ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ ИМ.
В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Галяев Иван Андреевич

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАМИАНОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ И БИЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПРИЛОЖЕНИЕМ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Специальность 2.3.1 — Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.т.н., профессор
Ядыкин Игорь Борисович

Москва — 2025

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования

Переход к цифровой экономике невозможен без развитой технологической среды, позволяющей создавать эффективную сеть передачи информации между элементами единой системы, осуществлять мониторинг и анализ состояния распределенных энергосистем, и как результат обеспечивать интеллектуальное управление системами и их отдельными узлами. Необходимость создания такой среды привело к тому, что современный этап развития инфокоммуникационных технологий характеризуется активным созданием технологий передачи данных и интеллектуального управления, а также их быстрым распространением в различных сферах деятельности человека, в частности, в системах генерации и распределения электроэнергии [1]. Современная генерация и распределение электроэнергии быстро меняются в связи с потребностью в снижении выбросов CO_2, распространением экологически чистых возобновляемых источников энергии и активным выходом потребителей на энергетический рынок [2; 3]. Приоритетным направлением развития электроэнергетических систем (ЭЭС) в промышленно развитых государствах становится сегодня реализация концепции Интернета энергии, разработка и внедрение в эксплуатацию новых технологий «умных сетей» (smart grids) и «локальных сетей» (micro grids). Распределенная генерация позволяет собрать энергию из разных источников, снизить воздействие на окружающую среду и повысить надежность энергоснабжения [4—7]. По соображениям надежности ресурсы распределенной генерации должны подключаться к единой сети передачи вместе с традиционными большими электростанциями [8; 9]. При этом неустойчивость ЭЭС возникает прежде всего из-за потери инерции вращения синхронными машинами и колебаний, вносимых возобновляемыми источниками и взаимодействием мод генераторов [10—12]. Таким образом, широкое использование новых технологий и распределенного управления в микро и макро-сетях порождает проблему обнаружения, мониторинга и подавления опасных низкочастотных колебаний. Игнорирование этой проблемы угрожает развитием каскадных аварий, разрушением генераторов и технологических установок потребителей. Эта проблема усугубляется нелинейными и нестационарными характеристиками самих сетей и нагрузок потребителей. Свойства управляемости, устойчивости, достижимости и наблюдаемости играют важную роль в задачах управления, в том числе стабилизации неустойчивых систем с помощью обратной связи, при идентификации и прогнозе динамики систем, при проектировании сенсорных сетей [13; 14]. Применение спектральных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости позволяет проводить с единых позиций более тонкий количественный анализ этих свойств [15]. Новые критерии на основе метода грамианов позволяют количественно оценивать влияние отдельных мод и их взаимодействия на динамику системы. Свойства грамианов широко используются при решении различных практических задач управления и мониторинга, таких как стабилизация систем [2; 5; 8; 9; 16—31], настройка регуляторов [32—39], понижение размерности моделей систем [15; 40—49], определение оптимального расположения управляющих устройств и датчиков в системе [32; 36; 50—53], управление на основе принципа минимальной энергии [13]. Однако, практически все существующие методы модального анализа общей теории управления, мониторинга состояния, оценки устойчивости и надежности не учитывают динамику взаимодействия собственных мод системы, существенно влияющую на вариации энергии ее возмущений. Метод спектральных разложений функций Ляпунова позволяет количественно оценивать взаимодействие собственных мод в динамической системе, что дает возможность проводить более глубокий анализ структурных связей между элементами системы и оценивать влияние этих связей на фундаментальные свойства управляемости, устойчивости, достижимости и наблюдаемости. Дополнительная информация, полученная из спектральных разложений, позволяет улучшить соответствующие методы и алгоритмы, за счет более точных количественных энергетических критериев управляемости, устойчивости, наблюдаемости, качества управления и аппроксимации. Другой концептуальный метод анализа устойчивости связан с использованием уравнений Ляпунова [54]. Этот метод был применен для оценки устойчивости электроэнергетических систем [31; 55].

Исследуемые в диссертационной работе задачи и весь класс методов мониторинга состояния и управления актуален для современных многомерных динамических систем, а рассматриваемые в постановках модели графов могут быть моделями биологических или энергетических систем. Полученные решения могут быть полезны при разработке алгоритмов демпфирования опасных межзональных колебаний. Таким образом, с учетом вышесказанного, проблема разработки новых спектральных методов мониторинга состояния и управления многомерными динамическими системами, исследуемая в работе, является актуальной.

Степень разработанности научной темы

Среди классических методов анализа динамических управляемых систем выделяют решения уравнений Ляпунова. Впервые уравнение Ляпунова и задача об устойчивости движения для линейных динамических систем были сформулированы в работе [56]. А.М. Ляпунов дал строгое определение устойчивости, в дальнейшем именуемое «по Ляпунову», и предложил два основных метода исследования устойчивости движения. А.М. Ляпунов сформулировал постановку задачи об устойчивости движения по уравнениям первого приближения и описал условия, при которых это приближение решает вопрос об устойчивости системы, а при каких оно недостаточно. А.М. Ляпунову принадлежит теорема устойчивости системы автоматического регулирования (САР): если все корни характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости – линеаризованная САР устойчива. Уравнение Ляпунова является частным случаем уравнения Сильвестра. Дж.Дж. Сильвестр является основоположником теории динамических систем. В [57] заложены методы решений матричных алгебраических уравнений Сильвестра и применение этих методов для задач механики. Обобщением уравнений Сильвестра являются уравнения Крейна, играющие важную роль в современной теории управления. В [58] М.Г. Крейн доказывает теорему о существовании интегрального представления соответствующих решений. Область применения этих уравнений чрезвычайно широка: анализ устойчивости линейных и билинейных динамических систем, оценка их состояния, системы модального управления, оптимальное управление и фильтрация, идентификация и аппроксимация моделей динамических систем высокой размерности. Большой вклад в теорию уравнений Крейна внесли С.К. Годунов и Г.В. Демиденко [59; 60]. В их работах были исследованы интегральные представления решений этих уравнений в комплексной плоскости, получены оценки степени устойчивости линейной динамической системы и нормы матричной экспоненты через спектральную норму матрицы динамики. Методы решения дифференциальных матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра были разработаны спустя полвека после появления работ Сильвестра и Ляпунова. Большое число работ посвящено матричным уравнениям Сильвестра, Ляпунова и Риккати, ими занимались такие ученые, как P. Lancaster, V. Simoncini, Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков [61—63]. A. Talbot в [64] разработал решение дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра в виде интеграла от произведения матричных экспонент. Также разработкой методов вычислений матричных и алгебраических уравнений Ляпунова и Сильвестра и исследованием структурных свойств решений этих уравнений занимались A. Antoulas, P. Benner, Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт, В.Н. Буков, В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский [17; 65—68]. A. Antoulas развил подход использования представления динамических систем в канонических формах, применения матриц грамианов для решения различных задач, например о расширении итерационного рационального алгоритма Крылова на класс линейных систем с переключателями [17; 69]. С развитием метода грамианов тесно связано имя K. Zhou, в [41] предложен метод сбалансированного отсечения на основе грамианов устойчивых и антиустойчивых систем. Различные задачи, связанные с применением грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов для вычисления системных инвариантов и энергетических индексов устойчивости, решали P. Benner, T. Damm, C. Himpe [65; 70]. C. Xiao и A. Hausdottir [18; 71] развили новый подход в направлении использования свойств импульсной переходной функции и матриц грамианов в виде клетчатой структуры из нулей и единиц. Этот подход модернизировал A. Dilip и в [72] разработал метод оптимального выбора мест размещения датчиков и исполнительных устройств на графе распределенной системы управления. F. Mehr внес вклад в решение задачи оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, и оценок степени управляемости [51]. Важные результаты были получены для методов вычисления грамианов систем, модели которых представлены в канонических формах управляемости и наблюдаемости. Хорошо известно применение грамианов для построения упрощенных моделей динамических систем высокой размерности, для вычисления норм передаточных функций линейных и билинейных динамических систем [73] Зубовым Н.Е., Зыбиным Е.Ю., Микриным Е.А., Мисрихановым М.Ш. В области работы с билинейными системами одной из важных задач является задача понижения порядка модели путем построения аппроксимирующей модели меньшей размерности. Этими задачами занимались

L. Zhang, J. Lam, P. D'Alessandro, A. Isidori, C. Hsu, D. Hou [42; 46; 74]. В последние годы над развитием теории грамианов работают И.Б. Ядыкин, А.Б. Искаков, Н.Н. Бахтадзе, Е.Ю. Кутяков [20; 26; 32; 36; 75—79]. Задача мониторинга состояния или управления многомерными динамическими системами рассмотрена во многих статьях [2; 5; 8; 9; 13; 15—30; 32—38; 40—53; 79]. В некоторых работах [20; 75—78] предлагается использование спектральных методов решения уравнения Ляпунова. Применение упрощенных моделей для больших энергетических, транспортных, социальных сетей на основе выходных грамианов управляемости, позволяющих вычислять энергетические показатели, рассматривается в [15]. Подобный подход позволил ввести энергетические метрики для выбора оптимального размещения управляющих узлов на графе сети с целью минимизации энергии управления [13]. Следует подчеркнуть, что методы, основанные на применении энергетических метрик, применяются для определения мест размещения вставок постоянного тока ЭЭС [16]. А в последнее десятилетие – для решения различных оптимизационных задач при исследовании транспортных, социальных и биологических динамических систем [72; 80]. Задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств важна не только для сетей, но и для систем управления с многими входами и многими выходами [81].

Объектом исследования являются непрерывные линейные и билинейные динамические системы.

Предметом исследования являются спектральные методы и алгоритмы решения уравнений Ляпунова.

Целью диссертационного исследования является разработка методов и алгоритмов решения уравнений Ляпунова для повышения эффективности управления и мониторинга состояния многомерных динамических систем.

Для достижения данной цели были **поставлены и решены следующие задачи**:

– Развить структурные методы решения матричных уравнений Ляпунова и получить спектральные и сингулярные разложения грамианов управляемости и наблюдаемости линейной стационарной системы.
– Развить спектральные методы решения обобщенных уравнений Ляпунова и получить достаточные условия BIBO-устойчивости непрерывных билинейных систем.

– Применить разработанные методы для модели узлов графа электроэнергосистемы для анализа и синтеза стабилизирующих регуляторов.

Соответствие паспорту специальности

Работа выполнена в соответствии со следующими пунктами паспорта специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»:

– П.1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
– П.3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
– П.4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Методологическую основу работы составили методы теории управления, оптимизации, решения обыкновенных дифференциальных уравнений, матричного анализа, а также методы компьютерного моделирования.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью и полнотой исходных положений, достоверностью, воспроизводимостью и непротиворечивостью математических выкладок. Результаты теоретических исследований подтверждены средствами компьютерного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Новые условия устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод и инвариантные представления энергетических функционалов на основе методов спектральных и сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости (соответствует п.1, п.3 паспорта специальности 2.3.1).
2. Метод получения сепарабельных спектральных разложений грамианов управляемости для неустойчивых динамических систем. Методы получения спектральных разложений грамианов управляемости и обратных грамианов, позволяющих аналитически вычислять составляющие энергии, соответствующие характерным собственным числам матриц грами-

анов, определяющие основной вклад в величину энергетических функционалов достижимости и устойчивости (соответствует п.1, п.3 паспорта специальности 2.3.1).

3. Новые достаточные условия BIBO-устойчивости непрерывной нестационарной билинейной системы на основе метода решения обобщенного уравнения Ляпунова в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части (соответствует п.1, п.3 паспорта специальности 2.3.1).
4. Метод и алгоритм упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций для анализа и синтеза регуляторов для ЭЭС (соответствует п.3, п.4 паспорта специальности 2.3.1).

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Разработан новый метод получения матриц в виде произведения Адамара для решения уравнения Ляпунова для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами, основанный на аналитическом вычислении элементов соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы.
2. Предложен новый метод получения сепарабельных спектральных разложений грамианов управляемости для неустойчивых динамических систем, основанный на аналитическом вычислении коэффициентов матриц Сяо через разложения грамианов, использующий свойства элементов матриц Сяо, связанные с образованием ими геометрической прогрессии, и дополнительно позволяющий вычислять квадратичную H_2-норму на основе итеративного разложения Фаддеева.
3. Разработан метод решения обобщенного уравнения Ляпунова для непрерывных нестационарных билинейных систем в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части, основанный на сходимости числовых последовательностей элементов решения билинейного уравнения во временной и частотной области.

4. Предложены метод и алгоритм упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций с оценкой риска потери устойчивости системы при авторезонансе.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии математической теории спектральных методов решения уравнения Ляпунова и рассмотрении новых для данной области науки постановок, связанных с учетом влияния межзональных колебаний на функционирование ЭЭС, а также получении новых критериев устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.

Практическая значимость работы заключается в том, что полученные научные результаты могут использоваться для построения наблюдателя пониженного порядка в задачах модального управления, для проектирования систем энергосберегающего управления, для выбора управляющих входов и мест размещения датчиков на выходах для систем управления многомерных объектов.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на научном семинаре ИПУ РАН «Моделирование и управление в больших системах», на ежегодном семинаре ИПУ РАН в мае в 2022, в 2023, в 2024 годах, а также на ведущих международных и отечественных конференциях: «Управление развитием крупномасштабных систем MLSD 2020», 10 Симпозиум IFAC по Управлению электро и энергосистемами CPES 2022, 12 Симпозиум IFAC по Управлению электро и энергосистемами CPES 2024, XX Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами».

Реализация и внедрение результатов работы

Результаты использовались для выполнения работ при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 19-19-0673.

Публикации

Результаты диссертационной работы отражены в 8 публикациях, в том числе 4 в изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам категории К1 Перечня ВАК [82—85] и 4 публикаций – в сборниках трудов международных и всероссийских конференций [33; 34; 86; 87].

Личный вклад

Все основные результаты диссертационной работы получены автором самостоятельно.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения. Полный объем диссертации составляет 126 страниц с 6 рисунками. Список литературы содержит 135 наименований.

Глава 1. Спектральные методы решения уравнения Ляпунова для канонических форм линейных непрерывных динамических систем

Глава 1 посвящена развитию структурных методов решения матричных уравнений Ляпунова и получению спектральных и сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости, основанных на приведении уравнений состояния линейной стационарной системы к следующим каноническим формам: диагональной, управляемости и наблюдаемости. Основные результаты главы представлены в работах [83; 84].

Определение 1.1. *Спектральными методами решения будем называть методы, использующие разложения матриц по спектру.*

Математическое описание динамических систем в пространстве состояний избыточно по параметрам. В связи с этим существует много методов, уменьшающих количество независимых коэффициентов модели. Параметры канонической формы инвариантны по отношению к матрицам систем, связанных между собой эквивалентными преобразованиями. В этом смысле они являются инвариантами динамической системы, аналогичными коэффициентам передаточной функции, ее нулям и полюсам, моментам, марковским параметрам, ганкелевым сингулярным числам и др. Одним из важных свойств инвариантов является их простота, на проверку эквивалентности инвариантов систем уйдет меньше вычислительной мощности, чем на прямой подсчет. Канонические формы управляемости и наблюдаемости позволяют связать модели пространства состояний с передаточными функциями. С помощью них строится модальный регулятор и наблюдатель [88]. В некоторых случаях, однако, полезно ввести переменные состояния, которые формально определяются как линейная комбинация различных физических переменных. Такое преобразование выполняется в целях получения определенных канонических форм уравнений состояния, что облегчает обнаружение некоторых свойств объекта и системы или позволяет описать их с помощью меньшего числа параметров, а также установить для односвязных систем (с одним входом и одним выходом) непосредственную связь векторно-матричных моделей с моделями типа «вход - выход».

Мониторинг состояния объектов управления и управление демпфированием опасных колебаний являются важными направлениями исследований в различных областях промышленности (энергетика, машиностроение, авиация и космонавтика, робототехника). Новые технологии моделирования требуют развития инструментов аппроксимации математических моделей сложных систем различной природы [17; 66; 73]. Важную роль играют методы вычислений матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра и исследование структурных свойств решений этих уравнений [59; 89—95]. Основными свойствами линейных динамических систем, связанных с решениями этих уравнений, являются управляемость, наблюдаемость и устойчивость. Важные результаты были получены в области вычисления грамианов для систем, модели которых представлены в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В [96] были впервые предложены методы вычисления грамианов, основанные на использовании матриц периодической структуры, для линейных систем, заданных уравнениями в формах управляемости и наблюдаемости. В [18; 71] новый подход был развит в направлении использования свойств импульсной переходной функции и матриц грамианов в виде клетчатой структуры из нулей и единиц (the zero-plaid structure of the controllability gramian). В [75] подход был развит для вычисления спектральных разложений более общего класса линейных стационарных (LTI) систем со многими входами и многими выходами (MIMO). В [72] с использованием данного подхода разработан метод оптимального выбора мест размещения датчиков и исполнительных устройств на графе распределенной системы управления. В работе показано, что для диагонализованной системы грамиан управляемости может быть представлен в виде произведения Адамара двух положительно полуопределенных матриц. В [19] решена задача оптимизации пропускной способности городской транспортной сети на основе минимизации следа матрицы грамиана управляемости с учетом ограничений. Различные задачи, связанные с применение грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов для вычисления системных инвариантов и энергетических индексов устойчивости, можно найти в [65; 70].

Далее в главе производится развитие структурных методов решения матричных уравнений Ляпунова и получение спектральных и сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости, основанных на приведении уравнений состояния линейной стационарной системы к следующим каноническим формам: диагональной, управляемости и наблюдаемости.

1.1 Канонические формы представления линейных стационарных устойчивых динамических систем

Пусть задана MIMO LTI динамическая система вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \;\; x(0) = 0, \;\; y(t) = Cx(t), \tag{1.1}$$

где $x\left(t\right) \in \mathbb{R}^n$ – вход системы, $u\left(t\right), y\left(t\right) \in \mathbb{R}^m$ – управление и выход системы; матрицы динамики системы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вещественны, а собственные числа s_i матрицы A различны. Система (1.1) предполагается полностью управляемой и наблюдаемой, реализация (1.1) минимальна.

Определение 1.2. *Для устойчивой динамической системы* (1.1) *определены уравнения Ляпунова*

$$AP^c + P^c A^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}}, \tag{1.2}$$

и

$$AP^o + P^o A^{\mathrm{T}} = -C^{\mathrm{T}}C, \tag{1.3}$$

решениями которых являются грамиан управляемости P^c и наблюдаемости P^o соответственно. Эквивалентная форма представления грамианов:

$$P^c = \int_0^\infty e^{A\tau}BB^{\mathrm{T}}e^{A^{\mathrm{T}}\tau}d\tau,$$

и

$$P^o = \int_0^\infty e^{A^{\mathrm{T}}\tau}C^{\mathrm{T}}Ce^{A\tau}d\tau.$$

В дальнейшем, если не оговорено иного, под «грамианом» подразумевается «грамиан управляемости».

Определение 1.3. *[97] Динамическая система называется минимальной, если у нее нет нетривиальных (замкнутых) подсистем.*

Тогда передаточная функция единственна и имеет вид:

$$W\left(s\right) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i B s^i N^{-1}\left(s\right),$$

где $N(s)$ – характеристический полином матрицы A, A_i – «i»-я матрица Фаддеева в разложении резольвенты матрицы A в ряд Фаддеева – Леверье [91].

Для такой системы справедлива формула вычисления грамиана управляемости по парному спектру [75]:

$$P^c = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{1}{s_j+s_\rho}Res\left[(Is-A)^{-1},s_j\right]BB^{\mathrm{T}}Res\left[\left(Is-A^{\mathrm{T}}\right)^{-1},s_\rho\right], \tag{1.4}$$

где $Res\left[(Is-A)^{-1},s_j\right]$ вычет функции $(Is-A)^{-1}$ в точке s_j. В дальнейшем, разложение, использующее пересчет двух собственных чисел s_j, s_ρ одновременно, будем называть разложением по парному спектру. Рассмотрим преобразование уравнения системы (1.1) общего вида к уравнениям состояний в канонических формах: диагональной, управляемости и наблюдаемости.

В такой постановке для системы (1.1), существует невырожденное преобразование координат, переводящее ее к диагональному виду:

$$\begin{aligned}&x_d = Tx, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d,\\ &A_d = TAT^{-1}, \quad B_d = TB, \quad C_d = CT^{-1}, \quad Q_d = TBB^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

или

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & s_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nu_1^*\\ \nu_2^*\\ \vdots\\ \nu_n^*\end{bmatrix} = T\Lambda T^{-1},$$

где матрица T составлена из правых собственных векторов u_i, а матрица T^{-1} – из левых собственных векторов ν_i^*, соответствующих собственному числу s_i. Уравнение Ляпунова для диагонализированной системы имеет вид:

$$A_d P_d^c + P_d^c A_d^{\mathrm{T}} = -B_d B_d^{\mathrm{T}}. \tag{1.5}$$

Решение этого уравнения определяется формулой [76]:

$$P_d^c = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{1}{s_j+s_\rho}Res\left[(Is-A_d)^{-1},\, s_j\right]B_d B_d^{\mathrm{T}}Res\left[(Is-A_d)^{-1},\, s_\rho\right].$$

Грамиан управляемости P_d^c диагонализированной системы связан с грамианом P^c исходной системы соотношением вида:

$$P^c{=}TP_d^cT^{\mathrm{T}}.$$

Из (1.4) следует сепарабельное спектральное разложение грамиана управляемости системы, преобразованной в диагональную каноническую форму [77]:

$$P_d^c=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{-b_{j\rho}}{s_j+s_\rho}\mathbf{1}_{j\rho}\ ,\ b_{j\rho}=\left[B_dB_d^{\mathrm{T}}\right]_{j\rho},$$

где введено обозначение для индикатора:

$$\mathbf{1}_{j\rho}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1_{j\rho}&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Определение 1.4. *Сепарабельное разложение матрицы - разложение, при котором элементы матрицы считаются независимо друг от друга.*

В рассматриваемой системе (1.1) выделим выход «γ» тогда система (1.1) преобразуется в непрерывную динамическую MISO (с многими входами и одним выходом) LTI систему вида:

$$\dot{x}\left(t\right)=Ax\left(t\right)+b_\gamma u_\gamma\left(t\right),\ x\left(0\right)=0, \tag{1.6}$$

$$y\left(t\right)=cx\left(t\right),$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^1, u_\gamma\left(t\right)\in\mathbb{R}^1$, $\gamma=1,\ldots,m$, b_γ – столбец матрицы B.
Если использовать невырожденное преобразование переменных с матрицей R_c^F, можно рассматривать MISO LTI систему в канонической форме управляемости, то справедливы формулы [17; 77]:

$$x(t)=\sum_{\gamma=1}^{m}R_{c\gamma}^Fx_{c\gamma}(t),$$

$$\dot{x}_c\left(t\right)=A_c^Fx_{c\gamma}\left(t\right)+b_\gamma^Fu_\gamma\left(t\right),\quad x_c\left(0\right)=0, \tag{1.7}$$
$$y_c^F\left(t\right)=c_\gamma^Fx_c\left(t\right),\quad \gamma=1,\ldots,m,$$

$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \; b_\gamma^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$a = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \; c_\gamma^F = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{n-2} & \xi_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Вектор B_γ для MISO системы имеет вид:

$$B_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \dots & b_\gamma & \dots & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Справедливы следующие соотношения [18]:

$$\left(R_{c\gamma}^F\right)^{-1} A R_{c\gamma}^F = A_c^F, \left(R_{c\gamma}^F\right)^{-1} B_\gamma = b_\gamma^F, C R_{c\gamma}^F = c_\gamma^F,$$

$$P^c = \sum_{\gamma=1}^{m} R_\gamma^{cF} P_\gamma^{cF} (R_\gamma^{cF})^T.$$

В отношении систем (1.1) и (1.6) будем предполагать выполненными различные структурные условия устойчивости, управляемости, наблюдаемости и свойств спектра матрицы динамики. В [75] было получено следующее спектральное разложение грамиана управляемости:

$$P_\gamma^{cF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}.$$

Рассмотрим далее вход «γ» SIMO (с одним входом и многими выходами) LTI системы в канонической форме наблюдаемости [75]. В этом случае справедливы формулы:

$$x_o(t) = \sum_{\gamma=1}^{m} R_{o\gamma}^F x_{o\gamma}(t),$$

$$\dot{x}_{o\gamma}\left(t\right) = A_c^F x_{o\gamma}\left(t\right) + b_{o\gamma}^F u_\gamma\left(t\right), \quad x_o\left(0\right) = 0,$$

$$y_{o\gamma}^F\left(t\right) = c_{o\gamma}^F x_{o\gamma}\left(t\right), \quad \gamma = 1, \dots, m,$$

$$A_o^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{-1} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ b_{o\gamma}^F = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{n-2} & \xi_{n-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$c_{o\gamma}^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с принципом дуальности получим выражения [18]:

$$P_{o\gamma}^F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k)\, N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1},$$

$$P^o = \sum_{\gamma=1}^{m} R_{o\gamma}^F P_\gamma^{oF} (R_{o\gamma}^F)^T.$$

1.1.1 Спектральные разложения грамиана управляемости по простому и парному спектру

Для системы (1.1) рассмотрим спектральное разложение грамиана управляемости по простому и парному спектру (1.4).

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\eta=0}^{n} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k)\, N(-s_k)} \equiv \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k)\, \dot{N}(s_\rho)}, \quad s_k + s_\rho \neq 0. \tag{1.8}$$

Введем обозначения:

$$\omega(n, s_k, j, \eta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k)\, N(-s_k)},$$

$$\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k)\, \dot{N}(s_\rho)}.$$

С учетом введенных обозначений тождество (1.8) примет вид:

$$\omega\left(n,s_k,j,\eta\right) \equiv \omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right) \text{ для } \forall s_k,s_\rho \in \mathbb{C}^-,\ s_k+s_\rho \neq 0.$$

Доказательство тождества (1.8) следует из разложения дробно-рациональной функции $\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k)N(-s_k)}$ по корням характеристического уравнения $N\left(-s_k\right)=0$.

Утверждение 1.1. *Рассмотрим мультипликатор* $\omega\left(n,s_k,j,\eta\right)$ *в спектральном разложении грамиана управляемости по простому спектру* (1.4). *Справедливы тождества:*

$$\omega\left(n,s_k,j,\eta\right) \equiv 0, \text{ если } j+\eta = 2m-1, \tag{1.9}$$

$$\omega\left(n,s_k,j,\eta\right) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)}, \text{ если } j+\eta = 2m.$$

Доказательство. Выразим мультипликатор через полином $\gamma\left(n,s_k,-s_k,j,\eta\right)$:

$$\omega\left(n,s_k,j,\eta\right) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma\left(n,s_k,-s_k,j,\eta\right)}{\dot{N}\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)}.$$

В [26] доказано, что полином $\gamma\left(n,s_k,-s_k,j,\eta\right)$ содержит только все четные степени чисел s_k и не содержит их нечетных степеней, откуда следует эквивалентность представлений. □

Утверждение 1.2. *Рассмотрим мультипликатор* $\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right)$ *в спектральном разложении грамиана управляемости по парному спектру* (1.4). *Справедливы тождества:*

$$\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right) \equiv 0, \text{ если } j+\eta = 2m-1,$$

$$\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_k+s_\rho}\ \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right)\dot{N}\left(s_\rho\right)}, \text{ если } j+\eta = 2m. \tag{1.10}$$

Доказательство. Выразим мультипликатор через полином $\gamma\left(n,s_k,-s_k\right)$

$$\omega\left(n,s_k,j,\eta\right) \equiv \omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right) \text{ для } \forall s_k,s_\rho \in \mathbb{C}^-,\ s_k+s_\rho \neq 0.$$

Аналогично предыдущему доказательству применяем свойства полинома $\gamma\left(n,s_k,-s_k\right)$ об отсутствии нечетных степеней корней, откуда следует эквивалентность представлений. $\square$

Определение 1.5. *Назовем матрицей Сяо (Zero plaid structure) матрицу вида [71; 96]:*

$$Y=\begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 & \dots \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 & \dots \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ y_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам:

$$y_{j\eta}=\begin{cases} 0, \text{ если } \; j+\eta=2k+1, \quad k=1,\dots,n, \\ y_n=\frac{1}{2Y_{n,1}}, \\ y_{n-l}=\frac{-\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i Y_{n-l,i+1}y_{n-l+i}}{Y_{n-l,1}}, \text{если } j+\eta=2k,\ k=1,\dots,n, l=1,\dots,n-1, \end{cases}$$

где $Y_{i,j}$ – элемент таблицы Рауса для системы, находящийся на пересечении i строки и j столбца.

