На правах рукописи

Искаков Михаил Борисович

РАВНОВЕСИЕ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ

Специальность 2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН)

Научный консультант: **Чхартишвили Александр Гедеванович**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

Защита состоится DD mmmmmmmm YYYY г. в XX часов на заседании диссертационного совета 24.1.107.02 на базе ФГБУН Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН по адресу: 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке и на сайте ИПУ РАН https://www.ipu.ru

Автореферат разослан «____» ____________ 2025 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.1.107.02,

кандидат физико-математических наук Тремба Андрей Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В работе для игр в нормальной форме предложена концепция *равновесия в безопасных стратегиях* (РБС), обобщающая *равновесие Нэша* (РН) на случай осторожного поведения ограниченно рациональных игроков, что позволило построить решения для ряда классических задач без РН.

Актуальность темы. Результаты диссертационной работы вводят в рассмотрение схему *стратегической рефлексии*, описывающую осторожность субъектов относительно *игровой неопределенности*. Это соответственно позволяет моделировать *осторожное поведение* игроков, которые, с одной стороны, должны учитывать *угрозы*, исходящие друг от друга, но, с другой стороны, не могут полагаться на стратегии наказания, договоров, убеждений и информационного воздействия на них, социально-моральных ограничений и другие виды *ограниченно рациональных* моделей стратегической рефлексии. Это позволяет моделировать поведение субъектов в практически важном классе ситуаций, не описанных другими ограниченно рациональными моделями теории игр.

Большинство известных ограниченно рациональных моделей используют рефлексию, имитирующую динамику отклонений и стратегии наказания, которые делают устойчивыми очень много профилей стратегий игроков и дают широкое множество решений. В предлагаемой модели удалось, ограничив уровень рефлексии числом два, отразить логику осторожного поведения игрока, не рассчитывающего на стратегию наказания, а только уклоняющегося от возможных угроз. При этом множество решений существенно сокращается. Ситуация, когда при реализации угрозы встречное наказание может не произойти, до сих пор не моделировалась в известных ограниченно рациональных моделях.

Это подтверждается тем, что в задачах, где РБС-решение описывает реакцию игроков именно на такую опасность (модели Бертрана–Эджворта, Хотеллинга, Таллока–Скапердаса, Ротшильда–Стиглица–Вильсона), соответствующие аналоги решений ранее найдены не были. Дискуссия о нахождении решения данных задач без равновесного по Нэшу решения, в рамках различных подходов, имеет весьма объемный круг литературы и продолжается до сих пор.

Степень научной разработанности темы. В самом общем смысле в *теории игр* понятие *равновесия* задает концепцию *решения* игровой задачи как способ устранения игровой неопределенности. В отличие от информационной неопределенности относительно объективных параметров ситуации («состояния природы»), которая описывается как интервальная, вероятностная или нечеткая (Новиков Д.А., Губко М.В.), игровая неопределенность моделирует поведение других игроков. Таким образом, определяется та или иная концепция решения игровой задачи (Crawford V.). Концепции решения задают теоретический фундамент разделов теории игр: классическая рациональность и игры в нормальной форме (Bertrand J., Cournot A., Walras L., von Neumann J., Morgenstern O., Samuelson P., Nash J.), иерархические игры (Stackelberg H., Гермейер Ю.Б.), коалиционные игры (von Neumann J., Morgenstern O., Aumann R.J., Maschler M.), кооперативные игры, повторяющиеся игры (Friedman J.W.), ограниченно рациональные модели (Simon H, Kahneman D. и дальнейшие многочисленные направления) и т.д.

Базовой концепцией теории игр является *классическая рациональность*, анализу которой посвящены работы: Bernheim D., Pearce D., Rubinstein A., Harstad R., Selten R., Crawford V. Ограниченно рациональные модели решений игр делятся (Crawford V.) на два класса: модели *повторяющихся игр* (Friedman J., Kahneman D., Tversky A., Smith J., Milgrom P., Roberts J., Rabin M., Selten R., Fudenberg D., Levine D., Macy M., Flache A., Müller W., Normann H.T., Aumann R.J.) и модели *стратегической рефлексии* (Harsanyi J., Chwe M., Цыганов В.В., Aumann R.J., Brandenburger A., McKelvey R., Palfrey T., Camerer C.F., Ho T.H., Chong J.K., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г., Crawford V., Costa-Gomes M., Iriberri N.). Предлагаемая модель РБС относится к моделям стратегической рефлексии, ключевым элементом модели является понятие угрозы, исходящей от другого игрока. Среди ограниченно рациональных моделей стратегической рефлексии, описывающих отношения угроз и контругроз, следует отметить модели следующих авторов: von Neumann J., Morgenstern O., Schelling T., Aumann R.J., Maschler M., Friedman R.W., Вайсборд Э.М., Жуковский В.И., Вилкас Э.Й., Сандомирская М.

Теоретически модель игрового решения может стать полноценной концепцией только если она будет подкреплена доказанными теоремами существования решений, что означает, что она может стать основой для решения разнообразных частных задач. Для этого из обширной литературы, посвященной существованию равновесий и методам их получения, был выбран ряд базовых работ с *теоремами существования равновесия* Нэша (Debreu G., Dasgupta P., Maskin E., Reny P.J., Bagh A., Jofre A., Bich P.), а для распространения этих результатов для равновесия Нэша на РБС использован подход из теории активных систем (Бурков В.Н., Кондратьев В.В.) – принцип *сильных штрафов*, переформулированный как *принцип сильных угроз*.

С точки зрения практического использования, модель РБС позволила получить решение с убедительной содержательной интерпретацией ряда классических *разрывных* (т.е. с разрывными функциями выигрыша или наилучшего ответа) игровых задач без равновесия Нэша, до сих пор не имевших удовлетворительного решения (Bertrand J., Edgeworth F.M., Hotelling H., Dasgupta P., Maskin E., d'Aspremont C., Gabszewicz J., Thisse J.F., Tullock G., Skaperdas S., Rothschild M., Stiglitz J.E., Wilson C.). Этот класс игр является сложным, не имеет хороших свойств (таких как выпуклость, квазивогнутость, непрерывность и т.п.), позволяющих доказывать существование решений и находить их. Альтернативные подходы к решению игровых задач (решения в смешанных стратегиях, решения «ad hoc» для частных постановок задач, решения в угрозах и контругрозах, использующие логику наказания) сталкиваются на этом классе с большими трудностями и не дают удовлетворительного окончательного результата.

Таким образом, тема работы лежит на пересечении ряда направлений исследований: ограниченно рациональных моделей стратегической рефлексии, теории существования равновесий, игровых задач без равновесия Нэша. Каждое из этих направлений активно развивается, и в рамках каждого предлагаемая концепция РБС является новым существенным результатом.

Объектом исследования являются ограниченно рациональные модели принятия решений в ситуациях игровой неопределенности без равновесия Нэша, в том числе – разрывные задачи, **предметом исследования** – концепции принятия решений (равновесия) в таких ситуациях.

Цель работы состоит в создании, разработке и обосновании новой концепции принятия решений в ситуациях игровой неопределенности – РБС, предназначенной для моделирования осторожного поведения, и теоретических условий его существования, в особенности для игр без равновесия Нэша с континуальными множествами стратегий, разрывными функциями выигрыша и наилучшего ответа.

Реализация поставленной цели предполагает решение следующих **основных задач**:

1. Формулировка системы определений РБС.
2. Интерпретация определения РБС как обобщения равновесия Нэша.
3. Определение места РБС среди ограниченно рациональных теоретико-игровых моделей принятия решения.
4. Исследование общих условий существования РБС и разработка формальных методов построения теорем его существования.
5. Формулировка конкретных критериев, доказательство теорем существования РБС.
6. Применение этих критериев к хрестоматийным нерешенным разрывным игровым задачам.
7. Нахождение РБС в этих задачах.

Основным **методом исследования** является математическая теория управления социально-экономическими и организационными системами, принятия решений и теория игр, в частности теория рациональности, теория игровых равновесий, теория активных систем.

Научная новизна работы заключается в разработке новой концепции равновесия и ее обоснования с точки зрения различных аспектов: анализа существующих моделей, системы определений, теории и теорем существования решений, решения известных нерешенных игровых задач. На основе этой концепции:

1. Сформулирована и обоснована система определений новой концепции игрового равновесия – РБС, предложена ее интерпретация как обобщение определения равновесия Нэша.
2. Показано, что РБС является ограниченно рациональной моделью решения игры, описывающей осторожное поведение игроков.
3. Разработан метод формулирования и доказательства теорем существования РБС.
4. Теоремы существования применены к двум хрестоматийным нерешенным задачам (пространственной конкуренции Хотеллинга и конкуренции за ренту Таллока–Скапердаса). Доказано, что данные задачи всегда имеют решение РБС.
5. Модель РБС применена и позволила получить решение ряда классических задач без равновесия Нэша: дуополия Бертрана–Эджворта, пространственная конкуренция Хотеллинга, конкуренция за ренту Таллока–Скапердаса, рынок страхования Ротшильда–Стиглица–Вильсона.

Теоретическая и практическая значимость. Проведенное исследование является значимым так как: 1) в рамках общего развития ограниченно рациональных моделей принятия решения и теории игр предложен новый подход в рамках активно развивающейся области моделей стратегической рефлексии; 2) с теоретической точки зрения, предложен метод конструирования теорем существования равновесий; 3) предложены решения практически важных игровых моделей, в особенности в классе разрывных задач без равновесия Нэша; 4) для содержательных интерпретаций промоделированы ранее не исследованные ситуации осторожного поведения игроков.

Соответствие паспорту специальности 2.3.1 «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Система определений РБС формирует новую концепцию принятия решений в социально-экономических и организационных системах в ситуациях с игровой неопределенностью (п. 2 паспорта специальности).

2. Система определений РБС является расширением определения равновесия Нэша для принятия решений осторожными игроками в рамках классической теории рациональности (п. 2 паспорта специальности).

3. Трактовка РБС как ограниченно рациональной модели стратегической рефлексии второго уровня (угроза-контругроза) позволяет описать осторожное поведение без возможности стратегии наказания и получить для ряда классических задач дискретное конечное множество решений малой мощности с убедительной содержательной интерпретацией (п. 3 паспорта специальности).

4. Предложенный общий метод позволяет применить известные теоремы существования равновесия Нэша для формулировки и доказательства теорем существования РБС (п. 1 паспорта специальности).

5. При помощи предложенного общего метода сформулированы и доказаны теоремы существования РБС (по Дебре, Рени, Бику) (п. 1 паспорта специальности).

6. Доказано существование РБС в классических задачах пространственной конкуренции Хотеллинга и конкуренции за ренту Таллока–Скапердаса, в том числе при отсутствии равновесия (п. 1 паспорта специальности).

7. Получены РБС-решения с единообразной содержательной интерпретацией для ряда классических задач, где не всегда существует равновесие Нэша: дуополия Бертрана–Эджворта, пространственная конкуренция Хотеллинга, конкуренция за ренту Таллока–Скапердаса, рынок страхования Ротшильда–Стиглица–Вильсона (п. 1 паспорта специальности).

Степень обоснованности и достоверности полученных научных результатов подтверждена приведенными доказательствами лемм и теорем; решением ряда задач, корректностью проведенных математических преобразований; а также дополнительно проверена результатами математического и компьютерного моделирования, согласующимися с теоретическими результатами. Все основные результаты работы были опубликованы в рецензируемых журналах.

Апробация. Основные результаты докладывались и обсуждались на конференциях: международной научно-практической конференции «Теория активных систем» (Москва 2005, 2007, 2011, 2014, 2019); Международной научно-практической конференции «Современные сложные системы управления» (Тверь, 2008); IV Всероссийской школы-семинара молодых ученых «Проблемы управления и информационные технологии» (Казань 2008); Всероссийской конференции и секции Математической экономики XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, Байкал, 2008, 2011); VI всероссийской школы-семинара молодых ученых «Управление большими системами» (Ижевск, 2009); IV, VII Международной конференции «Game Theory and Management» (Санкт-Петербург 2010, 2013); XIII, XIV, XVI Апрельской международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества (Москва 2012, 2013, 2015); Международной конференции «European Meeting on Game Theory» (SING11-GTM2015) (Санкт-Петербург 2015); семинарах Института проблем управления РАН, Высшей школы экономики, Российской экономической школы и Центрального экономико-математического института РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликована 41 работа, в том числе 1 монография [1], 16 статей в рецензируемых научных изданиях, из них 4 в журналах Перечня ВАК по специальности 2.3.1 (физ.-мат.), категория К1 [2-5], 7 статей в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных (приравнены к журналам Перечня ВАК, категория К1) [6-12], 5 статей в иных рецензируемых журналах не вошедших в Перечень ВАК по специальности 2.3.1 (физ.-мат.) и научные издания, индексируемые в международных базах данных (приравненные к журналам Перечня ВАК, категория К1) [21, 24, 31, 39, 41], 7 препринтов [13-19], 1 раздел в монографии [22], 16 работ в сборниках трудов конференций [20, 23, 25-30, 32-38, 40].

