

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ  
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

*На правах рукописи*



**Белов Иван Романович**

**АНИЗОТРОПИЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С  
МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ**

**Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и  
обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной  
техники и автоматизации)**

**ДИССЕРТАЦИЯ**

**на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Кустов Аркадий Юрьевич

Москва — 2021

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Основные сведения</b>	<b>25</b>
1.1 $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ нормы системы . . . . .	25
1.2 Анизотропия случайного вектора . . . . .	33
1.3 Анизотропийная норма системы . . . . .	36
1.4 Системы с мультипликативными шумами . . . . .	38
1.5 Выводы к главе 1 . . . . .	43
<b>2 Анизотропийный анализ для систем с мультипликативными шумами</b>	<b>45</b>
2.1 Постановки задач . . . . .	45
2.2 Метод вычисления анизотропийной нормы . . . . .	47
2.3 Условия ограниченности анизотропийной нормы . . . . .	59
2.4 Выводы к главе 2 . . . . .	67
<b>3 Разработка метода синтеза анизотропийного фильтра для систем с мультипликативными шумами</b>	<b>69</b>
3.1 Постановка задачи . . . . .	69
3.2 Решение задачи анизотропийной фильтрации . . . . .	72
3.3 Разбор частных случаев . . . . .	84
3.4 Выводы к главе 3 . . . . .	93
<b>4 Синтез анизотропийного фильтра для системы со случайными сбоями в датчиках</b>	<b>94</b>
4.1 Определение системы со случайными сбоями в датчиках . . . . .	94
4.2 Решение задачи фильтрации . . . . .	96

4.3	Продольное движение самолета по глиссаде при наличии ветра и шумов измерений . . . . .	100
4.4	Выводы к главе 4 . . . . .	124
<b>Заключение</b>		<b>125</b>

## Введение

Для исследования свойств объектов или процессов в реальной жизни требуется проведение большого количества измерений их показателей на протяжении некоторого интервала времени. Зная значения этих показателей в определенный момент времени, можно описать положение или состояние объекта в этот момент времени, или хотя бы оценить их. Эти данные могут быть необходимы для управления динамикой исследуемого процесса или движением объекта. Подобный реальный объект (устройство, аппарат и т.д.) или процесс (физический, химический, биологический и т.д.) будем называть объектом исследования. Но измерение показателей объекта исследования редко проходит без трудностей. Технические объекты чаще всего имеют достаточно сложную структуру. Поэтому для описания динамики состояния объектов используются математические модели в рамках определенных допущений. Абсолютно точно измерить все параметры объекта чаще всего не представляется возможным. Кроме того, те измерения параметров, которые можно провести с помощью различных способов и технических приспособлений, могут содержать в себе случайные ошибки. Вдобавок, на состояние объекта могут влиять различные внешние возмущения. Наличие шумов в измерениях может оказывать негативное влияние на качество управления объектом или оценивания его состояния в будущие моменты времени на основе зашумленных данных. Поэтому возникает необходимость в получении оценки состояния объекта или величины, связанной с объектом, значение которых нельзя измерить напрямую. В каждом из существующих подходов к оцениванию в рамках статистических методов предполагается, что внешние возмущения и шумы измерений объекта можно описать случайными величинами с некоторыми статистическими характеристиками. Следовательно, переменные состояния объекта и измерения в такой постановке также являются случайными величинами. Оптимальная оценка определяется величиной некоторого критерия (функционала) качества, выбор которого зависит от условий, в рамках

которых ставится соответствующая задача.

Поиск оптимальных оценок составляет целый класс задач, в которые входят задачи интерполяции (оценивание предыдущих состояний или "сглаживание"), фильтрации (получение количественной информации о текущем состоянии на основе предыстории) и прогнозирования (оценивание будущих состояний на основе имеющихся данных). Методы оценивания используются во многих областях науки и техники, таких как обработка сигналов, теории связи и телекоммуникации, управление проектами, медицина и многих других. Для получения оценки состояния объекта или некоторой величины, зависящей от состояния, вводят специальную систему, выходом которой является искомая оценка. Такая система в общем случае называется оценителем, а в случае оценивания текущего состояния объекта – фильтром. Критерий эффективности искомого оценителя может быть представлен в виде некоторого функционала, например, квадратичного функционала от ошибки оценивания. Если необходимо найти оценитель, при котором введенный критерий достигает минимального или максимального значения, то в таком случае говорят об оптимальном оценивании. Также целью может быть поиск параметров оценителя, который обеспечивает ограниченность значения критерия заданным числом. Такая постановка соответствует субоптимальному оцениванию.

Первые результаты в таких областях, как линейные фильтрация и прогнозирование при наличии случайных шумов, появились еще в конце 30-х годов XX века. Одной из первых работ в этой области является работа Н. Винера [1], где показано, что методы решения этих задач заключаются в поиске решения так называемого интегрального уравнения Винера-Хопфа. Также в работе представлен метод спектральной факторизации для решения такого типа интегральных уравнений в одном из частных случаев. Работа Винера стала основой для дальнейших исследований и научных результатов в теории оценивания. Но стоит отметить, что примерно в тот же период А.Н.Колмогоровым были представлены публикации по схожей проблематике. В статье Винера есть ком-

ментарий по данному вопросу. По этой причине теорию фильтрации и прогнозирования иногда называют теорией Винера-Колмогорова (см., к примеру, [2]).

Основной целью дальнейших исследований в теории оценивания стало нахождение параметров линейной модели, называемой фильтром Винера, с помощью которой осуществляется прогноз, а также отслеживание случайного сигнала и выделение из него полезного сигнала. Одним из примеров является работа Боде и Шеннона [3], в которой представлен упрощенный метод решения задачи фильтрации. В этой статье используется предположение, что произвольный случайный сигнал можно с точностью до вторых статистических моментов описать выходом некоторой линейной динамической системы, на вход которой подается последовательность независимых случайных сигналов – белых шумов. Это предположение является фундаментальным в теории оценивания и используется во многих последующих работах. Также был разработан метод собственных функций уравнения Винера-Хопфа [4], который может быть использован и для нестационарных моделей.

Однако у разработанных методов теории оценивания было немало недостатков. К примеру, высокая трудоемкость численной реализации и ограниченный круг применения на практике. Если к постановке задачи добавить новые условия, например, нестационарность искомого фильтра, то применение описанных ранее методов становилось очень сложным для человека, который не являлся специалистом в определенных областях математики. На основе результатов по решению задачи Винера в 1960 году венгерским ученым Р. Калманом была написана фундаментальная статья [5] по теории оценивания. В ней Калман предложил метод синтеза оптимального фильтра, который был применим без каких-либо модификаций в стационарной и нестационарной статистике, а также при синтезе фильтров с растущей и бесконечной памятью. Качественным отличием предложенных в статье методов является представление в пространстве состояний. Стоит отметить, что в калмановской фильтрации предполагается, что математическая модель рассматриваемого объекта и статистические харак-

теристики входных возмущений известны точно. Методика построения фильтра Калмана является классическим результатом в теории линейной фильтрации. Уточним, что в случае линейной фильтрации моделью фильтра является некоторая линейная система, а критерием оптимальности полученной оценки выступает квадратичная функция (в том случае, который был рассмотрен Калманом, критерием оптимальности оценки являлась среднеквадратичная ошибка оценивания).

Впоследствии Калманом и его коллегами было опубликовано еще несколько важных работ, которые внесли огромный вклад в развитие теорий управления и фильтрации. К примеру, в [6] был представлен вывод нелинейных дифференциальных уравнений Риккати для ковариационной функции оптимального фильтра. Вдобавок, в статье описан принцип двойственности, суть которого состоит в связи между задачами оптимального оценивания и оптимального управления. В [7] математически описана связь двух разных способов описания объекта: через систему уравнений в пространстве состояний и через вход-выходные соотношения. Представлена методика определения минимального числа переменных состояния, необходимых для описания модели объекта с заданной матричной передаточной функцией. Данный подход основан на понятиях управляемости и наблюдаемости, которые были подробно рассмотрены в [8]. Фильтр Калмана имеет огромное количество примеров практического применения, таких как прогнозирование динамики химических процессов, обработка изображений и радиосигналов. Он также находит применение в аэрокосмической индустрии и т.д.

Методика построения фильтра Калмана использовалась не только в проблематике фильтрации, но и для синтеза регулятора при наличии гауссовских внешних возмущений, а также белого шума в измерениях. Такие задачи называются линейно-квадратичными гауссовскими (LQG) и являются обобщением задач синтеза линейно-квадратичного регуляторов (LQR). Критерий оптимальности искомого LQG-регулятора имеет более сложную форму, чем в случае Кал-

мановской фильтрации. В технических объектах величина управляющего сигнала, подавляющего внешние возмущения, является ограниченной вследствие особенностей конструкции и исполняющего устройства. Также состояние объекта в конце рассматриваемого интервала времени может иметь определяющее значение. В итоге, функционал качества регулятора представляет собой квадратичную форму по состоянию объекта и управлению. Сам LQG-регулятор является линейной динамической системой, построенной на основе фильтра Калмана с выходом в виде отрицательной обратной связи по оценке состояния, генерируемой фильтром. Матрицы фильтра и регулятора вычисляются независимо друг от друга в результате решения соответствующих уравнений Риккати в прямом (фильтрация) и обратном (управление) времени. По сути решаются две задачи - линейно-квадратичного оценивания (LQE) и синтеза LQR. По тематике синтеза LQG-регуляторов можно найти множество научных работ, в особенности во второй половине XX века. Существенный вклад в развитие теории LQG-регуляторов внесен в работах [9], [10], [11], [12] и многих других. Стоит отметить, что у LQG-регуляторов существует значительная проблема, которая заключается в том, что эти регуляторы не являются робастными, т.е. устойчивыми к изменчивости параметров объекта во времени или статистической неопределенности внешних возмущений. Немалое количество публикаций 70-80-х годов посвящено анализу и подходам к решению данной проблемы.

Если в LQG-задаче преобразовать квадратичный функционал качества путем ввода регулируемого выхода модели специального вида, то можно получить критерий оптимальности в виде 2-нормы этого выхода. Как известно, 2-норма выходного сигнала при подаче на вход гауссовского белого шума пропорциональна  $\mathcal{H}_2$ -норме этой системы, где  $\mathcal{H}_2$  — нормированное пространство Харди комплекснозначных ограниченных аналитических в правой полуплоскости функций. Таким образом, LQG-задача может быть сведена к минимизации  $\mathcal{H}_2$ -нормы оператора вход-выход рассматриваемой системы. Теории  $\mathcal{H}_2$ -оптимального управления и  $\mathcal{H}_2$ -фильтрации являются одними из ключевых в

своих областях. Основные положения и результаты применения методов данной теории можно найти во многих научных публикациях, к примеру, в работах [13–15]. Отметим, что  $\mathcal{H}_2$ -оптимальный фильтр может использоваться при условии подачи на вход системы белого гауссовского шума или при известных первом и втором статистических моментах возмущения, поскольку в данном случае возмущение можно аппроксимировать с точностью до первых двух моментов гауссовским возмущением. Также предполагается, что точно известны параметры модели исследуемого объекта, т.е. матрицы линейной модели объекта являются детерминированными. Методы  $\mathcal{H}_2$ -оптимальной фильтрации используются для моделей с постоянными и переменными во времени матрицами, с непрерывным и дискретным временем, а также для разных частных случаев входных возмущений. Примеры решения задач  $\mathcal{H}_2$ -фильтрации можно найти в [16–18] и многих других.

Статистические или иные свойства шумов достаточно сложно определить в большинстве практических задач, фильтр Калмана может оказаться неоптимальным выбором в тех случаях, когда предположения о свойствах входного возмущения являются ошибочными. При достаточно большой ошибке оценки свойств шумов эффективность найденного фильтра в оценивании состояния объекта может оказаться довольно низкой. В  $\mathcal{H}_2$ -теории входное случайное возмущение объекта можно с точностью до вторых статистических моментов оценить с помощью соответствующего гауссовского шума. Можно доказать, что входное возмущение объекта является наихудшим случайным шумом из определенного класса случайных процессов. Это означает, что данный шум оказывает максимальное влияние на значение интересующего исследователя выхода модели. Если регулятор эффективно подавляет наихудший шум, то он точно будет эффективен и в остальных случаях, когда шум не является наихудшим. Норма передаточной функции при подаче на вход наихудшего возмущения называется  $\mathcal{H}_\infty$ -нормой системы. При построении  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтра математически конструируется наихудшее внешнее возмущение и решается стандартная задача

фильтрации при данном возмущении. В [19] подобная задача рассматривается с позиции теории игр как игра с нулевой суммой, в которой игроками являются исследователь и сама природа. Исследователь стремится получить оптимальную оценку выхода модели объекта на основе имеющихся измерений при наличии внешних возмущений, а природа стремится подать на систему возмущение, оказывающее максимальный эффект на значение выхода и таким образом, препятствуя достижению исследователем своей цели. В реальных ситуациях  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальный фильтр может оказаться излишне консервативным, а в некоторых случаях практической реализации - неоправданно энергозатратным. К примеру, если входное возмущение является слабоокрашенным гауссовским шумом. Однако подобный фильтр, так же как и  $\mathcal{H}_2$ -фильтр, широко используется в оптимальной и субоптимальной фильтрации для различных линейных систем. Примеры применения методов  $\mathcal{H}_\infty$ -теории при синтезе оптимальных регуляторов и фильтров можно найти в [20–26] и множестве других работ.

Стоит отметить, что решение задач оптимального оценивания чаще всего разбивается на два этапа: анализ системы и синтез оценивателя. Один из типов задачи анализа заключается в определении выражений для  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$ -норм. Эта задача может быть двух видов в зависимости от типа выражений: в частотной области или пространстве состояний. Другим примером является проверка условий ограниченности соответствующей нормы сверху заданной величиной. Задачи синтеза состоят в поиске фильтра (оптимальная или субоптимальная фильтрация), которые обеспечивают минимум или ограниченность сверху нормы системы, замкнутой регулятором, или системы в ошибках фильтрации. Процесс решения чаще всего заключается в поиске решений дифференциальных, алгебраических или разностных уравнений Риккати, в которые входят матрицы модели рассматриваемого объекта и искомого регулятора или фильтра. Основы теории  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления были заложены в работе Зеймса [27]. В ней постановка задачи оптимального управления приводится во вход-выходном представлении. Впоследствии были опубликованы другие на-

учные труды, в которых были описаны разнообразные подходы к синтезу  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальных регуляторов и фильтров. Примерами этих работ является статья [28], в которой представлены результаты решения задач анализа и синтеза  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимальных регуляторов для линейных непрерывных стационарных систем, а также [29, 30].

В научных работах по  $\mathcal{H}_2$ -фильтрации было показано, что стандартные  $\mathcal{H}_2$ -оптимальные фильтры наиболее эффективны при выполнении описанных выше условий и обладают низкой робастностью. А  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтры демонстрируют высокую эффективность и робастность во многих примерах, однако и у них есть существенные недостатки, такие как консервативность (из-за расчета на наихудший случай) и большие затраты энергии при их реализации. Существует множество научных работ по синтезу фильтров, которые дают лучшие оценки при наличии возмущений с неизвестными точно статистическими характеристиками и менее консервативными. К примеру, есть пример решения задачи синтеза априорного фильтра [31], обеспечивающего оценку состояния системы с ковариационной матрицей ошибки оценивания, ограниченной сверху заданной матричной величиной. Неопределенность рассматриваемой системы заключается в матрице динамики состояния системы  $A$  и матрице соответствия состояния и выхода системы  $C$ . В работе приведен сравнительный анализ эффективности предложенного метода синтеза, а также известных ранее классического фильтра Калмана и его робастной модификации, описанной в [32]. Из результатов анализа видно, что предложенный метод решения задачи фильтрации при наличии в матрицах системы ограниченных по модулю неопределенностей обеспечивает большую эффективность по сравнению с фильтром Калмана. Также при решении задач фильтрации для линейных дискретных систем с неопределенностями использовались робастные  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтры с конечной импульсной характеристикой [33], которые часто применяются при обработке данных. Существует немало известных модификаций фильтров с конечной (FIR) и бесконечной (IIR) импульсными характеристиками и примеров их применения [34–36] при

решении задач фильтрации для линейных систем непрерывного и дискретного времени на конечном и бесконечном интервалах времени. Основными их преимуществами является высокая скорость расчета и более высокая робастность по сравнению с фильтром Калмана. Однако, в случае входного возмущения с неопределенными статистическими характеристиками данные подходы могут оказаться недостаточно эффективными. Помимо модификаций уже известного фильтра Калмана, можно рассматривать задачу оптимальной фильтрации с отличным от использованных ранее критерием качества оценки. К примеру, в [37] критерием качества является математическое ожидание экспоненты от квадрата ошибки оценивания, умноженной на параметр чувствительности к рискам. Задачи анализа и синтеза с таким критерием известны как LEQG-задачи. В зависимости от значения параметра чувствительности можно получить задачу синтеза оптимального фильтра, значительно более робастного чем фильтр Калмана и имеющего определенное сходство с  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтром.

Немало внимания было уделено решению задач оптимального управления и фильтрации при наличии неопределенного входного возмущения или случайных неопределенностей с неизвестными параметрами внутри системы (их еще называют внутренними возмущениями). К примеру, в [38] неопределенность случайного возмущения характеризуется с помощью условной относительной энтропии, а устойчивость системы к таким возмущениям характеризуется индексом робастности. Неопределенности также могут быть описаны с помощью политопов [39], [40]. В 90-е годы была предложена анизотропийная теория стохастического робастного управления [41]. Данная теория была построена на основе нового подхода к описанию внешних возмущений и соответствующей коррекции критерия качества управления и фильтрации. Методы  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -теорий представляются частными случаями данной теории. Стоит также отметить, что введение понятия анизотропии связано с определением энтропийного функционала, описывающее среднее количество взаимной информации стационарных и стационарно связанных гауссовских процессов. Подобный функционал исполь-

зуются в неопределенных проблемах продолжения, к которым сводятся многие задачи робастного управления, поэтому было введено понятие анизотропии для описания энтропийного функционала в терминах теории управления, что позволяет специалистам по теории управления использовать данный математический аппарат при решении задач робастного управления и фильтрации. В работе [42] представлена формулировка задачи стохастической  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации, подразумевающей введение критерия качества в виде стохастического коэффициента усиления системы. Помимо этого, в данной работе описана связь введенного коэффициента усиления с  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -нормами. В 1996 году на международной конференции ИФАК (International Federation of Automatic Control) была представлена работа [43], в которой введено определение анизотропийной нормы системы и методы вычисления данной нормы для линейной дискретной стационарной системы в частотной области и пространстве состояний. Вдобавок, на той же конференции представлена работа [44], в которой описано решение вышеупомянутой задачи стохастической  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации в пространстве состояний с применением анизотропийной теории. Позднее, в 1999 году, в издании Автоматика и Телемеханика была опубликована статья [45], в которой рассмотрены особенности сходимости анизотропийной нормы к  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$ -нормам при изменении верхней границы средней анизотропии гауссовских входных шумов. В 2001 году было опубликовано две работы, посвященных анизотропийному анализу для линейных дискретных стационарных систем [46] и их нестационарных аналогов [47]. Также стоит упомянуть работу [48], в которой описан анизотропийный анализ робастного качества для линейной системы на конечном временном интервале. В этой работе представлены формулы для анизотропийной нормы в пространстве состояний.

На основе вышеперечисленных и многих других работ по анизотропийной теории было написано большинство последующих публикаций, посвященных анизотропийному анализу, синтезу анизотропийного управления и анизотропийного фильтра. Как и в случае  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации, в анизотропийной

теории синтез заключается в поиске решения алгебраического или разностного уравнения Риккати относительно матриц искомого регулятора или фильтра. Важные результаты в области анизотропийного анализа представлены в работе [49]. В ней сформулирована обратная задача анизотропийного анализа, которая заключается в поиске значения максимальной средней анизотропии  $a \geq 0$ , при котором анизотропийная норма системы не превосходит заданной величины  $\gamma$ . Стоит заметить, что в задаче оптимальной фильтрации поиск решения уравнения Риккати приводит к единственному решению, которое является наиболее эффективным для заданной конфигурации системы. Если же свойства системы изменятся, оптимальный фильтр уже не будет обеспечивать минимум заданного критерия качества. Логично не решать заново оптимальную задачу, а перейти к субоптимальной задаче, результатом которой является фильтр, обеспечивающий в любом случае ограниченность значения критерия сверху заданным числом. В таких случаях используется переход от уравнений Риккати к соответствующим неравенствам Риккати. Затем используется известная лемма Шура для преобразования неравенств Риккати к линейным матричным неравенствам (ЛМН). Примеры его применения можно найти в работе [50], в которой представлены условия ограниченности анизотропийной нормы линейной дискретной стационарной системы в виде ЛМН. А в последующей работе [51] эти условия ограниченности использовались при поиске субоптимального фильтра для таких систем. В качестве примера использования описанного подхода в синтезе субоптимального управления можно привести работу [52], в которой была решена задача синтеза статического анизотропийного регулятора по выходу, обеспечивающего ограниченность анизотропийной нормы сверху заданным числом. Описанный выше метод используется и в данной диссертационной работе.

От анизотропийного анализа и синтеза для линейных дискретных стационарных систем перейдем к аналогичным задачам для нестационарных. Для них вместо алгебраического уравнения Риккати необходимо решать разностное

уравнение с дополнительным условием специального вида. В результате перехода от уравнения к неравенствам получаются линейные матричные неравенства для каждого шага на конечном временном интервале. В работе [53] приведена соответствующая формулировка леммы об ограниченности анизотропийной нормы системы. Эта лемма является основой для многих работ по субоптимальной анизотропийной фильтрации для упомянутых выше систем. Задача субоптимальной анизотропийной фильтрации для линейных нестационарных систем была решена в [54]. Стоит отметить, что в данной работе рассмотрены и предельные случаи уровней анизотропии  $a = 0$  и  $a \rightarrow \infty$ . А в [55] представлены методы синтеза оптимального анизотропийного фильтра и рассуждения о применении этих результатов для поиска оптимальной оценки состояния нелинейных систем.

Во всех описанных выше публикациях методы анизотропийной теории использовались для математических моделей с детерминированными матрицами. Однако, большой интерес представляют и системы со случайными матрицами, поскольку многие процессы в технических и физических объектах происходят случайным образом. Многие задачи теорий управления и фильтрации для стохастических систем в общем виде остаются нерешенными. Поэтому ученым чаще всего приходится вводить определенные предположения о статистических свойствах таких моделей. Существует предположение, что случайные процессы внутри объекта можно считать независимыми друг от друга аддитивными шумами. При построении линейной модели динамики данного объекта эти шумы должны учитываться для адекватного описания поведения объекта. Поэтому аддитивные шумы входят в состав соответствующих матриц, описывающих свойства системы. Поскольку эти внутренние шумы в уравнениях системы перемножаются с внешними случайными возмущениями, их называют мультипликативными. Поэтому системы с мультипликативными шумами часто называют билинейными стохастическими. Данное допущение позволяет решать задачи анализа и синтеза для подобных моделей на основе имеющегося математиче-

ского аппарата и результатов теории фильтрации. При этом системы с мультипликативными шумами являются достаточно эффективной аппроксимацией стохастических систем. С середины двадцатого столетия появилось немало научных работ по проблематике синтеза регуляторов и оценивателей для таких моделей. Системы с мультипликативными шумами часто используются для математического описания разнообразных физических и финансовых процессов, технических объектов и т.д., как показано в [56–58]. Вследствие большого научного интереса к ним уже существует множество статей на темы управления и оценивания состояния системы, например [59], синтез линейно-квадратичного регулятора в [60], синтез робастного регулятора и фильтра, обеспечивающих ограниченность  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы системы в [61]. Также по данной тематике стоит ознакомиться с работами [62, 63]. В данной диссертационной работе основным объектом изучения являются линейные дискретные нестационарные системы на конечном интервале времени со случайными изменениями в матрице в виде мультипликативных шумов. Для них рассматриваются задачи анизотропного анализа и субоптимальной анизотропной фильтрации. В процессе решения этих задач были сформулированы и доказаны лемма о вычислении анизотропной нормы системы, лемма о ограниченности нормы сверху заданным числом и достаточные условия существования линейного фильтра, обеспечивающего ограниченность анизотропной нормы системы в ошибках оценивания. Помимо общей постановки фильтрации, были изучены несколько частных случаев данной задачи при наличии дополнительных ограничений на свойства модели и фильтра.

Структура диссертационной работы построена следующим образом. Во введении приведен обзор литературы по теории фильтрации, анизотропной теории и их применения для различных классов систем, в том числе систем с мультипликативными шумами. Также в этом разделе сформулированы цели исследования, основные положения, выносимые на защиту, и данные о структуре и объеме диссертации.

В первой главе диссертации изложены основные положения анизотропийной теории: понятия анизотропии случайного вектора и соответствующей анизотропийной нормы линейных дискретных нестационарных систем с детерминированными матрицами. Также в данной главе представлены решения задач анизотропийного анализа и синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для подобного типа математических моделей. Эти решения представлены в виде соответствующих теорем о вычислении анизотропийной нормы, о ее ограниченности и о существовании анизотропийного субоптимального фильтра. Большая часть этих результатов были опубликованы не автором диссертации, поэтому приводятся с ссылками на первоисточники.

Во второй главе диссертации представлены результаты решения задач анизотропийного анализа для объекта изучения данной работы. Приведены формулировки и доказательства теорем о вычислении анизотропийной нормы в пространстве состояний и о ограниченности анизотропийной нормы сверху заданным числом.

В третьей главе, на основе результатов по анизотропийному анализу из предыдущей главы, описан подход к решению соответствующей задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для систем с мультипликативными шумами. Рассмотрены общий случай задачи фильтрации и частные случаи при определенных ограничениях, накладываемых на систему искомого фильтра. Одним из частных случаев является задача фильтрации для системы со случайными сбоями в датчиках. Подобный случай является широко распространенным на практике и потому синтез эффективного субоптимального фильтра для него является актуальной проблемой. В конце главы приведен численный пример реализации разработанного метода синтеза субоптимального фильтра с результатами в виде графиков и таблиц и сравнительным анализом с известными  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрами.

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** Задача оценивания состояния или выходного сигнала системы на основании доступных измерений является одной из фундаментальных задач теории управления. Технические системы чаще всего имеют достаточно сложную структуру, и поэтому точно измерить все их параметры не представляется возможным. Измерения параметров объекта чаще всего содержат в себе случайные шумы, которые могут сильно влиять на конечное значение измеряемой величины и динамику системы в целом. Поэтому возникает необходимость в построении оптимальных с точки зрения некоторого критерия оценок состояния или определенных параметров системы.

При постановке задачи фильтрации для исследуемого объекта вводится некоторый критерий эффективности искомого оценителя, который чаще всего представляется в форме квадратичного функционала от ошибки оценивания. Достаточно известными методами решения задач фильтрации для линейных систем являются методы  $\mathcal{H}_2$ -теории и  $\mathcal{H}_\infty$ -теории. Однако у  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтров есть свои недостатки: к примеру, отсутствие робастности у  $\mathcal{H}_2$ -фильтра и консервативность  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтра. В 90-е годы с целью обобщения  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -теорий была предложена анизотропийная теория управления и фильтрации. Изложению основ анизотропийной теории, решениям задач анизотропийного анализа и синтеза посвящены работы И.Г. Владимирова, А.П. Курдюкова, А.В. Семенова, Ф. Даймонда, П. Клоедена, М.М. Чайковского, В.Н. Тимина, Е.А. Максимова, А.Ю. Кустова, А.В. Юрченкова и многих других.

Методы анизотропийной теории нашли свое применение во многих задачах синтеза регуляторов и фильтров для разных видов линейных систем с детерминированными (неслучайными) матрицами. Однако параметры многих объектов и процессов могут меняться во времени случайным образом. Решение задач анализа и синтеза для стохастических систем в общей постановке является довольно трудоемким, поэтому чаще всего рассматриваются частные слу-

чай задач, связанные с упрощенными постановками. К таким частным случаям относятся системы с мультипликативными шумами. Подобные системы имеют достаточно широкую область практического применения. К примеру, решению задач анализа и синтеза для примеров систем с мультипликативными шумами в финансовой, биологической и других сферах жизнедеятельности посвящены работы И. Яеша, А. Стоицы, Э. Герсона, Е. Тодорова и других. К такого рода системам относятся и системы со случайными сбоями в датчиках. Они чаще всего описывают поведение объектов, в которых измерения параметров объекта становятся неполными в момент отказа и потому необходимо построение фильтра, дающего оптимальную оценку состояния данной системы с учетом возможных сбоев.

Вследствие большого научного интереса к системам с мультипликативными шумами уже существует целый ряд работ на темы задач робастного и линейно-квадратичного управлений, оценивания состояния или выхода системы, и многие другие. Однако, до сих пор существует множество нерешенных задач управления и фильтрации для подобных систем. Одной из них является задача субоптимальной анизотропийной фильтрации, решение которой является основной целью данной диссертационной работы.

**Объект и предмет исследования.** Объектом исследования диссертационной работы является линейная дискретная нестационарная система с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. На вход системы подается возмущение в виде последовательности случайных векторов, описываемой вектором с ограниченной сверху анизотропией. Выходами системы являются измерения ее параметров (измеряемый выход) и интересующие исследователя параметры системы или связанная с ней величина (оцениваемый выход). Предметом исследования является построение субоптимальной оценки на основе значений измеряемого выхода системы для ее оцениваемого выхода. Критерием оценивания является условие ограниченности анизотропийной нормы соответствующей системы в ошибках оценивания заданной величиной.

**Цели и задачи.** Целью работы является разработка методов анизотропийного анализа и синтеза субоптимальных анизотропийных фильтров для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать метод вычисления в пространстве состояний анизотропийной нормы линейной дискретной нестационарной системы с мультипликативными шумами на конечном интервале времени.
2. Сформулировать условия ограниченности анизотропийной нормы для систем с мультипликативными шумами.
3. Разработать метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра (оценителя) для систем в мультипликативными шумами при различных конфигурациях фильтра.
4. Разработать метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем со случайными сбоями в датчиках.
5. Продемонстрировать эффективность разработанных методов анализа и синтеза на численном примере.

**Область исследования.** Данная диссертационная работа соответствует специальности 05.13.01 “Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)” по следующим пунктам:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;
2. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;

3. Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации;

**Методы исследования.** В диссертационной работе применяются математические методы теории фильтрации, линейной алгебры, ковариационного анализа, функционального анализа, вариационного исчисления, теории функций комплексной переменной и теории вероятности. Используются конгруэнтные преобразования, методы перехода от уравнений Риккати к соответствующим неравенствам, лемма Шура для перехода к линейным матричным неравенствам и численные методы решения ЛМН для реализации методов решения поставленных задач. При реализации метода синтеза субоптимального анизотропийного регулятора используется среда MATLAB и пакет YALMIP.

**Научная новизна.**

1. Впервые получено решение задачи анизотропийного анализа для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами и центрированным внешним возмущением на конечном интервале времени в виде формулы вычисления анизотропийной нормы в пространстве состояний.
2. Предложена процедура анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами, которая заключается в формулировке условий ограниченности сверху анизотропийной нормы системы заданным неотрицательным числом. В отличие от известных результатов, предложенный метод выгодно отличается меньшей консервативностью и большей точностью.
3. Впервые представлен алгоритм синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем с мультипликативными шумами как решения системы линейных матричных неравенств в терминах матриц системы и

фильтра.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Методы анизотропийной теории позволяют решать задачи робастного управления и фильтрации для различных систем с нестандартными параметрами входных возмущений. Поскольку системы с мультипликативными шумами хорошо аппроксимируют многие технические системы с меняющимися случайным образом параметрами и внешними шумами, решение задач анизотропийного анализа и анизотропийной фильтрации для подобных систем имеет большое теоретическое значение.

Представленные в диссертации результаты имеют и практическое значение. Приведенный алгоритм синтеза оценщика для систем со случайными сбоями в датчиках может использоваться при решении многих технических задач, поскольку с помощью суперпозиции рассмотренной системы со случайными сбоями в датчиках можно описывать многие более сложные объекты.

