На правах рукописи

Берлин

Берлин Леонид Михайлович

СКАЛЯРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ НЕСИНХРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПО КРИТЕРИЮ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Специальность 2.3.1 —
«Системный анализ, управление и обработка информации, статистика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН).

Научный руководитель: д.т.н., чл.-корр. РАН
Галяев Андрей Алексеевич

Официальные оппоненты:

Ведущая организация:
Защита состоится DD mmmmmmmm YYYY г. в XX часов на заседании диссертационного совета 24.1.107.02 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук по адресу: 117342, г. Москва, вн. тер. г. муниципальный округ Коньково, ул. Профсоюзная, д. 65, стр. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПУ РАН и на сайте www.ipu.ru.

Автореферат разослан 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.107.02, канд. физ.-мат. наук Тремба Андрей Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Значительной практической ценностью обладают способы решения задач с дефицитом ресурса управления в случае, когда размерность вектора управления меньше размерности пространства состояний физической системы. Колебательные системы, такие как механические системы, электрические сети, квантовые осцилляторы или системы иной физической природы, содержащие в качестве управления одну внешнюю силу, являются примерами подобных систем.

Фундаментальным источником по теории оптимального управления является монография Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. В ней изложены необходимые условия оптимальности и результаты о существовании и единственности решений для линейных оптимальных быстродействий, на которые, в частности, опирается настоящая работа.

Полученные результаты выявляют сложную структуру оптимальных законов управления в системах с ограниченным числом каналов управления и многомерным фазовым пространством, что подчеркивает актуальность дальнейшего исследования таких задач, в том числе в направлении их конструктивного анализа и обобщения на другие критерии оптимальности. Увеличение количества осцилляторов от 2 до N затрудняет аналитическое исследование макропараметров и свойств подобных систем, но дает возможность единого подхода к анализу физико-технических объектов различной природы.

Решение задачи оптимального управления по критерию максимума изменения энергии колебаний системы осцилляторов за заданное время с управлением по частоте приводится коллективом авторов (B. Andresen, K.H. Hoffmann, J. Nulton, A. Tsirlin, P. Salamon), который также исследует достижение заданной целевой энергии за минимальное время с позиции изменения частоты осциллятора.

Близким по смыслу и постановкам к теме диссертационного исследования является задача управления платформами или тележками с колебательными подсистемами (маятники, упругие связи) под действием единственной силы, где в линейном приближении также возникают системы осцилляторов с общим ограниченным управлением. Подобные системы могут описывать малые перемещения платформы с упругими звеньями или сосуда с жидкостью.

Так в работе О.Р. Каюмова рассматривается задача быстродействия для горизонтального перемещения тележки с маятником на заданное расстояние с гашением колебаний. Для асимптотически близкой нелинейной модели, когда масса маятника пренебрежимо мала по сравнению с массой тележки, построены траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, и показано наличие как кусочно-постоянных режимов управления, так и особых управлений.

В свою очередь, исследование Ф.Л. Черноусько и С.А. Решмина посвящено задаче быстродействия маятникообразной нелинейной системой с ограниченным управлением, где терминальное множество состоит из периодически повторяющихся состояний равновесия. Авторы исследуют структуру оптимального управления в форме обратной связи, строят разделяющие кривые на фазовой плоскости и показывают, как они зависят от величины допустимого управления.

Стоит отметить, что нелинейная динамика управляемых систем усложняет или делает невозможным получение аналитического решения прямой и сопряженной систем после применения принципа максимума Понтрягина. Тогда как замена исходной нелинейной математической модели на линейную путем проведения линеаризации позволяет получать и анализировать аналитические решения. Пример подобной замены приведен А.А. Галяевым и А.П. Потаповым в задаче наискорейшей остановки двузвенного маятника на подвижном подвесе, где подход к решению основан на последовательном получении решения задачи быстродействия для линеаризованной системы.

Исследуемая в диссертационной работе задача актуальна для многомерных колебательных динамических систем с дефицитом ресурса управления в случае, когда размерность вектора управления меньше размерности пространства состояний. Разработанные методы и основанные на них алгоритмы решения ориентированы на этот класс задач и потому применимы при моделировании и численном синтезе управления в реальных физико-технических системах колебательной природы. Полученный единый подход к исследованию структуры оптимального управления и к классификации решений по количеству переключений для задачи оптимального быстродействия колебательной системы полезен как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. С теоретической стороны он позволяет описывать различные классы допустимых управлений и распространять анализ на группу из произвольного числа несинхронных осцилляторов. С прикладной стороны он дает конструктивную процедуру численного синтеза. На основе алгоритма Нейштадта–Итона восстанавливаются параметры экстремали и оценивается число переключений, что позволяет заранее оценивать структуру закона оптимального управления. В результате формируется подход, связывающий аналитическое описание оптимального управления с численным построением решений.

Степень разработанности научной темы

Задачи быстродействия для линейных управляемых систем с ограничением на управление относятся к классическим направлениям теории оптимального управления и исследуются в рамках принципа максимума Понтрягина, началом разработки которого послужил в 50-х годах XX века семинар по теории колебаний и автоматическому управлению Л.С. Понтрягина и М.А. Айзермана, где, в частности, рассматривалась задача оптимального быстродействия одиночным осциллятором, для которой В.Г. Болтянский осуществил синтез оптимального управления. В свою очередь, для систем осцилляторов зачастую необходимо, чтобы одна из подсистем как можно быстрее пришла в требуемое положение, тогда как другие подсистемы должны остаться в состоянии покоя в терминальный момент. Задача быстродействия системой уже многих маятников с подвижной точкой подвеса исследовалась Ф.Л. Черноусько, и была отмечена существенная аналитическая сложность получения решения и доказано существование оптимального по быстродействию управления на основе исследования Н.Н. Красовского. Само решение задачи разгона для двух маятников было предложено при некотором соотношении частот и нескольких переключениях управления. В этом случае полученную систему уравнений динамики можно разрешить относительно неизвестных параметров управления. В общем случае задачи оптимального быстродействия для системы осцилляторов с неизвестным количеством переключений оптимального управления аналитическое решение было неизвестно.

В 60-х годах XX века американские математики Итон и Нейштадт предложили итерационный метод поворота опорной гиперплоскости для поиска решения задачи оптимального управления по критерию быстродействия на основе идей выпуклого программирования. Итерационный алгоритм позволяет вычислить начальный вектор сопряженной системы, который используется для определения оптимальной траектории исходной системы, удовлетворяющей заданным граничным условиям, и применим в случае выпуклого множества достижимости. Одна из проблем указанного подхода заключается в том, что одному стартовому состоянию системы может соответствовать бесконечное количество неколлинеарных между собой начальных векторов сопряженной системы, что существенно влияет на сходимость алгоритма. Другие методы нахождения приближенных решений задач быстродействия для линейных систем разнообразны и представляют определенный интерес с точки зрения широты используемых подходов. Методы поиска управления в реальном времени, основанные на идее предварительной аппроксимации областей достижимости и вычисления начального вектора сопряженной системы в процессе управления, рассмотрены В.М. Александровым. Симплексные покрытия выпуклой оболочки множества достижимости лежат в основе итерационного алгоритма, использование которого предлагается Г.В. Шевченко для поиска минимального времени движения линейной и нелинейной управляемых систем, такого что начало координат будет принадлежать границе области достижимости. Техника инвариантных эллипсоидов, развитая Б.Т. Поляком и его соавторами, является основой для построения эффективных оценок множества достижимости систем с внешними возмущениями.

В работе S. Choura, S. Jayasuriya классическая задача быстродействия для одиночного гармонического осциллятора с ограниченным по модулю управлением доведена до конструктивного вида, когда авторы предлагают способ, используя который можно явно восстановить число переключений, сами моменты переключения и минимальное время для произвольного начального состояния. В статье F. Grognard, R. Sepulchre рассматривается задача быстродействия для остановки линейной системы с ограничением на управление. Работа расширяет метод вычисления времен переключений на класс линейных систем с комплексными полюсами и предлагает алгоритм, параметризующий управление последовательностью временных интервалов постоянного управления и задающий итеративную процедуру их настройки. Алгоритм решения задачи быстродействия для линейных систем с доказательством сходимости, которое заполняет пробел в вопросе выбора размера шага алгоритма Нейштадта–Итона, вместе с подробным обзором на наиболее известные численные схемы построения решения приведен в работе М.Э. Бузикова, А.М. Майер.

Влияние внешнего воздействия и диссипативных сил может также моделироваться через параметрическое управление – путем задания частоты гармонического осциллятора. Вместо явного включения демпфирующего члена в уравнение движения, например, члена, пропорционального скорости, обычно рассматривают управляемую систему, в которой значения частоты выбираются из некоторого ограниченного диапазона. Такой подход позволяет учитывать внешнее воздействие за счет изменения характеристик осциллятора, например, как при изменении жесткости пружины или длины маятника.

Для задачи успокоения произвольного числа линейных осцилляторов с общим скалярным управлением А.К. Федоровым и А.И. Овсеевичем в ввиду трудности нахождения аналитического решения было получено асимптотическое оптимальное управление в форме синтеза, где объединяются несколько подходов. Первая идея заключается в использовании нормали к приближенной области достижимости как начального вектора для сопряженных переменных при больших энергиях. Использование управления с уменьшенной верхней границей позволяет системе достичь малой окрестности нуля. И наконец, метод обобщенных функций Ляпунова применяется для построения синтеза в окрестности терминального положения.

В работах M. Romano, F. Curti исследуется задача быстродействия линейной системой с ограниченным управлением меньшей размерности. Требуется построить управление для перевода системы из одного произвольного состояние в другое. Авторы показывают, что оптимальное управление для перехода между заданными состояниями совпадает с оптимальным управлением некоторой связанной задачи остановки, но стартующей из специально построенного смещенного начального состояния. Приведенный результат позволяет рассматривать задачи разгона/остановки несинхронных осцилляторов за минимальное время как базовые при построении оптимального управления, поскольку в них отсутствует неединственность экстремалей.

Диссертационная работа закрывает ряд пробелов в теории задач оптимального быстродействия для системы несихронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением. Конечное число переключений оптимального управления исследуемой задачи привело к идее рассмотрения задачи только в терминах моментов переключений, для любого заданного количества которых были получены дополнительные условия экстремума. Численный алгоритм Нейштадта–Итона для нахождения значения начального вектора сопряженной системы, насколько известно, не применялся ранее к задаче, поэтому возникла идея сравнить аналитические результаты в части разбиения плоскости начальных значений первого осциллятора по классам управлений с соответствующими численными, а также распространить алгоритм на группу, состоящую из большего числа осцилляторов.

Объектом исследования является система несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением.

Предметом исследования являются аналитические методы и алгоритмы нахождения структуры закона оптимального управления и траекторий системы несинхронных осцилляторов в задаче быстродействия с ограниченным скалярным управлением.

Целью работы является аналитическое и численное исследование задачи быстродействия для системы, состоящей из нескольких несинхронных осцилляторов со скалярным и ограниченным управлением.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Провести анализ свойств системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением, а также структуры и свойств закона оптимального управления в задаче быстродействия.
2. Получить новые условия экстремума для любого заданного количества неизвестных моментов переключения оптимального по быстродействию управления системой несинхронных осцилляторов.
3. Исследовать свойства критерия и оптимальных траекторий для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением в задаче быстродействия.

Основные положения, выносимые на защиту:

П1) Свойства сильной достижимости и глобальной управляемости системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением.

П2) Метод решения задачи быстродействия системой несинхронных осцилляторов, базирующийся на необходимых условиях экстремума для любого заданного количества неизвестных моментов переключения оптимального управления.

П3) Непрерывная зависимость критерия и длительностей интервалов управления от параметра ограничения на управление и от граничных условий в задаче оптимального по быстродействию управления системой несинхронных осцилляторов.

Соответствие паспорту специальности

Положения, выносимые на защиту, соответствуют паспорту специальности 2.3.1 – «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» по следующим пунктам:

1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта (П1, П2).
3. Разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта (П3).
4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений, обработки информации и искусственного интеллекта (П2).

Научная новизна:

Н1) Для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением доказаны свойства сильной достижимости и глобальной управляемости, в том числе с использованием аппарата геометрической теории оптимального управления.

Н2) Впервые получены необходимые условия экстремума для задачи оптимального управления системой несинхронных осцилляторов со скалярным ограниченным управлением по критерию быстродействия. Помимо условий принципа максимума получены дополнительные условия невырожденности оптимального управления, обеспечивающие решение для произвольного заданного числа неизвестных моментов переключения.

Н3) Предложен метод решения задачи быстродействия для системы несинхронных осцилляторов, основанный на Н2 и использующий в качестве начального приближения решение, полученное по алгоритму Нейштадта–Итона.

Н4) Показано, что условия, указанные в Н2, являются достаточными для решения задач оптимального разгона или остановки системы несинхронных осцилляторов со скалярным ограниченным управлением по критерию быстродействия.
Н5) Доказана непрерывная зависимость критерия и длительностей интервалов управления от параметра ограничения на управление и от граничных условий в задаче оптимального по быстродействию управления системой несинхронных осцилляторов с использованием установленного свойства сильной достижимости рассматриваемой системы с ограничением.

Теоретическая значимость работы заключается в развитии теории и методов решения задач оптимального управления линейными системами, содержащими колебательные подсистемы, с ограниченным управлением, размерность которого меньше размерности пространства состояний системы.

Практическая значимость заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для численного синтеза управления в широком классе технических систем, в частности, для вибрационных машин и установок со сложной нелинейной динамикой. В окрестности рабочих режимов такие модели после линеаризации часто сводятся к системе осцилляторов с единственным ограничен ным входом, что позволяет применять полученные результаты (Н2, Н3, Н4).

Методы исследования

В работе используются методы оптимального управления, линейной алгебры, математического анализа и вычислительной математики.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов подтверждается корректностью и полнотой исходных положений, достоверностью, строгостью доказательств и непротиворечивостью математических выкладок. Результаты теоретических исследований подтверждены средствами компьютерного моделирования.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на научных семинарах ИПУ РАН, а также на следующих конференциях: Мультиконференция по проблемам управления (2021, 2022, 2025), Управление большими системами (2022), Всероссийская научная конференция МФТИ (2021, 2023), Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (2022), Международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (2021), Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (2024), а также на семинаре лаборатории механики управляемых систем ИПМех РАН под руководством академика РАН Черноусько Ф.Л.

Личный вклад

Все основные результаты и расчеты получены лично автором.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 научных работах. По результатам опубликована одна статья в рецензируемом научном издании по специальности 2.3.1 (физ.-мат.), относящемся к категории К1 Перечня ВАК [1], 3 работы в журналах, индексируемых в международных базах данных и приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1 [2—4], 9 работ в материалах международных и всероссийских конференций [5—13] и одна публикация в прочих изданиях [14].

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, проведен анализ научных публикаций по тематике исследования, определены цель и задачи исследования, обоснована научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В первой главе сформулирована задача оптимального управления группой несинхронных осцилляторов по критерию быстродействия. Для рассматриваемой системы с ограниченным скалярным управлением исследована управляемость: доказаны свойства сильной достижимости и глобальной управляемости. Для линейной задачи быстродействия выписано необходимое условие оптимальности.

Динамика управляемой системы осцилляторов с различными частотами ω_j, $j = 1,...,N$, описывается следующей системой с ограничением:

$$\begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t), \\ \dot{p}_i(t) = -\omega_i^2 q_i(t) + u(t), \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,N. \tag{1}$$

$$u(t) \in [-\varepsilon,\varepsilon] = \mathbb{U},\ u \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Граничные условия для системы (1) с ограничением (2) и вектором состояния $\mathbf{x}(t) = (q_1(t),p_1(t),\ldots,q_N(t),p_N(t))^{\mathrm{T}}$ имеют вид:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = (q_1^*,p_1^*,\ldots,q_N^*,p_N^*)^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{x}(T^0) = \mathbf{x}_{T^0} = (q_1^{T^0},p_1^{T^0},\ldots,q_N^{T^0},p_N^{T^0})^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{3}$$

Время движения системы T – критерий задачи быстродействия.

$$T \to \min_{u(\cdot)\in\mathbb{U},\ T>0} \tag{4}$$

при условии, что решение системы (1) с управлением $u(\cdot)$ удовлетворяет граничным условиям (3). Оптимальное время обозначим T^0.

Приводится понятие множества достижимости рассматриваемой системы (1) с ограничением (2) за время $t_1 \geq 0$:

$$\mathcal{A}(t_1,\mathbf{x}_0,\varepsilon) = \{\mathbf{x}(t_1) \mid u = u(t) \in [-\varepsilon,\varepsilon],\, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\, t \in [0,t_1]\}. \qquad (5)$$

Для множества достижимости $\mathcal{A}(t_1,\mathbf{x}_0,\varepsilon)$ справедливы леммы.

Лемма 1. *Система* (1) *с ограничением* (2) *является сильно достижимой:* $\operatorname{int}\mathcal{A}(T,\mathbf{x}_0,\varepsilon) \neq \emptyset$, $\forall T > 0$.

Лемма 2. *Для множества достижимости* $\mathcal{A}(t_1,\mathbf{0},\varepsilon)$ *системы* (1) *с ограничением* (2) *справедливо свойство центральной симметрии, линейности по параметру* ε*:*

$$-\mathcal{A}(t_1,\mathbf{0},\varepsilon) = \mathcal{A}(t_1,\mathbf{0},\varepsilon) = \varepsilon\mathcal{A}(t_1,\mathbf{0},1). \qquad (6)$$

Лемма 3. *Пусть* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, *тогда для любого* $t_1 \geq 0$ *и любого начального состояния* $\mathbf{x}_0$ *выполнено вложение*

$$\mathcal{A}(t_1,\mathbf{x}_0,\varepsilon_1) \subset \mathcal{A}(t_1,\mathbf{x}_0,\varepsilon_2). \qquad (7)$$

Для системы (1)-(2) построено соответствие между решениями задачи разгона $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ и остановки $\mathbf{x}_{T^0} = \mathbf{0}$.

Следствие 1. *Траектории, соответствующей задаче* (1)-(2) *перехода из точки* $\mathbf{x}_0 = (q_1^*,p_1^*,\ldots,q_N^*,p_N^*)$ *в начало координат* $\mathbf{x}_{T^0} = \mathbf{0}$ *с управлением* $u(t)$ *за время* T^0, *соответствует траектория, ведущая из начала координат в точку* $\mathbf{x}_{T^0} = (q_1^*,-p_1^*,\ldots,q_N^*,-p_N^*)$ *с управлением* $u(T^0 - t)$.

Для системы (1)-(2) доказано свойство глобальной управляемости в нуле по теореме ЛаСалля-Конти, которое вместе со следствием 1 приводит к лемме.

Лемма 4. *Система* (1) *с ограничением* (2) *является глобально управляемой.*

Оптимальное управление $u^*(t)$ определяется из принципа максимума Понтрягина и решения сопряженной системы, содержащей неизвестные постоянные коэффициенты C_i^1,C_i^2, $i = 1,\ldots,N$:

$$u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign} SF(t) = \varepsilon \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{N} C_i^1 \cos\omega_i t + C_i^2 \sin\omega_i t\right). \qquad (8)$$

Лемма 5. *Нули функции переключений* $SF(t)$ *в задаче* (1)-(4) *изолированы и на любом конечном отрезке их конечное число.*

Следствие 2. *В задаче оптимального по быстродействию управления группой несинхронных осцилляторов* (1)-(4) *отсутствует особое управление.*

Верно следующее замечание, справедливость которого следует из раздела о линейных оптимальных быстродействиях монографии Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко.

Замечание 1. *Оптимальное управление в линейной задаче быстродействия* (1)-(4) *единственно для любых начальных и конечных состояний системы.*

Также результат о единственности экстремального управления в задаче остановки в указанной монографии был усилен:

Лемма 6. *Экстремальное управление в задаче остановки и разгона* (1), (2), (4) *единственно.*

Во второй главе записан явный вид решения уравнений динамики (1). После этого ставится вопрос о поиске оптимального количества переключений управления и моментов переключений.

Переключения управления (8) происходят в моменты времени t_m, $m = 1,...,K-1$, и τ_n – длительность n-го интервала управления, $n = 1,...,K$, причем предполагается: $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{K-1} < T^0$. Тогда $u^*(t)$ с $K-1$ переключениями имеет структуру, представленную на рис. 1, и относится к классу с $(K-1)$ переключениями управления.

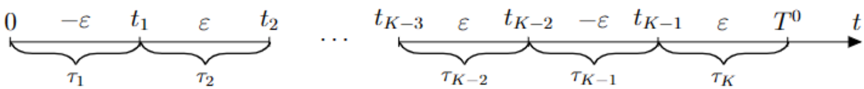


Рисунок 1 — Структура закона оптимального управления.

Учитывая структуру закона оптимального управления, записывается решение задачи (1)-(4).

$$\begin{cases} q_i^{T^0} = \dfrac{\varepsilon(-1)^{s+1}}{\omega_i^2}\left(2\sum\limits_{j=1}^{K}(-1)^{j+1}\cos\left(\omega_i\sum\limits_{k=j}^{K}\tau_k\right) - \cos\left(\omega_i\sum\limits_{k=1}^{K}\tau_k\right)\right) + \\ +\dfrac{p_i^*}{\omega_i}\sin\omega_i T^0 + q_i^*\cos\omega_i T^0 - (-1)^{K-1}\dfrac{\varepsilon(-1)^{s+1}}{\omega_i^2}, \\ p_i^{T^0} = \dfrac{(-1)^s\varepsilon}{\omega_i}\left(2\sum\limits_{j=1}^{K}(-1)^{j+1}\sin\left(\omega_i\sum\limits_{k=j}^{K}\tau_k\right) - \sin\left(\omega_i\sum\limits_{k=1}^{K}\tau_k\right)\right) + \\ + \left(p_i^*\cos\omega_i T^0 - q_i^*\omega_i\sin\omega_i T^0\right), \\ i = 1,\ldots,N. \end{cases} \tag{9}$$

Управление на первом интервале может быть выбрано как ε, так и $-\varepsilon$, для чего вводится параметр s, равный 0 и 1 соответственно.

Следствие 3. *Система* (9) *для задачи остановки обладает следующей симметрией: решение* $(\tau_1,...,\tau_K)$, *отвечающее управлению* $u^*(t)$ *для вектора начального состояния* $\mathbf{x}_0 = (q_1^*,p_1^*,\ldots,q_N^*,p_N^*)^{\mathrm{T}}$, *соответствует* $-u^*(t)$ *для* $-\mathbf{x}_0 = (-q_1^*,-p_1^*,\ldots,-q_N^*,-p_N^*)^{\mathrm{T}}$.

Переключения оптимального управления (8) в моменты времени t_m, $m = 1,\ldots,K-1$, приводят к системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_1) & \cos(\omega_1 t_2) & ... & \cos(\omega_1 t_{K-2}) & \cos(\omega_1 t_{K-1}) \\ \sin(\omega_1 t_1) & \sin(\omega_1 t_2) & ... & \sin(\omega_1 t_{K-2}) & \sin(\omega_1 t_{K-1}) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cos(\omega_N t_1) & \cos(\omega_N t_2) & ... & \cos(\omega_N t_{K-2}) & \cos(\omega_N t_{K-1}) \\ \sin(\omega_N t_1) & \sin(\omega_N t_2) & ... & \sin(\omega_N t_{K-2}) & \sin(\omega_N t_{K-1}) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} C_1^1 \\ C_1^2 \\ \cdots \\ C_N^1 \\ C_N^2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Оптимальное количество переключений неизвестно, поэтому поиск решения задачи сводится к проверке системы (9) для различных K. Исследуя N несинхронных осцилляторов, можно начать с управления с $2N-1$ переключениями.

Ранг матрицы размера $(2N \times (2N-1))$, определяющей систему линейных уравнений (10), должен быть равен $2N-1$, в противном случае ядро соответствующего отображения уже не будет одномерным, что противоречит единственности оптимального управления (замечание 1). Вектор коэффициентов оптимального управления $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1^1, & C_1^2, & \ldots & ,C_N^1, & C_N^2 \end{pmatrix}$ находится как ненулевой вектор ядра отображения, матрица которого определяет систему (10), с точностью до множителя, который должен соответствовать начальному управлению (параметру s), для которого решалась система уравнений (9).

Поскольку (9) для задачи разгона не содержит явной зависимости от T^0 и начальных состояний, можно для упрощения выкладок рассматривать задачу (1), (2), (4) из начала координат в некоторое конечное состояние $\mathbf{x}_{T^0} = (q_1^{T^0},p_1^{T^0},\ldots,q_N^{T^0},p_N^{T^0})^{\mathrm{T}}$, имея в виду следствие 1.

Якобиан J_{2N-1} в задаче разгона в случае управления с $2N-1$ переключениями состоит из частных производных функций системы (9) после переноса слагаемых в левую часть по длительностям интервалов управлений:

$$J_{2N-1} = (-1)^N 2^{2N-1} \omega_1^2 \omega_2^2 ... \omega_N^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos(\omega_1 t_1) & \dots & \cos(\omega_1 t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_1 t_1) & \dots & \sin(\omega_1 t_{2N-1}) \\ 1 & \cos(\omega_2 t_1) & \dots & \cos(\omega_2 t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_2 t_1) & \dots & \sin(\omega_2 t_{2N-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_N t_1) & \dots & \cos(\omega_N t_{2N-1}) \\ 0 & \sin(\omega_N t_1) & \dots & \sin(\omega_N t_{2N-1}) \end{vmatrix} = \tag{11}$$

$$= (-1)^N 2^{2N-1} \omega_1^2 \omega_2^2 ... \omega_N^2 |\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{\Omega}_1, \dots, \mathbf{\Omega}_{2N-1}|.$$

Лемма 7. *Критерий задачи* $T^0(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, ..., q_N^{T^0}, p_N^{T^0})$ *и длительности* $\tau_i(\varepsilon, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, ..., q_N^{T^0}, p_N^{T^0})$, $i = 1, ..., 2N$, *будут непрерывными функциями в случае, когда соответствующее оптимальное управление принадлежит классу* $2N-1$ *переключений в задаче оптимального разгона (остановки)* (1), (2), (4) *для любого конечного (начального) состояния.*

Для единственного, согласно замечанию 1, K при решении задачи (1)-(4) при $K > 2N$ справедлива теорема.

Теорема 1 (Необходимые условия экстремума). *Всякое решение задачи* (1)-(4) *в классе кусочно-непрерывных управлений* (8) *удовлетворяет системе уравнений* (9) *и дополнительным* $K - 2N$ *уравнениям:*

$$\begin{vmatrix} \cos(\omega_1 t_s) & \cos(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_1 t_s) & \sin(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \cos(\omega_N t_s) & \cos(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_N t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_N t_s) & \sin(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_N t_{s+2N-1}) \end{vmatrix} = \tag{12}$$

$$= |\mathbf{\Omega}_s, \mathbf{\Omega}_{s+1}, \dots, \mathbf{\Omega}_{s+2N-1}| = 0,$$

$$s = 1, \dots, K - 2N.$$

Условия существования нетривиального вектора $\mathbf{C}$, которые и были использованы для доказательства теоремы 1, эквивалентны дополнительным уравнениям в количестве C_{K-1}^{2N} штук, соответствующим всем возможным квадратным $(2N \times 2N)$ подматрицам матрицы системы уравнений (10).

Лемма 8. *Если для решения задачи* (1)-(4) *выполнено условие* (12), *то ранг всей матрицы* $Z = (\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{\Omega}_2, \dots, \mathbf{\Omega}_{K-1})$ *не превосходит* $2N - 1$, *в частности, определители всех возможных квадратных подматриц, составленных из ее столбцов, равны нулю.*

Разрешая нелинейную систему K уравнений при выборе управления с $K-1$ переключениями, состоящую из $2N$ уравнений системы (9) и $K-2N$ уравнений (12), можно получить все длительности интервалов управления $\tau_i,\ i = 1,...,K$.

Следствие 4. *В случае $K > 2N$ пропорциональность, полученная при доказательстве леммы 8, дает возможность определения $\mathbf{C}$ с точностью до множителя через ядро любого отображения, матрица которого с рангом $2N-1$ составлена из $2N-1$ различных $\mathbf{\Omega}_i$, то есть из части столбцов матрицы, определяющей отображение* (10).

Для задачи разгона и остановки (1), (2), (4) найденное решение по теореме 1 будет оптимальным в силу единственности оптимального и экстремального управлений в соответствии с замечанием 1 и леммой 6.

Рассматривается класс двух переключений для задачи разгона (1), (2), (4) в некоторое конечное состояние $\mathbf{x}(T^0) = (q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ при $N = 2$.

Лемма 9. *В классе двух переключений функциональные зависимости для длительностей интервалов управления τ_1, τ_2, τ_3 выглядят следующим образом:*

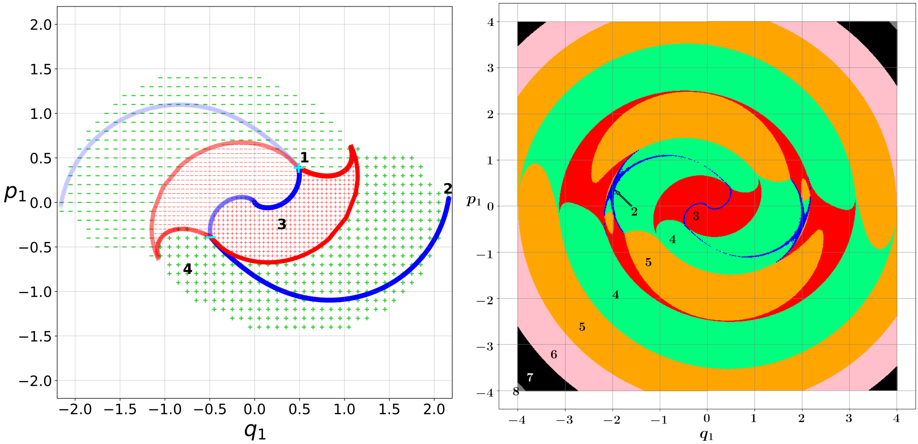
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \tau_3 = \tau_1 + \dfrac{2\pi z_1}{\omega_2},\ z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \dfrac{2}{\omega_2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin(\omega_2\tau_1)}{2-\cos(\omega_2\tau_1)}\right) + \dfrac{2\pi z_4}{\omega_2},\ z_4 \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \begin{cases} \tau_3 = -\tau_1 + \dfrac{2\pi z_2}{\omega_2},\ z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \dfrac{2\pi z_8}{\omega_2},\ z_8 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right. \tag{13}$$

Используя утверждение леммы 9, можно, фиксируя различные значения τ_1, вычислить длительности τ_2, τ_3 и построить множество точек $q_1^{T^0}$, $p_1^{T^0}$ на фазовой плоскости первого осциллятора в классе двух переключений, подставляя вычисленные длительности интервалов в уравнения (9).

Для демонстрации результатов приводится расчет оптимального управления для системы двух несинхронных осцилляторов ($\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1{,}4$, $\varepsilon = 0{,}4$) с использованием как необходимых условий экстремума (теорема 1), так и алгоритма Нейштадта–Итона. Рассматривается множество начальных состояний системы $\mathbf{x}_0 = (q_1^*, p_1^*, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, где $|q_1^*| < 2{,}2$, $|p_1^*| < 1{,}5$, и требуется перевести систему в начало координат за минимальное время.

Для классов трех и четырех переключений производится поиск решений в соответствии с теоремой 1. По полученным моментам переключений в соответствии со следствием 4 определяется $\mathbf{C}$.

Результат в виде размеченного множества начальных состояний первого осциллятора представлен на рис. 2 а).



а) теореме о необходимых условиях экстремума

б) алгоритму Нейштадта–Итона

Рисунок 2 — Множество начальных состояний первого осциллятора для задачи остановки, полученное по

Количество переключений управления отмечено на графике цифрами. Изображенные плюсами и минусами точки соответствуют управлениям со значением ε и $-\varepsilon$ на первом интервале соответственно.

На рис. 2 б) приводится классифицированная плоскость первого осциллятора, полученная с использованием алгоритма Нейштадта–Итона.

Сопоставление с результатами, найденными по необходимым условиям экстремума, показывает согласование структуры областей по числу переключений, при этом численный алгоритм дает дополнительную информацию: оценку значения критерия, моментов переключений и структуры переключений без явного перебора классов.

В третьей главе исследуются уравнения, входящие в состав необходимых условий экстремума. Для этого выписывается якобиан системы уравнений (9) и условий невырожденности управления (12). Применение теоремы о неявной функции позволяет доказать непрерывную зависимость не только критерия, но и длительностей от параметров задачи.

Определение 1. *Пусть* $\theta = \left(\varepsilon, q_1^*, p_1^*, \ldots, q_N^*, p_N^*, q_1^{T^0}, p_1^{T^0}, \ldots, q_N^{T^0}, p_N^{T^0}\right)$ – *вектор параметров задачи* (1)-(4), *и пусть* $u^*(\cdot,\theta)$ – *соответствующее оптимальное управление. Будем говорить, что управление* $u^*(\cdot,\theta_0)$ *является внутренней точкой класса* $K-1$ *переключений, если существует*

$\delta > 0$ такое, что для всех θ, удовлетворяющих $\|\theta - \theta_0\| < \delta$, соответствующее оптимальное управление $u^*(\cdot,\theta)$ имеет ровно $K-1$ переключений.

Лемма 10. *Нули функции переключений $SF(t)$, соответствующие моментам переключений оптимального управления, являющегося внутренней точкой класса $K-1$ переключений в задаче (1)-(4), могут быть только простыми.*

Лемма 11. *Критерий задачи $T^0(\theta)$, длительности $\tau_i(\theta), i = 1,...,K$, будут непрерывными функциями в случае, когда соответствующее оптимальное управление является внутренней точкой класса $K-1$ переключений в задаче (1)-(4) при $K \geq 2N$.*

Для критерия задачи справедливы результаты.

Лемма 12. *Пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, тогда для оптимального времени задачи (1)-(4) выполнено*

$$T^0(\varepsilon_2) \leq T^0(\varepsilon_1). \tag{14}$$

Теорема 2. *Оптимальное время $T^0(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, +\infty)$ - непрерывная функция в задаче (1)-(4).*

В **заключении** приведены основные результаты диссертационной работы, где была рассмотрена задача быстродействия для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением.

- Для системы несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением показано свойство сильной достижимости и глобальной управляемости. Представлена явная связь траекторий задач разгона и остановки, для которых доказана единственность не только оптимального, но и экстремального управления. Отсутствие особого управления показано через изолированность нулей функции переключений оптимального управления.
- Доказано, что в случае $K = 2N$, когда оптимальное управление принадлежит классу $2N-1$ переключений, якобиан полученной системы отличен от нуля, в соответствии с чем критерий и все длительности интервалов управления непрерывно зависят от параметров задачи оптимального разгона (остановки).
- Получены функциональные зависимости между всеми переменными и параметрами задачи в классе двух переключений для двух несинхронных осцилляторов.
- В общем случае $K > 2N$ представлены дополнительные условия невырожденности управления, которые совместно с решениями уравнений динамики составляют необходимые условия экстремума и используются для исследования задачи с любым количеством переключений управления.

– Для перевода группы осцилляторов в состояние покоя найдены траектории с помощью необходимых условий экстремума и с использованием итерационного алгоритма Нейштадта–Итона для поиска начального значения сопряженного вектора. Проведено сравнение полученных классификаций траекторий на основе количества переключений релейного управления. Результаты работы итерационного алгоритма, такие как класс переключений, оценка критерия и моментов переключений, могут быть использованы в качестве начального приближения для поиска решения на основе необходимых условий экстремума.
– Доказано, что критерий и все длительности интервалов управления непрерывно зависят от параметров задачи в случае, когда оптимальное управление является внутренней точкой класса $K-1$ переключений. Установлена монотонность и непрерывность критерия по параметру ограничения на управление.

Дальнейшая работа будет направлена на изучение чувствительности решений к параметрам частот осцилляторов, а также на исследование задачи оптимального управления системой несинхронных осцилляторов при других критериях, например энергетическом.

Список публикаций по теме исследования

Статьи в журналах из Перечня ВАК (категория К1)

1. *Берлин, Л. М.* О классе двух переключений управления в задаче быстродействия двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, С. К. Кравцова // Управление большими системами. — 2023. — Т. 101. — С. 24—38.

Статьи в научных изданиях, индексируемых в международных базах данных, приравненных к журналам Перечня ВАК категории К1

2. *Берлин, Л. М.* Условия экстремума при ограниченном скалярном управлении двумя несинхронными осцилляторами в задаче быстродействия / Л. М. Берлин, А. А. Галяев // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 505, № 1. — С. 86—91.

3. *Berlin, L. M.* Time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators / L. M. Berlin, A. A. Galyaev, P. V. Lysenko // Mathematics. — 2022. — P. 1—19.

4. *Берлин, Л. М.* Необходимые условия экстремума и метод Нейштадта–Итона в задаче оптимального быстродействия группой несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Автоматика и телемеханика. — 2024. — № 6. — С. 97—114.

Статьи в сборниках трудов международных и всероссийских конференций

5. *Берлин, Л. М.* Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Тезисы докладов 3-й Международной научной конференции «Геометрические методы в теории управления и математической физике». — Рязань : ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина», 2021. — С. 28.
6. *Берлин, Л. М.* Исследование оптимального решения задачи быстродействия для двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Материалы 14-й Мультиконференции по проблемам управления. — Ростов-на-Дону – Таганрог : Южный федеральный университет, 2021. — С. 39—41.
7. *Берлин, Л. М.* Об управляемости и достижимости двух несинхронных осцилляторов с ограниченным скалярным управлением / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ "Радиотехника и компьютерные технологии". — Москва–Долгопрудный–Жуковский : МФТИ, 2021. — С. 54—56.
8. *Берлин, Л. М.* О задаче быстродействия системы из двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Материалы 16-й Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». — Москва : ИПУ РАН, 2022. — С. 75—78.
9. *Берлин, Л. М.* О границах классов управления в задаче быстродействия двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Труды 15-й Мультиконференции по проблемам управления. — Санкт - Петербург : АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2022. — С. 10—13.
10. *Берлин, Л. М.* Непрерывность критерия в задаче быстродействия двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев // Труды 18-ой Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами». — Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2022. — С. 412—417.

11. *Берлин, Л. М.* Класс двух переключений в задаче быстродействия двух несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин // Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ "Радиотехника и компьютерные технологии". — Москва : МФТИ, 2023. — С. 63—65.
12. *Берлин, Л. М.* Необходимые условия экстремума в задаче быстродействия для группы несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев // Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры». — Екатеринбург : ООО "Издательство УМЦ УПИ", 2024. — С. 63—67.
13. *Берлин, Л. М.* Задача оптимального по времени управления группой несинхронных осцилляторов / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Труды 18-ой Всероссийской мультиконференции по проблемам управления. — Тула : ТулГУ, 2025. — С. 168—171.

Статьи в других рецензируемых научных изданиях

14. *Берлин, Л. М.* Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами / Л. М. Берлин, А. А. Галяев, П. В. Лысенко // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — 2022. — Т. 215. — С. 40—51.

Личный вклад соискателя в совместные публикации. [5; 7; 14] – доказаны свойства сильной достижимости и глобальной управляемости, [2; 6; 8; 9] – найдены дополнительные условия невырожденности управления для исследования двух несинхронных осцилляторов, [3; 10] – доказана непрерывная зависимость критерия и длительностей интервалов управления от параметров задачи, [1] – получены функциональные зависимости между всеми переменными и параметрами задачи в классе двух переключений для двух несинхронных осцилляторов, [4; 12; 13] – найдены дополнительные условия невырожденности для произвольного числа несинхронных осцилляторов с любым количеством переключений, и на их основе представлен метод, использующий в качестве начального приближения решения результат алгоритма Нейштадта–Итона.

Берлин Леонид Михайлович

СКАЛЯРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ НЕСИНХРОННЫХ
ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПО КРИТЕРИЮ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________