Личный вклад соискателя. Все основные результаты работы были получены автором самостоятельно.

Связь с планами научных исследований. Результаты работы получены в рамках планов фундаментальных научных исследований ИПУ РАН и при выполнении следующих проектов:

1. 2007–2008 – Грант РФФИ № 07-07-00079-а «Синтез неманипулируемых механизмов активной экспертизы на многомерных множествах» (исполнитель).
2. 2007–2009 – Грант РФФИ № 07-07-00078-а «Математические модели и методы поиска оптимальных иерархических структур» (исполнитель).
3. 2008–2010 – Грант РФФИ № 08-07-00081-а «Механизмы комплексного оценивания в сложных системах» (исполнитель).
4. 2009–2011 – Грант РФФИ № 09-07-00093-а «Методы решения теоретико-игровых задач распределения ресурсов» (исполнитель).
5. 2010–2012 – Грант РФФИ № 10-07-00063-а «Равновесие в безопасных стратегиях в теоретико-игровых задачах принятия решений» (руководитель проекта).
6. 2010–2012 – Грант РФФИ № 10-07-00129-а «Модели оптимизации многоуровневых организаций» (исполнитель).
7. 2014–2016 – Грант РФФИ № 14-01-00131-а «Равновесия в безопасных стратегиях в разрывных экономических играх» (руководитель проекта).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Работа содержит 378 страниц текста, 53 иллюстрации, 6 таблиц. Список использованной литературы содержит 202 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность и значимость исследуемой проблематики, дан обзор степени разработанности темы в литературе, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, охарактеризованы используемые методы, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Первая глава посвящена априорному, предварительному обсуждению предлагаемой концепции. В разделе 1.1 приводится общее качественное описание понятия РБС без формальных конструкций, которое далее обсуждается в сравнении с равновесием Нэша–Курно, с точки зрения теорем существования равновесий, теории рациональности, динамических игр, в связи с другими моделями, а также рассматриваются ограничения концепции. В качестве исходных понятий определяются понятия ***угрозы*** и ***безопасного профиля***. По этой концепции, ***равновесие в безопасных стратегиях*** есть такой игровой профиль, где стратегия каждого игрока определяется двумя принципами: (1) игрок не может потерять в результате одностороннего и выгодного отклонения любого другого игрока (то есть отсутствуют ***угрозы*** или ***профиль безопасен***) и, (2) выгодно отклоняясь сам, он может потерять больше в результате последующего одностороннего и выгодного отклонения какого-либо другого игрока (то есть нет ***безопасных отклонений***). Или то же, немного по-другому: в равновесии нет угроз, и никто не может улучшить своё положение, не подставляясь под угрозу.

О предположениях, заложенных в основание подхода. Первое: в исследовании, как правило, не предполагается кооперативное поведение участников, создание коалиций и так далее. Второе: не применяется принцип смешанных стратегий. Третье: так же как и равновесие Нэша, РБС является статической концепцией, и основной принцип исключения в ситуации равновесия определённых отклонений сохраняется. Но РБС также апеллирует к динамической интуиции, допуская в равновесии возможность существования некоторых выгодных отклонений, которые блокируются встречными отклонениями, наказывающими отклонившегося игрока. Тем не менее, развёрнутой логики стратегий наказания, как в динамических многошаговых играх, не предполагается и, следовательно, не появляется возможность, за счёт угрозы стратегий экстремального наказания «ослушника», реализовать слишком широкий класс равновесий, как в «народных теоремах». То есть тройка традиционных, классических способов разрешения противоречий намеренно исключается из рассмотрения.

В разделе 1.2, обзоре литературы, разбираются: игровые задачи без равновесия Нэша, решения в смешанных стратегиях, «ad hoc» решения, решения в возражениях–контрвозражениях (угрозах–контругрозах), концепции дальновидных решений (стратегической рефлексии), существование равновесий Нэша в разрывных играх, статические и динамические модели олигополистического поведения, концепции рациональности, эволюционные и рефлексивные модели. Предлагаемая концепция имеет тесные связи со всеми этими направлениями, но не сводится ни к отдельным подходам, ни к их совокупности. Новый подход позволяет обойти известные слабости традиционных подходов.

Во **второй главе** вводится, иллюстрируется и обсуждается формальное определение РБС. В разделе 2.1 оно сначала введено в кратком базовом варианте системы определений, что фактически является основным результатом всей работы. Система включает в себя четыре ключевых определения ***угрозы***, ***безопасной стратегии***, ***безопасного отклонения***, ***равновесия в безопасных стратегиях***. Рассматривается некооперативная игра n участников $G = (i \in N, s_i \in S_i, u_i(s_i, s_{-i}) \in \mathbb{R})$ в нормальной форме.

Определение 2.1. ***Угрозой*** *игрока j игроку i в профиле стратегий s называется такая пара профилей $\{s, (s_j', s_{-j})\}$, что $u_j\left(s_j', s_{-j}\right) > u_j(s)$ и $u_i\left(s_j', s_{-j}\right) < u_i(s)$. Профиль стратегий s называется* ***содержащим угрозу****, а s' –* ***угрожающим*** *игроку i со стороны игрока j.*

Определение 2.2. *Стратегия s_i игрока i называется* ***безопасной стратегией*** *для этого игрока при заданных стратегиях s_{-i} всех других игроков, если профиль s не содержит угроз игроку i. Профиль стратегий s называется* ***безопасным профилем****, если все его стратегии безопасны.*

Определение 2.3. ***Безопасным отклонением*** *игрока i в профиле s называется такая стратегия s_i', что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i\left(s_i', s_j', s_{-ij}\right) \geq u_i(s)$ для любой угрозы $\{(s_i', s_{-i}), (s_i', s_j', s_{-ij})\}$ любого игрока $j \neq i$ игроку i.*

Определение 2.4. *Безопасный профиль стратегий называется **равновесием в безопасных стратегиях (РБС)**, если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением.*

Вводятся обозначения: $Q \in S$ – множество безопасных профилей; $Q_i \in S$ – множество безопасных профилей игрока i; $Q_i(s_{-i}) \in S_i$ – множество безопасных стратегий игрока i. Непосредственно из этой системы определений очевидно следует:

Утверждение 2.1. *Любое равновесие Нэша является равновесием в безопасных стратегиях.*

Далее предложена эквивалентная расширенная система определений РБС, естественно выводящая его из определения равновесия Нэша. В соответствии с ней:

Определение 2.7. ***Несоревновательным отклонением** игрока i в профиле стратегий s называется такое отклонение s_i', что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s_i', s_{-i}) \geq u_j(s)$ для всех других игроков $j \neq i$.*

Определение 2.8. *Безопасный профиль стратегий называется **равновесием Нэша**, если ни один игрок не может сделать несоревновательного отклонения.*

Определение 2.9. ***Безопасным несоревновательным отклонением** игрока i в профиле s называется такое несоревновательное отклонение s_i', что $u_i\left(s_i', s_j', s_{-ij}\right) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s_j' любого игрока $j \neq i$ против игрока i в профиле (s_i', s_{-i}).*

Определение 2.10. *Безопасный профиль стратегий называется **равновесием в безопасных стратегиях (РБС)**, если ни один игрок не может сделать безопасное несоревновательное отклонение.*

Таким образом, РБС является не просто формальной конструкцией, определяющей множество равновесных профилей, в которое входит множество равновесий Нэша. В новой системе определений сформулирована ***модель (ограниченной) рациональности осторожного игрока***, который сам по себе не будет делать опасных отклонений, поэтому для определения равновесного профиля достаточно наложить более слабое ограничение только на безопасные отклонения.

<u>Раздел 2.2</u> демонстрирует понятие безопасных стратегий на матричных примерах, дано четыре серии примеров: для иллюстрации базовых принципов безопасных стратегий; матричные аналоги известных

классических задач, получающих новую интерпретацию и решения в безопасных стратегиях; матричные примеры, где логика безопасных стратегий существенна, но формально РБС нет; матричные игры трёх игроков с безопасными стратегиями. Таким образом, на этих примерах представлен широкий ряд возможных типов игр, в которых безопасные стратегии имеют значение.

В <u>разделе 2.3</u> рассматриваются свойства РБС. В этом разделе дается ряд утверждений, непосредственно следующих из системы определений, которые фактически являются комментариями, проясняющими понятие РБС с разных точек зрения. Доказано, что для ***строго соревновательных игр*** множества равновесий Нэша и РБС совпадают, но для ***почти строго соревновательных игр*** (по Ауманну, 1961) это неверно.

Утверждение 2.2. *В строго соревновательной игре любое равновесие в безопасных стратегиях является равновесием Нэша.*

Введены понятия ***наилучшего безопасного ответа*** и ***профиля наилучших безопасных ответов (НБО)***, получаемых как результат максимизации функции выигрыша на множестве безопасных стратегий. Показано, что эти ***НБО-профили*** образуют более широкое множество, чем РБС. Введены понятия ***тривиального безопасного отклонения*** и ***слабого РБС***, для пограничных случаев, когда контругроза игроку на его отклонения сводит его выигрыш к величине, равной его исходному выигрышу.

Определение 2.11. *Стратегия s_i^* игрока i называется* ***наилучшим безопасным ответом*** *на стратегии s_{-i}^* всех других игроков, если у игрока i нет более выгодной безопасной стратегии:*

$$s_i^* \in Q_i(s_{-i}^*) \;\;\&\;\; u_i(s^*) = \max_{s_i \in Q_i(s_{-i}^*)} u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Профиль s^* называется ***профилем наилучших безопасных ответов (НБО-профилем),*** *если стратегии всех игроков являются их наилучшими безопасными ответами.*

Утверждение 2.3. *Любое равновесие в безопасных стратегиях является НБО-профилем. НБО-профиль может не быть равновесием в безопасных стратегиях.*

Определение 2.13. ***Безопасное отклонение*** *s_i' игрока i в профиле s называется* ***тривиальным****, если существует такая угроза $\{(s_i', s_{-i}), (s_i', s_j', s_{-ij})\}$ игрока $j \neq i$ игроку i, что $u_i(s_i', s_j', s_{-ij}) = u_i(s)$.*

Определение 2.14. *Безопасный профиль стратегий называется **слабым равновесием в безопасных стратегиях**, если ни один игрок не может сделать не тривиальное безопасное отклонение.*

Введено понятие ***безопасного выигрыша***, равного выигрышу игрока при реализации наихудшей угрозы, содержащейся в профиле, и понятие ***игры угроз***, с соответствующими функциями выигрыша. Доказано, что множество РБС игры является подмножеством множества равновесий Нэша соответствующей игры угроз.

Определение 2.15. ***Безопасный выигрыш*** *игрока i в профиле стратегий s равен его выигрышу при реализации наихудшей угрозы в небезопасном профиле и совпадает с его выигрышем в безопасном профиле, то есть:*

$$v_i(s) = \begin{cases} \inf\limits_{i \neq j, s_i': u_j(s_j', s_{-j}) > u_j(s)} u_i(s_j', s_{-j}), s_i \notin Q_i(s_{-i}), \\ u_i(s), s_i \in Q_i(s_{-i}). \end{cases}$$

Игрой (с учётом) угроз *(или **V-игрой**), соответствующей игре G, называется игра $\tilde{G} = (S_i, v_i)_{i=1}^N$.*

Утверждение 2.5. *Профиль s безопасен для игрока i* $\Leftrightarrow u_i(s) = v_i(s)$.

Профиль s небезопасен для игрока i $\Leftrightarrow u_i(s) > v_i(s)$.

Выгодное отклонение $s \xrightarrow{i} s'$ *безопасно для игрока i* $\Leftrightarrow v_i(s') \geq u_i(s)$.

Выгодное отклонение $s \xrightarrow{i} s'$ *небезопасно для игрока i* $\Leftrightarrow v_i(s') < u_i(s)$.

Утверждение 2.6. *РБС исходной игры G является равновесием Нэша в соответствующей ей игре угроз. Равновесие Нэша игры угроз не обязательно является РБС в исходной игре. Если безопасный профиль является строгим равновесием Нэша в игре угроз, то он является РБС в исходной игре.*

Для прояснения связи подхода безопасных стратегий с моделями динамических игр для произвольной игры была определена постановка трехшаговой (где второй шаг делает природа) игровой ***задачи с неопределенным инсайдером***. Пусть задана исходная игра $G = (i \in N, s_i \in S_i, u_i \in \mathbb{R})$. На первом шаге все игроки одновременно выбирают свои стратегии $s = (s_1, \dots, s_n)$. На втором шаге природа выбирает случайным образом номер инсайдера $j_0 \in N$. Затем игрок j_0 либо сохраняет свою первоначальную стратегию s_{j_0}, либо выбирает другую стратегию, которая увеличивает его выигрыш: $\tilde{s}_{j_0}(s) \in Q_{j_0}(s) = \{s_{j_0}\} \cup \{s'_{j_0} \in S_{j_0}: u_{j_0}(s'_{j_0}, s_{-j_0}) > u_{j_0}(s)\}$. Выигрыши игроков определяются как $u_{j_0}(\tilde{s}_{j_0}, s_{-j_0})$.