Замечания 1.1, 1.2 доказывают, что для всех непрерывных устойчивых MIMO LTI систем с простым спектром, приведенных к каноническим формам управляемости и наблюдаемости, существуют спектральные разложения в форме матриц Сяо. Для систем, представленных в канонических формах управляемости и наблюдаемости, это позволяет вместо вычисления n^2 элементов матрицы вычислять только n диагональных элементов по формулам (1.9) – (1.10).

Замечание 1.1. *Следует с осторожностью использовать мультипликатор* $\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right)$ *в спектральном разложении грамиана управляемости по парному спектру* (1.4). *Например, в случае MIMO LTI системы, приведенной к диагональной канонической форме, спектральное разложение грамиана управляемости имеет простой вид:*

$$P_d^c=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}\frac{-b_{j\rho}}{s_j+s_\rho}\mathbf{1}_{j\rho}\ , \qquad b_{j\rho}=[B_dB_d^*]_{j\rho}. \tag{1.11}$$

С другой стороны, имеем:

$$P_d^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \omega(n,s_j,j,\rho) A_j B_d B_d^* A_\rho^*, \;\; \omega\left(n,s_k,j,\rho\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k^j(-s_k)^\rho}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)}. \quad (1.12)$$

Заметим, что обе формулы (1.11), (1.12) дают одинаковый численный результат, который соответствует различным спектральным разложениям.

1.1.2 Пример спектрального разложения грамиана управляемости для модели двухзонной печи

Рассмотрим задачу управления двухзонной печью. Модель объекта управления – нагревательной печи можно описать уравнениями состояния вида:

$$\Sigma_1 \colon \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right), \quad x\left(0\right) = 0, \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right). \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В данном случае можно вычислить выражения:

$$N\left(s\right) = s^2 + 1.5s + 0.5, \; \dot{N}\left(s\right) = 2s + 1.5,$$

$$\left(Is - A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+0.5 \end{bmatrix} \left(s^2 + 1.5s + 0.5\right)^{-1},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, BB^T = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.5 \\ 1.5 & 4{,}25 \end{bmatrix}.$$

Грамиан управляемости, вычисленный по формуле (1.11), равен:

$$P^c = \begin{bmatrix} 1.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2.125 \end{bmatrix}.$$

Выражения разложения грамиана управляемости имеют вид:

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\rho=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{2}\frac{s_k^j(-s_k)^\rho}{\dot N\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)}A_jBB^{\mathrm{T}}A_\rho^{\mathrm{T}},$$

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\rho=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{2}\frac{s_k^j(-s_k)^\rho}{\dot N\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)}\frac{-b_{j\rho}}{s_j+s_\rho}\mathbf{1}_{j\rho},$$

где A_j – матрица Фаддеева, построенная для матрицы A с помощью алгоритма Фаддеева – Леверье [91; 92]. Вычислим матрицы $A_jBB^{\mathrm{T}}A_\rho^{\mathrm{T}}$:

$$A_0BB^TA_0^T = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.0625 \end{bmatrix},\ A_0BB^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 1.5 & 2.125 \end{bmatrix},$$

$$A_1BB^{\mathrm{T}}A_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.5 \\ 0.75 & 2.125 \end{bmatrix},\ A_1BB^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1.25 & 1.5 \\ 1.25 & 4.25 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (1.12), получим спектральное разложение:

$$P^c = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.0625 \end{bmatrix}\frac{2}{3} + \begin{bmatrix} 1.25 & 1.5 \\ 1.25 & 4.25 \end{bmatrix}\frac{1}{3} = \begin{bmatrix} 1.25 & 1 \\ 1 & 2.125 \end{bmatrix}.$$

Матрицы бесконечных субграмианов являются симметричными и положительно определенными, и таковой является их сумма. Путем прямой подстановки проверяем, что вычисленный грамиан управляемости является решением уравнения Ляпунова. Сепарабельное спектральное разложение грамиана управляемости, вычисленное по формуле (1.11), имеет вид:

$$P^c = \begin{bmatrix} 1.25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2.125 \end{bmatrix}.$$

Матрицы бесконечных субграмианов в этом разложении не являются симметричными и положительно определенными, хотя таковой является их сумма. Пример показывает, что один и тот же грамиан может иметь несколько разных спектральных разложений.

1.1.3 Разложение грамианов в форме произведений Адамара

Введем матрицы мультипликатора грамиана управляемости системы (1.1), приведенной к канонической форме управляемости или наблюдаемости

$$\Omega_{\mathrm{c}} = [\omega_{\mathrm{c},j\eta}]_{n\times n}$$

и ее грамиана наблюдаемости в виде [73]

$$\Omega_o = [\omega_{o,j\eta}]_{n\times n},$$

где j – индекс строки, а η – индекс столбца матриц мультипликаторов.
Введем матрицы Ψ_{c} и Ψ_o в виде:

$$\Psi_{\mathrm{c}} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} A_i BB^{\mathrm{T}} A_\mu^{\mathrm{T}},$$

$$\Psi_o = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} A_i^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C A_\mu.$$

Введем поэлементное представление этих матриц в виде:

$$\psi_{\mathrm{c},j\eta} = e_j^{\mathrm{T}} \Psi_{\mathrm{c}}\ e_\eta,$$

$$\psi_{o,j\eta} = e_j^{\mathrm{T}} \Psi_o\ e_\eta.$$

Теорема 1.1. *Для системы* (1.1) *с простым спектром [75]*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu\,(t)\,,\ x\,(0) = 0,$$

$$y\,(t) = Cx\,(t)\,,$$

где $x\,(t) \in R^n$, $u\,(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$, *субграмиан управляемости* P^c *является матрицей вида* (1.4), *и в соответствии с [92], формулами* (1.1), (1.4) *определяется как*

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} P^c_{j,\eta},\ P^c_{j,\eta} = \omega(n,s_k,s_\rho,j,\eta)A_jBB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}_\eta, \tag{1.13}$$

где

$$\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } j+\eta \text{ нечетен,} \\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_\rho+s_k}\frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot N(s_k)\dot N(s_\rho)}, \text{если } j+\eta \text{ четен.} \end{cases}$$

Доказательство. Как известно, спектральное разложение грамиана управляемости в условиях теоремы 1.1 имеет вид [76; 92]:

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_\rho+s_k}\frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot N\left(s_k\right)\dot N\left(s_\rho\right)}A_jBB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}_\eta.$$

Подставим вновь введенную скалярную функцию $\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right)$ в эту формулу и получим формулу (1.13). □

Теорема 1.2. *Для устойчивой системы* (1.1), *преобразованной в каноническую форму управляемости или наблюдаемости, грамианы управляемости и наблюдаемости имеют вид обобщенных матриц Сяо:*

$$P^c = \Omega_c \circ \Psi_c = \left[p^c_{j\eta}\right]_{n\times n}, \quad \Psi_c = \left[\psi_{c,j\eta}\right]_{n\times n}, \tag{1.14}$$

$$\Psi_c = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}\Psi_{c,i\mu},\ \ \Psi_{c,i\mu} = M_iM^*_\mu,\ \ M_i = A_iB,$$

$$\Omega_c = \left[\omega_c(n,j,\eta)\right]_{n\times n}, \quad p^c_{j\eta} = \omega_c(n,j,\eta)\times\psi_{c,j\eta}, \quad j,\eta = 1,\ldots,n.$$

Доказательство. Воспользуемся спектральным разложением грамиана управляемости (1.4). Введем представление грамианов в форме произведений Адамара:

$$P^c = \Omega_{\mathrm{c}} \circ \Psi_{\mathrm{c}}, \tag{1.15}$$

$$P^o = \Omega_o \circ \Psi_o. \tag{1.16}$$

Это представление позволяет выписать простые формулы для вычисления элементов грамианов управляемости и наблюдаемости MIMO LTI систем P^c и P^o

в виде [71]:

$$p^c_{j\eta} = \omega_c(n,j,\eta) \times \psi_{c,j\eta}, \tag{1.17}$$

$$p^o_{j\eta} = \omega_c(n,j,\eta) \times \psi_{o,j\eta}. \tag{1.18}$$

Далее используем тождества для одного класса устойчивых полиномов, корни которых различные над полем комплексных чисел. Формулы (1.15)-(1.18) выражают алгоритмы вычисления элементов обобщенных матриц Сяо в форме произведений элементов матриц мультипликатора и элементов сумм всевозможных произведений матриц $A_j B B^{\mathrm{T}} A_\eta^{\mathrm{T}}$, записанных в форме произведений матриц Адамара:

$$\Omega_{\mathrm{c}} \circ \Psi_{\mathrm{c}}.$$

$\square$

Утверждение 1.3. *Рассмотрим важный частный случай непрерывных линейных SISO систем, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В этом случае грамианы управляемости и наблюдаемости определяются формулами [75]:*

$$P^{cF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k)\, N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}, \tag{1.19}$$

$$P^{oF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k)\, N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}.$$

Представление грамианов в форме Адамара согласно (1.15) – (1.16) *принимает вид:*

$$P^{cF} = \Omega_{cF} \circ \Psi_c\ ,\ \Psi_c = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{j+1\eta+1},$$

$$P^{oF} = \Omega_{oF} \circ \Psi_o, \quad \Psi_o = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{j+1\eta+1.}$$

Отсюда справедливы тождества:

$$P^{cF} \equiv \Omega_{cF}, \tag{1.20}$$

$$P^{oF} \equiv \Omega_{oF}. \tag{1.21}$$

Это означает, что грамиан управляемости в канонической форме управляемости совпадает с матрицей мультипликатора для этого грамиана, что позволяет применить формулы (1.20), (1.21) *и устанавливает принадлежность грамиана к классу матриц Сяо. Аналогичный результат справедлив для грамиана наблюдаемости в канонической форме наблюдаемости.*
Матрицы мультипликаторов в разных канонических формах имеют вид:

$$\Omega_{cF} \equiv \Omega_{oF} = \left[\omega\left(n,s_k,s_\rho,j,\eta\right)\right]_{n\times n} = \left[\omega\left(n,s_k,j,\eta\right)\right]_{n\times n}.$$

1.1.4 Спектральные и сингулярные разложения обратных матриц грамианов

Общие формулы вычисления обратных матриц грамианов (далее обратных грамианов) для системы (1.1), приведенной к канонической форме управляемости или наблюдаемости, имеют вид [17]:

$$\left(P^c\right)^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0}\left[\left(P^c\right)^{n-1} + \gamma_{n-1}\left(P^c\right)^{n-2} + \dots + \gamma_2 P^c + \gamma_1 I\right],$$

$$\left(P^o\right)^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0}\left[\left(P^o\right)^{n-1} + \gamma_{n-1}\left(P^o\right)^{n-2} + \dots + \gamma_2 P^o + \gamma_1 I\right],$$

где γ_i - коэффициенты характеристического уравнения грамиана. В случае непрерывных SISO LTI систем эти формулы в соответствии с (1.20), (1.21) приобретают форму:

$$\left[P^{cF}(\omega\left(n,s_k,j,\eta\;\right)\right]^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0}\left[\left(\Omega_{cF}\right)^{n-1} + \gamma_{n-1}\left(\Omega_{cF}\right)^{n-2} + \dots + \gamma_2\Omega_{cF} + \gamma_1 I\right],$$

$$\left[P^{oF}(\omega\left(n,s_k,j,\eta\;\right)\right]^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0}\left[\left(\Omega_{oF}\right)^{n-1} + \gamma_{n-1}\left(\Omega_{oF}\right)^{n-2} + \dots + \gamma_2\Omega_{oF} + \gamma_1 I\right].$$

Наличие степеней матриц мультипликатора в правой части формул приводит к появлению сложных дробно-рациональных функций собственных чисел s_k, что ограничивает область применения формул спектральных разложений обратных грамианов системами малой и средней размерности. Вернемся к устойчивым непрерывным MIMO LTI системам с простым спектром и заметим, что грамианы управляемости и наблюдаемости представляют собой симметричные комплекснозначные матрицы. В этом случае существуют их сингулярные разложения вида [17]:

$$P^c = P^{c*} = V_c \Lambda V_c^*,$$

$$P^o = P^{o*} = V_o \Lambda V_o^*,$$

где матрица V_c образована правыми сингулярными векторами матрицы P^c, матрица V_c^* образована левыми сингулярными векторами матрицы P^c, а матрица Λ является диагональной матрицей вида:

$$\Lambda = diag\left\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\right\}.$$

Определим матрицы S и U в виде:

$$S = \ diag\left\{sgn\lambda_1,\, sgn\lambda_2, \ldots, sgn\lambda_n\ \right\},\ U_c = V_c S,$$

$$sgn\lambda = \begin{cases} +1, & \text{если } \lambda \geq 0, \\ -1, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$P^c = U_c \Lambda V_c^*,$$

$$P^o = U_o \Lambda V_o^*,$$

где матрица U_c образована левыми сингулярными векторами матрицы P^c. Поскольку Λ, U_c, V_c являются невырожденными матрицами, то:

$$(P^c)^{-1} = (U_c)^{-1} \Lambda^{-1} (V_c^*)^{-1} = V_c^* \Lambda^{-1} U_c. \tag{1.22}$$

Аналогичным образом получаем:

$$(P^o)^{-1} = (U_o)^{-1} \Lambda^{-1} (V_o^*)^{-1} = V_o^* \Lambda^{-1} U_o. \tag{1.23}$$

Поскольку матрица Λ диагональна, ее обратную матрицу можно представить в виде:

$$\Lambda^{-1} = \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \cdots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn}\right]. \tag{1.24}$$

Подставив (1.24) в (1.22), (1.23), получим следующие сингулярные разложения обратных грамианов управляемости и наблюдаемости по их сингулярному спектру:

$$(P^c)^{-1} = V_c^* \Big[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \cdots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \Big] U_c,$$

$$(P^o)^{-1} = V_o^* \Big[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \cdots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \Big] U_o.$$

Теорема 1.3. *Для устойчивой системы* (1.1)*, преобразованной в каноническую форму управляемости или наблюдаемости, сингулярные разложения ее обратного грамиана управляемости по собственным числам матрицы грамиана имеют следующий вид:*
Для простого спектра матрицы грамиана:

$$(P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma)} \frac{1}{\sigma} \Bigg|_{\sigma=\sigma_\lambda}, \tag{1.25}$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_λ – собственное число матрицы грамиана P^c.
Для кратных собственных чисел матрицы грамиана:

$$(P^c)^{-1} = -\sum_{\delta=1}^{q} \sum_{\rho=1}^{m_\delta} \frac{K_{\delta\rho}}{(-\sigma_\delta)^{m_\delta-\rho+1}}, \tag{1.26}$$

$$K_{\delta\rho} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left\{ \frac{d^{\rho-1}}{d\sigma^{\rho-1}} \left[\frac{(\sigma-\sigma_\delta)^{m_\delta} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^j P_j^c}{\prod_{\delta=1}^{n} (\sigma-\sigma_\delta)^{m_\delta}} \right] \right\} \Bigg|_{\sigma=\sigma_\delta}, \tag{1.27}$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_δ – собственное число матрицы грамиана P^c кратности m_δ, ρ – индекс кратности собственного числа σ_δ.

Доказательство. Рассмотрим разложение резольвенты матрицы грамиана управляемости в виде отрезка ряда Фаддеева [91]:

$$(I\sigma - P^c)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma^j}{N_c(\sigma)} \ . \tag{1.28}$$

Обозначим: $N_c(\sigma) = s^n + a_{c,n-1}\sigma^{n-1} + \dots a_{c,1}\sigma + a_{c,0}$, $N_c(\sigma)$ – характеристический полином резольвенты матрицы грамиана, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты в ряд Фаддеева.
Рассмотрим вначале случай, когда все сингулярные числа σ_λ грамиана различны. В этом случае разложение (1.28) преобразуется к виду:

$$(I\sigma - P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma - \sigma_\lambda}. \tag{1.29}$$

Итеративный алгоритм вычисления матриц Фаддеева и коэффициентов характеристического уравнения:
Первый шаг: $a_{c,n-1} = 1$, $R_n = I$,
Шаг «k»: $a_{c,n-k} = -\frac{1}{k} tr\left(P^c R_{n-k+1}\right), \quad R_{n-k} = a_{c,n-k} I + P^c R_{n-k+1}, \; k = 1, \dots, n.$
В соответствии с алгоритмом Фаддеева – Леверье справедливы также следующие матричные равенства:

$$P_0^c = a_{c,1} I + a_{c,2} P^c + \dots + a_{c,n} (P^c)^{n-1},$$

$$P_1^c = a_{c,2} I + a_{c,3} P^c + \dots + a_{c,n} (P^c)^{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_{n-2}^c = a_{c,n-1} I + a_{c,n} P^c,$$

$$P_{n-1}^c = a_{c,n} I.$$

Выше представленную систему можно записать в виде:

$$P_j^c = \sum_{k=j}^{n-1} a_{c,k+1} (P^c)^{k-j}, \quad \forall j : j = 0,1, \dots, n-1.$$

Положим в (1.29) $\sigma{=}0$ и получим формулу (1.25):

$$(P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma)} \frac{1}{\sigma}\bigg|_{\sigma=\sigma_\delta}. \tag{1.30}$$

Таким образом, (1.25) – (1.30) в случае простого спектра матрицы грамиана определяют сингулярное разложение обратного грамиана управляемости. Аналогичный подход можно применить для случая кратных собственных чисел матрицы грамиана. Предположим, что характеристическое уравнение матрицы грамиана можно представить в виде:

$$N_c(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} (\sigma - \sigma_i)^{m_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i = q, \;\; \sigma_i \in \mathbb{C}^{+}.$$

Для любой квадратной матрицы грамиана его резольвента имеет вид матричной функции (1.29). В соответствии с [20] ее разложение на простые дроби имеет вид:

$$(I\sigma - P^c)^{-1} = \sum_{\delta=1}^{q} \sum_{\rho=1}^{m_\delta} \frac{K_{\delta\rho}}{(\sigma - \sigma_\delta)^{m_\delta - j + 1}}, \tag{1.31}$$

$$K_{\delta\rho} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left\{ \frac{d^{\rho-1}}{d\sigma^{\rho-1}} \left[\frac{(\sigma - \sigma_\delta)^{m_\delta} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^j P_j^c}{\prod_{\delta=1}^{n} (\sigma - \sigma_\delta)^{m_\delta}} \right] \right\} \Bigg|_{\sigma=\sigma_\delta}.$$

Положим в (1.31) $\sigma{=}0$ и получим формулы (1.26)–(1.27) сингулярного разложения обратного грамиана управляемости для случая кратных собственных чисел матрицы грамиана. □

1.1.5 Пример сингулярного разложения обратного грамиана управляемости для модели асинхронного двигателя

Рассмотрим задачу управления асинхронным двигателем. Модель объекта управления можно описать уравнениями состояния вида:

$$\Sigma_1 \colon \begin{cases} \frac{dx}{dt} {=} Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) {=} Cx(t). \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4{,}67 & 3 & -1{,}33 & 2{,}33 \\ -2{,}17 & 2{,}33 & -3{,}83 & 5{,}17 \\ 1{,}5 & -0{,}33 & -1{,}5 & 0{,}17 \\ 2{,}17 & -3{,}33 & 3{,}83 & -6{,}17 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приведем собственные значения матрицы динамики системы:

$$\lambda_i = \{-4\};\ \{-3\};\ \{-2\};\ \{-1\}.$$

Для построения сингулярного разложения обратного грамиана управляемости системы по сингулярным числам матрицы грамиана вычислим грамиан управляемости по формуле (1.11):

$$P^c = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 3 & 2{,}5 & 0{,}56 \\ 3 & 11{,}2 & 13{,}2 & 5{,}1 \\ 2{,}5 & 13{,}2 & 16{,}6 & 6{,}9 \\ 0{,}56 & 5{,}1 & 6{,}9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что формула (1.11) справедлива не только для устойчивых линейных систем, но и для неустойчивых систем, в которых не нарушается условие $s_k + s_p \neq 0$. Оно нарушается в случае $s_k = 0$ или $s_k = +j\omega$, $s_{k+1} = -j\omega$ [77].
Тогда сингулярные числа этого грамиана примут вид:

$$\sigma_i = \{30{,}7\};\ \{2{,}5\};\ \{0{,}17\};\ \{0{,}0002\}.$$

Грамиан управляемости системы представлен симметричной матрицей, поэтому существует его SVD-разложение [17]:

$$P^c = \begin{bmatrix} -0{,}13 & 0{,}86 & -0{,}48 & -0{,}009 \\ -0{,}6 & 0{,}28 & 0{,}67 & 0{,}35 \\ -0{,}73 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}58 \\ -0{,}3 & -0{,}32 & -0{,}51 & 0{,}74 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0002 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -0{,}13 & 0{,}86 & -0{,}48 & -0{,}009 \\ -0{,}6 & 0{,}28 & 0{,}67 & 0{,}35 \\ -0{,}73 & -0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}58 \\ -0{,}3 & -0{,}32 & -0{,}51 & 0{,}74 \end{bmatrix}^{\mathbb{T}}.$$

В соответствии с алгоритмом Фаддеева – Леверье вычислим матрицы Фаддеева и коэффициенты характеристического уравнения для обратного грамиана:

$$P_0^c = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}05 & -0{,}07 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & -1{,}62 & 2{,}69 & -3{,}4 \\ -0{,}07 & 2{,}69 & -4{,}5 & 5{,}6 \\ 0{,}08 & -3{,}4 & 5{,}6 & -7{,}2 \end{bmatrix},\ P_1^c = \begin{bmatrix} 21{,}8 & -23{,}5 & 8{,}4 & 17 \\ -23{,}5 & 44{,}6 & -29{,}5 & -5{,}5 \\ 8{,}4 & -29{,}5 & 33 & -25 \\ 17 & -5{,}5 & -25 & 65{,}7 \end{bmatrix},$$

$$P_2^c = \begin{bmatrix} -31 & 3 & 2{,}5 & 0{,}56 \\ 3 & -22{,}1 & 13{,}2 & 5{,}1 \\ 2{,}5 & 13{,}2 & -16{,}7 & 6{,}9 \\ 0{,}56 & 5{,}1 & 6{,}9 & -30{,}3 \end{bmatrix},\ P_3^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a_{c,0} = 0{,}0031,\ a_{c,1} = -13{,}3,\ a_{c,2} = 82{,}6,\ a_{c,3} = -33{,}3,\ a_{c,4} = 1.$$

Тогда обратный грамиан можно будет вычислить по формуле (1.25)

$$(P^c)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}97 & -14{,}8 & 22{,}3 & -26{,}2 \\ -14{,}8 & -517 & -856 & 1083 \\ 22{,}3 & -856 & 1422 & -1803 \\ -26{,}2 & 1083 & -1803 & 2290 \end{bmatrix}.$$

1.1.6 Спектральные разложения энергетических функционалов и новые критерии устойчивости

Рассмотрим SISO LTI систему (1.7), уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости, и вычислим энергетический функционал J, который представляет собой значение квадрата H_2-нормы передаточной функции системы и дает оценку риска потери устойчивости [17; 20; 65]. Для этого используем (1.17) и (1.19) и для определенности выберем спектральное разложение грамиана управляемости по простому спектру:

$$J = trC^F \Omega_c {(C^F)}^T = \tag{1.32}$$

$$= \frac{{\xi_0}^2 - {\xi_1}^2 \sum_{k=1}^{n} s_k^2 + \cdots + (-1)^{n-1} {\xi_{n-1}}^2 \sum_{k=1}^{n} s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)}.$$

Эта формула показывает преимущество применения спектральных разложений в канонической форме перед разложением общего вида (1.4). Разложение не зависит от выбора невырожденной матрицы линейных преобразований координат системы. Два основных фактора влияют на значение риска потери устойчивости J:

1. значения диагональных членов матрицы Сяо Ω_c,
2. квадраты элементов приведенного вектора выхода.

В [18] показано, что матрица Сяо является грамианом управляемости для SISO LTI системы с передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}. \tag{1.33}$$

Покажем, что асимптотическая устойчивость SISO LTI системы равносильна асимптотической устойчивости MIMO LTI системы вида (1.1). Энергетический функционал J для системы (1.33) согласно (1.32) равен:

$$J = \frac{1 - \sum_{k=1}^{n} s_k^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)}. \tag{1.34}$$

Теорема 1.4. *Пусть дана устойчивая система* (1.1) *и устойчивая SISO LTI система с тем же спектром и передаточной функцией* (1.33), *тогда если их уравнения состояния приведены к канонической форме управляемости, то критерием асимптотической устойчивости системы* (1.1) *по Ляпунову является ограниченность энергетического функционала* (1.34) *для SISO LTI системы:*

$$J < +\infty. \tag{1.35}$$

$$\lim_{s_k \to s_{k'}} J \neq +\infty, \forall s_k \in \mathbb{C}^-, \forall k \neq k'. \tag{1.36}$$

Доказательство. Для доказательства потребуются свойства, что MIMO LTI система (1.1) полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрица A различны и существует единственная передаточная функция системы. При выполнении указанных условий ограниченность функционала $\sqrt{J}$ является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (1.1) по Ляпунову [17]. Таким образом, ограниченность функционала J является критерием асимптотической устойчивости системы (1.32):

$$J < \infty.$$

Но функционал J есть след матрицы Сяо SISO LTI системы (1.7), уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости. Отсюда следует вывод о том, что ограниченность энергетического функционала SISO LTI системы (1.33) в форме неравенства (1.34) гарантирует асимптотическую устойчивость MIMO LTI системы вида (1.1). Проверка условия (1.36) требует использования асимптотических моделей грамианов [20]. □

Таким образом, получен новый критерий устойчивости стационарной линейной динамической MIMO LTI системы в виде критерия ограниченности следа матрицы Сяо Ω_c для SISO LTI системы (1.26), уравнения которой приведены в каноническую форму управляемости. Новый критерий не противоречит известному критерию принадлежности собственных чисел матрицы динамики линейной системы левой полуплоскости плоскости собственных чисел, но уточняет его с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод (кратные собственные числа, близкие апериодические и колебательные моды)[20].

1.2 Спектральные разложения грамианов и энергетических функционалов непрерывных неустойчивых систем управления

В последние годы возник интерес к развитию методов вычислений различных энергетических показателей для анализа устойчивости и степени управляемости и наблюдаемости динамических систем. Такие показатели для линейных устойчивых и неустойчивых систем были предложены в [17; 59; 75—77]. Упрощенные модели для больших сетей на основе выходных грамианов управляемости, позволяющие вычислять энергетические показатели, были предложены в [15]. Метод сбалансированного отсечения на основе грамианов устойчивых и антиустойчивых систем был предложен в [41]. Задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, и оценок степени управляемости системы была исследована в [21; 50; 51; 81; 98]. Важно отметить, что во всех этих работах использовался спектр матрицы динамики систем. Все элементы матрицы Сяо задаются элементами, находящимися на главной диагонали. Использование представления динамической системы в виде матрицы Сяо позволяет снизить вычислительную сложность с $O(n^2)$ до $O(n)$ и работать с n элементами, стоящими на главной диагонали.

1.2.1 Спектральные разложения решений уравнений Ляпунова неустойчивых непрерывных систем управления

Рассмотрим неустойчивую систему (1.1). Для нее определяется смешанный грамиан.

