

На правах рукописи



Кружков Валерий Игоревич

**Моделирование области достижимости формы плазмы
в токамаке**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Коньков Артем Евгеньевич

Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

Защита состоится _____ г. в _____ часов на заседании диссертационного совета 24.1.107.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук по адресу: 117342, г. Москва, вн. тер. г. муниципальный округ Коньково, ул. Профсоюзная, д. 65, стр. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН и на сайте www.ipu.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 117997, ГСП-7, г. Москва, Варшавское шоссе, д. 45, ИПУ РАН.

Автореферат разослан «_____» _____ 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.107.01,
д. т. н., доцент

А. И. Глущенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Определение областей достижимости является фундаментальной задачей теории управления. Классические подходы к её решению сталкиваются с принципиальными вычислительными ограничениями при работе с высокоразмерными системами: экспоненциальный рост сложности, необходимость построения выпуклых оболочек в многомерных пространствах и трудности учёта переменных параметров делают эти методы неприменимыми ко многим современным задачам. В таких случаях исследователи вынуждены ограничиваться оценками сверху или использовать существенно упрощённые модели, что снижает ценность результатов. Особенно остро эта проблема стоит в области управления плазмой в термоядерных установках-токамаках, где модели могут содержать десятки переменных состояний.

Токамаки являются наиболее перспективными устройствами для будущего управляемого термоядерного синтеза (УТС). Принцип их действия основан на создании магнитного поля, удерживающего высокотемпературную плазму. В аксиально-симметричной конфигурации токамака важную роль играет *форма плазмы* — геометрическое место точек, ограничивающих плазменный шнур в полоидальном сечении. Полоидальное сечение — это вертикальное сечение тороидальной камеры токамака плоскостью R, Z , проходящей через её вертикальную ось симметрии. Для описания формы используются большой и малый радиусы, вытянутость, треугольность, а также более детальные характеристики: зазоры между границей плазмы и лимитером по нескольким направлениям и координаты ударных точек. Знание формы плазмы необходимо для управления конфигурацией магнитного поля и предотвращения контакта плазмы с элементами установки. Прямое измерение формы плазмы в токамаке невозможно из-за экстремальных условий в камере. Поэтому её параметры восстанавливаются косвенно: по сигналам внешней магнитной диагностики или по оптическим изображениям с помощью вычислительных алгоритмов, решающих обратную задачу равновесия.

Современные токамаки, как правило, имеют вытянутое по вертикали сечение плазмы. Это улучшает энергетическое удержание, но порождает *неустойчивость вертикального положения*: даже малое возмущение может привести к экспоненциальному росту смещения плазмы, если не принять своевременных мер. Поэтому для безопасного проведения экспериментов необходима система управления с обратной связью. Ограниченность управляющего воздействия (напряжения на обмотках) приводит к существованию *области управляемости* по вертикали — множества начальных отклонений, из которых плазму можно вернуть в равновесное состояние. Знание её границ позволяет избежать аварийных ситуаций и правильно планировать сценарии разряда.

Помимо задачи стабилизации вертикального положения, в процессе подготовки экспериментов требуется формирование магнитной конфигурации с заданной *формой плазмы*. Однако не любая желаемая конфигурация достижима при существующих технических ограничениях на напряжения и токи в обмотках полоидального поля, а также на допустимые зазоры между плазмой и стенками вакуумной камеры. Следовательно, необходима предварительная оценка *области достижимости* (ОД) формы плазмы — множества параметров, которые могут быть реализованы в рамках заданных ограничений. Такая оценка позволяет повысить эффективность планирования экспериментов и снизить риски.

Для оперативного моделирования динамики плазмы, помимо оценок области управляемости и области достижимости, необходимы также *быстрые методы восстановления её формы* по сигналам внешней магнитной диагностики. Итерационные алгоритмы, такие как FCDI, обеспечивают высокую точность, но требуют значительных вычислительных затрат. Вместе с тем, для планирования сценариев экспериментов, в частности в интервалах между разрядами, возникает потребность в многократном быстром просчёте возможных конфигураций плазмы при варьируемых параметрах. В таких условиях целесообразно применение упрощённых аппроксимационных моделей, построенных на основе идентификации по экспериментальным данным, полученным с помощью эталонных алгоритмов. Это позволяет проводить оперативное моделирование и заблаговременно оценивать достижимость желаемых параметров формы плазмы, что повышает эффективность подготовки экспериментов.

Степень научной разработанности темы. Широко развиты методы оценки области достижимости для моделей объектов с числом состояний не более 3-х, а также подходы для моделей высокого порядка, основанные на оценках сверху (Поляк Б. Т., Щербаков П. С., Хлебников М. В., Тюлюкин В. А., Черноусько Ф. Л., Овсеевич А. И., Ушаков В. А., Формальский А. М., Балашов М. В.). Применительно к системам магнитного управления плазмой в токамаке эта тема разработана слабо. В ряде работ затрагивается тема многомерного управления формой плазмы с точки зрения ее связи с изменением токов в управляющих обмотках, что является основой оценки многомерной области достижимости формы плазмы (Maviglia F., Mele A.).

Проблема области управляемости по вертикали была рассмотрена при математическом моделировании одного из проектов токамака ИТЭР, по результатам оценки ОУ была выработана рекомендация расположить дополнительные обмотки горизонтального поля внутри камеры. Для проекта IGNITOR было найдено оптимальное расположение HFC с критерием оптимизации в виде размера области управляемости по вертикали внутри обмотки тороидального поля, вблизи вакуумной камеры.

Подходы на основе идентификации использовались для оценки параметров плазмы в реальном времени в токамаке COMPASS (Великобритания), сферическом токамаке START (Великобритания), ASDEX-Upgrade (Германия), D-III-D (США), моделях ИТЭР. Код восстановления EFIT был аппроксимирован нейронными сетями. Показана применимость нейронной сети в обратной связи при математическом моделировании системы управления токамака Глобус-М2.

