робота;
2) учитываемый динамический порядок модели объекта управления;
3) зашумленность/незашумленность обрабатываемого сигнала $g_1(t)$.

Говоря о первых двух факторах, важно отметить, что для решения задачи отслеживания выходными переменными механического объекта управления заданных сигналов бывает достаточно применить декомпозиционный метод синтеза сигмовидных обратных связей, аналогичный методу, который применяется для синтеза следящего дифференциатора (3.30) [2, 24]. При этом первые производные задающих воздействий трактуются как внешние возмущения (как в системе (3.17)), а для формирования статической обратной связи используются только задающие воздействия. Другой подход заключается в использовании в следящих системах наблюдателей смешанных переменных [31, 41, 68]. При этом для синтеза обратной связи не нужно получать отдельные оценки производных задающих воздействий. Таким образом, в обоих подходах нужно знать только задающие сигналы. Если эти сигналы не содержат паразитных помех, то для их сглаживания можно использовать следящий дифференциатор, состоящий из одного блока, представленный в следующем подразделе.

3.3.2 Синтез одноблочного следящего дифференциатора

Одноблочный следящий дифференциатор – элементарная система вида

$$\dot{x}_1 = w, \tag{3.32}$$

где x_1 – выход модели, который с некоторой точностью отслеживает первичные задания; w – корректирующее воздействие, с помощью которого нужно обеспечить ограниченность ошибки слежения $e_1 = x_1 - g_1$ и ограничения на скорости Y_1 и ускорения Y_2 объекта управления (3.11). Система (3.32) может быть скалярной или векторной в зависимости от размерности $g_1(t)$. Без ограничения общности рассмотрим скалярный случай системы (3.32) при $g_1, x_1, w \in R$.

Настройка следящего дифференциатора (3.32) аналогичная настройке системы общего вида (3.14) при $\rho = n + 2$, когда ограничения накладываются на корректирующее воздействие и его производную:

$$\left|w(t)\right| \le Y_1, \left|\tfrac{d}{dt} w(t)\right| \le Y_2,\ t \ge 0. \tag{3.33}$$

Точность стабилизации ошибки слежения $e_1 = x_1 - g_1$ заранее не устанавливается, требуется только обеспечить ее ограниченность.

Запишем систему (3.32) относительно ошибки слежения $\dot{e}_1 = w - \dot{g}_1$. Для подавления «возмущения» $\dot{g}_1(t)$ также используется сигмовидное корректирующее воздействие с двумя коэффициентами усиления

$$w = -p_1\sigma(l_1 e_1), \dot{w} = -0{,}5 p_1 l_1 (1 - \sigma^2(l_1 e_1))\dot{e}_1, p_1 l_1 > 0, \tag{3.34}$$

т. е. элементарный алгоритм сглаживания реализуется в виде

$$\dot{x}_1 = -p_1\sigma(l_1(x_1 - g_1)) \tag{3.35}$$

и при $g_1(t) \in C^0$ порождает эталонную траекторию класса $x_1(t) \in C^1$ с ограниченной скоростью и ускорением (3.33) при нижеследующей настройке. Заметим, что в системе (3.35) корректирующее воздействие $w(t)$ может выступать как оценка производной обрабатываемого сигнала, которая будет непрерывной, но, в общем случае, ее гладкость не гарантируется.

В силу $0{,}8 p_1 \le p_1 \,|\, \sigma(l_1 e_1) \,| < p_1$ при $l_1 \left|e_1\right| > 2{,}2$ (3.9) для замкнутой системы

$$\dot{e}_1 = -p_1\sigma(l_1 e_1) - \dot{g}_1,\ e_1(0) = 0 \tag{3.36}$$

получим условие, при выполнении которого ее решение ограничено:

$$0{,}8 p_1 > G_1 \Rightarrow e_1\dot{e}_1 \le |\, e_1 \,| (G_1 - 0{,}8 p_1) < 0 \Rightarrow |\, e_1 \,| \le 2{,}2 / l_1. \tag{3.37}$$

Из (3.37) следует консервативная оценка производной ошибки слежения: $|\, \dot{e}_1 \,| \le 2 p_1$. С учетом (3.36), (3.37) для замкнутой системы (3.32), (3.34) получим неравенства, при которых обеспечивается выполнение целевого условия (3.33):

$$\begin{cases} 1{,}25G_1 < p_1 \le Y_1, \\ p_1^2 l_1 \le Y_2. \end{cases} \tag{3.38}$$

При выборе конкретных коэффициентов коррекции можно установить:

1) или минимально возможную амплитуду p_1 и, следовательно, максимальный угол наклона l_1:

$$p_1 = 1{,}25G_1 + \alpha_1 \Rightarrow l_1 = Y_2 / (1{,}25G_1 + \alpha_1)^2,\ \alpha_1 \approx +0, \tag{3.39}$$

2) или максимально возможную амплитуду p_1 и максимальный при этом угол наклона l_1, который меньше, чем в (3.39):

$$p_1 = Y_1 \Rightarrow l_1 = Y_2 / Y_1^2 < Y_2 / (1{,}25G_1 + \alpha_1)^2$$

или любые другие промежуточные допустимые значения.

В данном элементарном случае можно принять в качестве критерия выбора минимальное пороговое значение ошибки слежения (3.7). При c = 2,2, $\sigma(2{,}2) \approx 0{,}8$ и $Y_2 > Y_1$ ошибка слежения, представленная в виде функции двух переменных $f(p_1, l_1) = 2{,}75G_1 / (p_1 l_1)$, достигает наименьшего значения в первом случае (3.39), т. е. при выборе максимального угла наклона l_1:

$$f(p_1, l_1) = \frac{2{,}75G_1}{p_1 l_1} = 2{,}75G_1 \frac{1{,}25G_1 + \alpha_1}{Y_2} < 2{,}75G_1 \frac{Y_1}{Y_2}.$$

Итак, следящий дифференциатор минимального динамического порядка (3.32) порождает эталонные сглаженные задания, которые удовлетворяют физическим ограничениям на скорость и ускорение выхода объекта управления.

3.3.3 Синтез трехблочного следящего дифференциатора для сглаживания пространственной траектории

Для объектов управления с относительной степенью 2 (например, в моделях, основанных на законах Ньютона и Лагранжа, где действующие силы и моменты полагаются управляющими воздействиями) при решении задачи слежения для синтеза статической обратной связи потребуется знание первой и второй производных задающего воздействия [116]. Тогда, для сглаживания внешних сигналов, а также для восстановления их производных первого, второго и даже третьего порядка достаточно применить динамическую модель, состоящую из трех блоков. Конкретизируем описанный выше алгоритм синтеза для этого типового случая применительно к сглаживанию векторного сигнала $g_1(t) = (g_{11}(t), g_{12}(t), g_{13}(t))^{\mathrm{T}} \in R^3$, задающего покомпонентно пространственную траекторию для выхода объекта управления $y(t) \in R^3$, производные которого до 4-го порядка должны быть ограничены известными константами

$$\left\| y^{(i)}(t) \right\| \le Y_i = \mathrm{const} > 0, t \in [0,T],\ i = \overline{1,4}, \qquad (3.40)$$

здесь и далее $\|*\|$ – евклидова норма вектора, $T > 0$ – время выполнении рабочего сценария. Соответствующий трехблочный следящий дифференциатор имеет размерность $3 \times 3 = 9$ и следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = w,\ x_1, x_2, x_3 \in R^3, \qquad (3.41)$$

где $w \in R^3$ – корректирующие воздействия, с помощью которых нужно обеспечить отслеживание выходными переменными дифференциатора $x_1(t)$ внешних негладких сигналов $g_1(t)$ с некоторой точностью и выполнение ограничений:

$$\left\| x_1^{(i)}(t) \right\| \le Y_i, t \in [0;T], i = \overline{1,4}. \qquad (3.42)$$

Неравенства (3.40), (3.42) вводят ограничения на скорость, ускорение, рывок и скорость рывка порождаемых траекторий, при $i = 3,4$ потребуется ограничить корректирующие воздействия и их производные.

Аналогично (3.16) вводятся сигмовидные локальные связи

$$e_1 = x_1 - g_1, e_2 = x_2 + p_1\sigma(l_1 e_1),\ e_3 = x_3 + p_2\sigma(l_2 e_2), \qquad (3.43)$$

где $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3})^{\mathrm{T}}$; $p_i, l_i = \mathrm{const} > 0,$ $\sigma(l_i e_i) = (\sigma(l_i e_{i1}), \sigma(l_i e_{i2}), \sigma(l_i e_{i3}))^{\mathrm{T}}$, $i = 1,2$. После ввода сигмовидного корректирующего воздействия

$$w = -\sigma(l_3 e_3),\ \sigma(l_3 e_3) = (\sigma(l_3 e_{31}), \sigma(l_3 e_{32}), \sigma(l_3 e_{33}))^{\mathrm{T}}, \qquad (3.44)$$

где $p_3, l_3 = \mathrm{const} > 0$, имеем замкнутую систему относительно невязок (3.43):

$$\begin{aligned} &\dot{e}_1 = -p_1\sigma(l_1 e_1) + e_2 - \dot{g}_1, \\ &\dot{e}_2 = -p_2\sigma(l_2 e_2) + e_3 + \Lambda_1, \dot{e}_3 = -p_3\sigma(l_3 e_3) + \Lambda_2, \end{aligned} \qquad (3.45)$$

$$\Lambda_i(t) = \tfrac{d}{dt}(p_i\sigma(l_ie_i)) = 0{,}5p_il_i\begin{pmatrix}(1-\sigma^2(l_ie_{i1}))\dot e_{i1}\\(1-\sigma^2(l_ie_{i2}))\dot e_{i2}\\(1-\sigma^2(l_ie_{i3}))\dot e_{i3}\end{pmatrix}, i = 1,2. \tag{3.46}$$

При $x_1(0) = g_1(0), x_i(0) = \vec{0}, i = 2,3$ получим $e_i(0) = \vec{0}, i = 1,2,3$, тогда при $t = 0$

$$\begin{aligned}&\|e_1(t)\| = \|x_1(t) - g_1(t)\| \le 2{,}2/l_1,\\&|e_i(t)| = \|x_i(t) + p_{i-1}\sigma(l_{i-1}e_{i-1}(t))\| \le 2{,}2/l_i, i = 2,3.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Достаточные условия, при которых неравенства (3.47) будут справедливы при $t \in [0;T]$, аналогично (3.20) имеют вид

$$\|e_2\| + \|\dot g_1\| < 0{,}8p_1, \|e_3\| + \|\Lambda_1\| < 0{,}8p_2, \|\Lambda_2\| < 0{,}8p_3. \tag{3.48}$$

Тогда для производных $\dot e_1, \dot e_2$ и, следовательно, для выражений (3.46), получим оценки $\|\dot e_i\| \le 2p_i, \|\Lambda_i\| \le p_i^2l_i, i = 1,2$, с учетом которых и в силу (3.10) неравенства (3.48) принимают вид

$$1{,}25(2{,}2/l_2 + G_1) < p_1, 1{,}25(2{,}2/l_3 + p_1^2l_1) < p_2, 1{,}25p_2^2l_2 < p_3. \tag{3.49}$$

Выполнение (3.39) обеспечивает (3.47) при $t \in [0;T]$. Ошибка слежения в особых точках ограничена $\|e_1(t)\| \le 2{,}2/l_1$. В установившемся режиме как и в (3.7)

$$\|e_1(t)\| \le \frac{2{,}2}{l_1}\cdot\frac{2{,}75/l_2 + 1{,}25G_1}{p_1} < \frac{2{,}2}{l_1}. \tag{3.50}$$

Система неравенств (3.28) для выбора коэффициентов коррекции имеет вид

$$\left[\begin{aligned}&2{,}75/l_2 + 1{,}25G_1 < p_1 \le Y_1 - 2{,}2/l_2,\\&2{,}75/l_3 + 1{,}25p_1^2l_1 < p_2 \le Y_2 - 2{,}2/l_3,\\&1{,}25p_2^2l_2 < p_3 \le Y_3,\\&p_3^2l_3 \le Y_4.\end{aligned}\right. \tag{3.51}$$

Из-за негладкости внешнего сигнала $g_1(t)$ точность стабилизации невязок $e_2(t), e_3(t)$ (3.43) не важна, следовательно, нет необходимости искать максимально допустимые значения коэффициентов $l_{2,3}$. Но можно обеспечить как можно меньшую ошибку слежения $\|e_1(t)\| \le 2{,}2/l_1$, т. е. как можно больший коэффициент $l_1 > 0$.

На основе системы (3.51) последовательно примем максимально возможные значения p_3, p_2 и соответствующие значения l_3, l_2:

$$
\begin{aligned}
&p_3 = Y_3, l_3 = Y_4 / p_3^2 = Y_4 / Y_3^2,\\
&p_2 = Y_2 - 2{,}2 / l_3 = Y_2 - 2{,}2Y_3^2 / Y_4,\\
&l_2 = (0{,}8p_3 - \alpha_3) / p_2^2 = (0{,}8Y_3 - \alpha_3)/(Y_2 - 2{,}2Y_3^2 / Y_4)^2,
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

где $\alpha_3 \approx +0$ – очень малая положительная константа, обеспечивающая строгость левого предпоследнего неравенства (3.51). Предполагается, что при подстановке (3.52) в (3.51) система остается совместной, в частности, имеет место априорное выполнение условий

$$
Y_2 > 2{,}2Y_3^2 / Y_4,\ Y_1 > \frac{4{,}95(Y_2 - 2{,}2Y_3^2 / Y_4)^2}{0{,}8Y_3 - \alpha_3} + 1{,}25X_1.
$$

В противном случае следует целенаправленно уменьшать значения p_3, p_2 (и, соответственно, увеличивать l_3, l_2) до получения положительных решений.

Из второго неравенства (3.51) следует, что при фиксированных коэффициентах (3.52) максимальное значение l_1 обеспечивается при минимально возможном значении p_1, т. е.

$$
\begin{aligned}
&p_1 = 2{,}75 / l_2 + 1{,}25X_1 + \alpha_1 = \frac{2{,}75(Y_2 - 2{,}2Y_3^2 / Y_4)^2}{0{,}8Y_3 - \alpha_3} + 1{,}25X_1 + \alpha_1,\\
&l_1 = 0{,}8(p_2 - \alpha_2 - 2{,}75 / l_3) / p_1^2, \alpha_{1,2} \approx +0.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Очевидно, что при неограниченном росте $l_1 \to +\infty$ эталонная траектория будет практически повторять исходный негладкий сигнал $g_1(t)$. Более плавные аппроксимации достигаются путем снижения l_1, если, например, при фиксированных коэффициентах (3.52) принять максимальное значение p_1, т. е.

$$
\begin{aligned}
&p_1 = Y_1 - 2.2 / l_2 = Y_1 - 2.2(Y_2 - 2.2Y_3^2 / Y_4)^2 / (0.8Y_3 - \alpha_3),\\
&l_1 = (0.8p_2 - \alpha_2 - 2.2 / l_3) / p_1^2, \alpha_2 \approx +0.
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Настройка следящего дифференциатора путем выбора нижних или верхних предельных значений p_i – удобная, но не единственно возможная процедура.

В итоге следящий дифференциатор (3.41) с корректирующим воздействием (3.44) будет реализован в виде замкнутой системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \\ &\dot{x}_3 = -p_3\sigma(l_3 e_3) = -p_3\sigma(l_3(x_3 + p_2\sigma(l_2(x_2 + p_1\sigma(l_1(x_1 - g_1)))))). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Трехблочный следящий дифференциатор (3.41) восстанавливает не только первую и вторую, но даже третью производную заданного сигнала с помощью корректирующего воздействия $w(t) \approx \dddot{g}_1(t)$ (3.44). Однако, этот сигнал снимается не с выхода, а со входа интегратора и непосредственно содержит негладкий $g_1(t)$. Поэтому качество этой оценки в общем случае будет хуже, чем качество третьей производной, оцененной с помощью $x_4(t) \approx \dddot{g}_1(t)$ – переменной состояния четырехблочного следящего дифференциатора.

3.3.4 Фильтрующие свойства следящего дифференциатора

Третьим фактором, влияющим на выбор порядка следящего дифференциатора, является необходимость фильтрации внешнего сигнала, если он содержит паразитные помехи. Пусть, например, на полезный сигнал $g_1(t)$ накладываются неконтролируемые помехи $\eta(t)$, т. е. в систему управления поступает зашумленный (в общем случае, векторный) сигнал $\bar{g}_1(t) = g_1(t) + \eta(t)$. Типовое предположение: $\eta(t)$ – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией.

Как известно, простейшим помехозащищенным динамическим звеном является низкочастотный фильтр типа (1.13), а в данном случае

$$\mu\dot{\tau} = -\tau + g_1(t) + \eta(t), \dim\tau = \dim g_1, \tag{3.56}$$

где $\mu = \text{const} > 0$ – постоянная времени фильтра, которую выбирают так, чтобы сохранить полезный сигнал $g_1(t)$ и при этом подавить паразитные высокочастотные составляющие $\eta(t)$. Обычно при настройке фильтра используют следующие соотношения [65]:

$$\mu = 1/\omega_c, \omega_c > \omega, \tag{3.57}$$

где ω_c – желаемая частота среза, при которой мощность сигнала после фильтрации уменьшается в два раза, а его амплитуда – в $\sqrt{2}$ раза, ω – предполагаемая частота сигнала, подлежащего фильтрации. Чем ближе значение ω_c к ω, тем больше искажается полезный сигнал в окрестности ω, но при этом сильнее подавляются паразитные составляющие. Наоборот, с ростом ω_c полезный сигнал искажается меньше, но при этом ухудшается фильтрация. Надо искать компромисс, исходя из априорных знаний о паразитной составляющей $\eta(t)$.

При сглаживании зашумленного сигнала, например, одноблочный (3.35) и трехблочный (3.55) дифференциаторы принимают соответственно вид:

$$\dot{x}_1 = -p_1\sigma(l_1(x_1 - \overline{g}_1(t))) = -p_1\sigma(l_1(x_1 - g_1(t) - \eta(t)))\,; \tag{3.58}$$

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = -p_3\sigma(l_3 e_3) = \\ = -p_3\sigma(l_3(x_3 + p_2\sigma(l_2(x_2 + p_1\sigma(l_1(x_1 - g_1(t) - \eta(t))))))).\end{gathered} \tag{3.59}$$

Структура уравнений (3.56) и (3.58) идентична в том смысле, что в некоторой окрестности нуля, нахождение в которой обеспечивается выбором амплитуды p_1, сигма-функция близка к линейной (3.3). Поэтому следящий дифференциатор будет помехозащищен, если при выборе $1/l_1$ учитывать (3.57).

Далее выдвигается ряд гипотез, основанных на сравнительном анализе динамического дифференциатора–наблюдателя (2.3) и динамического следящего дифференциатора (3.30). В дифференциаторе (2.3) реализуется задача наблюдения и в силу метода (2.5) зашумленный сигнал $\overline{g}_1(t)$ присутствует во всех уравнениях системы (2.3), (2.5). В следящем дифференциаторе (3.30) реализуется задача слежения, и в силу метода он является блочным интегратором $(n+1)$-го порядка, где зашумленный сигнал действует только по входу в виде аргументов вложенных сигма-функций. В такой системе шум на входе слабо влияет на выход из-за естественной фильтрации интегрирующими звеньями.

Первая гипотеза: в системе (3.30) без дополнительных фильтров обеспечивается инвариантность выхода $x_1(t)$ по отношению к шуму на входе.

Вторая гипотеза: для лучшей фильтрации следует снижать большие коэффициенты l_i, но тогда ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g_1(t)$ увеличатся по модулю в установившемся режиме. Это уже отмеченный выше аналог известной проблемы фильтра Калмана: чем выше быстродействие, тем хуже фильтрация и, наоборот. Для разрешения проблемы устанавливают компромисс между быстродействием и фильтрующими свойствами и обеспечивают его решением оптимизационной задачи [16, 45]. Чем больше интегрирующих звеньев и, соответственно, вложенных сигма-функций, тем меньше влияния на ошибку слежения будут оказывать большие коэффициенты с ростом их порядкового номера, и наоборот, с уменьшением их порядкового номера все меньшее влияния они будут оказывать на качество фильтрации сигналов.

Очевидно, что в системе (3.30) чем выше порядок восстанавливаемой производной, тем хуже ее фильтрация. Учитывая, что эти производные потом поступают в регулятор объекта управления (см. главы 4, 5), нельзя игнорировать проблему их фильтрации. Один из способов заключается в том, чтобы дополнительно пропускать восстановленные старшие производные через низкочастотные фильтры (3.56) перед их подачей в регулятор объекта.

Третья гипотеза: проблему фильтрации восстанавливаемой старшей производной $g_1^{(n)}(t)$ можно решить путем увеличения количества блоков следящего дифференциатора, используя вместо дифференциатора (3.30) с $(n+1)$-м блоком расширенную систему из $(n+2)$-х или $(n+3)$-х блоков. Зашумленный сигнал все также будет поступать только на вход, но в расширенном следящем дифференциаторе оценочный сигнал $g_1^{(n)}(t)$ будет отделен от зашумленного входа дополнительными интеграторами, что обеспечит его естественную фильтрацию и заметно снизит влияние на оценку производной паразитного шума, которое будет также снижаться с увеличением числа интегрирующих звеньев. Однако максимально возможное (практически реализуемое) количество блоков следящего дифференциатора зависит от разрядности сетки применяемой ЭВМ и принятой в конкретном трансляторе структуры представления действительных чисел (см. замечание 2.3).

3.4 Результаты моделирования

В данном разделе представлены результаты численного моделирования, демонстрирующие свойства сглаживания, дифференцирования и фильтрации одноблочных и трехблочных следящих дифференциаторов. Моделирование проводилось в среде MATLAB-Simulink с использованием метода интегрирования Эйлера с постоянным шагом 0,001.

Эксперимент 3.1. С помощью одноблочного следящего дифференциатора (3.35) демонстрируется степень сглаживания кусочно-непрерывного тестового сигнала (2.45) и его первой производной в зависимости от имеющихся ограничений и выбранных коэффициентов корректирующего воздействия. Тестовый сигнал (2.45) приведем здесь еще раз для удобства изложения

$$g_1(t)=\begin{cases}4-t^2,\ t\in[0;2);\\ 0{,}5(t-2)^3, t\in[2;4);\\ 4, t\in[4;6);\\ 4e^{-(t-6)}, t\in[6;+\infty).\end{cases} \tag{3.60}$$

Заметим, что на практике вид сигнала заранее не известен, но полагаются известными диапазоны изменения его производных (3.12), а также выполнение (3.13). В данном случае $G_1=6, G_2=6.$ В следящем одноблочном дифференциаторе (3.35) для заданных пар ограничений по скорости и ускорению (3.11)

$Y_1=8, Y_2=60$; $Y_1=8, Y_2=120$; $Y_1=8, Y_2=240$

по формулам (3.39) были установлены следующие коэффициенты корректирующего воздействия соответственно:

$$p_1=7{,}7; l_1=1; \tag{3.61}$$

$$p_1=7{,}7; l_1=2; \tag{3.62}$$

$$p_1=7{,}7; l_1=4; \tag{3.63}$$

На рисунках 3.1–3.3 слева показаны графики $g_1(t)$ (3.60) и соответствующие графики выхода дифференциатора $x_1(t)$, $x_1(0)=g_1(0)$; справа – корректирующего воздействия $\dot{x}_1(t)=w(t)$, дающего первую производную.

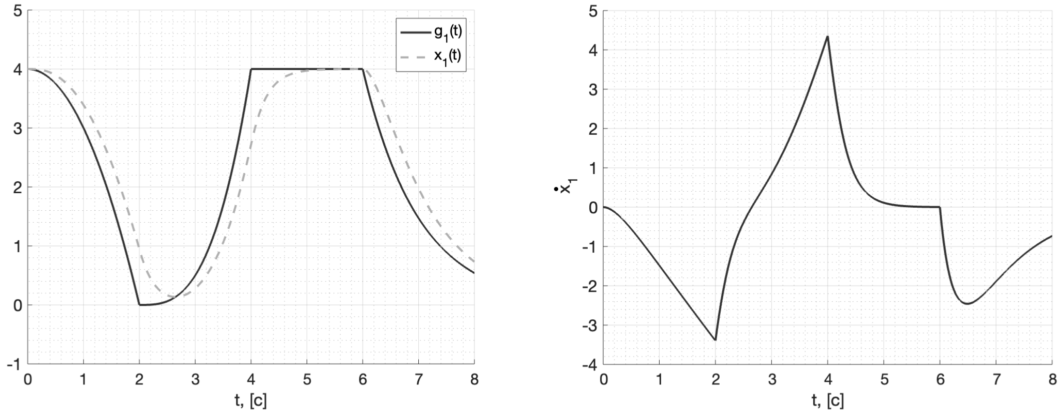


Рисунок 3.1 – Графики $g_1(t)$ (3.60), $x_1(t)$ и $\dot{x}_1(t)$ системы (3.35), (3.61)

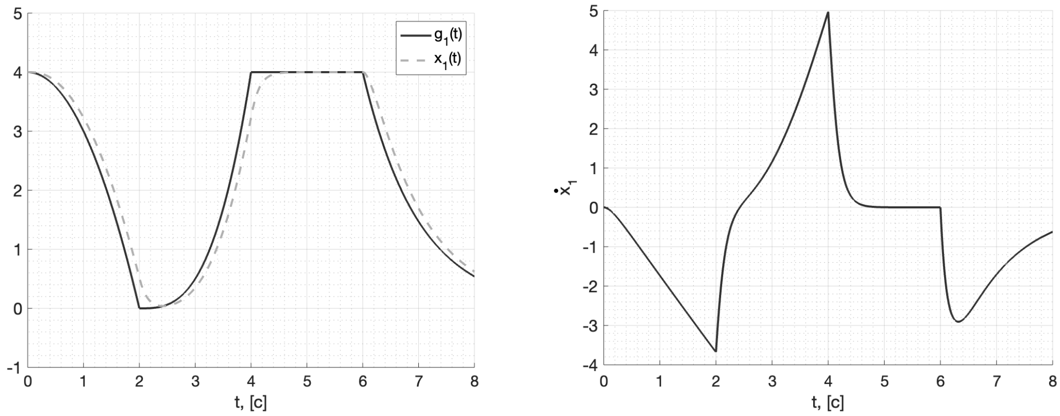


Рисунок 3.2 – Графики $g_1(t)$ (3.60), $x_1(t)$ и $\dot{x}_1(t)$ системы (3.35), (3.62)

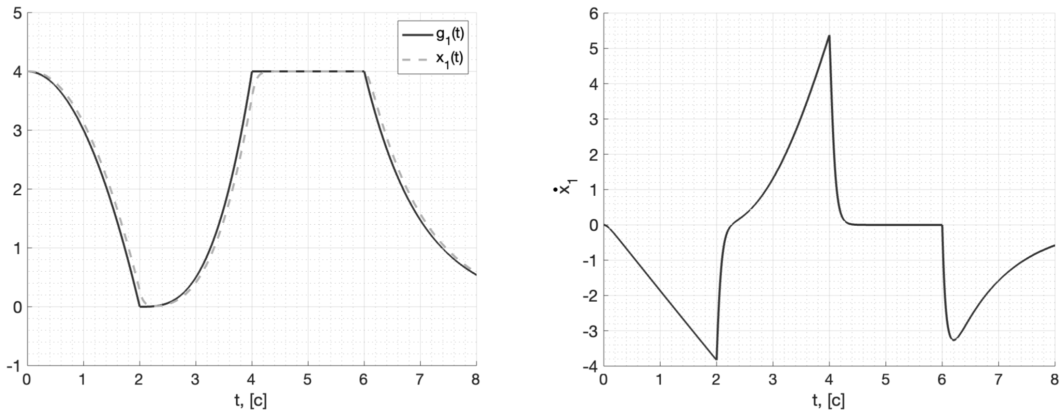


Рисунок 3.3 – Графики $g_1(t)$ (3.60), $x_1(t)$ и $\dot{x}_1(t)$ системы (3.35), (3.63)

На левых рисунках 3.1–3.3 видно, что все графики $x_1(t)$ плавные и сглаживают стыки, ошибка отслеживания (мера сглаживания) уменьшается с ростом l_1, что согласуется с оценкой (3.37). На правых рисунках 3.1–3.3 видно, что все графики восстановленной производной негладкие, но ограниченные и более плавные, чем на рисунке 2.2. Их максимальные абсолютные значения на рассматриваемом интервале меньше $p_1 = 7{,}7$ (4,4; 5; 5,4 соответственно, т. е. область значений восстановленной производной немного расширяется с ростом l_1). Для сравнения на рисунке 3.4 приведены аналогичные графики, полученные при коэффициентах $p_1 = 4;\ l_1 = 2{,}8$.

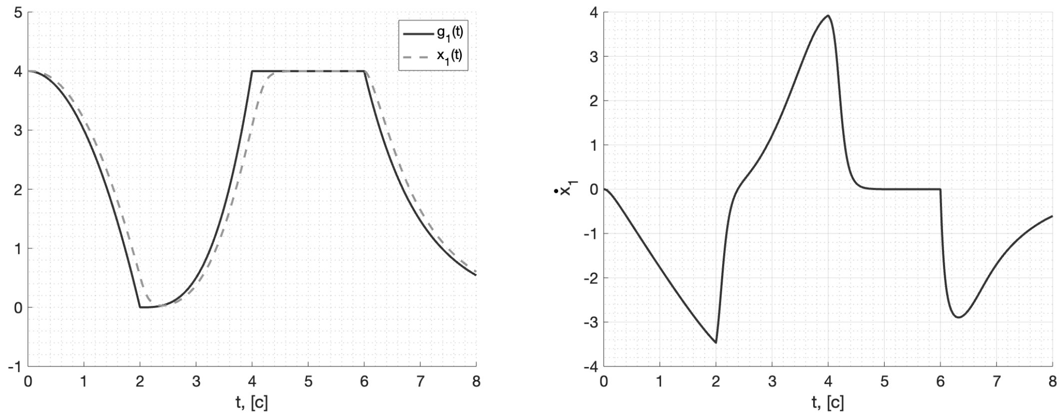


Рисунок 3.4 – Графики $g_1(t)$ (3.60), $x_1(t)$ и $\dot{x}_1(t)$ системы (3.35), $p_1 = 4;\ l_1 = 2{,}8$

Точность отслеживания (левый график рисунка 3.4) сопоставима с аналогичными графиками рисунка 3.2. При этом абсолютные значения восстановленной производной (правый график рисунка 3.4) не превышают $p_1 = 4$, а сама линия более плавная по сравнению с аналогичными линиями правых рисунков 3.1–3.3. Таким образом, продемонстрирована способность одноблочного следящего дифференциатора обеспечивать заданные ограничения на скорость изменения сигнала. Заметим, что полученный результат не противоречит лемме 3.1, так как требование (3.10), а именно $1{,}25 G_1 < p_1$ (здесь $G_1 = 6, p_1 = 4$) нарушается не всюду, а только на небольшом локальном интервале $t \in [3{,}6; 4{,}1]$.

Эксперимент 3.2. Рассматривается опорная траектория на плоскости Oxy в виде замкнутой ломаной, отрезки которой соединяют заданные с учетом времени путевые точки $(x_i, y_i, t_i), i = \overline{1,15}$ (см. таблицу 3.1). Так можно задать в первом приближении движение центра масс колесной платформы или конечной точки двухзвенного манипулятора на плоской рабочей поверхности.

Таблица 3.1 – Координаты опорных 3D-точек для эксперимента 3.2

i	x_i	y_i	t_i	i	x_i	y_i	t_i	i	x_i	y_i	t_i
1	1	1	0	6	8	9	13	11	8	3	27
2	3	4	2	7	8	6	15	12	8	0	30
3	1	8	5	8	12	8	18	13	5	0	32
4	5	6	8	9	10	4	21	14	5	3	34
5	5	9	11	10	12	1	24	15	1	1	37

Соответствующий алгоритм построения опорного векторного сигнала будет подробно рассмотрен в разделе 4.2. Заметим, что скорость изменения опорного сигнала на всех участках является постоянной и ограниченной:

$$\sqrt{\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^2+\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{t_{i+1}-t_i}\right)^2} \le G_1 = 1{,}5, i=\overline{1{,}14}. \tag{3.64}$$

Для сглаживания опорной траектории построены одноблочный (3.35) и трехблочный следящий дифференциатор (3.55) с блоками второго порядка. С учетом (3.38), (3.51) и заданных ограничений на скорость, ускорение и рывок

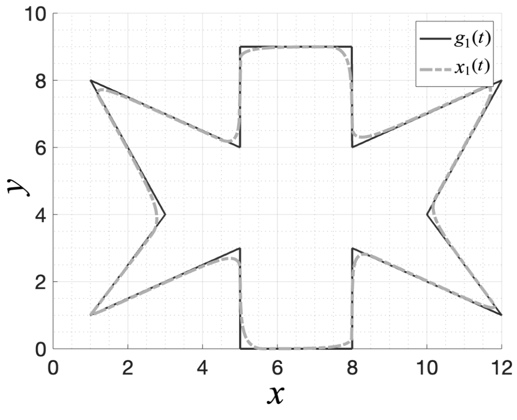
$$Y_1 = 2{,}5; Y_2 = 22; Y_3 = 180, G_1 < 0{,}8Y_1 \tag{3.65}$$

были приняты следующие коэффициенты корректирующих воздействий:

$$p_1 = 2{,}3; l_1 = 2{,}8; \tag{3.66}$$

$$p_1 = 2{,}3, p_2 = 20, p_3 = 180; l_1 = 2{,}8, l_2 = 1{,}4, l_3 = 0{,}2. \tag{3.67}$$

На рисунке 3.5 демонстрируется отслеживание сигнала, заданного в таблице 3.1, одноблочным и трехблочным следящими дифференциаторами.



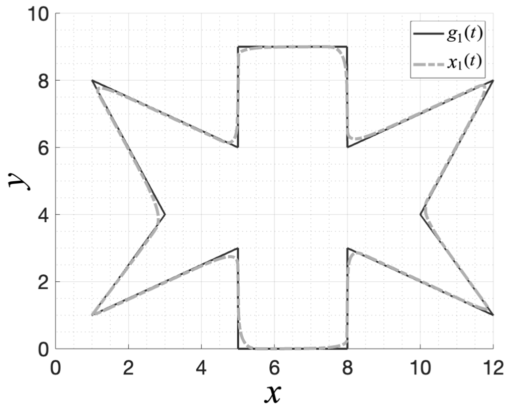


Рисунок 3.5 – Графики опорной траектории $g_1(t)$ (табл. 3.1) и выходов $x_1(t)=(x_{11},x_{12})$ одноблочного (слева), трехблочного (справа) следящих дифференциаторов с коэффициентами (3.66), (3.67) соответственно

Оба дифференциатора примерно одинаково сглаживают угловые точки. Графики производных здесь не приводятся, так как опорные точки изначально были заданы так, чтобы ограничения по скорости (3.13) всюду выполнялись.

