

**Аналитические матричные методы  
расчета и исследования  
неоднородных оптических структур  
для современных оптоэлектронных  
систем управления и связи. Новые  
физические явления.**

*в.н.с., д.т.н. Вытовтов Константин Анатольевич*

Лаборатория №69

**Изотропные  
неоднородные среды  
при распространении  
плоской гармонической  
волны**

# Волновое уравнение для плоской гармонической волны в неоднородной изотропной среде описывается волновым уравнением вида

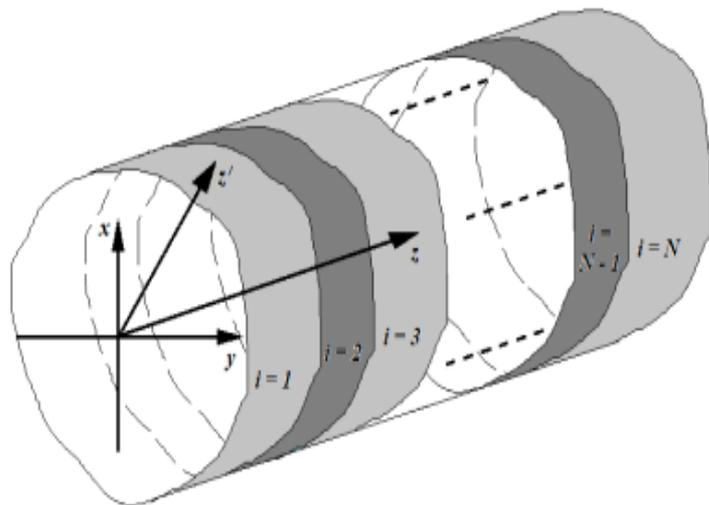
$$\frac{dE_x^2}{dz} + \omega^2 \varepsilon(z) \mu(z) E_x = 0 \quad (1)$$

В частном случае параметры изменяются

1) по гармоническому закону

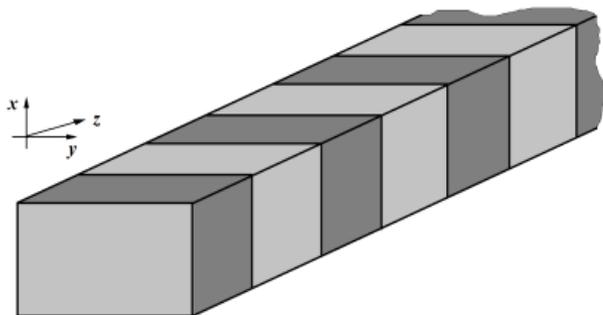
$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \right] \quad (2)$$

2) скачкообразно



$$\varepsilon(z) = \varepsilon(z + n\Lambda), n \in \mathbb{Z}$$
$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1 & 0 < z < z_1 \\ \varepsilon_2 & z_1 < z < z_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \varepsilon_N & z_{N-1} < z < \Lambda \end{cases} \quad (3)$$

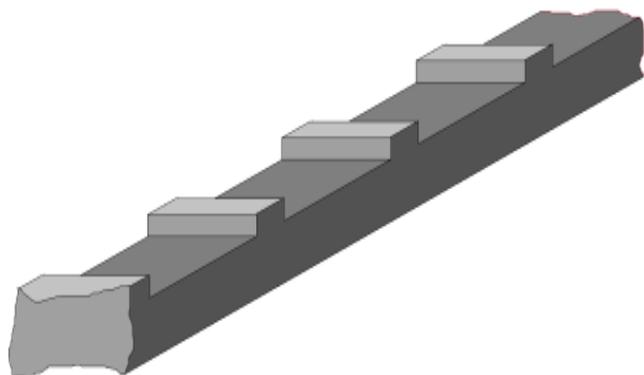
# Изотропные направляющие структуры в электродинамике



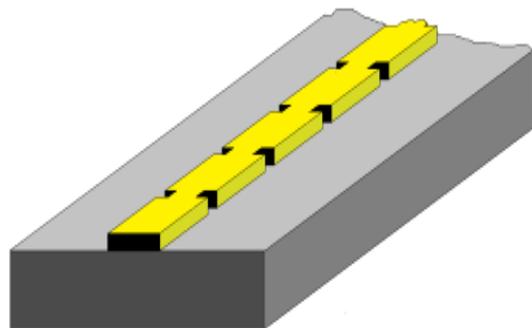
Периодический волновод.  
Фильтр Брэгга

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \omega^2 \varepsilon \mu E_z = 0 \quad (4)$$

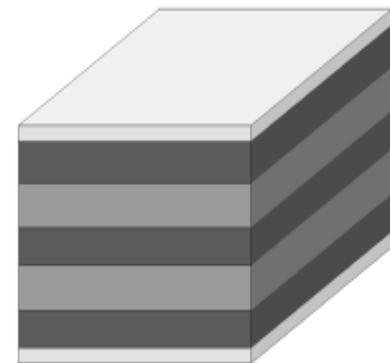
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + k_x^2 X(x) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} + k_y^2 Y(x) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$



Гребенчатый волновод.  
Замедляющая система



Периодическая  
микростриповая линия



Резонатор Фабри-  
Перо

# Аналогичные системы в квантовой механике

Уравнение Шредингера

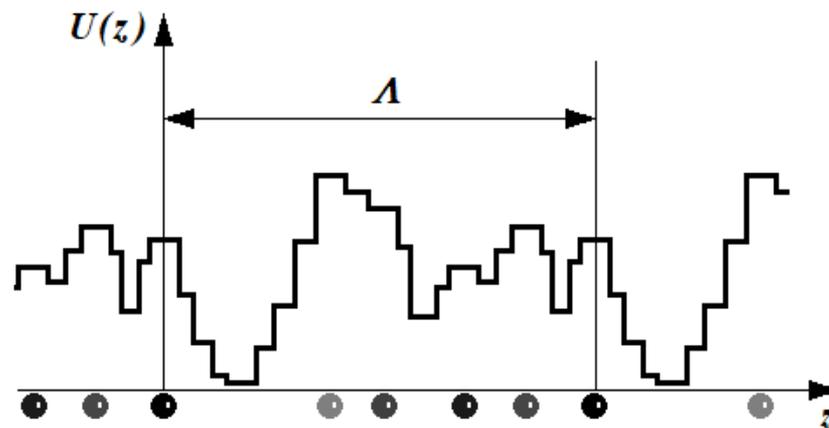
$$j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (6)$$

Стационарное одномерное уравнение Шредингера – линейное однородное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \psi(x) = 0 \quad (7)$$

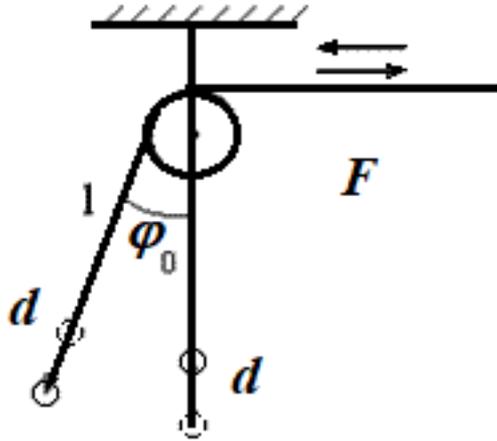
На сегодняшний день существует аналитическая модель Кронинга-Пенни для двухступенчатого периода.

В остальных случаях уравнение (8) решается численными методами.



Произвольный ступенчатый закон изменения  
потенциальной энергии

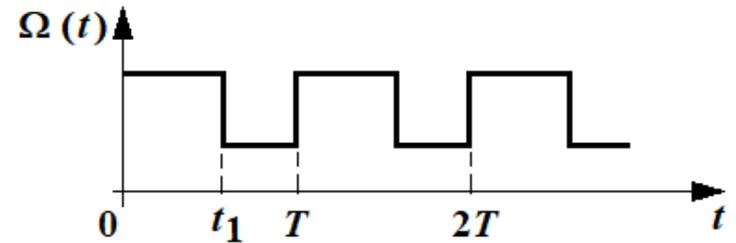
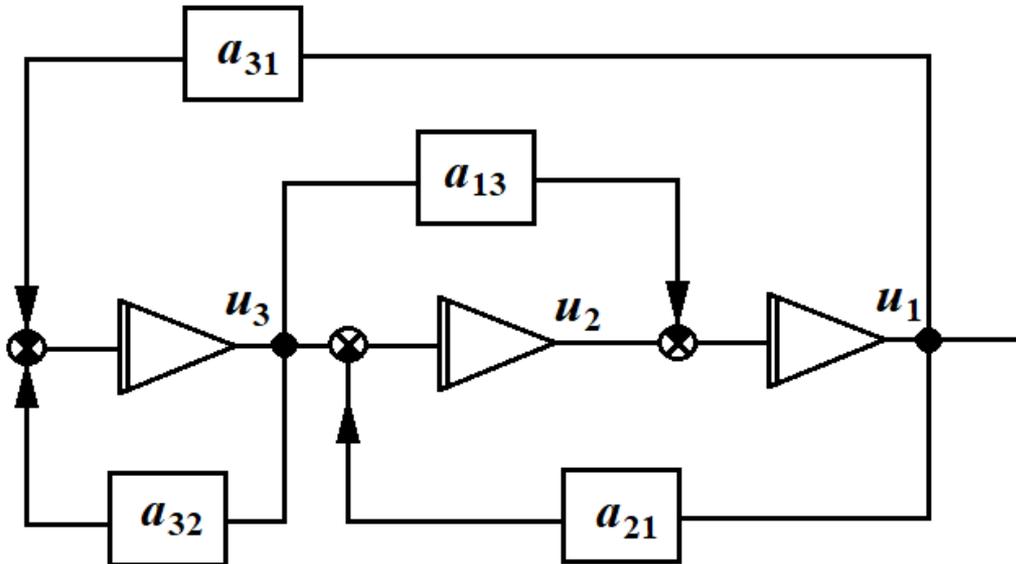
# Системы с одной степенью свободы в механике, системах управления



