

Грубая геометрия и некоммутативные дифференцирования

Андроник Арутюнов

Институт Проблем Управления РАН, лаборатория №6

andronick.arutynov@gmail.com

Грубые отображения

Пусть f – отображение между метрическими пространствами. Тогда:

- f называется *собственным*, прообраз каждого ограниченного подмножества $U \subset Y$ — ограничен.
- f называется *борнологическим*, если для всякого $R > 0$, найдется $S_R > 0$ такое, что если $\rho_X(x, x') < R$ то $\rho_Y(f(x), f(x')) < S_R$.
- Собственное борнологическое отображение называется *грубым*.

Отношение грубой эквивалентности вводится следующим образом:

- Отображения метрических пространств $f : X \rightarrow Y$ и $g : X \rightarrow Y$ *близки*, если $\exists C > 0$ т. ч. $\rho_Y(f(x); g(x)) < C, \forall x \in X$
- Метрическое пространство X грубо эквивалентно метрическому пространству Y , если найдутся грубые $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ такие что отображение $f \circ g$ близко к id_Y , а $g \circ f$ близко к id_X .

Метрические пространства

Эквивалентное определение

Назовем метрические пространства M_1, M_2 (в частности графы с естественной метрикой) грубо эквивалентными если:

1) Найдутся положительные константы A, B такие, что для некоторого $f : M_1 \rightarrow M_2$ выполнено

$$\forall x, y \in M_1 : \frac{1}{A} \rho_1(x, y) - B \leq \rho_2(f(x), f(y)) \leq A \rho_1(x, y) + B; \quad (1)$$

2) Найдется константа C такая, что

$$\forall z \in M_2 : \exists x \in M_1 : \rho_2(z, f(x)) \leq C. \quad (2)$$

Естественные примеры

- Любые два ограниченных пространства грубо эквивалентны точке.
- Прямая и целые числа грубо эквивалентны. И вообще $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{Z}^n$ в естественной метрике.
- Плоскость, угол, луч, прямая – попарно не грубо эквивалентны.
- (Теорема Шварца-Милнора) если группа свободно кокомпактно действует на метрическом пространстве, то группа (со словарной метрикой) грубо эквивалентна пространству.

Асимптотическая размерность

Определение

Будем говорить, что метрическое пространство X имеет *асимптотическую размерность* не более чем n , если всякое равномерно ограниченное покрытие $\mathcal{U}$ измельчает некоторое *открытое* равномерно ограниченное покрытие $\mathcal{V}$ такое, что каждая точка $x \in X$ содержится в не более чем $n + 1$ множестве из $\mathcal{V}$.

Мы пишем $asdim(X) \leq n$. Если n минимально, то будем писать $asdim(X) = n$.

Асимптотическая размерность векторного пространства равна «алгебраической».

Теорема

- Если X, Y грубо эквивалентны, то $asdim(X) = asdim(Y)$;
- Если X грубо вложимо в Y , то $asdim(X) \leq asdim(Y)$.

Концы

Пусть γ – граф, у которого степени вершин равномерно ограничены.

Определение

Назовём *числом концов* графа γ величину

$$e(\gamma) = \max_{K \subset \gamma, |K| < \infty} \#\{\text{бесконечных компонент связности в } \gamma \setminus K\}. \quad (3)$$

У $\mathbb{Z}$ – 2 конца, у $\mathbb{Z}^n$ – 1, у бинарного дерева – ∞ .

Неформально выражаясь, число концов – количество способов уйти на бесконечность.

Утверждение

Если пространства грубо эквивалентны, то число концов у них одинаково.

В частности, прямая и луч и не грубо эквивалентны.

Действие групп

Определение

Действием λ группы G на множестве X называется отображение $\lambda : G \times X \rightarrow X$ такое, что $\lambda(e, x) = x$ и $\lambda(g, \lambda(h, x)) = \lambda(gh, x)$.

Будем писать $\lambda(g, x) =: g(x)$.

Действие *свободно* если для $g \neq e$, $g(x) \neq x$.

Пусть группа G с конечной системой образующих $G = \langle \mathcal{X} \rangle$ действует на себе.