Определение 1.6. *Для системы* (1.1), *если ее матрица динамики A неустойчива, собственные числа матрицы динамики A не находятся на мнимой оси $\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^-$, $i = r$; $\lambda_{j+} \in \mathbb{C}^+$, $j = n - r$, определен смешанный грамиан:*

$$P_{cm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (Ij\omega - A)^{-1} BB^T (-Ij\omega - A^T)^{-1} d\omega, \tag{1.37}$$

Преобразуем систему (1.1) в верхнюю блочно-диагональную форму Шура с унитарной матрицей преобразования U [42; 43].

$$\begin{aligned} &x = Ux_{Sch}, \;\; \dot{x}_{Sch} = A_{Sch}x_{Sch} + B_{Sch}u, \;\; y_{Sch} = C_{Sch}x_{Sch}, \\ &A_{Sch} = U^{\mathrm{T}}AU, \;\; B_{Sch} = U^{\mathrm{T}}B, \;\; C_{Sch} = CU, \end{aligned} \tag{1.38}$$

$$A_{Sch} = \begin{bmatrix} A_{Sch11} & A_{Sch12} \\ 0 & A_{Sch22} \end{bmatrix}, \; B_{Sch} = \begin{bmatrix} B_{Sch1} \\ B_{Sch2} \end{bmatrix}, \; C_{Sch} = \begin{bmatrix} C_{Sch1} & C_{Sch2} \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы получить блочно-диагональное представление, необходимо преобразовать уравнения (1.38) таким образом, чтобы на месте блока A_{Sch12} оказалась нулевая матрица. Для этого необходимо выполнить второе преобразование:

$$\begin{aligned} &x_{Sch} = W_{bl}x_{bl},\ \ \dot{x_{bl}} = A_{bl}x_{bl} + B_{bl}u,\ \ y_{bl} = C_{bl}x_{bl},\\ &A_{bl} = W_{bl}^{-1}A_{Sch}W_{bl},\ \ B_{bl} = W_{bl}^{-1}B_{Sch},\ \ C_{bl} = C_{Sch}W_{bl}, \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$A_{bl} = \begin{bmatrix} A_{Sch11} & 0 \\ 0 & A_{Sch22} \end{bmatrix}, B_{bl} = \begin{bmatrix} B_{bl1} \\ B_{bl2} \end{bmatrix}, C_{bl} = \begin{bmatrix} C_{bl1} & C_{bl2} \end{bmatrix},$$

$$W_{bl} = \begin{bmatrix} I_r & S \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, W_{bl}^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & -S \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы на месте блока A_{Sch12} оказалась нулевая матрица, матрица S должна удовлетворять уравнению Сильвестра:

$$-A_{Sch11}S + SA_{Sch22} + A_{Sch12} = 0. \tag{1.40}$$

Необходимым условием существования решения этого уравнения является следующее спектральное условие:

$$\lambda_s + \lambda_u \neq 0,\ \ \forall s : s = 1,\ldots,r, \forall u : u = r+1,\ldots,n.$$

Для того чтобы преобразовать систему (1.39) с блочно-диагональной матрицей в систему с диагональной матрицей, необходимо выполнить третье преобразование:

$$x_{bl} = W_d x_d,$$

где W_d – матрица преобразования системы в блочно-диагональной форме, у которой диагональные блоки имеют верхне-треугольную форму:

$$\begin{aligned} &\dot{x_d} = A_d x_d + B_d u,\ \ y_d = C_d x_d,\\ &A_d = W_d^{-1}A_{bl}W_d,\ \ B_d = W_d^{-1}B_{bl},\ \ C_d = C_{bl}W_d, \end{aligned}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} \Lambda_- & 0 \\ 0 & \Lambda_+ \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} B_{d1} \\ B_{d2} \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} C_{d1} & C_{d2} \end{bmatrix}, \tag{1.41}$$

где Λ_- и Λ_+ – диагональные матрицы, состоящие из отрицательных и положительных собственных чисел соответственно.

После первого преобразования имеем соотношение:

$$P = UP_{Sch}U^{\mathrm{T}}. \tag{1.42}$$

После второго преобразования получим:

$$P_{Sch} = TP_{bl}T^{\mathrm{T}},$$

или

$$P = T_2P_{bl}T_2^{\mathrm{T}}, \quad T_2 = UT. \tag{1.43}$$

После третьего преобразования с использованием (1.42), (1.43) получим:

$$P = UT_3P_dT_3^{\mathrm{T}}, \quad T_3 = UTW_d.$$

Структурированное уравнение Ляпунова после второго преобразования имеет вид:

$$A_{Sch11}P_1 + P_1A_{Sch11}^{\mathrm{T}} = -B_1B_1^{\mathrm{T}}, \tag{1.44}$$

$$A_{Sch22}P_2 + P_2A_{Sch22}^{\mathrm{T}} = B_2B_2^{\mathrm{T}}, \tag{1.45}$$

$$P_{cm} = T_2^{-1}\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}T_2. \tag{1.46}$$

Матрица P_{cm} называется смешанным грамианом управляемости [51].

Многие приложения спектральных разложений грамианов связаны с энергетическими показателями структурных свойств управляемости, наблюдаемости и устойчивости, как например, в задаче выбора и оптимизации мест размещения датчиков и исполнительных механизмов в сложных автоматических системах и сложных сетях [51; 52; 72; 80]. При решении этой задачи используются входная и выходная энергия системы, следы матриц грамиана управляемости и наблюдаемости и следы их обратных матриц, минимальные и максимальные собственные числа матриц грамианов. Другая проблема заключается в оценивании меры управляемости динамической системы с использованием грамианов управляемости [13]. Эта мера определяется как минимальная входная энергия, требуемая для перемещения системы из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние. В этом случае рассматриваются спектральные разложения следующих энергетических функционалов по простому (или парному) спектру матрицы динамики системы и матриц грамианов управляемости и наблюдаемости:

– функционал входной минимальной энергии системы [40; 51]

$$J_1 = E_{min}\left(P_c\right) = ||u||^2_{L_2} = \inf_{x(-\infty,x_0,u)=0} \int_{-\infty}^{0} ||u(t)||^2 dt,$$

– функционал выходной энергии системы [40; 66]

$$J_2 = E_{out} = ||y||^2_{L_2} = \int_{0}^{\infty} ||y(t,x_0,0)||^2 dt,$$

– функционал следа матрицы грамиана [72; 80]

$$J_3 = tr\left(P_c\right); \quad ||\Sigma||_{H_2} = \sqrt{tr(CPC^T)},$$

– функционал следа обратных матриц грамианов управляемости [15; 40; 51]

$$J_4 = tr(P_c)^{-1}.$$

1.2.2 Сепарабельные спектральные разложения смешанного грамиана управляемости по парному и простому спектрам

Рассмотрим конечномерную линейную стационарную непрерывную систему с многими входами и многими выходами вида (1.1). Предположим, что спектр матрицы динамики содержит r устойчивых собственных чисел $\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^-$ и $n-r$ неустойчивых собственных чисел $\lambda_{i+} \in \mathbb{C}^+$. Будем предполагать, что спектр не содержит собственных чисел, принадлежащих мнимой оси, а также выполнено общее условие:

$$\lambda_{i-} + \lambda_{j+} \neq 0, \forall i : i = 1, \ldots, r, \forall j : j = r+1, \ldots, n.$$

Последнее условие означает, что спектр не содержит собственных чисел, являющихся зеркальным отображением друг друга относительно нуля. Наиболее простым способом вычисления спектральных разложений грамианов в случае простого спектра матрицы динамики является приведение ее к диагональному виду [17; 75]. Если в спектре появляются неустойчивые собственные числа, это требует проведения нескольких структурных преобразований уравнений (1.1). Введем обозначения:

$$B_{d11}B_{d11}^{\mathrm{T}} = [\beta_{d-\nu\eta}]_{[r\times r]},$$

$$B_{d22}B_{d22}^{\mathrm{T}} = [\beta_{d+\nu\eta}]_{[(n-r)\times(n-r)]}.$$

Теорема 1.5. *Пусть дана неустойчивая система* (1.1), *приведенная к диагональному виду, тогда если собственные числа матрицы динамики A не находятся на мнимой оси $\lambda_{i-}{\in}\mathbb{C}^-$, $i = r$; $\lambda_{j+}{\in}\mathbb{C}^+$, $j = n-r$, а смешанный грамиан управляемости определен таким образом:*

$$P_{cm} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(Ij\omega - A)^{-1}BB^{\mathrm{T}}(-Ij\omega - A^{\mathrm{T}})^{-1}d\omega, \tag{1.47}$$

справедливы следующие утверждения:

- *Сепарабельные спектральные разложения матриц решений уравнений* (1.44), (1.45), *соответствующих устойчивой и антиустойчивой подсистемам:*

$$p_{c-}^{(\mu\nu)} = e_\mu^{\mathrm{T}}P_{c-}e_\nu, \quad \forall\mu,\nu = 1,\dots,r,$$

$$p_{c-}^{(\mu\nu)} = \frac{-\beta_{\mu\nu-}}{\lambda_{\mu-}+\lambda_{\nu-}},$$

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = e_\mu^{\mathrm{T}}P_{c+}e_\nu, \quad \forall\mu,\nu = r+1,\dots,n,$$

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = \frac{\beta_{\mu\nu+}}{\lambda_{\mu+}+\lambda_{\nu+}};$$

- *Сепарабельные спектральные разложения смешанного грамиана управляемости по парному и простому спектрам матрицы A:*

$$P_{cm} = T_3^{-1}\left[P_-\oplus P_+\right]T_3. \tag{1.48}$$

По парному спектру:

$$P_- = \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}p_{c-}^{(\nu\mu)}\mathbf{1}_{\nu\mu}, \tag{1.49}$$

$$P_+ = \sum_{\nu=r+1}^{n}\sum_{\mu=r+1}^{n}p_{c+}^{(\nu\mu)}\mathbf{1}_{\nu\mu}.$$

По простому спектру:

$$P_- = \sum_{\nu=1}^{r} \boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu)}, \quad \boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{r} \boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu\mu)} \mathbf{1}_{\nu\mu}, \tag{1.50}$$

$$P_+ = \sum_{\nu=r+1}^{n} \boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu)}, \quad \boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu)} = \sum_{\mu=r+1}^{n} \boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu\mu)} \mathbf{1}_{\nu\mu}.$$

Доказательство. Уравнения Ляпунова для диагонализированной системы в данном случае имеют вид:

$$\Lambda P_{cm} + P_{cm}\Lambda^* = -Q_d = \left[-B_- B_-^{\mathrm{T}} \oplus B_+ B_+^{\mathrm{T}}\right]. \tag{1.51}$$

В рассматриваемом варианте можно разделить уравнение (1.51) на два уравнения для устойчивой и антиустойчивой подсистем:

$$\Lambda_- P_{c-} + P_{c-}\Lambda_-^* = Q_{d-} = -B_- B_-^{\mathrm{T}},$$

$$\Lambda_+ P_{c+} + P_{c+}\Lambda_+^* = Q_{d+} = B_+ B_+^{\mathrm{T}}.$$

Интегральные формулы решений уравнений Ляпунова [59]:

$$P_{cm} = [P_{c-} \oplus P_{c+}],$$

$$P_{c-} = \int_0^{\infty} e^{\Lambda_- \tau}\ B_- B_-^{\mathrm{T}} e^{\Lambda_-^* \tau} d\tau, \ \ P_{c+} = \int_{-\infty}^{0} e^{\Lambda_+ \tau}\ B_+ B_+^{\mathrm{T}} e^{\Lambda_+^* \tau} d\tau. \tag{1.52}$$

Преобразуем второй интеграл в формуле (1.52), используя замену переменных $\tau = -t$:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\Lambda_+ \tau}\ Q_{d+} e^{\Lambda_+ \tau} d\tau = -\int_0^{\infty} e^{-\Lambda_+ t}\ Q_{d+} e^{-\Lambda_+^* t} dt.$$

При такой замене переменных неустойчивые собственные числа антиустойчивой подсистемы становятся устойчивыми собственными числами устойчивой подсистемы и вычисление вторых интегралов сводится к схеме вычисления первых интегралов (1.52). Отсюда следует

$$(-\Lambda_+) P_{c+} + P_{c+}(-\Lambda_+^*) = -B_+ B_+^{\mathrm{T}}.$$

Матрица $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$ является гурвицевой. Спектральные разложения грамианов устойчивой подсистемы были ранее получены в [77]. Вначале получим спектральные разложения грамианов в (1.52), а затем получим спектральное разложение грамиана исходной системы согласно формуле преобразования грамиана управляемости для невырожденного преобразования состояний с матрицей T:

$$P_{cm} = T[P_{-} \oplus P_{+}]\, T^{\mathrm{T}}. \tag{1.53}$$

Первый шаг спектральных разложений основан на преобразовании уравнений состояния устойчивой подсистемы в диагональную каноническую форму. В этом случае уравнения Ляпунова приобретают простой вид и элементы $p_{c-}^{(\mu\nu)}$ матрицы решения P_{c-} можно вычислить по формулам:

$$p_{c-}^{(\mu\nu)} = e_{\mu}^{\mathrm{T}} P_{c-} e_{\nu},\ \forall \mu,\nu = 1,\ldots,r, \tag{1.54}$$

где $e_{\mu}, e_{\nu}-$ единичные векторы

$$e_{\mu}^{\mathrm{T}} Q_{d-} e_{\nu} = \beta_{\mu\nu-},\ \forall \mu,\nu = 1,\ldots,r,$$

$$p_{c-}^{(\mu\nu)} = \frac{-\beta_{\mu\nu-}}{\lambda_{\mu-} + \lambda_{\nu-}}. \tag{1.55}$$

Поскольку с учетом замены переменных вычисление спектральных разложений матрицы решения P_{c+} сводится к рассмотрению подхода, предложенного для вычисления матрицы решения P_{c-}, представим конечные формулы вычисления спектральных разложений для этого случая.

Этот подход основан на преобразовании уравнений состояния антиустойчивой подсистемы в диагональную каноническую форму. В этом случае элементы $p_{c+}^{(\mu\nu)}$ матрицы решения P_{c+} вычисляются по формулам:

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = e_{\mu}^{\mathrm{T}} P_{c+} e_{\nu}, \quad \forall \mu,\nu = r+1,\ldots,n,$$

где $e_{\mu}, e_{\nu}-$ единичные векторы

$$e_{\mu}^{\mathrm{T}} Q_{d+} e_{\nu} = \beta_{\mu\nu+},$$

$$p_{c+}^{(\mu\nu)} = \frac{\beta_{\mu\nu+}}{\lambda_{\mu+} + \lambda_{\nu+}},\ \forall \mu,\nu = r+1,\ldots,n. \tag{1.56}$$

Доказательство справедливости спектральных разложений для антиустойчивой подсистемы полностью повторяет доказательство для устойчивой подсистемы.

Доказательство справедливости спектральных разложений (1.48) – (1.50) следует из справедливости формулы (1.55) и преобразования антиустойчивой подсистемы к виду устойчивой подсистемы, собственные числа которой являются зеркальным отображением собственных чисел первой подсистемы относительно мнимой оси. □

Замечание 1.2. *При выполнении условий теоремы смешанный грамиан положительно определен, поскольку матрица* $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$ *является гурвицевой. При этом след смешанного грамиана управляемости равен:*

$$J = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_{d-ii}}{-2Re\ \lambda_i} + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\beta_{d+ii}}{2Re\ \lambda_i}. \tag{1.57}$$

Коэффициенты $\beta_{d-ii}, \beta_{d+ii}$ *всегда положительны в силу формирования матриц правых частей уравнений Ляпунова. Отсюда следует, что диагональные члены матрицы смешанного грамиана положительны. Справедливы оценки:*

$$\max_i \beta_{d-ii}, \beta_{d+ii} = \beta_{ii\max},$$

$$J \le \frac{\beta_{ii\max}}{2\min\limits_i |Re\ \lambda_i|} n = \frac{\beta_{ii\max}}{\left(\frac{2\min\limits_i |Re\ \lambda_i|}{n}\right)}.$$

Таким образом, след смешанного грамиана прямо пропорционален максимальному значению диагонального элемента матрицы $\left[B_- B_-^{\mathrm{T}} \oplus B_+ B_+^{\mathrm{T}}\right]$ *и обратно пропорционален минимальному удвоенному среднему значению модуля собственного числа спектра матрицы* $[\Lambda_- \oplus (-\Lambda_+)]$*, что подтверждает результаты исследований работы [52].*

1.2.3 Пример модели управления четырехмерным динамическим объектом

Рассмотрим задачу управления динамическим объектом с одним входом и четырьмя выходами. Модель объекта управления можно описать уравнениями состояния вида:

$$\Sigma_1 \colon \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right), \quad x\left(0\right) = 0, \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right), \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}33 & -2{,}67 & -4 & 1{,}33 \\ 21{,}17 & -23{,}33 & -30{,}2 & 1{,}5 \\ -14{,}67 & 14 & 17{,}83 & -1{,}17 \\ 2 & -1{,}33 & -1{,}83 & -2{,}17 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем систему в верхнюю блочно-диагональную форму Шура. В таком случае унитарная матрица преобразования выразится следующим образом:

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0{,}943 & -0{,}169 & -0{,}258 \\ 0{,}814 & -0{,}26 & -0{,}056 & -0{,}516 \\ -0{,}564 & -0{,}178 & -0{,}225 & -0{,}775 \\ 0{,}063 & -0{,}109 & -0{,}958 & 0{,}258 \end{bmatrix}.$$

Система же примет вид:

$$A_{Sch} = \begin{bmatrix} 1 & 37{,}64 & 3{,}255 & 35{,}17 \\ 0 & -4 & -0{,}97 & -0{,}212 \\ 0 & 0 & -2 & 0{,}436 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B_{Sch} = \begin{bmatrix} -1{,}25 \\ -0{,}137 \\ 1{,}465 \\ -5{,}939 \end{bmatrix}.$$

Следующее преобразование происходит таким образом, чтобы матрица A_{Sch12} стала нулевой. Подбираем матрицу преобразования W_{bl} так, чтобы матрица A_{bl} разделилась на два блока, устойчивую и неустойчивую подсистемы.

$$W_{bl} = \begin{bmatrix} 1 & -7{,}53 & 1{,}35 & -8{,}25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{bl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -0{,}97 & -0{,}21 \\ 0 & 0 & -2 & 0{,}436 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B_{bl} = \begin{bmatrix} -53{,}2 \\ -0{,}14 \\ 1{,}47 \\ -5{,}94 \end{bmatrix}.$$

Проверим выполнение уравнения Сильвестра (1.40). Для удобства отображения транспонируем все составляющие уравнения

$$\begin{bmatrix} -7{,}529 \\ 1{,}35 \\ -8{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -0{,}97 & -2 & 0 \\ -0{,}212 & 0{,}436 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7{,}529 \\ -1{,}35 \\ 8{,}25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 37{,}64 \\ 3{,}255 \\ 35{,}167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для системы в этом случае смешанный грамиан задается уравнением (1.46):

$$P_{cm} = T_2^{-1} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} T_2,$$

$$P_{cm} = \begin{bmatrix} 5{,}32 & -5{,}32 & -7{,}98 & 2{,}66 \\ 0{,}94 & -0{,}26 & -0{,}18 & -0{,}11 \\ -0{,}17 & -0{,}056 & -0{,}23 & -0{,}96 \\ -0{,}26 & -0{,}52 & -0{,}78 & 0{,}26 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0067 & -0{,}057 & 0{,}18 \\ 0 & -0{,}057 & 0{,}52 & -1{,}72 \\ 0 & 0{,}18 & -1{,}72 & 5{,}88 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0{,}13 & 0 & 0 & -1{,}29 \\ 0{,}81 & -6{,}39 & 1{,}04 & -7{,}23 \\ -0{,}56 & 4{,}07 & -0{,}99 & 3{,}87 \\ 0{,}063 & -0{,}58 & -0{,}87 & -0{,}26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -203 & -132{,}5 & 11{,}3 \\ -203 & 1290 & -844 & 73 \\ -132{,}5 & -844 & -349 & -50{,}5 \\ 11{,}3 & 73 & -50{,}5 & 5{,}57 \end{bmatrix}.$$

Проверим корректность вычисления грамиана. Матрица третьего преобразования и сама система примут вид:

$$W_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}44 & 0{,}19 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & -0{,}39 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} -53{,}2 \\ 0{,}57 \\ -1{,}25 \\ -6{,}6 \end{bmatrix}.$$

Тогда грамиан для диагонализированной системы станет равным

$$[P_{-} \oplus P_{+}] = \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & -0{,}12 & -0{,}54 \\ 0 & -0{,}12 & 0{,}39 & 1{,}65 \\ 0 & -0{,}54 & 1{,}65 & 7{,}26 \end{bmatrix}.$$

Общее выражение смешанного грамиана после третьего преобразования запишется следующим образом:

$$P_{cm} = \begin{bmatrix} 5{,}32 & -5{,}32 & -7{,}98 & 2{,}66 \\ 0{,}86 & -0{,}29 & -0{,}29 & -0{,}57 \\ -0{,}31 & -0{,}31 & -0{,}63 & -0{,}94 \\ -0{,}29 & -0{,}57 & -0{,}86 & 0{,}29 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}041 & -0{,}12 & -0{,}54 \\ 0 & -0{,}12 & 0{,}39 & 1{,}65 \\ 0 & -0{,}54 & 1{,}65 & 7{,}26 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0{,}125 & 0 & 0 & -1{,}16 \\ 0{,}81 & -6{,}39 & 3{,}73 & -8{,}13 \\ -0{,}56 & 4{,}07 & -2{,}66 & 4{,}65 \\ 0{,}063 & -0{,}58 & -0{,}53 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -203 & -132{,}5 & 11{,}3 \\ -203 & 1290 & -844 & 73 \\ -132{,}5 & -844 & -349 & -50{,}5 \\ 11{,}3 & 73 & -50{,}5 & 5{,}57 \end{bmatrix}.$$

Смешанные грамианы совпали. Проверим, выполняется ли критерий Сильвестра для грамиана устойчивой и антиустойчивой систем. Для этого надо, чтобы матрицы P_1 и P_2 были положительно определены. Для компактности запишем их в одну матрицу.

$$[P_1 \oplus P_2] = \begin{bmatrix} 1417 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0067 & -0{,}057 & 0{,}18 \\ 0 & -0{,}057 & 0{,}52 & -1{,}72 \\ 0 & 0{,}18 & -1{,}72 & 5{,}88 \end{bmatrix}, \lambda_{P_1} = 1417, \lambda_{P_2} = \begin{bmatrix} 0{,}0001 \\ 0{,}018 \\ 6{,}39 \end{bmatrix}.$$

Все собственные числа больше нуля. Критерий выполнен. Вычислим след по формуле (1.57)

$$J = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_{d-ii}}{-2Re\ \lambda_i} + \sum_{i=r+1}^{n} \frac{\beta_{d+ii}}{2Re\ \lambda_i} = 0{,}0067 + 0{,}52 + 5{,}88 + 1417 \approx 1423.$$

Сравним значение следа спектра с оценкой

$$J = 1423 \leq \frac{2834}{\frac{2*1}{4}} = 5668.$$

Обратная величина среднего значения модулей собственных чисел матрицы динамики оценивает степень разброса действительных частей собственных чисел относительно мнимой оси. Чем меньше эта величина, тем выше ее влияние на след смешанного грамиана управляемости. Формула спектрального разложения следа позволяет выполнить более тонкий анализ влияния распределения собственных чисел на энергетический функционал степени достижимости [13; 80].

1.2.4 Спектральные разложения энергетических функционалов грамианов неустойчивой LTI динамической системы

Теорема 1.6. *Пусть дана неустойчивая система* (1.1)*, приведенная к диагональному виду, тогда если собственные числа матрицы динамики* A*, не находятся на мнимой оси и не равных попарно*

$$\lambda_{i-} \in \mathbb{C}^{-}, i = r; \lambda_{j+} \in \mathbb{C}^{+}, j = n - r,$$

то справедливы и эквивалентны следующие спектральные разложения энергетических функционалов [51]:

$$J_1 = E_{min}(\infty) = \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} (P_{cm})^{-1} \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} [\sum_{i=1}^{n} V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbf{1}_{ii} U_c] \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix},$$

$$J_3(\textit{для SISO LTI устойчивых систем}) = tr \sum_{k=1}^{n} P_{c,k} =$$

$$= trP_{c,k} = \left(\frac{1 - \sum_{k=1}^{n} s_k^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)} \right),$$

$$J_4 = tr \sum_{i=1}^{n} (P_c)_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} tr (P_c)_i^{-1} = [\sum_{i=1}^{n} tr[V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbf{1}_{ii} U_c]],$$

где $N(s)$ *– характеристический полином системы* (1.1).

Доказательство. Вернемся к устойчивым непрерывным MIMO LTI системам с простым спектром и заметим, что грамианы управляемости и наблюдаемости представляют собой симметричные комплекснозначные матрицы. В этом случае существуют их сингулярные разложения вида [17]:

$$P_c = V_c \Lambda V_c^*,$$

где матрица V_c образована правыми сингулярными векторами матрицы P_c, а матрица Λ является диагональной матрицей вида:

$$\Lambda = diag \left\{ |\sigma_1| \, |\sigma_2| \ldots |\sigma_{\mathrm{n}}| \right\}.$$

Определим матрицы S и U в виде:

$$S = diag \left\{ sgn\sigma_1 \;\; sgn\sigma_2 \ldots sgn\sigma_{\mathrm{n}} \right\}, \; U_c = V_c S,$$

$$sgn\sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \geq 0 \\ -1, & \text{если } \sigma < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$P_c = U_c \Lambda V_c^*, \tag{1.58}$$

где матрица U_c образована левыми сингулярными векторами матрицы P_c. Поскольку Λ,U_c,V_c являются несингулярными матрицами, то

$$(P_c)^{-1} = (U_c)^{-1} \Lambda^{-1} (V_c^*)^{-1} = V_c^* \Lambda^{-1} U_c. \tag{1.59}$$

Так как матрица Λ диагональна, ее обратную матрицу можно представить в виде

$$\Lambda^{-1} = \left[|\sigma_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\sigma_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \cdots + |\sigma_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \right]. \tag{1.60}$$

Подставив (1.60) в (1.58), (1.59), получим следующие спектральные разложения обратных грамианов управляемости по простому спектру:

$$(P_c)^{-1} = (P_c)_1^{-1} + (P_c)_2^{-1} + \cdots + (P_c)_n^{-1},$$

$$(P_c)_1^{-1} = V_c^* |\sigma_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} U_c, \;\; (P_c)_2^{-1} = V_c^* |\sigma_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} U_c, \;\; \ldots \;\; (P_c)_n^{-1} = V_c^* |\sigma_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} U_c.$$

Отсюда следуют следующие спектральные разложения энергетических функционалов [75]:

$$J_1 = E_{min}(\infty) = \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} (P_{cm})^{-1} \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} [\sum_{i=1}^{n} V_c^* |\sigma_i|^{-1} 1_{ii} U_c] \begin{bmatrix} x_{f-} & x_{f+} \end{bmatrix},$$

$$J_2 = tr \sum_{i=1}^{n} (P_c)_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} tr\,(P_c)_i^{-1} = [\sum_{i=1}^{n} tr[V_c^* |\sigma_i|^{-1} \mathbf{1}_{ii} U_c]],$$

$$J_3(\text{для } SISO\ LTI \text{ систем}) = tr \sum_{k=1}^{n} P_{c,k} =$$

$$= tr P_{c,k} = \left(\frac{1 - \sum_{k=1}^{n} s_k^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k) N(-s_k)} \right).$$

□

Теорема 1.7. *Для устойчивой системы* (1.1) *с ненулевыми начальными условиями справедливы и эквивалентны следующие спектральные разложения энергетических функционалов входной и выходной энергии* $\hat{J}_1$ *и* $\hat{J}_2$ *по простому спектру грамиана управляемости:*

$$\hat{J}_1 = \sum_{i=1}^{n} x_0^T [V_c^* |\sigma_i|^{-1} 1_{ii} U_c] x_0, \tag{1.61}$$

или простому спектру матрицы динамики A:

$$\hat{J}_2 = \sum_{i=1}^{n} x_0^T [\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\lambda_i^j (-\lambda_i)^\eta}{\dot{N}(\lambda_i) N(-\lambda_i)} A_j^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C A_\eta] x_0. \tag{1.62}$$

Доказательство. В [65] доказано, что энергетические функционалы входной и выходной энергии $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ равны

$$\hat{J}_1 = \inf_{x(-\infty, x_0, u)=0} \int_{-\infty}^{0} \|u(t)\|^2 dt, \quad \hat{J}_2 = \int_0^\infty \|y(t,0,\,x_0)\|^2 dt.$$

В условиях теоремы они могут быть представлены в виде квадратичных форм

$$\hat{J}_1 = E_c\left(x_0\right) = x_0^{\mathrm{T}} P_c^{\#} x_0, \tag{1.63}$$

$$\hat{J}_2 = E_o\left(x_0\right) = x_0^{\mathrm{T}} P_o x_0, \tag{1.64}$$

где $P_c^{\#}-$ псевдоинверсия по Муру-Пенроузу матрицы грамиана управляемости, а P_o- матрица грамиана наблюдаемости. В условиях теоремы матрица грамиана управляемости является невырожденной матрицей, поэтому справедливо равенство

$$P_c^{\#} = P_c^{-1}.$$

Подставим спектральное разложение матрицы обратного грамиана в формулу (1.63), получим искомое спектральное разложение функционала входной энергии. В [75] было получено спектральное разложение грамиана наблюдаемости систем в форме матриц Сяо

$$P_o = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\lambda_i^j (-\lambda_i)^\eta}{\dot{N}\left(\lambda_i\right) N(-\lambda_i)} A_j^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C A_\eta.$$

Подставим спектральное разложение матрицы грамиана P_o в (1.64), получим искомое спектральное разложение функционала выходной энергии. □

Функционалы $\hat{J}_1$и $\hat{J}_2$ использовались в [20] для анализа степени устойчивости линейной системы на основе анализа квадрата H_2-нормы передаточной функции системы, обусловленных влиянием слабоустойчивых мод близких началу координат, близких мнимой оси или близких друг другу нескольких апериодических и колебательных мод. В качестве основного инструмента анализа аномалий было предложено использовать асимптотические модели спектральных разложений функциналов J_1 и J_2 по простому и/или парному спектру матрицы динамики системы. Аналогичный подход можно распространить на анализ аномалий спектральных разложений функционалов следов грамианов J_3 и J_4. Заметим, что спектральные разложения функционалов зависят от собственных чисел матрицы динамики, которые привязаны к определенному узлу графа системы, что позволяет связать задачу оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств с определенными узлами на графе системы. Полученные результаты могут найти применение в задачах локализации и оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов на графе сложной многосвязной системы управления или в задачах размещения управляющих узлов на графе сложной социальной, транспортной, энергетической или биологической сети [13].