Эксперимент 3.3. Рассматривается опорная ломаная такого же вида, что и в эксперименте 3.2, но время ее прохождения сокращено примерно в полтора раза (см. таблицу 3.2). При этом на отрезках, соединяющих точки i = 4, 5, 6, 7 и i = 9, 10, 11, 12, было целенаправленно установлено такое время, что скорость движения (3.64) превысила заданные ограничения (3.65): $G_1 = 3 > Y_1 = 2{,}5.$ Для опорной траектории, заданной в таблице 3.2, проведена серия экспериментов.

Таблица 3.2 – Координаты опорных 3D-точек для эксперимента 3.3

i	x_i	y_i	t_i	i	x_i	y_i	t_i	i	x_i	y_i	t_i
1	1	1	0	6	8	9	8	11	8	3	17
2	3	4	2	7	8	6	9	12	8	0	18
3	1	8	4	8	12	8	11	13	5	0	19
4	5	6	6	9	10	4	13	14	5	3	21
5	5	9	7	10	12	1	15	15	1	1	23

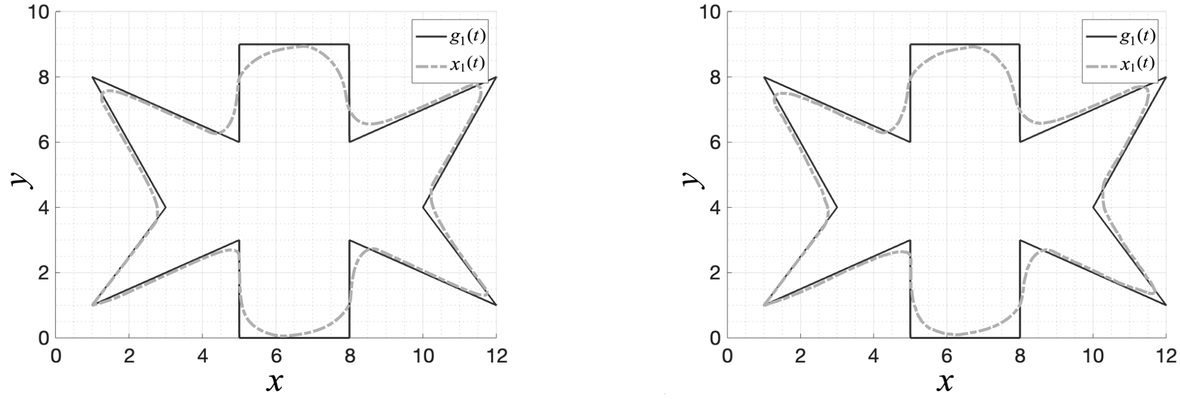
Эксперимент 3.3.1. Одноблочный дифференциатор (3.35), (3.66), $x_1(0) = g_1(0)$, отслеживающий незашумленный сигнал (см. таблицу 3.2).

Эксперимент 3.3.2. Одноблочный дифференциатор (3.35), (3.66), $x_1(0) = g_1(0)$, отслеживающий зашумленный сигнал

$$\overline{g}_1(t) = g_1(t) + \eta(t), \tag{3.68}$$

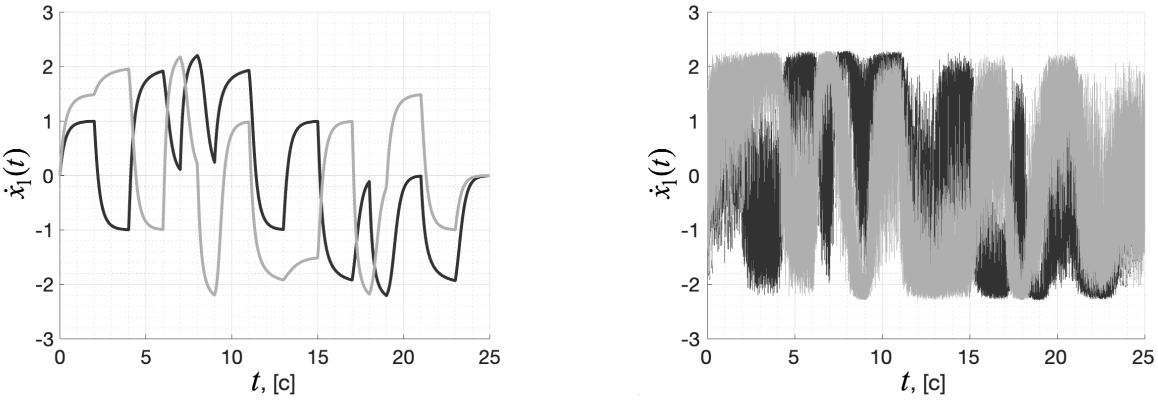
где $g_1(t) \in R^2$ – полезный негладкий сигнал, заданный в таблице 3.2, $\eta(t)$ – векторная случайная величина, ее элементы, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0,1, генерируются с помощью блока Simulink “Random Number”.

На рисунках 3.6–3.7 представлены результаты экспериментов 3.3.1 (слева) и 3.3.2 (справа). На рисунке 3.6 показаны графики выходов $x_1(t) = (x_{11}, x_{12})$ одноблочных следящих дифференциаторов и для сравнения – график опорной незашумленной траектории $g_1(t)$ (табл. 3.2). На рисунке 3.7 – покомпонентные графики корректирующего воздействия $\dot{x}_1(t) = w(t) \in R^2$, восстанавливающие компоненты первой производной $\dot{x}_{11}(t)$, $\dot{x}_{12}(t)$.



Эксперимент 3.3.1 Эксперимент 3.3.2

Рисунок 3.6 – Графики опорной траектории $g_1(t)$ (табл. 3.2) и выходов $x_1 = (x_{11}, x_{12})$ одноблочных дифференциаторов при отслеживании незашумленного $g_1(t)$ (слева) и зашумленного $\bar{g}_1(t)$ (справа) сигналов



Эксперимент 3.3.1 Эксперимент 3.3.2

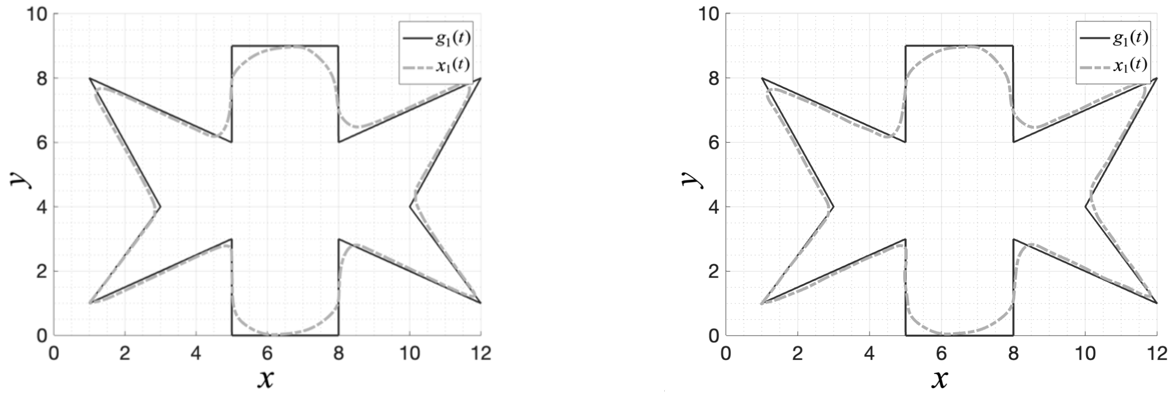
Рисунок 3.7 – Графики входов $\dot{x}_{11}(t)$, $\dot{x}_{12}(t)$ одноблочных дифференциаторов при отслеживании незашумленного $g_1(t)$ (слева) и зашумленного $\bar{g}_1(t)$ (справа) сигналов

Эксперимент 3.3.3. Трехблочный дифференциатор (3.55), (3.67), $x_1(0) = g_1(0)$ $x_{2,3}(0) = \vec{0}$, отслеживающий незашумленный сигнал (см. табл. 3.2).

Эксперимент 3.3.4. Трехблочный дифференциатор (3.55), (3.67), $x_1(0) = g_1(0)$ $x_{2,3}(0) = \vec{0}$, отслеживающий зашумленный сигнал (3.68).

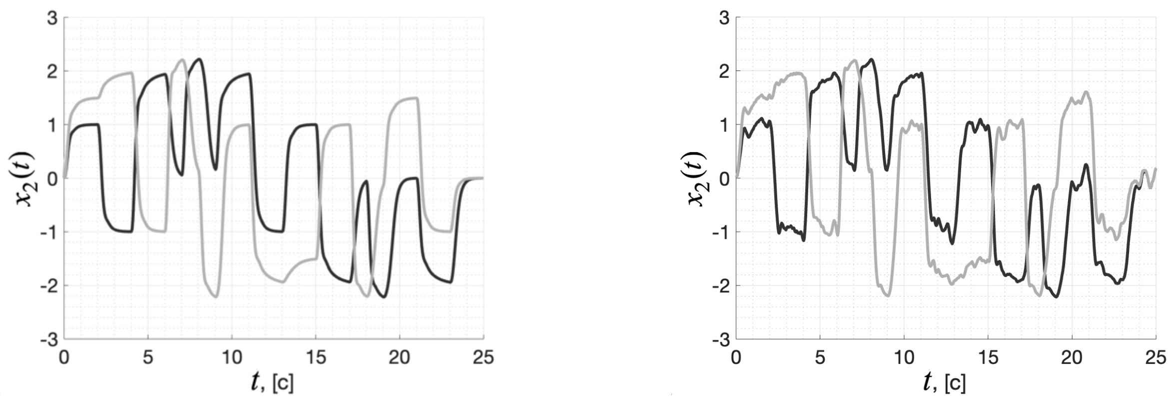
На рис. 3.8–3.10 представлены результаты экспериментов 3.3.3 (слева) и 3.3.4 (справа). На рис. 3.8 показаны графики выходов $x_1(t) = (x_{11}, x_{12})$ трехблочных следящих дифференциаторов и график опорной незашумленной траектории $g_1(t)$ (см. табл. 3.2). На рисунке 3.9 – покомпонентные графики вектора $x_2(t)$ трехблочного следящего дифференциатора, восстанавливающие скорость $x_{21}(t), x_{22}(t)$; на рисунке 3.10 – покомпонентные графики вектора $x_3(t)$ трехблочного дифференциатора, восстанавливающие ускорение $x_{31}(t), x_{32}(t)$.

Как видно из графиков, представленных на рисунках 3.6, 3.8 справа, первая гипотеза (см. подраздел 3.3.4) подтверждается. В выходных сигналах $x_1(t) \approx g_1(t)$ одноблочного (3.35) и трехблочного (3.55) следящих дифференциаторов паразитная составляющая достаточно мала. Сглаживание углов и ограниченность производных 1-го и 2-го порядков сохраняются (см. рисунки 3.6–3.10).



Эксперимент 3.3.3 Эксперимент 3.3.4

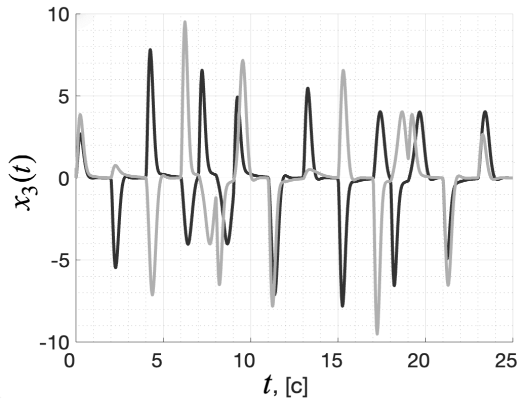
Рисунок 3.8 – Графики опорной траектории $g_1(t)$ (табл. 3.2) и выходов $x_1 = (x_{11}, x_{12})$ трехблочных дифференциаторов (3.55), (3.67) при отслеживании незашумленного $g_1(t)$ (слева) и зашумленного $\bar{g}_1(t)$ (справа) сигналов



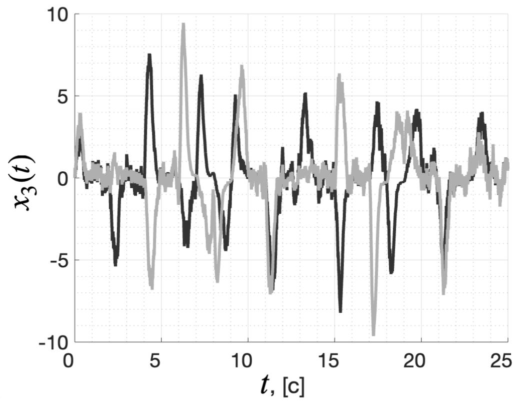
Эксперимент 3.3.3 Эксперимент 3.3.4

Рисунок 3.9 – Графики скоростей $x_{21}(t)$, $x_{22}(t)$ трехблочных дифференциаторов (3.55), (3.67) при отслеживании незашумленного $g_1(t)$ (слева) и зашумленного $\bar{g}_1(t)$ (справа) сигналов

Сигналы $\dot{x}_1(t)$ одноблочного дифференциатора, полученные со входа интегратора (см. рис. 3.7), везде удовлетворяют ограничениям по скорости (3.65), несмотря на то что в опорном сигнале они не выполняются на указанных выше интервалах. Это говорит о достаточности использования редуцированного следящего дифференциатора (3.35) для восстановления первой производной, если опорный сигнал незашумлен (эксперимент 3.3.1), а ресурсы ограничены.



Эксперимент 3.3.3



Эксперимент 3.3.4

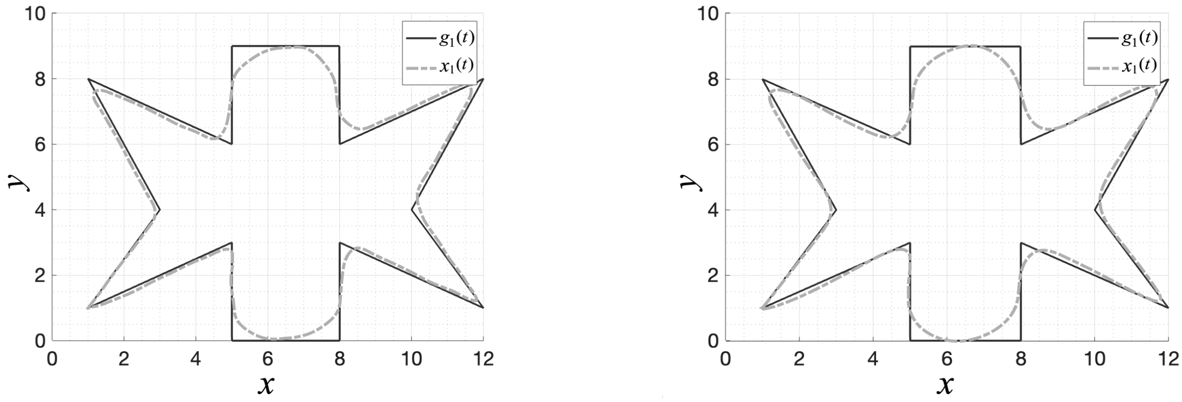
Рисунок 3.10 – Графики ускорений $x_{31}(t)$, $x_{32}(t)$ трехблочных дифференциаторов (3.55), (3.67) при отслеживании незашумленного $g_1(t)$ (слева) и зашумленного $\overline{g}_1(t)$ (справа) сигналов

При обработке (3.68) с помощью (3.35) (эксперимент 3.3.2) сигналы $\dot{x}_1(t)$ (см. рис. 3.7 справа), которые непосредственно зависят от помех, сильно зашумлены, что приводит к невозможности их дальнейшего использования без дополнительной фильтрации. Данный факт, а также графики, представленные на рис. 3.9–3.10 справа, подтверждают третью гипотезу (см. подраздел 3.3.4): увеличение количества блоков дифференциатора, в данном случае с одного до трех, позволило заметно снизить воздействие паразитной помехи и на первую $x_2(t) \approx \dot{g}_1(t)$, и на вторую $x_3(t) \approx \ddot{g}_1(t)$ восстанавливаемые производные.

Однако, воздействие паразитной составляющей на производные опорного сигнала в эксперименте 3.3.4 все же достаточно заметно. Поэтому в следующем *эксперименте 3.3.5*, направленном на улучшение фильтрации векторных сигналов $x_2(t), x_3(t)$, для обработки зашумленного опорного сигнала (3.68) применяется трехблочный следящий дифференциатор (3.55) с такими же амплитудами, но с меньшими по сравнению с (3.67) угловыми коэффициентами:

$$p_1 = 2{,}3, p_2 = 20, p_3 = 180; l_1 = 2, l_2 = 0{,}4, l_3 = 0{,}1. \qquad (3.69)$$

На рисунке 3.11 представлены графики выходов $x_1(t) = (x_{11}, x_{12})$ трехблочных следящих дифференциаторов (3.55), полученных в эксперименте 3.3.4 (слева) при коэффициентах (3.67) (повторяются для наглядности), и в эксперименте 3.3.5 (справа) при коэффициентах (3.69). На рисунке 3.12 для эксперимента 3.3.5 показаны покомпонентные графики скорости $x_{21}(t), x_{22}(t)$ (слева) и ускорения $x_{31}(t), x_{32}(t)$ (справа).



Эксперимент 3.3.4 Эксперимент 3.3.5

Рисунок 3.11 – Графики опорной траектории $g_1(t)$ (табл. 3.2) и выходов $x_1 = (x_{11}, x_{12})$ трехблочных дифференциаторов (3.55) при отслеживании зашумленного сигнала $\bar{g}_1(t)$ с коэффициентами (3.67) (слева) и (3.69) (справа)

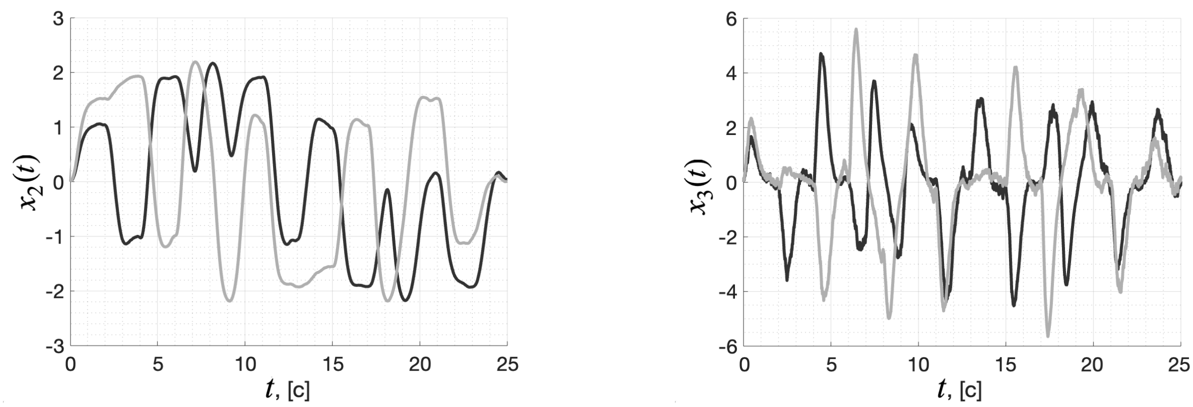


Рисунок 3.12 – Эксперимент 3.3.5: графики скоростей $x_{21}(t)$, $x_{22}(t)$ (слева) и ускорений $x_{31}(t)$, $x_{32}(t)$ (справа) трехблочного дифференциатора (3.55), (3.69) при отслеживании зашумленного сигнала $\bar{g}_1(t)$

В таблице 3.3 приведены показатели качества сигналов в экспериментах 3.3.1–3.3.5. В экспериментах с зашумленными входными сигналами на указанных интервалах рассчитывались исправленные выборочные среднеквадратические отклонения (Std), а также для всех экспериментов рассчитывались выборочные средние значения (Mean) и максимальные значения модуля (Max) ошибок слежения $e_1(t) = x_1(t) - g_1(t)$.

Таблица 3.3 – Показатели ошибок слежения

Показатель	Временной интервал	Номер эксперимента				
		3.3.1	3.3.2	3.3.3	3.3.4	3.3.5
Выборочное среднее значение (Mean)	$t \in (6; 9)$	0,9504	1,0163	1.0442	1,1119	1,5669
	$t \in (9; 13)$	0,7041	0,7916	0.7490	0,8036	1,2210
	$t \in (13; 17)$	0,6439	0,7293	0.6719	0,7277	1,1139
Исправленное выборочное СКО (Std)	$t \in (6; 9)$	–	0,1791	–	0,1799	0,2453
	$t \in (9; 13)$	–	0,1894	–	0,1678	0,2539
	$t \in (13; 17)$	–	0,1723	–	0,1547	0,2562
Максимальное значение модуля (Max)	$t \in (6; 9)$	1,2883	1,3462	1,3653	1,4111	1,9507
	$t \in (9; 13)$	1,2610	1,3280	1,3533	1,4157	1,9484
	$t \in (13; 17)$	0,8599	0,9778	0,8797	0,8908	1,4056

В таблице 3.4 на тех же временных интервалов приведены выборочные средние значения (Mean) и исправленные выборочные среднеквадратические отклонения (Std) для первой компоненты скорости $\dot{x}_{11}(t)$ в эксперименте 3.3.2, а также для первых компонент скорости $x_{21}(t)$ и ускорения $x_{31}(t)$ в экспериментах 3.3.4–3.3.5 с зашумленными входными сигналами. Приведенные данные подтверждают вторую гипотезу (см. подраздел 3.3.4). Из сравнения результатов экспериментов 3.3.4 и 3.3.5 следует, что за счет уменьшения l_1 в эксперименте 3.3.5 (3.69) (по сравнению с (3.67) в эксперименте 3.3.4) зашумленность сигналов, восстанавливающих скорости и ускорения (см. таблицу 3.4), уменьшилась, но ошибки слежения увеличились (см. таблицу 3.3).

Таблица 3.4 – Показатели оценочных сигналов скоростей и ускорений

Показатель	Временной интервал	Номер эксперимента				
		$\dot{x}_{11}(t)$	$x_{21}(t)$		$x_{31}(t)$	
		3.3.2	3.3.4	3.3.5	3.3.4	3.3.5
Выборочное среднее значение (Mean)	$t \in (6;9)$	1,4063	1,2742	1,4051	1,9828	1,6909
	$t \in (9;13)$	1,3492	1,2739	1,2387	1,5124	1,2413
	$t \in (13;17)$	1,2595	1,1894	1,1241	1,5081	1,3206
Исправленное выборочное СКО (Std)	$t \in (6;9)$	0,8003	0,7608	0,6256	1,8526	1,0090
	$t \in (9;13)$	0,6474	0,5327	0,5283	1,7764	1,2692
	$t \in (13;17)$	0,6485	0,5569	0,5494	2,0284	1,3779

В данных экспериментах наибольшее воздействие на ошибку слежения и качество фильтрации одновременно оказало снижение коэффициента l_2. В тоже время, уменьшение коэффициента l_1 в меньшей степени повлияло на качество фильтрации (по сравнению с уменьшением коэффициента l_2, чье воздействие более эффективно), но его снижение было необходимо для выполнения ограничений (3.51). В свою очередь, изменение коэффициента l_3 (по сравнению с l_2) практически не влияет на изменение ошибки слежения. Однако уменьшение l_3 улучшает фильтрующие свойства трехблочного следящего дифференциатора.

Таким образом, результаты моделирования подтверждают все три гипотезы, выдвинутые в подразделе 3.3.4. Действительно, как видно из графиков (см. рисунки 3.6, 3.8, 3.11), во всех экспериментах обеспечивается инвариантность выходных переменных следящих дифференциаторов по отношению к шуму во входных сигналах (без использования дополнительных фильтров) с сохранением эффекта сглаживания, а также выполнения заданных ограничений на восстанавливаемые скорости и ускорения. Также за счет увеличения количества блоков удалось обеспечить инвариантность по отношению к шуму в задающих воздействиях остальных переменных следящего дифференциатора (в данном случае до второй производной включительно).

3.5. Выводы по главе 3

В данной главе формализованы условия ограниченности решения элементарной системы с сигмовидным управлением при действии незатухающего возмущения. Эти результаты использованы в декомпозиционной процедуре синтеза следящего дифференциатора произвольного динамического порядка с сигмовидными локальными связями, который при отслеживании негладкого сигнала генерирует плавные траектории и их производные любого требуемого порядка. Формализованы условия, при которых переменные дифференциатора не превысят заданные ограничения на скорость и старшие производные выходных переменных объекта управления.

Обратим внимание, что в отличие от известных следящих дифференциаторов (см. раздел 1.3), где корректирующее воздействие является аддитивным набором переменных состояния, в разработанном методе оно представляет собой сложную функцию вложенных сигмоид. Эта форма обусловлена применяемым блочным принципом управления, который позволил разделить задачу синтеза следящей системы на последовательно решаемые элементарные подзадачи. Приведена соответствующая итерационная процедура настройки коэффициентов усиления следящего дифференциатора.

Продемонстрированы универсальные свойства следящего дифференциатора, перечислены факторы, влияющие на выбор его динамического порядка. Конкретизированы процедуры настройки одноблочного и трехблочного следящих дифференциаторов. Показано, что одноблочный следящий дифференциатор минимально возможного динамического порядка порождает эталонные сглаженные задания, но эти сигналы удовлетворяют физическим ограничениям на скорость и ускорение выходных переменных объекта управления.

Представлены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов и проведен их анализ. Показаны результаты сглаживания опорной траектории с учетом разных наборов проектных ограничений. Выдвинутые гипотезы о фильтрующих свойствах следящих дифференциаторов и способах их улучшения нашли подтверждение в представленных экспериментах.

Глава 4 Применение динамических дифференциаторов в системах траекторного управления беспилотными колесными платформами

В данной главе разработанные методы динамического дифференцирования и сглаживания детерминированных сигналов применяются в задачах траекторного управления беспилотными колесными платформами. В разделе 4.1 на примере одноканальной кинематической модели рассматривается задача путевой стабилизации. Приводятся алгоритмы управления, для формирования которых не требуется/требуется знание производных задающих воздействий. В последнем случае для их восстановления демонстрируется использование дифференциатора–наблюдателя, разработанного в главе 2. В разделе 4.2 представлен комплекс алгоритмов для планирования движения одиночного робота на полигоне с использованием следящих дифференциаторов, разработанных в главе 3. В разделе 4.3 на примере двухканальной модели колесной платформы демонстрируется синтез следящей системы с применением следящих дифференциаторов для сглаживания и дифференцирования опорной траектории. Все алгоритмы сопровождаются результатами численного моделирования.

Результаты главы 4 опубликованы в работах [20, 25, 108, 110, 112–115].

4.1 Синтез нелинейного управления в задаче путевой стабилизации

4.1.1 Описание проблемы

В данном разделе в качестве объекта управления рассматривается беспилотная трехколесная платформа, которая движется без проскальзывания, два задних колеса являются ведущими, переднее колесо является поворотным. Рассматриваемая математическая модель включает 4 дифференциальных уравнения без учета динамики исполнительных приводов, скалярным управлением выступает угловая скорость переднего колеса. На систему по одному каналу с управлением воздействует внешнее возмущение, которое полагается неизвестной ограниченной функцией времени. Ставится задача синтеза закона управления в форме обратной связи, обеспечивающего вывод базовой точки платформы, которая расположена в середине задней оси, на целевую траекторию и ее движение в малом пограничном слое вдоль заданной кривой.

Даже такое простое транспортное средство является достаточно сложным объектом автоматического управления [7, 30, 52, 80, 82, 139]. При решении задачи следования вдоль заданного пути один из подходов заключается в том, что кинематическая модель объекта управления переписывается относительно путевых координат с их дальнейшей стабилизацией. Система относительно путевых координат имеет высокую степень нелинейности и нестационарности. Для того чтобы свести синтез к стандартным процедурам, в ряде работ [17, 49, 50] предложен переход к каноническим переменным. При этом дифференцирование по времени заменяется дифференцированием по виртуальной независимой переменной, что позволяет осуществить точную линеаризацию и получить замкнутую систему с матрицей Фробениуса. Выбором коэффициентов ее характеристического полинома обеспечивается асимптотическая устойчивость линейного и углового отклонения от заданной кривой, что и решает поставленную задачу. Следует отметить, что синтезированные в рамках этого подхода законы управления, с одной стороны, приводят к простому и понятному виду замкнутой виртуальной системы. Но, с другой стороны, сами законы очень громоздкие, поскольку основаны на компенсации всех нелинейных составляющих, полученных в результате дифференцирования при переходе к каноническим переменным. Данные функции содержат тригонометрические члены, значения которых необходимо вычислять в реальном времени на бортовом компьютере, где не всегда достаточно ресурсов для выполнения расчетов высокой точности. Кроме того, в законах, основанных на компенсации нелинейных составляющих математической модели, требуется также высокое качество измерений переменных состояния объекта или путевых переменных, что также не всегда выполнимо на практике. Еще один фактор, который трудно обеспечить при линеаризации обратной связью, связан учетом ограничений на переменные состояния. В работе [46] рассматривался вопрос ограничения управления с помощью линейной функции с насыщением, которая не является всюду гладкой и имеет особые точки, в которых ее производная терпит разрыв. Учитывая, что в качестве управления в данной механической системе рассматривается скорость переднего колеса, то для ее ограничения предпочтительнее использовать гладкую функцию с насыщением.

Представленное в данном разделе решение задачи путевой стабилизации опирается на результаты работ [17, 49, 50] в части перехода к путевым координатам. Но полное каноническое представление и линеаризация обратной связью не используются. В рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза смешанных линейных и нелинейных сигмовидных обратных связей. В главе 3 при синтезе следящего дифференциатора показано, что применение всюду ограниченных, гладких обратных связей в виде сигма-функций позволяет учитывать на стадии синтеза имеющиеся ограничения не только на управление, но и на переменные состояния, которые используются в качестве фиктивных управлений. Кроме того, в замкнутой системе обеспечивается инвариантность регулируемых переменных по отношению к неизвестным ограниченным возмущения, действующим по одним каналам с фиктивными и истинными сигмоидальными управлениями. Таким образом, данный подход привносит в замкнутую систему преимущества, характерные для систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме [56, 58]. Заметим, что разрывные управления правомерно использовать только при формировании истинного управления в электрических исполнительных устройствах. Замена функции знака ее гладким аналогом в виде сигма-функции расширяет область применения таких принципов управления. В данном разделе сигма-функции применяются в процедуре синтеза закона управления собственно объектом управления. Пошаговое формирование сигмовидных локальных связей и сигмовидного закона управления нацелено на то, чтобы подавлять, а не компенсировать имеющиеся нелинейности и внешнее возмущение, что снижает вычислительную сложность закона управления по сравнению с методами линеаризации обратной связью

[49, 50]. Настройка параметров регулятора выполняется на основе неравенств, поэтому подхода допускается наличие погрешностей в измерениях переменных состояния и/или путевых координат.

Раздел 4.1 имеет следующую структуру. В подразделе 4.1.2 дано представление математической модели объекта управления в путевых координатах [17, 49, 50]. В подразделе 4.1.3 на его основе разработана блочная процедура синтеза линейных и сигмовидных обратных связей с учетом ограничений на переменные состояния и управление, обеспечивающая инвариантность по отношению к внешнему возмущению и стабилизацию линейного и углового отклонения от заданной кривой с некоторой точностью. В подразделе 4.1.4 приведены результаты моделирования. В подразделе 4.1.5 для кинематической модели колесной платформы третьего порядка приведен типовой алгоритм управления линеаризации обратной связью в задаче путевой стабилизации. В предположении, что задающие сигналы известны и допустимы, но их аналитическое описание отсутствует, в контур обратной связи вводится динамический дифференциатор–наблюдатель задающих сигналов, разработанный в главе 2. Полученные оценки производных используются для вычисления кривизны целевой траектории, необходимой для синтеза управляющего воздействия. Приведены результаты численного моделирования.

4.1.2 Описание модели объекта управления. Постановка задачи

Математическая модель движения базовой точки трехколесной платформы без учета динамики исполнительных приводов имеет следующий вид в неподвижной системе декартовых координат xOy [49]:

$$\begin{aligned} &\dot{X}_C = v\cos\theta,\ \dot{Y}_C = v\sin\theta,\ \dot{\theta} = v\,\mathrm{tg}\,\phi / l, \\ &\dot{\phi} = \eta(t) + u, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $X_c(t), Y_c(t)$ – координаты базовой точки C, которая расположена в середине задней оси платформы (см. рисунок 4.1); θ – угол между осью Ox и центральной линией платформы, которая совпадает с направлением вектора скорости (ориентация платформы относительно неподвижной системы координат); ϕ – угол поворота переднего колеса; $l = \text{const} > 0$ – расстояние между передним и задними колесами; u – скалярное непрерывное управление, в качестве которого выступает угловая скорость переднего колеса, которая, в свою очередь, регулируется рулевым приводом (динамика рулевого привода в данной модели не учитывается); $v(t) > 0$ – линейная скорость базовой точки платформы, которая регулируется по независимому контуру. В данном разделе задача управления линейной скоростью не ставится и не решается, она полагается положительной постоянной и известной величиной. Ограничения на постоянство скорости снимается при рассмотрении полной модели с учетом динамики всех исполнительных приводов [30].

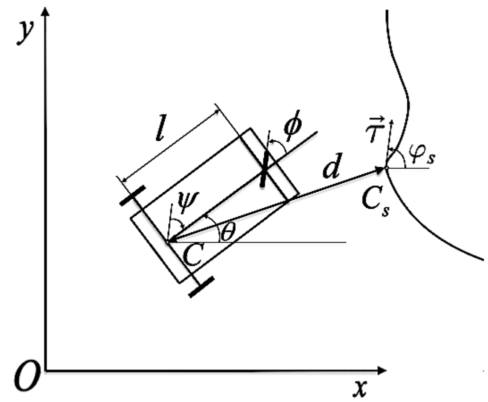


Рисунок 4.1 – Положение базовой точки колесной платформы относительно заданной траектории движения

Первые три уравнения системы (4.1) описывают кинематику. В четвертом уравнении $\eta(t)$ – неизвестная функция времени, которая трактуется как внешнее неконтролируемое возмущение, ограниченное известной константой:

$$|\eta(t)| \le \bar{\eta},\ t \ge 0,\ \bar{\eta} = \text{const} > 0. \qquad (4.2)$$

Для системы (4.1)–(4.2) рассматривается задача путевой стабилизации, а именно, задача синтеза закона управления в форме обратной связи, обеспечивающего вывод базовой точки на целевую (допустимую) траекторию и ее движение вдоль заданной кривой. Отклонение объекта от кривой обычно понимается как отклонение базовой точки от ближайшей к нему точки кривой, которую называют целевой точкой C_s (см. рисунок 4.1). Для решения задачи стабилизации линейного и углового отклонения от заданной кривой переходят к записи системы (4.1) относительно путевых координат [17, 49, 50]:

d – расстояние от базовой точки C до заданной траектории движения (расстояние со знаком плюс, если базовая точка находится слева от кривой при движении в положительном направлении, и со знаком минус, если справа);

ψ – угол между центральной линией платформы и касательным вектором к заданной кривой в целевой точке, ближайшей к базовой точке платформы;

ϕ – угол поворота переднего колеса;

s – значение натурального параметра (длина дуги) для точки заданной кривой, ближайшей к роботу, которую называют целевой точкой C_s.

