ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 519.715+681.514
ББК 22.18

На правах рукописи

БЕЛОВ Алексей Анатольевич

Методы и алгоритмы анизотропийного управления линейными дескрипторными и параметрически неопределенными системами

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН)

Научный консультант: **Чайковский Михаил Михайлович**, доктор технических наук.

Официальные оппоненты:

Пакшин Павел Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики, Арзамасский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВПО“Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.”

Семенихин Константин Владимирович, д.ф.-м.н., профессор кафедры “Теория вероятностей”, ФГБОУ ВО “Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет).”

Маликов Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор кафедры “Автоматика и управление”, ФГБОУ ВО Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО “Санкт-Петербургский государственный университет.”

Защита диссертации состоится **16 декабря 2021 года** в **14:00** на заседании диссертационного Совета Д002.226.02 при Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН по адресу: 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65, ИПУ РАН.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте Института проблем управления РАН (https://www.ipu.ru/).

Автореферат разослан “___” _____________ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного Совета Д002.226.02,
кандидат физико-математических наук Мусатова Е.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Задачи подавления внешних возмущений, действующих на объект управления, являются чрезвычайно важными в теории автоматического регулирования. Реальные технические объекты управления, как правило, функционируют в условиях неопределенностей, связанных как с неизвестными заранее и неизмеряемыми возмущениями, так и со случайными ошибками измерения. Для решения задач подавления возмущений в теории управления применяются разнообразные подходы. Среди подобных подходов можно выделить геометрические подходы, компенсационные подходы, а также методы минимизации влияния определенного класса возмущений на управляемый выход системы. В последнем случае подавление влияния внешних возмущений может быть реализовано для некоторого наперед заданного множества сигналов без его измерения. Такие подходы заключаются в минимизации операторной нормы от возмущающего воздействия к управляемому выходу. В классе линейных систем к наиболее популярным методам минимизации операторной нормы от возмущающего воздействия к управляемому выходу относятся LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ подходы.

Минимизация того или иного критерия качества позволяет наилучшим образом подавлять заданный класс внешних возмущений, действующих на систему. Так, LQG/$\mathcal{H}_2$ регулятор позволяет наилучшим образом минимизировать среднеквадратичное отклонение выходной переменной системы, на которую действует гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. В случае $\mathcal{H}_\infty$ управления минимизируется максимальная (по всему диапазону частот) операторная норма передаточной матрицы (как коэффициент усиления внешнего возмущающего воздействия). Анизотропийный подход к управлению линейными системами, предложенный И.Г. Владимировым, изучает возможности подавления системой случайных внешних возмущений с неточно заданными статистическими характеристиками. В отличие от LQG/$\mathcal{H}_2$ подхода, анизотропийная теория управления учитывает окрашенность случайного входного возмущения. Мерой окрашенности выступает неотрицательное число, называемое средней анизотропией, которая используется для теоретико-информационного (или энтропийного) описания статистической неопределенности в отношении случайных шумов. При этом случаи LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ управления могут рассматриваться как частные предельные случаи анизотропийной теории.

Системы управления, замкнутые анизотропийными регуляторами, являются более робастными, чем системы, замкнутые LQG/$\mathcal{H}_2$ регуляторами, и менее консервативными, чем системы, замкнутые $\mathcal{H}_\infty$ регуляторами. В работах А.П. Курдюкова, И.Г. Владимирова и В.Н. Тимина рассматривались сравнения возможностей LQG/$\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ и анизотропийных регуляторов в задаче подавления внешнего возмущения типа сдвига ветра при посадке самолета в присутствии случайных окрашенных шумов измерений. Было показано, что применение анизотропийных регуляторов при управлении дискретными системами существенно уменьшает энергетические затраты на управление за счет учета статистической неопределенности случайного внешнего возмущения, не снижая при этом качества переходных процессов.

С появлением методов субоптимального управления в работах М.М. Чайковского, анизотропийная теория получила достаточно широкое развитие для некоторых классов обыкновенных систем. Учитывая все преимущества анизотропийного подхода к синтезу робастных регуляторов, дальнейшее развитие методов анизотропийного анализа и управления для новых классов линейных систем является важной и актуальной задачей. Среди таких систем следует выделить классы дескрипторных и параметрически неопределенных обыкновенных систем (здесь и далее обыкновенными будем называть системы, описываемые только дифференциальными или только разностными уравнениями). Математические модели дескрипторных систем получаются, если в качестве переменных состояния выбирать реальные физические величины. Такой подход с одной стороны приводит к упрощению составления моделей и интерпретации результатов моделирования, но с другой стороны может приводить к появлению алгебраических уравнений вместе с дифференциальными или разностными уравнениями.

Дескрипторные системы нашли свое приложение при моделировании движения летательных аппаратов, химических процессов, в схемотехнике, в экономических системах, технических системах, энергетических системах, а также для описания механических систем и в робототехнике. Дескрипторные системы имеют характерные особенности и отличия от обыкновенных систем, которые не позволяют напрямую обобщить существующие методы и подходы теории управления, разработанные для обыкновенных систем. Несмотря на эти особенности, исследование дескрипторных систем представляет достаточно перспективное направление как с точки зрения фундаментальных исследований, так и с точки зрения практического применения.

Резюмируя вышесказанное, можно сделать вывод, что актуальность развития анизотропийной теории и разработка новых методов анизотропийного анализа и синтеза робастных регуляторов для новых классов не вызывает сомнений. Эти методы позволяют обобщать в рамках единого подхода разрозненные существующие и появляющиеся в настоящий момент результаты анализа и синтеза LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ регуляторов для линейных систем, как обыкновенных (задаваемых разносными уравнениями), так и дескрипторных (алгеброразностных) систем.

Целью данного диссертационного исследования являются разработка новых методов анализа и синтеза для класса линейных дескрипторных систем на основе анизотропийного подхода к описанию внешних возмущений и обобщение методов анизотропийной теории управления на некоторые классы параметрически неопределенных обыкновенных систем.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Для линейных дескрипторных систем получить условия и разработать алгоритмы для оценки и вычисления анизотропийной нормы системы.

2. Для линейных дескрипторных систем разработать методику синтеза оптимального закона управления при полном и неполном измерении вектора состояния, который делает замкнутую систему допустимой и минимизирует ее анизотропийную норму от возмущения к управляемому выходу.

3. Для линейных дискретных дескрипторных управляемых систем разработать методику синтеза субоптимального закона управления при полном измерении вектора состояния, который делает замкнутую систему допустимой и гарантирует ограниченность ее анизотропийной нормы от возмущения к управляемому выходу.

4. Для линейных дискретных дескрипторных систем с параметрическими ограниченными по норме неопределенностями получить условия для проверки робастной допустимости и оценки верхней границы анизотропийной нормы и разработать алгоритм для ее вычисления.

5. Для линейных дискретных дескрипторных систем с параметрическими ограниченными по норме неопределенностями разработать методы синтеза закона управления при полном измерении вектора состояния, гарантирующего робастную допустимость замкнутой системы и ограниченность сверху ее анизотропийной нормы от возмущения к управляемому выходу.

6. Для линейныйх дискретных обыкновенных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями получить условия для проверки робастной устойчивости и оценки верхней границы анизотропийной нормы и разработать алгоритм для ее вычисления.

7. Для линейныйх дискретных обыкновенных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями разработать методы синтеза закона управления при полном и неполном измерении вектора состояния, гарантирующего робастную устойчивость замкнутой системы и ограниченность сверху ее анизотропийной нормы от возмущения к управляемому выходу.

8. Разработать методику детектирования и идентификации отказов исполнительных и измерительных элементов линейной дискретной системы, которая гарантирует ограниченность анизотропийной нормы от возмущения к ошибке оценивания, и разработать методику синтеза отказоустойчивого управления.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертационной работе, постановки задач и методы их решения являются новыми в анизотропийной теории управления. К основным новым результатам относятся следующие:

1. Решены задачи анизотропийного анализа и вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с использованием обобщенных алгебраических уравнений Риккати и методов выпуклой оптимизации.

2. Получены методики синтеза оптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати для дескрипторных систем.

3. Решена задача синтеза анизотропийного регулятора при полном измерении вектора состояния для дескрипторных систем с расположением конечных полюсов замкнутой системы в заданной области.

4. Решена задача робастного анизотропийного анализа и разработан алгоритм оценки верхней границы анизотропийной нормы дескрипторной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

5. Решена задача синтеза робастного анизотропийного управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

6. Решена задача синтеза робастного анизотропийного управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями с расположением конечных полюсов замкнутой системы в заданной области при полном измерении вектора состояния.

7. Решена задача робастного анизотропийного анализа и разработан алгоритм оценки верхней границы анизотропийной нормы обыкновенной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

8. Решены задачи синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном и неполном измерении вектора состояния.

9. Решена задача оценки верхней границы $\mathcal{H}_\infty$ нормы, а также разработан метод синтеза робастного $\mathcal{H}_\infty$ регулятора для дескрипторной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями на основе линейных матричных неравенств.

10. Решена задача робастного анизотропийного анализа и разработан алгоритм оценки верхней границы анизотропийной нормы обыкновенной системы с политопическими параметрическими неопределенностями.