1.3 Выводы по главе 1

В главе 1, посвященной развитию спектральных методов решения уравнения Ляпунова для многосвязных непрерывных линейных систем, разработан метод и алгоритм получения решения уравнения Ляпунова в виде произведения Адамара, при этом структура матрицы решения определяется в виде матрицы Сяо (теоремы 1.1, 1.2). Это позволяет аналитически вычислять элементы соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы. При использовании канонических форм управляемости или наблюдаемости разложение Адамара соответствующих грамианов сводится к матрице мультипликатора, след которого равен энергетическому функционалу SISO LTI системы (замечание 1.3). Новые результаты получены в виде спектральных и сингулярных разложений обратных грамианов управляемости и наблюдаемости (теорема 1.3). Они позволяют получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод (теорема 1.4). Вышеперечисленные результаты представлены в работе [84].

Разработан метод получения сепарабельных спектральных разложений матриц для неустойчивых непрерывных систем (теорема 1.5). Для неустойчивых непрерывных линейных систем аналитическое вычисление большинства энергетических функционалов, выраженных через грамианы, основано на вычислении спектра матриц динамики и мер минимальной энергии, требуемой для перехода системы из начального в конечное состояние (теорема 1.6). Спектральные разложения грамианов управляемости и их обратных грамианов позволяют в рамках единого подхода аналитически вычислить составляющие энергии, соответствующие характерным собственным числам матриц грамианов, которые определяют основной вклад в величину энергетических функционалов достижимости и устойчивости (теорема 1.7). Эти спектральные разложения представлены в виде формул, позволяющих анализировать влияние различных узлов графа системы на формирование энергетических метрик достижимости и устойчивости. Результаты представлены в статье [83].

Глава 2. Спектральные методы решения обобщенных непрерывных уравнений Ляпунова

В данной главе рассматривается мониторинг и управление билинейных непрерывных динамических систем. Основные результаты представлены в работах [84—86].

Билинейные системы являются наиболее близкими к классу существенно нелинейных систем среди всех нелинейных систем. Исследования в области билинейных систем тесно связаны с задачей понижения порядка модели путем построения аппроксимирующей модели меньшей размерности. Даже в случае линейных систем большой размерности применение проекционных методов позволяет существенно уменьшить размерность аппроксимирующей модели [20; 46; 48; 74; 99—102]. Среди этих методов отметим сбалансированное отсечение, сингулярную декомпозицию, метод подпространств Крылова, методы синтеза упрощенной модели оптимальные по критерию H_2-нормы грамианов, а также гибридные методы. Для большинства методов разработаны итеративные алгоритмы их реализации. Введены определения квадрата H_2-нормы грамианов билинейной системы, получены их спектральные разложения на спектрах линейной подсистемы и сопряженной антиустойчивой подсистемы [20; 46]. Получены решения обобщенных уравнений Ляпунова (ОУЛ) с применением произведений Кронекера и метода векторизации. Введены энергетические функционалы и выявлены условия существования и единственности решения ОУЛ. Получены формулы для вычисления решения с применением метода произведений Кронекера и метода векторизации [22; 45; 46; 74]. Билинейные системы являются частным случаем систем координатно-параметрического управления, исследованию которых посвящена монография [100]. Работы в области исследования грамианов билинейных систем тесно связаны с анализом структурных их свойств управляемости и наблюдаемости [101; 103; 104]. Последние работы по решению дифференциальных и алгебраических уравнения Ляпунова и Сильвестра во временной и комплексной области и их приложения к анализу устойчивости сложных энергетических систем можно найти в [18; 23; 24; 71; 91; 104].

Исследования в области нелинейных и «слабо нелинейных» систем управления, описываемых рядами Вольтерра, насчитывает больше полувека

[17; 44; 66—68; 73; 77; 105; 106]. Матричное непрерывное дифференциальное и алгебраическое уравнение Ляпунова играет важную роль в современной теории управления [44; 66—68; 73; 77; 106]. Первые спектральные разложения грамианов для линейных непрерывных систем с простым спектром были получены на основе спектрального разложения интегрального представления решения уравнений Ляпунова или Сильвестра [17]. В работах [67; 73] получены аналитические решения дискретных и непрерывных уравнений Ляпунова на основе приведения матрицы динамики к форме Жордана. В работах [22; 45; 74] разработаны и исследованы представления и структурные разложения грамианов для матриц динамики линейных систем с простым спектром, исследованы некоторые свойства грамианов билинейных систем, поскольку получены явные представления грамиана билинейной системы в виде ряда Вольтерра и исследованы условия его сходимости. Интерес к этим исследованиям вызывался тем, что появилось их достаточно полное описаний на основе частотных методов, основанных на обобщении преобразования Лапласа на функции многих переменных в форме многомерного преобразования Лапласа [20; 99; 100]. В монографии [100] было предложено использовать многомерное преобразование Лапласа для построения решения в нелинейных системах с гладкими нелинейностями, к которым относятся и билинейные системы. В работе [99] был предложен метод итеративного вычисления многомерной передаточной функции, в которой на каждой итерации решается уравнение Ляпунова для линейной подсистемы с изменяющейся матрицей правой части, в качестве которой используется решение уравнения, полученное на предыдущей итерации. Такой подход позволяет оценить точность аппроксимации ряда Вольтерра его конечным отрезком.

2.1 Сепарабельные спектральные разложения решений уравнения Ляпунова для билинейных моделей динамических систем

2.1.1 Теоретическая основа решений обобщенных уравнений Ляпунова для билинейной модели

Рассмотрим устойчивую непрерывную стационарную билинейную MIMO систему:

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax\left(t\right) + \sum\limits_{\gamma=1}^{m} N_{\gamma} x\left(t\right) u_{\gamma}\left(t\right) + Bu\left(t\right), \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^m$.
Определим линейную стационарную часть системы в виде:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right), \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right). \end{cases} \tag{2.2}$$

Определим грамиан управляемости билинейной системы с помощью матричного ряда Вольтерра вида [44]:

$$\begin{aligned} &P_1(t_1) = e^{At_1}B, \\ &P_i(t_i) = \left[e^{At_i}N_1P_{i-1} \quad e^{At_i}N_2P_{i-1} \quad \ldots \quad e^{At_i}N_mP_{i-1}\right], \quad i = 2{,}3, \ldots, \\ &P = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} P_i(t_1, \ldots, t_i) P_i^{\mathrm{T}}(t_1, \ldots, t_i) dt_1 \ldots dt_i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Определение 2.1. *Для системы* (2.1) *ОУЛ с грамианом управляемости определяется:*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1}^{m} N_j P N_j^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}}, \tag{2.4}$$

или с грамианом наблюдаемости в виде:

$$A^{\mathrm{T}}Q + QA + \sum_{j=1}^{m} N_j Q N_j^{\mathrm{T}} = -C^{\mathrm{T}}C. \tag{2.5}$$

Ряд Вольтерра (2.3) является решением уравнения (2.4), в том случае, когда это решение существует. Матрицу решения в этом случае можно назвать грамианом управляемости билинейной системы [22; 40; 74].

Теорема 2.1. *Для системы* (2.1) *существующий и единственный грамиан управляемости определяется с помощью следующей итеративной процедуры*

$$AP_1 + P_1A^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}},$$

$$AP_i + P_iA^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1}^{m} N_j P_i N_j^{\mathrm{T}} = 0, \quad i = 2{,}3, \ldots, \tag{2.6}$$

$$P = P_1 + \sum_{i=2}^{\infty} P_i.$$

Грамиан наблюдаемости билинейной системы является предельным решением, получаемым в результате реализации аналогичной итеративной процедуры.

Следуя [40], рассмотрим задачу вычисления грамиана управляемости для одного класса билинейных нестационарных систем вида

$$\Sigma : \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax(t) + \displaystyle\sum_{\gamma=1}^{H} A_\gamma x(t) f_\gamma(t) + Bu\,(t)\,, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.7}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$, $f_\gamma\,(t) \in \mathbb{R}^1$. Матрица динамики билинейной системы является суммой постоянной матрицы A и суммы произведений постоянных матриц A_γ на переменные параметры $f_\gamma\,(t)$, которые, в отличие от координатных входов $u_\gamma\,(t)$, можно назвать параметрическими входами. Система (2.7) может быть преобразована в систему (2.1) путем расширения вектора управления и введения новых обозначений [45]:

$$u_\eta^{\mathrm{T}} = [u_1 \;\; u_2 \;\; \ldots \;\; u_m \;\; f_1 \;\; \ldots \;\; f_H], \quad B_{bl} = [B \;\; 0_{n\times H}],$$

$$N_\eta = \begin{cases} 0_{n\times n}, & \eta = 1,2,\ldots,m, \\ A_{\eta-m}, & \eta = m+1,m+2,\ldots,m+H, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$N_\eta = \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax\left(t\right) + \displaystyle\sum_{\eta=1}^{m+H} N_\gamma x\left(t\right) u_\eta\left(t\right) + B_{bl} u\left(t\right), \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right). \end{cases}$$

Грамиан управляемости (2.2) системы (2.8) удовлетворяет расширенному уравнению Ляпунова вида (2.1) и может быть вычислен с помощью итеративной процедуры (2.6). В дальнейшем под системой (2.1) будем подразумевать преобразованную систему вида (2.7).

2.1.2 Сепарабельные спектральные разложения грамианов управляемости линейной части билинейной системы

В работе [20] было получены следующие спектральные разложения грамианов линейной части билинейной системы по простому спектру матрицы A при предположениях, что матрица устойчива, и все ее собственные числа различны:

$$P^l = -\sum_{r=1}^{n} \left[\left(Is_r + A^*\right)^{-1} Q Res\left(\left(Is - A\right)^{-1}, s_r \right) \right].$$

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то линейную часть можно привести к диагональному виду с помощью невырожденного преобразования координат:

$$\begin{aligned} &x_d = Tx,\;\; \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u,\;\;\; y_d = C_d x_d, \\ &A_d = TAT^{-1},\;\; B_d = TB,\;\; y_d = C_d x_d,\;\; Q_d = TBB^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

или

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix} = TAT^{-1},$$

где матрица T составлена из правых собственных векторов u_i, а матрица T^{-1} - из левых собственных векторов ν_i^*, соответствующих собственным числам s_i. Грамиан диагонализированной линейной части является решением уравнения Ляпунова вида

$$A_d P_d + P_d A_d^* = -Q_d,$$

которое определится из формулы [20]:

$$P_d^l = -\sum_{r=1}^{n} \left[(Is_r + A_d^*)^{-1} Q_d Res \left((Is - A_d)^{-1}, s_r \right) \right]. \qquad (2.10)$$

Грамиан управляемости P_d^{cl} связан с грамианом P^{cl} соотношением вида [18; 71]:

$$P^{cl} = TP_d^{cl}\, T^{-1}, \quad T^{-1} = [u_1 \;\; u_2 \;\; \dots \;\; u_n]. \qquad (2.11)$$

Грамиан наблюдаемости P_d^{ol} связан с грамианом P^{ol} аналогичным соотношением:

$$P^{ol} = T^{-1} P_d^{ol} T. \qquad (2.12)$$

Заметим, что в диагонализированной линейной части матрица Q_d зависит не только матрицы B, как в исходной системе, но и от собственных чисел матрицы A. Произведение первых двух сомножителей в (2.9) образует матрицу вида:

$$-(Is_r + A_d^*)^{-1} Q_d = -\begin{bmatrix} (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d11} & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d12} & \vdots & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d1n} \\ (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d21} & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d22} & \vdots & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ (s_1^* + s_r)^{-1} q_{dn1} & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{dn2} & \vdots & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{dnn} \end{bmatrix}.$$

Для диагональной матрицы A справедливы соотношения:

$$(Is - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} R_i(s - s_i)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{ii}\,(s - s_i)^{-1}, \quad R_i = Res\left[\left((Is - A)^{-1}, s_i\right)\right].$$

Заметим, что матрица R_i обладает свойством: умножение любой квадратной матрицы на нее справа вырезает из первой «i»-й столбец, а умножение этой матрицы на нее слева вырезает из первой «i»-ю строку. При этом все пустые места заполняются нулями. Применим это свойство при умножении матрицы $-(Is_r + A_d^*)^{-1} Q_d$ на матрицу $\mathbf{1}_{ii}$ справа. Введем обозначение:

$$\left[p_r^l\right]_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d11} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{d21} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (s_1^* + s_r)^{-1} q_{dn1} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Это позволяет записать формулу решения в компактном виде:

$$P_d^l = \left[p_1^l\right]_0 + \left[p_2^l\right]_0 + \dots + \left[p_n^l\right]_0. \tag{2.13}$$

Назовем разложение вида (2.13) сепарабельным спектральным разложением грамиана линейной части билинейной системы в виде прямой суммы субграмианов, соответствующих разложению грамиана управляемости линейной части по простому спектру матрицы динамики. Для практических приложений использование спектральных разложений означает возможность вычислять отдельные субграмианы доминантных мод, не вычисляя весь грамиан. Кроме того, мы видим, что каждый элемент вектора p_r^l субграмиана обратно пропорционален комбинации собственного числа «r» матрицы динамики с другими ее собственными числами. Это наблюдение позволяет предположить, что парные комбинации собственных чисел играют важную роль в формировании сепарабельного разложения грамиана. Рассмотрим спектральное разложение грамиана линейной части билинейной системы по парному комбинационному спектру матрицы A. В соответствии с [20] оно имеет вид:

$$P_d^l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{dij}^l, \tag{2.14}$$

$$P^l_{dij} = -\left(s_i + s_j\right)^{-1} Res\left(\left(Is_i - A_d\right)^{-1}),s_i\right) Q_d Res\left(\left(Is_j - A_d\right)^{-1},\, s_j\right).$$

Формулу (2.14) можно переписать в виде [77]:

$$P^l_{dij} = -\left(s_i + s_j\right)^{-1} \mathbf{1}_{ii} Q_d \mathbf{1}_{jj}. \tag{2.15}$$

Это простая и компактная формула сводит вычисление матрицы комбинационного субграмиана линейной части к вычислению только одного его элемента. Она проще формулы (2.10) вычисления матрицы субграмиана разложения по простому спектру. Получено сепарабельное спектральное разложение грамианов линейной части билинейной системы в виде суммы n^2 субграмианов, соответствующих разложению грамиана управляемости по парному комбинационному спектру матрицы динамики. [20; 24; 77].

2.1.3 Сепарабельные спектральные разложения грамианов билинейных нестационарных систем

Перейдем далее к рассмотрению спектральных разложений грамиана билинейной системы, считая выполненным преобразование линейной части к диагональному виду. На каждом шаге итераций в (2.6) происходит решение обычного матричного уравнения Ляпунова. Левая часть уравнения совпадает с левой частью такого же уравнения линейной части, а правая часть $\sum_{\gamma=1}^{H} A_\gamma P^{bl(k)} A_\gamma^{\mathrm{T}}$ меняется на каждом шаге. Применим к матрице $P^{bl(k)}$ спектральное разложение по парному комбинационному спектру матрицы динамики. Без ограничения общности предположим, что правая часть (2.6) принята равной единственному слагаемому $A_\gamma P^{bl(k)} A_\gamma^{\mathrm{T}}$:

$$P^{bl(k)}_{dij} = -\left(s_i + s_j\right)^{-1} \mathbf{1}_{ii} P^{bl(k-1)}_{dij} \mathbf{1}_{jj},$$

$$P^{bl(k)}_{dij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \left(s_i + s_j\right)^{-1} p^{bl(k-1)}_{dij} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формирование матричного произведения $A_\gamma P_{dij}^{bl(k)} A_\gamma^{\mathrm{T}}$. При умножении матрицы A_γ на матрицу $\mathbf{1}_{ij}$ справа получим матрицу, все элементы которой, кроме столбца «j», равны нулю, а столбец «j» имеет вид:

$$[e_j\left(A_\gamma \mathbf{1}_{ij}\right)]^T = \begin{bmatrix} a_{\gamma 1j} & a_{\gamma 2j} & \ldots & a_{\gamma nj} \end{bmatrix}.$$

При этом элемент «ν» столбца равен $a_{\gamma\nu j}$. Этот элемент войдет в произведение, стоящее на месте «$\nu\mu$» произведения матриц $A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^{\mathrm{T}}$. При умножении матрицы $\mathbf{1}_{ij}$ на матрицу A_γ^{T} справа получим матрицу, все элементы которой, кроме строки «i», равны нулю, а строка «i», имеет вид:

$$\left[\left(\mathbf{1}_{ij} A_\gamma^{\mathrm{T}}\right) e_i^{\mathrm{T}}\right] = \begin{bmatrix} a_{\gamma i1} & a_{\gamma i2} & \ldots & a_{\gamma in} \end{bmatrix}.$$

При этом элемент «μ» строки равен $a_{\gamma i\mu}$. Этот элемент войдет в произведение, стоящее на месте «$\nu\mu$» произведения матриц $A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^{\mathrm{T}}$. Отсюда следует:

$$A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^{\mathrm{T}} p_d^{bl(k-1)ij} = \left[\alpha_{\nu\mu}\right], \;\; \alpha_{\nu\mu} = a_{\gamma\nu i} a_{\gamma\mu j} p_d^{bl(k-1)ij}. \tag{2.16}$$

Запишем решение уравнения (2.5) для каждого шага итерации с учетом формулы (2.12), в которой матрицу Q_d следует заменить на матрицу $P_{dij}^{bl(k)}$:

$$P_d^{bl(k)ij} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} -\left(s_\nu + s_\mu\right)^{-1} \mathbf{1}_{\nu\mu} a_{\gamma\nu i}\, a_{\gamma\mu j} p_d^{bl(k-1)ij}, \qquad k = 2,3,\ldots \tag{2.17}$$

Теорема 2.2. *Пусть дана система* (2.1) *со стационарной линейной частью, преобразованная в диагональную каноническую форму, тогда если матрица A гурвицева и имеет простой спектр, задано ОУЛ*

$$AP^{cbln} + P^{cbln}A^{\mathrm{T}} + \sum_{\gamma=1}^{H} A_\gamma P^{cbln} A_\gamma^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}},$$

и выполнены неравенства:

$$\underbrace{max}_{\nu\mu}\left|\left(s_\nu + s_\mu\right)^{-1}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu ij\gamma} \left|a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right| < 1, \forall \nu,\mu,i,j = 1,2,\ldots,n, \forall\gamma = 1,2,\ldots,H, \tag{2.18}$$

то решение обобщенного уравнения Ляпунова (2.4) существует, единственно и определяется с помощью итеративной процедуры:

$$P_d^c = P_d^{cln} + P_d^{cbln},$$

$$P_d^{cln(1)} = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{q_{d,\gamma\nu\mu}}{s_\nu + s_\mu}\mathbf{1}_{\boldsymbol{\nu\mu}}, \forall\nu,\mu = 1,2,\ldots,n,$$

$$P_d^{cbln(k)ij\gamma} = \sum_{\nu,\mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma}\mathbf{1}_{\nu\mu}, \;\; r^{(k)ij\gamma} = -\left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right],$$

$$k = 2,3,\ldots \quad \forall\nu,\mu,i,j = 1,2,\ldots,n; \gamma = 1,2,\ldots,H,$$

$$p_d^{cbln(k)ij\gamma} = -\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma}\right)\left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right],$$

$$\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma}\right) = p_d^{cbln(k-1)ij\gamma}.$$

Исходный грамиан управляемости P^{cbln} билинейной системы связан с матрицей P_d^{cbln}уравнением (2.11).

Доказательство. Построение матрицы решения сводится к построению последовательности элементов «ij» и последующем агрегировании элементов в единую матрицу. Все отдельные последовательности в общем случае являются комплекснозначными. Для доказательства сходимости последовательности частичных сумм, применим признак сравнения и построим мажорирующую последовательность из модулей членов последовательностей. Для каждого шага «k» и каждой матрицы A_γ имеют место итеративные соотношения (2.17). Построим ряд сравнения для элементов грамиана «$ij\gamma$» для шага «k». Из формул (2.17) следует, что каждый элемент последовательности представляет собой взвешенную сумму всех ведущих элементов на предыдущем шаге.

1-ый шаг. Рассмотрим формирование правой части ОУЛ на первом шаге для случая γ=1. Нам потребуется не сама матрица решения уравнения Ляпунова линейной части, а сепарабельное спектральное разложение этого решения по парному спектру матрицы:

$$P_d^{cln(1)} = -\sum_{\gamma=1}^{H}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{q_{d,\gamma\nu\mu}}{s_\nu + s_\mu}\mathbf{1}_{\boldsymbol{\nu\mu}},$$

где $q_{d,\gamma\nu\mu}$ – элемент «$\nu\mu\gamma$» матрицы Q_d.

2-ой шаг. Рассмотрим формирование правой части ОУЛ на втором шаге на примере матрицы $A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^{\mathrm{T}}$. Выше было доказано (2.16), что:

$$A_\gamma \mathbf{1}_{ij} A_\gamma^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{\alpha_{d\gamma,\nu\mu}}]_{\boldsymbol{(n\times n)}},$$

$$[\boldsymbol{\alpha_{d\gamma,\nu\mu}}]_{\boldsymbol{(n\times n)}} = \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j} \mathbf{1}_{\boldsymbol{\nu\mu}}.$$

В соответствии с формулой (2.14) решение уравнения Ляпунова на 2-ом шаге принимает вид:

$$P_d^{cbln(2)ij} = -\sum_{\gamma=1}^{H}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{p_d^{cln(1)ij}}{s_\nu + s_\mu} \left(a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right) \mathbf{1}_{\boldsymbol{\nu\mu}}. \tag{2.19}$$

Эта формула выражает сепарабельное спектральное разложение ядра Вольтерра 2-го порядка на шаге 2. Для фиксированного элемента «ij» матрицы $P_d^{bln(2)ij}$ получаем формулу:

$$p_d^{cbln(2)ij} = -\sum_{\gamma=1}^{H}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{p_d^{cln(1)ij}}{s_\nu + s_\mu} \left(a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right). \tag{2.20}$$

«k»-ый шаг. Поступая аналогичным образом и учитывая суммирование субгамианов по индексу «γ», получим формулу для вычисления матрицы ядра грамиана порядка «k» на шаге «k».

$$P_d^{cbln(k)ij\gamma} = \sum_{\nu,\mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma} \mathbf{1}_{\nu\mu}, \;\; r^{(k)ij\gamma} = -\left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right],$$

$$k = 2,3,\ldots \;\; \forall \nu,\mu,i,j = 1,2,\ldots,n, \;\; \gamma = 1,2,\ldots,H, \tag{2.21}$$

$$p_d^{cbln(k)ij\gamma} = -\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma}\right)\left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right],$$

$$\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma}\right) = p_d^{(k-1)ij\gamma}, \tag{2.22}$$

$$k = 2,3,\ldots \;\; \forall \nu,\mu,i,j = 1,2,\ldots,n, \;\; \gamma = 1,2,\ldots,H.$$

Формула (2.19) выражает алгоритм поэлементного вычисления матрицы грамиана билинейной системы. На каждом шаге алгоритм дает возможность вычислить матрицу ядра грамиана порядка «k». Анализ формулы (2.19) позволяет разбить множество элементов матрицы субграмиана $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu}$ на три подмножества:

подмножество ведущих элементов $\dfrac{a_{d\gamma\nu\nu}a_{d\gamma\mu\mu}}{s_\nu + s_\mu} p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu}, \quad k = 2{,}3\dots$

подмножество ведомых элементов $\dfrac{a_{d\gamma\nu i}a_{d\gamma\mu j}}{s_\nu + s_\mu} p_{d\nu\mu}^{cbln(k-1)ij}, \nu \neq i{,}\mu \neq j{,}k = 2{,}3\dots$

подмножество элементов $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)\nu\mu}$ =0.

Справедливы тождества вида при выполнении условий $a_{ii\gamma} \neq 0$, $a_{jj\gamma} \neq 0$:

$$P_{\nu\mu\gamma}^{cbln(k)ij} = \left(\frac{(s_i + s_j)}{(s_\nu + s_\mu)}\right)\left(\frac{a_{\nu i\gamma}}{a_{ii\gamma}}\right)\left(\frac{a_{\mu j\gamma}}{a_{jj\gamma}}\right) P_\gamma^{cbln(k)ij},$$

которые определяют связь ведущих и ведомых элементов.

Для ведущих элементов справедливы формулы:

$$\begin{aligned} &p_d^{(k)ij\gamma} = -p_d^{(k-1)ij\gamma} \ \left[(s_i + s_j)^{-1} a_{d\gamma,ii} a_{d\gamma,jj}\right], \\ &k = 2{,}3,\dots \quad \forall \nu{,}\mu{,}i{,}j = 1{,}2,\dots,n, \quad \gamma = 1{,}2,\dots,H. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Отсюда следует, что «$ij\gamma$» ведущие элементы образуют геометрические прогрессии с начальными членами $p_d^{cbln(1)ij\gamma}$ и знаменателями $-\left[(s_i + s_j)^{-1} a_{d\gamma,ii} a_{d\gamma,jj}\right]$. В работе [46] доказано, что итеративный алгоритм решения ОУЛ гарантирует существование и единственность матрицы решения при сходимости последовательности ядер Вольтерра. Если линейная часть устойчива и все собственные числа ее матрицы динамики различны, то на каждом шаге алгоритмы (2.21) гарантируют существование и единственность решения. Очевидно, что необходимым и достаточным условием сходимости матриц решения является поэлементная сходимость матриц, что обеспечивают алгоритмы (2.21) – (2.22), сходимость которых не очевидна. Покажем, что при выполнении условий теоремы сходимость последовательностей (2.21) – (2.22) является абсолютной и равномерной.