Утверждение 2.7. *Для произвольной игры G соответствующие ей игра угроз $\tilde{G} = (S_i, v_i)_{i=1}^N$ и игра с неопределенным инсайдером $\hat{G} = (S_i, \hat{u}_i)_{i=1}^N$ эквивалентны.*

В развитие идеи игры с неопределенным инсайдером предложено ввести новый класс игр – ***игры с неопределенностью динамики***. Такая игровая неопределенность может возникать как ***неопределенность порядка хода игроков*** в динамических играх или как ***неустойчивость по одновременности принятия решений*** для статической постановки игр в нормальной форме. Была сформулирована ***гипотеза о поведении осторожного рационального субъекта*** в условиях неустойчивости по одновременности принятия решений в игре. Показано, что в конструкции РБС как соответствующего решения игры с неопределенным инсайдером моделируется двухшаговая динамика (по игрокам, без природы), но не реальная, а стратегически рефлексивная, как динамическая игра фантомных агентов, причем сами эти агенты имеют в своем субъективном описании игры большую неопределенность. Ситуация неопределенности по одновременности принятия решений как интервальной неопределенности порождает особую рефлексивную динамику, существенно отличающуюся от традиционной динамики, и для повторяющихся, и для информационно рефлексивных игр. Осторожные игроки строят свои безопасные стратегии, опираясь на эту динамическую модель игры в своей стратегической рефлексии. Когда в играх возникает ***неопределенность по одновременности принятия решений***, ***неопределенность по порядку ходов*** или ***неопределенность по составу игроков, получающих преимущество по порядку хода***, возникает необходимость в особого рода осторожности, устраняющей эту неопределенность в динамике игры.

Также предложены некоторые частные подходы и результаты для поиска РБС в разрывных и неквазивогнутых играх, введено понятие ε-РБС.

В третьей главе, которая является центральной во всей работе, разрабатываются теоремы существования РБС. В разделе 3.1 рассматриваются разные подходы к конструированию теорем существования решения. ***Теорема 1*** формулирует связь существования РБС в исходной игре и РН в соответствующей игре угроз. Она задает в качестве критерия РБС выполнение трех условий, а ***следствие*** из теоремы формулирует ***необходимое и достаточное условие для слабого РБС*** исходной игры как безопасный профиль, являющийся РН в игре угроз.

Теорема 1. *Профиль s^* является равновесием в безопасных стратегиях тогда и только тогда, когда выполняются три условия:*

1) s^* – безопасный профиль;

2) s^* – равновесие Нэша в игре угроз $\tilde{G}$;

3) $\forall i, \forall s_i' \colon v_i(s_i', s_{-i}^*) = v_i(s^*) \Rightarrow u_i(s_i', s_{-i}^*) = u_i(s^*)$.

Следствие. *Профиль в игре G является слабым равновесием в безопасных стратегиях тогда и только тогда, когда он безопасен в игре G и является равновесием Нэша в игре угроз $\tilde{G}$.*

Далее, как альтернативный подход, формулируется ***метатеорема 2***, задающая ***принципиальный метод конструирования теорем существования РБС*** на основе имеющихся ***теорем существования равновесия Нэша*** других авторов. Для этого формулируется ***условие сильных угроз***, которое делает игру устойчивой в том смысле, что множества безопасных стратегий становятся предпочтительными для осторожных игроков, учитывающих в своем выборе соображения безопасности. Тогда для существования РБС достаточно требовать выполнения условий теорем существования равновесия Нэша не на всем множестве возможных стратегий, а только на множестве безопасных стратегий.

Определение 3.1. ***Угроза*** *игроку i в профиле s является* ***сильной****, если существует безопасная стратегия $s' = (s_i', s_{-i})$ такая, что $u(s') = v(s') > v(s)$. Для игрока i в игре G выполняется* ***условие сильных угроз****, если для него содержащиеся в любом опасном профиле угрозы являются сильными. Игра G называется игрой* ***с сильными угрозами****, если для всех игроков в ней выполняется условие сильных угроз.*

Пусть имеется некоторое верное утверждение (исходная теорема): «*Если для игры выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша*». Пусть это условие (#####) выполняется не для всей игры, а только на множествах безопасных стратегий игроков. Такое предположение надо сформулировать строго. Под выполнением условия на множествах безопасных стратегий будем понимать следующее. Введём вспомогательную игру $\bar{G}_{Q^{(i)}}$, выигрыши игроков в которой равны выигрышам исходной игры G в профилях, где их стратегии безопасны, и некоторой константе $C_{\min} \leq u_i(s), \forall i, s$, ограничивающей функции выигрыша компактной игры снизу, там где стратегии этих игроков не безопасны. То есть, если $Q^{(i)} \subseteq S$ – множество безопасных профилей игрока i в исходной игре G, то игру $\bar{G}_{Q^{(i)}}(S_i, \bar{u}_i), \bar{u}_i(s) = \begin{cases} u_i(s), s \in Q^{(i)} \\ C_{\min}, s \notin Q^{(i)} \end{cases}$ будем называть соответствующей ей обрезанной игрой.

Определение 3.2. *Пусть дана игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *с множествами безопасности* $Q^{(i)} \subseteq S$. *Игра* $\bar{G}_{Q^{(i)}}(S_i, \bar{u}_i), \bar{u}_i(s) = \begin{cases} u_i(s), s \in Q^{(i)} \\ C_{min}, s \notin Q^{(i)} \end{cases}$ *называется* ***соответствующей ей обрезанной игрой***. *Условие (#####) существования равновесия Нэша* ***выполняется для игры G на безопасных множествах*** $Q^{(i)} \subseteq S$, *если оно выполняется для соответствующей обрезанной игры.*

Теорема 2. *Пусть верно утверждение (исходная теорема): «Если для произвольной игры* Г *выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша». Тогда верно утверждение: «Если для игры* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *выполняется условие сильных угроз, а на её безопасных множествах* $Q^{(i)} \subseteq S$ *выполняется условие (#####) существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях».*

Сформулирован ***локальный вариант метатеоремы*** как ***теорема 3***, в которой требуется выполнение условия сильных угроз не на всем множестве стратегий игроков, а только на его подмножестве, что существенно усиливает результат предыдущей теоремы, его можно применять для исследования задач. Ослабление условия *сильных угроз* заключается в том, что его выполнение требуется только по отношению к некоторому множеству $B = \times_{i=1}^N B_i$, где множества B_i предполагаются компактными выпуклыми подмножествами S_i.

Определение 3.3. *Для игрока i выполняется* ***условие сильных угроз в B***, *если для каждого* $s_{-i} \in B_{-i}$ *существует непустое подмножество* $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i}) \cap B_i$ *такое, что для каждой стратегии* $s_i \notin \tilde{Q}^{(i)}$ *существует стратегия* $s_i' \in \tilde{Q}^{(i)}$ *такая, что* $u_i(s_i', s_{-i}) = v_i(s_i', s_{-i}) >$

$v_i(s_i, s_{-i})$. *Игра G называется игрой* ***с сильными угрозами по отношению к B****, если для всех игроков выполняется условие сильных угроз в B.*

Для любого $s_{-i} \in B_{-i}$ множество $\tilde{Q}_i(s_{-i})$ в игре с сильными угрозами предполагается всегда непустым. График многозначной функции $\tilde{Q}_i(s_{-i})$, $\Gamma\left(\tilde{Q}^{(i)}\right) = \{(s_i, s_{-i}) | s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i}), s_{-i} \in B_{-i}\}$ определяется как подмножество *B*. Тогда можно сформулировать локальный вариант базовой теоремы существования РБС.

Теорема 3. *Пусть верно утверждение: «Если для игры выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша». Если игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *является игрой с сильными угрозами по отношению к B, а на её безопасных множествах* $Q^{(i)} \subset S$ *выполняется условие (#####) существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях.*

В разделах 3.2, 3.3, 3.4 этот принципиальный подход метатеоремы 2 был успешно применён к трём конкретным критериям существования равновесия Нэша трёх разных авторов, и на его основе были получены четыре конечных теоремы существования РБС. В разделе 3.2 из ***теоремы существования социального равновесия Дебре*** (1957) получена ***теорема 4*** существования РБС.

Теорема 4. *Пусть* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *является игрой с сильными угрозами по отношению к B, в которой для всех i график* $\Gamma(\tilde{Q}^{(i)})$ *замкнут,* $u_i(s)$ *– непрерывная функция из* $\Gamma(\tilde{Q}^{(i)})$ *в* $\mathbb{R}$*, а функция* $\varphi_i(s_{-i}) = \max\limits_{s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i})} u_i(s_{-i}, s_i)$ *непрерывна. Если для любых i и* $s_{-i} \in B_{-i}$ *множество* $M_{s_{-i}} = \left\{s_i \in \tilde{Q}_i(s_{-i}) \mid u_i(s_{-i}, s_i) = \varphi_i(s_{-i})\right\}$ *стягиваемое, то в игре G в множестве B существует равновесие в безопасных стратегиях.*

В разделе 3.3 аналогично получены теоремы существования РБС на основе ***теоремы существования РН Рени*** (1999) и ***следствия*** из этой теоремы. Теорема Рени вводит понятие ***гарантирования лучшего ответа*** и утверждает, что любая компактная квазивогнутая игра, гарантирующая лучший ответ содержит равновесие Нэша. Следствие Рени вместо гарантирования лучшего ответа предлагает условия ***взаимной верхней полунепрерывности*** и ***гарантирования выигрыша***. Эти условия более строгие, но легко проверяются, поэтому на практике обычно применяется следствие Рени.

Определение Reny 1. *Игрок i* ***может гарантировать выигрыш*** $\alpha \in \mathbb{R}$ *при* $s \in S$*, если существует* $s_i' \in S_i$ *такое, что* $u_i(s_i', s_{-i}') \geq \alpha$ *для всех* s_{-i}' *в некоторой открытой окрестности* s_{-i}.

Определение Reny 2. *Игра* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ ***гарантирует лучший ответ*** *(better-reply secure – BRS), если всякий раз, когда* (s^*, u^*) *находится в замыкании графика её вектора выигрышей и* s^* *не является равновесием, некоторый игрок i может гарантировать выигрыш строго больше* u_i^* *в профиле* s^*.

Теорема Reny. *Если игра* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ *компактна, квазивогнута и гарантирует лучший ответ, то она обладает равновесием Нэша в чистых стратегиях.*

Определение Reny 3. *Игра* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ ***гарантирует выигрыш*** *(payoff secure – PS), если для каждого* $s \in S$ *и каждого* $\varepsilon > 0$ *каждый игрок i может гарантировать выигрыш* $u_i(s) - \varepsilon$ *в (профиле стратегий) s.*

Определение Reny 4. *Игра* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ ***взаимно-верхне-полунепрерывна (в.в.п.н.)*** *(reciprocally upper semicontinuous – RUSC), если всякий раз, когда (s,u) находится в замыкании графика её вектора выигрышей и* $u_i(s) \leq u_i$ *для каждого игрока i, тогда* $u_i(s) = u_i$ *для каждого игрока i.*

Следствие Reny. *Если игра* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ *компактна, квазивогнута, взаимно-верхне-полунепрерывна и гарантирует выигрыш, то в ней имеется равновесие Нэша в чистых стратегиях.*

Для прояснения этих формальных конструкций Рени было введено понятие игрового профиля, ***не гарантирующего лучший ответ***, то есть

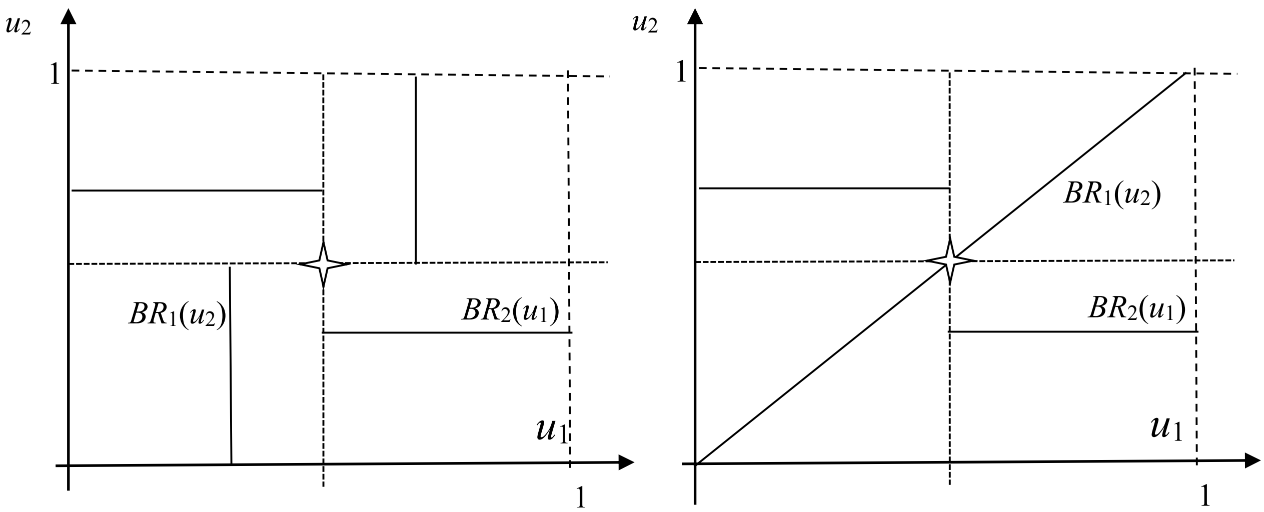

Рис. 1. Примеры профиля, не гарантирующего лучший ответ.