В путевых координатах система уравнений движения колесного робота принимает следующий вид [49]:

$$\begin{aligned}&\dot{d} = v\sin\psi,\ \dot{\psi} = \frac{v\mathrm{tg}\phi}{l} - \frac{v\kappa\cos\psi}{1-\kappa d},\ \dot{\phi} = \eta + u,\\ &\dot{s} = \frac{v\cos\psi}{1-\kappa d},\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\kappa := \kappa(s)$ – кривизна заданной траектории в целевой точке. При выполнении условий $\kappa d \neq 1$, $v(t) > 0$ переход от системы (4.1) к системе (4.3) является диффеоморфным [17], что позволяет использовать систему (4.3) в качестве основы для синтеза закона управления в задаче путевой стабилизации. Предполагается, что все внутренние и внешние переменные, необходимые для синтеза обратной связи, либо измеряются, либо могут быть вычислены на основе имеющихся измерений. Проблема оценивания внешнего возмущения $\eta(t)$ и, следовательно, его компенсации, не ставится. На путевые переменные, а также на управление системы (4.1) накладываются следующие ограничения

$$|\psi(t)| < \pi/2,\ |\mathrm{tg}\psi| \leq \overline{\psi},\ |\phi(t)| < \pi/2,\ |\mathrm{tg}\phi| \leq \overline{\phi},\ |u(t)| \leq \overline{u},\ t \geq 0, \tag{4.4}$$

которые надо выполнить в процессе управления. Начальные условия в системе (4.3) заведомо удовлетворяют указанным ограничениям и

$$\bar{\psi} < \bar{\phi}, \bar{\eta} < \bar{u}. \tag{4.5}$$

Допустимость целевой траектории, заданной параметрически $X(s)$, $Y(s)$, означает, что указанные функции дважды дифференцируемы и кривизна

$$\kappa(s) = \frac{X'(s)Y''(s) - Y'(s)X''(s)}{[(X'(s))^2 + (Y'(s))^2]^{3/2}} \tag{4.6}$$

является кусочно-непрерывной и ограниченной: $|\kappa(s)| \le \bar{\phi} / l,\ \kappa d \ne 1$.

Правые части первых трех уравнений системы (4.3) не зависят явно от натурального параметра заданной траектории s. Эта переменная не регулируется, поэтому далее рассматриваются только первые три уравнения системы (4.3). В области $|\psi(t)| < \pi / 2$, $|\phi(t)| < \pi / 2$ и при $v = \text{const} > 0$, $\kappa d \ne 1$ эта подсистема является управляемой и имеет вид нелинейной блочной формы управляемости [42]. Возмущение $\eta(t)$ действует по одному каналу с управлением и с помощью непрерывного управления можно подавить с некоторой точностью его воздействие на объект управления. Ставится задача синтеза закона управления в форме обратной связи, обеспечивающего стабилизацию линейного $d(t)$ и углового $\psi(t)$ отклонений от заданной траектории с некоторой точностью:

$$|d(t)| \le \Delta_1, t \ge t_1 > t_2,\ |\psi(t)| \le \Delta_2,\ t \ge t_2 > 0. \tag{4.7}$$

Выполнение (4.7) означает вывод базовой точки C на целевую траекторию и ее движение в малом пограничном слое вдоль заданной кривой при $t \ge t_1$.

В следующем подразделе в рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза нелинейной обратной связи с учетом ограничений на переменные состояния и управления (4.4), обеспечивающая подавление внешнего возмущения и решение поставленной задачи (4.7).

4.1.3 Декомпозиционная процедура синтеза нелинейной обратной связи

Блочный принцип управления для систем, представленных в блочной форме управляемости, заключается в последовательном, сверху вниз, формировании локальных связей, которые обеспечиваются в итоге выбором истинного управления. При этом в каждом текущем блоке переменные следующего блока трактуются как фиктивные управления, которые стандартно выбираются в виде линейных стабилизирующих функций [42]. Но использование больших коэффициентов усиления, необходимых для подавления внешних возмущений, приведет к всплескам регулируемых переменных вначале переходных процессах, что недопустимо в практических приложениях. Другой способ обеспечения инвариантности – организация скользящего режима с помощью разрывных управлений с ограниченными амплитудами, обеспечивают ограниченность обратной связи. Но разрывные управления из-за физических ограничений не могут быть использованы для формирования локальных обратных связей, а также в данном случае для формирования истинного управления, в качестве которого выступает угловая скорость переднего колеса. Для учета ограничений на переменные состояния и управления, а также для подавления внешнего возмущения в данной работе используются ограниченные нелинейные сигмовидные обратные связи (см. раздел 3.2). Ниже на основе первых трех уравнений системы (4.3) представлена пошаговая процедура блочного синтеза нелинейного закона управления с формированием как линейных, так и сигмовидных локальных связей. В качестве фиктивных управлений в первом и во втором уравнениях принимаются угловые переменные ψ и ϕ соответственно.

Процедура блочного синтеза

Шаг 1. В первом уравнении системы (4.3) внешнее возмущение отсутствует. В качестве фиктивного управления рассматривается ограниченная функция $v\sin\psi$, поэтому можно сформировать линейную локальную связь

$$e_1 := d,\ e_2 = v\sin\psi + k_1 e_1, \tag{4.8}$$

где e_2 – невязка между фактическим и желаемым фиктивным управлением. От выбора коэффициента усиления $k_1 = \text{const} > 0$ зависит скорость и точность стабилизации первой регулируемой переменной $e_1 := d$, для которой в силу (4.3) уравнение, замкнутое локальной связью (4.8), принимает вид

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2. \tag{4.9}$$

Шаг 2. В силу (4.3) составим уравнение относительно невязки (4.8):

$$\dot{e}_2 = \frac{v^2 \cos\psi}{l}\left(\operatorname{tg}\phi - \frac{l\kappa\cos\psi}{1-\kappa d} + \frac{lk_1 \operatorname{tg}\psi}{v}\right), \tag{4.10}$$

где множитель $v^2 \cos\psi / l > 0$, если $|\psi(t)| < \pi/2$, $\operatorname{tg}\phi$ – фиктивное управление. Для упрощения записи итогового закона управления нелинейные составляющие не компенсируются, для ограничения фиктивного управления вводится сигмовидная стабилизирующая локальная связь

$$e_3 = \operatorname{tg}\phi + m_2\sigma(k_2 e_2), \tag{4.11}$$

где e_3 – невязка между фактическим и желаемым фиктивным управлением. Выбор $m_2 = \mathrm{const} > 0$ обеспечивает желаемую скорость, а выбор $k_2 = \mathrm{const} > 0$ – желаемую точность стабилизации e_2 и, следовательно, второй регулируемой переменной $\psi(t)$ (4.8). Дифференциальное уравнение (4.10), замкнутое локальной связью (4.11), принимает вид

$$\dot{e}_2 = \frac{v^2 \cos\psi}{l}\left(-m_2\sigma(k_2 e_2) - \frac{l\kappa\cos\psi}{1-\kappa d} + \frac{lk_1 \operatorname{tg}\psi}{v} + e_3\right). \tag{4.12}$$

Шаг 3. В силу (4.3) составим уравнение относительно невязки (4.11):

$$\dot{e}_3 = \frac{1}{\cos^2\phi}(\eta + 0{,}5\cos^2\phi \cdot m_2 k_2 (1-\sigma^2(k_2 e_2))\dot{e}_2 + u) \tag{4.13}$$

и сформируем чисто сигмовидный закон управления

$$u = -m_3\sigma(k_3 e_3), \tag{4.14}$$

где выбор $m_3 = \mathrm{const} > 0$ обеспечивает желаемую скорость, а выбор $k_3 = \mathrm{const} > 0$ – желаемую точность стабилизации невязки e_3 (4.11).

В итоге имеем замкнутую систему относительно невязок:

$$\begin{aligned}
&\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2, \\
&\dot{e}_2 = \frac{v^2 \cos\psi}{l}\left(-m_2\sigma(k_2 e_2) - \frac{l\kappa\cos\psi}{1-\kappa d} + \frac{lk_1 \operatorname{tg}\psi}{v} + e_3\right), \\
&\dot{e}_3 = \frac{1}{\cos^2\phi}(-m_3\sigma(k_3 e_3) + \eta + 0{,}5\cos^2\phi \cdot m_2 k_2 (1-\sigma^2(k_2 e_2))\dot{e}_2).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Вид системы (4.15) более громоздкий по сравнению с линеаризованной с помощью обратной связи канонической системы [49, 50]. Но, с другой стороны, здесь получен менее громоздкий закон управления (4.14), который относительно путевых координат имеет следующую запись

$$u = -m_3\sigma[k_3(\mathrm{tg}\phi + m_2\sigma(k_2(v\sin\psi + k_1 d)))]. \qquad (4.16)$$

Еще одно преимущество разработанного метода заключается в возможности на стадии синтеза учитывать имеющиеся ограничения на переменные состояния (4.4), а также обеспечить подавление неконтролируемого возмущения с помощью ограниченного по модулю управления. Продемонстрируем этот факт с помощью нижеследующей упрощенной системы неравенств для выбора параметров закона управления (4.16) (без учета начальных значений путевых переменных и времени затухающих собственных движений невязок замкнутой системы (4.15)).

Согласно идеологии блочного синтеза, выбором коэффициентов регулятора (4.16) нужно обеспечить следующее поведение переменных замкнутой системы (4.15) во времени:

$$\begin{gathered} |e_3(t)| \le c/k_3 \le \Delta_3 \ (t \ge t_3 > 0) \Rightarrow |e_2(t)| \le c/k_2 \le \overline{\Delta}_2 \ (t \ge t_2 > t_3) \Rightarrow \\ \Rightarrow |e_1(t)| \le \Delta_1 \ (t \ge t_1 > t_2), \end{gathered} \qquad (4.17)$$

где $\overline{\Delta}_2 \ge v\Delta_2$, $c \approx 2{,}2$, $\sigma(2{,}2) \approx 0{,}8; 1/\sigma(2{,}2) \approx 1{,}25$ (см. раздел 3.1). Проблема обеспечения заданного времени сходимости здесь не рассматривается. Выполнение (4.17) в силу (4.8), (4.11) и с учетом $\sin\psi \underset{\psi\to 0}{\sim} \psi$, $\mathrm{tg}\phi \underset{\phi\to 0}{\sim} \phi$ обеспечит выполнение поставленной задачи (4.7).

Процедура выбора коэффициентов основана на достаточных условиях второго метода Ляпунова с использованием функции

$$\overline{V} = V_1 + V_2 + V_3, \; V_i = \tfrac{1}{2}e_i^2, i = 1,2,3. \qquad (4.18)$$

С учетом (4.2), (4.4)–(4.5), а также $|\dot{e}_2(t)| \le 2v^2 m_2/l, t \ge 0$, вне указанных окрестностей (4.17) и в указанные интервалы времени для производных слагаемых функции Ляпунова (4.18), составленных в силу (4.15), имеем:

$$\dot{V}_1 = e_1\dot{e}_1 = e_1(-k_1 e_1 + e_2) \le |e_1|(\Delta_2 - k_1|e_1|) < 0, \, t \ge t_2 > t_3,$$

$$\dot{V}_2 = e_2\dot{e}_2 \le v^2|e_2|\left(\frac{l\kappa}{|1-\kappa d|} + \frac{lk_1\overline{\psi}}{v} + \Delta_3 - 0{,}8m_2\right)/l < 0,\, t \ge t_3, \qquad (4.19)$$
$$\dot{V}_3 = e_3\dot{e}_3 \le |e_3|(-0{,}8m_3 + \overline{\eta} + m_2^2k_2v^2/l)/\cos^2\phi < 0, t \ge 0.$$

Из (3.9) и оценок (4.19) следует, что неравенства (4.17) будут выполнены при следующем выборе параметров регулятора:

$$1{,}25\left(\frac{lk}{|1-\kappa d|} + \frac{lk_1\overline{\psi}}{v} + \Delta_3\right) < m_2 \le \overline{\phi}, \qquad (4.20)$$
$$1{,}25(\overline{\eta} + m_2^2k_2v^2/l) < m_3 \le \overline{u};$$

$$k_3 \ge 2{,}2/\Delta_3,\, k_2 \ge 2{,}2/\Delta_2,\, k_1 \ge \overline{\Delta}_2/\Delta_1. \qquad (4.21)$$

Применение блочного подходаа позволило дополнительно к (4.5) в явном виде получить перекрестные зависимости между ограничениями на переменные состояния и управления, которые надо принимать во внимание на этапе проектирования системы управления и планирования целевых траекторий:

$$\frac{l\kappa}{|1-\kappa d|} + \frac{l\overline{\psi}}{v} < \overline{\phi},\, \overline{\eta} + \overline{\phi}^2v^2/l < \overline{u}. \qquad (4.22)$$

Если неравенства (4.22) изначально не выполняются, то постановку задачи путевой стабилизации с требованием выполнить ограничения (4.4) следует признать некорректной. Если неравенства (4.22) априори выполняются, то тогда из разницы между верхними и нижними границами неравенств (4.20) последовательно определяются допустимые значения параметров регулятора (4.16) (аналогично процедуре настройки трехблочного следящего дифференциатора, представленной в подразделе 3.3.3). При выбранных допустимых коэффициента усиления $k_i, i = 1, 2, 3$ из обратных соотношений (4.21) следует предельно достижимая точность стабилизации регулируемых переменных (4.7), которую можно обеспечить в замкнутой системе при наличии ограничений на переменные состояния и управления в рамках используемого метода синтеза.

4.1.4 Результаты моделирования

Моделирование разработанных алгоритмов проводилось в среде

MATLAB-Simulink с использованием метода интегрирования Эйлера с постоянным шагом 0,001. Для реализации закона управления (4.16) использовались текущие значения $\phi(t), \psi(t)$, которые вычислялись на основе измерений $X_C(t), Y_C(t), \theta(t)$ [17]. Был также составлен и программно реализован алгоритм для минимизации функций методом золотого сечения для вычисления линейного отклонения $d(t)$ и параметра $s(t)$ заданной кривой, в качестве которой была принята окружность с радиусом 3 м:

$$X_s(s) = 3\sin(s/3),\ Y_s(s) = 3\cos(s/3); \qquad (4.23)$$

внешнее возмущение моделировалось гладкой функцией времени $\eta = 0{,}2\sin(t)$; параметры регулятора (4.16) были приняты на основе неравенств (4.20)–(4.21):

$$m_2 = 27,\ m_3 = 100,\ k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 1. \qquad (4.24)$$

На рисунке 4.2 показан процесс сходимости базовой точки платформы $C(X_C(t), Y_C(t))$ к заданной кривой (4.23) с целевой точкой $C_s(X_s(t), Y_s(t))$. Точность стабилизации при выбранных параметрах (4.24) в условиях действия внешнего неконтролируемого возмущения составила примерно 2,5 см, что является допустимым для габаритных колесных роботов.

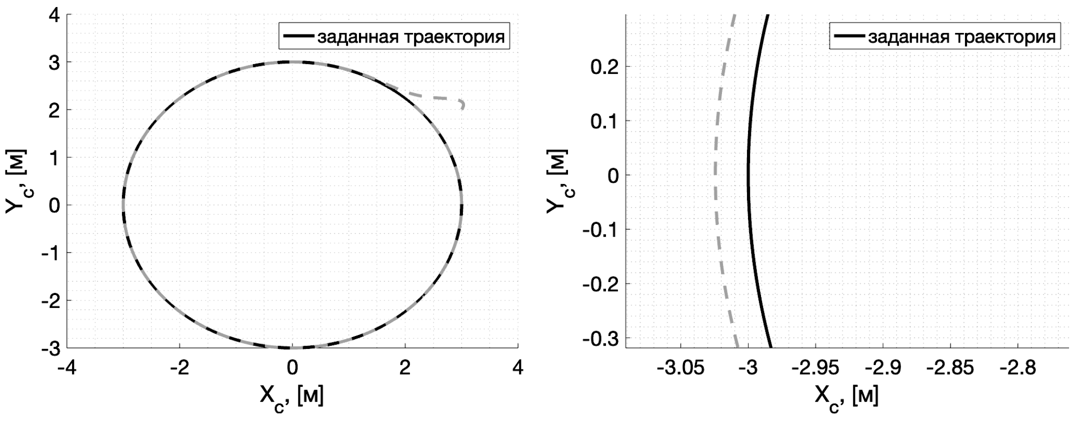


Рисунок 4.2 – Процесс сходимости базовой точки трехколесной платформы к заданной траектории (4.23)

4.1.5 Применение дифференциаторов–наблюдателей производных задающих воздействий в задаче путевой стабилизации

Для реализации закона управления (4.16), который подавляет неопределенности, но не компенсирует собственную динамику виртуальной системы

(4.15), не требуется информация о производных задающих воздействий. Но при решении задачи путевой стабилизации методом линеаризации обратной связью нужно знать координаты целевой точки и их производной 1-го и 2-го порядков, чтобы вычислять в реальном времени мгновенную кривизну пути (4.6). Приведем пример такого закона управления применительно к упрощенной модели, которая включает только первые три кинематических уравнения системы (4.1):

$$\dot{X}_C = v\cos\theta,\ \dot{Y}_C = v\sin\theta,\ \dot{\theta} = vu, \tag{4.25}$$

где в качестве скалярного управления u рассматривается мгновенное значение кривизны линии движения базовой точки платформы, связанное однозначно с углом поворота переднего колеса: $u = v\,\mathrm{tg}\phi / l.$ Для системы (4.25) ставится задача путевой стабилизации, для решения которой выполняется переход к системе, записанной относительно путевых координат (4.3):

$$\dot{d} = v\sin\psi,\ \dot{\psi} = vu - \frac{v\kappa\cos\psi}{1-\kappa d},\ \dot{s} = \frac{v\cos\psi}{1-\kappa d}, \tag{4.26}$$

где $\kappa(s)$ – кривизна заданной допустимой кривой в целевой точке, $\kappa d \neq 1$.

В работе [49] для формализации синтеза линеаризующей обратной связи в неголономной системе с переменной скоростью (4.26) пространство путевых координат расширяется за счет ввода независимой переменной $\zeta(t)$ и ее динамической модели: $\zeta(t) = v\cos\psi > 0.$ В качестве регулируемых переменных принимаются линейное и угловое отклонения от заданной кривой:

$$x_1 = d, x_2 = \mathrm{tg}\psi. \tag{4.27}$$

Показано, что с помощью замены дифференцирования по времени дифференцированием по независимой переменной $\zeta(t)$ система (4.26) приводится относительно отклонений (4.27) к квазиканоническому виду

$$x_1' = x_2,\ x_2' = -\frac{(1+x_2^2)\kappa}{1-\kappa x_1} + (1+x_2^2)^{3/2}u, \tag{4.28}$$

который явно не зависит от $s : s' = 1/(1-\kappa x_1)$.

Для системы (4.28) формируется комбинированное управление с линейной стабилизирующей составляющей $\mu(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2,\ c_{1,2} > 0$:

$$u = -\frac{\mu(x)}{(1+x_2^2)^{3/2}} + \frac{\kappa}{\sqrt{1+x_2^2}\,(1-\kappa x_1)} = \mu(d, \operatorname{tg}\psi)\cos^3\psi + \frac{\kappa\cos\psi}{1-\kappa d}. \qquad (4.29)$$

Это обеспечивает линеаризацию и устойчивость виртуальной замкнутой системы (4.28)–(4.29) $x_1' = x_2, x_2' = -c_1 x_1 - c_2 x_2$ и, следовательно, решение задачи путевой стабилизации, в которой при отсутствии внешних возмущений будет обеспечена асимптотическая стабилизация отклонений (4.27).

Для реализации закона управления (4.29) потребуется вычислять в реальном времени отклонения (4.27), а также кривизну заданной траектории в целевой точке (4.6). Для этого надо знать текущие положение $X_C(t)$, $Y_C(t)$, ориентацию робота $\theta(t)$, а также задающее воздействие $g_1(t) = C_s(X_s(t), Y_s(t))$ и его производные первого и второго порядка $\dot{g}_1(t), \ddot{g}_1(t) \in R^2$.

В предположении, что заданный путь является допустимым для робота, но известны только детерминированные, гладкие сигналы – текущие координаты целевой точки, принятые при моделировании в виде

$$g_{11} = X_s(s) = 4\sin(s/4),\; g_{12} = Y_s(s) = 4\cos(s/4), \qquad (4.30)$$

ставится задача дифференцирования заданий с помощью дифференциатора–наблюдателя (2.30) с кусочно-линейными корректирующими воздействиями (2.31) со следующими коэффициентами:

$$\dot{z}_1 = v_1, \dot{z}_2 = v_2, \dot{z}_3 = v_3,\; \varepsilon_i = g_i - z_i, z_i, v_i, \varepsilon_i \in R^2, \qquad (4.31)$$

$$p_1 = 4,\; p_2 = 3, p_3 = 1{,}2,\; l_1 = 120,\; l_2 = 102,\; l_3 = 8.$$

На рисунках 4.2–4.4 представлены графики заданных сигналов $g_{1j}(t)$ (4.30), их первых $\dot{g}_{1j}(t) = g_{2j}(t)$ и вторых $\ddot{g}_{1j}(t) = g_{3j}(t), j = 1,2$ производных и их оценок z_{i1}, z_{i2}, $i = \overline{1,3}$ (снизу), а также ошибок оценивания $\varepsilon_{ij}(t) = g_{ij}(t) - z_{ij}$ (сверху). Как видно из графиков, динамический дифференциатор работает корректно: оценочные сигналы сходятся к истинным значениям за 0,95 сек, погрешности оценивания в установившемся режиме пренебрежимо малы.

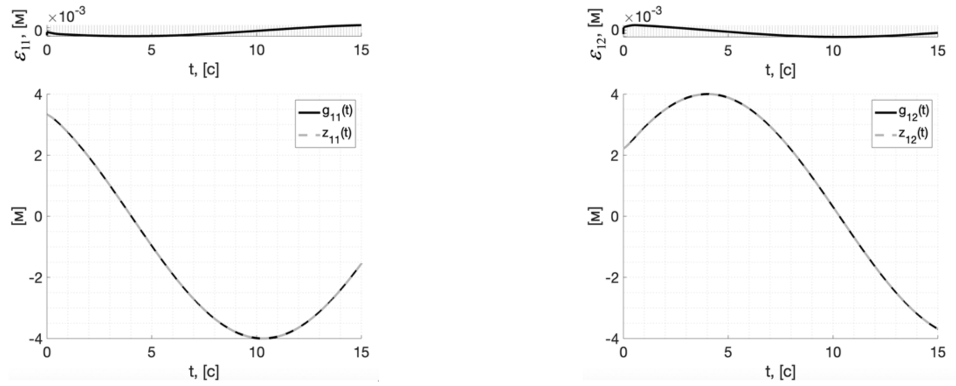


Рисунок 4.2 – Графики заданных сигналов $g_{1j}(t)$ (4.30), их оценок $z_{1j}(t)$ (снизу) и ошибок оценивания $\varepsilon_{1j}(t) = g_{1j}(t) - z_{1j}(t)$ (сверху), [м]

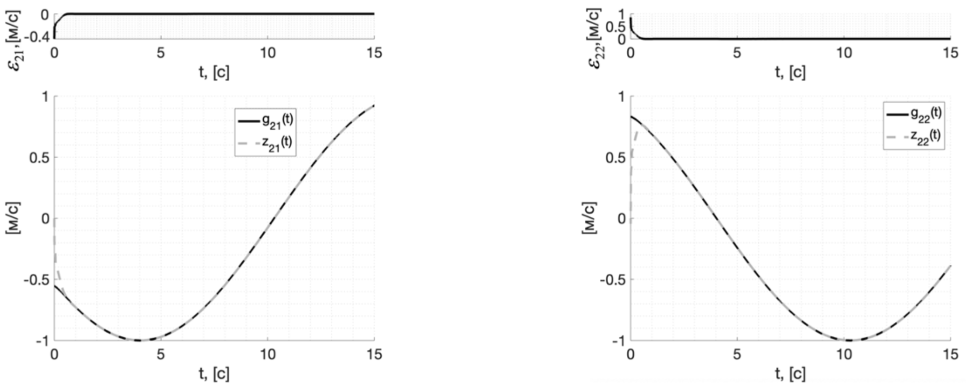


Рисунок 4.3 – Графики первых производных заданных сигналов $g_{2j}(t)$, их оценок $z_{2j}(t)$ (снизу) и ошибок оценивания $\varepsilon_{2j}(t) = g_{2j}(t) - z_{2j}(t)$ (сверху), [м/с]

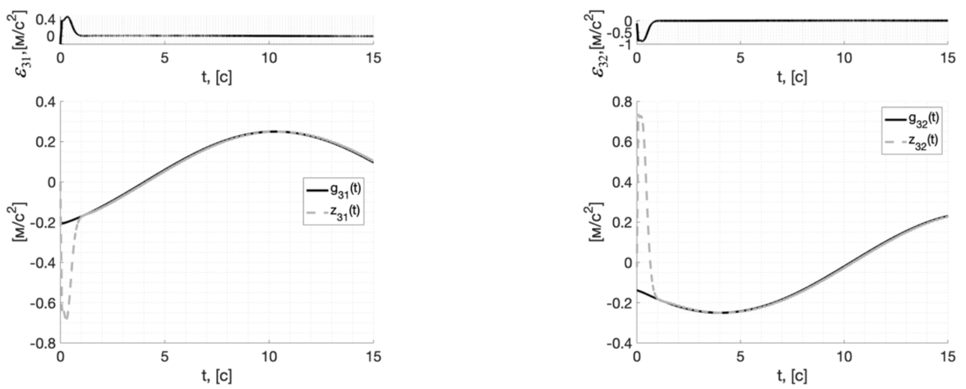


Рисунок 4.4 – Графики вторых производных заданных сигналов $g_{3j}(t)$, их оценок $z_{3j}(t)$ (снизу) и ошибок оценивания $\varepsilon_{3j}(t) = g_{3j}(t) - z_{3j}(t)$ (сверху), [м/с^2]

Для линейной стабилизирующей составляющей $\mu(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$ закона управления (4.29) были приняты коэффициенты $c_1 = 360, c_2 = 120$. На рисунках 4.5–4.6 показаны эталонные графики ошибок слежения и процесса сходимости базовой точки платформы $C(X_C(t), Y_C(t))$ к заданной кривой (4.30) для случая, когда все производные заданных воздействий известны.

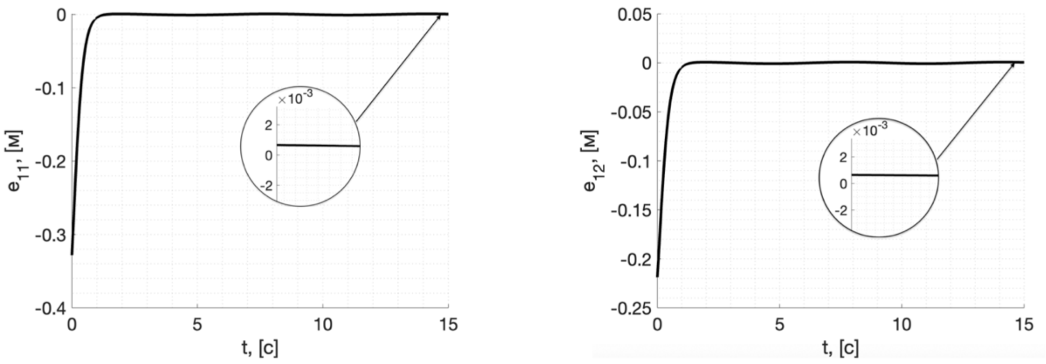


Рисунок 4.5 – Эталонные графики ошибок слежения $e_{11}(t) = X_c(t) - g_{11}(t)$, $e_{12}(t) = Y_c(t) - g_{12}(t)$ [м] в замкнутой системе (4.25), (4.29) без дифференциатора

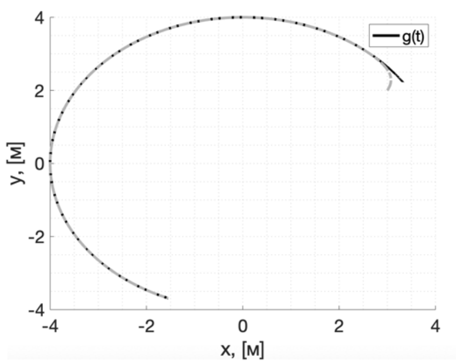


Рисунок 4.6 – Эталонный процесс сходимости базовой точки платформы $C(X_c;Y_c)$ к заданной кривой (4.30) в замкнутой системе (4.25), (4.29) без дифференциатора

На рисунках 4.7–4.8 показаны аналогичные графики, но при расчете закона управления (4.29) производные заданных сигналов заменялись их оценками, полученными с помощью дифференциатора–наблюдателя (4.31).

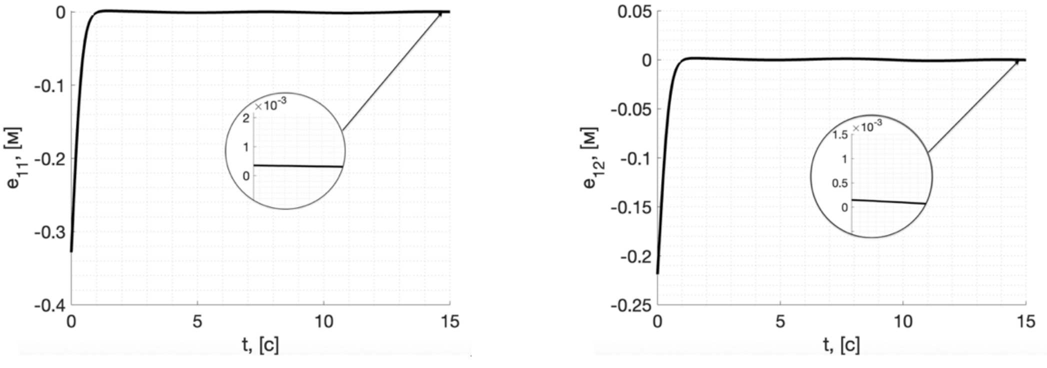


Рисунок 4.7 – Графики ошибок слежения $e_{11}(t) = X_c(t) - g_{11}(t)$, $e_{12}(t) = Y_c(t) - g_{12}(t)$ [м] в замкнутой системе (4.25), (4.29), (4.31)

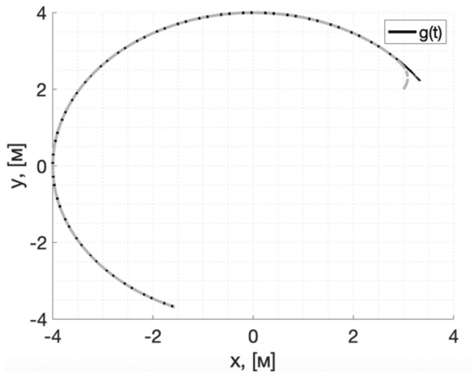


Рисунок 4.8 – Процесс сходимости базовой точки $C(X_c;Y_c)$ к заданной кривой (4.30) в замкнутой системе (4.25), (4.29) с дифференциатором (4.31)

Изображающая точка замкнутой системы с полной информацией сходится к заданной кривой за 0,7 с, ошибка слежения в установившемся режиме равна $0{,}96\times10^{-6}$ [м] (рисунки 4.5–4.6). Изображающая точка при наличии дифференциатора производных задающих воздействий (рисунки 4.7–4.8) сходится к заданной кривой несколько дольше, за 2 с. Ошибка слежения в установившемся режиме в два раза больше $1{,}96\times10^{-6}$ [м], но она незначительна.

Таким образом, результаты моделирования подтверждают эффективность разработанных алгоритмов в условиях неполной информации о целевой траектории. Принципиальным условием применения дифференциатора–наблюдателя (4.31) для восстановления производных задающих воздействий является предположение о гладкости и достижимости траектории движения и отсутствие шумов в измерениях. В противном случае для восстановления производных следует применять следящий дифференциатор, разработанный в главе 3.

4.2 Применение следящих дифференциаторов в задачах планирования движения одиночного робота на полигоне

Перечислим основные проблемы, которые нужно комплексно учитывать при планировании движения одиночного колесного робота на полигоне со стационарными препятствиями.

1. Путь следования должен быть безопасным и не приводить к столкновениям с препятствиями. Поэтому при планировании движения нужно учитывать габариты транспортного средства и конфигурацию полигона.

2. Траектория движения должна быть реализуема механическим объектом, т. е. она должна быть достаточно гладкой, иметь непрерывную кривизну, а эталонные скорость, ускорение и рывок не должны превышать предельных допустимых значений конкретного механизма (3.12).

3. Заданная траектория должна удовлетворять критериям, которые в зависимости от миссии робота и рабочего сценария формулируются в виде терминальных и оптимальных задач. Например, достичь конечной точки маршрута за минимальное время, составить кратчайший маршрут при обходе заданных пунктов, выполнить задание с минимальной тратой энергии, решить задачи преследования или уклонения и т. п. [29, 54, 79, 96, 126].

В данном разделе предложены простые в вычислительной реализации алгоритмы составления опорной негладкой 3D-траектории, соединяющей путевые точки на плоскости и задающей желаемую среднюю скорость движения на различных участках маршрута. Для порождения на ее основе эталонной гладкой траектории с выполнением проектных ограничений на производные, ее достижимости, а также для моделирования коридора безопасности с учетом габаритов колесной платформы применяются следящие дифференциаторы. Разработанный комплекс алгоритмов решает первую и вторую обозначенные выше проблемы. Третья проблемы выходит за рамки данного исследования.

Пусть для беспилотной колесной платформы с помощью тех или иных методов планирования составлен базовый рабочий сценарий в виде последовательности 3D-точек. Это путевые точки, заданные в неподвижной системе декартовых координат Oxy с учетом времени прохождения маршрута:

$$(x_i, y_i, t_i), i = \overline{1, m},\ t_i < t_{i+1}, t_1 = 0;\ t_m = T. \quad (4.32)$$

Предполагается, что интервал $[0;T]$ соответствует непрерывному движению робота без остановок и заднего хода (т. е. пары типа $x_i = x_{i+2}$ и $y_i = y_{i+2}$

отсутствуют), время нахождения на маршруте является допустимым и последовательность (4.32) задана корректно, а именно:

– острый угол между двумя соседними отрезками, соединяющими точки $(x_i; y_i)$ и $(x_{i+1}; y_{i+1})$, и $(x_{i+2}; y_{i+2})$, $i=\overline{1,m-2}$ не меньше угла $\widetilde{\phi}$, требуемого для разворота платформы

$$\arccos\left|\frac{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})+(y_{i+1}-y_i)(y_{i+2}-y_{i+1})}{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}\cdot\sqrt{(x_{i+2}-x_{i+1})^2+(y_{i+2}-y_{i+1})^2}}\right|\geq\widetilde{\phi}; \qquad (4.33)$$

– средняя линейная скорость везде не больше допустимой (3.12):

$$0<\frac{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}}{t_{i+1}-t_i}<Y_1, i=\overline{1,m-1}. \qquad (4.34)$$

В сделанных предположениях ставится задача непрерывной аппроксимации последовательности (4.32) так, чтобы полученная плоская кривая, а также ее покомпонентные производные удовлетворяли условиям (3.12).