Для каждого шага «k» и каждой матрицы γ имеют место итеративные соотношения (2.21) – (2.22). Построим ряд сравнения для элементов субграмиана «ij,γ» для шага «k». Из формул (2.21) – (2.22) следует, что каждый элемент последовательности представляет собой взвешенную сумму всех ведущих элементов на предыдущем шаге. Из формулы (2.20) для шага 2 получаем неравенство:

$$\left|p_{dij\gamma}^{cbln(2)}\right| \leq n^2 \left|p_{dij\gamma}^{cbln(1)}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right|, \tag{2.24}$$

которое дает оценку модуля члена последовательности «$ij\gamma$» для шага 2. Введем обозначение:

$$\underbrace{max}_{ij} \left|p_{dij\gamma}^{cbln(1)}\right| = M_{max}.$$

Тогда неравенство (2.21) приобретает вид:

$$\left|p_{dij\gamma}^{cbln(2)}\right| \leq n^2 M_{max} \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right|, \quad \forall \gamma, i, j, \nu, \mu.$$

Проводя аналогичные преобразования для той же числовой последовательности на шаге «k» получим неравенство:

$$\left|p_{dij\gamma}^{cbln(k)}\right| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \left|p_{d\nu\mu\gamma}^{cbln(k-1)}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right| \leq$$

$$\leq n^2 \left|p_{d\nu\mu\gamma}^{cbln(k-1)}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right|.$$

Отсюда следует оценка:

$$\frac{\left|p_{dij\gamma}^{cbln(k)}\right|}{\left|p_{dij\gamma}^{cbln(k-1)}\right|} \leq \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right| \underbrace{max}_{\nu\mu} \left|a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right|. \tag{2.25}$$

Полученные неравенства позволяют сформировать $M_{«ij\gamma»}$ локальные и одну M глобальную мажоранты:

$$M_{«ij\gamma»}^{(k)} : M_{«ij\gamma»}^{(1)} = \left|p_{dij\gamma}^{cbln(1)}\right|, M_{«ij\gamma»}^{(2)} = \left|p_{dij\gamma}^{cbln(2)}\right|, \ldots, \ M_{«ij\gamma»}^{(k)} = \left|p_{dij\gamma}^{cbln(k)}, \ldots\right|,$$

$$M^{(k)} : M^{(1)} = M_{max}, M^{(2)} = \underbrace{max}_{ij\gamma} \left|p_{dij\gamma}^{cbln(2)}\right|, \ldots, \ M^{(k)} = \underbrace{max}_{ij\gamma} \left|p_{dij\gamma}^{cbln(k)}\right|, \ldots$$

В соответствии оценкой (2.25) локальные $M_{«ij\gamma»}$мажоранты сходятся при выполнении условий:

$$\underbrace{max}_{\nu\mu}\left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right|\underbrace{max}_{\nu\mu}|a_{d\gamma,\nu i}a_{d\gamma,\mu j}| < 1\ ,\ \ \forall\nu,\mu = 1,2,\ldots,n,\forall\gamma = 1,2,\ldots,H. \tag{2.26}$$

Глобальная мажоранта $M^{(k)}$ сходится, если выполнено условие:

$$\underbrace{max}_{\nu\mu}\left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right|\underbrace{max}_{\nu\mu ij\gamma}\ |a_{d\gamma,\nu i}a_{d\gamma,\mu j}| < 1\ ,\ \ \forall\nu,\mu,i,j = 1,2,\ldots,n,\forall\gamma = 1,2,\ldots,H. \tag{2.27}$$

Поскольку линейная часть устойчива, то существует точная верхняя грань для обратной величины суммы любых собственных чисел ее матрицы, равная

$$\underbrace{max}_{\nu\mu}\left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right|.$$

Для любых элементов матриц A_γ существует точная верхняя грань произведений модулей ее элементов равная $\underbrace{max}_{\nu\mu}|a_{d\gamma,\nu i}a_{d\gamma,\mu j}|$. Следовательно при выполнении условий теоремы выполняется неравенство (2.23) и признаки сходимости рядов с положительными членами. Следовательно комплекснозначные последовательности (2.21) – (2.22) сходятся равномерно и абсолютно. □

Теорема 2.3. *Для системы* (2.1), *гурвицевой матрицы* A, *имеющей простой спектр, ОУЛ*

$$A^{\mathrm{T}}P^{obln} + P^{obln}A + \sum_{\gamma=1}^{H} A_\gamma P^{obln}A_\gamma^{\mathrm{T}} = -C^{\mathrm{T}}C,$$

и уравнения линейной части, преобразованных в диагональную каноническую форму, и выполнении неравенств:

$$\begin{gathered}\underbrace{max}_{\nu\mu}\left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right|\underbrace{max}_{\nu\mu ij\gamma}|a_{d\gamma,\nu i}a_{d\gamma,\mu j}| < 1,\\ \forall\nu,\mu,i,j = 1,2,\ldots,n,\quad \forall\gamma = 1,2,\ldots,H,\end{gathered} \tag{2.28}$$

решение ОУЛ существует, единственно и определяется с помощью итеративной процедуры

$$P_d^o = P_d^{oln} + P_d^{obln},$$

$$P_d^{oln(1)} = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \frac{q_{d,\gamma\nu\mu}}{s_\nu + s_\mu}\mathbf{1}_{\nu\mu}, \quad \forall \nu,\mu = 1,2,\ldots,n,$$

$$P_d^{obln(k)ij\gamma} = \sum_{\nu,\mu} r^{(k)ij\gamma} p_{d\nu\mu}^{obln(k-1)ij\gamma}\mathbf{1}_{\nu\mu}, \;\; r^{(k)ij\gamma} = -\left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right],$$

$$\mathrm{k} = 2,3,\ldots \;\; \forall \nu,\mu,i,j = 1,2,\ldots,n, \quad \gamma = 1,2,\ldots,H, \tag{2.29}$$

$$p_d^{obln(k)ij\gamma} = -\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{obln(k-1)ij\gamma}\right)\left[(s_\nu + s_\mu)^{-1} a_{d\gamma,\nu i} a_{d\gamma,\mu j}\right],$$

$$\left(\sum_{\nu,\mu} p_{d\nu\mu}^{obln(k-1)ij\gamma}\right) = p_d^{obln(k-1)ij\gamma}. \tag{2.30}$$

Исходный грамиан наблюдаемости P^{obln} билинейной системы связан с матрицей P_d^{obln} уравнением (2.12).

2.1.4 Достаточные условия BIBO – устойчивости билинейных нестационарных систем

Определение 2.2. *Система называется BIBO-устойчивой, если при любом ограниченном входном сигнале выходные сигналы ограничены.*

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия теорем 2 и 3, и кроме того выполнены условия [22; 45; 46; 74]:*
1) Вектор-функция $u(t)$ ограничена по норме

$$\|u(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|^2} < M_u, \quad M_u > 0;$$

2) Найдутся такие положительные числа α,β что справедливо неравенство

$$\left\|e^{At}\right\| \le \beta e^{-\alpha t}, \;\; \forall t; \tag{2.31}$$

3) Выполнены неравенства

$$\Gamma < \frac{\sqrt{2\alpha}}{\beta}, \ \ \Gamma = \sqrt{\left\| \sum_{\gamma=1}^{m} A_\gamma A_\gamma^{\mathrm{T}} \right\|}; \qquad (2.32)$$

4) Либо пара (A,B) управляема, либо пара (A,C) наблюдаема.
Тогда нестационарная билинейная система (2.1) *BIBO-устойчива при выполнении условий* (2.18). *Грамианы управляемости и наблюдаемости существуют и единственны, определяются формулами* (2.21) – (2.22), (2.29) – (2.30), *и являются определенно положительными матрицами.*

Доказательство. Утверждения следствий для ОУЛ, заданных в векторно-матричной форме (2.1), доказаны в работах [22; 40; 44—46; 74]. Осталось доказать, что на каждом шаге итерации сепарабельные алгоритмы теорем 2 и 3 дают решение, совпадающее с итеративной процедурой (2.6).

1-ый шаг. Решение уравнения Ляпунова для линейной части на основе предлагаемых сепарабельных спектральных алгоритмов предложено и доказано в работе [77].

В силу условий теорем это решение единственно и не может отличаться от решений уравнений (2.6) на первом шаге.

«k»-ый шаг. Решение уравнения Ляпунова с измененной правой частью остается единственным вследствие устойчивости и простого спектра матрицы A_d, а также симметричности правой части уравнения на шаге «k». Это дает возможность применить сепарабельный алгоритм [77] и доказать тождество (2.17) между элементами «ij» матрицы решения на шагах «k» и «$k-1$», что является основой алгоритма поэлементного вычисления матрицы решения уравнения Ляпунова с измененной правой частью. Алгоритм агрегирования самих матриц решения на каждом шаге доказан в [46]. □

Как известно [17], необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем в терминах ограниченности квадрата H_2-нормы ее передаточной функции $\mathbf{G}(s)$ имеют вид:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_2^2 = \mathrm{trC} P^o C^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr} B^{\mathrm{T}} P^c B < +\infty. \qquad (2.33)$$

Таким же образом мы определим функционал риска потери устойчивости билинейной системы в форме:

$$J(s_1,s_2,...,s_n) = \mathrm{trC}P^{obln}C^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}B^{\mathrm{T}}P^{cbln}B. \qquad (2.34)$$

Если корни характеристического уравнения приближаются к мнимой оси, функционал риска потери устойчивости (2.34) стремится к бесконечности. Определим приемлемый функционал риска потери устойчивости билинейной системы в виде:

$$J^{(\gamma)}(s_1,s_2,...,s_n,\gamma) = M_{\gamma perm}, \quad \gamma = 1,2,\ldots,m. \qquad (2.35)$$

Мы будем считать систему как условно неустойчивую, если все корни ее характеристического уравнения линейной части лежат в левой полуплоскости, но функционал риска потери устойчивости (2.34) превышает установленное приемлемое значение. Подобным образом, мы будем считать данную систему условно устойчивой, если функционал риска потери устойчивости (2.34) не превышает установленное приемлемое значение:

$$J^{(\gamma)}(s_1,s_2,...,s_n,\gamma) < M_{\gamma perm}, \quad \gamma = 1,2,\ldots,m. \qquad (2.36)$$

Последние неравенства определяют набор энергетических функционалов, ограниченность которых гарантирует BIBO-устойчивости билинейной системы. Условия 1-4 теоремы являются достаточными условиями BIBO-устойчивости билинейной системы и одновременно достаточными условиями ограниченности энергетических функционалов $J^{(\gamma)}$. Анализ выражений (2.34) – (2.35) показывает, что элементы числовых последовательностей грамиана билинейной системы сходятся с различной скоростью, гарантирующая оценка которой дается выражениями (2.26) – (2.27).

Сходимость числовых последовательностей является необходимым условием применимости методов линейной теории управления на область слабо-нелинейных режимов функционирования, которая может быть описана билинейными моделями вида (2.1). «Маркером» расходимости последовательностей является расходимость последовательностей ведущих элементов матриц решений ОУЛ (2.4) – (2.5). При подсчете на каждом шаге вычисления n^2 числовых последовательностей $p_{d\gamma\nu\mu}^{cbln(k-1)ij\gamma}$ только одна последовательность $p_{d\gamma ij}^{cbln(k-1)ij\gamma}$, как было показано выше, оказывается геометрической прогрессией. Достаточное условие расходимости прогрессий имеет вид:

$$\left|\left[(s_i + s_j)^{-1} a_{d\gamma,ii} a_{d\gamma,jj}\right]\right| \geq 1, k = 2{,}3, \ldots ,\infty, \forall i,j = 1{,}2, \ldots , n,\gamma = 1{,}2, \ldots , H. \tag{2.37}$$

Это условие является достаточным условием BIBO-неустойчивости нестационарных билинейных систем (2.1).

2.2 Структурные спектральные методы решения непрерывного обобщенного уравнения Ляпунова

Одним из эффективных методов анализа статической устойчивости энергосистем является метод грамианов. Анализ грамиана управляемости линейной модели энергосистемы дает информацию о распределении мощности по электрической сети, о влиянии отдельных групп генераторов и потребителей на пропускную способность того или иного участка сети [44]. Оценка предельных границ устойчивости основана на оценке энергии, накопленной в группе слабоустойчивых режимов. Из физических соображений становится ясно, что рост этой энергии означает приближение энергосистемы к границе устойчивости. Если известна передаточная функция ее линейной модели, то энергия колебаний может быть оценена по квадрату H_2-нормы передаточной функции, которая может быть вычислена путем решения уравнений Ляпунова и вычисления энергетических функционалов [17; 25; 74]. Блэкаут является примером тяжелой системной аварии в энергосистеме, степень угрозы которой можно вычислить с помощью метода грамианов. Однако он основан на использовании линеаризованной модели и не позволяет анализировать устойчивость при коротких замыканиях на линиях, что требует учета факторов нелинейностей модели.

Выбор билинейной модели энергосистемы позволяет учесть нелинейности взаимодействий. Для такой модели вычисление H_2-нормы оператора основано на разложении резольвенты матрицы динамики линейной системы на простые дроби в комплексной области. Также существуют итерационные алгоритмы вычисления квадрата H_2-нормы грамианов управляемости. Билинейные модели энергосистем используются для анализа статической устойчивости энергосистем [17;

25; 40; 44; 74]. Для решения задачи анализа устойчивости [91; 107] используется многомерное преобразование Лапласа. Первые попытки альтернативного решения посредством метода грамианов для нелинейных моделей динамических систем были связаны с научным направлением понижения размерности, а так же вычислением кинетической и накопленной энергии. В [108] был впервые разработан итеративный метод для вычисления квадрата H_2-нормы для оператора билинейной системы.

2.2.1 Теоретическая основа структурных спектральных методов решения непрерывного обобщенного уравнения Ляпунова

Рассматривается устойчивая непрерывная стационарная билинейная динамическая MIMO система:

$$\Sigma_2 \colon \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma x(t)\, u_\gamma(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{2.38}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$,$u(t) \in \mathbb{R}^m$,$y(t) \in \mathbb{R}^m$, $u_\gamma(t)$ – «γ»-я компонента $u(t)$.
Для системы (2.38) определена линейная часть:

$$\Sigma_1 \colon \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{2.39}$$

Посредством матричного ряда Вольтерра задается выражение для грамиана управляемости билинейной системы [17]:

$$\begin{aligned} &P_1(t_1) = e^{At_1}B, \\ &P_i(t_i) = \begin{bmatrix} e^{At_i}N_1P_{i-1} & e^{At_i}N_2P_{i-1} & \dots & e^{At_i}N_mP_{i-1} \end{bmatrix}, \quad i = 2,3,\dots, \\ &P = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P_i(t_1,\dots,t_i)P_i^{\mathrm{T}}(t_1,\dots,t_i)dt_1\dots dt_i. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Для системы (2.38) известно два представления ОУЛ через грамианы управляемости и наблюдаемости соответственно:

$$AP + PA^T + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma P N_\gamma^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}}, \tag{2.41}$$

$$A^{\mathrm{T}}Q + QA + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma Q N_\gamma^{\mathrm{T}} = -C^{\mathrm{T}}C. \tag{2.42}$$

Лемма 2.2. *[44] Рассмотрим последовательность векторов $\{x_i(t)\}$ решений дифференциальных уравнений системы* (2.38)*, в которой вектор управлений задан на пространстве непрерывных вещественных векторов $U^m(I)$ на конечном интервале $I = (0,T)$ с теми же начальными условиями, что и для линейной системы* (2.39)

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + Bu, \tag{2.43}$$

$$\dot{x}_i = Ax_i + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma x_{i-1} u_\gamma + Bu,\ i = 1,2,\ldots, \tag{2.44}$$

$$x_i(0) = x(0).$$

Тогда для каждого вектора управления $u(t) \in U^m(I)$ последовательность векторов $\{x_i(t)\}$ решений систем (2.43) – (2.44) *сходится равномерно на I к решению билинейной системы 2.38 – $\{x(t)\}$.*

Введем вектор невязки $z_i(t) = x(t) - x_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$
Тогда справедливы равенства:

$$z_i(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma z_{i-1}(\tau)\, u_\gamma(\tau)\, d\tau, \quad i = 1,2,\ldots \tag{2.45}$$

Зафиксируем нулевые начальные условия:

$$x_i(0) = x(0), \quad z_i(0) = 0, \quad i = 1,2,\ldots$$

В этом случае решение системы дифференциальных уравнений (2.43) примет вид:

$$x_0(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau. \tag{2.46}$$

Ниже изложен новый комплексный подход к построению решений $z_i\,(t)$ с целью разработать новые итеративные алгоритмы решений и конструктивные проверяемые достаточные условия сходимости решений на полуинтервале $[0{,}\infty)$. Для решения поставленной задачи предлагается новая методология построения решения:

1. На первой итерации выполнять декомпозиция по собственным значениям (EVD) матрицы динамики линейной части.
2. Вычислять решение для элементов вектора на каждом шаге во временной и частотной области с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа на основе декомпозиции по спектру и агрегирования элементов вектора.
3. Формировать функциональные последовательности элементов вектора состояния билинейной системы и строить интегральные неравенства для построения их мажорант.
4. Получить достаточные условия сходимости элементов решений на полуинтервале $[0{,}\infty)$ и на их основе выполнить анализ BIBO-устойчивости билинейной системы.

2.2.2 Итеративный алгоритм построения решения обобщенного уравнения Ляпунова

В такой постановке примем, что матрица A устойчива и имеет простой спектр, $m = 1$, а функция $u\,(t)$ ограничена на полуинтервале $[0{,}\infty)$:

$$\int_0^\infty |u(\tau)|\, d\tau \leq M > 0. \tag{2.47}$$

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то существует невырожденное преобразование координат:

$$\begin{aligned}
&x{=}Tx_d,\ z{=}Tz_d, \quad \dot{z x_d}{=}A_d z x_d + B_d u, \quad y_d{=}C_d x_d,\\
&A_d{=}T^{-1}AT, \quad B_d{=}T^{-1}B, \quad C_d{=}C\mathrm{T}, \quad Q_d{=}T^{-1}BB^{\mathrm{T}}T^{-\mathrm{T}},
\end{aligned} \tag{2.48}$$

или

$$A_d = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix}; TV = VT = I.$$

Где матрица T составлена из левых собственных векторов u_i, а матрица $T^{-1} = V$ – из правых собственных векторов ν_i^*, соответствующих собственному числу s_i.

Рассмотрим процесс последовательного построения решения $z_d(t)$.

Первый шаг. Во временной области решение определяется уравнением (2.46). Для элемента «φ» диагонализированной системы это уравнение имеет вид:

$$z_{d\varphi}^{(1)}(t) = \int_0^t e^{s_\varphi (t-\tau)} b_\varphi u(\tau)\, d\tau, \ \ t \in [0,\infty),$$

откуда с учетом условия $s_\varphi \in \mathbb{C}^-$ следует неравенство:

$$\left| z_{d\varphi}^{(1)}(t) \right| \le \max_\varphi |b_\varphi| \, M, \ \varphi = 1,2,\dots,n, \ \ t \in [0,\infty).$$

Поскольку из (2.47) вытекает существование изображения $U(s)$, в частотной области точное решение имеет вид:

$$Z_{d\varphi}^{(1)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} b_\varphi U(s).$$

Второй шаг. В соответствии с (2.45) решение во временной области имеет вид:

$$z_{d\varphi}^{(2)}(t) = \int_0^t e^{s_\varphi (t-\tau)} N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \quad \varphi = 1,2,\dots,n, \quad t \in [0,\infty). \qquad (2.49)$$

Изображение интеграла свертки (2.49) имеет форму:

$$Z_{d\varphi}^{(2)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} \mathcal{L}\left[N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau)\, u(\tau) \right].$$

Поскольку все собственные числа s_φ находятся в левой полуплоскости, справедливы неравенства:

$$\left| e^{s_\varphi (t-\tau)} \right| < 1, \quad \tau \in [0,t),$$

$$\left|z_{d\varphi}^{(2)}\left(t\right)\right| \le \int_0^t \left|Nb_\varphi u^2\left(\tau\right)\right| d\tau, \;\; \varphi = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [0,\infty)\,. \tag{2.50}$$

При выполнении условия (2.47) функция $u\left(t\right)$ преобразуема по Лапласу. Предположим, что ее изображение $u\left(s\right)$ является рациональной алгебраической дробью, имеющей «l» простых полюсов:

$$U\left(s\right) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{\prod_{k=1}^{l}\left(s - s_k\right)}.$$

Разложение этой функции на простые дроби с комплексными коэффициентами имеет форму:

$$U\left(s\right) = \sum_{k=1}^{l} R_k^u (s - s_k)^{-1},\; R_k^u = \frac{A(s_k)}{\dot{B}(s_k)},$$

где R_k^u– вычет функции $u\left(s\right)$ в ее полюсе. На основании теоремы о перемножении двух функций во временной области имеем:

$$\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(1)}\left(\tau\right) u\left(\tau\right)\right] = \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u U(s - s_k), \tag{2.51}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(1)}\left(\tau\right) u\left(\tau\right)\right]\right\} = \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u u(t) e^{s_k t}. \tag{2.52}$$

Из (2.52) с учетом устойчивости линейной части билинейной системы следует неравенство:

$$\left|\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(1)}\left(\tau\right) u\left(\tau\right)\right]\right\}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u\right| \left|u\left(t\right)\right|, \; \forall \varphi, i; \quad \forall t \in [0,\infty).$$

С учетом последнего неравенства можно записать неравенство (2.50) в виде:

$$\left|z_{d\varphi}^{(2)}\left(t\right)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u\right| \int_0^t \left|u\left(\tau\right)\right| d\tau, \quad \forall \varphi, i = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [0,\infty)\,. \tag{2.53}$$

Третий шаг. В соответствии с общей формулой решение во временной области имеет вид:

$$z_{d\varphi}^{(3)}(t) = \int_0^t e^{s_\varphi(t-\tau)} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \quad \forall\varphi = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [0,\infty)\,. \qquad (2.54)$$

Изображение интеграла свертки (2.54) принимает форму:

$$Z_{d\varphi}^{(3)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} \mathcal{L}\left[N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\right].$$

Поскольку все собственные числа s_φ находятся в левой полуплоскости, справедливы неравенства:

$$\left|e^{s_\varphi(t-\tau)}\right| < 1, \quad \forall t \in [0,\infty), \forall\tau \in [0,t),$$

$$\left|z_{d\varphi}^{(3\ )}(t)\right| \le \int_0^t \left|N b_\varphi u^2(\tau)\right| d\tau, \quad \forall\varphi = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [0,\infty)\,. \qquad (2.55)$$

На основании теоремы о перемножении двух функций во временной области имеем:

$$\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\right] = \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u U(s - s_k),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\right]\right\} = \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u u(t) e^{s_k t}. \qquad (2.56)$$

Из (2.56) с учетом устойчивости линейной части билинейной системы следует неравенство:

$$\left|\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\right]\right\}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u\right| |u(t)|\,, \forall\varphi,i; \quad \forall t \in [0,\infty).$$

С учетом последнего неравенства можно записать неравенство (2.55) в виде:

$$\left|z_{d\rho}^{(3)}(t)\right| \le \left|\sum_{\psi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{\psi\varphi} R_k^u\right| \left|\sum_{k=1}^{l} n_{\psi\varphi} b_\varphi R_k^u\right| M, \quad \forall\varphi,i = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [0,\infty)\,, \qquad (2.57)$$

или

$$\left|z_{d\rho}^{(3)}(t)\right| \leq nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_{k} |R_k^u| \left|z_{d\rho}^{(2)}(t)\right|,\ t \in [0,\infty).$$

Докажем, что на всех последующих шагах $j = 4,5,\ldots$, справедливы рекуррентные неравенства:

$$\left|z_{d\rho}^{(j)}(t)\right| \leq nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_{k} |R_k^u| \left|z_{d\rho}^{(j-1)}(t)\right|,\ t \in [0,\infty). \tag{2.58}$$

Применим метод полной математической индукции. Неравенство справедливо при $j = 3$.

Предположим, что оно справедливо для шага $j-1$:

$$\left|z_{d\rho}^{(j-1)}(t)\right| \leq nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_{k} |R_k^u| \left|z_{d\rho}^{(j-2)}(t)\right|,\ t \in [0,\infty),$$

$$\left|z_{d\rho}^{(j-2)}(t)\right| \leq \left\{nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_{k} |R_k^u|\right\}^{j-3} \left|\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u\right| M. \tag{2.59}$$

В соответствии с общим алгоритмом (2.45) имеем:

$$z_{d\rho}^{(j)}(t) = \int_0^t e^{s_\rho(t-\tau)} N z_{d\rho}^{(j-1)}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau,\ \ \forall\rho = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [0,\infty).$$

В силу предположения об устойчивости линейной части справедливо неравенство:

$$\left|z_{d\rho}^{(j)}(t)\right| \leq \left|\int_0^t N z_d^{(j-1)}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau\right|, \quad \forall\rho = 1,2,\ldots,n, \quad t \in [0,\infty). \tag{2.60}$$

С другой стороны справедлива оценка:

$$\left|\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_\rho^{\mathrm{T}} N z_d^{(j-1)}(\tau)\, u(\tau)\right]\right\}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} R_k^u z_d^{(j-1)} u(t)\right|, \forall i,\ \ \forall t \in [0,\infty). \tag{2.61}$$

Подставим в неравенство (2.60) неравенства (2.58) и (2.59) и учтем неравенство (2.61). Таким образом мажоранта для функциональной последовательности $\left\{z_{d\rho}^{(j)}(t)\right\}$, $j = 2,3,\ldots$ имеет вид:

$$\left|z_{d\rho}^{(j)}(t)\right| \leq \left\{nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_{k} |R_k^u|\right\}^{j-1} \left|\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u\right| M,\ t \in [0,\infty).$$

2.2.3 Достаточное условие BIBO-устойчивости билинейной системы

Теорема 2.4. *Для системы* (2.38)*, при выполнении условий леммы 2.2, достаточное условие сходимости последовательности векторов* $\{z_i(t)\}$ *невязки системы имеет вид:*

$$nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| < 1. \tag{2.62}$$

Доказательство. Построим для последовательности z_d^j мажорирующую геометрическую прогрессию.
Первый член прогрессии

$$m_1 = \max_{\varphi} |b_\varphi| M.$$

Член прогрессии с номером «j»

$$m_j = \max_{\varphi} |b_\varphi| \, M q^{j-1},$$

где q - знаменатель прогрессии

$$q = nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \, ,$$

$$nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| < 1.$$

□

Условие (2.62) гарантирует сходимость всех числовых последовательностей элементов матриц решения ОУЛ на каждом шаге в процессе итераций. Это означает, что при выполнении условия ограниченности числа M и достаточного условия сходимости прогрессии ограниченный вход обеспечивает ограниченный выход, что означает BIBO-устойчивость билинейной системы. В соответствии с признаком Вейерштрасса последовательности частичных сумм m_j сходятся равномерно и абсолютно. Заметим, что полученные условия BIBO-устойчивости билинейной системы позволяют анализировать зависимость условия BIBO-устойчивости билинейной системы не только от амплитуды входного воздействия, но и от его спектра. В частности, эти условия включают оценки модулей вычетов изображения функции входа в полюсах характеристического уравнения изображения.

Теорема 2.5. *Для системы* (2.38), *с линейной частью* (2.39), *определенной на числовой оси* $t \in [0{,}\infty)$, *гурвицевой матрицей* A *с простым спектром, для функций* $u_\gamma(t)$ *ограниченных на интервале [0,∞), для выполненных неравенств*

$$\int_0^\infty |u_\gamma(\tau)|\, d\tau \le M_\gamma > 0, \quad \gamma = 1{,}2, \ldots, m,$$

для итеративной процедуры построения решения системы (2.38) *вида* (2.43) – (2.44) *с нулевыми начальными условиями и для невырожденного преобразования координат системы с матрицей* T (2.48), *на каждом шаге итерации справедливы спектральные разложения ядер Вольтерра решения исходной и преобразованной систем во временной и частотной областях вида:*

$$Z_{d\varphi}^{(j)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} \mathcal{L}\left[N z_{d\varphi}^{(j-1)}(\tau)\, u(\tau) \right],$$

$$\left| z_{d\rho}^{(j)}(t) \right| \le \left\{ nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \right\}^{j-1} \left| \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u \right| M,\ t \in [0{,}\infty).$$

При выполнении условия (2.62) *функциональные ряды сходятся к решению абсолютно и равномерно.*

2.3 Выводы по 2 главе

Разработан метод и получены алгоритмы решения обобщенного уравнения Ляпунова для класса непрерывных нестационарных билинейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения (теорема 2.2). Получено спектральное разложение грамианов управляемости и наблюдаемости нестационарной билинейной системы в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части. Разработан новый метод и алгоритм поэлементного аналитического вычисления матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова для билинейных систем в диагонализированной канонической форме (теорема

2.3). Установлены новые достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости элементов матриц решений для класса билинейных нестационарных систем (лемма 2.1, теорема 2.3). Эти условия являются достаточными условиями BIBO-устойчивости непрерывной билинейной системы. Вышеперечисленные результаты представлены в работах [82; 86].

Предложены новые алгоритмы и методология построения спектрального итеративного решения непрерывного билинейного уравнения с помощью частотных методов, основанных на прямом преобразовании Лапласа (теорема 2.4). Получена оценка влияния спектральных разложения решений по спектру матрицы динамики линейной части, а также спектру и вычетам изображений воздействий на устойчивость и динамические характеристики билинейной системы. Получены новые достаточные условия BIBO-устойчивости билинейных систем и предложен новый метод получения установившихся значений их решений (теорема 2.5). В частном случае MIMO BTI непрерывных систем с воздействиями, изображения которых являются дробно-рациональными функциями, сходящимися на конечном интервале, получены аналитические формулы итеративного построения решений. Представленные результаты получены в работе [85].

Глава 3. Адаптивные методы и алгоритмы настройки системных регуляторов в ЭЭС

3.1 Адаптивная настройка регуляторов ЭЭС на основе метода эталонной модели

Определение 3.1. *Адаптивная настройка регулятора - это процесс, при котором параметры регулятора изменяются в зависимости от изменения параметров объекта управления или внешних возмущений.*

Проблема оценки устойчивости модели при низкочастотных межзонных колебаний и поддержки синхронной работы роторов генераторов является важной проблемой в современных ЭЭС. Неустойчивость динамической системы связана с включением в сеть возобновляемых источников энергии (ВИЭ), распространением новых энергетических технологий, ростом передаваемой мощности на большие расстояния и усложнением структуры ЭЭС в целом [53]. Растущая доля энергии, генерируемой ВИЭ, увеличивает риск возникновения резонансных низкочастотных колебаний [7; 12]. В последние годы изучается широкозонное управление демпфированием для подавления межзонных колебаний в энергосистемах. Оно включает в себя несколько практических направлений исследований, таких как проектирование общей широкозонной системы управления (WACS), анализ режимов, выбор сигналов исполнительных механизмов и обратной связи, идентификация системы и работа с временной задержкой и неопределенностью.

