На правах рукописи

Котюков Александр Михайлович

Нахождение положения равновесия динамических систем методами накрывающих отображений и точек совпадения с приложениями к моделям типа Аллена

2.3.1 — Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН).

Научный руководитель: **Павлова Наталья Геннадьевна**
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Смирнов Сергей Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры системного анализа

Обросова Наталия Кирилловна,
кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Защита состоится 23 апреля 2026 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета 24.1.107.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук по адресу: 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН и на сайте www.ipu.ru.

Автореферат разослан «_____» ___________ 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета 24.1.107.02,
канд. физ.-мат. наук

Тремба
Андрей Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность исследования

Равновесные состояния играют важную роль при исследовании сложных динамических систем. Равновесным состоянием, или равновесием, называют такое состояние системы, при котором она способна самостоятельно поддерживать свое существование сколь угодно долго при отсутствии внешних воздействий. Если система способна вернуться в равновесное состояние после того, как она была выведена из него внешними воздействиями или динамикой самой системы, то такое равновесное состояние называется устойчивым. Устойчивые равновесные состояния являются основой для эффективного функционирования системы и ее долговечности.

Помимо положений равновесия во всем переменным фазового вектора также исследуют устойчивость положений частичного равновесия, т.е. равновесных состояний по части переменных. Такая задача естественным образом возникает в различных приложениях, например, в области теории управления и стабилизации.

Исследование вопросов, связанных с равновесием в сложных системах, может быть целесообразно в различных областях науки. Так, например, в биологии активно исследуются модели распространения инфекционных заболеваний и эпидемий, в которых положение равновесия позволяет определить критический уровень переносчиков заболевания; в экологии широко исследуются модели загрязнения окружающей среды, очистки сточных вод и прогнозирования аварийных ситуаций нефтеперерабатывающих предприятий, в которых равновесные состояния служат индикатором для принятия экстренных мер; подобные вопросы могут возникать при моделировании транспортных макросистем, в которых равновесное состояние позволяет определить места высокой концентрации транспортных потоков, а также целесообразность инвестиций, и другие.

Задача о нахождении положения равновесия сводится к решению системы алгебраических уравнений, вообще говоря, нелинейных. Часто в анализе возникает задача определения равновесных состояний, удовлетворяющих определенным ограничениям. В силу ограничений к системе добавляются неравенства, что значительно усложняет ее решение. Задача такого рода очень важна при анализе экономических систем, в частности, при производственном планировании, определении конкурентного равновесия и государственном регулировании цен. Система, сформированная внутри отдельно взятого государства, непосредственно влияет на уровень доходов, прибыль компаний, инвестиционную активность, трудоустройство и другие аспекты жизни общества.

Настоящее исследование посвящено развитию методов анализа положений равновесия и частичного равновесия в системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств, с помощью теории накрывающих отображений и точек совпадения, а также приложения полученных результатов при исследовании моделей типа Аллена.

Степень разработанности темы исследования

Математические методы исследования сложных систем, в частности, методы теории накрывающих отображений и точек совпадения развивались Аваковым Е.Р., Арутюновым А.В., Гельманом Б.Д., Дмитруком А.В., Дыхтой В.А., Жуковским Е.С., Жуковским С.Е., Милютиным А.А., Обуховским В.В., Шоке Г. и другими. Среди современных приложений математических методов к исследованию сложных экономических систем можно выделить работы Бекларяна Л.А., Измаилова А.Ф., Новикова Д.А., Павловой Н.Г., Чхартишвили А.Г., Шананина А.А. и других. Аналогичный подход используется при исследовании и иных систем. Здесь можно отметить работы Галяева А.А., Новикова Д.А., Орлова Ю.Н., Самуйлова К.Е., Самсонюк О.Н., Хлебникова М.В. и других.

Непосредственные вычисления проводились для различных линейных моделей, в том числе, для моделей Эрроу–Дебре, Курно, Бертрана и некоторых других. Работы по анализу положения равновесия в нелинейных моделях в то же время немногочисленны.

Таким образом, существует потребность в разработке математических методов для исследования систем, динамика которых определяется совокупностью нелинейных уравнений, в частности, разностью отображений метрических пространств.

Цель исследования

Целью диссертационной работы является развитие методов исследования равновесных состояний, удовлетворяющих заданным ограничениям, в системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств, с применением полученных результатов для анализа моделей типа Аллена.

Для достижения поставленной цели были определены следующие **задачи**.

1) Развить методы исследования равновесных состояний в системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств, с помощью результатов теории точек совпадения и накрывающих отображений.
2) Исследовать различные модели из класса моделей типа Аллена с внешним воздействием (открытые модели типа Аллена с постоянными и непостоянными эластичностями) методами теории накрывающих отображений и точек совпадения, а также функционального анализа, на предмет положения равновесия и его свойств.
3) Исследовать различные модели из класса моделей типа Аллена без внешнего воздействия (модель типа Аллена–Эрроу–Дебре, закрытая модель типа Аллена) методами линейной алгебры, функционального анализа, а

также теории накрывающих отображений и точек совпадения, на предмет положения равновесия и его свойств.

Объект исследования – системы, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств.

Предмет исследования – равновесные состояния динамических систем, а также их свойства, такие как единственность и устойчивость к малым возмущениям параметров системы.