### **Основные результаты, выносимые на защиту.**

1. Метод вычисления в пространстве состояний анизотропийной нормы линейной дискретной нестационарной системы с мультипликативными шумами на конечном интервале времени.
2. Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами.
3. Метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра (оценщика) для систем с мультипликативными шумами в общей и частной постановках.
4. Метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем со случайными сбоями в датчиках с его дальнейшей реализацией в численном примере.

**Степень обоснованности и достоверности полученных результатов.** Представленные в работе результаты решения поставленных задач анализа и синтеза являются достоверными и обоснованными по причине использования строгого математического аппарата. В качестве подтверждения в работе продемонстрированы результаты компьютерного моделирования предложенных методов решения задач.

**Реализация и внедрение результатов исследования.** Предложенный метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем со случайными сбоями в датчиках реализован в численной форме для модели продольного движения самолета Ту-154 по глиссаде, имеющей вид линейной дискретной нестационарной системы на конечном интервале времени. Результаты представлены в виде наборов матриц искомого фильтра и в виде графиков ошибок оценивания переменных системы. Для численного решения задачи и моделирования использовались среда MATLAB и пакет YALMIP.

**Апробация результатов** По тематике диссертационной работы были сделаны доклады на следующих российских и международных конференциях: XXI конференция молодых ученых «Навигация и управление движением» с международным участием (19-22 марта 2019 года); 13-е Всероссийское совещание по проблемам управления (XIII ВСПУ 2019); 27th Mediterranean Conference on Control Automation (MED-2019); XV Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого 2020 года); 28th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED-2020); 21st International Carpathian Control Conference (ICCC-2020).

Также основные положения диссертации докладывались и обсуждались на докладах научных семинаров в Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова; Московском Авиационном Институте (МАИ) и Московском Государственном Техническом Университете имени Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 8 работ, среди которых 2 публикации в рецензируемых научных изданиях из списка RSCI [75], [76], 3 доклада из перечня Web of Science/Scopus [74], [78], [79], 3 публикации в сборниках трудов и тезисов конференций [72], [73], [77].

**Личный вклад соискателя.** Все исследования, изложенные в диссертационной работе, выполнены лично соискателем в процессе научной деятельности. В работах [73], [74], выполненных в соавторстве, автор внес значительный вклад в решении задач анизотропного анализа для систем с мультипликативными шумами, в проведении необходимых преобразований и получении конечного результата в виде достаточных условий ограниченности анизотропной нормы.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 135 страницах, содержит 4 таблицы и 22 иллюстрации. Библиография содержит 82 наименования.

# 1 Основные сведения

Объектом исследования данной диссертационной работы является класс линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном временном интервале. Но для начала необходимо рассмотреть класс линейных дискретных нестационарных систем с детерминированными матрицами, их свойства и нормы. Впоследствии эти сведения будут использоваться при решении задач для аналогичных систем со случайными матрицами.

В данном разделе представлены теоретические основы научной работы, проведенной в процессе написания диссертации. Приведены понятия среднеквадратичного коэффициента усиления, нормы оператора,  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -норм системы, а также основные определения анизотропийной теории – анизотропия случайного вектора и анизотропийная норма системы. Кроме того, в данном разделе рассмотрены методы решения задач анизотропийного анализа и синтеза анизотропийного фильтра для линейных дискретных нестационарных систем с детерминированными матрицами. В последнем подразделе изложено математическое описание объекта исследования диссертационной работы – системы с мультипликативными шумами. Эти теоретические аспекты и результаты использовались в диссертационной работе при решении задач.

## 1.1 $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ нормы системы

Для описания динамики изменения состояния объекта используются физические, химические, биологические и другие законы в зависимости от типа объекта. В математической форме эти законы чаще всего описываются нелинейными выражениями, включающими в себя производные высших порядков. Решение задач управления и фильтрации для нелинейных систем является весьма сложным и универсальных методов решения для таких систем в общем виде немного. Поэтому нелинейные зависимости аппроксимируются линейными в окрестности положения равновесия объекта, отдельных точек или траекто-

рии его движения. Большинство технических систем, среди которых цифровые устройства, микропроцессоры и другие вычислительные устройства, обменивающиеся данными посредством дискретных сигналов, описывается терминами дискретных системам. Одним из таких примеров является объект или группа объектов с системой датчиков, которые измеряют определенные параметры объекта в дискретные моменты времени. Если параметры объекта исследования меняются на протяжении заданного интервала времени, то его динамика описывается нестационарными системами, т.е. системами с изменяющимися во времени параметрами. Стоит отметить, что стационарные системы могут описываться на конечном и бесконечном временном интервале, а нестационарные системы — преимущественно на конечном интервале. Матрицы линейной модели могут быть детерминированными и случайными в зависимости от свойств объекта.

Помимо внутренних изменений, на динамику системы могут оказывать влияние и внешние факторы. Эффект их воздействия может быть смоделирован подачей сигнала  $W$  на вход системы, влияющего на ее динамику. Этот сигнал называется входным возмущением и может быть представлен в виде последовательности скалярных или векторных величин. Также этот сигнал может быть детерминированным или также случайным. В дальнейшем будем считать, что входное возмущение является последовательностью случайных векторов, каждый из которых принадлежит пространству Лебега  $m_w$ -мерных интегрируемых с квадратом случайных векторов. В литературе это пространство обозначается как  $\mathbb{L}_2^{m_w}$ . На данном пространстве определены скалярное произведение  $\langle x, y \rangle = \mathbf{E}[x^\top y]$  и ассоциированная норма  $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\mathbf{E}[x^\top x]} = \sqrt{\mathbf{E}[|x|^2]} < \infty$ .

Для эффективного управления динамикой системы или подавления влияния входных возмущений исследователю необходимо иметь определенную информацию о текущей динамике системы. Чаще всего предполагается, что исследователю известна лишь часть этой информации, которую он получает от

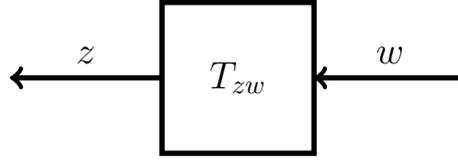
установленных сенсоров и датчиков. Эти данные, поступающие от системы, называют ее выходом. Это может быть наблюдаемый выход  $Y$ , который основан на данных, получаемых с датчиков, установленных на объекте. Также это может быть оцениваемый выход  $Z$  системы. Для такого выхода необходимо получить оптимальную с точки зрения некоторого критерия оценку его значения. Это является целью задачи фильтрации, которая рассмотрена в данной диссертации. Как и входной сигнал, выход является последовательностью детерминированных или случайных величин определенной размерности. На значение выходного сигнала также могут влиять внешние возмущения, например, шумы в датчиках. Часто все разновидности возмущений записывают в единой последовательности векторов  $W$ . Мера воздействия входных возмущений на значения выходного сигнала является одной из характеристик системы. Если рассматриваемая система объекта является линейной, то связь между входным и выходными сигналами можно записать в виде  $Z = FW$ , где  $F$  — передаточная функция системы (в стационарном случае) или передаточная матрица (в нестационарном случае). Систему со входным сигналом  $W$  и выходным сигналом  $Z$  обозначим как  $T_{zw}$  (как линейный оператор, ставящий в соответствие в каждый момент времени  $k$  входному вектору  $w(k)$  выходной вектор  $z(k)$ ).

Далее запишем представление линейной дискретной нестационарной системы в пространстве состояний на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ :

$$T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь  $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  —  $n_x$ -мерный вектор состояния системы с начальным состоянием  $x(0) = 0$ ;  $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  —  $m_w$ -мерный вектор входного возмущения системы;  $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$  —  $p_z$ -мерный вектор выхода системы;  $A(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times m_w}$ ,  $C(k) \in \mathbb{R}^{p_z \times n_x}$ ,  $D(k) \in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}$  — матрицы системы. Ниже представлена блок-схема системы (1.1).

Помимо представления (1.1) в пространстве состояний в виде системы (1.1),



**Рис. 1:** Блок-схема системы  $T_{zw}$

рассматриваемый объект может быть определен с помощью вышеупомянутого соотношения между входным и выходным сигналами объекта. Математическое описание такого соотношения называется вход-выходным соотношением. Запишем его для системы (1.1). Для этого в соответствии с уравнениями системы выразим значения вектора выхода  $z(0), \dots, z(N)$  через значения вектора входа  $w(0), \dots, w(N)$ :

$$z(k) = C(k) \sum_{i=1}^k \left[ \prod_{j=1}^{i-1} A(k-j) \right] B(k-i)w(k-i) + D(k)w(k), \quad (1.2)$$

где  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Из (1.1) и (1.2) видно, что значение выходного вектора  $z(N)$  определяется всем набором значений входного вектора  $w(0), \dots, w(N)$ . Запишем последовательности значений векторов  $w(k)$  и  $z(k)$  следующим образом:

$$W_{0:N} = [w^\top(0), \dots, w^\top(N)]^\top, \quad Z_{0:N} = [z^\top(0), \dots, z^\top(N)]^\top.$$

Векторы  $W_{0:N}$  и  $Z_{0:N}$  содержат в себе информацию о значениях входа и выхода системы на всем интервале времени. Поскольку в нестационарном случае системе можно поставить в соответствие матрицу  $F_{0:N}$ , запишем вход-выходное соотношение в следующем виде:

$$Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N}, \quad (1.3)$$

где матрица  $F_{0:N} \in \mathbb{R}^{p_z(N+1) \times m_w(N+1)}$  является блочной матрицей следующей формы:

$$F_{0:N} = \text{block}_{0 \leq k, \kappa \leq N} (f(k, \kappa))$$

с блоками вида

$$f(k, \kappa) = \begin{cases} C(k)T(k, \kappa + 1)B(\kappa), & \text{если } k > \kappa, \\ D(k), & \text{если } k = \kappa, \\ 0, & \text{если } k < \kappa. \end{cases}$$

Матрица  $T(k, \kappa)$  называется матрицей перехода и для всех  $k > \kappa$  удовлетворяет рекуррентной формуле

$$T(k, \kappa) = A(k - 1)T(k - 1, \kappa) = T(k, \kappa + 1)A(\kappa) \quad (1.4)$$

с граничным условием  $T(k, k) = I_{n_x}$ .

Поскольку каждому вектору  $W_{0:N}$  ставится в соответствие единственный вектор  $Z_{0:N}$  и имеет место соотношение (1.3), то можно сказать, что существует эквивалентный системе (1.1) по действию линейный оператор с областью определения в пространстве векторов  $\mathbb{L}_2^{m_w(N+1)}$ , областью значений в пространстве векторов  $\mathbb{L}_2^{p_z(N+1)}$  и детерминированной матрицей  $F_{0:N}$ . Для упрощения дальнейших выкладок введем следующие обозначения:

$$l_w = m_w(N + 1), \quad l_z = p_z(N + 1).$$

При проходе через систему входной вектор  $W_{0:N}$  преобразуется в выходной вектор  $Z_{0:N}$ , характеристики этих векторов связаны друг с другом посредством матрицы  $F_{0:N}$ . Одну из этих характеристик, меру разброса значений входного сигнала  $W_{0:N}$  как случайного вектора, принадлежащего пространству  $\mathbb{L}_2^{l_w}$ , можно определить как 2-норму случайного вектора:

$$\|W_{0:N}\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}[W_{0:N}^\top W_{0:N}]}$$

Поскольку вектор  $Z_{0:N}$  связан с  $W_{0:N}$  соотношением (1.3), его дисперсия также связана с дисперсией входного сигнала. Соотношение мер разброса входного и выходного сигналов является одной из основных характеристик системы, поскольку это соотношение показывает, насколько система увеличивает или

уменьшает неопределенность значений входного сигнала. В задачах управления и фильтрации чаще всего целью является минимизация этого соотношения, т.е. разброс значений выхода системы не должна значительно возрасти при прохождении входного возмущения с ограниченной нормой через систему. Эту характеристику еще называют мерой чувствительности системы. Отношение 2-норм выходного и входного векторов системы называется ее среднеквадратичным коэффициентом усиления (СКУ)  $\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N})$  и вычисляется по формуле

$$\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \frac{\|Z_{0:N}\|_2}{\|W_{0:N}\|_2} = \frac{\|F_{0:N}W_{0:N}\|_2}{\|W_{0:N}\|_2}.$$

Стоит отметить, что если матрица  $F_{0:N}$  является случайной и стохастически независимой со входным вектором  $W_{0:N}$ , то СКУ системы имеет вид

$$\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \sqrt{\frac{\text{tr}[\Lambda_{0:N}\Sigma_{0:N}]}{\text{tr}[\Sigma_{0:N}]}} \tag{1.5}$$

где  $\Lambda_{0:N} = F_{0:N}^\top F_{0:N}$ ,  $\Sigma_{0:N} = \mathbf{E}[W_{0:N}W_{0:N}^\top]$ .

Значение СКУ варьируется между минимальным и максимальным сингулярными числами передаточной матрицы  $F_{0:N}$  системы. Минимальное сингулярное число соответствует “наилучшему” случаю входного возмущения, когда входной вектор  $W_{0:N}$  коллинеарен собственному вектору матрицы  $\Lambda_{0:N}$ , соответствующему минимальному собственному значению матрицы  $F_{0:N}$ . Но предполагать, что данный случай будет реализован в действительности, неуместно, поскольку в большинстве случаев входное возмущение не является наилучшим. Чаще всего предполагается, что входное возмущение  $W_{0:N}$  является *наихудшим*, т.е. при нем среднеквадратичный коэффициент усиления достигает максимального значения. Это значение показывает предельную чувствительность системы к внешним возмущениям, информация о которой крайне важна при решении задач синтеза. Если фильтр синтезируется таким образом, что максимальное значение СКУ при наихудшем возмущении будет ограничено некоторой величиной или просто минимизировано, то значение СКУ при остальных вариантах входного возмущения будет ограничено автоматически. Наихудшее

внешнее возмущение  $W_{0:N}$  выбирается из всех случайных векторов, принадлежащих пространству  $\mathbb{L}_2^{l_w}$ . Но можно ввести дополнительные ограничения на свойства входного возмущения и искать наихудший сигнал в более узком смысле. К примеру, элементами  $W_{0:N}$  могут быть случайные векторы со стандартным нормальным распределением или с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей. В теории робастного управления входное возмущение в виде гауссовского белого шума, т.е. случайного процесса с гауссовским распределением, нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, является наименее неблагоприятным вариантом возмущения, поскольку в таком шуме все спектральные составляющие распределены равномерно по всему диапазону частот. Следовательно, на множестве таких  $W_{0:N}$  СКУ должен принимать минимально возможное с учетом отсева очевидных наилучших вариантов значение.

Рассмотрим частный случай входного возмущения  $W_{0:N}$  в виде гауссовского белого шума с единичной ковариационной матрицей  $\Sigma_{0:N}$ . Среднеквадратичный коэффициент усиления (1.5) для данного частного случая имеет вид

$$\mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N}) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda_{0:N})}{l_w}}.$$

Получается, что СКУ, соответствующий системе (1.1), равен масштабированной 2-норме передаточной матрицы  $F_{0:N}$  системы, при условии, что входное возмущение  $W_{0:N}$  является гауссовским случайным вектором с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей. Поскольку матрица  $F_{0:N}$  полностью описывает линейную дискретную нестационарную систему вида (1.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  с нулевым начальным условием, норма системы эквивалентна соответствующей норме матрицы  $F_{0:N}$ . Будем называть 2-норму  $\|F_{0:N}\|_2$  передаточной матрицы  $\mathcal{H}_2$ -нормой системы (1.1).

Значение СКУ при наихудшем входном возмущении

$W_{0:N}^* = \arg \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{l_w}} \mathbf{Q}(F_{0:N}, W_{0:N})$  является аналогом  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы для рассматриваемой системы, т.е. справедливо равенство

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{l_w}} Q(F_{0:N}, W_{0:N}).$$

Аналог  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы для рассматриваемой системы равен  $\infty$ -норме матрицы  $F_{0:N}$ , которая вычисляется по формуле

$$\|F_{0:N}\|_\infty = \sigma_{max}(F_{0:N}),$$

где  $\sigma_{max}(F_{0:N})$  — максимальное сингулярное число матрицы  $F_{0:N}$ . Видно, что аналог  $\mathcal{H}_2$ -нормы системы определяется арифметическим средним собственных значений матрицы  $F_{0:N}$ , а аналог  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы определяется максимальным собственным значением, т.е. соответствует реакции системы на наихудшее входное возмущение  $W^*$ . Подобное возмущение можно определить в терминах решения задачи поиска точки экстремума СКУ среди случайных  $l_w$ -мерных векторов  $W_{0:N}$  в пространстве  $\mathbb{L}_2^{l_w}$ . Поскольку физической интерпретацией 2-нормы сигнала является энергия, можно сделать вывод, что физический смысл  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы заключается в мере увеличения входного сигнала после его прохождения через рассматриваемую систему.

При решении задач  $\mathcal{H}_\infty$ -теории всегда действует предположение о наихудшем сценарии входного возмущения, что не всегда верно. А перманентное подавление наихудшего возмущения может быть не эффективно с точки зрения энергозатрат. Однако при отсутствии информации о статистических и прочих характеристиках входного возмущения использование подход  $\mathcal{H}_2$ -теории также не является целесообразным. Поскольку определение свойств возмущения с достаточной точностью в реальных задачах чаще является невозможно, можно с помощью введения некоторого параметра определить, насколько характеристики реального входного возмущения отличаются от характеристик некоторого эталона. Одной из таких мер отклонения является анизотропия этого возмущения, подробнее о которой будет рассказано в следующем разделе.

## 1.2 Анизотропия случайного вектора

В  $\mathcal{H}_2$ -теории входные возмущения системы представлены в виде гауссовского белого шума, а в случае  $\mathcal{H}_\infty$ -теории входным сигналом предполагается наихудшее возмущение из всего пространства  $\mathbb{L}_2^{lw}$  интегрируемых с квадратом случайных векторов. Однако, в действительности существует множество других видов входных сигналов, свойства которых существенно отличаются от описанных выше. Достаточно часто свойства входных сигналов системы известны частично или неизвестны вовсе. Если входной сигнал не соответствует гауссовскому белому шуму, то  $\mathcal{H}_2$ -фильтр не является робастным, а  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтр будет слишком консервативным, если входное возмущение является, к примеру, окрашенным гауссовским шумом. Одним из возможных подходов в таких случаях является введение такой характеристики случайного возмущения, которая будет описывать его отклонения с точки зрения распределения вероятностей от заданного эталонного множества. В качестве такой характеристики в [42] было предложено понятие анизотропии случайного вектора.

Прежде чем перейти напрямую к определению анизотропии случайного вектора, рассмотрим связанные с анизотропией понятия из теории информации. Одним из основных понятий теории информации является энтропия. Формально энтропия для некоторой случайной величины  $X$  с  $n$  возможными значениями  $x_i$ , каждое из которых появляется с вероятностью  $p_i$ , определяется следующим образом:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i). \quad (1.6)$$

Информационная энтропия является математическим ожиданием от величины собственной информации случайной величины. Чем больше вероятность определенного события, тем меньше будет значение собственной информации, т.е. более частые события несут меньше информации. По величине информационной энтропии можно определить, насколько распределение дискретной случайной величины отличается от равномерного распределения.

Для непрерывных случайных векторов аналогом величины (1.6) является дифференциальная энтропия, которая определяется формулой

$$\mathbf{h}(\xi) = - \int_X f(x) \ln f(x) dx,$$

где  $\xi$  — непрерывный случайный вектор, распределенный в пространстве  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  с плотностью вероятности  $f(x)$ . Стоит отметить, что далеко не во всех задачах функция распределения вероятностей случайной величины точно известна. Очень часто вводится предположение о свойствах распределения вероятности рассматриваемой величины. Мерой расхождения между двумя распределениями вероятности может быть принята величина, называемая расстоянием Кульбака-Лейблера. Также эту величину называют относительной энтропией. Приведем определение относительной энтропии для непрерывных случайных величин. Пусть  $W$  и  $X$  являются непрерывно распределенными  $m$ -мерными случайными векторами с распределениями  $f(x)$  и  $g(x)$  соответственно. Распределение  $f(x)$  является абсолютно непрерывным относительно распределения  $g(x)$ , т.е. функция  $f(x)$  принимает нулевое значение при всех значениях  $x$ , при которых  $g(x) = 0$ . Тогда относительная энтропия  $D(f||g)$  определена следующим образом:

$$D(X||Y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \ln \frac{f(x)}{g(x)} dx_1 \dots dx_m. \quad (1.7)$$

В качестве эталона, с которым сравнивается распределение  $f(x)$ , можно нормальное распределение с функцией плотности

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{x^\top x}{2\lambda}\right), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Подставив функцию нормального распределения  $p_{m,\lambda}(x)$  вместо функции  $g(x)$  в определении (1.7), получим

$$\mathbf{D}(f||p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln(2\pi\lambda) + \frac{\mathbf{E}[W^\top W]}{2\lambda} - \mathbf{h}(W), \quad (1.8)$$

где  $W$  —  $m$ -мерный случайный вектор с функцией плотности вероятности  $f(x)$ ,  $\mathbf{h}(W)$  — дифференциальная энтропия вектора  $W$ . Минимальное значение от-

носительной энтропии (1.8) по параметру  $\lambda > 0$  и называется анизотропией вектора  $W$ .

**Определение 1.** [48] Анизотропией  $\mathbf{A}(W)$   $m$ -мерного случайного вектора  $W$  называется неотрицательная величина, определенная по формуле

$$\mathbf{A}(W) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left( \frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}[|W|^2] \right) - \mathbf{h}(W),$$

где  $\mathbf{D}(f \| p_{m,\lambda})$  — относительная энтропия функции плотности распределения вероятности  $f$  вектора  $W$  относительно функции плотности гауссовского распределения  $p_{m,\lambda}$  с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей  $\lambda I_m$ ,  $\lambda > 0$ ;  $\mathbf{h}(W) = - \int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$  — дифференциальная энтропия  $W$ .

Значение анизотропии случайного вектора определяется его функцией распределения и статистическими моментами, причем последнее слагаемое  $h(W)$  определяется только функцией распределения.

**Лемма 1.** [48] Анизотропия  $\mathbf{A}(W)$  случайного вектора  $W \in \mathbb{L}_2^m$  обладает следующими свойствами:

1. Для любой положительно определенной матрицы  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , являющейся ковариационной матрицей случайного вектора  $W$ , минимум анизотропии  $\mathbf{A}(W)$  вычисляется по формуле

$$\min \{ \mathbf{A}(W) : W \in \mathbb{L}_2^m, \mathbf{E}[WW^\top] = \Sigma \} = -\frac{m}{2} \ln \det \frac{m\Sigma}{\text{tr}(\Sigma)}, \quad (1.9)$$

причем минимум достигается только на гауссовском векторе  $W$  с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей  $\Sigma$ .

2. Для любого вектора  $W \in \mathbb{L}_2^m$  анизотропия  $\mathbf{A}(W)$  является неотрицательной величиной. Нулевое значение анизотропии соответствует гауссовскому случайному вектору  $W$  с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей  $\lambda I_m$ .

Стоит обратить внимание, что из второго пункта леммы следует, что случай нулевой анизотропии входного возмущения системы соответствует задачам  $\mathcal{H}_2$ -теории, поскольку в постановке этих задач есть предположение о входном сигнале в виде гауссовского белого шума, как было указано ранее.

### 1.3 Анизотропийная норма системы

В данном разделе приводятся определение анизотропийной нормы линейной дискретной нестационарной системы на конечном интервале и ее основные свойства. Рассмотрим систему вида

$$T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k). \end{cases} \quad (1.10)$$

Предположим, что входным сигналом системы (1.10) является последовательность случайных векторов  $w(k)$ , фрагменты которой описываются вектором  $W_{0:N} \in \mathbb{L}_2^{l_w}$  с ограниченной сверху заданной величиной  $a \geq 0$  анизотропией  $\mathbf{A}(W_{0:N})$ . Обозначим множество подобных векторов следующим образом:

$$\mathbb{W}_a = \{W \in \mathbb{L}_2^{l_w} : \mathbf{A}(W) \leq a\}.$$

Как было сказано ранее, для систем типа (1.10) основной характеристикой является среднеквадратичный коэффициент усиления. Он принимает различные значения в зависимости от характеристик входного вектора  $W_{0:N} \in \mathbb{W}_a$  с ограниченной анизотропией. Поскольку СКУ фактически является мерой увеличения разброса и соответственно неопределенности выходного вектора рассматриваемой системы, целью задач управления и фильтрации является минимизация или ограничение значения этого коэффициента при любых входных векторах  $W_{0:N}$  из заданного множества  $\mathbb{W}_a$ . Очевидно, что для обеспечения ограниченности значения СКУ для всех векторов  $W_{0:N} \in \mathbb{W}_a$  необходимо рассматривать максимальное значение СКУ на данном множестве. Это максимальное значение и называется анизотропийной нормой системы. Запишем ниже определение

анизотропийной нормы.

**Определение 2.** [48] *Анизотропийной нормой матрицы  $F_{0:N}$  называется неотрицательная величина*

$$\|F_{0:N}\|_a = \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{W}_a} \frac{\|F_{0:N}W_{0:N}\|_2}{\|W_{0:N}\|_2}. \quad (1.11)$$

Ранее было показано, что нормы матрицы  $F_{0:N}$  эквивалентны соответствующим нормам системы, которую она описывает. Следовательно, анизотропийная норма системы вида (1.1) равна анизотропийной норме матрицы  $F_{0:N}$ . По определению видно, что задача вычисления анизотропийной нормы, как и в случае  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы, включает в себя поиск наихудшего входного возмущения  $W^*$ . В отличие от  $\mathcal{H}_\infty$ , поиск  $W^*$  осуществляется в более ограниченном множестве случайных векторов  $\mathbb{W}_a$ . Анизотропийная норма системы является неубывающей функцией при любом  $a \geq 0$ , удовлетворяющей неравенствам

$$\frac{\|T_{zw}\|_2}{\sqrt{l_w}} = \|T_{zw}\|_0 \leq \|T_{zw}\|_a,$$

$$\|T_{zw}\|_a < \lim_{a \rightarrow +\infty} \|T_{zw}\|_a = \|T_{zw}\|_\infty.$$

Исходя из свойств анизотропии из предыдущего раздела, случайные векторы  $W_{0:N}$  с нулевой анизотропией (расстоянием от эталонного распределения) обладают гауссовским распределением с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Соответственно, анизотропийная норма системы при  $a = 0$  соответствует аналогу  $\mathcal{H}_2$ -нормы системы. Векторы  $W_{0:N}$  с бесконечной анизотропией соответствуют случайным векторам с ограниченной энергией, некоторые элементы которых являются линейными комбинациями остальных. В итоге, анизотропийная норма при  $a \rightarrow \infty$  стремится к значению  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы для системы (1.1).

Важно отметить, что эффективное использование математического аппарата анизотропийной теории имеет смысл при выполнении строгого неравенства

$$\|T_{zw}\|_2 / \sqrt{l_w} < \|T_{zw}\|_\infty.$$

Данное неравенство нарушается только в том случае, когда матрица  $F_{0:N}^\top F_{0:N}$  имеет вид  $F_{0:N}^\top F_{0:N} = \lambda I_{l_w}$  для некоторого  $\lambda \geq 0$ . Если данное условие выполняется при  $\lambda = 1$ , то систему называют изометричной. Для вычисления анизотропийной нормы необходимо найти тот входной вектор  $W_{0:N}^* \in \mathbb{W}_a$ , при котором достигается супремум в выражении (1.11), т.е.  $W_{0:N}^* = \arg \sup_{W_{0:N} \in \mathbb{W}_a} \frac{\|F_{0:N} W_{0:N}\|_2}{\|W_{0:N}\|_2}$ . Поскольку  $W_{0:N}$  является случайным вектором, необходимо определить статистические характеристики искомого наихудшего вектора. Данная задача сводится к поиску соответствующего наихудшего фильтра, генерирующего  $W_{0:N}^*$ . Ранее уже были выведены формулы вычисления анизотропийной нормы в частотной области и в пространстве состояний для линейных стационарных и нестационарных систем. В следующем разделе описан процесс определения характеристик наихудшего вектора и решения задач анизотропийного анализа для систем вида (1.1).

## 1.4 Системы с мультипликативными шумами

Линейные стохастические системы являются крайне важным классом систем в теории управления и фильтрации, поскольку достаточно часто в реальных задачах свойства объектов и технических систем могут меняться случайным образом. Для линейных стохастических систем общего вида решение задач анализа, оптимального управления или оптимальной фильтрации является крайне сложным процессом. Поэтому часто используются разные допущения о свойствах таких систем, которые упрощают решение задач. Одним из примеров таких допущений для стохастических систем является переход к рассмотрению систем с мультипликативными шумами [56–63].

Такие системы на ограниченном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  описываются следующим образом:

$$T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k), \end{cases}$$

где  $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  — вектор состояния системы,  $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  — вектор входа системы,  $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$  — вектор выхода системы. Начальное состояние системы определяется условием  $x(0) = 0$ . Матрицы системы  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$ ,  $D(k)$  являются случайными матрицами специального вида

$$A(k) = A_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{1i}(k)A_i(k), \quad B(k) = B_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{2i}(k)B_i(k),$$

$$C(k) = C_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{3i}(k)C_i(k), \quad D(k) = D_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{4i}(k)D_i(k),$$

где  $\xi_{ji}(k) \in \mathbb{L}_2^1$  при всех  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  и  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  являются независимыми в совокупности по индексам  $i, j, k$  скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Матрицы  $A_i(k)$ ,  $B_i(k)$ ,  $C_i(k)$  и  $D_i(k)$  при всех  $i \in \{0, 1, \dots, M\}$  являются детерминированными матрицами соответствующих размерностей. Важно отметить, что случайные величины  $\xi_{ji}(k)$  являются независимыми со входным случайным возмущением  $w(t)$  при всех  $k$  и  $t$ . Независимость шумов в матрицах системы, описываемых с помощью  $\xi_{ji}(k)$ , в совокупности и с входным случайным возмущением системы является крайне важным условием для решения соответствующих задач анализа и синтеза. Стоит отметить, что независимость величин  $\xi_{ji}(k)$  при одинаковых  $j$  и  $k$  не столь критично.

Системы с мультипликативными шумами можно условно разделить на две части - номинальную и стохастическую или флуктуационную. Матрицы номинальной системы являются детерминированными, ее можно назвать “положением равновесия” основной системы. Во стохастической части содержится случайная природа матриц исходной системы. Подобное “разделение” системы на детерминированную и стохастическую части можно будет проследить в процессе решения задачи анизотропийного анализа, поскольку будут получены два уравнения Риккати, в которых присутствуют соответствующие части матриц  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$  и  $D(k)$ , характеризующих динамику состояния и выхода системы.



состоянием  $x(0) = x_0$  и измеряемым выходом

$$y(k) = (C(k) + F(k)\zeta(k))x(k) + n(k).$$

Здесь  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния;  $w(k) \in \mathbb{R}^q$  — вектор внешнего возмущения;  $u(k) \in \mathbb{R}^s$  — вектор управления;  $z(k) \in \mathbb{R}^m$  — вектор оцениваемого выхода;  $v(k)$ ,  $\eta(k)$  и  $\zeta(k)$  — скалярные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, единичными ковариационными матрицами, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathbf{E}[\eta(k)v(j)] = \beta(k)\delta(k, j), \quad |\beta(k)| < 1, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{E}[\zeta(k)\eta(j)] = \sigma(k)\delta(k, j), \quad |\sigma(k)| < 1, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{E}[\zeta(k)v(j)] = \alpha(k)\delta(k, j), \quad |\alpha(k)| < 1. \quad (1.14)$$

В качестве численного примера в данной работе приведено решение задачи  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрации для двумерной системы с двумерным входным возмущением и одномерным вектором измеряемого выхода, которая не имеет никакой привязки к реальному объекту.