Одно из основных направлений связано с разработкой как автономных, так и адаптивных регуляторов WACS. Среди основных методов проектирования регуляторов на сегодняшний день мы отмечаем методы на основе остатков, методы размещения полюсов, стратегии надежного управления H_2/H_∞, линейно-квадратичного гауссовского управления (LQG) и различные схемы адаптивного управления [36; 46]. В частности, методы адаптивного управления с эталонной моделью (MRAC) направлены на обновление параметров закона управления таким образом, чтобы поведение полученной замкнутой системы стало максимально близким к поведению заданной эталонной модели. Такие методы могут быть особенно полезны для поддержания динамической и переходной устойчивости в энергосистемах [27]. В последние годы было предложено много методов MRAC для демпфирования межзонных колебаний. Среди них простые методы адаптивного управления [37], подходы, основанные на функциях Ляпунова [109], и методы дробного интегрирования [110].

В [111] предложен метод управления инерцией вращения турбин генераторов в ЭЭС для оптимизации степени затухания опасных колебаний на основе графовой модели энергосистемы, в которой модели узлов представлены классическими моделями осцилляторов. В [112] авторы используют управление затуханием низкочастотных колебаний с конечно-горизонтной оптимизацией и адаптивное управление с идентификатором на основе моделей скользящего среднего ЭЭС.

Структура селективного модального анализа (SMA), предложенная [113], позволила на основе так называемых факторов участия (PF) идентифицировать элементы структуры системы, связанные с конкретными собственными модами. Впоследствии концепция PF получила широкое распространение в энергетике и других приложениях для анализа устойчивости [114], уменьшения размерности динамических моделей [115], определения мест оптимального размещения датчиков и регуляторов [39] и решения задач кластеризации [116]. Спектральные методы анализа устойчивости, в частности селективный модальный анализ, часто применяются при проектировании и эксплуатации ЭЭС [14; 26; 117; 118]. Возможность учета нелинейных эффектов и модальных взаимодействий в рамках модального анализа развивались в основном в двух направлениях. Модельное направление связано с учетом членов высшего порядка разложения Тейлора в системном приближении и использованием нормальных форм Пуанкаре [118—120]. Другое направление предполагает оценку PF непосредственно из измерений и может быть основано, например, на расширенной динамической модовой декомпозиции [121] и модовой декомпозиции Купмана [122].

В [34] рассматривается метод MRAC, основанный на линеаризации модели уравнения качания (МУК). МУК является одной из моделей, используемых для оценки устойчивости электромеханических колебаний в энергосистемах [123]. Эта модель аппроксимирует ЭЭС при отсутствии динамики генератора высокого порядка и при постоянных нагрузках в приближении медленной динамики

[124]. Можно показать, что эта модель соответствует неоднородной модели Курамото второго порядка, что позволяет интерпретировать генераторы как систему связанных осцилляторов и использовать различные результаты по синхронизации таких осцилляторов, полученные для модели Курамото [125]. Адаптивный метод неявной эталонной модели был предложен ранее в [75] и предполагал предварительную оптимизацию параметров энергосистемы с использованием одного из методов идентификации (например, метода наименьших квадратов с забыванием). Неявная эталонная модель системы формировалась на основе подбора желаемых параметров передаточной функции, и в соответствии с этим определялись коэффициенты пропорционально-дифференциальных (ПД) регуляторов отдельных генераторов для текущей рабочей точки. Расчет параметров ПД регуляторов отдельных генераторов производился путем решения матричных алгебраических уравнений на основе алгоритмов Мура-Пенроуза. Управление коэффициентами затухания достигалось путем анализа расположения нулей и полюсов передаточной функции настроенной системы на комплексной плоскости.

Далее будут разработаны методы синтеза алгоритмов настройки системных регуляторов для электроэнергетических систем и метод и алгоритмы упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций для анализа и синтеза системных регуляторов для ЭЭС высокой размерности.

Для решения поставленной задачи в главе используются четыре приема:

1. Упрощение математической модели генераторов с учетом динамики низкочастотных электромеханических колебаний,
2. Упрощение передаточной функции системного регулятора в полосе пропускания частот электромеханических колебаний,
3. Использование в методе оптимальной настройки регуляторов принципа неявной эталонной модели и метода наименьших квадратов,
4. Включение в модель отдельного узла нелинейность осциллятора Курамото для анализа влияния этих нелинейностей.

Электромеханические колебания играют основную роль в анализе колебательной устойчивости ЭЭС по следующим причинам:

1. Эти колебания привязаны к крупным генераторам, которые генерируют большую часть кинетической энергии всех опасных НЧ колебаний,

2. Эти колебания относительно стабильны и их всегда идентифицируют в глобальных ЭЭС большой размерности [126],
3. Все исследователи выделяют диапазон 0.1 – 2 Гц как основной диапазон анализа взаимодействия мод. В этом диапазоне каждый осциллятор, соответствующий обыкновенному дифференциальному уравнению колебательной моды, представляет собой полосовой НЧ фильтр, настроенный на частоту колебательной моды. Этот фильтр подавляет составляющие колебаний, источником которых являются колебания генераторов с низкой инерцией, противоаварийная автоматика, ВИЭ, регуляторы скорости турбин [111; 127].

3.1.1 Упрощение модели системного регулятора

Передаточная функция регулятора ЭЭС равна произведению передаточной функции Д или ПД регулятора на передаточную функцию фильтра высокого порядка, которая не влияет на основной диапазон анализа взаимодействия электромеханических мод. В нашем подходе мы будем пренебрегать влиянием этого фильтра на процессы настройки. Передаточная функция ПД регулятора для достижения целей исследования принята в виде ПД регулятора с настраиваемыми коэффициентами.

Настройка системных регуляторов ЭЭС тесно связана с обеспечением устойчивости в режиме малых отклонений (small signal stability). Поэтому одновременно мы будем рассматривать три задачи:

– упрощение модели узлов и ребер графа ЭЭС,
– анализ устойчивости на основе модели графа ЭЭС,
– синтез алгоритмов настройки регуляторов.

Сама методология основана на приведении модели графа к эквивалентной структурной схеме многосвязной системы автоматического управления МСАУ, что позволяет использовать аппарат передаточных функций и известные критерии устойчивости. Задача осложняется необходимостью рассмотрения множества режимов, что требует выделения среди них наихудших (предельных по устойчивости). Это проще сделать на этапе планирования режима. Заметим, что настраивать регулятор можно и в режиме «online». Но в такой постановке мы будем предполагать, что в системе автоматической настройки присутствует идентификатор, который использует стандартные алгоритмы идентификации (например, алгоритмы метода наименьших квадратов с забыванием [112]). Эти алгоритмы позволяют достаточно точно определить параметры линеаризованной модели ЭЭС в режиме «online». Для оценивания точности аппроксимации упрощенной модели можно использовать применяемый в методе грамианов критерий квадрата H_2-нормы передаточной функции в заданном диапазоне частот [17].

Что касается второй задачи, то ее решение на каждом режиме на основе оптимизации предлагается в работах [21; 112; 128]. Для задач планирования режимов это подходит в ряде случаев, когда возможно вычисление в режиме «offline». В предлагаемом подходе делается попытка изменить парадигму оптимизации: решать задачу синтеза оптимальной неявной эталонной модели на основе ее оптимизации. Тогда задачу настройки параметров регкляторов можно решить на основе оптимальной настройки на базе принципа управления с неявной эталонной моделью, излагаемого ниже.

Рассмотрим предложенный в [129] общий подход к разбиению линейной динамической двушкальной системы на две части, соответствующих медленной и условно быстрой динамике ЭЭС. Медленная динамика соответствует той части графа ЭЭС, которая содержит узлы графа с низкочастотными осцилляторами, а быстрая динамика соответствует остальной части графа. Такое разделение системы на две подсистемы предполагает произвольное деление вектора состояний системы на два дополняющих друг друга вектора подсистем.

Рассмотрим MIMO LTI систему общего вида, разбитую произвольным образом на две подсистемы [130]:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Для решения поставленной задачи необходимо преобразовать систему (3.1) в блочно–диагональную форму. Первый шаг преобразования уравнений системы состоит в преобразовании матрицы динамики в блочно–треугольную форму:

$$\left\{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} C_s & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_f \end{bmatrix}, \end{array}\right. \tag{3.2}$$

где

$$\begin{cases} A_s = A_{11} - A_{12}L, \\ A_f = A_{22} + LA_{12}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_f = LB_1 + B_2, \\ C_s = C_1 - C_1 L. \end{cases}$$

Векторы состояний преобразованной и исходной систем на первом шаге связаны уравнением:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_f \end{bmatrix},$$

в котором матрица L является решением следующего уравнения Риккати:

$$LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L + A_{21} = 0. \tag{3.3}$$

Второй шаг преобразование уравнений системы состоит в преобразовании системы уравнений (3.2) в блочно–диагональную форму. Введем второе преобразования подобия для получения блочно–диагональной системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_f \end{bmatrix},$$

$$\left\{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_s \\ B_f \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} C_s & C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_f \end{bmatrix}, \end{array}\right. \tag{3.4}$$

где

$$\begin{cases} A_s = A_{11} - A_{12}L, \\ A_f = A_{22} + LA_{12}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_s = B_1 - MB_f, \\ C_s = C_sM + C_2. \end{cases}$$

Матрица M удовлетворяет следующему уравнению Сильвестра:

$$(A_{11} - A_{12}L)M - M(A_{22} + LA_{12}) = -A_{12}. \tag{3.5}$$

Интересующую нас «медленную» подсистему можно описать следующими уравнениями подграфа в виде:

$$\dot{x}_s = A_s x_s + B_s u, \quad y = C_s x_s. \tag{3.6}$$

Это уравнение соответствует эквивалентной линейной MIMO LTI системе меньшей размерности, но с тем же числом входов, что и исходная система. Разделим граф исходной системы на подграфы медленной и быстрой подсистем. В отличие от исходной системы все собственные числа матрицы динамики «медленной» подсистемы – это собственные числа осцилляторов, расположенных в узлах графа медленной подсистемы. Все узлы подграфа соответствуют выделенным генераторам ЭЭС, а ребра определяются матрицей проводимости линий, связывающих эти генераторы.

Следующий этап преобразования структуры подграфа состоит в преобразовании модели каждого генератора в принятую в электроэнергетике модель «swing equation» и детализацию матрицы проводимости линий.

Уравнение качания отдельного генератора с учетом связей с другими слабоустойчивыми генераторами имеет вид:

$$\ddot{\delta}_i = \omega_i - D_i\dot{\delta}_i + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} k_{ij}\left(\delta_j - \delta_i\right), \tag{3.7}$$

где k_{ij} – элемент «ij» матрицы K взаимосвязи узлов графа

$$K = \left[k_{ij}\right], \quad k_{ij} = \frac{U_iU_j\left|Y_{ij}\right|}{J_i\Omega_i} = \frac{P_{max}}{J_i\Omega_i}.$$

Выше использованы обозначения: U_i,U_j – напряжения генераторов i,j; Y_{ij} – проводимость линий, связывающих узлы i,j графа после применения к нему преобразования Крона; P_{max} – максимальная передаваемая активная мощность между узлами i,j графа; J_i – момент инерции генератора i; Ω_i – собственная частота генератора i. Наряду с уравнением (3.7) рассмотрим модель осциллятора Курамото [131; 132]:

$$\ddot{\delta}_i = \omega_i - D_i\dot{\delta}_i + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} k_{ij}\sin\left(\delta_j - \delta_i\right) \ . \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) описывает динамику «синфазной» модели Курамото. Эта модель учитывает основную нелинейность модели генератора с точки зрения колебательной устойчивости низкочастотных колебаний. При определенных начальных условиях можно получить «противофазную» модель Курамото вида:

$$\ddot{\delta}_i = \omega_i - D_i\dot{\delta}_i - \sum_{j=1, i\neq j}^{n} k_{ij}\sin\left(\delta_j - \delta_i\right) \ . \tag{3.9}$$

Для демпфирования колебаний в работе будет использован ПД регулятор, реализующий отрицательную обратную связь по углу δ_i генератора:

$$u = -k_p\delta_i - k_d\dot{\delta}_i.$$

С учетом (3.7), (3.8) запишем модели осцилляторов в виде:

$$\ddot{\delta}_i = \omega_i - D_i\dot{\delta}_i + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} k_{ij}\left(\delta_j - \delta_i\right) - k_p\delta_i - k_d\dot{\delta}_i, \tag{3.10}$$

$$\ddot{\delta}_i = \omega_i - D_i\dot{\delta}_i + \sum_{j=1, i\neq j}^{n} k_{ij}\sin\left(\delta_j - \delta_i\right) - k_p\delta_i - k_d\dot{\delta}_i \ . \tag{3.11}$$

Следующий этап состоит в приведении схемы подграфа к схеме многосвязной системы автоматического управления. Предполагая начальные условия нулевыми, выполним преобразование Лапласа для всех узлов модели графа энергетической системы. При этом схема любого канала приводится к стандартной схеме системы автоматического управления с единичной обратной связью, в которой в прямой цепи схемы стоит единица, а в цепи обратной связи сумма обратных связей собственного и всех обратных связей через оставшиеся узлы графа с общей передаточной функцией $W_{\Sigma}^{\nu}(s)$, которая зависит от номера собственного канала «ν» (рис. 3.1).

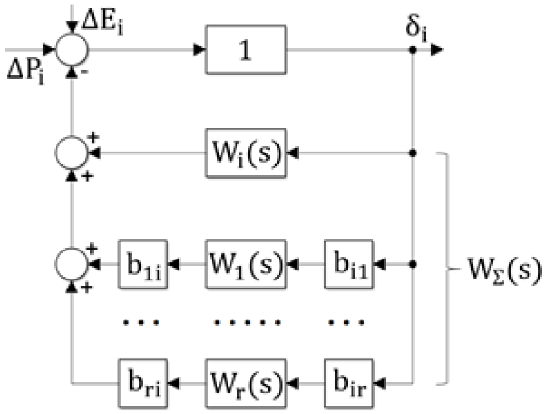

Рисунок 3.1 — Эквивалентная структурная схема графа энергосистемы для узла «i» с учетом связей с другими узлами энергосистемы

Отсюда следует формула:

$$W_{\Sigma}^{(\nu)}(s) = W^{(\nu)}(s) - \sum_{\mu=1,\mu\neq\nu}^{k} b_{\mu\nu} b_{\nu\mu} W^{(\mu)}(s). \qquad (3.12)$$

Этот прием дает возможность применить для каждого канала критерий Найквиста устойчивости линейных систем. Модель графа ЭЭС в виде многосвязной системы автоматического управления может быть описана моделью в пространстве состояний с постоянными матрицами A_{cm},C_{cm}, аппроксимирующую модель стандартного регулятора в полосе частот 0.1Гц – 1Гц. Виртуальная эталонная модель для реальной модели графа тождественно совпадает с ней при подстановке в ее уравнения значений параметров базового режима. Виртуальная модель задает цель настройки параметров системных регуляторов в подпространстве параметров реальной системы. Если цель настройки состоит только в коррекции коэффициентов относительного демпфирования колебательных мод осцилляторов, то ей соответствует размещение желаемых полюсов осцилляторов на линиях параллельных вещественной оси комплексной плоскости. Введем матричные передаточные функции регулятора и объекта:

$$u(s) = W_c(s)\varepsilon(s),\; y(s) = W_p(s)\varepsilon(s).$$

Тогда цель настройки параметров системных регуляторов можно определить двояким образом. Задача настройки первого типа требует выполнение равенства неявных эталонных моделей:

$$W_c(s)W_p(s) = W_m. \tag{3.13}$$

Задача настройки второго типа (модальное управление) требует выполнение равенства характеристического полинома замкнутой системы графа $N(s)$ и характеристического полинома его неявной эталонной модели $N^m(s)$:

$$N(s) = N^m(s). \tag{3.14}$$

Равенство (3.8) эквивалентно желаемому распределению полюсов передаточной функции эквивалентной многосвязной системы подграфа, что соответствует назначению желаемой степени демпфирования колебаний каждого осциллятора подграфа.

$$W_\Sigma^{(\nu)}(s) = W^{(\nu)}(s) - \sum_{\mu=1,\mu\neq\nu}^{k} b_{\mu\nu} b_{\nu\mu} W^{(\mu)}(s),$$

$$u(s) = W_c(s)\varepsilon(s),\ y(s) = W_o(s)\varepsilon(s).$$

Тогда цель настройки параметров регуляторов можно определить в виде:

$$W_c(s)W_o(s) = W_m. \tag{3.15}$$

Без ограничения общности передаточные функции генераторов и системных регуляторов для узла графа с номером «ν» имеют вид:

$$W_{p\nu}(s) = \frac{\sum_{j=0}^{n_{\nu j}} g_{p\nu j} s^j}{\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{p\nu i} s^i},\ \ W_{c\nu}(s) = \frac{\sum_{q=0}^{n_{\nu q}} f_{c\nu q} s^q}{\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{cm\nu i} s^i},$$

$$W_\nu(s) = \frac{(\sum_{j=0}^{n_{\nu j}} g_{p_\nu j} s^j)(\sum_{q=0}^{n_{\nu q}} f_{c\nu q} s^q)}{(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{p\nu i} s^i)(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{cm\nu i} s^i)}.$$

Целевое условие адаптивной настройки первого типа для узла «ν» с учетом связей с соседними узлами имеет вид:

$$W_\nu(\mathrm{s}) + \sum_{\lambda=1,\lambda\neq\nu}^{r} W_\lambda(\mathrm{s}) = W_\nu^m(\mathrm{s}) + \sum_{\lambda=1,\lambda\neq\nu}^{r} W_\lambda^m(\mathrm{s}), \tag{3.16}$$

где r – число соседних узлов.

В дальнейшем все величины, относящиеся к неявной эталонной модели, будем отмечать верхним индексом «m». Все параметры числителей и знаменателей этих передаточных функций являются постоянными вещественными числами.

Если умножить обе части уравнения (3.16) на произведение характеристических полиномов $\prod_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{p\nu i} s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{cm\nu i} s^i\right)$, то получим полиномиальное уравнение настройки первого типа:

$$\sum_{\mu=0}^{n_\mu}\left[L_\mu\left(s, f_{q1}, \ldots, f_{nr}\right) - Q_\mu\left(s, f_{q1}^m, \ldots, f_{nr}^m\right) s^\mu\right] = 0. \qquad (3.17)$$

Введем функционал настройки первого типа в виде:

$$J_1 = \sum_{\mu=0}^{n_\mu}\left[L_\mu\left(s, f_{q1}, \ldots, f_{nr}\right) - Q_\mu\left(s, f_{q1}^m, \ldots, f_{nr}^m\right)\right]^2.$$

Целевое условие можно записать в виде:

$$J_1 \to \underbrace{min}_{f_{q1}, \cdots f_{nr}} J_1, \qquad (3.18)$$

$$0 \le f_{q1} \le f_{q1}^{max},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 \le f_{nr} \le f_{nr}^{max}.$$

Целевое условие адаптивной настройки второго типа для узла «ν» с учетом связей с соседними узлами формируется через целевые условия для коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы графа $N(s)$ с помощью уравнений:

$$1 + W_\Sigma(s) = N(s) M(s)^{-1},$$

$$N(s) = \prod_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{p\nu i} s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{cm\nu i} s^i\right) +$$

$$+ \prod_{\nu=1, \nu\neq 2}^{r}\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{p\nu i} s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{cm\nu i} s^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n_{2j}} g_{p\nu j} s^j\right)\left(\sum_{q=0}^{n_{2q}} f_{c\nu q} s^q\right) +$$

. . . .

$$+\prod_{\nu=1,\nu\neq r}^{r}\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{p\nu i}s^{i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}} a_{cm\nu i}s^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n_{rj}} g_{prj}s^{j}\right)\left(\sum_{q=0}^{n_{rq}} f_{crq}s^{q}\right).$$

Характеристический полином неявной эталонной модели графа энергосистемы с учетом замыкания связей через все узлы $N^m(s)$ равен значению $N(s)$ при подстановке в него значений параметров неявных эталонных моделей всех передаточных функций $W_\nu(s)$ с учетом коэффициентов взаимосвязей узлов подграфа. Отсюда следует полиномиальное уравнение настройки второго типа, совпадающее с (3.17). Введем функционал настройки второго типа в виде:

$$J_2=\sum_{\mu=0}^{n_\mu} w(s^\mu)\left[L_\mu\left(s,f_{q1},\ldots,f_{nr1}\right)-Q_\mu\left(s,f_{q1}^m,\ldots,f_{nr}^m\right)\right]^2.$$

Целевое условие имеет вид аналогичный (3.18) с заменой функционала J_1 на J_2. Таким образом и для второго типа настройки ставится задача квадратичного программирования с ограничениями в виде неравенств на значения настраиваемых коэффициентов.

Теорема 3.1. *[133; 134] Пусть объект управления* (3.6) *полностью управляем и наблюдаем, передаточные функции объекта и регулятора, эталонных моделей объекта и регулятора, соответствующих минимальным реализациям – строго правильные дробно–рациональные функции, которые не имеют кратных полюсов и полюсов в правой полуплоскости. Тогда справедливы следующие утверждения:*

– *Необходимые условия минимума функционала J_1 имеют вид*
  1. $LG-Q=0,$
  2. $LG-Q\neq 0,$ *но* $L^{\mathrm{T}}\left(LG-Q\right)=0.$
– *Если решение первого уравнения существует и единственно, то необходимое условие минимума является и достаточным.*
– *Оптимальный алгоритм настройки регулятора для функционала J_1 имеет вид:*

$$G_{opt}=L^{+}Q, \tag{3.19}$$

где знак «+» означает операцию псевдоинверсии по Муру–Пенроузу.

Мы синтезировали два вида оптимальных алгоритмов настройки регуляторов осцилляторов. Первый тип сложнее второго, однако он оптимальным образом приближает динамику многосвязного контура регулирования к динамике неявной эталонной модели контура. Второй тип оптимальным образом приближает только собственные числа контура к собственным числам его неявной эталонной модели. Заметим, что важно обеспечить точность аппроксимации полиномов настройки в области низкочастотных электромеханических колебаний. Недостатками метода является то, что он может приводить к нереализуемым на практике значениям настраиваемых коэффициентов регуляторов и не учитывает предельные по устойчивости их значения. Последний недостаток можно устранить, если одновременно с расчетом оптимальных настроек регулятора контролировать квадрат нормы энергетического функционала настраиваемого контура. Другой вариант контроля степени устойчивости контура заключается в расчете собственных чисел характеристического уравнения контура.

Для того, чтобы выполнить анализ устойчивости многомашинной ЭЭС необходимо представить ее в виде графа и выполнить расчеты оптимальных настроек регуляторов для всевозможных сочетаний узлов расчетной схемы по два, по три, по четыре и так далее. На практике в большинстве случаев достаточно ограничиться учетом только опасных электромеханических колебаний, число которых не велико. Более серьезную проблему составляет многорежимность модели осциллятора Курамото, которая обусловлена вариативностью значений текущей фазы функций синуса и косинуса главной нелинейности этой модели. Рассмотрение «наихудших» случаев этой модели является отправной точкой анализа многорежимной устойчивости. Переход от «наихудшего» к «наилучшему» случаю соответствует изменению знака обратной связи в контуре дополнительной обратной связи на схеме (см. рис. 3.1).

Цель настройки регулятора состоит в перемещении полюсов передаточных функций отдельных каналов в желаемые положения на комплексной плоскости. С точки зрения теории управления это задача модального управления. В частном случае это задача увеличения степени демпфирования электромеханических колебаний генераторов путем смещения полюсов передаточных функций параллельно действительной оси в отрицательном направлении.

3.1.2 Задача настройки с неявной эталонной моделью

В схеме $IEEE39$ 10 каналов. Однако из–за разреженности матрицы взаимных проводимостей для каждого канала будет разное число каналов взаимосвязи (от 1 до 9). Кроме того, в коэффициентах b_{ij} появится динамика, учитывающая проводимости линий, соединяющих узлы «i» и «j». Характеристические полиномы замкнутой системы и ее неявной эталонной модели N_c, N_{cm} играют важную роль:

$$N(s)=\prod_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}}a_{p\nu i}s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}}a_{cm\nu i}s^i\right)+$$

$$+\prod_{\nu=1,\nu\neq 2}^{r}\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}}a_{p\nu i}s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}}a_{cm\nu i}s^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n_{2j}}g_{p\nu j}s^j\right)\left(\sum_{q=0}^{n_{2q}}f_{c\nu q}s^q\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\prod_{\nu=1,,\nu\neq r}^{r}\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}}a_{p\nu i}s^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n_{\nu i}}a_{cm\nu i}s^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n_{rj}}g_{prj}s^j\right)\left(\sum_{q=0}^{n_{rq}}f_{crq}s^q\right).$$

Представим их в виде:

$$N_c(s)=\sum_{i=1}^{n_z}n_{ci}s^i,$$

$$N_{cm}(s)=\sum_{i=1}^{n_z}n_{cmi}s^i.$$

Определим целевой функционал настройки в виде квадратичного критерия:

$$J=\sum_{i=1}^{n_z}(n_{ci}-n_{cm})^2, \tag{3.20}$$

или взвешенного критерия:

$$J=\sum_{i=1}^{n_z}w(i)(n_{ci}-n_{cm})^2,$$

Цель настройки

$$J \to \underbrace{min}_{k_{di},k_{pi}} J. \tag{3.21}$$

Это задача квадратичного программирования без ограничений.
Ее решением являются псевдорешения для матриц адаптируемости [33]. У этих решений два недостатка:

1. Они не учитывают ограничения по предельной пропускной способности линий, основанных на риске потери устойчивости.
2. Оптимальные настройки могут оказаться слишком большими и их будет невозможно реализовать на практике.

Предлагается решить эту проблему путем введения соответствующих ограничений.
Самый простой способ ввести ограничения на настраиваемые коэффициенты ПД регуляторов всех каналов.
Другой способ ввести ограничения на риск потери устойчивости путем расчета текущего значения квадрата H_2-нормы передаточной функции каждого канала, рассчитываемый с помощью грамианов управляемости.

3.1.3 Разработка метода условной оптимизации для задачи настройки системных регуляторов

Рассматривается задача условной оптимизации для настройки параметров системных регуляторов на графе ЭЭС. В качестве упрощенной модели генераторов принята модель SEM (swing equation model) в виде колебательного звена с комплексно–сопряженными полюсами:

$$W_{PSSi} = \frac{1}{s^2 + 2\xi_i \Omega_i s + \Omega_i^2}. \tag{3.22}$$

Мы предполагаем, что в каждом генераторе имеется ПД регулятор, который выполняет две функции: стабилизации частоты вращения турбины и регулирования демпфирования низкочастотных электромеханических колебаний. Более

того, в рамках предлагаемого подхода мы будем игнорировать первую функцию и сосредоточимся на решении второй задачи.
Передаточная функция замкнутого контура управления «i»–го генератора имеет вид:

$$\Phi_{PSSi} = \frac{k_{di}s + k_{pi}}{s^2 + (2\xi_i\Omega_i + k_{di})\, s + (\Omega_i^2 + k_{pi})}.$$

Введем обозначения:

$$(2\xi_i\Omega_i + k_{di}) = 2\widetilde{\xi}_i\widetilde{\Omega}_i, \quad \left(\Omega_i^2 + k_{pi}\right) = \ 2\widetilde{\xi}_i\widetilde{\Omega}_i,$$

$$s^2 + (2\xi_i\Omega_i + k_{di})\, s + \left(\Omega_i^2 + k_{pi}\right) = s^2 + 2\widetilde{\xi}_i\widetilde{\Omega}_i s + \widetilde{\Omega}_i^2 = (s - \tilde{s}_1)\,(s - \tilde{s}_2)\,.$$

Для замкнутого контура управления «i»-го генератора, заданного передаточной функцией в частотной области, запишем эквивалентное уравнение состояния в канонической форме наблюдаемости, предполагая, что система полностью наблюдаема:

$$\dot{x}_{oi}\,(t) = A_{oi}^F x_{oi}\,(t) + b_{oi}^F u\,(t)\,, \quad x_o\,(0) = 0,$$

$$y_{oi}^F\,(t) = c_{oi}^F x_{oi}\,(t)\,,$$

$$A_{oi}^F = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_i^2 \\ 1 & 2\widetilde{\xi}_i\widetilde{\Omega}_i \end{bmatrix},\ b_{oi}^F = \begin{bmatrix} k_{di} & k_{pi} \end{bmatrix}^T,\ c_{oi}^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для системы (3.3) запишем уравнение Ляпунова:

$$\left(A_{oi}^F\right)^T P_{oi}^F + P_{oi}^F A_{oi}^F = \left(c_{oi}^F\right)^T c_{oi}^F. \tag{3.23}$$

Решение уравнения (3.4) является грамианом наблюдаемости замкнутого контура управления «i»-го генератора. Введем функционал ограничения в задаче условной оптимизации коэффициентов настройки контура в виде

$$J_i = \|\Phi_{PSSi}\|_2^2 = \int_0^\infty \|y(t)\|_2^2 dt = \left(c_{oi}^F\right)^T P_{oi}^F c_{oi}^F. \tag{3.24}$$

Функционал ограничения является энергетической метрикой, физический смысл которой состоит в том, что он выражает энергию по выходу контура управления, то есть энергию электромеханических колебаний на выходе, когда ко входу контура приложена δ-функция. При этом следует ограничить эту энергию, потребовав, чтобы декремент затухания колебаний был не ниже 0,1.