Методы исследования

В работе используются методы линейной алгебры, математического анализа, функционального анализа, численных методов, а также теории накрывающих отображений и точек совпадения.

Научная новизна исследования

Научная новизна исследования состоит в разработке метода нахождения положений равновесия в динамических системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств. С помощью теоремы о точках совпадения была доказана сходимость алгоритма поиска положения равновесия. Полученные результаты успешно применены в исследовании различных динамических моделей типа Аллена, в рамках которого получены условия существования положения равновесия, исследованы его свойства.

Теоретическая значимость

Методы, разработанные в настоящей диссертации, не требуют невырожденности матрицы Якоби и гладкость отображений, определяющих динамику рассматриваемой системы, что является основой для использования многих общеизвестных методов. Сходимость предложенного алгоритма поиска точки совпадения доказана без априорных предположений гладкости рассматриваемых отображений.

Практическая значимость

Результаты настоящей диссертационной работы могут быть использованы для исследования различных динамических моделей, в том числе построенных по реальным статистическим данным. Разработанные методы могут быть использованы для формализации и решения задач управления, а также поддержки и принятия решений в биологии, физике, экологии, экономике и других научных областях.

Апробация результатов

Достоверность полученных утверждений подтверждена строгими математическими рассуждениями и проведением численных экспериментов.

Результаты работы были доложены на различных российских и международных конференциях: Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы», Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем», Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами», Международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». Результаты диссертации обсуждались на семинаре «Оптимизация и нелинейный анализ» под руководством Арутюнова А.В., Жуковского С.Е и Павловой Н.Г. в ИПУ РАН, семинаре «Теория автоматического управления» под руководством Хлебникова М.В. и Резкова И.Г., а также семинара кафедры высшей математики под руководством Иванова Г.Е. в МФТИ.

Личный вклад. Все основные результаты и расчеты получены лично автором.

Публикации. Основные положения и выводы диссертационного исследования опубликованы в 8 научных работах. По результатам опубликована одна статья в рецензируемом научном издании по специальности 2.3.1 (физ.-мат.), относящемся к категории К1 Перечня ВАК [1], две работы в журналах, индексированных в международных базах данных и приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1 [2,3], 4 работы в материалах международных и всероссийских конференция [4–7] и одна публикация в прочих изданиях [8].

Положения, выносимые на защиту и соответствие пунктам паспорта специальности 2.3.1:

1) Метод нахождения положения равновесия сложных динамических систем, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств (пункт 1: Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта).
2) Условия существования положения равновесия для двух моделей типа Аллена с внешним воздействием (открытых моделей типа Аллена с постоянными и непостоянными эластичностями) (пункт 4: Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта).
3) Условия существования положения равновесия и его свойства для двух моделей типа Аллена без внешнего воздействия (модели Аллена–Эрроу–Дебре и закрытой модели типа Аллена) (пункт 4: Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта).

Связь с планами научных исследований

Работа выполнялась при поддержке гранта Российского фонда фунда-

ментальных исследований (проект №20-01-00610) и грантов Российского научного фонда (проекты №20-11-20131, №22-11-00042).

Основное содержание диссертации

В **первой главе** описан исследуемый класс моделей и формализована решаемая задача.

В первом разделе формализуются рассматриваемые модели. Рассмотрен класс систем, динамика которых определяется нормальной автономной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = F_i(x) - G_i(x) + q_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{1}$$

$$\dot{x}_i = F_i(x) - G_i(x), \quad i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Здесь $m \leqslant n, x = (x_1, ..., x_n),\ \dot{x} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \in \mathbb{R}^n,\ q = (q_1, ..., q_m) \in \mathbb{R}^m;\ F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x)),\ G(x) = (G_1(x), ..., G_m(x))$.

Определение 1. Будем говорить, что модель σ_o принадлежит классу моделей с внешним воздействием $\mathbb{M}_o$ (модель σ_c принадлежит классу моделей без внешнего воздействия $\mathbb{M}_c$), если ее динамика определяется системой вида (1) ((2)).

Диссертационное исследование посвящено исследованию систем (1), (2) на предмет положения равновесия, удовлетворяющего определенным ограничениям, т.е. решения систем следующего вида:

$$F_i(x) - G_i(x) + q_i = 0,\ x \in M,\ i = \overline{1,m}; \tag{3}$$

$$F_i(x) - G_i(x) = 0,\ x \in M,\ i = \overline{1,m}; \tag{4}$$

где $M \subset \mathbb{R}^n$ – заданное множество.

Определение 2. Если $m = n$, то решения систем (3), (4) называются положением равновесия в моделях $\sigma_o \in \mathbb{M}_o$, $\sigma_c \in \mathbb{M}_c$, соответственно. Если $m < n$, то решения систем (3),(4) называются положениями частичного равновесия в моделях σ_o, σ_c, соответственно.

Интерес для исследования представляют как модели из класса $\mathbb{M}_o$, так и модели из класса $\mathbb{M}_c$. Отсутствие вектора постоянных возмущений позволяет использовать общеизвестные результаты для получения условий существования положений равновесия и частичного равновесия, а также исследования их свойств, таких как, например, единственность и устойчивость по отношению к малому изменению входных параметров.

Модели классов $\mathbb{M}_c$ и $\mathbb{M}_o$ часто встречаются в прикладных задачах. Например, в биологии широко известна модель Лотки–Вольтерры, описывающая поведение двух групп биологических особей, модели распространения инфекционных заболеваний и эпидемий. В экологии исследуются модели очистки сточных вод и прогнозирования аварийных ситуаций на нефтеперерабатывающих предприятиях. Подобные модели могут возникать при моделировании транспортных макросистем, а также различного рода маятников и иных механических систем. Подобные модели можно встретить и в экономике, и на примере нескольких экономических моделей будут продемонстрированы результаты диссертационного исследования.

Вектор q выполняет роль внешних постоянных воздействий. В модели Лотки–Вольтерры в качестве такого воздействия может выступать регулирование охотничьего или рыболовного промысла или естественное вымирание видов. В модели очистки сточных вод в качестве постоянного воздействия можно взять допустимое увеличение отходов либо темп природной очистки водоема. В задачах физики вектор q может выступать постоянно действующей внешней силой, такой как сила притяжения или постоянный воздушный поток.

В диссертации показано, что наличие дополнительного слагаемого q может сильно повлиять на структуру модели и, как следствие, сделать применение тех или иных общеизвестных методов невозможным.

Теперь перейдем к описанию экономических моделей, на которых будет рассмотрено приложение разработанных методов.

Введем обозначение $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ i = \overline{1,n}\}$.

Модель типа Аллена–Эрроу–Дебре

Данная модель является обобщением известной модели Эрроу–Дебре. Пусть заданы числа $m \in \mathbb{N}, m \leqslant n$; $I \in \mathbb{R}_+$, векторы $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n, a_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,n}$; $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (0;1)^n,\ C = (C_1, ..., C_m) \in \mathbb{R}^m_+$ и такая матрица $\mathfrak{B}$ размерности $m \times n$ с компонентами $\beta_{ij} > 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$, что:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} < 1, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Пусть заданы векторы $c_1 = (c_{11}, ..., c_{1n}), c_2 = (c_{21}, ..., c_{2n}) \in \mathbb{R}^n_+$ такие, что $c_{1i} < c_{2i},\ i = \overline{1,n}$.

Предположим, что

$$\langle c_2, a\rangle < I. \tag{6}$$

Функция $S_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ в данной модели определяется формулой:

$$S_i(p) = K_i \prod_{j=1}^{n} p_j^{-\beta_{ij}} - L_i p_i^{-1}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{7}$$

где

$$K_i = \frac{C_i b_i^{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}} \prod\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}^{\beta_{ij}}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{ki}\right)^{-\sum\limits_{l=1}^{n} \beta_{kl}}}, \quad L_i = \sum_{s=1}^{m} \frac{b_s \beta_{si}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{sj}}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{8}$$

Функция $D_i : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ определяется формулой:

$$D_i(p_1, ..., p_n) = a_i + \frac{\alpha_i \left(I - \langle p, a \rangle\right)}{p_i \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k}, \quad p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n_+, \quad i = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Рассмотрим систему:

$$\dot{p}_i = D_i(p) - S_i(p), \ i = \overline{1,m}; \tag{10}$$

где D определено формулой (9), а S – формулой (7).

Определение 3. Моделью типа Аллена–Эрроу–Дебре назовем следующий набор параметров $\sigma_{ad} = (c_1, c_2, I, a, \alpha, C, \mathfrak{B})$, удовлетворяющий (5), (6) и определяющий систему (10). Множество всех таких моделей обозначим через Σ_{ad}.

Легко видеть, что эта модель принадлежит подклассу $\mathbb{M}_c$.

Параметры модели имеют следующий экономический смысл: векторы c_1, c_2 задают естественные ограничения на цены товаров, I – бюджетные ограничения производителей товаров, вектор a описывает минимальные количества товаров, которые не являются предметом выбора и приобретаются в любом случае, вектор α описывает относительную «ценность» каждого товара, на которую ориентируется потребитель после того, как приобрел товары в соответствии с вектором a, вектор C описывает коэффициенты нейтрального технического прогресса, а матрица $\mathfrak{B}$ определяет эластичности предложения по ресурсам.

Модели типа Аллена с постоянными эластичностями

Рассмотрим отображения спроса

$$D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+, \ D(p) = (D_1(p), ..., D_n(p)),$$

и предложения

$$S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+, \ S(p) = (S_1(p), ..., S_n(p)).$$

Эти отображения в будущем будут иметь специальный вид.

Предположим, что нам известны векторы $p^* \in P, D^* \in \mathbb{R}^n_+,\ D^* = (D_1^*, ..., D_n^*)$ и $S^* \in \mathbb{R}^n_+,\ S^* = (S_1^*, ..., S_n^*)$, которые связаны соотношением:

$$D^* = D(p^*), \tag{11}$$

$$S^* = S(p^*). \tag{12}$$

Пусть также известна матрица $\mathcal{E} = (E_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, где элементы $E_{ij} \in \mathbb{R}$ удовлетворяют равенству

$$E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p)\frac{p_j}{D_i(p)}, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{13}$$

Аналогично определим матрицу $\widetilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ с элементами $\widetilde{E}_{ij} \in \mathbb{R}$, которые удовлетворяют равенству

$$\widetilde{E}_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p)\frac{p_j}{S_i(p)}, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Из (13), (14) мы получаем системы уравнений в частных производных относительно неизвестных функций D_i и S_i

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \frac{E_{ij} D_i(p)}{p_j}, \quad i,j = \overline{1,n}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p) = \frac{\widetilde{E}_{ij} S_i(p)}{p_j}, \quad i,j = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Решая задачи (11), (15) и (12), (16), мы получаем явный вид отображений спроса D и предложения S.

Теорема 1. *Набор параметров $(p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}})$ однозначно определяют отображения*

$$D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+, \quad S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+. \tag{17}$$

по формулам:

$$D_i(p_1, ..., p_n) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}; \tag{18}$$

$$S_i(p_1, ..., p_n) = S_i^* \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-\widetilde{E}_{ij}} p_j^{\widetilde{E}_{ij}}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Пусть наконец известен вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_n)$ такой, что $a_i \geqslant 0$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим систему:

$$\dot{p} = D(p) - S(p) + a, \tag{20}$$

где D определено формулой (18), а S – формулой (19).

Определение 4. Открытой моделью типа Аллена с постоянными эластичностями назовем набор параметров

$$\sigma_o = (c_1, c_2, a, p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}}),$$

определяющий систему (20). Множество таких моделей обозначим через Σ_o.

Заметим, что данная модель принадлежит классу $\mathbb{M}_o$.

Параметры моделей из класса Σ_o имеют экономический смысл. Под открытостью здесь подразумевается наличие вектор импорта a, векторы c_1, c_2 задают ограничения на цены, векторы S^*, D^* – это известные значения спроса и предложения при известных ценах p^*, а матрицы $\mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}}$ – матрицы эластичностей спроса и предложения по цене соответственно.

В диссертации также рассматривается модель Аллена с постоянными эластичностями, в которой отсутствует вектор a. В ней рассматривается система

$$\dot{p} = D(p) - S(p), \tag{21}$$

где D определено формулой (18), а S – формулой (19).

Определение 5. Закрытой моделью типа Аллена с постоянными эластичностями называется набор параметров

$$\sigma_c = (c_1, c_2, p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{E}}),$$

определяющий систему (21). Множество таких моделей обозначим через Σ_c.

Легко видеть, что данная модель принадлежит классу $\mathbb{M}_c$.

Модель типа Аллена с непостоянными эластичностями

В предыдущих моделях матрицы $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ состояли из действительных чисел. Теперь опишем модели, в которых эти матрицы в качестве элементов содержат функции от p.

Пусть $\lambda_{ij}, \widetilde{\lambda}_{ij}, \chi_{ij}, \widetilde{\chi}_{ij} \in \mathbb{R}$ и

$$E_{ij}(p) = \lambda_{ij} p_j^{\chi_{ij}},\ \widetilde{E}_{ij}(p) = \widetilde{\lambda}_{ij} p_j^{\widetilde{\chi}_{ij}},\ i, j = \overline{1, n}. \tag{22}$$

Обозначим $\mathcal{E}(p) = (E_{ij}(p))_{i,j=\overline{1,n}}$ и $\widetilde{\mathcal{E}} = (\widetilde{E}_{ij}(p))_{i,j=\overline{1,n}}$. Для функций $E_{ij}(p)$ и $\widetilde{E}_{ij}(p)$ предполагаются выполненными следующие соотношения:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{E_{ij}(p)D_i(p)}{p_j},\ i,j=\overline{1,n}; \tag{23}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial p_j} = \frac{\widetilde{E}_{ij}(p)S_i(p)}{p_j},\ i,j=\overline{1,n}. \tag{24}$$

Доказана следующая теорема об однозначной определимости отображений S и D.

Теорема 2. *Набор* $(p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}(p), \widetilde{\mathcal{E}}(p))$ *однозначно определяет отображения*

$$D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+, \quad S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+. \tag{25}$$

по формулам

$$D_i(p) = D_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}}(p_j^{\chi_{ij}} - (p_j^*)^{\chi_{ij}})\right),\ \ i=\overline{1,n}; \tag{26}$$

$$S_i(p) = S_i^* \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{\widetilde{\lambda}_{ij}}{\widetilde{\chi}_{ij}}(p_j^{\widetilde{\chi}_{ij}} - (p_j^*)^{\widetilde{\chi}_{ij}})\right),\ \ i=\overline{1,n}. \tag{27}$$

Отображения D и S, определенные формулами (26) *и* (27) *являются решениями задач* (11), (23) *и* (12), (24) *соответственно.*

Пусть наконец известен вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_n)$ такой, что $a_i \geqslant 0$ для любого $i = \overline{1,n}$.

Рассмотрим систему:

$$\dot{p} = D(p) - S(p) + a, \tag{28}$$

где D определено формулой (26), а S – формулой (27).

Определение 6. Открытой моделью типа Аллена с непостоянными эластичностями назовем набор $\sigma_f = (a, c_1, c_2, p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}(p), \widetilde{\mathcal{E}}(p))$, где элементы $E_{ij}(p)$ и $\widetilde{E}_{ij}(p)$ матриц $\mathcal{E}(p)$ и $\widetilde{\mathcal{E}}(p)$ соответственно определены формулами (22), а сам набор определяет систему (28) Множество всех таких моделей обозначим через Σ_f.

Легко видеть, что данная модель принадлежит классу $\mathbb{M}_o$.

Замечание 1. Заметим, что $\Sigma_o \not\subset \Sigma_f$. Действительно, если в модели $\sigma_f \in \Sigma_f$ элементы матриц $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ являются постоянными величинами, то $\chi_{ij} = 0\, \forall i, j = \overline{1,n}$. Однако в таком случае формулы (26), (27) не имеют смысла.

Задача исследования описанных моделей состоит в следующем: 1) получить условия существования положения равновесия или частичного равновесия; 2) изучить свойства положений равновесия или частичного равновесия в этих моделях; 3) установить зависимость положения равновесия от входных параметров.

Во **второй** главе приводятся методы исследования систем из классов $\mathbb{M}_o$ и $\mathbb{M}_c$. Метод решения поставленных задач основан на результатах теории накрывающих отображений и точек совпадения. В первом разделе дано определение точки совпадения и накрывающего отображения. Приведены достаточные условия существования точки совпадения для двух отображений, одно из которых является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица.

Пусть $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ – метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Пусть задано отображение $\Psi : X \to Y$. Через $B_X(x, r)$ обозначим шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$, аналогично обозначим $B_Y(y, r)$. Пусть $M \subseteq X$ – множество с непустой внутренностью.

Определение 7. Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется α-накрывающим на множестве $M \subseteq X$, если для любых $x \in M$, $r > 0$ таких, что $B_X(x, r) \subseteq M$, выполнено включение $\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r)$.

Определение 8. Точка $\xi \in X$ называется точкой совпадения отображений $\Psi, \Phi : X \to Y$, если $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$.

Во втором разделе изложен основной результат главы, а именно: предложен метод нахождения положения равновесия в системах, динамика которых определяется разностью отображений метрических пространств, одно из которых является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица. Также доказана его сходимость.

Известно, что если пространство X полное и заданы $\alpha > 0$, $x_0 \in X$, $R > 0$, а также $\Psi : X \to Y$ является α-накрывающим на $B_X(x, R)$ и замкнутым, то тогда для любого неотрицательного $\beta < \alpha$ и любого отображения $\Phi : B_X(x_0, R) \to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что $\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leqslant (\alpha - \beta)R$, для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi \in X$, т.е. $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_X(x_0, \xi) \leqslant \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Доказательство этого утверждения основано на построении следующей последовательности. Зафиксируем $x_0 \in X$ и построим по индукции x_i, $i = 1, 2, 3, \dots$ такие, что

$$\rho_X(x_{i+1}, x_i) \leqslant \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)), \tag{29}$$

$$\rho_Y(\Psi(x_{i+1}), \Phi(x_i)) \leqslant \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)), \tag{30}$$

где $\delta > 0 : \beta + \alpha\delta < \alpha$. Существование данной последовательности вытекает из того, что отображение Ψ является α-накрывающим.

На основании условий (29), (30) предлагается построить следующий алгоритм нахождения точки совпадения в предположении, что множество M является вполне ограниченным.

Алгоритм 1.

Шаг 0. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения, $x_0 \in M$ – начальное приближение, $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса, положить номер итерации $i = 0$.

Шаг 1. Проверить выполнение неравенства $\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) < \varepsilon$. Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 2.

Шаг 2. Положить $\sigma_i = \delta/2\ \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))$ и построить σ_i-сеть Z на множестве $B_X(x_i, \alpha^{-1}\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)))$.

Шаг 3. Поочередно брать точки $\widetilde{x} \in Z$ и проверять выполнение неравенства:

$$\rho_Y(\Psi(\widetilde{x}), \Phi(x_i)) \leqslant \delta\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)).$$

Если подходящая под условие точка найдена, то перейти к шагу 4. Если нет, то уменьшить σ_i в два раза, построить новую сеть Z и повторить перебор.

Шаг 4. Положить $x_{i+1} = \widetilde{x}$, увеличить i на единицу и перейти к шагу 2.

Основным результатом главы 2 является следующая теорема.

Теорема 3 (О сходимости Алгоритма 1)**.** *Пусть пространство X полно, $M \subset X$ – вполне ограниченное множество и заданы $x_0 \in X$, $R > 0$ такие, что $B_X(x_0, R)$ вполне ограничено в X. Далее, пусть отображение Ψ является α-накрывающим и непрерывным на $B_X(x_0, R)$, а отображение Φ удовлетворяет условию Липшица на $B_X(x_0, R)$ с константой $\beta < \alpha$.*

Тогда для любого $\delta > 0$ такого, что $\beta + \alpha\delta < \alpha$,

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) < (\alpha - (\beta + \alpha\delta))R,$$

Алгоритм 1 сходится за конечное число шагов, причем

$$\rho_X(x_0, \xi) \leqslant (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1}\, \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Таким образом, метод нахождения положения равновесия в системах (1) и (2) состоит в том, чтобы рассмотреть положения равновесия в этих системах как точку совпадения отображений из правых частей этих систем, применить теорему о существовании точки совпадения, а затем применить Алгоритм 1.

В третьем разделе изложены результаты теории функционального анализа, в частности, теорема Банаха о неподвижной точке. С помощью этой теоремы можно исследовать некоторые модели из класса $\mathbb{M}_o$ и $\mathbb{M}_c$, например, открытые модели типа Аллена с постоянными и непостоянными эластичностями.

В четвертом разделе приведена теорема о совместности систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, к которым сводится вопрос о положении равновесия в некоторых моделях из класса $\mathbb{M}_o$ и $\mathbb{M}_c$, например, закрытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями.

В **третьей главе** продемонстрировано применение полученных методов на моделях из класса $\mathbb{M}_o$. В первом разделе исследована открытая модель типа Аллена с постоянными эластичностями $\sigma_o \in \Sigma_o$. Для нее получены достаточные условия существования положения равновесия, а также положения частичного равновесия.

Замечание 2. При исследовании вопроса о существовании положения частичного равновесия мы рассматриваем новые отображения $\widetilde{S}, \widetilde{D} : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m_+$, $\widetilde{S} = \mathrm{Pr} \circ S$, $\widetilde{D} = \mathrm{Pr}\, P \circ D$, где $\mathrm{Pr} : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^m_+$ – оператор проектирования из $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^m_+$, определяемый формулой $\mathrm{Pr} = \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times n-m} \end{pmatrix}$, где I – единичная матрица. Легко видеть, что отображение $\widetilde{S}$ (как и $\widetilde{D}$) не является биективным. В дальнейшем для удобства мы будем использовать старые обозначения через S и D соответственно.

Здесь и далее норма произвольного линейного оператора Q, действующего из нормированного пространства $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ в нормированное пространство $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ определена формулой: $\|Q\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}}=1} \|Qx\|_{\mathcal{Y}}$.

Введем обозначения:

$$\widehat{\alpha}(\sigma_o) = \min_{p\in P} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^* \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^* \right)^{-1} \right\|^{-1}, \tag{31}$$

$$\widehat{\beta}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,m}} D_i^* \left(\prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \max_{l=1,2} \left\{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \right\} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n \max_{l=1,2} c_{lj}^{E_{ij}}, \tag{32}$$

$$\widehat{\gamma}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,m}} |S_i(\widetilde{c}) + a_i - D_i(\widetilde{c})|. \tag{33}$$

Теорема 4. *Пусть параметры модели σ_o удовлетворяют условиям:*

1. $\det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^* \neq 0$;

2. $\widehat{\gamma}(\sigma_o) < \widehat{\alpha}(\sigma_o) - \widehat{\beta}(\sigma_o)$.

Тогда в модели σ_o существует положение частичного равновесия $p^0 \in \operatorname{int} P$.

Положим

$$\overline{\alpha}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{c_{2i}-c_{1i}} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{F}_{ki}| \max\{c_{1i}^{1-\widetilde{E}_{ki}}, c_{2i}^{1-\widetilde{E}_{ki}}\}}{S_k^* \prod\limits_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-\widetilde{E}_{kj}} \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \min\{c_{1i}^{\widetilde{E}_{kj}}, c_{2i}^{\widetilde{E}_{kj}}\}},$$

$$\overline{\beta}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,m}} D_i^* \left(\prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}}\right) \sum_{k=1}^{n} |E_{ik}| \frac{c_{2k}-c_{1k}}{2} \max_{l=1,2} \left\{c_{lk}^{E_{ik}-1}\right\} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \max_{l=1,2} c_{lj}^{E_{ij}},$$

$$\overline{\gamma}(\sigma_o) = \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(\widetilde{c}) + a_i - D_i(\widetilde{c})|,$$

где $\widetilde{F}_{ij}$ – элемент матрицы $\widetilde{\mathcal{F}}$, обратной к матрице $\widetilde{\mathcal{E}}$, а $\widetilde{c} = \frac{c_1+c_2}{2}$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть параметры модели $\sigma_o \in \Sigma_o$ удовлетворяют следующим условиям:*

1. $\det \widetilde{\mathcal{E}} \neq 0$;
2. $\overline{\gamma}(\sigma_o) < \overline{\alpha}(\sigma_o) - \overline{\beta}(\sigma_o)$.

Тогда в модели σ_o существует единственное положение равновесия $p^0 \in \operatorname{int} P$.

Исследован вопрос об устойчивости положения равновесия относительно малого изменения входных параметров.

Теорема 6. *Пусть модель σ_o удовлетворяет всем условиям теоремы 5 и последовательность моделей $\{\sigma_o^N\} \subset \Sigma_o$ сходится к σ_o. Тогда для любого положения равновесия $p \in P$ в модели σ_o существует натуральное число $\overline{N} > 0$ и последовательность $\{p^N\} \subset \mathbb{R}_+^n$ такие, что:*

1. *при любом $N > \overline{N}$ вектор p^N является положением равновесия в модели σ_o^N;*
2. *$p^N \to p$ при $N \to \infty$.*

Проиллюстрирована зависимость положения равновесия и положения частичного равновесия от изменения входных параметров модели.

Во втором разделе изучена открытая модель типа Аллена с непостоянными эластичностями $\sigma_f \in \Sigma_f$. Показано, что отображения в этой модели могут не быть биективными. Получены достаточные условия существования положения равновесия в этой модели. Введем обозначения

$$\overline{\alpha}(\sigma_f) = \min_{p\in P}\left(\left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^*\left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^*\right)^{-1}\right\|\right)^{-1}, \tag{34}$$

$$\overline{\beta}(\sigma_f) = \max_{i=\overline{1,n}} D_i^* \prod_{j=1}^{n} \max_{m=1,2} \exp\left(\frac{\lambda_{ij}}{\chi_{ij}}(c_{mj}^{\chi_{ij}} - p_j^{*\chi_{ij}})\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{c_{2k}-c_{1k}}{2}\frac{|\lambda_{ik}|}{c_{1k}}, \tag{35}$$

$$\overline{\gamma}(\sigma_f) = \max_{i=\overline{1,n}} |S_i(\widetilde{c}) + a_i - D_i(\widetilde{c})|. \tag{36}$$

Теорема 7. *Пусть параметры модели $\sigma_f \in \Sigma_f$ удовлетворяют условиям:*
1) $\det\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^* \neq 0$; *2)* $\overline{\gamma}(\sigma_f) < \overline{\alpha}(\sigma_f) - \overline{\beta}(\sigma_f)$.
Тогда в модели σ_f существует положение равновесия $p^0 \in \operatorname{int} P$.

Проиллюстрирована зависимость положения равновесия от изменения входных параметров модели.

В **четвертой** главе исследованы различные модели из класса $\mathbb{M}_c$.

В первом разделе изучена модель типа Аллена–Эрроу–Дебре, для которой проиллюстрирован характер зависимости положения равновесия от изменения входных параметров.

Во втором разделе исследована закрытая модель типа Аллена с постоянными эластичностями. Для нее с помощью результатов теории систем линейных уравнений и неравенств получены необходимые условия и достаточные условия существования положения равновесия.

Введем обозначения

$$a_{ij} = \begin{cases} E_{ij} - \widetilde{E}_{ij},\ i,j = \overline{1,n}; \\ \ln\frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum\limits_{k=1}^{n}(E_{ik} - \widetilde{E}_{ik})\ln p_k^*,\ i = \overline{1,n},\ j = n+1. \end{cases}$$

Теорема 8. *Пусть в модели $\sigma_c \in \Sigma_c$ существует положение равновесия. Тогда параметры этой модели удовлетворяют условию* $\operatorname{rang}(\mathcal{E} - \widetilde{\mathcal{E}}) = \operatorname{rang} A$, *где* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

Теорема 9. *Пусть параметры модели закрытого рынка $\sigma_c \in \Sigma_c$ удовлетворяют условию:* $\forall\, m = \overline{1,n}\quad \det F_m = 0,\ \det G_m \geqslant 0,$ *где*

$$F_m = (f_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}}, G_m = (G_{mij})_{i,j=\overline{1,n+1}},$$

$$f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij},\ \ i,j = \overline{1,n}; \\ C_{1i},\ \ i = \overline{1,n}, j = n+1; \\ E_{mj} - \widetilde{E}_{mj},\ \ i = n+1, j = \overline{1,n}; \\ \ln\frac{S_m^*}{D_m^*} + \sum\limits_{k=1}^{n}(E_{mk} - \widetilde{E}_{mk})\ln p_k^*,\ \ i,j = n+1; \end{cases}$$

$$g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, \quad i,j=\overline{1,n}; \\ C_{1i}, \quad i=\overline{1,n}, j=n+1; \\ -\delta_{mj}, \quad i=n+1, j=\overline{1,n}; \\ C_{1m}, \quad i,j=n+1; \end{cases}$$

а δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда в модели σ_c существует положение равновесия.

Замечание 3. Аналогичным образом можно получить альтернативные достаточные условия существования положения равновесия.

Теорема 10. *Пусть параметры модели закрытого рынка σ_c удовлетворяют условию: $\forall m = \overline{1,n} \quad \det F_m = 0, (-1)^n \det G_m \geqslant 0,$ где*

$$f_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, \quad i,j=\overline{1,n}; \\ C_{2i}, \quad i=\overline{1,n},\ j=n+1; \\ E_{ij}-\widetilde{E}_{ij}, \quad i=n+1,\ j=\overline{1,n}; \\ \ln\frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum\limits_{j=1}^{n}(E_{ij}-\widetilde{E}_{ij})\ln p_j^*, \quad i,j=n+1; \end{cases}$$

$$g_{mij} = \begin{cases} \delta_{ij}, \quad i,j=\overline{1,n}; \\ C_{2i}, \quad i=\overline{1,n},\ j=n+1; \\ -\delta_{mj}, \quad i=n+1,\ j=\overline{1,n}; \\ C_{2m}, \quad i,j=n+1. \end{cases}$$

Тогда в модели σ_c существует положение равновесия.

Показано, что две последние теоремы не эквивалентны.

Исследован вопрос о единственности положения равновесия.

Введем обозначения: $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \;\; a_{ij}=E_{ij}-\widetilde{E}_{ij}$; $\omega=(\omega_1,...,\omega_n)^T$,

$$\omega_i = \ln\frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum_{j=1}^{n}(E_{ij}-\widetilde{E}_{ij})\ln p_j^*.$$

Теорема 11. *Пусть в модели σ_c выполнено условие $\det A \neq 0$. Тогда для того, чтобы существовало единственное положение равновесия $p_i^0 = \exp(A^{-1}\omega)_i, \;\; i=\overline{1,n}$ необходимо и достаточно, чтобы параметры модели удовлетворяли следующему условию:*

$$\max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}} \left| (A^{-1}\omega)_i - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \right| \leqslant 1, \tag{37}$$

где $(A^{-1}\omega)_i$ – i-я координата вектора $A^{-1}\omega$.

Теорема 12. *В модели σ_c существует бесконечное количество положений равновесия тогда и только тогда, когда параметры модели σ_c удовлетворяют следующим условиям: 1)* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\omega) = k < n$*;*

2)

$$\max_{i=\overline{1,n}} \frac{2}{\ln c_{2i} - \ln c_{1i}} \left| \sum_{j=1}^{n-k} C_j w_{ji} - \frac{\ln c_{1i} + \ln c_{2i}}{2} \right| < 1, \tag{38}$$

где векторы $W_1, ..., W_{n-k}$ составляют ФСР системы

$$\sum_{j=1}^{n} \left(E_{ij} - \widetilde{E}_{ij} \right) \ln p_j = \ln \frac{S_i^*}{D_i^*} + \sum_{j=1}^{n} (E_{ij} - \widetilde{E}_{ij}) \ln p_j^*, \quad i = \overline{1,n}.$$

и $W_j = (w_{j1}, ..., w_{jn})$.

Также проиллюстрирован характер зависимости положения равновесия от входных параметров.

Основные результаты и выводы

Получено, что в некоторых простых моделях из класса $\mathbb{M}_o$ при исследовании вопроса о положении равновесия можно воспользоваться общеизвестными результатами. Однако, даже в классе $\mathbb{M}_c$ существуют модели, для которых применение этих результатов невозможно. Тем не менее, разработанные методы поиска точек совпадения позволяют не только исследовать различные модели на предмет положения равновесия, но также и частичного равновесия, что играет важную роль в различных приложениях.

Основные результаты, полученные в рамках диссертационного исследования:

1) На базе теории точек совпадения и накрывающих отображений разработан метод нахождения положения равновесия систем, динамика которых определена разностью отображений метрических пространств.
2) Полученные результаты успешно применены для исследования вопроса о существовании положений равновесия и частичного равновесия в нескольких моделях из класса моделей с внешним воздействием $\mathbb{M}_o$.
3) Отдельно исследован класс моделей без внешнего воздействия $\mathbb{M}_c$. Для некоторых моделей из этого класса исследована мощность множества положений равновесия и исследованы его свойства.
4) Разработан метод нахождения положения равновесия для различных моделей из класса моделей типа Аллена $\mathbb{M}_o$ и $\mathbb{M}_c$.

Список публикаций по теме исследования

Статьи в журналах из Перечня ВАК (категория К1)

[1] Котюков, А.М., Павлова, Н.Г. Алгоритм поиска точек совпадения в сложных системах // Управление большими системами, 2024. – № 107. – С. 6–27.

Статьи в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1

[2] Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications, 2021. – Vol. 24, No. 4. – Pp. 130–144.

[3] Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Nonuniqueness of Equilibrium in Closed Market Model // Advances in Systems Science and Applications, 2023. – Vol. 23, No. 2. – Pp. 184–194.

Статьи в сборниках трудов международных и всероссийских конференций

[4] Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Equilibrium in Open Market Models with Nonconstant Elastisities / 16th International Conference Management of Large-Scale System Development: Proceedings. – Moscow. – 2023. – Pp. 1–4.

[5] Kotyukov A.M., Pavlova N.G. Stability and Non-Uniqueness of Equilibrium in an Open Market Model / 15th International Conference Management of Large-Scale System Development: Proceedings. – Moscow. – 2022. – Pp. 1–4.

[6] Котюков А.М. Об устойчивости и неединственности положения равновесия в статической модели открытого рынка / Труды 18-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами». – Челябинск. – 2022. – С. 601–606.

[7] Котюков А.М., Павлова Н.Г. О положении равновесия в экономических системах / Труды 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). – Москва. – 2024. – С. 260–264.

Статьи в других рецензируемых научных изданиях

[8] Котюков А.М. Итерационный процесс поиска точек совпадения в модели «спрос-предложение» // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2022. – Т. 207. – С. 68–76.

Личный вклад автора в совместные публикации:

В работе [1] – метод нахождения точек совпадения, и его сходимость (теорема 3), достаточные условия существования положения частичного равновесия в открытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями (теорема 4).

В работе [2] – метод нахождения положения равновесия в открытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями.

В работах [2], [3] – теоремы о существовании положения равновесия в закрытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями (теоремы 8, 9, 10), мощность множества положений равновесия (теоремы 11, 12).

В работе [4] – теорема об отображениях спроса и предложения в модели открытого рынка с непостоянными эластичностями (теорема 2), теорема о существовании положения равновесия в открытой модели типа Аллена с непостоянными эластичностями (теорема 7).

В работе [5] – теорема об отображениях в открытой модели открытого типа Аллена с постоянными эластичностями (теорема 1), теорема об устойчивости положения равновесия в модели открытого рынка (теорема 6).

В работе [7] – теорема о существовании положения равновесия в открытой модели типа Аллена с постоянными эластичностями (теорема 5).

Научное издание

Котюков Александр Михайлович

Нахождение положения равновесия динамических систем методами накрывающих отображений и точек совпадения с приложениями к моделям типа Аллена

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 17.02.26
Формат $60 \times 90/16$
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л.0,9
Тираж 100 экз. Заказ № 24

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова
Российской академии наук
117997
ул. Профсоюзная, д.65
Россия, Москва
http://www.ipu.ru