точки, где условия теоремы Рени нарушаются, и предложена интерпретация такого профиля как ***точки перескока*** функций наилучшего ответа игроков ($BR_{\mathrm{i}}(\mathrm{u}_{-\mathrm{i}})$) друг через друга (рис. 1).

Определение 3.4. *Профиль s^*, не являющийся равновесием Нэша, называется* ***не гарантирующим лучший ответ*** *в игре $G(S_i,u_i)_{i=1}^N$, если $\exists(s^*,u^*)\in\overline{\Gamma(G)}: \forall i, \forall\alpha>u_i^*, \forall\, s_i'\in S_i, \forall\, U(s_{-i}^*)\subset S_{-i}, \exists s'_{-i}\in U(s_i',s_{-i}^*)$ (где $U(s_{-i}^*)$ – окрестность точки s_{-i}^*) такое, что $u_i(s_i',s'_{-i})<\alpha$.*

Далее были введены понятия ***гарантированного безопасного ответа*** и условия ***гарантированного лучшего ответа в безопасных стратегиях***. Из метатеоремы 2 и теоремы Рени была получена ***теорема 5 существования РБС*** на основе введенного условия.

Определение 3.6. *Игрок i* ***имеет гарантированный безопасный ответ при окружении*** s_{-i} *, если $\exists s_i'\in S_i, \exists$ открытая окрестность $U_{s_{-i}}\subseteq S_{-i}, \forall s'_{-i}\in U_{s_{-i}}: s'=(s_i',s'_{-i})\in Q^{(i)}$. Игрок i* ***имеет гарантированный безопасный ответ в игре*** *G , если он его имеет при любых окружениях.*

Определение 3.8. *Безопасная стратегия s_i игрока i в профиле s, не являющемся РБС,* ***имеет гарантированный лучший ответ в безопасных стратегиях****, если $\forall(s,u)\in\overline{\Gamma(\overline{u})}, \exists\alpha>u_i, \exists s_i'\in Q_i(s_{-i}), \exists$ открытая окрестность $U_{s_{-i}}\subseteq S_{-i}$: $\forall s'_{-i}\in U_{s_{-i}}$: $s'=(s_i',s'_{-i})\in Q^{(i)}$ (безопасен для i) и $u_i(s')\geq\alpha>u_i$.*

Определение 3.9. *Игра $G(S_i,u_i)_{i=1}^N$* ***гарантирует лучший ответ в безопасных стратегиях****, если $\forall s\in S, \exists$ игрок i такой, что: он имеет либо гарантированный безопасный ответ, если его стратегия s_i не безопасна, либо гарантированный лучший ответ в безопасных стратегиях, если его стратегия s_i безопасна.*

Теорема 6. *Пусть игра $G(S_i,u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами, гарантирует лучший ответ в безопасных стратегиях, с сильными угрозами. Тогда в игре G существует РБС.*

Аналогично было введено условие ***гарантированного лучшего ответа в безопасных стратегиях*** и из следствия Рени получена ***теорема 6 существования РБС***. Также были сформулированы ***локальные***

варианты теорем 5′, 6′. При этом все соответствующие понятия были определены в множестве $B = \times_{i=1}^{N} B_i, B_i \subseteq S_i$.

Определение 3.10. *Безопасная стратегия* s_i *игрока i в профиле s* ***имеет гарантированный выигрыш в безопасных стратегиях****, если* $\forall \varepsilon > 0, \exists s_i' \in Q_i(s_{-i}), \exists$ *открытая окрестность* $U_{s_{-i}} \subseteq S_{-i}$: $\forall s'_{-i} \in U_{s_{-i}}$: $s' = (s_i', s'_{-i}) \in Q^{(i)}$ *(безопасен для i) и* $u_i(s') \geq u_i(s) - \varepsilon$.

Определение 3.11. *Игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ ***гарантирует выигрыш в безопасных стратегиях****, если для* $\forall s \in S, \forall$ *игрока i: имеется либо гарантированный безопасный ответ, если его стратегия* s_i *не безопасна, либо гарантированный выигрыш в безопасных стратегиях, если его стратегия* s_i *безопасна.*

Определение 3.12. *Игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ ***взаимно-верхне-полунепрерывна в безопасных стратегиях (в.в.п.н.б.с.)*** *в профиле s если для соответствующей этой игре обрезанной игры* $\bar{G}(S_i, \bar{u}_i)_{i=1}^{N}$, *для* $\forall (s, u) \in \overline{\Gamma(\bar{u})}$ *выполняется условие:* $u_i(s) \leq u_i, \forall i \;\Rightarrow\; u_i(s) = u_i, \forall i$. *Игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ ***в.в.п.н.б.с.****, если она в.в.п.н.б.с. любом профиле* $s \in S$.

Теорема 7. *Пусть игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ *компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами, гарантирует выигрыш на безопасных стратегиях, взаимно-верхне-полунепрерывна в безопасных стратегиях, с сильными угрозами. Тогда в игре G существует РБС.*

Теорема 6′. *Пусть игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ *компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях в B, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами в B, имеет лучший ответ в безопасных стратегиях в B, имеет лучший ответ в безопасных стратегиях в B, с сильными угрозами по отношению к B. Тогда для игры G существует РБС в B.*

Теорема 7′. *Пусть игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ *компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях в B, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами в B, гарантирует выигрыш на безопасных стратегиях в B, верхне-полунепрерывна в безопасных стратегиях в B, с сильными угрозами по отношению к B. Тогда для игры G существует РБС в B.*

Тестирование на задачах полученных теорем существования РБС по Рени показало, что полученные в них условия не выполняются и требуется смягчение накладываемых ими ограничений, чтобы их формулировки были применимы для классических и прикладных задач. Сделано это было в двух вариантах. Для первого варианта было введено условие ***лучшей безопасной альтернативы***, как смягчение условия сильных угроз, чтобы распространить применимость условий теоремы Рени на некоторые случаи, когда множество безопасных стратегий игрока вырождается в единственную точку. Далее на основе следствия Рени и условия лучшей безопасной альтернативы была сформулирована и доказана ***теорема** 7 **существования РБС***.

Определение 3.16. *При заданных стратегиях других игроков s_{-i} игрок i имеет* ***лучшую безопасную альтернативу (a better secure alternative) (BSA)*** *в непустом множестве $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i})$, если для каждого $\left((s_i, s_{-i}), v_i^*\right) \in \overline{\Gamma(v_\iota)}, s_i \notin \tilde{Q}_i(s_{-i})$ и для каждого $\left((s_i, s_{-i}), v_i^*\right) \in \overline{\Gamma(v_\iota)} \backslash \Gamma(v_i), (s_i, s_{-i}) \in \partial Q^{(i)}$ существует $s_i' \in \tilde{Q}_i(s_{-i})$ такое, что $u_i(s_i', s_{-i}) > v_i^*$.*

Определение 3.17. *Игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$* ***предоставляет лучшую безопасную альтернативу (или является BSA-игрой) (provides better secure alternative or is a BSA-game)****, если для всех $s \in S$ каждый игрок i имеет лучшую безопасную альтернативу в некотором непустом множестве $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i})$. Кроме того, если для всех $s \notin \times_{i=1}^N \tilde{Q}_i(s_{-i})$ существует игрок j такой, что $s_j \notin \overline{co\left(\tilde{Q}_J\left(s_{-J}\right)\right)}$, то игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$* ***предоставляет лучшую безопасную альтернативу в выпуклом множестве****.*

Теорема 8. *Если игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута в безопасных стратегиях, непрерывна во внутренних безопасных стратегиях, гарантирует выигрыш в граничных безопасных стратегиях и предоставляет лучшую безопасную альтернативу в выпуклом множестве, то в игре G существует РБС.*

Во втором, альтернативном, варианте на основе более общих условий теоремы Рени и условия сильных угроз была сформулирована и доказана ***теорема 8 существования РБС***. Обе теоремы были сформулированы также в ***локальном варианте теорем** 7′, **8′***, который оказался применим для тестовых задач (из **глав 5, 6**).

Определение 3.19. *В игре* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *с множествами безопасности игроков* $Q_i(s_{-i})$ ***множество безопасных профилей не расширяемо*** *(выпуклыми оболочками безопасных стратегий), если:*

$$\{s: s_i \in Q_i(s_{-i}), \forall i\} = \left\{s: s_i \in \overline{co\big(Q_i(s_{-i})\big)}, \forall i\right\}.$$

Теорема 9. *Пусть игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$*: компактна; квазивогнута на безопасных стратегиях; её множество безопасных профилей нерасширяемо; с сильными угрозами; для любого профиля* $s \in S$*: либо гарантирует выигрыш на безопасных стратегиях и взаимно-верхне-полунепрерывна в безопасных стратегиях, либо гарантирует лучший ответ в безопасных стратегиях. Тогда в игре G существует РБС.*

Теорема 8′. *Если существует такое множество стратегий* $B = \times_{i=1}^N B_i$*, где* $B_i \subseteq S_i$ *– непустые замкнутые выпуклые множества, что игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *компактна, непрерывна во внутренних безопасных стратегиях в B, гарантирует выигрыш в граничных безопасных стратегиях в B, предоставляет лучшую безопасную альтернативу в выпуклом множестве в B и квазивогнута на BSA-множествах в B, то в игре G существует РБС* $s^* \in B$.

Теорема 9′. *Пусть игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$*: компактна; квазивогнута на подмножестве безопасных стратегий* $\tilde{Q}$ *в B; её подмножество безопасных профилей нерасширяемо; с сильными угрозами относительно подмножества безопасных стратегий* $\tilde{Q}$ *в B; для любого профиля* $s \in S$*: либо гарантирует выигрыш на подмножестве безопасных стратегий* $\tilde{Q}$ *в B и взаимно-верхне-полунепрерывна на подмножестве безопасных стратегий* $\tilde{Q}$ *в B; либо гарантирует лучший ответ на подмножестве безопасных стратегий* $\tilde{Q}$ *в B. Тогда в игре G существует РБС.*

В <u>разделе 3.4</u> для получения ***теоремы 9 существования РБС*** была использована ***теорема существования РН Бика*** (2009), являющаяся дальнейшим развитием и распространением подхода Рени на случай неквазивогнутой функции выигрыша игроков. Также был получен ***локальный вариант теоремы 9′***. Но для этого случая требуемые условия теоремы существования РБС и исходной теоремы оказались слишком сильными для применения к играм с разрывными функциями выигрыша и слабо применимы к таким играм, что было показано на примере.

Таким образом, основным результатом третьей главы является получение трех рабочих, применимых к задачам теорем существования РБС 4, $7'$, $8'$.

Четвертая и **пятая главы** посвящены исследованию РБС решений для ряда известных хрестоматийных задач без равновесия Нэша. В **четвертой главе** рассматривается ***задача пространственно-ценовой конкуренции Хотеллинга***, которая была взята как базовая эталонная задача для проверки концепции решения. Поэтому данная задача была исследована нарочито подробно, многие детали решения для темы РБС оказались избыточны (новая концепция применяется только для решения подыгры первого шага), тем не менее все встретившиеся технические вопросы были педантично разобраны и подробно описаны. Поэтому эта и следующая главы написаны в совершенно ином стиле, содержат много технических доказательств, оценок, деталей, приведенных максимально подробно, без сокращений.