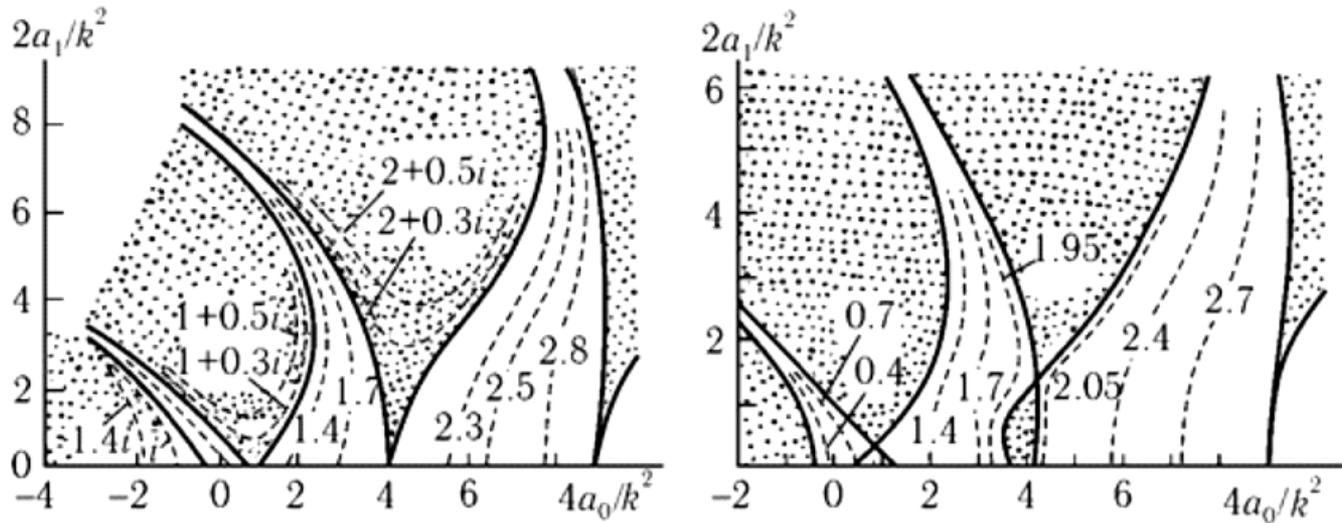
$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + \omega^2 [1 + \varepsilon \Omega(t)] U(t) = 0 \quad (8)$$

$$\Omega(t) = \begin{cases} \Omega_1, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \Omega_2, & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (9)$$

$$\Omega(t) = \Omega(t + T)$$



# Свойства дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами



**Наличие областей устойчивых и неустойчивых решений.**

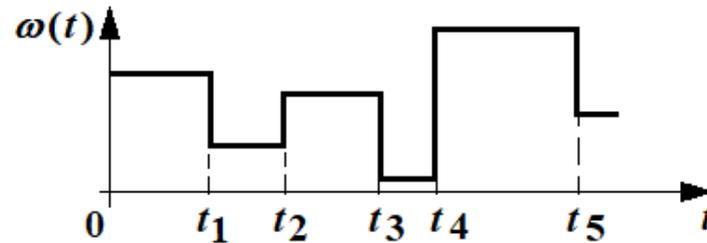
В оптических и СВЧ структурах это означает наличие прохождения и непрохождения волны.

В квантовой механике это означает наличие разрешенных зон (зона проводимости, валентная зона) и запрещенных зон.

# Математическая постановка задачи

Найти точное аналитическое решение системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с произвольными кусочно-постоянными коэффициентами (периодическим и непериодическими)

$$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} - \omega^2(t)U(t) = 0 \quad (10)$$



Для слоистых сред наиболее распространен метод матрицы Коши

$$\mathbf{U}(z) = \mathbf{L}(z)\mathbf{U}(z_0) \quad (11)$$

Для случая плоской гармонической волны в изотропной неоднородной среде

$$\begin{vmatrix} E_x(z) \\ H_y(z) \end{vmatrix} = \mathbf{L}(z) \begin{vmatrix} E_x(z_0) \\ H_y(z_0) \end{vmatrix} \quad (12)$$

Матрица Коши для среды с постоянными параметрами

$$\mathbf{L}_i = \begin{vmatrix} \cosh \varphi_i & \frac{1}{p_i} \sinh \varphi_i \\ p_i \sinh \varphi_i & \cosh \varphi_i \end{vmatrix} \quad (13)$$

Матрица Коши для слоистой среды (системы с кусочно-постоянными параметрами):

$$\mathbf{L}(z) = \mathbf{L}(z - z_{N-1}) \prod_{i=N}^1 \mathbf{L}_i(z_i) \quad (14)$$

Такой подход не позволяет получить аналитическое решение для произвольных кусочно-постоянных параметров в общем виде.

Это в частности затрудняет решение задач синтеза, не позволяет аналитически исследовать многослойные оптические структуры и т.д.

### **Новая знаковая функция**

$$f_{q,i} = \text{sign} \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{2^{N+1-i}} (2q - 1) \right] \right\} \quad (15)$$

# Матрица Коши уравнения с произвольными кусочно- постоянными коэффициентами (произвольной многослойной структуры)

$$\mathbf{L}(T) = \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \xi_q \mathbf{L}_q \quad (16)$$

$$\mathbf{L}_q = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{p_N}{p_1}} \cosh \psi_q & \frac{f_{q,N}}{\sqrt{p_1 p_N}} \sinh \psi_q \\ \sqrt{p_1 p_N} \sinh \psi_q & f_{q,N} \sqrt{\frac{p_1}{p_N}} \cosh \psi_q \end{vmatrix} \quad (17)$$

Решение получено в виде конечной суммы унимодулярных матриц с некоторыми коэффициентами вклада. Каждая из матриц (17) описывает некоторую волну в среде.

Коэффициент вклада эквивалентной волны

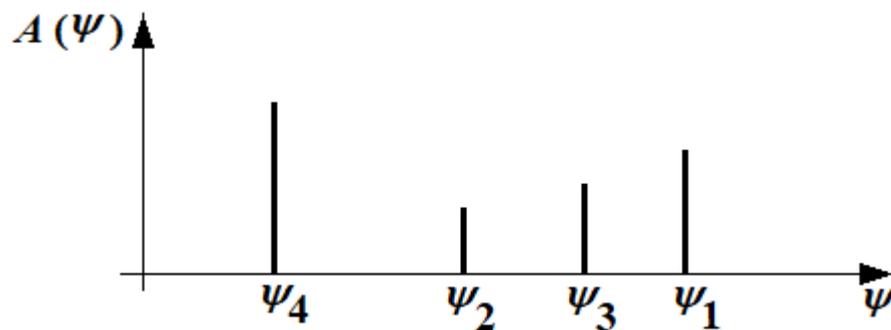
$$\xi_q = \frac{1}{2^{N-1}} \sqrt{\frac{p_1}{p_N}} \exp \left[ \sum_{i=1}^{N-1} \text{Ln} \left( 1 + \frac{p_{q,i+1} f_{q,i+1}}{p_{q,i} f_{q,i}} \right) \right] \quad (18)$$

Оптическая толщина эквивалентной волны (фаза эквивалентного колебания)

$$\psi_q = \sum_{i=1}^N \varphi_i f_{q,i} \quad (19)$$

## Теорема о решении линейного однородного уравнения с произвольными кусочно-постоянными коэффициентами

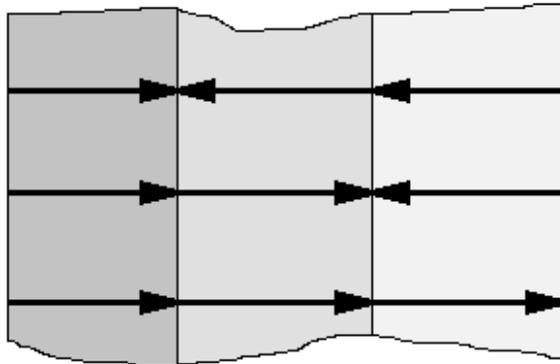
**Теорема 1.1.** Матрица Коши однородного дифференциального уравнения с произвольными кусочно - постоянными коэффициентами может быть представлена в виде суммы  $2^{N-1}$  унимодулярных гиперболических матриц  $L_q$  с коэффициентами вклада  $\xi_q$  .



Амплитуды эквивалентных колебаний  
для трехслойного периода

# Закон изменения фаз интервалов в эквивалентных колебаниях

**Теорема 1.2.** Собственные числа уравнения (10) в выражениях для эквивалентных колебаний системы с одной степенью свободы изменяют свой знак с «+» на «-» по двоичному закону.



$$\begin{aligned}\varphi_{q=1} &= \varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_5 \\ \varphi_{q=2} &= \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_5 \\ \varphi_{q=3} &= \varphi_1 - \varphi_3 + \varphi_5 \\ \varphi_{q=4} &= \varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_5\end{aligned}\tag{20}$$

С физической точки зрения это результат взаимодействия прямых и обратных волн при многократном отражении в слоистой среде.

# Границы областей устойчивых решений (разрешенных и запрещенных областей)

Границы областей устойчивых решений (условие периодических решений с периодом, равным периоду изменения параметров и удвоенному периоду изменения коэффициентов уравнения (10))

$$\left| \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=i+1}^N \left[ 2 + \left( \frac{p_m f_{q,m}}{p_i f_{q,i}} + \frac{p_i f_{q,i}}{p_m f_{q,m}} \right) \right] \right\} \times$$

(21)

$$\times \cos \left[ \sum_{i=1}^N (\varphi_i f_{q,i}) \right] \Big| = 2$$

**Теорема 1.4** Решение системы уравнений (10) с произвольными периодическими кусочно-постоянными коэффициентами является периодическими с периодом кратным периоду изменения коэффициентов при выполнении условия

$$\left| \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{m=i+1}^N \left[ 2 + \left( \frac{p_m f_{q,m}}{p_i f_{q,i}} + \frac{p_i f_{q,i}}{p_m f_{q,m}} \right) \right] \right\} \times \cos \left[ \sum_{i=1}^N (n \varphi_i f_{q,i}) \right] \right| \quad (22)$$

где  $n = T_{\text{решения}}/T$

$T_{\text{решения}}$  – период решения,

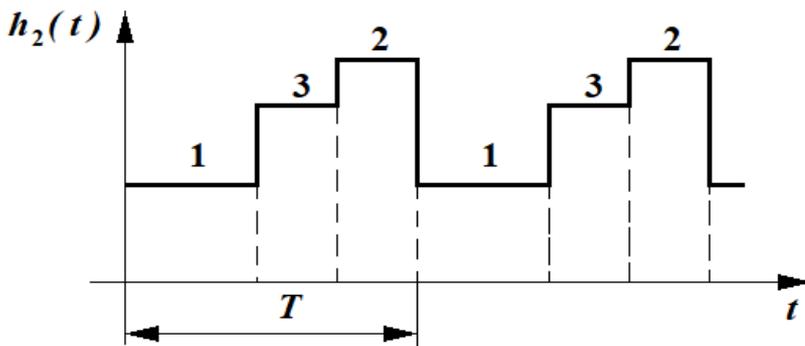
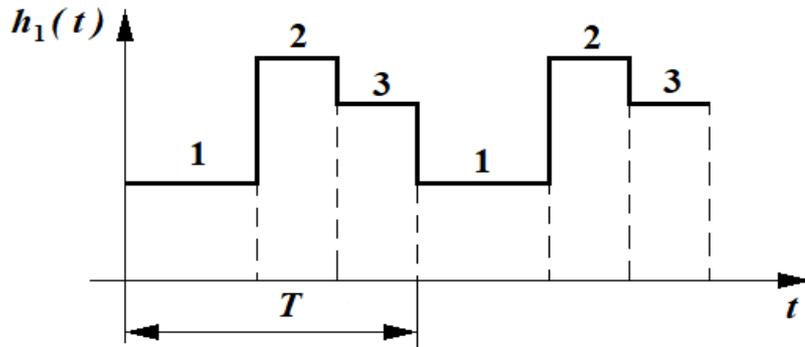
$T$  – период изменения коэффициентов.