Опорную (т. е. кусочно-непрерывную или непрерывную, но негладкую) траекторию $g_1(t)=(g_{11}(t), g_{12}(t))^{\mathrm{T}}$, проходящую через заданные точки (4.32), можно составить в ступенчатом виде или в виде ломаной, отрезки которой соединяют соседние точки

$$\frac{g_{11}-x_i}{x_{i+1}-x_i}=\frac{g_{12}-y_i}{y_{i+1}-y_i}=\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, t\in[t_i;t_{i+1}), i=\overline{1,m-1}.$$

Тогда в рамках алгоритма получения опорной 3D-траектории первичные покомпонентные задающие воздействия базовой точки колесной платформы $(x; y)$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} g_{11}(t)=\dfrac{(x_{i+1}-x_i)t+x_i t_{i+1}-x_{i+1}t_i}{t_{i+1}-t_i}, \\ g_{12}(t)=\dfrac{(y_{i+1}-y_i)t+y_i t_{i+1}-y_{i+1}t_i}{t_{i+1}-t_i}, t\in[t_i;t_{i+1}), i=\overline{1,m-1}. \end{cases} \qquad (4.35)$$

Опорную траекторию $g_{1j}(t)\in C^0$ (4.35) с большим количеством стыков или углов не рекомендуется непосредственно использовать в качестве задающих воздействий в системе автоматического управления роботом. Для продления срока службы механизма и безаварийной эксплуатации нужно получить достаточно гладкую аппроксимацию путевых точек, удовлетворяющую (3.12).

При аналитическом задании сложной составной траектории вычислительная нагрузка сильно возрастает, т. к. каждый стык требует индивидуального описания, что затрудняет использование этих подходов в реальном времени. Составленные заранее аналитические траектории могут потребовать много памяти для их хранения на бортовом компьютере. Они не подлежат коррекции и при изменении обстановки становятся непригодными. Применение метода динамического сглаживания опорных сигналов (4.35), разработанного в главе 3, полностью устраняет указанные проблемы. В память бортового компьютера закладывается только последовательность точек (4.32), а сглаживание соответствующих опорных траекторий (4.35) выполняется в реальном времени с помощью следящего дифференциатора (3.30) требуемого динамического порядка. На соответствующий комплекс алгоритмов было получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (Приложение 1).

Эксперимент 4.1. В качестве примера рассмотрим набор опорных точек, представленный в таблице 4.1, задающий в первом приближении движение центра масс колесной платформы с проектными ограничениями по максимальной скорости 2,5 м/с, ускорению 7,5 м/с² и рывку 45 м/с³, т. е. согласно (3.12)

$$Y_1 = 2{,}5; Y_2 = 7{,}5; Y_3 = 45. \tag{4.36}$$

Таблица 4.1 – Координаты опорных 3D-точек

i	x_i, м	y_i, м	t_i, с	i	x_i, м	y_i, м	t_i, с	i	x_i, м	y_i, м	t_i, с
1	1	1	0	9	5	8	9	17	12	4	19
2	1	3	1	10	6	7,5	10	18	12	1	20,5
3	2	4	2	11	7	7,5	11	19	8,5	1	23
4	1	5	3	12	8	8	12	20	6,5	5	25
5	2	6	4	13	9	9	13	21	4,5	1	27
6	1	7	5	14	12	9	14,5	22	1	1	29
7	1	9	6	15	12	6	16				
8	4	9	8	16	10	5	17,5				

Для сглаживания опорной траектории и восстановления ее первых трех производных применен трехблочный следящий дифференциатор (3.55)

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, x_{1,2,3} \in R^2,\\ &\dot{x}_3 = -p_3\sigma(l_3 e_3) = -p_3\sigma(l_3(x_3 + p_2\sigma(l_2(x_2 + p_1\sigma(l_1(x_1 - g_1)))))),\\ &p_1 = 2{,}3, p_2 = 7, p_3 = 40; l_1 = 2{,}6, l_2 = 2{,}4, l_3 = 1\end{aligned} \qquad (4.37)$$

с начальными значениями $x_1(0) = (1;1), x_2(0) = (0;0), x_3(0) = (0;0)$.

На рисунке 4.9 показана опорная негладкая траектория $g_1(t) = (g_{11}(t), g_{12}(t))^{\mathrm{T}}$ (4.35), заданная табл. 4.1, и результат ее сглаживания $x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t))^{\mathrm{T}}$ с помощью следящего дифференциатора (4.37). На рисунках 4.10–4.11 показаны остальные переменные дифференциатора, восстанавливающие покомпонентно скорость $x_2(t) = (x_{21}(t), x_{22}(t))^{\mathrm{T}}$, ускорение $x_3(t) = (x_{31}(t), x_{32}(t))^{\mathrm{T}}$ и рывок $\dot{x}_3(t) = (\dot{x}_{31}(t), \dot{x}_{32}(t))^{\mathrm{T}}$. Как видно из этих графиков, ограничения, наложенные на объект управления (4.36), выполняются, следовательно, задачи, для решения которых была выполнена процедура синтеза следящего дифференциатора, решены.

Заметим, что метод динамического сглаживания не предназначен для решения терминальных задач, он не обеспечивает точного попадания в путевые точки (см. рисунок 4.9). Но его удобно использовать для имитационного моделирования в сжатом масштабе времени при планировании движений.

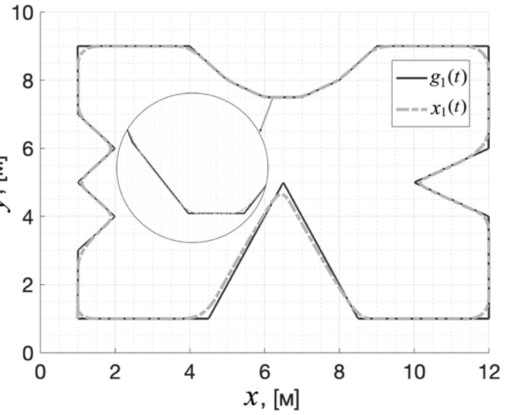


Рисунок 4.9 – Графики опорной траектории $g_1(t)$ (табл. 4.1) и выхода $x_1(t)$ следящего дифференциатора (4.37)

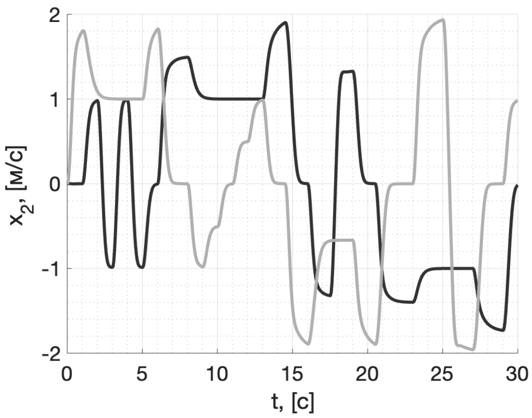


Рисунок 4.10 – Графики скоростей $x_{21}(t)$, $x_{22}(t)$, восстановленных следящим дифференциатором (4.37)

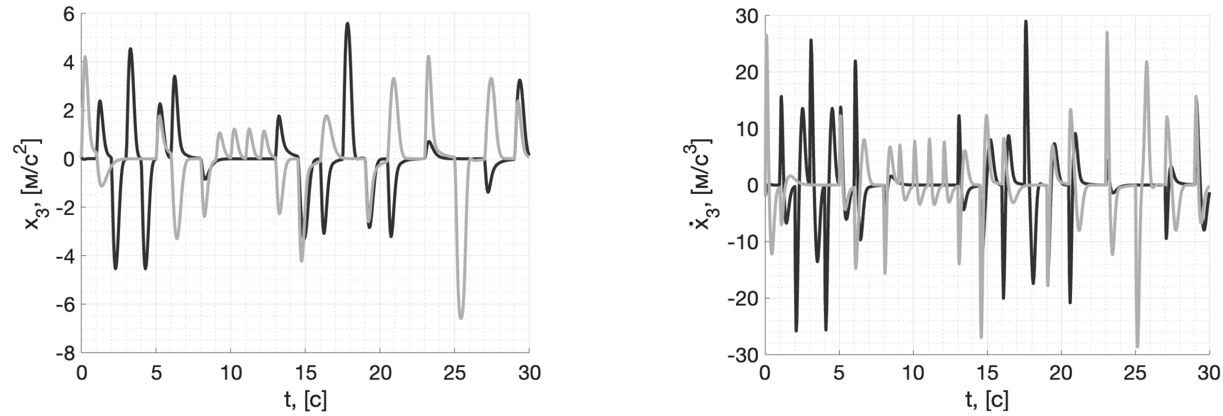


Рисунок 4.11 – Графики ускорений $x_{31}(t)$, $x_{32}(t)$ (слева) и рывков $\dot{x}_{31}(t)$, $\dot{x}_{32}(t)$ (справа), восстановленных с помощью следящего дифференциатора (4.37)

После каждого прогона алгоритма сглаживания можно корректировать координаты конкретных точек (4.32) и достичь желаемого результата. Наглядные результаты будут получены быстро и без громоздких аналитических расчетов. Для имитационного моделирования достаточно использовать одноблочный следящий дифференциатор (3.35).

В разделе 3.3 было показано, что принципиальным моментом при синтезе следящего дифференциатора является установка начальных значений (3.18), в частности, равенство начальных значений выхода следящего дифференциатора и сглаживаемого сигнала. В частном случае также координаты начальной точки $(x_1, y_1), t_1 = 0$ маршрута (4.32) совпадают с начальными координатами базовой точки (или центром масс) колесной платформы, т. е. робот сразу начинает движение по эталонной траектории, порождаемой следящим дифференциатором. В общем случае такое совпадение не имеет места, поэтому возникает дополнительная задача перевода объекта в малую окрестность начальной точки маршрута с заданной ориентацией за заданное время. Если не контролировать этот процесс специальным образом, то в переходном режиме возможно существенное перерегулирование и всплески по управляющим воздействиям, а также попадание на маршрут с запаздыванием (см. раздел 4.3). Однако если движение планируется заранее или время прохождения маршрута не является критичным, то можно алгоритмизировать процесс корректного достижения начальной точки маршрута, дополнив набор (4.32) еще одной точкой

$$(x_0, y_0, t_0), t_0 < 0, \tag{4.38}$$

координаты которой совпадают с начальными координатами объекта, с установкой желаемого время $|t_0|$ достижения начальной точки маршрута по прямой

$$\begin{cases} g_{11}(t) = \dfrac{(x_1 - x_0)t + x_0 t_1 - x_1 t_0}{|t_0|}, \\ g_{12}(t) = \dfrac{(y_1 - y_0)t + y_0 t_1 - y_1 t_0}{|t_0|}, t \in [t_0; t_1). \end{cases}$$

Такие же значения (4.38) будут установлены и для выхода следящего дифференциатора при его запуске. Если при принятых значениях (4.38) неравенства (4.33), (4.34), где i = 0, i + 1 = 1 нарушаются, то тогда вводом нескольких дополнительных точек и последующим сглаживанием можно обеспечить желаемый процесс попадания в начальную или в любую другую точку маршрута.

Теперь рассмотрим некоторые аспекты планирования безопасного маршрута габаритного колесного транспорта на полигоне со стационарными препятствиями. Обратная задача состоит в том, чтобы, наоборот, расставить на полигоне (заводском цехе, складе) объекты так, чтобы робот мог безопасно выполнять рабочий сценарий. Поэтому при планировании полигона требуется учитывать габариты транспортного средства.

Разработанный алгоритм динамического сглаживания можно применить для графического отображения изменения положения не только центра масс колесной платформы, но также ее угловых точек. Ниже приведено словесное описание алгоритма визуализации габаритного следа и его применение для симметричной прямоугольной колесной платформы, центр масс которой находится на пересечении диагоналей в середине центральной линии. Вначале на полигоне планируются путевые точки мобильного робота (4.32). Опорный сигнал (4.35) поступает на вход следящего дифференциатора с выходными переменными $(x_{11}(t); x_{12}(t))$, которые имитируют положение центра масс платформы в неподвижной системе декартовых координат. Вводятся следующие обозначения (см. рисунок 4.12): $\rho > 0$ – расстояние от центра масс до каждой угловой точки платформы, взятое с небольшим запасом; $\alpha < \pi / 2$ – величина угла между центральной линией платформы и ее диагоналями; $(\bar{x}_{11,j}(t); \bar{x}_{12,j}(t))$ – координаты угловых точек платформы, $j = \overline{1,4}$, θ – угол между осью Ox и центральной линией платформы, совпадающей с направлением вектора скорости.

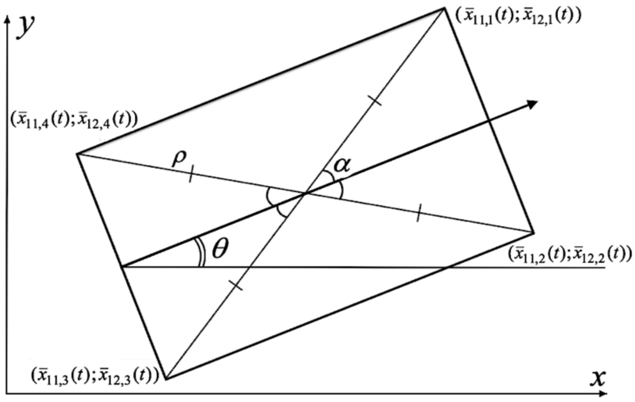


Рисунок 4.12 – Обозначения, принятые для угловых точек колесной платформы

Формулы для вычисления текущих координат угловых точек платформы на основе выходных переменных следящего дифференциатора имеют вид

$$\begin{cases} \bar{x}_{11,1}(t) = x_{11}(t) + \rho\cos(\bar{\theta}(t) + \alpha), \\ \bar{x}_{12,1}(t) = x_{12}(t) + \rho\sin(\bar{\theta}(t) + \alpha); \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_{11,2}(t) = x_{11}(t) + \rho\cos(\bar{\theta}(t) - \alpha), \\ \bar{x}_{12,2}(t) = x_{12}(t) + \rho\sin(\bar{\theta}(t) - \alpha); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_{11,3}(t) = x_{11}(t) + \rho\cos(\bar{\theta}(t) + \alpha + \pi), \\ \bar{x}_{12,3}(t) = x_{12}(t) + \rho\sin(\bar{\theta}(t) + \alpha + \pi); \end{cases} \begin{cases} \bar{x}_{11,4}(t) = x_{11}(t) + \rho\cos(\bar{\theta}(t) - \alpha - \pi), \\ \bar{x}_{12,4}(t) = x_{12}(t) + \rho\sin(\bar{\theta}(t) - \alpha - \pi); \\ \bar{\theta}(t) = \mathrm{arctg}(\dot{x}_{12}(t) / \dot{x}_{11}(t)) \end{cases} \quad (4.39)$$

и справедливы при $0 \le \bar{\theta} \le \pi / 2$. При других значениях угла нужно корректировать знаки $\pm$ в формулах (4.39) и использовать дополнительную логику. Принципиальное упрощение в данных расчетах состоит в том, что направление движения платформы в этом алгоритме не учитывается. При смене квадранта, в котором находится угол $\bar{\theta}$, угловые точки правого борта будут изображать путь точек левого борта и наоборот. Таким образом, кривые (4.39), изображенные на одном графике, дадут непрерывный габаритный след колесной платформы.

Эксперимент 4.2. Для моделирования габаритного следа были приняты размеры колесного робота «SRX 1»: 765×1370 мм (ширина×длина). На рисунке 4.13 показаны графики выхода $(x_{11}(t); x_{12}(t))$ трехблочного следящего дифференциатора (4.37), отслеживающего опорную траекторию (см. таблицу 4.1) с учетом дополнительной точки $x_0 = -1, y_0 = 4, t_0 = -1{,}5$ (4.38) с начальными координатами объекта, а также траектории угловых точек платформы (4.39).

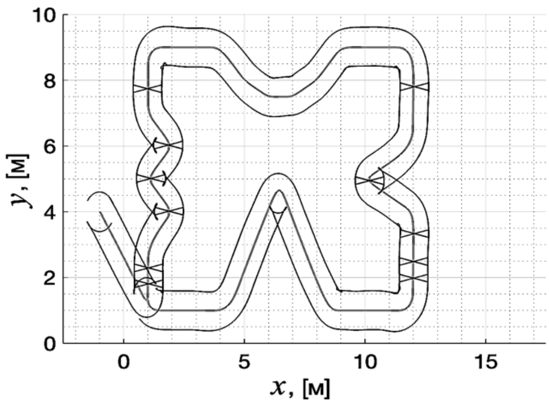


Рисунок 4.13 – Сглаженная габаритная траектория с учетом начального положения транспортного средства

Как видно из рисунка 4.13, при смене направления движения графики угловых точек правого и левого бортов меняются местами, но это не изменяет форму габаритного следа траектории.

Комплекс разработанных алгоритмов является удобным инструментом для планирования движения мобильного робота и проектирования полигонов. На рисунке 4.14 представлена блок-схема процесса планирования движения робота на полигоне со стационарными препятствиями. Данный процесс включает:

1) составление базового набора 3D-точек (4.32) для конкретного рабочего сценария с учетом имеющихся препятствий, ограничений на скорость робота и радиус разворота, длины и длительности маршрута и т. п.;

2) вычисление опорной негладкой траектории (4.35) по заданному набору 3D-точек (4.32);

3) сглаживание опорной траектории с помощью следящего дифференциатора (4.37), т. е. вычисление сигмоид и операции интегрирования;

4) моделирование габаритной траектории и визуализация безопасного коридора (4.39).

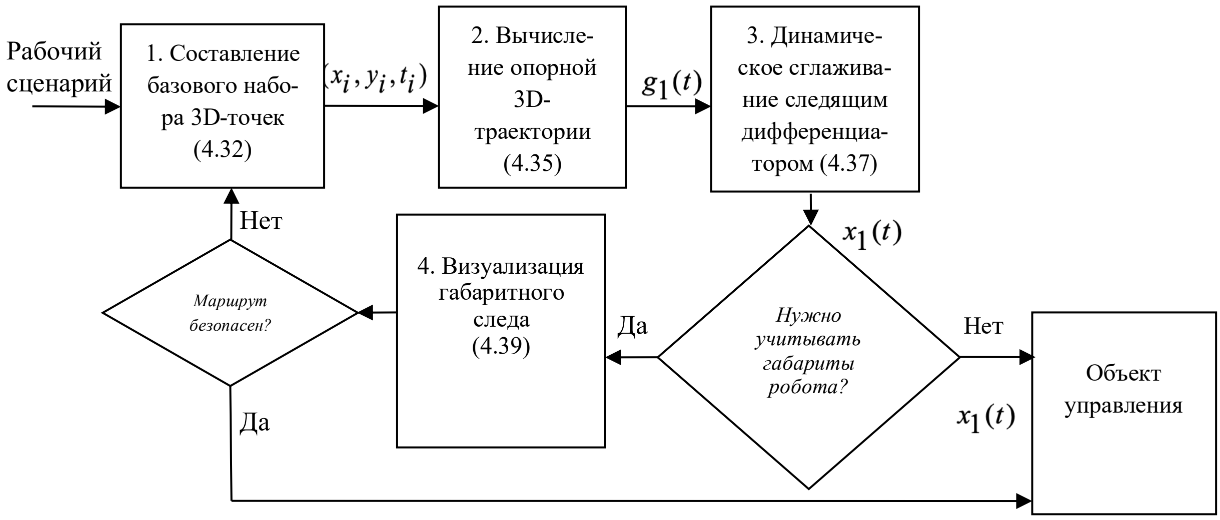


Рисунок 4.14 **–** Блок–схема процесса планирования траектории одиночного робота на полигоне с использованием следящего дифференциатора

На рисунке 4.15 представлена структурная схема, созданная при моделировании разработанных алгоритмов в программной среде MATLAB-Simulink.

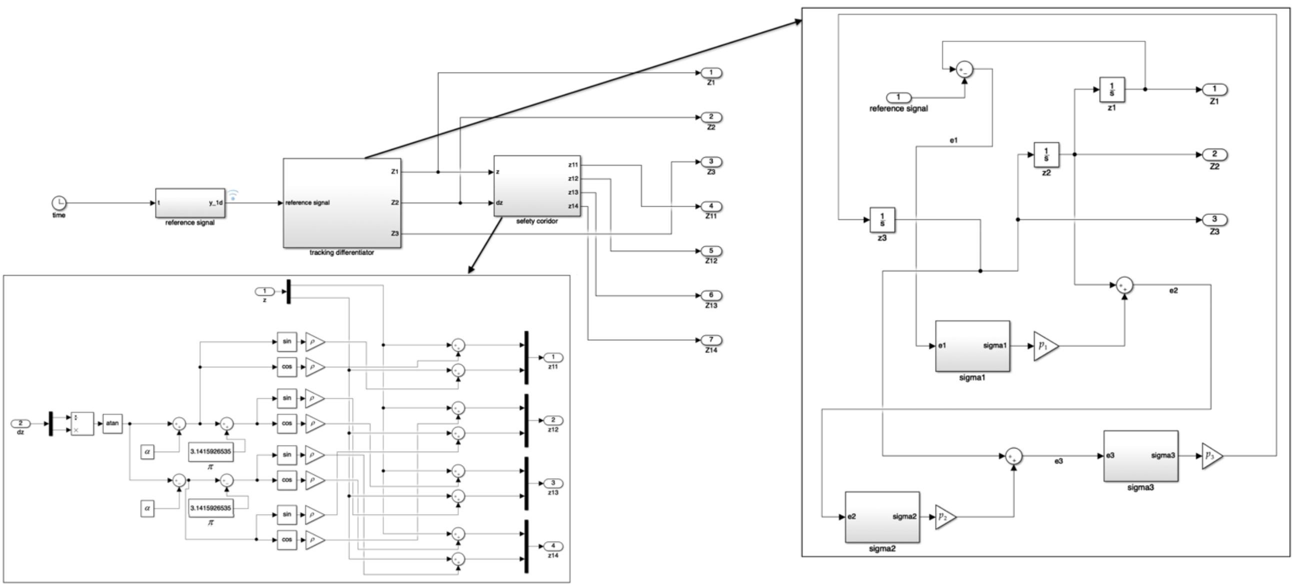


Рисунок 4.15 – Структурная схема в программной среде MATLAB-Simulink

Основной интерфейс Simulink – графический инструмент построения блок-схем и настраиваемый набор библиотек блоков. При этом псевдокод наглядно демонстрирует вычислительный процесс и выполняемые вычислительные операции. С помощью настройки блока “clock” (на рисунке 4.15 обозначен “time”) можно организовать вычисления в любом режиме, в том числе, в режиме реального времени.

Явное сравнение вычислительной сложности разработанного метода динамического сглаживания с аналитическими методами (см. раздел 1.4) не представляется возможным, так как эти методы принципиально отличаются друг от друга. Результатом применения методов сплайновой интерполяции является полное аналитическое описание эталонной траектории (как аппроксимации заданного набор путевых точек). При этом вычислительная сложность прямо пропорциональна количеству опорных точек и фрагментов с разными краевыми условиями. Для каждого фрагмента траектории надо вычислить коэффициенты полинома и контролировать выполнение ограничений. Кроме того, каждая новая последовательность точек требует индивидуальной организации расчетов.

При использовании метода динамического сглаживания эталонная траектория порождается в виде векторного сигнала. Коэффициенты усиления следящего дифференциатора устанавливаются сразу и не меняются при обработке разных наборов точек для одного и того же робота. Для их настройки используются только номинальные значения скорости, ускорения и т. д. Процесс сглаживания – выполнение операций интегрирования (4.37). Усложнение формы опорной кривой не приводит к усложнению алгоритма и увеличению вычислительных операций, необходимых для ее сглаживания. Если задан набор путевых точек с учетом времени (4.32), то перед подачей в дифференциатор они автоматически соединяются отрезками (4.35). Если на вход следящего дифференциатора подается опорный негладкий сигнал из автономного источника, то он будет автоматически сглаживаться без выполнения дополнительных расчетов в реальном времени. Данные алгоритмы можно использовать и на этапе планирования движения или полигона, и в режиме online на бортовом компьютере с любым программным обеспечением.

4.3 Применение следящего дифференциатора для синтеза следящей системы на основе двухканальной модели колесной платформы

В данном разделе в качестве модели объекта управления рассматривается двухканальная система с регулированием не только угловой, но и линейной скорости. Объект управления – беспилотная колесная платформа с двумя ведущими колесами, движение ее центра масс в неподвижной системе декартовых координат Oxy описывается следующей системой уравнений [4–5]:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = v\cos\theta,\ \dot{y} = v\sin\theta,\ \dot{\theta} = \kappa v; \\ &\dot{v} = u_v, \dot{\kappa} = u_\kappa, \end{aligned} \tag{4.40}$$

где x, y – координаты центра масс платформы (выходные регулируемые переменные); θ – угол между осью Ox и центральной линией платформы, которая совпадает с направлением вектора скорости; v – линейная скорость (в режиме движения $v \neq 0$); κ – кривизна пути (при движении по прямой $\kappa = 0$ и $\theta = \mathrm{const}$ соответственно); κv – угловая скорость поворота робота относительно центра масс; u_v, u_κ – моменты, развиваемые исполнительными устройствами (их динамика в данной модели не учитывается).

В работах [4–5] показано, что система (4.40) является дифференциально плоской относительно плоского выхода $y_{11} := x, y_{12} := y$. С помощью ввода вспомогательной переменной состояния $\zeta(t)$ систему (4.40) можно представить в канонической форме Бруновского [77] с двумя входами и двумя выходами:

$$\ddot{y}_{11} = u_1,\ \ddot{y}_{12} = u_2, \tag{4.41}$$

где u_1, u_2 – новые управления. Замена переменных $(x, y, \theta, v, k, \zeta)^{\mathrm{T}} \leftrightarrow (y_{11}, y_{12}, \dot{y}_{11}, \dot{y}_{12}, \ddot{y}_{11}, \ddot{y}_{12})^{\mathrm{T}}$ является диффеоморфной при $v \neq 0$, прямые и обратные зависимости имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} &x = y_{11}, y = y_{12}, \theta = \mathrm{arctg}(\dot{y}_{12} / \dot{y}_{11}), v = (\dot{y}_{11}^2 + \dot{y}_{12}^2)^{1/2}, \\ &\kappa = \frac{\dot{y}_{11}\ddot{y}_{12} - \dot{y}_{12}\ddot{y}_{11}}{(\dot{y}_{11}^2 + \dot{y}_{12}^2)^{3/2}}, \zeta = \dot{y}_{11}\ddot{y}_{11} + \dot{y}_{12}\ddot{y}_{12}; \\ &y_{11} = x, y_{12} = y, \dot{y}_{11} = v\cos\theta,\ \dot{y}_{12} = v\sin\theta, \\ &\ddot{y}_{11} = \frac{\zeta\cos\theta - \kappa v^3\sin\theta}{v}, \ddot{y}_{12} = \frac{\zeta\sin\theta + \kappa v^3\cos\theta}{v}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Каноническая система (4.41) эквивалентна расширенной системе (4.40) вида

$$\dot{x} = v\cos\theta,\ \dot{y} = v\sin\theta, \dot{\theta} = \kappa v;\ \dot{v} = \zeta / v, \dot{\kappa} = (u_2\cos\theta - u_1\sin\theta - 3\kappa\zeta) / v^2,$$

$$\dot{\zeta} = v(u_1 \cos\theta + u_2 \sin\theta) + \kappa^2 v^4 + (\zeta / v)^2.$$

В зависимости от конструкции и комплектных исполнительных устройств мобильный робот имеет конкретные характеристики движения, которые формализуем в терминах системы (4.41):

$$\left\| y_1^{(i)}(t) \right\| \le Y_i = \text{const} > 0, t \in [0, T],\ i = 1, 2, 3, \tag{4.43}$$

где Y_1, Y_2, Y_3 – максимальные (допустимые) абсолютные значения скорости, ускорения и рывка соответственно, $\| * \|$ – евклидова норма вектора, $T > 0$ – время движения платформы при выполнении рабочего сценария. Ниже при моделировании численные значения (4.43) приняты в виде (4.36).

В условиях полной определенности, т. е. при отсутствии внешних возмущений и при полных измерениях переменных состояния системы (4.40), а также в случае, когда необходимые для формирования обратной связи первые–третьи производные задающих воздействий известны, а само задающее воздействие $g_1(t) = (g_{11}(t), g_{12}(t))^{\mathrm{T}}$ реализуемо (3.12), можно обеспечить асимптотическую стабилизацию ошибок слежения $\xi_1(t) = (\xi_{11}(t), \xi_{12}(t))^{\mathrm{T}}$, а именно:

$$\lim_{t \to +\infty} \xi_{1j}(t) = 0, \xi_{1j}(t) = y_{1j}(t) - g_{1j}(t),\ j = 1, 2. \tag{4.44}$$

Для решения задачи (4.44) применим типовую методику линеаризации обратной связью, которая удобна для синтеза системы слежения в нелинейных минимально-фазовых объектах управления [94–95]. Представим каноническую систему (4.41) в новом координатном базисе ошибок слежения $\xi_1 = y_1 - g_1$ и их производных $\dot{\xi}_1 = \xi_2 = \dot{y}_1 - \dot{g}_1$, $\dot{\xi}_2 = \xi_3 = \dot{y}_2 - \ddot{g}_1$ в следующем виде:

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dot{\xi}_3 = u - \dddot{g}_1. \tag{4.45}$$

Для данной системы формируется комбинированное управление с линейной стабилизирующей составляющей

$$\begin{gathered} u = -C_1 \xi_1 - C_2 \xi_2 - C_3 \xi_3 + \dddot{g}_1 = \\ = -C_1 (y_1 - g_1) - C_2 (y_2 - \dot{g}_1) - C_3 (y_3 - \ddot{g}_1) + \dddot{g}_1, \\ C_i = \mathrm{diag}\{c_{ij}\}, c_{ij} = \text{const} > 0,\ i = 1,2,3,\ j = 1,2, \end{gathered} \tag{4.46}$$

что приводит к линеаризованной замкнутой виртуальной системе

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = \xi_3, \dot{\xi}_3 = -C_1\xi_1 - C_2\xi_2 - C_3\xi_3. \tag{4.47}$$

Стабилизация системы (4.47) обеспечивается выбором собственных значений $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \lambda_{3j}$, $j = 1,2$, $\mathrm{Re}(\lambda_{ij}) < 0$: $c_{1j} = -\lambda_{1j}\lambda_{2j}\lambda_{3j}$, $c_{2j} = \lambda_{1j}\lambda_{2j} + \lambda_{2j}\lambda_{3j} + \lambda_{3j}\lambda_{1j}$, $c_{3j} = -\lambda_{1j} - \lambda_{2j} - \lambda_{3j}$. Соответственно, в замкнутой системе (4.41), (4.46)

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \dot{y}_3 = -C_1 y_1 - C_2 y_2 - C_3 y_3 + C_1 g_1 + C_2 \dot{g}_1 + C_3 \ddot{g}_1 + \dddot{g}_1 \tag{4.48}$$

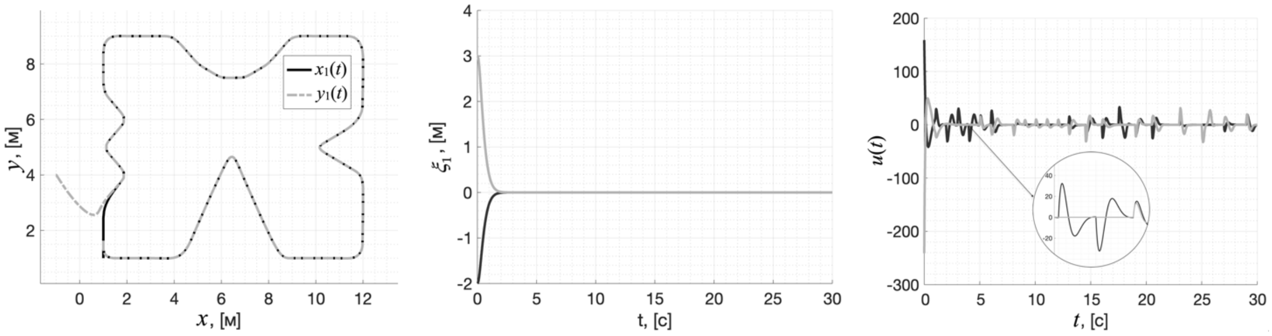
цель управления (4.44) достигается.

Для реализации закона управления (4.45) нужно знать первую–третью производные задающего воздействия. Для численного моделирования используем данные эксперимента 4.1, где эталонная траектория и ее производные получены с помощью следящего дифференциатора (4.37), отслеживающего опорную ломаную, заданную табл. 4.1. В замкнутой системе с трехблочным следящим дифференциатором закон управления (4.46) будет реализован в виде:

$$\begin{aligned} &u = -C_1(y_1 - x_1) - C_2(y_2 - x_2) - C_3(y_3 - x_3) + \dot{x}_3, \\ &\lambda_{1j} = -3, \lambda_{2j} = -4, \lambda_{3j} = -5 \Rightarrow c_{1j} = 60, c_{2j} = 47, c_{3j} = 12, j = 1,2. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Ниже представлены результаты моделирования замкнутой системы (4.40), (4.49) с различными начальными значениями дифференциатора (4.37) без и с учетом начальных координат центра масс колесной платформы.

Эксперимент 4.3. На рисунке 4.16 (а) показана эталонная сглаженная траектория – выход $x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t))^{\mathrm{T}}$ следящего дифференциатора (4.37), и ее отслеживание выходными переменными $y_{11}(t) = x, y_{12}(t) = y$ замкнутой системы (4.40), (4.49); (б) – покомпонентные графики ошибки слежения $\xi_{1j}(t) = y_{1j}(t) - x_{1j}(t), j = 1,2$; (в) – покомпонентные графики управления $u_1(t), u_2(t)$ (4.49). Начальные значения выходных переменных следящего дифференциатора (4.37) совпадают с начальной точкой заданного маршрута $x_{11}(0) = x_1 = 1, x_{12}(0) = y_1 = 1$ (см. таблицу 4.1), но не совпадают с начальными значениями центра масс робота, равными $y_{11}(0) = -1, y_{12}(0) = 4$.



а б в

Рисунок 4.16 – Эксперимент 4.3: графики $(x_{11}(t), x_{12}(t))$ и $(y_{11}(t),\ y_{12}(t))$ (а), ошибок слежения $\xi_{11}(t), \xi_{12}(t)$ (б), управлений $u_1(t), u_2(t)$ (4.49) (в)

Центр масс колесной платформы за 2 сек. попадает на заданный маршрут в точке (1,5; 2,5) и дальше движется по эталонной траектории. Управления ограничены, но их всплесков в начале переходного процесса избежать не удалось из-за совокупности влияния достаточно больших коэффициентов обратной связи (4.49) и разницы начальных условий объекта и целевой траектории. Для сокращения этих выбросов нужно учитывать начальные условия робота.