Описание стохастических процессов с помощью мультипликативных шумов используется не только в линейных дискретных системах на конечном интервале времени, как показано выше. К примеру, в [57] рассматривается динамическая система вида

$$dx(t) = f(t, x, u)dt + F(t, x, u)dw$$

с вектором состояния  $x(t) \in \mathbb{R}^m$  и начальным состоянием  $x(0) = x_0$ ; вектором управления  $u(t)$  и случайным процессом  $w$ , описывающим стандартное броуновское движение. Задача синтеза заключается в поиске закона управления  $u(t)$ , минимизирующего значение функционала качества системы вида

$$J = h(x(T)) + \int_0^T l(t, x(t), u(t))dt,$$

где  $T$  — заданный конечный момент времени,  $h(x)$  и  $l(t, x, u)$  — заданные функции конечных затрат и их динамики соответственно. В качестве численного примера рассматривается задача управления движением двухзвенной модели руки, которая заключается в поиске оптимального закона управления  $u(t)$ , обеспечивающего достижения двухзвенным манипулятором одного из трех заданных положений за указанное время. В данном случае стохастическая составляющая системы  $F(t, x, u)dw$  определяется следующим образом:

$$F(t, x, u)dw = \sum_i S_i u dw_i.$$

Таким образом, движение биомеханической руки может быть смоделировано с помощью системы с мультипликативными шумами.

Также подобные системы используются для моделирования процессов в других сферах, например экономической. В [60] рассмотрена задача синтеза линейно-квадратичного регулятора для управления инвестиционным портфелем с целью максимального приближения капитала реального портфеля к некоторому заданному капиталу. Процессы изменения цен на финансовых рынках часто описываются с помощью стохастических систем. Поэтому динамика рассматриваемого портфеля инвестиций описывается системой вида

$$x_i(k+1) = \left( 1 + \mu_i(k) + \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{ij}(\theta(k), k) v_j(k) \right) (x_i(k) + u_i(k)), \quad (1.15)$$

$$x_n(k+1) = (1 + r(k)) \left( x_n(k) - \sum_{j=0}^{n-1} u_j(k) \right), \quad (1.16)$$

где  $x_i(k)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  — сумма инвестиций на  $i$ -ой обыкновенной акции;  $x_n(k)$  — сумма средств на банковском счете;  $\mu_i(k)$  — ожидаемая выручка от  $i$ -ой акции;  $\sigma_{ij}(k)$  — элементы матрицы волатильности, которые линейно зависят от  $\theta(k)$ ;  $r(k)$  — ставки безрисковых активов;  $u_i(k)$  — сумма перевода с банковского счета на  $i$ -й актив (если  $u_i(k) > 0$ ) или с  $i$ -го актива на банковский счет (если  $u_i(k) < 0$ ). В качестве мультипликативных шумов выступают слагаемые

со случайными величинами  $v(k)$  и  $\theta(k)$ , где  $v(k)$  обладает нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей, а  $\theta(k)$  обладает известными первым и вторым статистическими моментами. Задача управления заключается в поиске регулятора  $u(k)$ , минимизирующего разницу между реальной суммой средств портфеля  $V(k) = \sum_{i=0}^n x_i(k)$  и определенной инвестором суммой средств  $V^0(k)$ , значение которой изменяется во времени по закону

$$V^0(k+1) = (1 + \mu^0(k))V^0(k),$$

где  $\mu^0(k)$  — заданная выручка от портфеля. Функционал качества (функция рисков) в данной задаче оптимизации имеет вид

$$J = M \left( \sum_{k=0}^{N-1} [(V(k) - V^0(k))^2 + u^\top(k)R(k)u(k)] + (V(N) - V^0(N))^2 \right)$$

Регулятор  $u(k)$  в данной задаче ищется в виде статической обратной связи по состоянию системы. Помимо аналитического решения данной задачи, в данной работе приведено численное решение задачи для конкретного портфеля инвестиций.

Существует множество других примеров практического применения систем с мультипликативными шумами в различных сферах жизнедеятельности и науки. В диссертации, помимо общего случая, рассмотрен один из частных случаев таких систем — система со случайными сбоями в датчиках.

## 1.5 Выводы к главе 1

В этой главе представлены основные теоретические аспекты, необходимые для решения задач анизотропийного анализа и субоптимальной анизотропийной фильтрации для систем с мультипликативными шумами. Поскольку в данной работе рассматриваются задачи анализа и синтеза для линейных дискретных нестационарных систем на конечном интервале времени, в главе представлены определения аналогов  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -норм для таких систем. Также приведены

основные определения анизотропийной теории, такие как анизотропия случайного вектора и анизотропийная норма линейной дискретной нестационарной системы на конечном интервале. В конце главы приведено описание систем с мультипликативными шумами, их особенностей и примеров таких систем в различных сферах жизнедеятельности.

## 2 Анизотропийный анализ для систем с мультипликативными шумами

В этом разделе рассмотрены задачи анизотропийного анализа для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном временном интервале. Приведены постановки и методы решения двух задач анализа - вычисления анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами и формулировки условий ограниченности анизотропийной нормы сверху заданным числом. Решение задач анализа используется далее в работе при решении задачи синтеза субоптимального анизотропийного фильтра.

### 2.1 Постановки задач

Целью диссертационной работы является решение задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для систем с мультипликативными шумами. Для синтеза субоптимального фильтра необходимо сформулировать условия ограниченности анизотропийной нормы соответствующей системы в ошибках фильтрации, выполнение которых гарантирует искомый фильтр. Но для формулировки условий ограниченности анизотропийной нормы необходимо знать формулу вычисления этой нормы в пространстве состояний, т.е. в терминах матриц рассматриваемой системы. Задача вычисления анизотропийной нормы является одной из задач анизотропийного анализа и решению именно этой задачи для систем с мультипликативными шумами и посвящен данный подраздел. Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему  $T_{zw}$  с мультипликативными шумами

$$T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C(k)x(k) + D(k)w(k), \end{cases} \quad (2.1)$$

на конечном временном интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  с начальным состоянием  $x(0) = 0$ . Здесь  $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  — вектор состояния системы,  $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  — век-

тор входного возмущения, а  $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$  — вектор оцениваемого выхода системы. Матрицы системы  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$ ,  $D(k)$  являются случайными матрицами специального вида

$$\begin{aligned} A(k) &= A_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{1i}(k) A_i(k), B(k) = B_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{2i}(k) B_i(k), \\ C(k) &= C_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{3i}(k) C_i(k), D(k) = D_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{4i}(k) D_i(k), \end{aligned}$$

где  $\xi_{ji}(k) \in \mathbb{L}_2^1$  для всех  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  и  $k$  являются независимыми в совокупности по  $i, j, k$  скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Матрицы  $A_i(k)$ ,  $B_i(k)$ ,  $C_i(k)$  и  $D_i(k)$  при всех значениях  $i \in \{0, 1, \dots, M\}$  и  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  являются детерминированными вещественными матрицами соответствующих размерностей. Также случайные величины  $\xi_{ji}(k)$  являются независимыми со входным случайным возмущением  $w(k)$ . Последовательность значений входного сигнала  $w(k)$  системы (2.1) в виде вектора  $W_{0:N}$  удовлетворяет условию  $A(W_{0:N}) \leq a$ , где параметр  $a \geq 0$  является заданным числом.

Приведем формулировку первой задачи анализа — вычисления анизотропийной нормы системы (2.1).

**Задача 1.** *Задана линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  с реализацией (2.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . На вход системы подаются случайные возмущения, описываемые вектором  $W_{0:N}$  и обладающие ограниченной анизотропией  $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a$ , где  $a \geq 0$  является заданной величиной. Необходимо вычислить в терминах пространства состояний анизотропийную норму  $\|T_{zw}\|_a$  системы.*

Стоит отметить, что значение анизотропийной нормы системы в зависимости от параметра  $a \geq 0$ , вычисленное по искомой формуле, должно удовлетворять свойствам анизотропийной нормы. Решение этой задачи используется при

решении второй задачи анизотропийного анализа, формулировка которой для системы вида (2.1) приведена ниже.

**Задача 2.** Пусть заданы линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  с реализацией (2.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , значение параметра  $a \geq 0$  и величина  $\gamma \geq 0$ . На вход системы (2.1) подается возмущение в виде последовательности случайных векторов, описываемой вектором  $W_{0:N}$ , который удовлетворяет условию  $\mathbf{A}(W_{0:N}) \geq a$ . Необходимо сформулировать условия ограниченности анизотропийной нормы системы  $T_{zw}$  заданным числом  $\gamma$  в терминах матриц данной системы, т.е. привести условия справедливости неравенства

$$\| \| T_{zw} \| \|_a \leq \gamma. \quad (2.2)$$

Результатом решения данной задачи является система условий, накладываемых на матрицы системы (2.1), при выполнении которых справедливо неравенство (2.2). При рассмотрении аналогичной задачи для систем с детерминированными матрицами, приведенной в предыдущем разделе, решение получено в виде уравнения Риккати с дополнительными ограничениями, связанными со свойствами анизотропийной нормы. После решения данной задачи для системы с мультипликативными шумами можно будет сравнить полученный результат с решением для детерминированного случая.

## 2.2 Метод вычисления анизотропийной нормы

На основе работы [47], в которой представлены первые результаты решения задачи вычисления анизотропийной нормы детерминированных систем в частотной области и в пространстве состояний, и работы [65], в которой представлены аналогичные результаты для стохастических систем, получена формула вычисления анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами. Перед формулировкой и доказательством теоремы о вычислении анизотропий-

ной нормы системы необходимо привести теоретические основы, на которых базируется доказательство этой теоремы.

В доказательстве аналогичной теоремы о вычислении анизотропийной нормы системы с детерминированными матрицами используется критерий изометричности. В случае систем с мультипликативными шумами формулировка данного критерия будет отличаться от детерминированного случая, поэтому распишем вывод условий критерия для данного класса систем. Для того, чтобы привести формулировку критерия изометричности системы в терминах ее матриц, необходимо ввести вспомогательные матрицы. На основании выражения элементов матрицы  $\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$  определим матрицы  $P(k)$  и  $Q(k)$  на интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  следующим образом:

$$P(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}[T(k, j+1)] \cdot \mathbf{E}[B(j)] \cdot \mathbf{E}[B^\top(j)] \cdot \mathbf{E}[T^\top(k, j+1)], \quad (2.3)$$

$$Q(k) = \sum_{j=k}^N \mathbf{E}[T^\top(j, k)] \cdot \mathbf{E}[C^\top(j)C(j)] \cdot T(j, k), \quad (2.4)$$

где  $T(k, \kappa)$  — матрица перехода, удовлетворяющая выражению (1.4). Матрицы  $P(k)$  и  $Q(k)$  удовлетворяют рекуррентным формулам

$$P(k+1) = \mathbf{E}[A(k)] \cdot P(k) \cdot \mathbf{E}[A^\top(k)] + \mathbf{E}[B(k)] \cdot \mathbf{E}[B^\top(k)], \quad (2.5)$$

$$Q(k) = \mathbf{E}[A^\top(k)Q(k+1)A(k)] + \mathbf{E}[C^\top(k)C(k)], \quad (2.6)$$

где  $P(0) = 0$ ,  $Q(N+1) = 0$ . Используя введенные матрицы  $P(k)$  и  $Q(k)$ , блоки матрицы  $\Lambda_{0:N} = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}] = \text{block}_{0 \leq i, j \leq N}(\lambda_{ij})$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_{jj} &= \mathbf{E} [D^\top(k)D(k) + B^\top(k)Q(k+1)Q(k)], \\ \lambda_{ij} &= P(k) \cdot \mathbf{E}[A^\top(k)Q(k+1)B(k) + C^\top(k)D(k)], \quad i < j. \end{aligned} \quad (2.7)$$

С учетом вида матриц систем с мультипликативными шумами, приведенные

выше выражения в терминах матриц  $P(k)$  и  $Q(k)$  принимают вид

$$\lambda_{jj} = \sum_{i=0}^M [B_i^\top(k)Q(k+1)B_i(k) + D_i^\top(k)D_i(k)], \quad (2.8)$$

$$\lambda_{ij} = P(k) [A_0^\top(k)Q(k+1)B_0(k) + C_0^\top(k)D_0(k)], \quad i < j. \quad (2.9)$$

Поскольку система является изометричной при выполнении условия  $\Lambda_{0:N} = I_{l_w}$ , диагональные блоки  $\lambda_{jj}$  этой матрицы должны быть равны  $I_{m_w}$  при всех  $j$ , а блоки вне диагонали  $\lambda_{ij}$ ,  $i \neq j$  должны быть равны 0. Запишем по аналогии с критерием для детерминированного случая [47] критерий изометричности для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном временном интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ :

**Лемма 2** (Критерий изометричности). *Линейная дискретная нестационарная система с мультипликативными шумами вида (2.1) является изометричной тогда и только тогда, когда при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  матрицы системы удовлетворяют уравнениям*

$$\sum_{i=0}^M [B_i^\top(k)Q(k+1)B_i(k) + D_i^\top(k)D_i(k)] = I_{m_w}, \quad (2.10)$$

$$P(k) [A_0^\top(k)Q(k+1)B_0(k) + C_0^\top(k)D_0(k)] = 0, \quad (2.11)$$

где матрицы  $P(k)$  и  $Q(k)$  определяются выражениями (2.5)-(2.6).

Ниже приведена формулировка полученной теоремы о вычислении анизотропной нормы системы с мультипликативными шумами вида (2.1)

**Теорема 1.** [72] *Дана линейная дискретная нестационарная система с мультипликативными шумами  $T_{zw}$  вида (2.1) на конечном интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  и задано значение параметра  $a \geq 0$ . На вход системы подается случайное возмущение, описываемое вектором  $W_{0:N}$  с ограниченной анизотропией  $\mathbf{A}(W_{0:N}) \leq a$ . При сделанных допущениях анизотропная норма системы  $T_{zw}$  вычисляется по формуле  $\|T_{zw}\|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$ , где  $\mathcal{A}^{-1}(a)$  соответствует значению  $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$ , такому что  $\mathcal{A}(q) = a$ . Функции  $\mathcal{N}(q)$*

и  $\mathcal{A}(q)$  определены следующим образом:

$$\mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)}}, \quad \mathcal{A}(q) = \frac{l_w}{2} (\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

где функции  $\Phi(q)$  и  $\Psi(q)$  имеют вид

$$\Phi(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \text{tr} (S(k) + L(k)\Upsilon(k)L^\top(k)), \quad (2.12)$$

$$\Psi(q) = \frac{1}{l_w} \sum_{k=0}^N \ln \det S(k). \quad (2.13)$$

Матрицы  $S(k)$  и  $L(k)$  определены в терминах решения разностного уравнения Риккати в обратном времени

$$R_1(k) = \sum_{i=0}^M (A_i^\top(k)R_1(k+1)A_i(k) + qC_i^\top(k)C_i(k)), \quad (2.14)$$

$$R_2(k) = A_0^\top(k)R_2(k+1)A_0(k) + L^\top(k)S^{-1}(k)L(k), \quad (2.15)$$

$$S(k) = (I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (qD_i^\top(k)D_i(k) + B_i^\top(k)R_1(k+1)B_i(k)) - B_0^\top(k)R_2(k+1)B_0(k))^{-1}, \quad (2.16)$$

$$L(k) = S(k) (qD_0^\top(k)C_0(k) + B_0^\top(k)R_1(k+1)A_0(k) + B_0^\top(k)R_2(k+1)A_0(k)). \quad (2.17)$$

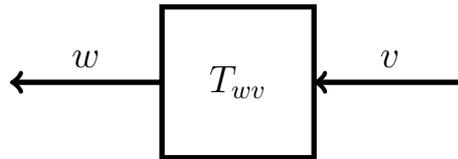
Матрицы  $\Upsilon(k)$  удовлетворяют рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} \Upsilon(k+1) &= (A_0^\top(k) + L^\top(k)B_0^\top(k))\Upsilon(k)(A_0^\top(k) + L^\top(k)B_0^\top(k))^\top \\ &\quad + B_0(k)S(k)B_0^\top(k). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для уравнений (2.14), (2.15) и (2.18) заданы следующие граничные и начальные условия:  $R_1(N+1) = 0$ ,  $R_2(N+1) = 0$ ,  $\Upsilon(0) = 0$ .

**Доказательство.** В соответствии с определением анизотропийной нормы, для ее вычисления необходимо определить наихудшее входное возмущение  $W_{0:N}^*$ ,

при котором достигается супремум в (1.11). Поскольку  $W_{0:N}^*$  является случайным вектором, необходимо определить функцию распределения и первые два статистических момента наихудшего возмущения  $W_{0:N}^*$ , при котором достигается супремум в (1.11). От этих характеристик случайного вектора зависит его анизотропия, причем только от распределения зависит исключительно слагаемое  $-h(W_{0:N})$ . Поэтому задачу поиска экстремума анизотропии можно разбить на два этапа: поиск оптимальной функции распределения при фиксированных моментах и поиск оптимальных моментов при найденной функции распределения. Исходя из п.2 Леммы 1 (св-ва анизотропии) и принципа максимальной энтропии оптимальным является гауссовское распределение с нулевым средним и некоторой ковариационной матрицей  $\Sigma$ , подлежащей определению. Гауссовский случайный вектор  $W_{0:N}$  с нулевым средним и некоторой ковариационной матрицей может быть представлен в виде выхода некоторого фильтра  $T_{wv}$  с передаточной матрицей  $G_{0:N}$ , на вход которого подается гауссовский случайный вектор  $V_{0:N}$  с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей. Для наглядности ниже представлена блок-схема такого формирующего фильтра



**Рис. 2:** Блок-схема формирующего фильтра  $T_{wv}$

Множество формирующих фильтров, выходами которых являются случайные векторы  $W_{0:N} \in \mathbb{W}_a$ , обозначим  $\mathcal{G}_a$ . Задачу определения ковариационной матрицы наихудшего сигнала  $W_{0:N}^*$  можно свести к задаче нахождения формирующего фильтра  $T_{wv}$ , генерирующего этот наихудший сигнал. Для простоты сформулируем задачу нахождения наихудшего входного вектора  $W \in \mathbb{L}_2^m$  линейного оператора, определяемого выражением  $Z = FW$ ,  $Z \in \mathbb{L}_2^p$ , в виде задачи поиска передаточной матрицы  $G$  фильтра, определяемого выражением

ем  $W = GV$ , при котором достигается супремум СКУ  $\mathbf{Q}(F, W)$  при условии  $\mathbf{A}(W) \leq a$ .

**Задача.** Найти передаточную матрицу  $G$  формирующего фильтра  $T_{uv} \in G_a$ , при которой достигается супремум выражения

$$\|F\|_a = \sup_{G \in G_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}, \quad (2.19)$$

**Решение.** Правую часть выражения (2.19) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2} = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda\Sigma)}{\text{tr}(\Sigma)}},$$

где  $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$ ,  $\Sigma = \mathbf{E}[G_{0:N} G_{0:N}^\top]$ . Запишем математические условия, накладываемые на матрицу  $G_{0:N}$

$$W_{0:N} = G_{0:N} V_{0:N}, \quad \mathbf{A}(W) \leq a, \quad \text{tr}(\Sigma) = 1.$$

Из формулы (1.9) следует, что функционал анизотропии  $\mathbf{A}(W)$  удовлетворяет условию

$$\mathbf{A}(W_{0:N}) \geq -\frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{m\Sigma}{\text{tr}(\Sigma)} \right) = -\frac{1}{2} \ln \det (m\Pi),$$

где  $\Pi = \frac{\Sigma}{\text{tr}(\Sigma)}$ . Таким образом, исходная задача поиска наихудшего формирующего фильтра с матрицей  $G$  сводится к задаче поиска экстремума функционала

$$J(\Pi) = \text{tr}(\Lambda\Pi) \rightarrow \max,$$

при условиях

$$\text{tr}(\Pi) = 1, \quad -\frac{1}{2} \ln \det (m\Pi) \leq a.$$

Для решения данной задачи воспользуемся теоремой Куна-Таккера [64], которая является обобщением метода Лагранжа на случай задач оптимизации с ограничениями вида неравенств. Опишем кратко суть данной теоремы. Пусть задана функция  $f(x)$  и необходимо найти точку экстремума  $x^*$  этой функции

при наличии дополнительных ограничений на решение задачи оптимизации вида

$$\begin{aligned} g_i(x) &\leq 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, m\}; \\ h_j(x) &= 0, \quad j \in \{0, 1, \dots, l\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Предполагается, что либо  $f(x)$ , либо хотя бы одна из функций ограничений является нелинейной. Необходимые условия существования экстремума функции  $f(x)$  представлены в виде следующей теоремы.

**Теорема 2** (Куна-Такера). [64] Если  $x^*$  является точкой локального минимума функции  $f(x)$  и для нее выполняются условия (2.20), то существуют наборы коэффициентов  $\lambda_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$  и  $\mu_j$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, l\}$ , которые называют коэффициентами Каруша-Куна-Таккера, удовлетворяющие равенствам

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} + \sum_{j=0}^l \mu_j \frac{\partial h_j}{\partial x_k} = 0 \quad (2.21)$$

при всех  $k \in \{0, 1, \dots, \dim(x)\}$  и условию дополняющей нежесткости

$$\mu_i g_i(x^*) = 0, \quad i \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Выражение (2.21) можно представить в виде  $\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0$ , где  $L(x)$  — функция Лагранжа, которая определяется выражением

$$L(x) = f(x) + \sum_{i=0}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=0}^l \mu_j h_j(x).$$

Функция Лагранжа для функционала  $J(\Pi)$  имеет вид

$$L(\Pi) = \text{tr}(\Lambda \Pi) + \lambda_1 (1 - \text{tr}(\Pi)) + \lambda_2 \left( -\frac{1}{2} \ln \det(m\Pi) - a \right),$$

где  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  — множители Лагранжа. Необходимым условием экстремума является равенство нулю производной  $dL(\Pi)$  функции Лагранжа в точке экстремума.

Для записи производной  $dL(\Pi)$  воспользуемся производной Фреше:

$$dL(\Pi)[\Delta] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L(\Pi + \varepsilon \Delta) - L(\Pi)}{\varepsilon}. \quad (2.22)$$

Запишем слагаемое  $L(\Pi + \varepsilon\Delta)$  для функционала (2.22)

$$L(\Pi + \varepsilon\Delta) = \text{tr}(\Lambda(\Pi + \varepsilon\Delta)) + \lambda_1(1 - \text{tr}(\Pi + \varepsilon\Delta)) + \lambda_2\left(-\frac{1}{2} \ln \det(m(\Pi + \varepsilon\Delta)) - a\right). \quad (2.23)$$

Для дальнейших выкладок распишем подробнее слагаемые с функциями  $\ln \det$  и  $\text{tr}$  в (2.23). Для этого воспользуемся разложениями этих функций в ряд Тейлора. Разложение слагаемого  $\text{tr}(\Pi + \varepsilon\Delta)$  имеет вид

$$\text{tr}(\Pi + \varepsilon\Delta) = \text{tr}(\Pi) + \text{tr}(\varepsilon\Delta) = \text{tr}(\Pi) + \varepsilon \text{tr}(\Pi),$$

Тогда имеем

$$\text{tr}(\Lambda(\Pi + \varepsilon\Delta)) - \text{tr}(\Lambda\Pi) = \text{tr}(\Lambda\Pi) + \varepsilon \text{tr}(\Lambda\Delta) - \text{tr}(\Lambda\Pi) = \varepsilon \cdot \text{tr}(\Lambda\Delta), \quad (2.24)$$

С учетом свойств следа и определителя матрицы справедливо равенство

$$\ln \det(\Pi + \varepsilon\Delta) = \text{tr} \ln(\Pi(I_m + \varepsilon\Pi^{-1}\Delta)) \quad (2.25)$$

Разложим правую часть выражения (2.25) в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \text{tr} \ln(\Pi(I_m + \varepsilon\Pi^{-1}\Delta)) &= \text{tr} \ln \Pi + \\ &+ \text{tr}\left(\varepsilon\Pi^{-1}\Delta - \frac{\varepsilon^2(\Pi^{-1}\Delta)^2}{2} + \frac{\varepsilon^3(\Pi^{-1}\Delta)^3}{3} + \dots\right) + \dots \end{aligned}$$

Опустив слагаемые высокого порядка малости, получим

$$\text{tr} \ln(\Pi(I_m + \varepsilon\Pi^{-1}\Delta)) \approx \text{tr} \ln \Pi + \text{tr}(\varepsilon\Pi^{-1}\Delta) + O(\varepsilon^2), \quad (2.26)$$

Поскольку необходимо получить выражение  $L(\Pi + \varepsilon\Delta) - L(\Pi)$  в терминах  $\varepsilon$ , запишем разность  $\ln \det(\Pi + \varepsilon\Delta) - \ln \det(\Pi)$  с учетом (2.26):

$$\ln \det(\Pi + \varepsilon\Delta) - \ln \det(\Pi) = \text{tr}(\varepsilon\Pi^{-1}\Delta) = \varepsilon \cdot \text{tr}(\Pi^{-1}\Delta). \quad (2.27)$$

Подставив (2.24) и (2.27) в (2.22), получим

$$dL(\Pi)[\Delta] = \text{tr}(\Lambda\Delta) - \frac{1}{2}\lambda_2\text{tr}(\Pi^{-1}\Delta) - \lambda_1\text{tr}(\Delta) = \text{tr}\left(\left(-\frac{1}{2}\lambda_2\Pi^{-1} - \lambda_1I_m + \Lambda\right)\Delta\right). \quad (2.28)$$

Поскольку условие  $dL(\Pi)[\Delta] = 0$  должно быть справедливо для любого значения  $\Delta$ , с учетом (2.28) получим

$$\Pi^{-1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} I_m - \frac{1}{\lambda_2} \Lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (I_m - \frac{1}{\lambda_1} \Lambda). \quad (2.29)$$

Обратив выражение (2.29), получаем выражение для матрицы  $\Pi$  вида

$$\Pi = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} (-I_m + \frac{1}{\lambda_1} \Lambda)^{-1} = \sigma (I_m - q\Lambda)^{-1}, \quad \sigma = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}, \quad q = -\frac{1}{\lambda_1}.$$

Параметры  $\sigma$  и  $q$  определяются из условий  $\text{tr}(\Pi) = 1$ ,  $-\frac{1}{2} \ln \det(\Pi) \leq a$ . В итоге искомая ковариационная матрица  $\Sigma$  имеет вид

$$\Sigma(q) = (I - q\Lambda)^{-1},$$

где параметр  $q$  определяется из уравнения

$$-\frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{m\Sigma(q)}{\text{tr}(\Sigma(q))} \right) = a;$$

Таким образом, математически описана связь матрицы  $F_{0:N}$  системы и ковариационной матрицы  $\Sigma$  выходного сигнала наилучшего фильтра. Параметр  $q$  принимает значения от 0 до  $\|F_{0:N}\|_{\infty}^{-2}$ .

Формулы для анизотропии  $\mathbf{A}(W_{0:N})$  и анизотропийной нормы  $\|T_{zw}\|_a$  можно переписать в терминах функции  $\Sigma(q)$  следующим образом:

$$\mathbf{A}(W_{0:N}) = -\frac{1}{2} \ln \det \frac{m\Sigma(q)}{\text{tr}(\Sigma(q))},$$

$$\|T_{zw}\|_a = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda\Sigma(q))}{\text{tr}(\Sigma(q))}}.$$

Введем вспомогательные функции

$$\mathcal{A}(q) = \frac{m}{2} (\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

$$\mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{1}{q} \left( 1 - \frac{1}{\Phi(q)} \right)},$$

где

$$\Phi(q) = \frac{1}{m} \text{tr} \Sigma(q), \quad \Psi(q) = \frac{1}{m} \ln \det \Sigma(q).$$

В результате проведенных рассуждений получаем, что входное возмущение  $W_{0:N}$  является выходом наихудшего формирующего фильтра  $T_{wv}$  с передаточной матрицей  $G_{0:N}$  и случайным вектором с ковариационной матрицей  $\Sigma_{0:N} = \mathbf{E}[G_{0:N} G_{0:N}^\top]$ , которая вычисляется по формуле

$$\Sigma_{0:N} = (I_{l_w} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])^{-1}, \quad (2.30)$$

где  $q$  является единственным на интервале  $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$  решением уравнения

$$-\frac{1}{2} \ln \det \frac{l_w \Sigma_{0:N}}{\text{tr}(\Sigma_{0:N})} = a. \quad (2.31)$$

Наихудший формирующий фильтр  $T_{wv}$  имеет следующее представление в пространстве состояний:

$$T_{wv} \sim \begin{cases} x(k+1) = (\mathbf{E}[A(k)] + \mathbf{E}[B(k)]L(k))x(k) + \mathbf{E}[B(k)]S^{1/2}(k)v(k), \\ w(k) = L(k)x(k) + S^{1/2}(k)v(k), \end{cases} \quad (2.32)$$

где  $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  — вектор некоторой оценки состояния исходной системы с начальным состоянием  $x(0) = 0$ ,  $v(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  — входное возмущение в виде гауссовского вектора с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, матрицы  $L(k)$ ,  $S(k)$  — детерминированные матрицы фильтра соответствующих размерностей. Из (2.30) следует, что для матрицы  $(I_{l_w} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])^{-1}$  должно быть справедливо разложение

$$(I_{l_w} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])^{-1} = G_{0:N} G_{0:N}^\top, \quad (2.33)$$

приводящее к

$$\begin{aligned} \det(I_{l_w} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])^{-1} &= \det(G_{0:N} G_{0:N}^\top), \\ \text{tr}(I_{l_w} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])^{-1} &= \text{tr}(G_{0:N} G_{0:N}^\top). \end{aligned}$$

Преобразуем формулу (2.33) следующим образом:

$$\mathbf{E} \left[ \left( \sqrt{q}F_{0:N}^\top \quad G_{0:N}^{-\top} \right) \begin{bmatrix} \sqrt{q}F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix} \right] = I_{l_w}. \quad (2.34)$$

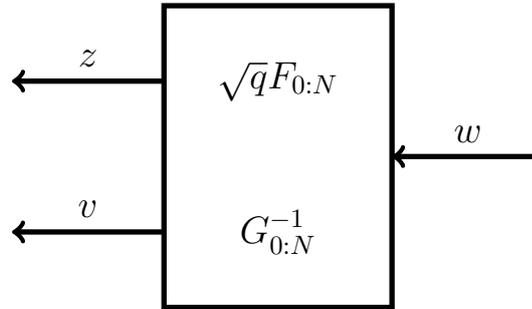
Из выражения (2.34) видно, что система с передаточной матрицей

$$\Theta_{0:N} = \begin{bmatrix} \sqrt{q}F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

является изометричной, т.е. выходной сигнал  $W_{0:N}$  наилучшего фильтра  $T_{wv}$  сохраняет свою энергию при прохождении через систему с передаточной матрицей  $\Theta_{0:N}$ :

$$q\|Z_{0:N}\|_2^2 + \|V_{0:N}\|_2^2 = \|W_{0:N}\|_2^2. \quad (2.36)$$

Матрице  $\Theta_{0:N}$  можно поставить в соответствие линейную систему с одним входным сигналом  $w$  и двумя выходами —  $z$  (выход системы (2.1)) и  $v$  (входной сигнал наилучшего фильтра). Для наглядности приведем ниже блок-схему подобной системы:



**Рис. 3:** Блок-схема системы  $\Theta_{0:N}$

Применив критерий изометричности к системе с передаточной матрицей  $\Theta_{0:N}$  (2.35), получим выражения для матриц фильтра  $S(k)$  и  $L(k)$

$$S(k) = \left( I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (qD_i^\top(k)D_i(k) + B_i^\top(k)R_1(k+1)B_i(k)) - B_0^\top R_2(k+1)B_0 \right)^{-1}, \quad (2.37)$$

$$L(k) = S(k)(B_0^\top(k)(R_1(k+1) + R_2(k+1))A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)), \quad (2.38)$$

которые определяются в терминах решения разностного уравнения Риккати в обратном времени

$$R_1(k) = \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k) C_i(k), \quad (2.39)$$

$$R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k) \quad (2.40)$$

с граничным условием  $R_1(N+1) = 0$ ,  $R_2(N+1) = 0$ . Из определения анизотропийной нормы следует, что для ее вычисления еще необходимо определить выражение  $\|G_{0:N}\|_2^2 = \text{tr}(G_{0:N} G_{0:N}^\top)$  в пространстве состояний. Исходя из вида фильтра (2.32) получим

$$\text{tr}(G_{0:N} G_{0:N}^\top) = \sum_{k=0}^N \text{tr}(L(k) \Upsilon(k) L^\top(k) + S(k)),$$

где матрицы  $\Upsilon(k)$  удовлетворяют разностному уравнению Ляпунова

$$\begin{aligned} \Upsilon(k+1) &= (A_0(k) + B_0(k)L(k)) \Upsilon(k) (A_0(k) + B_0(k)L(k))^\top \\ &\quad + B_0(k) S(k) B_0^\top(k). \end{aligned}$$

с начальным условием  $\Upsilon(0) = 0$ .