Если левая часть (22) равна двум, то период колебания равен  $nT$

Если левая часть (22) равна минус двум, то период колебания равен  $2nT$

# Теорема об изменении порядка чередования интервалов с постоянными параметрами

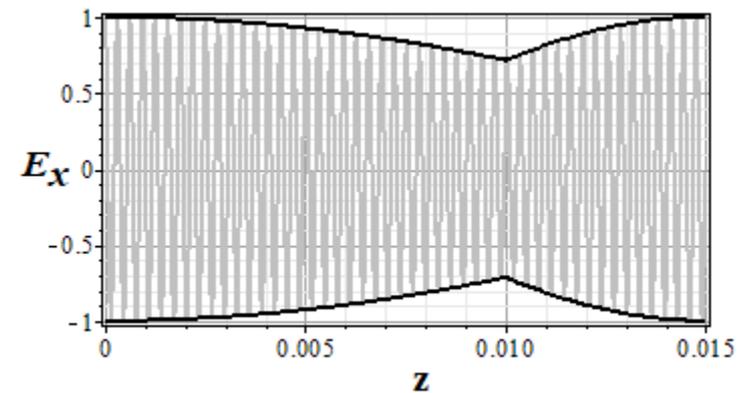
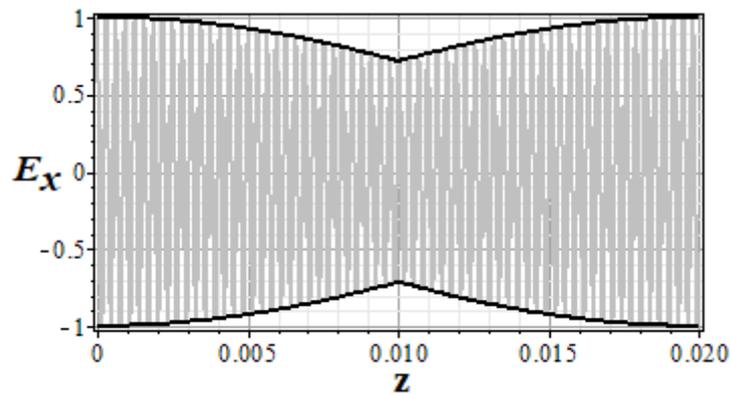
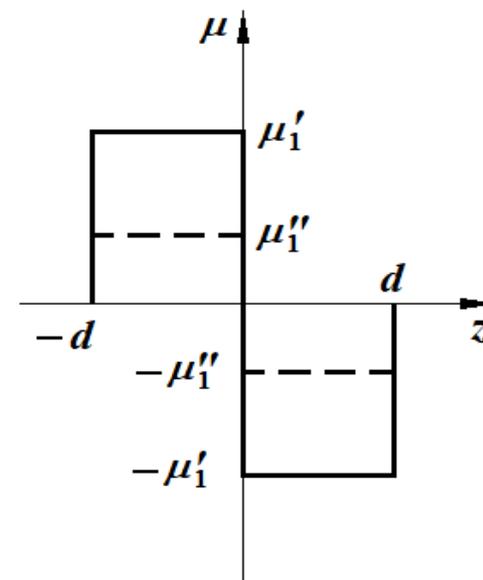
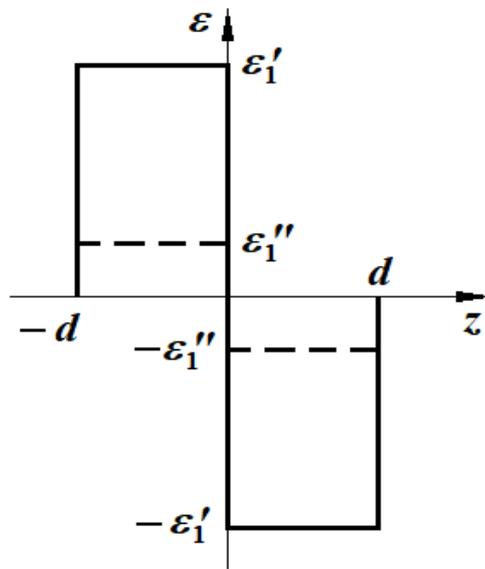
**Теорема 1.3.** Изменение порядка чередования интервалов с постоянными коэффициентами в периоде, не изменяющее длительности периода, не приводит к изменению условий возникновения неустойчивости решений дифференциального уравнения (10) с периодическими кусочно-постоянными коэффициентами.



С физической точки зрения это описывает тот факт, что разрешенные и запрещенные области определяются явлением интерференции (многократного отражения), а не явлением френелевского отражения.

Если прямые и обратные волны в конце каждого периода складываются в фазе, то этот случай соответствует разрешенной зоне, если эти волны складываются в противофазе, то этот случай соответствует запрещенной зоне.

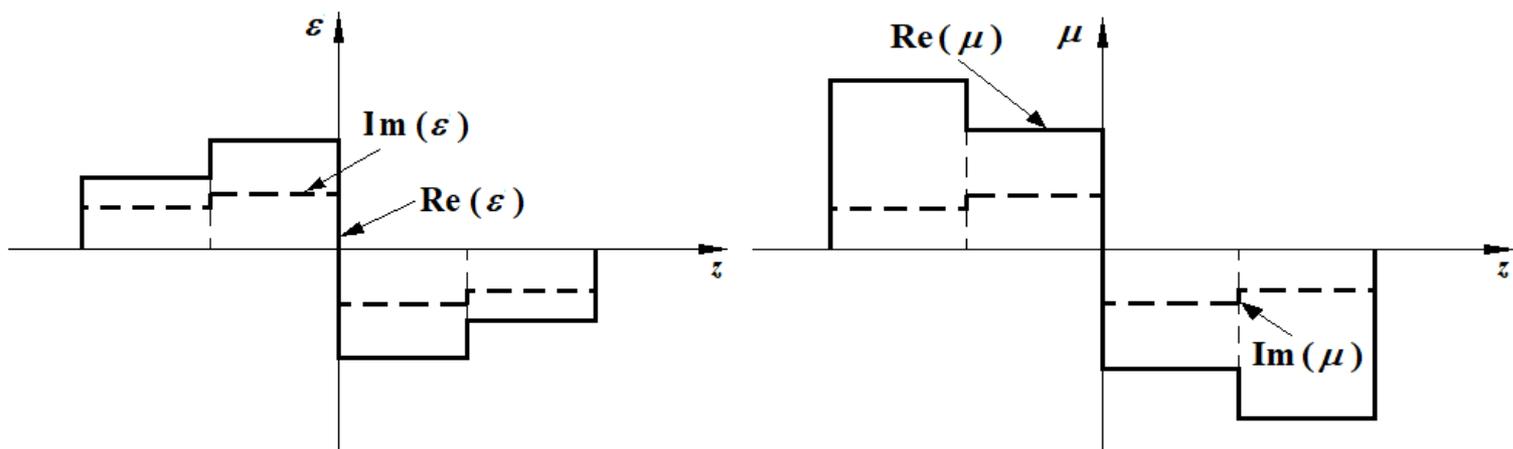
# Симметричные оптически прозрачные структуры



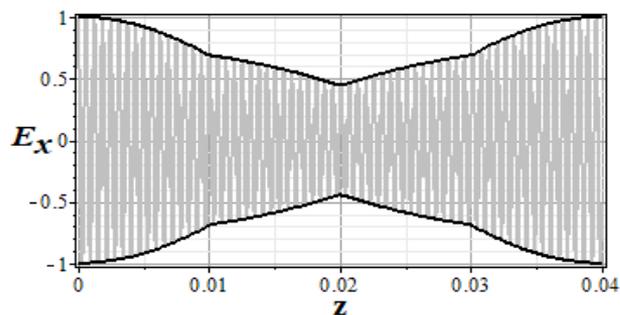
Vytovtov K. A., Bulgakov A. A., Tarasenko Yu. S. // Proc. 11 Int. Conf. on Math. Meth. in Electromag. Theory. 2006. Ukraine, Kharkiv. P.593.

Vytovtov K. A., Bulgakov A. A. // Proc. MICON. 2006. Poland, Krakov. P.262.

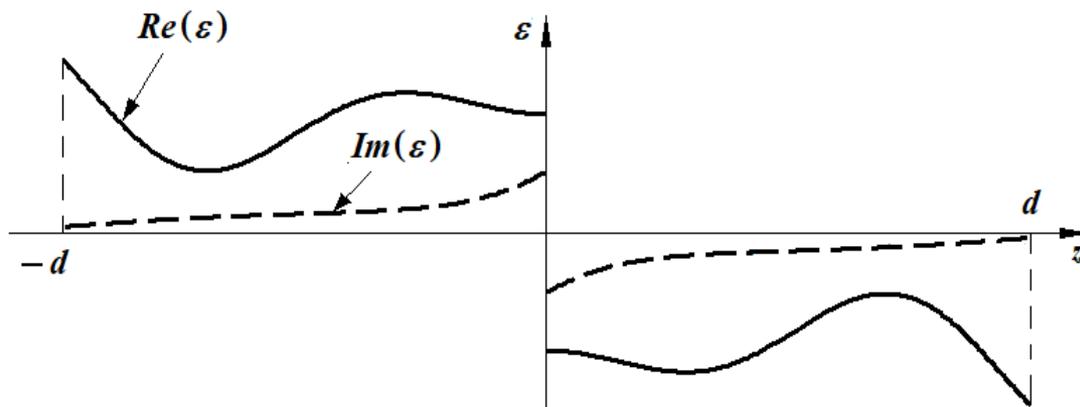
# Симметричные оптически прозрачные структуры



Зависимость диэлектрической и магнитной проницаемостей симметричной структуры от пространственной координаты



Зависимость компоненты  $E_x$  от пространственной координаты



Зависимость диэлектрической проницаемости симметричной структуры от пространственной координаты

**Анизотропные  
неоднородные среды  
при распространении  
плоской гармонической  
волны**

# Поведение электромагнитной волны в среде с магнитной и/или электрической анизотропией

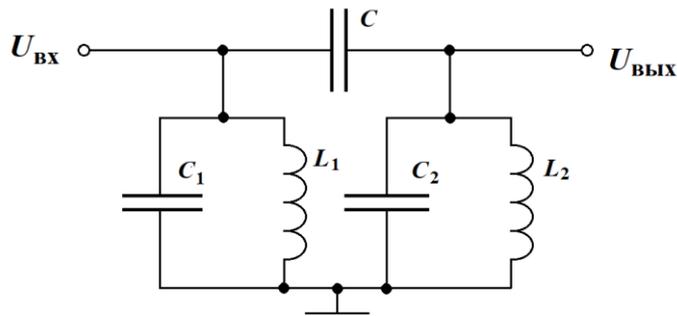
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (22)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

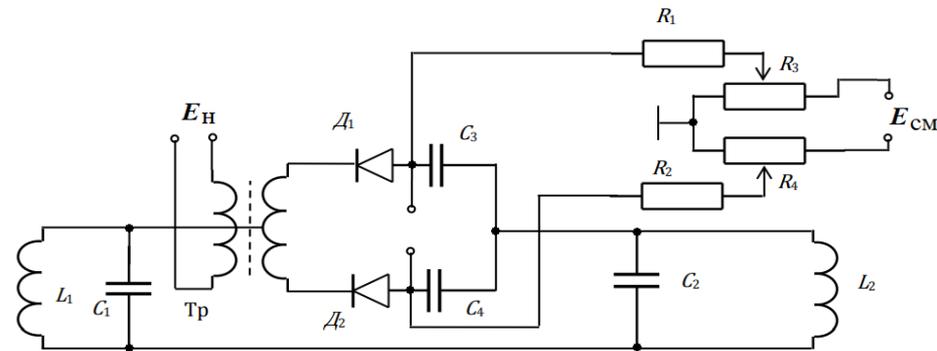
$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{\epsilon} \vec{E} \\ \vec{B} &= \vec{\mu} \vec{H} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\vec{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & j\mu_{xy} & 0 \\ -j\mu_{xy} & \mu_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix} \quad \vec{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & j\epsilon_{xy} & 0 \\ -j\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (24)$$