Эксперимент 4.4. На рисунках 4.17– 4.19 показаны аналогичные графики для случая, когда начальные значения выхода следящего дифференциатора совпадают с начальными значениями центра масс робота, но не совпадают с начальной точкой маршрута: $x_{11}(0) = y_{11}(0) = -1$, $x_{12}(0) = y_{12}(0) = 4$, $x_1 = 1, y_1 = 1, t_1 = 0,$ кроме того, $x_{21}(0) = y_{21}(0),\ x_{22}(0) = y_{22}(0).$ Как видно из этих графиков, при учете в следящем дифференциаторе начальных условий робота $y_1(0)$, $y_2(0)$ удалось уменьшить всплески по управлению, сохраняя заданные ограничения на переменные состояния. Но с ростом ошибки $\|y_1(0) - g_1(0)\|$ будут увеличиваться и время переходного процесса и перерегулирование, робот будет попадать на заданный маршрут не в стартовой точке.

Если траектория планируется заранее или время прохождения маршрута не является критичным, то тогда можно совместить начальные значения и объекта, и следящего дифференциатора, и маршрута путем добавления в базовый набор путевых точек дополнительной точки (4.38)

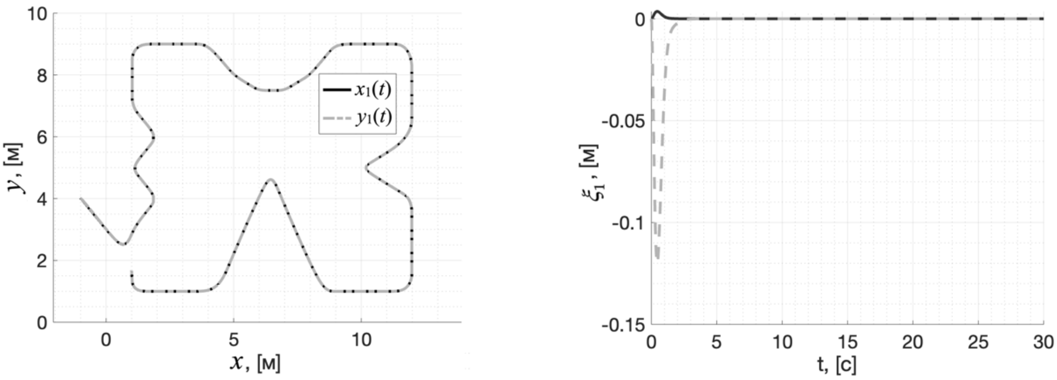


Рисунок 4.17 – Эксперимент 4.4: графики $(x_{11}(t), x_{12}(t))$ и $(y_{11}(t),\ y_{12}(t))$ (слева) и ошибок слежения $\xi_{11}(t), \xi_{12}(t)$ (справа)

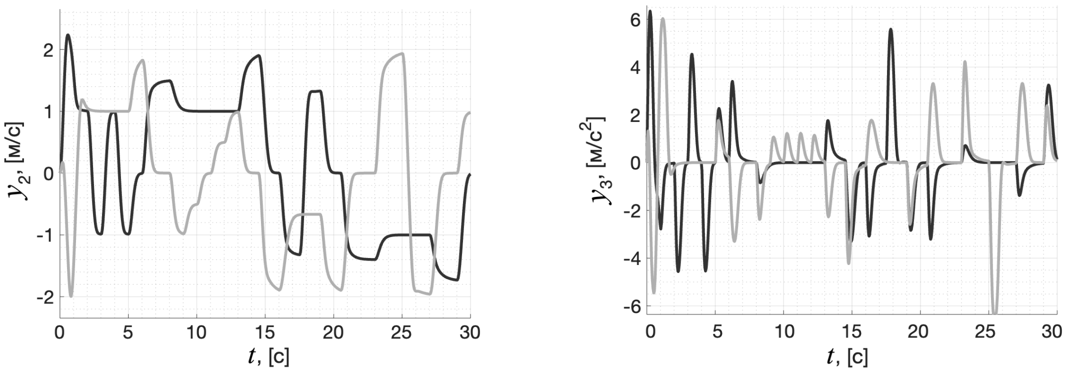


Рисунок 4.18 – Эксперимент 4.4: графики скоростей $y_{21}(t)$, $y_{22}(t)$ (слева) и ускорений $y_{31}(t), y_{32}(t)$ (справа) центра масс колесной платформы

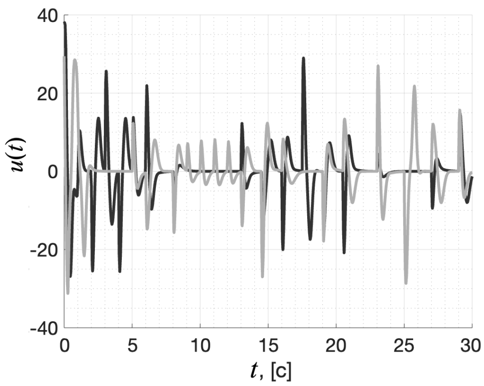


Рисунок 4.19 – Эксперимент 4.4: графики управлений $u_1(t), u_2(t)$ (4.49)

Эксперимент 4.5. На рисунках 4.20–4.22 показаны аналогичные графики для случая, когда путем ввода дополнительной точки $x_0 = -1, y_0 = 4, t_0 = -1{,}5$ обеспечено совпадение начальных значений центра масс робота, выхода следящего дифференциатора и пролонгированной опорной ломаной: $x_{11}(0) = y_{11}(0) = x_0 = -1, x_{12}(0) = y_{12}(0) = y_0 = 4.$ Как видно из этих графиков, задача слежения выполняется с учетом установленных ограничений (4.36), всплески управления сократились. При этом обеспечивается плавное попадание робота в стартовую точку маршрута за заданное время, что автоматически решает известную проблему достижимости [52]. Выбор конкретного варианта «учета» начального положения объекта управления зависит от рабочего сценария и условий формирования опорного сигнала.

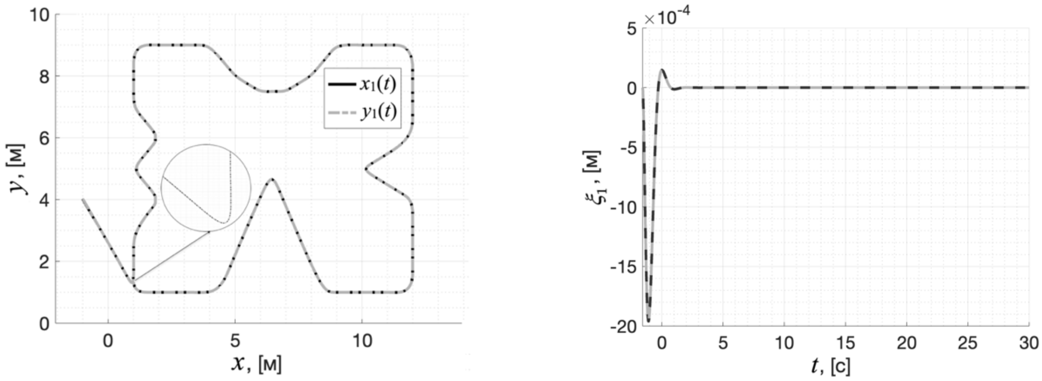


Рисунок 4.20 – Эксперимент 4.5: графики $(x_{11}(t), x_{12}(t))$ и $(y_{11}(t),\ y_{12}(t))$ (слева) и ошибок слежения $\xi_{11}(t), \xi_{12}(t)$ (справа)

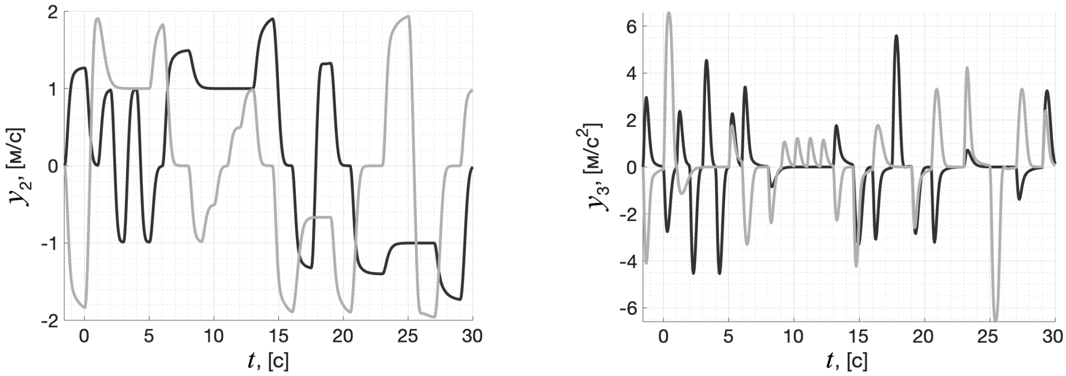


Рисунок 4.21 – Эксперимент 4.5: графики скоростей $y_{21}(t)$, $y_{22}(t)$ (слева) и ускорений $y_{31}(t), y_{32}(t)$ (справа) центра масс колесной платформы

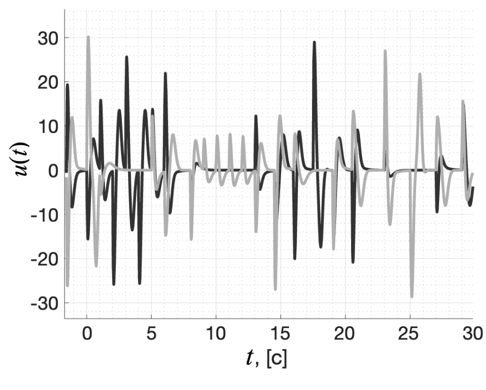


Рисунок 4.22 – Эксперимент 4.5: графики управлений $u_1(t), u_2(t)$ (4.49)

4.4 Выводы по главе 4

В разделе 4.1 для решения задачи путевой стабилизации трехколесной беспилотной платформы разработана декомпозиционная процедура синтеза нелинейного закона управления по путевым координатам. В отличие от метода линеаризации обратной связью получен более простой в вычислительной реализации закон управления. Применение сигмовидных обратных связей позволило учитывать имеющиеся ограничения на переменные состояния и управления на стадии синтеза, а также обеспечило в замкнутой системе инвариантность по отношению к неизвестному ограниченному возмущению, действующему в пространстве управления, с некоторой точностью. На примере упрощенной математической модели рассмотрен также типовой закон управления, для реализации которого требуется знание первой и второй производных координат целевой точки. Задача их восстановления решена с помощью дифференциатора–наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями. Результаты моделирования подтвердили эффективность разработанных алгоритмов.

В разделе 4.2 с использованием следящих дифференциаторов разработан комплекс алгоритмов планирования движения одиночного робота на полигоне, включающий: составление опорной негладкой 3D-траектории и ее сглаживание; перевод объекта из произвольных начальных условий в заданную точку эталонной траектории; визуализацию безопасного коридора с учетом габаритов транспортного средства. Таким образом, получено простое решение известной проблемы достижимости: показано, что в системах со следящим дифференциатором можно автоматически обеспечить плавный, без выбросов, въезд робота из произвольных начальных условий на эталонную траекторию. В разделе 4.3 показано, что в системах со следящим дифференциатором, порождающим реализуемую траекторию, можно корректно учитывать начальные значения объекта. Тогда непосредственное использование линейных регуляторов не будет приводить к всплескам в замкнутой системе в переходном режиме.

Глава 5 Управление движением беспилотных летательных аппаратов в условиях ветровых возмущений

В данной главе для системы управления движением центра масс беспилотного летательного аппарата разработаны регуляторы с подавлением/компенсацией внешних возмущений и с применением разработанных дифференциаторов для оценивания неизмеряемых внутренних и внешних сигналов.

В разделе 5.1 в рамках блочного подхода с использованием сигмовидных обратных связей разработаны регуляторы двух типов, которые подавляют действие внешних возмущений (ветровых возмущений и производные заданий) с заданной точностью, что не требует их оценивания. Дифференциаторы–наблюдатели с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, разработанные в главе 2, применяются для оценивания скоростей по измерениям пространственных координат центра масс и задающих воздействий.

В разделе 5.2 применение следящего дифференциатора и наблюдателя ветровых возмущений с сигмовидной коррекцией позволило реализовать комбинированное управление с линейной стабилизирующей составляющей и обеспечить асимптотическую стабилизацию ошибок слежения. Метод построения опорной негладкой траектории, проходящей через заданные путевые точки на плоскости, разработанный в разделе 4.2, распространен для получения примитивной 4D-траекторий. Приведены результаты численного моделирования и сравнительного анализа разработанных регуляторов. Результаты главы 5 опубликованы в работах [21–24, 102, 105–107, 109, 111, 116, 141].

5.1 Два подхода к подавлению внешних возмущений с помощью сигмовидных управляющих воздействий

5.1.1 Описание проблемы

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) имеют ряд важных преимуществ по сравнению с пилотируемой авиацией, в том числе меньшие эксплуатационные затраты, стоимость, массу и габариты, возможность выполнения маневров с существенными перегрузками, что является факторами активного развития данной отрасли в настоящее время. Усилия разработчиков сосредоточены на повышение автономности БПЛА и обеспечении их работы в автоматическом режиме в военных и в гражданских целях.

При построении системы автоматического управления БПЛА определенные трудности вызывают высокая нелинейность модели объекта управления, параметрические и внешние возмущения, проектные ограничения на переменные состояния и управления, а также необходимость поддерживать диапазон рабочих режимов в процессе управления полетом, который происходит, как правило, при существенном изменении внешних факторов. По этой причине стандартные методы синтеза программного управления БПЛА [18], связанные с решением обратных задач динамики, неэффективны и требуют дополнения или полной замены законами управления в форме динамической обратной связи.

Наиболее распространенными в задачах управления БПЛА являются простые в реализации ПИД-регуляторы [149]. Но они не позволяют учитывать проектные ограничения на стадии синтеза, недостаточно робастны и нуждаются в перенастройке при смене рабочих режимов, которая происходит неоднократно в большинстве нетривиальных профилей полета. В условиях параметрической неопределенности требуется привлечение и разработка методов адаптации и автоматической настройки коэффициентов обратной связи [8, 90, 118, 129].

Отдельная проблема возникает при действии внешних (ветровых) возмущений. Классический подход заключается в расширении пространства состояний за счет автономных динамических моделей, имитирующих действие внешних возмущений [27, 43, 47, 73, 130], и компенсации их влияния на основе полученных оценок. Однако попытка априори предусмотреть все возможные вариации моделей внешних воздействий с различными параметрами и структурой приведет к недопустимому усложнению расширенной математической модели объекта управления и потребует больших вычислительных мощностей.

Альтернативный метод обеспечения инвариантности по отношению к внешним возмущениям и вариации параметров заключается в использовании разрывных управлений с организацией скользящих режимов [58]. С целью использовать преимущества систем с разрывными управлениями и обойти проблемы их реализуемости, в данном разделе в рамках блочного подхода разработаны процедуры синтеза следящей системы БПЛА с сигмовидными обратными связями. Показано, что так же, как и в следящем дифференциаторе, предлагаемый подход позволяет учитывать проектные ограничения на скорость и перегрузку на стадии синтеза и обеспечить вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию и его движение в малой окрестности заданной кривой инвариантно по отношению к внешним возмущениям.

В данной главе в качестве математической модели объекта управления рассматриваются уравнения пространственного движения центра масс БПЛА в траекторной системе координат (два блока по три уравнения). Матрица перед управляющими воздействиями (входная матрица), выраженных через продольную и поперечную перегрузки, а также угол крена, является нелинейной и зависит от синусов и косинусов углов пути и наклона траектории. Для этой системы в разделе 5.1 в рамках блочного подхода с сигмовидными обратными связями разработаны законы управления двух типов. В первом регуляторе с целью компенсации в замкнутой системе перекрестных связей в законе управления используется обратная входная матрица, элементы которой вычисляются в реальном времени. Во втором регуляторе с целью сократить объем вычислений в реальном времени обратная матрица не используется. Для настройки параметров регулятора получена система иерархических неравенств, основанных на приведении матрицы перед управлением к верхнетреугольному виду. Оба регулятора обеспечивают в замкнутой системе инвариантность по отношению к внешним возмущениям с заданной точностью и не требуют ни построения модели возмущений, ни их оценивания, что упрощает структуру подсистемы наблюдения в условиях неполных измерений. Дифференциаторы–наблюдатели внешних сигналов, разработанные в главе 2, в данном разделе используются оценивания переменных состояния объекта управления. Для каждого регулятора построены наблюдатели состояния пониженного порядка с кусочно-линейными корректирующими воздействиями. В отличие от стандартных редуцированных наблюдателей [64, 121], где отбрасывается динамика измеряемых переменных, здесь, наоборот, отбрасывается динамика неизмеряемых переменных, которые в задаче наблюдения трактуются как внешние, ограниченные возмущения и оцениваются посредством корректирующих воздействий наблюдателя.

Обратим внимание на целесообразность использования наблюдателей состояния в системе управления БПЛА. Современные БПЛА многоразового использования оснащены приемником GPS и комплексом датчиков (микромеханическим гироскопом, акселерометром, барометрическим высотомером, трехосным магнитометром и др.). Они имею встроенные фильтры Калмана для выделения незашумленного сигнала и определяют текущие навигационные параметры, углы ориентации, угловые скорости и ускорения. Однако, во-первых, для БПЛА с малым взлетным весом (до 5 кг) предъявляются жесткие массогабаритные требования к измерительному комплексу. Во-вторых, дешевые и облегченные измерительные приборы имеют низкую точность. В-третьих, недостаточно надежны, так как в случае пропадания питания потребуют начальной настройки, которую нельзя выполнить во время полета. Таким образом, использование наблюдателей позволит отказаться от части датчиков, что удешевит и снизит взлетную массу БПЛА, либо при полном комплекте датчиков она будет выполнять функции системы аналитического резервирования измерительных приборов в целях сохранения работоспособности системы при их отказе.

5.1.2 Модель объекта управления. Постановка задач

Объектом управления является мини-БПЛА самолетного типа, который имеет жесткий корпус с осью симметрии и характеристики, указанные в таблице 5.1. Такие самолеты осуществляют доставку груза в заданный пункт, выполняют аэрофотосъемку, сельскохозяйственный или экологический мониторинг, предоставляя информацию о текущей обстановке. Проблема автоматического управления движением по заданному маршруту для них является актуальной.

Таблица 5.1 – Характеристики мини-БПЛА

Параметр	Значение
Максимальный вес, кг	5
Максимальная дальность полета, м	5000
Максимальная эксплуатационная скорость, м/с	26
Максимальное время полета, мин	60

В качестве математической модели объекта управления рассматриваются уравнения пространственного движения центра масс (материальной точки) БПЛА в траекторной системе координат [18]:

$$\dot{L} = V\cos\theta\cos\Psi,\ \dot{H} = V\sin\theta,\ \dot{Z} = -V\cos\theta\sin\Psi;$$
$$\dot{V} = (\bar{u}_1 - \sin\theta)g + f_1(t), \dot{\theta} = \frac{(\bar{u}_2 - \cos\theta)g + f_2(t)}{V}, \dot{\Psi} = -\frac{g\bar{u}_3 + f_3(t)}{V\cos\theta}, \tag{5.1}$$

где L – продольная дальность полета, H – высота полета, Z – боковое смещение, V – путевая скорость, θ – угол наклона траектории полета к горизонту, Ψ – путевой угол; $g = 9{,}8$ [м/с^2] – ускорение свободного падения, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)^{\mathrm{T}}$ – управляющие воздействия (вектор перегрузок):

$$\bar{u}_1 = n_x, \bar{u}_2 = n_y\cos\gamma, \bar{u}_3 = n_y\sin\gamma, \tag{5.2}$$

где n_x, n_y – продольная и поперечная перегрузки соответственно, γ – угол крена вектора перегрузки, $|\gamma| < \pi$; $f = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$ – неконтролируемые моменты и силы, в том числе сила ветра (внешние возмущения).

Выходные (регулируемые) переменные модели (5.1) – пространственные координаты, которые определяют положение центра масс БПЛА в режиме полета в траекторной системе координат. Вводятся следующее обозначение для векторов регулируемых переменных и их скоростей:

$$y_1 = (y_{11} := L, y_{12} := H, y_{13} := Z)^{\mathrm{T}}; \dot{y}_1 = y_2 = (y_{21} := \dot{L}, y_{22} := \dot{H}, y_{23} := \dot{Z})^{\mathrm{T}}. \tag{5.3}$$

Режимы взлета и посадки здесь не рассматриваются, все построения выполняются при $t \in [t_{\mathrm{start}}; t_{\mathrm{end}}]$ – время полета после набора высоты и до захода на посадку. В режиме полета $V > 0, |\theta(t)| < \pi/2, |\Psi(t)| < \pi/2,$ поэтому существуют прямые и обратные диффеоморфные замены переменных

$$y_{21}=V\cos\theta\cos\Psi,\ y_{22}=V\sin\theta,\ y_{23}=-V\cos\theta\sin\Psi,$$

$$V(t)=\sqrt{y_{21}^2(t)+y_{22}^2(t)+y_{23}^2(t)},y_{21}^2(t)+y_{23}^2(t)\neq 0,$$

$$\sin\theta(t)=\frac{y_{22}(t)}{V(t)},\cos\theta=\sqrt{1-\frac{y_{22}^2(t)}{V^2(t)}},\tag{5.4}$$

$$\cos\Psi(t)=\frac{y_{21}(t)}{V(t)\cos\theta(t)},\sin\Psi(t)=-\frac{y_{23}(t)}{V(t)\cos\theta(t)},t\in[t_{\text{start}};t_{\text{end}}].$$

Модель (5.1) в координатном базисе (5.3) имеет канонический вид вход–выход

$$\dot{y}_1=y_2,\ \dot{y}_2=ag+B(\theta,\Psi)(u+f(t)),\ a=(0;-1;0)^{\mathrm{T}};u=g\bar{u};\tag{5.5}$$

$$B=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\Psi & -\sin\theta\cos\Psi & \sin\Psi\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ -\cos\theta\sin\Psi & \sin\theta\sin\Psi & \cos\Psi\end{pmatrix},\det B\equiv 1,B^{-1}=B^{\mathrm{T}}.\tag{5.6}$$

Для системы (5.5) рассматривается проблема отслеживания выходом $y_1(t)$ заданных сигналов $g_1(t)=(g_{11},g_{12},g_{13})^{\mathrm{T}}$ в следующих предположениях:

– прямым измерениям доступны только траекторные координаты $y_1(t)$, шумы в измерениях отсутствуют или уже отфильтрованы с помощью встроенных алгоритмов, которыми снабжены современные измерительные системы;

– текущие значения задающих воздействий $g_1(t)$ известны, их производные не известны, но задача их оценивания не ставится;

– автономные динамические модели, имитирующие внешние воздействия, в построения не вводятся, сигналы $f(t)$, $\dot{f}(t)$, $\dot{g}_1(t)$ $\ddot{g}_1(t)$ $\dddot{g}_1(t)$ – неизвестные функции времени, ограниченные известными константами:

$$|f_i(t)|\leq F_i,\ |\dot{f}_i(t)|\leq \bar{F}_i,|g_{1i}^{(j)}(t)|\leq G_{ji}\leq G_j,\ j=\overline{1,3},i=\overline{1,3}.\tag{5.7}$$

Задача планирования пространственной траектории в данном разделе не рассматривается. Задающие воздействия полагаются допустимыми для отработки конкретным БПЛА, т. е. аналогично (3.12)

$$g_{1i}(t)\in C^3,\ \|g_1^{(j)}(t)\|\leq G_j<Y_j,|y_{1i}^{(j)}(t)|\leq Y_{ji}\leq Y_j,\ j=\overline{1,3},i=\overline{1,3},\tag{5.8}$$

где $\left\| y_1^{(j)} \right\| \le Y_j$ – динамические ограничения конкретного БПЛА, $t \in [t_{\text{start}}; t_{\text{end}}]$; здесь и далее $\|*\|$ – l_∞-норма вектора, а именно $Y_j = \max\{Y_{j1}, Y_{j2}, Y_{j3}\}$.

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей стабилизацию ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_{1i}(t)$ с заданной точностью

$$\left| e_{1i}(t) \right| \le \delta_{1i}, t > t_1 \ge t_{\text{start}}, i = \overline{1,3}, \tag{5.9}$$

что обеспечивает вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию за конечное время и дальнейшее движение в ее малой окрестности. Данная задача включает, во-первых, синтез базового (т. е. в предположении, что все переменные состояния доступны для измерений) закона управления, обеспечивающего инвариантность по отношению к внешним возмущениям; во-вторых, синтез дифференциатора–наблюдателя для оценивания не измеряемых сигналов, по которым формируется обратная связь. Базовые законы управления в форме обратной связи синтезируются по принципу блочного управления. С целью обеспечения ограничений на скорость и перегрузку на стадии синтеза используются нелинейные, гладкие и всюду ограниченные сигма-функции (см. раздел 3.1). В следующих подразделах в рамках блочного подхода [34, 38, 42, 115] разработаны два варианта синтеза динамической обратной связи с сигма-управлениями на основе математической модели (5.5), обеспечивающих (5.9).

5.1.3 Закон комбинированного управления с компенсацией перекрестных связей

Введем уравнение относительно ошибок слежения $e_1 = y_1 - g_1 \in R^3$:

$$\dot{e}_1 = y_2 - \dot{g}_1. \tag{5.10}$$

По аналогии с процедурой синтеза следящего дифференциатора (см. раздел 3.2), в уравнении (5.10) векторная переменная $y_2(t)$ трактуется как фиктивное управление, которое выбирается в виде сигма-функций:

$$y_2 = -M_1\sigma(K_1 e_1) = -(m_{11}\sigma(k_{11}e_{11}), m_{12}\sigma(k_{12}e_{12}), m_{13}\sigma(k_{13}e_{13}))^{\mathrm{T}},$$

$$M_1 = \operatorname{diag}(m_{1i}), K_1 = \operatorname{diag}(k_{1i}), m_{1i}, k_{1i} = \text{const} > 0, i = \overline{1,3}.$$

Введя невязку между реальным и желаемым фиктивным управлением

$$e_2 = y_2 + M_1\sigma(K_1 e_1), \tag{5.11}$$

получим систему с замкнутыми локальными связями

$$\begin{aligned} \dot e_1 &= -M_1\sigma(K_1 e_1) + e_2 - \dot g_1, \\ \dot e_2 &= ag + 0{,}5M_1K_1\Lambda_1(y_2 - \dot g_1) + B(\theta,\Psi)(u + f(t)), \end{aligned} \tag{5.12}$$

где $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(1-\sigma^2(k_{1i}e_{1i}))$, $i=\overline{1,3}$. В системе (5.12) $f(t)$ и $\dot g(t)$ трактуются как внешние неизвестные ограниченные возмущения. Для компенсации перекрестных связей в системе (5.12) вводится комбинированное управление с сигмоидальной стабилизирующей составляющей вида:

$$u = -B^{\mathrm{T}}(\theta,\Psi)(M_2\sigma(K_2 e_2) + ag + 0{,}5M_1K_1\Lambda_1 y_2), \tag{5.13}$$

$$M_2 = \mathrm{diag}(m_{2i}), K_2 = \mathrm{diag}(k_{2i}), m_{2i}, k_{2i} = \mathrm{const} > 0, i = \overline{1,3},$$

что с учетом (5.10) приведет к замкнутой системе

$$\begin{aligned} \dot e_1 &= -M_1\sigma(K_1 e_1) + e_2 - \dot g_1, \\ \dot e_2 &= -M_2\sigma(K_2 e_2) + \varphi, \ \varphi = B(\theta,\Psi)f - 0{,}5M_1K_1\Lambda_1\dot g_1. \end{aligned} \tag{5.14}$$

В силу (5.6)–(5.7) для элементов вектора $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{\mathrm{T}}$ справедливы следующие оценки: $|\varphi_i(t)| \le \bar\varphi_i = F + 0{,}5m_{1i}k_{1i}G_{1i}, i = \overline{1,3}, F = F_1 + F_2 + F_3$, $t \in [t_{\mathrm{start}}; t_{\mathrm{end}}]$.

Выбором амплитуд m_{ji} сигмовидных обратных связей (5.11), (5.13) обеспечивается последовательное попадание переменных системы (5.14) в области

$$\begin{aligned} &|e_{2i}(t)| \le 2{,}2/k_{2i} \le \delta_{2i}, t > t_2 \ge t_{\mathrm{start}}; \\ &|e_{1i}(t)| \le 2{,}2/k_{1i} \le \delta_{1i}, t > t_1 > t_2, \ i = 1,2,3, \end{aligned} \tag{5.15}$$

а выбор больших коэффициентов k_{ji} обеспечивает желаемые границы этих областей (5.9). Согласно идеологии блочного принципа управления переходный процесс по переменным $e_2(t)$ апериодический $|e_{2i}(t)| \le \max(|e_{2i}(0)|, \delta_{2i})$, $t \ge t_{\mathrm{start}}$, что в силу $y_2 = e_2 - M_1\sigma(K_1 e_1)$ (5.11) гарантирует выполнение проектных ограничений по скорости (5.8) при условии $m_{1i} + 2{,}2/k_{2i} \le Y_{1i}$, $i = 1,2,3$. Тогда в первом уравнении (5.14) переменные $e_{2i}(t)$ можно трактовать как внешние, затухающие возмущения, однако для переменных $e_{1i}(t)$ монотонное убывание по модулю гарантируется только при $t > t_2$, когда $|e_{2i}(t)| \le 2{,}2 / k_{2i}$. Достаточные условия для выбора амплитуд имеют вид, аналогичный (3.28):

$$\begin{aligned} &2{,}75 / k_{2i} + 1{,}25 G_{1i} < m_{1i} \le Y_{1i} - 2{,}2 / k_{2i}, \\ &1{,}25(F + 0{,}5 m_{1i} k_{1i} G_{1i}) < m_{2i}. \end{aligned} \qquad (5.16)$$

Приведем алгоритм настройки коэффициентов закона управления (5.13), обеспечивающий заданную точность слежения (5.9):

1) при заданных δ_{1i} (5.9) в первом блоке фиксируются $k_{1i}^* \ge 2{,}2 / \delta_{1i}$;

2) на основе первого неравенства (5.16) фиксируются значения амплитуд в первом блоке $1{,}25 G_{1i} < m_{1i}^* < Y_{1i}$ и большие коэффициенты во втором блоке

$k_{2i}^* \ge \max\{2{,}2/(0{,}8 m_{1i}^* - G_{1i}); 2{,}2/(Y_{1i} - m_{1i})\}$;

3) на основе второго неравенства (5.16) фиксируются значения амплитуд во втором блоке $m_{2i}^* > 1{,}25(F + 0{,}5 m_{1i}^* k_{1i}^* Y_{1i})$, $i = 1, 2, 3$.

Данный подход гарантирует, что для всех $t \ge t_{\text{start}}$ управления и, следовательно, ускорение БПЛА, будут ограничены:

$$|u_i(t)| \le g + \sum_{j=1}^{3} (p_{2j} + 0{,}5 p_{1j} l_{1j} Y_{1j}) = U, i = 1,2,3; \ \|\dot{y}_2\| \le U + F.$$

При проектировании БПЛА данное неравенство является основой для выбора исполнительных устройств определенной мощности при заданном диапазоне режимов полета и точности отслеживания (5.9). И, наоборот, для конкретного БПЛА с имеющимися ограничениями $\|u\| \le U$, $\|\dot{y}_2\| \le U + F \le Y_2$ оно является основой для планирования рабочих режимов и расчета возможной точности отслеживания при наихудших допускаемых внешних воздействиях (5.7).

Для реализации закона управления (5.13) требуются следующие сигналы: $y_2(t)$, $e_2(y_1(t), g_1(t), y_2(t))$, $\theta(y_2(t))$, $\Psi(y_2(t))$. Учитывая, что $y_1(t), g_1(t)$ измеряются, ставится задача оценивания переменных $y_2(t)$ с помощью динамического дифференциатора–наблюдателя состояния, построенного на основе системы (5.5). Полученные оценки будут использованы для вычисления в реальном времени переменных $e_2(t)$ (5.11), а также синусов и косинусов от углов пути $\Psi(t)$ и наклона траектории $\theta(t)$ (5.4).

Система (5.5) является наблюдаемой относительно выходных переменных y_1 [40], однако из-за наличия во втором уравнении внешних возмущений задачу оценивания $y_2(t)$ может быть решена только с заданной точностью. Для упрощения структуры наблюдателя и сокращения вычислений, выполняемых в реальном времени, предлагается использовать дифференциатор–наблюдатель пониженного порядка, построенный как копия первого уравнения системы (5.5)

$$\dot{z} = v(\varepsilon), \tag{5.17}$$

где $z \in R^3$ – вектор состояния, $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ – вектор корректирующих воздействий наблюдателя, $\varepsilon = y_1 - z \in R^3$ – вектор ошибок наблюдения. В отличие от стандартных редуцированных наблюдателей, где отбрасывается динамика измеряемых переменных [64, 121], здесь, наоборот, отбрасывается динамика не измеряемых y_2, которые в уравнении, записанном относительно ошибок наблюдения $\dot{\varepsilon} = y_2 - v$, трактуются как внешние, ограниченные возмущения (5.8). Задача наблюдения сводится к стабилизации ошибок наблюдения и их производных, тогда оценки не измеряемых сигналов будут получены с помощью корректирующих воздействий наблюдателя (5.17). Из-за отбрасывания динамической модели «внешних возмущений» данная задача может быть решена только с заданной точностью:

$$\|\varepsilon(t)\| \le \alpha_0,\, t > t_{01} \ge 0, \|\dot{\varepsilon}(t)\| = \|y_2(t) - v(t)\| \le \alpha_1, t > t_0 > t_{01}, t_0 < t_2. \tag{5.18}$$

При $t > t_0 \ge t_{\text{start}}$ корректирующие воздействия служат оценками «внешнего возмущения» $v_i(t) = y_{2i}(t) \pm \alpha$ и используются для вычисления переменной $\tilde{e}_2 = v + M_1\sigma(K_1 e_1)$ (5.11) и элементов матрицы $B^{\mathrm{T}}(\theta, \Psi)$ (5.6).