Таким образом, описано применение теоремы о вычислении анизотропийной нормы системы в пространстве состояний для систем с мультипликативными шумами. Очевидно сходство полученных результатов с аналогичными для задач анализа систем с детерминированными матрицами, обсуждение которых представлено в предыдущем разделе. Основным отличием этих результатов является тот факт, что для нахождения анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами необходимо решить вместо одного сразу два разностных уравнения Риккати. Также стоит отметить, что матрица  $\Upsilon(k)$  в уравнении Ляпунова является ковариационной матрицей состояния формирующего фильтра, причем математическое ожидание берется дважды — по сигма-алгебре мультипликативных шумов  $\xi_{ij}(k)$  системы, затем по сигма-алгебре внешних возмущений  $w(k)$ . Само состояние фильтра можно считать “оценкой” состояния

исходной системы, а динамика фильтра определяется номинальной частью исходной системы. Численная реализация приведенного алгоритма вычисления анизотропийной нормы не представляет большого труда, поскольку уравнения Риккати и Ляпунова представлены в разностной форме и соответственно набор матриц  $R_1(k)$ ,  $R_2(k)$  и  $\Upsilon(k)$  находится в результате циклических вычислений матриц  $R_1(k)$ ,  $R_2(k)$  и  $\Upsilon(k)$  на каждом шаге  $k$  при известных значениях на предыдущих шагах. Время реализации этого алгоритма зависит от длины рассматриваемого интервала  $N$ .

Получив формулу вычисления анизотропийной нормы систем с мультипликативными шумами в пространстве состояний, можно приступить ко второй задаче анализа — определению условий ограниченности этой нормы.

### 2.3 Условия ограниченности анизотропийной нормы

В предыдущем разделе был описан подход к вычислению анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами. Для решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации необходимо знать условия ограниченности анизотропийной нормы соответствующей системы. Поэтому в этом разделе рассмотрим вторую задачу анизотропийного анализа, которая заключается в определении критерия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами вида (2.1) сверху заданным числом  $\gamma \geq 0$  при известном значении параметра  $a \geq 0$ . В данном разделе приведены две теоремы об ограниченности анизотропийной нормы: в терминах разностных уравнений Риккати и в терминах неравенства Риккати. Следующая теорема представляет собой необходимые и достаточные условия ограниченности сверху анизотропийной нормы системы (2.1) в терминах разностных уравнений Риккати.

**Теорема 3.** [73] *Дана линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  с мультипликативными шумами вида (2.1). Также известны значение параметра  $a \geq 0$  и величина  $\gamma \geq 0$ . Анизотропийная норма данной системы*

удовлетворяет неравенству  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  тогда и только тогда, когда существует такое значение  $q \geq 0$ , что для матриц  $R_1(k) \succ 0$ ,  $R_2(k) \succ 0$  при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , являющихся решением разностного уравнения Риккати

$$R_1(k) = \sum_{k=0}^M A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q \sum_{k=0}^M C_i^\top(k) C_i(k), \quad (2.41)$$

$$R_2(k) = A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k) \quad (2.42)$$

$$S(k) = (I_{m_w} - \sum_{k=0}^M (q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k)) - \quad (2.43)$$

$$- B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k))^{-1} \quad (2.44)$$

$$L(k) = S(k) (B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + \quad (2.45)$$

$$+ q D_0^\top(k) C_0(k))$$

с граничными условиями  $R_1(N+1) = 0$ ,  $R_2(N+1) = 0$ , матрицы  $S(k)$  являются положительно определенными матрицами и удовлетворяют неравенству специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det S(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (2.46)$$

**Доказательство.** Доказательство проводится по аналогии с теоремой об ограниченности анизотропийной нормы для детерминированного случая, т.е. необходимо ввести функцию  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$  и доказать эквивалентность неравенств  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  и  $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$ . Для этого необходимо ввести вспомогательные функции  $\mathcal{A}(q)$  и  $\mathcal{N}(q)$ . В теореме 1 было показано, что ковариационная матрица наихудшего входного возмущения  $W_{0:N}$  имеет вид

$$\Sigma_{0:N}(q) = (I_{l_w} - q\Lambda_{0:N})^{-1}, \quad (2.47)$$

где  $q \in [0, \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$  — решение уравнения (2.31), а матрица  $\Lambda_{0:N}$  для систем с мультипликативными шумами определяется как  $\Lambda_{0:N} = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$ . Анизотропийная норма системы вычисляется по формуле  $\|T_{zw}\|_a = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$ , где  $\mathcal{A}(q)$ ,

$\mathcal{N}(q)$  являются вспомогательными функциями вида

$$\mathcal{A}(q) = -\frac{1}{2} \ln \det \left( \frac{l_w \Sigma_{0:N}(q)}{\text{tr}(\Sigma_{0:N}(q))} \right), \quad (2.48)$$

$$\mathcal{N}(q) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda_{0:N} \Sigma_{0:N}(q))}{\text{tr}(\Sigma_{0:N}(q))}}.$$

Перед тем, как ввести функцию  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$ , проведем следующие рассуждения. Из (2.47) следует, что

$$\text{tr}(\Lambda_{0:N} \Sigma_{0:N}(q)) = (\text{tr}(\Sigma_{0:N}(q)) - l_w)/q. \quad (2.49)$$

Перепишем выражение (2.49) с учетом вида функции  $\mathcal{N}(q)$ :

$$\text{tr}(\Sigma_{0:N}(q)) = \frac{l_w}{1 - q\mathcal{N}^2(q)}. \quad (2.50)$$

Подставив выражение (2.50) в формулу (2.48) для вспомогательной функции  $\mathcal{A}(q)$ , получим

$$\mathcal{A}(q) = \mathfrak{A}(q, \mathcal{N}(q)),$$

где

$$\mathfrak{A}(q, \gamma) = \frac{1}{2} \ln \det(I_{l_z} - q\mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) - \frac{l_w}{2} \ln(1 - q\gamma^2). \quad (2.51)$$

Очевидно, что функции  $\mathcal{A}(q)$  и  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$  пересекаются в точке, в которой выполняется  $\mathcal{N}(q) = \gamma$ , т.е. при  $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ . Поскольку  $\mathcal{N}(q)$  является строго монотонной функцией, при  $q < \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$  выполняется  $\mathcal{N}(q) < \gamma$  и соответственно  $\mathcal{A}(q) < \mathfrak{A}(q, \gamma)$ , а при  $q > \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$  наоборот. Определив производную функции  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$  по аргументу  $q$ , получаем, что она равна нулю как раз в точке  $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ , положительна при  $q < \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$  и отрицательна при  $q > \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ . Получаем, что в точке  $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$  функция  $\mathfrak{A}(q, \gamma)$  достигает максимального значения. Исходное неравенство  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  эквивалентно неравенству  $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geq a$ . А выполнение неравенства  $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geq a$  эквивалентно существованию  $q \in [0, \|F_{0:N}\|_\infty^{-2})$  такого, что  $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$ . Получаем следующее утверждение:

$$\|F\|_a \leq \gamma \iff \mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a.$$

Это означает, что анизотропийная норма системы  $T_{zw}$  ограничена сверху величиной  $\gamma$  тогда и только тогда, когда выполняется условие  $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$  при определенном  $q \in [0, \|F_{0:N}\|_\infty^{-2}]$ . Преобразуем это неравенство к эквивалентной форме в пространстве состояний. Неравенство  $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$  с учетом (2.51) имеет вид

$$\frac{1}{2} \ln \det(I_{l_w} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]) - \frac{l_w}{2} \ln(1 - q\gamma^2) \geq a. \quad (2.52)$$

Преобразуем первое слагаемое левой части неравенства (2.52) следующим образом:

$$\ln \det(I_{l_w} - q \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}])^{-1} = \sum_{k=0}^N \ln \det S(k). \quad (2.53)$$

Подставив выражение (2.53) в неравенство (2.52), получим

$$\sum_{k=0}^N \ln \det S(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

В итоге получаем неравенство вида (2.46). Уравнение Риккати (2.41)-(2.42), как и в теореме о вычислении анизотропийной нормы, являются результатом применения критерия изометричности к расширенной системе с передаточной матрицей  $\Theta_{0:N}$  (2.35).

Из условий теоремы видно, что для проверки справедливости условия  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  необходимо получить набор решений  $R(k)$  разностного уравнения Риккати и проверить для всего набора решений справедливость условия (2.46). Но в том случае, если полученное решение Риккати не будет удовлетворять неравенству специального вида, то оно не будет являться решением поставленной задачи. Необходимо решать уравнение Риккати и неравенство специального вида одновременно, чтобы в итоге полученное решение удовлетворяло всем условиям теоремы об ограниченности анизотропийной нормы. Важно подчеркнуть, что с увеличением длины рассматриваемого интервала времени  $N$ , количества мультипликативных шумов и размерности самой системы вычислительная сложность решения рассматриваемых задач анализа достаточно

быстро возрастает и потому численная реализация описанных выше подходов к решению задач анизотропийного анализа занимает достаточно много времени. Это подтверждается результатами решения задач анализа и фильтрации в численном примере, представленными в четвертой главе диссертации. Отметим, что существует альтернативная формулировка теоремы об ограниченности анизотропийной нормы линейных дискретных нестационарных систем на конечном интервале времени, но уже в терминах неравенства Риккати. От неравенств Риккати можно впоследствии перейти к форме линейных матричных неравенств, а затем к решению задачи выпуклой оптимизации. А поскольку система ЛМН решается одновременно с неравенством специального вида, полученное решение будет удовлетворять всем условиям и из существования такого решения будет следовать ограниченность анизотропийной нормы. Представленная ниже теорема устанавливает условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами в терминах неравенства Риккати.

**Теорема 4.** [74] *Дана линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  с мультипликативными шумами вида (2.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Также заданы скалярные величины  $a \geq 0$  и  $\gamma \geq 0$ . Анизотропийная норма системы удовлетворяет условию  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$ , если существуют значение параметра  $q \in [0; \|T_{zw}\|_\infty^{-2})$  и семейство матриц  $\mathcal{R}(k) \succ 0$  при  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , которые удовлетворяют рекуррентному неравенству Риккати в обратном времени*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k) \succ & A_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_0(k) + \sum_{i=1}^M A_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_i(k) + \\ & + q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k)C_i(k) + \mathcal{L}^\top(k)\mathcal{S}^{-1}(k)\mathcal{L}(k), \end{aligned} \quad (2.54)$$

с граничным условием  $\mathcal{R}(N+1) = 0$ , где

$$\mathcal{S}(k) = \left( I_{m_w} - q \sum_{i=0}^M D_i^\top(k) D_i(k) - \sum_{i=0}^M B_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) B_i(k) \right)^{-1}, \quad (2.55)$$

$$\mathcal{L}(k) = \mathcal{S}(k) (B_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k)), \quad (2.56)$$

Матрицы  $\mathcal{S}(k)$  при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  являются положительно определенными матрицами, удовлетворяющими неравенству

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

**Доказательство.** Осуществим переход от разностного уравнения Риккати (2.41)-(2.42) в теореме 1 к соответствующему рекуррентному неравенству Риккати. Перед этим объединим уравнения (2.41)-(2.42) в одно уравнение, от которого затем перейдем к неравенству Риккати. Для этого введем новую переменную

$$R(k) = R_1(k) + R_2(k).$$

Сложим левые и правые части уравнений (2.41)-(2.42) и запишем полученное выражение в терминах новой матричной переменной  $R(k)$

$$\begin{aligned} R(k) = & \sum_{i=0}^M A_i^\top(k) R(k+1) A_i(k) + \sum_{i=0}^M q C_i^\top(k) C_i(k) + A_0^\top(k) R(k+1) A_0(k) + \\ & + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k) - Q_1, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где  $Q_1 = \sum_{i=0}^M (A_i^\top(k) R_2(k+1) A_i(k) + A_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k))$ , а матрицы  $S(k)$  и  $L(k)$  принимают следующий вид:

$$S(k) = (I - B_0^\top(k) R(k+1) B_0(k) - \sum_{i=0}^M q D_i^\top(k) D_i(k) + \quad (2.58)$$

$$+ B_0^\top(k) R_1(k+1) B_0(k) - \sum_{i=0}^M (B_i^\top(k) (R(k+1) - R_2(k+1)) B_i(k))$$

$$L(k) = S(k) (B_0^\top(k) R(k+1) A_0(k) + q D_0^\top(k) C_0(k)). \quad (2.59)$$

Получаем разностное уравнение Риккати следующего вида:

$$R(k) = \sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R(k+1)A_i(k) + \sum_{i=0}^M qC_i^\top(k)C_i(k) + \quad (2.60)$$

$$+ A_0^\top(k)R(k+1)A_0(k) + L^\top(k)S^{-1}(k)L(k) + Q_2(k),$$

$$S(k) = (I - B_0^\top(k)R(k+1)B_0(k) - \sum_{i=0}^M qD_i^\top(k)D_i(k) - \quad (2.61)$$

$$- \sum_{i=0}^M (B_i^\top(k)(R(k+1) - R_2(k+1))B_i(k)) + B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)$$

$$L(k) = S(k)(B_0^\top(k)R(k+1)A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)), \quad (2.62)$$

где  $Q_2(k) = -\sum_{i=0}^M A_i^\top(k)R_2(k+1)A_i(k) - A_0^\top(k)R_1(k+1)A_0(k)$ . Для решения уравнения  $R(k)$  задано граничное условие  $R(N+1) = 0$ .

Поскольку слагаемые  $-Q_2(k)$ ,  $\sum_{i=0}^M B_i^\top(k)R_2(k+1)B_i(k)$ ,  $B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)$  и  $B_0^\top(k)R_1(k+1)B_0(k)$  являются неотрицательно определенными матрицами, то можно воспользоваться свойством монотонности решения разностного уравнения Риккати, описанным в [69], [70], и осуществить переход от уравнения Риккати к неравенству Риккати с решением  $\mathcal{R}(k) = \mathcal{R}(k)^\top \succ 0$  таким, что  $\mathcal{R}(k) \succ R(k)$  при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Применяв данный подход к уравнению Риккати (2.60) – (2.62), получим неравенство Риккати

$$\mathcal{R}(k) \succ A_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_0(k) + \sum_{i=1}^M A_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_i(k) + \quad (2.63)$$

$$+ q \sum_{i=0}^M C_i^\top(k)C_i(k) + \mathcal{L}^\top(k)\mathcal{S}^{-1}(k)\mathcal{L}(k),$$

$$\mathcal{S}(k) = \left( I_{m_w} - \left( q \sum_{i=0}^M D_i^\top(k)D_i(k) + \sum_{i=0}^M B_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)B_i(k) \right) \right)^{-1}, \quad (2.64)$$

$$\mathcal{L}(k) = \mathcal{S}(k) (B_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A_0(k) + qD_0^\top(k)C_0(k)), \quad (2.65)$$

с граничным условием  $\mathcal{R}(N+1) = 0$ . Из условия  $\mathcal{R}(k) \succ R(k)$  следует  $\mathcal{S}^{-1}(k) \prec S^{-1}(k)$ , поэтому имеет место неравенство специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (2.66)$$

Если у полученных неравенств (2.63)-(2.66) имеется решение  $\mathcal{R}(k) = \mathcal{R}(k)^\top \succ 0$ , то в силу свойства монотонности решения уравнения Риккати существует и решение исходных уравнений Риккати. Это условие является достаточным условием ограниченности анизотропийной нормы системы (2.1), что и требовалось доказать.

Представленная выше теорема об ограниченности анизотропийной нормы будет использоваться при решении задач анизотропийной фильтрации для систем с мультипликативными шумами. Неравенство Риккати вида (2.54) будут преобразованы в систему линейных матричных неравенств с помощью леммы Шура, формулировка которой приведена во второй главе диссертации. Опишем схематично процедуру приведения неравенства к виду ЛМН с помощью леммы Шура. Пусть определено неравенство Риккати вида

$$\mathcal{R}(k) \succ A^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A(k) + qC^\top(k)C(k) + \mathcal{L}(k)\mathcal{S}^{-1}(k)\mathcal{L}(k), \quad (2.67)$$

где матрицы  $\mathcal{S}(k)$  и  $\mathcal{L}(k)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(k) &= \left( I_{m_w} - qD^\top(k)D(k) - B^\top(k)\mathcal{R}(k+1)B(k) \right)^{-1}, \\ \mathcal{L}(k) &= \mathcal{S}(k) \left( B^\top(k)\mathcal{R}(k+1)A(k) + qD^\top(k)C(k) \right). \end{aligned}$$

Прежде чем воспользоваться леммой Шура, разделим обе части неравенства на параметр  $q > 0$  и введем следующие замены переменных:

$$\eta = q^{-1}, \quad \mathcal{P}(k) = \eta\mathcal{R}(k).$$

Для сокращения записи опустим аргументы  $k$  матриц неравенства, а  $\mathcal{P}(k+1)$  обозначим как  $\widehat{\mathcal{P}}$ . Применяв замену переменных к (2.67), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \succ & A^\top\widehat{\mathcal{P}}A + C^\top C + \\ & + (A^\top\widehat{\mathcal{P}}B + C^\top D)(\eta I_{m_w} - D^\top D - B^\top\widehat{\mathcal{P}}B)(B^\top\widehat{\mathcal{P}}A + qD^\top C), \end{aligned} \quad (2.68)$$

Далее перенесем все слагаемые правой части неравенства в левую части и вос-

пользуемся леммой Шура для перехода к форме ЛМН. В результате получим

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} - A^\top \hat{\mathcal{P}} A - C^\top C & A^\top \hat{\mathcal{P}} B + C^\top D \\ B^\top \hat{\mathcal{P}} A + D^\top C & \eta I_{m_w} - D^\top D - B^\top \hat{\mathcal{P}} B \end{bmatrix} \succ 0. \quad (2.69)$$

Очевидно, что неравенство (2.69) можно записать в следующей форме

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 \\ 0 & \eta I_{m_w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{P}} & 0 \\ 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \succ 0. \quad (2.70)$$

Воспользовавшись повторно леммой Шура для неравенства (2.70), получаем искомое линейное матричное неравенство вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 & A^\top & C^\top \\ 0 & \eta I_{m_w} & B^\top & D^\top \\ A & B & \hat{\mathcal{P}}^{-1} & 0 \\ C & D & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (2.71)$$

Чтобы избавиться от обратной матрицы  $\hat{\mathcal{P}}^{-1}$  на главной диагонали в (2.71), воспользуемся соответствующими конгруэнтными преобразованиями. В результате получим

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & 0 & A^\top \hat{\mathcal{P}} & C^\top \\ 0 & \eta I_{m_w} & B^\top \hat{\mathcal{P}} & D^\top \\ \hat{\mathcal{P}} A & \hat{\mathcal{P}} B & \hat{\mathcal{P}} & 0 \\ C & D & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0.$$

Аналогичная описанной выше процедура сведения к ЛМН используется при решении задачи анизотропийной фильтрации, которое представлено в следующей главе диссертационной работы.

## 2.4 Выводы к главе 2

В этой главе представлены решения двух задач анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами: вычисления анизотропийной нормы системы в пространстве состояний и формулировки условий ограниченности

анизотропийной нормы системы. В качестве решения первой задачи анализа сформулирована и доказана теорема о вычислении анизотропийной нормы системы в терминах разностных уравнений Риккати и Ляпунова. На основе этих результатов была сформулирована и доказана теорема об ограниченности анизотропийной нормы системы в терминах решений разностных уравнений Риккати. Представленные в теореме условия являются необходимыми и достаточными. Далее описан переход от разностных уравнений Риккати к соответствующему неравенству и сформулирована теорема о достаточных условиях ограниченности анизотропийной нормы системы. Полученное неравенство Риккати впоследствии преобразуется к форме линейных матричных неравенств, что более подробно описано в следующей главе.

### 3 Разработка метода синтеза анизотропийного фильтра для систем с мультипликативными шумами

В этой главе представлено решение задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. При решении задачи фильтрации используются результаты решения задач анизотропийного анализа для того же класса систем, представленные в предыдущем разделе. После постановки задачи анизотропийной фильтрации будет приведено решение общей задачи фильтрации с конечным результатом в виде теоремы об ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации. Также в этом разделе представлены решения задачи анизотропийной фильтрации для частных случаев искомого фильтра и системы со случайными сбоями в датчиках. Система со случайными сбоями имеет достаточно широкое применение в практических задачах, поэтому для нее также была создана программная реализация синтеза анизотропийного фильтра. В конце раздела представлены результаты численного решения задачи анизотропийной фильтрации для системы с отказами.

#### 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим на конечном временном интервале  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами:

$$T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_z(k)w(k), \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $x(k) \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  — вектор состояния системы, начальное состояние системы  $x(0) = 0$ ;  $w(k) \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  — вектор входного возмущения;  $z(k) \in \mathbb{L}_2^{p_z}$  — вектор оцениваемого выхода системы. Оценка  $z(k)$  производится на основе измеряемо-

го выхода  $y(k) \in \mathbb{L}_2^{p_y}$ , определяемого выражением

$$y(k) = C_y(k)x(k) + D_y(k)w(k). \quad (3.2)$$

Матрицы  $A(k)$ ,  $B(k)$  системы (3.1) и матрицы  $C_y(k)$ ,  $D_y(k)$  измеряемого выхода  $y(k)$  являются случайными матрицами специального вида

$$A(k) = A_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{1i}(k)A_i(k), \quad B(k) = A_0(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{2i}(k)B_i(k), \quad (3.3)$$

$$C_y(k) = C_{y0}(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{3i}(k)C_{yi}(k), \quad D_y(k) = D_{y0}(k) + \sum_{i=1}^M \xi_{4i}(k)D_{yi}(k), \quad (3.4)$$

где  $\xi_{ji}(k) \in \mathbb{L}_2^1$  при всех  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  и  $k$  являются независимыми в совокупности по  $i, j, k$  скалярными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Матрицы  $A_i(k)$ ,  $B_i(k)$ ,  $C_{yi}(k)$  и  $D_{yi}(k)$  являются неслучайными вещественными матрицами соответствующих размерностей. Матрицы  $C_z(k)$  и  $D_z(k)$  чаще всего выбираются исследователем и являются детерминированными. Как и в рассмотренных выше задачах анизотропийного анализа, используется предположение, что на вход системы (3.1) подается возмущение в виде последовательности случайных векторов  $w(k)$ , которая описывается вектором  $W_{0:N}$  с ограниченной анизотропией  $\mathbf{A}(W) \leq a$ , где  $a$  является известным положительным числом.

Задача фильтрации для системы (3.1) заключается в получении оценки выхода  $z(t)$  на основе значений измеряемого выхода  $y(k)$  при  $k \leq t$ , описываемого уравнением (3.2). Критерием качества данной оценки является анизотропийная норма системы в ошибках оценивания, построенной на основе исходной системы и фильтра, выбранного исходя из целей исследователя и вида исходной системы. В качестве искомого фильтра выбрана линейная дискретная нестационарная система  $T_{\hat{z}w}$  с представлением в пространстве состояний

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k) + H(k)(y(k) - \Gamma(k)\hat{x}(k)), \\ \hat{z}(k) = F(k)\hat{x}(k) + G(k)(y(k) - \Gamma(k)\hat{x}(k)), \end{cases} \quad (3.5)$$

на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , где  $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  — вектор оценки состояния  $x(k)$ , начальное состояние  $\hat{x}(0) = 0$ ,  $\hat{z}(k) \in \mathbb{R}^{p_z}$  — вектор оценки выхода  $z(k)$ . Поскольку матрица  $C_y(k)$  является случайной, а все искомые матрицы фильтра являются детерминированными, выражение  $\Gamma(k)\hat{x}(k)$  является скорее прогнозом значения измеряемого выхода системы. Значение матрицы  $\Gamma(k)$  выбирается заранее до определения остальных неизвестных матриц фильтра. Частные случаи фильтра при различных значениях матрицы  $\Gamma(k)$  будут рассмотрены позднее. Матрицы  $W(k)$ ,  $H(k)$ ,  $F(k)$ ,  $G(k)$  являются детерминированными матрицами соответствующих размерностей, подлежащие определению. Задача поиска оценки выхода  $z(k)$  сводится к задаче поиска матриц фильтра (3.5) таких, что анизотропийная норма системы в ошибках оценивания ограничена сверху заданным неотрицательным числом  $\gamma$ . Стоит отметить, что данная модель фильтра имеет определенное сходство с моделью фильтра Калмана. В данной модели уравнения можно разделить на две части: прогноз и коррекцию. Прогнозирование осуществляется за счет слагаемых  $W(k)\hat{x}(k)$  и  $F(k)\hat{x}(k)$ , а коррекция осуществляется посредством обновляющей последовательности с элементами  $y(k) - \hat{y}(k)$ , которая корректирует значение оценки выхода на основании значений  $y(k)$ . Линейная модель фильтра является оптимальным вариантом для получения оценки состояния или выхода рассматриваемой линейной системы, а матрицы  $W(k)$  и  $F(k)$  являются неизвестными, поскольку

Обозначим ошибку оценивания выхода как  $\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ . Система в ошибках фильтрации  $T_{\tilde{z}w}$  является результатом записи фильтра (3.5) и исходной системы (3.1) в терминах ошибки оценивания  $\tilde{z}(k)$  и ошибки оценивания состояния  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ . Более подробно вывод уравнений системы в ошибках фильтрации подробно разобран в следующем разделе. Выпишем формулировку задачи анизотропийной фильтрации

**Задача 3.** *Рассматривается линейная дискретная нестационарная система*

$T_{zw}$  вида (3.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , на вход которой поступает возмущение в виде последовательности случайных векторов, описываемой вектором  $W_{0:N}$  с анизотропией  $\mathbf{A}(W_{0:N})$ , ограниченной сверху известной величиной  $a \geq 0$ . Необходимо найти фильтр вида (3.5) такой, чтобы для системы в ошибках фильтрации  $T_{zw}$  анизотропийная норма была ограничена сверху заданной величиной  $\gamma \geq 0$ , т.е. выполнялось условие

$$\|T_{zw}\|_a \leq \gamma.$$

При решении задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации используются результаты анизотропийного анализа для системы в ошибках фильтрации, построенной на основе исходной системы (3.1) и фильтра (3.5). Поскольку используются результаты решения задач анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами, в процессе решения задачи анизотропийной фильтрации необходимо проверить выполнение условий систем с мультипликативными шумами для системы в ошибках фильтрации. В результате получим дополнительные ограничения на матрицы фильтра.

## 3.2 Решение задачи анизотропийной фильтрации

Решение поставленной задачи начинаем с построения системы в ошибках фильтрации, соответствующей исходной системе объекта (3.1) и выбранной модели фильтра (3.5). Подставив выражение (3.2) измеряемого выхода  $y(k)$  в систему (3.5), получим

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = (W(k) - H(k)\Gamma(k))\hat{x}(k) + H(k)C_y(k)x(k) \\ \quad + H(k)D_y(k)w(k), \\ \hat{z}(k) = (F(k) - G(k)\Gamma(k))\hat{x}(k) + G(k)C_y(k)x(k) \\ \quad + G(k)D_y(k)w(k). \end{cases} \quad (3.6)$$

Для упрощения дальнейших выкладок вводим обозначения

$$X(k) = W(k) - H(k)\Gamma(k), \quad Y(k) = F(k) - G(k)\Gamma(k).$$

Для записи системы в ошибках фильтрации введем обозначение

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k). \quad (3.7)$$

Из (3.1), (3.5), с учетом (3.7) получим уравнение динамики ошибки оценивания состояния вида

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = (A(k) - X(k) - H(k)C_y(k))x(k) + X(k)\tilde{x}(k) + \\ + (B(k) - H(k)D_y(k))w(k). \end{cases} \quad (3.8)$$

Начальное состояние  $\tilde{x}(k)$  определено условием  $\tilde{x}(0) = 0$ . Далее на основе выражений (3.6) и исходной системы (3.1) запишем выражение для ошибки оценивания  $\tilde{z}(k)$  выхода  $z(k)$  в терминах ошибки оценивания состояния  $\tilde{x}(k)$ :

$$\tilde{z}(k) = (C_z(k) - Y(k) - G(k)C_y(k))x(k) + Y(k)\tilde{x}(k) + \quad (3.9)$$

$$+ (D_z(k) - G(k)D_y(k))w(k) \quad (3.10)$$

Из (3.8) видно, что в уравнение динамики ошибки оценки состояния  $\tilde{x}(k)$  помимо самой ошибки входит переменная состояния  $x(k)$  исходной системы. Следовательно, необходимо объединить системы (3.1) и (3.8) в одну с расширенным вектором состояния

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix}.$$

Система в ошибках фильтрации  $T_{\tilde{z}w}$  в терминах расширенного вектора состояния на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  имеет вид

$$T_{\tilde{z}w} \sim \begin{cases} \bar{x}(k+1) = \mathcal{A}(k)\bar{x}(k) + \mathcal{B}(k)w(k), \\ \tilde{z}(k) = \mathcal{C}(k)\bar{x}(k) + \mathcal{D}(k)w(k), \end{cases} \quad (3.11)$$

с начальным состоянием  $\bar{x}(0) = 0$ . Матрицы  $\mathcal{A}(k)$ ,  $\mathcal{B}(k)$ ,  $\mathcal{C}(k)$ ,  $\mathcal{D}(k)$  определяются следующим образом:

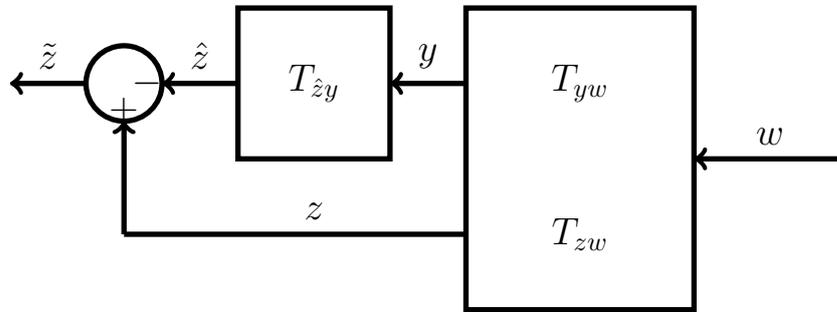
$$\mathcal{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k) & 0 \\ A(k) - X(k) - H(k)C_y(k) & X(k) \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{B}(k) = \begin{bmatrix} B(k) \\ B(k) - H(k)D_y(k) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{C}(k) = \begin{bmatrix} C_z(k) - Y(k) - G(k)C_y(k) & Y(k) \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{D}(k) = D_z(k) - G(k)D_y(k). \quad (3.15)$$

Система  $T_{\tilde{z}w}$  с реализацией (3.11) эквивалентна линейному оператору, который последовательности входных векторов  $w(k)$ , описываемой вектором  $W_{0:N}$  ставит в соответствие последовательность векторов ошибок оценки выхода  $\tilde{z}_k$ , которая описывается на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  вектором  $\tilde{Z}_{0:N}$ . Ниже представлена блок-схема системы в ошибках фильтрации:



**Рис. 4:** Блок-схема системы в ошибках фильтрации

Поскольку (3.1) является системой с мультипликативными шумами, а матрицы системы в ошибках фильтрации являются линейными относительно матриц исходной в силу ее построения, полученная система в ошибках фильтрации также принадлежит данному классу систем с мультипликативными шумами. Соответственно, для системы (3.11) выполнены следующие условия:

1. Матрицы системы (3.11)  $\mathcal{A}(k)$ ,  $\mathcal{B}(k)$ ,  $\mathcal{C}(k)$ ,  $\mathcal{D}(k)$  являются независимыми в совокупности.