Раздел 4.1 содержит обзор литературы. Задача была поставлена и сформулирована Хотеллингом (1929). Ключевой теоретической проблемой в данной задаче в содержательном плане является ***ситуация подрезания цены***, которая возникает в ценовой подыгре при достаточно близком пространственном расположении игроков, что и ведет к отсутствию равновесий Нэша. Эта проблема была отмечена Хотеллингом и детально исследована и описана д'Апремоном, Тиссом, Габзевичем (1979). В обзоре показано, что в многочисленных работах, посвященных задаче Хотеллинга, авторы различными способами обходили и исключали данную проблемную ситуацию из рассмотрения, но вопрос, как же ведут себя рациональные игроки в такой ситуации, так и остался открытым.

Раздел 4.2 содержит постановку задачи в двух вариантах: при ***неэластичном*** (в ***постановке Хотеллинга, 1929***) и ***эластичном*** (более сложный случай) спросе на товар конкурирующих фирм.

Рассмотрим отрезок $[A, B]$ длины l, на котором расположены покупатели с единичной плотностью. На расстоянии a и b от концов отрезка в точках $x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$ расположены магазины игроков 1 и 2, предлагающие одинаковый товар по ценам p_1, p_2. Расстояние между магазинами обозначается $d = l - a - b$. Каждый покупатель оплачивает транспортировку товара до дома по единичному тарифу за единицу расстояния. Без потери общности этот транспортный тариф можно считать единичным. Единица товара потребляется в каждую единицу времени в каждой точке отрезка, если спрос является неэластичным. Потребители выбирают продавца по сумме стоимости товара и затрат на транспортировку. Исследуем равновесие, совершенное по подыграм в динамической игре. На первом шаге продавцы определяют точки своего расположения $x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$. На втором шаге продавцы определяют цену на свой товар $p_1, p_2 \in [0, \infty)$. При неэластичном спросе каждый покупатель обязательно покупает единицу товара, даже если при этом его целевая функция становится отрицательной. Целевые функции игроков-продавцов:

$$u_1(a,b,p_1,p_2) = \begin{cases} p_1(a+b+d), & p_1 < p_2 - d, \\ p_1\left(a + \frac{d+p_2-p_1}{2}\right), & |p_1 - p_2| \leq d, \\ 0, & p_1 > p_2 + d, \end{cases}$$
$$u_2(a,b,p_1,p_2) = \begin{cases} p_2(a+b+d), & p_2 < p_1 - d, \\ p_2\left(b + \frac{d+p_1-p_2}{2}\right), & |p_1 - p_2| \leq d, \\ 0, & p_2 > p_1 + d. \end{cases} \quad (1)$$

В эластичном случае покупатель отказывается от приобретения товара, если это для него убыточно. Целевые функции игроков:

$$u_1(a,b,p_1,p_2) = \begin{cases} p_1(\min\{1-p_1, a\} + \min\{1-p_1, b+d\}), & p_1 < p_2 - d, \\ p_1\left(\min\{1-p_1, a\} + \min\left\{1-p_1, \frac{d+p_2-p_1}{2}\right\}\right), & |p_1 - p_2| \leq d, \\ 0, & p_1 > p_2 + d, \end{cases}$$
$$u_2(a,b,p_1,p_2) = \begin{cases} p_2(\min\{1-p_2, b\} + \min\{1-p_2, a+d\}), & p_2 < p_1 - d, \\ p_2\left(\min\{1-p_2, b\} + \min\left\{1-p_2, \frac{d+p_1-p_2}{2}\right\}\right), & |p_1 - p_2| \leq d, \\ 0, & p_2 > p_1 + d. \end{cases} \quad (2)$$

Задача имеет единственным решением равновесие Нэша:

$$p_1 = l + \frac{a-b}{3},\ p_2 = l - \frac{a-b}{3},$$
$$q_1 = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a-b}{3}\right),\ q_2 = \frac{1}{2}\left(l - \frac{a-b}{3}\right),$$

При выполнении условий:

$$\left(l + \frac{a-b}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3} l(a+2b), \qquad \left(l + \frac{b-a}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3} l(b+2a).$$

В <u>разделе 4.3</u> сформулировано *утверждение 4.1*, содержащее систему неравенств, задающих ***множества безопасных стратегий для задачи***, а для эластичного спроса в *утверждении 4.2* получено это множество в явном виде.

Утверждение 4.1. *Пусть задана игровая задача (Хотеллинга) определения цен (с неэластичным либо эластичным спросом):* $(p_i \in P_i, u_1(p_1, p_2), i \in \{1,2\})$*, где для неэластичного спроса:* $P_i = R^+$*, значения* u_i *определяются (1); для эластичного спроса:* $P_i = [0,1]$*, значения* u_i *определяются (2). Тогда множества профилей, безопасных для обоих игроков, имеют вид:* $M_{SS} = M'$ *– для неэластичной задачи,* $M_{SS} = (M' \cap M'_{II}) \cup (M'' \cap M''_{II})$ *– для эластичной задачи; множества профилей, безопасных для игрока i, имеют вид:* $M_{SS_i} = M_i \cup \{p_i > p_{-i} + d\}$ *– для неэластичной задачи,* $M_{SS_i} = (M'_i \cap M'_{II}) \cup (M''_i \cap M''_{II})$ *– для эластичной задачи, где обозначенные множества задаются следующими системами неравенств:*

$$M': \begin{cases} p_1 \le \underset{|p_2 - p| \le d}{\operatorname{argmax}}\, u_1(p, p_2), \\ p_2 \le \underset{|p_1 - p| \le d}{\operatorname{argmax}}\, u_2(p_1, p), \\ u_1^I(p_2 - d) \le u_1^{II}(p_1, p_2), p_2 \ge d, \\ u_2^I(p_1 - d) \le u_2^{II}(p_1, p_2), p_1 \ge d, \\ |p_1 - p_2| \le d; \end{cases}$$

$$M'_i: \begin{cases} p_{-i} \le \underset{|p_i - p| \le d}{\operatorname{argmax}}\, u_{-i}(p_i, p), \\ u_{-i}^I(p_i - d) \le u_{-i}^{II}(p_1, p_2), p_i \ge d, \\ |p_1 - p_2| \le d; \end{cases}$$

$$M'': \begin{cases} u_1^I(2 - d - p_2) \le u_1^I(p_1), \\ u_2^I(2 - d - p_1) \le u_2^I(p_2), \\ p_1 + p_2 \ge 2 - d; \end{cases}$$

$$M''_i: \begin{cases} u_{-i}^I(2 - d - p_i) \le u_{-i}^I(p_{-i}), \\ p_1 + p_2 \ge 2 - d. \end{cases}$$

Любое решение игры в смысле РБС принадлежит множеству M_{SS}.

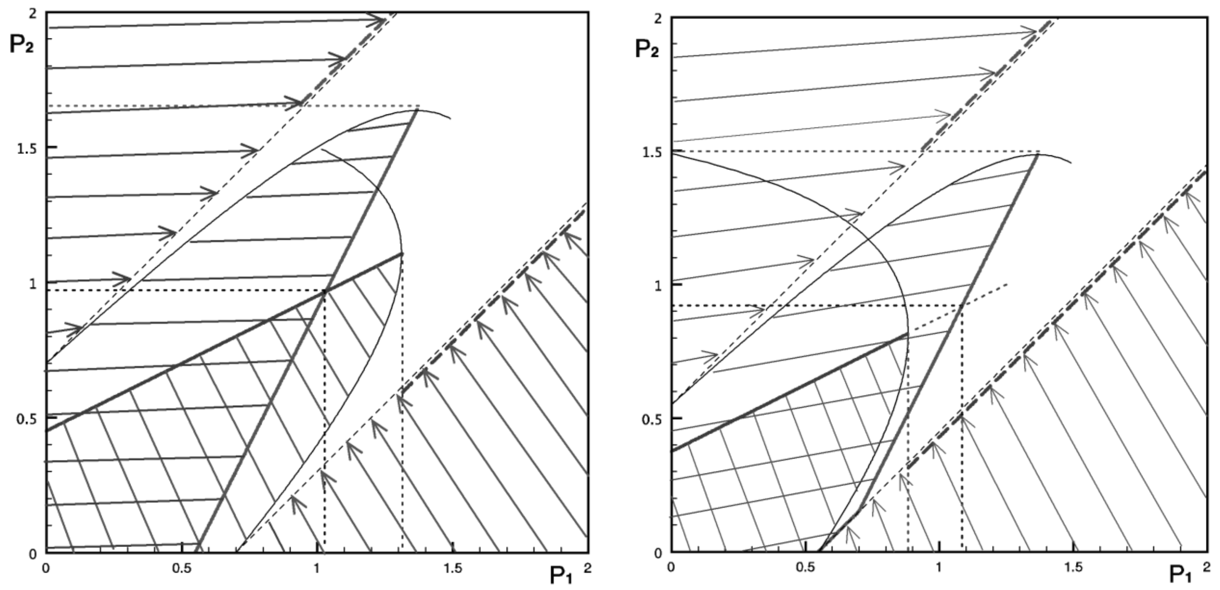

Рис.2. Примеры множеств безопасных профилей игроков 1 и 2 в задаче Хотеллинга с эластичным спросом

Утверждение 4.2. *Для игры определения цен с неэластичным спросом в задаче Хотеллинга (1) множества безопасных стратегий игроков определяются следующей формулой:*

$$Q_1(p_2) = \left[\max\{p_2 - d, 2p_2 - 2b - d\}, \min\left\{p_2 + d, \frac{p_2(2b+d-p_2)+2dl}{2l-p_2}\right\}\right] \cup (p_2 + d, \infty),$$
$$Q_2(p_1) = \left[\max\{p_1 - d, 2p_1 - 2a - d\}, \min\left\{p_1 + d, \frac{p_1(2a+d-p_1)+2dl}{2l-p_1}\right\}\right] \cup (p_1 + d, \infty).$$

Далее для ***задачи с неэластичным спросом*** раздел 4.4 содержит ***проверку условий существования решения*** для теорем 4, 7′, 8′, что демонстрирует, что данные теоремы являются рабочими, применимыми для задач. Доказательства приведены максимально подробно. Область *B* для задачи (1) определяется таким образом:

$$B = B_1 \times B_2 = [0, p_1^B] \times [0, p_2^B],$$
$$p_1^B = \min\{3l + a - b - 4\sqrt{la}, 2l - 2\sqrt{lb}\}, \quad (3)$$
$$p_2^B = \min\{3l + b - a - 4\sqrt{lb}, 2l - 2\sqrt{la}\}.$$

Утверждение 4.3. *Когда выполняется условие:*

$$\left(l + \frac{a-b}{3}\right)^2 < \frac{4}{3}l(a + 2b) \text{ или } \left(l + \frac{b-a}{3}\right)^2 < \frac{4}{3}l(b + 2a),$$

подыгра установления неэластичных цен в задаче Хотеллинга с выигрышами (1) удовлетворяет условиям теорем 4, 7′ и 8′ по отношению к B, заданному (3), и достигает РБС в B.

Следствие. *В подыгре установления неэластичных цен в задаче Хотеллинга с выигрышами (1) всегда существует РБС.*

В разделе 4.5 получено само решение, в *утверждении 4.4* для ***ценовой подыгры второго шага*** (как решение основной теоретической проблемы), а в ***утверждении 4.5*** для ***подыгры расположений первого шага*** и всей задачи.

Утверждение 4.4. *Игровая задача* $(P_i = \mathbb{R}^+, u_i(p_1, p_2), i \in \{1,2\})$*, где* u_i *определяются (1), имеет следующее единственное решение в смысле РБС для любых допустимых значений параметров* $a \geq 0, b \geq 0, a + b \leq l$*:*

1) При выполнении условий

$a \leq 3l + b - 6\sqrt{bl}$,

$b \leq 3l + a - 6\sqrt{al}$

равновесные цены и выигрыши:

$p_1^* = l + \frac{a-b}{3}, u_1^* = \frac{1}{2}(p_1^*)^2$,

$p_2^* = l - \frac{a-b}{3}, u_2^* = \frac{1}{2}(p_2^*)^2$.

2) При выполнении условий

$a \leq \frac{\sqrt{l}-\sqrt{b}}{\sqrt{l}+\sqrt{b}}\left(4\sqrt{bl} - l - b\right)$,

$a \geq 3l + b - 6\sqrt{bl}$

равновесные цены и выигрыши:

$$p_1^* = 2l - 2\sqrt{bl}, u_1^* = \frac{1}{2}(p_1^*)^2,$$

$p_2^* = 3l + b - a - 4\sqrt{bl}, u_2^* = \frac{1}{2}p_2^*(l - a + b + p_1^* - p_2^*)$.