Аналогично (2.4), (2.5) используем в наблюдателе кусочно-линейные корректирующие воздействия

$$v_i = p\text{sat}(l\varepsilon_i) = \begin{cases} p\,\text{sign}\varepsilon_i, & |\varepsilon_i| > 1/l; \\ pl\varepsilon_i, & |\varepsilon_i| \le 1/l, p, l > 0, i = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{5.19}$$

С учетом (2.8) амплитуда p корректирующих воздействий (5.19) выбирается из достаточных условий аналогично (2.9)

$$p > Y_1 \Rightarrow \varepsilon^T \dot{\varepsilon} = \varepsilon^T (y_2 - v) \le \|\varepsilon\|(Y_1 - p) < 0, \tag{5.20}$$

что при $\|\varepsilon_i(0)\| > 1/l$ за конечное время обеспечивает сходимость ошибок наблюдения в линейную зону, а при $\|\varepsilon_i(0)\| < 1/l$ ошибки наблюдения не выйдут из нее. Тогда при $t > t_0 \ge t_{\text{start}}$ дифференциальные уравнения для ошибок наблюдения и их производных примут вид

$$\dot{\varepsilon} = y_2 - pl\varepsilon, \ddot{\varepsilon} = \dot{y}_2 - pl\dot{\varepsilon},$$

где $\dot{y}_2$ трактуется как ограниченное возмущение $\|\dot{y}_2(t)\| \le Y_2$. Достаточные условия, при которых гарантируется выполнение обоих неравенств (5.18)

$$\varepsilon^{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\ddot{\varepsilon} \le \|\varepsilon\|(Y_1 - pl\|\varepsilon\|) + \|\dot{\varepsilon}\|(Y_2 - pl\|\dot{\varepsilon}\|) < 0,$$

имеют вид

$$l > \frac{1}{p}\max\left\{\frac{Y_1}{\alpha_0 - \overline{\alpha}_0}, \frac{Y_2}{\alpha_1 - \overline{\alpha}_1}\right\}, \tag{5.21}$$

где $\alpha_j - \overline{\alpha}_j > 0, j = 0,1,$ $\overline{\alpha}_j$ служат оценками для области сходимости устойчивых собственных движений переменных $\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)$ за заданное время при начальных условиях $\varepsilon(0)$, которые при измерении $y_1(t)$ можно установить произвольно с учетом ограничений $y_{21}^2(t) + y_{23}^2(t) \ne 0 \Rightarrow \varepsilon_{21}(0) \ne 0$, $\varepsilon_{23}(0) \ne 0$.

Таким образом, представленный закон управления в виде динамической обратной связи решает поставленную задачу (5.9). При этом обеспечивает инвариантность по отношению к внешним возмущениям без использования динамических генераторов задающих воздействий и возмущений, гарантируется ограниченность элементов векторов скорости, ускорения и управления, однако требуется выполнять плохо обусловленные вычисления элементов матрицы B^{T} в реальном времени, что приводит к снижению точности отслеживания по сравнению с расчетными значениями (5.9). В следующем подразделе рассматривается альтернативный метод синтеза динамической сигмовидной обратной связи, имеющий такие же преимущества, но лишенный указанных недостатков.

5.1.4 Метод иерархии управлений

В уравнении относительно ошибки слежения (5.10) выберем комбинированное фиктивное управление с сигмовидным слагаемым $y_2 = \dot{g}_1 - M_1\sigma(K_1 e_1)$, введем невязку между реальным и желаемым фиктивным управлением

$$e_2 = y_2 - \dot{g}_1 + M_1\sigma(K_1 e_1) \tag{5.22}$$

и получим систему с замкнутыми локальными связями

$$\dot{e}_1 = -M_1\sigma(K_1 e_1) + e_2, \dot{e}_2 = B(u + f(t)) + \phi, \tag{5.23}$$

где элементы векторов $f(t)$ и $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$: $\phi = ag + \ddot{g}_1 + 0{,}5 M_1 K_1 \Lambda_1 (y_2 - \dot{g}_1)$ трактуются как внешние, ограниченные возмущения

$$\begin{gathered} |\phi_i(t)| \le G_{2i} + 0{,}5 m_{1i} k_{1i} (Y_{1i} + G_{1i}) = \Phi_i, i = 1,3, \\ |\phi_2(t)| \le g + G_{22} + 0{,}5 m_{12} k_{12} (Y_{12} + G_{12}) = \Phi_2,\ t \ge t_{\text{srart}}. \end{gathered} \tag{5.24}$$

С целью избежать вычислений элементов матрицы $B^{\mathrm{T}}(\theta, \Psi)$ в реальном времени используем чисто сигмовидное истинное управление. Тогда в замкнутой системе перед управлением останется матрица B (5.6). Для настройки параметров управления используем метод иерархии управлений, который был предложен для элементарных систем с разрывными управлениями [58]. Идея метода заключается в том, что в замкнутой системе согласно установленной иерархии (которая, например, совпадает с порядковыми номерами переменных) последовательно, сверху вниз, за конечное время организуются идеальные скользящие режимы на соответствующих поверхностях переключения. После возникновения скользящего режима на соответствующей поверхности, согласно методу эквивалентного управления, из текущего уравнения статики (т. е. полагая соответствующую производную тождественно равной нулю) можно последовательно выразить непрерывные (эквивалентные) управления и подставить их в нижние уравнения. В итоге матрица перед управлением примет верхнетреугольный вид, что является основой для иерархического, снизу вверх, выбора амплитуд разрывных управлений, обеспечивающих стабилизацию элементарной системы в установленном порядке. При допредельной реализации разрывных управлений с помощью *S*-образных обратных связей [34] в системах с внешними возмущениями следует учитывать, что стабилизация переменных состояния и их производных возможна только с заданной точностью. В данных построениях (в отличие от систем с идеальными скользящими режимами) следует учитывать ненулевые значения производных «верхних» переменных при выборе амплитуд «нижних» управлений.

Рассмотрим соответствующую процедуру применительно ко второму уравнению системы (5.23), в котором установим иерархию сходимости переменных, совпадающую с их порядковыми номерами. Для имитации изложенного метода введем преобразующую нижнетреугольную матрицу Q, умножение на которую слева обеспечивает верхнетреугольный вид матрицы B:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_2 & 1 & 0 \\ q_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, q_2 = -\mathrm{tg}\theta / \cos\Psi, q_3 = \mathrm{tg}\Psi,$$

$$QB = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\Psi & -\sin\theta\cos\Psi & \sin\Psi \\ 0 & 1/\cos\theta & -\mathrm{tg}\theta\mathrm{tg}\Psi \\ 0 & 0 & 1/\cos\Psi \end{pmatrix} = (b_{ij}). \tag{5.25}$$

При $|\theta(t)| < \pi/2$, $|\Psi(t)| < \pi/2$ диагональные элементы преобразованной матрицы (5.25) положительные $0 < \bar{b}_{ii} \le b_{ii} \le \bar{\bar{b}}_{ii}$, $i = \overline{1,3}$, что диктует следующий закон сигмовидного управления:

$$u = -M_2 \sigma(K_2 e_2), \tag{5.26}$$

$$M_2 = \mathrm{diag}(m_{2i}), K_2 = \mathrm{diag}(k_{2i}), m_{2i}, k_{2i} = \mathrm{const} > 0, i = \overline{1,3}.$$

Для регуляризации процедуры настройки умножим обе части второго уравнения системы (5.23) на преобразующую матрицу:

$$Q\dot{e}_2 = Q(B(u+f)+\phi) \Leftrightarrow \dot{e}_2 = QB(u+\eta)+\bar{\phi}, \tag{5.27}$$

$$\bar{\phi} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 + q_2(\phi_1 - \dot{e}_{21}) \\ \phi_3 + q_3(\phi_1 - \dot{e}_{21}) \end{pmatrix}.$$

Система (5.27) является основой для выбора снизу вверх амплитуд сигмовидных управлений с учетом установленной иерархии сходимости:

1) $|e_{21}(t)| \le 2{,}2/k_{21} \le \delta_{21}, |\dot{e}_{21}(t)| \le \Delta_{21}, t > t_{21} > t_{\text{start}}$;

2) $|e_{22}(t)| \le 2{,}2/k_{22} \le \delta_{22}, t > t_{22} > t_{21}$;

3) $|e_{23}(t)| \le 2{,}2/k_{23} \le \delta_{23}, t > t_{23} > t_{22}, t_{23} \le t_2$,

т. е. выбор амплитуд m_{23}, m_{22} выполняется при $|e_{21}(t)| \le \delta_{21}, |\dot{e}_{21}(t)| \le \Delta_{21}$. Из практических соображений примем $|\theta(t)| \le 0{,}45\pi$, $|\Psi(t)| \le 0{,}45\pi$. Тогда нижние оценки диагональных элементов матрицы QB (5.25) $0 < \bar{b}_{ii} \le b_{ii}$, $i = \overline{1{,}3}$ и верхняя оценка $|b_{23}| \le \bar{\bar{b}}_{23}$ определяются с учетом расчетных значений

$$\cos(0{,}45\pi) \approx 0{,}17,\ 1/\cos(0{,}45\pi) \approx 5{,}76,\ \mathrm{tg}(0{,}45\pi) \approx 5{,}7,$$

$$|q_2(t)| \le 33 = \bar{q}_2,\ |q_3(t)| \le 5{,}7 = \bar{q}_3,\ |b_{12}| < 1,\ |b_{13}| < 1,$$

а для элементов вектора $\bar{\phi}$ в системе (5.27) с учетом (5.24) имеем:

$$|\bar{\phi}_1(t)| \le \Phi_1, |\bar{\phi}_2(t)| \le \Phi_2 + \bar{q}_2(\Phi_1 + \Delta_{21}) = \bar{\Phi}_2, |\bar{\phi}_3(t)| \le \Phi_3 + \bar{q}_3(\Phi_1 + \Delta_{21}) = \bar{\Phi}_3.$$

Данный подход также гарантирует, что в режиме полета управления будут ограничены: $|u_i(t)| \le m_{2i}$, $i = 1, 2, 3$. Аналогично (5.16), диапазон для выбора амплитуд сигма-функций в первом уравнении (5.23) имеет вид

$$2{,}75/k_{2i} < m_{1i} < Y_{1i} - G_{1i},\ i = \overline{1{,}3}, \tag{5.28}$$

где верхнее ограничение, введенное с учетом выбора фиктивного управления $y_2 = \dot{g}_1 - M_1\sigma(K_1 e_1)$, служит для обеспечения выполнения проектных ограничений по скорости в процессе управления. Однако, в отличие от замкнутой системы (5.14), в замкнутой системе (5.23), (5.26) переходный процесс является апериодическим только для $e_{21}(t)$. Для переменных $e_{22}(t)$, $e_{23}(t)$ монотонная сходимость в указанные окрестности гарантируется только при $t > t_{21}$. Как следствие, проектные ограничения по соответствующим элементам вектора скорости в силу $y_{2i} = \dot{g}_{1i} + e_{2i} - m_{1i}\sigma(k_{1i}e_{1i})$ могут быть незначительно нарушены в начале переходного процесса.

Приведем алгоритм настройки параметров закона управления (5.26):

1) при заданных δ_{1i} определяются $k_{1i} \geq 2{,}2/\delta_{1i}$;

2) на основе неравенства (5.28) фиксируются амплитуды в первом блоке $0 < m_{1i}^* < Y_{1i} - G_{1i}$ и определяются большие коэффициенты во втором блоке

$k_{2i}^* \geq 2{,}75/m_{1i}^*$, $i = \overline{1,3}$;

3) на основе системы (5.27) снизу вверх фиксируются

$$m_{23}^* > 1{,}25\left(F_3 + \frac{\overline{\Phi}_3}{\overline{b}_{33}}\right),\ m_{22}^* > 1{,}25\left(F_2 + \frac{\overline{\overline{b}}_{23}(m_{23}^* + F_3) + \overline{\Phi}_2}{\overline{b}_{22}}\right),$$

$$m_{21}^* > 1{,}25\left(F_1 + \frac{m_{22}^* + F_2 + m_{23}^* + F_3 + \Phi_1}{\overline{b}_{11}}\right).$$

Для реализации закона управления (5.26) требуется смешанная переменная $e_2(t) = y_2(t) - \dot{g}_1(t) + M_1\sigma(K_1 e_1(t))$. Ошибка слежения $e_1(t) = y_1(t) - g_1(t)$ измеряется, поэтому оценку $e_2(t)$ можно получить с помощью редуцированного дифференциатора–наблюдателя, аналогичного (5.17), но построенного на основе первого уравнения преобразованной системы (5.23) в виде

$$\dot{z} = -M_1\sigma(K_1 e_1) + v(\varepsilon), \tag{5.29}$$

что дает следующую систему относительно ошибок наблюдения $\varepsilon = e_1 - z$:

$$\dot{\varepsilon} = e_2 - v(\varepsilon),\ \varepsilon \in R^3, \tag{5.30}$$

где $\|e_2(t)\| = Y_1 + G_1 + \max\{m_{1i}\} = E$, $\|\dot{e}_2(t)\| \leq \sum_{i=1}^{3} m_{2i}^* + F + \max\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\} = \overline{E}$.

В данном случае также используются кусочно-линейные корректирующие воздействия (5.19), настраиваемые аналогично (5.20), (5.21):

$$p > E,\ l > \frac{1}{p}\max\left\{\frac{E}{\alpha_0 - \overline{\alpha}_0}, \frac{\overline{E}}{\alpha_1 - \overline{\alpha}_1}\right\}. \tag{5.31}$$

В отличие от дифференциатора–наблюдателя для оценивания скоростей пространственных переменных в данном случае нет ограничений на начальные условия, поэтому можно установить $z(0) = e_1(0) \Rightarrow \varepsilon(0) = \vec{0}$, тогда

$$\|\varepsilon(t)\| \le \alpha_0,\ t \ge t_{\text{start}}, \|\dot{\varepsilon}(t)\| = \|e_2(t) - v(t)\| \le \alpha_1, t > t_0 \ge t_{\text{start}}, t_0 < t_2, \tag{5.32}$$

и базовый закон управления будет реализован в виде:

$$u = -M_2 \sigma(K_2 v). \tag{5.33}$$

Этот метод более трудоемкий на подготовительной стадии, но зато упрощает структуру регулятора и вычисления, выполняемые в реальном времени.

5.1.5 Результаты моделирования

Численное моделирование разработанных алгоритмов проводилось в среде MATLAB-Simulink с методом интегрирования Эйлера и с постоянным шагом 0,0001. Для системы (5.5) с начальными условиями $y_1(0) = (0;100;1)^{\mathrm{T}}$ при действии внешних возмущений $f_1(t) = 0{,}2\sin t, f_2(t) = 0{,}24\sin t, f_3(t) = 0{,}9\cos t$ ставилась задача вывода центра масс БПЛА на пространственную траекторию:

$$g_{11}(t) = 9\sin(t/9), g_{12}(t) = t + 100, g_{13}(t) = 9\cos(t/9).$$

На основе неравенств (5.15)–(5.16) были приняты следующие коэффициенты первого регулятора (5.13): $K_2 = \operatorname{diag}(4{,}84;1{,}61;4{,}4)$, $K_1 = \operatorname{diag}(105;90;95)$, $M_1 = \operatorname{diag}(2;4;2)$, $M_2 = \operatorname{diag}(30;27;38)$.

На рисунках 5.1–5.2 для замкнутой эталонной системы (5.5), (5.13) (в предположении, что все сигналы, по которым формируется обратная связь, измеряются), показаны графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_{1i}(t)$ [м] и скоростей $y_{2i}(t)$ [м/с] соответственно, $i = \overline{1,3}$. Как видно из рисунка 5.2, в замкнутой системе выполняются проектные ограничения по скорости (5.8): $|\dot{y}_{1i}(t)| \le 26$[м/с], $i = \overline{1,3}$ (см. таблицу 5.1).

При моделировании системы с измерениями $y_1(t)$, $g_1(t)$ и наблюдателем (5.17), (5.19) на основе неравенств (5.20) были приняты следующие коэффициенты корректирующих воздействий: $p = 4, l = 420$.

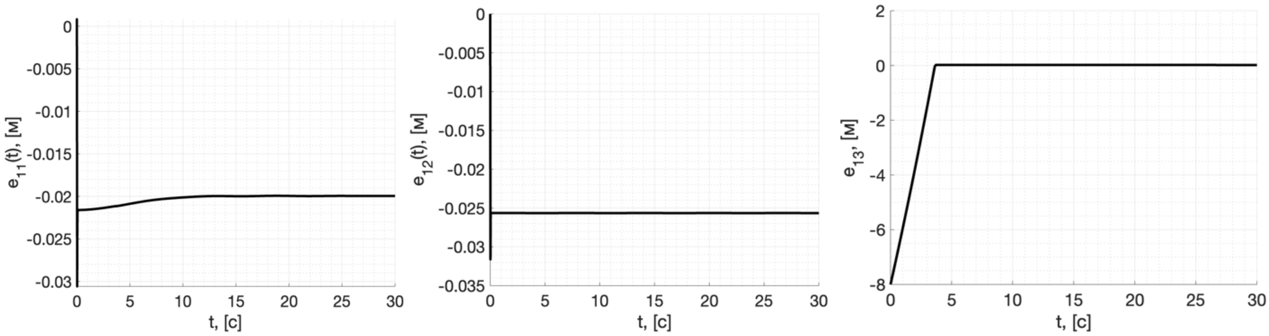


Рисунок 5.1 – Графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_{1i}(t)$ [м], $i = \overline{1,3}$
в замкнутой системе (5.5), (5.13) с полными измерениями

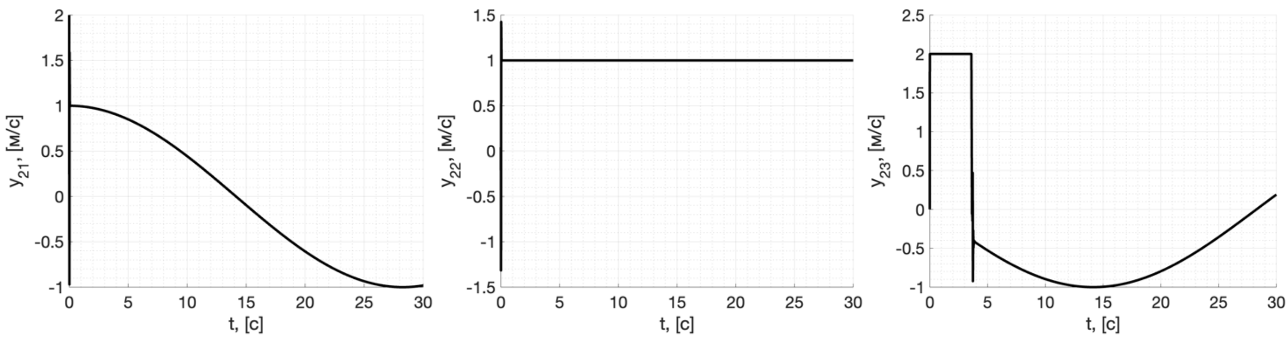


Рисунок 5.2 – Графики элементов вектора скорости $y_{2i}(t)$ [м/с], $i = \overline{1,3}$

На рисунках 5.3–5.4 для системы (5.5), (5.13), замкнутой через наблюдатель состояния (5.17), (5.19), показаны графики ошибок оценивания не измеряемых сигналов $y_{2i}(t) - \nu_i(t)$ [м/с] и ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_{1i}(t)$ [м] соответственно, $i = \overline{1,3}$. На рисунке 5.5 показан процесс отслеживания центром масс $y_1(t)$ заданной пространственной траектории $g_1(t)$ (пунктирная линия).

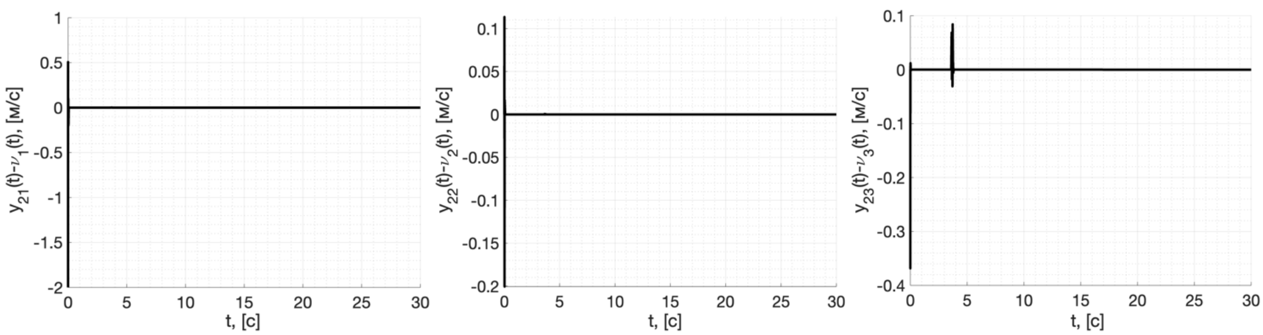


Рисунок 5.3 – Графики ошибок наблюдения $y_{2i}(t) - \nu_i(t)$ [м/с], $i = \overline{1,3}$
в замкнутой системе (5.5), (5.13) с наблюдателем (5.17), (5.19)

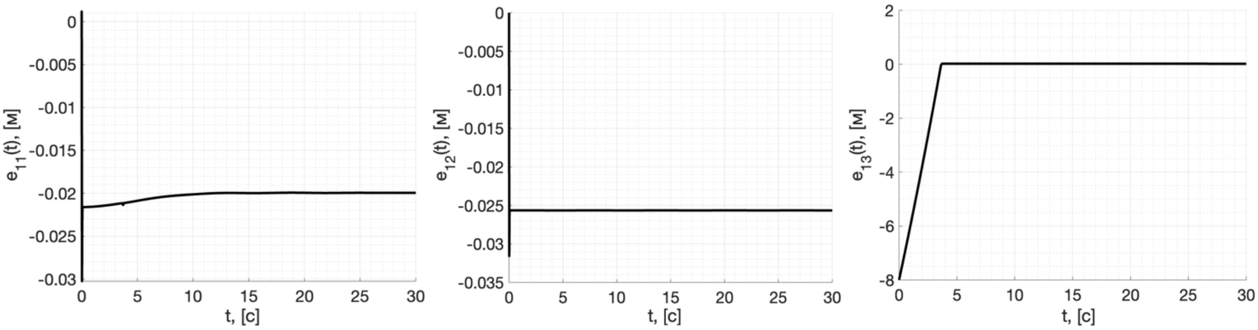


Рисунок 5.4 – Графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_{1i}(t)$ [м], $i = \overline{1,3}$ в замкнутой системе (5.5), (5.13) с наблюдателем (5.17), (5.19)

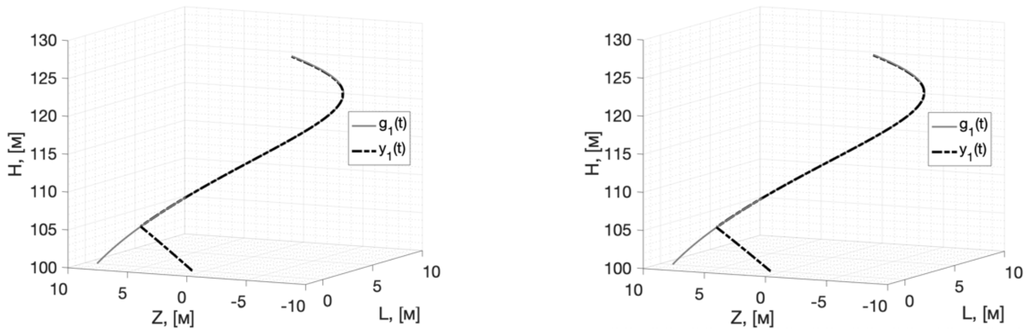


Рисунок 5.5 – Пространственные графики изображающей точки эталонной системы (слева) и системы с наблюдателем (справа)

В таблице 5.2 даны показатели ошибок слежения в замкнутых системах с управлением (5.13) со статической и динамической обратной связью.

Таблица 5.2 – Показатели процессов сходимости ошибок слежения

	Максимальное абсолютное отклонение [м] ошибок слежения от нуля	Время переходного процесса T [с]: $\lvert e_{1i}(t)\rvert \le 0{,}03$ [м], $t > T$	Ошибка стабилизации [м] в установившемся режиме при $t > 10$ [с]
Эталонная система (5.5) со статической обратной связью (5.13)	$\lvert e_{11}(0{,}028)\rvert = 0{,}0306$	0,031	$\lvert e_{11}(t)\rvert \le 3\times10^{-6}$
	$\lvert e_{12}(0{,}022)\rvert = 0{,}0316$	0,026	$\lvert e_{12}(t)\rvert \le 2{,}7\times10^{-2}$
	$\lvert e_{13}(0)\rvert = 8{,}0$	3,627	$\lvert e_{13}(t)\rvert \le 2{,}5\times10^{-6}$
Система (5.5) с динамической обратной связью (5.13), (5.17), (5.19)	$\lvert e_{11}(0{,}028)\rvert = 0{,}0303$	0,030	$\lvert e_{11}(t)\rvert \le 3\times10^{-6}$
	$\lvert e_{12}(0{,}022)\rvert = 0{,}0316$	0,026	$\lvert e_{12}(t)\rvert \le 3\times10^{-2}$
	$\lvert e_{13}(0)\rvert = 8{,}0$	3,627	$\lvert e_{13}(t)\rvert \le 2{,}5\times10^{-6}$

На рисунках 5.6–5.7 для замкнутой эталонной системы (5.5) со статической обратной связью (5.26) с коэффициентами $M_1 = \mathrm{diag}(1{,}2;\, 1{,}2;\, 1{,}2)$, $K_1 = \mathrm{diag}(110;\, 110;\, 110)$, $M_2 = \mathrm{diag}(14;\, 14;\, 14)$, $K_2 = \mathrm{diag}(650;\, 650;\, 650)$ показаны графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_{1i}(t)$ [м] и $y_{2i}(t)$ [м/с] соответственно, $i = \overline{1,3}$. Как видно из рисунка 5.7, в замкнутой системе в данном случае также выполняются проектные ограничения по скорости (5.8): $\left|\dot{y}_{1i}(t)\right| \le 26$ [м/с], $i = \overline{1,3}$

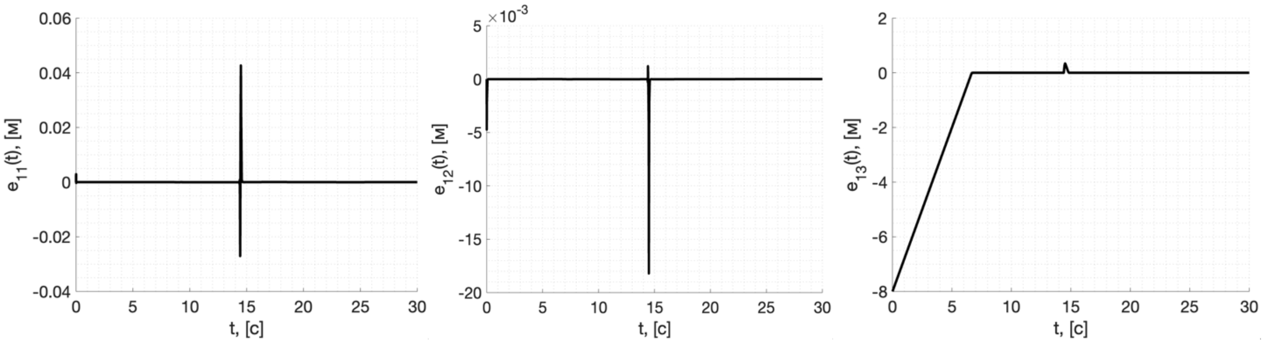


Рисунок 5.6 – Графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_{1i}(t)$ [м], $i = \overline{1,3}$ в замкнутой системе (5.5), (5.26) с полными измерениями

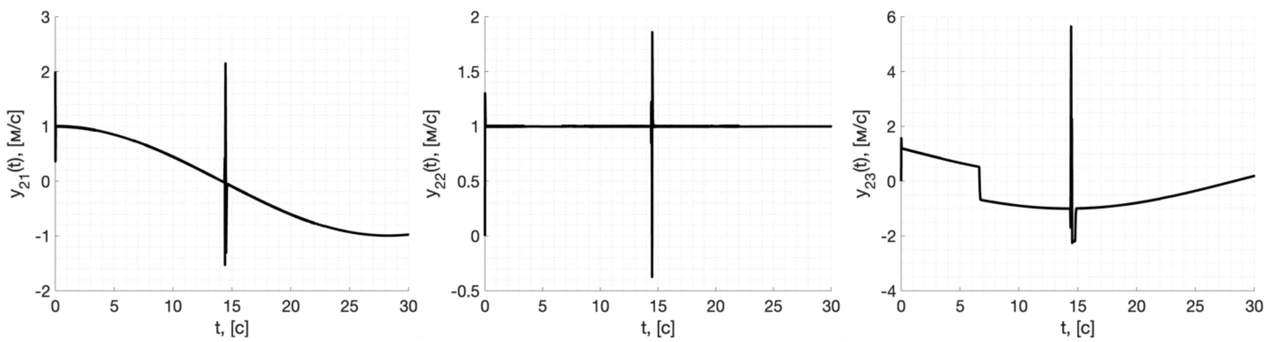


Рисунок 5.7 – Графики элементов вектора скорости $y_{2i}(t)$ [м/с], $i = \overline{1,3}$

При моделировании системы с измерениями $y_1(t)$, $g_1(t)$ и дифференциатором–наблюдателем (5.29) с кусочно-линейной коррекцией (5.19) на основе неравенств (5.31) были приняты следующие коэффициенты: $p = 8, l = 1200$.

На рисунках 5.8–5.9 для системы (5.5), (5.26), замкнутой через наблюдатель состояния (5.29), показаны графики ошибок оценивания не измеряемых сигналов $y_{2i}(t) - \nu_i(t)$ [м/с] и ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_{1i}(t)$ [м] соответственно, $i=\overline{1,3}$. На рисунке 5.10 показан процесс отслеживания центром масс $y_1(t)$ заданной пространственной траектории $g_1(t)$ (пунктирная линия).

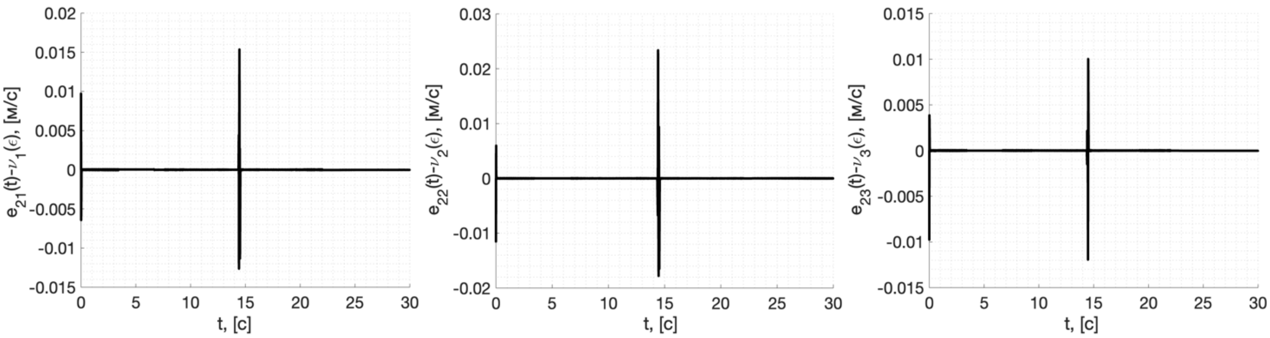


Рисунок 5.8 – Графики ошибок наблюдения $y_{2i}(t)-\nu_i(t)$ [м/с], $i=\overline{1,3}$
в замкнутой системе (5.5), (5.26) с наблюдателем (5.29), (5.19)

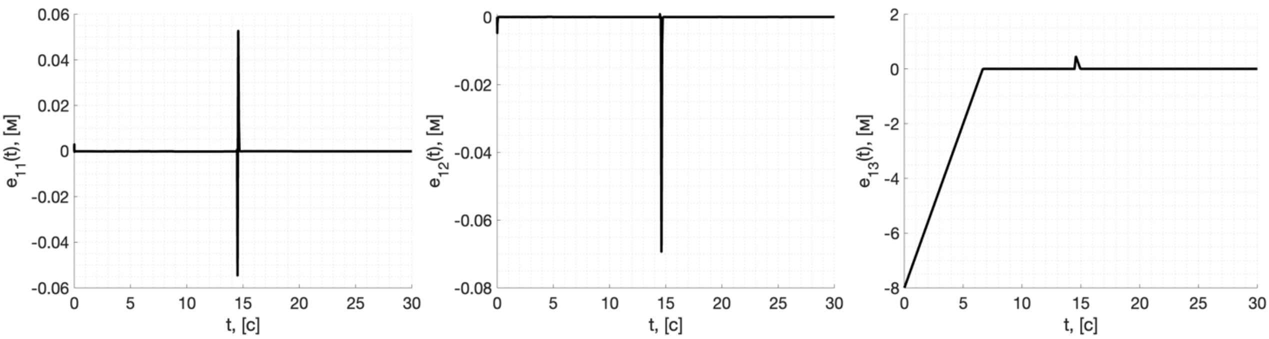


Рисунок 5.9 – Графики ошибок слежения $e_{1i}(t)=y_{1i}(t)-g_{1i}(t)$ [м], $i=\overline{1,3}$
в замкнутой системе (5.5), (5.26) с наблюдателем (5.29), (5.19)

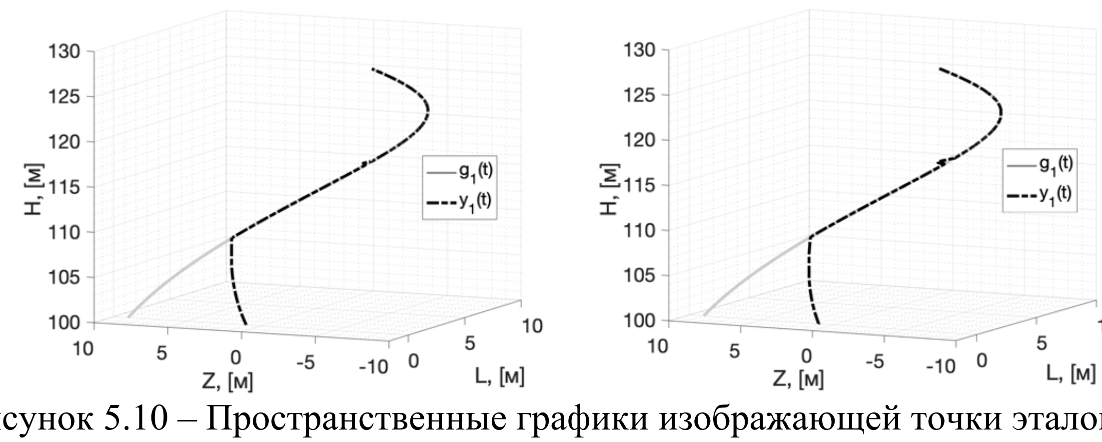


Рисунок 5.10 – Пространственные графики изображающей точки эталонной Системы (слева) и системы с наблюдателем (справа)

В таблице 5.3 представлены показатели процессов сходимости ошибок слежения для замкнутых систем с регулятором (5.26) со статической и динамической обратной связью на отрезке $t\in[0;15)$.