2. Матрицы системы (3.11)  $\mathcal{A}(k)$ ,  $\mathcal{B}(k)$ ,  $\mathcal{C}(k)$ ,  $\mathcal{D}(k)$  представимы в виде

$$\mathcal{A}(k) = \mathcal{A}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_i(k), \mathcal{B}(k) = \mathcal{B}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{2i}(k) \mathcal{B}_i(k), \quad (3.16)$$

$$\mathcal{C}(k) = \mathcal{C}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{3i}(k) \mathcal{C}_i(k), \mathcal{D}(k) = \mathcal{D}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{4i}(k) \mathcal{D}_i(k). \quad (3.17)$$

Случайные величины  $\zeta_{ij}(k)$  в выражениях (3.16), (3.17) при всех  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, M\}$  и  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  независимы в совокупности по индексам  $i, j, k$  и обладают следующими характеристиками:

$$\mathbf{E}[\zeta_{ij}(k)] = 0, \quad \mathbf{E}[\zeta_{ij}^2(k)] = 1.$$

3. Матрицы системы  $\mathcal{A}(k)$ ,  $\mathcal{B}(k)$ ,  $\mathcal{C}(k)$ ,  $\mathcal{D}(k)$  являются независимыми со случайным входным возмущением  $w(k)$  исходной системы.

Стоит отметить, что выполнение данных условий обеспечивается и за счет неизвестных матриц искомого фильтра. Можно ввести дополнительные ограничения на матрицы фильтра, при которых матрицы системы в ошибках фильтрации удовлетворяют описанным выше условиям. Обратим внимание, что в матрицы системы  $\mathcal{A}(k)$  и  $\mathcal{C}(k)$  входит матрица  $C_y(k)$ , а в матрицы  $\mathcal{B}(k)$  и  $\mathcal{D}(k)$  — матрица  $D_y(k)$ . В общем случае эти матрицы являются случайными. Поскольку матрицы  $\mathcal{A}(k)$ ,  $\mathcal{B}(k)$ ,  $\mathcal{C}(k)$ ,  $\mathcal{D}(k)$  должны быть независимыми в совокупности, то пары матриц  $(\mathcal{A}(k), \mathcal{C}(k))$  и  $(\mathcal{B}(k), \mathcal{D}(k))$  должны быть независимыми, т.е. математическое ожидание произведения матриц каждой пары должно быть равно произведению математических ожиданий каждой матрицы (произведения запишем без индекса времени  $k$ ):

$$\mathbf{E}[\mathcal{B}\mathcal{D}^\top] = \mathbf{E}\left[\begin{pmatrix} BD_z^\top - BD_y^\top G^\top \\ BD_z^\top - BD_y^\top G^\top - HD_y D_z^\top - HD_y D_y^\top G^\top \end{pmatrix}\right]$$

Для компоненты  $\mathbf{E}[HD_y D_y^\top G^\top]$  не справедливо равенство

$$\mathbf{E}[HD_y D_y^\top G^\top] = \mathbf{E}[HD_y] \mathbf{E}[D_y^\top G^\top],$$

поэтому для выполнения  $\mathbf{E}[\mathcal{B}\mathcal{D}^\top] = \mathbf{E}[\mathcal{B}]\mathbf{E}[\mathcal{D}^\top]$  матрицы искомого фильтра  $H(k)$  и  $G(k)$  должны удовлетворять условию

$$H(k)G^\top(k) = 0. \quad (3.18)$$

Это условие, к примеру, выполняется в следующих случаях:

1.  $H(k) = 0$  или  $G(k) = 0$ ;
2.  $H(k) = \begin{bmatrix} H'(k) & 0 \end{bmatrix}$ ,  $G(k) = \begin{bmatrix} 0 & G'(k) \end{bmatrix}$ , где  $H'(k)$  — матрица размеров  $n_x \times (p_y - n)$ ,  $G'(k)$  — матрица размеров  $p_z \times n$ .

Частные случаи фильтра  $H(k) = 0$  и  $G(k) = 0$  будут рассмотрены в следующем разделе диссертационной работы. Пока предполагаем, что условие (3.18) выполняется в общем случае. В конце раздела, посвященного решению задачи анизотропийного анализа для систем с мультипликативными шумами, была получены условия ограниченности анизотропийной нормы в терминах неравенства Риккати. Данные условия для системы (3.11) имеют вид неравенства Риккати

$$\mathcal{R}(k) \succ \mathcal{A}_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)\mathcal{A}_0(k) + \sum_{i=1}^M \mathcal{A}_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)\mathcal{A}_i(k) + \quad (3.19)$$

$$+ q \sum_{i=0}^M \mathcal{C}_i^\top(k)\mathcal{C}_i(k) + \mathcal{L}^\top(k)\mathcal{S}^{-1}(k)\mathcal{L}(k),$$

$$\mathcal{S}^{-1}(k) = I_{m_w} - q \sum_{i=0}^M \mathcal{D}_i^\top(k)\mathcal{D}_i(k) - \sum_{i=0}^M \mathcal{B}_i^\top(k)\mathcal{R}(k+1)\mathcal{B}_i(k), \quad (3.20)$$

$$\mathcal{L}(k) = \mathcal{S}(k) (\mathcal{B}_0^\top(k)\mathcal{R}(k+1)\mathcal{A}_0(k) + q\mathcal{D}_0^\top(k)\mathcal{C}_0(k)), \quad (3.21)$$

с граничным условием  $\mathcal{R}(N+1) = 0$  и неравенства специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \mathcal{S}^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (3.22)$$

Как и в случае задачи анизотропийной фильтрации для систем с детерминированными матрицами, осуществим переход от неравенства Риккати к виду

ЛМН с неравенством специального вида. Для этого воспользуемся леммой Шура, приведенной ниже.

**Лемма 3.** [71] Для любой симметричной матрицы  $M$  вида

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{bmatrix},$$

выполняются следующие условия:

1.  $M \succ 0 \Leftrightarrow A \succ 0, C - B^\top A^{-1} B \succ 0;$
2.  $M \succ 0 \Leftrightarrow C \succ 0, A - B C^{-1} B^\top \succ 0;$

Чтобы воспользоваться этой леммой, необходимо в (3.20) осуществить переход от равенства к неравенству. Для этого введем вспомогательную матрицу  $\Theta(k) \succ 0$  следующим образом:

$$\Theta^{-1}(k) \prec I_{m_w} - \left( q \sum_{i=0}^M \mathcal{D}_i^\top(k) \mathcal{D}_i(k) + \sum_{i=0}^M \mathcal{B}_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) \mathcal{B}_i(k) \right). \quad (3.23)$$

Из неравенства (3.23) следует, что  $\Theta^{-1}(k) \prec \mathcal{S}^{-1}(k)$ . Подставив матрицу  $\Theta(k)$  к систему (3.19)-(3.22) с учетом (3.23) получим систему из матричных неравенств вида

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(k) \succ & \mathcal{A}_0^\top(k) \mathcal{R}(k+1) \mathcal{A}_0(k) + \\ & + \sum_{i=1}^M \mathcal{A}_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) \mathcal{A}_i(k) + q \sum_{i=0}^M \mathcal{C}_i^\top(k) \mathcal{C}_i(k) + \\ & + (\mathcal{B}_0^\top \mathcal{R}(k+1) \mathcal{A}_0 + q \mathcal{D}_0^\top \mathcal{C}_0)^\top \Theta(k) (\mathcal{B}_0^\top \mathcal{R}(k+1) \mathcal{A}_0 + q \mathcal{D}_0^\top \mathcal{C}_0), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\Theta^{-1}(k) \prec I_{m_w} - \left( q \sum_{i=0}^M \mathcal{D}_i^\top(k) \mathcal{D}_i(k) + \sum_{i=0}^M \mathcal{B}_i^\top(k) \mathcal{R}(k+1) \mathcal{B}_i(k) \right), \quad (3.25)$$

с граничным условием  $\widehat{\mathcal{R}}(N+1) = 0$  и неравенство специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \Theta^{-1}(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (3.26)$$

Получаем, что при решении данной системы неравенств находим значения матрицы  $\Theta(k)$  и для проверки неравенства специального вида необходимо обратить каждую из этих матриц. Операция обращения матрицы в данном случае может привести к большим погрешностям и трудностям вычисления. Поэтому целесообразно ввести замену для матрицы  $\Theta^{-1}(k)$ . Также заметим, что в неравенстве (3.26) есть произведение  $q\gamma^2$ . В рассматриваемой задаче  $\gamma$  является заданной величиной, но в целях обеспечения возможности в дальнейшем решения задачи выпуклой оптимизации с использованием данных неравенств, разделим компоненты  $q$  и  $\gamma^2$ . Исходя из приведенных рассуждений, введем следующие новые переменные:

$$\eta = q^{-1}, \quad \Psi(k) = \eta\Theta^{-1}(k), \quad \mathcal{P}(k) = \eta\mathcal{R}(k). \quad (3.27)$$

Для компактности записи дальнейших выкладок с линейными матричными неравенствами введем обозначения

$$\mathcal{A}_{ex}(k) = \left[ \mathcal{A}_1^\top \quad \dots \quad \mathcal{A}_M^\top \right]^\top, \quad \mathcal{B}_{ex}(k) = \left[ \mathcal{B}_0^\top \quad \dots \quad \mathcal{B}_M^\top \right]^\top, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{C}_{ex}(k) = \left[ \mathcal{C}_1^\top \quad \dots \quad \mathcal{C}_M^\top \right]^\top, \quad \mathcal{D}_{ex}(k) = \left[ \mathcal{D}_0^\top \quad \dots \quad \mathcal{D}_M^\top \right]^\top. \quad (3.29)$$

Также введем вспомогательную матричную функцию  $\Phi_M(X)$ , значение которой равно блочно-диагональной матрице из  $M$  блоков в виде матрицы  $X$ . Применив лемму Шура к системе неравенств Риккати (3.24),(3.25) с учетом замены

переменных (3.27) и обозначений (3.28),(3.29), получим систему неравенств

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \mathcal{A}_0(k) & \mathcal{B}_0(k) & \mathcal{P}^{-1}(k+1) & * & * & * \\ \mathcal{A}_{ex}(k) & 0 & 0 & \Phi_M(\mathcal{P}^{-1}(k+1)) & * & * \\ \mathcal{C}_0(k) & \mathcal{D}_0(k) & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * & * & * \\ \mathcal{B}_{ex}(k) & \Phi_{M+1}(\mathcal{P}^{-1}(k+1)) & * & * & * \\ \mathcal{D}_{ex}(k) & 0 & \dots & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.31)$$

$$\mathcal{P}(k) \succ 0.$$

для всех  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  с матричным неравенством

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(N) & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \bar{\Psi}(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

и неравенством специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Полученные матричные неравенства еще не являются линейными, поскольку в них присутствуют обратные матрицы. Для их устранения в неравенствах (3.30),(3.31), сделаем конгруэнтные преобразования с помощью блочно-диагональных матриц следующего вида:

$$U_1 = \text{blockdiag}(I_{2n_x}, I_{m_w}, \underbrace{\mathcal{P}(k+1), \dots, \mathcal{P}(k+1)}_{M+1 \text{ блоков}}, I_{p_z(M+1)})$$

$$U_2 = \text{blockdiag}(I_{2n_x}, \underbrace{\mathcal{P}(k+1), \dots, \mathcal{P}(k+1)}_{M+1 \text{ блоков}}, I_{p_z(M+1)}).$$

Для упрощения записи матричных неравенств введем следующие обозначения:

$$\mathcal{P}\mathcal{A}_{ex} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1(k) \\ \vdots \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_M(k) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}\mathcal{B}_{ex} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_0(k) \\ \vdots \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_M(k) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Применив обозначения (3.32) и необходимые конгруэнтные преобразования к неравенствам (3.30), (3.31), получим матричные неравенства

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k) & \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_0(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{A}_{ex}(k) & 0 & 0 & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) & * & * \\ \mathcal{C}_0(k) & \mathcal{D}_0(k) & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{B}_{ex}(k) & \Phi_{M+1}(\mathcal{P}(k+1)) & * & * & * \\ \mathcal{D}_{ex}^\top(k) & 0 & \dots & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.34)$$

относительно матриц  $\mathcal{P}(k) \succ 0$  и  $\Psi(k)$ , матричные неравенства для  $\mathcal{P}(N) \succ 0$  и  $\Psi(N)$  вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(N) & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

и неравенство специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (3.35)$$

Стоит отметить, что в самом общем случае в произведении матриц  $\mathcal{A}_i \mathcal{P}(k+1)$ ,  $\mathcal{B}_i^\top \mathcal{P}(k+1)$  содержатся нелинейные члены в виде произведений неизвестных матриц фильтра  $W(k)$ ,  $H(k)$ ,  $F(k)$ ,  $G(k)$  и элементов матрицы  $\mathcal{P}(k+1)$ . Чтобы избавиться от нелинейных членов в неравенствах, введем следующие замены переменных:

$$\mathcal{X}(k) = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times p_y} \\ W(k) & H(k) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}(k) = \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k) \quad (3.36)$$

Матрицы  $\mathcal{A}(k)$  и  $\mathcal{B}(k)$  с учетом введенной замены переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k) &= \mathcal{A}_0^0(k) + \mathcal{X}(k)\mathcal{A}_0^1(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) (\mathcal{A}_i^0(k) + \mathcal{X}(k)\mathcal{A}_i^1(k)), \quad (3.37) \\ \mathcal{B}(k) &= \mathcal{B}_0^0(k) + \mathcal{X}(k)\mathcal{B}_0^1(k) + \sum_{i=1}^M \lambda_{1i}(k) (\mathcal{B}_i^0(k) + \mathcal{X}(k)\mathcal{B}_i^1(k)), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}_0^0(k) = \begin{bmatrix} A_0(k) & 0_{n_x \times n_x} \\ A_0(k) & 0_{n_x \times n_x} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_0^1(k) = \begin{bmatrix} -I_{n_x \times n_x} & I_{n_x \times n_x} \\ \Gamma(k) - C_{y_0}(k) & 0_{p_y \times n_x} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$\mathcal{A}_i^0(k) = \begin{bmatrix} A_i(k) & 0_{n_x \times n_x} \\ A_i(k) & 0_{n_x \times n_x} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_i^1(k) = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times n_x} \\ -C_{y_i}(k) & 0_{p_y \times n_x} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$\mathcal{B}_0^0(k) = \begin{bmatrix} B_0(k) \\ B_0(k) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_0^1(k) = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times m_w} \\ -D_{y_0} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\mathcal{B}_i^0(k) = \begin{bmatrix} B_i(k) \\ B_i(k) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_i^1(k) = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times m_w} \\ -D_{y_i} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Применив введенную замену переменных (3.36) к матричным неравенствам (3.33), (3.34) с учетом (3.37)-(3.41), получим искомую систему линейных мат-

ричных неравенств. Для сокращенной записи неравенств введем обозначения

$$\Pi_0^A = \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0^0(k), \quad \Pi_0^B = \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_0^0(k), \quad (3.42)$$

$$\Xi_0^A = \mathcal{Y}(k)\mathcal{A}_0^1(k), \quad \Xi_0^B = \mathcal{Y}(k)\mathcal{B}_0^1(k), \quad (3.43)$$

$$\Pi_{ex}^A = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1^0(k) \\ \vdots \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_M^0(k) \end{bmatrix}, \quad \Pi_{ex}^B = \begin{bmatrix} \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_0^0(k) \\ \vdots \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_M^0(k) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\Xi_{ex}^A = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(k)\mathcal{A}_1^1(k) \\ \vdots \\ \mathcal{Y}(k)\mathcal{A}_M^1(k) \end{bmatrix}, \quad \Xi_{ex}^B = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}(k)\mathcal{B}_0^1(k) \\ \vdots \\ \mathcal{Y}(k)\mathcal{B}_M^1(k) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

**Теорема 5.** [75] *Задана линейная дискретная нестационарная система  $T_{zw}$  на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  и реализацией в пространстве состояний (3.1) и выбраны вещественные числа  $\gamma \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$ . Фильтр  $T_{zw}$  с реализацией в пространстве состояний (3.5) и заданной матрицей  $\Gamma(k)$  гарантирует выполнение неравенства  $\|T_{zw}\|_a \leq \gamma$  для системы в ошибках фильтрации с реализацией в пространстве состояний (3.11), если найдутся матрицы  $\mathcal{P}(k) \succ 0$ ,  $\mathcal{Y}(k)$  и  $\Psi(k)$ , для которых при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  выполняются неравенства*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \Pi_0^A + \Xi_0^A & \Pi_0^B + \Xi_0^B & \mathcal{P}(k+1) & * & * & * \\ \Pi_{ex}^A + \Xi_{ex}^A & 0 & 0 & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) & * & * \\ \mathcal{C}_0(k) & \mathcal{D}_0(k) & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.46)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * \\ \Pi_{ex}^B + \Xi_{ex}^B & \Phi_{M+1}(\mathcal{P}(k+1)) & * \\ \mathcal{D}_{ex}^\top(k) & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0,$$

Для  $\mathcal{P}(N)$ ,  $\mathcal{X}(N)$ ,  $\mathcal{Y}(N)$  и  $\Psi(N)$  должны выполняться неравенства вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(N) & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

Матрицы  $\Psi(k)$  являются положительно определенными матрицами, удовлетворяющие неравенству специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (3.47)$$

Решив линейные матричные неравенства (3.46)-(3.47), получим наборы значений матриц  $\mathcal{P}(k) \succ 0$ ,  $\mathcal{Y}(k)$  и  $\Psi(k)$  для всех индексов  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Также при решении ЛМН получаем наборы значений матриц  $F(k)$  и  $G(k)$  искомого фильтра, которые входят в состав матриц  $\mathcal{C}(k)$  и  $\mathcal{D}(k)$  системы в ошибках фильтрации. Для определения матриц  $W(k)$  и  $H(k)$  искомого фильтра необходимо воспользоваться обратной заменой переменных

$$\mathcal{X}(k) = \mathcal{P}^{-1}(k+1)\mathcal{Y}(k)$$

Поскольку сама матрица  $\mathcal{X}(k)$  является заменой переменных вида (3.36), искомые матрицы  $W(k)$  и  $H(k)$  являются блоками соответствующих размерностей матрицы  $\mathcal{X}(k)$ . Следовательно, после вычисления набора значений  $\mathcal{X}(k)$  выделяем строки этих матриц с номерами  $n_x + 1 \leq i \leq 2n_x$  и затем выбираем столбцы. Матрице  $W(k)$  соответствуют столбцы с индексами  $1 \leq j \leq n_x$ , а матрице  $H(k)$  — столбцы с индексами  $n_x + 1 \leq j \leq n_x + p_y$ . Выпишем аналити-

ческое представление матриц  $W(k)$  и  $H(k)$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{-1}(k+1) &= \begin{pmatrix} \mathcal{P}'_{11} & 0 \\ 0 & \mathcal{P}'_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}(k) = \begin{pmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times p_y} \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{X}(k) &= \begin{pmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times p_y} \\ \mathcal{P}'_{22}\mathcal{Y}_{21} & \mathcal{P}'_{22}\mathcal{Y}_{22} \end{pmatrix}, \quad W(k) = \mathcal{P}'_{22}\mathcal{Y}_{21}, \quad H(k) = \mathcal{P}'_{22}\mathcal{Y}_{22}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Таким образом, имеем все искомые матрицы фильтра, обеспечивающего ограниченность анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации. В зависимости от конфигурации фильтра, некоторые из его матриц могут быть зафиксированы в постановке задачи фильтрации, что снижает количество неизвестных в данной задаче. В следующих подразделах будут рассмотрены частные случаи задачи анизотропийной фильтрации для различных конфигураций фильтра и исходной системы.

### 3.3 Разбор частных случаев

Ранее были рассмотрена общая постановка задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для систем с мультипликативными шумами и подход к ее решению. Однако, на практике часто встречаются частные случаи данной задачи, в которых фильтр является более упрощенным по сравнению с общим видом (3.5), или в которых не все матрицы исходной системы являются матрицами вида (3.3), (3.4). Далее будут рассмотрены некоторые из таких вариантов задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации.

Для начала рассмотрим модель фильтра в зависимости от разных значений матрицы  $\Gamma(k)$ , которая выбирается исследователем перед решением задачи фильтрации. Напомним реализацию линейного фильтра в пространстве состояний

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k) + H(k)(y(k) - \Gamma(k)\hat{x}(k)), \\ \hat{z}(k) = F(k)\hat{x}(k) + G(k)(y(k) - \Gamma(k)\hat{x}(k)) \end{cases} \quad (3.49)$$

Система (3.49) легко преобразуется к следующему виду

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = (W(k) - H(k)\Gamma(k))\hat{x}(k) + H(k)y(k), \\ \hat{z}(k) = (F(k) - G(k)\Gamma(k))\hat{x}(k) + G(k)y(k) \end{cases}$$

Матрицы  $W(k) - H(k)\Gamma(k)$  и  $(F(k) - G(k)\Gamma(k))$  можно заменить на матрицы  $\tilde{W}(k)$  и  $\tilde{F}(k)$  соответственно. В таком случае фильтр имеет вид

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = \tilde{W}(k)\hat{x}(k) + H(k)y(k), \\ \hat{z}(k) = \tilde{F}(k)\hat{x}(k) + G(k)y(k) \end{cases}$$

Получаем вместо исходной задачи поиска матриц  $W(k)$ ,  $H(k)$ ,  $F(k)$  и  $G(k)$  исходного фильтра задачу поиска матриц  $\tilde{W}(k)$ ,  $\tilde{F}(k)$ ,  $H(k)$  и  $G(k)$ . Эта задача эквивалентна исходной задаче поиска фильтра при предположении  $\Gamma(k) = 0$ . Получаем, что при любой матрице  $\Gamma(k)$  задачу поиска фильтра можно путем простых преобразований свести к поиску фильтра при  $\Gamma(k) = 0$ . Подобное возможно, поскольку, в отличие от классического фильтра Калмана, матрицы  $W(k)$  и  $F(k)$  являются неизвестными матрицами и при решении задачи анизотропийной фильтрации, какую бы матрицу  $\Gamma(k)$  не выбрал исследователь, матрицы  $\tilde{W}(k)$  и  $\tilde{F}(k)$  будут иметь один и тот же вид. Поэтому далее при рассмотрении частных случаев всегда будет справедливо равенство  $\Gamma(k) = 0$ .

При рассмотрении общего случая задачи анизотропийной фильтрации в предыдущем подразделе было показано, что для выполнения условия о независимости в совокупности матриц  $\mathcal{A}(k)$ ,  $\mathcal{B}(k)$ ,  $\mathcal{C}(k)$ ,  $\mathcal{D}(k)$  системы в ошибках фильтрации, необходимо выполнение условия

$$H(k)G^\top(k) = 0.$$

Данное условие выполняется, к примеру, при  $H(k) = 0$  или  $G(k) = 0$ . Постановка и решение задачи анизотропийной фильтрации для таких частных случаев искомого фильтра будут рассмотрены далее.

**Случай 1.**  $H(k) = 0$ . Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами вида (3.1) на конечном интервале вре-

мени

$k \in \{0, 1, \dots, N\}$  и фильтр вида

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k), \\ \hat{z}(k) = F(k)\hat{x}(k) + G(k)y(k) \end{cases} \quad (3.50)$$

с начальным состоянием  $\hat{x}(0) = 0$ . Из (3.50) видно, что при  $H(k) = 0$  в уравнении динамики фильтра отсутствует корректирующее слагаемое с  $y(k) - \hat{y}(k)$ . Следовательно, динамика  $\hat{x}(k)$  определяется только матрицей  $W(k)$ . Поскольку матрица  $W(k)$  предполагается устойчивой и начальное состояние фильтра  $\hat{x}(0) = 0$ , то значение переменной состояния фильтра  $\hat{x}(k)$  так и останется нулевым при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Следовательно, система (3.50) преобразуется к виду

$$\hat{z}(k) = G(k)y(k).$$

Очевидно, что искомая оценка выхода  $\hat{z}(k)$  определяется исключительно значением измеримого выхода  $y(k)$  системы, а переменная состояния фильтра  $\hat{x}(k)$  никаким образом не влияет на значение оценки выхода. Следовательно, имеем статический оцениватель с одной неизвестной матрицей  $G(k)$ . Матрицы системы в ошибках фильтрации имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k) &= A(k), \quad \mathcal{B}(k) = B(k), \\ \mathcal{C}(k) &= C_z(k) - G(k)C_y(k), \quad \mathcal{D}(k) = D_z(k) - G(k)D_y(k). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Поскольку исходная система (3.1) является системой с мультипликативными шумами, то и система в ошибках фильтрации с матрицами (3.51) также является таковой. Следовательно, используем полученные результаты решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации. Подставив (3.51) в (3.46)-(3.47), получим систему линейных матричных неравенств [78] в терминах матриц  $\mathcal{P}(k)$ ,

$\Psi(k)$  и матрицы фильтра  $G(k)$  при  $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{A}_0^0(k) & \mathcal{P}\mathcal{B}_0^0(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{A}_{ex}^0(k) & 0 & 0 & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) & * & * \\ \mathcal{C}_0(k) & \mathcal{D}_0(k) & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{B}_{ex}^0(k) & \Phi_{M+1}(\mathcal{P}(k+1)) & * \\ \mathcal{D}_{ex}^\top(k) & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0,$$

матричные неравенства для  $\mathcal{P}(N) \succ 0$ ,  $W(N)$ ,  $H(N)$ ,  $F(N)$ ,  $G(N)$  и  $\Psi(N)$  вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(N) & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

и неравенство специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (3.53)$$

В данных неравенствах матрицы  $\mathcal{A}(k)$  и  $\mathcal{B}(k)$  не зависят от неизвестной матрицы  $G(k)$  искомого фильтра. Следовательно, в (3.52)-(3.53) отсутствуют нелинейные компоненты и сами матричные неравенства являются линейными. Такие неравенства решаются численными методами значительно проще уравнений Риккати, поэтому решение задачи анизотропийной фильтрации в виде матрицы  $G(k)$  рассматриваемого примера фильтра находится достаточно просто. Также есть возможность решения задачи выпуклой оптимизации, т.е. минимизации верхней границы  $\gamma$  анизотропийной нормы. Статические фильтры имеют

достаточно ограниченную область применения, но наиболее просты с точки зрения реализации. Также, благодаря прямой зависимости оценки от значения измеряемого выхода достаточно легко отслеживать связь ошибки фильтрации со значением матрицы фильтра  $G(k)$ . Далее рассмотрим второй частный случай анизотропийного фильтра, для которого выполняется условие (3.18).

**Случай 2.**  $G(k) = 0$ . Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами вида (3.1) на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  и фильтр вида

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k) + H(k)y(k), \\ \hat{z}(k) = F(k)\hat{x}(k) \end{cases} \quad (3.54)$$

с начальным состоянием  $\hat{x}(0) = 0$ . Видно, что искомая оценка выхода  $\hat{z}(k)$  определяется только переменной состояния фильтра  $\hat{x}(k)$ , обновляющая последовательность  $y(k) - \hat{y}(k)$  действует на нее косвенно, посредством той же переменной  $\hat{x}(k)$ . Матрица  $C_z(k)$  является известной детерминированной матрицей, поэтому положим  $F(k) = C_z(k)$ . Таким образом, задача анизотропийной фильтрации сводится к поиску матриц  $W(k)$  и  $H(k)$  оценщика. Матрицы системы в ошибках фильтрации имеют вид

$$\mathcal{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k) & 0_{n_x \times n_x} \\ A(k) - W(k) - H(k)C_y(k) & W(k) \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\mathcal{B}(k) = \begin{bmatrix} B(k) \\ B(k) - H(k)D_y(k) \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

$$\mathcal{C}(k) = \begin{bmatrix} 0_{p_z \times n_x} & C_z(k) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}(k) = D_z(k). \quad (3.57)$$

Прежде чем использовать приведенные ранее результаты решения задачи анизотропийной фильтрации в общем виде, проверим, что система в ошибках фильтрации является системой с мультипликативными шумами. Это означает, что матрицы  $\mathcal{A}(k)$ ,  $\mathcal{B}(k)$ ,  $\mathcal{C}(k)$ ,  $\mathcal{D}(k)$  должны удовлетворять условиям

(3.16),(3.17). Запишем матрицу  $\mathcal{A}(k)$  в следующем виде:

$$\mathcal{A}(k) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(k) & \mathcal{A}_{12}(k) \\ \mathcal{A}_{21}(k) & \mathcal{A}_{22}(k) \end{bmatrix} = \mathcal{A}_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_i(k), \quad (3.58)$$

где

$$\mathcal{A}_i(k) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{i_{11}}(k) & \mathcal{A}_{i_{12}}(k) \\ \mathcal{A}_{i_{21}}(k) & \mathcal{A}_{i_{22}}(k) \end{bmatrix}, \quad i \in \{0, 1, \dots, M\}.$$

Далее запишем условия систем с мультипликативными шумами для каждого блока матрицы (3.58) с учетом выражений матриц системы в ошибках фильтрации вида (3.12):

$$\mathcal{A}_{0_{11}}(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{11}}(k) = A(k), \quad (3.59)$$

$$\mathcal{A}_{0_{12}}(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{12}}(k) = 0, \quad (3.60)$$

$$\mathcal{A}_{0_{21}}(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{21}}(k) = A(k) - W(k) - H(k)C_y(k), \quad (3.61)$$

$$\mathcal{A}_{0_{22}}(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{22}}(k) = W(k). \quad (3.62)$$

Из равенства (3.59) видно, что  $A(k)$  является матрицей специального вида. Из (3.62) и того факта, что матрица фильтра  $W(k)$  не может быть случайной, следует что соотношение (3.62) не может быть выполнено. Следовательно, необходимо устранить все случайные компоненты равенство, т.к. должно выполняться равенство нулю всех матриц  $\mathcal{A}_{i_{22}}(k)$  при случайных величинах  $\zeta_{1i}(k)$ . Предположим, что  $W(k) = \mathcal{A}_{0_{22}}(k)$ . С учетом вышесказанного (3.61) переписываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0_{11}}(k) - W(k) &= \mathcal{A}_{0_{21}}(k), \\ \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{11}}(k) - H(k)C_y(k) &= \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{21}}(k). \end{aligned} \quad (3.63)$$

В общем случае  $\mathbf{E}[C_y(k)] \neq 0$ . Следовательно, математическое ожидание левой части (3.63) не равно нулю, а мат. ожидание правой части равно нулю. равен-

ство (3.61) является уравнением относительно случайных величин с разными математическими ожиданиями. Необходимо привести (3.63) к равенству, обе части которого обладают равными математическими ожиданиями. Для этого проведем следующие преобразования (3.63):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{11}}(k) - H(k)C_y(k) + H(k)\mathbf{E}[C_y(k)] \\ - H(k)\mathbf{E}[C_y(k)] = \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{21}}(k). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Видно, что слагаемые  $-H(k)C_y(k)$  и  $H(k)\mathbf{E}[C_y(k)]$  можно сгруппировать, получив при матрице  $H(k)$  случайную матрицу с нулевым математическим ожиданием. Перепишем (3.64) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0_{21}}(k) &= \mathcal{A}_{0_{11}}(k) - W(k) - H(k)\mathbf{E}[C_y(k)], \\ \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{21}}(k) &= \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \mathcal{A}_{i_{11}}(k) + H(k)(\mathbf{E}[C_y(k)] - C_y(k)). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Равенство (3.65) выполняется, если матрица  $C_y(k)$  имеет следующий вид:

$$C_y(k) = C_{y_0}(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) C_{y_i}(k),$$

где  $C_{y_0}(k) = \mathbf{E}[C_y(k)]$ ,  $H(k)C_{y_i}(k) = \mathcal{A}_{i_{11}}(k) - \mathcal{A}_{i_{21}}(k)$ . Предположив, что все матрицы  $A_i(k)$ ,  $C_{y_i}(k)$ ,  $i = \overline{0, M}$  известны, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k) &= \begin{bmatrix} A_0(k) & 0 \\ A_0(k) - W(k) - H(k)C_{y_0}(k) & W(k) \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{i=1}^M \zeta_{1i}(k) \begin{bmatrix} A_i(k) & 0 \\ A_i(k) - H(k)C_{y_i}(k) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, в соответствии с условиями (3.12), (3.16) для матриц системы с мультипликативными шумами, матрица  $\mathcal{B}(k)$  должна удовлетворять выражению

$$\mathcal{B}(k) = \mathcal{B}_0(k) + \sum_{i=1}^{M_2} \zeta_{2i}(k) \mathcal{B}_i(k).$$

Предположим, что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} B(k) &= B_0(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{2i}(k) B_i(k), \\ D_y(k) &= D_{y_0}(k) + \sum_{i=1}^M \zeta_{2i}(k) D_{y_i}(k), \\ H(k) D_{y_i}(k) &= \mathcal{B}_{1i} - \mathcal{B}_{2i}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

где все матрицы  $B_i(k)$ ,  $D_{y_i}(k)$ ,  $i = \overline{0, M}$  известны. Таким образом, имеем

$$\mathcal{B}(k) = \begin{bmatrix} B_0(k) \\ B_0(k) - H(k) D_{y_0}(k) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{M_2} \zeta_{2i}(k) \begin{bmatrix} B_i(k) \\ B_i(k) - H(k) D_{y_i}(k) \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Условия ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации в виде матричных неравенств для рассматриваемого частного случая записываются аналогично неравенствам (3.33)–(3.35). Однако, в данном случае в компонентах  $\mathcal{A}_{ex}^\top \mathcal{P}(k+1)$  и  $\mathcal{B}_{ex}^\top(k) \mathcal{P}(k+1)$  матричных неравенств есть нелинейные члены в виде произведений неизвестных матриц  $\mathcal{P}(k)$ ,  $W(k)$  и  $H(k)$ . Чтобы избавиться от этих компонент, необходимо ввести замену переменных вида (3.36). В результате получаем соответствующие разложения матриц  $\mathcal{A}(k)$  и  $\mathcal{B}(k)$  вида (3.37)–(3.41). Также будем использовать обозначения (3.42)–(3.45). Применив замену переменных (3.36) к (3.33)–(3.35), с учетом (3.57) получим искомую систему линейных матричных неравенств. Запишем полученные ЛМН с использованием ранее введенных обозначений (3.42)–(3.45) в виде следующей теоремы.