11. Решена задача синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с политопическими параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

12. Решена задача детектирования и идентификации отказов исполнительных и измерительных элементов линейной дискретной системы с использованием анизотропийного функционала качества.

Теоретическая значимость. Обобщение анизотропийного подхода на класс дескрипторных систем позволило объединить в рамках единой теории методы анализа и синтеза линейных систем, использующих в виде критерия качества норму вход-выходного оператора системы. Таким образом, в рамках общей концепции удалось объединить разрозненные до настоящего момента методы $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ теорий для дескрипторных систем как частные случаи анизотропийного подхода, а также рассматривать обыкновенные системы как частный случай дескрипторных систем. Впервые анизотропийный подход был применен к решению задач идентификации сбоев и синтеза отказоустойчивых линейных систем.

Практическая значимость. Полученные в диссертационном исследовании методы анализа и синтеза робастных систем автоматического управления с точно известными позволяют существенно снизить консерватизм замкнутых систем по сравнению с $\mathcal{H}_\infty$ регуляторами, повышая робастность по отношению к статистическим неопределенностям в распределениях случайных возмущений. Такие регуляторы могут существенно снизить энергозатраты на управление и время автономной работы замкнутых систем за счет более тонкой настройки управляющего устройства. Методы анализа и синтеза анизотропийного управления для систем с неточно заданными параметрами позволяют повысить робастное качество замкнутых систем в условиях параметрической неопределенности объектов управления, вызванных неточно известной математической моделью или технологическими допусками при производстве компонент объектов управления.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методы анизотропийного анализа и алгоритмы вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с использованием техники Риккати и методов выпуклой оптимизации.

2. Методы синтеза оптимального и субоптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати, а также с помощью методов выпуклой оптимизации.

3. Методы робастного анизотропийного анализа и алгоритм оценки верхней границы анизотропийной нормы дескрипторной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

4. Методы синтеза робастного анизотропийного управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

5. Алгоритм оценки верхней границы $\mathcal{H}_\infty$ нормы, а также метод синтеза робастного $\mathcal{H}_\infty$ регулятора для дескрипторной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями на основе линейных матричных неравенств.

6. Методы робастного анизотропийного анализа и алгоритм оценки верхней границы анизотропийной нормы обыкновенной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

7. Метод синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном и неполном измерении вектора состояния.

8. Методы робастного анизотропийного анализа и алгоритм оценки верхней границы анизотропийной нормы обыкновенной системы с политопическими параметрическими неопределенностями.

9. Метод синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с политопическими параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

10. Метод диагностики отказов исполнительных и измерительных элементов системы с использованием анизотропийного функционала качества и алгоритм синтеза отказоустойчивых систем.

Соответствие шифру специальности. Работа соответствует специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)» по пунктам:

- п. 1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

- п. 2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

- п. 4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

- п. 8. Теоретико-множественный и теоретико-информационный анализ сложных систем.

- п. 11. Методы и алгоритмы прогнозирования и оценки эффективности, качества и надежности сложных систем.

Методы исследования. В работе применяются методы линейной алгебры, теории вероятностей и случайных процессов, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теория обработки сигналов, методы математического моделирования, методы выпуклой оптимизации, методы функций Ляпунова и линейные матричные неравенства.

Степень обоснованности и достоверности полученных научных результатов. Достоверность полученных результатов обоснована приведенными доказательствами лемм и теорем, корректностью проведенных математических преобразований, а также дополнительно проверена результатами математического и компьютерного моделирования, согласующимися с теоретическими результатами.

Апробация. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных конференциях: XI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Москва, 2010; 9-th International Conference Process Control 2010, Kouty nad Desnou: Czech Republic, 2010; Конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург); 11-й Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2014, Арзамас); I, II, IV Всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация», 2009, 2010, 2012; 19th International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2013); 13th European Control Conference (ECC 2014, Strasbourg, France); 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015); European Control Conference (ECC-2015, Linz, Austria); 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference); 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017, Valletta, Malta); 21st International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2017); 20th IFAC World Congress, 2017; 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018, Zadar, Croatia); 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2018, Moscow); 18th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2018, Stockholm, Sweden; 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization Yekaterinburg, CAO-2018; 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland); 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019); International Workshop Navigation and Motion Control (NMC 2019), 2019, Saint Petersburg, Russia; 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 38 работ. В том числе 2 монографии (1 индексируется в Web of Science и Scopus), 15 журнальных статей в рецензируемых изданиях (14 индексируются в Web of Science и Scopus, а 1 индексируется в Scopus), 20 статей в сборниках конференций (11 индексируются в Web of Science и Scopus, 5 индексируются в Scopus, 4 конференции индексируются в РИНЦ), 1 брошюра.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка публикаций, списка литературы. Работа изложена на 296 страницах, содержит 42 иллюстрации, 11 таблиц. Список цитируемой литературы включает 296 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и значимость исследуемой проблематики, дан обзор литературы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В главе 1 рассмотрены основные особенности дискретных дескрипторных систем, дано краткое изложение теории анизотропийного анализа линейных систем управления, а также приведены формулировки известных лемм и теорем, которые будут использоваться в дальнейшем изложении и получения новых результатов. В первом разделе даются основные определения, относящиеся к теории дескрипторных систем, вводятся понятия эквивалентных форм, понятия регулярности, причинности, устойчивости и допустимости дескрипторной системы. Также рассмотрены различные виды управляемости и наблюдаемости и приведены формулы для вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости дескрипторных систем. Эти результаты известны и поэтому приводятся в обзорной форме, без доказательств с указанием ссылок на первоисточники.

Линейная стационарная система также является одной из специальных форм описания дескрипторных систем и имеет вид:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bf(k), \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Df(k), \quad (2)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $f(k) \in \mathbb{R}^m$ и $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — входная и выходная последовательности соответственно, $k \in \mathbb{Z}$, $K \geqslant 0$. E, A, B, C, D — постоянные действительные матрицы соответствующих размерностей. Если в уравнении (1) матрица E является вырожденной, т.е. $\operatorname{rank}(E) < n$, то алгебраические связи между переменными не позволяют разрешить исходные уравнения относительно производной. Невозможность обратить матрицу E не дает перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Определение 1. *Для любых двух заданных матриц $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ пара матриц (E, A) называется регулярной (матричный пучок $(\alpha E - A)$ называется регулярным), если существует постоянный скаляр $\alpha \in \mathbb{C}$, для которого $\det(\alpha E - A) \not\equiv 0$.*

Для регулярных дескрипторных систем вводится понятие передаточной функции.

Определение 2. *Рациональная матричная функция* $P(z) = C(zE - A)^{-1}B$ *называется передаточной функцией дискретной дескрипторной системы* (1)–(2). *Здесь* z *— переменная* Z*-преобразования Лапласа.*

Понятие устойчивости дескрипторной системы определяется следующим образом.

Определение 3. *Система* (1) *называется глобально асимптотически устойчивой или просто устойчивой, если при* $f(k) = 0$ *и для любых согласованных начальных условий* $x(0)$ *справедливо неравенство*

$$\|x(k)\| \le \alpha\beta^k\|x(0)\|,\ k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 0\ \alpha > 0,\ 0 < \beta < 1$$

Дискретные дескрипторные системы обладают несколькими особенностями, которые не позволяют быстро и легко обобщить результаты, полученные для обыкновенных систем. Главной такой особенностью является *нарушение принципа причинности* — текущее состояние системы может зависеть от будущих значений входного сигнала.

Система, которая является регулярной, причинной и устойчивой, называется допустимой. Отсюда следует и необходимая цель управления — сделать так, чтобы система была допустимой, а именно:

- решение должно зависеть от текущего значения входного сигнала, т.е. система должна быть причинной,

- динамическая подсистема должна быть устойчивой.

Рассмотрим важную эквивалентную форму для системы (1)–(2). Напомним, что $r = \operatorname{rank}(E)$, предполагаем, что пара матриц (E, A) является регулярной. Тогда из теории матриц следует, что можно подобрать такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, что $\widetilde{W}E\widetilde{V} = \operatorname{diag}(I_r, 0)$.

Применяя преобразование координат $\widetilde{V}^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, $x_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, и умножая левую и правую часть уравнения (1) на матрицу $\widetilde{W}$, система (1)–(2) запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1 f(k), && (3) \\ 0 &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2 f(k), && (4) \\ y(k) &= C_1 x_1(k) + C_2 x_2(k) + D f(k), && (5) \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{W}A\widetilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{W}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C\widetilde{V} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Система (3)–(6) называется второй эквивалентной формой или эквивалентной формой, основанной на сингулярной декомпозиции, для системы (1)–(2).

Далее приводятся основы анизотропийной теории управления в линейных обыкновенных системах. Пусть $W = \{w_k\}_{-\infty<k<\infty}$ — стационарная последовательность случайных векторов $w_k \in \mathbb{R}^m$ с конечными вторыми моментами.

Средняя анизотропия последовательности W определяется как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N})}{N}. \tag{7}$$

средняя анизотропия последовательности W может быть определена в частотной области с использованием спектральной плотности как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2}d\omega = -\frac{1}{4\pi}\ln\det\frac{m\mathbf{cov}(\tilde{w}_0)}{\|G\|_2^2}, \tag{8}$$

где

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\,\left(\widehat{G}^*(\omega)\widehat{G}(\omega)\right)d\omega\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Tr}\,S(\omega)d\omega\right)^{1/2}.$$

Для вход-выходного соотношения (1)–(2) введем среднеквадратичный коэффициент усиления, определяемый соотношением:

$$Q(P,W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}},$$

где

$$\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\mathbf{E}|y(k)|^2}$$

— мощностная норма стационарной последовательности $Y = \{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Определение 4. *Для заданного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ анизотропийная норма системы P с реализацией в пространстве состояний (1)–(2) определяется выражением*

$$|||P|||_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(P,W).$$

Таким образом, анизотропийная норма системы $|||P|||_a$ описывает стохастический коэффициент усиления системы P по отношению к внешнему возмущению W. Анизотропийная норма $|||P|||_a$ характеризует робастность системы P по отношению к случайному возмущению W, неточность знания статистических свойств которого описывается параметром a.

Глава 2. Во второй главе вводятся понятия $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ и анизотропийной норм передаточной функции дескрипторной системы. Следует заметить, что понятия

$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ норм являются общеизвестными, но вынесены во вторую главу для удобства изложения материала работы. Приведены алгоритмы для вычисления соответствующих норм и вычислительные примеры. Далее в главе ставится задача анизотропийного анализа дескрипторной системы в более широком смысле, которая заключается в одновременной проверке ее на допустимость и оценке ограниченности анизотропийной нормы дескрипторной системы наперед заданным числом. Для решения данной задачи были сформулированы и доказаны различные варианты анизотропийной частотной теоремы.

Предположим, что выполнено следующее ранговое условие:

$$\operatorname{rank}(\widetilde{E}) = \operatorname{rank}\,[\ \widetilde{E}\quad \widetilde{B}\ ].$$

Сформулируем анизотропийную частотную теорему на основе уравнения Риккати.

Теорема 1. *Пусть* $P \in \mathcal{H}_\infty{}^{p\times m}$ *— допустимая система с представлением в пространстве состояний* (1)–(2). *Для заданных скалярных величин* $a \geqslant 0$ *и* $\gamma > 0$ *анизотропийна норма системы ограничена сверху числом* γ, *т.е.* $|\!|\!|P|\!|\!|_a \leqslant \gamma$, *тогда и только тогда, когда существует такое число*

$$q \in [0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty^{-2})),$$

для которого справедливо неравенство

$$-\frac{1}{2}\ln\det\Big((1 - q\gamma^2)\Sigma\Big) \geqslant a,$$

где матрица Σ *связана со стабилизирующим*[1] *решением* $\widehat{R} = \widehat{R}^\top$ *обобщенного алгебраического уравнения Риккати*

$$\begin{aligned} E^\top \widehat{R} E &= A^\top \widehat{R} A + qC^\top C + L^\top \Sigma^{-1} L, \\ L &= \Sigma(B^\top \widehat{R} A + qD^\top C), \\ \Sigma &= (I_m - B^\top \widehat{R} B - qD^\top D)^{-1}, \end{aligned}$$

с дополнительным условием

$$E^\top \widehat{R} E \geqslant 0.$$

Также были получены условия на основе матричных неравенств.

Теорема 2. *Пусть* $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *— стационарная случайная гауссовская последовательность, средняя анизотропия которой не превосходит заданного числа, т.е.* $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, *где* $a \geqslant 0$. *Система* P *с реализацией в пространстве состояний* (1)–(2) *является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена положительным числом* $\gamma > 0$, *т.е.* $|\!|\!|P|\!|\!|_a < \gamma$, *если существует такой*

[1] Стабилизирующим решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати (9) будем называть матрицу $\widehat{R}$, для которой пара $(E,\, A + BL)$ является допустимой.

скалярный параметр $q \in \left[0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty)\right)$ *и симметрическая матрица* R, *которые удовлетворяют неравенствам*

$$ERE^\top \geqslant 0,$$

$$-(\det(I_m - B^T RB - qD^T D))^{1/m} < -(1 - q\gamma^2)e^{2a/m},$$

$$\begin{bmatrix} A^\top RA - E^\top RE & A^\top RB \\ B^\top RA & B^\top RB - I_m \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0.$$

Для того, чтобы сформулировать следующий результат, предполагаем, что система является регулярной, поэтому для нее существуют такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, с помощью которых исходная система может быть представлена во второй эквивалентной форме (3)–(5). Ниже будем использовать следующие обозначения: $E_d = \widetilde{W}E\widetilde{V}$, $A_d = \widetilde{W}A\widetilde{V}$, $B_d = \widetilde{W}B$, $C_d = C\widetilde{V}$, $D_d = D$. Справедлива теорема.

Теорема 3. *Для заданных действительных чисел* $a \geqslant 0$ *и* $\gamma > 0$ *система* (1)–(2) *с передаточной функцией* $P(z)$ *является допустимой и ее анизотропийная норма ограничена числом* γ, *т.е.* $|\!|\!|P|\!|\!|_a < \gamma$, *если существуют такие матрицы* $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *и скалярные величины* $\eta > \gamma^2$ *и* $\alpha > 0$, *что выполняются следующие неравенства:*

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m + B_d^\top \Theta B_d & D_d^\top \\ D_d & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top & \star & \star & \star & \star \\ A_d^\top \Gamma^\top & \Pi A_d + A_d^\top \Pi^\top - \Theta & \star & \star & \star \\ B_d^\top \Gamma^\top & B_d^\top \Pi^\top & -\eta I_m & \star & \star \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_d & -Q - Q^\top & \star \\ 0 & C_d + \alpha C_d \Pi A_d & D_d + \alpha C_d \Pi B_d & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

где $\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}$.

Замечание 1. *Анизотропийная норма дескрипторной системы может быть вычислена с использованием методов выпуклой оптимизации*

$$\text{найти } \xi_* = \min \gamma^2$$

на множестве $\{L, Q, R, S, \Psi, \eta\}$, *удовлетворяющих неравенствам* (9)–(11). *Если минимум* ξ_* *найден, то анизотропийная норма системы* P *вычисляется как*

$$|\!|\!|P|\!|\!|_a \approx \sqrt{\xi_*}.$$

Глава 3 посвящена решению задачи синтеза анизотропийного управления для дескрипторных систем с точно известными параметрами. Главу условно можно разделить на две части: оптимальное управление и субоптимальное управление.

Рассмотрим общую постановку задачи оптимального анизотропийного управления для дескрипторной системы. Дескрипторная система с реализацией в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), && (12)\\ z(k) &= C_z x(k) + D_{zw} w(k) + D_{zu} u(k), && (13)\\ y(k) &= C_y x(k) + D_{yw} w(k), && (14) \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — случайное внешнее возмущение, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — сигнал управления, $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ — измеряемый выход.

Предполагается, что все параметры системы точно известны, а $w(k)$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$.

Пусть также выполнены следующие стандартные предположения о системе

A1. Система является стабилизируемой и причинно управляемой.

A2. Система является детектируемой и причинно наблюдаемой.

A3. Размерность управляемого сигнала z меньше размерности входного возмущения w: $p_1 < m_1$.

A4. Матрица D_{yw} имеет полный строчный ранг: $\operatorname{rank} D_{yw} = p_2 \leq m_1$.

A5. Матрица D_{zu} имеет полный столбцовый ранг: $\operatorname{rank} D_{zu} = m_2 \leq p_1$.

Рассмотрим строго неупреждающий закон управления в виде:

$$u(k) = K(x(k), y(k)),$$

где $K(\cdot)$ — функция, подлежащая определению. Тогда задачу синтеза оптимального анизотропийного управления можно сфомулировать в следующем виде:

Задача 1. *Для известного неотрицательного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ входного возмущения $w(k)$ и системы (12)–(14), необходимо найти закон управления $u(k) = K(x(k), y(k))$, который делает замкнутую систему допустимой и при этом минимизирует ее анизотропийную норму, определяемую соотношениями*

$$\sup_{\overline{\mathbf{A}}(G) \leqslant a} \frac{\|F_{cl}(P, K)G\|_2}{\|G\|_2} \to \min_K, \qquad (15)$$

где G — наихудший формирующий фильтр для замкнутой системы, $\mathbf{G}_a$ — множество таких формирующих фильтров с заданным уровнем средней анизотропии равным a, а $F_{cl}(P, K)$ означает замкнутую систему.

Решение задачи оптимального анизотропийного управления по состоянию, при котором необходимо найти закон управления $u(k) = Kx(k)$, можно разделить на два этапа. На первом этапе необходимо найти условия на наихудший формирующий фильтр для замкнутой системы, а на втором — решить задачу синтеза $\mathcal{H}_2$ оптимального регулятора для расширенного объекта управления. Таким образом, решение оптимальной анизотропийной задачи при полном измерении вектора состояния сводится к решению связанных между собой матричных уравнений: два обобщенных алгебраических уравнения Риккати, обобщенного уравнения Ляпунова и нелинейного уравнения относительно средней анизотропии (8) входного возмущения.

Решение задачи при неполном измерении вектора состояния разделено на два этапа. На первом этапе строится контур, который будет обеспечивать свойство причинности для исходной системы (каузализация). На втором этапе строится оценивающий регулятор, стабилизирующий систему и минимизирующий анизотропийную норму замкнутой системы. В силу предположения A1 система является причинно управляемой, то есть существует такой закон управления $\tilde{u}(k) = K_1 y(k)$, что пара $(E, A + B_u K_1 C_y)$ является причинной.

Рассмотрим процедуру поиска коэффициента усиления K_1. Так как разомкнутая система (12)–(14) предполагается регулярной, то существуют такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, что исходная система (12)–(14) преобразуется ко второй эквивалентной форме, где

$$\widetilde{W}E\widetilde{V} = \mathrm{diag}(I_r, 0), \qquad \widetilde{W}A\widetilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где $r = \mathrm{rank}\,(E)$. Если $\mathrm{rank}\,(A_{22}) = s < n - r$, рассмотрим следующий блок $(A_{22} + B_{22} K_1 C_{22})$. Согласно предположению A1 существует такая матрица K_1, что $\mathrm{rank}\,(A_{22} + B_{22} K_1 C_{22}) = n - r$. Применяя в очередной раз сингулярную декомпозицию, представим матрицу A_{22} в форме

$$S_{A_{22}} A_{22} U_{A_{22}} = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Умножая слева и справа выражение $(A_{22} + B_{22} K_1 C_{22})$ на матрицы $S_{A_{22}}$ и $U_{A_{22}}$, получаем

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{B}_{22} K_1 \widetilde{C}_{22}, \tag{18}$$

где $\widetilde{B}_{22} = S_{A_{22}} B_{22}$ и $\widetilde{C}_{22} = C_{22} U_{A_{22}}$.

Тогда задача каузализации может быть представлена как задача поиска такой матрицы коэффициентов K_1, что матрица (18) станет невырожденной. Для простоты положим, что необходимо найти такую матрицу K_1, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{B}_{22} K_1 \widetilde{C}_{22} = \begin{bmatrix} 2I_s & 0 \\ 0 & I_{n-r-s} \end{bmatrix},$$

что эквивалентно

$$\widetilde{B}_{22} K_1 \widetilde{C}_{22} = I_{n-r}.$$

Откуда следует, что

$$K_1 = \widetilde{B}_{22}^{+} \widetilde{C}_{22}^{+}, \tag{19}$$

где M^+ псевдообращение по Муру-Пенроузу матрицы M.

Процедура каузализации позволяет преобразовать исходную систему к эквивалентной системе, содержащей явные выражения для динамической и алгебраической подсистем. Получим следующую обыкновенную систему:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \mathcal{A} x_1(k) + \mathcal{B}_1 w(k) + \mathcal{B}_2 u_1(k), \\ z(k) &= \mathcal{C}_1 x_1(k) + \mathcal{D}_{11} w(k) + \mathcal{D}_{12} u_1(k), \\ y(k) &= \mathcal{C}_2 x_1(k) + \mathcal{D}_{21} w(k) + \mathcal{D}_{22} u_1(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \overline{A}_{11} - \overline{A}_{12} \overline{A}_{22}^{-1} \overline{A}_{21}, & \mathcal{B}_i &= \overline{B}_{i1} - \overline{A}_{12} \overline{A}_{22}^{-1} \overline{B}_{i2}, \\ \mathcal{C}_i &= \overline{C}_{i1} - \overline{C}_{i2} \overline{A}_{22}^{-1} \overline{A}_{21}, & \mathcal{D}_{ij} &= D_{ij} - \overline{C}_{i2} \overline{A}_{22}^{-1} \overline{B}_{j2}, \end{aligned}$$

где $i, j = 1, 2$, $\overline{A} = A + B_u K_1 C_y$, $\overline{C}_1 = C_z + D_{zu} K_1 C_y$, $\overline{C}_2 = C_y$, $\overline{B}_1 = B_w + B_u K_1 D_{yw}$, $\overline{B}_2 = B_u$ и $\overline{D}_{11} = D_{zw} + D_{zu} K_1 D_{yw}$,

$$\widetilde{W} \overline{A} \widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{W} \overline{B}_w = \begin{bmatrix} \overline{B}_{11} \\ \overline{B}_{12} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{W} \overline{B}_u = \begin{bmatrix} \overline{B}_{21} \\ \overline{B}_{22} \end{bmatrix},$$
$$\overline{C}_z \widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} \end{bmatrix}, \qquad \overline{C}_y \widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} \end{bmatrix},$$

а $u_1(k)$ — новый закон управления. В общем случае эквивалентная система не удовлетворяет стандартным требованиям, налагаемым на объект управления. А именно, в общем случае не выполняется требование

$$\mathcal{D}_{22} = 0, \tag{20}$$

Ограничение (20) можно обойти, воспользовавшись заменой переменных

$$y^{(1)}(k) = y(k) - \mathcal{D}_{22} u_1(k).$$

После указанных выше преобразований система удовлетворяет стандартным требованиям, поэтому для нее применима уже решенная И.Г. Владимировым задача синтеза анизотропийного регулятора по выходу.

Далее рассматриваются задачи синтеза *субоптимального анизотропийного управления* по состоянию и по вектору полной информации. Приведем постановку задачи ниже.

Рассмотрим дескрипторную систему, заданную в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), && (21) \\ z(k) &= Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k), && (22) \end{aligned}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a \geqslant 0$, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — управление, E, A, B_w, B_u, C, D_w, D_u известные действительные матрицы соответствующих размерностей, $\operatorname{rank}(E) = r < n$.

Предположим, что

1. система (21)–(22) является причинно управляемой и стабилизируемой;

2. выполнено ранговое ограничение $\operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & B_w \end{bmatrix}$.

Задача 2. *Входная последовательность W — стационарная гауссовская случайная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$. Предполагается, что известны скалярные величины $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$. Задачей синтеза субоптимального анизотропийного регулятора для дескрипторных систем является поиск такого закона управления $u(k) = Kx(k)$, при котором замкнутая система является допустимой и выполнено неравенство*

$$|\!|\!| P_{cl} |\!|\!|_a \leqslant \gamma.$$

Данная задача решена с помощью двух техник: техники на основе Риккати-подхода и техники на основе матричных неравенств и выпуклой оптимизации.

Рассмотрим решение задачи субоптимального управления по состоянию на основе ***Риккати-подхода.*** Справедлива теорема.

Теорема 4. *Для заданного уровня средней анизотропии входного возмущения $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$ и числа $\gamma > 0$ замкнутая система P_{cl}^{SF} является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом γ, т.е. $|\!|\!| P_{cl}^{SF} |\!|\!|_a \leqslant \gamma$ если существуют такая матрица $\Phi = \Phi^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и положительное число $\eta > \gamma^2$, которые удовлетворяют следующим условиям*

$$\begin{gathered} E^\top \Phi E \geqslant 0, \\ B_w^\top \Phi B_w + D_w^\top D_w - \gamma^2 I_{m_1} < 0, \\ B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u > 0, \\ -\tfrac{1}{2}\ln(\det((\eta-\gamma^2)(\eta I_{m_1} - B_w^\top \Phi B_w - D_w^\top D_w)^{-1})) \geqslant a, \\ E^\top \Phi E = A^\top \Phi A + C^\top C - \\ -(A^\top \Phi \overline{B} + S)(\overline{B}^\top \Phi \overline{B} + R)^{-1}(\overline{B}^\top \Phi A + S^\top), \end{gathered}$$

где $\overline{B} = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} C^\top D_w & C^\top D_u \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} D_w^\top D_w - \eta I_{m_1} & D_w^\top D_u \\ D_u^\top D_w & D_u^\top D_u \end{bmatrix}$.

При этом закон управления определяется по формуле:

$$F_2 = -(B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u)^{-1}(B_u^\top \Phi A + D_u^\top C).$$

При использовании техники матричных неравенств были получены методики синтеза субоптимального анизотропийного управления в следующем виде. Предположим, что $D_u = 0$ и $m_1 \leqslant p$. Учитывая предположение о том, что система (21) является регулярной, мы можем найти две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, которые преобразуют исходную систему (21)–(22) к эквивалентной форме (3)–(5). Ниже будем использовать следующие обозначения:

$$E_d = \widetilde{W} E \widetilde{V},\ A_d = \widetilde{W} A \widetilde{V},\ B_{wd} = \widetilde{W} B_w,\ B_{ud} = \widetilde{W} B_u,\ C_d = C\widetilde{V},\ D_{wd} = D_w.$$

Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 5. *Рассмотрим систему* (21)–(22)*. Предположим, что* $\operatorname{rank}(E^\top) = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc} E^\top & C^\top \end{array}\right]$ *и* $m_1 \leqslant p$*. Для заданных числа* $\gamma > 0$ *и уровня средней анизотропии входной возмущающей последовательности* W $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$ *замкнутая система* P_{cl}^{SF} *является допустимой, а ее анизотропийная норма удовлетворяет неравенству* $\|P_{cl}^{SF}\|_a < \gamma$*, если найдутся такие матрицы* $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times m_2}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$, *и число* $\eta > \gamma^2$*, для которых справедливы неравенства*

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & \Lambda_{41}^\top & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^\top & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^\top \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^\top \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & -(Q+Q^\top) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{23}$$

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/p} < \gamma^2, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p + C_d \Theta C_d^\top & D_{wd}^\top \\ D_{wd} & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{25}$$

где

$$\Lambda_{11} = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top,\ \Lambda_{21} = A_d\Gamma^\top + B_{ud}Z^\top\Omega^\top,$$

$$\Lambda_{31} = C_d\Gamma^\top,\ \Lambda_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^\top,$$

$$\Lambda_{22} = \Pi A_d^\top + A_d\Pi^\top + \Phi Z B_{ud}^\top + B_{ud}Z^\top\Phi^\top - \Theta,$$

$$\Lambda_{52} = B_{wd}^\top,\ \Lambda_{53} = D_{wd}^\top,\ \Lambda_{32} = C_d\Pi^\top.$$

Остальные обозначения определяются по формулам

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \Omega = \left[\begin{array}{cc} I_r & 0 \end{array}\right], \Gamma = \left[\begin{array}{cc} Q & R \end{array}\right].$$

Тогда допустимый регулятор в форме статической обратной связи по состоянию может быть найден по формуле:

$$F_2 = Z^\top \begin{bmatrix} Q^{-\top} & 0 \\ -S^{-\top}R^\top Q^{-\top} & S^{-\top} \end{bmatrix} \widetilde{V}^{-1}. \qquad (26)$$

Теорема 5 позволяет находить γ-оптимальное управление, решая оптимизационную задачу, подобно той, что рассмотрена в замечании 1, а также налагать дополнительные условия в виде ограничения на область расположения конечных собственных значений пары матриц замкнутой системы $(E, A + B_u F_2)$. Тогда дополнительно к условиям теоремы 5 необходимо потребовать выполнения условия

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\left(\begin{bmatrix} A_d \\ -E_d \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B_{2d} \\ 0 \end{bmatrix} Z^\top\right)\mho\right) < 0, \qquad (27)$$

где

$$G = \begin{bmatrix} Q^\top & 0 \\ R^\top & S^\top \end{bmatrix}, \ \mho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

для $0 < \omega < 1$ и $X = X^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X > 0$. Здесь $\mathrm{He}\,(Y) = Y + Y^\top$. В случае, если неравенства (23)–(27), то конечные собственные значения замкнутой системы лежат внутри диска с центром в начале координат и радиусом ω. Заметим также, что в случае поиска γ-оптимального управления условие $m_1 \leqslant p$ можно ослабить. Однако получаемое в результате минимизации значение оптимальной величины γ^* в случае $m_1 > p$ может превосходить реальное значение.

В **главе 4** рассмотрена задача робастного анизотропийного анализа и синтеза робастных анизотропийных регуляторов для дискретных дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Результаты, полученные в данной главе, основаны на обобщениях результатов синтеза субоптимальных регуляторов, представленных в третьей главе. Все результаты сформулированы в терминах матричных неравенств, а также получены выпуклые ограничения для решения задач анализа и синтеза. Пусть дескрипторная система задана в пространстве состояний в следующем виде:

$$Ex(k+1) = A_\Delta x(k) + B_{\Delta w} w(k) + B_{\Delta u} u(k), \qquad (28)$$

$$y(k) = C_\Delta x(k) + D_{\Delta w} w(k), \qquad (29)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^q$ — случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — выход системы, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ — управление. Матрица E является вырожденной, т.е. $\mathrm{rank}\,(E) = r < n$.

Матрицы системы представимы в следующем виде: $A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_{\Delta w} = B_w + M_B^w \Delta N_B^w$, $B_{\Delta u} = B_u + M_B^u \Delta N_B^u$, $C_\Delta = C + M_C \Delta N_C$, $D_{\Delta w} = D_w + M_D \Delta N_D$. Здесь матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s\times s}$ неизвестная матрица с ограниченной спектральной нормой, т.е. $\|\Delta\|_2 \leqslant 1$. Следует заметить также, что для спектральной нормы справедливо следующее утверждение: $\|\Delta\|_2 \leqslant 1$, если и только если $\Delta^\top \Delta \leqslant I_s$.

Система (28)–(29) преобразуется во вторую эквивалентную форму с использованием следующих обозначений
$A_d = \overline{W}A\overline{V}$, $B_{wd} = \overline{W}B_w = \begin{bmatrix} B^d_{w1} \\ B^d_{w2} \end{bmatrix}$, $B_{ud} = \overline{W}B_u$, $C_d = C\overline{V} = \begin{bmatrix} C^d_1 & C^d_2 \end{bmatrix}$, $D_{wd} = D_w$, $M^d_A = \overline{W}M_A$, $N^d_A = N_A\overline{V}$, $M^{wd}_B = \overline{W}M^w_B = \begin{bmatrix} M^{wd}_{B1} \\ M^{wd}_{B2} \end{bmatrix}$, $N^{wd}_B = N^w_B$, $M^{ud}_B = \overline{W}M^u_B$, $N^{ud}_B = N^u_B$, $M^d_C = M_C$, $N^d_C = N_C\overline{V} = \begin{bmatrix} N^d_{C1} & N^d_{C2} \end{bmatrix}$,

Предположим, что $p \leqslant q$, а также выполнены ранговые ограничения

$$\operatorname{rank}\left(E^\top\right) = \operatorname{rank}\left[E^\top, C^\top, N_C^\top\right],$$
$$\operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}\left[E, B_w, M^w_B\right].$$

Определение 5. *Рассмотрим отображение $P_\Delta : W \to Y$, которое задается уравнениями (28)–(29). Анизотропийной нормой системы с параметрическими неопределенностями будем называть норму оператора P_Δ, определяемую следующим соотношением:*

$$|\!|\!| P_\Delta |\!|\!|_a = \sup_{W \in \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a} \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

Ниже будут рассмотрены следующие задачи:

Задача 3. *Для системы с реализацией в пространстве состояний (28)–(29) и ограниченных по норме неопределенностей требуется проверить свойство робастной допустимости и выполнение ограниченности анизотропийной нормы системы $|\!|\!| P_\Delta |\!|\!|_a < \gamma$ для известных числовых значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$.*

Задача 4. *Для системы с реализацией в пространстве состояний (28)–(29) и известного уровня средней анизотропии входного возмущения $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $(a \geqslant 0)$ требуется построить закон управления $u(k) = Kx(k)$, который делает систему робастно допустимой и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы оператора замкнутой системы $\gamma > 0$.*

Задача анизотропийного анализа может быть решена с использованием следующей теоремы.

Теорема 6. *Для заданных чисел $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ система (28)–(29) является робастно допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом γ, т.е. $|\!|\!| P_\Delta |\!|\!|_a < \gamma$, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r\times r}$, для которых справедливы матричные неравенства*

$$\eta - \left(e^{-2a}\det(\Psi)\right)^{1/q} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_1 N_1^\top N_1 & M_1 \\ M_1^\top & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon_2 N_2^\top N_2 & M_2 \\ M_2^\top & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_q & D_{wd}^\top & (B_{w1}^d)^\top H^\top \\ D_{wd} & -I_p & 0 \\ HB_{w1}^d & 0 & -H - H^\top + L \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_D & 0 \\ 0 & HM_{B1}^{wd} \end{bmatrix}, \; N_1 = \begin{bmatrix} N_D & 0 & 0 \\ N_B^{wd} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & L^\top - Q^\top - \frac{1}{2}Q & 0 \\ A_d^\top \Gamma^\top & \Pi A_d + A_d^\top \Pi^\top - \Theta & \Pi B_{wd} & A_d^\top \Gamma^\top & C_d^\top \\ B_{wd}^\top \Gamma^\top & B_{wd}^\top \Pi^\top & -\eta I_q & B_{wd}^\top \Gamma^\top & D_{wd}^\top \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^\top & 0 \\ 0 & C_d & D_{wd} & 0 & -I_p \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ \Pi M_A^d & \Pi M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C^d & M_D \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & N_C^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Теорема 7. *Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора в виде $u(k) = Fx(k)$ для системы (28)–(29) для заданных чисел $\gamma > 0$ и $a > 0$ ($\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$) разрешима, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,$\Psi \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r\times r}$, and $Z \in \mathbb{R}^{n\times m}$, для которых справедливы неравенства*

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/p} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_1 N_1 N_1^\top & M_1^\top \\ M_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Lambda + \varepsilon_2 M_2^\top M_2 & N_2 \\ N_2^\top & -\varepsilon_2 I_{5s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$M_1 = \begin{bmatrix} (M_D)^\top & 0 & 0 \\ \left(M_C^d H\right)^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (N_D)^\top & 0 \\ 0 & \left(N_{C1}^d\right)^\top \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & \left(M_A^d\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(M_B^{wd}\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(M_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & \left(M_B^{wd}\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_D^w)^\top & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \Gamma\left(N_A^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Gamma\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ \Pi\left(N_A^d\right)^\top & \Phi Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Pi\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma\left(N_A^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_B^{ud}\right)^\top & \Gamma\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(N_B^{wd}\right)^\top & \left(N_D^w\right)^\top \end{bmatrix},$$

$$\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p & D_{wd} & C_1^d H \\ D_{wd}^\top & -I_q & 0 \\ H^\top (C_1^d)^\top & 0 & -H - H^\top + L \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & \Lambda_{41}^\top & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^\top & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^\top \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^\top \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & -(Q + Q^\top) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{11} = -\tfrac{1}{2}Q - \tfrac{1}{2}Q^\top,\ \Lambda_{21} = A_d\Gamma^\top + B_{ud}Z^\top\Omega^\top,$$

$$\Lambda_{31} = C_d\Gamma^\top,\ \Lambda_{41} = L - Q - \tfrac{1}{2}Q^\top,$$

$$\Lambda_{22} = \Pi A_d^\top + A_d\Pi^\top + \Phi Z B_{ud}^\top + B_{ud}Z^\top\Phi^\top - \Theta,$$

$$\Lambda_{32} = C_d\Pi^\top,\ \Lambda_{52} = B_{wd}^\top,\ \Lambda_{53} = D_{wd}^\top.$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},\ \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Закон управления можно найти по формуле

$$F = Z^\top \begin{bmatrix} Q^{-\top} & 0 \\ -S^{-\top}R^\top Q^{-\top} & S^{-\top} \end{bmatrix} \overline{V}^{-1}.$$

При решении задачи модального управления к условиям, рассмотренным в теореме 7 следует добавить следующие неравенства:

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_3 M_3 M_3^\top & N_3^\top \\ N_3 & -\varepsilon_3 I_s \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\left(\begin{bmatrix} A \\ -E \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} Z^\top\right)\mho\right),$$

где

$$M_3 = \begin{bmatrix} M_A^d \\ 0 \end{bmatrix},\ N_3 = N_A^d G\mho,\ \ G = \begin{bmatrix} Q & R \\ R^\top & S \end{bmatrix},\ \ \mho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и потребовать их выполнения для $n \times n$ матрицы $X > 0$.

Отдельно решены задачи анализа и синтеза $\mathcal{H}_\infty$ робастного регулятора по состоянию. В отличие от задач анизотропийного анализа и управления, $\mathcal{H}_\infty$ задачи не требуют дополнительных ранговых ограничений типа (30)–(30) и условия $p \leqslant q$. Кроме того, матрица $D_{\Delta u}$ может быть ненулевой.

Глава 5 посвящена вопросам анизотропийного анализа и синтеза в параметрически неопределенных обыкновенных системах. Рассматриваются два типа параметрических неопределенностей: политопические и ограниченные по норме неопределенности. Для обоих типов неопределенностей получены условия ограниченности анизотропийной нормы сверху заданным положительным числом, а также разработаны вычислительные методики оценки верхней границы анизотропийной нормы параметрически неопределенной системы.

Определим анизотропийную норму системы (30)–(31) как

$$\|\!|F_\Delta|\!\|_a = \sup_{W:\ A(W)\leqslant a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}},$$

где F_Δ — вход-выходной оператор системы, содержащий неопределенные коэффициенты.

В задаче анализа необходимо разработать вычислительную методику для проверки робастной устойчивости и анизотропийного качества разомкнутой системы, т.е. $\|\!|F_\Delta|\!\|_a < \gamma$ для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ и заданного числа $\gamma > 0$ при всех возможных значениях неопределенностей из рассматриваемых множеств.

Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора может быть сформулирована следующим образом. Для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ и заданного числа $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде $u(k) = K(x(k), y(k))$, который робастно стабилизирует разомкнутую систему и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы, т.е. $\|\!|F_\Delta^{cl}|\!\|_a < \gamma$.

Системы с политопическими неопределенностями. Рассмотрим линейную систему с реализацией в пространстве состояний в виде:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\Theta)x(k) + B_u(\Theta)u(k) + B_w(\Theta)w(k), && (30)\\ z(k) &= C(\Theta)x(k) + D_u(\Theta)u(k) + D_w(\Theta)w(k), && (31) \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее случайное возмущение с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ ($a \geqslant 0$), $u(k) \in \mathbb{R}^q$ — вектор управления, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход системы.

Матрицы $A(\Theta)$, $B_w(\Theta)$, $B_u(\Theta)$, $C(\Theta)$, $D_w(\Theta)$ определяются из выражений

$$A(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i A_i, \;\; B_w(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i B_{wi},$$

$$B_u(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i B_{ui}, \;\; D_u(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i D_{ui},$$

$$C(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i C_i, \quad D_w(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i D_{wi}, \quad (32)$$

где вектор неопределенных параметров Θ обладает следующими свойствами

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_i = 1, \quad \theta_i \geqslant 0, \quad \theta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = \overline{1, r}. \qquad (33)$$

Приведенная ниже теорема представляет собой независящие от неопределенных параметров достаточные условия оценки анизотропийной нормы политопической системы.

Теорема 8. *Система* (30)–(31) *является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа* $\gamma > 0$ *для известного уровня средней анизотропии* $a \geqslant 0$ *и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих* (32)–(33), *если существуют такие матрицы* $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, *невырожденные матрицы* G_i *и число* $\eta > \gamma^2$, *при которых справедливы следующие матричные неравенства:*

$$\eta - \left(e^{-2a} \det \Psi\right)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -G_i - G_i^\top + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -G_i - G_i^\top + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & \star \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_j - G_j^\top + \Phi_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & \star \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Задачу синтеза можно решить, используя следующую теорему.

Теорема 9. *Система* (30)–(31) *робастно стабилизируема законом управления в виде статической обратной связи по состоянию* $u(k) = Kx(k)$, *а ее анизотропийная норма строго ограничена числом* $\gamma > 0$ *для известного уровня средней* $a \geqslant 0$ *входного возмущения для всех возможных неопределенностей, определяемых выражениями* (32)–(33) *если существуют такие матрицы* $\Phi_i > 0$,

$\Psi > 0$, $\overline{L}$, $\overline{G}$ и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы неравенства

$$\eta - \left(e^{-2a}\det\Psi\right)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -\overline{G} - \overline{G}^\top + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i\overline{G} + B_{ui}\overline{L} & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i\overline{G} + D_{ui}\overline{L} & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$i = \overline{1, r}$. При этом закон управления определяется выражением:

$$K = LG^{-1}.$$

Полученные условия могут быть использованы для синтеза робастного анизотропийного регулятора с расположением полюсов замкнутой системы в заданной области внутри диска с центром $(x_c; 0)$ и радиусом α. Для решения задачи модального управления к условиям теоремы необходимо добавить дополнительные r линейных матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} -\alpha^2 R_i & A_i\overline{G} - x_c\overline{G} + B_{ui}\overline{L} \\ \star & -\overline{G} - \overline{G}^\top + R_i \end{bmatrix} < 0,$$

которые должны выполняться для заданных ранее x_c и α, а также для переменных $R_i > 0$.

Системы с ограниченными по норме неопределенностями. Рассмотрим постановки задач анизотропийного анализа и синтеза систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^\Delta x(k) + B_w^\Delta w(k) + B_u u(k), && (34)\\ y(k) &= C_y^\Delta x(k) + D_{yw}^\Delta w(k), && (35)\\ z(k) &= C_z^\Delta x(k) + D_{zw}^\Delta w(k) + D_{zu} u(k), && (36) \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — управление, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $z(k) \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $A^\Delta = A + M_A\Delta N_A$, $B_w^\Delta = B_w + M_B\Delta N_B$, $C_z^\Delta = C_z + M_C\Delta N_C$, $C_y^\Delta = C_y + M_{Cy}\Delta N_{Cy}$, $D_{yw}^\Delta = D_{yw} + M_{Dy}\Delta N_{Dy}$, $D_{zw}^\Delta = D_{zw} + M_D\Delta N_D$. Матрицы A, B_w, B_u C, D_w, C_z, D_{zw}, D_{zu}, M_A, N_A, M_B, N_B, M_C, N_C, M_D, N_D, M_{Cy}, N_{Cy}, M_{Dy} и N_{Dy} — постоянные, имеющие соответствующие размерности. Матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s\times s}$ — неизвестная, ограниченная по спектральной норме $\overline{\sigma}(\Delta) \leqslant 1$, т.е. $\Delta^\top\Delta \leqslant I_s$.

Решение задач анализа и синтеза сформулированы в теоремах.

Теорема 10. *Для заданных действительных чисел $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ система (34)–(35) робастно устойчива, а ее анизотропиная норма ограничена сверху параметром γ, т.е. $\|\!|F_\Delta|\!\|_a < \gamma$, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, а также $n \times n$-матрица $Y = Y^\top > 0$, $m \times m$-матрица $\Psi = \Psi^\top > 0$, для которых справедливы следующие неравенства:*

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B^\top & D^\top \\ B & -Y & 0 \\ D & 0 & -I_p \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Y & 0 & YA^\top & YC^\top \\ 0 & -\eta I_m & B^\top & D^\top \\ AY & B & -Y & 0 \\ CY & D & 0 & -I_p \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & M_D \end{bmatrix}, \; N_2 = \begin{bmatrix} N_A Y & 0 & 0 & 0 \\ N_C Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 11. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ закон управления $u(k) = Fx(k)$ робастно стабилизирует замкнутую систему и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы, если существуют числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $Y = Y^\top > 0$, $(m \times m)$-матрица Ψ и $(m_1 \times n)$-матрица Λ такие, что выполнены неравенства*

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B_w^\top & D_{zw}^\top \\ B_w & -Y & 0 \\ D_{zw} & 0 & -I_p \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Y & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ AY + B_u\Lambda & B_w & -Y & \star \\ C_zY + D_{zu}\Lambda & D_{zw} & 0 & -I_p \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & M_D \end{bmatrix}, \; N_2 = \begin{bmatrix} N_A Y & 0 & 0 & 0 \\ N_C Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом закон управления можно найти в виде:

$$F = \Lambda Y^{-1}.$$

Теорема 12. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ закон управления $u(k) = Ky(k)$ робастно стабилизирует замкнутую систему и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Pi = \Pi^\top > 0$, $(m \times m)$-матрица Ψ, $(n \times n)$-матрица Y и $(m_1 \times p)$-матрица K такие, что выполнены следующие неравенства:*

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{6s} \end{bmatrix} < 0, \; \begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{3s} \end{bmatrix} < 0,$$

причем

$$\Phi \Pi = I_n.$$

Здесь

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & B_u K M_{Cy} & 0 & M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Cy} & M_C & 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix}, \; N_1 = \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \\ N_{Cy} & 0 & 0 & 0 \\ N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_{Dy} & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & * & * \\ B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_{Dy} & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В **главе 6** предлагается расширение анизотропийной теории на задачи технической диагностики отказов в линейных системах, а также синтеза отказоустойчивого управления. Рассмотрены две задачи: оценка отказа измерительных устройств и построение оценивателя отказов с анизотропийным критерием качества, а также оценка исполнительных и измерительных устройств на основе синтеза оценивающего фильтра с анизотропийным критерием. Рассмотрим постановку и решение задачи в случае отказов измерительных устройств:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), && (37)\\
y(k) &= Cx(k) + D_f f(k), && (38)
\end{aligned}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $w(k) \in \mathbb{R}^l$ — случайное входное возмущение, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ — управление, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $f(k) \in \mathbb{R}^p$ — функция отказа. Матрицы A, B_w, B_u, C, D_f являются постоянным действительным соответствующих размерностей, а матрица D_f предполагается невырожденной. Тогда задачу диагностики отказов измерительных устройств с анизотропийным критерием качества можно сформулировать в следующем виде.

Требуется построить наблюдатель функции отказа $\hat{f}(k)$ в форме

$$
\begin{aligned}
Kz(k+1) &= Fz(k) + \overline{B}_u u(k),\\
\widehat{\overline{x}}(k) &= z(k) + Ly(k),
\end{aligned}
$$

который обеспечит $\|f(k) - \hat{f}(k)\|_2 < \gamma \|w(k)\|_2$ на множестве всех входных случайных последовательностей $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a \geqslant 0$. Число $\gamma > 0$ считается известным, а $\|w(k)\|_2 = \mathbf{E} w^\top(k) w(k)$.

Теорема 13. *Для заданного уровня средней анизотропии входного случайного возмущения $a \geqslant 0$ и положительного числа $\gamma > 0$ задача синтеза наблюдателя функции отказа разрешима, если существуют такие матрицы $P > 0$, G_1, G_2, H, $\Psi > 0$, Z_1, Z_2 и число $\eta > \gamma^2$ для которых справедливы неравенства*

$$
\begin{bmatrix} -P + I & 0 & \Phi \\ 0 & -\eta I & T_w^\top G \\ \Phi^\top & G^\top T_w & -G - G^\top + P \end{bmatrix} < 0,
$$

$$
\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/l} < \gamma^2,
$$

$$
\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_l & T_w^\top H \\ H^\top T_w & -H - H^\top + P \end{bmatrix} < 0,
$$

где $T_w = \begin{bmatrix} B_w \\ -CB_w \end{bmatrix}$, $G^\top = \begin{bmatrix} G_1 & \varepsilon G_2 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$, $\varepsilon = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \end{bmatrix}$, $\Phi = S^\top G = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}$, $\varphi_{11} = G_1 A + Z_1 C - \varepsilon G_2 CA - \varepsilon Z_2 C$, $\varphi_{12} = Z_1 - \varepsilon Z_2$, $\varphi_{21} = -Z_2 C - G_2 CA$, $\varphi_{22} = -Z_2$.

Вспомогательные матрицы Q и R определяются из соотношений

$$
R = \left(G_2^{-1} Z_2 - C G_1^{-1} Z_1\right)^{-1}, \; Q = G_1^{-1} Z_1 R.
$$

Матрицы наблюдателя вычисляются по формулам

$$F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & -I \end{bmatrix}, \ K = \begin{bmatrix} I+QC & Q \\ RC & R \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

Более того, функция отказа датчиков может быть найдена в виде:

$$\widehat{f}(k) = \begin{bmatrix} 0 & D_f^{-1} \end{bmatrix} \widehat{\overline{x}}(k). \tag{39}$$

На основе рассмотренного метода можно предложить схему реализации отказоустойчивого управления (маскирование отказа), которая реализуется следующим образом. Оценка функции отказа $\widehat{f}(k)$ может быть получена с использованием выражения (39). Тогда, вычитая слагаемое $D_f\widehat{f}(k)$ из измеряемого выхода, получаем

$$y_m(k) = y(k) - D_f\widehat{f}(k).$$

Чтобы воспользоваться данной методикой при синтезе отказоустойчивых систем, необходимо выполнить следующую последовательность действий.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Рассмотрим объект в виде:

$$x_p(k+1) = A_p x_p(k) + B_{up} u(k) + B_{wp} w(k), \tag{40}$$

$$y_p(k) = C_p x_p(k) + D_f f(k), \tag{41}$$

где $x_p(k) \in \mathbb{R}_p^n$ — состояние объекта управления, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайное внешнее гауссовское возмущение с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$, $u(k) \in \mathbb{R}^q$ — сигнал управления, $y_p(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $f(k) \in \mathbb{R}^p$ — вектор отказа датчиков.

Для системы (40)–(41) синтезируется регулятор по выходу с необходимым критерием качества в виде:

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_{uc} y_p(k), \tag{42}$$

$$u(k) = C_c x_c(k), \tag{43}$$

где $x_c(k) \in \mathbb{R}_c^n$ — состояние регулятора.

Шаг 2. С помощью процедуры, описанной в теореме 13 строится наблюдатель отказов для замкнутой системы с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} A_p & B_{up}C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix}, \ B_u = \begin{bmatrix} B_{up} \\ 0 \end{bmatrix}, \ B_w = \begin{bmatrix} B_{wp} \\ 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} C_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3. В случае, если $\mid \hat{f}(k) \mid > \alpha$, где α — вектор, компоненты которого задают порог чувствительности к наличию сбоя в системе, то применяется закон управления по маскированному выходу $y_m(k)$. В противном случае, управление ищется с помощью выражения (43).

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе в рамках решения фундаментальной проблемы теории и практики автоматического управления — понижения влияния внешних возмущений, действующих на линейные динамические системы — были разработаны и предложены новые регулярные методы анализа и синтеза в классе дискретных линейных дескрипторных систем, а также обыкновенных дискретных систем с параметрическими неопределенностями.

1. Разработаны методы анизотропийного анализа и алгоритмы вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с использованием техники Риккати и методов выпуклой оптимизации.

2. Получены условия синтеза оптимального и субоптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати, а также с помощью методов выпуклой оптимизации.

3. Разработаны методы робастного анизотропийного анализа и алгоритмы оценки верхней границы анизотропийной нормы дескрипторной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

4. Разработаны методы синтеза робастного анизотропийного управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

5. Предложен алгоритм оценки верхней границы $\mathcal{H}_\infty$ нормы, а также разработан метод синтеза робастного $\mathcal{H}_\infty$ регулятора для дескрипторной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями на основе линейных матричных неравенств.

6. Получены методы робастного анизотропийного анализа и алгоритмы оценки верхней границы анизотропийной нормы обыкновенной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

7. Решены задачи синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном и неполном измерении вектора состояния.

8. Получены методы робастного анизотропийного анализа и алгоритмы оценки верхней границы анизотропийной нормы обыкновенной системы с политопическими параметрическими неопределенностями.

9. Решена задача синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с политопическими параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

10. Предложены методы диагностики отказов исполнительных и измерительных элементов системы с использованием анизотропийного функционала качества и алгоритм синтеза отказоустойчивых систем.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

1. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: АНО «Физматлит», 2015.

2. *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Control of Discrete-Time Descriptor Systems. Cham: Springer International Publishing, 2018.

Статьи в рецензируемых журналах Wos/Scopus

3. *Belov A.A., Kurdyukov A.P.* Calculation of the anisotropic norm of the descriptor system. // Automation and Remote Control, V. 71, pp. 1022–1033, 2010.

4. *Belov A.A.* Anisotropic controller design for descriptor systems with respect to the output variable // Automation and Remote Control. V. 74, No. 11. pp. 1838–1850. 2013.

5. *Belov A.A., Andrianova O.G.* A New Anisotropy-Based Control Design Approach for Descriptor Systems Using Convex Optimization Techniques // IFAC-PapersOnLine, Volume 48, Issue 11, Pages 372–377, 2015.

6. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Anisotropy-based Suboptimal State-Feedback Control Design Using Linear Matrix Inequalities // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 10. C. 1741–1755.

7. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust anisotropy-based control of linear discrete-time descriptor systems with norm-bounded uncertainties // IFAC-PapersOnLine. 2017. Volume 50, Issue 1. C. 15471–15476.

8. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On LMI Approach to Robust State-Feedback $\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-Time Descriptor Systems with Uncertainties in All Matrices // IFAC-PapersOnLine. 2017. Volume 50, Issue 1. C. 15483–15487.

9. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust state-feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties // International Journal of Systems Science. 2019. Vol. 50, No. 6. C. 1303—1312.

10. *Belov A.A., Ortega R., Bobtsov A.A.* Parameter Identification of Linear Discrete-Time Systems with Guaranteed Transient Performance // IFAC-PapersOnLine. 2018. pp. 1038–1043.

11. *Andrianova O.G., Belov A.A., Kurduykov A.P.* Conditions of anisotropic norm boundedness for descriptor systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. USA: Pleiades Publishing, Ltd, 2015. Vol. 54, No. 1. C. 27–38.

12. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Robust Anisotropy-Based Control for Uncertain Descriptor Systems with Transient Response Constraints // IFAC-PapersOnLine, 2018. V. 51, No. 32. C. 515–520.

13. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Robust performance analysis of linear discrete-time systems in presence of colored noise // European Journal of Control. 2018. Vol. 42. C. 38–48.

14. *Aranovskiy S., Belov A.A., Ortega R., Barabanov N., Bobtsov A.A.* Parameter identification of linear time-invariant systems using dynamic regressor extension and mixing // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2019. Vol. 33, Iss. 6. pp. 1016-1030.

15. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust Control Design for Suppressing Random Exogenous Disturbances in Parametrically Uncertain Linear Systems // Automation and Remote Control. V. 81, No 4. P. 649—661. 2020.

16. *Belov A.A.* State-feedback anisotropy-based robust control of linear systems with polytopic uncertainties // Journal of Physics: Conference Series. 2020. 1536. C. 012008 (1–8).

17. *Курдюков А.П., Андрианова О.Г., Белов А.А., Гольдин Д.А.* Между $LQG/\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ теориями управления // Автоматика и телемеханика. No. 4, 8–76, 2021.

Статьи в сборниках конференций WoS/Scopus

18. *Andrianova O., Belov A.* Anisotropy-based bounded real lemma for linear discrete-time descriptor systems. // Proceedings of the 19th International Conference on Process Control. Shtrbske Pleso, Slovakia: University of Pardubice, pp. 57–62, 2013.

19. *Belov A., Andrianova O.* Computation of anisotropic norm for descriptor systems using convex optimization // Proceedings of the 19th International Conference on Process Control. Shtrbske Pleso, Slovakia: University of Pardubice, pp. 173–178, 2013.

20. *Andrianova O., Kurdyukov A., Belov A., Kustov A.* Anisotropy-based analysis for descriptor systems with nonzero-mean input signals. // Proceedings of 13th European Control Conference (ECC14). Strasbourg, France: EUCA, pp. 430–435, 2014.

21. *Andrianova O.G., Belov A.A.* A Riccati equation approach to anisotropy-based control problem for descriptor systems: state feedback and full information cases // Proceedings of the European Control Conference (ECC-2015, Linz, Austria). Linz: European Control Association (EUCA), 2015. C. 3231–3236.

22. *Andrianova O., Belov A.* Anisotropy-based analysis for descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties. // Proc. of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia. pp. 1–4, 2016.

23. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Suboptimal anisotropy-based control design for discrete-time systems with nonzero-mean input disturbances // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). M.: IEEE, 2016. C. 1–4.

24. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On Anisotropy-Based Control Problem with Regional Pole Assignment for Descriptor Systems // Proceedings of the 21st International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2017). Strbske Pleso, Slovakia: IEEE, 2017. C. 12–17.

25. *Boichenko V.A., Belov A.A.* On Stochastic Gain of Linear Systems with Nonzero Initial Condition // Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017, Valletta, Malta). Valletta, Malta: IEEE, 2017. C. 817–821.

26. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Suboptimal anisotropy-based control for linear discrete-time systems with norm-bounded uncertainties // Proceedings of the 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2018, Moscow). M.: IEEE, 2018. C. 1–4.

27. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On Optimal Anisotropy-Based Control Problem for Discrete-Time Descriptor Systems // Proceedings of the 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018, Zadar, Croatia). Zadar: IEEE, 2018. C. 661–666.

28. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Non-Iterative Solution to Robust Anisotropy-Based Analysis and Control Problems for Uncertain Descriptor Systems / Proceedings of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019). New York: IEEE, 2019. C. 455–460.

29. *Andrianova O.G., Belov A.A.* On Robust Performance Analysis of Linear Systems with Polytopic Uncertainties Affected by Random Disturbances / Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland). New York: IEEE, 2019. C. 1–6 https://ieeexplore.ieee.org/document/8766038.

30. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Sensor Fault Estimation for Discrete-Time Systems in Presence of Correlated Noise with Anisotropy-Based Quality Criterion // Proceedings of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019). New York: IEEE, 2019. C. 355-360.

31. *Belov A.A.* Improved Fault Detection and Estimation Filter Design Using Anisotropy-Based Approach // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia). New York: IEEE, 2020. C. 638–643.

32. *Iureva R.A., Belov A.A., Margun A.A., Kremlev A.S.* Electric Drive Attack Detection Based on State Observers // Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland). New York: IEEE, 2019. C. 1–5 https://ieeexplore.ieee.org/document/8766015.

33. *Belov A.A.* Random Disturbance Attenuation in Discrete-time Polytopic Systems: Performance Analysis and State-Feedback Control // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia). Saint Petersburg: IEEE, 2020. C. 633–637.

Прочие публикации

34. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Анизотропийная норма дескрипторной системы. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XII международного семинара, Москва, С. 46 - 48, 2010.

35. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Линейные дескрипторные системы дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2011. – 90 с.

36. *Белов А.А.* Решение задачи анизотропийного управления дескрипторной системой по выходу // Труды 5-й Российской мультиконференции по проблемам управления, конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург). СПб.: ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор 2012. С. 276-279.

37. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Анизотропийный анализ дескрипторных систем с использованием ЛМН // Труды 11-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2014, Арзамас). Арзамас: ИПУ РАН, 2014. С. 33-45.

38. *Белов А.А., Андрианова О.Г., Гольдин Д.А.* Анизотропийная частотная теорема для линейных дискретных систем с политопическими неопределенностями // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 325-329.

Личный вклад соискателя в публикациях. В публикациях, выполненных в соавторстве: в [1, 2, 35] автором проведен анализ существующих методов управления в дескрипторных системах, поставлены и решены задачи анализа и синтеза анизотропийных регуляторов для дескрипторных систем; в [3, 34, 37] решена задача анизотропийного анализа дескрипторной системы, проведено численное моделирование на примере; в [5, 6] получена методика синтеза субоптимального анизотропийного регулятора, проведен вычислительный эксперимент; в [7, 8, 9, 22, 26] разработаны методы синтеза робастных анизотропийных и $\mathcal{H}_\infty$ регуляторов для дескрипторных систем, проведены вычислительные эксперименты; в [10] получены необходимые условия идентифицируемости параметров линейной дискретной системы с заданной скоростью сходимости, проведен вычислительный эксперимент; в [11, 18] доказаны условия анизотропийной частотной теоремы для дескрипторных систем в терминах уравнений Риккати; в [12] разработан метод синтеза робастного анизотропийного регулятора с ограничением на область расположения конечных полюсов замкнутой системы, проведен численный эксперимент; в [13] разработаны алгоритмы оценки верхней границы анизотропийной нормы обыкновенной и дескрипторной системы, проведены численные эксперименты; в [14] получены необходимые и достаточные условия идентифицируемости линейной стационарной системы; в [15] получена методика синтеза робастного анизотропийного регулятора по состоянию, разработана методика синтеза γ-оптимальных регуляторов, проведены вычислительные эксперименты; в [17] проведен анализ существующих подходов анизотропийной теории к решению задач управления; в [19] разработана методика вычисления анизотропийной нормы допустимой дескрипторной системы; в [20] получены формулы для анизотропийной нормы дескрипторной системы с нецентрированными возмущениями в частотной области; в [21] получены методики синтеза субоптимального управления по состоянию на основе техники Риккати, проведен вычислительный эксперимент; в [23] разработан алгоритм синтеза субоптимального анизотропийного регулятора для нецентрированных входных возмущений; в [24] получены условия синтеза модального анизотропийного регулятора, проведен численный эксперимент; в [25] получены условия на вычисление стохастического коэффициента линейной системы, проведен численный эксперимент; в [27] получены условия для синтеза оптимального анизотропийного регулятора по состоянию; в [30, 32] разработана методика синтеза наблюдателя отказов и проведен численный эксперимент; в [29, 38] разработан алгоритм вычисления анизотропийной нормы политопической системы, проведен численный эксперимент.