## Системы с двумя степенями свободы в электротехнике

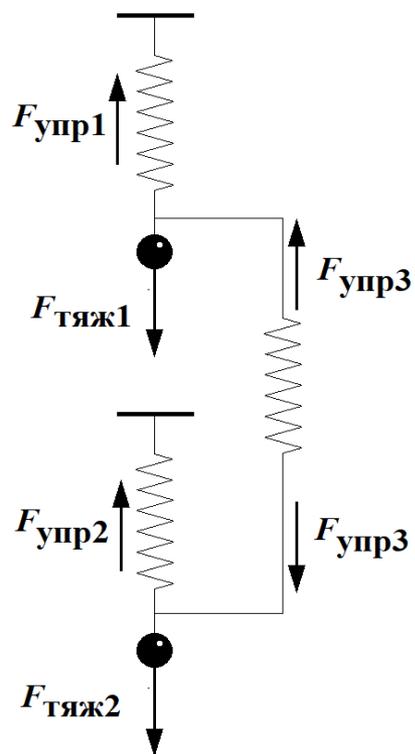


Полосовой фильтр

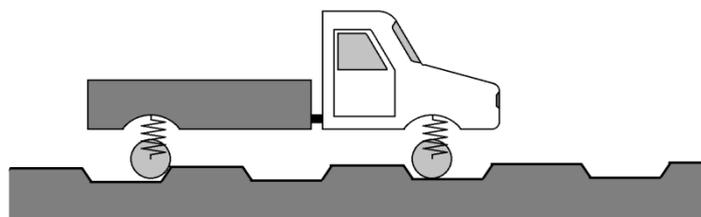


Параметрический генератор

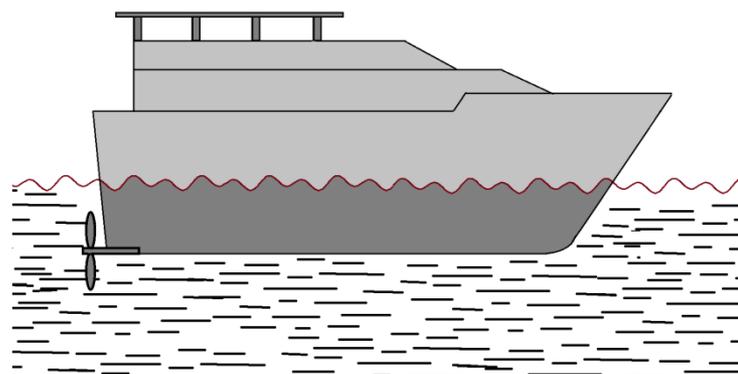
# Системы с двумя степенями свободы в механике



Система связанных осцилляторов



Движение автомобиля по ухабам



Бортовая качка корабля



# Фундаментальная матрица системы с двумя степенями свободы и произвольными кусочно-постоянными параметрами

$$\mathbf{L}(T) = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{p=1}^{2^N} (-1)^{\sum_{i=1}^N (\sum_{k_i=2^{i-1}}^{2^i} k_i F_{p,i})} \times \xi_p \sum_{q=1}^{2^{N-1}} \zeta_{pq} \mathbf{L}_{pq} \quad (27)$$

$$\mathbf{L}_{pq} = \begin{vmatrix} \frac{\eta_{N,p}^{(1,1)}}{\sqrt{\det \eta_{N,p}}} \mathbf{M} & \frac{\eta_{N,p}^{(1,2)}}{\sqrt{\det \eta_{N,p}}} \mathbf{M} \\ \frac{\eta_{N,p}^{(2,1)}}{\sqrt{\det \eta_{N,p}}} \mathbf{M} & \frac{\eta_{N,p}^{(2,2)}}{\sqrt{\det \eta_{N,p}}} \mathbf{M} \end{vmatrix} \quad (28)$$

Новая знаковая функция

$$F_{p,i} = \frac{1}{2} \langle 1 + (-1)^{k_i+1} \text{sign} \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{2^{N+1-i}} (2p - 1) \right] \right\} \rangle \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \sqrt{\frac{\sum_{k_N=2N-1}^{2N} (\lambda_{k_N} F_{p,N} f_{q,N})}{\sum_{k_1=1}^2 (\lambda_{k_1} F_{p,1})}} \times \cosh \varphi_{pq} = \eta_{pq}^{(1,1)} \cosh \varphi_{pq} \\
M_{22} &= \sqrt{\frac{\sum_{k_1=1}^2 (\lambda_{k_1} F_{p,1})}{\sum_{k_N=2N-1}^{2N} (\lambda_{k_N} F_{p,N} f_{q,N})}} \times \cosh \varphi_{pq} = \eta_{pq}^{(2,2)} \cosh \varphi_{pq} \\
M_{12} &= \sqrt{\frac{1}{\sum_{k_1=1}^2 (\lambda_{k_1} F_{p,1}) \sum_{k_N=2N-1}^{2N} (\lambda_{k_N} F_{p,N} f_{q,N})}} \times \sinh \varphi_{pq} = \eta_{pq}^{(1,2)} \sinh \varphi_{pq} \\
M_{21} &= \sqrt{\sum_{k_1=1}^2 (\lambda_{k_1} F_{p,1}) \sum_{k_N=2N-1}^{2N} (\lambda_{k_N} F_{p,N} f_{q,N})} \times \sinh \varphi_{pq} = \eta_{pq}^{(2,1)} \sinh \varphi_{pq} \\
\zeta_{pq} &= \sqrt{\frac{\sum_{k_N=2N-1}^{2N} (\lambda_{k_N} F_{p,N} f_{q,N})}{\sum_{k_1=1}^2 (\lambda_{k_1} F_{p,1})} \prod_{i=1}^{N-1} \left( 1 + \sum_{i=1}^{2i} \frac{\lambda_{k_{i+1}} F_{p,i+1} f_{q,i+1}}{\lambda_{k_i} F_{p,i} f_{q,i}} \right)} \\
\xi_p &= \sqrt{\det \eta_{N,p}} \\
\left| \eta_{N,p}^{(n,m)} \right|_1^2 &= \prod_{i=1}^N \left\{ \sum_{k_i=2i-1}^{2i} \left| \eta_{k_i}^{(n,m)} \right|_1^2 F_{p,i} \right\} \\
\varphi_{pq} &= \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{k_i=2i-1}^{2i} (\lambda_{k_i} t_i F_{p,i} f_{q,i}) \right]
\end{aligned} \tag{30}$$

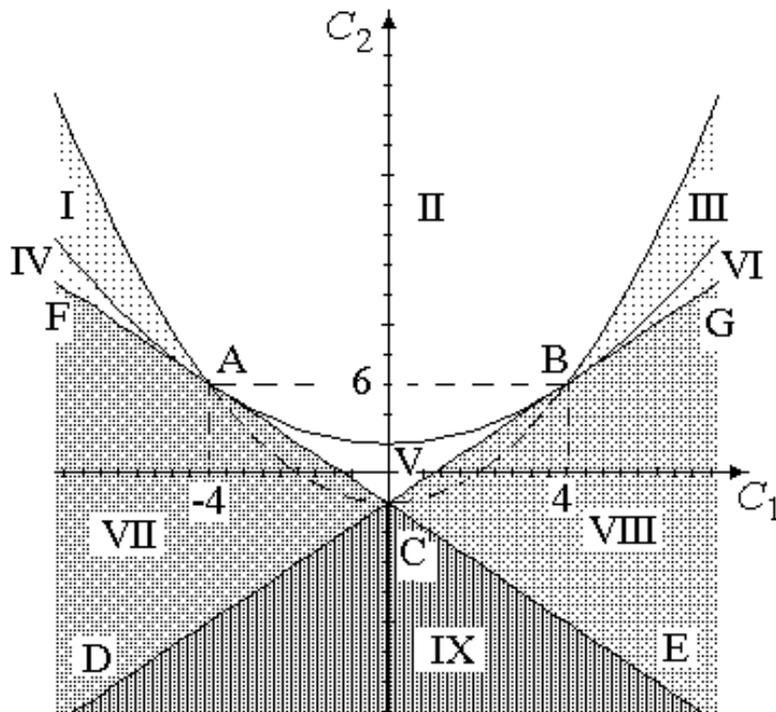
# Теорема о решении системы линейных дифференциальных уравнений с произвольными кусочно-постоянными коэффициентами

**Теорема 2.1.** Матрица фундаментальных решений системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (25) с кусочно-постоянными коэффициентами (26) на интервале  $T$  представляет собой конечную сумму  $2^{2N-1}$  унимодулярных гиперболических матриц с заданными коэффициентами вклада  $\zeta_{pq}$  и  $\xi_p$ . Здесь  $N$  – количество интервалов с постоянными параметрами на интервале  $T$ .

## Условия устойчивости решений

$$\lambda^4 + C_3\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0 = 0 \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| -\sum_{i=1}^4 l_{ii} + \sqrt{8 + \left(\sum_{i=1}^4 l_{ii}\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 (l_{ii}l_{jj} - l_{ij}l_{ji})} \right| \leq 4 \\ \left| -\sum_{i=1}^4 l_{ii} - \sqrt{8 + \left(\sum_{i=1}^4 l_{ii}\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 (l_{ii}l_{jj} - l_{ij}l_{ji})} \right| \leq 4 \end{array} \right. \quad (32)$$



Области устойчивости и неустойчивости решений системы уравнений четвертого порядка

# Преобразование 4x4 матрицы преобразования системы с двумя степенями свободы к блочной диагональной матрице

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial z} &= a_{11}V_1 + a_{12}V_2 \\ \frac{\partial U_2}{\partial z} &= a_{21}V_1 + a_{22}V_2 \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} &= b_{11}U_1 + b_{12}U_2 \\ \frac{\partial V_2}{\partial z} &= b_{21}U_1 + b_{22}U_2\end{aligned}\tag{33}$$

Фундаментальную матрицы системы (25)

$$\mathbf{L}_i = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}\tag{34}$$

необходимо преобразовать к матрице в том же базисе

$$\mathbf{L}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_i(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i(t) \end{vmatrix}\tag{35}$$

Преобразование важно при решении задач поведения волн в анизотропных, биизотропных и бианизотропных средах, где волна эллиптической поляризации разделяется на волны правой и левой круговой поляризации.