**Теорема 6.** [77], [79] Для системы  $T_{\tilde{z}w}$  с мультипликативными шумами вида (3.11), полученной из системы оценщика вида (3.54) в терминах ошибок оценивания выхода системы (3.1) при условии  $F(k) = C_z(k)$ , выполняется условие  $|||T_{\tilde{z}w}|||_a \leq \gamma$  для заданных  $a \geq 0$  и  $\gamma \geq 0$ , если существует решение

$\mathcal{P}(k) \succ 0, \Psi(k), \mathcal{Y}(k), \eta(k)$  системы линейных матричных неравенств вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * & * \\ \Pi_0^A + \Xi_0^A & \Pi_0^B + \Xi_0^B & \mathcal{P}(k+1) & * & * & * \\ \Pi_{ex}^A + \Xi_{ex}^A & 0 & 0 & \Phi_M(\mathcal{P}(k+1)) & * & * \\ \mathcal{C}_0(k) & \mathcal{D}_0(k) & 0 & 0 & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * \\ \Pi_{ex}^B + \Xi_{ex}^B & \Phi_{M+1}(\mathcal{P}(k+1)) & * \\ \mathcal{D}_{ex}^\top(k) & 0 & I_{p_z(M+1)} \end{bmatrix} \succ 0,$$

матричные неравенства для  $\mathcal{P}(N) \succ 0, W(N), H(N), F(N), G(N)$  и  $\Psi(N)$  вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}_0(N) & I_{p_z} & * \\ \mathcal{C}_{ex}(N) & 0 & 0 & I_{p_z M} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

и неравенство специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (3.69)$$

Стоит учесть, что при решении системы линейных матричных неравенств (3.68)—(3.69) должно выполняться следующее условие, которое является следствием введенной замены переменных (3.68):

$$\mathcal{Y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{bmatrix}.$$

Это ограничение необходимо учитывать при численном решении системы неравенств. При численном решении системы ЛМН вида (3.68)-(3.69) может быть минимизирована верхняя граница  $\gamma$  анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации. Исходная задача субоптимальной анизотропийной фильтрации может быть сведена к задаче выпуклой оптимизации.

### 3.4 Выводы к главе 3

В этой главе представлен метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. Помимо общей постановки задачи фильтрации, рассмотрены частные случаи задачи для различных конфигураций искомого фильтра. Решение задачи фильтрации сводится к решению системы линейных матричных неравенств и неравенства специального вида в терминах матриц системы и фильтра. В следующей главе рассмотрен один из частных случаев системы с мультипликативными шумами, который часто используется при описании динамики реальных технических объектов — система со случайными сбоями в датчиках.

## 4 Синтез анизотропийного фильтра для системы со случайными сбоями в датчиках

В этой главе представлен метод решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для одного из частных случаев систем с мультипликативными шумами – система со случайными сбоями в датчиках. Помимо определения системы со случайными сбоями и метода решения задачи анизотропийной фильтрации для таких систем, в главе приведен численный пример реализации данного метода для решения задачи фильтрации для линеаризованной модели продольного движения самолета в режиме посадки, которая имеет вид системы со случайными сбоями в датчиках.

### 4.1 Определение системы со случайными сбоями в датчиках

Для измерений показателей состояния технических объектов часто используются целые системы сенсоров и датчиков. Во время работы одного из датчиков может случиться кратковременный или серьезный сбой, вследствие которого перестают поступать данные об одном из измеряемых параметров объекта. В задачах управления, в которых значение управляющих сигналов зависит от поступающих измерений параметров текущего состояния объекта, подобные сбои могут привести к критическим последствиям. Следовательно, необходимо решить задачу фильтрации для подобных систем для получения оптимальной оценки состояния или выхода системы. В таких задачах динамика поведения исследуемого объекта может описываться с помощью одного из вариантов системы с мультипликативными шумами — системы со случайными сбоями в датчиках. Подобные системы представляют собой линейную модель динамики объектов с системами датчиков, в которых отказ в работе датчика описывается с помощью случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с известной

вероятностью.

Система со случайными сбоями в датчиках на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  имеет представление в пространстве состояний

$$T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_z(k)w(k), \end{cases} \quad (4.1)$$

с измеряемым выходом следующего вида

$$y(k) = \lambda(k)C_y(k)x(k) + D_y(k)w(k), \quad (4.2)$$

где  $x(k)$  — вектор состояния системы,  $w(k)$  — вектор входных возмущений,  $z(k)$  — вектор оцениваемого выхода,  $y(k)$  — вектор измеряемого выхода системы,  $A(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $B(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times m_w}$ ,  $C_z(k) \in \mathbb{R}^{p_z \times n_x}$ ,  $D_z(k) \in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}$ ,  $C_y(k) \in \mathbb{R}^{p_y \times n_x}$ ,  $D_y(k) \in \mathbb{R}^{p_y \times m_w}$  — детерминированные матрицы системы. Начальным состоянием системы является нулевое положение  $x(0) = 0$ . Скаляры  $\lambda(k)$  являются случайными величинами, распределенными по закону Бернулли, и принимающие значение 1 с вероятностью  $p$  и значение 0 с вероятностью  $1 - p$ . Значение  $\lambda(k) = 1$  является признаком стабильной работы датчиков в момент времени  $k$ , а значение  $\lambda(k) = 0$  — отказ в работе датчиков. Из выражения (4.2) видно, что при отказе датчиков измеряются только входные шумы системы. Стоит отметить, что  $\lambda(k)$  и  $W_{0:N}$  являются независимыми в совокупности, а сами  $\lambda(k)$  при  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  также являются независимыми в совокупности по  $k$ . Описанная выше система со случайными сбоями является одним из наиболее простых вариантов описания случайных отказов в объекте. Путем суперпозиции таких систем можно получить более сложные модели отказов для соответствующих объектов рассмотрения в задачах управления и фильтрации. Для таких сложных систем с отказами будет допустимо использование результатов решения задач анализа и синтеза фильтра, представленных далее, поэтому остановимся подробнее на системе (4.1).

## 4.2 Решение задачи фильтрации

Задача фильтрации заключается в получении субоптимальной с точки зрения ошибки фильтрации оценки выхода  $z(k)$  на основе вектора измерений  $y(k)$ . Для построения оценки зададим модель фильтра вида (3.5) с представлением в пространстве состояний

$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k) + H(k)(y(k) - pC_y(k)\hat{x}(k)), \\ \hat{z}(k) = C_z(k)\hat{x}(k), \end{cases} \quad (4.3)$$

и начальным состоянием  $\hat{x}(0) = 0$ . Отметим, что в выбранной модели фильтра значение матрицы  $\Gamma(k)$  равно  $\mathbf{E}[\lambda(k)C_y(k)] = pC_y(k)$ . Для системы (4.1) и фильтра (4.3) рассмотрим задачу субоптимальной анизотропной фильтрации. Необходимо найти матрицы  $W(k)$ ,  $H(k)$  фильтра, при которых анизотропная норма системы в ошибках фильтрации удовлетворяет неравенству  $\|T_{\hat{z}w}\|_a \leq \gamma$  для заданных  $a \geq 0$  и  $\gamma \geq 0$ . Подход к решению задачи субоптимальной анизотропной фильтрации для подобных систем (система с отказами относится к классу систем с мультипликативными шумами) был изложен в Разделе 4.2. Применим этот подход к решению поставленной задачи. Система в ошибках фильтрации на конечном интервале времени  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  имеет вид

$$T_{\bar{z}w} \sim \begin{cases} \bar{x}(k+1) = \mathcal{A}(k)\bar{x}(k) + \mathcal{B}(k)w(k), \\ \bar{z}(k) = \mathcal{C}(k)\bar{x}(k) + \mathcal{D}(k)w(k) \end{cases} \quad (4.4)$$

с начальным состоянием  $\bar{x}(0) = 0$  и матрицами

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(k) &= \mathcal{A}_0(k) + (\lambda(k) - p)\mathcal{A}_1(k), \\ \mathcal{A}_0(k) &= \begin{bmatrix} A(k) & 0_{n_x \times n_x} \\ A(k) - W(k) & W(k) - pH(k)C_y(k) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_1(k) &= \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times n_x} \\ -H(k)C_y(k) & 0_{n_x \times n_x} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}(k) = \begin{bmatrix} B(k) \\ B(k) - H(k)D_y(k) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}(k) = \begin{bmatrix} 0_{p_z \times n_x} & C_z(k) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}(k) = D_z(k).$$

Далее запишем условия ограниченности анизотропийной нормы для системы в ошибках фильтрации (4.4) в виде системы матричных неравенств (3.33)-(3.35):

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k) & \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}_0(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * \\ \sqrt{p(1-p)}\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{C}(k) & \mathcal{D}(k) & 0 & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * \\ \mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}^\top(k) & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{D}(k) & 0 & I \end{bmatrix} \succ 0,$$

при  $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * \\ \mathcal{C}_0(N) & \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

и неравенства специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2).$$

Видно, что в матричных неравенствах присутствуют нелинейные компоненты в виде произведений  $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k)$ ,  $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1(k)$  и  $\mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}^\top(k)$ . С целью

устранения нелинейных членов в матричных неравенствах введем замены переменных по аналогии с рассмотренным ранее общим случаем анизотропийной фильтрации:

$$\mathcal{X}(k) = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times p_y} \\ W(k) & H(k) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{Y}(k) = \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k). \quad (4.8)$$

С учетом (4.7), (4.8), получим следующие разложения матриц  $\mathcal{A}(k)$  и  $\mathcal{B}(k)$ :

$$\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_0(k) = \mathcal{P}(k+1)\tilde{\mathcal{A}}_0^0(k) + \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k)\tilde{\mathcal{A}}_0^1(k), \quad (4.9)$$

$$\mathcal{A}_0^0(k) = \begin{bmatrix} A(k) & 0_{n_x \times n_x} \\ A(k) & 0_{n_x \times n_x} \end{bmatrix}, \mathcal{A}_0^1(k) = \begin{bmatrix} -I_{n_x} & I_{n_x} \\ 0 & -pC_y(k) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}(k+1)\mathcal{A}_1(k) = \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k)\tilde{\mathcal{A}}_1^1(k),$$

$$\mathcal{A}_1^1(k) = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_x} & 0_{n_x \times n_x} \\ -C_y(k) & 0_{p_y \times n_x} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}(k+1)\mathcal{B}(k) = \mathcal{P}(k+1)\tilde{\mathcal{B}}^0(k) + \mathcal{P}(k+1)\mathcal{X}(k)\tilde{\mathcal{B}}^1(k),$$

$$\mathcal{B}^0(k) = \begin{bmatrix} B(k) \\ B(k) \end{bmatrix}, \mathcal{B}^1(k) = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times p_y} \\ -D_y(k) \end{bmatrix}$$

(4.10)

Применим замену переменных (4.7)-(4.8) к неравенствам (4.5)-(4.6) с учетом (4.9) и получим систему линейных матричных неравенств [78] вида

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(k) & * & * & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{A}_0^0(k) + \mathcal{Y}\mathcal{A}_0^1(k) & \mathcal{P}\mathcal{B}_0^0(k) + \mathcal{Y}\mathcal{B}_0^1(k) & \mathcal{P}(k+1) & * & * \\ \sqrt{p(1-p)}\mathcal{Y}\mathcal{A}_1^1(k) & 0 & 0 & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{C}(k) & \mathcal{D}(k) & 0 & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(k) & * & * \\ \mathcal{P}\mathcal{B}^0(k) + \mathcal{Y}(k)\mathcal{B}^1(k) & \mathcal{P}(k+1) & * \\ \mathcal{D}(k) & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

при всех  $k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ , матричные неравенства для  $\mathcal{P}(N) \succ 0$ ,  $W(N)$ ,  $H(N)$ ,  $F(N)$ ,  $G(N)$  и  $\Psi(N)$  вида

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{P}(N) & * & * \\ 0 & \eta I_{m_w} & * \\ \mathcal{C}(N) & \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} &\succ 0, \\ \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi(N) & * \\ \mathcal{D}(N) & I_{p_z} \end{bmatrix} &\succ 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

и неравенство специального вида

$$\sum_{k=0}^N \ln \det \Psi(k) \geq 2a + l_w \ln(1 - q\gamma^2). \quad (4.13)$$

В итоге, решив неравенства (4.11)–(4.13) и воспользовавшись обратной заменой переменных  $\mathcal{X}(k) = \mathcal{P}^{-1}(k + 1)\mathcal{Y}(k)$ , получим искомые матрицы  $H(k)$  и  $G(k)$  фильтра, являющиеся решением поставленной задачи анизотропийной фильтрации. Стоит отметить, что в рассмотренном частном случае случайная величина  $\xi(k) = \lambda(k) - p$  обладает нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\mathbf{E}[\xi^2(k)] = \sqrt{p(1 - p)} < 1$ . Этим обусловлено наличие компоненты  $\sqrt{p(1 - p)}$  в представленных выше ЛМН. Если вероятность  $p$  будет равна 0 или 1, то ЛМН примет тот же вид, что и в общем случае систем с мультипликативными шумами.

В следующем разделе представлен численный пример решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для системы со случайными сбоями в датчиках на основе представленных выше результатов.

### 4.3 Продольное движение самолета по глиссаде при наличии ветра и шумов измерений

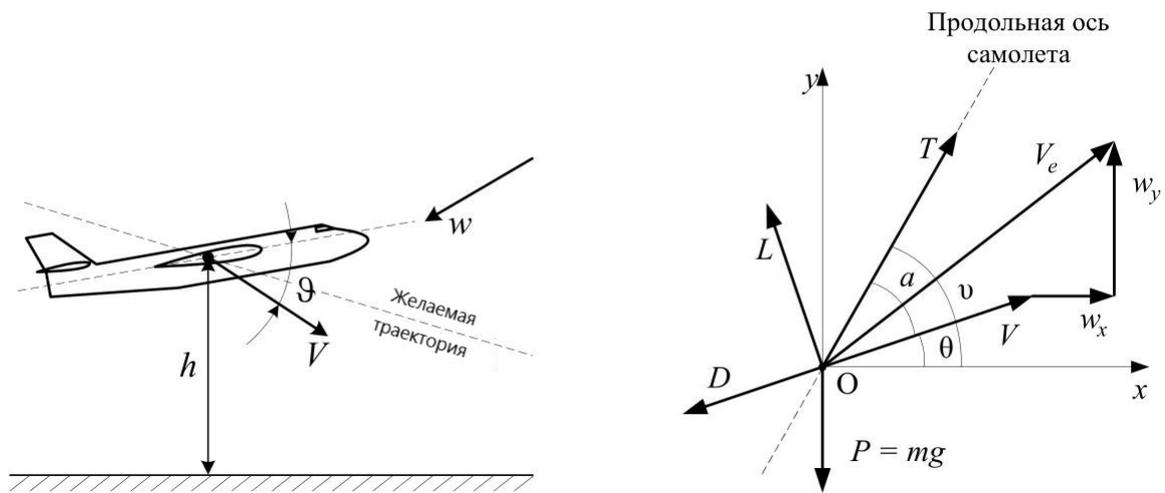
В данном разделе продемонстрируем применение предложенного подхода к решению задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации на нескольких численных примерах. В каждом из примеров рассматривается линейная модель, являющаяся линеаризацией уравнений динамики некоторой технической системы в окрестности ее положения равновесия или заданной траектории. Эти модели слегка модифицированы в целях преобразования их к виду системы с мультипликативными шумами и использования приведенных ранее методов решения задачи фильтрации. Также для каждого примера проведен сравнительный анализ качества работы синтезированного субоптимального анизотропийного фильтра с известными  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрами. Все сравнения и моделирование различных вариантов фильтра выполнены исключительно с целью иллюстрации.

Рассмотрим на конечном интервале времени задачу субоптимальной анизотропийной фильтрации для системы, описывающей стабилизированное с помощью  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятора продольное движение самолета при заходе на посадку по глиссаде с заданным углом наклона в условиях сдвига ветра при наличии шумов измерений и органов управления. С моделью движения самолета подробно можно ознакомиться в [80]. Приведем описание этой модели и ее параметров. Продольное движение самолета с учетом воздействия ветра в скоростной системе координат описывается с помощью системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} &= T \cos \alpha - D - mg \sin \theta - m(\dot{w}_x \cos \theta + \dot{w}_y \sin \theta), \\
 mV\dot{\theta} &= T \sin \alpha + L - mg \cos \theta + m(\dot{w}_x \sin \theta - \dot{w}_y \cos \theta), \\
 \dot{\vartheta} &= \omega_z, \\
 J_z \dot{\omega}_z &= M_z,
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

где  $m$  — масса самолета,  $V$  — воздушная скорость,  $T$  — сила тяги,  $\alpha$  — угол ата-

ки,  $D$  — сила лобового сопротивления,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\theta$  — угол наклона траектории полета,  $\dot{w}_x$  и  $\dot{w}_y$  — полные градиенты горизонтальной и вертикальной составляющих скорости ветра в инерциальной системе отсчета соответственно,  $L$  — подъемная сила,  $J_z$  — момент инерции относительно поперечной оси  $z$  самолета,  $M_z$  — момент тангажа и  $\vartheta = \alpha + \theta$ . Системы координат самолета приведены на рис.4.



**Рис. 5:** Система координат и переменные движения самолета

Уравнения (4.14) справедливы при предположении, что летящий самолет является жестким телом, направление силы тяги совпадает с продольной осью самолета, масса самолета является постоянной (пренебрегаем потерями массы при движении вдоль траектории в силу малости интервала времени), Земля плоская. При упрощении системы предполагаем, что ветровой поток является стационарным (с постоянной скоростью). Также предполагается, что значения силы лобового сопротивления  $D$ , подъемной силы  $L$ , момента инерции самолета  $J_z$  и момента тангажа  $M_z$  являются табличными значениями, выбранными при линеаризации нелинейной модели. Управляющими воздействиями самолета являются его сила тяги  $T$  и угол атаки  $\alpha$ . Их значения зависят от отклонения сектора газа  $\delta_t$  и обобщенного руля высоты самолета  $\delta_e$ , соответственно. Таким образом, переменными управления в линеаризованной модели самолета явля-

ются  $\delta_t$  и  $\delta_e$ .

Высота центра масс самолета описывается дифференциальным уравнением первого порядка вида

$$\dot{h} = V \sin \theta + w_y. \quad (4.15)$$

Динамика силы тяги двигателя самолета описывается дифференциальным уравнением

$$\Delta \dot{T} = \frac{1}{T_e} (-\Delta T + K_e \Delta \delta_t), \quad (4.16)$$

где  $T_e$  — постоянная времени двигателя,  $K_e$  — заданный числовой коэффициент и  $\Delta \delta_t$  — отклонение сектора газа от заданного значения. Отклонение обобщенного руля высоты  $\Delta \delta_e$  с учетом контура короткопериодического движения определяется выражением

$$\Delta \delta_e = K_{w_z} \Delta w_z + K_{\vartheta} \Delta \vartheta + K_{c_y} \Delta \vartheta_{c_y},$$

где  $K_{w_z}$ ,  $K_{\vartheta}$ ,  $K_{c_y}$  — заданные числовые коэффициенты,  $\Delta \vartheta_{c_y}$  — управляющий сигнал, формируемый регулятором.

Для стабилизации движения самолета по глиссаде будет использоваться решение задачи синтеза статического  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятора по выходу [81], который был получен для модели самолета Ту-154 при заходе на посадку с углом наклона  $\theta_0 = -2.7$  град. Нелинейное уравнение (4.14) линеаризовано вдоль траектории с параметрами

$$V_0 = 71.375 \text{ м/сек}, \quad \theta_0 = -2.7 \text{ град}, \quad \omega_{z0} = 0 \text{ сек}^{-1}, \quad \vartheta_0 = 0 \text{ град}.$$

и начальным условием  $h_0 = 600$  м,  $T_0 = 52540$  Н. Также к нему добавляются дискретизованные уравнения (4.15) и (4.16). В окрестности заданной глиссады движение самолета описывается дискретной линеаризованной моделью в отклонениях с шагом дискретизации 0.01 с вида

$$T_{zu} \sim \begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B_w(k)w(k) + B_u(k)u(k), \\ z(k) = C_z(k)x(k) + D_{zw}(k)w(k) + D_{zu}(k)u(k), \end{cases} \quad (4.17)$$

с измеряемым выходом

$$y(k) = C_y(k)x(k) + D_{yw}(k)w(k),$$

где

$$\begin{aligned} x(k) &= [\Delta V(k) \ \Delta\theta(k) \ \Delta\omega_z(k) \ \Delta\vartheta(k) \ \Delta h(k) \ \Delta T(k)]^\top, \\ w(k) &= [w_y(k) \ \dot{w}_x(k) \ \dot{w}_y(k) \ n_{y_1}(k) \ n_{y_2}(k)]^\top, \\ u(k) &= [\Delta\vartheta_{cy}(k) \ \Delta\delta_t(k)]^\top, \\ z(k) &= [\Delta V(k) \ \Delta h(k) \ \Delta\vartheta_{cy}(k) \ \Delta\delta_t(k)]^\top, \\ y(k) &= [\Delta V(k) + n_{y_1}(k) \ \Delta h(k) + n_{y_2}(k)]^\top, \end{aligned}$$

где  $V(k)$  — воздушная скорость;  $T(k)$  — сила тяги двигателей;  $\theta(k)$  — угол наклона траектории;  $\omega_z(k)$  — угловая скорость тангажа;  $\vartheta(k)$  — угол тангажа;  $h(k)$  — высота центра масс самолета;  $\theta_{cy}(k)$  — управление обобщенными рулями высоты;  $\delta_t(k)$  — управление сектором газа;  $w_x(k)$ ,  $w_y(k)$  — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ветра;  $n_{y_1}(k)$ ,  $n_{y_2}(k)$  — шумы измерений.

Матрицы модели (4.17) имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0.9994 & -0.0008 & 0 & -0.0009 & 0 & 0.0009 \\ 0.0022 & 0.9938 & 0.0011 & 0.0072 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0.0052 & 0.9842 & -0.0154 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0099 & 0.9999 & 0 & 0 \\ -0.0005 & 0.0124 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9960 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0012 & 0 \\ 0.0117 & 0 \\ 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.004 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & -0.0100 & 0.0005 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0004 & -0.0080 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для стабилизации нулевого положения системы (4.17) используется статический  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятор  $u(k) = K_\infty y(k)$ . Матрица  $K_\infty$  регулятора определяется в терминах решения системы неравенств

$$\eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{\frac{1}{m_w}} < \gamma^2, \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B_w + B_u K_\infty D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K_\infty D_{yw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A + B_u K_\infty C_y & B_w + B_u K_\infty D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K_\infty C_y & D_w + D_{zu} K_\infty D_{yw} & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$\eta > \gamma^2, \Psi \succ 0, \Pi \succ 0, \Phi \succ 0 \quad (4.19)$$

с ограничением  $\Phi \Pi = I_{n_x}$ , заданным значением  $\gamma = 20$  и достаточно большим значением параметра  $a$ . Решив неравенства (4.18)–(4.19) с учетом ограничения на матрицы  $\Phi$  и  $\Pi$ , была получена следующая матрица регулятора:

$$K_\infty = \begin{pmatrix} -0.2051 & -0.1793 \\ -0.2716 & -0.0181 \end{pmatrix}.$$

Подставив выражение регулятора в систему (4.17), получаем замкнутую систему вида

$$T_{zw} \sim \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}_w(k)w(k), \\ z(k) = \tilde{C}_z(k)x(k) + \tilde{D}_{zw}(k)w(k), \end{cases} \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{A}(k) &= A(k) + B_u(k)K_\infty C_y(k), \quad \tilde{B}_w(k) = B_w(k) + B_u(k)K_\infty D_{yw}(k), \\ \tilde{C}_z(k) &= C_z(k) + D_{yu}(k)K_\infty C_y(k), \quad \tilde{D}_{zw}(k) = D_{zw}(k) + D_{yu}(k)K_\infty D_{yw}(k),\end{aligned}$$

Предположим, что в датчиках, установленных на самолете, данные которых содержатся в векторе измерений  $y(k)$ , с известной вероятностью  $1 - p$  происходят сбои. Явление сбоя в датчике можно описать с помощью случайной величины, распределенной по закону Бернулли и принимающей значения 1 с вероятностью  $p$  и 0 с вероятностью  $1 - p$ . Тогда вектор измерений  $y(k)$  со сбоями в датчиках имеет вид

$$\tilde{y}(k) = \lambda(k)C_y(k)x(k) + D_{yw}(k)w(k),$$

Полученная линейная система (4.20) с измеряемым выходом  $\tilde{y}(k)$  соответствует рассмотренному ранее частному случаю систем с мультипликативными шумами. Применим результаты решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для данной системы и найдем фильтр  $T_{\hat{z}w}$  вида

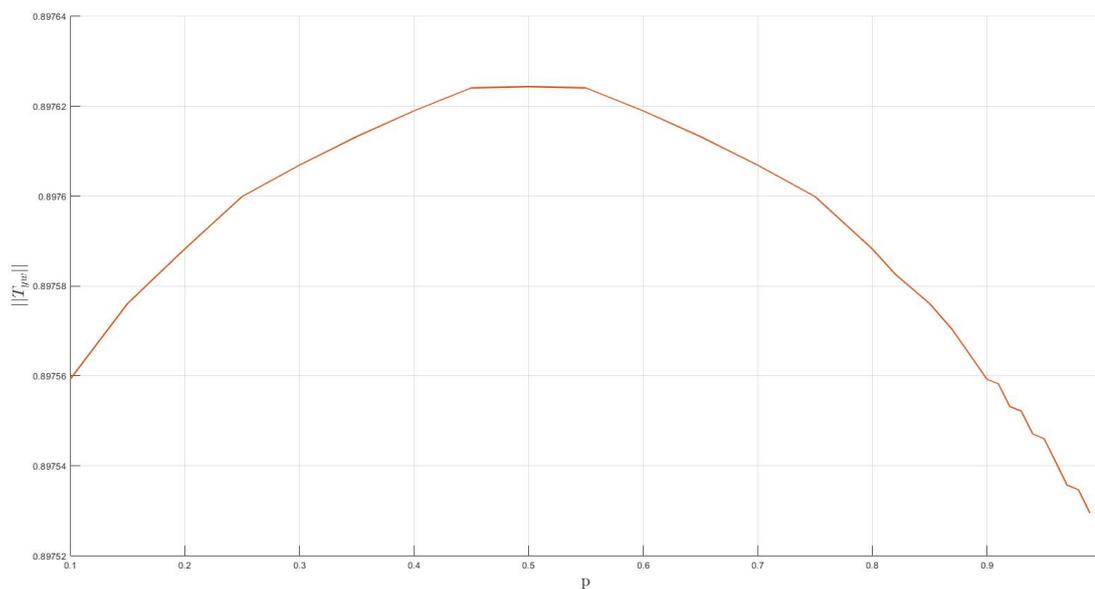
$$T_{\hat{z}w} \sim \begin{cases} \hat{x}(k+1) = W(k)\hat{x}(k) + H(k)(\tilde{y}(k) - pC_y(k)\hat{x}(k)), \\ \hat{z}(k) = C_z(k)\hat{x}(k), \end{cases}$$

обеспечивающий выполнение неравенства  $\|T_{\hat{z}w}\|_a \leq \gamma$  для системы  $T_{\hat{z}w}$  в ошибках фильтрации. Матрицы  $W(k)$  и  $H(k)$  находятся в результате решения ЛМН (4.11)-(4.12) и неравенства специального вида (4.13) и применения обратной замены переменных. Также для сравнения смоделируем поведение системы в ошибках фильтрации с субоптимальными  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрами. Выбраны следующие параметры моделирования системы:

$$T_{max} = 60 \text{ с}, \quad \Delta t = 0.01 \text{ с}, \quad a = 100.$$

Значение вероятности сбоя  $p$  во многих случаях может быть неизвестно точно, поэтому можно подбирать его значение и оценивать эффективность полученного анизотропийного фильтра. Рассмотрим зависимость анизотропийной нормы

$\|T_{yw}\|$  от значения вероятности сбоя  $p$ . Данную зависимость можно описать с помощью представленного ниже графика:



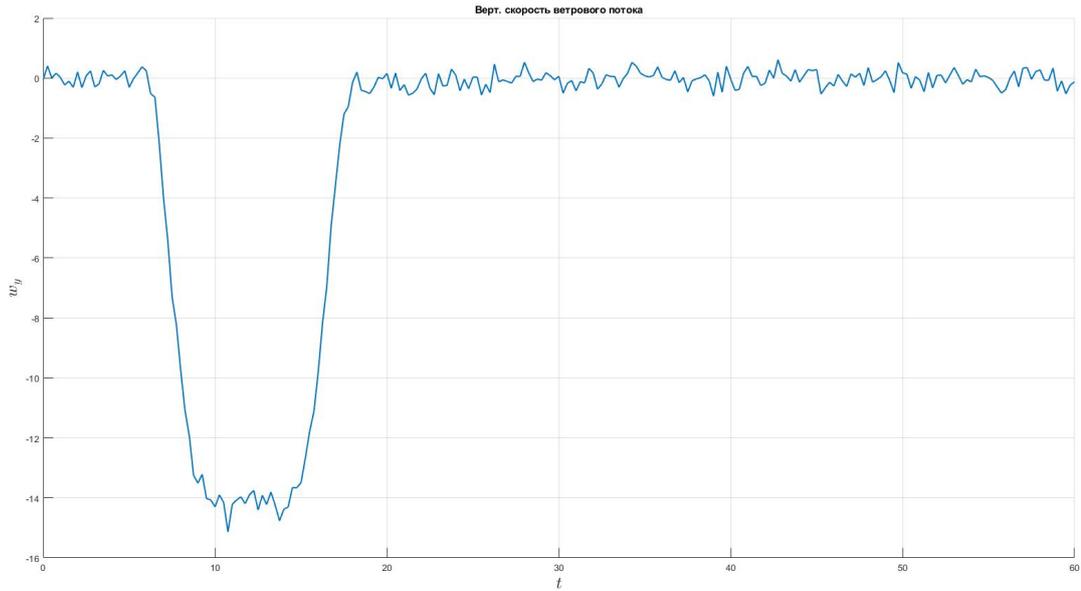
**Рис. 6:** Зависимость анизотропийной нормы  $\|T_{yw}\|_a$  от значения вероятности сбоя  $p$  при  $a = 100$ ,  $N = 100$

Видно, что динамика изменения анизотропийной нормы в зависимости от значения  $p$  совпадает с динамикой изменения дисперсии случайной величины  $\lambda(k)$ , равной  $\sqrt{p(1-p)}$ . Эту компоненту можно найти в линейных матричных неравенствах (4.11). Если вернуться к формуле вычисления анизотропийной нормы в терминах решения разностных уравнений Риккати, то видим, что анизотропийная норма системы вычисляется в терминах решения разностно-

го уравнения Риккати вида

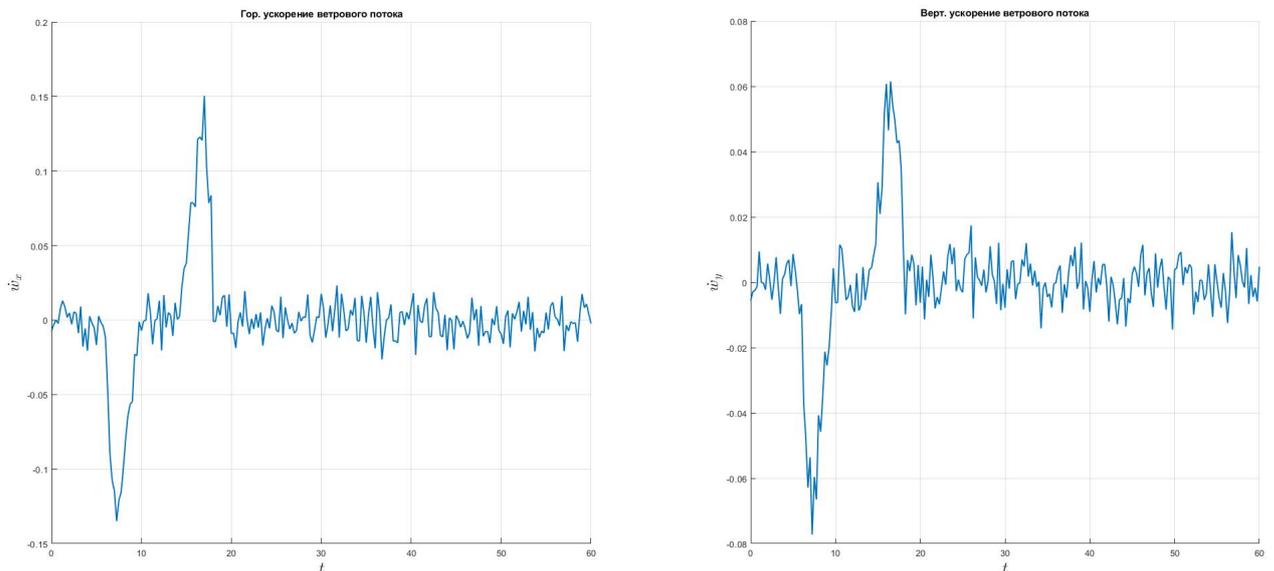
$$\begin{aligned}
 R_1(k) &= \sum_{i=0}^M \left( A_i^\top(k) R_1(k+1) A_i(k) + q \sqrt{p(1-p)} C_i^\top(k) C_i(k) \right), \\
 R_2(k) &= A_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k) + L^\top(k) S^{-1}(k) L(k), \\
 S(k) &= \left( I_{m_w} - \sum_{i=0}^M (q D_i^\top(k) D_i(k) + B_i^\top(k) R_1(k+1) B_i(k)) \right. \\
 &\quad \left. - B_0^\top(k) R_2(k+1) B_0(k) \right)^{-1}, \\
 L(k) &= S(k) (q D_0^\top(k) C_0(k) + B_0^\top(k) R_1(k+1) A_0(k) \\
 &\quad + B_0^\top(k) R_2(k+1) A_0(k)).
 \end{aligned}$$

В соответствии со свойством монотонности решения уравнения Риккати, при увеличении правой части уравнения увеличивается и решение  $R_1(k)$ ,  $R_2(k)$ . Получаем, что при  $p = \frac{1}{2}$  анизотропийная норма принимает максимальное значение и при решении задачи субоптимальной фильтрации имеет смысл предполагать значение вероятности сбоя  $p = \frac{1}{2}$ , если она изначально не известна. В таком случае фильтр будет обеспечивать ограниченность нормы, наилучшей с точки зрения вероятности сбоя, и для других случаев он также будет эффективен. Но тем не менее, далее будем предполагать, что вероятность сбоя известна относительно точно и реальное количество сбоев за рассматриваемый интервал времени ей соответствует. При движении вдоль желаемой траектории действует внешнее возмущение в виде ветра, который характеризуется компонентами вектора скорости  $w_x$ ,  $w_y$  и их производными по времени  $\dot{w}_x(k)$ ,  $\dot{w}_y(k)$ . При моделировании динамики движения самолета вертикальная скорость ветра  $w_y$  меняется по заданному нелинейному закону, представленному графически на рис.6.