Энергетическая метрика J_i: чем выше значение J_i, тем ближе контур управления к границе устойчивости.

В [75] доказано, что если все контуры управления устойчивы, а среди полюсов передаточной функции $\Phi_{PSSi}(s)$ нет кратных, то грамиан наблюдаемости является матрицей Сяо и может быть вычислен по формуле

$$P_{oi}^F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j \left(-s_k\right)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1},$$

где $\dot{N}\left(s_k\right) = 2s_k + 2\widetilde{\xi}_i \widetilde{\Omega}_i$, $N\left(-s_k\right) = \left(-s_k\right)^2 + 2\widetilde{\xi}_i \widetilde{\Omega}_i s_k + \widetilde{\Omega}_i^2$.

При этом матрица P_{oi}^F является инвариантом при преобразовании подобия исходной системы в каноническую форму наблюдаемости. Подставив (3.7) в (3.5), получим:

$$J_i = (k_{di}^2 + k_{pi}^2) \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j \left(-s_k\right)^\eta}{\dot{N}\left(s_k.k_{di},k_{pi}\right) N\left(-s_k,k_{di},k_{pi}\right)}, i = 1,\ldots,n; \qquad (3.25)$$

Прежде всего отметим, что все величины в правой части формулы либо вычисляются при любой реализации метода условной оптимизации, либо являются известными функциями спектра контура управления, который также вычисляется, поскольку с его помощью оценивается качество выполненной настройки системных регуляторов. Формула справедлива для оценивания качества настройки текущих режимов ЭЭС, а также ее режима, соответствующего назначаемой неявной эталонной модели $J_{irefmod}$. Все ограничения имеют вид:

$$J_1(s_k,\tilde{k}_{d1},\tilde{k}_{p1}) \leq \ J_{1refmod}, \qquad (3.26)$$

$$J_2(s_k,\tilde{k}_{d2},\tilde{k}_{p2}) \leq \ J_{2refmod},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_n(s_k,\tilde{k}_{dn},\tilde{k}_{pn}) \leq \ J_{nrefmod}. \qquad (3.27)$$

Поскольку грамиан наблюдаемости является матрицей Сяо, то для систем второго порядка он одновременно является диагональной матрицей. Вычислив матрицу наблюдаемости, можно убедится, что она имеет полный ранг. Отсюда следует, что грамиан P_{oi}^{F} положительно определен, следовательно все энергетические метрики J_1 , . . . , J_n положительны.

Описанный выше метод предполагает наличие слабых связей b_{ij} между всеми генераторами:

$$|b_{ij}| << 1. \tag{3.28}$$

Поэтому прежде всего следует проверить выполнение этого условия на основе анализа матрицы проводимости. Однако если оно выполняется, то можно изменить целевой функционал на задачу условной минимизации выходной энергии всех генераторов

$$J_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \left(J_i - J_{nrefmod}\right)^2, \tag{3.29}$$

$$\tilde{k}_{d1}, \tilde{k}_{p1}, \ldots, \tilde{k}_{dn}, \tilde{k}_{pn} = \underset{\tilde{k}_{d1}, \tilde{k}_{p1}, \ldots, \tilde{k}_{dn}, \tilde{k}_{pn}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} (J_i - J_{irefmod})^2, \tag{3.30}$$

Предлагаемый алгоритм вычисления ограничений (3.26)–(3.27):

1. Сформировать неявные эталонные модели всех генераторов;
2. Определить набор тестовых режимов;
3. Вычислить для каждого генератора оптимальные значения настраиваемых коэффициентов. Использовать алгоритмы настройки доклада [33];
4. Найти полюса s_k передаточных функций контуров управления отдельных генераторов;
5. Вычислить все $J_{irefmod}$;
6. Вычислить функционалы ограничений и соответствующие запасы устойчивости контуров управления для всех генераторов, используя формулу (3.8);
7. Реализовать предложенный метод для компьютерного моделирования тестовой модели IEEE 39.

Переформулируем целевой функционал (3.29) в терминах энергетических метрик, основанных на грамианах. Рассмотрим SEM генератора «i» вида:

$$m_i\ddot{\theta}_i + d_i\dot{\theta}_i = P_i - \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\sin(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}), \quad k_{ij} = \frac{E_i E_j \left|Y_{ij}\right|}{J\Omega}, \tag{3.31}$$

где J – момент инерции генератора «i», Ω – собственная частота генератора «i», J, E_i – внутреннее напряжение генератора «i», Y_{ij} – электрическая проводимость между генераторами «i» и «j».

С учетом введения обратных связей по углу и его производной упрощенное уравнение SEM генератора «i» можно записать в виде:

$$\ddot{\theta}_i + 2\xi_i\Omega_i\dot{\theta}_i + (\Omega_i)^2 = P_i - k_{di}\dot{\theta}_i - k_{pi}\theta_i - \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\sin(\theta_i - \theta_j - \varphi_{ij}). \tag{3.32}$$

Рассмотрим упрощенные уравнения динамики для кластера ЭЭС, состоящего из двух произвольных генераторов, оснащенных ПД регуляторами:

$$\ddot{\theta}_1 + 2\xi_1\Omega_1\dot{\theta}_1 + (\Omega_1)^2 = P_1 - k_{d1}\dot{\theta}_1 - k_{p1}\theta_1 - b_{12}\theta_2, \tag{3.33}$$

$$\ddot{\theta}_2 + 2\xi_2\Omega_2\dot{\theta}_2 + (\Omega_2)^2 = P_2 - k_{d2}\dot{\theta}_2 - k_{p2}\theta_2 - b_{21}\theta_1. \tag{3.34}$$

Эту систему уравнений можно переписать в виде стандартной системы линейных дифференциальных уравнений в канонической форме наблюдаемости:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad u = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

$$x = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \theta_1 & \dot{\theta}_2 & \theta_2 \end{bmatrix}^T, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{k}_{p1} & 0 & 0 \\ 1 & -\tilde{k}_{d1} & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{k}_{p2} \\ 0 & b_{12} & 1 & -\tilde{k}_{d2} \end{bmatrix}, \; \tilde{k}_{d1} = 2\xi_1\Omega_1 + k_{d1}, \tilde{k}_{p1} = \Omega_1^2 + k_{p1},$$

$$\tilde{k}_{d2} = 2\xi_2\Omega_2 + k_{d2}, \tilde{k}_{p2} = \Omega_2^2 + k_{p2}. \tag{3.36}$$

Рассуждая аналогично, получим упрощенные уравнения динамики для кластера ЭЭС, состоящего из трех произвольных генераторов, обозначаемых индексами 1,2,3.

$$x = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \theta_1 & \dot{\theta}_2 & \theta_2 & \dot{\theta}_3 & \theta_3 \end{bmatrix}^T, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{k}_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\tilde{k}_{d1} & 0 & 0 & 0 & b_{31} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{k}_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{12} & 1 & -\tilde{k}_{d2} & 0 & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{k}_{p3} \\ 0 & b_{13} & 0 & b_{23} & 1 & -\tilde{k}_{d3} \end{bmatrix}. \qquad (3.37)$$

Продолжая этот процесс по индукции, получим упрощенные уравнения динамики для ЭЭС, состоящей из N произвольных управляемых генераторов:

$$x = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \theta_1 & \dots & \dots & \dot{\theta}_N & \theta_N \end{bmatrix}^T, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (3.38)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{k}_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\tilde{k}_{d1} & 0 & 0 & 0 & b_{31} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{k}_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{12} & 1 & -\tilde{k}_{d2} & 0 & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{k}_{p3} \\ 0 & b_{13} & 0 & b_{23} & 1 & -\tilde{k}_{d3} \end{bmatrix},$$

$$A = A_d + A_{row} + A_{col},$$

$$A_d = diag\left\{ A_1 \quad A_2 \ \ A_3 \ \ \dots \quad A_N \right\}_{N\times N}, \ A_i = \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{k}_{pi} \\ 1 & -\tilde{k}_{di} \end{bmatrix}, i = 1,\dots,N,$$

$$A_{row,i} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} = 0 & \dots & b_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{N\times N},$$

$$A_{col,i} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{ii} = 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{Ni} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{N\times N}. \qquad (3.39)$$

Полученное представление управляемых кластеров из нескольких осцилляторов в виде эквивалентной линейной MIMO LTI системы, является представлением в [33], но во временной области. Однако идея неявной эталонной модели остается в силе и ее модель будет иметь структуру и вид (3.35) – (3.36) с измененными значениями параметров $2\xi_{1ref}\Omega_{1ref}$, Ω^2_{1ref},k_{d1ref}, k_{d1ref}, k_{p1ref} (они должны гарантировать демпфирование колебаний не хуже 10%).

Общая постановка задачи оптимизации имеет вид условий вида (3.26) – (3.27):

$$A^T P_o + P_o A = -c^T c, \quad J_\Sigma = trb_o^T P_o b_o,$$

$$\tilde{k}_{d1},\tilde{k}_{p1},\ldots,\tilde{k}_{dn},\tilde{k}_{pn} = \underset{\tilde{k}_{d1},\tilde{k}_{p1},\ldots,\tilde{k}_{dn},\tilde{k}_{pn}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n}(J_i - J_{irefmod})^2,$$

$$J_1(s_k,\tilde{k}_{d1},\tilde{k}_{p1}) \leq J_{1refmod},$$

$$J_2(s_k,\tilde{k}_{d2},\tilde{k}_{p2}) \leq J_{2refmod},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_n(s_k,\tilde{k}_{dn},\tilde{k}_{pn}) \leq J_{nrefmod}.$$

3.1.4 Моделирование трехгенераторного кластера

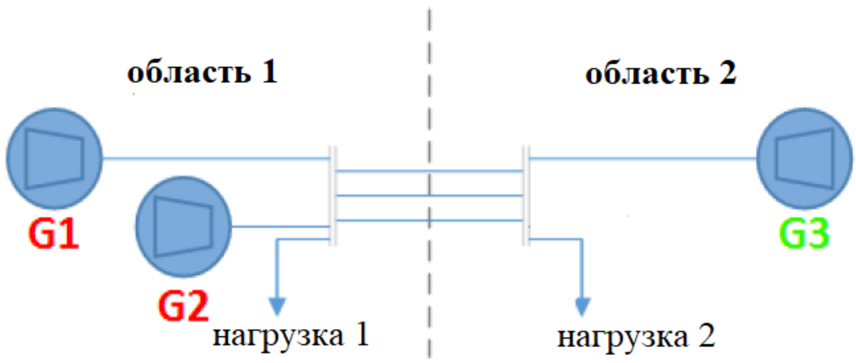

Рисунок 3.2 — Однолинейная схема двухзонной трехмашинной энергосистемы.

Рассматривается двухзонная схема Кундура, где в первом районе выбраны генераторы G1 и G2, а во втором районе — генератор G3. Без ограничения общности будем считать, что регуляторы всех генераторов настраиваемые. Моделирование модифицированной двухзонной тестовой системы Кундура с тремя генераторами было выполнено в Simulink/Matlab.

Основная идея этого заключается в том, чтобы привести реальные части всей электромеханической моды в левую сторону S-плоскости, а также максимизировать коэффициент затухания. Поэтому параметры регуляторов могут быть выбраны таким образом, чтобы минимизировать критерий ИВКО (интеграл времени, умноженный на квадрат ошибки), который отражает стандартное отклонение частоты $\Delta\omega$:

$$F = \int_0^\infty t|\Delta\omega|^2 dt. \tag{3.40}$$

Уравнение (3.40) представляет собой функцию пригодности для алгоритма оптимизации, т.е. целевую функцию, которую минимизируют агенты алгоритма для получения оптимальных настроек для ПД регулятора. При этом были заданы ограничения на поиск: $0 < k_{pi},\ k_{di} < 15$, $i = 1, \ldots, n$, где n - количество генераторов с регуляторами.

Рассматривается 5 сценариев настройки:

1. Сценарий отсутствия передачи электроэнергии между двумя областями системы.
2. Сценарий передачи электроэнергии (400 МВт) между областями системы.
3. Сценарий отказа 2-го генератора.
4. Сценарий отказа канала связи.
5. Настройка регуляторов с помощью неявной эталонной модели.

Для всех сценариев предполагалось, что коэффициент затухания межзональных колебаний $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.139$ и собственные частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 =$ 1 рад/сек. Коэффициенты матрицы связи для Сценария 1: $b_{12} = b_{21} = 1.96$, $b_{13} = b_{31} = 0.1766$; для Сценария 2 и Сценария 3 – $b_{12} = b_{21} = 2.59$, $b_{13} = b_{31} = 0.2130$ по аналогии с [135].

В результате с помощью алгоритма оптимизации были найдены оптимальные настройки для базовых Сценариев 1 и 2. Для аварийных сценариев использовались настройки ПД регуляторов для Сценария 2. При этом в сценарии некорректной настройки регулятора на G_3 его коэффициенты k_{p3} и k_{d3} были намеренно изменены. Для Сценария 5 оптимальные настройки регулятора были рассчитаны методом неявной модели с учетом данных Сценария 1. В результате для этого сценария получен следующий явный вид характеристического уравнения $Q(s) = s^6 + 8.5656s^5 + 21.34s^4 + 26.51s^3 + 40.5454s^2 + 20.0726s + 15.8079$. Оптимальные коэффициенты настройки для 1 Сценария $k_{p1} = 15, k_{d1} = 15, k_{p2} = 0.01, k_{d2} = 0.01, k_{p3} = 15, k_{d3} = 15$ и для 2 Сценария $k_{p1} = 15, k_{d1} = 15, k_{p2} = 0.01, k_{d2} = 0.48, k_{p3} = 2.42, k_{d3} = 4.73$.

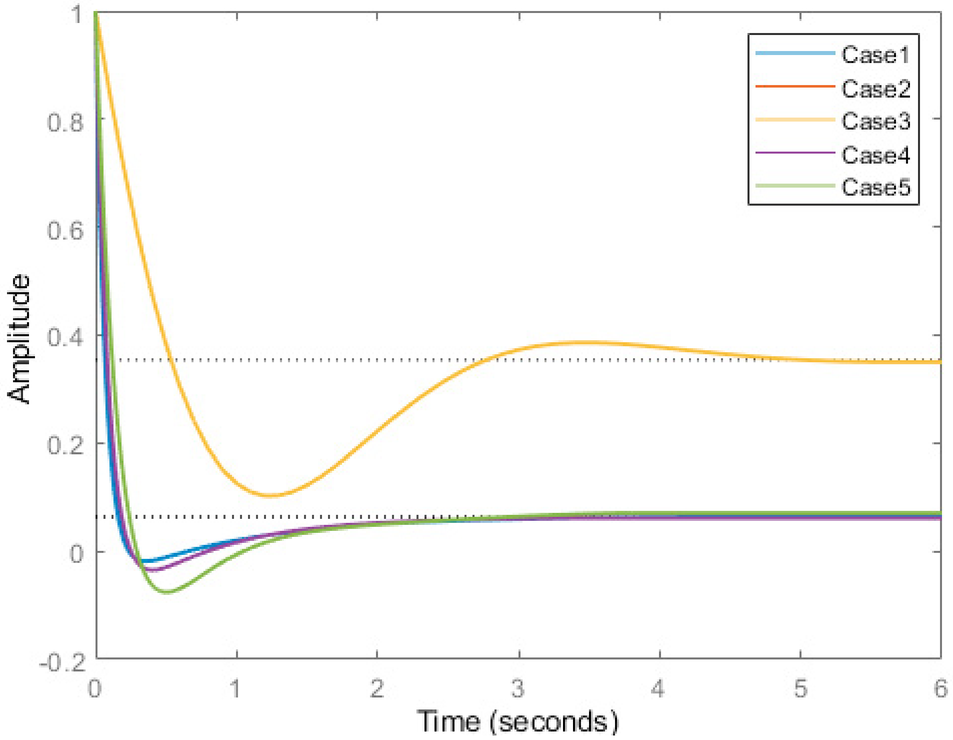

Рисунок 3.3 — Динамическая реакция системы для нескольких сценариев настройки регуляторов ЭЭС.

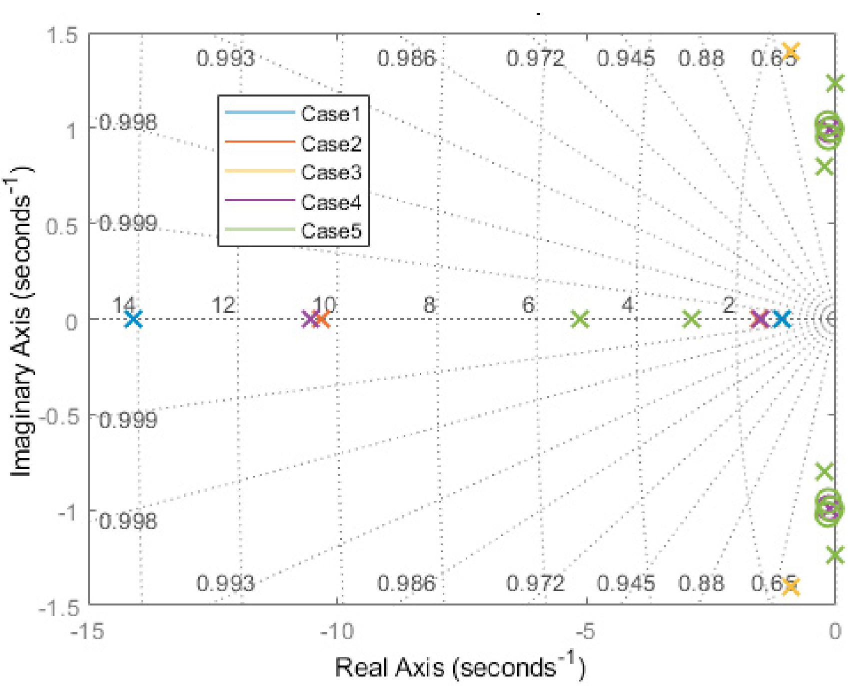

Рисунок 3.4 — Распределение нулей и полюсов на комплексной плоскости для рассмотренных сценариев настройки ПД регулятора.

Предложенная модель на Рис. 3.2 была решена с использованием MATLAB, и были сделаны следующие наблюдения. На Рис. 3.3 показан динамический отклик модифицированной двухзонной тестовой энергосистемы Кундура для рассматриваемых сценариев. На Рис. 3.4 и 3.5 полюса/нули и корни полученных характеристических уравнений визуализированы на комплексных плоскостях соответственно.

Из представленных графиков видно, что во всех сценариях мы имеем устойчивую систему с хорошо затухающим колебательным процессом. При этом наиболее критическим, как и ожидалось, является аварийный Сценарий 3, связанный с отказом генератора G_3.

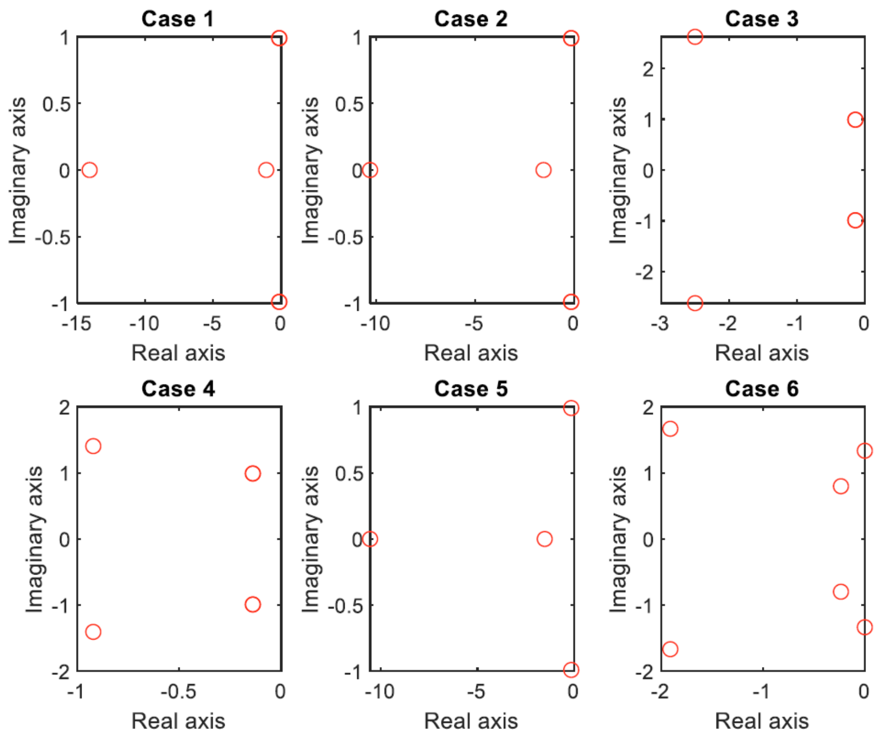

Рисунок 3.5 — Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости для рассматриваемых сценариев настройки ПД регулятора.

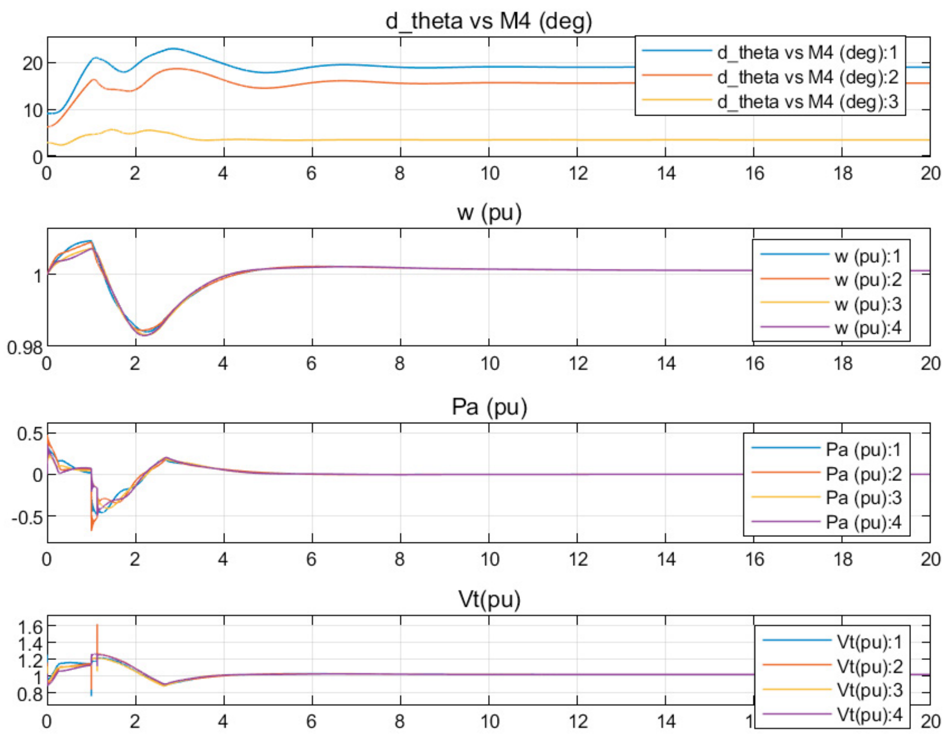

Рисунок 3.6 — Динамические системный отклик двухзонной испытательной системы из четырех машин при оптимальных настройках регуляторов ЭЭС.

Для демонстрации эффективности предлагаемого подхода воспользуемся полученными оптимальными настройками регуляторов для Сценария 5 для классической двухзонной четырехмашинной энергосистемы Кундура, где только три генератора (G_1, G_2, G_3) имеют регуляторы. Моделируется короткое замыкание трехфазной линии для этой тестовой системы. Динамический отклик показан на Рис. 3.6. Видно, что настройка регуляторов также достаточно эффективна для случая с четырьмя генераторами.

3.2 Выводы по 3 главе

В главе 3, посвященной развитию адаптивных методов и алгоритмов настройки системных регуляторов в ЭЭС, предложен метод синтеза алгоритмов настройки системных регуляторов для электроэнергетических систем высокой размерности, в котором используются полученные в работе разложения. Разработан метод и алгоритмы упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций для анализа и синтеза системных регуляторов для ЭЭС высокой размерности. Результаты главы опубликованы в статьях [33; 34; 87].

Заключение

Развиты структурные методы решения матричных уравнений Ляпунова и получены спектральные и сингулярные разложения грамианов управляемости и наблюдаемости линейной стационарной системы, а именно:

– Разработан метод аналитического решения уравнения Ляпунова в виде произведения Адамара для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами. Структура матрицы такого решения определяется в виде матрицы Сяо. При использовании канонических форм управляемости или наблюдаемости разложение Адамара соответствующего грамиана сводится к матрице мультипликатора, след которого равен энергетическому функционалу SISO LTI системы.
– Получены новые спектральные и сингулярные разложения грамианов управляемости и наблюдаемости. С их помощью получены инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулированы новые условия устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.
– Разработан метод получения сепарабельных спектральных разложений матриц для неустойчивых непрерывных систем. Для неустойчивых непрерывных линейных систем получены спектральные разложения грамианов управляемости и обратных грамианов, позволяющие вычислять составляющие энергии, соответствующие характерным собственным числам матриц грамианов, определяющих основной вклад в величину энергетических функционалов достижимости и устойчивости.

Развиты спектральные методы решения обобщенных уравнений Ляпунова и получены достаточные условия BIBO-устойчивости непрерывных билинейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения, а именно:

– Получено спектральное разложение грамианов управляемости и наблюдаемости нестационарной билинейной системы в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части.

– Разработан новый метод и алгоритм поэлементного вычисления матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова для билинейных систем в диагональной канонической форме.
– Установлены новые достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости элементов матриц решений для класса билинейных нестационарных систем. Эти условия являются достаточными условиями BIBO-устойчивости непрерывной билинейной системы.
– Предложен новый алгоритм построения спектрального итеративного решения непрерывного билинейного уравнения с помощью частотных методов, основанных на прямом преобразовании Лапласа. Получена оценка влияния спектральных разложения решений по спектру матрицы динамики линейной части, а также спектру и вычетам изображений воздействий на устойчивость и динамические характеристики билинейной системы.

Разработанные методы применены на модели узлов графа ЭЭС для анализа и синтеза системных регуляторов, а именно:

– Применен адаптивный метод настройки системных регуляторов в ЭЭС, предложен метод синтеза алгоритмов настройки системных стабилизаторов для электроэнергетических систем высокой размерности, в котором используются полученные в работе разложения.
– Разработан метод и алгоритм упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций для анализа и синтеза системных регуляторов для ЭЭС.

Список литературы

1. Проблемы развития цифровой энергетики в России / Н. И. Воропай [и др.] // Проблемы управления. — 2019. — № 1. — с. 2—14. — DOI: 10.25728/pu.2019.1.1.
2. *Hadjipaschalis I.*, *Poullikkas A.*, *Efthymiou V.* Overview of current and future energy storage technologies for electric power applications // Renewable and Sustainable Energy Reviews. — 2009. — Vol. 13, no. 6. — P. 1513–1522. — DOI: 10.1016/j.rser.2008.09.028.
3. *Bevrani H.*, *Ghosh A.*, *Ledwich G.* Renewable energy sources and frequency regulation: survey and new perspectives // IET Renewable Power Generation. — 2010. — Vol. 4, no. 5. — P. 438–457. — DOI: 10.1049/iet-rpg.2009.0049.
4. Power systems with high renewable energy sources: a review of inertia and frequency control strategies over time / A. Fernandez-Guillamon [et al.] // Renewable and Sustainable Energy Reviews. — 2019. — Vol. 115. — P. 109369. — DOI: 10.1016/j.rser.2019.109369.
5. Survey of reliability challenges and assessment in power grids with high penetration of inverter-based resources / R. Haghighi [et al.] // Energies. — 2024. — Vol. 17, no. 21. — P. 5352. — DOI: 10.3390/en17215352.
6. *Abdulabbas A.*, *Alawan M.*, *Shary D.* Limits of reactive power compensation of a doubly fed induction generator based wind turbine system // Bulletin of Electrical Engineering and Informatics. — 2023. — Vol. 12, no. 5. — P. 2521–2534. — DOI: 10.11591/eei.v12i5.4968.
7. *Weber H.*, *Ali S.* Influence of huge renewable power production on inter area oscillations in the European ENTSO-E-System // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, no. 27. — P. 12–17. — DOI: 10.1016/j.ifacol.2016.10.692.
8. *Nguyen N.*, *Mitra J.* Reliability of power system with high wind penetration under frequency stability constraint // IEEE Transactions on Power Systems. — 2018. — Vol. 33, no. 1. — P. 985–994. — DOI: 10.1109/TPWRS.2017.2707475.