# Преобразование 4x4 матрицы преобразования системы с двумя степенями свободы к блочной диагональной матрице

$$\mathbf{M}(t) = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{\chi_2\gamma_1} \exp(\Omega_1 t) - \sqrt{\chi_1\gamma_2} \exp(\Omega_2 t)}{\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \sqrt{\chi_2\gamma_1}} & \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2} \exp(\Omega_1 t) - \exp(\Omega_2 t)}{\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \sqrt{\chi_2\gamma_1}} \\ -\sqrt{\chi_1\chi_2} \frac{\exp(\Omega_1 t) - \exp(\Omega_2 t)}{\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \sqrt{\chi_2\gamma_1}} & \frac{\sqrt{\chi_1\gamma_2} \exp(\Omega_1 t) - \sqrt{\chi_2\gamma_1} \exp(\Omega_2 t)}{\sqrt{\chi_1\gamma_2} - \sqrt{\chi_2\gamma_1}} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{N}(z) = \begin{vmatrix} \frac{-\varsigma_2 \xi_1 \sqrt{\chi_2 \gamma_1} \exp(-\Omega_1 z) + \varsigma_1 \xi_2 \sqrt{\chi_1 \gamma_2} \exp(-\Omega_1 z)}{\varsigma_1 \xi_2 \sqrt{\chi_1 \gamma_2} - \varsigma_2 \xi_1 \sqrt{\chi_2 \gamma_1}} & \frac{\xi_1 \xi_2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{\varsigma_1 \xi_2 \sqrt{\chi_1 \gamma_2} - \varsigma_2 \xi_1 \sqrt{\chi_2 \gamma_1}} [\exp(-\Omega_1 z) - \exp(-\Omega_2 z)] \\ \frac{-\varsigma_1 \varsigma_2 \sqrt{\chi_1 \chi_2} [\exp(-\Omega_1 z) - \exp(-\Omega_2 z)]}{\varsigma_1 \xi_2 \sqrt{\chi_1 \gamma_2} - \varsigma_2 \xi_1 \sqrt{\chi_2 \gamma_1}} & \frac{\varsigma_1 \xi_2 \sqrt{\chi_1 \gamma_2} \exp(-\Omega_1 z) - \varsigma_2 \xi_1 \sqrt{\chi_2 \gamma_1} \exp(-\Omega_2 z)}{\varsigma_1 \xi_2 \sqrt{\chi_1 \gamma_2} - \varsigma_2 \xi_1 \sqrt{\chi_2 \gamma_1}} \end{vmatrix}$$

$$\gamma_1 = \frac{a_{11}\xi_2 + a_{12}\zeta_1\xi_2 - a_{21} - a_{22}\zeta_1}{\xi_2 - \xi_1}$$

$$\chi_1 = \frac{b_{21}\zeta_2 + b_{22}\xi_1\zeta_2 - b_{11} - b_{12}\xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1}$$

$$\gamma_2 = \frac{a_{11}\xi_1 + a_{12}\zeta_2\xi_1 - a_{21} - a_{22}\zeta_2}{\xi_2 - \xi_1}$$

$$\chi_2 = \frac{b_{21}\zeta_1 + b_{22}\xi_2\zeta_1 - b_{11} - b_{12}\xi_2}{\zeta_2 - \zeta_1}$$

$$\xi_{1,2} = \frac{a_{22}b_{22} - a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} - a_{12}b_{21}}{2(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})} \times \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(a_{22}b_{21} + a_{21}b_{11})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})}{(a_{11}b_{11} - a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12})^2}} \right]$$

$$\zeta_{1,2} = -\frac{b_{12}\xi_{1,2} + b_{11}}{b_{22}\xi_{1,2} + b_{21}}$$

(36)

# Система с произвольными кусочно-постоянными параметрами

**Теорема 4.2.** Фундаментальная матрица линейной однородной системы с кусочно-постоянными параметрами может быть представлена в виде суммы  $2^N$  унимодулярных  $4 \times 4$  блочных диагональных матриц с  $2 \times 2$  блоками и определенными коэффициентами вклада

$$\mathbf{L}(T) = \sum_{q=1}^{2^N} \mathbf{L}_q = \sum_{q=1}^{2^N} \begin{vmatrix} \vartheta_q \mathbf{M}_q & 0 \\ 0 & v_q \mathbf{N}_q \end{vmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{M}_q = \begin{vmatrix} (-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,N}}^{(N)}} \times \exp\left(\sum_{i=1}^N \Omega_{1+F_{q,i}}^{(i)} t_i\right) & (-1)^{\sum_{i=1}^N (F_{q,i}+1)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,N}}^{(N)}} \times \exp\left(\sum_{i=1}^N \Omega_{1+F_{q,i}}^{(i)} t_i\right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} \sqrt{\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,N}}^{(N)}} \times \exp\left(\sum_{i=1}^N \Omega_{1+F_{q,i}}^{(i)} t_i\right) & (-1)^{\sum_{i=1}^N (F_{q,i}+1)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,N}}^{(N)}} \times \exp\left(\sum_{i=1}^N \Omega_{1+F_{q,i}}^{(i)} t_i\right) \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{N}_q = \begin{vmatrix} (-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} \xi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \zeta_{2-F_{q,i+1}}^{(N)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,N}}^{(N)}} \times \exp\left(\sum_{i=1}^N \Omega_{1+F_{q,i}}^{(i)} t_i\right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} \zeta_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(N)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)} \chi_{2-F_{q,N}}^{(N)}} \times \exp\left(\sum_{i=1}^N \Omega_{1+F_{q,i}}^{(i)} t_i\right) \end{vmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{vmatrix} (-1)^{\sum_{i=1}^N (F_{q,i}+1)} \xi_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(N)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,1}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,N}}^{(N)}} \times \exp\left(\sum_{i=1}^N \Omega_{1+F_{q,i}}^{(i)} t_i\right) \\ (-1)^{\sum_{i=1}^N (F_{q,i}+1)} \zeta_{1+F_{q,i}}^{(1)} \xi_{2-F_{q,i+1}}^{(N)} \sqrt{\chi_{1+F_{q,1}}^{(1)} \gamma_{2-F_{q,N}}^{(N)}} \times \exp\left(\sum_{i=1}^N \Omega_{1+F_{q,i}}^{(i)} t_i\right) \end{vmatrix}$$

$$\vartheta_q = \frac{\prod_{i=1}^{N-1} \left( \sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^N \left( \sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)}$$

$$v_q = \frac{\prod_{i=1}^{N-1} \left( \xi_{2-F_{q,i}}^{(i)} \zeta_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)} \sqrt{\gamma_{2-F_{q,i}}^{(i)} \chi_{1+F_{q,i+1}}^{(i+1)}} - \xi_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \zeta_{2-F_{q,i+1}}^{(i)} \sqrt{\gamma_{1+F_{q,i}}^{(i+1)} \chi_{2-F_{q,i}}^{(i)}} \right)}{\prod_{i=1}^N \left( \xi_2^{(i)} \zeta_1^{(i)} \sqrt{\gamma_2^{(i)} \chi_1^{(i)}} - \xi_1^{(i)} \zeta_2^{(i)} \sqrt{\gamma_1^{(i)} \chi_2^{(i)}} \right)}$$

## Система с произвольными периодическими кусочно-постоянными параметрами. $K$ периодов

$$\mathbf{L}(KT) = [\mathbf{L}_\Sigma(T)]^K = \begin{vmatrix} \mathbf{M}(T) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}(T) \end{vmatrix}^K = \begin{vmatrix} [\mathbf{M}(T)]^K & 0 \\ 0 & [\mathbf{N}(T)]^K \end{vmatrix} \quad (39)$$

$$[\mathbf{M}(T)]^K = \begin{vmatrix} m_{11} \mathcal{U}_{K-1}(a) - \mathcal{U}_{K-2}(a) & m_{12} \mathcal{U}_{K-1}(a) \\ m_{21} \mathcal{U}_{K-1}(a) & m_{22} \mathcal{U}_{K-1}(a) - \mathcal{U}_{K-2}(a) \end{vmatrix} \quad (40)$$

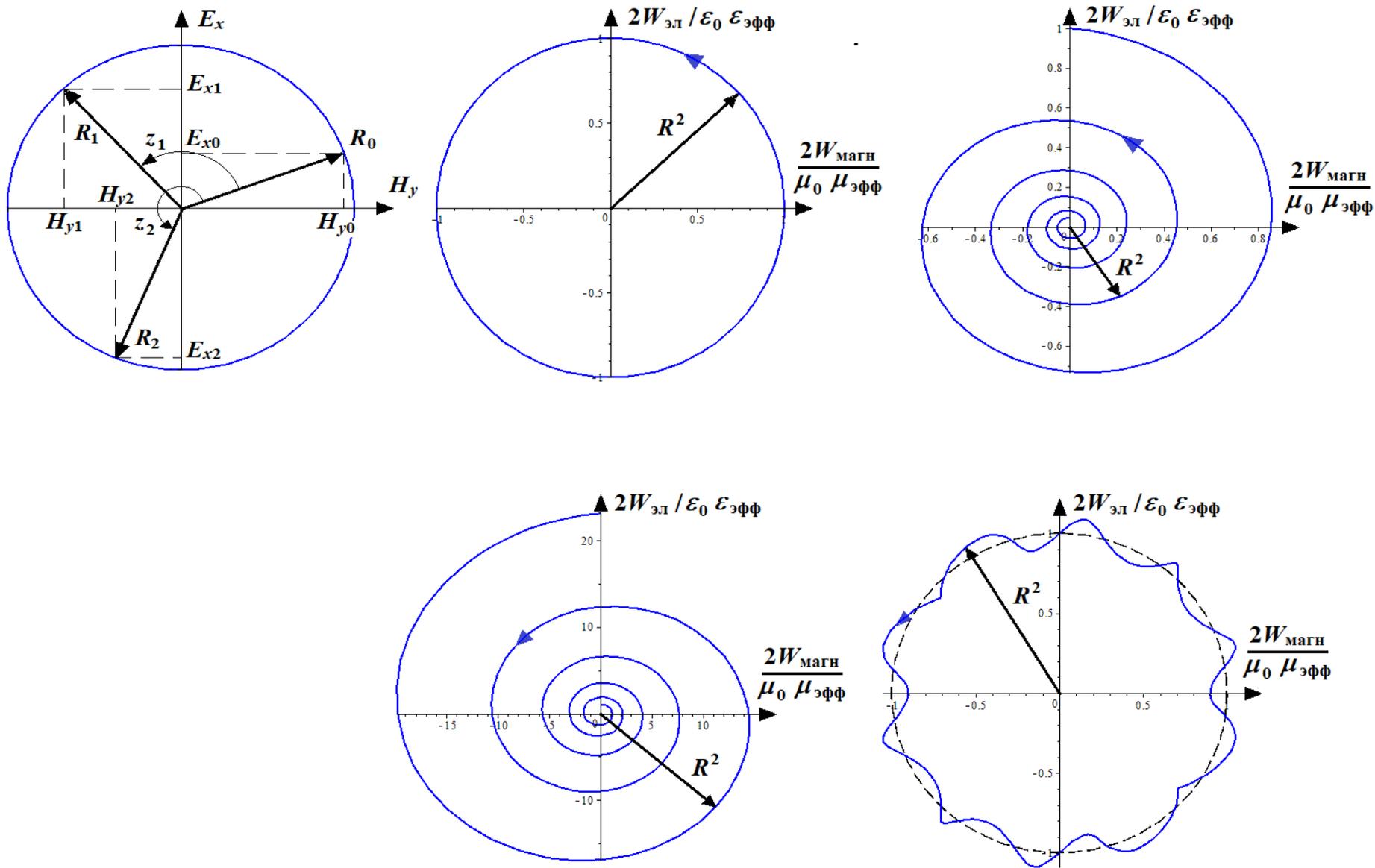
$$[\mathbf{N}(T)]^K = \begin{vmatrix} n_{11} \mathcal{U}_{K-1}(a) - \mathcal{U}_{K-2}(a) & n_{12} \mathcal{U}_{K-1}(a) \\ n_{21} \mathcal{U}_{K-1}(a) & n_{22} \mathcal{U}_{K-1}(a) - \mathcal{U}_{K-2}(a) \end{vmatrix}$$

$$a = (m_{11} + m_{22})/2$$

$$b = (n_{11} + n_{22})/2$$

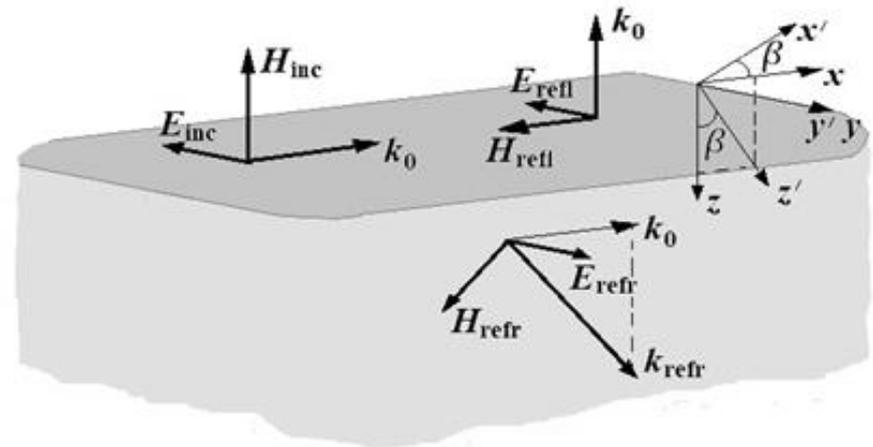
$$\mathcal{U}_K(x) = \frac{\sin[(K+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