Определение

Диаграммой действия $sk(\lambda; \mathcal{X})$ назовём направленный граф такой, что

- Вершины есть элементы группы G ;
- Из a в b ведёт ребро с меткой $x \in \mathcal{X}$ если $x(a) = b$.

Грубая инвариантность

Легко определяется действие группы на диаграмме действия. Оно не всегда будет свободным, т.е. диаграмма не обязана быть эквивалентной группе.

Теорема

В конечно порожденной группе G графы $sk(\lambda; \mathcal{X})$ грубо эквивалентны для разных конечных систем образующих.

Теорема справедлива и для графов, и для отдельных (соответствующих одинаковым наборам элементов) компонент связности.

Замечание

Обратное не имеет места.

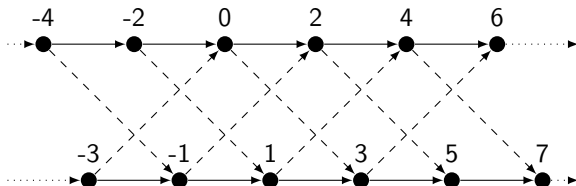
Графы Кэли

В случае действия группы на себе правыми сдвигами $g(a) = ag$ получаем хорошо известные графы Кэли:

Определение

Графом Кэли $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle)$ — назовём такой граф, что вершины это элементы группы G , а рёбра между вершинами $a, b \in G$ — $x \in \mathcal{X}$ т. ч. $ax = b$.

Группа действует на графе свободно. Следовательно (теорема Шварца-Милнора): $\text{Cayley}(G, \langle \mathcal{X} \rangle) \sim G$.



Группа $\mathbb{Z} = \langle 2, 3 \rangle$

Диаграммы сопряженности

Для действия сопряжениями $(g, h) \mapsto hgh^{-1}$ получаем

Определение

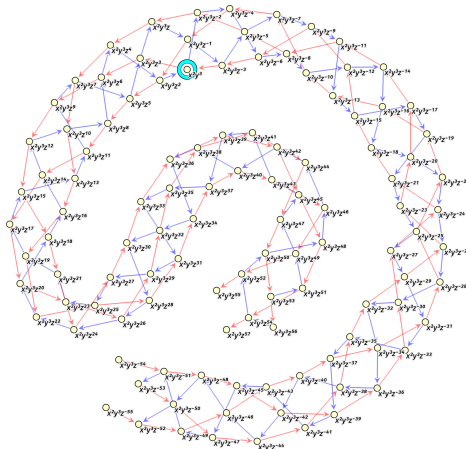
Диаграмма сопряженности $sk(G)$ задается следующим образом:

$V(sk(G)) := \{G\}$, и каждая пара вершин a, b соединена ориентированным ребром, с меткой $x \in X$, если $x^{-1}ax = b$.

Каждая компонента связности накрывается графом Кэли (существует монотонное накрытие).

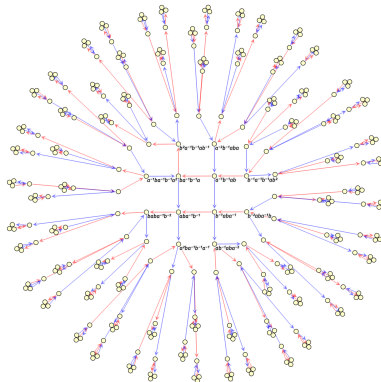
Нильпотентные группы

В нильпотентных группах ранга 2 диаграмма сопряженности $sk_{[u]}$ грубо эквивалентна графу Кэли для группы $G/Z(u)$.



Свободные группы

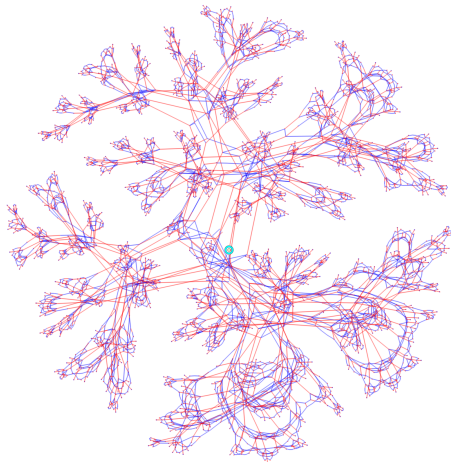
Диаграмма сопряженности свободной группы ранга n для $sk_{[u]}$ состоит из грани циклических перестановок элемента u , а также деревьев степени $2n$, «растущих» из вершин



Фрагмент диаграммы сопряженности $sk_{aba^{-1}b^{-1}}$ для свободной группы ранга 2. Для раскладки графов использовалось ПО

<https://academia.apocryphe.ru/>

Группа Баумслага-Солитера



Шар радиуса 10 в диаграмме сопряженности sk_{ab^2} группы
Баумслага-Солитера $BS(2; 3) = \langle a, t \mid t^{-1}a^2t = a^3 \rangle$.

Дифференцирования в групповых алгебрах

Пусть G – конечно порожденная группа.

Определение

Назовем *групповой алгеброй* $\mathbb{C}[G]$ пространство финитных линейных комбинаций $\sum \alpha_i g_i$. Т.е.

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, g_i \in G, \exists N : \alpha_i = 0, \forall |i| > N \right\}.$$

В качестве коэффициентов можно брать и другие кольца, например $\mathbb{Z}_p$. $\mathbb{C}[G]$ – пространство с базисом $\mathbb{C}[G] = \langle g_i \rangle, g_i \in G$.

Определение

Линейный оператор $d : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ – *дифференцирование*, если

$$d(uv) = d(u)v + ud(v), \quad \forall u, v \in \mathbb{C}[G].$$

Пример: *внутренние дифференцирования* $d_a, a \in \mathbb{C}[G]$

$$d_a(x) := [a, x] = ax - xa.$$

Характеры

Определение

Функцию $\chi : E(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ будем называть характером на направленном графе γ , если для любых двух композируемых стрелок φ, ψ имеет место соотношение

$$\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi). \quad (4)$$

Теорема

Для базисных элементов $g \in G \subset \mathbb{C}[G]$ формула

$$d(g) = \sum_{h \in G} \chi(h, g) hg \quad (5)$$

задает взаимно однозначное соответствие между дифференцированиями $\text{Der}(\mathbb{C}[G])$ и локально финитными характерами $X(\Gamma)$.

Квазивнутренние и внутренние

Определение

Дифференцирование d назовем *квазивнутренным*, если соответствующий ему характер χ тривиален на петлях: сумма по каждому циклу значений характера (с учётом направления рёбер) равна нулю.

Всякое внутреннее дифференцирование – квазивнутреннее.

Теорема

Пространство квазивнутренних дифференцирований $QInn(\mathbb{C}[G])$ образует идеал в алгебре дифференцирований.

Теорема

Для дифференцирований с носителем в бесконечной компоненте связности $[u]$ справедливо

$$\dim \left(QInnDer(\Gamma_{[u]}) / Inn(\Gamma_{[u]}) \right) = e(sk_{[u]}) - 1. \quad (6)$$

Спасибо за внимание!

- John Roe (2003). Lectures on coarse geometry.
<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:116955387>.
- Bunn, J.R. (2011). Bounded Geometry and Property A for Nonmetrizable Coarse Spaces. Doctoral dissertation, University of Tennessee. https://trace.tennessee.edu/utk_graddiss/953.
- Alvarez Lopez, J.A., Candel, A. (2018). Generic coarse geometry of leaves. 1st ed. Lecture Notes in Mathematics. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, July.
- Nowak, P.W., Yu, G. (2023). Large Scale Geometry: Second Edition. EMS Press, July. ISBN: 9783985475186.
<http://dx.doi.org/10.4171/ETB/26>.

Спасибо за внимание

- Работы на Researchgate

<https://www.researchgate.net/profile/Andronick-Arutyunov>

- Текст диссертации (с библиографией)

<http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.17681.61286>

- Arutyunov, A.A. (2023). Differential Calculi in Group Algebras and Group Ends. Mathematical Notes, 114, 133-146.

<https://doi.org/10.1134/S0001434623070155>

- Arutyunov, A.A. (2023). Derivations in group algebras and combinatorial invariants of groups. European Journal of Mathematics, 9, 1-20. <https://doi.org/10.1007/s40879-023-00642-z>

- Arutyunov, A.A. (2020). Derivation Algebra in Noncommutative Group Algebras. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 308, 22-34. <https://doi.org/10.1134/s0081543820010022>