**Рис. 7:** Скорость ветра  $w_y$ , м/с

Графики изменения производных скорости ветра  $\dot{w}_x(k)$ ,  $\dot{w}_y(k)$  по времени представлены на рис.7.



**Рис. 8:** Ускорение ветра  $\dot{w}_x$ ,  $\dot{w}_y$ , м/с<sup>2</sup>

Видно, что большую часть интервала времени полета скорость ветра незначительно колеблется около нулевой отметки, но в определенный момент происходит резкий порыв ветра, вследствие которого скорость и высота полета

самолета изменяются. Отказы в датчиках, которые происходят во время порыва ветра, могут усилить отклонение от заданной траектории и привести к нежелательным последствиям, поскольку стабилизирующий регулятор в линеаризованной системе является обратной связью по измеряемому выходу  $\tilde{y}(k)$ .

Для каждого из значений вероятности  $p$  стабильной работы датчика реализованы решение системы ЛМН и неравенства специального вида с помощью пакета Yalmip Matlab toolbox [82] и моделирование системы в ошибках фильтрации для трех типов фильтра с помощью средств среды MATLAB. Ниже представлены графики значений ошибок оценивания выхода  $\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$  для трех значений параметра  $p$  и анализ полученных результатов для каждого случая. Точками на графиках обозначены моменты отказа в измерениях, т.е.  $\lambda(k) = 0$ .

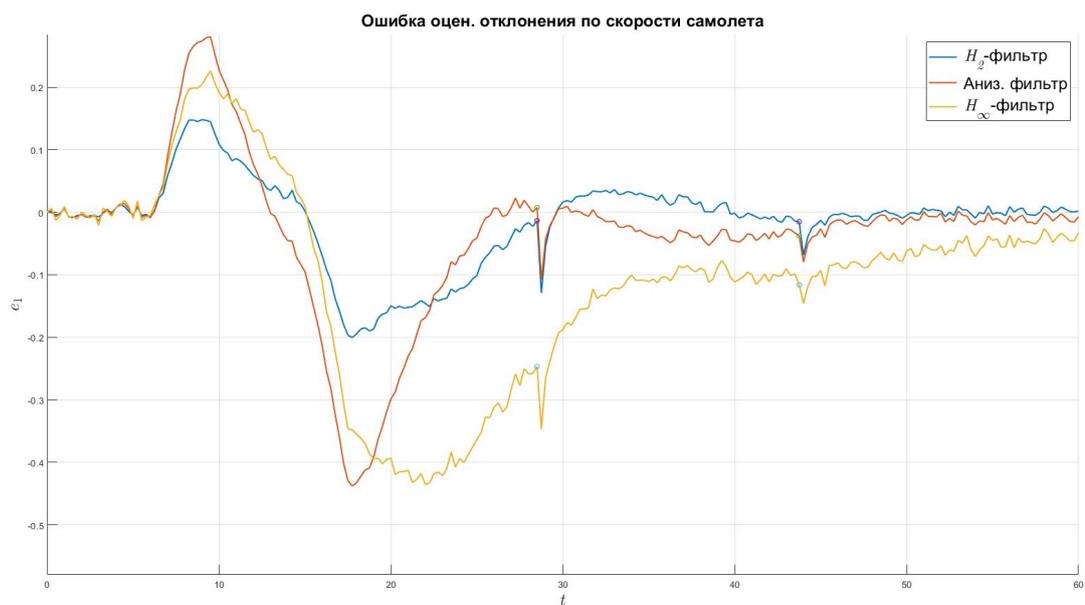
**Случай 1.** Вероятность отказа в измерениях  $1 - p = 0.01$ .

В результате решения системы ЛМН с неравенством специального вида (4.11) – (4.13) при данном значении  $p$  и использования обратной замены переменных получены наборы значений матриц  $W(k)$  и  $H(k)$  искомого фильтра. Значения этих наборов матриц имеют приближенный вид

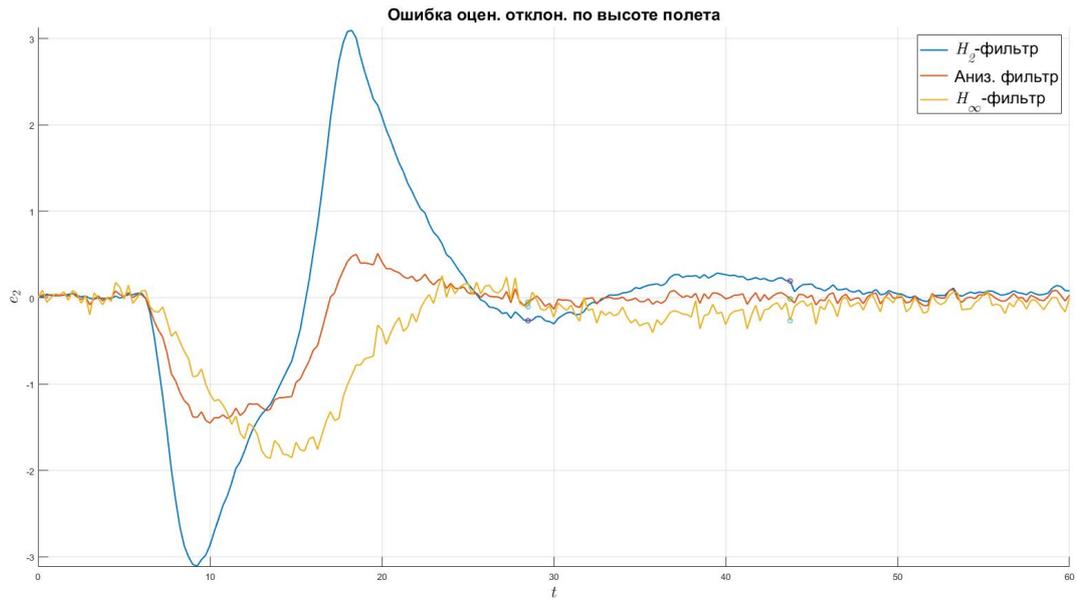
$$W_0 = \begin{bmatrix} 0.99893 & -0.00002 & 0.00040 & -0.00094 & -0.00012 & 0.00164 \\ 0.00590 & 0.97946 & 0.00558 & 0.00814 & 0.00094 & 0.00119 \\ -0.00562 & 0.01585 & 0.97687 & -0.01066 & -0.00080 & -0.00378 \\ -0.00205 & 0.00990 & 0.00897 & 0.99489 & -0.00241 & 0.00091 \\ -0.00220 & 0.01833 & -0.00299 & -0.00057 & 0.99876 & -0.00080 \\ -0.00262 & 0.00109 & -0.00454 & -0.00155 & -0.00126 & 0.98840 \end{bmatrix},$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0.02858 & 0.00738 \\ 0.00733 & 0.01436 \\ -0.00158 & -0.00216 \\ 0.00123 & 0.00397 \\ 0.00747 & 0.08472 \\ -0.00113 & -0.00009 \end{bmatrix}.$$

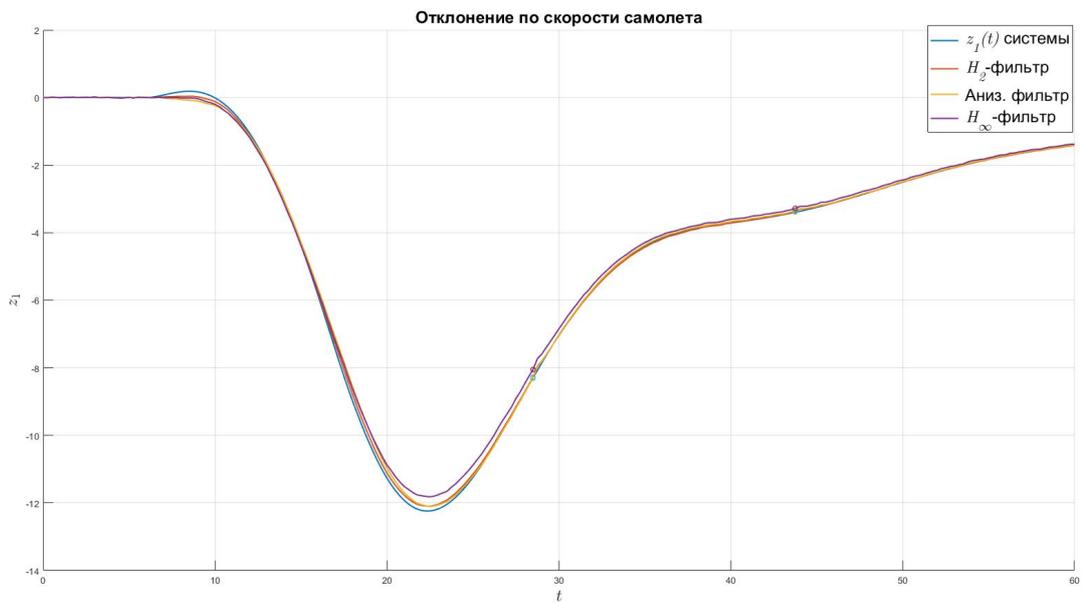
Проведено моделирование системы в ошибках фильтрации, сформированной на основе исходной системы и фильтра с полученными матрицами вида  $W_0$  и  $H_0$ , на временном интервале  $t = 0.25k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 200\}$ . Результаты моделирования представлены ниже в виде графиков изменения компонент ошибок оценивания выхода  $\tilde{z}(t)$  и самих компонент выхода  $z(t)$ :



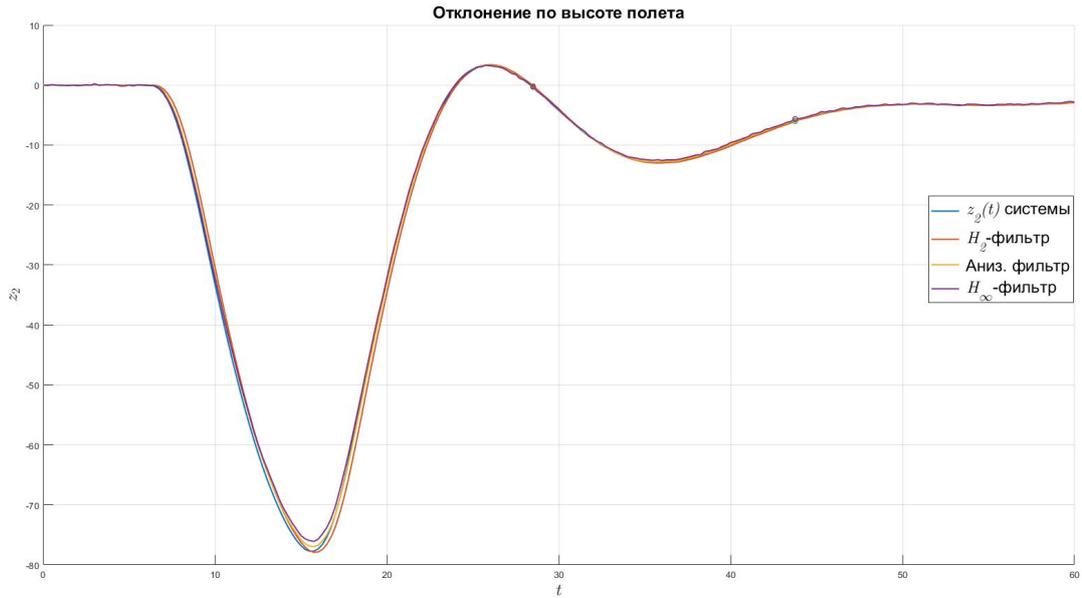
**Рис. 9:** Ошибка оценивания отклонения по скорости  $\Delta V(t)$



**Рис. 10:** Ошибка оценивания отклонения по высоте  $\Delta h(t)$



**Рис. 11:** Отклонение самолета по скорости  $\Delta V(t)$



**Рис. 12:** Отклонение самолета по высоте  $\Delta h(t)$

Эффективность работы  $\mathcal{H}_2$ -,  $\mathcal{H}_\infty$ - и анизотропийного фильтров можно оценить на основании результатов моделирования, представленных в табл. 1

**Таблица 1:** Результаты решения задачи при  $p = 0.99$

	$\ T_{zw}\ _2$	$\ T_{zw}\ _a$	$\ T_{zw}\ _\infty$
$\mathcal{H}_2$ -фильтр	0.1907	0.4853	1.0507
Аниз. фильтр	0.2054	0.4805	1.0112
$\mathcal{H}_\infty$ -фильтр	0.2584	0.5033	0.9855

Видно, что минимальное значение анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации обеспечивается именно анизотропийным фильтром. Следовательно, при поступлении на вход системы последовательности возмущений, описываемой случайным вектором  $W_{0:N}$  с анизотропией, близкой по значению к  $a$ , анизотропийный фильтр будет наиболее эффективен.

**Случай 2.** Вероятность отказа в измерениях  $1 - p = 0.03$ .

В результате решения системы ЛМН с неравенством специального вида (4.11) – (4.13) при данном значении  $p$  и использования обратной замены переменных получены наборы значений матриц  $W(k)$  и  $H(k)$  искомого фильтра. Значения этих наборов матриц имеют приближенный вид

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0.99887 & -0.00046 & 0.00039 & -0.00119 & -0.00016 & 0.00132 \\ 0.00409 & 0.98457 & 0.00391 & 0.00974 & 0.00074 & 0.00094 \\ -0.00353 & 0.01255 & 0.97072 & -0.01481 & -0.00498 & -0.00781 \\ -0.00096 & 0.00473 & 0.01485 & 0.99472 & 0.00045 & 0.00407 \\ -0.00122 & 0.01556 & -0.00307 & -0.00186 & 0.99844 & -0.00102 \\ -0.00177 & 0.00192 & -0.00028 & 0.00149 & 0.00015 & 0.99312 \end{bmatrix},$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0.02840 & 0.00740 \\ 0.00735 & 0.01441 \\ -0.00157 & -0.00230 \\ 0.00102 & 0.00343 \\ 0.00752 & 0.08479 \\ -0.00121 & -0.00014 \end{bmatrix}.$$

Проведено моделирование системы в ошибках фильтрации, сформированной на основе исходной системы и фильтра с полученными матрицами вида  $W_0$  и  $H_0$ , на временном интервале  $t = 0.25k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, 200\}$ . Результаты моделирования представлены ниже в виде графиков изменения компонент ошибок оценивания выхода  $\tilde{z}(t)$  и самих компонент выхода  $z(t)$ :

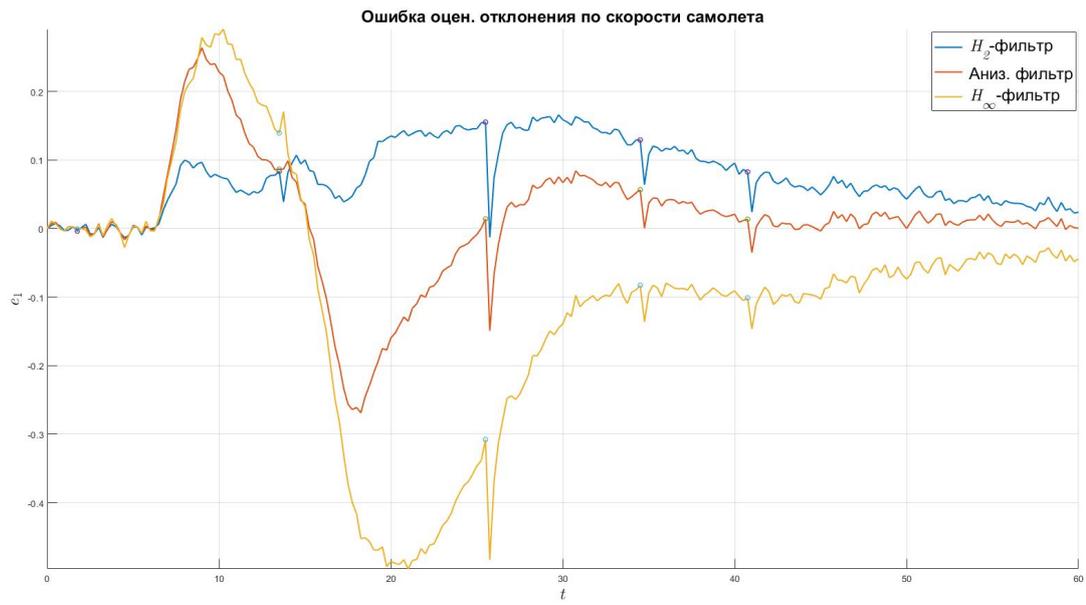


Рис. 13: Ошибка оценивания отклонения по скорости  $\Delta V(t)$

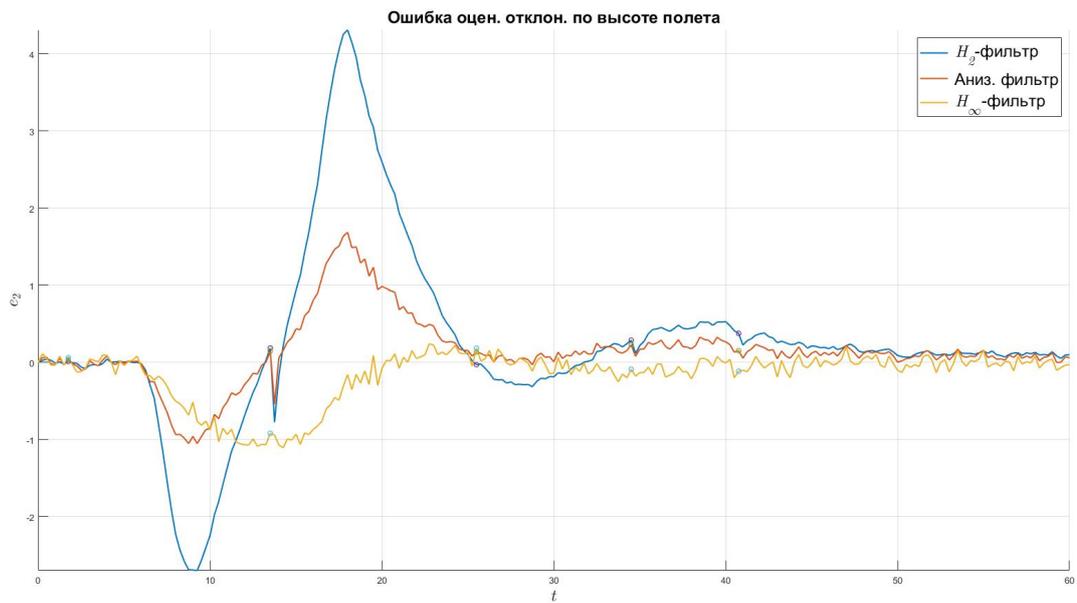


Рис. 14: Ошибка оценивания отклонения по высоте  $\Delta h(t)$

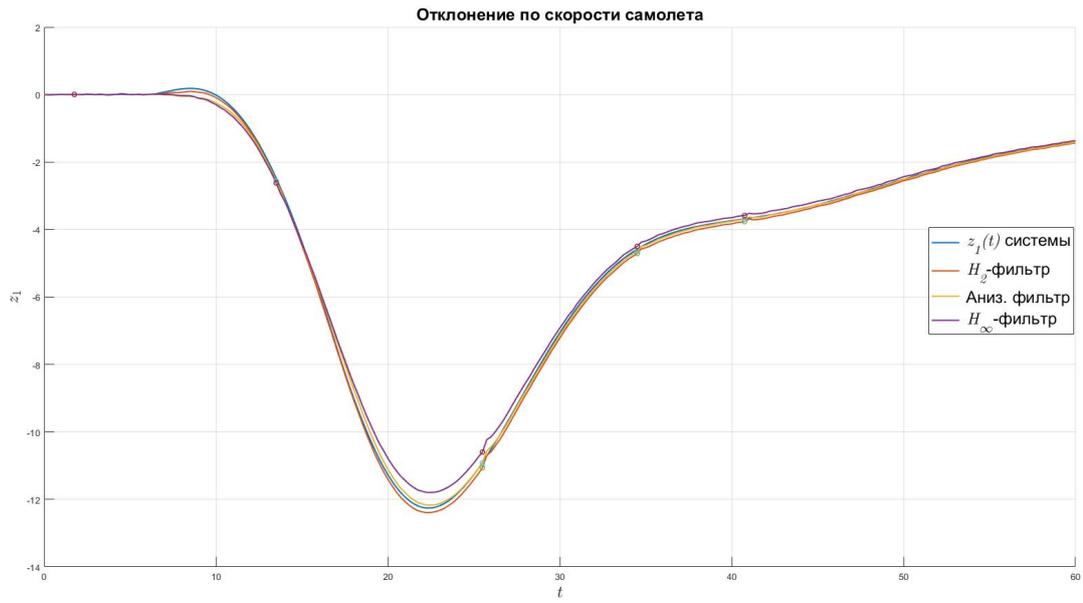


Рис. 15: Отклонение самолета по скорости  $\Delta V(t)$

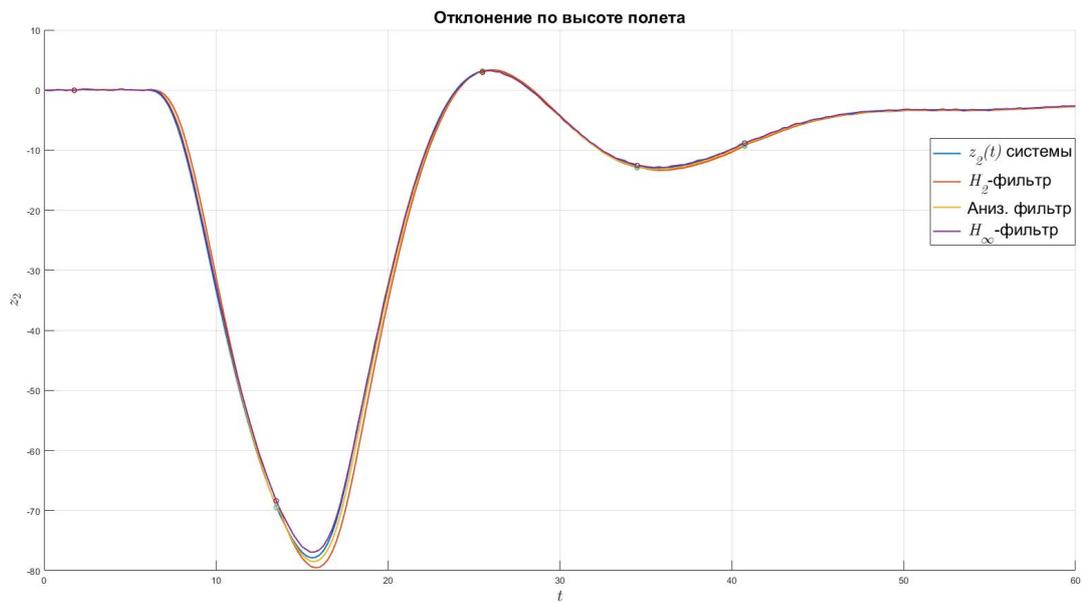


Рис. 16: Отклонение самолета по высоте  $\Delta h(t)$

Результаты моделирования системы в ошибках фильтрации при данном значении  $p$  представлены в табл. 2.

Таблица 2: Результаты решения задачи при  $p = 0.97$ 

	$\ T_{\tilde{z}w}\ _2$	$\ T_{\tilde{z}w}\ _a$	$\ T_{\tilde{z}w}\ _\infty$
$\mathcal{H}_2$ -фильтр	0.1919	0.4935	1.0689
Аниз. фильтр	0.2058	0.4870	1.0312
$\mathcal{H}_\infty$ -фильтр	0.2500	0.5023	0.9974

Видно, что минимальное значение анизотропийной нормы системы в ошибках фильтрации обеспечивается анизотропийным фильтром, как и в предыдущем случае. Хотя нормы системы увеличились вследствие увеличения вероятности сбоя  $1 - p$  и отклонение от нулевого положения стало больше, анизотропийный фильтр является наиболее эффективным при подаче на вход системы соответствующего окрашенного шума.