Таблица 5.3 – Показатели процессов сходимости ошибок слежения

	Максимальное абсолютное отклонение [м] ошибок слежения от нуля, $t<15$	Время переходного процесса T [с]: $\lvert e_{1i}(t)\rvert \le 0{,}03$ [м], $t>T$	Ошибка стабилизации [м] в установившемся режиме при $10<t<15$ [с]
Эталонная система (5.5) со статической обратной связью (5.26)	$\lvert e_{11}(0{,}005)\rvert = 3\times10^{-3}$	0,000	$\lvert e_{11}(t)\rvert \le 3{,}78\times10^{-5}$
	$\lvert e_{12}(0{,}009)\rvert = 5\times10^{-3}$	0,000	$\lvert e_{12}(t)\rvert \le 1{,}22\times10^{-5}$
	$\lvert e_{13}(0)\rvert = 8{,}00$	6,635	$\lvert e_{13}(t)\rvert \le 1{,}08\times10^{-6}$
Система (5.5) с динамической обратной связью (5.26), (5.29), (5.19)	$\lvert e_{11}(0{,}005)\rvert = 3\times10^{-3}$	0,000	$\lvert e_{11}(t)\rvert \le 2{,}4\times10^{-4}$
	$\lvert e_{12}(0{,}010)\rvert = 5{,}2\times10^{-3}$	0,000	$\lvert e_{12}(t)\rvert \le 7{,}1\times10^{-4}$
	$\lvert e_{13}(0)\rvert = 8{,}00$	6,648	$\lvert e_{13}(t)\rvert \le 1{,}1\times10^{-6}$

Исходя из данных, представленных в таблицах 5.2–5.3, видно, что разработанные алгоритмы синтеза динамической обратной связи обеспечивают заданную точность слежения и выполнение проектных ограничений на переменные состояния. Если сравнивать синтезированные законы управления между собой, то можно сделать вывод о том, что при использовании сигмоидальной обратной связи при определенных радиусах кривизны наблюдаются всплески элементов вектора скорости, вызванные резким изменением задающего воздействия. Для борьбы с подобными скачками была проведена настройка коэффициентов управления, которая привела к снижению скорости и сократило нежелательные всплески, но увеличила время переходного процесса.

5.2 Генерация достижимых 4D-траекторий и оценивание ветровых возмущений с помощью динамических моделей с сигмовидной коррекцией

В данном разделе показано, что одновременное использование следящего дифференциатора для сглаживания и дифференцирования задающих воздействий, а также наблюдателя возмущений позволяет линеаризовать замкнутую следящую систему по обратной связи и обеспечить ее экспоненциальную устойчивость. В подразделе 5.2.1 в рамках блочного подхода разработан базовый комбинированный закон управления с линейной стабилизирующей составляющей и с компенсацией ветровых неконтролируемых возмущений; сформулированы постановки задач для информационного обеспечения следящей системы. В подразделе 5.2.2 представлен метод построения опорной негладкой 4D-траектории, проходящей через заданные путевые точки. Получены первичные покомпонентные задающие воздействия для всех пространственных координат с установкой желаемой скорости на различных участках в режиме полета. В подразделе 5.2.3 синтезирован динамический наблюдатель внешних возмущений третьего порядка с сигмовидной коррекцией. В подразделе 5.2.4 представлены результаты численного моделирования.

5.2.1 Базовый закон комбинированного управления

Пусть в системе (5.5) измеряются выходные переменные $y_1(t)$ и $V(t)$, $\theta(t)$, $\Psi(t)$, а элементы вектора скорости $y_2(t)$ вычисляются по прямым формулам (5.4). С учетом (5.7) введем проектные ограничения на переменные состояния и управления в режиме полета при $t \in [t_{\text{start}}; t_{\text{end}}]$:

$$0 < \underline{Y}_1 \le \|y_2(t)\| \le \overline{Y}_1, \|\dot{y}_2(t)\| \le Y_2, \|\ddot{y}_2(t)\| \le Y_3, \|u(t)\| \le U,\ F < U, \tag{5.34}$$

где верхняя оценка нормы вектора ускорения (и, следовательно, скорости) определяется для «худшего» случая, когда часть управления тратится на компенсацию внешних возмущений, а именно:

$$\|\dot{y}_2\| = \|ag + B(\theta, \Psi)(u + f)\| \le 3(U - F) = Y_2. \tag{5.35}$$

В предположении, что условия (5.8) выполняются, нужно спроектировать следящую систему с динамической обратной связью для отслеживания выходными переменными системы (5.5) заданных сигналов $g_1(t) = (g_{11}, g_{12}, g_{13})^{\mathrm{T}}$.

Для синтеза следящей системы перейдем к уравнению (5.10) относительно ошибок слежения $e_1 = y_1 - g_1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13})^{\mathrm{T}}$. Покажем, что можно назначить желаемую экспоненциальную скорость стабилизации ошибок слежения с помощью линейной локальной связи $y_2 = \dot{g}_1 - c_1 e_1$, $c_1 = \text{const} > 0$, которую будем регулировать с помощью невязки $e_2 = y_2 - \dot{g}_1 + c_1 e_1$, $e_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})^{\text{T}}$. Перепишем систему (5.5) относительно новых переменных

$$\dot{e}_1 = -c_1 e_1 + e_2,\, \dot{e}_2 = -c_1^2 e_1 + c_1 e_2 + ag - \ddot{g}_1 + B(\theta, \Psi)(u + f(t)). \qquad (5.36)$$

При наличии измерений или оценок внешних сигналов $\dot{g}_1(t), \ddot{g}_1(t)$, $f(t)$ их воздействие можно компенсировать с помощью комбинированного управления, а также ввести типовую стабилизирующую линейную компоненту

$$\begin{aligned} u &= -B^{\text{T}}(\theta, \Psi)[(c_2 + c_1)e_2 - c_1^2 e_1 - \ddot{g}_1 + ag] - f(t) = \\ &= -B^{\text{T}}(\theta, \Psi)[c_1 c_2 (y_1 - g_1) + (c_1 + c_2)(y_2 - \dot{g}_1) - \ddot{g}_1 + ag] - f(t). \end{aligned} \qquad (5.37)$$

Тогда замкнутая виртуальная система (5.36)–(5.37) примет линейный вид

$$\dot{e}_1 = -c_1 e_1 + e_2,\, \dot{e}_2 = -c_2 e_2,\; c_1, c_2 = \text{const} > 0. \qquad (5.38)$$

При $c_2 \geq c_1$ переменные системы (5.38) будут затухать с заданной скоростью

$$\|e_2(t)\| \underset{t \to +\infty}{=} O(\exp(-c_2 t)) \Rightarrow \|e_1(t)\| \underset{t \to +\infty}{=} O(\exp(-c_1 t)) \Leftrightarrow \lim_{t \to +\infty} y_1(t) = g_1(t). (5.39)$$

Если траектория $g_1(t)$ корректно задана и является достижимой, то в замкнутой системе (5.5), (5.37) центр масс БПЛА экспоненциально сойдется к заданной пространственной кривой и будет двигаться по ней с заданной скоростью

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \\ &\dot{y}_2 = -c_2 c_1 (y_1 - g_1) - (c_2 + c_1)(y_2 - \dot{g}_1) + \ddot{g}_1 = c_1^2 e_1 - (c_2 + c_1) e_2 + \ddot{g}_1 \Rightarrow \\ &\dot{y}_2 \underset{t \to +\infty}{=} \ddot{g}_1 + (c_2 + c_1) O(\exp(-c_2 t)) + c_1^2 O(\exp(-c_1 t)). \end{aligned}$$

Переходный процесс по ошибке слежения зависит от близости начальных значений и коэффициентов усиления, принятых с учетом ограничений

$$c_1 c_2 \|y_1(t_{\text{start}}) - g_1(t_{\text{start}})\| + [(c_1 + c_2)\|y_2(t_{\text{start}}) - \dot{g}_1(t_{\text{start}})\| \leq U - F - \|\ddot{g}_1\|.$$

Далее рассматриваются две задачи, связанные с генерацией и оцениванием внешних сигналов, требуемых для синтеза управления (5.37). Первая задача связана с планированием достижимой траектории по заданным путевым точкам и восстановлением ее производных (в данном случае первого $\dot{g}(t)$ и второго $\ddot{g}(t)$ порядков). Вторая задача – оценивание внешних возмущений $f(t)$.

5.2.2 Построение примитивной 4D-траектории для центра масс БПЛА

В данном разделе (по аналогии с разделом 4.2) разработан простой метод составления первичной кусочно-непрерывной 4D-траектории в виде ломаной, которая определяет в первом приближении путь следования БПЛА в режиме полета, проходящий через заданные опорные путевые точки в декартовом пространстве (траекторной системе координат). Показано, что с помощью четвертой координаты (времени) можно задавать среднюю желаемую скорость полета на различных участках траектории, не превышающую максимальную скорость конкретного транспортного средства. Новизна предложенного подхода состоит в формализации необходимых требований, предъявляемых к примитивной траектории. Их выполнение легко обеспечить на этапе проектирования, но в режиме реального времени возможность коррекции отсутствует.

Пусть для конкретного БПЛА имеется первичный план летного задания. Это – последовательность точек, заданная в траекторной системе координат в рабочем пространстве $y_1 \in Y \subset R^3$ с учетом времени

$$(L_i, H_i, Z_i, t_i), i = \overline{1,m},\ (L_i, H_i, Z_i) \in Y, t_i < t_{i+1}, t_1 = t_{\text{start}};\ t_m = t_{\text{end}}. \qquad (5.40)$$

С помощью (5.34) устанавливается первичный желаемый маршрут и средняя желаемая скорость полета на каждом участке. Проблема обхода препятствий и уклонений от столкновения с движущимися препятствиями здесь не рассматривается. Планируется траектория для почтового транспортного средства или для БПЛА, выполняющего видео или фотосъемку контролируемой территории, после набора высоты и до захода на посадку в спокойной атмосфере.

На этапе планирования нужно проверить корректность задания (5.40) и исключить запрещенные маневры для БПЛА самолетного типа:

1) движения строго «вверх–вниз», т. е. $H_{i+1} \neq H_i$ и $L_i = L_{i+1}, Z_i = Z_{i+1}$, «туда и обратно», т. е. $L_i = L_{i+2}, H_i = H_{i+2}, Z_i = Z_{i+2}$, являются запрещенными;

2) острый угол между двумя соседними отрезками, соединяющими точки (L_i, H_i, Z_i) и $(L_{i+1}, H_{i+1}, Z_{i+1})$, $(L_{i+1}, H_{i+1}, Z_{i+1})$ и $(L_{i+1}, H_{i+1}, Z_{i+1})$ должен быть не меньше угла $\hat{\phi}$, требуемого для разворота БПЛА:

$$\arccos\left|\frac{(L_{i+1}-L_i)(L_{i+2}-L_{i+1})+(H_{i+1}-H_i)(H_{i+2}-H_{i+1})+(Z_{i+1}-Z_i)(Z_{i+2}-Z_{i+1})}{\sqrt{(L_{i+1}-L_i)^2+(H_{i+1}-H_i)^2+(Z_{i+1}-Z_i)^2}\sqrt{(L_{i+2}-L_{i+1})^2+(H_{i+2}-H_{i+1})^2+(Z_{i+2}-Z_{i+1})^2}}\right|\geq\hat{\phi},$$

$i=\overline{1,m-2}$;

3) средняя путевая скорость на каждом участке должна быть допустимой

$$0<\underline{Y}_1<\frac{\sqrt{(L_{i+1}-L_i)^2+(H_{i+1}-H_i)^2+(Z_{i+1}-Z_i)^2}}{t_{i+1}-t_i}<\overline{Y}_1, i=\overline{1,m-1}. \quad (5.41)$$

Если указанные условия не выполняются для какой-либо пары–тройки соседних точек (5.40), то нужно выполнить соответствующую коррекцию. Исправленный набор 4D-точек является основой для построения примитивной непрерывной траектории $g_1(t)=(g_{11}(t),g_{12}(t),g_{13})^{\mathrm{T}}$. Аналогично (4.35) она задается в виде последовательности отрезков, соединяющих соседние точки

$$\frac{g_{11}-L_i}{L_{i+1}-L_i}=\frac{g_{12}-H_i}{H_{i+1}-H_i}=\frac{g_{13}-Z_i}{Z_{i+1}-Z_i}=\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, t\in[t_i;t_{i+1}), i=\overline{1,m-1},$$

и определяет первичные задающие воздействия для каждой выходной переменной $y_1=(y_{11}:=L, y_{12}:=H, y_{13}:=Z)^{\mathrm{T}}$ соответственно:

$$\begin{cases} g_{11}=\dfrac{(L_{i+1}-L_i)t+L_it_{i+1}-L_{i+1}t_i}{t_{i+1}-t_i}, \\ g_{12}=\dfrac{(H_{i+1}-H_i)t+H_it_{i+1}-H_{i+1}t_i}{t_{i+1}-t_i}, \\ g_{13}=\dfrac{(Z_{i+1}-Z_i)t+Z_it_{i+1}-Z_{i+1}t_i}{t_{i+1}-t_i}, t\in[t_i;t_{i+1}), i=\overline{1,m-1}. \end{cases} \quad (5.42)$$

Для сглаживания примитивной ломаной (5.42) применяется следящий дифференциатор (3.30) с нужным числом блоков (см. раздел 3.3), размерность каждого блока равна трем. Для реализации закона управления (5.37) достаточно трехблочного дифференциатора (3.55) с тремя уравнениями в каждом блоке.

5.2.3 Синтез наблюдателя возмущений

В данном подразделе рассматривается проблема, связанная с оцениванием внешних возмущений в реальном времени. Предполагается, что полет проходит в штатном режиме и сила ветра не превышает допустимые нормы (т. е.

ветер умеренный, не более 4-х баллов по шкале Бофорта). Однако воздействие ветра может помешать выполнению летного задания. Поэтому проблеме управления летательными аппаратами в условиях ветровых возмущений посвящено большое количество исследований [1, 76, 84, 87, 118, 145, 151], но эти методы реализуемы, как правило, в предположении, что возмущения гладкие.

В данном подразделе представлен метод проектирования редуцированного наблюдателя внешних возмущений. Это – динамическая модель, которая реализуется в информационно-управляющей системе БПЛА в реальном времени. Она позволяет получить текущие оценки внешних возмущений по их воздействию на объект управления с помощью корректирующих воздействий наблюдателя. В отличие от известных подходов, она позволяет восстановить с любой заданной точностью и гладкие, и негладкие внешние воздействия в предположении, что они ограничены по модулю известными константами (5.7) и имеют конечную частоту изменения. При этом в построения не вводится динамическая модель, имитирующая ветровые возмущения. Ниже представлен наблюдатель возмущений минимально возможного динамического порядка, который строится как копия трех последних уравнений системы (5.1), на которые возмущения действуют непосредственно. В наблюдатель подаются управляющие воздействия $\bar{u}_i$ (5.2), $u_i = g\bar{u}_i$, которые полагаются известными функциями времени, а также сигналы измеряемых переменных состояния $V(t), \theta(t), \Psi(t)$ системы (5.1). Задача рассматривается в детерминированной постановке, предполагается, что шумы в измерениях отсутствуют.

Наблюдатель возмущений имеет третий порядок и следующий вид:

$$\dot{z}_1 = (\bar{u}_1 - \sin\theta)g + v_1,\ \dot{z}_2 = \frac{(\bar{u}_2 - \cos\theta)g + v_2}{V},\ \dot{z}_3 = \frac{v_3 - g\bar{u}_3}{V\cos\theta}, \qquad (5.43)$$

где $z_i \in R$ – переменные состояния, $v = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}, v_i \in R$ – корректирующие воздействия наблюдателя. В данном подразделе всюду $i = 1, 2, 3$. С учетом (5.1), (5.43) составим дифференциальные уравнения для невязок $\varepsilon_1 = V - z_1$, $\varepsilon_2 = \theta - z_2$ и $\varepsilon_3 = \Psi - z_3$:

$$\dot{\varepsilon}_1 = a_1(f_1(t) - v_1),\ \dot{\varepsilon}_2 = a_2(f_2(t) - v_2),\ \dot{\varepsilon}_3 = a_3(-f_3(t) - v_3), \qquad (5.44)$$

где $a_1 = 1, a_2 = 1/V$, $a_3 = 1/(V\cos(\theta))$. В силу априорных предположений (5.34) и $V > 0,\ \cos\theta > 0$ параметры $a_{2,3}$ положительные и ограничены снизу. Для единообразия записи вводятся обозначения $\bar{a}_1 = 1 = a_1,\ \bar{a}_2 = 1/\bar{Y}_1 \le a_2,\ \bar{a}_3 = 1/\bar{Y}_1 \le a_3$. В наблюдателе возмущений (5.43) аналогично следящему дифференциатору (см. главу 3) будут использоваться сигмовидные корректирующие воздействия

$$v_i = m_i \sigma(k_i \varepsilon_i),\ m_i, k_i = \mathrm{const} > 0,\ i = 1,2,3. \qquad (5.45)$$

Для виртуальной системы (5.44), (5.45) ставится задача стабилизации невязок и их производных с заданной точностью за заданное время T:

1) $|\varepsilon_i(t)| \le \delta_i, i = 1,2,3;$

2) $\dot{\varepsilon}_i(t) \approx 0 \Rightarrow |f_1(t) - v_1(t)| \le \bar{\delta}_1, |f_2(t) - v_2(t)| \le \bar{\delta}_2, |-f_3(t) - v_3(t)| \le \bar{\delta}_3$, (5.46)

$t \ge t_{\mathrm{start}} + T, t_{\mathrm{start}} + T << t_{\mathrm{end}}$.

Тогда в установившемся режиме корректирующие воздействия наблюдателя дадут с небольшой погрешностью оценки внешних возмущений $f_i(t)$:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_1(t) = v_1(t), \tilde{f}_2(t) = v_2(t), \tilde{f}_3(t) = -v_3(t), t \ge t_{\mathrm{start}} + T, \\ &|f_i(t) - \tilde{f}_i(t)| \le \bar{\delta}_i, i = 1,2,3; \bar{\delta} = \max\{\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3\}. \end{aligned} \qquad (5.47)$$

Первые неравенства (5.46) обеспечиваются выбором амплитуд $m_i, i = 1,2,3$, вторые – выбором коэффициентов k_i с учетом принятых значений m_i. При этом каждая пара m_i, k_i настраивается независимо от других пар. Стоит заметить, что в системе (5.44), (5.45) корректирующие воздействия ограничены по амплитуде, при этом k_i могут быть сколь угодно большие, с помощью их выбора можно обеспечить любую желаемую точность оценивания.

Установим в системах (5.43), (5.44), следующие начальные значения

$$z_1(t_{\mathrm{start}}) = V(t_{\mathrm{start}}), z_2(t_{\mathrm{start}}) = \theta(t_{\mathrm{start}}),\ z_3(t_{\mathrm{start}}) = \Psi(t_{\mathrm{start}}) \Rightarrow \varepsilon_i(t_{\mathrm{start}}) = 0, i = \overline{1,3}.$$

Условия, при которых первые неравенства (5.46) будут выполнены для всех $t \in [t_{\mathrm{start}}; t_{\mathrm{end}}]$, зависят от выбора амплитуд m_i и аналогичны (3.10):

$$0{,}8m_i > F_i \Rightarrow \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i \le a_i |\varepsilon_i| (F_i - 0{,}8m_i) < 0 \Rightarrow |\varepsilon_i| \le 2{,}2 / k_i, i = 1,2,3. \qquad (5.48)$$

Неравенства для выбора больших коэффициентов k_i, при которых выполняются оба требования (5.46), аналогичны (3.7)–(3.8)

$$k_i > \frac{1}{m_i} \max\left\{ \frac{2{,}75 F_i}{\delta_i};\ \frac{2}{\bar{a}_i T} \ln \frac{F_i}{\bar{\delta}_i} \right\}, i = 1, 2, 3. \quad (5.49)$$

Таким образом, с помощью наблюдателя (5.43), (5.45) с коэффициентами (5.48), (5.49) решается задача оценивания неизвестных ограниченных возмущений (5.47). В замкнутой системе с этим наблюдателем, а также со следящим дифференциатором (3.55) закон управления (5.37) будет реализован в виде

$$u = -B^{\mathrm{T}}(\theta, \Psi)[c_1 c_2 (y_1 - x_1(t)) + (c_1 + c_2)(y_2 - x_2(t)) - x_3(t) + ag] - v. \quad (5.50)$$

Общий порядок замкнутой системы (5.1) с динамической обратной связью (3.55), (5.43), (5.45), (5.50) равен 6 + 9 + 3 = 18. При наличии ошибок оценивания (5.47) переменные замкнутой виртуальной системы (5.36), (5.50) последовательно сойдутся в следующие окрестности нуля:

$$\|e_2(t)\| \underset{t \to +\infty}{=} \frac{\bar{\delta}}{c_2} + O(\exp(-c_2 t)) \Rightarrow \|e_1(t)\| \underset{t \to +\infty}{=} \frac{\bar{\delta}}{c_1 c_2} + O(\exp(-c_1 t)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|y_1(t) - x_1(t)\| \le \frac{\bar{\delta}}{c_1 c_2}, t > t_{\text{start}} + T(t).$$

Таким образом, в отличие от системы с полной априорной информацией (5.38)–(5.39), в системе с наблюдателем задача слежения решается с указанной точностью. Ошибку слежения в установившемся режиме можно сделать сколь угодно малой с помощью увеличения коэффициентов наблюдателя k_i (5.49).

5.2.4 Результаты апробации на виртуальных полигонах

В данном подразделе представлены результаты моделирования замкнутой системы (5.1) с динамической обратной связью (5.50) с применением наблюдателя возмущений (5.43), (5.45), а также трехблочного следящего дифференциатора (3.55), где $x_1, x_2, x_3 \in R^3$, в рамках виртуальных полигонов ООО «ПЛАЗ» и ООО «УИТ».

Программная реализация динамической обратной связи (5.50) с применением наблюдателя возмущений (5.43), (5.45), а также трехблочного следящего дифференциатора (3.55), были интегрированы в упомянутые выше виртуальные полигоны. Для проведения симуляции была выбрана модель мини-БПЛА с характеристиками, представленными в таблице 5.4.

Таблица 5.4 – Характеристики мини-БПЛА, принятые при моделировании

Параметр	Значение
Вес, кг	4
Максимальная дальность полета, м	4000
Максимальное время полета, мин	40
Максимальная скорость в режиме полета, м/с	$Y_1 = 7$
Максимальное ускорение в режиме полета, м/с^2	$Y_2 = 33$
Максимальный рывок в режиме полета, м/с^3	$Y_3 = 122$

В качестве опорного маршрута был принят пространственный прямоугольник в траекторной системе координат, заданный в виде (5.42):

$$\begin{aligned}
&g_{11} = 0, g_{12} = 60t/7 + 100, g_{13} = 60t/7,\ t \in [0;1{,}75);\\
&g_{11} = 20t/3 - 35/3, g_{12} = 1105/9 - 40t/9, g_{13} = 15,\ t \in [1{,}75;4);\\
&g_{11} = 15, g_{12} = 975/7 - 60t/7, g_{13} = 345/7 - 60t/7,\ t \in [4;5{,}75);\\
&g_{11} = 160/3 - 20t/3, g_{12} = 40t/9 + 580/9, g_{13} = 0,\ t \in [5{,}75;8);\\
&g_{11} = 0, g_{12} = 15t/2 + 40, g_{13} = 15t/2 - 60,\ t \geq 8,\ g_{1j}\,[\text{м}],\ t\,[\text{с}].
\end{aligned} \tag{5.51}$$

На некоторых участках (5.51) скорость намерено немного превышает допустимую (см. таблицу 5.4). Для выполнения заданных ограничений по скорости, ускорению и рывку в следящем дифференциаторе (3.55) на основе неравенств (3.51) были приняты коэффициенты $p_1 = 6{,}9$, $p_2 = 32$, $p_3 = 120$; $l_1 = 1{,}2$, $l_2 = 0{,}8$, $l_3 = 0{,}1$ и следующие начальные значения: $x_1(0) = [0;100;0]$, $x_2(0) = [0;0;0]$, $x_3(0) = [0;0;0]$. При моделировании предполагалось, что опорный векторный сигнал $g_1(t)$ является полезной составляющей зашумленного задающего воздействия $\bar{g}_1(t) = g_1(t) + \eta(t)$ где $\eta(t)$ – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 0,1.

В соответствии с указанными выше параметрами была проведена симуляции полета БПЛА в рамках виртуальных полигонов. Поскольку на обоих полигонах для следящего дифференциатора были проведены идентичные эксперименты и расхождение по полученным результатам составило менее двух процентов, то далее будут рассматриваться только результаты с полигона ООО «ПЛАЗ». На основе полученных данных с использованием пакета прикладных программ MATLAB были построены приведенные ниже графики.

На рисунках 5.11–5.12 показаны результаты фильтрации, сглаживания и дифференцирования опорной зашумленной траектории с помощью следящего дифференциатора (3.55). Как видно из графиков, на выходе следящего дифференциатора получен сглаженный незашумленный сигнал с учетом ограничений (табл. 5.4). Векторные переменные следящего дифференциатора $x_{1,2,3}(t)$ поступают в качестве реализуемых заданий в регулятор (5.50), где $c_1 = 5, c_2 = 6$.

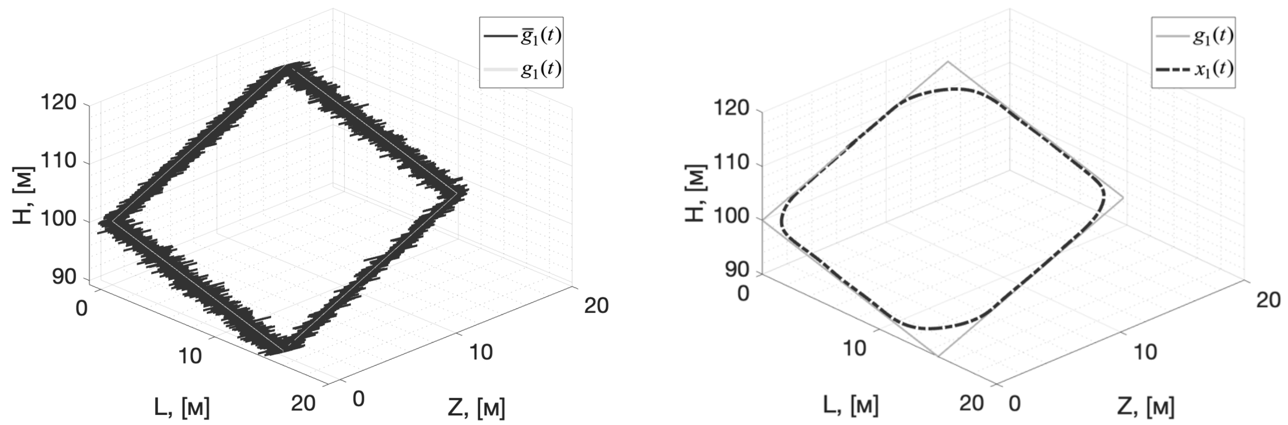


Рисунок 5.11 – Слева: графики зашумленного $\bar{g}_1(t)$ и полезного $g_1(t)$ (5.51) сигналов. Справа: $g_1(t)$ и выход $x_1(t)$ трехблочного дифференциатора (3.55)

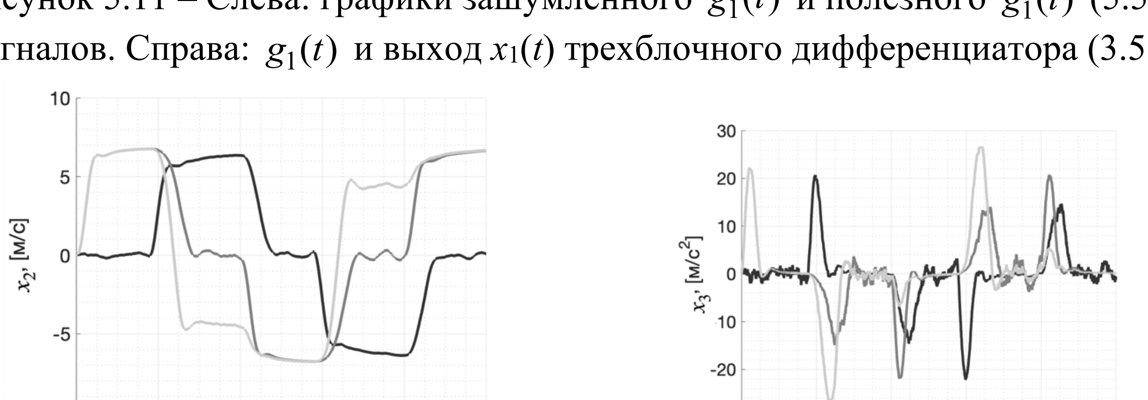


Рисунок 5.12 – Графики эталонных скоростей $x_{21}(t), x_{22}(t), x_{23}(t)$ (слева) и эталонных ускорений $x_{31}(t), x_{32}(t), x_{33}(t)$ (справа)

В качестве внешних возмущений рассматривались негладкие ступенчатые функции времени

$$
\begin{aligned}
&f_1 = \pi/2, f_2 = \pi/3, f_3 = \pi/4, \ t \in [0;2);\\
&f_1 = -\pi, f_2 = -\pi/2, f_3 = \pi/2, \ t \in [0;4);\\
&f_1 = \pi/4, f_2 = \pi/2, f_3 = -\pi/3, \ t \in [0;7);\\
&f_1 = -\pi/8, f_2 = -3\pi/4, f_3 = -\pi, \ t \in [0;10);\\
&f_1 = 2\pi/3, f_2 = \pi/3, f_3 = \pi/4, \ t \in [0;13);\\
&f_1 = \pi/3, f_2 = -\pi/6, f_3 = \pi/12, \ t \in [0;16);\\
&f_1 = -3\pi/4, f_2 = 3\pi/4, f_3 = -3\pi/4, \quad t \geq 16, t[s].
\end{aligned} \tag{5.52}
$$

На основе неравенств (5.48)–(5.49) приняты следующие значения амплитуд и больших коэффициентов сигмовидных корректирующих воздействий (5.45) наблюдателя (5.43): $m_i = 15$, $k_i = 150$, $i = \overline{1,3}$.

Симуляция с применением динамической обратной связи (5.50) и наблюдателя возмущений (5.43), (5.45) проведена в рамках полигона ООО «ПЛАЗ». На рисунке 5.12 снизу представлены графики возмущений $f_i(t)$ (5.52) и их оценки $v_1(t), v_2(t), -v_3(t)$, полученные в замкнутой системе (5.1), (5.50) с помощью корректирующих воздействий (5.45) наблюдателя (5.43). Сверху показаны графики ошибок оценивания $f_1(t) - v_1(t), f_2(t) - v_2(t), -f_3(t) - v_3(t)$.

На рисунке 5.13 слева представлен процесс отслеживания центром масс БПЛА $y_1(t)$ (с начальными значениями $L = -4, H = 99, Z = -1$) эталонной сглаженной траектории $x_1(t)$, полученной на выходе следящего дифференциатора (3.55) в условиях действия внешних возмущений (5.52). Справа показаны покомпонентные графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - x_{1i}(t)$. На рисунке 5.14 показаны покомпонентные графики управлений $\bar{u}_i(t) = u_i(t)/g$ (5.50).

Эталонная траектория достигается за 1,21 сек, в установившемся режиме ошибка слежения пренебрежимо мала $\pm 5 \times 10^{-11}$ м. В моменты скачкообразного изменения возмущений наблюдаются небольшие всплески управляющих воздействий, но они остаются ограниченными в процессе регулирования.

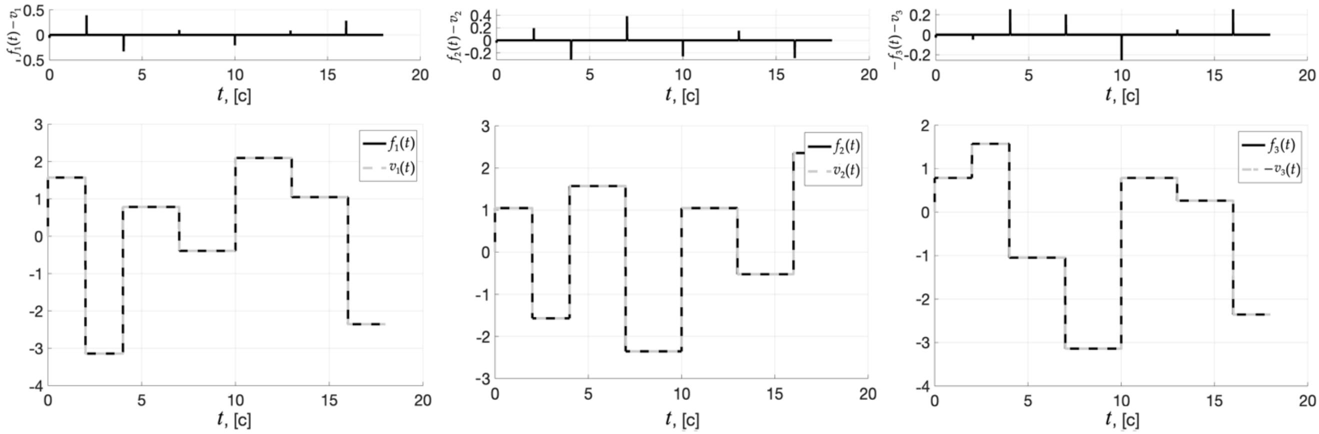


Рисунок 5.12 – Графики возмущений $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ (5.52) и их оценок $v_1(t)$, $v_2(t)$, $-v_3(t)$ (снизу), а также ошибок оценивания (сверху)

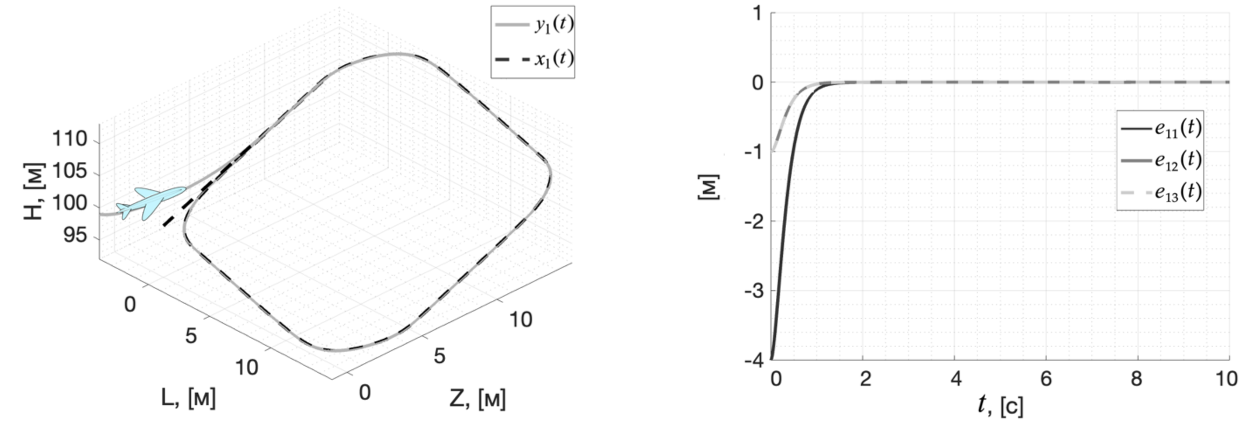


Рисунок 5.13 – Графики движения центра масс БПЛА $y_1(t)$ и эталонной траектории $x_1(t)$ (слева); графики ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - x_{1i}(t)$ (справа)

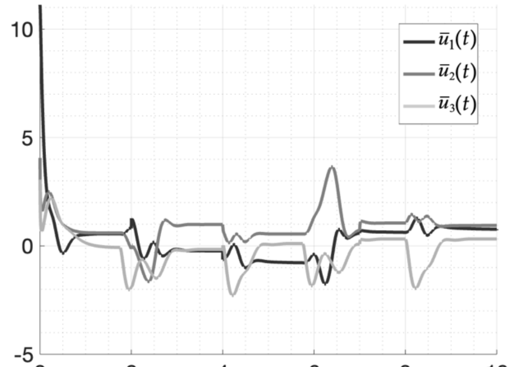


Рисунок 5.14 – Графики управлений $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$, $\bar{u}_3(t)$

5.3 Выводы по главе 5

Основной результат раздела 5.1 – процедуры синтеза следящей системы БПЛА с S-образными, всюду ограниченными обратными связями в виде сигма-функции с наблюдателями состояния пониженного порядка с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, не требующими расширения пространства состояний за счет динамических моделей внешних воздействий. Данные подходы позволили учитывать проектные ограничения на скорость и перегрузку на стадии синтеза и обеспечить вывод центра масс БПЛА на заданную пространственную траекторию и его движение в малой окрестности заданной кривой инвариантно по отношению к внешним возмущениям.