# Энергетическая характеристика электромагнитной системы



# Эффект втягивания (обыкновенная волна)

$$\vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$



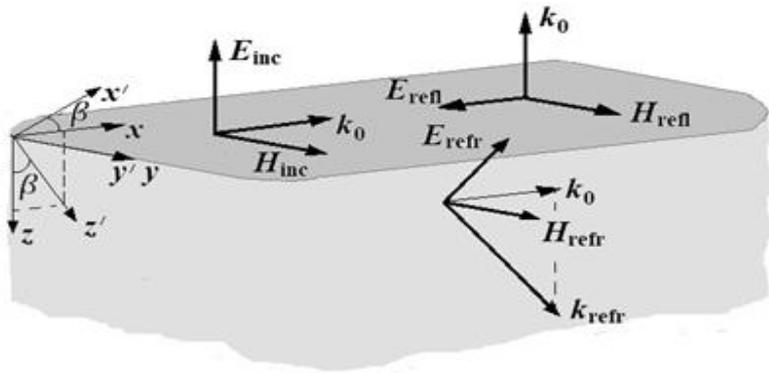
При скольжении плоской электромагнитной волны над границей раздела изотропной и анизотропной сред с произвольным углом осей анизотропии и наличии поверхностного тока плотностью

$$J = -\chi_{Hz} E_{inc} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_0}{\mu_0}} E_y \quad (41)$$

Волна из приповерхностного слоя полностью втягивается в анизотропную среду. Т.е.

$$T = -1 \quad R = 0 \quad (42)$$

# Эффект втягивания (необыкновенная волна)



$$k_z = -\frac{k_x \varepsilon_{xz}}{\varepsilon_{zz}} \pm \sqrt{\frac{k_x^2 \varepsilon_{xz}^2}{\varepsilon_{zz}^2} - \frac{k_x^2 \varepsilon_{xx} - \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz}^2)}{\varepsilon_{zz}}} \quad (43)$$

При скольжении над границей раздела изотропной и анизотропной сред с произвольным углом осей анизотропии и наличии поверхностного заряда плотностью

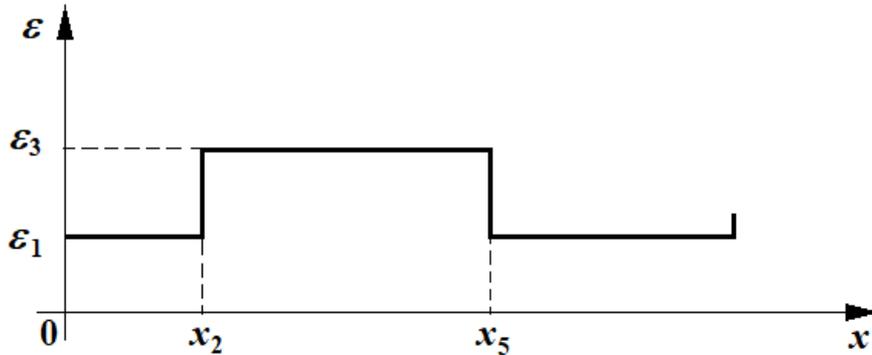
$$\sigma = \left[ \varepsilon_0 \rho_0 - \frac{\rho_0 \omega (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx}) (\varepsilon_{zx} \chi_{Ex} + \varepsilon_{zz} \chi_{Ez})}{\rho_0 \omega (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx}) + k_z \varepsilon_{zz} + k_x \varepsilon_{xz}} \right] H_{x \text{ inc}} \quad (44)$$

плоская электромагнитная волна из приграничного слоя проходит в анизотропную среду. Причем

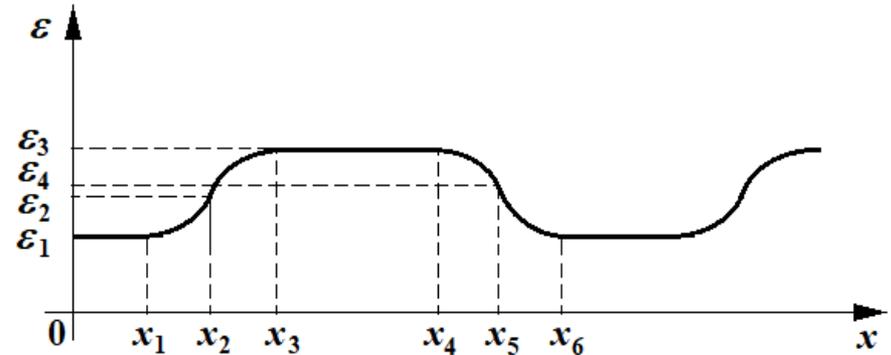
$$R = -\frac{k_z \varepsilon_{zz} + k_x \varepsilon_{xz}}{\rho_0 \omega (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx}) + k_z \varepsilon_{zz} + k_x \varepsilon_{xz}}$$

$$T = \frac{\rho_0 \omega (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx})}{\rho_0 \omega (\varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zx}) + k_z \varepsilon_{zz} + k_x \varepsilon_{xz}} \quad (45)$$

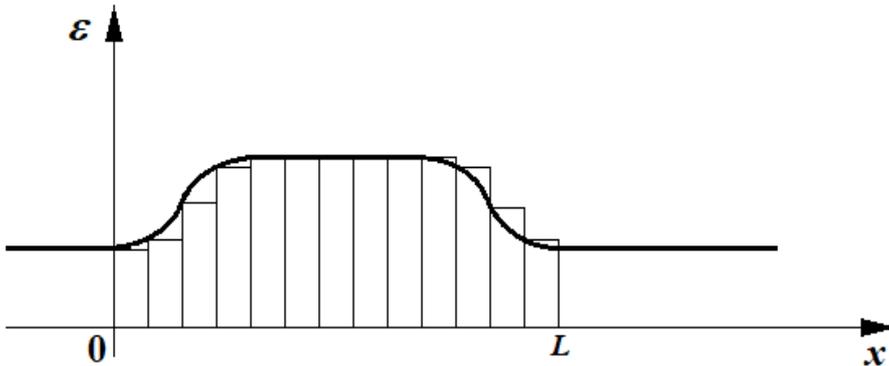
# Слоистая структура с плавным изменением параметров слоев на границах



Скачкообразное изменение диэлектрической проницаемости



Реальное изменение диэлектрической проницаемости

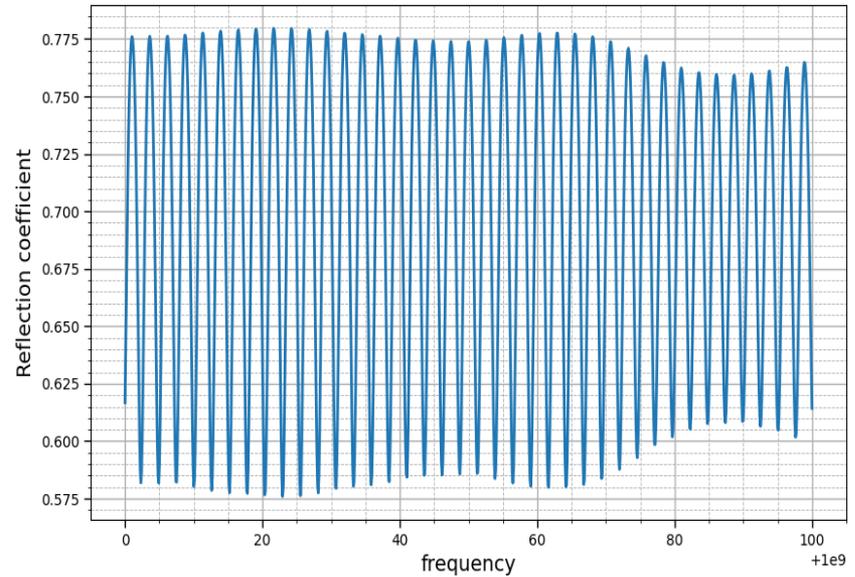
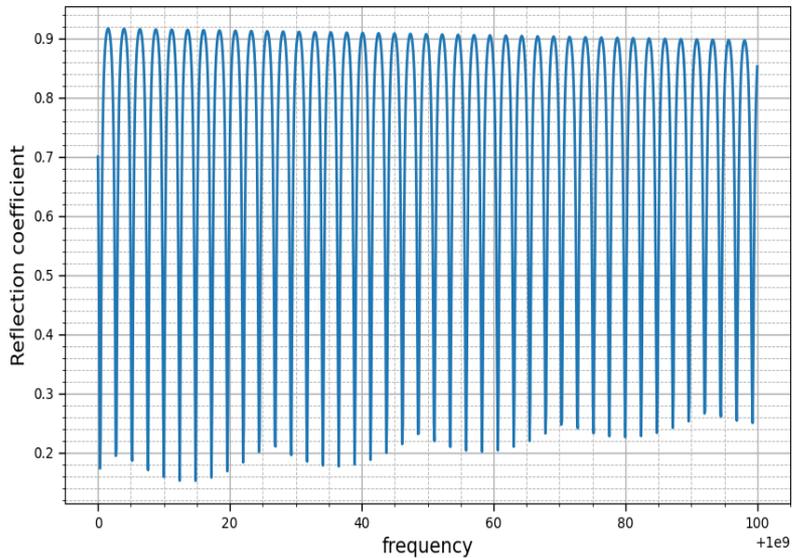


Аппроксимация функции, описывающей диэлектрическую проницаемость, кусочно-постоянной функцией

