

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
ИМ. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Берлин Леонид Михайлович

**СКАЛЯРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ
НЕСИНХРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПО
КРИТЕРИЮ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ**

Специальность 2.3.1 —

«Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.т.н., чл.-корр. РАН
Галяев Андрей Алексеевич

Москва — 2026

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Задача быстродействия для системы несинхронных осцилляторов	17
1.1 Постановка задачи оптимального управления	17
1.2 Решение задачи управляемости	19
1.3 Необходимое условие оптимальности	29
1.4 Иллюстрация полученных свойств множества достижимости . . .	37
1.5 Выводы по главе 1	38
Глава 2. Необходимые условия экстремума для задачи быстродействия	40
2.1 Решение уравнений динамики для заданного количества переключений	41
2.2 Класс двух переключений для задачи разгона двух осцилляторов	52
2.3 Условие невырожденности управления	59
2.4 Алгоритм поиска начального вектора сопряженной системы . . .	64
2.5 Иллюстрация полученных теоретических результатов	68
2.6 Выводы по главе 2	76
Глава 3. Непрерывность критерия задачи оптимального быстродействия	77
3.1 Якобиан системы уравнений динамики и условий невырожденности	77
3.2 Условия непрерывности длительностей интервалов управления .	85
3.3 Иллюстрация полученных теоретических результатов	94
3.4 Выводы по главе 3	100
Заключение	101
Список сокращений и условных обозначений	103

Список литературы 104

Список рисунков 113

Введение

Актуальность темы исследования

Значительной практической ценностью обладают способы решения задач с дефицитом ресурса управления в случае, когда размерность вектора управления меньше размерности пространства состояний физической системы. Колебательные системы, такие как механические системы [1–6], электрические сети [7], квантовые осцилляторы [8; 9] или системы иной физической природы [10; 11], содержащие в качестве управления одну внешнюю силу, являются примерами подобных систем.

Фундаментальным источником по теории оптимального управления является монография Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко [12]. В ней изложены необходимые условия оптимальности и результаты о существовании и единственности решений для линейных оптимальных быстрых действий, на которые, в частности, опирается настоящая работа.

Полученные результаты выявляют сложную структуру оптимальных законов управления в системах с ограниченным числом каналов управления и многомерным фазовым пространством, что подчеркивает актуальность дальнейшего исследования таких задач, в том числе в направлении их конструктивного анализа и обобщения на другие критерии оптимальности. Увеличение количества осцилляторов от 2 до N затрудняет аналитическое исследование макропараметров и свойств подобных систем [13; 14], но дает возможность единого подхода к анализу физико-технических объектов различной природы.

Решение задачи оптимального управления по критерию максимума изменения энергии колебаний системы осцилляторов за заданное время с управлением по частоте приводится коллективом авторов (В. Andresen, К.Н. Hoffmann, J. Nulton, А. Tsirlin, Р. Salamon) в [15], который также исследует в [16] достижение заданной целевой энергии за минимальное время с позиции изменения частоты осциллятора. Речь идет о параметрическом управлении, когда параметры системы целенаправленно изменяются во времени для достижения оптимального результата. Однако с учетом приложений такой подход представляется малопрактичным, поскольку обычно доступен привод, создающий внешнюю силу, а вот быстро и в широком диапазоне менять собственную частоту

ту всего осциллятора (жесткость, длину, параметры конструкции) может быть технически невозможно.

Близким по смыслу и постановкам к теме диссертационного исследования является задача управления платформами или тележками с колебательными подсистемами (маятники, упругие связи) под действием единственной силы, где в линейном приближении также возникают системы осцилляторов с общим ограниченным управлением. Подобные системы могут описывать малые перемещения платформы с упругими звеньями или сосуда с жидкостью [1].

Так в работе О.Р. Каюмова [17] рассматривается задача быстрогодействия для горизонтального перемещения тележки с маятником на заданное расстояние с гашением колебаний. Для асимптотически близкой нелинейной модели, когда масса маятника пренебрежимо мала по сравнению с массой тележки, построены траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, и показано наличие как кусочно-постоянных режимов управления, так и особых управлений. Для платформы уже с произвольным количеством линейных осцилляторов в задаче наискорейшего гашения колебаний исследована структура управления [1], представленного единственной внешней ограниченной силой. Управляемость системы показана на основе исследования Н.Н. Красовского [18]. Отдельно и подробно анализируется случай двух осцилляторов. Аналитически и численно изучаются режимы с различным количеством переключений управления, показывается зависимость структуры оптимального движения от отношения собственных частот и на основе численного интегрирования строятся траектории, графики зависимости расстояния перемещения от заданного времени движения. Продолжением [1] является [2], где вводятся диаграммы функции оптимального управления для двух осцилляторов, показывающие, как именно эволюционирует структура управления (число и порядок переключений) при изменении дальности или времени. Дальнейшее обобщение на произвольное число осцилляторов приводится в [3].

Проблема нахождения количества переключений в законе управления исследуется О.Р. Каюмовым в [4], где рассматривается задача оптимального по быстродействию поворота нелинейной механической системы с двумя степенями свободы (материальной точки на пружине, закрепленной на вращающемся стержне) при ограниченном управлении. Существенной особенностью модели является то, что ее линеаризация в окрестности положения равновесия перестает быть глобально управляемой, в то время как исходная нелинейная система

таковой является. Показано существование как управлений с конечным числом переключений, так и особых режимов. Подробно анализируется эволюция структуры закона оптимального управления при изменении времени движения, вводятся диаграммы оптимальных управляющих функций, а также исследуется геометрия множества достижимости для малых времен.

В свою очередь, исследование Ф.Л. Черноусько и С.А. Решмина [19] посвящено задаче быстродействия маятникообразной нелинейной системой с ограниченным управлением, где терминальное множество состоит из периодически повторяющихся состояний равновесия. Авторы исследуют структуру оптимального управления в форме обратной связи, строят разделяющие кривые на фазовой плоскости и показывают, как они зависят от величины допустимого управления. Ключевой результат статьи – получена оценка на величину управления, при которой все оптимальные траектории имеют не более одного переключения, и подробно проанализировано, что происходит при нарушении этой оценки.

Стоит отметить, что нелинейная динамика управляемых систем усложняет или делает невозможным получение аналитического решения прямой и сопряженной систем после применения принципа максимума Понтрягина [20]. Тогда как замена исходной нелинейной математической модели на линейную путем проведения линеаризации позволяет получать и анализировать аналитические решения. Пример подобной замены приведен А.А. Галяевым и А.П. Потаповым в задаче наискорейшей остановки двузвенного маятника на подвижном подвесе [21], где подход к решению основан на последовательном получении решения задачи быстродействия для линеаризованной системы [22].

Исследуемая в диссертационной работе задача актуальна для многомерных колебательных динамических систем с дефицитом ресурса управления в случае, когда размерность вектора управления меньше размерности пространства состояний. Разработанные методы и основанные на них алгоритмы решения ориентированы на этот класс задач и потому применимы при моделировании и численном синтезе управления в реальных физико-технических системах колебательной природы. Полученный единый подход к исследованию структуры оптимального управления и к классификации решений по количеству переключений для задачи оптимального быстродействия колебательной системы полезен как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. С теоретической стороны он позволяет описывать различные классы допусти-

мых управлений и распространять анализ на группу из произвольного числа несинхронных осцилляторов. С прикладной стороны он дает конструктивную процедуру численного синтеза. На основе алгоритма Нейштадта–Итона восстанавливаются параметры экстремали и оценивается число переключений, что позволяет заранее оценивать структуру закона оптимального управления. В результате формируется подход, связывающий аналитическое описание оптимального управления с численным построением решений.

Степень разработанности научной темы

Задачи быстродействия для линейных управляемых систем с ограничением на управление относятся к классическим направлениям теории оптимального управления и исследуются в рамках принципа максимума Понтрягина [12], началом разработки которого послужил в 50-х годах XX века семинар по теории колебаний и автоматическому управлению Л.С. Понтрягина и М.А. Айзермана, где, в частности, рассматривалась задача оптимального быстродействия одиночным осциллятором [23], для которой В.Г. Болтянский осуществил синтез оптимального управления [24]. В свою очередь, для систем осцилляторов зачастую необходимо, чтобы одна из подсистем как можно быстрее пришла в требуемое положение, тогда как другие подсистемы должны остаться в состоянии покоя в терминальный момент. Задача быстродействия системой уже многих маятников с подвижной точкой подвеса исследовалась Ф.Л. Черноусько в [25], где и была отмечена существенная аналитическая сложность получения решения и доказано существование оптимального по быстродействию управления на основе исследования Н.Н. Красовского [18]. Само решение задачи разгона для двух маятников было предложено при некотором соотношении частот и нескольких переключениях управления. В этом случае полученную систему уравнений динамики можно разрешить относительно неизвестных параметров управления. В общем случае задачи оптимального быстродействия для системы осцилляторов с неизвестным количеством переключений оптимального управления аналитическое решение было неизвестно.

В 60-х годах XX века американские математики Итон и Нейштадт предложили итерационный метод [26; 27] поворота опорной гиперплоскости для поиска решения задачи оптимального управления по критерию быстродействия на основе идей выпуклого программирования. Итерационный алгоритм позволяет вычислить начальный вектор сопряженной системы, который

используется для определения оптимальной траектории исходной системы, удовлетворяющей заданным граничным условиям, и применим в случае выпуклого множества достижимости. Одна из проблем указанного подхода заключается в том, что одному стартовому состоянию системы может соответствовать бесконечное количество неколлинеарных между собой начальных векторов сопряженной системы [24], что существенно влияет на сходимость алгоритма. Р.П. Федоренко подчеркивает в [28], что сходимость приведенного алгоритма возможна только в случае, когда область достижимости обладает свойством строгой выпуклости. Проверка указанного свойства не представляется возможной для нелинейных задач. В свою очередь, для линейных систем выпуклость множества достижимости следует из компактности и выпуклости области управления [29]. Линейные задачи быстродействия с выпуклым множеством достижимости могут обладать необходимым свойством строгой выпуклости множества достижимости. Способ учета неопределенности в выборе шага алгоритма Нейштадта–Итона, от которого существенно зависит скорость сходимости, предлагается Б.Н. Пшеничным в [30]. Предложение по улучшению сходимости метода было рассмотрено В.Г. Старовым в [31]. Еще один итерационный метод минимакса на основе функции Минковского представлен А.Б. Рабиновичем в [32], где приведена интерпретация вышеуказанных методов в сопряженном пространстве. Итерационный метод расчета оптимального по быстродействию решения для линейных систем на основе принципа максимума приводится Б.Н. Пшеничным в [33]. Вопросам сходимости численных методов в оптимизационных задачах были посвящены ранние работы Б.Т. Поляка, например [34].

Другие методы нахождения приближенных решений задач быстродействия для линейных систем разнообразны и представляют определенный интерес с точки зрения широты используемых подходов. Методы поиска управления в реальном времени, основанные на идее предварительной аппроксимации областей достижимости и вычисления начального вектора сопряженной системы в процессе управления, рассмотрены В.М. Александровым в [35]. Симплексные покрытия выпуклой оболочки множества достижимости лежат в основе итерационного алгоритма, использование которого предлагается Г.В. Шевченко для поиска минимального времени движения линейной [36] и нелинейной [37] управляемых систем, такого что начало координат будет принадлежать границе области достижимости. Техника инвариантных эллип-

соидов, развитая Б.Т. Поляком и его соавторами [38], является основой для построения эффективных оценок множества достижимости систем с внешними возмущениями.

Одним из ключевых вопросов при поиске решения в задачах оптимального управления является задача управляемости, решение которой определяет свойства множества достижимости. Свойства сильной достижимости и глобальной управляемости системы двух несинхронных осцилляторов с ограниченным и скалярным управлением [22] показаны как на основе геометрической теории управления (Ю.Л. Сачков) [39], а именно: теоремы Суссмана-Джарджевича и теоремы Пуанкаре, так и с использованием результата классической теории оптимального управления, теоремы ЛаСалля-Конти [40].

В работе S. Chouga, S. Jayasuriya [41] классическая задача быстродействия для одиночного гармонического осциллятора с ограниченным по модулю управлением доведена до конструктивного вида, когда авторы предлагают способ, используя который можно явно восстановить число переключений, сами моменты переключения и минимальное время для произвольного начального состояния. Техническая особенность исследования – представление внешнего воздействия в виде периодического сигнала, разложенного в ряд Фурье с учетом собственной частоты осциллятора. Полученная форма позволяет переписать терминальные условия в виде соотношений для времен переключений и получить удобные правила выбора подходящего класса переключений. Статья важна как базовый пример задачи быстродействия для колебательной системы, и она наглядно показывает, что синтез естественно сводится к задаче определения конечной последовательности переключений. В многомерной постановке с группой несинхронных осцилляторов с общим скалярным управлением та же идея параметризации по переключениям сохраняет смысл, однако усложняется необходимостью согласовать одномерное управление с терминальными требованиями сразу для всех мод.

В статье F. Grogard, R. Sepulchre [42] рассматривается задача быстродействия для остановки линейной системы с ограничением на управление. Отмечается, что оптимальное управление в общем случае имеет релейную структуру, а число переключений не превышает размерности системы, если собственные значения матрицы системы действительны или если начальное состояние достаточно близко к целевому. Работа расширяет метод из [43] вычисления времен переключений на класс линейных систем с комплексными полюсами и предла-

гает алгоритм, параметризующий управление последовательностью временных интервалов постоянного управления и задающий итеративную процедуру их настройки. Алгоритм решения задачи быстродействия для линейных систем с доказательством сходимости, которое заполняет пробел в вопросе выбора размера шага алгоритма Нейштадта–Итона, вместе с подробным обзором на наиболее известные численные схемы построения решения приведен в работе М.Э. Бузикова, А.М. Майер [44].

Статья S. Scaramozzino, K.D. Listmann, J. Gebhardt [45] решает задачу быстродействия для гармонического осциллятора с ограниченным управлением в постановке с некоторым терминальным множеством: требуется за минимальное время перевести систему из заданного начального состояния на резонансную орбиту фиксированной амплитуды (то есть в множество состояний с заданной энергией). Для гармонического осциллятора без затухания авторы используют условия трансверсальности к терминальному многообразию и строят кривую переключений на фазовой плоскости. Для случая с затуханием сохраняется релейная структура, но кривая уже строится численно.

Подходы к возбуждению колебаний ограниченным воздействием и связь такого решения с вычислением индекса, отвечающего за анализ резонансных свойств, можно найти в работе Б.Р. Андриевского [46]. Так называемый метод градиента скорости (speed gradient) дает точное оптимальное решение задачи максимизации энергии на бесконечном интервале времени. Опираясь на это, в работе D. Efimov, A. Fradkov, T. Iwasaki [47] достигается сходимость к заданному резонансному режиму колебаний за конечное время для линейных многомерных механических систем, причем предполагается ограниченность управления. В сходной постановке [48] предложен регулятор для стабилизации колебаний вибрационной машины при неопределенных параметрах, внешних возмущениях и зашумленных измерениях. В отличие от этих работ, в исследовании С. Knoll, K. Robenack [49] посредством обратной связи и нелинейной добавки формируется устойчивый предельный цикл вокруг положения равновесия с заданными частотой и амплитудой. При этом не требуется задавать опорную траекторию, что обеспечивает робастность резонансного режима.

В работе Y. Shtessel, P. Kaveh, A. Ashraf [50] для стабилизации амплитуды и частоты гармонического осциллятора при наличии параметрической неопределенности частоты и ограниченных возмущений используется двухуровневое управление в скользящем режиме: первый слой (интегральный) компенсирует

возмущения и неопределенности системы, тогда как второй предназначен для попадания на предельный цикл. Реализация при этом выполнена только для гармонического осциллятора без затухания.

Движение балки Тимошенко, которое описывается динамикой управляемой системы, состоящей из N осцилляторов, совершающих вынужденные колебания под действием скалярной и ограниченной силы, по энергетическому критерию рассматривается в работах Е.О. Салобутиной [6; 51]. Показано существование особого управления [52] и доказано, что при его склейке с обычным оптимальное управление может обладать счетным числом переключений, накапливающихся в точке сопряжения.

Влияние внешнего воздействия и диссипативных сил может также моделироваться через параметрическое управление – путем задания частоты гармонического осциллятора. Вместо явного включения демпфирующего члена в уравнение движения, например, члена, пропорционального скорости, обычно [53–55] рассматривают управляемую систему, в которой значения частоты выбираются из некоторого ограниченного диапазона. Такой подход позволяет учитывать внешнее воздействие за счет изменения характеристик осциллятора, например, как при изменении жесткости пружины или длины маятника. Это позволяет описывать процессы как возбуждения, так и затухания колебаний, не вводя явную модель трения.

Для задачи успокоения произвольного числа линейных осцилляторов с общим скалярным управлением А.К. Федоровым и А.И. Овсевиным [5] ввиду трудности нахождения аналитического решения было получено асимптотическое оптимальное управление в форме синтеза, где объединяются несколько подходов. Первая идея заключается в использовании нормали к приближенной области достижимости как начального вектора для сопряженных переменных при больших энергиях. Использование управления с уменьшенной верхней границей позволяет системе достичь малой окрестности нуля. И наконец, метод обобщенных функций Ляпунова применяется для построения синтеза в окрестности терминального положения.

В работах М. Romano, F. Curti [56; 57] исследуется задача быстрогодействия линейной системой с ограниченным управлением меньшей размерности. Требуется построить управление для перевода системы из одного произвольного состояния в другое. Авторы показывают, что оптимальное управление для перехода между заданными состояниями совпадает с оптимальным управле-

нием некоторой связанной задачи остановки, но стартующей из специально построенного смещенного начального состояния. Отдельно обсуждаются принципиальные отличия постановок: простое преобразование задачи переносом конечного состояния в начало координат в общем случае некорректно, а существование решения и число экстремалей требуют отдельного анализа. Метод иллюстрируется разбором двойного интегратора, где авторы показывают возможность множественности экстремальных траекторий при сохранении строгой структуры оптимального управления. Приведенный результат позволяет рассматривать задачи разгона/остановки несинхронных осцилляторов за минимальное время как базовые при построении оптимального управления, поскольку в них отсутствует неединственность экстремалей. С практической точки зрения в статье [58] метод доведен до вычислительной процедуры для задач сближения/маневра космического аппарата, динамика которого описывается комбинацией двойного интегратора и гармонического осциллятора с одним каналом управления, и далее строят управление между произвольными состояниями, используя также численный синтез позиционного управления [59].

Диссертационная работа закрывает ряд пробелов в теории задач оптимального быстрогодействия для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением. Конечное число переключений оптимального управления исследуемой задачи привело к идее рассмотрения задачи только в терминах моментов переключений, для любого заданного количества которых были получены дополнительные условия экстремума. Численный алгоритм Нейштадта–Итона для нахождения значения начального вектора сопряженной системы, насколько известно, не применялся ранее к задаче, поэтому возникла идея сравнить аналитические результаты в части разбиения плоскости начальных значений первого осциллятора по классам управлений [60] с соответствующими численными, а также распространить алгоритм на группу, состоящую из большего числа осцилляторов [13].

Объектом исследования является система несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением.

Предметом исследования являются аналитические методы и алгоритмы нахождения структуры закона оптимального управления и траекторий системы несинхронных осцилляторов в задаче быстрогодействия с ограниченным скалярным управлением.

Целью работы является аналитическое и численное исследование задачи быстродействия для системы, состоящей из нескольких несинхронных осцилляторов со скалярным и ограниченным управлением.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Провести анализ свойств системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением, а также структуры и свойств закона оптимального управления в задаче быстродействия.
2. Получить новые условия экстремума для любого заданного количества неизвестных моментов переключения оптимального по быстродействию управления системой несинхронных осцилляторов.
3. Исследовать свойства критерия и оптимальных траекторий для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением в задаче быстродействия.

Основные положения, выносимые на защиту:

- П1) Свойства сильной достижимости и глобальной управляемости системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением.
- П2) Метод решения задачи быстродействия системой несинхронных осцилляторов, базирующийся на необходимых условиях экстремума для любого заданного количества неизвестных моментов переключения оптимального управления.
- П3) Непрерывная зависимость критерия и длительностей интервалов управления от параметра ограничения на управление и от граничных условий в задаче оптимального по быстродействию управления системой несинхронных осцилляторов.

Соответствие паспорту специальности

Положения, выносимые на защиту, соответствуют паспорту специальности 2.3.1 – «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» по следующим пунктам:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта (П1, П2).
3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта (П3).

4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта (П2).

Научная новизна:

- Н1) Для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением доказаны свойства сильной достижимости и глобальной управляемости, в том числе с использованием аппарата геометрической теории оптимального управления.
- Н2) Впервые получены необходимые условия экстремума для задачи оптимального управления системой несинхронных осцилляторов со скалярным ограниченным управлением по критерию быстродействия. Помимо условий принципа максимума получены дополнительные условия невырожденности оптимального управления, обеспечивающие решение для произвольного заданного числа неизвестных моментов переключения.
- Н3) Предложен метод решения задачи быстродействия для системы несинхронных осцилляторов, основанный на Н2 и использующий в качестве начального приближения решение, полученное по алгоритму Нейштадта–Итона.
- Н4) Показано, что условия, указанные в Н2, являются достаточными для решения задач оптимального разгона или остановки системы несинхронных осцилляторов со скалярным ограниченным управлением по критерию быстродействия.
- Н5) Доказана непрерывная зависимость критерия и длительностей интервалов управления от параметра ограничения на управление и от граничных условий в задаче оптимального по быстродействию управления системой несинхронных осцилляторов с использованием установленного свойства сильной достижимости рассматриваемой системы с ограничением.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии теории и методов решения задач оптимального управления линейными системами, содержащими колебательные подсистемы, с ограниченным управлением, размерность которого меньше размерности пространства состояний системы.

Практическая значимость заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для численного синтеза управления в широком классе технических систем, в частности, для вибрационных машин и устано-

вок со сложной нелинейной динамикой. В окрестности рабочих режимов такие модели после линеаризации часто сводятся к системе осцилляторов с единственным ограниченным входом, что позволяет применять полученные результаты (Н2, Н3, Н4).

Методы исследования

В работе используются методы оптимального управления, линейной алгебры, математического анализа и вычислительной математики.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью и полнотой исходных положений, достоверностью, строгостью доказательств и непротиворечивостью математических выкладок. Результаты теоретических исследований подтверждены средствами компьютерного моделирования.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на научных семинарах ИПУ РАН, а также на следующих конференциях: Мультиконференция по проблемам управления (2021, 2022, 2025), Управление большими системами (2022), Всероссийская научная конференция МФТИ (2021, 2023), Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (2022), Международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (2021), Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (2024), а также на семинаре лаборатории механики управляемых систем ИП-Мех РАН под руководством академика РАН Черноушко Ф.Л.

Личный вклад

Все основные результаты и расчеты получены лично автором.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 научных работах. По результатам опубликована одна статья в рецензируемом научном издании по специальности 2.3.1 (физ.-мат.), относящемся к категории К1 Перечня ВАК [61], 3 работы в журналах, индексируемых в международных базах данных и приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1 [60; 62; 63], 9 работ в материалах международных и всероссийских конференций [64—72] и одна публикация в прочих изданиях [22].

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения. Полный объем диссертации составляет 114 страниц, включая 19 рисунков. Список литературы содержит 80 наименований.

Глава 1. Задача быстрогодействия для системы несинхронных осцилляторов

В данной главе сформулирована задача оптимального управления группой несинхронных осцилляторов по критерию быстрогодействия. Для рассматриваемой системы с ограниченным скалярным управлением исследована управляемость: доказаны свойства сильной достижимости и глобальной управляемости. Для линейной задачи быстрогодействия выписано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Отдельно рассмотрены вопросы отсутствия особых режимов управления, а также единственности экстремальных и оптимальных управлений.

1.1 Постановка задачи оптимального управления

Рассматривается линейная задача оптимального управления для N несинхронных осцилляторов, связанных ограниченным скалярным управлением [13]. Динамика управляемой системы описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t), \\ \dot{p}_i(t) = -\omega_i^2 q_i(t) + u(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

$$\omega_j \neq \omega_k, \quad \forall j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{x}(t) = (q_1(t), p_1(t), \dots, q_N(t), p_N(t))^T \in \mathbb{R}^{2N}.$$

Компоненты $q_i(t)$, $p_i(t)$ вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ являются координатой и скоростью i -го осциллятора с частотой колебаний ω_i , $i = 1, \dots, N$.

Область управления \mathbb{U} задается отрезком на прямой:

$$u(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon] = \mathbb{U}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Граничные условия для системы (1.1) с ограничением (1.2) имеют вид:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)^T, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{x}(T^0) = \mathbf{x}_{T^0} = (q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0})^T.$$

Время движения системы T – критерий задачи быстродействия.

$$T \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathbb{U}, T > 0} \quad (1.4)$$

при условии, что решение системы (1.1) с управлением $u(\cdot)$ удовлетворяет граничным условиям (1.3). Оптимальное время обозначим T^0 .

Задачу оптимального управления по критерию быстродействия будем обозначать указанием на совокупность системы (1.1) с ограничением (1.2), граничными условиями (например, (1.3) в общем виде) и критерием (1.4).

Также рассматриваются частные случаи постановки задачи оптимального управления (1.1)-(1.4), когда начальное состояние совпадает с началом координат и граничные условия принимают вид

$$\mathbf{x}(0) = (0, 0, \dots, 0, 0)^T, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{x}(T^0) = (q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0})^T.$$

Задача (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) называется задачей разгона.

Если конечное состояние совпадает с началом координат

$$\mathbf{x}(0) = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)^T, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{x}(T^0) = (0, 0, \dots, 0, 0)^T,$$

то такая задача (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) называется задачей остановки.

Система (1.1) может быть записана в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t), \quad (1.7)$$

где A – матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.8)$$

и B – матрица управления

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

В следующем разделе исследуется управляемость системы (1.1)-(1.2), а также рассматриваются свойства ее множества достижимости.

1.2 Решение задачи управляемости

Когда говорят об управляемости системы, требуется четко понимать, о какой именно управляемости идет речь. Для линейных систем, где допускается неограниченное управление, многие понятия управляемости эквивалентны ранговому условию Калмана [73], которого для рассматриваемой системы (1.1) с ограничением (1.2) уже недостаточно.

Множество достижимости за время $t_1 \geq 0$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x}(t_1) \mid u(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon], \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t \in [0, t_1]\}. \quad (1.10)$$

$\mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon)$ является совокупностью всех концов траекторий $\mathbf{x}(t_1)$ системы (1.1) с исходной точкой \mathbf{x}_0 и с управлением $u(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ на $t_0 \leq t \leq t_1$.

В случае компактного выпуклого ограничивающего множества (1.2) справедливо

Замечание 1. *Множество достижимости $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon)$ системы (1.1) с ограничением (1.2) является компактным, выпуклым и непрерывно зависит от t_1 при $t_1 \geq 0$.*

Утверждение замечания следует по теореме из раздела об оптимальном управлении в линейных системах книги [29].

Для изучения вопроса управляемости системы (1.1) с ограничением (1.2) перепишем ее как систему векторных полей:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, u) = \{f_1 + uf_2 \mid u \in \mathbb{U}\}, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dots + p_N \frac{\partial}{\partial q_N} - \omega_1^2 q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - \dots - \omega_N^2 q_N \frac{\partial}{\partial p_N} = \\
&= \sum_{i=1}^N p_i \frac{\partial}{\partial q_i} - \omega_i^2 q_i \frac{\partial}{\partial p_i},
\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial p_N} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{1.13}$$

Определение 1. *Линейная система (A, B, U) обладает свойством сильной достижимости, если $\forall T > 0$ множество достижимости $\mathcal{A}(T, \mathbf{x}_0, \varepsilon)$ имеет непустую внутренность для любого начального состояния системы \mathbf{x}_0 , т.е. $\text{int } \mathcal{A}(T, \mathbf{x}_0, \varepsilon) \neq \emptyset$.*

Свойство сильной достижимости для системы (1.1)-(1.2) устанавливается из теоремы Суссмана-Джарджевича [74].

Теорема 1 (Суссмана-Джарджевича [74]). *Аналитическая система $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), u(t))$ обладает свойством сильной достижимости в точке \mathbf{x}_0 тогда и только тогда, когда размерность идеала алгебры Ли $\mathcal{L}_0(\mathbf{x}_0)$, порожденного системой, совпадает с размерностью пространства состояний*

$$\dim \mathcal{L}_0(\mathbf{x}_0) = 2N. \tag{1.14}$$

Лемма 1. *Система (1.1) с ограничением (1.2) является сильно достижимой.*

Доказательство. Приводится вычисление всех ненулевых векторных полей, скобок Ли первого и более высоких порядков, для последующего определения размерности идеала алгебры Ли.

$$f_3 = [f_1, f_2] = - \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i}, \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}
f_4 = [f_1, f_3] &= - \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 \\ \dots \\ 0 \\ -\omega_N^2 \end{pmatrix} = - \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial}{\partial p_i}, \\
f_5 = [f_1, f_4] &= - \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_1^2 \\ \dots \\ 0 \\ -\omega_N^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ 0 \\ \dots \\ \omega_N^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \frac{\partial}{\partial q_i}, \\
f_6 = [f_1, f_5] &= - \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^2 \\ 0 \\ \dots \\ \omega_N^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1^4 \\ \dots \\ 0 \\ \omega_N^4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \omega_i^4 \frac{\partial}{\partial p_i}, \\
&\dots \\
f_{2N} = [f_1, f_{2N-1}] &= (-1)^{N-1} \sum_{i=1}^N \omega_i^{2N-2} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad N \geq 2, \\
f_{2N+1} = [f_1, f_{2N}] &= (-1)^N \sum_{i=1}^N \omega_i^{2N-2} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad N \geq 1.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Система $2N$ векторных полей $\{f_2, f_3, \dots, f_{2N}, f_{2N+1}\}$ является линейно независимой, что устанавливается из того, что определитель

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \omega_1^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_1^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_1^{2N-2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_2^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_2^{2N-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \omega_N^2 & \dots & 0 & (-1)^N \omega_N^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_N^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1} \omega_N^{2N-2} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

не равен нулю. (1.17) посредством элементарных преобразований приводится к определителю блочно-диагональной матрицы

$$\det \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = (\det(W))^2 = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right)^2 \neq 0, \quad (1.18)$$

где введена матрица

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2N-2} \\ 1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^{2N-2} \\ 1 & \omega_3^2 & \dots & \omega_3^{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^2 & \dots & \omega_N^{2N-2} \end{pmatrix},$$

совпадающая с матрицей Вандермонда, свойство определителя которой и было использовано в (1.18).

Таким образом для системы (1.11) идеал $\mathcal{L}_0(\mathbf{x}_0)$ имеет вид:

$$\mathcal{L}_0(\mathbf{x}_0) = \text{span}(f_2, [f_1, f_2], \dots, f_{2N+1}), \quad (1.19)$$

и выполнена теорема 1 для любой точки \mathbf{x}_0 , что дает утверждение леммы. \square

Определение 2. *Линейная система (A, B, U) называется глобально управляемой в нуле, если для любого начального условия $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2N}$ существует управление $u \in U$ такое, что соответствующая траектория достигает точки $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$ для некоторого $T > 0$.*

На вопрос о глобальной управляемости линейной системы в нуле при наличии ограничений на управление отвечает теорема из [75].

Теорема 2 (ЛаСалля–Конти [75]). *Автономная система произвольного вида (A, B, U) при $U \in \mathbb{R}^m$, $\text{int } U \neq \emptyset$, глобально управляема в нуле тогда и только тогда, когда:*

1. $\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ (ранговый критерий Калмана).
2. $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ для каждого собственного значения λ_i матрицы A .

Для дальнейшего изложения потребуется следующее замечание.

Замечание 2. Решение системы (1.1) для N несинхронных осцилляторов с учетом граничных условий (1.3) дается формулой [38]

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (1.20)$$

где экспоненты матриц A_i , $i = 1, \dots, N$, из (1.8) имеют вид:

$$e^{A_i(t-\tau)} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i(t-\tau)) & \frac{\sin(\omega_i(t-\tau))}{\omega_i} \\ -\omega_i \sin(\omega_i(t-\tau)) & \cos(\omega_i(t-\tau)) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.21)$$

Доказательство. Матричная экспонента $e^{A(t-\tau)}$ определяется следующим образом:

$$e^{A(t-\tau)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j (t-\tau)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^j}{j!} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_N^2 & 0 \end{pmatrix}^j. \quad (1.22)$$

Поскольку матрица A имеет блочно-диагональную структуру, возведение ее в степень j осуществляется возведением в степень диагональных 2×2 блоков A_i , $i = 1, \dots, N$, каждый из которых соответствует одному осциллятору. Таким образом (1.22) переписывается в следующем виде:

$$e^{A(t-\tau)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^j}{j!} \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 \end{matrix} \right)^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ -\omega_2^2 & 0 \end{matrix} \right)^j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ -\omega_N^2 & 0 \end{matrix} \right)^j \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Разделяя сумму на четные и нечетные степени, равенство может быть продолжено

$$\begin{aligned}
e^{A(t-\tau)} = & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{2j}}{(2j)!} \begin{pmatrix} (-1)^j \omega_1^{2j} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^j \omega_1^{2j} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (-1)^j \omega_N^{2j} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^j \omega_N^{2j} \end{pmatrix} + \\
& + \frac{(t-\tau)^{2j+1}}{(2j+1)!} (-1)^j \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^{2j} & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_1^{2j+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_N^{2j} \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_N^{2j+2} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Использование представления тригонометрических функций в виде бесконечной суммы степенных членов заканчивает доказательство замечания

$$\begin{aligned}
e^{A(t-\tau)} = & \\
= & \begin{pmatrix} \cos(\omega_1(t-\tau)) & \frac{\sin(\omega_1(t-\tau))}{\omega_1} & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_1 \sin(\omega_1(t-\tau)) & \cos(\omega_1(t-\tau)) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \cos(\omega_N(t-\tau)) & \frac{\sin(\omega_N(t-\tau))}{\omega_N} \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_N \sin(\omega_N(t-\tau)) & \cos(\omega_N(t-\tau)) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

□

Доказательство справедливости выражения (1.25) может быть проведено с использованием собственных векторов и собственных значений матрицы A .

Из вида общего решения (1.20) можно заключить следующее свойство масштабирования по ε .

Лемма 2. *Для множества достижимости $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, \varepsilon)$ системы (1.1) с ограничением (1.2) справедливо свойство центральной симметрии, линейности по параметру ε , и выполнено равенство*

$$-\mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, \varepsilon) = \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, 1). \tag{1.26}$$

Доказательство. Если $|v(t)| \leq 1$, то при замене $u(t) = \varepsilon v(t)$ имеем $|u(t)| \leq \varepsilon$, а по линейности правой части для $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ решение $\mathbf{x}(t_1)$ уравнения (1.20) при управлении $u(t)$ совпадает с решением (1.20) при управлении $v(t)$, умноженным на ε . Обратное включение получается заменой $v(t) = u(t)/\varepsilon$. Это доказывает (1.26).

Центральная симметрия следует из уравнения (1.20). \square

Для произвольного начального состояния \mathbf{x}_0 справедлива следующая лемма о вложении множеств достижимости по ε .

Лемма 3. Пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, тогда для любого $t_1 \geq 0$ и любого начального состояния \mathbf{x}_0 выполнено вложение

$$\mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon_1) \subset \mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon_2). \quad (1.27)$$

Доказательство. Из неравенства $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ следует включение отрезков допустимых управлений

$$[-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \subset [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]. \quad (1.28)$$

Возьмем произвольную точку $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon_1)$. По определению множества достижимости (1.10) существует управление u , удовлетворяющее $u(t) \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ на $[0, t_1]$, такое, что траектория системы (1.1) с начальным состоянием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ удовлетворяет

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1. \quad (1.29)$$

Но из (1.28) следует, что то же управление u удовлетворяет и более слабому ограничению $u(t) \in [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$ на $[0, t_1]$. Значит, та же траектория допустима при параметре ε_2 и достигает ту же точку \mathbf{x}_1 в момент t_1 . Следовательно $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon_2)$. Так как \mathbf{x}_1 выбиралась произвольно, получаем (1.27). \square

Вернемся к рассмотрению свойства глобальной управляемости, которому дадим определение согласно [39].

Определение 3. Управляемая система (1.1) с ограничением (1.2) называется глобально управляемой (вполне управляемой) из точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{2N}$, если

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x}(t) \mid \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t \in [0, \infty)\} = \mathbb{R}^{2N}. \quad (1.30)$$

Лемма 4. Система (1.1) с ограничением (1.2) является глобально управляемой (вполне управляемой).

Доказательство. Первое условие теоремы 2 соответствует ранговому критерию управляемости Калмана для линейной системы (A, B) и проверяется путем вычисления определителя

$$|B, AB, \dots, A^{2N-1}B| =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega_1^2 & \dots & 0 & (-1)^{N-1}\omega_1^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1}\omega_1^{2N-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_2^2 & \dots & 0 & (-1)^{N-1}\omega_2^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1}\omega_2^{2N-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_N^2 & \dots & 0 & (-1)^{N-1}\omega_N^{2N-2} \\ 1 & 0 & -\omega_N^2 & 0 & \dots & (-1)^{N-1}\omega_N^{2N-2} & 0 \end{vmatrix}, \quad (1.31)$$

который с точностью до знака совпадает с (1.17) и, соответственно, с (1.18). Для системы (1.1) $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, поэтому теорема 2 выполнена, и система (1.1) является глобально управляемой в нуле.

Докажем свойство глобальной управляемости с помощью конкретного построения, используя решение системы дифференциальных уравнений (1.1) с начальным условием (1.3) $\mathbf{x}_0 = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)^T$. В соответствии с замечанием 2 компоненты вектора состояния $\mathbf{x}(t) = (q_1(t), p_1(t), \dots, q_N(t), p_N(t))^T$ выписываются следующим образом:

$$\begin{cases} q_i(t) = \frac{p_i^*}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + q_i^* \cos(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t \sin(\omega_i(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ p_i(t) = p_i^* \cos(\omega_i t) - q_i^* \omega_i \sin(\omega_i t) + \int_0^t \cos(\omega_i(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.32)$$

Управляемость в нуле гарантирует существование управления $u(t)$ такого, что в некоторый момент t_1 вектор состояния $x(t_1)$ совпадет с началом координат.

$$\begin{cases} -\frac{p_i^*}{\omega_i} \sin(\omega_i t_1) - q_i^* \cos(\omega_i t_1) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_1} \sin(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ -p_i^* \cos(\omega_i t_1) + q_i^* \omega_i \sin(\omega_i t_1) = \int_0^{t_1} \cos(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.33)$$

Покажем связь между управлением $u(t)$ и управлением $u_0(t)$, переводящим систему из начала координат в точку $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$ за время t_0 . Такое решение представляется в виде:

$$\begin{cases} q_i^* = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_0} \sin(\omega_i(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \\ -p_i^* = \int_0^{t_0} \cos(\omega_i(t_0 - \tau)) u_0(\tau) d\tau, \\ i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.34)$$

Подставляя (1.34) в (1.33), получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_0} \sin(\omega_i(t_1 - t_0 + \tau)) u_0(\tau) d\tau = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_1} \sin(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ \int_0^{t_0} \cos(\omega_i(t_1 - t_0 + \tau)) u_0(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} \cos(\omega_i(t_1 - \tau)) u(\tau) d\tau, \\ i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1.35)$$

Выбирая $t_1 = t_0$, $u(t) = u_0(t_1 - t)$, получаем, что система обладает свойством глобальной управляемости в силу произвольности $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$. \square

Из доказательства леммы 4 следует следующее

Следствие 1. *Траектории, соответствующей задаче перехода из точки $\mathbf{x}_0 = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$ в начало координат $\mathbf{x}_{T^0} = \mathbf{0}$ с управлением $u(t)$ за время T^0 (1.1)-(1.2), соответствует траектория, ведущая из начала координат в точку $\mathbf{x}_{T^0} = (q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$ с управлением $u(T^0 - t)$.*

Свойство глобальной управляемости можно показать (для двух осцилляторов) с использованием теоремы Пуанкаре [76] и того факта, что поле f_1 является бездивергентным:

$$\operatorname{div}_x f_1 = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_{1_i}}{\partial x_i} = \frac{\partial p_1}{\partial q_1} - \omega_1^2 \frac{\partial q_1}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_2} - \omega_2^2 \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 0. \quad (1.36)$$

Это векторное поле на \mathbb{R}^4 является консервативным, т.е. сохраняет стандартный объем $\operatorname{Vol}(V) = \int_V dq_1 dp_1 dq_2 dp_2$, тогда и только тогда, когда оно бездивергентно. Поэтому для f_1 будет выполнена

Теорема 3 (Пуанкаре [76]). Пусть M – гладкое многообразие с формой объема Vol . Пусть векторное поле $f \in \text{Vec}(M)$ полно, а его поток e^{tf} сохраняет объем. Пусть $W \subset M$, $W \subset \overline{\text{int}W}$, есть подмножество конечной меры, инвариантное относительно f :

$$\text{Vol}(W) < \infty, W \circ e^{tf} \subset W, \forall t > 0.$$

Тогда все точки множества W устойчивы по Пуассону для поля f .

В качестве W выбирается множество, ограниченное поверхностью постоянной энергии, а именно:

$$E = \frac{\omega_1^2 q_1^2}{2} + \frac{p_1^2}{2} + \frac{\omega_2^2 q_2^2}{2} + \frac{p_2^2}{2}.$$

Устойчивость по Пуассону векторного поля f_1 и знание о том, что \mathcal{F} – система полного ранга, позволяет воспользоваться следующей леммой.

Лемма 5 (о совместимости векторных полей [76]). Пусть $\mathcal{F} \subset \text{Vec}(M)$ – система полного ранга. Если векторное поле $f \in \mathcal{F}$ устойчиво по Пуассону, то поле $-f$ совместимо с системой \mathcal{F} .

По определению это означает, что множество достижимости системы векторных полей $\mathcal{F} \cup -f_1$ лежит в замыкании множества достижимости системы векторных полей \mathcal{F} для любого \mathbf{x}_0 :

$$\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}(\mathcal{F} \cup -f_1) \subset \overline{\mathcal{A}_{\mathbf{x}_0}(\mathcal{F})}. \quad (1.37)$$

Из совместимости полей $f_1, -f_1$ с исходной системой следует, что и

$$\pm f_2 = (f_1 \pm f_2) - f_1$$

совместимы с этой системой. А значит все векторные поля симметричной системы

$$\text{span}(f_1, f_2) = \{af_1 + bf_2 | a, b \in \mathbb{C}^\infty\}$$

совместимы с исходной системой, что дает совпадение замыкания множеств достижимости исходной и расширенной симметричной систем. Как и исходная, симметричная система имеет полный ранг, а значит они обе являются вполне управляемыми.

После решения задачи управляемости (леммы 1, 4) можно приступить к исследованию ЗОУ, для чего в следующем разделе будет применен принцип максимума Понтрягина.

1.3 Необходимое условие оптимальности

Для исследования задачи (1.1)-(1.4) будет выписано необходимое условие оптимальности (принцип максимума Понтрягина) по быстрдействию, для чего приводятся:

1. Укороченный [39] гамильтониан (функция Гамильтона) задачи оптимального по быстрдействию управления

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) &= \xi_1 p_1 + \eta_1 (-\omega_1^2 q_1 + u) + \dots + \xi_N p_N + \eta_N (-\omega_N^2 q_N + u) = \\ &= \sum_{i=1}^N \xi_i p_i + \eta_i (-\omega_i^2 q_i + u), \end{aligned} \quad (1.38)$$

где $\boldsymbol{\psi}(t) = (\xi_1(t), \eta_1(t), \dots, \xi_N(t), \eta_N(t))^T$ – вектор сопряженных переменных.

2. Гамильтонова система, состоящая из уравнений динамики (1.1) и сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \omega_i^2 \eta_i(t), \\ \dot{\eta}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\xi_i(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.39)$$

Линейная однородная система (1.39) для каждого начального вектора сопряженной системы $\boldsymbol{\psi}(0)$ имеет единственное решение.

Допустимыми управлениями будут называться только произвольные кусочно-непрерывные управления, которые принимают свои значения в области управления \mathbb{U} , другими словами только $u = u(t)$, каждое из которых является непрерывной функцией времени, за исключением конечного числа моментов, где $u(t)$ терпит разрыв первого рода.

Теорема 4 (Необходимое условие оптимальности [12]). *Пусть $u(t), 0 \leq t \leq T^0$, – допустимое управление, переводящее фазовую точку из начального состояния $\mathbf{x}(0)$ в конечное положение $\mathbf{x}(T^0)$, причем $\mathbf{x}(t)$ – соответствующая траектория системы (1.1). Для оптимальности по быстрдействию управления $u(t)$ и соответствующей траектории $\mathbf{x}(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\boldsymbol{\psi}(t) = (\xi_1(t), \eta_1(t), \dots, \xi_N(t), \eta_N(t))^T$, соответствующей функциям $u(t), \mathbf{x}(t)$ согласно (1.39), такой, что:*

– для всех $t, 0 \leq t \leq T^0$, функция $H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ достигает в точке $u^* = u^*(t)$ максимума

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), u^*(t)) &= \\ &= \max_{u \in \mathbb{U}} H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = \sum_{i=1}^N (\xi_i p_i - \eta_i \omega_i^2 q_i) + u^* \sum_{i=1}^N \eta_i; \end{aligned} \quad (1.40)$$

– в конечный момент T^0 выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathbb{U}} H(\boldsymbol{\psi}(T^0), \mathbf{x}(T^0), u(T^0)) &= \\ &= \sum_{i=1}^N (\xi_i(T^0) p_i(T^0) - \eta_i(T^0) \omega_i^2 q_i(T^0)) + u^*(T^0) \sum_{i=1}^N \eta_i(T^0) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Если величины $\boldsymbol{\psi}(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ удовлетворяют гамильтоновой системе (1.1), (1.39) и первому условию теоремы 4, то функция $\max_{u \in \mathbb{U}} H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), u)$ переменного t постоянна, поэтому условие (1.41) можно проверять в любой момент $t, 0 \leq t \leq T^0$.

Для дальнейшего исследования сумма сопряженных переменных $\eta_i, i = 1, \dots, N$, будет называться функцией переключений $SF(t)$:

$$SF(t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t). \quad (1.42)$$

Сопряженная система (1.39) и ее решение, содержащее $2N$ неизвестных постоянных коэффициентов $C_i^1, C_i^2, i = 1, \dots, N$, записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) = -\omega_1^2 \eta_1(t), & \begin{cases} \eta_1(t) = C_1^1 \cos \omega_1 t + C_1^2 \sin \omega_1 t, \\ \dots \\ \eta_N(t) = C_N^1 \cos \omega_N t + C_N^2 \sin \omega_N t. \end{cases} \\ \dots \\ \ddot{\eta}_N(t) = -\omega_N^2 \eta_N(t), \end{cases} \quad (1.43)$$

Для соответствующих $\xi_i, i = 1, \dots, N$ справедлива следующая система:

$$\begin{cases} \frac{\xi_1(t)}{\omega_1} = C_1^1 \sin \omega_1 t - C_1^2 \cos \omega_1 t, \\ \dots \\ \frac{\xi_N(t)}{\omega_N} = C_N^1 \sin \omega_N t - C_N^2 \cos \omega_N t. \end{cases} \quad (1.44)$$

Оптимальное управление $u^*(t)$ определяется из условия максимума (1.40) и решения (1.43):

$$u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign} \sum_{i=1}^N \eta_i(t) = \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t + C_i^2 \sin \omega_i t \right). \quad (1.45)$$

Отыскав закон оптимального управления (1.45), остается определить $C_i^1, C_i^2, i = 1, \dots, N$.

Замечание 3. *Неизвестные постоянные $C_i^1, C_i^2, i = 1, \dots, N$, не могут одновременно быть равными нулю, поскольку иначе $\eta_i(t) \equiv 0, i = 1, \dots, N$, согласно (1.43), и, следовательно, $\xi_i(t) \equiv 0, i = 1, \dots, N$, в соответствии с (1.39), что противоречит условию теоремы 4 на сопряженный вектор $\Psi(t)$.*

Нули функции переключений $SF(t) = \sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t + C_i^2 \sin \omega_i t$ изолированы, что может быть показано как на основе явного исследования $SF(t)$, так и с использованием известных результатов теории оптимального управления для линейных задач быстрогодействия.

Доказательство изолированности нулей функции $SF(t)$ переключений будет основано на свойствах аналитических функций из теории функций комплексного переменного, а именно, следующей теореме из [77]:

Теорема 5 (о свойстве нулей аналитической функции [77]). *Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки a : $f(a) = 0$ и не равна тождественно 0 ни в какой ее окрестности. Тогда существует окрестность точки a , в которой $f(z)$ не имеет других нулей, кроме a .*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Нули функции переключений $SF(t)$ в задаче (1.1)-(1.4) изолированы и на любом конечном отрезке их конечное число.*

Доказательство. Аналитическая (представимая в окрестности каждой точки степенным рядом) функция $SF(t)$ может быть переписана с помощью формулы Эйлера в следующем виде:

$$\begin{aligned} SF(t) &= \sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t + C_i^2 \sin \omega_i t = \sum_{i=1}^N \frac{C_i^1 - jC_i^2}{2} e^{j\omega_i t} + \frac{C_i^1 + jC_i^2}{2} e^{-j\omega_i t} = \\ &= \alpha_1 e^{j\omega_1 t} + \alpha_2 e^{-j\omega_1 t} + \dots + \alpha_{2N-1} e^{j\omega_N t} + \alpha_{2N} e^{-j\omega_N t} = \\ &= \sum_{i=1}^N (\alpha_{2i-1} e^{j\omega_i t} + \alpha_{2i} e^{-j\omega_i t}) = \sum_{i=1}^N (\alpha_{2i-1} e^{j\lambda_{2i-1} t} + \alpha_{2i} e^{j\lambda_{2i} t}) = \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k e^{j\lambda_k t}, \end{aligned} \tag{1.46}$$

где постоянные коэффициенты и частоты осцилляторов были переобозначены по следующему закону:

$$\alpha_{2i-1} = \frac{C_i^1 - jC_i^2}{2}, \quad \alpha_{2i} = \frac{C_i^1 + jC_i^2}{2}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.47)$$

$$\lambda_{2i-1} = \omega_i, \quad \lambda_{2i} = -\omega_i,$$

Рассматривается произвольный нуль t_0 функции $SF(t)$. Предположим, что кратность нуля t_0 больше либо равна $2N$, тогда справедливы равенства:

$$SF(t_0) = SF'(t_0) = SF''(t_0) = \dots = SF^{(2N-1)}(t_0) = 0, \quad (1.48)$$

$$\sum_{k=1}^{2N} \alpha_k (j\lambda_k)^m e^{j\lambda_k t_0} = 0, \quad m = 0, \dots, 2N - 1. \quad (1.49)$$

Систему линейных уравнений (1.49) можно записать в матричном виде после введения вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2N}$ с компонентами $y_k = \alpha_k e^{j\lambda_k t_0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ j\lambda_1 & j\lambda_2 & j\lambda_3 & \dots & j\lambda_{2N} \\ (j\lambda_1)^2 & (j\lambda_2)^2 & (j\lambda_3)^2 & \dots & (j\lambda_{2N})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (j\lambda_1)^{2N-1} & (j\lambda_2)^{2N-1} & (j\lambda_3)^{2N-1} & \dots & (j\lambda_{2N})^{2N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{j\lambda_1 t_0} \\ \alpha_2 e^{j\lambda_2 t_0} \\ \alpha_3 e^{j\lambda_3 t_0} \\ \dots \\ \alpha_{2N} e^{j\lambda_{2N} t_0} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (1.50)$$

Определитель полученной матрицы системы линейных уравнений (1.50) сводится к определителю Вандермонда

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ j\lambda_1 & j\lambda_2 & j\lambda_3 & \dots & j\lambda_{2N} \\ (j\lambda_1)^2 & (j\lambda_2)^2 & (j\lambda_3)^2 & \dots & (j\lambda_{2N})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (j\lambda_1)^{2N-1} & (j\lambda_2)^{2N-1} & (j\lambda_3)^{2N-1} & \dots & (j\lambda_{2N})^{2N-1} \end{pmatrix} = \quad (1.51)$$

$$= j^{1+2+\dots+(2N-1)} \prod_{1 \leq p < q \leq 2N} (\lambda_q - \lambda_p) \neq 0.$$

Из невырожденности матрицы, определяющей систему линейных уравнений (1.50), следует, что вектор \mathbf{y} тождественно равен нулю, что приводит как к равенству нулю коэффициентов α_k , $k = 1, \dots, 2N$, так и коэффициентов

C_i^1, C_i^2 , $i = 1, \dots, N$, что противоречит замечанию 3. Следовательно, для любой ненулевой комбинации C_i^1, C_i^2 , $i = 1, \dots, N$, функция $SF(t)$ не имеет нулей кратности больше или равной $2N$, что является отдельным результатом, который будет усилен в главе 3. Отсюда следует, что $SF(t)$ тождественно не равна 0 ни в какой окрестности произвольного нуля t_0 . Тогда по теореме 5 все нули функции переключений $SF(t)$ изолированы, что следует еще и из общей теории для линейных задач быстрогодействия при выполнении условия общего (общности) положения, в частности, из теоремы о релейном управлении [76], которая для исследуемой задачи записывается в следующей форме.

Теорема 6 (о релейном управлении [76]). *Пусть управление $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$, оптимально в линейной задаче быстрогодействия (1.1)-(1.4). Тогда существует конечное подмножество $Z \subset [0, t_1]$, $\#Z < \infty$, такое, что $u(t) \in \{-\varepsilon, \varepsilon\}$, $t \in [0, t_1] \setminus Z$, и $u(t)|_{t \in [0, t_1] \setminus Z}$ локально постоянно.*

Условие общности положения накладывает требования на постоянные матрицы A , B уравнения (1.7) и заключается в линейной независимости следующего набора векторов в пространстве \mathbb{R}^{2N} :

$$Be, ABe, \dots, A^{2N-1}Be, \quad (1.52)$$

где вектор e имеет направление одного из ребер многогранника области управления, когда ее полагают выпуклым замкнутым ограниченным многогранником.

В рассматриваемой задаче e можно положить равным 1 (или -1) для области управления \mathbb{U} . Таким образом, условие общности положения о линейной независимости векторов

$$B, AB, \dots, A^{2N-1}B \quad (1.53)$$

совпадает с ранговым критерием Калмана (1.31) (или условием управляемости системы (1.7) при $u \in \mathbb{R}^{2N}$).

Это означает, что существует лишь конечное подмножество, на котором управление не принимает своего максимально или минимально допустимого значения. Отмечается также, что теорема справедлива, когда для линейной управляемой системы выполнен ранговый критерий Калмана (1.31), т.е. когда все частоты осцилляторов различны между собой, к чему (1.51) и было сведено доказательство, основанное на аналитичности функции $SF(t)$. \square

Лемма 6 об изолированности нулей функции переключений $SF(t)$ приводит к следующему следствию.

Следствие 2. В задаче оптимального по быстрдействию управления группой несинхронных осцилляторов (1.1)-(1.4) отсутствует особое управление [78], т.е. такое управление $u(t)$ на участке $\sigma \subset [0, T^0]$, вдоль которого выполняются следующие тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u} &\equiv 0, \\ \det \frac{\partial^2 H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), u(t))}{\partial u^2} &\equiv 0, \end{aligned} \quad (t \in \sigma). \quad (1.54)$$

Стоит отметить, что каждому нетривиальному решению $\boldsymbol{\psi}(t)$ уравнения (1.39) ставится в соответствие единственная функция $u(t)$, неизвестные постоянные коэффициенты $C_i^1, C_i^2, i = 1, \dots, N$, которой могут быть вычислены по начальному вектору сопряженной системы $\boldsymbol{\psi}(0) = (\xi_1(0), \eta_1(0), \dots, \xi_N(0), \eta_N(0))^T$.

Для исследования свойств экстремальных управлений, нахождению которых посвящена следующая глава, приводятся важные результаты из теории линейных задач быстрдействия, связанные с единственностью оптимальных и экстремальных управлений.

Для оптимальных управлений в исследуемой задаче справедливо

Замечание 4. Оптимальное управление в линейной задаче быстрдействия (1.1)-(1.4) единственно для любых начальных и конечных состояний системы.

Справедливость замечания 4 следует из [12] по следующей теореме.

Теорема 7 (о единственности оптимального управления [12]). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два оптимальных управления в линейной задаче быстрдействия с выполненным условием общности положения, заданных соответственно на отрезках $0 \leq t \leq t_1$ и $0 \leq t \leq t_2$ и переводящих точку \mathbf{x}_0 в одну и ту же точку \mathbf{x}_1 . Тогда эти управления совпадают, т.е. $t_1 = t_2$ и $u_1(t) \equiv u_2(t)$ на отрезке $0 \leq t \leq t_1$.

Перейдем к понятию экстремальных управлений.

Определение 4. Управление $u(t), 0 \leq t \leq T^0$, называется экстремальным, если оно соответствует $\boldsymbol{\psi}(t)$, некоторому нетривиальному решению сопряженной системы (1.39), удовлетворяющему условию (1.40) из необходимого условия оптимальности.

Для задачи остановки (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) можно применить теорему из [12].

Теорема 8 (о единственности экстремального управления [12]). *Если 0 является внутренней точкой области управления \mathbb{U} , $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два экстремальных управления в линейной задаче быстрогодействия с выполненным условием общности положения, заданных соответственно на отрезках $0 \leq t \leq t_1$ и $0 \leq t \leq t_2$ и переводящих точку \mathbf{x}_0 в начало координат $\mathbf{x}_{T^0} = \mathbf{0}$. Тогда эти управления совпадают, т.е. $t_1 = t_2$ и $u_1(t) \equiv u_2(t)$ на отрезке $0 \leq t \leq t_1$.*

В следующей лемме, используя связь, представленную в следствии 1, доказывается, что единственность экстремального управления справедлива не только для перевода системы (1.1) с ограничением (1.2) и критерием (1.4) в начало координат $\mathbf{x}_{T^0} = \mathbf{0}$.

Лемма 7. *Экстремальное управление в задачах остановки (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) и разгона (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) единственно.*

Доказательство. Экстремальное управление $u_1(t)$, $0 \leq t \leq T^0$, для задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.6), где осуществляется перевод колебательной системы из состояния $(q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$ в начало координат $\mathbf{x}_{T^0} = \mathbf{0}$, единственно в силу теоремы 8.

Управление $u_2(t) = u_1(T^0 - t)$, $0 \leq t \leq T^0$, переводит, согласно следствию 1, систему из начала координат в состояние $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$, причем $u_2(t)$, $0 \leq t \leq T^0$, является экстремальным управлением в соответствии с определением 4, единственность которого и требуется доказать.

Предположим противное, что существует управление $\tilde{u}_2(t)$, $0 \leq t \leq T^0$, не совпадающее с $u_2(t)$ и переводящее систему из начала координат в состояние $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$. Определим управление $u_3 = \tilde{u}_2(T^0 - t)$, $0 \leq t \leq T^0$, которое теперь переводит систему из состояния $(q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$ в начало координат. Таким образом получаются два экстремальных управления $u_1(t)$, $0 \leq t \leq T^0$, и $u_3(t)$, $0 \leq t \leq T^0$, переводящих систему из состояния $(q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$ в начало координат, что противоречит единственности экстремального управления $u_1(t)$, $0 \leq t \leq T^0$, и означает, что как в задаче остановки (1.1), (1.2), (1.4), (1.6), так и в задаче разгона (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) экстремальное управление единственно.

Объединяя лемму 7 и замечание 4 формулируется следующая лемма.

Лемма 8. *В задаче остановки (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) и разгона (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) экстремальное управление единственно и совпадает с единственным оптимальным управлением.*

Зная закон оптимального управления (1.45), можно уточнить следствие 1, а именно: поставить в соответствие управление $u(t)$ с вектором $\mathbf{C} = (C_1^1, C_1^2, \dots, C_N^1, C_N^2)$ для перевода системы из состояния $(q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$ в начало координат управлению $u_{reverse} = u(T^0 - t)$ с вектором $\mathbf{C}_{reverse}$ для разгона системы из начала координат в состояние $(q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$, которое определяется следующим вектором

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{reverse} = & (C_1^1 \cos \omega_1 T^0 + C_1^2 \sin \omega_1 T^0, C_1^1 \sin \omega_1 T^0 - C_1^2 \cos \omega_1 T^0, \dots, \\ & \dots, C_N^1 \cos \omega_1 T^0 + C_N^2 \sin \omega_1 T^0, C_N^1 \sin \omega_1 T^0 - C_N^2 \cos \omega_1 T^0). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Замечание 5. *Для задачи остановки (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) колебательной системы и разгона из начала координат (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) в произвольное состояние всегда выполнено второе требование (1.41) необходимого условия оптимальности (теорема 4).*

Как было указано ранее, проверку (1.41) можно осуществлять в любой момент t , $0 \leq t \leq T^0$:

$$\sum_{i=1}^N (\xi_i(t) p_i(t) - \eta_i(t) \omega_i^2 q_i(t)) + u^*(t) \sum_{i=1}^N \eta_i(t), \quad (1.56)$$

где второе слагаемое будет положительно в силу закона оптимального управления (1.45), а первое слагаемое всюду равно нулю для указанных постановок.

В заключение данного раздела хотелось бы отметить неприменимость теоремы А.А. Фельдбаума [12] об оценке количества переключений оптимального управления (1.45), поскольку все собственные числа матрицы A комплексные.

1.4 Иллюстрация полученных свойств множества достижимости

Для иллюстрации полученных теоретических результатов приводятся результаты численного моделирования множества достижимости $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon)$ системы (1.1) с ограничением (1.2), все траектории которой начинаются в точке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Рассматривается проекция на фазовую плоскость первого осциллятора ($\omega_1 = 1$) множества достижимости $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon)$, которая обозначается $\mathcal{A}_{q_1, p_1}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon)$.

На рис. 1.1 представлены границы $\mathcal{A}_{q_1, p_1}(1, \mathbf{0}, \varepsilon)$ для различных значений параметра ε . Границы были получены как численное решение оптимизационной задачи (на основе опорного принципа) на максимум значений $q_i(t), p_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, системы (1.32) и построены средствами языка Python.

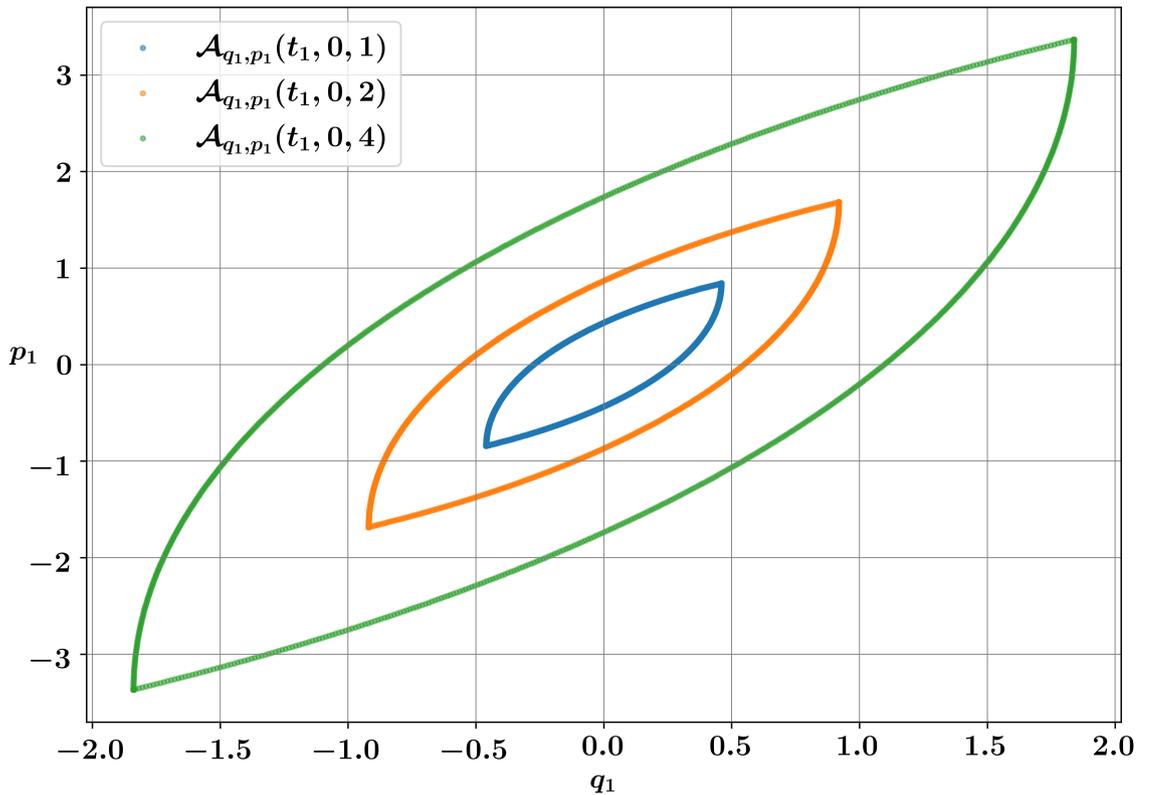


Рисунок 1.1 — Границы $\mathcal{A}_{q_1, p_1}(1, \mathbf{0}, \varepsilon)$ для $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 4$.

Рис. 1.1 иллюстрирует утверждение леммы 3 о том, что множество достижимости для большего значения ограничения на управление содержит в себе множества достижимости для меньших значений ε .

На рис. 1.2 помимо границ $\mathcal{A}_{q_1, p_1}(1, \mathbf{0}, \varepsilon)$ для $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 4$ также приведена граница $4\mathcal{A}_{q_1, p_1}(1, \mathbf{0}, 1)$.

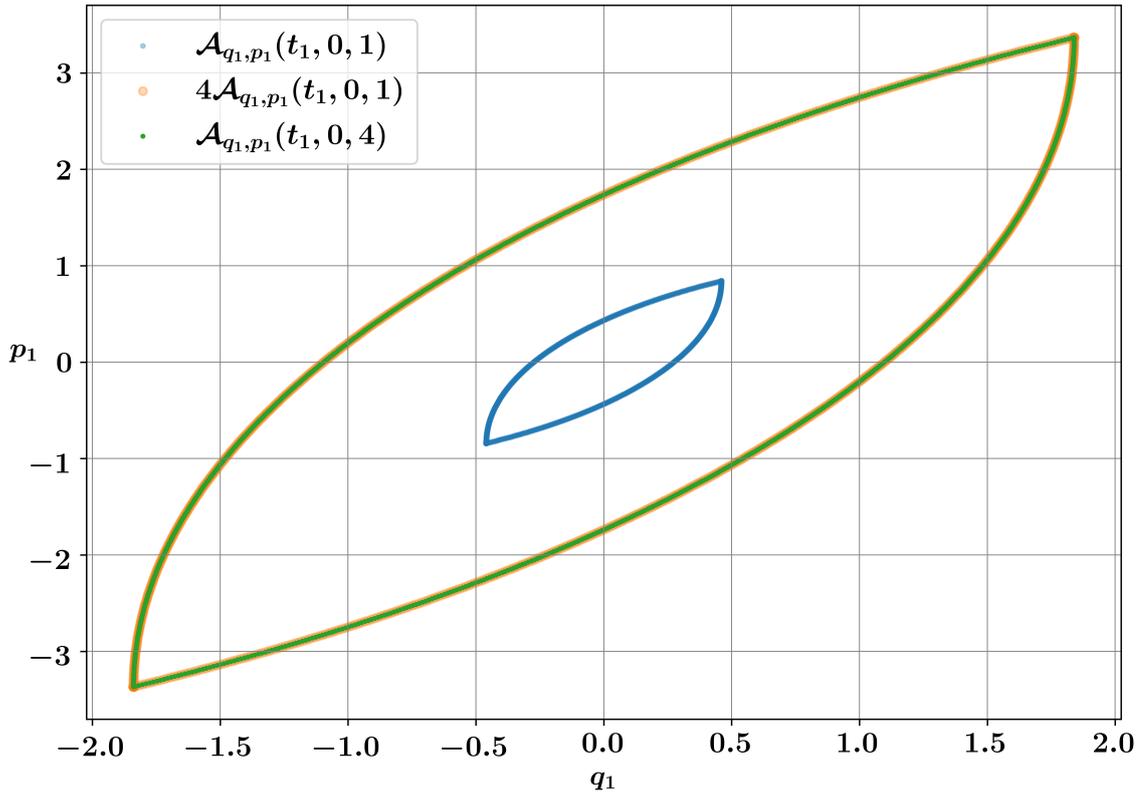


Рисунок 1.2 — Границы $\mathcal{A}_{q_1,p_1}(1, \mathbf{0}, \varepsilon)$ для $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 4$ и $4\mathcal{A}_{q_1,p_1}(1, \mathbf{0}, 1)$.

Совпадение на рис. 1.2 границ $4\mathcal{A}_{q_1,p_1}(1, \mathbf{0}, 1)$ и $\mathcal{A}_{q_1,p_1}(1, \mathbf{0}, 4)$ иллюстрирует справедливость леммы 2.

1.5 Выводы по главе 1

В данной главе была сформулирована линейная задача оптимального управления группой из N несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением (1.1), (1.2), (1.3) и критерием быстродействия (1.4), а также выделены частные постановки – задача разгона (1.5) и задача остановки (1.6). Для системы (1.1), (1.2) показаны свойства сильной достижимости (лемма 1) и глобальной управляемости (лемма 4). Справедливость лемм 2 и 3 о свойствах множества достижимости $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{x}_0, \varepsilon)$ иллюстрируются численными примерами в разделе 1.4. Применение принципа максимума Понтрягина для решения задачи быстродействия позволило установить релейную структуру закона оптимального управления (1.45). Доказано, что нули функции переключений изолированы и на любом конечном отрезке их конечное число (лемма 6), отсюда следует

отсутствие особого управления в задаче (1.1)-(1.4). Сформулировано, что оптимальное управление единственно для любых начальных и конечных состояний (замечание 4). Для задач остановки и разгона доказана единственность не только оптимального, но и экстремального управления (лемма 7). Результаты главы отражены в публикациях [22; 62—64; 66; 71].

Для поиска моментов переключения оптимального управления в следующей главе будут определены различные классы управлений и представлены дополнительные необходимые условия для системы N несинхронных осцилляторов, которые позволят исследовать решение задачи в любом заданном классе переключений релейного управления (1.45).

Глава 2. Необходимые условия экстремума для задачи быстрогодействия

Релейная структура закона оптимального управления, полученная в главе 1, позволяет записать явный вид решения уравнений динамики (1.1), учитывая количество смен знака оптимального управления (1.45). После этого ставится вопрос о поиске оптимального количества переключений управления и моментов времени, когда происходят эти переключения.

Для некоторых соотношений частот двух осцилляторов соответствующая задача решена в работе [25] в случае трех переключений. Для такого специального случая в главе приводится доказательство непрерывности критерия и длительностей интервалов управления по параметрам задачи в случае, когда число интервалов оптимального управления постоянно и равно удвоенному количеству осцилляторов. Однако при большем числе переключений одного лишь решения уравнений динамики может оказаться недостаточно для построения решения задачи оптимального управления: число неизвестных, определяющих структуру релейного управления, возрастает и требуется привлечь дополнительные соотношения.

В данной главе выводятся дополнительные необходимые условия экстремума, справедливые для любого заранее заданного количества переключений управления. Отдельный раздел посвящен исследованию случая управления с двумя переключениями, для которого получены функциональные зависимости между всеми переменными и параметрами задачи.

Описан численный алгоритм Нейштадта–Итона для поиска начального значения сопряженного вектора, который реализует итерационную коррекцию направления сопряженного вектора по величине невязки между требуемым начальным состоянием и состоянием, получаемым при интегрировании системы с управлением, построенным по текущему приближению в задаче остановки.

Полученные теоретические результаты проиллюстрированы численным моделированием.

2.1 Решение уравнений динамики для заданного количества переключений

Оптимальное управление $u^*(t)$ согласно (1.45) является релейным. Переключения управления происходят в моменты времени t_m , $m = 1, \dots, K - 1$, причем предполагается, что

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{K-1} < T^0. \quad (2.1)$$

Обозначим через τ_n длительность n -го интервала постоянства управления, $n = 1, \dots, K$:

$$\tau_1 = t_1, \tau_n = t_n - t_{n-1}, n = 2, \dots, K - 1, \tau_K = T^0 - t_{K-1}, \quad (2.2)$$

и, в силу (2.1), все длительности удовлетворяют условию $\tau_n > 0$, $n = 1, \dots, K$. Тогда $u^*(t)$ с $K - 1$ переключениями и $K \in \mathbb{N}$ интервалами постоянства управления имеет структуру, представленную на рис. 2.1. Такое управление будем относить к классу с $(K - 1)$ переключениями управления. Важное дополнение вносит замечание 4 о единственности оптимального управления задачи (1.1)-(1.4) для любых начальных и конечных состояний системы.

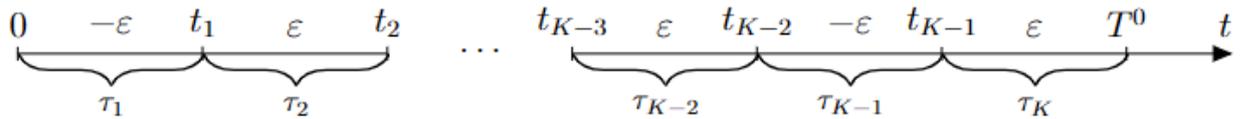


Рисунок 2.1 — Структура закона оптимального управления.

Определение 5. Под классом $K - 1$ переключений управления следует понимать такие управления, которые меняют знак $K - 1$ раз.

Учитывая структуру закона оптимального управления $u^*(t)$, можно записать решение (1.1)-(1.4) в случае, когда управление меняет знак $K - 1$ раз,

используя (1.32).

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i^{T^0} = \frac{\varepsilon(-1)^{s+1}}{\omega_i^2} \left(2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left(\omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \cos \left(\omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) - (-1)^{K-1} \right) + \\ + \frac{p_i^*}{\omega_i} \sin \omega_i T^0 + q_i^* \cos \omega_i T^0, \\ p_i^{T^0} = \frac{(-1)^s \varepsilon}{\omega_i} \left(2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left(\omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \sin \left(\omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) \right) + \\ + (p_i^* \cos \omega_i T^0 - q_i^* \omega_i \sin \omega_i T^0), \\ i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Стоит также отметить, что управление на первом интервале может быть выбрано как ε , так и $-\varepsilon$, для чего вводится параметр s , равный 0 и 1 соответственно.

Для задачи остановки (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) система (2.3) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left(\omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \cos \left(\omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) = (-1)^{K-1} + \\ + (-1)^s \frac{\omega_i^2}{\varepsilon} \left(\frac{p_i^*}{\omega_i} \sin \omega_i T^0 + q_i^* \cos \omega_i T^0 \right), \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left(\omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \sin \left(\omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) = \\ = (-1)^s \frac{\omega_i}{\varepsilon} (-p_i^* \cos \omega_i T^0 + q_i^* \omega_i \sin \omega_i T^0), \\ i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

и справедливо

Следствие 3. Система (2.4) обладает следующей симметрией: решение (τ_1, \dots, τ_K) , отвечающее управлению $u^*(t)$ для вектора начального состояния $\mathbf{x}_0 = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)^T$, соответствует $-u^*(t)$ для $-\mathbf{x}_0 = (-q_1^*, -p_1^*, \dots, -q_N^*, -p_N^*)^T$.

Хотелось бы отметить, что изначально оптимальное количество переключений для выбранных граничных условий неизвестно, поэтому поиск решения задачи сводится к проверке системы (2.3) для различных классов управления. Исследуя N несинхронных осцилляторов, можно начать с рассмотрения управления с $2N - 1$ переключениями.

Предположим, что управление с $2N - 1$ переключениями является оптимальным для задачи (1.1)-(1.4), то есть соответствует классу $2N - 1$

переключений. Тогда решение $(\tau_1, \dots, \tau_{2N})$ системы (2.3) с учетом структуры закона оптимального управления однозначно определяет моменты переключений (t_1, \dots, t_{2N-1}) и критерий задачи T^0 . Переключения оптимального релейного управления (1.45) в моменты t_m , $m = 1, \dots, 2N - 1$, приводят к следующему набору равенств:

$$\sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t_m + C_i^2 \sin \omega_i t_m = 0, \quad m = 1, \dots, 2N - 1. \quad (2.5)$$

Для компактности все уравнения (2.5) записываются в матричном виде:

$$(\mathbf{C}, \mathbf{\Omega}_m) = 0, \quad m = 1, \dots, 2N - 1, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{C} = (C_1^1, C_1^2, \dots, C_N^1, C_N^2), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{\Omega}_m = \mathbf{\Omega}(t_m) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_m) \\ \sin(\omega_1 t_m) \\ \dots \\ \cos(\omega_N t_m) \\ \sin(\omega_N t_m) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Полученные уравнения (2.5) перепишем следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_1 t_2) & \dots & \cos(\omega_1 t_{2N-2}) & \cos(\omega_1 t_{2N-1}) \\ \sin(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_2) & \dots & \sin(\omega_1 t_{2N-2}) & \sin(\omega_1 t_{2N-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cos(\omega_N t_1) & \cos(\omega_N t_2) & \dots & \cos(\omega_N t_{2N-2}) & \cos(\omega_N t_{2N-1}) \\ \sin(\omega_N t_1) & \sin(\omega_N t_2) & \dots & \sin(\omega_N t_{2N-2}) & \sin(\omega_N t_{2N-1}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \\ \vdots \\ C_N^1 \\ C_N^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Ранг матрицы размера $(2N \times (2N - 1))$, определяющей систему линейных уравнений (2.9), должен быть равен $2N - 1$, в противном случае ядро соответствующего отображения уже не будет одномерным, что противоречит единственности оптимального управления в соответствии с замечанием 4. Таким образом, вектор неизвестных постоянных коэффициентов оптимального управления \mathbf{C} находится как ненулевой вектор ядра отображения, матрица которого определяет систему (2.9), с точностью до множителя, соответствующему такому начальному управлению (параметру s), для которого изначально решалась система уравнений (2.3). Построенное управление с найденным вектором

Содержит ровно $2N - 1$ переключений в моменты t_m , $m = 1, \dots, 2N - 1$, и не имеет иных переключений, то есть такое управление должно соответствовать оптимальному управлению с указанным числом переключений. В противном случае для заданных граничных условий следует рассмотреть класс с большим числом переключений.

Поскольку (2.3) для задачи разгона не содержит явной зависимости от T^0 и начальных состояний, можно для упрощения выкладок рассматривать задачу (1.1), (1.2), (1.4) из начала координат $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ в некоторое конечное состояние $\mathbf{x}(T^0) = (q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0})^T$, а не задачу остановки колебательной системы, имея в виду связь между соответствующими управлениями согласно следствию 1. Система уравнений (2.3) для задачи разгона выписывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left(\omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \cos \left(\omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) = (-1)^{K-1} + (-1)^{s+1} \frac{q_i^{T^0} \omega_i^2}{\varepsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left(\omega_i \sum_{k=j}^K \tau_k \right) - \sin \left(\omega_i \sum_{k=1}^K \tau_k \right) = (-1)^s \frac{p_i^{T^0} \omega_i}{\varepsilon}, \\ i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Правая часть системы (2.10) не зависит от критерия задачи

$$T^0 = \sum_{k=1}^K \tau_k, \quad (2.11)$$

что и упрощает дальнейшее исследование. Якобиан J_{2N-1} системы (2.10), уравнения которой после переноса всех слагаемых в левую часть обозначаются f_1, f_2, \dots, f_{2N} , состоит из частных производных $2N$ функций с $2N$ переменными:

$$J_{2N-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_{2N}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2N}}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_{2N}}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial f_{2N}}{\partial \tau_{2N}} \end{vmatrix} = \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\begin{array}{ccc}
-2\omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -2\omega_1 \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \sin \left(\omega_1 \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -2\omega_1 \sum_{j=1}^{2N} -1^{j+1} \sin \left(\omega_1 \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) \\
2\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & 2\omega_1 \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \cos \left(\omega_1 \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) & \dots & 2\omega_1 \sum_{j=1}^{2N} -1^{j+1} \cos \left(\omega_1 \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) \\
-2\omega_2 \sin \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -2\omega_2 \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \sin \left(\omega_2 \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -2\omega_2 \sum_{j=1}^{2N} -1^{j+1} \sin \left(\omega_2 \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) \\
2\omega_2 \cos \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & 2\omega_2 \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \cos \left(\omega_2 \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) & \dots & 2\omega_2 \sum_{j=1}^{2N} -1^{j+1} \cos \left(\omega_2 \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-2\omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -2\omega_N \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \sin \left(\omega_N \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -2\omega_N \sum_{j=1}^{2N} -1^{j+1} \sin \left(\omega_N \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) \\
2\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & 2\omega_N \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \cos \left(\omega_N \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right) & \dots & 2\omega_N \sum_{j=1}^{2N} -1^{j+1} \cos \left(\omega_N \sum_{i=j}^{2N} \tau_i \right)
\end{array} \right) + \\
&+ \left(\begin{array}{ccc}
\omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) \\
-\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) \\
\omega_2 \sin \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \omega_2 \sin \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \omega_2 \sin \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) \\
-\omega_2 \cos \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -\omega_2 \cos \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -\omega_2 \cos \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) \\
-\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right)
\end{array} \right) .
\end{aligned}$$

Якобиан преобразовывается к более простой форме с помощью элементарных преобразований, от которых определитель не меняется. Из каждого столбца

вычитается каждый предыдущий столбец, за исключением первого.

$$J_{2N-1} = \begin{vmatrix} -\omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & 2\omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -2\omega_1 (-1)^{2N+1} \sin (\omega_1 \tau_{2N}) \\ \omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -2\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & 2\omega_1 (-1)^{2N+1} \cos (\omega_1 \tau_{2N}) \\ -\omega_2 \sin \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & 2\omega_2 \sin \left(\omega_2 \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -2\omega_2 (-1)^{2N+1} \sin (\omega_2 \tau_{2N}) \\ \omega_2 \cos \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -2\omega_2 \cos \left(\omega_2 \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & 2\omega_2 (-1)^{2N+1} \cos (\omega_2 \tau_{2N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & 2\omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & -2\omega_N (-1)^{2N+1} \sin (\omega_N \tau_{2N}) \\ \omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & -2\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & 2\omega_N (-1)^{2N+1} \cos (\omega_N \tau_{2N}) \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

После умножения нечетных строк (2.13) на -1 и последующей замены знака для каждого четного столбца преобразованный якобиан имеет следующий вид:

$$\frac{J_{2N-1}}{2^{2N-1} \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_N^2} = \begin{vmatrix} \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \sin \left(\omega_1 \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \sin (\omega_1 \tau_{2N}) \\ \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \cos \left(\omega_1 \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \cos (\omega_1 \tau_{2N}) \\ \sin \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \sin \left(\omega_2 \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \sin (\omega_2 \tau_{2N}) \\ \cos \left(\omega_2 \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \cos \left(\omega_2 \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \cos (\omega_2 \tau_{2N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \sin \left(\omega_N \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \sin (\omega_N \tau_{2N}) \\ \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^{2N} \tau_i \right) & \cos \left(\omega_N \sum_{i=2}^{2N} \tau_i \right) & \dots & \cos (\omega_N \tau_{2N}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos (\omega_1 T^0) & \cos (\omega_1 (T^0 - t_1)) & \dots & \cos (\omega_1 (T^0 - t_{2N-1})) \\ \sin (\omega_1 T^0) & \sin (\omega_1 (T^0 - t_1)) & \dots & \sin (\omega_1 (T^0 - t_{2N-1})) \\ \cos (\omega_2 T^0) & \cos (\omega_2 (T^0 - t_1)) & \dots & \cos (\omega_2 (T^0 - t_{2N-1})) \\ \sin (\omega_2 T^0) & \sin (\omega_2 (T^0 - t_1)) & \dots & \sin (\omega_2 (T^0 - t_{2N-1})) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos (\omega_N T^0) & \cos (\omega_N (T^0 - t_1)) & \dots & \cos (\omega_N (T^0 - t_{2N-1})) \\ \sin (\omega_N T^0) & \sin (\omega_N (T^0 - t_1)) & \dots & \sin (\omega_N (T^0 - t_{2N-1})) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \cos(\omega_1 T^0) & \sin(\omega_1 T^0) \\ \sin(\omega_1 T^0) & -\cos(\omega_1 T^0) \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 1 & \cos(\omega_1 t_1) & \dots & \cos(\omega_1 t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_1 t_1) & \dots & \sin(\omega_1 t_{2N-1}) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \cos(\omega_2 T^0) & \sin(\omega_2 T^0) \\ \sin(\omega_2 T^0) & -\cos(\omega_2 T^0) \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 1 & \cos(\omega_2 t_1) & \dots & \cos(\omega_2 t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_2 t_1) & \dots & \sin(\omega_2 t_{2N-1}) \end{array} \right) \\ \vdots \\ \left(\begin{array}{cc} \cos(\omega_N T^0) & \sin(\omega_N T^0) \\ \sin(\omega_N T^0) & -\cos(\omega_N T^0) \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} 1 & \cos(\omega_N t_1) & \dots & \cos(\omega_N t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_N t_1) & \dots & \sin(\omega_N t_{2N-1}) \end{array} \right) \end{array} \right| = \\
&= \tilde{B} \left| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & \cos(\omega_1 t_1) & \dots & \cos(\omega_1 t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_1 t_1) & \dots & \sin(\omega_1 t_{2N-1}) \\ 1 & \cos(\omega_2 t_1) & \dots & \cos(\omega_2 t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_2 t_1) & \dots & \sin(\omega_2 t_{2N-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_N t_1) & \dots & \cos(\omega_N t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_N t_1) & \dots & \sin(\omega_N t_{2N-1}) \end{array} \right) \end{array} \right|, \quad (2.14)
\end{aligned}$$

где \tilde{B} – блочно-диагональная матрица размера $(2N \times 2N)$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 T^0) & \sin(\omega_1 T^0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sin(\omega_1 T^0) & -\cos(\omega_1 T^0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 T^0) & \sin(\omega_2 T^0) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\omega_2 T^0) & -\cos(\omega_2 T^0) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos(\omega_N T^0) & \sin(\omega_N T^0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sin(\omega_N T^0) & -\cos(\omega_N T^0) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

каждый диагональный элемент B_i которой равен

$$B_i = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i T^0) & \sin(\omega_i T^0) \\ \sin(\omega_i T^0) & -\cos(\omega_i T^0) \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

причем

$$\det B_i = -1. \quad (2.17)$$

Используя свойства определителя блочно-диагональной матрицы и произведения матриц, можно представить якобиан J_{2N-1} через определитель матрицы,

состоящей из векторов Ω_m . Таким образом, равенство (2.14) представимо в виде:

$$\begin{aligned}
 J_{2N-1} &= (-1)^N 2^{2N-1} \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_N^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos(\omega_1 t_1) & \dots & \cos(\omega_1 t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_1 t_1) & \dots & \sin(\omega_1 t_{2N-1}) \\ 1 & \cos(\omega_2 t_1) & \dots & \cos(\omega_2 t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_2 t_1) & \dots & \sin(\omega_2 t_{2N-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_N t_1) & \dots & \cos(\omega_N t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_N t_1) & \dots & \sin(\omega_N t_{2N-1}) \end{vmatrix} = \\
 &= (-1)^N 2^{2N-1} \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_N^2 |\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{2N-1}|,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

где Ω_0 соответствует $t_0 = 0$.

Для дальнейшего изложения требуется записать теорему о неявной функции [79] для общего случая системы уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0, \\ \dots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

которая решается относительно y^1, \dots, y^n , то есть ищется локально эквивалентная системе (2.19) система функциональных связей

$$\begin{cases} y^1 = g^1(x^1, \dots, x^m), \\ \dots \\ y^n = g^n(x^1, \dots, x^m). \end{cases} \tag{2.20}$$

Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 x &= (x^1, \dots, x^m), \\
 y &= (y^1, \dots, y^n).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Система (2.19) обозначается через $F(x,y) = 0$, а отображение (2.20) – через $y = g(x)$.

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} (x),$$

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} (x,y), \quad (2.22)$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} (x,y).$$

Матрица $F'_y(x,y)$ квадратная и, следовательно, она обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

Теорема 9 (О неявной функции [79]). *Если отображение $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$, таково, что*

- $F \in \mathcal{C}^{(p)}(U; \mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$,
- $F(x_0, y_0) = 0$,
- $F'_y(x_0, y_0)$ – обратимая матрица,

то существуют $(m+n)$ -мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^n \subset U$, где

$$I_x^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\| < \alpha\}, \quad (2.23)$$

$$I_y^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - y_0\| < \beta\}, \quad (2.24)$$

и такое отображение $f \in \mathcal{C}^{(p)}(I_x^m; I_y^n)$, что для любой точки $(x,y) \in I_x^m \times I_y^n$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x). \quad (2.25)$$

Получив выражение для якобиана J_{2N-1} , можно применить теорему 9 о неявной функции, в результате чего формулируется следующая лемма.

Лемма 9. Критерий задачи $T^0(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0})$ и длительности $\tau_i(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0})$, $i = 1, \dots, 2N$, будут непрерывными функциями в случае, когда соответствующее оптимальное управление принадлежит классу $2N - 1$ переключений в задаче оптимального разгона (остановки) (1.1), (1.2), (1.4) для любого конечного (начального) состояния.

Доказательство. В первую очередь необходимо показать, что в предположениях леммы якобиан $J_{2N-1} \neq 0$. Как уже было отмечено ранее при рассмотрении системы уравнений (2.9), векторы $\Omega_1, \dots, \Omega_{2N-1}$ составляют линейно независимую систему из $2N - 1$ векторов для определения неизвестных постоянных коэффициентов оптимального управления – вектора \mathbf{C} , который ортогонален всем $\Omega_1, \dots, \Omega_{2N-1}$:

$$(\mathbf{C}, \Omega_i) = 0, \quad i = 1, \dots, 2N - 1. \quad (2.26)$$

Предположим противное, что якобиан (2.18) равен нулю, тогда система $2N$ векторов $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{2N-1}$ станет линейно зависимой и ядро преобразования, определяемого матрицей $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{2N-1})$, будет непусто, и существует ненулевой вектор \mathbf{W} :

$$(\mathbf{W}, \Omega_i) = 0, \quad i = 0, \dots, 2N - 1. \quad (2.27)$$

Поскольку вектор \mathbf{C} лежит в одномерном подпространстве в силу единственности оптимального управления в соответствии с замечанием 4, то \mathbf{W} пропорционален \mathbf{C} . В таком случае будет справедливо равенство

$$(\mathbf{C}, \Omega_0) = 0 \quad (2.28)$$

и управление имеет уже число переключений на 1 больше, поскольку Ω_0 отвечает дополнительному моменту переключения $t_0 = 0$, что означает изменение структуры оптимального управления. Это не входит в предпосылки леммы в соответствии с (2.1), откуда следует, что $J_{2N-1} \neq 0$.

Теорему 9 о неявной функции можно применить следующим образом при $n = 2N$:

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = f_1(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}, \tau_1, \dots, \tau_{2N}) = 0, \\ \dots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = f_{2N}(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}, \tau_1, \dots, \tau_{2N}) = 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$x = (\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}), y = (\tau_1, \dots, \tau_{2N}),$$

где f_1, f_2, \dots, f_{2N} – уравнения системы (2.10).

$$F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_{2N}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial f_{2N}}{\partial \tau_{2N}} \end{pmatrix} = J_{2N-1}. \quad (2.30)$$

Первое условие теоремы 9 выполнено, и второму условию теоремы 9 отвечает сама система (2.10). Обратимость F'_y приводит к тому, что все условия теоремы 9 о неявной функции выполнены, поэтому существует $(2N + 1 + 2N)$ -мерный интервал $I = I_x^{2N+1} \times I_{\tau_1, \dots, \tau_{2N}}^{2N}$ и непрерывное отображение на этот интервал:

$$\begin{cases} \tau_1 = g^1(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}), \\ \dots \\ \tau_{2N} = g^{2N}(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}). \end{cases} \quad (2.31)$$

Следовательно, длительности интервалов управления τ_1, \dots, τ_{2N} являются непрерывными функциями по $\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}$. Так как $T^0 = \tau_1 + \dots + \tau_{2N}$, то и T^0 является непрерывной функцией по $\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}$.

Доказанные свойства справедливы не только в задаче разгона колебательной системы (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), но и для задачи остановки (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) согласно следствию 1. \square

Перед тем как перейти к поиску условий, которые позволят рассматривать управления с любым количеством переключений, приводится раздел, посвященный классу двух переключений. Особенность данного класса заключается в том, что он может быть получен различными вырождениями в классах с большим числом переключений. Будут представлены следующие примеры: вырождение класса четырех переключений при обнулении длительности внутреннего интервала управления, переход из класса трех переключений при обнулении длительности крайнего интервала.

2.2 Класс двух переключений для задачи разгона двух осцилляторов

Рассматривается класс двух переключений для задачи разгона (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) в некоторое конечное состояние $\mathbf{x}(T^0) = (q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, 0, 0)^T$ двух осцилляторов ($N = 2$). Структура закона оптимального управления представлена на рис. 2.2.

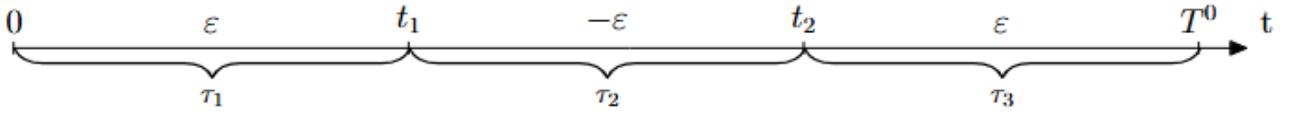


Рисунок 2.2 — Структура закона оптимального управления в классе двух переключений ($K - 1 = 2$).

Система для различных конечных состояний первого осциллятора $(q_1^{T^0}, p_1^{T^0})$ и двух переключений управления записывается на основе (2.10) в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2 \cos(\omega_1(\tau_2 + \tau_3)) + 2 \cos(\omega_1\tau_3) = 1 + (-1)^{k+1} \frac{q_1^{T^0} \omega_1^2}{\epsilon}, \\ \sin(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2 \sin(\omega_1(\tau_2 + \tau_3)) + 2 \sin(\omega_1\tau_3) = (-1)^k \frac{p_1^{T^0} \omega_1}{\epsilon}, \\ \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2 \cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) + 2 \cos(\omega_2\tau_3) = 1, \\ \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2 \sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) + 2 \sin(\omega_2\tau_3) = 0. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Если полученную систему (2.32) из четырех уравнений рассматривать относительно неизвестных $\tau_1, \tau_2, \tau_3, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}$, то, разрешив эти уравнения, можно построить кривую на фазовой плоскости первого осциллятора, соответствующую классу двух переключений, что и будет показано в разделе, посвященном моделированию. Для этого в следующей лемме приводится параметрическая зависимость $\tau_2(\tau_1)$ и $\tau_3(\tau_1)$, используя последние два уравнения системы (2.32), которые не содержат $q_1^{T^0}, p_1^{T^0}$.

Лемма 10. В классе двух переключений функциональные зависимости для длительностей интервалов управления τ_1 , τ_2 , τ_3 выглядят следующим образом:

$$\left[\begin{cases} \tau_3 = \tau_1 + \frac{2\pi z_1}{\omega_2}, z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2}{\omega_2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \frac{2\pi z_4}{\omega_2}, z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_3 = -\tau_1 + \frac{2\pi z_2}{\omega_2}, z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2\pi z_8}{\omega_2}, z_8 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right. \quad (2.33)$$

Доказательство. Рассматриваются отдельно последние два уравнения системы (2.32):

$$\cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2 \cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) = 1 - 2 \cos(\omega_2 \tau_3), \quad (2.34)$$

$$\sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2 \sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) = -2 \sin(\omega_2 \tau_3).$$

Представленные уравнения возводятся в квадрат и суммируются, что приводит к следующим равенствам

$$1 - 4 \cos(\omega_2 \tau_3) + 4 = 1 + 4 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1),$$

$$\cos(\omega_2 \tau_3) = \cos(\omega_2 \tau_1),$$

$$\cos(\omega_2 \tau_3) - \cos(\omega_2 \tau_1) = 0, \quad (2.35)$$

$$-2 \sin \left(\frac{\omega_2 \tau_3 + \omega_2 \tau_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\omega_2 \tau_3 - \omega_2 \tau_1}{2} \right) = 0.$$

Откуда следуют два периодических решения (2.35):

$$\left[\begin{cases} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, z_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \right. \quad (2.36)$$

которые для проверки подставляются в последние два уравнения системы (2.32):

$$\left[\begin{cases} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(\omega_2(2\tau_1 + \tau_2)) - 2 \cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_1)) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin(\omega_2(2\tau_1 + \tau_2)) - 2 \sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_1)) + 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0, \\ \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(\omega_2 \tau_2) - 2 \cos(\omega_2(\tau_2 - \tau_1)) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin(\omega_2 \tau_2) - 2 \sin(\omega_2(\tau_2 - \tau_1)) - 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{cases} \right. \quad (2.37)$$

Дальнейшая проверка решений (2.36) с целью исключения посторонних корней будет продолжена после нахождения дополнительных функциональных зависимостей, для чего складываются квадраты двух последних уравнений системы (2.32):

$$2 + \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2)) - 2 \cos(\omega_2 \tau_2) - \cos(\omega_2 \tau_1) = 0. \quad (2.38)$$

Преобразования в уравнении (2.38) направлены на разделение переменных.

$$2 + \cos(\omega_2 \tau_1) \cos(\omega_2 \tau_2) - \sin(\omega_2 \tau_1) \sin(\omega_2 \tau_2) - 2 \cos(\omega_2 \tau_2) = \cos(\omega_2 \tau_1),$$

$$\cos(\omega_2 \tau_2)(\cos(\omega_2 \tau_1) - 2) + 2 - \cos(\omega_2 \tau_1) = \sin(\omega_2 \tau_1) \sin(\omega_2 \tau_2), \quad (2.39)$$

$$(\cos(\omega_2 \tau_1) - 2)(\cos(\omega_2 \tau_2) - 1) = \sin(\omega_2 \tau_1) \sin(\omega_2 \tau_2).$$

После деления последнего равенства из (2.39) на $(\cos(\omega_2 \tau_1) - 2)$ и на $\sin(\omega_2 \tau_2)$ с одной стороны остаются слагаемые, зависящие только от τ_1 , а с другой стороны, — от τ_2 :

$$\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{\cos(\omega_2 \tau_1) - 2} = \frac{\cos(\omega_2 \tau_2) - 1}{\sin(\omega_2 \tau_2)}, \quad (2.40)$$

$$\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{\cos(\omega_2 \tau_1) - 2} = -\frac{1 - \cos(\omega_2 \tau_2)}{\sin(\omega_2 \tau_2)}.$$

Правая часть последнего равенства может быть переписана через формулу тангенса половинного аргумента:

$$\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{\cos(\omega_2 \tau_1) - 2} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 \tau_2}{2}\right). \quad (2.41)$$

Деление определяет еще одно возможное решение

$$\omega_2 \tau_2 = \pi z_3, z_3 \in \mathbb{Z}. \quad (2.42)$$

Из (2.41) следует выражение для τ_2 :

$$\frac{\omega_2 \tau_2}{2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}. \quad (2.43)$$

Требуется проверить решения (2.42) и (2.43) путем подстановки в систему (2.37) на наличие посторонних корней.

Случай $\omega_2 \tau_2 = \pi z_3, z_3 \in \mathbb{Z}$:

$$\left[\begin{cases} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{z_3} \cos(2\omega_2 \tau_1) - 2(-1)^{z_3} \cos(\omega_2 \tau_1) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ (-1)^{z_3} \sin(2\omega_2 \tau_1) - 2(-1)^{z_3} \sin(\omega_2 \tau_1) + 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0, \\ \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{z_3} - 2(-1)^{z_3} \cos(\omega_2 \tau_1) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ 2(-1)^{z_3} \sin(\omega_2 \tau_1) - 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{cases} \right. \quad (2.44)$$

Далее каждая система из совокупности (2.44) рассматривается по отдельности.

Первая система для нечетных $z_3 = 2z_5 + 1, z_5 \in \mathbb{Z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_5 + 1), \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ -\cos(2\omega_2 \tau_1) + 4 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ -\sin(2\omega_2 \tau_1) + 4 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.45)$$

$\omega_2 \tau_1 = \pi z_6, z_6 \in \mathbb{Z}$, является решением последнего уравнения системы (2.45), но не удовлетворяет остальным.

Первая система для четных $z_3 = 2z_5, z_5 \in \mathbb{Z}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_5), \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(2\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin(2\omega_2 \tau_1) = 0, \end{array} \right. \quad (2.46)$$

решением которой является

$$\omega_2 \tau_1 = \pi z_7, \quad z_7 \in \mathbb{Z}. \quad (2.47)$$

Вторая система для нечетных $z_3 = 2z_8 + 1$, $z_8 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_8 + 1), z_8 \in \mathbb{Z}, \\ 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ -4 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

решений не имеет.

Вторая система для четных $z_3 = 2z_8$, $z_8 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_8), z_8 \in \mathbb{Z}, \\ 1 - 2 \cos(\omega_2 \tau_1) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ 2 \sin(\omega_2 \tau_1) - 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

выполнена тождественно.

Проверка (2.43) для первой системы:

$$\begin{cases} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\omega_2 \tau_2}{2} = \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right) + \pi z_4, z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \cos\left(2\omega_2 \tau_1 + 2 \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) - 2 \cos\left(\omega_2 \tau_1 + 2 \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin\left(2\omega_2 \tau_1 + 2 \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) - 2 \sin\left(\omega_2 \tau_1 + 2 \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) + 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Используя вспомогательные равенства:

$$\begin{aligned} \cos\left(2 \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) &= \frac{4 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1) + \cos(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1)}, \\ \sin\left(2 \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) &= \frac{4 \sin(\omega_2 \tau_1) - \sin(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1)}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

можно показать, что уравнения системы (2.50) выполнены тождественно.

Проверка решения (2.43) для второй системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\omega_2 \tau_2}{2} = \arctg \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \cos \left(2 \arctg \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) \right) - 2 \cos \left(2 \arctg \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) - \omega_2 \tau_1 \right) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin \left(2 \arctg \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) \right) - 2 \sin \left(2 \arctg \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) - \omega_2 \tau_1 \right) - 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Преобразования для последнего уравнения системы (2.52):

$$\frac{4 \sin(\omega_2 \tau_1) - \sin(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1)} (1 - 2 \cos(\omega_2 \tau_1)) + 2 \sin(\omega_2 \tau_1) \left(\frac{4 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1) + \cos(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4 \cos(\omega_2 \tau_1)} - 1 \right) = 0,$$

$$2 \sin(\omega_2 \tau_1) - 5 \sin(2\omega_2 \tau_1) + 2 \sin(3\omega_2 \tau_1) = 0,$$

$$2 \sin(\omega_2 \tau_1) - 10 \sin(\omega_2 \tau_1) \cos(\omega_2 \tau_1) + 6 \sin(\omega_2 \tau_1) \cos^2(\omega_2 \tau_1) - 2 \sin^3(\omega_2 \tau_1) = 0,$$

$$\sin(\omega_2 \tau_1) (2 - 10 \cos(\omega_2 \tau_1) + 6 \cos^2(\omega_2 \tau_1) - 2 \sin^2(\omega_2 \tau_1)) = 0,$$

$$\sin(\omega_2 \tau_1) \cos(\omega_2 \tau_1) (10 + 8 \cos(\omega_2 \tau_1)) = 0. \quad (2.53)$$

Цепочка равенств приводит к следующей совокупности решений:

$$\left[\begin{array}{l} \omega_2 \tau_1 = \pi z_9, \quad z_9 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_1 = \frac{\pi}{2} + \pi z_{10}, \quad z_{10} \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Только первое решение из совокупности (2.54) удовлетворяет третьему уравнению системы (2.52), которое после преобразований принимает вид:

$$\cos(2\omega_2 \tau_1) - 2 \cos(3\omega_2 \tau_1) + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) - 8 \sin^2(\omega_2 \tau_1) = 1. \quad (2.55)$$

Все результаты объединяются в единую совокупность:

$$\left[\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = \frac{2\pi z_5}{\omega_2}, \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_1 = \frac{\pi z_7}{\omega_2}, \quad z_7 \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \end{array} \right. \right. \quad (2.56)$$

$$\left[\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2\pi z_8}{\omega_2}, \quad z_8 \in \mathbb{Z}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_1 = \frac{\pi z_9}{\omega_2}, \quad z_9 \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{array} \right. \right.$$

Для каждой из систем можно отметить, что последняя система является частным случаем всей совокупности, поэтому справедливы следующие упрощения:

$$\left[\left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2\pi z_8, \quad z_8 \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.57)$$

которые и заканчивают доказательство леммы. \square

Используя утверждение леммы 10, можно, фиксируя различные значения τ_1 , вычислить длительности τ_2 , τ_3 и построить множество точек $q_1^{T^0}$, $p_1^{T^0}$ на фазовой плоскости первого осциллятора в классе двух переключений, подставляя вычисленные длительности интервалов в первые два уравнения системы (2.32). В разделе, посвященном иллюстрации полученных теоретических результатов, будет представлен класс двух переключений на фазовой плоскости первого осциллятора.

Класс двух переключений в случае двух осцилляторов является примером, когда система (2.3) допускает установление параметрической зависимости длительностей интервалов управления между собой, что приводит к возможности построения кривых на фазовых плоскостях осцилляторов. Однако для

нахождения параметров оптимального управления с большим количеством переключений, например для перевода системы в начало координат из некоторой удаленной точки, уравнений (2.3) может быть уже недостаточно в случае, когда количество неизвестных, определяющих оптимальное управление, больше, чем уравнений системы (2.3). Для исследования управлений с большим количеством переключений приводятся следующие необходимые условия экстремума, аналогичные условиям для двух осцилляторов, полученным в [60].

2.3 Условие невырожденности управления

Для исследования случаев, когда количество неизвестных: K длительностей интервалов управления или, что то же самое, $K - 1$ моментов переключений и критерий T^0 , где K единственно при решении задачи (1.1)-(1.4) согласно замечанию 4 и удовлетворяет неравенству

$$K > 2N, \quad (2.58)$$

представлена

Теорема 10 (Необходимые условия экстремума). *Всякое решение задачи (1.1)-(1.4) в классе кусочно-непрерывных управлений (1.45) удовлетворяет системе уравнений (2.3) и дополнительным $K - 2N$ уравнениям:*

$$\begin{vmatrix} \cos(\omega_1 t_s) & \cos(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_1 t_s) & \sin(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \cos(\omega_N t_s) & \cos(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_N t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_N t_s) & \sin(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_N t_{s+2N-1}) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.59)$$

$$s = 1, \dots, K - 2N.$$

Доказательство. Переключения оптимального релейного управления (1.45) в моменты t_m , $m = 1, \dots, K - 1$, приводят к следующему набору равенств:

$$\sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t_m + C_i^2 \sin \omega_i t_m = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1. \quad (2.60)$$

Для компактности все уравнения (2.60) записываются в матричном виде:

$$(\mathbf{C}, \boldsymbol{\Omega}_m) = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1. \quad (2.61)$$

Полученные уравнения (2.60) переписываются следующим образом

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_1 t_2) & \dots & \cos(\omega_1 t_{K-2}) & \cos(\omega_1 t_{K-1}) \\ \sin(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_2) & \dots & \sin(\omega_1 t_{K-2}) & \sin(\omega_1 t_{K-1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \cos(\omega_N t_1) & \cos(\omega_N t_2) & \dots & \cos(\omega_N t_{K-2}) & \cos(\omega_N t_{K-1}) \\ \sin(\omega_N t_1) & \sin(\omega_N t_2) & \dots & \sin(\omega_N t_{K-2}) & \sin(\omega_N t_{K-1}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \\ \dots \\ C_N^1 \\ C_N^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

или в более компактной форме

$$(Z^T, \mathbf{C}^T) = 0, \quad (2.63)$$

где $Z = (\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{K-1})$.

Условия существования нетривиального вектора \mathbf{C} приводят к $K - 2N$ уравнениям вида

$$|\boldsymbol{\Omega}_s, \boldsymbol{\Omega}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{s+2N-1}| = 0, \quad s = 1, \dots, K - 2N, \quad (2.64)$$

что и заканчивает доказательство теоремы. \square

Условия существования нетривиального вектора \mathbf{C} из (2.62) эквивалентны, вообще говоря, дополнительным уравнениям в количестве C_{K-1}^{2N} штук, соответствующим всем возможным квадратным $(2N \times 2N)$ подматрицам матрицы системы уравнений (2.62).

Вводится следующее обозначение:

$$B_s = (\boldsymbol{\Omega}_s, \boldsymbol{\Omega}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{s+2N-1}), \quad s = 1, \dots, K - 2N \quad (2.65)$$

для каждого уравнения системы (2.59), достаточность которой будет установлена в следующей лемме.

Лемма 11. *Если для решения задачи (1.1)-(1.4) выполнено условие (2.59),*

$$|B_s| = |\boldsymbol{\Omega}_s, \boldsymbol{\Omega}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{s+2N-1}| = 0, \quad s = 1, \dots, K - 2N, \quad (2.66)$$

то ранг всей матрицы $Z = (\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{K-1})$ не превосходит $2N - 1$, в частности, определители всех возможных квадратных подматриц, составленных из ее столбцов, равны нулю.

Доказательство. Из свойства определителя матрицы о том, что столбцы матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда матрица вырождена и ее определитель равен нулю, следует, что столбцы матрицы B_s линейно зависимы $s = 1, \dots, K - 2N$: $\text{Rg}(B_s) \leq 2N - 1$, $s = 1, \dots, K - 2N$.

Доказательство делится на два случая. Первый соответствует предположению, что для какого-либо индекса i выполнено $\text{Rg}(B_i) \leq 2N - 2$ и соответствующие векторы $\Omega_i, \Omega_{i+1}, \dots, \Omega_{i+2N-1}$ лежат в подпространстве размерности $\leq 2N - 2$. Тогда размерность ядра отображения $B_i \geq 2$, это означает существование многомерного пространства для \mathbf{C} , что противоречит единственности оптимального управления в соответствии с замечанием 4.

Остается случай $\text{Rg}(B_s^T) = \text{Rg}(B_s) = 2N - 1$, $s = 1, \dots, K - 2N$. Тогда для каждого отображения B_s^T , $s = 1, \dots, K - 2N$, ядро одномерно, и существует ненулевой вектор $\mathbf{w}^{(s)} = (\alpha_0^{(s)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{2N-1}^{(s)})$, $s = 1, \dots, K - 2N$:

$$(B_s^T, \mathbf{w}^{(s)T}) = \mathbf{0}, \quad s = 1, \dots, K - 2N, \quad (2.67)$$

или

$$(\mathbf{w}^{(s)}, B_s) = \mathbf{0}, \quad s = 1, \dots, K - 2N, \quad (2.68)$$

причем $\mathbf{w}^{(s)}$, $s = 1, \dots, K - 2N$, определяются с точностью до ненулевого скалярного множителя.

Выберем две «соседние» матрицы $B_s = (\Omega_s, \Omega_{s+1}, \dots, \Omega_{s+2N-1})$ и $B_{s+1} = (\Omega_{s+1}, \Omega_{s+2}, \dots, \Omega_{s+2N})$. Согласно (2.68) для матрицы B_s справедливо

$$(\mathbf{w}^{(s)}, \Omega_s) = (\mathbf{w}^{(s)}, \Omega_{s+1}) = \dots = (\mathbf{w}^{(s)}, \Omega_{s+2N-1}) = 0 \quad (2.69)$$

и для B_{s+1} справедливо

$$(\mathbf{w}^{(s+1)}, \Omega_{s+1}) = (\mathbf{w}^{(s+1)}, \Omega_{s+2}) = \dots = (\mathbf{w}^{(s+1)}, \Omega_{s+2N}) = 0. \quad (2.70)$$

Общие векторы матриц B_s и B_{s+1} являются $2N - 1$ линейно независимыми векторами, которые можно объединить в матрицу $V = (\Omega_{s+1}, \Omega_{s+2}, \dots, \Omega_{s+2N-1})$. Если такой набор векторов оказался бы линейно зависимым, то $\text{Rg}(B_{s+1})$ был бы $\leq 2N - 2$, что противоречит исследуемому случаю. Линейная независимость столбцов матрицы V означает, что $\text{Rg}(V^T) = \text{Rg}(V) = 2N - 1$, и размерность ядра отображения V^T равна 1. Это означает, что любые два решения системы $(V^T, \mathbf{w}^T) = 0$ линейно зависимы, то есть пропорциональны, поэтому

$$\mathbf{w}^{(s)} = a\mathbf{w}^{(s+1)}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.71)$$

Проводя подобное рассуждение для всех матриц B_s , $s = 1, \dots, K - 2N$, можно заключить, что все $\mathbf{w}^{(s)}$, $s = 1, \dots, K - 2N$, пропорциональны одному и тому же ненулевому вектору \mathbf{w} .

Для полученного вектора \mathbf{w} справедливо:

$$(\mathbf{w}, \boldsymbol{\Omega}_m) = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1. \quad (2.72)$$

Приведенные уравнения (2.72) означают, что все столбцы $\boldsymbol{\Omega}_m$, $m = 1, \dots, K - 1$, лежат в гиперплоскости размерности $2N - 1$ ядра отображения \mathbf{w} . Следовательно, для ранга матрицы Z справедливо следующее неравенство:

$$\text{Rg}(Z) = \dim(\text{span}(\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2, \dots, \boldsymbol{\Omega}_{K-1})) \leq 2N - 1, \quad (2.73)$$

которое и завершает доказательство леммы. \square

Разрешая нелинейную систему K уравнений при выборе управления с $K - 1$ переключениями, состоящую из $2N$ уравнений системы (2.3) и $K - 2N$ уравнений (2.59), можно получить все длительности интервалов управления τ_i , $i = 1, \dots, K$, или, что то же самое, все моменты переключений t_i , $i = 1, \dots, K - 1$, и T^0 .

При рассмотрении случая $K = 2N$ вектор \mathbf{C} определялся с точностью до множителя как ненулевой вектор ядра отображения, матрица ранга $2N - 1$ которого определяет систему (2.9).

Следствие 4. *В случае $K > 2N$ отображение (2.62) содержит избыточное количество уравнений $K - 1$. Однако пропорциональность (2.71), полученная при доказательстве леммы 11, дает возможность определения \mathbf{C} с точностью до множителя через ядро любого отображения, матрица которого с рангом $2N - 1$ составлена из $2N - 1$ различных $\boldsymbol{\Omega}_i$, то есть из части столбцов матрицы, определяющей отображение (2.62).*

Для оптимального управления справедливо замечание.

Замечание 6. *Оптимальному управлению $u^*(t)$ с вектором \mathbf{C} , полученным согласно следствию 4 для любых начальных и конечных состояний в задаче (1.1)-(1.4), соответствует единственное оптимальное управление с $(K - 1)$ переключениями (из класса $(K - 1)$ переключений управления).*

Для двух осцилляторов справедливо

Замечание 7. В случае, когда $K - 1 = 4$ и $N = 2$, условие существования ненулевого вектора \mathbf{C} имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \cos(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_1 t_2) & \cos(\omega_1 t_3) & \cos(\omega_1 t_4) \\ \sin(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_2) & \sin(\omega_1 t_3) & \sin(\omega_1 t_4) \\ \cos(\omega_2 t_1) & \cos(\omega_2 t_2) & \cos(\omega_2 t_3) & \cos(\omega_2 t_4) \\ \sin(\omega_2 t_1) & \sin(\omega_2 t_2) & \sin(\omega_2 t_3) & \sin(\omega_2 t_4) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.74)$$

которое эквивалентно следующему уравнению

$$\begin{aligned} & \sin(\omega_2 \tau_4) \sin(\omega_1 \tau_2) - \sin(\omega_2(\tau_3 + \tau_4)) \sin(\omega_1(\tau_2 + \tau_3)) - \\ & - \sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) \sin(\omega_1(\tau_3 + \tau_4)) + \sin(\omega_2 \tau_3) \sin(\omega_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) + \\ & + \sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) \sin(\omega_1 \tau_3) + \sin(\omega_2 \tau_2) \sin(\omega_1 \tau_4) = 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Если $K - 1 > 4$, то существует C_{K-1}^4 (число перестановок) условий невырожденности вектора \mathbf{C} :

$$\begin{vmatrix} \cos(\omega_1 t_{m_1}) & \cos(\omega_1 t_{m_2}) & \cos(\omega_1 t_{m_3}) & \cos(\omega_1 t_{m_4}) \\ \sin(\omega_1 t_{m_1}) & \sin(\omega_1 t_{m_2}) & \sin(\omega_1 t_{m_3}) & \sin(\omega_1 t_{m_4}) \\ \cos(\omega_2 t_{m_1}) & \cos(\omega_2 t_{m_2}) & \cos(\omega_2 t_{m_3}) & \cos(\omega_2 t_{m_4}) \\ \sin(\omega_2 t_{m_1}) & \sin(\omega_2 t_{m_2}) & \sin(\omega_2 t_{m_3}) & \sin(\omega_2 t_{m_4}) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.76)$$

$$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4; \quad m_1, m_2, m_3, m_4 = 1, \dots, K - 1.$$

Тогда, чтобы найти τ_i , нужно использовать (2.3) вместе с $K - 4$ уравнениями из (2.76) согласно теореме 10.

Справедливо следующее следствие о поиске решения.

Следствие 5. Как и в разделе 2.1 оптимальное количество переключений заведомо неизвестно, поэтому подход, изложенный в теореме 10, должен применяться для различных значений $K - 1$ до тех пор, пока вектор \mathbf{C} , полученный согласно следствию 4, не будет отвечать заданному количеству переключений $K - 1$. Для задачи разгона (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) и остановки (1.1), (1.4), (1.2), (1.6) это будет означать нахождение уже оптимального решения в силу единственности оптимального и экстремального управлений в соответствии с леммой 8.

В следующем разделе будет приведен способ нахождения решения задачи (1.1)-(1.4), основанный на алгоритме Нейштадта–Итона [24], который позволит, в том числе, оценивать количество переключений для дальнейшего использования теоремы 10 только для соответствующего K .

2.4 Алгоритм поиска начального вектора сопряженной системы

Для задачи остановки (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) используется численная процедура Нейштадта–Итона, предназначенная для поиска начального вектора сопряженной системы, на основе которого строится управление, в соответствии с изложением [24].

Алгоритм Нейштадта–Итона предназначен для поиска начального вектора, обеспечивающего выполнение граничных условий задачи оптимального управления. С геометрической точки зрения данный алгоритм реализует итерационный процесс, в котором начальное приближение $\boldsymbol{\psi}(0)$ последовательно корректируется в направлении уменьшения невязки между фактическим начальным состоянием системы и состоянием, получаемым в результате интегрирования системы с управлением, порождаемым текущим приближением сопряженного вектора.

Как уже было отмечено ранее в разделе 1.3, неизвестные постоянные коэффициенты \mathbf{C} , входящие в оптимальное управление (1.45), однозначно определяются по начальному вектору $\boldsymbol{\psi}(0) = (\xi_1(0), \eta_1(0), \dots, \xi_N(0), \eta_N(0))^T$ сопряженной системы уравнений (1.39). Указанная связь между \mathbf{C} и вектором $\boldsymbol{\psi}(0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left(C_1^1, C_1^2, \dots, C_N^1, C_N^2 \right) = \\ &= \left(\eta_1(0), -\frac{\xi_1(0)}{\omega_1}, \dots, \eta_N(0), -\frac{\xi_N(0)}{\omega_N} \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Введем множество H_* , состоящее из таких векторов $\boldsymbol{\psi}(0)$, которые порождают траектории $\mathbf{x}(t)$ системы (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.6). Таким образом, задача поиска оптимального управления сводится к нахождению начального значения сопряженного вектора, принадлежащего

множеству H_* . Сопряженный вектор $\boldsymbol{\psi}(0)$ с точностью до положительного множителя определяет одно и то же управление (1.45). В связи с этим нормировка вектора $\boldsymbol{\psi}_h$ на каждом шаге алгоритма служит лишь для фиксации масштаба и не влияет на проверку условий оптимальности. Тем самым итерационный процесс фактически осуществляется в пространстве направлений сопряженных векторов.

Поиск $\boldsymbol{\psi}(0)$, основанный на итерационном алгоритме Нейштадта–Итона, приводится в виде последовательности шагов [24], которые будут приведены сразу после инициализации алгоритма.

Инициализация. Для фиксированного начального вектора \mathbf{x}_0 из (1.6) вычисляется начальный нормированный вектор

$$\boldsymbol{\psi}_0 = (\xi_1^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \dots, \xi_N^{(0)}, \eta_N^{(0)})^T = -\frac{\mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|}, \quad (2.78)$$

то есть вектор, направленный противоположно начальному состоянию системы.

Замечание 8. За начальный вектор $\boldsymbol{\psi}_0$ можно принять любой вектор, расположенный в полупространстве D , которое определяется гиперплоскостью, ортогональной вектору \mathbf{x}_0 .

Для каждого шага алгоритма вводится вектор

$$I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) = -\int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau, \quad (2.79)$$

который характеризует вклад управления, порождаемого текущим приближением сопряженного вектора $\boldsymbol{\psi}_h$, в изменение фазового состояния системы на интервале времени $[0, F(\boldsymbol{\psi}_h)]$. В задаче остановки данный вектор представляет собой значение начального состояния, которое может быть скомпенсировано соответствующим оптимальным управлением, определяемым принципом максимума Понтрягина. Сравнение $I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)$ с заданным вектором \mathbf{x}_0 естественным образом служит мерой невязки текущего приближения. Используя ранее подсчитанную матричную экспоненту (1.25) и связь (2.77), вектор (2.79) можно записать в явном виде

$$I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) = \begin{pmatrix} \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} \left(\frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1} \right) \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ - \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} (\cos \omega_1 \tau) \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ \dots \\ \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} \left(\frac{\sin \omega_N \tau}{\omega_N} \right) \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \\ - \int_0^{F(\boldsymbol{\psi}_h)} (\cos \omega_N \tau) \varepsilon \operatorname{sign} \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^{(h)} \cos \omega_i \tau - \frac{\xi_i^{(h)}}{\omega_i} \sin \omega_i \tau \right) d\tau \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

где $\boldsymbol{\psi}_h = (\xi_1^{(h)}, \eta_1^{(h)}, \dots, \xi_N^{(h)}, \eta_N^{(h)})^T$ – вектор, построенный на h -м ($h = 0, 1, \dots$) шаге алгоритма.

Момент времени $F(\boldsymbol{\psi}_h)$ определяется как решение уравнения

$$(\boldsymbol{\psi}_h, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)) = 0. \quad (2.81)$$

Уравнение (2.81) определяет момент времени $F(\boldsymbol{\psi}_h)$, при котором направление сопряженного вектора становится ортогональным невязке по начальному состоянию. Тем самым обеспечивается выбор времени интегрирования для текущего приближения сопряженного вектора.

На каждом шаге алгоритма по текущему вектору $\boldsymbol{\psi}_h$ строится траектория системы и вычисляется вектор $\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)$, который можно интерпретировать как остаток по начальному состоянию. Коррекция сопряженного вектора осуществляется в направлении этого остатка, что соответствует движению в пространстве сопряженных переменных в сторону множества H_* допустимых начальных значений.

Шаг 1. На первом шаге алгоритма производится корректировка начального приближения $\boldsymbol{\psi}_0$. Вектор $\boldsymbol{\psi}_1$ определяется в соответствии с уравнениями:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)} &= \boldsymbol{\psi}_0 - 2^{-m}(\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_0)), \\ \boldsymbol{\psi}_1 &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)}}{|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{(m)}|},\end{aligned}\tag{2.82}$$

при этом выбирается наименьшее из неотрицательных целых чисел m , для которых вектор $\boldsymbol{\psi}_1$ удовлетворяет неравенству

$$(\boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_1)) < -\frac{|\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_0)}(\boldsymbol{\psi}_0)|^2}{2^{m+1}}.\tag{2.83}$$

Параметр m определяет длину шага коррекции.

Шаг 2. Предполагая, что в этой же области индуктивно построены векторы $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_h$, следующий вектор $\boldsymbol{\psi}_{h+1}$ определяется через

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)} &= \boldsymbol{\psi}_h - 2^{-m}(\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)), \\ \boldsymbol{\psi}_{h+1} &= \frac{\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)}}{|\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{h+1}^{(m)}|},\end{aligned}\tag{2.84}$$

при этом выбирается наименьшее из неотрицательных целых чисел m , для которых вектор $\boldsymbol{\psi}_{h+1}$ удовлетворяет неравенству

$$(\boldsymbol{\psi}_{h+1}, \mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_{h+1})) < -\frac{|\mathbf{x}_0 - I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h)|^2}{2^{m+1}}.\tag{2.85}$$

Тогда либо $\boldsymbol{\psi}_h \in H_*$ для некоторого h , либо итерационный процесс приводит к бесконечной последовательности векторов $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots$, лежащих в полупространстве D и обладающих следующими свойствами [24]:

1. числа $F(\boldsymbol{\psi}_0), F(\boldsymbol{\psi}_1), F(\boldsymbol{\psi}_2), \dots$ образуют монотонно возрастающую последовательность, сходящуюся к числу T^0 ;
2. $\lim_{h \rightarrow \infty} I_{F(\boldsymbol{\psi}_h)}(\boldsymbol{\psi}_h) = \mathbf{x}_0$;
3. последовательность векторов $\boldsymbol{\psi}_0, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots$ приближается к множеству H_* .

Замечание 9 (О нахождении решения уравнения (2.81)). *Функция $(\boldsymbol{\psi}_h, \mathbf{x}_0 - I_t(\boldsymbol{\psi}_h))$ является непрерывной по переменным $\boldsymbol{\psi}_h, t$. При любом фиксированном $\boldsymbol{\psi}_h$ она монотонно возрастает по t [24]. Это свойство обеспечивает существование и единственность решения уравнения (2.81).*

На практике решение уравнения (2.81) находится путем численного поиска значения $F(\Psi_h)$. Для этого используется метод бисекции в сочетании с численным интегрированием, что обеспечивает устойчивость вычислений на каждом шаге итерационного алгоритма.

2.5 Иллюстрация полученных теоретических результатов

Для демонстрации результатов, полученных в разделах 2.1 - 2.4, проводится расчет оптимального управления для системы двух несинхронных осцилляторов ($\omega_1 = 1, \omega_2 = 1,4$) с использованием как необходимых условий экстремума в соответствии с теоремой 10, так и алгоритма Нейштадта–Итона. Здесь и далее для ограничения на управление выберем значение $\varepsilon = 0,4$.

Рассматривается множество начальных состояний системы $\mathbf{x}_0 = (q_1^*, p_1^*, 0, 0)^T$, где $|q_1^*| < 2,2$, $|p_1^*| < 1,5$, и требуется перевести систему в начало координат за минимальное время. Такая постановка удобна тем, что изменяются только координаты первого осциллятора, а второй двигается из положения равновесия и при этом влияет на структуру оптимального управления. Существенно упрощает расчеты симметрия задачи: в силу следствия 3 о связи решений при замене \mathbf{x}_0 на $-\mathbf{x}_0$ достаточно исследовать только половину рассматриваемой области.

Для классов трех ($K = 4$) и четырех ($K = 5$) переключений производится поиск решений в соответствии с теоремой 10 о необходимых условиях экстремума. Для каждого начального состояния система нелинейных уравнений численно решается с использованием библиотеки SciPy (функция `scipy.optimize.root`). По полученным моментам переключений в соответствии со следствием 4 определяется вектор коэффициентов управления \mathbf{C} и соответствующая функция переключений $SF(t)$ (1.42). После этого найденное управление дополнительно проверяется: функция переключений $SF(t)$ должна содержать ровно то число переключений, для которого проводился поиск.

Результат в виде размеченного множества начальных состояний первого осциллятора, куда также включен класс двух переключений, аналитическое описание которого будет дано далее, представлен на рис. 2.3.

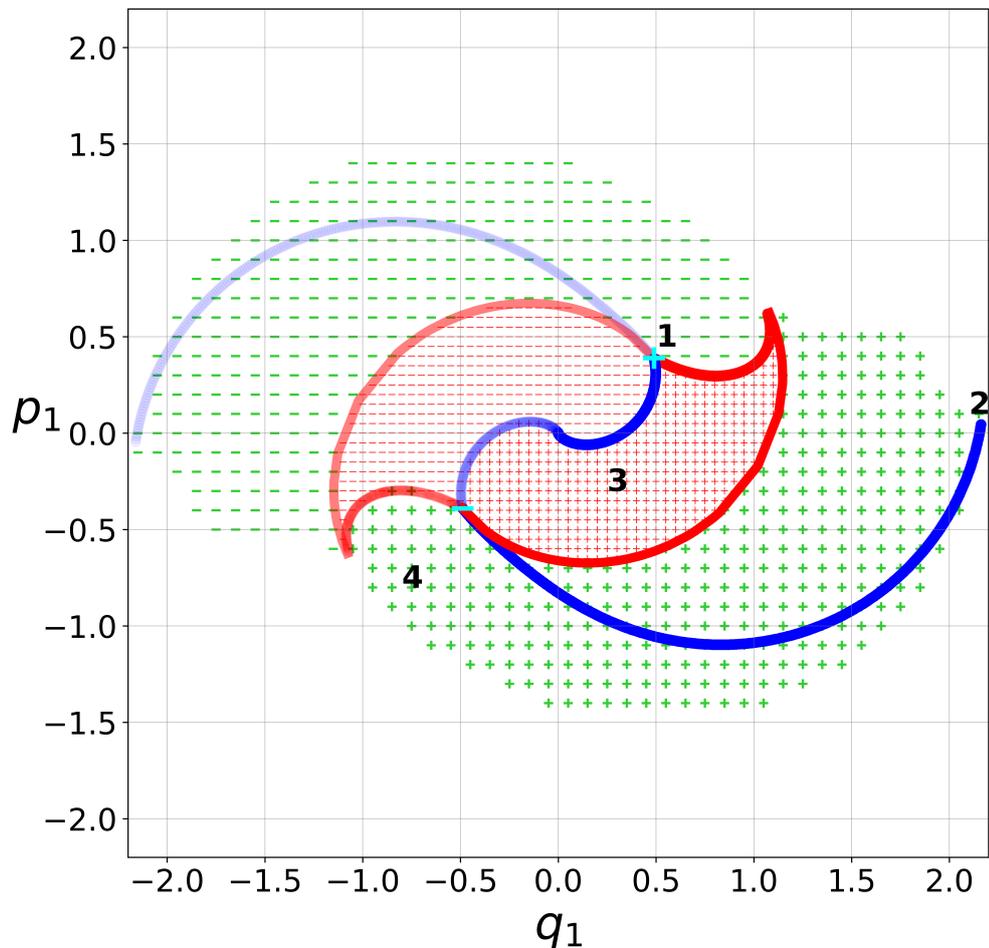


Рисунок 2.3 — Множество начальных состояний первого осциллятора для задачи остановки (теорема 10).

Количество переключений управления отмечено на графике цифрами. Изображенные плюсами и минусами точки соответствуют управлениям со значением ε и $-\varepsilon$ на первом интервале соответственно. Кривым двух переключений с высокой прозрачностью отвечают управления, принимающие отрицательные значения на первом интервале. Отмечаются следующие особенности предлагаемого подхода: отсутствие информации о допустимости использования того или иного класса управления для выбранных граничных условий, что приводит к необходимости исследования различных K , сложность поиска решения системы нелинейных уравнений порядка K (теорема 10). Однако возможно исследовать случаи различных вырождений, как например класс двух переключений, и получать аналитические конструкции для формирования границ классов, чему и отвечают синие и красные кривые на рис. 2.3.

Отдельно вырождения подробно обсуждаются для задачи разгона, когда рассматривается вышеупомянутое множество состояний в качестве уже терминального $\mathbf{x}_{T^0} = (q_1^*, p_1^*, 0, 0)^T$, где $|q_1^*| < 2,2$, $|p_1^*| < 1,5$.

На рис. 2.4 показана геометрия границ и взаимное расположение областей классов переключений. Красная и зеленая области отвечают классам трех и четырех переключений с начальным управлением $-\varepsilon$, ε соответственно. Отражение данных областей относительно начала координат приводит к голубой и оранжевой областям для трех и четырех переключений с управлением на начальном интервале ε , $-\varepsilon$ соответственно.

Классы трех переключений управления разделяются между собой параметрическими кривыми, полученными по лемме 10. Обнуление длительности внутреннего интервала управления в классе четырех переключений приводит к кривым: синяя $-z_1 = 0, z_4 = 1, k = 0$ и зеленая $-z_1 = 0, z_4 = 1, k = 1$, соответствующим классу двух переключений при различных начальных управлениях. Обнуление длительности крайнего интервала управления в классе трех переключений также приводит к классу двух переключений: оранжевая кривая $-z_1 = 0, z_4 = 0, k = 1$ и красная $-z_1 = 0, z_4 = 0, k = 0$. Желтая и серая граничные кривые получаются при переходе из класса четырех переключений в класс трех переключений путем обнуления длительности последнего интервала постоянства управления, причем управление на начальном интервале совпадает с начальным управлением в областях по обе стороны границы. Белая и фиолетовая кривые отвечают обнулению длительности первого интервала постоянства управления в классе четырех переключений, что означает переход в класс трех переключений. Начальное управление для данных кривых совпадает с начальным управлением соответствующих областей для трех переключений. Одновременному обнулению длительностей крайних интервалов постоянства управления в классе четырех переключений соответствуют голубые точки, в которых пересекаются вышеупомянутые кривые.

Также структура оптимального управления на рис. 2.3 и рис. 2.4 отвечает следствию 1.

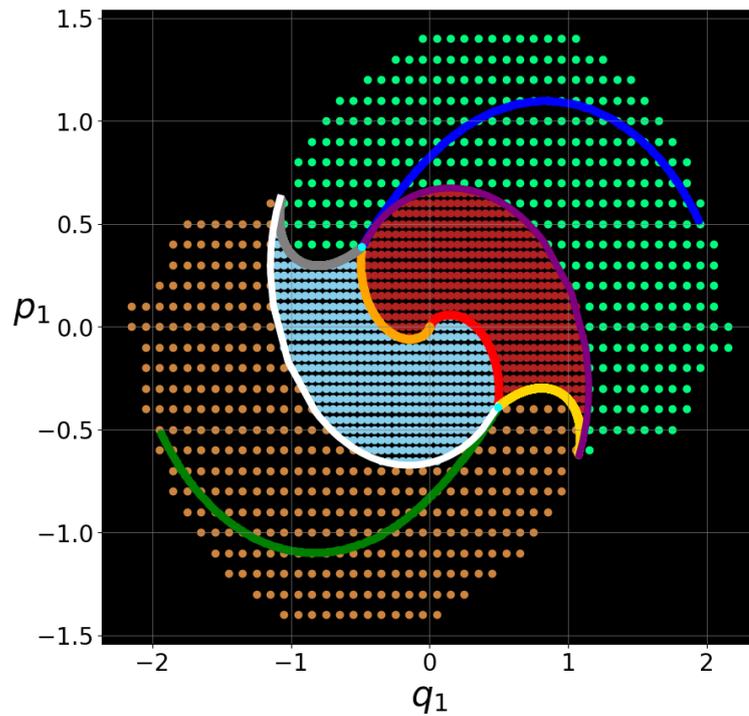


Рисунок 2.4 — Множество конечных состояний первого осциллятора для задачи разгона (необходимые условия экстремума).

Рис. 2.5 показывает зависимость критерия $T^0(p_1, q_1)$ от фазовых координат первого осциллятора.

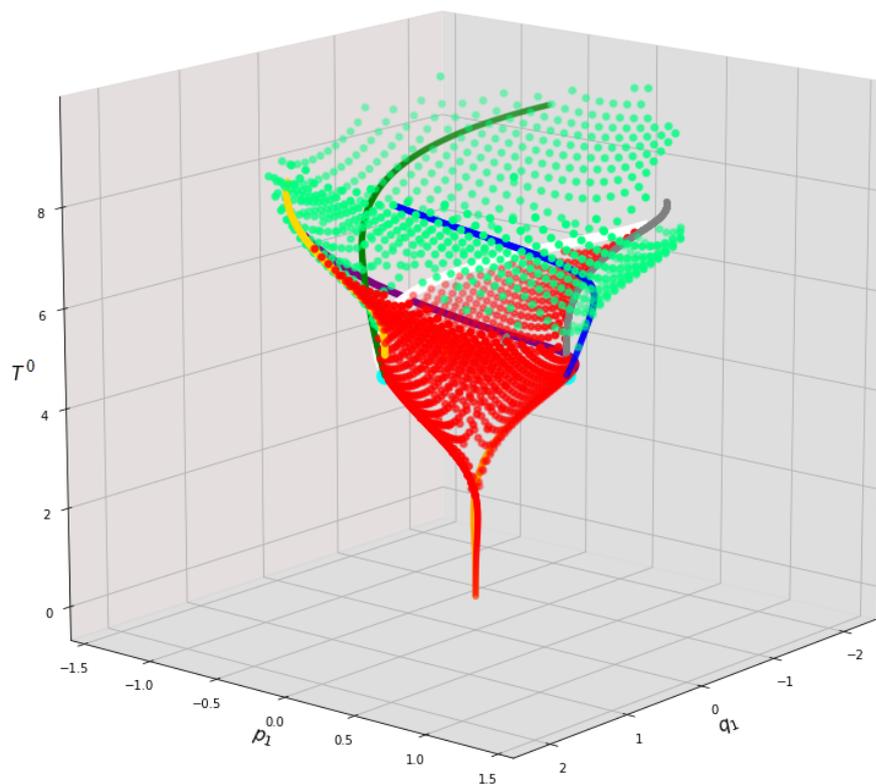


Рисунок 2.5 — Зависимость критерия $T^0(p_1, q_1)$ от фазовых координат первого осциллятора для задачи разгона.

Классы трех и четырех переключений отмечены красным и зеленым цветами. Цвета всех кривых соответствуют описанию рис. 2.4.

Теперь то же множество начальных состояний классифицируется алгоритмом Нейштадта–Итона в соответствии с разделом 2.4. В этом подходе найденное начальное значение сопряженного вектора отвечает некоторому управлению, параметры которого (количество переключений и моменты переключений) используются в качестве начального приближения решения при использовании теоремы 10 о необходимых условиях экстремума.

На рис. 2.6 приводится классифицированная плоскость первого осциллятора, полученная с использованием алгоритма Нейштадта–Итона. Основными параметрами при нахождении нового приближения ψ_h были точность определения корня уравнения (2.81) и ограничение на величину ошибки, определяемой как евклидово расстояние от конца найденной траектории до начала координат.

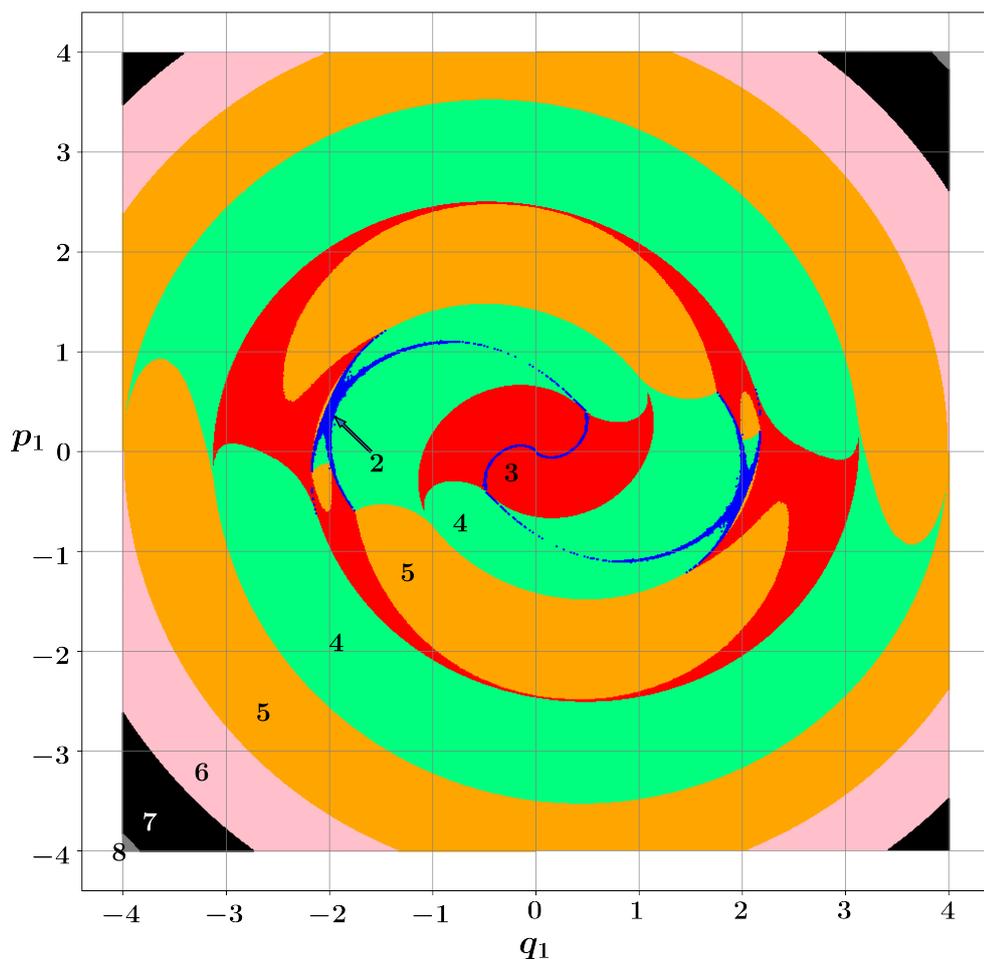


Рисунок 2.6 — Количество переключений оптимального управления в зависимости от начальных состояний первого осциллятора (алгоритм Нейштадта–Итона).

Сопоставление с результатами, найденными по необходимым условиям экстремума, показывает согласование структуры областей по числу переключений, при этом численный алгоритм дает дополнительную информацию: оценку значения критерия, моментов переключений и структуры переключений без явного перебора классов.

Каждое новое найденное значение $F(\boldsymbol{\psi}_h)$ используется в качестве начального приближения для определения $F(\boldsymbol{\psi}_{h+1})$ в силу монотонного возрастания чисел $F(\boldsymbol{\psi}_0), F(\boldsymbol{\psi}_1), \dots$, что является ключевым практическим свойством алгоритма. График функции $(\boldsymbol{\psi}_h, \mathbf{x}_0 - I_t(\boldsymbol{\psi}_h))$ для различных h при выборе начального вектора $\mathbf{x}_0 = (0,1,0,0)^T$ приводится на рис. 2.7.

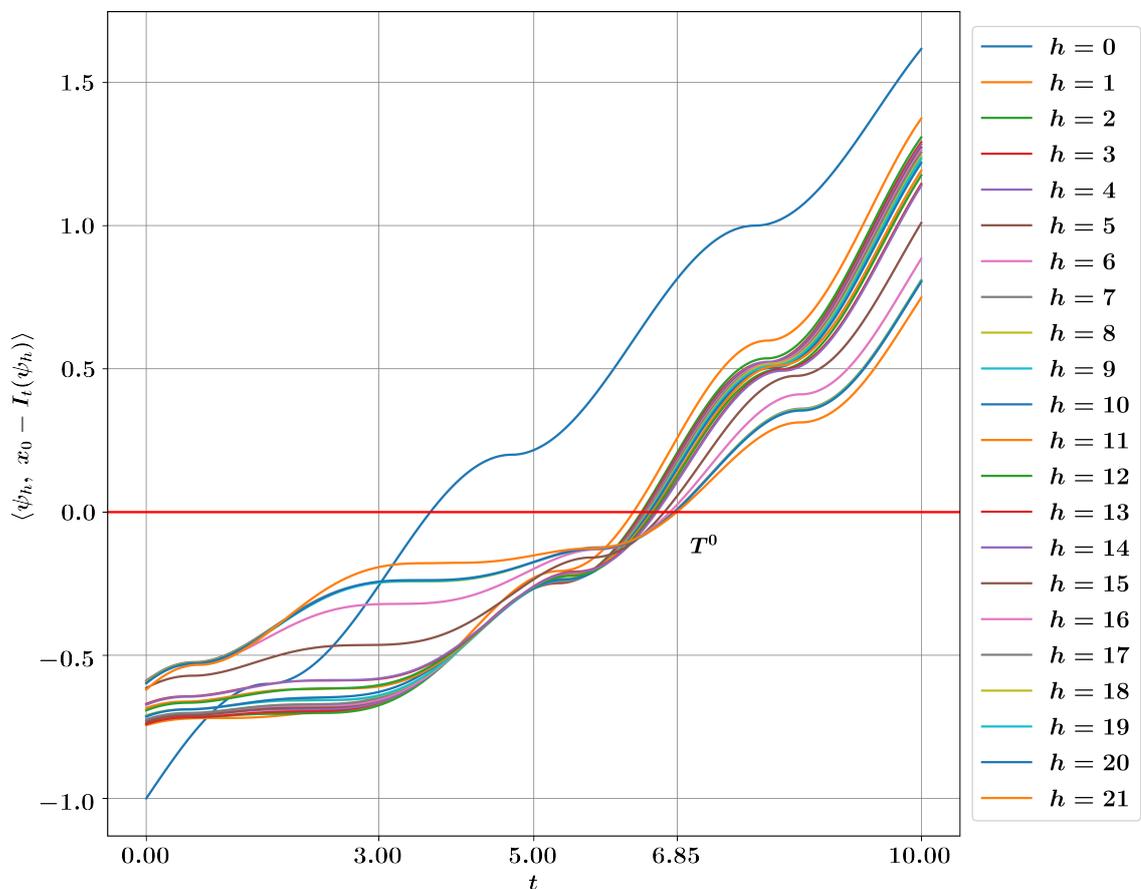


Рисунок 2.7 — График функции (2.81) для различных значений h .

На рис. 2.8 приводится анализ большего множества начальных состояний первого осциллятора, которое включает в себя 14 классов управления с учетом вырожденных классов одного и двух переключений. Цифрами на рисунке обозначено количество переключений в классе.

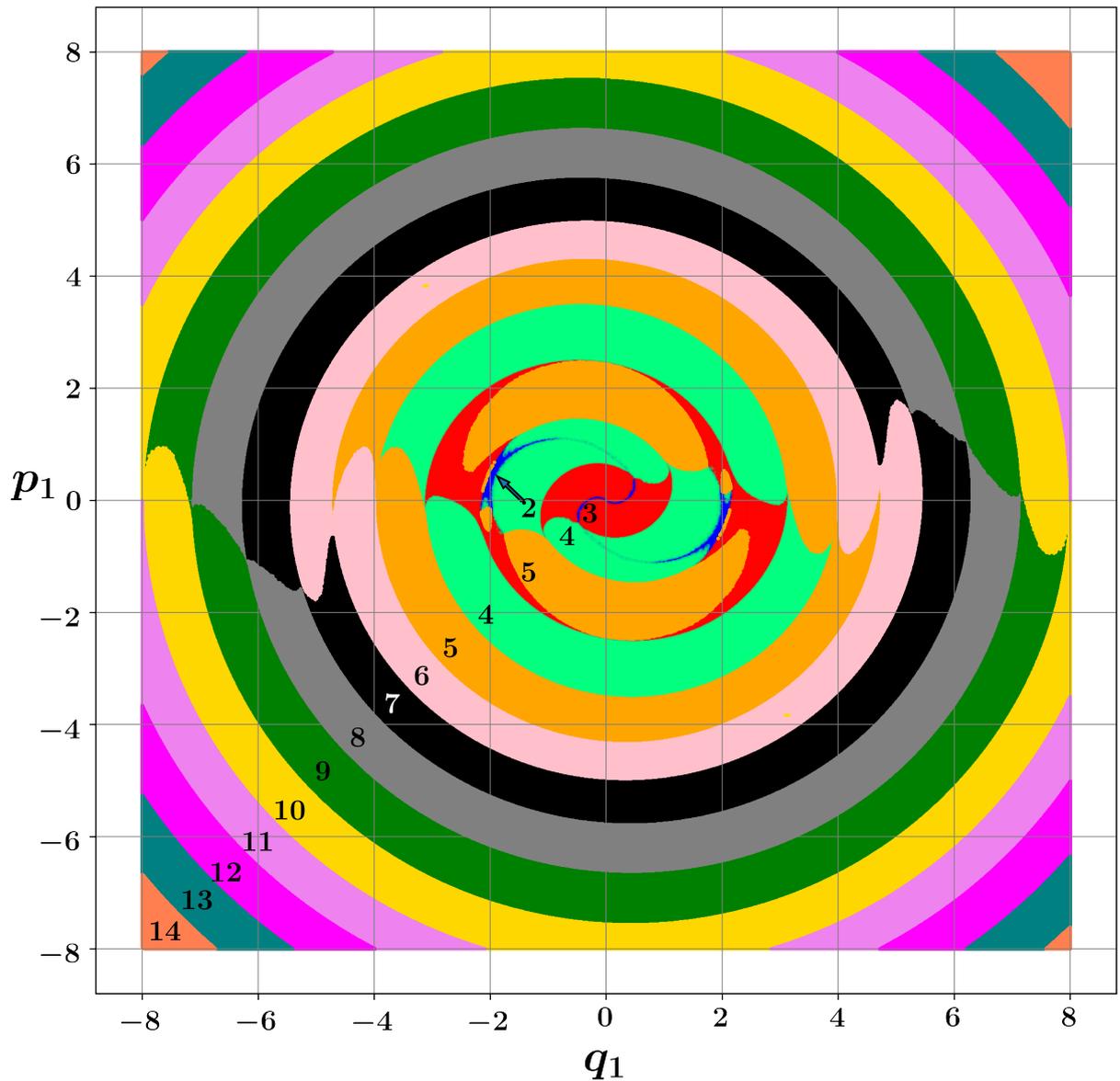


Рисунок 2.8 — Количество переключений оптимального управления в зависимости от начальных состояний первого осциллятора.

Для иллюстрации работы алгоритма Нейштадта–Итона приводится пример для четырех несинхронных осцилляторов со следующими параметрами:

$$\varepsilon = 0,4, \quad \{\omega_i\}_{i=1}^4 = \{1, 1,4, 1,7, 2\}, \quad \mathbf{x}_0 = (2, 2,5, 0, \dots, 0,0)^T. \quad (2.86)$$

В результате работы алгоритма были получены: начальный вектор сопряженной системы

$$\boldsymbol{\psi}(0) = (-0,336 \quad -0,372 \quad -0,334 \quad -0,149 \quad -0,504 \quad -0,158 \quad -0,562 \quad 0,141) \quad (2.87)$$

и критерий задачи $T^0 = 14,795$. Траектории движения осцилляторов приводятся на рис. 2.9 с общим скалярным управлением, отображенным на рис. 2.10.

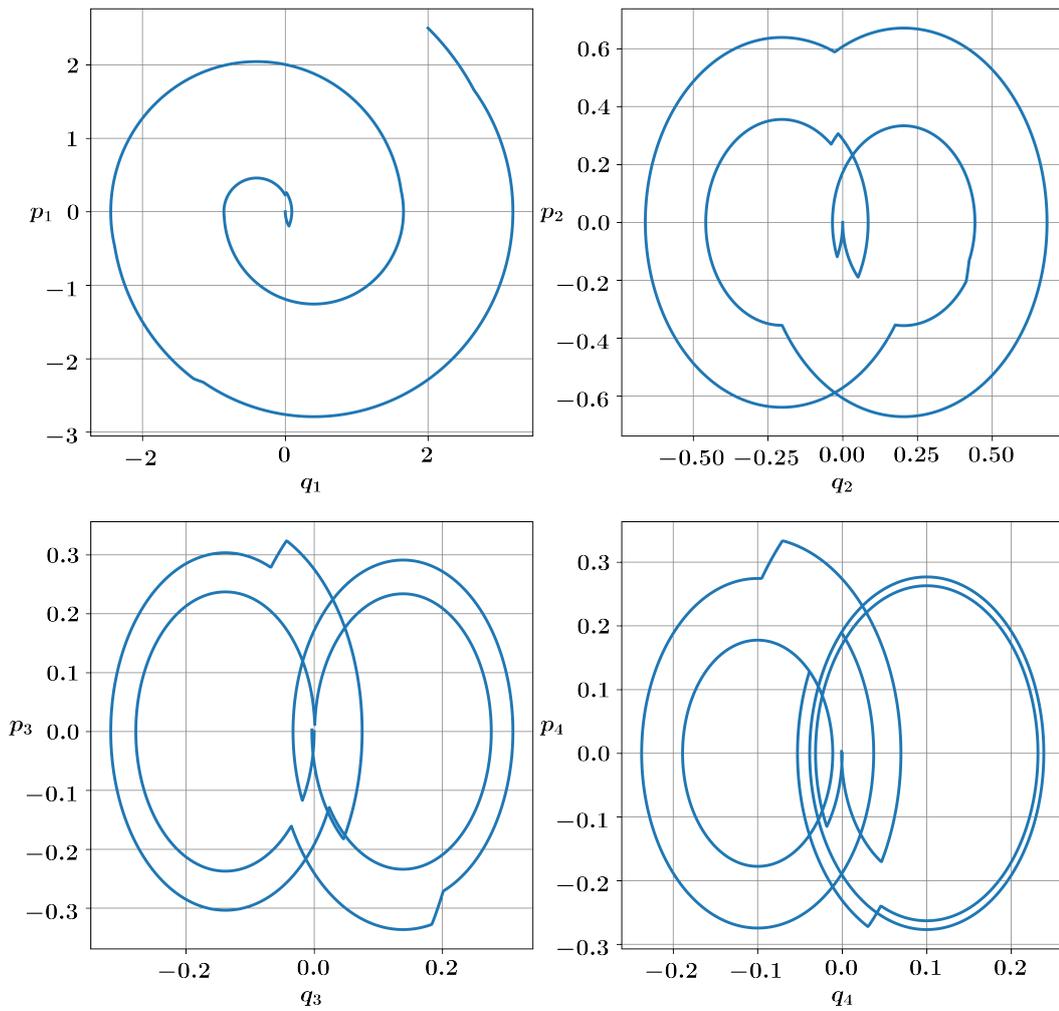


Рисунок 2.9 — Траектории на фазовых плоскостях четырех осцилляторов.

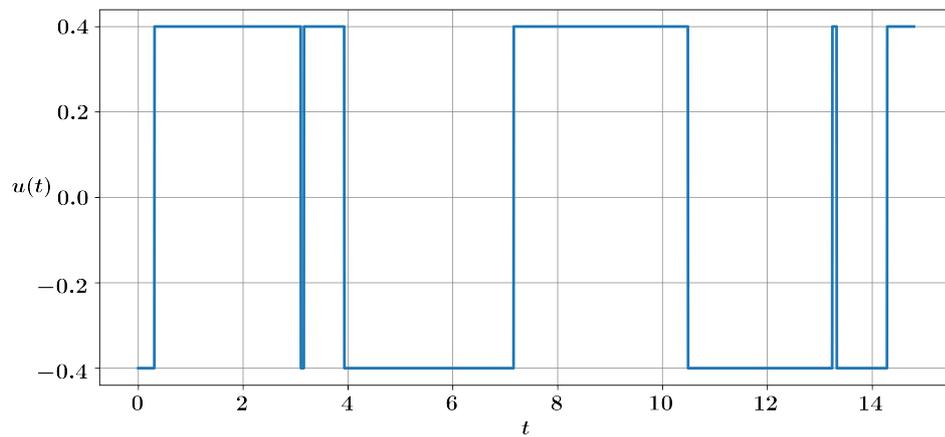


Рисунок 2.10 — Управление с девятью переключениями для системы четырех осцилляторов.

2.6 Выводы по главе 2

В главе 2 получено решение уравнений динамики для заданного количества переключений релейного управления (2.3), в том числе для задачи остановки (2.4) и разгона (2.10).

Для случая $K = 2N$ вычислен якобиан системы (2.10) по длительностям интервалов управления и было доказано, что в случае, когда оптимальное управление принадлежит классу $2N - 1$ переключений, якобиан отличен от нуля, в соответствии с чем критерий и все длительности интервалов управления непрерывно зависят от параметров задачи оптимального разгона (остановки) (лемма 9).

Получены функциональные зависимости между всеми переменными и параметрами задачи в классе двух переключений для двух несинхронных осцилляторов, сформулированные в виде леммы 10.

В общем случае $K > 2N$ выведены дополнительные условия невырожденности управления (2.59), которые совместно с решениями (2.3) составляют необходимые условия экстремума (теорема 10) и используются для исследования задачи с любым количеством переключений управления. Предложен практический способ восстановления вектора коэффициентов управления \mathbf{C} в виде следствия 4.

Для перевода группы осцилляторов в состояние покоя найдены траектории с помощью необходимых условий экстремума по теореме 10 и с использованием итерационного алгоритма Нейштадта–Итона для поиска начального значения сопряженного вектора. Проведено сравнение полученных классификаций траекторий на основе количества переключений релейного управления. Результаты работы итерационного алгоритма, такие как класс переключений, оценка критерия и моментов переключений, могут быть использованы в качестве начального приближения для поиска решения на основе необходимых условий экстремума. Множество конечных состояний траекторий из класса двух переключений было отражено при моделировании в соответствии с леммой 10.

Результаты, приведенные в данной главе, были опубликованы в [60–63; 67–72].

Глава 3. Непрерывность критерия задачи оптимального быстродействия

В разделе 2.1 для задачи оптимального разгона (остановки) (1.1), (1.2), (1.4) при фиксированном конечном (начальном) состоянии подробно рассмотрен частный, но принципиально важный случай, когда оптимальное управление имеет $2N - 1$ переключений, то есть $K = 2N$ интервалов, на которых управление постоянно. Доказанная лемма 9 о непрерывности критерия задачи и длительностей интервалов управления в указанном случае опирается только на решение уравнений (2.10), который не покрывает все возможное количество переключений оптимального управления, возникающее при изменении параметров задачи или усложнении структуры оптимального управления.

В данной главе исследуются уравнения, входящие, в соответствии с теоремой 10, в состав необходимых условий экстремума для задачи оптимального разгона (остановки) (1.1), (1.2), (1.4) при некотором конечном (начальном) состоянии несинхронных осцилляторов. Для этого выписывается якобиан системы уравнений (2.10) и условий невырожденности управления (2.59), соответствующий оптимальному управлению с $K \geq 2N$ переключениями. Применение теоремы о неявной функции позволяет доказать непрерывную зависимость не только критерия, но и каждой длительности интервалов управления от параметров задачи.

3.1 Якобиан системы уравнений динамики и условий невырожденности

Для нахождения достаточных условий непрерывности критерия $T^0(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0})$ и длительностей $\tau_i(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0})$, $i = 1, \dots, K$, интервалов управления применяется теорема о неявной функции, для которой требуется выписать якобиан системы уравнений динамики (2.10) и дополнительных условий (2.59), полученных по теореме 10 о необходимых условиях экстремума.

Уравнения системы обозначаются f_1, f_2, \dots, f_K , где f_1, f_2, \dots, f_{2N} относятся к системе уравнений (2.10) после переноса слагаемых влево, а f_{2N+1}, \dots, f_K отвечают за условия невырожденности (2.59). Якобиан J_{K-1} соответствует классу $(K-1)$ переключений управления и состоит из частных производных K функций f_1, f_2, \dots, f_K с K переменными.

$$J_{K-1} = |F'_\tau| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{2N}}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_{2N}}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial f_{2N}}{\partial \tau_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_K}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial f_K}{\partial \tau_K} \end{vmatrix} = \quad (3.1)$$

$$= \begin{pmatrix} -2\omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & -2\omega_1 \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \sin \left(\omega_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) & \cdots & -2\omega_1 \sum_{j=1}^K -1^{j+1} \sin \left(\omega_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) \\ 2\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & 2\omega_1 \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \cos \left(\omega_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) & \cdots & 2\omega_1 \sum_{j=1}^K -1^{j+1} \cos \left(\omega_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2\omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & -2\omega_N \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \sin \left(\omega_N \sum_{i=j}^K \tau_i \right) & \cdots & -2\omega_N \sum_{j=1}^K -1^{j+1} \sin \left(\omega_N \sum_{i=j}^K \tau_i \right) \\ 2\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & 2\omega_N \sum_{j=1}^2 -1^{j+1} \cos \left(\omega_N \sum_{i=j}^K \tau_i \right) & \cdots & 2\omega_N \sum_{j=1}^K -1^{j+1} \cos \left(\omega_N \sum_{i=j}^K \tau_i \right) \\ \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_K}{\partial \tau_2} & \cdots & \frac{\partial f_K}{\partial \tau_K} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \dots & \omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) \\ -\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & -\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \dots & -\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \dots & \omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) \\ -\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & -\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \dots & -\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для упрощения выкладок частные производные условий невырожденности не выписываются в явном виде. Якобиан преобразовывается к более простой форме с помощью элементарных преобразований, от которых определитель не меняется. Из каждого столбца вычитается каждый предыдущий столбец, за исключением первого.

$$J_{K-1} = \begin{vmatrix} -\omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & 2\omega_1 \sin \left(\omega_1 \sum_{i=2}^K \tau_i \right) & \dots & -2\omega_1 (-1)^{K+1} \sin(\omega_1 \tau_K) \\ \omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & -2\omega_1 \cos \left(\omega_1 \sum_{i=2}^K \tau_i \right) & \dots & 2\omega_1 (-1)^{K+1} \cos(\omega_1 \tau_K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & 2\omega_N \sin \left(\omega_N \sum_{i=2}^K \tau_i \right) & \dots & -2\omega_N (-1)^{K+1} \sin(\omega_N \tau_K) \\ \omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & -2\omega_N \cos \left(\omega_N \sum_{i=2}^K \tau_i \right) & \dots & 2\omega_N (-1)^{K+1} \cos(\omega_N \tau_K) \\ \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_2} - \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_K} - \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_{K-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_K}{\partial \tau_2} - \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial \tau_K} - \frac{\partial f_K}{\partial \tau_{K-1}} \end{vmatrix}.$$

После умножения нечетных строк полученной матрицы на -1 и последующей замены знака для каждого четного столбца, преобразованный якобиан примет следующий вид:

$$\frac{J_{K-1}}{(-1)^{\lfloor \frac{K}{2} \rfloor} 2^{2N-1} \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_N^2} = \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cccc}
\sin \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \sin \left(\omega_1 \sum_{i=2}^K \tau_i \right) & \dots & \sin (\omega_1 \tau_K) \\
\cos \left(\omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \cos \left(\omega_1 \sum_{i=2}^K \tau_i \right) & \dots & \cos (\omega_1 \tau_K) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sin \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \sin \left(\omega_N \sum_{i=2}^K \tau_i \right) & \dots & \sin (\omega_N \tau_K) \\
\cos \left(\omega_N \sum_{i=1}^K \tau_i \right) & \cos \left(\omega_N \sum_{i=2}^K \tau_i \right) & \dots & \cos (\omega_N \tau_K) \\
2 \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_1} & -\frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_2} + \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_1} & \dots & (-1)^{K+1} \left(\frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_K} - \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_{K-1}} \right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
2 \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & -\frac{\partial f_K}{\partial \tau_2} + \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & \dots & (-1)^{K+1} \left(\frac{\partial f_K}{\partial \tau_K} - \frac{\partial f_K}{\partial \tau_{K-1}} \right)
\end{array} \right| = \\
& = \left| \begin{array}{cccc}
\cos (\omega_1 T^0) & \cos (\omega_1 (T^0 - t_1)) & \dots & \cos (\omega_1 (T^0 - t_{K-1})) \\
\sin (\omega_1 T^0) & \sin (\omega_1 (T^0 - t_1)) & \dots & \sin (\omega_1 (T^0 - t_{K-1})) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cos (\omega_N T^0) & \cos (\omega_N (T^0 - t_1)) & \dots & \cos (\omega_N (T^0 - t_{K-1})) \\
\sin (\omega_N T^0) & \sin (\omega_N (T^0 - t_1)) & \dots & \sin (\omega_N (T^0 - t_{K-1})) \\
2 \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_1} & -\frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_2} + \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_1} & \dots & (-1)^{K+1} \left(\frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_K} - \frac{\partial f_{2N+1}}{\partial \tau_{K-1}} \right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
2 \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & -\frac{\partial f_K}{\partial \tau_2} + \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & \dots & (-1)^{K+1} \left(\frac{\partial f_K}{\partial \tau_K} - \frac{\partial f_K}{\partial \tau_{K-1}} \right)
\end{array} \right|.
\end{aligned}$$

Для дальнейших выкладок и исследования частного случая двух осцилляторов потребуется следующая лемма.

Лемма 12. Если квадратная матрица A размером $N \times N$ составлена из M блоков матриц A_i размером $M_i \times N$, $\sum_{i=1}^M M_i = N$, а квадратная матрица B размером $N \times N$ составлена из M блоков произведения матриц $B_i A_i$, где B_i – квадратные матрицы размером $M_i \times M_i$, то

$$\det B = \det A \prod_{i=1}^M \det B_i.$$

Доказательство. Матрица $B = \tilde{B}A$ может быть записана через матрицу A

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_M \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

и вспомогательную матрицу \tilde{B}

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_M \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

которая содержит блоки B_i , $i = 1, \dots, M$.

В силу мультипликативности определителя и свойства блочно-диагональной матрицы определитель матрицы B выглядит следующим образом:

$$\det B = \det(\tilde{B}A) = \det \tilde{B} \det A = \det A \prod_{i=1}^M \det B_i. \quad (3.5)$$

□

Лемма 12 является обобщением перехода, выполненного при вычислении J_{2N-1} в формуле (2.14).

Якобиан для класса трех переключений двух осцилляторов ($N = 2$) согласно уравнению (3.2) записывается следующим образом

$$\frac{J_3}{8\omega_1^2\omega_2^2} = \begin{vmatrix} \sin(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) & \sin(\omega_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) & \sin(\omega_1(\tau_3 + \tau_4)) & \sin(\omega_1\tau_4) \\ \cos(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) & \cos(\omega_1(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) & \cos(\omega_1(\tau_3 + \tau_4)) & \cos(\omega_1\tau_4) \\ \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) & \sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) & \sin(\omega_2(\tau_3 + \tau_4)) & \sin(\omega_2\tau_4) \\ \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) & \cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_3 + \tau_4)) & \cos(\omega_2(\tau_3 + \tau_4)) & \cos(\omega_2\tau_4) \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) имеет явный вид:

$$\begin{aligned} \frac{J_3}{8\omega_1^2\omega_2^2} &= \sin(\omega_2\tau_3) \sin(\omega_1\tau_1) - \sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) \sin(\omega_1(\tau_1 + \tau_2)) - \\ &- \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2)) \sin(\omega_1(\tau_2 + \tau_3)) + \sin(\omega_2\tau_2) \sin(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) + \\ &+ \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) \sin(\omega_1\tau_2) + \sin(\omega_2\tau_1) \sin(\omega_1\tau_3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь сравниваются выражения (3.6) и (2.74). Из сравнения их явных видов, а именно выражений (3.7) и (2.75), оказывается, что со сдвигом на единицу индекса у τ_i функциональные части этих выражений совпадают. Действительно, в выражение (3.6) входят четыре интервала управления в классе трех переключений, а в выражение (2.74) входят пять интервалов в классе четырех переключений, где первый интервал управления становится равным нулю при граничном значении ε , то есть происходит переход в класс трех переключений.

Этот результат выводится из нескольких взаимосвязанных наблюдений. Первые четыре строки матрицы (3.2) могут быть записаны через T^0 и моменты переключения как

$$S_{4,K} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 T^0) & \cos(\omega_1(T^0 - t_1)) & \dots & \cos(\omega_1(T^0 - t_{K-1})) \\ \sin(\omega_1 T^0) & \sin(\omega_1(T^0 - t_1)) & \dots & \sin(\omega_1(T^0 - t_{K-1})) \\ \cos(\omega_2 T^0) & \cos(\omega_2(T^0 - t_1)) & \dots & \cos(\omega_2(T^0 - t_{K-1})) \\ \sin(\omega_2 T^0) & \sin(\omega_2(T^0 - t_1)) & \dots & \sin(\omega_2(T^0 - t_{K-1})) \end{pmatrix} = \quad (3.8)$$

$$= (\mathbf{\Gamma}_0, \mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_{K-1})$$

и далее преобразованы к виду

$$S_{4,K} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 T^0) & \sin(\omega_1 T^0) \\ \sin(\omega_1 T^0) & -\cos(\omega_1 T^0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega_1 t_1) & \dots & \cos(\omega_1 t_{K-1}) \\ 0 & \sin(\omega_1 t_1) & \dots & \sin(\omega_1 t_{K-1}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 T^0) & \sin(\omega_2 T^0) \\ \sin(\omega_2 T^0) & -\cos(\omega_2 T^0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega_2 t_1) & \dots & \cos(\omega_2 t_{K-1}) \\ 0 & \sin(\omega_2 t_1) & \dots & \sin(\omega_2 t_{K-1}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

В матрицу $S_{4,K}$ входит матрица

$$S_K = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega_1 t_1) & \dots & \cos(\omega_1 t_{K-1}) \\ 0 & \sin(\omega_1 t_1) & \dots & \sin(\omega_1 t_{K-1}) \\ 1 & \cos(\omega_2 t_1) & \dots & \cos(\omega_2 t_{K-1}) \\ 0 & \sin(\omega_2 t_1) & \dots & \sin(\omega_2 t_{K-1}) \end{pmatrix} = (\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{\Omega}_1, \dots, \mathbf{\Omega}_{K-1}), \quad (3.10)$$

где введено обозначение $\mathbf{\Omega}_0 = (1, 0, 1, 0)^T$.

В случае трех переключений управления ($K = 4$) выполнено равенство

$$\det S_{4,4} = \det S_4. \quad (3.11)$$

По лемме 12 соответствующие матрицы в случае трех переключений управления равны

$$B = S_{4,4}, \quad A = S_4, \quad B_i = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i T^0) & \sin(\omega_i T^0) \\ \sin(\omega_i T^0) & -\cos(\omega_i T^0) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Причем $\det B_i = -1$, $i = 1, 2$, откуда и следует равенство (3.11).

Теперь видно, что для случая трех переключений управления условие $\det S_4 = 0$ возможно только при одновременном выполнении необходимых условий экстремума (2.74) и равенства $t_1 = 0$ в классе четырех переключений.

Вводится обозначение для векторов Γ_i по следующему правилу:

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1(T^0 - t_i)) \\ \sin(\omega_1(T^0 - t_i)) \\ \vdots \\ \cos(\omega_N(T^0 - t_i)) \\ \sin(\omega_N(T^0 - t_i)) \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, K-1, \quad (3.12)$$

где, по аналогии с вектором Ω_0 в уравнении (2.18), вектор Γ_0 соответствует $t_0 = 0$.

Используя лемму 12 для матриц, якобиан J_{K-1} можно свести к разложению по векторам Ω_i , $i = 0, \dots, K-1$, в соответствии со следующей леммой.

Лемма 13. *В общем случае N осцилляторов якобиан J_{K-1} (3.2) можно выписать через определители матриц размера $2N \times 2N$, составленных из Ω_i , $i = 0, \dots, K-1$.*

$$\begin{aligned} J_{K-1} &= \sum_{0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_{2N-1} \leq K-1} \alpha_{j_0, \dots, j_{2N-1}} |\Gamma_{j_0}, \Gamma_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_{2N-1}}| = \\ &= (-1)^N \sum_{0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_{2N-1} \leq K-1} \alpha_{j_0, \dots, j_{2N-1}} |\Omega_{j_0}, \Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_{2N-1}}|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Доказательство. Первая часть выражения (3.13) является разложением (3.2) по последним $K - 2N$ строкам, а первые $2N$ строки разбиваются на соответствующие миноры, число которых равно C_K^{2N} . Соответствующие коэффициенты разложения α не приводятся в явном виде, поскольку цель рассматриваемой леммы заключается в том, чтобы понять, обращается ли в нуль якобиан J_{K-1} при определенных условиях на основании разложения (3.13).

Для иллюстрации применения леммы 12 приводится следующее равенство для фиксированного набора индексов $j_0, j_1, \dots, j_{2N-1}$:

$$\begin{aligned} &|\Gamma_{j_0}, \Gamma_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_{2N-1}}| = \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\omega_1(T^0 - t_{j_0})) & \dots & \cos(\omega_1(T^0 - t_{j_{2N-1}})) \\ \sin(\omega_1(T^0 - t_{j_0})) & \dots & \sin(\omega_1(T^0 - t_{j_{2N-1}})) \\ \cos(\omega_2(T^0 - t_{j_0})) & \dots & \cos(\omega_2(T^0 - t_{j_{2N-1}})) \\ \sin(\omega_2(T^0 - t_{j_0})) & \dots & \sin(\omega_2(T^0 - t_{j_{2N-1}})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\omega_N(T^0 - t_{j_0})) & \dots & \cos(\omega_N(T^0 - t_{j_{2N-1}})) \\ \sin(\omega_N(T^0 - t_{j_0})) & \dots & \sin(\omega_N(T^0 - t_{j_{2N-1}})) \end{vmatrix} = \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \cos(\omega_1 T^0) & \sin(\omega_1 T^0) \\ \sin(\omega_1 T^0) & -\cos(\omega_1 T^0) \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \cos(\omega_1 t_{j_0}) & \dots & \cos(\omega_1 t_{j_{2N-1}}) \\ \sin(\omega_1 t_{j_0}) & \dots & \sin(\omega_1 t_{j_{2N-1}}) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} \cos(\omega_2 T^0) & \sin(\omega_2 T^0) \\ \sin(\omega_2 T^0) & -\cos(\omega_2 T^0) \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \cos(\omega_2 t_{j_0}) & \dots & \cos(\omega_2 t_{j_{2N-1}}) \\ \sin(\omega_2 t_{j_0}) & \dots & \sin(\omega_2 t_{j_{2N-1}}) \end{array} \right) \\ \vdots \\ \left(\begin{array}{cc} \cos(\omega_N T^0) & \sin(\omega_N T^0) \\ \sin(\omega_N T^0) & -\cos(\omega_N T^0) \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \cos(\omega_N t_{j_0}) & \dots & \cos(\omega_N t_{j_{2N-1}}) \\ \sin(\omega_N t_{j_0}) & \dots & \sin(\omega_N t_{j_{2N-1}}) \end{array} \right) \end{array} \right| = \\
&= \left| \tilde{B} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_{j_0}) & \dots & \cos(\omega_1 t_{j_{2N-1}}) \\ \sin(\omega_1 t_{j_0}) & \dots & \sin(\omega_1 t_{j_{2N-1}}) \\ \cos(\omega_2 t_{j_0}) & \dots & \cos(\omega_2 t_{j_{2N-1}}) \\ \sin(\omega_2 t_{j_0}) & \dots & \sin(\omega_2 t_{j_{2N-1}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\omega_N t_{j_0}) & \dots & \cos(\omega_N t_{j_{2N-1}}) \\ \sin(\omega_N t_{j_0}) & \dots & \sin(\omega_N t_{j_{2N-1}}) \end{pmatrix} \right|,
\end{aligned}$$

где \tilde{B} – блочно-диагональная матрица размера $(2N \times 2N)$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 T^0) & \sin(\omega_1 T^0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sin(\omega_1 T^0) & -\cos(\omega_1 T^0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 T^0) & \sin(\omega_2 T^0) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\omega_2 T^0) & -\cos(\omega_2 T^0) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos(\omega_N T^0) & \sin(\omega_N T^0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sin(\omega_N T^0) & -\cos(\omega_N T^0) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

каждый элемент B_i которой равен

$$B_i = \begin{pmatrix} \cos(\omega_i T^0) & \sin(\omega_i T^0) \\ \sin(\omega_i T^0) & -\cos(\omega_i T^0) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

причем

$$\det B_i = -1. \quad (3.17)$$

Используя свойства определителя блочно-диагональной матрицы и произведения матриц, равенство (3.14) можно продолжить

$$|\mathbf{\Gamma}_{j_0}, \mathbf{\Gamma}_{j_1}, \dots, \mathbf{\Gamma}_{j_{2N-1}}| = (-1)^N |\mathbf{\Omega}_{j_0}, \mathbf{\Omega}_{j_1}, \dots, \mathbf{\Omega}_{j_{2N-1}}|, \quad (3.18)$$

что и доказывает утверждение леммы. \square

Якобиан системы уравнений динамики (2.3) и дополнительных условий (2.59) будет использован в следующем разделе для исследования вопроса непрерывности критерия и длительностей интервалов управления.

3.2 Условия непрерывности длительностей интервалов управления

Непрерывность не только длительностей интервалов управления, но и критерия будет показана с помощью теоремы о неявной функции.

Продолжим исследование якобиана J_{K-1} , выражение для которого было получено в предыдущем разделе, и перепишем равенство (3.13) следующим образом:

$$\begin{aligned}
J_{K-1} &= (-1)^N \sum_{0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_{2N-1} \leq K-1} \alpha_{j_0, \dots, j_{2N-1}} |\Omega_{j_0}, \Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_{2N-1}}| = \\
&= (-1)^N \sum_{j_0, \dots, j_{2N-1} \in I_1} \alpha'_{j_0, \dots, j_{2N-1}} |\Omega_{j_0}, \Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_{2N-1}}| + \\
&\quad + (-1)^N \sum_{j_0, \dots, j_{2N-1} \in I_2} \alpha''_{j_0, \dots, j_{2N-1}} |\Omega_{j_0}, \Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_{2N-1}}|,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

где полная сумма была разделена на две части. Множество наборов индексов I_1 всегда содержит в себе нулевой элемент, которому отвечает Ω_0 . I_2 отвечает всем остальным наборам без нулевого элемента.

Для всякого решения задачи (1.1)-(1.4) и соответствующего оптимального управления с $K-1$ переключением выполнена теорема 10. Отсюда справедливы равенства (2.59) и лемма 11, что означает равенство нулю определителей для любого набора индексов без нулевого элемента

$$|\Omega_{j_0}, \Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_{2N-1}}| = 0, \quad j_0, \dots, j_{2N-1} \in I_2. \tag{3.20}$$

Тогда остается

$$J_{K-1} = (-1)^N \sum_{j_0, \dots, j_{2N-1} \in I_1} \alpha'_{j_0, \dots, j_{2N-1}} |\Omega_{j_0}, \Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_{2N-1}}|. \tag{3.21}$$

Используя выражение (3.21) показать, что $J_{K-1} \neq 0$, по аналогии с разделом 2.1 в случае $K = 2N$ не удастся, даже предположив, что каждый определитель

$\det(\Omega_{j_0}, \Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_{2N-1}}) = 0$, $j_0, \dots, j_{2N-1} \in I_1$, и получив противоречие из-за добавления переключения в момент $t = 0$, поскольку остается неизвестным поведение коэффициентов $\alpha'_{j_0, \dots, j_{2N-1}}$. Поэтому доказательство леммы о непрерывности критерия и длительностей интервалов управления, которой и посвящен текущий раздел, будет проведено из других предпосылок, путем доказательства того, что кратность нулей функции переключения $SF(t)$ равна единице (простые нули). Этот результат усиливает ранее полученный при доказательстве леммы 6 о том, что функция $SF(t)$ не имеет нулей кратности больше или равной $2N$, и оформляется в виде леммы.

Вводится определение внутренней точки класса переключений.

Определение 6. Пусть $\theta = (\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, \dots, q_N^{T_0}, p_N^{T_0})$ – вектор параметров задачи (1.1)-(1.4), и пусть $u^*(\cdot, \theta)$ – соответствующее оптимальное управление. Будем говорить, что управление $u^*(\cdot, \theta_0)$ является внутренней точкой класса $K - 1$ переключений, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех θ , удовлетворяющих $\|\theta - \theta_0\| < \delta$, соответствующее оптимальное управление $u^*(\cdot, \theta)$ имеет ровно $K - 1$ переключений.

Лемма 14. Нули функции переключений $SF(t) = \sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t + C_i^2 \sin \omega_i t$, соответствующие моментам переключений оптимального управления, являющегося внутренней точкой класса $K - 1$ переключений в задаче (1.1)-(1.4), могут быть только простыми.

Доказательство. Пусть t_m – момент переключения, то есть $SF(t_m) = 0$ и знак $SF(t)$ меняется при переходе через t_m .

Требуется показать, что кратность нулей $SF(t)$ равна единице. Это означает, что уже для первой производной верно

$$SF'(t_m) \neq 0. \quad (3.22)$$

Предположим противное, что $SF'(t_m) = 0$, тогда кратность нуля строго больше единицы, что означает существование минимального целого $r \geq 2$: $SF^{(r)}(t_m) \neq 0$. Справедливо разложение по формуле Тейлора в окрестности точки t_m :

$$SF(t) = \frac{SF^{(r)}(t_m)}{r!} (t - t_m)^r + o(|t - t_m|^r). \quad (3.23)$$

Вводятся обозначения

$$a = \frac{SF^{(r)}(t_m)}{r!}, R(t) = o(|t - t_m|^r). \quad (3.24)$$

Для остаточного члена $R(t)$ справедливо, что для любого $\tilde{\varepsilon} > 0$ существует $\delta > 0$:

$$\forall t, 0 < |t - t_m| < \delta : |R(t)| \leq \tilde{\varepsilon}|t - t_m|^r. \quad (3.25)$$

Положим $\tilde{\varepsilon} = \frac{|a|}{2}$, поскольку $a \neq 0$, и получим оценку согласно (3.25):

$$|R(t)| \leq \frac{|a|}{2}|t - t_m|^r. \quad (3.26)$$

Теперь можно рассмотреть два случая: r нечетно и четно.

В случае четного значения r : $(t - t_m)^r = |t - t_m|^r > 0$ для $t \neq t_m$. Из (3.26) следует, что $\forall t, 0 < |t - t_m| < \delta$:

$$SF(t) = a|t - t_m|^r + R(t) \quad (3.27)$$

и потому

$$\text{sign}(a)SF(t) \geq |a||t - t_m|^r - |R(t)| \geq |a||t - t_m|^r - \frac{|a|}{2}|t - t_m|^r = \frac{|a|}{2}|t - t_m|^r > 0. \quad (3.28)$$

Следовательно, знак $SF(t)$ в проколотой окрестности t_m постоянен и равен $\text{sign}(a)$, то есть смены знака в t_m нет. Это противоречит тому, что t_m является моментом переключения. Значит r не может быть четным.

В случае нечетного значения r :

$$\text{sign}(a(t - t_m)^r) = \begin{cases} -\text{sign}(a), & t < t_m, \\ +\text{sign}(a), & t > t_m, \end{cases} \quad (3.29)$$

и смена знака у $SF(t)$ в t_m есть. По условию леммы рассматривается оптимальное управление задачи (1.1)-(1.4) с фиксированными ограничениями на управление и граничными условиями, которое является внутренней точкой класса $K - 1$ переключений. Это означает, что для других параметров задачи из некоторой окрестности оптимальное управление также будет принадлежать классу $K - 1$ переключений (не его границе), т.е. при достаточно малых изменениях параметров задачи структура переключений не меняется. Тогда можно взять малое κ и рассмотреть возмущенную функцию

$$SF_\kappa(t) = SF(t) + \kappa, \quad (3.30)$$

где $\kappa = \text{sign}(a)\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$. Теперь можно показать, что сколь угодно малое изменение $SF(t)$ путем добавления κ , соответствующее малому изменению параметров задачи, приведет к тому, что в окрестности t_m не будет переключения.

Тогда $\forall t : 0 < |t - t_m| < \delta$ справедливо неравенство

$$\text{sign}(a)SF_{\kappa}(t) = \text{sign}(a)SF(t) + \varepsilon_0 = \text{sign}(a)(a(t - t_m)^r + R(t)) + \varepsilon_0. \quad (3.31)$$

Отдельно рассматривается

$$\begin{aligned} \text{sign}(a)(a(t - t_m)^r + R(t)) &\geq -|\text{sign}(a)(a(t - t_m)^r + R(t))| = \\ &= -|(a(t - t_m)^r + R(t))| \geq -(|a||t - t_m|^r + |R(t)|) \geq \\ &\geq -(|a||t - t_m|^r + \frac{|a|}{2}|t - t_m|^r) = -\frac{3|a|}{2}|t - t_m|^r. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Следовательно

$$\text{sign}(a)SF_{\kappa}(t) \geq -\frac{3|a|}{2}|t - t_m|^r + \varepsilon_0. \quad (3.33)$$

Если теперь выбрать $\rho : 0 < \rho < \delta$ так, чтобы

$$\frac{3|a|}{2}|\rho|^r < \varepsilon_0, \quad (3.34)$$

тогда $\forall t : 0 < |t - t_m| < \rho$ имеем

$$\text{sign}(a)SF_{\kappa}(t) > 0, \quad (3.35)$$

то есть для всех t на интервале $(t_m - \rho, t_m + \rho)$

$$SF_{\kappa}(t) \neq 0. \quad (3.36)$$

Таким образом, сколь угодно малое возмущение функции (добавление κ) уничтожает нуль $SF(t)$ в окрестности t_m . Это означает, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи соответствующее переключение исчезает, что означает нахождение на границе класса переключений (где некоторые $\tau_j \rightarrow 0$). Но по предположению рассматривается внутренняя точка фиксированного класса, поэтому такой случай невозможен.

Итак, оба случая $r \geq 2$ приводят к противоречию, следовательно, кратность нуля равна 1, то есть $SF'(t_m) \neq 0$. \square

Следующая лемма о непрерывности критерия задачи и длительностей интервалов справедлива для любых граничных условий (1.3) задачи (1.1), (1.2), (1.4), поскольку исследуется система уравнений (2.3).

Лемма 15. Критерий задачи $T^0(\theta)$, а также все длительности $\tau_i(\theta), i = 1, \dots, K$, будут непрерывными функциями в случае, когда соответствующее оптимальное управление является внутренней точкой класса $K - 1$ переключений в задаче (1.1)-(1.4) при $K \geq 2N$.

Доказательство. Теорему 9 о неявной функции можно применить для решаемой задачи следующим образом. Пусть $n = K$, тогда

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = f_1(\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, \dots, q_N^{T_0}, p_N^{T_0}, \tau_1, \dots, \tau_K) = 0, \\ \dots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = f_K(\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, \dots, q_N^{T_0}, p_N^{T_0}, \tau_1, \dots, \tau_K) = 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

$$x = (\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, \dots, q_N^{T_0}, p_N^{T_0}), \quad y = (\tau_1, \dots, \tau_K),$$

где f_1, f_2, \dots, f_K обозначают уравнения систем (2.3), (2.59) после переноса всех слагаемых в левую часть. В случае $K = 2N$ используется только система (2.3).

$$F'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_K} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_K}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial f_K}{\partial \tau_K} \end{pmatrix} (x, y). \quad (3.38)$$

Первое условие теоремы 9 выполнено, и для решения задачи оптимального управления справедлива теорема 10, что влечет за собой выполнение второго условия теоремы 9. Обратимость F'_y требует условия $\det(F'_y) \neq 0$.

Требуется показать, что $\det(F'_y) \neq 0$. Предположим противное, что $\det(F'_y) = 0$. Это означает, что F'_y определяет отображение с непустым ядром, следовательно, существует ненулевой вектор вариаций $\delta\tau$:

$$F'_y \delta\tau = 0, \quad (3.39)$$

каждая компонента которого определяет вариацию соответствующего момента переключения $t_m = \tau_1 + \dots + \tau_m, m = 1, \dots, K - 1$:

$$dt_m = \sum_{k=1}^m \delta\tau_k. \quad (3.40)$$

Вектор коэффициентов оптимального управления зависит неявно от моментов переключений, только после нахождения которых \mathbf{C} определяется в соответствии со следствием 4. Моменты t_m определяются условиями переключений

$$SF(t_m) = (\mathbf{C}, \mathbf{\Omega}_m) = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1. \quad (3.41)$$

Выписывается полный дифференциал (3.41) для каждого m :

$$0 = d(SF(t_m)) = (d(\mathbf{C}), \boldsymbol{\Omega}(t_m)) + (\mathbf{C}, \boldsymbol{\Omega}'(t_m))dt_m, \quad m = 1, \dots, K - 1. \quad (3.42)$$

В силу единственности оптимального управления пространство векторов \mathbf{C} одномерно, следовательно, $d(\mathbf{C}) = \lambda \mathbf{C}$ для некоторого ненулевого скаляра λ , откуда

$$(d(\mathbf{C}), \boldsymbol{\Omega}(t_m)) = \lambda(\mathbf{C}, \boldsymbol{\Omega}(t_m)) = 0, \quad m = 1, \dots, K - 1, \quad (3.43)$$

в силу (3.41).

Выражение (3.42) преобразуется к виду

$$0 = (\mathbf{C}, \boldsymbol{\Omega}'(t_m))dt_m = SF'(t_m)dt_m, \quad m = 1, \dots, K - 1. \quad (3.44)$$

Используя лемму 14 о простоте нулей функции переключений, получаем $SF'(t_m) = (\mathbf{C}, \boldsymbol{\Omega}'(t_m)) \neq 0$, $m = 1, \dots, K - 1$. Из (3.44) следует как $dt_m = 0$, $m = 1, \dots, K - 1$, так и $\delta\tau_j = 0$, $j = 1, \dots, K - 1$. Кроме того, поскольку оптимальное значение $T^0 = \sum_{j=1}^K \tau_j$ фиксировано, имеем

$$\delta T^0 = \sum_{j=1}^K \delta\tau_j = 0. \quad (3.45)$$

Из (3.45) следует, что $\delta\tau_K = 0$. Следовательно, $\delta\tau = 0$, что противоречит существованию ненулевого $\delta\tau$ в (3.39), откуда заключается, что предположение $\det(F'_y) = 0$ неверно.

Все условия теоремы о неявной функции выполнены, поэтому существует $(4N + 1 + K)$ -мерный интервал $I = I_x^{4N+1} \times I_{\tau_1, \dots, \tau_K}^K$ и непрерывное отображение на этот интервал:

$$\begin{cases} \tau_1 = g^1(\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}), \\ \dots \\ \tau_K = g^K(\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}). \end{cases} \quad (3.46)$$

Следовательно, длительности интервалов управления τ_1, \dots, τ_K являются непрерывными функциями по $\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}$. Так как $T^0 = \tau_1 + \dots + \tau_K$, то и T^0 является непрерывной функцией по $\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \dots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}$. \square

Для критерия задачи справедлива непрерывность для всех $\varepsilon > 0$, а не только для внутренних точек оптимального класса фиксированного количества переключений. Приводится вспомогательная лемма о монотонности критерия задачи по параметру ε .

Лемма 16. Пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, тогда для оптимального времени задачи (1.1)-(1.4) выполнено

$$T^0(\varepsilon_2) \leq T^0(\varepsilon_1). \quad (3.47)$$

Доказательство. Из включения отрезков

$$[-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \subset [-\varepsilon_2, \varepsilon_2] \quad (3.48)$$

следует, что всякое управление, допустимое при ограничении $|u(t)| \leq \varepsilon_1$, допустимо и при ограничении $|u(t)| \leq \varepsilon_2$. Для $T^0(\varepsilon_1)$ соответствующее оптимальное управление u_1 , $|u_1(t)| \leq \varepsilon_1$ на $[0, T^0(\varepsilon_1)]$, переводит систему из $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ в $\mathbf{x}(T^0(\varepsilon_1)) = \mathbf{x}_{T^0}$. По (3.48) это же управление допустимо и при ε_2 , поэтому точка \mathbf{x}_{T^0} достижима при параметре ε_2 за время $T^0(\varepsilon_1)$. Следовательно, минимальное время при ε_2 не превосходит этого времени, то есть (3.47) выполнено. \square

Теорема 11. Оптимальное время $T^0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, +\infty)$ - непрерывная функция в задаче (1.1)-(1.4).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_0 > 0$ и обозначим

$$T_0 = T^0(\varepsilon_0). \quad (3.49)$$

Из леммы 16 следует, что функция $T^0(\varepsilon)$ монотонно не возрастает на $(0, +\infty)$, и потому в точке ε_0 по теореме о пределах монотонных функций [80] существуют односторонние пределы

$$T_-(\varepsilon_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 - 0} T^0(\varepsilon), \quad T_+(\varepsilon_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 + 0} T^0(\varepsilon). \quad (3.50)$$

Монотонность также дает неравенства

$$T_-(\varepsilon_0) \geq T^0(\varepsilon_0) \geq T_+(\varepsilon_0). \quad (3.51)$$

Достаточно доказать, что оба неравенства в (3.51) являются равенствами.

Пусть u_0 — оптимальное управление при ε_0 и времени T_0 , а $\mathbf{x}_0(t)$ — соответствующая траектория, так что

$$\mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0(T_0) = \mathbf{x}_{T^0}, \quad |u_0(t)| \leq \varepsilon_0. \quad (3.52)$$

Докажем равенство $T_+(\varepsilon_0) = T^0(\varepsilon_0)$. Возьмем произвольное $\eta > 0$ и положим $t_1 = \eta$. Для каждого $\varepsilon > \varepsilon_0$ рассмотрим масштабированное управление

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} u_0(t), \quad t \in [0, T_0], \quad (3.53)$$

тогда $|u_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. Пусть $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ — решение системы при управлении u_ε и начальном условии $\mathbf{x}_\varepsilon(0) = \mathbf{x}_0$. Положим

$$\Delta(\varepsilon) = \mathbf{x}_\varepsilon(T_0) - \mathbf{x}_{T^0}. \quad (3.54)$$

По формуле (1.20) имеем

$$\Delta(\varepsilon) = \int_0^{T_0} e^{A(T_0-\tau)} B (u_\varepsilon(\tau) - u_0(\tau)) d\tau. \quad (3.55)$$

Из (3.53) следует

$$\Delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_0^{T_0} e^{A(T_0-\tau)} B u_0(\tau) d\tau, \quad (3.56)$$

и потому существует $C_0 > 0$ такое, что

$$\|\Delta(\varepsilon)\| \leq C_0 |\varepsilon - \varepsilon_0|, \quad \Delta(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 + 0, \quad (3.57)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в \mathbb{R}^{2N} .

Рассмотрим множество достижимости $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, \varepsilon)$ из нуля за время t_1 . Из свойства сильной достижимости согласно лемме 1 множество $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, 1)$ имеет непустую внутренность. Значит существует $\mathbf{z}_* \in \text{int} \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, 1)$. Тогда по свойству центральной симметрии из леммы 2 $-\mathbf{z}_* \in \text{int} \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, 1)$, а по выпуклости из замечания 1 весь отрезок $[-\mathbf{z}_*, \mathbf{z}_*]$ лежит в $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, 1)$. Отсюда следует, что точка $\mathbf{0}$ является внутренней точкой $\mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, 1)$ и существует $r_1 > 0$ такое, что

$$\mathbb{B}_{r_1}(\mathbf{0}) \subset \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, 1). \quad (3.58)$$

Открытым шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{2N}$ называется множество

$$\mathbb{B}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N} : \|\mathbf{z} - \mathbf{a}\| < r\}. \quad (3.59)$$

В частности,

$$\mathbb{B}_r(\mathbf{0}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N} : \|\mathbf{z}\| < r\}. \quad (3.60)$$

По лемме 2 получаем

$$\mathbb{B}_{\varepsilon r_1}(\mathbf{0}) \subset \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, \varepsilon). \quad (3.61)$$

Поскольку $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 + 0$, положим $\delta_0 = \varepsilon_0/2$. Тогда для всех $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \delta_0)$ выполнено $\varepsilon \geq \varepsilon_0/2$, следовательно, справедливо вложение с учетом леммы 3

$$\mathbb{B}_{r_*}(\mathbf{0}) \subset \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, \frac{\varepsilon_0}{2}) \subseteq \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, \varepsilon), \quad r_* = \frac{\varepsilon_0}{2} r_1. \quad (3.62)$$

Рассмотрим систему в отклонениях $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{T^0}$:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t) + B u(t). \quad (3.63)$$

Пусть $\mathbf{y}(0) = \Delta(\varepsilon)$. По формуле (1.20)

$$\mathbf{y}(t_1) = e^{At_1} \Delta(\varepsilon) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau. \quad (3.64)$$

Чтобы добиться $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{0}$, достаточно реализовать перенос

$$\int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau) d\tau = -e^{At_1} \Delta(\varepsilon). \quad (3.65)$$

Так как $\Delta(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ по (3.57), существует $\delta > 0$ для заданного r_* такое, что для $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \delta)$ выполнено

$$\|e^{At_1} \Delta(\varepsilon)\| \leq r_*. \quad (3.66)$$

Тогда из (3.62) следует, что вектор $-e^{At_1} \Delta(\varepsilon)$ достигим из нуля за время t_1 при ограничении $|u| \leq \varepsilon$, то есть существует управление $u_\varepsilon^{\text{fix}} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ на $[0, t_1]$, для которого (3.65) выполнено, и потому $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{0}$. Склеивая управление u_ε на $[0, T_0]$ и управление $u_\varepsilon^{\text{fix}}$ на $[T_0, T_0 + t_1]$, получаем достижение \mathbf{x}_{T^0} за время $T_0 + t_1 = T_0 + \eta$ при допустимом управлении для ограничения ε . Следовательно, для всех $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \delta)$ выполнено

$$T^0(\varepsilon) \leq T^0(\varepsilon_0) + \eta. \quad (3.67)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 + 0$ и используя (3.51), получаем

$$T_+(\varepsilon_0) = T^0(\varepsilon_0). \quad (3.68)$$

Доказательство равенства $T_-(\varepsilon_0) = T^0(\varepsilon_0)$ проводится полностью аналогично правостороннему случаю. Отличие состоит лишь в том, что теперь $\varepsilon \in (\varepsilon_0 - \delta, \varepsilon_0)$. Как и в (3.56), получаем

$$\Delta(\varepsilon) = \mathbf{x}_\varepsilon(T_0) - \mathbf{x}_{T^0} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \int_0^{T_0} e^{A(T_0-\tau)} B u_0(\tau) d\tau, \quad (3.69)$$

и потому $\Delta(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 - 0$. Далее используется тот же аргумент доводки на добавочном времени $t_1 = \eta$ через включение шара, выбирая $\delta_0 = \varepsilon_0/2$ и рассматривая $\varepsilon \in (\varepsilon_0 - \delta_0, \varepsilon_0)$, тогда $\varepsilon \geq \varepsilon_0/2$, и справедливо равенство

$$\mathbb{B}_{r_*}(\mathbf{0}) \subset \mathcal{A}(t_1, \mathbf{0}, \varepsilon), \quad r_* = \frac{\varepsilon_0}{2} r_1, \quad (3.70)$$

которое следует из сильной достижимости (лемма 1) и леммы 2. В результате, как и в правостороннем случае, получаем оценку $T^0(\varepsilon) \leq T_0 + \eta$ для всех ε достаточно близких к ε_0 слева, откуда $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 - 0} T^0(\varepsilon) = T_0$, что и заканчивает доказательство теоремы. \square

3.3 Иллюстрация полученных теоретических результатов

Рассматривается задача разгона (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) с терминальным состоянием:

$$\mathbf{x}(T^0) = \mathbf{x}_{T^0} = (q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, 0, 0) = (0, 1, 0, 0). \quad (3.71)$$

Рассматриваются классы управления с тремя, четырьмя и пятью переключениями ($K - 1 = 3, 4, 5$). Для некоторого диапазона значений ε в каждом классе управления найдено решение задачи, удовлетворяющее теореме 10, средствами языка Python.

Важным шагом является проверка того, что найденное решение содержит столько переключений, сколько задавалось изначально. Другими словами, замечание 6 о количестве нулей оптимального управления должно быть выполнено.

Поиск решений в классе трех переключений для $\varepsilon < 0,6$ приводит к тому, что функция переключения $SF(t)$ отвечает случаю с более чем тремя переключениями, что не соответствует замечанию 6. Рис. 3.1 соответствует примеру для значения $\varepsilon = 0,599$.

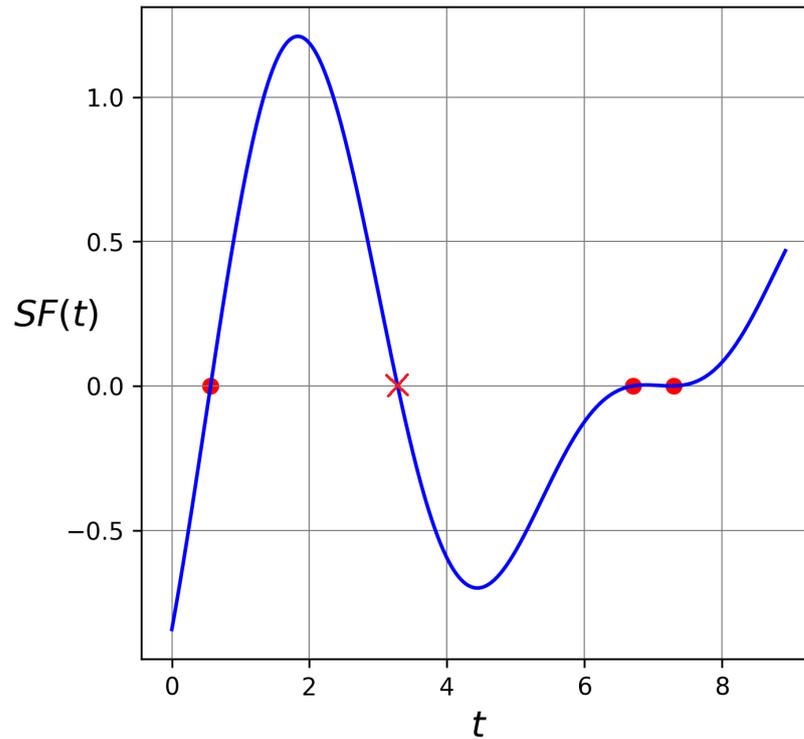


Рисунок 3.1 — Функция переключения $SF(t)$ для значения ограничения на управление $\varepsilon = 0,599$ в классе трех переключений.

Моменты переключений, полученные по теореме 10, выделены красными точками. Дополнительный нуль функции $SF(t)$ показан красным крестиком. Постоянный вектор $\mathbf{C} = (-0,57 \ 0,57 \ -0,26 \ 0,52)$, вычисленный в соответствии со следствием 4, определяет функцию переключения $SF(t)$, которая показана голубой кривой. Замечание 6 не выполнено в данном случае, следовательно, решению в классе трех переключений не принадлежит $\varepsilon = 0,599$.

Далее будет рассмотрен один пример, когда найденное решение соответствует заранее выбранному классу трех переключений, после чего исследуется вопрос о принадлежности всех вышеуказанных классов управления различным диапазонам значений ε .

В классе трех переключений замечание 6 выполняется для значения параметра $\varepsilon = 0,76$, что проиллюстрировано на рис. 3.2, где также показано оптимальное управление $u^*(t)$, построенное по соответствующей функции переключения $SF(t)$. Вектор \mathbf{C} , найденный в соответствии со следствием 4, равен в данном случае: $\mathbf{C} = (-0,14 \ -0,72 \ -0,48 \ 0,46)$.

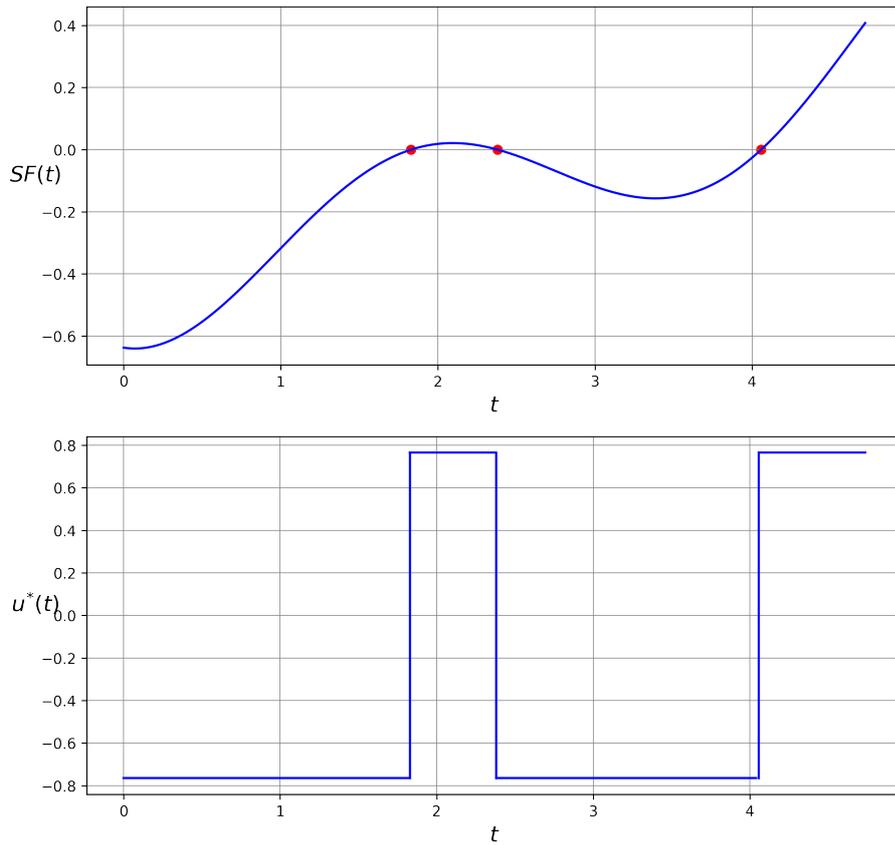


Рисунок 3.2 — Функция переключения $SF(t)$ и оптимальное управление $u^*(t)$ для значения ограничения на управление $\varepsilon = 0,76$.

Фазовые портреты первого и второго осцилляторов для найденного управляющего воздействия удовлетворяют заданным граничным условиям (3.71) и представлены на рис. 3.3.

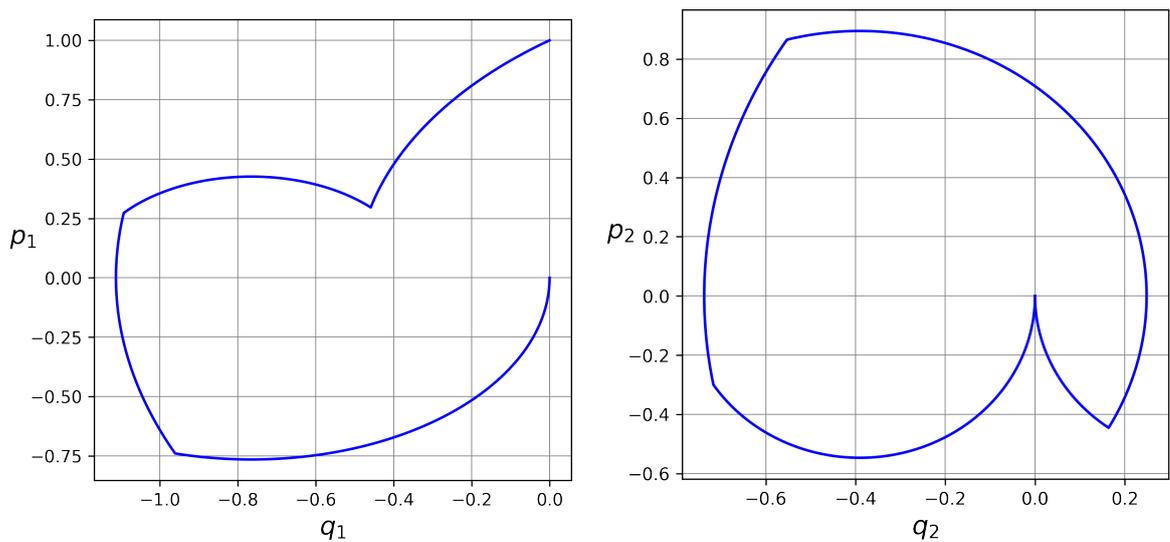


Рисунок 3.3 — Фазовые портреты первого и второго осцилляторов в классе трех переключений при значении $\varepsilon = 0,76$.

Зависимость критерия задачи T^0 для различных классов управления от ограничения на управление ε представлена на рис. 3.4.

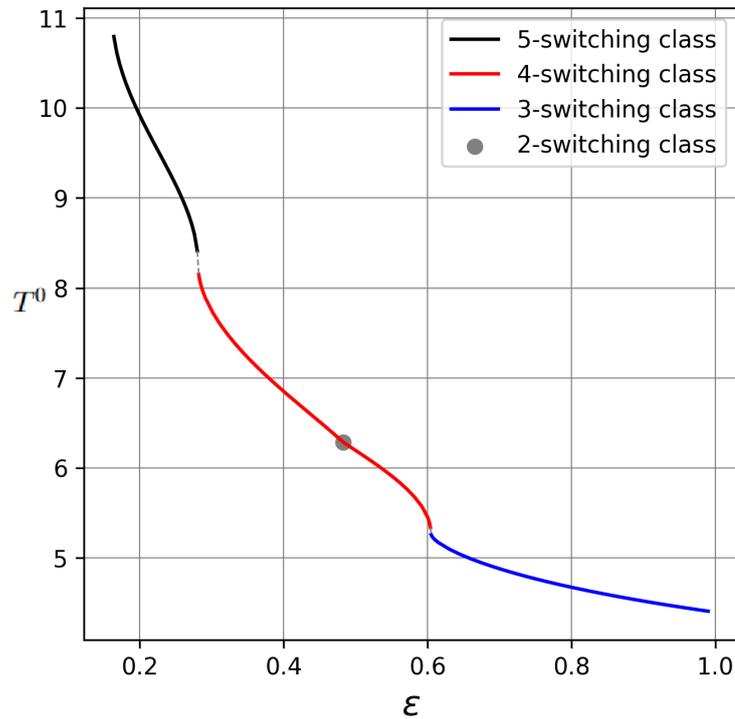


Рисунок 3.4 — Зависимость критерия $T^0(\varepsilon)$ от ограничения на управление.

Синей, красной и черной кривыми представлены решения для управлений с тремя, четырьмя и пятью переключениями, которые определяют граничные значения ε для каждого класса. Рис. 3.4 также показывает, что $T^0(\varepsilon)$ является непрерывной функцией в соответствии с теоремой 11 для всего диапазона ε и с леммой 15 при рассмотрении управления, являющегося внутренней точкой оптимального класса переключений.

На рис. 3.5 приводится график зависимости длительностей интервалов управления от параметра ε . В области I, которая соответствует классу пяти переключений, длительность первого интервала управления становится равной нулю при достижении границы выбранного класса ($I \rightarrow II$). Область II отвечает классу четырех переключений, где первым интервалом становится второй из I, и он также обнуляется при достижении границы ($II \rightarrow III$). В области трех переключений (III) первым интервалом становится второй из II, который был третьим в I. При обнулении одной из длительности внутреннего интервала класса четырех переключений происходит переход в класс двух переключений.

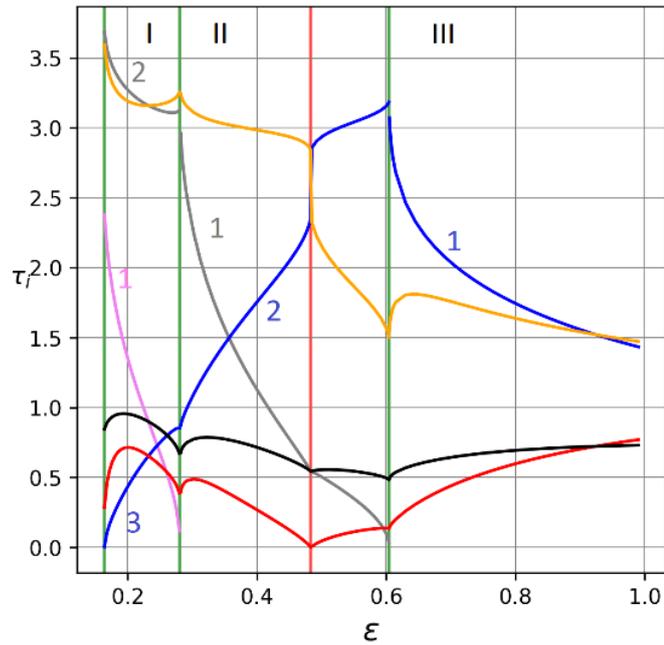


Рисунок 3.5 — Зависимость длительностей $\tau_i(\varepsilon)$ от ограничения на управление.

На рис. 3.5 также можно отметить непрерывную зависимость длительностей интервалов управления от ε при рассмотрении управления, являющегося внутренней точкой оптимального класса переключений, в соответствии с леммой 15.

Рис. 3.6 показывает зависимость якобиана для различных классов управления от параметра ε , которая согласуется с доказанными теоретическими результатами.

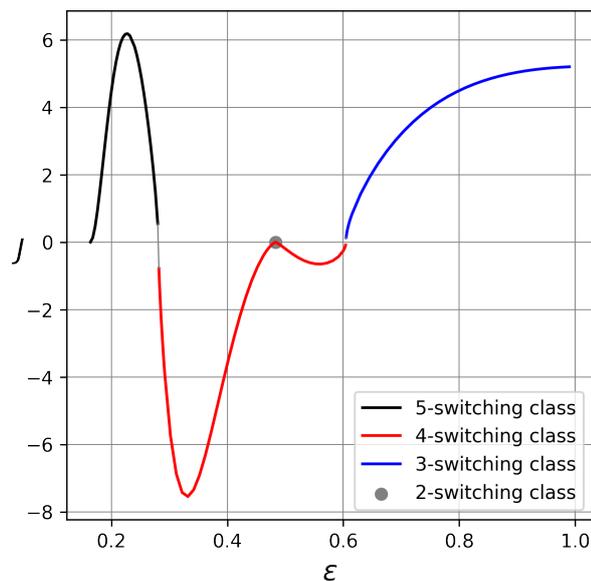


Рисунок 3.6 — Зависимость якобиана $J(\varepsilon)$ от ограничения на управление.

Как видно из графика, при достижении границ классов, якобианы становятся равными нулю. Также якобиан J_4 класса четырех переключений равен нулю при переходе к классу двух переключений в одной точке.

Связь между условиями непрерывности критерия и длительностей в классе трех переключений и условиями невырожденности класса четырех переключений показана на рис. 3.7 с использованием полученных выше решений для некоторого диапазона ε .

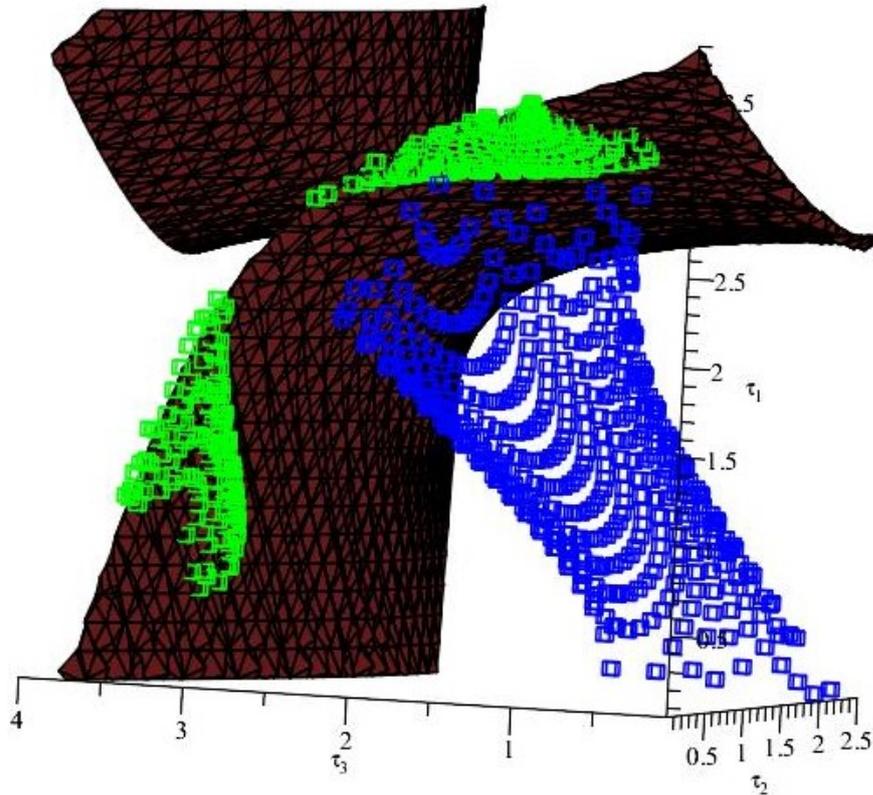


Рисунок 3.7 — Иллюстрация условия невырожденности класса четырех переключений и условия непрерывности длительностей класса трех переключений в координатах τ_1 , τ_2 , τ_3 .

Красным цветом изображена поверхность, определяемая уравнением (2.75) для координат, индексы которых сдвинуты на единицу. Зеленые точки соответствуют интервалам (τ_2, τ_3, τ_4) класса четырех переключений и лежат на красной поверхности, что соответствует выполнению условий невырожденности (2.75) для класса четырех переключений. Классу трех переключений отвечают синие точки, которые не попадают на поверхность, что означает непрерывность функции $T^0(\varepsilon)$ в окрестности каждой из них в соответствии с (3.7).

3.4 Выводы по главе 3

В главе 3 получен явный вид (3.21) якобиана совместной системы уравнений динамики (2.10) и условий невырожденности управления (2.59).

Показано, что для оптимального управления, являющегося внутренней точкой фиксированного класса $K - 1$ переключений, все моменты переключения соответствуют простым нулям функции переключения $SF(t)$ (лемма 14). Это свойство играет ключевую роль при доказательстве обратимости матрицы Якоби исследуемой системы.

Доказано, что критерий и все длительности интервалов управления непрерывно зависят от параметров задачи в случае, когда оптимальное управление является внутренней точкой класса $K - 1$ переключений (лемма 15). Для критерия задачи установлена монотонность (лемма 16) и непрерывность (теорема 11) по параметру ограничения на управление.

В примере для двух осцилляторов с фиксированным терминальным состоянием (3.71) исследованы классы управлений с тремя, четырьмя и пятью переключениями. Полученные теоретические результаты о непрерывности критерия и длительностей интервалов управления подтверждены численным моделированием.

Результаты данной главы опубликованы в [22; 60; 64; 65; 69; 71].

Заключение

В диссертационной работе была рассмотрена задача оптимального управления для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением по критерию быстродействия.

- Для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением показано свойство сильной достижимости и глобальной управляемости. Представлена явная связь траекторий задач разгона и остановки, для которых доказана единственность не только оптимального, но и экстремального управления. Отсутствие особого управления показано через изолированность нулей функции переключений оптимального управления.
- Доказано, что в случае $K = 2N$, когда оптимальное управление принадлежит классу $2N - 1$ переключений, якобиан полученной системы отличен от нуля, в соответствии с чем критерий и все длительности интервалов управления непрерывно зависят от параметров задачи оптимального разгона (остановки).
- Получены функциональные зависимости между всеми переменными и параметрами задачи в классе двух переключений для двух несинхронных осцилляторов.
- В общем случае $K > 2N$ представлены дополнительные условия невырожденности управления, которые совместно с решениями уравнений динамики составляют необходимые условия экстремума и используются для исследования задачи с любым количеством переключений управления.
- Для перевода группы осцилляторов в состояние покоя найдены траектории с помощью необходимых условий экстремума и с использованием итерационного алгоритма Нейштадта–Итона для поиска начального значения сопряженного вектора. Проведено сравнение полученных классификаций траекторий на основе количества переключений релейного управления. Результаты работы итерационного алгоритма, такие как класс переключений, оценка критерия и моментов переключений, могут быть использованы в качестве начального приближения для поиска решения на основе необходимых условий экстремума.

- Доказано, что критерий и все длительности интервалов управления непрерывно зависят от параметров задачи в случае, когда оптимальное управление является внутренней точкой класса $K - 1$ переключений. Установлена монотонность и непрерывность критерия по параметру ограничения на управление.

Дальнейшая работа будет направлена на изучение чувствительности решений к параметрам частот осцилляторов, а также на исследование задачи оптимального управления системой несинхронных осцилляторов при других критериях, например энергетическом.

Список сокращений и условных обозначений

\mathbb{R}	множество действительных чисел
\mathbb{N}	множество натуральных чисел
\mathbb{Z}	множество целых чисел
\mathbb{C}^∞	пространство бесконечно-гладких функций
$\mathbb{C}^{(p)}(U; \mathbb{R}^n)$	множество функций $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, все частные производные которых до порядка p включительно определены и непрерывны в области U
\in	символ принадлежности к множеству
\subset	символ включения в множество
\forall	квантор всеобщности
\times	символ декартова произведения, умножение множеств
$\#A$	мощность (число элементов) множества A
$\text{int}(A)$	внутренность множества A
\bar{A}	замыкание множества A
$[\cdot]$	обозначение совокупности (объединения) систем уравнений или решений
$\mathbf{0}$	нулевой вектор в \mathbb{R}^n (все компоненты равны 0)
$A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$	матрица, транспонированная к $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$	матрица, обратная к $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\det A, A $	определитель квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{Rg}(A), A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	ранг матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, размерность линейной оболочки столбцов матрицы A
$ a $	модуль комплексного числа a
$\text{sign}(a)$	функция знака вещественного числа a ; $\text{sign}(0) = 0$
$\text{Re}(a)$	действительная часть комплексного числа a
$\text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \subset V$	линейная оболочка векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ линейного пространства V
$\dim V$	размерность линейного пространства V

Список литературы

1. *Kayumov, O. R.* Time-Optimal Movement of Platform with Oscillators / O. R. Kayumov // *Mechanics of Solids*. — 2021. — Vol. 56, no. 8. — P. 1622—1637.
2. *Kayumov, O. R.* Diagrams of optimal control functions in the problem of the fastest platform movement with two oscillators / O. R. Kayumov // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* — 2022. — Vol. 61, no. 5. — P. 776—792.
3. *Kayumov, O. R.* On the optimal control function diagrams in the problem of the movement of a platform with oscillators / O. R. Kayumov // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* — 2024. — Vol. 63, no. 2. — P. 279—297.
4. *Kayumov, O. R.* Time-optimal turning of a spring pendulum / O. R. Kayumov // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* — 2023. — Vol. 62, no. 4. — P. 652—665.
5. *Fedorov, A. K.* Asymptotic Control Theory for a System of Linear Oscillators / A. K. Fedorov, A. I. Ovseevich // *Moscow Mathematical Journal*. — 2016. — Vol. 16, no. 3. — P. 561—598.
6. *Salobutina, E. O.* Regimes of more and more frequent switchings in the optimal control problem of oscillations of n oscillators / E. O. Salobutina // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2008. — Vol. 151, no. 6. — P. 3603—3610.
7. *Mirzaei, A.* Mutual Pulling Between Two Oscillators / A. Mirzaei, H. Darabi // *IEEE Journal of Solid-State Circuits*. — 2014. — Vol. 49, no. 2. — P. 360—372.
8. *Ansel, Q.* Enhancing quantum exchanges between two oscillators / Q. Ansel, A. D. Chepelianskii, J. Lages // *Physical Review A*. — 2023. — Vol. 107, issue 4. — P. 042609.
9. *Zhao, Y.* Two oscillators in a dissipative bath / Y. Zhao, G. H. Chen // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2003. — Vol. 317, no. 1. — P. 13—40.
10. *Li, J.* Periodic Solutions and Stability Analysis for Two-Coupled-Oscillator Structure in Optics of Chiral Molecules / J. Li, Y. Chen, S. Zhu // *Mathematics*. — 2022. — Vol. 10, no. 11. — P. 1908.

11. *Firippi, E.* Period - control in a coupled system of two genetic oscillators for synthetic biology / E. Firippi, M. Chaves // IFAC-PapersOnLine. — 2019. — Vol. 52, no. 26. — P. 70—75.
12. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. — М.: Наука, 1983. — С. 392.
13. *Galyaev, A. A.* Scalar control of a group of free-running oscillators / A. A. Galyaev // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77.
14. *Galyaev, A. A.* Impact of a system of material points against an absolutely rigid obstacle: A model for its impulsive action / A. A. Galyaev // Automation and Remote Control. — 2006. — Vol. 67, no. 6. — P. 856—867.
15. Optimal Processes for Controllable Oscillators / B. Andresen [et al.] // Automation and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, no. 12. — P. 2103—2113.
16. Optimal control of the parametric oscillator / B. Andresen [et al.] // Eur. J. Phys. — 2011. — Vol. 32, no. 3. — P. 827—843.
17. *Kayumov, O. R.* Time-optimal movement of a trolley with a pendulum / O. R. Kayumov // J. Comput. Syst. Sci. Int. — 2021. — Vol. 60, no. 1. — P. 28—38.
18. *Красовский, Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — С. 476.
19. *Reshmin, S. A.* Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system / S. A. Reshmin, F. L. Chernousko // J. Optim. Theory Appl. — 2014. — Vol. 163, no. 1. — P. 230—252.
20. *Dolgii, Y. F.* Optimal Control of Manipulator / Y. F. Dolgii, I. A. Chupin // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2022. — Vol. 43. — P. 3—18.
21. *Галяев, А. А.* Задача быстрогодействия по остановке двухзвенного маятника на подвижном подвесе / А. А. Галяев, А. П. Потапов // Дифференциальные Уравнения и Процессы Управления. — 2023. — Т. 2. — С. 54—85.

22. *Берлин, Л. М.* Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — 2022. — Т. 215. — С. 40—51.
23. *Pesch, H. J.* The maximum Principle of optimal control: A history of ingenious ideas and missed opportunities / H. J. Pesch, M. Plail // Control and Cybernetics. — 2009. — Vol. 38, 4A. — P. 973—995.
24. *Болтянский, В. Г.* Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. — М.: Наука, 1969. — С. 408.
25. *Черноусько, Ф. Л.* Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. — Москва, Россия : Наука, 1980.
26. *Eaton, J.* An iterative solution to time-optimal control / J. Eaton // J. Math. Anal. and Appl. — 1962. — Vol. 5, no. 2. — P. 329—344.
27. *Neustadt, L. W.* Synthesis of time-optimal control systems / L. W. Neustadt // J. Math. Anal. and Appl. — 1960. — Vol. 1, no. 1. — P. 484—492.
28. *Федоренко, Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления / Р. П. Федоренко. — М.: Наука, 1978. — С. 488.
29. *Ли, Э. Б.* Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус. — Наука, 1972. — С. 576.
30. *Пшеничный, Б. Н.* Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем / Б. Н. Пшеничный // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1964. — Т. 4, № 1. — С. 52—60.
31. *Старов, В. Г.* Улучшение сходимости метода Нейштадта - Итона / В. Г. Старов // Математические заметки СВФУ. — 2019. — Т. 26, № 1. — С. 70—80.
32. *Рабинович, А. Б.* Об одном классе методов итерационного решения задач быстродействия / А. Б. Рабинович // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1966. — Т. 6, № 3. — С. 433—445.
33. *Пшеничный, Б. Н.* Ускоренный метод решения задачи линейного быстродействия / Б. Н. Пшеничный, Л. А. Соболенко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1968. — Т. 8, № 6. — С. 1345—1352.

34. *Поляк, Б. Т.* Сходимость методов возможных направлений в экстремальных задачах / Б. Т. Поляк // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1971. — Т. 11, № 4. — С. 53—70.
35. *Александров, В. М.* Вычисление оптимального управления в реальном времени / В. М. Александров // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2012. — Т. 52, № 10. — С. 1778—1800.
36. *Шевченко, Г. В.* Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия / Г. В. Шевченко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2002. — Т. 42, № 8. — С. 1166—1178.
37. *Шевченко, Г. В.* Метод численного решения нелинейной задачи оптимального быстродействия с аддитивным управлением / Г. В. Шевченко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47, № 11. — С. 1843—1854.
38. *Поляк, Б. Т.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков. — М.: ЛЕНАНД, 2014. — С. 560.
39. *Сачков, Ю. Л.* Введение в геометрическую теорию управления / Ю. Л. Сачков. — Москва, Россия : Ленанд, 2021.
40. *La Salle, J. P.* The Time Optimal Control Problem / J. P. La Salle // Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations. — 1960. — Vol. 5. — P. 1—24.
41. *Choura, S.* An explicit minimum-time solution for the simple harmonic oscillator / S. Choura, S. Jayasuriya // J. Dyn. Syst. Meas. Control. — 1990. — Vol. 112, no. 4. — P. 783—787.
42. *Grogard, F.* Computation of time-optimal switchings for linear systems with complex poles / F. Grogard, R. Sepulchre // European Control Conference (ECC03). — Cambridge, United Kingdom, 2003.
43. *Grogard, F.* Global stability of a continuous-time flow which computes time-optimal switchings / F. Grogard, R. Sepulchre // 40th IEEE Conference on Decision and Control. — Orlando, 2001.
44. *Buzikov, M.* Numerical methods for solving minimum-time problem for linear systems / M. Buzikov, A. Mayer // Appl. Math. Comput. — 2026. — Т. 508, № 129634. — С. 1—21.

45. *Scaramozzino, S.* Time-optimal control of harmonic oscillators at resonance / S. Scaramozzino, K. D. Listmann, J. Gebhardt // 2015 European Control Conference (ECC). — 2015. — С. 1955—1961.
46. *Andrievsky, B.* Computation of the Excitability Index for Linear Oscillators / B. Andrievsky // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control. — IEEE. — С. 3537—3540.
47. *Efimov, D.* Exciting multi-DOF systems by feedback resonance / D. Efimov, A. Fradkov, T. Iwasaki // Automatica. — 2013. — Vol. 49, no. 6. — P. 1782—1789.
48. *Efimov, D. V.* Hybrid adaptive resonance control using speed gradient approach for vibration machines / D. V. Efimov, A. L. Fradkov // 2007 American Control Conference. — New York, NY, USA : IEEE, 2007.
49. *Knoll, C.* Generation of stable limit cycles with prescribed frequency and amplitude via polynomial feedback / C. Knoll, K. Robenack // International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices. — Chemnitz, Germany : IEEE, 2012.
50. *Shtessel, Y.* Harmonic oscillator utilizing double-fold integral, traditional and second-order sliding mode control / Y. Shtessel, P. Kaveh, A. Ashrafi // J. Franklin Inst. — 2009. — Vol. 346, no. 9. — P. 872—888.
51. *Salobutina, E. O.* Modes of switchings accumulation in the problem on simultaneous control of vibrations of two oscillators / E. O. Salobutina // Vestn. Mosk. Univ., Ser. I. — 2006. — Vol. 2006, no. 3. — P. 25—31.
52. *Зеликин, М. И.* Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления / М. И. Зеликин, В. Ф. Борисов // Тр. МИАН СССР. — 1991. — № 197. — С. 85—166.
53. *Kamzolkin, D.* Time-Optimal Motions of a Mechanical System with Viscous Friction / D. Kamzolkin, V. Ternovski // Mathematics. — 2024. — Vol. 12, no. 10.
54. *Kamzolkin, D.* Optimal Control of a Harmonic Oscillator with Parametric Excitation / D. Kamzolkin, V. Ilyutko, V. Ternovski // Mathematics. — 2024. — Vol. 12, no. 24.

55. *Ternovski, V.* Control the Coefficient of a Differential Equation as an Inverse Problem in Time / V. Ternovski, V. Ilyutko // *Mathematics*. — 2024. — Т. 12, № 2.
56. *Romano, M.* Time-optimal control of linear time invariant systems between two arbitrary states / M. Romano, F. Curti // *Automatica*. — 2020. — Т. 120. — С. 1—9.
57. *Curti, F.* Minimum-Time Control of Linear Systems between Arbitrary States / F. Curti, M. Romano // *CEAS EuroGNC 2019*. — 2019.
58. *Sevier, M.* Time-optimal maneuvers of a spacecraft between two arbitrary states in proximity of a circular reference orbit / M. Sevier, M. Romano // *Advances in Space Research*. — 2024. — Vol. 73, no. 11. — P. 5560—5569. — *Recent Advances in Satellite Constellations and Formation Flying*.
59. *Belousova, Y.* The synthesis of optimal control in a fourth-order linear speed of response problem / Y. Belousova, M. Zarkh // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. — 1996. — Vol. 60, no. 2. — P. 183—190.
60. *Berlin, L. M.* Time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators / L. M. Berlin, A. A. Galyaev, P. V. Lysenko // *Mathematics*. — 2022. — P. 1—19.
61. *Берлин, Л. М.* О классе двух переключений управления в задаче быстрогодействия двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, С. К. Кравцова // *Управление большими системами*. — 2023. — Т. 101. — С. 24—38.
62. *Берлин, Л. М.* Условия экстремума при ограниченном скалярном управлении двумя несинхронными осцилляторами в задаче быстрогодействия / Л. М. Берлин, А. А. Галяев // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. — 2022. — Т. 505, № 1. — С. 86—91. — Переводная версия: Berlin, L.M. Extremum Conditions for Constrained Scalar Control of Two Nonsynchronous Oscillators in the Time-Optimal Control Problem / L.M. Berlin, A.A. Galyaev // *Doklady Mathematics*. — 2022. — Vol. 106, no 1. — P. 286—290.

63. Берлин, Л. М. Необходимые условия экстремума и метод Нейштадта–Итона в задаче оптимального быстрогодействия группой несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Автоматика и телемеханика. — 2024. — № 6. — С. 97–114. — Переводная версия: Berlin, L.M. Necessary Extremum Conditions and the Neustadt–Eaton Method in the Time-Optimal Control Problem for a Group of Nonsynchronous Oscillators / L.M. Berlin, A.A. Galyaev, P.V. Lysenko // Autom. Remote Control. — 2024. — Vol. 85, no 6. — P. 621–635.
64. Берлин, Л. М. Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Тезисы докладов 3-й Международной научной конференции «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (Рязань, 2021). — Рязань : ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина», 2021. — С. 28.
65. Берлин, Л. М. Исследование оптимального решения задачи быстрогодействия для двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Материалы 14-й Мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2021, Дивноморское, Геленджик). — Ростов-на-Дону – Таганрог : Южный федеральный университет, 2021. — С. 39–41.
66. Берлин, Л. М. Об управляемости и достижимости двух несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ "Радиотехника и компьютерные технологии" (Москва, 2021). — Москва–Долгопрудный–Жуковский : МФТИ, 2021. — С. 54–56.
67. Берлин, Л. М. О задаче быстрогодействия системы из двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Материалы 16-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого) (Москва, 2022). — Москва : ИПУ РАН, 2022. — С. 75–78. — Переводная версия: Berlin, L. M. About Time-Optimal Control Problem for System of Two Non-Synchronous Oscillators / L. M. Berlin, A. A. Galyaev, P. V. Lysenko // 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). — Moscow, Russian Federation : IEEE, 2022. — P. 1–2.

68. *Берлин, Л. М.* О границах классов управления в задаче быстрогодействия двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Труды 15-й Мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2022, Санкт-Петербург). — Санкт - Петербург : АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2022. — С. 10—13.
69. *Берлин, Л. М.* Непрерывность критерия в задаче быстрогодействия двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев // Труды 18-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2022, Челябинск). — Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2022. — С. 412—417.
70. *Берлин, Л. М.* Класс двух переключений в задаче быстрогодействия двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин // Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ "Радиотехника и компьютерные технологии"(Москва, 2023). — Москва : МФТИ, 2023. — С. 63—65.
71. *Берлин, Л. М.* Необходимые условия экстремума в задаче быстрогодействия для группы несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев // Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (Екатеринбург, SCDG2024). — Екатеринбург : ООО "Издательство УМЦ УПИ", 2024. — С. 63—67.
72. *Берлин, Л. М.* Задача оптимального по времени управления группой несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Труды 18-ой Всероссийской мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2025). — Тула : ТулГУ, 2025. — С. 168—171.
73. *Lewis, A. D.* Aspects of Geometric Mechanics and Control of Mechanical Systems / A. D. Lewis. — California Institute of Technology , Pasadena, CA., 1995.
74. *Wyrwas, M.* Strong accessibility and integral manifolds of the continuous-time nonlinear control systems / M. Wyrwas // J. Math. Anal. and Appl. — 2019. — Vol. 469, no. 2. — P. 935—959.

75. *Benzaid, Z.* Global null controllability of perturbed linear systems with constrained controls / Z. Benzaid // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — Vol. 136, no. 1. — P. 201—216.
76. *Аграчев, А. А.* Геометрическая теория управления / А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков. — Москва, Россия : Физматлит, 2005. — С. 391.
77. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — С. 736.
78. *Габасов, Р.* Оптимальные управления с особыми участками / Р. Габасов, Ф. Кириллова // Автоматика и телемеханика. — 1969. — № 10. — С. 15—25.
79. *Зорич, В.* Математический анализ I / В. Зорич. — Москва, Россия : МЦНМО, 2019.
80. *Петрович, А. Ю.* Лекции по математическому анализу : учеб. пособие. В трех частях. Ч. I. Введение в математический анализ / А. Ю. Петрович. — М. : МФТИ, 2017. — 276 с.

Список рисунков

1.1	Границы $\mathcal{A}_{q_1, p_1}(1, \mathbf{0}, \varepsilon)$ для $\varepsilon = 1, \varepsilon = 2, \varepsilon = 4$	37
1.2	Границы $\mathcal{A}_{q_1, p_1}(1, \mathbf{0}, \varepsilon)$ для $\varepsilon = 1, \varepsilon = 4$ и $4\mathcal{A}_{q_1, p_1}(1, \mathbf{0}, 1)$	38
2.1	Структура закона оптимального управления.	41
2.2	Структура закона оптимального управления в классе двух переключений ($K - 1 = 2$).	52
2.3	Множество начальных состояний первого осциллятора для задачи остановки (теорема 10).	69
2.4	Множество конечных состояний первого осциллятора для задачи разгона (необходимые условия экстремума).	71
2.5	Зависимость критерия $T^0(p_1, q_1)$ от фазовых координат первого осциллятора для задачи разгона.	71
2.6	Количество переключений оптимального управления в зависимости от начальных состояний первого осциллятора (алгоритм Нейштадта–Итона).	72
2.7	График функции (2.81) для различных значений h	73
2.8	Количество переключений оптимального управления в зависимости от начальных состояний первого осциллятора.	74
2.9	Траектории на фазовых плоскостях четырех осцилляторов.	75
2.10	Управление с девятью переключениями для системы четырех осцилляторов.	75
3.1	Функция переключения $SF(t)$ для значения ограничения на управление $\varepsilon = 0,599$ в классе трех переключений.	95
3.2	Функция переключения $SF(t)$ и оптимальное управление $u^*(t)$ для значения ограничения на управление $\varepsilon = 0,76$	96
3.3	Фазовые портреты первого и второго осцилляторов в классе трех переключений при значении $\varepsilon = 0,76$	96
3.4	Зависимость критерия $T^0(\varepsilon)$ от ограничения на управление.	97
3.5	Зависимость длительностей $\tau_i(\varepsilon)$ от ограничения на управление.	98
3.6	Зависимость якобиана $J(\varepsilon)$ от ограничения на управление.	98

3.7	Иллюстрация условия невырожденности класса четырех переключений и условия непрерывности длительностей класса трех переключений в координатах τ_1, τ_2, τ_3	99
-----	---	----