**Случай 3.** Вероятность отказа в измерениях  $1 - p = 0.05$ .

В результате решения системы ЛМН с неравенством специального вида (4.11) – (4.13) при данном значении  $p$  и использования обратной замены переменных получены наборы значений матриц  $W(k)$  и  $H(k)$  искомого фильтра. Значения этих наборов матриц имеют приближенный вид

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0.99881 & -0.00006 & 0.00066 & -0.00076 & 0.00008 & 0.00106 \\ 0.00403 & 0.98508 & 0.00313 & 0.00755 & 0.00060 & -0.00433 \\ -0.00247 & 0.00140 & 0.96370 & -0.02111 & -0.00750 & 0.01129 \\ -0.00184 & 0.01280 & 0.02205 & 1.00337 & 0.00301 & -0.00230 \\ -0.00122 & 0.01485 & -0.00323 & -0.00128 & 0.99793 & 0.00289 \\ -0.00178 & 0.00104 & 0.00036 & 0.00081 & -0.00039 & 0.99375 \end{bmatrix},$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0.02820 & 0.00759 \\ 0.00719 & 0.01366 \\ -0.00164 & -0.00220 \\ 0.00113 & 0.00381 \\ 0.00775 & 0.08580 \\ -0.00132 & -0.00024 \end{bmatrix}.$$

Проведено моделирование системы в ошибках фильтрации, сформированной на основе исходной системы и фильтра с полученными матрицами вида  $W_0$  и  $H_0$ , на временном интервале  $k \in \{0, 1, \dots, 200\}$ . Результаты моделирования представлены ниже в виде графиков изменения компонент ошибок оценивания выхода  $\tilde{z}(t)$  и самих компонент выхода  $z(t)$ :

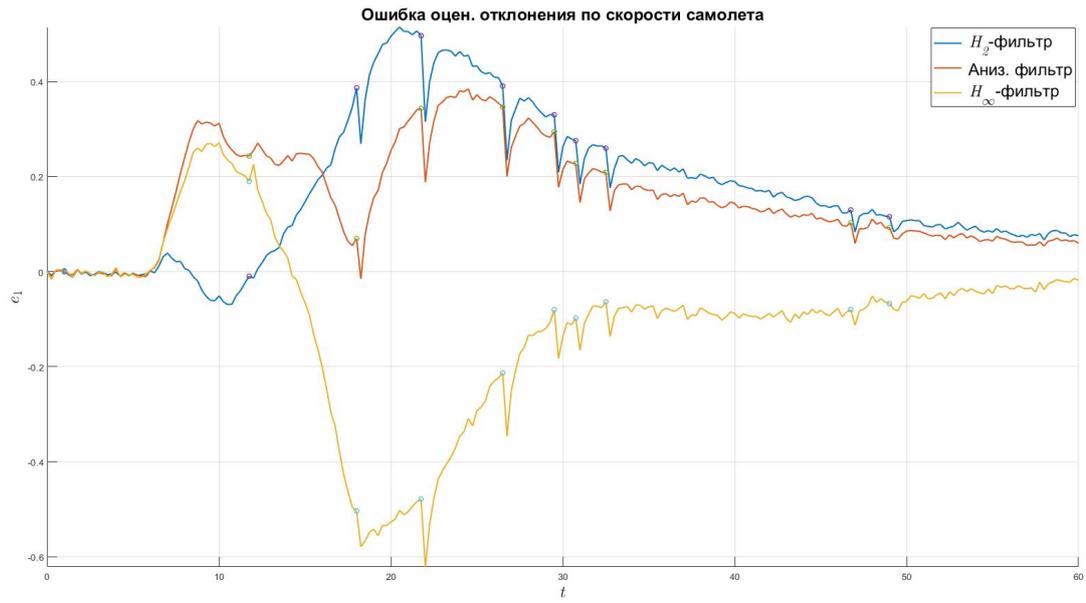


Рис. 17: Ошибка оценивания отклонения по скорости  $\Delta V(t)$

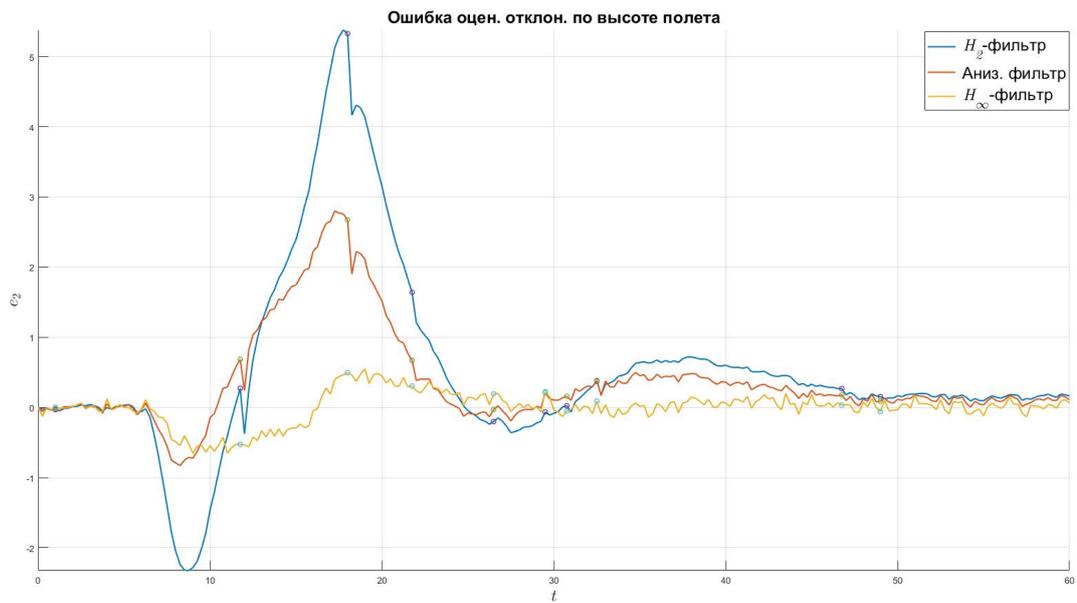


Рис. 18: Ошибка оценивания отклонения по высоте  $\Delta h(t)$

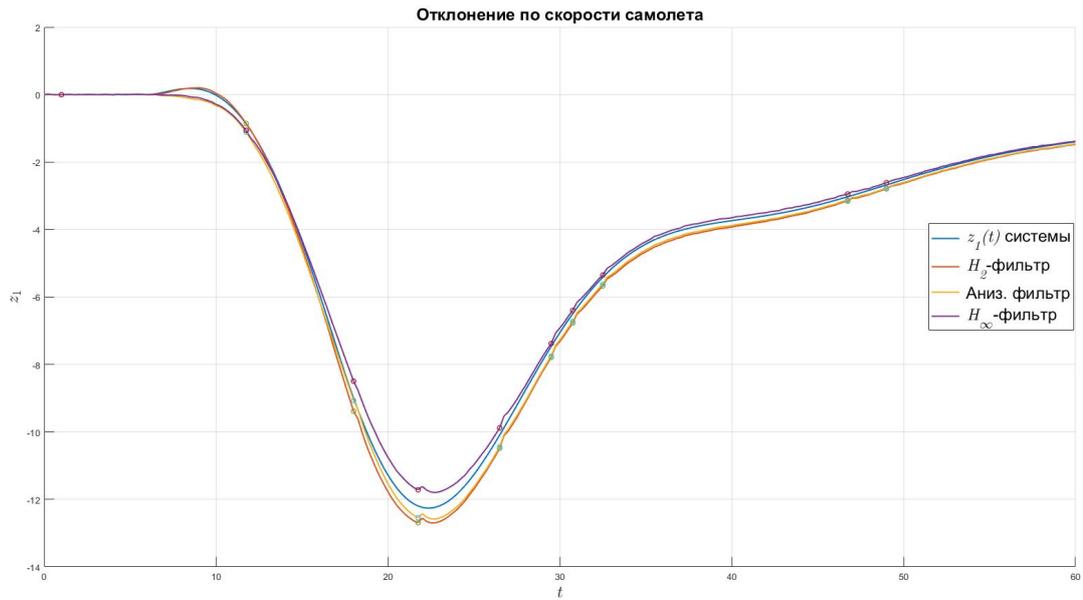


Рис. 19: Отклонение самолета по скорости  $\Delta V(t)$

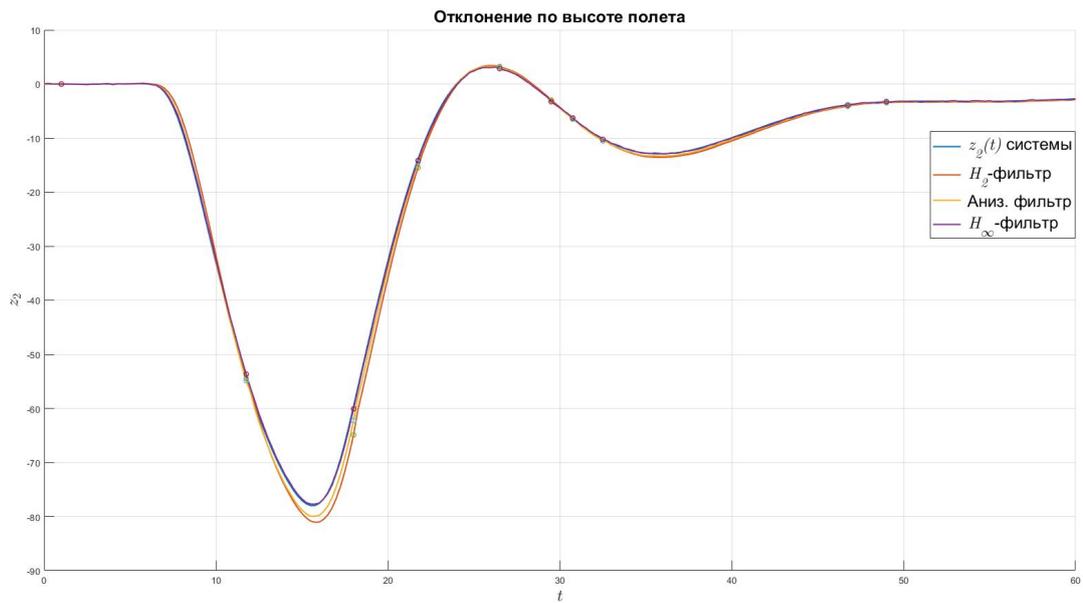


Рис. 20: Отклонение самолета по высоте  $\Delta h(t)$

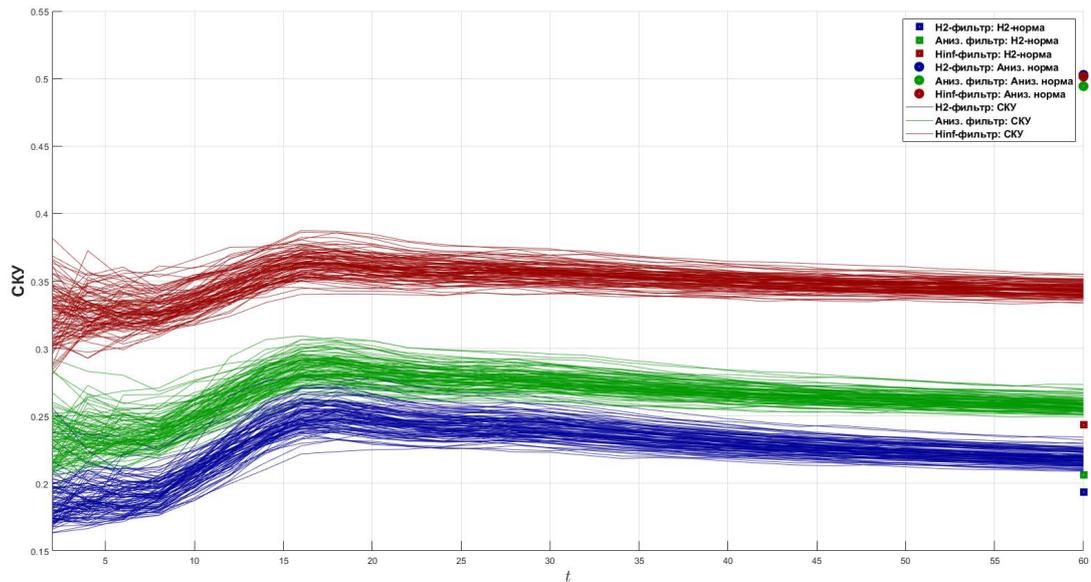
Результаты моделирования системы в ошибках фильтрации при данном значении  $p$  представлены в табл. 4.

**Таблица 3:** Результаты решения задачи при  $p = 0.95$ 

	$\ T_{zw}\ _2$	$\ T_{zw}\ _a$	$\ T_{zw}\ _\infty$
$\mathcal{H}_2$ -фильтр	0.1934	0.5027	1.0894
Аниз. фильтр	0.2065	0.4939	1.0507
$\mathcal{H}_\infty$ -фильтр	0.2434	0.5019	1.0092

Анизотропийный фильтр сохраняет свою эффективность при увеличенной вероятности отказа  $1 - p = 0.05$ . Но стоит отметить, что при дальнейшем увеличении вероятности может потребоваться смена параметров анизотропийного фильтра в целях сохранения эффективности снижения влияния возмущений на оценку выхода исходной системы. В противном случае эффективность  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтра при существенном увеличении  $p$  будет выше.

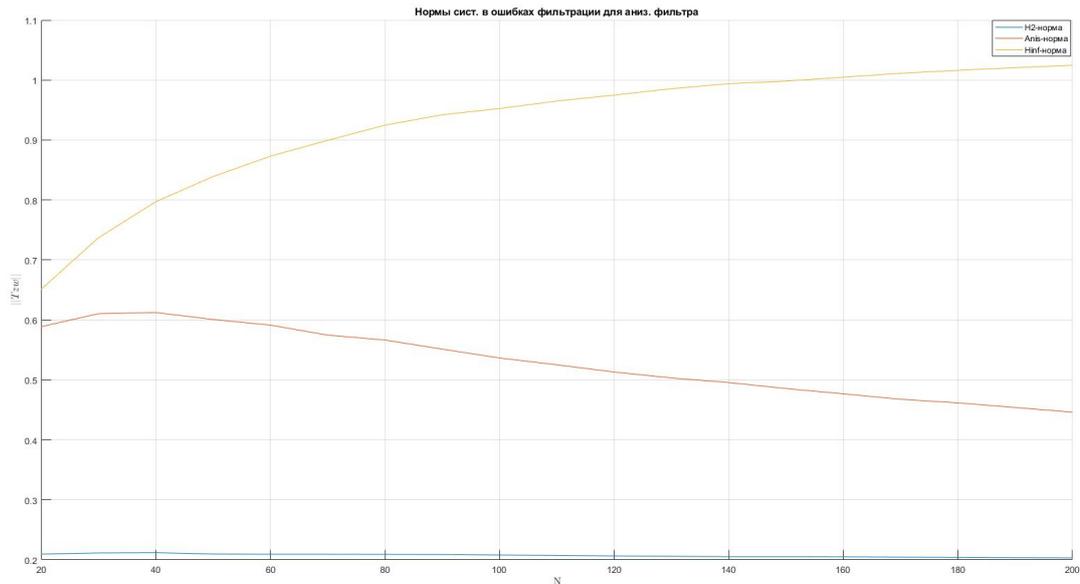
Выше были показаны результаты моделирования системы в ошибках фильтрации в виде одной реализации случайных возмущений для каждого фильтра, что не дает статистически важной информации, поскольку в зависимости от конкретной реализации эффективность фильтра и значения ошибок оценивания могут быть разными. Ниже представлен график значений среднеквадратичного коэффициента усиления систем в ошибках фильтрации для нескольких реализаций случайных возмущений с одними и теми же статистическими параметрами. Вероятность стабильной работы датчиков  $p$  выбрана следующим образом:  $p = 0.95$ .



**Рис. 21:** СКУ систем в ошибках фильтрации в зависимости от длины рассм. интервала

Видно, что при малых длинах интервала имеет место большой разброс значений СКУ в зависимости от реализации, но с увеличением длины интервала разброс значений снижается и они локализуются в промежутках, находящихся между значениями  $\mathcal{H}_2$ -норм и анизотропийной норм соответствующих систем в ошибках фильтрации.

Стоит отметить, что при увеличении длины конечного интервала  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  увеличивается и время расчета матриц субоптимального анизотропийного фильтра. Но при этом его показатели постепенно будут сближаться с аналогичными показателями эффективности  $\mathcal{H}_2$ - и  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтров. На графике ниже представлена зависимость норм системы в ошибках фильтрации при использовании анизотропийного фильтра с фиксированным значением  $a$  от величины интервала  $N$ .



**Рис. 22:** Нормы системы  $T_{zw}$  при аниз. фильтре

На графике видно, что по мере увеличения  $N$  каждая из трех норм системы в ошибках фильтрации с анизотропийным фильтром стабилизируется на некотором горизонтальном уровне. Следовательно, при дальнейшем увеличении длины интервала показатели эффективности фильтра останутся примерно на одном уровне. На основании результатов моделирования движения самолета в режиме посадки при наличии случайных сбоев в датчиках можно сделать вывод, что описанный в данной работе метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра позволяет решать задачу фильтрации на высоком уровне качества при наличии окрашенных шумов в датчиках и внешнего воздействия в виде ветра. Качество работы анизотропийного фильтра выше, чем у  $\mathcal{H}_2$ -фильтра, поскольку он является робастным к случайным сбоям и внешним возмущениям. Также анизотропийный фильтр демонстрирует хорошее качество оценивания интересующих исследователя параметров системы при меньшей затрате ресурсов и лучшей реакции на сбои в датчиках, чем у  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтра. Поэтому приведенный в диссертационной работе метод решения задачи субоптимальной фильтрации для систем с мультипликативными шумами можно считать оптимальным выбором. Однако стоит отметить, что с ростом длины

интервала времени и размерности рассматриваемой системы значительно увеличивается и время, которое тратится на вычисление матрицы  $\Lambda = \mathbf{E}[F_{0:N}^\top F_{0:N}]$ , решение линейных матричных неравенств и определение показателей эффективности синтезированного фильтра. Ниже представлены временные затраты на решение задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации при разных значениях  $N$ .

**Таблица 4:** Затраты времени на решение задачи фильтрации (в секундах)

	Аниз. анализ исходн. системы	Решение ЛМН	Аниз. анализ системы в ошибках филтвр.
$N = 50$	0.2873	0.7747	1.3166
$N = 100$	1.9813	0.9921	6.1350
$N = 200$	14.6203	0.9300	38.2096

Данные в последней строке таблицы соответствуют затратам времени на решение задачи фильтрации, результаты которого представлены выше в виде графиков и таблиц. Видно, что более всего увеличивается время расчетов, необходимых для решения задачи анизотропийного анализа, т.е. вычисления анизотропийной нормы исходной системы и в ошибках фильтрации. Время решения линейных матричных неравенств колеблется незначительно, но может увеличиться для систем больших размерностей и с большим количеством мультипликативных шумов. Поэтому применение субоптимального анизотропийного фильтра на достаточно длинном интервале времени или для систем больших размерностей может оказаться не самым оптимальным выбором.

## 4.4 Выводы к главе 4

В этой главе рассмотрен частный случай систем с мультипликативными шумами - система со случайными сбоями в датчиках. Описание таких систем и решение соответствующей задачи анизотропийной фильтрации представлены в первом и втором разделах главы соответственно. В последнем разделе продемонстрированы результаты численного решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации и моделирования для линейной дискретной нестационарной системы, описывающей на конечном интервале времени продольное движение самолета по глиссаде. Данная линейная модель движения самолета имеет вид системы со случайными сбоями в датчиках, поэтому для решения задачи фильтрации используются полученные в диссертационной работе результаты. Результаты решения задачи представлены в виде графиков изменения компонент ошибки фильтрации и самого оцениваемого выхода системы, а также таблиц со значениями норм системы в ошибках фильтрации для  $\mathcal{H}_2$ -,  $\mathcal{H}_\infty$ - и анизотропийного фильтров. Приведен сравнительный анализ качества работы этих фильтров и описание особенностей численного решения задачи.

## Заключение

В процессе работы над диссертацией были получены следующие результаты:

1. Разработан метод вычисления в пространстве состояний анизотропийной нормы для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. Проведен сравнительный анализ методов для детерминированного и стохастического случаев.
2. Сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами в терминах разностных уравнений Риккати, а также достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы в терминах неравенства Риккати.
3. Предложен метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном интервале времени. Получены решения задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации в зависимости от конфигурации искомого фильтра.
4. Разработан метод синтеза субоптимального анизотропийного фильтра для систем со случайными сбоями в датчиках. Представленный метод заключается в решении системы линейных матричных неравенств в терминах матриц искомого фильтра.
5. Реализовано численное решение задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации с использованием полученного метода для линеаризованной модели продольного движения самолета в режиме посадки. Проведен сравнительный анализ синтезированного анизотропийного фильтра с субоптимальными  $\mathcal{H}_2$ -фильтром и  $\mathcal{H}_\infty$ -фильтром.

## Список литературы

- [1] N. Winer. The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. John Wiley and Sons, Inc. New York, 1949.
- [2] B.D.O. Anderson, J.B. Moore. Optimal filtering. Prentice Hall, 1979.—357 p.
- [3] H.W. Bode, C.E. Shannon. A Simplified Derivation of Linear Least-Squares Smoothing and Prediction Theory. Proceedings IRE, vol. 38, 1950. pp. 417–425.
- [4] R.C. Davis. On the theory of Prediction of Nonstationary Stochastic Processes. Journal of Applied Physics, vol. 23, 1952. pp. 1047–1053.
- [5] R.E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. ASME Transactions, vol. 82, part D (Journal of Basic Engineering), 1960. pp. 35–45.
- [6] R.E. Kalman, R. S. Busy. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Journal of Basic Engineering. 1961.
- [7] R.E. Kalman. On the General Theory of Control Systems. Proc. 1st International Congress on Automatic Control. Moscow. 1960; Butterworths, London. 1961. Vol. 1, pp. 481–492.
- [8] R.E. Kalman. Mathematical Description Of Linear Dynamical Systems. J.S.I.A.M. Control Ser. A. 1963. Vol. 1. No. 2.
- [9] B.D.O. Anderson, J.B. Moore. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Prentice-Hall, 1990.
- [10] H. Kwakernaak, R. Sivan. Linear Optimal Control Systems. John Wiley&Sons, 1972.
- [11] A.E. Bryson, Y.C. Ho. Applied Optimal Control. Hemisphere Publishing, 1975.

- [12] M. Athans. Special issue on the Linear-Quadratic-Gaussian problem. IEEE Trans. Aut. Control. AC-16. December 1971.
- [13] B.D.O. Anderson, J.B. Moore. Optimal Filtering // New Jersey: Prentice Hall, 1979.
- [14] B. Hassibi, A. Sayed, T. Kailath Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to  $\mathcal{H}_2$ - and  $\mathcal{H}_\infty$ -Theories // Philadelphia: SIAM, 1999.
- [15] D. Simon. Optimal State Estimation: Kalman,  $\mathcal{H}_\infty$ -, and Nonlinear Approaches // New Jersey: Wiley, 2006.
- [16] Karina A. Barbosa, Carlos E. de Souza, Alexandre Trofino. Robust  $\mathcal{H}_2$ -Filter Design Via Parameter-Dependent Lyapunov Functions // IFAC Proceedings Volumes, 35(1), 2002. pp. 371–376.
- [17] | I.R. Petersen, D.C. McFarlane. Robust state estimation for uncertain systems, in Proc. 30th IEEE Conference Decision and Control, Brighton, UK, 1991. pp. 2630–2631.
- [18] C.E. de Souza, L. Xie. Robust  $\mathcal{H}_2$ -filtering, Control and Dynamic Systems, Academic Press. 1994. Vol.65. pp. 323–377.
- [19] Y. Theodor, U. Shaked, C.E. de Souza. A game theory approach to robust discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$ -estimation. IEEE Trans. Signal Processing. June 1994. Vol. 42. pp. 1486–1495.
- [20] D.S. Bernstein, W.H. Haddad. Steady-state Kalman filtering with an  $\mathcal{H}_\infty$ -error bound. Syst. Contr. Lett. 1989. Vol. 12. pp. 9–16.
- [21] T. Chen, B. Francis. Design of multirate filter banks by  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization. IEEE Trans. Signal Processing, Dec. 1995. Vol. 43. pp. 2822–2830.

- [22] C.E. de Souza, U. Shaked, M. Fu. Robust  $\mathcal{H}_\infty$ -filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signal. *IEEE Trans. Signal Processing*, Mar. 1995. Vol. 43. pp. 709–719.
- [23] M.J. Grimble, A.E. Sayed. Solution of the  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal linear filtering problem for discrete-time systems. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, July 1990. Vol. 38. pp. 1092–1104.
- [24] D.-W. Gu, M.C. Tsai, S.D. O’Young, I. Postletwaite. State-space formulae for discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization, *Int. J. Contr.*, 1989. Vol. 49. pp. 1683–1723.
- [25] P.A. Iglesias, K. Glover. State-space approach to discrete-time  $\mathcal{H}_\infty$ -control. *International Journal of Control*. 1991. pp. 1031–1073.
- [26] K. Zhou, P.P. Khargonekar. An algebraic Riccati equation approach to  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization. *Syst. Contr. Lett.*, 1988. Vol. 11. pp. 85–92.
- [27] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1981. Vol. AC-26. pp. 301–320.
- [28] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis. State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$ - and  $\mathcal{H}_\infty$ -control problems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1989. Vol. 34. pp. 831–848.
- [29] P.P. Khargonekar, I.R. Petersen, M.A. Rotea.  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control with state-feedback. *IEEE Trans. Automat. Cont.* 1988. Vol.33. pp. 786–788.
- [30] P.P. Khargonekar, I.R. Petersen, K. Zhou. Robust stabilization and  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control. 1987.
- [31] Y. Theodor, U. Shaked. Robust discrete-time minimum-variance filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996. Vol. 44. №2. pp. 181–189.

- [32] L. Xie, Y.C. Soe, C.E. de Souza. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE. Trans. Automat. Contr.*, 1994. vol. 39, pp. 1310-1314.
- [33] Oh-Kyu Kwon, C. E. de Souza, Hee-Seob Ryu. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  FIR filter for discrete-time uncertain systems. *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, 1996. Vol. 4. pp. 4819-4824.
- [34] B.K. Kwon, S. Han, O.K. Kim, W.H. Kwon. Minimum variance FIR smoothers for discrete-time state space models. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2007. Vol. 14, no. 8, pp. 557–560.
- [35] Y.S. Shmaliy. Linear optimal FIR estimation of discrete time-invariant state-space models. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2010. Vol. 58, no. 6, pp. 3086–3096.
- [36] S. Zhao, Y.S. Shmaliy, F. Liu. Fast Kalman-Like Optimal Unbiased FIR Filtering With Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016. Vol. 64, no. 9, pp. 2284-2297.
- [37] S. Dey, J.B. Moore. Risk-sensitive filtering and smoothing via reference probability methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997. Vol. 42, №11, pp. 1587-1591.
- [38] I.G. Vladimirov, I.R. Petersen. State Distributions and Minimum Relative Entropy Noise Sequences in Uncertain Stochastic Systems: The Discrete-Time Case. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 53. pp. 1107–1153.
- [39] N. Vlassis, R. Jungers. Polytopic uncertainty for linear systems: New and old complexity results. *Systems & Control Letters*, 2014. Vol. 67, pp. 9-13.
- [40] Yong He, Qing-Guo Wang, Wei-Xing Zheng. Global robust stability for delayed neural networks with polytopic type uncertainties. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005. Vol. 26, Issue 5, pp. 1349-1354.

- [41] И.Г. Владимиров, А.П. Курдюков, А.В. Семенов. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем. Доклады Академии Наук, Т.342 (1995). С. 583—585.
- [42] A.V. Semyonov, I.G. Vladimirov, A.P. Kurdyukov. Stochastic approach to  $\mathcal{H}_\infty$  optimization. // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control, 1994. Vol. 3. pp. 2249–2250.
- [43] I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, A.V. Semyonov. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems. Proc. 13 IFAC World Congress, 1996. pp. 179–184.
- [44] I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, A.V. Semyonov. State-space solution to anisotropy-based stochastic  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization problem. Proc. 13 IFAC World Congress, 1996. pp. 427–432.
- [45] И.Г. Владимиров, А.П. Курдюков, А.В. Семенов. Асимптотика анизотропной нормы линейных стационарных систем. Автоматика и Телемеханика, 1999. №3.
- [46] P. Diamond, I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, A.V. Semyonov. Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems // INT.J.CONTROL, 2001. Vol.74, No.1. pp. 28–42.
- [47] I.G. Vladimirov, P. Diamond, P. Kloeden. Anisotropy-based robust performance of finite horizon linear discrete time varying systems. 2001.
- [48] И.Г. Владимиров, Ф. Даймонд, П.Е. Клоеден. Анизотропный анализ робастного качества линейных дискретных нестационарных систем на конечном временном интервале. АиТ. 2006. ном. 8. С. 92–111.
- [49] A.P. Kurdyukov, V.N. Timin, M.M. Tchaikovsky. Inverse Problem of

- Anisotropy-based Performance Analysis. Proceedings of 5th International Conference on Physics and Control (PhysCon 2011). 2011.
- [50] M.M. Tchaikovsky, A.P. Kurdyukov, V.N. Timin. Strict Anisotropic Norm Bounded Real Lemma in Terms of Inequalities. Preprints of the 18th IFAC World Congress. 2011. pp. 2332–2337.
- [51] В.Н. Тимин, М.М. Чайковский, А.П. Курдюков. Решение задачи анизотропной фильтрации методом выпуклой оптимизации. Доклады Академии Наук, 2012, том 444, ном. 6. С. 612–615.
- [52] M.M. Tchaikovsky. Static Output Feedback Anisotropic Controller Design by LMI-Based Approach: General and Special Cases. American Control Conference, June 27-June 29, 2012. pp. 5208–5213.
- [53] E.A. Maximov, A.P. Kurdyukov, I.G. Vladimirov Anisotropic Norm Bounded Real Lemma for Linear Time-Varying System. // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, 2011. pp. 4701–4706.
- [54] В.Н. Тимин, А.П. Курдюков. Субоптимальная анизотропная фильтрация на конечном горизонте. Автомат. и телемех., 2016. № 1. С. 5–29.
- [55] I. Yaesh, A.-M. Stoica. Linear Time-varying Anisotropic Filtering and its Application to Nonlinear Systems State Estimation. // Proc. Eur. Control Conf., Strasbourg, 2014, June 24–27, pp. 975–980.
- [56] E. Gershon, U. Shaked, I. Yaesh.  $\mathcal{H}_\infty$ -control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise // Automatica 37, 2001. pp. 409–417.
- [57] E. Todorov, Weiwei Li. Optimal control methods suitable for biomechanical systems. // Proceedings of the 25th Annual International Conference of the

- IEEE Engineering in Biology and Medicine Society, Mexico, 2003, pp. 1758–1761.
- [58] E. Todorov. Stochastic optimal control and estimation methods adapted to the noise characteristics of the sensorimotor system.// *Neural Comput.* 17, 2005. pp. 1084–1108.
- [59] P.V. Pakshin. State estimation and control design for digital linear systems with multiplicative noises.// *Aut. and Rem. Control*, 1978. vol. 39, is. 4. pp. 526–636.
- [60] V.V. Dombrovskii, E.A. Lyashenko. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization.// *Aut. and Rem. Control*, 2003, vol. 64, is. 10. pp. 1558–1570.
- [61] E. Gershon, U. Shaked. Robust Norm-bounded  $\mathcal{H}_\infty$ -Control and Estimation of retarded State-multiplicative Discrete-time Systems. 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). 2016.
- [62] E. Gershon, U. Shaked. Predictor-Based Control of Systems with State-Multiplicative Noise. *Advances in  $\mathcal{H}_\infty$ -Control Theory*. 2019.
- [63] A.-M. Stoica, I. Yaesh. A Bounded Real Lemma Type-Result with Respect to the Anisotropic Norm for Stochastic Systems with Multiplicative Noise. *Automatica*. 2017. Vol. 84. pp. 174–180.
- [64] W. Karush. Minima of Functions of Several Variables With Inequalities As Side Conditions. 1939.
- [65] A.Yu. Kustov. State-space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System. Proc. 15th Int. Conf. on Electrical Eng.,

- Comp. Science and Aut. Control (CCE), Mexico City, Mexico, Sept. 2018. p. 6.
- [66] I.R. Belov, A.V. Yurchenkov, A.Yu. Kustov. Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case. // 27th Mediterranean Conference on Control and Automation. 2019. pp. 148–152.
- [67] M.M. Tchaikovsky, V.N. Timin. Anisotropic suboptimal control for linear time varying systems on the finite horizon. 2015.
- [68] I.G. Vladimirov, P. Diamond, P. Kloeden. Anisotropy-based robust performance analysis of linear discrete time varying systems. // CADSMAP Research Report 01-01, The University of Queensland, Australia, 2001.
- [69] G. Freiling, V. Ionescu. Monotonicity and convexity properties of matrix Riccati equations. IMA Journal of Mathematical Control and Information. March 2001.
- [70] G. Freiling, V. Ionescu. Time-varying discrete Riccati equation: some monotonicity results. Linear Algebra and its Applications 286(1999). pp.135–148.
- [71] Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. Робастная устойчивость и управление. М.:Наука, 2002. 303 стр.
- [72] И.Р. Белов. Лемма об ограниченности анизотропийной нормы дискретных нестационарных систем с мультипликативными некоррелированными шумами. // XXI конференция молодых ученых “Навигация и управление движением”. 19-22 марта 2019 г. ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор». С. 60–62.
- [73] И.Р. Белов, А.В. Юрченков. Анизотропийный анализ дискретной нестационарной системы на конечном горизонте с некоррелированными мультипликативными шумами. // XIII Всероссийское совещание по проблемам

- управления. 17-20 июня 2019 года. ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. С. 817—822.
- [74] I.R. Belov, A.V. Yurchenkov, A.Yu. Kustov. Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case. // 27th Mediterranean Conference on Control and Automation. 2019. pp. 148—152.
- [75] И.Р. Белов. Анизотропийная фильтрация для линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами на конечном горизонте // Автоматика и Телемеханика, 2021. №6. С. 46—79.
- [76] И.Р. Белов. Анизотропийный анализ линейных дискретных нестационарных систем с мультипликативными шумами // Управление большими системами. Выпуск 91. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 38—77.
- [77] И.Р. Белов. Синтез анизотропийных оценивателей для линейных дискретных нестационарных стохастических систем специального вида. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XV Международной конференции (3–5 июня 2020 г., Москва) / [Ред. В.Н. Тхай]. — М.: ИПУ РАН, 2020. С. 102—105.
- [78] I.R. Belov. Anisotropy-Based Estimation for Linear Discrete Time Varying Finite Horizon Systems with Missing Measurements. // 28th Mediterranean Conference on Control and Automation. France, 2020. pp. 832—837.
- [79] I.R. Belov. Anisotropy-based Estimation Problem for Linear Discrete Time Varying Systems with Multiplicative Noises: Special Case. // 21st International Carpathian Control Conference (ICCC2020). pp. 1—6.
- [80] В.Н. Тимин, А.П. Курдюков. Синтез робастной системы управления на режиме посадки самолета в условиях сдвига ветра. // Известия РАН, Техническая кибернетика, 1993, №6, С. 200—208.

- [81] M.M. Tchaikovsky. Static output feedback anisotropic controller design by LMI-based approach: General and special cases // Proc. 2012 American Control Conf., Montreal, Canada, June 27–29, 2012.
  
- [82] J. Lofberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in Matlab // Proc. CACSD Conference, Taipei, Taiwan, 2004. Available from <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.