В работах Коренева П. С. на основе данных токамака Глобус-М2 выполнено восстановление равновесных конфигураций плазмы с помощью кода FCDI. Полученные распределения магнитного потока и границы плазмы легли в основу линейных математических моделей с постоянными и переменными параметрами.

Объектом исследования являются линейные динамические модели плазмы в токамаке с ограниченными входами и выходами, а также системы магнитного управления плазмой в токамаках.

Предметом исследования выступают численные методы и комплексы программ для нахождения реализуемых конфигураций плазмы в токамаке и математического моделирования плазменных экспериментов.

Целью является проведение математического моделирования плазменных экспериментов, которое включает развитие численных методов построения многомерной области достижимости, реализованных в виде проблемно-ориентированного комплекса программ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**.

1. Разработать численный метод оценки многомерной области достижимости модели плазмы в токамаке с постоянными параметрами в установившемся режиме.
2. Разработать численный метод нахождения точек внутри области достижимости модели плазмы в токамаке с переменными параметрами.
3. Реализовать разработанные численные методы в составе проблемно-ориентированного комплекса программ для математического моделирования плазменного эксперимента.
4. Разработать математическую модель, связывающую внешние магнитные измерения с оценкой формы плазмы в токамаке, предназначенную для оперативного моделирования плазменных экспериментов.
5. Провести математическое моделирование систем магнитного управления плазмой в токамаках в рабочих и экстремальных режимах.

Методы исследования базируются на системном подходе, объединяющем математическое моделирование, численные методы и программную реализацию.

Научная новизна:

- 1) разработан численный метод оценки многомерной области достижимости для линейных моделей с постоянными параметрами и ограниченными управлениями, отличающийся от известных подходов использованием симплекс-метода для анализа влияния отклонений выходов на изменение управляющих сигналов в установившемся режиме и позволяющий находить верхние и нижние границы достижимых отклонений формы плазмы;
- 2) разработан численный метод нахождения точек внутри области достижимости, отличающийся от существующих возможностью использования моделей с переменными параметрами высокого порядка;
- 3) создан проблемно-ориентированный комплекс программ, реализующий разработанные численные методы п.п. 1) и 2), и внедренный в практику экспериментов на токамаке Глобус-М2;
- 4) разработана математическая модель, связывающая внешние магнитные измерения с оценкой формы плазмы в токамаке, отличающаяся низкой вычислительной сложностью, что обеспечивает высокое быстродействие при применении на целевой машине реального времени;
- 5) проведено математическое моделирование систем магнитного управления плазмой в токамаках Глобус-М2 и КТМ, отличающееся рассмотрением экстремальных режимов работы системы с использованием полных нелинейных моделей исполнительных устройств.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью и полнотой исходных положений и непротиворечивостью математических выкладок. Программная реализация разработанных методов выполнена в среде MATLAB с применением пакета HiGHS для решения задач линейного программирования. Результаты теоретических исследований подтверждены средствами математического моделирования, они находятся в прямом соответствии с общеизвестными результатами, дополняют и развивают их. Общая структура и подход к решению вышеозначенных задач опубликованы в рецензируемых журналах.

Соответствие паспорту специальности Работа соответствует специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» по следующим пунктам паспорта специальности.

- п. 3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.
- п. 7. Качественные или аналитические методы исследования математических моделей (технические науки).
- п. 8. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.
- п. 9. Постановка и проведение численных экспериментов, статистический анализ их результатов, в том числе с применением современных компьютерных технологий (технические науки).

Теоретическая значимость работы состоит в том, что разработанные численные методы позволяют оценивать область достижимости широкого класса линейных динамических моделей с десятками переменных состояния, ограниченными входами и выходами.

Практическая значимость состоит в том, что разработанный комплекс программ позволяет оперативно, в течение 10-минутной паузы между плазменными разрядами, проводить моделирование эволюции формы плазмы в токамаке, и уже на этапе моделирования отбрасывать заведомо нереализуемые сценарии плазменного разряда, что повышает эффективность и качество плазменных экспериментов.

Реализация результатов работы. Разработанные методы построения областей достижимости реализованы в виде проблемно-ориентированного комплекса программ. Комплекс программ установлен на подключенной к базе данных разрядов токамака Глобус-М2 ЭВМ для повышения эффективности планирования экспериментов за счет отсеивания сценариев, противоречащих ограничениям электромагнитной системы, что подтверждается актом о внедрении результатов диссертационной работы.

Основные положения, выносимые на защиту:

- 1) численный метод оценки многомерной области достижимости формы плазмы линейных моделей с постоянными параметрами и ограничениями на входы, использующий анализ матрицы, связывающей входы и выходы в установившемся режиме (п. 7);
- 2) численный метод нахождения точек внутри области достижимости линейных моделей с переменными параметрами и ограничениями на входы и выходы (п. 7);
- 3) комплекс программ, реализующий разработанные численные методы оценки области достижимости для моделирования плазменных экспериментов в токамаке (п. 3);
- 4) математические модели, связывающие внешние магнитные измерения с формой плазмы (п. 8);

- 5) результаты математического моделирования систем магнитного управления плазмой в токамаках в рабочих и экстремальных режимах (п. 7, п. 9).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на:

- научных семинарах лаборатории № 41 ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН,
- 17-й Всероссийской школе-конференции молодых учёных «Управление большими системами» (УБС-2021, Москва),
- международном симпозиуме «Интеллектуальные системы» (INTELS-2022, Москва),
- 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB-2020, Москва),
- 46th EPS Conference on Plasma Physics (EPS-2019, Милан).