3) При выполнении условий

$b \leq \frac{\sqrt{l}-\sqrt{a}}{\sqrt{l}+\sqrt{a}}\left(4\sqrt{al} - l - a\right)$,

$b \geq 3l + a - 6\sqrt{al}$

равновесные цены и выигрыши:

$p_1^* = 3l + a - b - 4\sqrt{al}, u_1^* = \frac{1}{2}p_1^*(l + a - b + p_2^* - p_1^*)$,

$$p_2^* = 2l - 2\sqrt{al}, u_2^* = \frac{1}{2}(p_2^*)^2.$$

4) При выполнении условий

$$a \geq \frac{\sqrt{l}-\sqrt{b}}{\sqrt{l}+\sqrt{b}}\left(4\sqrt{bl} - l - b\right),$$
$$b \geq \frac{\sqrt{l}-\sqrt{a}}{\sqrt{l}+\sqrt{a}}\left(4\sqrt{al} - l - a\right)$$

равновесные цены и выигрыши:

$$p_i^* = 2(l - y_i), u_i^* = l(p_{-i}^* - l + a + b), i \in \{1,2\},$$
$$y_i = \sqrt[3]{-\frac{r_i}{2} + \sqrt{R_i}} + \sqrt[3]{-\frac{r_i}{2} - \sqrt{R_i}} + \frac{g_i}{6},$$
$$R_i = \left(\frac{s_i}{3}\right)^3 + \left(\frac{r_i}{2}\right)^2,$$
$$s_i = -\frac{g_i^2}{12} + \frac{f_i h_i}{2}, r_i = -\frac{g_i^3}{108} + \frac{f_i g_i h_i}{12} - f_i^2 l,$$
$$g_1 = l + a + 3b, h_1 = 3l - a + b, f_1 = b,$$
$$g_2 = l + 3a + b, h_2 = 3l + a - b, f_2 = a.$$

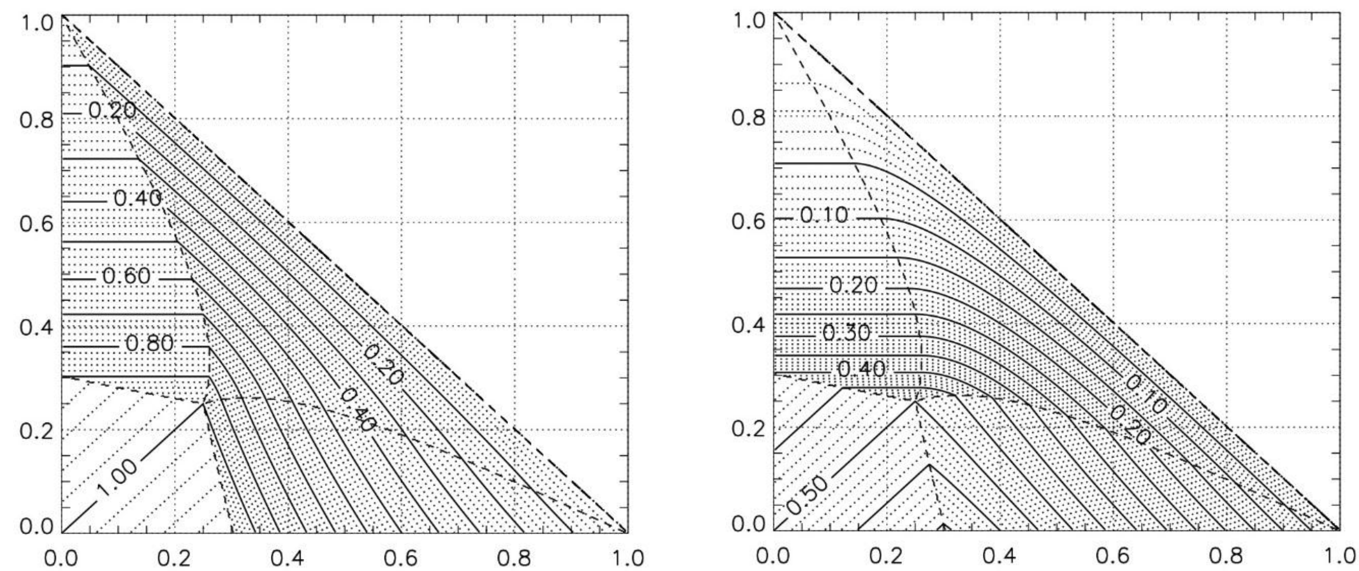

Рис.3. Решение ценовой подыгры задачи Хотеллинга, равновесные цены (слева) и выигрыши (справа)

Утверждение 4.5. *Пусть задана игровая задача* $x_1 = a, x_2 = l - b, u_i(p_1^*(a,b), p_2^*(a,b))), i \in \{1,2\})$, *где* u_i *определяются (1), а* $p_i^*(a,b)$ *– утверждением 4.4. В игре имеются следующие равновесия Нэша* (a^*, b^*)*:*

1) $a^* = 0.25l, b^* = 0.25l,$

2) $\left(l - \frac{a^*-b^*}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}l(a^* + 2b^*), a^* > 0.25l,$

3) $\left(l + \frac{a^*-b^*}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}l(2a^* + b^*), b^* > 0.25l.$

Других равновесий Нэша в игре нет.

В разделах 4.6–4.8 аналогично исследуется вариант ***задачи с эластичным спросом*** (постановка задачи (2)). В этом исследовании пришлось преодолеть значительные технические сложности, но принципиально, с точки зрения концепции РБС, новых теоретических проблем не возникло. Несмотря на объемные формулы и выкладки, трудоемкие технические доказательства и оценки, потребовавшиеся для конкретной постановки задачи, общий характер решения совершенно аналогичен более простому случаю неэластичного спроса. Раздел 4.6 содержит ***проверку условий трех теорем существования РБС***, раздел 4.7 содержит ***решение ценовой подыгры***, раздел 4.8 содержит ***решение подыгры расположений*** и всей задачи. Можно отметить, что в ***утверждении 4.9*** дается решение примера постановки ***ценовой подыгры на бесконечной прямой***, иллюстрирующее типы решений, содержащееся в решении эластичной задачи, в максимально простом и наглядном виде. Раздел 4.9 посвящен заключительному обсуждению результатов решения задачи, а также там приведены численные расчеты по формулам и наглядные графики решений. Также там приведена, как более простая и наглядная иллюстрация для эластичной задачи, ***симметричная часть решения ценовой подыгры***.

Пятая глава посвящена разным задачам без равновесий Нэша. Раздел 5.1 – ***конкуренции за ренту Таллока–Скапердаса***, раздел 5.2 – ***дуополии Бертрана–Эджворта*** и ***модели страхового рынка Ротшильда–Стиглица–Вильсона***. Первые две задачи исследованы по полной схеме, аналогично задаче Хотеллинга.

Задача конкуренции за ренту Таллока исследовалась в ***постановке Скапердаса*** (1994). В конкуренции Таллока n игроков с одинаковой оценкой ресурса соревнуются за приз, и каждый из них прилагает усилие $x_i \in [0,1]$, чтобы увеличить вероятность своего ожидаемого выигрыша, $\frac{x_i^\alpha}{\sum_{j=1}^n x_j^\alpha}, \alpha > 0$. Тогда функция полезности игрока i принимает вид:

$$u_i = \frac{x_i^\alpha}{\sum_{j=1}^n x_j^\alpha} - x_i \ (x \neq 0, \alpha > 0).$$

Множество стратегий каждого игрока задается как $0 \leq x_i \leq 1$. Если стратегии всех игроков нулевые, то каждый получает приз $u_i = \frac{1}{n}$. Как правило рассматривается состязание Таллока двух игроков с функциями выигрышей

$$u_1 = \frac{x_1^\alpha}{x_1^\alpha + x_2^\alpha} - x_1,\ u_2 = \frac{x_2^\alpha}{x_1^\alpha + x_2^\alpha} - x_2\ (\alpha > 0). \tag{4}$$

Эта игра имеет единственное равновесие Нэша $\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{4}\right)$, когда $\alpha \leq 2$, и не имеет равновесия Нэша, когда $\alpha > 2$.

Для задачи конкуренции за ренту *утверждение 5.1* задает ***множество безопасных стратегий***; *утверждение 5.2* доказывает ***существование решения*** по теореме 4; *утверждение 5.3* дает общее ***решение задачи***. Также доказано, что для решения РБС ***диссипация ренты*** равна единице, то есть в этом равновесии сумма затрат игроков равна стоимости приза и решение эффективно. Решение задачи найдено для случаев ***конкуренции многих игроков*** и для ***несимметричной нечестной конкуренции***.

Если ввести вспомогательные обозначения, то можно сформулировать утверждение.

$$\hat{x}_i = \xi^{-1}(\tilde{x}_{-i}) \equiv \begin{cases} (\xi^+)^{-1}(\tilde{x}_{-i}), \tilde{x}_{-i} > \frac{\alpha}{4}, \\ (\xi^-)^{-1}(\tilde{x}_{-i}), \tilde{x}_{-i} \leq \frac{\alpha}{4}, \end{cases} \quad \tilde{x}_{-i} \equiv \left(\sum_{j \neq i} x_j^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{5}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\alpha}(\alpha - 1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},\ \bar{y} = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \tag{6}$$

$$\check{x} = \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ \check{y} = \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha}. \tag{7}$$

Утверждение 5.1. *Пусть задана игровая задача конкуренции за ренту Таллока* $G = (x_i \in [0,1], u_i(x_1, x_2), i \in \{1,2\})$, *где* $u_i(x_1, x_2)$ *заданы (4). Тогда множество профилей, безопасных для одного и обоих игроков, задается следующим образом.*

Если $0 < \alpha \leq 1$, *то множество профилей* (x_1, x_2), *безопасных для одного игрока i, имеет вид:*

$\{\xi^{-1}(x_i) \leq x_{-i}\}$.

Для обоих игроков оно имеет вид:

$\{\xi^{-1}(x_2) \leq x_1, \xi^{-1}(x_1) \leq x_2\}$.

Если $\alpha > 1$, то для одного игрока i оно имеет вид:

$$\{\xi^{-1}(x_i) \le x_{-i}, x_i \le \check{x}\} \cup \{x_i \ge \check{x}\} \cup$$
$$\cup \{0 \le x_{-i} \le \eta^{-1}(x_i), \bar{x} \le x_i \le \check{x}\}.$$

Для обоих игроков оно имеет вид:

$$\{\xi^{-1}(x_2) \le x_1 \le \check{x}, \xi^{-1}(x_1) \le x_2 \le \check{x}\} \cup \{\max(x_1, x_2) \ge \check{x}\} \cup$$
$$\{0 \le x_1 \le \eta^{-1}(x_2), \bar{x} \le x_2 \le \check{x}\} \cup \{0 \le x_2 \le \eta^{-1}(x_1), \bar{x} \le x_1 \le \check{x}\}.$$

Здесь $\xi^{-1}(x), \bar{x}, \check{x}$ определяются (5, 6, 7), а вспомогательная обратимая функция η определяется для $\alpha > 1$ на отрезке $0 \le x_i \le \check{x}$ как

$$\eta(x) \equiv x_{-i}: \quad u_i(x, x_{-i}) = u_i(\xi^{-1}(x_{-i}), x_{-i}).$$

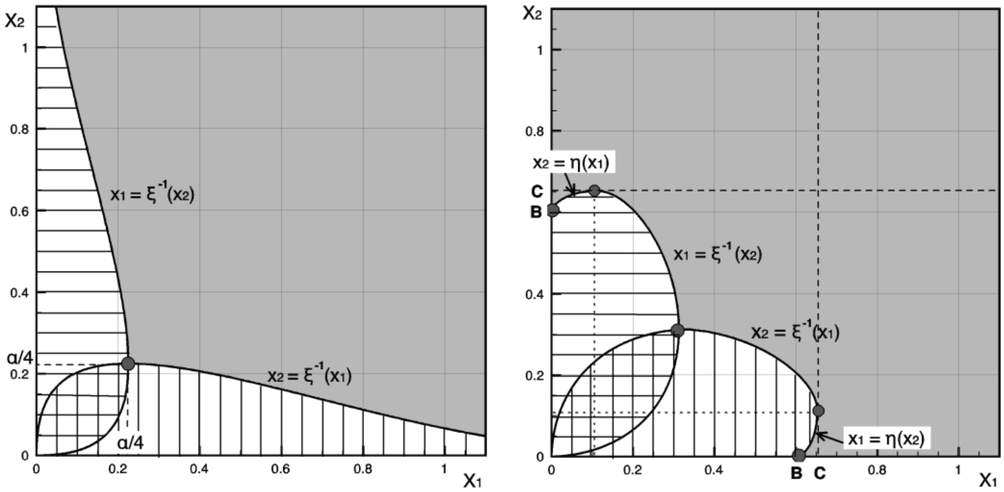

Рис. 4. Множества безопасных профилей (закрашено тоном) для двух одинаковых игроков в состязании Таллока при $\alpha < 1$(слева) и $\alpha > 1$ (справа). Множество опасных профилей одного игрока заштриховано вертикально, второго – горизонтально

Утверждение 5.2. *При $\alpha > 2$ состязание Таллока (4) удовлетворяет условиям теоремы 4 в области B, и в нем существует РБС.*

Утверждение 5.3. *Если $0 < \alpha < 1$, то в задаче конкуренции Таллока (4) двух игроков имеется следующее единственное РБС, которое также является равновесием Нэша:*

$$\{(x^*, x^*)\} = \left\{\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{4}\right)\right\}.$$

Если $1 \le \alpha \le 2$, то в задаче конкуренции Таллока (4) существуют следующие РБС:

$$\{(x^*, x^*)\} = \left\{\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{4}\right)\right\} \vee \{(0, \bar{x}), (\bar{x}, 0)\}, \bar{x} = \frac{1}{\alpha}(\alpha - 1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$
$$\alpha > 1,$$

и все другие РБС лежат на кривой

$$\left\{\left(x_1, \xi^+(x_1)\right): \frac{\alpha-1}{\alpha} \le x_1 \le \frac{1}{\alpha}\right\} \cup \left\{(\xi^+(x_2), x_2): \frac{\alpha-1}{\alpha} \le x_2 \le \frac{1}{\alpha}\right\},$$

$$\xi^+(x_i) \equiv \left(\frac{x_i^{\alpha-1}}{2}\left(\alpha - 2x_i + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha x_i}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \max\left\{0, \frac{\alpha^2-1}{4\alpha}\right\} \le x_i \le \frac{\alpha}{4}.$$

При $\alpha > 2$ *в задаче конкуренции Таллока (4) существуют только два РБС:*

$$\{(0, \bar{x}), (\bar{x}, 0)\}.$$

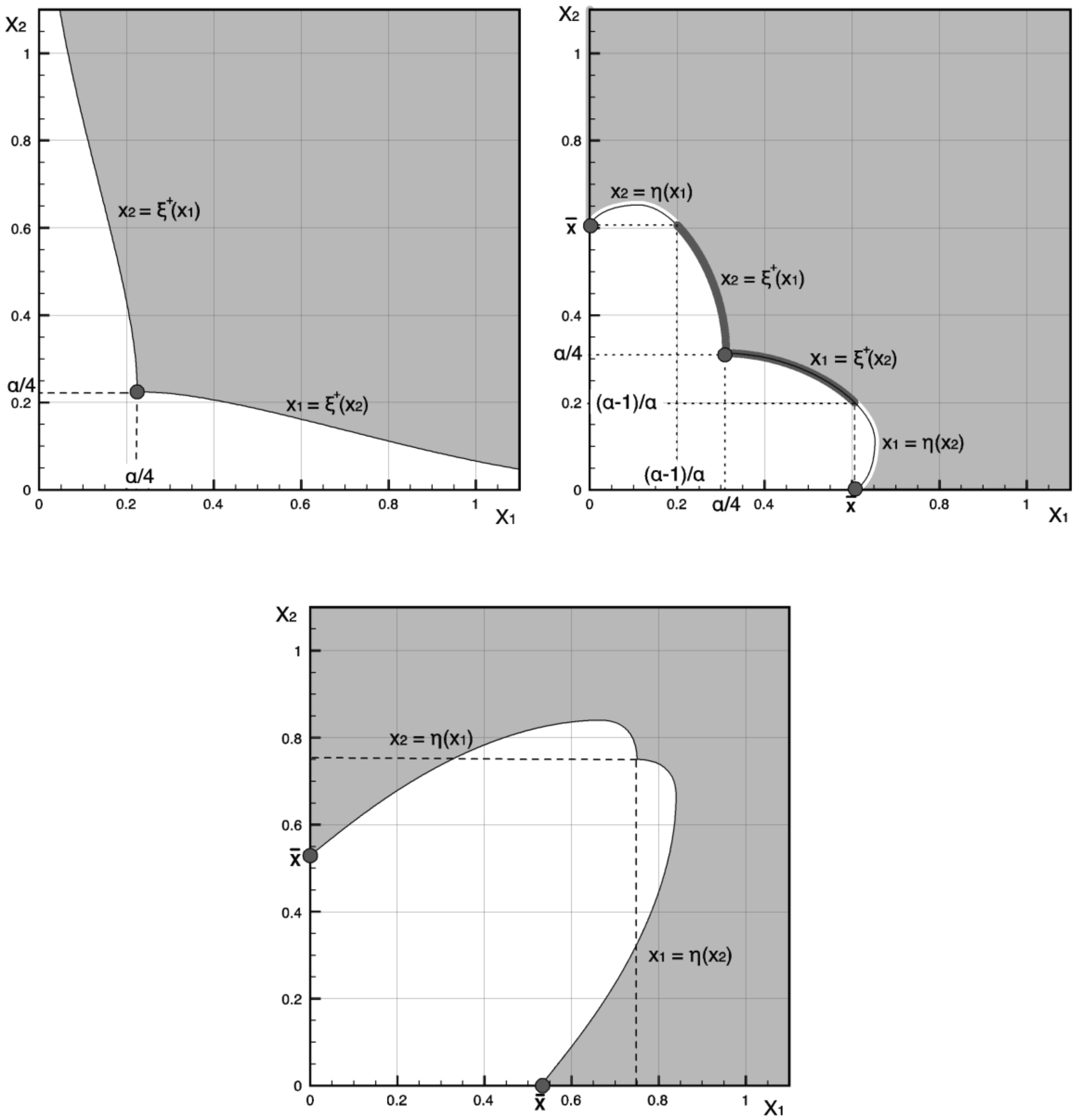

Рис. 5. Безопасные профили и РБС в задаче Таллока при значениях параметра $0 < \alpha < 1$, $1 \le \alpha \le 2$, $\alpha > 2$

В ***модели ценовой конкуренции Бертрана–Эджворта*** несколько фирм (олигополистов) устанавливают цену на однородный товар при условии ограниченности их производственной мощности. Функция спроса $D(p)$ монотонно убывает с ростом цены p, а функция выручки $pD(p)$ строго вогнута и достигает своего максимума при монопольной цене p_M. Выигрыши игроков:

$$u_1(p_1,p_2) = \begin{cases} p_1 \min\{S_1, D(p_1)\}, & p_1 < p_2, \\ p_1 \min\left\{S_1, \dfrac{S_1}{S_1+S_2} D(p_1)\right\}, & p_1 = p_2, \\ p_1 \min\{S_1, \dfrac{D(p_1)}{D(p_2)} \max\{0, D(p_2) - S_2\}\}, & p_1 > p_2, \end{cases}$$

$$u_2(p_1,p_2) = \begin{cases} p_2 \min\{S_2, D(p_2)\}, & p_2 < p_1, \\ p_2 \min\left\{S_2, \dfrac{S_2}{S_1+S_2} D(p_2)\right\}, & p_2 = p_1, \\ p_2 \min\left\{S_2, \dfrac{D(p_2)}{D(p_1)} \max\{0, D(p_1) - S_1\}\right\}, & p_2 > p_1. \end{cases}$$

Когда $D(p_M) \geq S_1 + S_2$ в модели дуополии Бертрана–Эджворта существует единственное ценовое равновесие Нэша (p^*, p^*) такое, что $D(p^*) = S_1 + S_2$. Когда $D(p_M) < S_1 + S_2$, равновесия Нэша (в чистых стратегиях) в ценовой игре не существует.

Для дуополии Бертрана–Эджворта в *утверждении 5.6* найдены ***условия существования РБС*** и при их выполнении доказано ***существование решения*** по теореме 4; *утверждение 5.7* задает общее ***решение задачи***. Отдельно рассмотрен частный ***случай линейного спроса*** и для него выписаны условия и решение.

Утверждение 5.6. *Предположим, что функция выручки $pD(p)$ строго вогнута. Если игра Бертрана–Эджворта удовлетворяет условиям:*

$$\begin{cases} \operatorname*{argmax}_{p>0}\{p(D(p) - S_1)\} \leq p^*, \\ \operatorname*{argmax}_{p>0}\{p(D(p) - S_2)\} \leq p^*, \end{cases} \qquad D(p^*) = S_1 + S_2,$$

то она удовлетворяет условиям теоремы 4 и в ней существует РБС.

Модель страхового рынка исследуется в ***постановке Ротшильда–Стиглица*** (1979). Две страховые компании продают страховые контракты для клиентов двух категорий: n_H клиентов являются высокорискованными, а n_L клиентов – низкорискованными. С высокорискованными клиентами страховые случаи происходят с вероятностью p_H, а с низкорискованными – с вероятностью $p_L < p_H$. Все клиенты имеют одинаковое строго положительное начальное страховое обеспечение $w = (w_1, w_2) \in R^2$, которое обозначает получаемые ими суммы в двух случаях: когда страховой случай произошёл (w_2) и когда он не произошёл (w_1). Предпочтения всех клиентов представлены одной и той же строго вогнутой целевой функцией u. Каждый страховой контракт описывается вектором $c = (c_1, c_2) \in R^2$, в котором c_1 обозначает страховую премию, а c_2 – страховую выплату. Страховое обеспечение клиента, купившего страховой контракт, становится $(w_1 - c_1, w_2 + c_2)$. Клиенты, имеющие категорию риска j, покупают не более одного страхового контракта c (если они предпочитают его своему начальному обеспечению w), который максимизирует их ожидаемую полезность:

$$V_j(c) = p_j u(w_2 + c_2) + \left(1 - p_j\right) u(w_1 - c_1), \quad j \in \{H, L\}.$$

Каждая страховая компания предлагает пару контрактов (c^H, c^L), причём без ограничения общности можно считать, что для высокорискованных клиентов c^H по крайней мере не хуже, чем c^L, а для низкорискованных клиентов c^L по крайней мере не хуже, чем c^H. Ожидаемая прибыль компании от контракта $c^j = (c_1^j, c_2^j)$, проданного клиенту типа j, будет составлять $\pi_j(c^j) = -p_j c_2^j + (1 - p_j) c_1^j, \ \ j \in \{H, L\}$.

Компания 1 предлагает пару контрактов $(c^H(1), c^L(1))$, а компания 2 – пару контрактов $(c^H(2), c^L(2))$. Тогда ожидаемая прибыль компании 1 определяется как:

$$U_1 = \sum_{j=H,L} \begin{cases} n_j \pi_j(c^j(1)), & V_j(c^j(1)) > V_j(c^j(2)), \\ \dfrac{1}{2} n_j \pi_j(c^j(1)), & V_j(c^j(1)) = V_j(c^j(2)), \\ 0, & V_j\left(c^j(1)\right) < V_j\left(c^j(2)\right). \end{cases}$$

Известно, что если равновесие в чистых стратегиях существует, то обе компании должны предлагать ***страховой контракт Ротшильда–Стиглица–Вильсона*** (RSW), одинаковую пару контрактов $c^* = (c^{*H}, c^{*L})$, удовлетворяющую условиям: $w_2 + c_2^{*H} = w_1 - c_1^{*H}$ (т.е. высокие риски полностью застрахованы), $\pi_H(c^{*H}) = \pi_L(c^{*L}) = 0$ (т.е. клиенты каждой категории риска генерируют нулевые ожидаемые прибыли для компаний) и $V_H(c^{*H}) = V_H(c^{*L})$ (т.е. высокорискованные клиенты безразличны при выборе между низкорискованным контрактом и своим собственным). Если доля низкорискованных клиентов достаточно велика, то одна из компаний может отклониться от стратегии c^* и заработать положительную прибыль. Она может предложить объединяющий контракт c^{**}, который будет предпочтительнее чем c^* как для высокорискованных, так и для низкорискованных клиентов. Известно, что равновесия Нэша в этом случае не существует.

Для модели страхового рынка в *утверждении 5.11* доказано, что ***страховой контракт Ротшильда–Стиглица–Вильсона***, который не всегда является РН, всегда является РБС.

Утверждение 5.11. *Пара RSW–контрактов* c^* *всегда является равновесием в безопасных стратегиях в модели страхового рынка.*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В диссертационной работе предложена и обоснована (теоретически – посредством сформулированных и доказанных теорем существования, и практически – посредством решения ряда классических задач без равновесия Нэша), как модель принятия решений осторожными субъектами в условиях игровой неопределенности, новая концепция теоретико-игрового равновесия – равновесие в безопасных стратегиях (РБС), для которой:

1. Предложен, в качестве интерпретации, эквивалентный вариант системы определений, представляющий РБС как обобщение определения равновесия Нэша.

2. Показано, что РБС является ограниченно рациональной моделью преодоления игровой неопределенности (при интерактивном принятии решений) на основе стратегической рефлексии, описывающей осторожное поведение игроков относительно этой неопределенности.

3. Разработан метод построения теорем существования, как применение исходных известных теорем существования равновесий Нэша на ограниченном подмножестве стратегий при выполнении условия сильных угроз.

4. При помощи общего метода построены и доказаны теоремы существования РБС на основе известных теорем существования равновесий Нэша по Дебре, Рени, Бику.

5. Теоремы существования применены к известным нерешенным задачам: пространственной конкуренции Хотеллинга, соревнования за

ренту Таллока–Скапердаса. Доказано, что данные задачи всегда имеют решение РБС, даже в случаях, когда равновесий Нэша не существует.

6. Модель РБС применена и позволила получить решение ряда хрестоматийных задач, не имеющих решения в виде равновесия Нэша: дуополия Бертрана–Эджворта (1883, 1925), пространственная конкуренция Хотеллинга (1929, 1979), конкуренция за ренту Таллока–Скапердаса (1967, 1994), рынок страхования Ротшильда–Стиглица–Вильсона (1976).

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монография

1. Искаков М. Б. Модели и методы управления привлечением вкладов в банковскую сберегательную систему. М.: Издательство ЭГВЕС, 2006.

Статьи в рецензируемых журналах из Перечня ВАК по специальности 2.3.1 физ.-мат. наук, категория К1

2. Искаков М. Б., Павлов П. А. Равновесие в безопасных стратегиях в модели пространственной конкуренции Хотеллинга // Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 26.1. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 287–318.

   Искаков М. Б., Павлов П. А. Равновесие в безопасных стратегиях в модели пространственной конкуренции Хотеллинга // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1, вып. 2. С. 38–65.
3. Искаков М. Б., Искаков А. Б. Численное решение задачи Хотеллинга в безопасных стратегиях // Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 31. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 205–224.
4. Искаков М. Б., Искаков А. Б. Равновесие, сдерживаемое контругрозами, и сложное равновесие в безопасных стратегиях // Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 51. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 130–157.

   Iskakov M. B., Iskakov A. B. Equilibrium contained by counter-threats and complex equilibrium in secure strategies // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 3. P. 495–509.

5. Искаков М. Б., Искаков А. Б. Теорема существования в безопасных стратегиях по Рени // Управление большими системами. М.: ИПУ РАН, 2024. № 111. С. 6–65.

Статьи в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных (приравнены к журналам Перечня ВАК, категория К1)

6. Iskakov M. B. Equilibrium in Safe Strategies // Automation and Remote Control. 2005. Vol. 66, No. 3. P. 465–478.

   Искаков М. Б. Равновесие в безопасных стратегиях // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 139–153.

7. Iskakov M. B. Equilibrium in Safety Strategies and equilibriums in objections and counter objections in noncooperative games // Automation and Remote Control. 2008. Vol. 69, No. 2. P. 278–298.

   Искаков М. Б. Равновесие в безопасных стратегиях и равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх // Автоматика и телемеханика. 2008. № 2. С. 114–134.

8. Iskakov M., Iskakov A. Solution of the Hotelling’s game in secure strategies // Economics Letters. 2012. V. 117. P. 115–118.

9. Iskakov M. B., Iskakov A. B. Equilibria in secure strategies in the Bertrand–Edgeworth duopoly // Automation and Remote Control. 2016, December. Volume 77, Issue 12. P. 2239–2248.

   Искаков А. Б., Искаков М. Б. Равновесия в безопасных стратегиях в ценовой дуополии Бертрана–Эджворта // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 2. С. 42–59.

10. Iskakov A. B., Iskakov M. B. Chain equilibria in secure strategies // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, No. 6. P. 1159–1172.

   Искаков А. Б., Искаков М. Б. Цепные равновесия в безопасных стратегиях. // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8, вып. 1. С. 80–105.

11. Iskakov M., Iskakov A., d’Aspremont C. Games for cautious players: the Equilibrium in Secure Strategies // Games and Economic Behavior. July 2018. Volume 110. P. 58–70.

12. Iskakov M. B., Iskakov A. B. Equilibrium in Secure Strategies as a Development of the Concept of Nash Equilibrium // Doklady Mathematics. 2023. Vol. 108, Suppl. 1. P. S66–S74.

   Искаков М. Б., Искаков А. Б. Равновесие в безопасных стратегиях как развитие концепции равновесия Нэша //

Математическая теория игр и ее приложения. 2023. Т. 15, вып. 1. С. 48–72.

Препринты

13. Iskakov M., Iskakov A., Pavlov P. Solution of the Hotelling's Game in Secure Strategies / Working paper WP7/2011/06/ National Research University "Higher School of Economics". Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics, 2011. 36 p.
14. Iskakov M., Iskakov A. Equilibrium in Secure Strategies — intuitive formulation / Working paper WP7/2012/06 / National Research University "Higher School of Economics". Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics, 2012. 50 p.
15. Iskakov M., Iskakov A. Equilibrium in Secure Strategies / CORE discussion paper 2012/61. Center for Operations Research and Econometrics, Universite catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium. December 2012. 34 p.
16. Iskakov M., Iskakov A., Zakharov A. Tullock Rent-Seeking Contest and its Solution in Secure Strategies / Working paper WP7/2013/01 / National Research University "Higher School of Economics". Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics, 2013. 45 p.
17. Iskakov M., Iskakov A., Zakharov A. Equilibria in secure strategies in the Tullock contest / CORE discussion paper 2014/10. Center for Operations Research and Econometrics, Universite catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium. February 2014. 22 p.

    Iskakov A., Iskakov M., Zakharov A. Equilibria in the Tullock Contest / ECORE Discussion Paper 2014/33, Bruxelles: ECORE, International Association for Research and Teaching. 2014. 24 p.
18. Iskakov M., Iskakov A. Asymmetric equilibria in secure strategies / Working paper WP7/2015/03 / National Research University Higher School of Economics. Moscow: Higher School of Economics Publ. House, 2015. 48 p.
19. Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont C. Games for cautious players: the equilibrium in secure strategies / CORE discussion paper 2016/51. Center for Operations Research and Econometrics, Universite catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium. 2016. 28 p.

Другие публикации

20. Искаков М. Б. Модель страхования вкладов мелких инвесторов // Сократовские чтения 2002. Материалы 5-й научной

конференции. М.: Международный университет (в Москве), 2002. С. 46–49.
21. Искаков М. Б. Равновесие в безопасных стратегиях // Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 9: «Лаборатория активных систем: 30 лет». М.: ИПУ РАН, 2004. С. 145–157.
22. Иващенко А. А., Искаков М. Б., Колобов Д. В., Новиков Д. А. Конкуренция на рынке инноваций // Иващенко А. А., Колобов Д. В., Новиков Д. А. Механизмы финансирования инновационного развития фирмы. М.: ИПУ РАН, 2005. С. 26–37.
23. Искаков М. Б. Механизм страхования депозитов с сообщением информации о рисках через страховой контракт // Теория активных систем. Труды Международной научно-практической конференции (16–18 ноября 2005 г., Москва, Россия). С. 193–195.
24. Искаков М. Б. Равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх // Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 15. Самара: СГАУ, 2006. С. 147–166.
25. Искаков М. Б. Исследование игровой задачи дележа распределенного на отрезке ресурса // Современные сложные системы управления: Материалы международной научно-практической конференции СССУ’2008 (6–7 мая 2007 г., Тверь, Россия) / Под ред. Д. А. Новикова, В. Н. Кузнецова. Тверь, ТГТУ, 2008. Ч. 1. С. 96–102.
26. Искаков М. Б. Равновесие в безопасных стратегиях в задаче дележа распределенного на отрезке ресурса // Равновесные модели экономики и энергетики: Труды Всероссийской конференции и секции Математической экономики XIV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2–8 июля 2008 г. Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008. С. 391–398.
27. Искаков М. Б. Игровая задача дележа распределенного на отрезке ресурса // Модернизация экономики и глобализация; Гос. ун-т – Высшая школа экономики. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009. Кн. 3. С. 519–532.
28. Искаков М. Б., Павлов П. А. Решение задачи пространственной конкуренции Хотеллинга на прямой // VI всероссийская школа-семинар молодых ученых «Управление большими системами»:

Сборник трудов. Ижевск: ООО Информационно-издательский центр «Бон-Анца», 2009. Т. 2. С. 172–182.
29. Iskakov M., Iskakov A. Solution of the Hotelling Problem of Spatial Competition in Secure Strategies // Game theory and management. Collected abstract of papers presented of the Fourth International Conference Game Theory and Management / Editors Leon A. Petrosyan, Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2010. P. 79–81.
30. Искаков М. Б., Искаков А. Б. Решение задачи пространственной конкуренции в безопасных стратегиях // Теория активных систем. Труды Международной научно-практической конференции (14–16 ноября 2011 г., Москва, Россия) / Общ. ред. В. Н. Бурков, Д. А. Новиков. М.: ТПУ РАН, 2011. Т. 1. С. 62–68.
31. Искаков М. Б., Искаков А. Б. Полное решение задачи Хотеллинга: концепция равновесия в безопасных стратегиях для игры определения цен // Журнал Новой экономической ассоциации. 2012. № 1 (13). С. 10–33.
32. Искаков М. Б., Искаков А. Б. Равновесие в безопасных стратегиях и множество наилучших безопасных ответов в модели пространственной конкуренции Хотеллинга // Сборник докладов XIII Международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества. М.: НИУ ВШЭ, 2012. Кн. 1. С. 215–229.
33. Iskakov M., Iskakov A. Equilibrium in Secure Strategies in the Bertrand–Edgeworth Duopoly Model // Game theory and management. Collected abstract of papers presented of the Seventh International Conference Game Theory and Management / Editors Leon A. Petrosyan, Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2013. P. 92–94.
34. Захаров А. В., Искаков А. Б., Искаков М. Б. Решение в безопасных стратегиях задачи борьбы за ренту Таллока // XIV Апрельская международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: в 4 кн. / отв. ред. Е. Г. Ясин; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2014. — Кн. 1. С. 316–329.
35. Iskakov M., Iskakov A. Equilibrium in secure strategies in the Bertrand–Edgeworth duopoly model // Contributions to Game Theory and Management. Collected papers presented of the Seventh

International Conference Game Theory and Management / Editors Leon A. Petrosyan, Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2014. (ISSN 2310-2608). Vol. VII. P.132–141.
36. Искаков А. Б., Искаков М. Б. Равновесия в безопасных стратегиях на разрывах наилучших ответов // Теория активных систем (ТАС-2014): Материалы Международной научно-практической конференции, 17–19 нояб. 2014 г, Москва / под общ. ред. В. Н. Буркова. Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 32–34.
37. Iskakov A., Iskakov M. Chain equilibrium in secure strategies // European Meeting of Game theory (SING11-GTM2015). Collected abstract of papers presented on European Meeting on Game Theory / Editors Leon A. Petrosyan, Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Saint Petersburg State University, 2015. P. 94–95.
38. Искаков М. Б., Искаков А. Б. Равновесие угроз и контругроз в бескоалиционных играх // XVI Апрельская международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества: в 4 кн. / отв. ред. Е. Г. Ясин; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2016. Кн. 1. С. 495–503.
39. Искаков А. Б., Искаков М. Б. В поисках обобщенной концепции рациональности // Журнал Новой экономической ассоциации. 2017. № 2 (34). С. 181–189.
40. Искаков М. Б. Теоремы существования равновесия в безопасных стратегиях // Теория активных систем – 50 лет. Материалы Международной научно-практической конференции, 18–19 ноября 2019 г. / под общ. ред. В. Н. Буркова. М.: ИПУ РАН. С. 115–121.
41. Искаков М. Б. Теоремы существования равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях // Журнал Новой экономической ассоциации. 2022. № 4 (56). С. 12–27.

Вклад соискателя в совместные публикации

Личный вклад автора в работах, опубликованных в соавторстве, заключается в следующем: в [4, 10, 14, 15, 18, 19, 33, 35, 36, 37] автору принадлежат определения угрозы, безопасной стратегии, безопасного отклонения, равновесия в безопасных стратегиях, разработанная дальнейшая система определений в рамках концепции безопасных стратегий (определения игры угроз, безопасного выигрыша, наилучшего безопасного ответа, равновесия в угрозах и контругрозах, равновесия в минимальных угрозах, сложного, иерархического, цепного РБС, игры с неопределенным инсайдером и ряд других); в [5, 11, 12, 19] – формулировки теорем существования и других связанных с ними определений, утверждений, лемм, следствий; в [2, 3, 8, 9, 13, 16, 17, 27–34] – решения в безопасных стратегиях задач (Хотеллинга, Таллока–Скапердаса, Бертрана–Эджворта); в [22] – определение и применение равновесия в безопасных стратегиях; в [39] – общая схема сравнительного исследования и обзора РБС с другими игровыми концепциями.

Научное издание

Искаков Михаил Борисович

Равновесие в безопасных стратегиях

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать . Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 1,37. Уч.-изд. л. .
Тираж 100 экз. Заказ № .

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук
117997,
ул. Профсоюзная, д. 65
Россия, Москва
http://www.ipu.ru