9. *Yi T.*, *Wen X.* Robust low-carbon scheduling optimization for energy hub amidst bilateral uncertainties in source-side and load-side conditions // Journal of Renewable and Sustainable Energy. — 2024. — Vol. 16, no. 5. — P. 056301. — DOI: 10.1063/5.0210059.

10. Оценка влияния ветроэлектростанций на изменение суммарной инерции электроэнергетической системы / И. А. Разживин [и др.] // Вестник Иркутского государственного технического университета. — 2021. — т. 25, № 2. — DOI: 10.21285/1814-3520-2021-2-220-234.

11. *Стычинский З. А.*, *Воропай Н. И.* Возобновляемые источники энергии: Теоретические основы, технологии, технические характеристики, экономика. — Magdeburg : Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2010.

12. Modal interaction of power system with high penetration of renewable energy and BES system / H. Setiadi [et al.] // International Journal of Electrical Power and Energy Systems. — 2018. — Vol. 97. — P. 385–395. — DOI: 10.1016/j.ijepes.2017.11.021.

13. *Lindmark G.*, *Altafini C.* Minimum energy control for complex networks // Scientific reports. — 2018. — Vol. 8, no. 3188. — DOI: 10.1038/s41598-018-21398-7.

14. *Hager U.*, *Rehtanz C.*, *Voropai N.* Monitoring, control and protection of interconnected power systems. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014. — DOI: 10.1007/978-3-642-53848-3.

15. *Casadei G.*, *Wit C.*, *Zampieri S.* Model reduction based approximation of the output controllability Gramian in large-scale networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. — 2020. — Vol. 7, no. 4. — P. 1778–1788. — DOI: 10.1109/TCNS.2020.3000694.

16. *Summers T.*, *Cortesi F.*, *Lygeros J.* On submodularity and controllability in complex dynamical networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. — 2016. — Vol. 3, no. 1. — P. 91–101. — DOI: 10.1109/tcns.2015.2453711.

17. *Antoulas A.* Approximation of large-scale dynamical systems. — SIAM, 2005. — DOI: 10.1137/1.9780898718713.

18. *Hauksdottir A.*, *Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // American Control Conference. — 2009. — P. 5345–5351. — DOI: 10.1109/ACC.2009.5160123.

19. *Bianchin G.*, *Pasqualetti F.* Gramian-based optimization for the analysis and control of traffic networks // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. — 2022. — Vol. 21, no. 7. — P. 3013–3024. — DOI: 10.1109/TITS.2019.2922900.

20. *Ядыкин И. Б.*, *Искаков А. Б.* Энергетический подход к анализу устойчивости линейных стационарных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 12. — с. 37—58.

21. *Lee H.*, *Park Y.* Degree of controllability for linear unstable systems // Journal of Vibration and Control. — 2014. — Vol. 22, no. 7. — DOI: 10.1177/1077546314545101.

22. *Siu T.*, *Schetzen M.* Convergence of Volterra series representation and BIBO stability of bilinear systems // International Journal of Systems Science. — 1991. — Vol. 22, no. 12. — P. 2679–2684. — DOI: 10.1080/00207729108910824.

23. *Мироновский Л. А.*, *Соловьева Т. Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 4. — с. 59—79.

24. Спектральный и модальный методы в исследованиях устойчивости электроэнергетических систем и управлении ими / Н. И. Воропай [и др.] // Автоматика и телемеханика. — 2020. — № 10. — с. 3—34. — DOI: 10.31857/s0005231020100013.

25. Development of bilinear power system representations for small signal stability analysis / J. Arroyo [et al.] // Electric Power Systems Research. — 2007. — Vol. 77, no. 10. — P. 1239–1248. — DOI: 10.1016/j.epsr.2006.09.014.

26. *Bakhtadze N.*, *Yadykin I.* Discrete predictive models for stability analysis of power supply systems // Mathematics. — 2020. — Vol. 8. — P. 1943. — DOI: 10.3390/math8111943.

27. *Barkana I.* Simple adaptive control - a stable direct model reference adaptive control methodology - a brief survey // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2014. — Vol. 28. — P. 567–603. — DOI: 10.1002/acs.2411.

28. *Сидоров Д. Н.* Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения. — Иркутск : Издательство ИГУ, 2013.

29. *Pulgar-Painemal H.*, *Wang Y.*, *Silva-Saravia H.* On inertia distribution, inter-area oscillations and location of electronically-interfaced resources // IEEE Transactions on Power Systems. — 2018. — Vol. 33, no. 1. — P. 995–1003. — DOI: 10.1109/TPWRS.2017.2688921.

30. Strategic placement of grid-forming inverters considering spatiotemporal dynamics and composite stability index / C. Liyanage [et al.] // IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society. — 2025. — Vol. 6. — P. 290–308. — DOI: 10.1109/OJIES.2025.3538480.

31. *Pavella M.*, *Ernst D.*, *Ruiz-Vega D.* Transient stability of power systems: a unified approach to assessment and control. — Springer Science & Business Media, 2012.

32. *Bakhtadze N.*, *Yadykin I.* Analysis and prediction of electric power system's stability based on virtual state estimators // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, no. 24. — P. 3194. — DOI: 10.3390/math9243194.

33. Optimal adaptive control of electromechanical oscillations modes in power systems / Yadykin, I. and Tomin, N. and Iskakov, A. and Galyaev, I. // IFAC-PapersOnLine. — 2022. — Vol. 55. — P. 134–139. — DOI: 10.1016/j.ifacol.2022.07.024.

34. Wide area damping of electromechanical oscillations based on implicit reference model adaptive control / Yadykin, I. and Iskakov, A. and Tomin, N. and Galyaev, I. // IFAC-PapersOnLine. — 2024. — Vol. 58. — P. 680–684. — DOI: 10.1016/j.ifacol.2024.07.560.

35. *Odgaard P.*, *Stoustrup J.*, *Kinnaert M.* Fault tolerant control ofwind turbines a benchmark model // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2013. — Vol. 21, no. 4. — P. 1168–1182. — DOI: 10.1109/TCST.2013.2259235.

36. Estimation of the location of inter-area oscillations and their interactions in electrical power systems using Lyapunov modal analysis / A. Iskakov [et al.] // International Journal of Electrical Power and Energy Systems. — 2023. — Vol. 153. — DOI: 10.1016/j.ijepes.2023.109374.

37. *Zhang S.*, *Luo F.* An improved simple adaptive control applied to power system stabilizer // IEEE Transactions on Power Electronics. — 2009. — Vol. 24, no. 2. — P. 369–375. — DOI: 10.1109/TPEL.2008.2007490.

38. *Han W.*, *Stankovic A.* Model-predictive control design for power system oscillation damping via excitation – a data-driven approach // IEEE Transactions on Power Systems. — 2023. — Vol. 38, no. 2. — P. 1176–1188. — DOI: 10.1109/TPWRS.2022.3177561.

39. *Singh B.*, *Sharma N.*, *Tiwari A.* A comprehensive survey of optimal placement and coordinated control techniques of FACTS controllers in multimachine power system environments // Journal of Electrical Engineering and Technology. — 2010. — Vol. 5, no. 1. — P. 79–102. — DOI: 10.5370/JEET.2010.5.1.079.

40. *Benner P.*, *Damm T.* Lyapunov equations, energy functionals, and model order reduction of bilinear and stochastic systems // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2011. — т. 49, № 2. — с. 686—711. — DOI: 10.1137/09075041X.

41. *Zhou K.*, *Salomon G.*, *Wu E.* Balanced realization and model reduction for unstable systems // International Journal of Robust and Nonlinear Controls. — 1999. — Vol. 9, no. 3. — P. 183–198. — DOI: 10.1002/(SICI)1099-1239(199903)9:3⟨183::AID-RNC399⟩3.0.CO;2-E.

42. *Hsu C.*, *Hou D.* Reducing unstable linear control systems via real schur transformation // Electronics Letters. — 1991. — Vol. 27, no. 11. — P. 984–986. — DOI: 10.1049/el:19910614.

43. *Safonov M.*, *Chiang R.* A Schur method for balanced-truncation model reduction // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1989. — Vol. 34, no. 7. — P. 729–733. — DOI: 10.1109/9.29399.

44. *Al-Baiyat S.*, *Bettayeb M.* A new model reduction scheme for k-power bilinear systems // Proceedings of 32nd IEEE Conference on Decision and Control. Vol. 1. — 1993. — P. 22–27. — DOI: 10.1109/CDC.1993.325196.

45. *Benner P.*, *Cao X.*, *Schilders W.* A bilinear H_2 model order reduction approach to linear parameter-varying systems // Advances in Computational Mathematics. — 2019. — Vol. 45. — P. 2241–2271. — DOI: 10.1007/s10444-019-09695-9.

46. *Zhang L.*, *Lam J.* On H_2 model order reduction of bilinear systems // Automatica. — 2002. — Vol. 38. — P. 205–216. — DOI: 10.1016/S0005-1098(01)00204-7.

47. *Redmann M.* Type II balanced truncation for deterministic bilinear control systems // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2018. — Vol. 56, no. 4. — P. 2593–2612. — DOI: 10.1137/17M1147962.

48. *Antoulas A.*, *Beattie C.*, *Gugercin S.* Interpolatory model reduction of large-scale dynamical systems // Efficient Modeling and Control of Large-Scale Systems. — 2010. — P. 3–58. — DOI: 10.1007/978-1-4419-5757-3_1.

49. *Benner P.*, *Goyal P.* Balanced truncation for quadratic-bilinear control systems // Advances in Computational Mathematics. — 2024. — Vol. 50. — P. 88. — DOI: 10.1007/s10444-024-10186-9.

50. *Shaker H.*, *Tahavori M.* Optimal sensor and actuator location for unstable systems // Journal of Vibration and Control. — 2013. — Vol. 19, no. 12. — P. 1915–1920. — DOI: 10.1177/1077546312451302.

51. *Mehr F.* A determination of design of optimal actuator location based on control energy. — City University of London, 2018.

52. *Hac A.*, *Liu L.* Sensor and actuator location in motion control of flexible structures // Journal of Sound and Vibration. — 1993. — Vol. 167, no. 2. — P. 239–261. — DOI: 10.1006/JSVI.1993.1333.

53. *Chompoobutrgool Y.*, *Vanfretti L.*, *Ghandhari M.* Survey on power system stabilizers control and their prospective applications for power system damping using synchrophasor-based wide-area systems // European Transactions on Electrical Power. — 2011. — Vol. 21. — P. 2098–2111. — DOI: 10.1002/etep.545.

54. *Dahleh M.*, *Dahleh M.*, *Verghese G.* Lectures on dynamic systems and control. — Department of Electrical Engineering, Computer Science Massachuasetts Institute of Technology, 2011.

55. *Chiang H.* Direct methods for stability analysis of electric power systems: theoretical foundation, BCU methodologies, and applications. — John Wiley & Sons, 2011.

56. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — Харьков : Гостехиздат, 1892.

57. *Sylvester J.* About equations in matrices px=xq // Comptes rendus de l'Academie des Sciences. — 1884. — Vol. 99, no. 2. — P. 2–14.

58. *Далецкий Ю. Л.*, *Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — Москва : Наука, 1970.

59. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск : Научная книга, 1997.

60. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. — Новосибирск : НГУ, 2009.

61. *Simoncini V.* Computational methods for linear matrix equations // SIAM Review. — 2016. — Vol. 58. — P. 377–441. — DOI: 10.1137/130912839.

62. *Поляк Б. Т.*, *Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — Москва : Наука, 2002.

63. *Lancaster P.* Explicit solutions of linear matrix equations // Siam Review. — 1970. — Vol. 12, no. 4. — P. 544–566. — DOI: 10.1137/1012104.

64. *Talbot A.* The evaluation of integrals of products of linear systems responses // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1959. — Vol. 12. — P. 488–503. — DOI: 10.1093/QJMAM/12.4.488.

65. *Benner P.*, *Goyal P.*, *Duff I.* Gramians, energy functionals, and balanced truncation for linear dynamical systems With quadratic outputs // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2022. — Vol. 67, no. 2. — P. 886–893. — DOI: 10.1109/TAC.2021.3086319.

66. *Поляк Б. Т.*, *Хлебников М. В.*, *Рапопорт Л. Б.* Математическая теория автоматического управления. — Москва : ЛЕНАНД, 2019.

67. *Буков В. Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. — Калуга : Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

68. *Афанасьев В. Н.*, *Колмановский В. Б.*, *Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. — Москва : Высшая школа, 1989.

69. *Gosea I.*, *Antoulas A.* On the H_2 norm and iterative model order reduction of linear switched systems // 2018 European Control Conference (ECC). — 2018. — P. 2983–2988. — DOI: 10.23919/ECC.2018.8550591.

70. *Himpe C.* The empirical Gramian framework // Algorithms. — 2018. — Vol. 11, no. 7. — P. 91. — DOI: 10.3390/a11070091.

71. *Xiao C.*, *Feng Z.*, *Shan X.* On the solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation in two canonical forms // IEE Proceedings D (Control Theory and Applications). — 1992. — Vol. 139, no. 3. — P. 286–290. — DOI: 10.1049/ip-d.1992.0038.

72. *Dilip A.* The controllability Gramian, the Hadamard product, and the optimal actuator/leader and sensor selection problem // IEEE Control Systems Letters. — 2019. — Vol. 3, no. 4. — P. 883–888. — DOI: 10.1109/LCSYS.2019.2919278.

73. Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем / Н. Е. Зубов [и др.] // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2017. — № 1. — с. 3—20. — DOI: 10.7868/S0002338817010139.

74. *D'Alessandro P.*, *Isidori A.*, *Ruberti A.* Realization and structure theory of bilinear dynamic systems // SIAM Journal on Control. — 1974. — Vol. 12, no. 3. — P. 517–535. — DOI: 10.1137/0312040.

75. *Yadykin I.* Decompositions of Gramians of continuous stationary systems given by equations of state in canonical forms // Mathematics. — 2022. — Vol. 10, no. 13. — P. 2339. — DOI: 10.3390/math10132339.

76. *Ядыкин И. Б.* О свойствах грамианов непрерывных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — с. 39—50.

77. *Ядыкин И. Б.*, *Галяев А. А.* О методах вычисления грамианов и их использовании в анализе линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 2. — с. 53—74.

78. *Искаков А. Б.*, *Ядыкин И. Б.* Спектральные разложения для решений уравнений Сильвестра–Ляпунова–Крейна // Доклады Академии наук. — 2017. — т. 472, № 4. — с. 388—392. — DOI: 10.7868/S0869565217040065.

79. Accelerated algorithm for calculating Gramians of bilinear models of electric power systems / A. Iskakov [et al.] // IFAC-PapersOnLine. — 2022. — Vol. 55, no. 9. — P. 128–133. — DOI: 10.1016/j.ifacol.2022.07.023.

80. *Pasqualetti F.*, *Zampieri S.*, *Bullo F.* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. — 2014. — Vol. 1, no. 1. — P. 40–52. — DOI: 10.1109/TCNS.2014.2310254.

81. *Wal M.*, *Jager B.* A review of methods for input/output selection // Automatica. — 2001. — Vol. 37, no. 4. — P. 487–510. — DOI: 10.1016/S0005-1098(00)00181-3.

82. *Ядыкин И. Б.*, *Галяев И. А.*, *Вершинин Ю. А.* О решении обобщенных уравнений Ляпунова для одного класса непрерывных билинейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. — 2022. — № 5. — с. 7—25. // Переводная версия: *Yadykin I. B., Galyaev I. A., Vershinin Y. A.* On the Solution of Generalized Lyapunov Equations for a Class of Continuous Bilinear Time-Varying Systems // Autom. Remote Control. – 2022. —Vol. 83, no. 5. – P. 677—691. — DOI: 10.31857/S0005231022050026.

83. *Ядыкин И. Б.*, *Галяев И. А.* Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 10. — с. 132—149. // Переводная версия: *Yadykin I. B., Galyaev I. A.* Spectral Decompositions of Gramians and Energy Metrics of Continuous Unstable Control Systems // Autom. Remote Control. – 2023. —Vol. 84, no. 10. – P. 1243—1258. — DOI: 10.31857/S0005231023100112.

84. *Ядыкин И. Б., Галяев И. А.* Структурные спектральные методы решения непрерывных уравнений Ляпунова // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 12. — с. 18—37. // Переводная версия: *Yadykin I. B., Galyaev I. A.* Spectral Decompositions of Gramians and Energy Metrics of Continuous Unstable Control Systems // Autom. Remote Control. – 2023. —Vol. 84, no. 12. – P. 1411—1427. — DOI: 10.31857/S0005231023120036.

85. *Ядыкин И. Б., Галяев И. А.* Структурные спектральные методы решения непрерывного обобщенного уравнения Ляпунова // Автоматика и телемеханика. — 2024. — № 10. — с. 7—18. // Переводная версия: *Yadykin I. B., Galyaev I. A.* Structural Spectral Methods of Solving Continuous Generalized Lyapunov Equation // Autom. Remote Control. – 2024. —Vol. 85, no. 10. – P. 938—946. — DOI: 10.31857/S0005231024100025.

86. *Ядыкин И. Б., Галяев И. А.* О решении матричных обобщенных уравнений Ляпунова для одного класса линейных динамических систем с переменными параметрами // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD'2020: труды тринадцатой международной конференции. — Москва : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2020. — с. 799—809. — DOI: 10.25728/mlsd.2020.0799.

87. *Ядыкин И. Б., Галяев И. А.* Адаптивная настройка регуляторов ЭЭС на основе метода эталонной модели // Управление большими системами: Труды XX Всероссийской школы-конференции молодых ученых. — Новочеркасск : Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова, 2024. — с. 250—257.

88. *Балонин Н. А.* Новый курс теории управления движением. — Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербург, 2000.

89. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — Москва : Наука, 1966.

90. *Икрамов Х. Д.* Численное решение матричных уравнений. — Москва : Наука, 1984.

91. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — Лань, 2009.

92. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — Москва : Мир, 1977.

93. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — Москва : Наука, 1976.

94. *Проскурников А. В.*, *Фрадков А. Л.* Задачи и методы сетевого управления // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 10. — с. 3—39.

95. *Жабко А. П.*, *Харитонов В. Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления: учебное пособие. — Санкт-Петербург : Издательство Санкт-Петербург, 1993.

96. *Sreeram V.*, *Agathoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion // IEE Proceedings D (Control Theory and Applications). — 1991. — Vol. 138, no. 6. — P. 529–534. — DOI: 10.1049/ip-d.1991.0074.

97. *Brin M.*, *Stuck G.* Introduction to dynamical systems. — Press syndicate of the university of Cambridge, 2002.

98. *Birk W.*, *Medvedev A.* A note on Gramian-based interaction measures // 2003 European Control Conference (ECC). — 2003. — P. 2625–2630. — DOI: 10.23919/ECC.2003.7086437.

99. Субоптимальная анизотропийная фильтрация для линейных дискретных нестационарных систем с нецентрированным внешним возмущением / В. Н. Тимин [и др.] // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 1. — с. 3—20. — DOI: 10.1134/S000523101901001X.

100. *Петров Б. Н.*, *Рутковский В. Ю.*, *Земляков С. Д.* Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. — Москва : Наука, 1980.

101. *Lubbok J.*, *Bansal V.* Multidimensional Laplace transforms for solution of nonlinear equation // Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. — 1969. — Vol. 116, no. 12. — P. 2075–2082. — DOI: 10.1049/PIEE.1969.0382.

102. *Yang P.*, *Jiang Y.*, *Xu K.* A trust-region method for H_2 model reduction of bilinear systems on the Stiefel manifold // Journal of the Franklin Institute. — 2019. — Vol. 356, no. 4. — P. 2258–2273. — DOI: 10.1016/j.jfranklin.2019.01.024.

103. *Пупков К. А.*, *Капалин В. И.*, *Ющенко А. С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. — Москва : Наука, 1976.

104. *Солодовников В. В.*, *Дмитриев А. Н.*, *Егупов Н. Д.* Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Книга 3. Часть II.Глава XVIII. Анализ и синтез нелинейных систем автоматического регулирования при помощи рядов Вольтерра и ортогональных спектров. — Москва : Машиностроение, 1969.

105. *Васильев С. Н.*, *Косов А. А.* Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — с. 27—47.

106. *Коровин С. К.*, *Фомичев В. В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. — Москва : Физматлит, 2007.

107. *Feeny B.*, *Liang Y.* Interpreting proper orthogonal modes of randomly excited vibration systems // Journal of Sound and Vibration. — 2003. — Vol. 265, no. 5. — P. 935–966. — DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01265-8.

108. *Bruni C.*, *Di Pillo G.*, *Kogh G.* On the mathematical models of bilinear systems // Ricerche di Automatica. — 1971. — Vol. 2. — P. 11–26.

109. *Yousefian R.*, *Kamalasadan S.* A Lyapunov function based optimal hybrid power system controller for improved transient stability // Electric Power Systems Research. — 2016. — Vol. 137. — P. 6–15. — DOI: 10.1016/j.epsr.2016.03.042.

110. Fractional-order model reference adaptive control of a multi-source renewable energy system with coupled DC/DC converters power compensation / S. Djebbri [et al.] // Energy Systems. — 2020. — Vol. 11. — P. 315–355. — DOI: 10.1007/s12667-018-0317-5.

111. *Borsche T.*, *Liu T.*, *Hill D.* Effects of rotational inertia on power system damping and frequency transients // 2015 IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control. — 2015. — P. 5940–5946. — DOI: 10.1109/CDC.2015.7403153.

112. Damping of inter-area low frequency oscillation using an adaptive wide-area damping controller / W. Yao [et al.] // Journal of Electrical Engineering and Technology. — 2014. — Vol. 9. — DOI: 10.5370/JEET.2014.9.1.027.

113. *Perez-Arriaga I.*, *Verghese G.*, *Schweppe F.* Selective modal analysis with applications to electric power systems, PART I: heuristic introduction // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. — 1982. — Vol. PAS–101, no. 9. — P. 3117–3125. — DOI: 10.1109/TPAS.1982.317524.

114. *Song Y.*, *Hill D.*, *Liu T.* State-in-mode analysis of the power flow Jacobian for static voltage stability // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. — 2019. — Vol. 105. — P. 671–678. — DOI: 10.1016/j.ijepes.2018.09.012.

115. *Chow J.* Power system coherency and model reduction. — Springer, 2013. — DOI: 10.1007/978-1-4614-1803-0.

116. *Genc I.*, *Schattler H.*, *Zaborszky J.* Clustering the bulk power system with applications towards hopf bifurcation related oscillatory instability // Electric Power Components and Systems. — 2005. — Vol. 33, no. 2. — P. 181–198. — DOI: 10.1080/15325000590463052.

117. *Garofalo F.*, *Iannelli L.*, *Vasca F.* Participation factors and their connections to residues and relative gain array // IFAC Proceedings Volumes. — 2002. — Vol. 35, no. 1. — P. 125–130. — DOI: 10.3182/20020721-6-ES-1901.00182.

118. *Hamzi B.*, *Abed E.* Local modal participation analysis of nonlinear systems using Poincare linearization // Nonlinear Dynamics. — 2020. — Vol. 99. — P. 803–811. — DOI: 10.1007/s11071-019-05363-1.

119. *Pariz N.*, *Shanechi H.*, *Vaahedi E.* Explaining and validating stressed power systems behavior using modal series // IEEE Transactions on Power Systems. — 2003. — Vol. 18, no. 2. — P. 778–785. — DOI: 10.1109/TPWRS.2003.811307.

120. *Vittal V.*, *Bhatia N.*, *Fouad A.* Analysis of the inter-area mode phenomenon in power systems following large disturbances // IEEE Transactions on Power Systems. — 1991. — Vol. 6, no. 4. — P. 1515–1521. — DOI: 10.1109/59.116998.

121. *Williams M.*, *Kevrekidis I.*, *Rowley C.* A data–driven approximation of the koopman operator: extending dynamic mode decomposition // Journal of Nonlinear Science. — 2015. — Vol. 25. — P. 1307–1346. — DOI: 10.1007/s00332-015-9258-5.

122. *Netto M.*, *Susuki Y.*, *Mili L.* Data-driven participation factors for nonlinear systems based on Koopman mode decomposition // IEEE Control Systems Letters. — 2019. — Vol. 3, no. 1. — P. 198–203. — DOI: 10.1109/LCSYS.2018.2871887.

123. *Gholami A.*, *Sun X.* A fast certificate for power system small-signal stability // 2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). — 2020. — P. 3383–3388. — DOI: 10.1109/CDC42340.2020.9304077.

124. Sparsity-promoting optimal wide-area control of power networks / F. Dorfler [et al.] // IEEE Transactions on Power Systems. — 2014. — Vol. 29, no. 5. — P. 2281–2291. — DOI: 10.1109/TPWRS.2014.2304465.

125. Overviews on the applications of the Kuramoto model in modern power system analysis / Y. Guo [et al.] // International Journal of Electrical Power and Energy Systems. — 2021. — Vol. 129. — P. 106804. — DOI: 10.1016/j.ijepes.2021.106804.

126. *Ghosh S.*, *Senroy N.* A comparative study of two model order reduction approaches for application in power systems // 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting. — 2012. — P. 1–8. — DOI: 10.1109/PESGM.2012.6344785.

127. *Sauer P.*, *Pai A.* Power system dynamics and stability. — Department of Electrical, Computer Engineering The University of Illinois at Urbana-Champaign, 2008.

128. Co-simulation: a survey / C. Gomes [et al.] // ACM Computing Surveys (CSUR). — 2018. — Vol. 51, no. 3. — P. 1–33. — DOI: 10.1145/3179993.

129. *Miquel T.* State space modelling. — ENAC, 2022.

130. *Shiau J.*, *Ma D.* An autopilot design for the longitudinal dynamics of a low-speed experimental UAV using two-time-scale cascade decomposition // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineer-

ing. — 2009. — Vol. 33, no. 3. — P. 501–521. — DOI: 10.1139/tcsme-2009-0034.

131. *Kuramoto Y.*, *Tsuzuki T.* Reductive perturbation approach to chemical instabilities // Progress of Theoretical Physics. — 1974. — Vol. 52, no. 4. — P. 1399–1401.

132. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves, and turbulence. — Springer Berlin, Heidelberg, 1984. — DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.

133. *Ядыкин И. Б.* Адаптируемость регулятора и двухуровневые алгоритмы настройки параметров адаптивных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 5. — с. 99—110.

134. *Yadykin I.*, *Tchaikovsky M.* LQ and H_2 tuning of fixed-structure controller for continuous time invariant system with H_∞ constraints // In book: Systems Structure and Control. — IntechOpen, 2008. — P. 207–230. — DOI: 10.5772/6025.

135. *Bajaria P.*, *Wagh S.*, *Singh N.* Interarea oscillations and chimera in power systems // arXiv. — 2019. — DOI: 10.48550/arXiv.1911.10338.

Список сокращений и условных обозначений

ВИЭ - Возобновляемые источники энергии;

МУК - Модели уравнения качания;

НЧ - Низкие частоты;

ОУЛ - Обобщенное уравнение Ляпунова;

ПД регулятор - Пропорционально-дифференциальный регулятор;

ЭЭС - Электроэнергетическая система;

LTI - Linear time-invariant, линейная стационарная;

MIMO - Multiple input multiple output, с многими входами и многими выходами;

MISO - Multiple input single output, с многими входами и одним выходом;

MRAC - Model reference adaptive control, метод адаптивного управления с эталонной моделью;

PF - Power factor, фактор участия;

SISO - Single input single output, с одним входом и одним выходом;

SMA - Selective modal analysis, селективный модальный анализ;

WACS - Wide area control system, широкозонная система управления;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$\mathbb{C}(\mathbb{C}_-,\mathbb{C}_+)$ – множество комплексных чисел (с положительной, отрицательной действительной частью);

$\in$ - символ принадлежности множеству;

$\forall$ - квантор всеобщности;

$A^{\mathbb{T}}$ - транспонированная матрица;

A^{-1} - обратная матрица;

A^* - комплексно сопряженная матрица;

$Res\left[f(x),x\right]$ - вычет функции $f(x)$ в точке x;

$\mathbf{1}_{ij}$ - индикатор, матрица $\mathbb{R}^{n\times n}$, все элементы которой равны 0, кроме элемента ij, равного 1;

s_i - собственные числа матрицы A;

$N(s)$ - характеристический полином матрицы A;

$diag\{a,b,\ldots,c\}$ – диагональная матрица с элементами $a,b,\ldots,c$ на главной диагонали;

$|a|$ - модуль числа a;

$sgn\lambda$ - знак λ;

$||u||_{L_2}$ - L_2 норма вектора;

trA – сумма элементов главной диагонали квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.