Связь с планами научных исследований. Работа проводилась в рамках плановых фундаментальных научных исследований ИПУ РАН, поддержана грантами РНФ №№ 21-79-20180, 21-79-20180-П.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, индексируемых в международных базах данных и приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1, 4 — в трудах конференций, 1 — в прочих изданиях. Зарегистрированы 1 патент и 1 программа для ЭВМ.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, представлены: краткий обзор современного состояния исследований; цель и задачи работы, ее научная новизна и практическая значимость.

В первой главе представлены численные методы оценки многомерной области достижимости (ОД) формы плазмы (рис. 1) для линейных стационарных (ЛТИ) моделей токамака в установившемся режиме с ограничениями на управляющие воздействия. В **разделе 1.1** дан обзор существующих методов оценки областей достижимости (эллипсоидальные, полиэдрические, зонотопные, методы динамического программирования). Показано, что эти методы либо дают лишь грубые оценки сверху, либо экспоненциально сложны, либо не учитывают ограничения на выходные сигналы и переменные параметры, что делает их малоприменимыми для моделей плазмы высокой размерности.

В **разделе 1.2** предложены методы получения верхней и нижней оценок ОД формы плазмы. Для верхней оценки (максимального независимого

отклонения каждого зазора) получено аналитическое выражение:

$$y_{i \max} = \sum_{j=1}^p |M_{i,j}| u_{j \max},$$

где $M = -CA^{-1}B$ – матрица связывающая входы и выходы в установившемся режиме, $u_{j \max}$ – максимальные допустимые управляющие сигналы.

Для нижней оценки (одновременного изменения всех компонент выхода) задача сведена к линейному программированию (ЛП) и решена симплекс-методом. Вспомогательные оценки $y_{i \max}$ (максимальное отклонение одного зазора при нулевых остальных) находятся из задач вида:

$$\max\{y_1 = M_1 u \mid M_i u = 0, i = 2, \dots, 6, |u_j| \leq u_{j \max}\},$$

а гарантированное одновременное отклонение вычисляется по формуле:

$$y_{\max} = \left(\sum_{i=1}^6 \frac{1}{y_{i \max}} \right)^{-1}.$$

В разделе 1.3 описано математическое моделирование системы управления плазмой с постоянными параметрами для сферического токамака Глобус-М2. Приведены линеаризованные модели плазмы в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t), \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^{26}$ – вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^8$ – напряжения на обмотках, $y(t) \in \mathbb{R}^{16}$ – выходные сигналы (положение, токи, форма). Для синтеза регуляторов использован метод количественной теории обратной связи (QFT); настройка ПИД-регуляторов выполнена с учётом параметрической неопределённости, заданной массивом линейных моделей. Получена

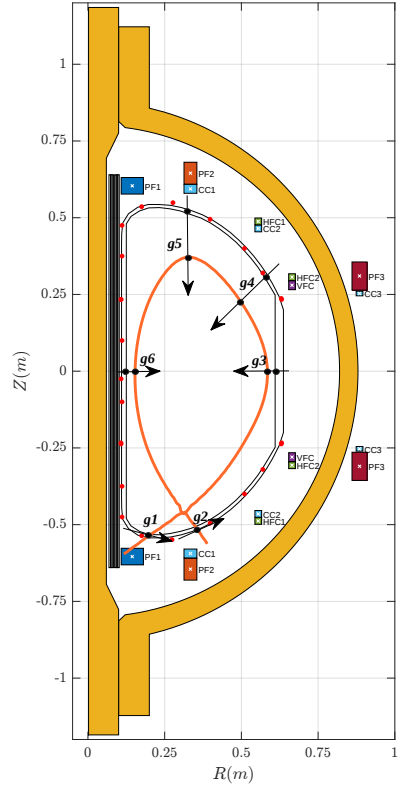


Рис. 1 — Вертикальное сечение с датчиками и управляющими обмотками. Показано расположение зазоров $g_1 \dots g_4$ и ударных точек g_5, g_6

матрица $M_i = -C_i A_i^{-1} B_i$, связывающая входы и выходы в установившемся режиме, которая является основой для оценки ОД.

На основе экспериментальных данных пяти разрядов Глобус-М2 и одного разряда Глобус-М рассчитаны верхние и нижние оценки ОД с ограничениями 5 см для уставок по положению, 1000 А для токов. Установлено, что верхние оценки для ударных точек достигают 50 см, для остальных зазоров – около 10 см, что значительно превышает типичные рабочие смещения. Нижняя оценка одновременного изменения всех шести зазоров составляет в среднем 5 мм (рис. 2), что свидетельствует о сильной взаимосвязи параметров формы и ограничивает возможности одновременного управления.

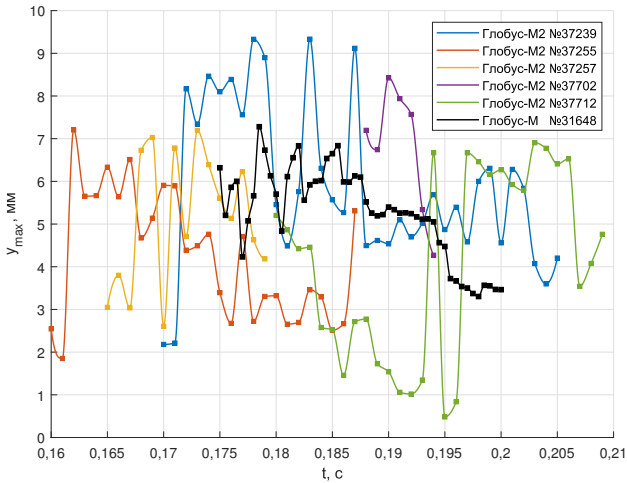


Рис. 2 — Динамика нижней оценки области достижимости формы плазмы

Вторая глава посвящена развитию метода оценки области достижимости (ОД) для изменяющихся во времени линейных моделей (LTV) и ограничениями как на входные, так и на выходные сигналы. Предложен алгоритм последовательной оценки ОД, позволяющий учитывать динамику системы и эволюцию параметров плазмы в течение разряда. Метод применён для анализа возможностей управления формой плазмы в токамаке Глобус-М2. В разделе 2.1 показано, что подходы к оценке ОД, основанные на анализе установившегося режима для набора LTI-моделей, имеют ограничения: не учитывают динамику переходных процессов, не отражают эволюцию параметров во времени и могут приводить к существенной неопределённости из-за большой разницы между верхней и нижней оценками. Сформулирована задача оценки ОД для LTV-модели вида

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k, \\ y_k &= C_k x_k + D_k u_k, \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_k x_k + \tilde{D}_k u_k, \end{cases} \quad (1)$$

с ограничениями на начальное состояние x_1 , управления u_k и часть выходов $\tilde{y}_k$.

В разделе 2.2 получена матричная связь между вектором начальных состояний, управляющими воздействиями на всех шагах и выходом на k -м шаге. Путём последовательной подстановки уравнений состояния устанавливается соотношение

$$y_k = M_k U_k, \quad U_k = [x_1^\top, u_1^\top, \dots, u_k^\top]^\top,$$

где матрица M_k формируется из произведений матриц системы. Для рекуррентного вычисления M_k и аналогичной матрицы H_k для дополнительных выходов $\tilde{y}_k$ предложены итерационные формулы, что обеспечивает эффективную реализацию алгоритма. Рассмотрение дополнительной группы выходов $\tilde{y}$ позволяет учесть ограничения на эти сигналы. Далее описан алгоритм последовательной (поэлементной) оценки ОД. На первом шаге для каждой компоненты выходного вектора решаются две задачи линейного программирования: задача максимизации и задача минимизации:

$$\begin{aligned} \max\{y_T^{(i)} &= M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F\}, \\ \min\{y_T^{(i)} &= M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F\}. \end{aligned}$$

В результате определяются интервалы возможных значений каждой компоненты. Затем пользователь фиксирует значение одной из компонент, и для оставшихся решаются задачи ЛП с дополнительным ограничением равенством. После t шагов все ограничения – это ограничения вида «равенство» и задача сводится к нахождению программного управления, реализующего заданную комбинацию выходов. Достаточным условием существования решения является выполнение условия

$$\begin{aligned} x_{\min}^{(i)} &\leq 0 \leq x_{\max}^{(i)}, \\ u_{\min}^{(i)} &\leq 0 \leq u_{\max}^{(i)}, \\ \tilde{y}_{\min}^{(i)} &\leq 0 \leq \tilde{y}_{\max}^{(i)}, \end{aligned}$$

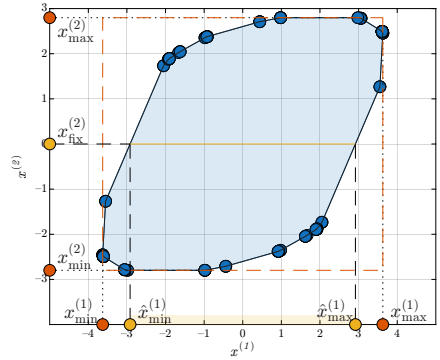


Рис. 3 — Область достижимости, полученная методом динамического программирования (синий контур) и методом последовательной оценки (красные и жёлтые точки). Красный прямоугольник — оценка после первого шага, жёлтая линия — уточнение после фиксации $x^{(2)} = 0$

что естественно для линейных систем.

Продемонстрирована работоспособность метода на модельном примере из литературы. Для системы второго порядка с матрицами, элементы которых изменяются по гармоническому закону, и ограничениями на управления и начальные состояния построена область достижимости после 70 шагов (рис. 3). Первый шаг алгоритма даёт внешнюю прямоугольную оценку (красный прямоугольник), второй шаг при фиксации $x^{(2)} = 0$ сужает интервал для $x^{(1)}$ (жёлтый отрезок), что совпадает с истинной областью, полученной методом динамического программирования. На заключительном шаге все ограничения – это ограничения вида равенство и определяется одно из возможных программных управлений для достижения конкретной точки внутри ОД.

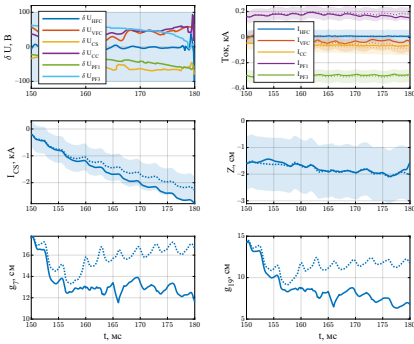


Рис. 4 — Реализация заданных отклонений δg_7 и δg_{19} (сплошные линии) при ограничениях. Пунктир — сценарий

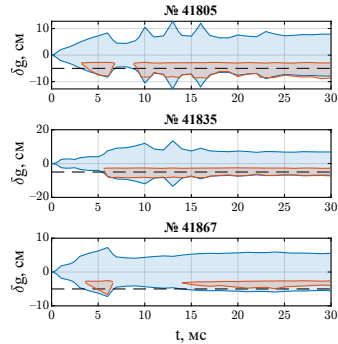


Рис. 5 — Изменение ОД для δg_7 (сплошной) и δg_{19} при фиксированном δg_7 (красный) в ходе разряда

В разделе 2.3 метод нахождения точек внутри ОД применён к оценке возможных конфигураций плазмы в токамаке Глобус-М2. Используются LTV-модели, построенные по экспериментальным данным разрядов №№ 41805, 41835, 41867. Форма плазмы описывается 24 зазорами. Рассмотрены отклонения от сценарных значений напряжений на шести обмотках полоидального поля при ограничениях на отклонения по вертикальному положению (± 1 см) и по токам в обмотках. В качестве примера выбраны зазоры g_7 и g_{19} , характеризующие вытянутость плазмы по вертикали. Для модели разряда № 41805 через 30 мс получены интервалы:

$$-7,9 \leq \delta g_7 \leq 7,9 \text{ см}, -8,6 \leq \delta g_{19} \leq 8,6 \text{ см}.$$

Фиксация $\delta g_7 = -5$ см сужает возможный диапазон для δg_{19} до $[-8,6; -2,9]$ см. Задав $\delta g_{19} = -5$ см, найдено программное управление, реализующее одновременное отклонение обоих зазоров на -5 см (рис. 4). Это

означает возможность дополнительного вытягивания плазмы по вертикали в пределах существующих ограничений. Анализ трёх разрядов показывает сильную корреляцию между противоположными зазорами (рис. 5).

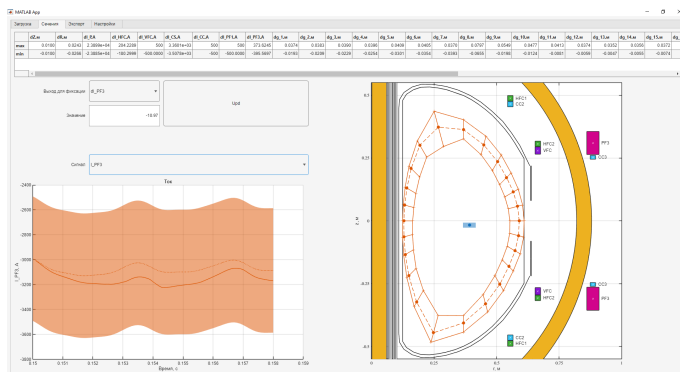


Рис. 6 — Интерфейс приложения, вкладка «Сечения». Показана область возможных изменений составляющих полоидального сечения плазмы для разряда № 41085 в момент времени $t = 158$ мс

Третья глава посвящена разработке комплекса программ, реализующего предложенные в главах 1 и 2 методы оценки области достижимости для формы плазмы в токамаке. Комплекс автоматизирует все этапы расчёта: загрузку и предобработку экспериментальных данных, рекуррентное формирование матриц связи, решение серий задач линейного программирования, визуализацию результатов и синтез программных управлений для заданных конфигураций плазмы. В разделе 3.1 описан пользовательский интерфейс приложения, реализованного в среде MATLAB. Интерфейс состоит из двух основных вкладок: «Загрузка» и «Сечения». На вкладке «Загрузка» осуществляется выбор экспериментальных данных, задание ограничений на сигналы (напряжения, токи, зазоры, положение плазмы) как в абсолютных значениях, так и в отклонениях от сценария, а также выбор алгоритма оптимизации (симплекс-метод или метод внутренней точки) и возможности распараллеливания вычислений. Вкладка «Сечения» (рис. 6) отображает для выбранного момента времени область возможных изменений каждого из зазоров, характеризующих вертикальное сечение плазмы, и позволяет интерактивно задавать целевые значения.

Рассматривается процедура загрузки и предобработки экспериментальных данных. Используются измерения с токамака Глобус-M2 (токи, напряжения в обмотках полоидального поля, восстановленные алгоритмом FCDI-IT зазоры $g_1 - g_{24}$ и координаты плазмы) с шагом дискретизации 100 мкс. Модель плазмы представляется в виде LTV-системы (1). Ограничения на отклонения от сценарных значений формируются с учётом

как абсолютных значений, так и текущих сценарных сигналов согласно соотношению:

$$\max(\delta y_{\min}, y_{\min} - y_k) \leq \delta y_k \leq \min(\delta y_{\max}, y_{\max} - y_k).$$

В разделе 3.2 представлена реализация в составе комплекса программ численного метода оценки области достижимости для ЛТИ-моделей. Основой является матрица M , связывающая входные сигналы с выбранным набором выходных параметров, это может быть шесть параметров формы, 24 зазора или произвольное подмножество. Для вычисления верхней оценки (максимального независимого отклонения каждого выхода) реализована функция, использующая аналитическое выражение $y_{i \max} = \sum_j |M_{i,j}| u_{j \max}$. Для нижней оценки (одновременного изменения всех выходов) решается серия задач линейного программирования, дающих вспомогательные оценки, на основе которых по формуле $y_{\max} = (\sum_i 1/y_{i \max})^{-1}$ вычисляется гарантированное одновременное отклонение. Интерфейс приложения позволяет задавать ограничения и визуализировать результаты, обеспечивая гибкость при планировании экспериментов.

В разделе 3.3 описан алгоритм рекуррентного вычисления расширенных матриц связи M_k и H_k , необходимых для постановки задач линейного программирования. Функция `precalc()` выполняет линейную интерполяцию матриц A_k, B_k, C_k между узлами LTV-модели и последовательно формирует матрицы по формулам:

$$M_k = [C_k Q_k, D_k], \quad H_k = \begin{bmatrix} H_{k-1} & 0_{r(k-1) \times p} \\ & \tilde{M}_k \end{bmatrix},$$

где Q_k вычисляется итерационно. Параллельно формируются векторы нижних и верхних границ для рассматриваемых выходов. Результатом являются матрицы, готовые для использования в задачах линейного программирования.

В разделе 3.4 представлена реализация первого этапа последовательной оценки ОД – вычисление верхних и нижних границ для всех компонент выходного вектора. Функция `GO()` решает $2m$ задач линейного программирования (максимизация и минимизация для каждого из m выходов) с использованием выбранного решателя. Для ускорения расчетов предусмотрен параллельный режим (`parfor`). Результатом являются интервалы $y_{\min}^{(j)} \leq y_T^{(j)} \leq y_{\max}^{(j)}$ для каждого выхода и соответствующие им программные управления, которые сохраняются для последующего анализа.

Описана функция `upd()`, реализующая итеративное уточнение ОД. На каждом шаге пользователь фиксирует значение одного из выходов (выбранного в интерфейсе), после чего для оставшихся свободных компонент заново решаются задачи ЛП с добавленным ограничением-равенством:

$$M_T^{(j)} U_T = y_{\text{fix}}^{(j)}.$$

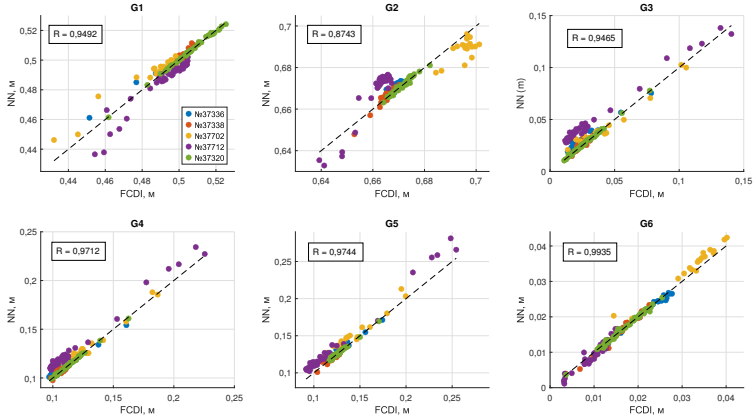


Рис. 7 — Результаты идентификации FCDI полносвязной нейронной сетью прямого распространения с одним скрытым слоем размером 100 нейронов и функцией активации LeakyReLU. Показаны 5 тестовых сигналов разрядов Глобус-М2 №№ 37336, 37338, 37702, 37712 и 37320

Процесс повторяется до тех пор, пока не будут зафиксированы все выходы. На заключительном шаге находится программное управление U_T^* , реализующее заданную точку в пространстве выходов. Все промежуточные и финальные результаты отображаются на графиках.

В четвертой главе синтезированы математические модели, связывающие внешние магнитные измерения с формой плазмы для оперативного моделирования (статическая матрица и нейросетевая аппроксимация алгоритма FCDI). Проведено математическое моделирование систем магнитного управления в рабочих и экстремальных режимах: для Глобус-М2 оценена область управляемости по вертикали, для КТМ выполнено полунатурное моделирование нелинейной каскадной системы, подтвердившее работоспособность при предельных смещениях и запаздываниях. **В разделе 4.1** рассматривается задача быстродействующей оценки формы плазмы в токамаке Глобус-М2 по сигналам магнитной диагностики. Форма плазмы задаётся шестью параметрами $g_1, \dots, g_6$ (рис. 1). Исходные данные – сигналы 33 магнитных датчиков.

В качестве эталонных данных используются параметры формы плазмы, полученные с помощью итерационного кода FCDI, который решает уравнение Грэда–Шафранова и обеспечивает высокую точность при значительных вычислительных затратах. Для оперативного моделирования (в том числе в промежутках между разрядами) строятся аппроксимационные модели.

Первая модель – статическая матрица, задающая связь $\hat{g} = Ky + \tilde{g}$. Матрица K и вектор $\tilde{g}$ определяются минимизацией среднеквадратичной ошибки на экспериментальных данных. На тестовом разряде MSE составила $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, время выполнения одного шага расчета составило 6,3 мкс на стенде реального времени, оборудованном процессором Intel Core i7-7700K.

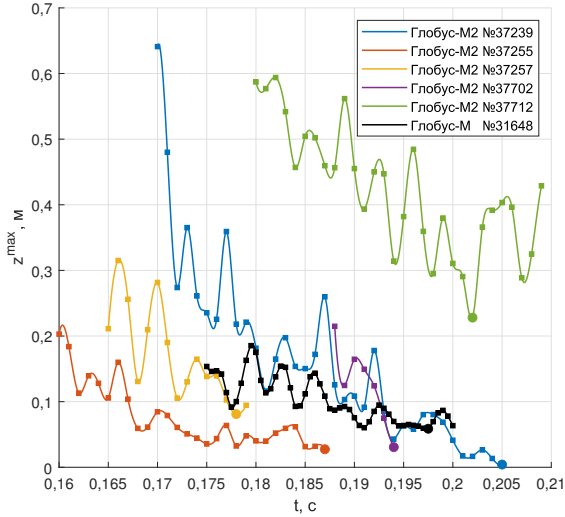


Рис. 8 — Динамика области управляемости по вертикали на протяжении разрядов в токамаках Глобус-М/М2

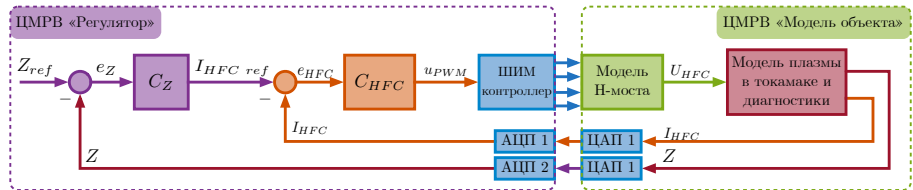
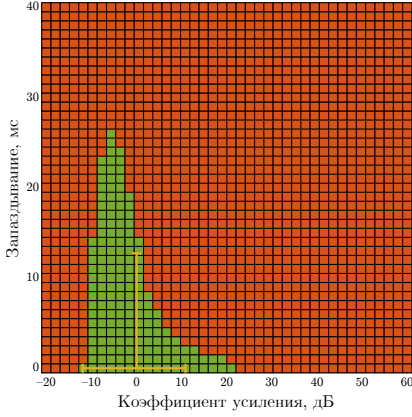


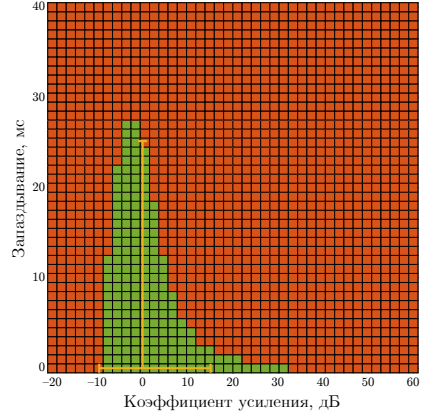
Рис. 9 — Структурная схема цифровой каскадной системы управления вертикальным положением плазмы в КТМ при проведении полунатурного моделирования

Вторая модель – полносвязная нейронная сеть прямого распространения с 33 входами и 6 выходами. Проведён подбор гиперпараметров и выбрана структура с одним скрытым слоем из 100 нейронов и функцией

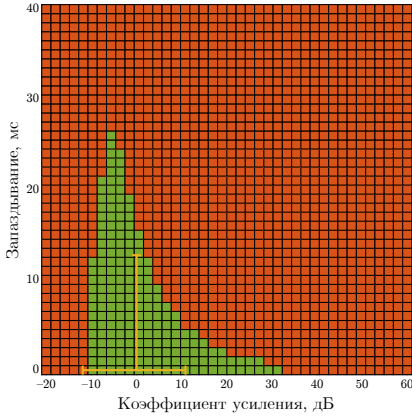
а) Разряд № 5121, $Z_{ref} = 1$ см



б) Разряд № 5126, $Z_{ref} = 1$ см



в) Разряд № 5121, $Z_{ref} = 5$ см



г) Разряд № 5126, $Z_{ref} = 5$ см

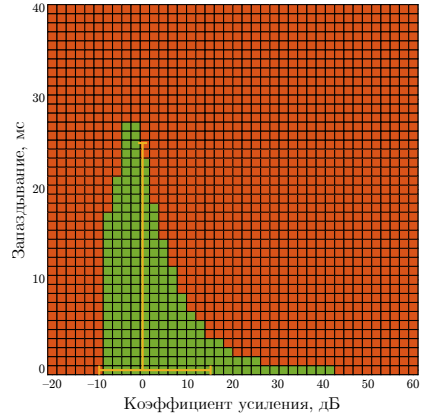


Рис. 10 — Диаграмма устойчивости нелинейной системы управления

активации LeakyReLU. Рассмотрены также рекуррентные сети, не давшие существенного выигрыша в точности. Зависимость времени выполнения от числа нейронов близка к квадратичной, что позволяет использовать сети со 100–150 нейронами для оперативного моделирования. Сравнение результатов нейросетевой модели с эталонными данными FCDI приведено на рис. 7.

В разделе 4.2 приведены результаты математического моделирования для оценки области управляемости (ОУ) вертикального положения плазмы в токамаке Глобус-М2. Использован аналитический метод, основанный на диагонализации модели и выделении неустойчивой моды, позволяющий вычислять максимальное начальное смещение $z^{\max}$ при заданном ограничении на управляющее напряжение $u_{\max} = 900$ В.

Корректность аналитических оценок подтверждена численным моделированием. Установлено, что область управляемости уменьшается в течение разряда, что необходимо учитывать при планировании сценариев. Динамика $z^{\max}$ для пяти разрядов Глобус-М2 и одного разряда Глобус-М показана на рис. 8.

В разделе 4.3 описано математическое моделирование системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ. Используются нелинейные модели плазмы (LTV) с насыщением по току и напряжению, а также полная нелинейная модель инвертора напряжения (рис. 9). Для нее построены диаграммы устойчивости (рис. 10), где зелёным отмечены точки, в которых система сохраняет устойчивость. Работоспособность системы подтверждена полунатурным моделированием. Исследованы рабочие режимы (задающее воздействие 5 см) и экстремальные: максимально достижимые смещения плазмы (до 27 см для разряда № 5121 и до 22 см для № 5126) и предельные запаздывания в контуре обратной связи (до 14 мс и 23 мс соответственно). Показано, что система сохраняет устойчивость во всём исследуемом диапазоне, а пиковая потребляемая мощность не превышает 1,2 МВт при допустимой 2 МВт.

В **заклучении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработан численный метод оценки многомерной области достижимости формы плазмы для линейных стационарных (LTI) моделей в установившемся режиме с ограничениями на управления. Метод основан на анализе матрицы, связывающей входы и выходы в установившемся режиме, и сведении задачи к линейному программированию, что позволяет получать как верхние (независимые), так и нижние (совместные) оценки достижимых отклонений параметров формы. Применение метода к данным разрядов Глобус-М2 и Глобус-М показало, что верхние оценки для ударных точек около 50 см, для зазоров — около 10 см, а нижняя оценка одновременного изменения шести параметров формы составляет в среднем 5 мм, что свидетельствует о сильной связи между каналами управления и компонентами формы.
2. Разработан численный метод нахождения точек внутри области достижимости для изменяющихся во времени линейных моделей (LTV). Метод основан на рекуррентном формировании расширенных матриц связи, последовательном оценивании выходов и сведении исходной многомерной задачи к серии задач линейного программирования. Метод позволяет учитывать динамику системы и эволюцию параметров плазмы в течение разряда, а также находить программные управления, реализующие заданную конфигурацию формы. Для токамака Глобус-М2 показана возможность одновременного изменения противоположных зазоров g_7 и

- g_{19} на 5 см, что соответствует дополнительному вытягиванию плазмы по вертикали.
3. Разработанный численный метод для LTI- и LTV-моделей реализован в составе проблемно-ориентированного комплекса программ для математического моделирования плазменного эксперимента в токамаке. Комплекс, реализованный в среде MATLAB, обеспечивает загрузку экспериментальных данных, рекуррентное вычисление матричных связей, решение оптимизационных задач, визуализацию области достижимости и синтез программных управлений. Комплекс программ был внедрен на УНУ «Сферический токамак Глобус-М», и позволил находить реализуемую форму плазмы в виде 24-х зазоров между плазмой и лимитером токамака. Функциональность программного комплекса направлена на повышение эффективности планирования экспериментов за счет отсеивания сценариев, противоречащих ограничениям электромагнитной системы.
 4. Проведено математическое моделирование систем магнитного управления плазмой в токамаках в рабочих и экстремальных режимах. Для токамака КТМ выполнено полунатурное моделирование каскадной системы управления вертикальным положением. Установлено, что система сохраняет устойчивость при смещениях до 27 см и запаздываниях до 23 мс. Для токамака Глобус-М2 с помощью аналитического метода оценена область управляемости по вертикали на протяжении разрядов; результаты верифицированы математическим моделированием. Показано, что область управляемости уменьшается в течение разряда, что необходимо учитывать при планировании экспериментов.
 5. Разработана математическая модель, связывающая внешние магнитные измерения с формой плазмы в токамаке Глобус-М2 для оперативного моделирования. В качестве эталонного использован итерационный алгоритм FCDI. Предложены две аппроксимационные модели: статическая матрица (линейная регрессия) и полносвязная нейронная сеть. Разработанные модели пригодны для оперативного моделирования формы плазмы, в том числе в промежутках между разрядами.

Дальнейшая работа будет направлена, во-первых, на адаптацию метода для других токамаков, имеющих другие конфигурации управляющих обмоток и параметры источников питания, а также иную форму камеры, во-вторых, на усовершенствование методов оценки ОД посредством уточнения моделей отклоненных от сценариев. Это позволит преодолеть ограничение малых отклонений от сценарных значений и расширить диапазон рассматриваемых входных и выходных сигналов.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1

1. *Кружков, В. И.* Метод нахождения точек внутри области достижимости для линейной дискретной модели объекта высокого порядка с переменными параметрами / В. И. Кружков // Автоматика и телемеханика. — 2026. — № 7. — С. 6—22.
2. Полунатурное моделирование цифровой системы управления вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ / А. Е. Коньков [и др.] // Автоматика и телемеханика. — 2025. — № 1. — С. 63—79.
3. *Mitrishkin, Y. V.* Methodology of Plasma Shape Reachability Area Estimation in D-Shaped Tokamaks / Y. V. Mitrishkin, V. I. Kruzhkov, P. S. Korenev // Mathematics. — 2022. — Vol. 10. — P. 4605.
4. New Identification Approach and Methods for Plasma Equilibrium Reconstruction in D-Shaped Tokamaks / Y. V. Mitrishkin [et al.] // Mathematics. — 2021. — Vol. 10. — P. 40.

Статьи в сборниках трудов международных и всероссийских конференций

5. *Kruzhkov, V. I.* Real-Time Hardware Identification of Complex Dynamical Plant by Artificial Neural Network Based on Experimentally Processed Data by Smart Technologies / V. I. Kruzhkov, Y. V. Mitrishkin, E. A. Pavlova // Engineering Proceedings. — 2023. — Vol. 33, no. 1. — P. 17.
6. *Кружков, В. И.* Настройка системы управления положением плазмы и полоидальными токами токамака Глобус-М2 и реализация на стенде реального времени / В. И. Кружков // Труды 17-й Всероссийской школы-конференции молодых учёных «Управление большими системами» (УБС'2021, Москва). — Москва — Звенигород : Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2021. — С. 704—710.
7. *Mitrishkin, Y. V.* Two-cascade multiloop control system of a plasma shape in a tokamak with decoupling and robust PID-controllers / Y. V. Mitrishkin, V. I. Kruzhkov // Proceedings of the 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB). — 2020. — P. 1—4.

8. *Mitrishkin, Y. V.* Estimation of controllability region of unstable vertical plasma position and plasma separatrix multivariable reachability area of a spherical tokamak / *Y. V. Mitrishkin, V. I. Kruzhkov, M. I. Patrov* // Proceedings of the 46th EPS Conference on Plasma Physics. — Milan, Italy, 07/2019. — P4.1095.

Зарегистрированные патенты

9. *Патент 2787571 Рос. Федерация, МПК G 21 B 1/00.2787571* / Ю. В. Митришкин [и др.] ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова"(МГУ). — № 2022117882 ; заявл. 30.06.2022 ; опубл. 11.01.2023, Бюл. № 2 ; приоритет 30.06.2022. — 20 с.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

10. *Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ.* Программа для итерационного нахождения области достижимости формы плазмы в токамаке по линейным моделям с переменными параметрами / В. И. Кружков, А. Е. Коньков ; Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук. — № 2025682596 ; заявл. 25.08.2025 ; опубл. 25.08.2025, 2025682596 (Рос. Федерация).

Статьи в других рецензируемых научных изданиях

11. Комплекс программ для вычисления реализуемых конфигураций плазмы в токамаке Глобус-М2 / В. И. Кружков [и др.] // Письма в ЖТФ. — 2026. — № 10. — С. 48–54.

Личный вклад соискателя в совместные публикации. [2] – проведено моделирование в рабочем и экстремальном режимах для анализа робастной устойчивости и оценки размера области управляемости по вертикали; [3; 8] – получены оценки области управляемости по вертикали и на плоскости (Z, I_{HFC}) , предложен метод верхней и нижней оценок ОД на основе матрицы, связывающей входные и выходные сигналы в установившемся режиме; [4; 9] – получены математические модели, связывающие магнитные измерения вне вакуумной камеры и форму плазмы в виде линейной регрессии со сдвигом, [5] – в виде нейронных сетей; [7] – проведено математическое моделирование каскадной системы управления. [10; 11] – на токамак Глобус-М2 внедрен комплекс программ для моделирования плазменных разрядов с учетом ограничений на ЭМС токамака.

Кружков Валерий Игоревич

Моделирование области достижимости формы плазмы в токамаке

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____