Диэлектрическая проницаемость при квадратичной аппроксимации переходного слоя

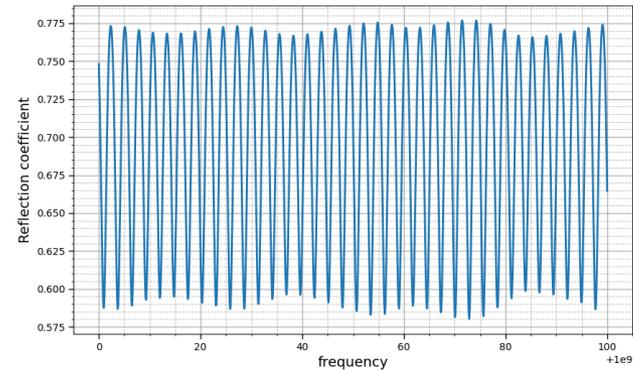
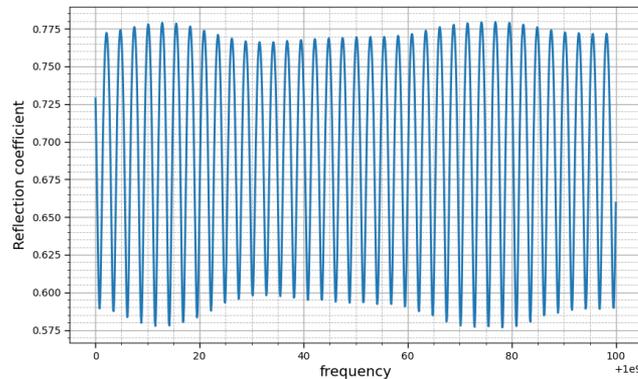
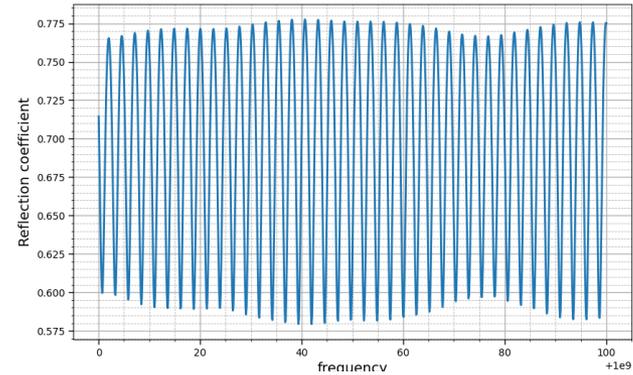
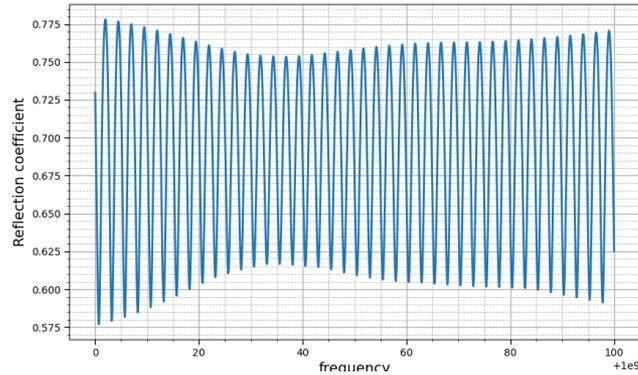
$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, & x < x_1 \\ a_1 x^2 + b_1 x + c_1, & x_1 < x < x_2 \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2, & x_2 < x < x_3 \\ \varepsilon_3, & x_3 < x \end{cases}$$

# Слоистая структура с плавным изменением параметров слоев на границах



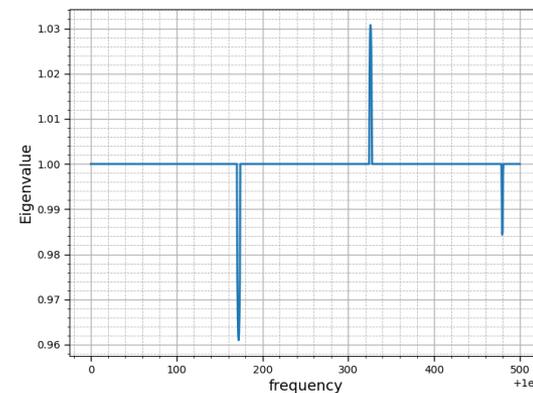
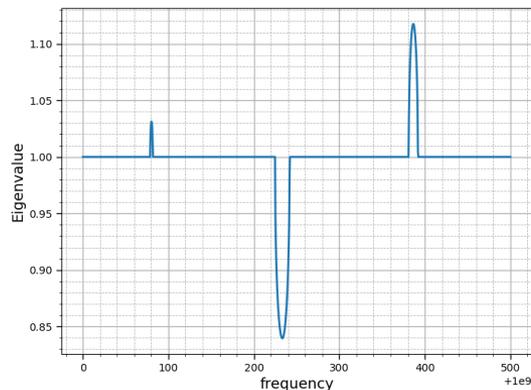
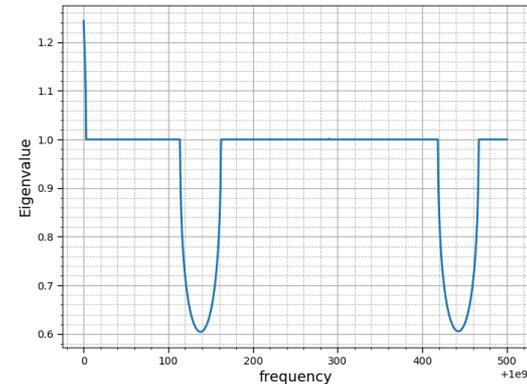
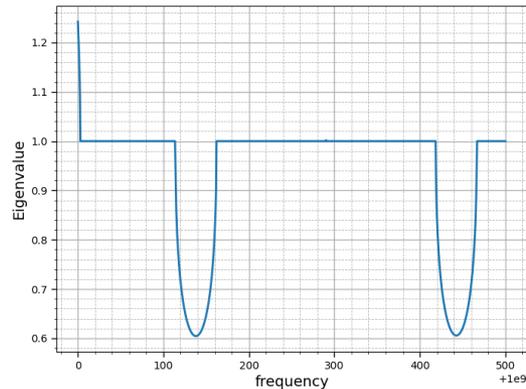
**Зависимости коэффициента отражения при отсутствии и наличии переходных слоев**

# Слоистая структура с плавным изменением параметров слоев на границах



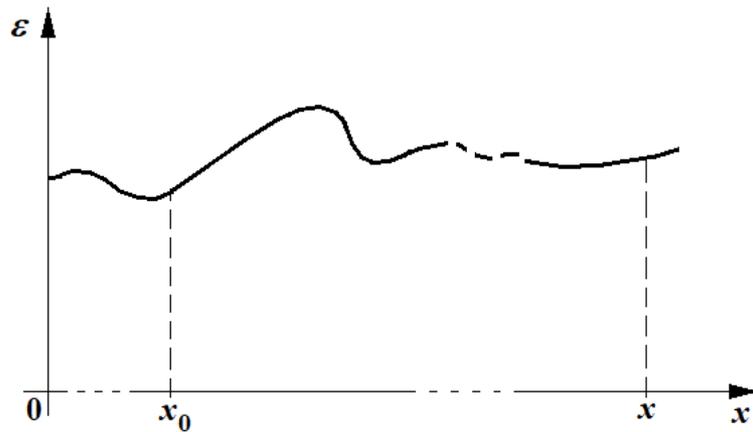
Увеличение размеров переходного слоя приводит к изменению вида зависимости коэффициента отражения от частоты, но не проявляет какой либо закономерности

# Слоистая структура с плавным изменением параметров слоев на границах

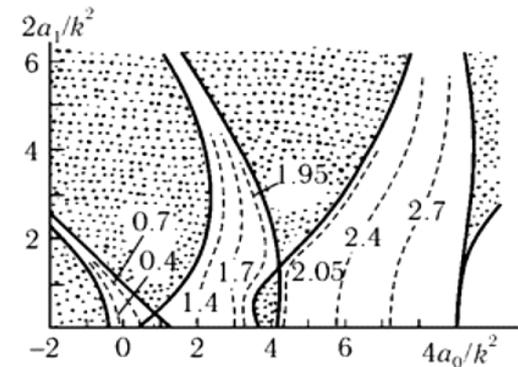
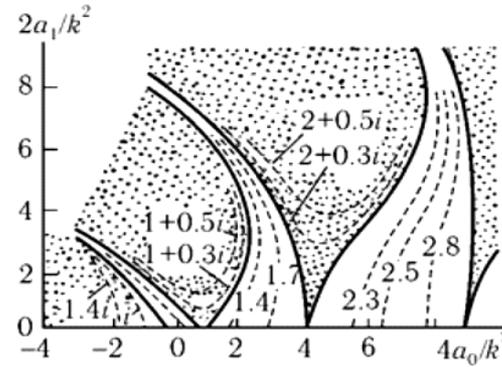


Увеличение размеров переходного слоя приводит к изменению уменьшению областей непрохождения волны в периодической многослойной изотропной структуре

# Произвольный закон изменение коэффициентов системы ДУ



Пример изменения диэлектрической проницаемости неоднородной диэлектрической среды



Области устойчивых и неустойчивых решений ДУ второго порядка

**Фундаментальная матрица системы линейных однородных дифференциальных уравнений с произвольными коэффициентами, соответствующая границам областей неустойчивых решений (периодическим решениям с периодом, равным периоду изменения параметров или удвоенному периоду изменения параметров):**

$$\mathbf{M}(x) = \mathbf{M}_0 \left( \frac{x - x_0}{2} \right) \exp \left( \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_0^z \langle (z - y) \left( \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{L}(y) \right) \rangle dy \right] \right\} dz \right) \quad (46)$$

$\mathbf{L}(y) = \text{Ln}[\mathbf{M}(y)]$  - логарифм от фундаментальной матрицы системы с постоянными параметрами, в которой изменяющиеся параметры представлены соответствующими функциями независимой переменной.

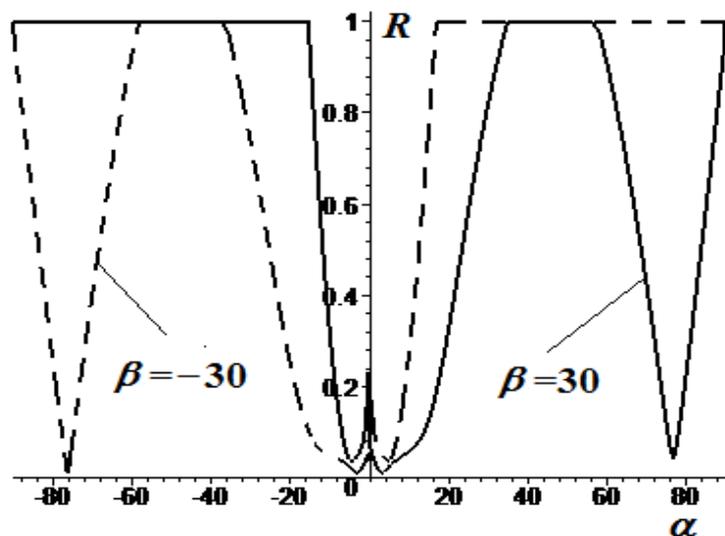
# Практическое применение

- **Управляемые фильтры Брэгга**
  - **Управляемые вентили**
  - **Коммутационные элементы**
  - **Поглощающие и отражающие покрытия**
  - **Параметрические усилители**
  - **Параметрические генераторы**
  - **Периодические строительные конструкции**
- и т.д.**