В разделе 5.2. разработан комбинированный закон управления, обеспечивающий отслеживание объектом сглаженной следящим дифференциатором траектории и инвариантность по отношению к внешним неконтролируемым возмущениям за счет их компенсации. Разработан динамический наблюдатель минимально возможной размерности с сигмовидными корректирующими воздействиями, которые восстанавливают внешние возмущения по их воздействию на объект управления. В отличие от известных наблюдателей возмущений разработанный подход не требует составления динамической модели внешних возмущений и может восстанавливать с любой заданной точностью негладкие возмущения.

Разработанные методы и алгоритмы были программно реализованы в симуляторе 3D обстановки ООО «ПЛАЗ» для моделирования фигур пилотажа и полетных заданий БПЛА, а также интегрированы в виртуальный полигон ООО «УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ» для планирования траекторий и симуляции полета в различных атмосферных условиях, что подтверждается актами о внедрении результатов диссертационной работы (Приложения 2, 3). Установлено, что разработанные алгоритмы показывают требуемую производительность при небольших вычислительных и временных затратах на формирование задающих и управляющих воздействий, не требовательны к программному обеспечению. Результаты экспериментов подтвердили, что использование в комплексе данных методов позволяет повысить маневренность и одновременно безопасность БПЛА в режиме полета, а также степень его автономности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе в рамках решения фундаментальной проблемы теории и практики автоматического управления – траекторного управления мобильными роботами – разработаны методы и алгоритмы синтеза динамических дифференциаторов и обратных связей с подавлением/компенсацией внешних возмущений. Разработанные робастные и простые в вычислительной реализации алгоритмы дифференцирования и сглаживания векторных сигналов, наблюдения и управления обеспечивают заданные характеристики эталонных траекторий и процесса слежения, не требуют перенастройки при изменении внешних факторов в допустимых пределах. Получены следующие основные результаты.

1. Разработан алгоритм каскадного синтеза дифференциатора–наблюдателя без собственных движений с кусочно-линейной коррекцией, восстанавливающего производные любого требуемого порядка детерминированных кусочно-гладких сигналов с заданной точностью за заданное время.

2. Формализован метод динамического сглаживания задающих воздействий на основе следящих дифференциаторов, позволяющих получить в сигнальном виде плавные и реализуемые эталонные траектории и их производные требуемого порядка.

3. Разработан алгоритм блочного синтеза следящего дифференциатора с сигмовидными обратными связями для восстановления производных и динамического сглаживания кусочно-непрерывных сигналов с выполнением заданных ограничений на динамические характеристики.

4. Разработан комплекс алгоритмов планирования движения одиночного робота на полигоне, включающий: составление опорной 3D-траектории и ее сглаживание; плавный перевод объекта из произвольных начальных условий с учетом ограничений в стартовую точку маршрута; визуализацию габаритного следа симметричной колесной платформы.

5. Получены комплексные конструктивные решения по синтезу динамической обратной связи с использованием дифференциаторов различных типов в системах управления центром масс: беспилотных колесных платформ при решении задач путевой стабилизации и слежения; беспилотных летательных аппаратов при решении задач наблюдения и слежения с компенсацией внешних возмущений.

6. Разработаны регуляторы с сигмовидными обратными связями для подавления ветровых возмущений в системе слежения БПЛА, не требующие восстановления возмущений и обеспечивающие выполнение проектных ограничений на переменные состояния и управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №9. – С. 3–61.

2 Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А. Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №1. – С. 40–66.

3 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 9-е изд., электрон. – М.: Лаборатория знаний, 2020. – 636 с.

4 Белинская Ю.С. Применение метода накрытий для построения траекторий движения четырехколесной тележки // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2021): материалы Четырнадцатой международной конференции, 27–29 сентября 2021 г., Москва. – М.: ИПУ РАН, 2021. – С. 600–606.

5 Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, №. 12. – С. 1629–1635.

6 Бобцов А.А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 8. – С. 25–32.

7 Бурдаков С.Ф., Мирошник И.В., Стельмаков Р.Э. Системы управления движением колесных роботов. – СПб.: Наука, 2001. – 229 с.

8 Глущенко А.И., Ласточкин К.А. Адаптивный наблюдатель состояний и возмущений линейных систем с перепараметризацией // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №11. – С. 115–146.

9 Голубев А.Е. Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2021. – №2. – С. 126–137.

10 Гулюкина С.И., Уткин В.А. Управление реактором с непрерывным перемешиванием в условиях неопределенности и с учетом ограничений на фазовые переменные и управления // Проблемы управления. – 2021. – № 5. – С. 48–59.

11 Гулюкина С.И., Уткин В.А. Задача управления парогенератором в условиях неопределенности при ограничениях на фазовые переменные и управления // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2023. – № 2. – С. 12–139.

12 Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2015. – № 4. – С. 35–44.

13 Дылевский А.В., Лозгачев Г.И. Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 9. – С. 13–20.

14 Емельянов С.В., Афанасьев А.П. Дифференцирование сигнала в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 12. – С. 27–42.

15 Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 352 с.

16 Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.

17 Канатников А.Н., Касаткина Т.С. Особенности перехода к путевым координатам в задаче путевой стабилизации // Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана «Наука и образование». – 2012. – № 7. – С. 211–222.

18 Канатников А.Н., Крищенко А.П. Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. № 5. – С. 51–64.

19 Кокунько Ю.Г. Построение дифференциатора задающих воздействий для системы управления мобильным роботом // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 95. – М.: ИПУ РАН. – С. 101–118.

20 Кокунько Ю.Г. Синтез генератора задающих воздействий для системы управления мобильным роботом // Управление большими системами. – 2023. – Вып. 101. – М.: ИПУ РАН. – С. 123–139.

21 Кокунько Ю.Г. Динамическое дифференцирование и сглаживание зашумленных сигналов, задающих траекторию беспилотного летательного аппарата // Управление большими системами. – 2024. – Вып. 107. – С. 142–161.

22 Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В. Синтез подсистемы наблюдения для беспилотного летательного аппарата при действии неконтролируемых возмущений // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019: Труды [Электронный ресурс] 17–20 июня 2019, г. Москва / Под общ. ред. Д.А. Новикова. – М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 928–933.

23 Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В., Уткин А.В. Два метода синтеза наблюдателей состояния и возмущений для беспилотного летательного аппарата // Проблемы управления. – 2020. – №1. – С. 3–16.

24 Кокунько Ю.Г., Краснова С.А. Два подхода к синтезу инвариантной системы слежения для беспилотного летательного аппарата // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 85. – С. 113–142.

25 Кокунько Ю.Г., Краснова С.А. Формирование эталонных траекторий для беспилотных колесных платформ с учетом ограничений на скорость, ускорение и рывок // Мехатроника, Автоматизация, Управление. – 2024. – Т. 25, № 6. – С. 320–331.

26 Кокунько Ю.Г., Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика. – 2021. – № 7. – С. 37–68.

27 Колесников А.А., Кобзев В.А. Динамика полета и управление: синергетический подход. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2009. – 198 с.

28 Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.

29 Костюков В. А., Медведев М. Ю., Пшихопов В. Х. Алгоритмы планирования сглаженных индивидуальных траекторий движения наземных роботов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2022. – Т. 23, № 11. – С. 585–595.

30 Кочетков С.А., Уткин В.А. Метод декомпозиции в задачах управления мобильными роботами // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 10. – С. 86–103.

31 Краснов Д.В., Уткин А.В. Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 69. – С. 29–49.

32 Краснов Д.В., Уткин А.В. Наблюдатель пониженного порядка для оценивания смешанных переменных в системах слежения при действии внешних несогласованных возмущений. // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1681–1694.

33 Краснова С.А. Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 76. – С. 6–25.

34 Краснова С.А., Антипов А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. – 2016. – № 4. – С. 10–21.

35 Краснова С.А., Кузнецов С.И. Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных системах // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №10. – С. 54–69.

36 Краснова С.А., Мысик Н.С. Синтез инвариантной системы управления продольным движением летательного аппарата // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 10. – С. 104–116.

37 Краснова С.А., Мысик Н.С. Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 2. – С. 106–128.

38 Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А. Структурный подход к робастному управлению // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 8. – С. 65–95.

39 Краснова С.А., Уткин А.В. Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // Проблемы управления. – 2015. – № 5. – С. 27–36.

40 Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. – М.: Наука, 2006. – 272 с.

41 Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 12. – С. 26–53.

42 Лукьянов А.Г. Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 7. – С. 14-34.

43 Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2018. – № 3. – С. 21–43.

44 Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колёсных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11. – № 8. – С. 29–80.

45 Миллер Б.М., Колосов К.С. Робастное оценивание на основе метода наименьших модулей и фильтра Калмана // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №11. – С. 72–92.

46 Морозов Ю.В., Пестерев А.В. Глобальная устойчивость гибридной аффинной системы 4-го порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2023. – № 5. – С. 3–15.

47 Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб.: Наука, 2003. – 282 с.

48 Пестерев А.В., Гилимьянов Р.Ф., Рапопорт Л.Б. Сглаживание кривизны траекторий, построенных по зашумленным измерениям, в задачах планирования пути для колесных роботов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 5. – С. 148–156.

49 Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б. Каноническое представление задачи путевой стабилизации для колесных роботов // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 5. – С. 80–101.

50 Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б., Ткачев С.Б. Каноническое представление нестационарной задачи путевой стабилизации // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – № 4. – С. 160–176.

51 Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. – М.: УРСС, 2003. – 408 с.

52 Рапопорт Л.Б. Периодическое решение двумерных линейных нестационарных систем и оценка границы области притяжения в задаче управления колесным роботом // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №11. – С. 130–139.

53 Ткачев С.Б., Крищенко А.П., Канатников А.Н. Автоматическая генерация сложных пространственных траекторий БПЛА и синтез управлений // Математика и Математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. – 2015. – № 1. – С. 1–17.

54 Тюленев И. Д., Филимонов Н. Б. Алгоритмизация автоматического управления парковкой беспилотного автомобиля // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2023. – Т. 24, № 12. – С. 634–642.

55 Уонем У.М. Линейные многомерные системы. Геометрический подход. – М.: Наука, 1980. – 375 с.

56 Уткин В.А. Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 11. – С. 73–94.

57 Уткин В.А., Уткин А.В. Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 9. – С. 62–81.

58 Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1981. – 368 с.

59 Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 224 с.

60 Фомичев В.В., Высоцкий А.О. Каскадный метод построения наблюдателей для систем с неопределенностью // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 11. – С. 1533–1539.

61 Фуртат И.Б., Гущин П.А., Перегудин А.А. Алгоритм управления по выходу нелинейными системами с компенсацией возмущений и помех измерения // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, № 1. – С. 3–15.

62 Юркевич В.Д. Расчет и настройка регуляторов для нелинейных систем с разнотемповыми процессами // Автометрия. – 2012. – Т. 48, № 5. С. 24–31.

63 Яковлев К.С., Белинская Ю.С., Макаров Д.А., Андрейчук А.А. Безопасно-интервальное планирование и метод накрытий для управления движением мобильного робота в среде со статическими и динамическими препятствиями // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 6. – С. 96–117.

64 Afri C., Andrieu V., Bako L., Dufour P. State and Parameter Estimation: A Nonlinear Luenberger Observer Approach // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2017. Vol. 62, No. 2. – P. 973–980.

65 Alsanousi A.A. Design and Optimization of Low Pass Filter. – Lap Lambert Academic Publishing: Sunnyvale, CA, USA, 2017.

66 Antipov A.S., Kokunko Yu.G., Krasnova S.A. Dynamic Models Design for Processing Motion Reference Signals for Mobile Robots // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2022. – Vol. 105, No. 4. – P. 77 (1–16).

67 Antipov A.S., Kokunko Yu.G., Krasnova S.A., Utkin V.A. Dynamic Smoothing, Filtering and Differentiation of Signals Defining the Path of the UAV // Sensors. – 2022. – Vol. 22. – P. 9472 (1–26).

68 Antipov A.S., Kokunko Yu.G., Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V. Direct Control of the Endpoint of the Manipulator under Non-smooth Uncertainty and Reference Trajectories // Journal of The Franklin Institute. – 2023. – Vol. 360, Iss. 17. – P. 13430–13458.

69 Antipov A.S., Krasnova S.A., Utkin V.A. Methods of Ensuring Invariance with Respect to External Disturbances: Overview and New Advances // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, No. 23. – P. 3140.

70 Arulkumaran K., Deisenroth M.P., Brundage M., Bharath A.A. Deep Reinforcement Learning: a Brief Survey // IEEE Signal Process Magazine. – 2017. – Vol. 34, No. 6. – P. 26–38.

71 Astolfi D., Zaccarian L., Jungers M. On the Use of Low-pass Filters in High-Gain Observers // Systems and Control Letters. – 2021. – Vol. 148. – P. 104856.

72 Basin M., Yu P., Shtessel Y. Finite- and Fixed-time Differentiators Utilising HOSM Techniques // IET Control Theory & Applications. – 2017. – Vol. 11. – P. 1144–1152.

73 Basturk H.I., Krstic M. State Derivative Feedback for Adaptive Cancellation of Unmatched Disturbances in Unknown Strict-Feedback LTI Systems // Automatica. – 2014. – Vol. 50. – P. 2539–2545.

74 Bautista G.D., Perez J., Milanés V., Nashashibi F. A Review of Motion Planning Techniques for Automated Vehicles // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2015. –Vol. 17, No. 4. – P. 1–11.

75 Bobtsov A. A., Efimov D., Pyrkin A. A., Zolghadri A. Switched Algorithm for Frequency Estimation with Noise Rejection // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2012. – Vol. 57, No. 9. – P. 2401.

76 Botkin N., Turova V.V., Diepolder J., Holzapfel F. Computation of Viability Kernels on Grid Computers for Aircraft Control in Windshear // Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal. – 2018. – Vol. 3, No. 1. – P. 502–510.

77 Brunovsky P. On Classification of Linear control Systems // Kybernetica. – 1970. – Vol. 6. – P. 173–178.

78 Bu X.W., Wu X.Y., Zhang R., Ma Z., Huang J. Tracking Differentiator Design for the Robust Backstepping Control of Flexible Air-breathing Hypersonic Vehicle // Journal of The Franklin Institute. – 2015. – Vol. 352. – P. 1739–1765.

79 Buzikov M., Galyaev A. Minimum-time Lateral Interception of a Moving Target by a Dubins car // Automatica. – 2022. – Vol. 135. – P. 109968.

80 Chu X., Peng Z., Wen G., Rahmani A. Distributed Fixed-Time Formation Tracking of Multi-Robot Systems with Nonholonomic Constraints // Neurocomputing. – 2018. – Vol. 313. – P. 167–174.

81 De Filippis L., Guglieri G., Quagliotti F. Path Planning Strategies for UAVS in 3D Environments // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2012. – Vol. 65, No. 1. – P. 247– 264.

82 De Luca A., Oriolo G., Samson C. Feedback Control of a Nonholonomic Car-Like Robot // The fourth chapter of the book: Robot Motion Planning and Control, Jean-Paul Laumond (Editor). – Springer, 1998. – P. 171–253.

83 Debnath S.K., Omar R., Latip N.B.A., Shelyna S., Nadira E., Melor C., Chakraborty T.K., Natarajan E. A Review on Graph Search Algorithms for Optimal Energy Efficient Path Planning for an Unmanned Air Vehicle // Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science. – 2019. – Vol. 15. – P. 743–749.

84 Delshad S.S., Johansson A., Darouach M., Gustafsson T. Robust State Estimation and Unknown Inputs Reconstruction for a Class of Nonlinear Systems: Multiobjective Approach // Automatica. – 2016. – Vol. 64. – P. 1–7.

85 Dessen F. Optimizing Order to Minimize Low-Pass Filter Lag // Circuits, Systems, and Signal Processing. – 2019. – Vol. 38. – P. 481–497.

86 Dong X.M., Zhang P. Design and Phase Plane Analysis of an Arctangent-Based Tracking Differentiator // Control Theory & Applications. – 2010. Vol. 27, No. 4. – P. 533–537.

87 Etienne L., Hetel L., Efimov D.D. Observer Analysis and Synthesis for Perturbed Lipschitz Systems under Noisy Time-Varying Measurements // Automatica. – 2019. – Vol. 106. – P. 406–410.

88 Fridman L., Levant A., Davila J. Observation of Linear Systems with Unknown Inputs via High-Order Sliding-Modes // International Journal of System Science. – 2007. – Vol. 38, No. 10. – P. 773–791.

89 Gao Y., Tian D., Wang Y. Fuzzy Self-Tuning Tracking Differentiator for Motion Measurement Sensors and Application in Wide-Bandwidth High-Accuracy Servo Control // Sensors. – 2020. – Vol. 20, No. 3. – P. 948.

90 Glushchenko A., Konstantin Lastochkin K. Monotonous Parameter Estimation of one Class of Nonlinearly Parameterized Regressions without Overparameterization // Automatica. – 2024. – Vol. 163. – P. 111561.

91 Han J. Mobile Robot Path Planning with Surrounding Point Set and Path Improvement // Applied Soft Computing. – 2017. – Vol. 57. – P. 35–47.

92 Han J.Q., Wang W. Nonlinear Tracking-differentiator // Journal of Systems Science and Mathematical Science. – 1994. – Vol. 14, No. 4. – P. 177–183.

93 Ibraheem I.K., Abdul-Adheem W.R. On the Improved Nonlinear Tracking Differentiator based Nonlinear PID Controller Design // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. – 2016. – Vol. 7, No. 10. – P. 234–241.

94 Isidori A. Nonlinear Control Systems. 3rd Ed. – Berlin: Springer-Verlag. 1995. – 549 p.

95 Isidori A. Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems. – N.Y.: Springer-Verlar, 2016. – 414 p.

96 Kamyar K., Taheri E. Aircraft Optimal Terrain / Threat-Based Trajectory Planning and Control // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2014. – Vol. 37, No. 2. – P. 466–483.

97 Kang J.G., Lim D.W., Choi Y.S., Jang W.J., Jung J.W. Improved RRT-connect Algorithm Based on Triangular Inequality for Robot Path Planning // Sensors. – 2021. – Vol. 21, No. 2. – P. 333.

98 Kano H., Fujioka H. B-Spline Ttrajectory Planning with Curvature Constraint // Proc. Annual American Control Conference (ACC), 2018. – P. 1963–1968.

99 Khalil H.K., Praly L. High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2014. – Vol. 24, No. 6. – P. 993–1015.

100 Kikuuwe R., Pasaribu R., Byun G.A. First-Order Differentiator with First-Order Sliding Mode Filtering // IFAC-PapersOnLine. – 2019. – Vol. 52. – P. 771–776.

101 Kokunko Yu.G., Antipov A.S., Krasnova S.A. State Observers as a Means for Estimating Derivatives of Deterministic Signals // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. –Vol. 1864, Iss. 1. – P. 012024 (1–7).

102 Kokunko Yu. G., Krasnov D.V. Observation Subsystem Design for an Unmanned Aerial Vehicle under Undefined External Action // Proceedings of the 12th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). 1–3 October, 2019. Moscow – IEEE Xplore, 2019. – 4 p.

103 Kokunko Yu.G., Krasnov D.V. Research of the Filtering Features of Dynamic Tracking Differentiators of Different Dimensions // Proceedings of the 16th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). 26–28 September 2023. Moscow. – IEEE Xplore, 2023. – 5 p.

104 Kokunko Yu.G., Krasnov D.V., Potehina E.V. Dynamic Smoothing of the Program Motions for Single-Channel Electromechanical Control Plant // Proceedings of the 15th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). 26–28 September 2022. Moscow. – IEEE Xplore, 2022. – 5 p.

105 Kokunko Yu., Krasnova S. Synthesis of a tracking system with restrictions on UAV state variables // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA). – 2019. – Vol. 10, No. 4. – P. 695–705.

106 Kokunko Yu. G., Krasnova S.A. Estimation of Derivatives of Given Actions in UAV Control System // Proceedings of the 13th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). 28–30 September 2020. Moscow. – IEEE Xplore, 2020. – 5 p.

107 Kokunko Yu.G., Krasnova S.A. Synthesis of Differentiators to Estimate Derivatives of Target Signals in the UAV Control System // IFAC-PapersOnline. – 2021. – Vol. 54, Iss.13. – P. 239–244.

108 Kokunko Y.G., Krasnova S.A. Nonlinear Control Design for Path Following Stabilization of a Wheeled Robot under the Action of an External Uncontrollable Disturbance // Proceedings of the 14th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). 27–29 September 2021. Moscow. – IEEE Xplore, 2021. – 6 p.

109 Kokunko Yu.G., Krasnova S.A. Reduced Differentiators Design to Estimate Derivatives of Given Actions in the UAV Control System // Proceedings 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). 5–11 September 2021. Sochi. – IEEE Xplore, 2021. – P. 829–834.

110 Kokunko Yu.G., Krasnova S.A. Dynamic Smoothing of the Path of a Wheeled Robot with Automatic Fulfillment of Design Restrictions // Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Cham: Springer Science and Business Media Deutschland GmbH, 2023. – P. 402–410.

111 Kokunko Yu.G., Krasnova S.A., Pivneva S.V. Feedback Synthesis for UAVs Based on the Control Hierarchy Method // Proceedings of the 15th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy's Conference, STAB-2020). 3–5 June 2020. Moscow. – IEEE Xplore, 2020. – 4 p.

112 Kokunko Yu.G., Krasnova S.A., Pivneva S.V. Synthesis of the Differentiator of Given Actions in the Control System of a Wheeled Robot // Proceedings of 2021 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). 17–21 May 2021. Sochi. – IEEE Xplore, 2021. – P. 428–433.

113 Kokunko Yu.G., Krasnova S.A., Pivneva S.V. Dynamic Generator of Permissible Trajectories for UAVs // Proceedings of the 16th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference, STAB-2022. 1–3 June 2022. Moscow. – IEEE Xplore, 2022. – 4 p.

114 Krasnova S.A., Kokunko J.G., Kochetkov S.A., Utkin V.A. Generation of Achievable Three-Dimensional Trajectories for Autonomous Wheeled Vehicles via Tracking Differentiators // Algorithms. – 2023. – Vol. 16, № 9. – P. 405 (1–21).

115 Krasnova S.A., Kokunko Yu.G., Utkin V.A., Utkin A.V. Robust Stabilization via Super-Stable Systems Techniques // Mathematics. – 2022. – Vol.10, Iss. 1. – P. 98 (1–24).

116 Krasnova S.A., Kokunko J.G., Utkin V.A. Dynamic Models with Sigmoid Corrections to Generation of an Achievable 4D-Trajectory for a UAV and Estimating Wind Disturbances // Electronics. – 2023. – Vol.12, Iss.10. – P. 2280.

117 LaValle S.M. Planning Algorithms. – Cambridge University Press. 2006. – 1007 p.

118 Leitmann G., Pandey S. Adaptive Control of Aircraft in Windshear // International journal of robust and nonlinear control. – 1993. – Vol. 3. P. 133–153.

119 Levant A. Higher-Order Sliding Modes, Differentiation and Output-Feedback Control // International Journal of Control. – 2003. – Vol. 76, No. 9. – P. 924–941.

120 Levant A. Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique // Automatica. – 1998. – Vol. 34. – P. 379–384.

121 Luenberger D.B. Observers of Multivariable Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1966. – Vol. 11, No. 2. – P. 190–197.

122 138Lv Z., Jin S., Xiong X., Yu J. A New Quick-Response Sliding Mode Tracking Differentiator With its Chattering-Free Discrete-Time Implementation // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – P. 130236–130245.

123 McGee T.G., Hedrick J.K. Optimal Path Planning with a Kinematic Airplane Model // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2007. – Vol. 30. – P. 629–633.

124 Menard T., Moulay E., Perruquetti W. A Global High-Gain Finite-Time Observer // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2010. – Vol. 55, No. 6. – P. 1500–1506.

125 Mercy T., Van Parys R., Pipeleers G. Spline-Based Motion Planning for Autonomous Guided Vehicles in a Dynamic Environment // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2017. – Vol. 26, No. 6. – P. 2182–2189.

126 Miele A., Wang T., Melvin W.W. Optimal Take-off Trajectories in the Presence of Windshear // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1986. – Vol. 49, Iss. 1. – P. 1–45.

127 Qi G.Y., Chen Z.Q., and Yuan Z.Z. New Tracking Differentiator Design and Analysis of its Stability and Convergence // Journal of Systems Engineering and Electronics. – 2004. – Vol. 15, No. 4. – P. 780–787.

128 Pan J., Zhang L., Manocha D. Collision-free and Smooth Trajectory Computation in Cluttered Environments // International Journal of Robotics Research. – 2012. – Vol. 31. – P. 1155–1175.

129 Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A. An Adaptive Observer for Uncertain Linear Time-Varying Systems with Unknown Additive Perturbations // Automatica. – 2023. Vol. 147. – P. 110677.

130 Rodriguez-Mata A.E., Gonzrales-Hernrandez I., Rangel-Peraza J.G., Salazar S., Leal R.L. Wind-gust Compensation Algorithm Based on High-Gain Residual Observer to Control a Quadrotor Aircraft: Real-Time Verification Task at Fixed Point // International Journal of Control, Automation, and Systems. – 2018. – Vol. 16, No. 2. – P. 856–866.

131 Rosu H.C., Mancas S.C., Hsieh C.-C. Generalized Cornu-type Spirals and their Darboux Parametric Deformations // Physics Letters A. – 2019. – Vol. 383, No. 23. – P. 2692–2697.

132 Sakcsak B., Bascetta L., Ferretti G., Prandini M. Sampling-based Optimal Kinodinamic Planning with Motion Primitives // Autonomous Robots. – 2019. – Vol. 43, No. 7. – P. 1715–1732.

133 Sharifi M.A., Seif M.R., Hadi M.A. A Comparison Between Numerical Differentiation and Kalman Filtering for a Leo Satellite Velocity Determination // Artif Satell. – 2013. – Vol. 48. – P. 103–110.

134 Shtessel Yu., Edwards C., Fridman L., Levant A. Sliding Mode Control and Observation. – NewYork: Springer. 2014. – 351 p.

135 Spurgeon S. Sliding Mode Observers: a Survey // International Journal of Systems Science. – 2008. – Vol. 39, No. 8. – P. 751–764.

136 Sujit P.B., Saripalli S., Sousa J.B. Unmanned Aerial Vehicle Path Following: A Survey and Analysis of Algorithms for Fixed-Wing Unmanned Aerial Vehicles // IEEE Control Systems. – 2014. – Vol. 34. – P. 42–59.

137 Sun Y., Yang J., Zhao D., Shu Y., Zhang Z., Wang S. A Global Trajectory Planning Framework Based on Minimizing the Risk Index // Actuators. – 2023. – Vol. 12, No. 7. – P. 270.

138 Teel A.R. A Nonlinear Small Gain Theorem for the Analysis of Control Systems with Saturation // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1996. – Vol. 41, No. 9. – P. 1256–1270.

139 Trojnacki M., Dąbek P. Mechanical Properties of Modern Wheeled Mobile Robots // Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems. – 2019. – Vol. 13, No. 3. – P. 3–13.

140 Tzafestas S.G. Mobile Robot Control and Navigation: A Global Overview // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2018. – Vol. 91. – P. 35–58.

141 Utkin A.V., Kokunko Yu.G., Krasnova S.A. Block Synthesis of a Tracking System for an Unmanned Aerial Vehicle under the Action of Uncontrolled Disturbances // Proceedings of the XXI International conference “Complex systems: control and modeling problems” (September 3–6, 2019. Samara). – P. 630–633.

142 Utkin V.I., Poznyak A.S., Y. Orlov Y.V., Polyakov A. Road Map for Sliding Mode Control Design. – Springer International Publishing, 2020. – 127 p.

143 Utkin V.I., Poznyak A.S., Y. Orlov Y.V., Polyakov A. Conventional and High Order Sliding Mode Control // Journal of the Franklin Institute. – 2020. Vol. 357, Iss. 15. – P. 10244-10261.

144 Vasiljevic L.K., Khalil H.K. Error Bounds in Differentiation of Noisy Signals by High-Gain Observers // Systems and Control Letters. – 2008. – Vol. 57. – P. 856–862.

145 Wang, H.; Zhang, Z.; Tang, X.; Zhao, Z.; Yan, Y. Continuous Output Feedback Sliding Mode Control for Underactuated Flexible-Joint Robot // Journal of the Franklin Institute. – 2022. – Vol. 359. – P. 7847–7865.

146 Xiang D., Lin H., Ouyang J., Huang D. Combined Improved A* and Greedy Algorithm for Path Planning of Multi-objective Mobile Robot // Scientific Reports. – 2022. – Vol. 12, No. 1. – P. 13273.

147 Xie Y., Zhang H., She L., Xiao G., Zhai C., Pan T. Design and Implementation of an Efficient Tracking Differentiator // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – P. 101941–101949.

148 Yakovlev K., Andreychuk A., Belinskaya J., Makarov D. Combining Safe Interval Path Planning and Constrained Path Following Control: Preliminary Results // In Ronzhin, A., Rigoll, G., Meshcheryakov, R. (eds) Interactive Collaborative Robotics. ICR 2019. Lecture Notes in Computer Science (book series). – Springer, Cham, 2019. – Vol. 11659. – P. 310–319.

149 Zhai R., Zhou Z., Zhang W., Sang S., Li P. Control and Navigation System for a Fixed-wing Unmanned Aerial Vehicle // AIP Advances. – 2014. – Vol. 4, No. 3. P. 031306.

150 Zhang H., Lin W., Chen A. Path Planning for the Mobile Robot: A Review // Symmetry. – 2018. – Vol. 10. – P. 450.

151 Zhang W., Wang Z., Raïssi N., Shen Y. Ellipsoid-Based Interval Estimation for Lipschitz Nonlinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2022. – Vol. 67, No. 12. – P. 6802–6809.

152 Zhou Ch., Huang B., Fränti P. A Review of Motion Planning Algorithms for Intelligent Robots // Journal of Intelligent Manufacturing. – 2022. – Vol. 33. – P. 387–424.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ

ООО «ПЛАЗ», ИНН 7816388172
194021, Санкт-Петербург, ул. Политехническая 22
Тел.: +7 (812) 363-33-68
Факс: +7 (812) 313-63-89
E-mail: plaz@plazlink.com
www.plazlink.com

АКТ
о внедрении результатов диссертационной работы
Кокунько Юлии Георгиевны
«Методы и алгоритмы динамического дифференцирования и сглаживания сигналов, задающих траектории мобильных роботов»
на соискание ученой степени кандидата технических наук

В диссертационной работе Кокунько Ю.Г. предложены направленные на снижение вычислительных затрат алгоритмы построения соединяющей путевые точки примитивной негладкой 4D-траектории и ее динамического сглаживания. Данные алгоритмы позволяют автоматически генерировать реализуемые БЛА сигнальные задающие воздействия, представляющие собой плавные пространственные кривые, а также их производные любого требуемого порядка, удовлетворяющие рабочим сценариям полетов и проектным ограничениям конкретного БЛА при любом количестве опорных путевых точек. При этом усложнение формы примитивной траектории не приводит к усложнению алгоритма сглаживания. Для его предварительной настройки требуются только номинальные значения скорости, ускорения и рывка БЛА.

Настоящий акт составлен о том, что предложенные алгоритмы программно реализованы в симуляторе 3D обстановки для моделирования фигур пилотажа и полетных заданий. Использование методов и алгоритмов, разработанных Кокунько Ю.Г., позволило существенно снизить вычислительные затраты, а также повысить производительность и эффективность процесса планирования траекторий для БЛА различного типа.

Заместитель генерального директора ______________ Бугаенко О.В.

Общество с ограниченной ответственностью «ПЛАЗ» Для пакетов

« 30 » ноября 2023 г.

ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ
"УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

ОГРН:1037789072914, ИНН: 7728501703
РФ, 125252, ГОРОД МОСКВА, УЛИЦА 3-Я ПЕСЧАНАЯ, ДОМ 5, КОРПУС 2, Э 1 ПОМ.II КОМ 18
Тел.(495)6889684

12 ноября 2023 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы

Кокунько Юлии Георгиевны

«Методы и алгоритмы динамического дифференцирования и сглаживания сигналов, задающих траектории мобильных роботов»

на соискание ученой степени кандидата технических наук

В диссертации Кокунько Ю.Г. решен комплекс проблем для беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) как в части автоматического управления в условиях неполных измерений и ветровых возмущений, так и в части генерации гладких допустимых эталонных траекторий с помощью автономных динамических моделей.

Разработанные Кокунько Ю.Г. в рамках диссертационного исследования методы, алгоритмы, а также их программная реализация были интегрированы в виртуальный полигон для планирования траекторий и симуляции полета БПЛА мультироторного типа в различных атмосферных условиях. Установлено, что разработанные алгоритмы показывают хорошую производительность при небольших вычислительных и временных затратах на формирование задающих и управляющих воздействий, не требовательны к программному обеспечению. Результаты экспериментов подтвердили, что использование в комплексе данных методов позволяет повысить маневренность БПЛА и степень его автономности.

Генеральный директор ____________________ Ю.Д. Воробьев

3454

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024614443

«Динамический генератор плавных эталонных траекторий для мобильных роботов с автоматическим учетом ограничений на скорость, ускорение и рывок»

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук (RU)***

Автор(ы): ***Кокунько Юлия Георгиевна (RU)***

Заявка № **2024612887**

Дата поступления **13 февраля 2024 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***26 февраля 2024 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов