На правах рукописи

Галяев Иван Андреевич

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАМИАНОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ И БИЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПРИЛОЖЕНИЕМ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Специальность
2.3.1 — Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН).

Научный руководитель: **Ядыкин Игорь Борисович**
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Иванов Сергей Валерьевич,**
доктор физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», профессор кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования,

Маликов Александр Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ», профессор кафедры автоматики и управления

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук

Защита состоится 22 сентября 2025 г. в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.107.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук по адресу: 117997, Москва ул. Профсоюзная, д. 65.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН и на сайте www.ipu.ru.

Автореферат разослан «___» __________ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.107.02, канд. физ.-мат. наук Тремба Андрей Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Переход к цифровой экономике невозможен без развитой технологической среды, позволяющей создавать эффективную сеть передачи информации между элементами единой системы, осуществлять мониторинг и анализ состояния распределенных энергосистем, и как результат обеспечивать интеллектуальное управление системами и их отдельными узлами. Необходимость создания такой среды привело к тому, что современный этап развития инфокоммуникационных технологий характеризуется активным созданием технологий передачи данных и интеллектуального управления, а также их быстрым распространением в различных сферах деятельности человека, в частности, в системах генерации и распределения электроэнергии. Современная генерация и распределение электроэнергии быстро меняются в связи с потребностью в снижении выбросов CO_2, распространением экологически чистых возобновляемых источников энергии и активным выходом потребителей на энергетический рынок. Приоритетным направлением развития электроэнергетических систем (ЭЭС) в промышленно развитых государствах становится сегодня реализация концепции Интернета Энергии, разработка и внедрение в эксплуатацию новых технологий «умных сетей» (smart grids) и «локальных сетей» (micro grids). Распределенная генерация позволяет собрать энергию из разных источников, снизить воздействие на окружающую среду и повысить надежность энергоснабжения. По соображениям надежности ресурсы распределенной генерации должны подключаться к единой сети передачи вместе с традиционными большими электростанциями. При этом неустойчивость ЭЭС возникает прежде всего из-за потери инерции вращения синхронными машинами и колебаний, вносимых возобновляемыми источниками и взаимодействием мод генераторов. Таким образом, широкое использование новых технологий и распределенного управления в микро и макро-сетях порождает проблему обнаружения, мониторинга и подавления опасных низкочастотных колебаний. Игнорирование этой проблемы угрожает развитием каскадных аварий, разрушением генераторов и технологических установок потребителей. Эта проблема усугубляется нелинейными и нестационарными характеристиками самих сетей и нагрузок потребителей. Свойства управляемости, устойчивости, достижимости и наблюдаемости играют важную роль в задачах управления, в том числе стабилизации неустойчивых систем с помощью обратной связи, при идентификации и прогнозе динамики систем, при проектировании сенсорных сетей. Применение спектральных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости позволяет проводить с единых позиций более тонкий количественный анализ этих свойств. Новые критерии на основе метода грамианов позволяют количественно оценивать влияние отдельных мод и их взаимодействия на динамику системы. Свойства грамианов широко используются при решении различных практических задач управления и мониторинга, таких как стабилизация систем, настройка регуляторов, понижение размерности моделей систем, определение оптимального расположения управляющих устройств и датчиков в системе, управление на основе принципа минимальной энергии. Однако, практически все существующие методы модального анализа общей теории управления, мониторинга состояния, оценки устойчивости и надежности не учитывают динамику взаимодействия собственных мод системы, существенно влияющую на вариации энергии её возмущений. Метод спектральных разложений функций Ляпунова позволяет количественно оценивать взаимодействие собственных мод в динамической системе, что даёт возможность проводить более глубокий анализ структурных связей между элементами системы и оценивать влияние этих связей на фундаментальные свойства управляемости, устойчивости, достижимости и наблюдаемости. Дополнительная информация, полученная из спектральных разложений, позволяет улучшить соответствующие методы и алгоритмы, за счёт более точных количественных энергетических критериев управляемости, устойчивости, наблюдаемости, качества управления и аппроксимации. Другой концептуальный метод анализа устойчивости связан с использованием уравнений Ляпунова. Этот метод был применен для оценки устойчивости электроэнергетических систем.

Исследуемые в диссертационной работе задачи и весь класс методов мониторинга состояния и управления актуален для современных многомерных динамических систем, а рассматриваемые в постановках модели графов могут быть моделями биологических или энергетических систем. Полученные решения могут быть полезны при разработке алгоритмов демпфирования опасных межзональных колебаний. Таким образом, с учетом вышесказанного, проблема разработки новых спектральных методов мониторинга состояния и управления многомерными динамическими системами, исследуемая в работе, является актуальной.

Степень разработанности научной темы

Среди классических методов анализа динамических управляемых систем выделяют метод анализа решения уравнения Ляпунова. Впервые уравнение Ляпунова и задача об устойчивости движения для линейных динамических систем были сформулированы в его диссертационной работе в 1892 году. А.М. Ляпунов дал строгое определение устойчивости, в дальнейшем именуемое «по Ляпунову», и предложил два основных метода исследования устойчивости движения. А.М. Ляпунов сформулировал постановку задачи об устойчивости движения по уравнениям первого приближения и описал условия, при которых это приближение решает вопрос об устойчивости системы, а при каких оно недостаточно. А.М. Ляпунову принадлежит теорема устойчивости системы автоматического регулирования (САР): если все корни характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости – линеаризованная САР устойчива. Уравнение Ляпунова является частным случаем уравнения Сильвестра. Наряду с Ляпуновым, Дж.Дж. Сильвестр является основоположником теории динамических систем. В 1884 он предложил методы решений матричных алгебраических уравнений и применение этих методов для решения задач оптимального управления. Обобщением уравнений Сильвестра являются уравнения Крейна, играющие важную роль в современной теории управления. М.Г. Крейн доказал теорему о существовании интегрального представления соответствующих решений. Область применения этих уравнений чрезвычайно широка: анализ устойчивости линейных и билинейных динамических систем, оценка их состояния, системы модального управления, оптимальное управление и фильтрация, идентификация и аппроксимация моделей динамических систем высокой размерности. Большой вклад в теорию уравнений Крейна внесли С.К. Годунов и Г.В. Демиденко. В их работах были исследованы интегральные представления решений этих уравнений в комплексной плоскости, получены оценки степени устойчивости линейной динамической системы и нормы матричной экспоненты через спектральную норму матрицы динамики. Методы решения дифференциальных матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра были разработаны спустя полвека после появления работ Сильвестра и Ляпунова. Большое число работ посвящено матричным уравнениям Сильвестра, Ляпунова и Риккати, ими занимались такие ученые, как P. Lancaster, V. Simoncini, Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. A. Talbot разработал решение дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра в виде интеграла от произведения матричных экспонент. Также разработкой методов вычислений матричных и алгебраических уравнений Ляпунова и Сильвестра и исследованием структурных свойств решений этих уравнений занимались A. Antoulas, P. Benner, Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт, В.Н. Буков, В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский. A. Antoulas развил подход использования представления динамических систем в канонических формах, применения матриц грамианов для решения различных задач, например о расширении итерационного рационального алгоритма Крылова на класс линейных систем с переключателями. С развитием метода грамианов тесно связано имя K. Zhou, предложил метод сбалансированного отсечения на основе грамианов устойчивых и антиустойчивых систем. Различные задачи, связанные с применением грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов для вычисления системных инвариантов и энергетических индексов устойчивости, решали P. Benner, T. Damm, C. Himpe. C. Xiao и A. Hausdottir развили новый подход в направлении использования свойств импульсной переходной функции и матриц грамианов в виде клетчатой структуры из нулей и единиц. Этот подход модернизировал A. Dilip и разработал метод оптимального выбора мест размещения датчиков и исполнительных устройств на графе распределенной системы управления. F. Mehr внес вклад в решение задачи оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов и оценок степени управляемости. Важные результаты были получены для методов вычисления грамианов систем, модели которых представлены в канонических формах управляемости и наблюдаемости. Хорошо известно применение грамианов для построения упрощенных моделей динамических систем высокой размерности, для вычисления норм передаточных функций линейных и билинейных динамических систем Зубовым Н.Е., Зыбиным Е.Ю., Микриным Е.А., Мисрихановым М.Ш. В области работы с билинейными системами одной из важных задач является задача понижения порядка модели путем построения аппроксимирующей модели меньшей размерности. Этими задачами занимались L. Zhang, J. Lam, P. D'Alessandro, A. Isidori, C. Hsu, D.

Hou. В последние годы над развитием теории грамианов работают И.Б. Ядыкин, А.Б. Искаков, Н.Н. Бахтадзе, Е.Ю. Кутяков. Задача мониторинга состояния или управления многомерными динамическими системами рассмотрена вышеперечисленными авторами во многих статьях. В некоторых работах предлагается использование спектральных методов решения уравнения Ляпунова. Применение упрощенных моделей для больших энергетических, транспортных, социальных сетей на основе выходных грамианов управляемости, позволяющих вычислять энергетические показатели. Подобный подход позволил ввести энергетические метрики для выбора оптимального размещения управляющих узлов на графе сети с целью минимизации энергии управления. Следует подчеркнуть, что методы, основанные на применении энергетических метрик, применяются для определения мест размещения вставок постоянного тока ЭЭС. А в последнее десятилетие и для решения различных оптимизационных задач при исследовании транспортных, социальных и биологических динамических систем. Задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств важна не только для сетей, но и для систем управления с многими входами и многими выходами.

Объектом исследования являются непрерывные линейные и билинейные динамические системы.

Предметом исследования являются спектральные методы и алгоритмы решения уравнений Ляпунова.

Целью диссертационного исследования является разработка методов и алгоритмов решения уравнений Ляпунова для повышения эффективности управления и мониторинга состояния многомерных динамических систем.

Для достижения данной цели были **поставлены и решены следующие задачи**:

- Развить структурные методы решения матричных уравнений Ляпунова и получить спектральные и сингулярные разложения грамианов управляемости и наблюдаемости линейной стационарной системы.
- Развить спектральные методы решения обобщенных уравнений Ляпунова и получить достаточные условия BIBO-устойчивости непрерывных билинейных систем.

– Применить разработанные методы для модели узлов графа электроэнергосистемы для анализа и синтеза стабилизирующих регуляторов.

Соответствие паспорту специальности

Работа выполнена в соответствии со следующими пунктами паспорта специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»:

– П.1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
– П.3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.
– П.4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Методологическую основу работы составили методы теории управления, оптимизации, решения обыкновенных дифференциальных уравнений, матричного анализа, а также методы компьютерного моделирования.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью и полнотой исходных положений, достоверностью, воспроизводимостью и непротиворечивостью математических выкладок. Результаты теоретических исследований подтверждены средствами компьютерного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Новые условия устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод и инвариантные представления энергетических функционалов на основе методов спектральных и сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости (соответствует п.1, п.3 паспорта специальности 2.3.1).
2. Метод получения сепарабельных спектральных разложений грамианов управляемости для неустойчивых динамических систем. Методы получения спектральных разложений грамианов управляемости

и обратных грамианов, позволяющих аналитически вычислять составляющие энергии, соответствующие характерным собственным числам матриц грамианов, определяющие основной вклад в величину энергетических функционалов достижимости и устойчивости (соответствует п.1, п.3 паспорта специальности 2.3.1).

3. Новые достаточные условия BIBO-устойчивости непрерывной нестационарной билинейной системы на основе метода решения обобщенного уравнения Ляпунова в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части (соответствует п.1, п.3 паспорта специальности 2.3.1).
4. Метод и алгоритм упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций для анализа и синтеза регуляторов для ЭЭС (соответствует п.3, п.4 паспорта специальности 2.3.1).

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Разработан новый метод получения матриц в виде произведения Адамара для решения уравнения Ляпунова для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами, основанный на аналитическом вычислении элементов соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы.
2. Предложен новый метод получения сепарабельных спектральных разложений грамианов управляемости для неустойчивых динамических систем, основанный на аналитическом вычислении коэффициентов матриц Сяо через разложения грамианов, использующий свойства элементов матриц Сяо, связанные с образованием ими геометрической прогрессии, и дополнительно позволяющий вычислять квадратичную H_2-норму на основе итеративного разложения Фаддеева.
3. Разработан метод решения обобщенного уравнения Ляпунова для непрерывных нестационарных билинейных систем в виде суммы

матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части, основанный на сходимости числовых последовательностей элементов решения билинейного уравнения во временной и частотной области.

4. Предложены метод и алгоритм упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций с оценкой риска потери устойчивости системы при авторезонансе.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии математической теории спектральных методов решения уравнения Ляпунова и рассмотрении новых для данной области науки постановок, связанных с учетом влияния межзональных колебаний на функционирование ЭЭС, а также получении новых критериев устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.

Практическая значимость работы заключается в том, что полученные научные результаты могут использоваться для построения наблюдателя пониженного порядка в задачах модального управления, для проектирования систем энергосберегающего управления, для выбора управляющих входов и мест размещения датчиков на выходах для систем управления многомерных объектов.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы неоднократно докладывались на научном семинаре ИПУ РАН «Моделирование и управление в больших системах», на ежегодном семинаре ИПУ РАН в мае в 2022, в 2023, в 2024 годах, а также на ведущих международных и отечественных конференциях: «Управление развитием крупномасштабных систем MLSD 2020», 10 Симпозиум IFAC по Управлению электро и энергосистемами CPES 2022, 12 Симпозиум IFAC по Управлению электро и энергосистемами CPES 2024, XX Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами».

Реализация и внедрение результатов работы

Результаты использовались для выполнения работ при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 19-19-0673.

Публикации

Результаты диссертационной работы отражены в 8 публикациях, в том числе 4 в изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам категории К1 Перечня ВАК [1-4] и 4 публикаций – в сборниках трудов международных и всероссийских конференций [5-8].

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, определены цель и задачи исследования, раскрыта практическая значимость и новизна работы, приведена краткая структура диссертации и положения, выносимые на защиту.

В первой главе, посвященной развитию спектральных методов решения уравнения Ляпунова для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами, разработан метод и алгоритм аналитического вычисления решения уравнения Ляпунова в виде произведения Адамара, при этом структура матрицы решения определяется в виде матрицы Сяо. Это позволяет вычислять элементы соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы. При использовании канонических форм управляемости или наблюдаемости разложение Адамара соответствующих грамианов сводится к матрице мультипликатора, след которого равен энергетическому функционалу SISO LTI системы. Новые результаты получены в виде спектральных и сингулярных разложений обратных грамианов управляемости и наблюдаемости. Они позволяют получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.
Разработан метод получения сепарабельных спектральных разложений матриц для неустойчивых непрерывных систем. Для неустойчивых непрерывных линейных систем аналитическое вычисление большинства энергетических функционалов, выраженных через грамианы, основано на вычислении спектра матриц динамики и мер минимальной энергии, требуемой для перехода системы из начальной в конечную точку. Спектральные разложения грамианов управляемости и их обратных грамианов позволяют в рамках единого подхода вычислить составляющие энергии, соответствующие характерным собственным числам матриц грамианов, которые определяют основной

вклад в величину энергетических функционалов достижимости и устойчивости. Эти спектральные разложения представлены в виде формул, позволяющих анализировать влияние различных узлов графа системы на формирование энергетических метрик достижимости и устойчивости.

Рассматривается MIMO LTI динамическая система вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0, y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где $x\left(t\right) \in \mathbb{R}^n$ – вход системы, $u\left(t\right), y\left(t\right) \in \mathbb{R}^m$ – управление и выход системы; матрицы динамики системы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вещественны, а собственные числа s_i матрицы A различны. Система (1) предполагается полностью управляемой и наблюдаемой, реализация (1) минимальна.

Определение 1.1. *Для устойчивой динамической системы* (1) *определены уравнения Ляпунова*

$$AP^c + P^cA^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

$$AP^o + P^oA^{\mathrm{T}} = -C^{\mathrm{T}}C, \tag{3}$$

решениями которых являются грамиан управляемости P^c *и наблюдаемости* P^o *соответственно. Эквивалентная форма представления грамианов:*

$$P^c = \int_0^\infty e^{A\tau}BB^{\mathrm{T}}e^{A^{\mathrm{T}}\tau}d\tau,$$

$$P^o = \int_0^\infty e^{A^{\mathrm{T}}\tau}C^{\mathrm{T}}Ce^{A\tau}d\tau.$$

Теорема 1.1. *Для устойчивой системы* (1), *преобразованной в каноническую форму управляемости или наблюдаемости, грамианы управляемости и наблюдаемости представимы в виде произведения Адамара:*

$$P^c = \Omega_c \circ \Psi_c = \left[p^c_{j\eta}\right]_{n\times n}, \quad \Psi_c = \left[\psi_{c,j\eta}\right]_{n\times n}, \tag{4}$$

$$\Psi_c = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1}\Psi_{c,i\mu}, \;\; \Psi_{c,i\mu} = M_iM_\mu^*, \;\; M_i = A_iB,$$

$$\Omega_c = \left[\omega_c(n,j,\eta)\right]_{n\times n}, \quad p^c_{j\eta} = \omega_c(n,j,\eta) \times \psi_{c,j\eta}, \quad j,\eta = 1,\ldots,n.$$

Теорема 1.2. *Для устойчивой системы* (1), *преобразованной в каноническую форму управляемости или наблюдаемости, сингулярные разложения ее обратного грамиана управляемости по собственным числам матрицы грамиана имеют следующий вид:*

Для простого спектра матрицы грамиана:

$$(P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^n\sum_{j=0}^{n-1}P^c_j\sigma^j_\lambda}{\dot{N}_c(\sigma)}\frac{1}{\sigma}\bigg|_{\sigma=\sigma_\lambda}, \tag{5}$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_λ – собственное число грамиана P^c. Для кратных собственных чисел матрицы грамиана:

$$(P^c)^{-1} = -\sum_{\delta=1}^{q}\sum_{\rho=1}^{m_\delta}\frac{K_{\delta\rho}}{(-\sigma_\delta)^{m_\delta-\rho+1}}, \tag{6}$$

$$K_{\delta\rho} = \frac{1}{(\rho-1)!}\left\{\frac{d^{\rho-1}}{d\sigma^{\rho-1}}\left[\frac{(\sigma-\sigma_\delta)^{m_\delta}\sum_{j=0}^{n-1}\sigma^j P_j^c}{\prod_{\delta=1}^{n}(\sigma-\sigma_\delta)^{m_\delta}}\right]\right\}\Bigg|_{\sigma=\sigma_\delta}, \tag{7}$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_δ – собственное число матрицы грамиана P^c кратности m_δ, ρ – индекс кратности собственного числа σ_δ.

Рассмотрим SISO LTI систему, уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости, и вычислим энергетический функционал J, который представляет собой значение квадрата H_2-нормы передаточной функции системы и дает оценку риска потери устойчивости:

$$J = trC^F\Omega_c(C^F)^T.$$

Разложение не зависит от выбора невырожденной матрицы линейных преобразований координат системы. Два основных фактора влияют на значение риска потери устойчивости J:

1. значения диагональных членов матрицы Сяо Ω_c,
2. квадраты элементов приведенного вектора выхода.

Теорема 1.3. *Для устойчивой системы* (1) *и устойчивой SISO LTI системы с тем же спектром и характеристическим многочленом, если их уравнения состояния приведены к канонической форме управляемости, то критерием асимптотической устойчивости системы* (1) *по Ляпунову является ограниченность энергетического функционала J для SISO LTI системы:*

$$J = \frac{1-\sum_{k=1}^{n}s_k^2+\cdots+(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\dot{N}(s_k)\,N(-s_k)} < +\infty. \tag{8}$$

$$\lim_{s_k\to s_{k'}} J \neq +\infty, \forall s_k\in\mathbb{C}^-, \forall k,k'=1,\ldots,n, k\neq k'. \tag{9}$$

Таким образом, получен новый критерий устойчивости стационарной линейной динамической MIMO LTI системы в виде критерия ограниченности следа матрицы Сяо Ω_c для SISO LTI системы, уравнения которой приведены в каноническую форму управляемости. Новый критерий не противоречит известному критерию принадлежности собственных чисел матрицы динамики линейной системы левой полуплоскости плоскости собственных чисел, но уточняет его с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод (кратные собственные числа, близкие апериодические и колебательные моды).

Теорема 1.4. *Пусть дана неустойчивая система (1), приведенная к диагональному виду, тогда если собственные числа матрицы динамики A не находятся на мнимой оси $\lambda_{i-}\in\mathbb{C}^-$, $i=r$; $\lambda_{j+}\in\mathbb{C}^+$, $j=n-r$, а смешанный грамиан управляемости определен таким образом*

$$P_{cm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(Ij\omega-A)^{-1}BB^{\mathrm{T}}(-Ij\omega-A^{\mathrm{T}})^{-1}d\omega, \tag{10}$$

тогда следующие утверждения справедливы и эквивалентны.

– *Сепарабельные спектральные разложения матриц решений уравнений, соответствующих устойчивой и антиустойчивой подсистемам:*

$$p_{c-}^{(\mu\nu)}=e_\mu^{\mathrm{T}}P_{c-}e_\nu,\quad \forall\mu,\nu=1,\ldots,r,$$

$$p_{c-}^{(\mu\nu)}=\frac{-\beta_{\mu\nu-}}{\lambda_{\mu-}+\lambda_{\nu-}},$$

$$p_{c+}^{(\mu\nu)}=e_\mu^{\mathrm{T}}P_{c+}e_\nu,\quad \forall\mu,\nu=r+1,\ldots,n,$$

$$p_{c+}^{(\mu\nu)}=\frac{\beta_{\mu\nu+}}{\lambda_{\mu+}+\lambda_{\nu+}};$$

– *Сепарабельные спектральные разложения смешанного грамиана управляемости по парному и простому спектрам матрицы A:*

$$P_{cm}=T_3^{-1}\left[P_-\oplus P_+\right]T_3. \tag{11}$$

По парному спектру:

$$P_-=\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{r}p_{c-}^{(\nu\mu)}\mathbf{1}_{\nu\mu}, \tag{12}$$

$$P_+=\sum_{\nu=r+1}^{n}\sum_{\mu=r+1}^{n}p_{c+}^{(\nu\mu)}\mathbf{1}_{\nu\mu}.$$

По простому спектру:

$$P_-=\sum_{\nu=1}^{r}\boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu)},\quad \boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{r}\boldsymbol{p}_{c-}^{(\nu\mu)}\mathbf{1}_{\nu\mu}, \tag{13}$$

$$P_+=\sum_{\nu=r+1}^{n}\boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu)},\quad \boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu)}=\sum_{\mu=r+1}^{n}\boldsymbol{p}_{c+}^{(\nu\mu)}\mathbf{1}_{\nu\mu}.$$

Теорема 1.5. *Пусть дана неустойчивая система (1), приведенная к диагональному виду, тогда если собственные числа матрицы динамики A, не* *находятся на мнимой оси и не равных попарно*

$$\lambda_{i-}\in\mathbb{C}^{-}, i = r; \lambda_{j+}\in\mathbb{C}^{+}, j = n - r,$$

то справедливы и эквивалентны следующие спектральные разложения энергетических функционалов:

$$J_1 = E_{min}(\infty) = [\ x_{f-}\ \ x_{f+}\ ]^{\mathrm{T}}(P_{cm})^{-1}[\ x_{f-}\ \ x_{f+}\ ] =$$

$$= [\ x_{f-}\ \ x_{f+}\ ]^{\mathrm{T}}[\sum_{i=1}^{n} V_c^{*}|\sigma_i|^{-1}\mathbf{1}_{ii}U_c][\ x_{f-}\ \ x_{f+}\ ].$$

$$J_3(\textit{для SISO LTI устойчивых систем}) = tr\sum_{k=1}^{n} P_{c,k} =$$

$$= trP_{c,k} = \frac{1 - \sum_{k=1}^{n} s_k^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^{n} \dot{N}(s_k)\, N(-s_k)},$$

$$J_4 = tr\sum_{i=1}^{n}(P_c)_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} tr\,(P_c)_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} tr[V_c^{*}|\sigma_i|^{-1}\mathbf{1}_{ii}U_c],$$

где $N(s)$ – характеристический полином системы (1).

Теорема 1.6. *Для устойчивой системы* (1) *с ненулевыми начальными условиями справедливы и эквивалентны следующие спектральные разложения энергетических функционалов входной и выходной энергии $\hat{J}_1$ и $\hat{J}_2$ по простому спектру грамиана управляемости:*

$$\hat{J}_1 = \sum_{i=1}^{n} x_0^T[V_c^{*}|\sigma_i|^{-1}1_{ii}U_c]x_0, \tag{14}$$

или простому спектру матрицы динамики A:

$$\hat{J}_2 = \sum_{i=1}^{n} x_0^T[\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\frac{\lambda_i^j(-\lambda_i)^\eta}{\dot{N}(\lambda_i)\, N(-\lambda_i)}A_j^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}CA_\eta]x_0. \tag{15}$$

Функционалы $\hat{J}_1$и $\hat{J}_2$ можно использовать для анализа степени устойчивости линейной системы на основе анализа аномалий квадрата H_2-нормы передаточной функции системы, обусловленных влиянием следующих слабоустойчивых мод:

– мод, близких началу координат,

– мод, близких мнимой оси,

– близких друг другу нескольких апериодических и колебательных мод.

Во второй главе разработан метод и получены алгоритмы решения обобщенного уравнения Ляпунова (ОУЛ) для класса непрерывных нестационарных билинейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения. Получено спектральное разложение грамианов управляемости и наблюдаемости нестационарной билинейной системы в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части. Разработан новый метод и алгоритм поэлементного получения матриц решения ОУЛ для билинейных систем в диагональной канонической форме. Установлены новые достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости элементов матриц решений для класса билинейных нестационарных систем. Эти условия являются достаточными условиями bounded input bounded output (BIBO)-устойчивости непрерывной билинейной системы. Предложены новые алгоритмы и методология построения спектрального итеративного решения непрерывного билинейного уравнения с помощью частотных методов, основанных на прямом преобразовании Лапласа. Получена оценка влияния спектральных разложения решений по спектру матрицы динамики линейной части, а также спектру и вычетам изображений воздействий на устойчивость и динамические характеристики билинейной системы. Получены новые достаточные условия BIBO-устойчивости нестационарных билинейных систем и предложен новый метод аналитического вычисления установившихся значений их решений. В частном случае MIMO BTI непрерывных систем с воздействиями, изображения которых являются дробно-рациональными функциями, сходящимися на конечном интервале, получены аналитические формулы итеративного построения решений.

Рассматривается устойчивая непрерывная нестационарная билинейная MIMO система:

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x} = Ax\left(t\right) + \sum\limits_{\gamma=1}^{m} N_\gamma x\left(t\right) u_\gamma\left(t\right) + Bu\left(t\right), \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right), \end{cases} \tag{16}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^m$.

Для системы (16) определяется ОУЛ:

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1}^{m} N_j P N_j^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

Теорема 2.1. *Пусть дана система (16) со стационарной линейной частью, преобразованная в диагональную каноническую форму, тогда если матрица A гурвицева и имеет простой спектр, задано ОУЛ*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \sum_{\gamma=1}^{H} N_\gamma P N_\gamma^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}},$$

$$\underbrace{max}_{\nu\mu}\left|(s_\nu + s_\mu)^{-1}\right|\underbrace{max}_{\nu\mu ij\gamma}|N_{\gamma,\nu i}N_{\gamma,\mu j}| < 1,\forall\nu,\mu,i,j = 1,2,\dots,n,\forall\gamma = 1,2,\dots,H, \tag{18}$$

то решение ОУЛ (17) существует, единственно и определяется с помощью итеративной процедуры:

$$P = P_1 + \sum_{k=2}^{\infty} P_k,\ \ P_2 = -\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\frac{q_{\gamma\nu\mu}}{s_\nu + s_\mu}\mathbf{1}_{\boldsymbol{\nu\mu}},\ \gamma = 1,2,\dots,H,$$

$$p_k^{ij\gamma} = -\left(\sum_{\nu,\mu} p_{k-1,\nu\mu}^{ij\gamma}\right)\left[(s_\nu + s_\mu)^{-1}N_{\gamma,\nu i}N_{\gamma,\mu j}\right],\ \ \sum_{\nu,\mu} p_{k-1,\nu\mu}^{ij\gamma} = p_{k-1}^{ij\gamma}. \tag{19}$$

Исходный грамиан управляемости P_2 билинейной системы связан с матрицей P_2^dуравнением:

$$P_2 = T^{-1}P_2^d\,T,\quad T^{-1} = [u_1\quad u_2\quad \dots\quad u_n]. \tag{20}$$

Аналогичная теорема справедлива и для грамиана наблюдаемости.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и, кроме того, выполнены условия:*
1) Вектор-функция $u(t)$ ограничена по норме

$$\|u(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}|u_i(t)|^2} < M_u;$$

2) Найдутся такие положительные числа α,β что справедливо неравенство

$$\left\|e^{At}\right\| \le \beta e^{-\alpha t},\forall t; \tag{21}$$

3) Выполнены неравенства

$$\Gamma < \frac{\sqrt{2\alpha}}{\beta},\ \ \Gamma{=}\sqrt{\left\|\sum_{\gamma=1}^{m} A_\gamma A_\gamma^{\mathrm{T}}\right\|}; \tag{22}$$

4) Либо пара (A,B) управляема, либо пара (A,C) наблюдаема,
Тогда нестационарная система (16) BIBO-устойчива при выполнении условий (18). Грамианы управляемости и наблюдаемости существуют, единственны и являются определенно положительными матрицами.

Необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем в терминах ограниченности квадрата H_2-нормы ее передаточной функции $\mathbf{G}(s)$ имеют вид:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_2^2 = \mathrm{trC}P^oC^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}B^{\mathrm{T}}P^cB < +\infty. \tag{23}$$

Функционал риска потери устойчивости билинейной системы:

$$J(s_1,s_2,...,s_n) = \mathrm{trC}P^{obln}C^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}B^{\mathrm{T}}P^{cbln}B. \tag{24}$$

Если корни характеристического уравнения приближаются к мнимой оси, функционал риска потери устойчивости (24) стремится к бесконечности. Определим приемлемый функционал риска потери устойчивости билинейной системы в виде:

$$J^{(\gamma)}(s_1,s_2,...,s_n,\gamma) < M_{\gamma perm},\ \gamma = 1,2,\ldots,m. \tag{25}$$

Неравенства (25) определяют набор энергетических функционалов, ограниченность которых гарантирует BIBO-устойчивости билинейной системы.

В третьей главе, посвященной развитию адаптивных методов и алгоритмов настройки системных регуляторов в ЭЭС, предложен метод синтеза алгоритмов настройки системных регуляторов для электроэнергетических систем высокой размерности, в котором используются полученные в работе разложения. Разработан метод и алгоритмы упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций для анализа и синтеза системных регуляторов для ЭЭС высокой размерности.

Метод основан на приведении модели графа к эквивалентной структурной схеме многосвязной системы автоматического управления МСАУ, что позволяет использовать аппарат передаточных функций и известные критерии устойчивости. Задача осложняется необходимостью рассмотрения множества режимов, что требует выделения среди них наихудших (предельных по устойчивости). Динамическая система делится на две части: медленную и условно быструю. Медленная динамика соответствует той части графа ЭЭС, которая содержит узлы графа с низкочастотными осцилляторами, а быстрая динамика соответствует остальной части графа.

Передаточная функция замкнутого контура управления «i»–го генератора имеет вид:

$$\Phi_{PSSi}=\frac{k_{di}s+k_{pi}}{s^2+\left(2\xi_i\Omega_i+k_{di}\right)s+\left(\Omega_i^2+k_{pi}\right)}.$$

Введем обозначения:

$$\left(2\xi_i\Omega_i+k_{di}\right)=2\widetilde{\widetilde{\xi}}_i\widetilde{\Omega}_i,\quad \left(\Omega_i^2+k_{pi}\right)=\ 2\widetilde{\widetilde{\xi}}_i\widetilde{\Omega}_i,$$

$$s^2+\left(2\xi_i\Omega_i+k_{di}\right)s+\left(\Omega_i^2+k_{pi}\right)=s^2+2\widetilde{\widetilde{\xi}}_i\widetilde{\Omega}_is+\widetilde{\Omega}_i^2=\left(s-\tilde{s}_1\right)\left(s-\tilde{s}_2\right).$$

Введем функционал ограничения в задаче условной оптимизации коэффициентов настройки контура в виде

$$J_i=\|\Phi_{PSSi}\|_2^2=\int_0^\infty\|y(t)\|_2^2dt=\left(c_{oi}^F\right)^TP_{oi}^Fc_{oi}^F. \tag{26}$$

Если все контуры управления устойчивы, а среди полюсов передаточной функции $\Phi_{PSSi}(s)$ нет кратных, то грамиан наблюдаемости является матрицей Сяо и может быть вычислен по формуле

$$P_{oi}^F=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_k^j\left(-s_k\right)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)}\mathbf{1}_{j+1\eta+1},$$

где $\dot{N}\left(s_k\right)=2s_k+2\widetilde{\widetilde{\xi}}_i\widetilde{\Omega}_i$, $N\left(-s_k\right)=\left(-s_k\right)^2+2\widetilde{\widetilde{\xi}}_i\widetilde{\Omega}_is_k+\widetilde{\Omega}_i^2$.

При этом матрица P_{oi}^F является инвариантом при преобразовании подобия исходной системы в каноническую форму наблюдаемости:

$$J_i=\left(k_{di}^2+k_{pi}^2\right)\sum_{k=1}^{n}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{s_k^j\left(-s_k\right)^\eta}{\dot{N}\left(s_k.k_{di},k_{pi}\right)N\left(-s_k,k_{di},k_{pi}\right)},i=1,\ldots,n. \tag{27}$$

Общая постановка задачи оптимизации имеет вид условий вида:

$$A^TP_o+P_oA=-c^Tc,\quad J_\Sigma=trb_o^TP_ob_o,$$

$$\tilde{k}_{d1},\tilde{k}_{p1},\ldots,\tilde{k}_{dn},\tilde{k}_{pn}=\underset{\tilde{k}_{d1},\tilde{k}_{p1},\ldots,\tilde{k}_{dn},\tilde{k}_{pn}}{\operatorname{argmin}}\sum_{i=1}^{n}\left(J_i-J_{irefmod}\right)^2,$$

$$J_1(s_k,\tilde{k}_{d1},\tilde{k}_{p1})\le J_{1refmod},$$

$$J_2(s_k,\tilde{k}_{d2},\tilde{k}_{p2})\le J_{2refmod},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$J_n(s_k,\tilde{k}_{dn},\tilde{k}_{pn})\le J_{nrefmod}.$$

Развиты структурные методы решения матричных уравнений Ляпунова и получены спектральные и сингулярные разложения грамианов управляемости и наблюдаемости линейной стационарной системы, а именно:

– Разработан метод аналитического решения уравнения Ляпунова в виде произведения Адамара для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами. Структура матрицы такого решения определяется в виде матрицы Сяо. При использовании канонических форм управляемости или наблюдаемости разложение Адамара соответствующего грамиана сводится к матрице мультипликатора, след которого равен энергетическому функционалу SISO LTI системы.
– Получены новые спектральные и сингулярные разложения грамианов управляемости и наблюдаемости. С их помощью получены инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулированы новые условия устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.
– Разработан метод получения сепарабельных спектральных разложений матриц для неустойчивых непрерывных систем. Для неустойчивых непрерывных линейных систем получены спектральные разложения грамианов управляемости и обратных грамианов, позволяющие вычислять составляющие энергии, соответствующие характерным собственным числам матриц грамианов, определяющих основной вклад в величину энергетических функционалов достижимости и устойчивости.

Развиты спектральные методы решения обобщенных уравнений Ляпунова и получены достаточные условия BIBO-устойчивости непрерывных билинейных систем на основе метода грамианов и итеративного метода построения решения, а именно:

– Получено спектральное разложение грамианов управляемости и наблюдаемости нестационарной билинейной системы в виде суммы матриц субграмианов, соответствующих парным комбинациям собственных чисел матрицы динамики линейной части.

– Разработан новый метод и алгоритм поэлементного вычисления матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова для билинейных систем в диагональной канонической форме.
– Установлены новые достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости элементов матриц решений для класса билинейных нестационарных систем. Эти условия являются достаточными условиями BIBO-устойчивости непрерывной билинейной системы.
– Предложен новый алгоритм построения спектрального итеративного решения непрерывного билинейного уравнения с помощью частотных методов, основанных на прямом преобразовании Лапласа. Получена оценка влияния спектральных разложения решений по спектру матрицы динамики линейной части, а также спектру и вычетам изображений воздействий на устойчивость и динамические характеристики билинейной системы.

Разработанные методы применены на модели узлов графа ЭЭС для анализа и синтеза системных регуляторов, а именно:
– Применен адаптивный метод настройки системных регуляторов в ЭЭС, предложен метод синтеза алгоритмов настройки системных стабилизаторов для электроэнергетических систем высокой размерности, в котором используются полученные в работе разложения.
– Разработан метод и алгоритм упрощения моделей узлов графа ЭЭС с использованием аппарата передаточных функций для анализа и синтеза системных регуляторов для ЭЭС.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам категории К1 Перечня ВАК:

1. Ядыкин И. Б., Галяев И. А., Вершинин Ю.А. О решении обобщенных уравнений Ляпунова для одного класса непрерывных билинейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №5. – с. 7–25.

2. Ядыкин И. Б., Галяев И. А. Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №10. – с. 132–149.
3. Ядыкин И. Б., Галяев И. А. Структурные спектральные методы решения непрерывных уравнений Ляпунова // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №12. – с. 18–37.
4. Ядыкин И.Б., Галяев И.А. Структурные спектральные методы решения непрерывного обобщенного уравнения Ляпунова // Автоматика и телемеханика. – 2024. – №10. – с. 7–18.

Материалы конференций

5. Ядыкин И. Б., Галяев И. А. О решении матричных обобщенных уравнений Ляпунова для одного класса линейных динамических систем с переменными параметрами // Управление развитием крупномасштабных систем MLSD’2020: труды тринадцатой международной конференции. – Москва : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – 2020. – с. 799–809.
6. Yadykin, I., Tomin, N., Iskakov, A. and Galyaev, I. Optimal adaptive control of electromechanical oscillations modes in power systems / IFAC-PapersOnLine. Amsterdam: Elsevier. – 2022. – Vol. 55, no. 9. – P. 134–139.
7. Yadykin, I., Iskakov, A., Tomin, N. and Galyaev, I. Wide area damping of electromechanical oscillations based on implicit reference model adaptive control / IFAC-PapersOnLine. Rabat: Elsevier. – 2024. – Vol. 58, no. 13. – P. 680–684.
8. Ядыкин И.Б., Галяев И.А. Адаптивная настройка регуляторов ЭЭС на основе метода эталонной модели // Управление большими системами: Труды XX Всероссийской школы-конференции молодых ученых. – Новочеркасск : Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова, 2024. – с. 250—257.

Личный вклад соискателя в совместные публикации

В работах [2,3] – получение инвариантных разложений энергетических функционалов и новых условий устойчивости линейных систем, с помощью методов аналитического вычисления спектральных и сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости. Получение сепарабельных спектральных разложений смешанных грамианов неустойчивых динамических систем. Методы получения спектральных разложений грамианов управляемости и обратных грамианов (решение задачи 1). В работах [1,4,5] – развитие спектральных методов решения обобщенных уравнений Ляпунова и получение достаточных условий BIBO-устойчивости непрерывных билинейных систем. Получение алгоритма построения спектрального итеративного решения непрерывного билинейного уравнения (решение задачи 2). В работах [6,7,8] – метод и алгоритм упрощения моделей узлов графа ЭЭС (решение задачи 3).

Научное издание

Галяев Иван Андреевич

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАМИАНОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ И БИЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПРИЛОЖЕНИЕМ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 26.06.25

Формат $60 \times 90/16$

Усл.печ.л.1,5. Уч.-изд.л. 1,0.

Тираж 100 экз. Заказ №___

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова

Российской академии наук

117997

ул. Профсоюзная, д.65

Россия, Москва

http://www.ipu.ru