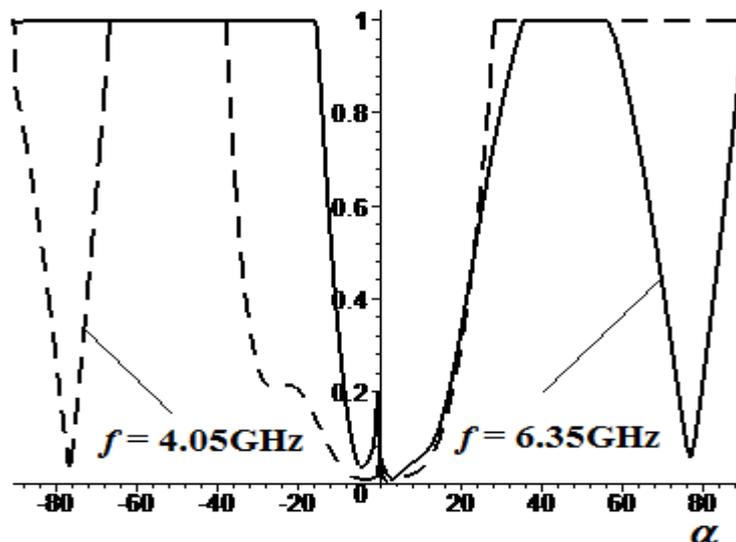
# Двухнаправленный дуплексный управляемый вентиль



Иллюстрация принципа действия вентиль

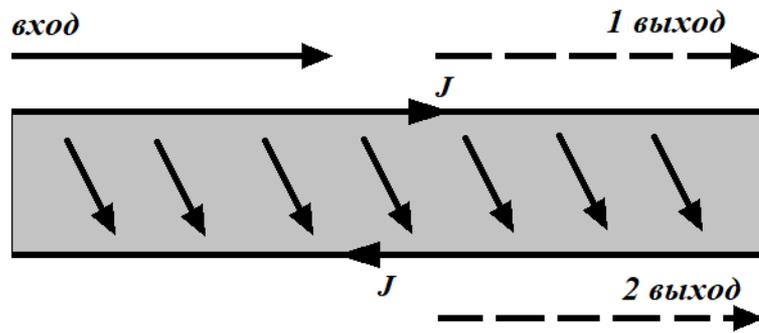


Зависимость коэффициента отражения от угла падения на частоте 6.35 ГГц

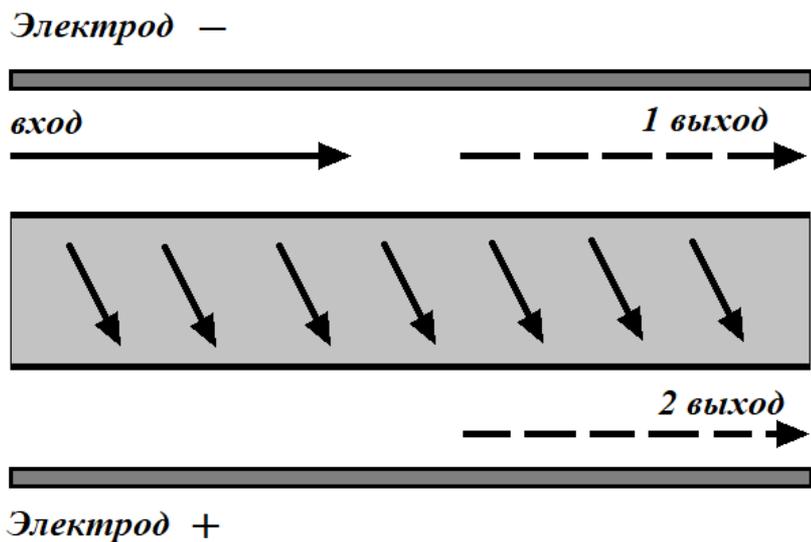


Зависимость коэффициента отражения от угла падения для углов намагничивания -30 и +30 град

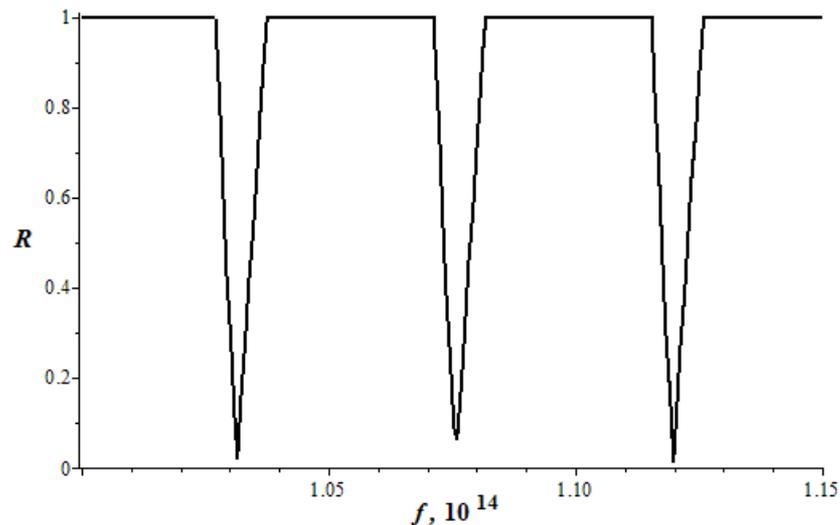
# Оптический ключ на эффекте втягивания



Структура ключа на обыкновенной волне

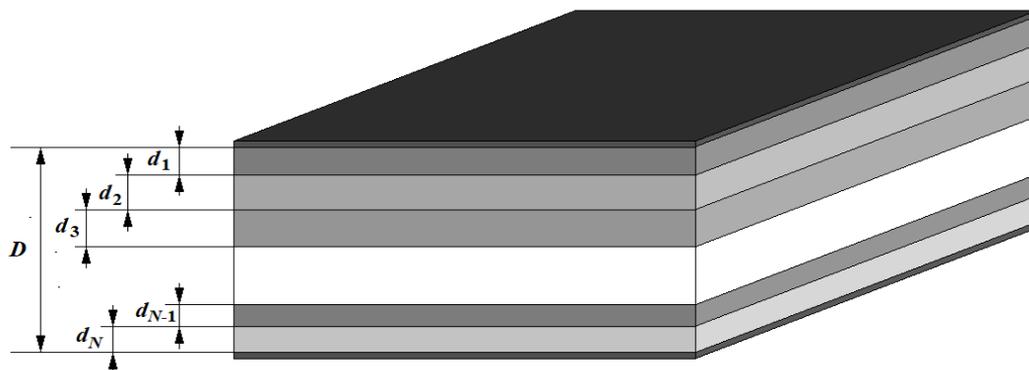


Структура ключа на необыкновенной волне

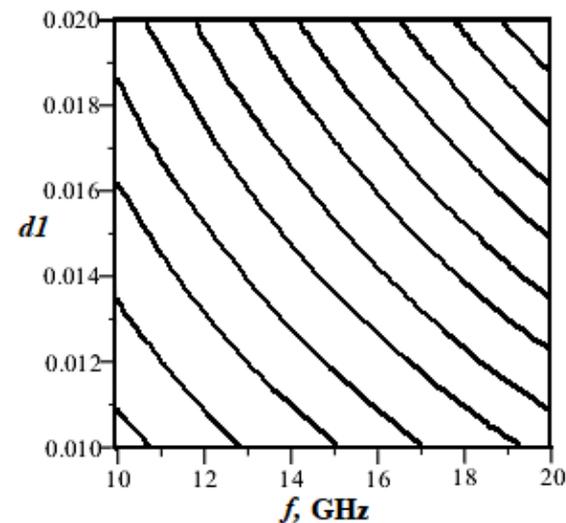


АЧХ ключа на необыкновенной волне

# Резонатор Фабри-Перро на слоистой изотропной структуре



Структура резонатора



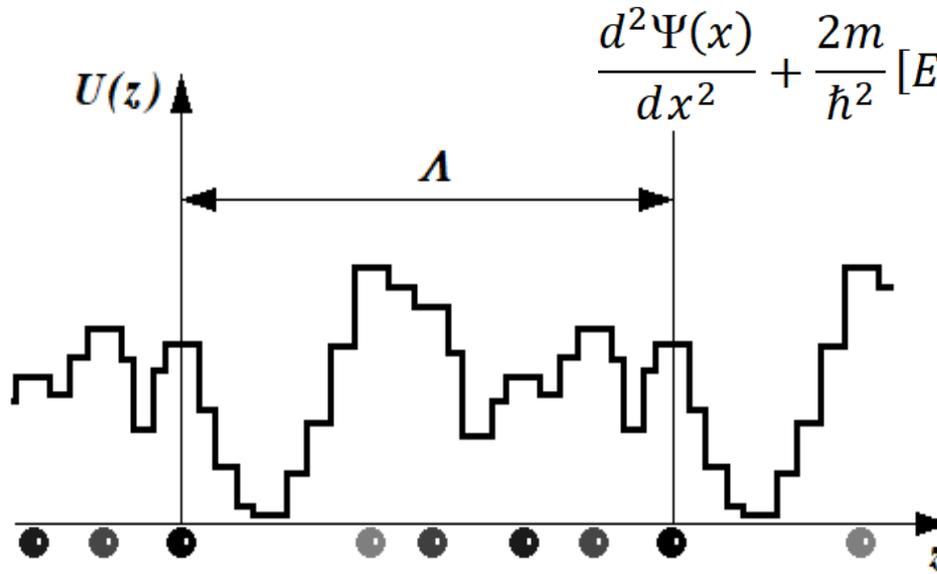
Резонансные кривые

Дисперсионное уравнение

$$\sum_{q=1}^{2^{N-1}} \frac{f_{q,N} \xi_p}{\sqrt{p_1 p_N}} \sinh \psi_q = 0$$

Резонансными кривыми являются границы областей непрохождения волн в соответствующей периодической структуре.

# Решение одномерного стационарного уравнения Шредингера при произвольном законе изменения потенциала



$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)]\Psi(x) = 0 \quad (47)$$

Знаковая функция

$$F_{q,i} = \frac{1}{2} \langle 1 - \text{sign} \left\{ \sin \left[ \frac{\pi}{2^{N+1-i}} (2p - 1) \right] \right\} \rangle$$

Дисперсионное отношение, позволяющее найти волновые числа Блоха

$$\left| \sum_{q=1}^{2^N} \left[ (-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} v_q \left( \lambda_{2-F_{q,i}}^{(1)} - \lambda_{1+F_{q,i}}^{(N)} \right) \exp \left( \sum_{i=1}^N k_{1+F_{q,i}}^{(i)} x^{(i)} \right) \right] \right| = 2 \quad (48)$$

Волновая функция

$$\Psi(x) = \left\{ C \sum_{q=1}^{2^N} \left[ (-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} v_q \lambda_{2-F_{q,i}}^{(1)} \left( 1 - \lambda_{1+F_{q,i}}^{(N)} \right) \cosh \left( \sum_{i=1}^N k_{1+F_{q,i}}^{(i)} x^{(i)} \right) \right] \right. \\ \left. + D \sum_{q=1}^{2^N} \left[ (-1)^{\sum_{i=1}^N F_{q,i}} v_q \lambda_{2-F_{q,i}}^{(1)} \left( 1 - \lambda_{1+F_{q,i}}^{(N)} \right) \sinh \left( \sum_{i=1}^N k_{1+F_{q,i}}^{(i)} x^{(i)} \right) \right] \right\} \exp(jkx) \quad (49)$$

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ**