

**Российская академия наук**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ**  
**Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН**

На правах рукописи

**ТРУШКОВА**  
Екатерина Александровна

**Итерационные методы оптимизации управления на основе  
принципа расширения и достаточных условий оптимальности**

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук  
по специальности 05.13.01 — Системный анализ, управление и  
обработка информации (в отраслях информатики,  
вычислительной техники и автоматизации)

Научный консультант  
д-р технических наук, профессор  
Гурман В.И.

**Москва, 2013**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
ГЛАВА 1. Основные сведения из теории достаточных условий оптимальности	17
1.1 Общая задача оптимизации и улучшения. Принцип расширения.	17
1.2 Оптимальное управление непрерывными системами . . . . .	19
1.3 Оптимальное управление дискретными системами . . . . .	26
ГЛАВА 2. Преобразования модели объекта	30
2.1 Расширяющие преобразования систем с управлением . . . . .	30
2.1.1 Некоторые конструктивные схемы . . . . .	33
2.1.2 Преобразование к линейной системе и приложение к оценива- нию множеств достижимости . . . . .	37
2.1.3 Преобразование к системам с линейным управлением . . . . .	42
2.2 Использование достаточных условий оптимальности . . . . .	43
2.3 Аппроксимация моделей с неполным аналитическим описанием .	49
2.4 Преобразования, приводящие к дискретно–непрерывным системам	52
2.5 Схема приближенного исследования задач управления . . . . .	57
2.6 Выводы к главе 2 . . . . .	64
ГЛАВА 3. Оптимизация управления на основе минимаксного принципа	66
3.1 Дискретные системы . . . . .	66
3.2 Непрерывные системы . . . . .	72
3.3 Улучшение для систем с линейным неограниченным управлением	79
3.4 Приближенный синтез управления на основе метода улучшения .	82
3.5 Выводы к главе 3 . . . . .	87
ГЛАВА 4. Методы и алгоритмы приближенной оптимизации управления	89

4.1	Улучшение с использованием принципа локализации . . . . .	89
4.2	Методы улучшения . . . . .	91
4.2.1	Методы первого типа . . . . .	91
4.2.2	Методы второго типа . . . . .	96
4.2.3	Метод улучшения простой аппроксимации скользящего режима	100
4.3	Итерационные методы в задачах с фазовыми ограничениями . .	105
4.4	Метод приближенно–оптимального синтеза управления в окрестности заданной траектории . . . . .	108
4.5	Выводы к главе 4 . . . . .	112
ГЛАВА 5. Задачи оптимизации управления в квантовых системах		114
5.1	Улучшение управления в одном классе гамильтоновых систем . .	115
5.1.1	Управление передачей возбуждения в спиновой цепочке . . . .	119
5.1.2	Преобразование к производной системе . . . . .	126
5.2	Управление квантовой системой с дискретным спектром . . . . .	142
5.3	Выводы к главе 5 . . . . .	144
ГЛАВА 6. Другие приложения		147
6.1	Оптимизация маневров нештатной посадки вертолета . . . . .	147
6.2	Исследование стратегий устойчивого развития на социо-эколого-экономической модели региона . . . . .	160
6.2.1	Программно-алгоритмический инструментарий . . . . .	164
6.2.2	Тестовые расчеты . . . . .	171
6.3	Динамическое распределение ресурсов . . . . .	181
6.4	Выводы к главе 6 . . . . .	196
Заключение		201
Приложение		203
Список использованных источников . . . . .		216

## Введение

Приближенные и вычислительные методы — обширная и ставшая самостоятельной областью исследований и разработок в теории оптимального управления, нацеленных на эффективное решение практических задач. Основные исследования и разработки приближенных методов группируются главным образом вокруг численной реализации известных теоретических результатов: принципа максимума Понтрягина, метода динамического программирования Беллмана, принципа оптимальности Кротова и общей теории экстремума Милютина-Дубовицкого, их обобщений и аналогов для различных постановок, учитывающих разнообразные практические ситуации. Основы этой теории широко освещены в литературе (Р. Беллман [8]; А. М. Летов [78]; Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко [91]; В. Ф. Кротов [65]; А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин [55]; Н. Н. Красовский [62], [63]; В. Г. Болтянский [13], [14]; Н. Н. Красовский, А. И. Субботин [64]; А. Б. Куржанский [76]; Р. Габасов, Ф. М. Кириллова [24]; и др.).

Несмотря на то, что теоретические результаты учитывали особенности современных задач управления, главным образом, наличие разнообразных ограничений в дополнение к основным — дифференциальным — связям в вариационном исчислении, их прямое практическое использование оказалось весьма ограниченным сложностями реализации теоретических соотношений, описывающих искомое решение получаемых уравнений. Как правило, аналитическое решение можно было найти лишь в редких случаях, если не считать специально подобранных примеров. Это послужило причиной для разработки приближенных методов, позволяющих решать сложные практические задачи. За прошедший с момента их появления полувековой период было предложено множество разнообразных приближенных, численных методов, позволяющих искать оптимальное решение напрямую, минуя условия оптимальности, посредством операций улучшения управления, повторяемых

в итерационной процедуре. При этом косвенно использовались как сами основополагающие результаты, так и принципы, лежащие в их основе.

Исторически развитие методов улучшения началось с методов первого порядка, известных как градиентные методы, одновременно с созданием современной теории оптимального управления. В числе основоположников отметим Р. Куранта [128], Д. Е. Охоцимского и Т. М. Энеева [88], [89], Л. В. Канторовича [58], Л. И. Шатровского [116], Дж. Келли [60]. Более сложные схемы требуются при наличии ограничений на переменные управления и состояния. Здесь можно отметить, например, работы Р. П. Федоренко [110], [111] и В. Г. Гюрджиева [54]. Наряду с этим реализовались и другие методы, родственные градиентным, основанные на принципе максимума Понтрягина (И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько [74], [75]; О. В. Васильев, А. И. Тятюшкин [22]). Ряд интересных схем предложен в книге Н. Н. Моисеева [82]. Для поиска управления в форме синтеза весьма эффективным оказался метод моментов (Н. Н. Красовский [62], [63]; Р. Габасов, Ф. М. Кириллова [23]).

Методы первого порядка демонстрируют, как правило, высокую эффективность на первых итерациях и ее резкое снижение в окрестности оптимума. Это заставило обратиться к более сложным схемам построения алгоритмов и разработке методов второго порядка (Д. Х. Джекобсон [131]; В. Ф. Кротов, И. Н. Фельдман [72]; Р. Анрион [5]). Одно из направлений в этой области базируется на достаточных условиях оптимальности Кротова (В. Ф. Кротов, В. И. Гурман [70], В. Ф. Кротов [133]) и принципе расширения Гурмана (В. И. Гурман [31]), отличающимися значительным многообразием подходов и результатов. Они связаны с тейлоровской аппроксимацией функции Беллмана и условий Беллмана в окрестности текущего приближения с точностью до малых второго порядка, что приводит к дифференциальным уравнениям для первых и вторых производных функции Беллмана. Ряд таких методов как для непрерывных, так и для дискретных систем приведен в работах В. И. Гурмана, В. А. Батурина, И. В. Расиной [35], В. И. Гурмана, И. В. Ра-

синой, В. А. Батурина, Е. В. Данилиной [41], В. И. Гурмана, В. А. Батурина, Е. В. Данилиной и др. [36]. Иначе получаются методы сильного улучшения. Такого типа методы представлены в работах В. Ф. Кротова, И. Н. Фельдмана [72], В. И. Гурмана, И. В. Расиной [40], В. И. Гурмана [31]. В основном, это различные итерационные процедуры улучшения управления, как и в других школах. Спецификой является априорно приближенный подход, возможность оценивания получаемых приближенных решений и использование характерного свойства вырожденности прикладных задач и соответствующих специальных методов для поиска начальных приближений, что, как известно, является критическим моментом при использовании итерационных улучшающих алгоритмов.

Были также инициированы работы по исследованию сложных (гибридных) процессов. В работе А. Г. Орлова, И. В. Расиной [87] впервые построен для сложных процессов метод улучшения второго порядка, в статье И. В. Расиной [92] приведены достаточные условия оптимальности, как в форме Кротова, так и в форме Беллмана. Сочетание этих условий и специальное преобразование части приращения функционала позволило построить алгоритм второго порядка, содержащий меньшее число сопряженных переменных на каждом этапе по сравнению с более ранними вариантами метода. Также в работах И. В. Расиной [93], [94] рассматривались достаточные условия оптимальности для сложных процессов с параметрами и процессов с запаздыванием по состоянию. Для последних получен алгоритм градиентного типа. Иные подходы к оптимизации сложных процессов как процессов в логико-/динамических системах развиваются в работах С. Н. Васильева, А. К. Жерлова, Е. А. Федосова, Б. Е. Федунова [20] и А. С. Бортакковского, А. В. Пантелеева [15]).

В конце 1980-х, в 1990-ые годы и в первые годы 21-го века, с одной стороны шла шлифовка разработанных методов, а с другой продолжался процесс создания новых алгоритмов по ранее рассмотренным направлениям. В

монографии О. В. Васильева, А. В. Аргучинцева [21] наряду с методами решения экстремальных задач подробно освещаются итерационные процессы, основанные на принципе максимума. Большое внимание уделено градиентным методам и задаче с дополнительными функциональными ограничениями. Широкий спектр методов и их приложения для решения практических задач представлены в работах В. А. Батурина, В. И. Гурмана, В. А. Дыхты [6], В. А. Батурина, Д. Е. Урбановича [7], А. В. Лотова, В. А. Бушенкова, Г. К. Каменева [135], А. В. Лотова, И. И. Поспеловой [79], В. В. Салмина, С. А. Ишкова, О. Л. Стариновой [95], В. В. Токарева [98].

Своеобразным итогом и обобщением многолетних исследований достаточных условий оптимальности и методов улучшения, построенных на базе достаточных условий оптимальности, служит монография В. Ф. Кротова [133], где в частности описан общий метод глобального улучшения управления и его конкретная реализация с линейной разрешающей функцией, оказавшаяся особенно эффективной в приложении к управлению квантовыми системами. Родственные методы улучшения, называемые нелокальными, описаны в книге В. А. Срочко [96]. Эти методы развиваются в работах А. С. Булдаева [17], [18]. В настоящее время появляется все больше европейских работ, предлагающих применять теорию оптимального управления (а именно, метод глобального улучшения управления Кротова) к задачам управления различными квантовыми системами (S. E. Sklarz, D. J. Tannor [142]; C. P. Koch, J. P. Palao, R. Kosloff, F. Masnou-Seeuws [132]; J. P. Palao, R. Kosloff, C. P. Koch [139]; I. I. Maximov, J. Salomon, G. Turinici, N. C. Nielsen [137]; M. Murphy, S. Montangero, V. Giovanetti, T. Calarco [136]; S. G. Schirmer, P. Fouquieres [141]; D. M. Reich, M. Ndong, C. P. Koch [140] и др.). Было отмечено, что метод Кротова не испытывает особых трудностей на больших размерностях и позволяет решать задачи управления квантовыми системами с высокой точностью.

В тоже время повысился интерес к дискретизации непрерывных систем –

переходу от непрерывной модели к дискретной на ранних стадиях исследования задачи, а не в конце, при численном интегрировании конечных дифференциальных соотношений оптимального процесса. Такое преобразование модели управляемой системы позволяет обойти обременительные теоретико-функциональные требования в применяемых схемах аппроксимации и оценках приближенных решений. Кроме того, в терминах постановки дискретной задачи оптимального управления и соответствующих достаточных условий возможна интерпретация самых разнообразных задач. Эти вопросы затрагивались в работах В. И. Гурмана [30], [31], В. А. Батурина и Д. Е. Урбановича [7]. Дискретные модели естественно используются для применения развитых методов нелинейного программирования к решению ряда задач оптимального управления (Ю. Г. Евтушенко [56]; Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, А. И. Тятюшкин [25]; А. Ю. Горнов [27]).

Как правило, исходная математическая модель, соответствующая изучаемой практической проблеме, оказывается сложной или даже нерегулярной с точки зрения общих методов решения, и даже с точки зрения приближенных методов. Так исходная математическая модель может содержать неучтенные и незаметные на первый взгляд резервы, позволяющие с помощью преобразования исходной модели объекта заменить ее приближенно или точно более простой с точки зрения поиска решения задачей. Подобный подход к решению сложных задач издавна неявно применялся в теории экстремальных задач, например, в виде известного метода множителей Лагранжа и его современных модификациях. В теории оптимального управления он получил новое развитие в работах по достаточным условиям оптимальности М. М. Хрусталева [112], [113], В. Ф. Кротова и его последователей. Он оказался весьма эффективным для приложений, что было подтверждено рядом новых точных и приближенных методов, отмеченных выше, и значительным числом решений сложных прикладных задач из различных областей. В основе данного направления лежит принцип расширения, наиболее полно исследован-



ный и освещенный в работах В. И. Гурмана. В них активно развивались как идеи принципа расширения для абстрактной задачи об оптимуме, так и эффективные конкретные методы решения распространенных на практике так называемых «вырожденных задач» — задач, в которых отсутствует искомый оптимальный режим в классе сравниваемых, или присутствует множественность решений, отвечающих необходимым условиям оптимальности, или неприменимы известные достаточные условия оптимальности. При этом в конструктивном плане использовались как непосредственные аппроксимации решений уравнения Беллмана и его аналогов, так и эффективные косвенные методы, использующие активные преобразования модели объекта по принципу расширения, вырожденность и магистральную природу решений прикладных задач (В. И. Гурман, М. Ю. Ухин [51]; Ни Минь Кань, М. Ю. Ухин [86]). В работах А. И. Москаленко были предложены теоремы о совместной оптимальности, которые связаны, с одной стороны, с теорией достаточных условий оптимальности В. Ф. Кротова, а с другой — к методу вектор-функций Ляпунова (В. М. Матросов [80]; В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский, С. Н. Васильев [81]). Теоремы о совместной оптимальности позволяют сводить исходную задачу к более простой, которая именуется задачей сравнения. При этом инструментом преобразования является отображение, заданное парой функций, которые устанавливают соответствие между состоянием, управлением и функционалом исходной задачи и задачи сравнения, т. е. по исходной задаче определяют соответствующую задачу сравнения. Основной трудностью подобного подхода к решению прикладных задач является отсутствие достаточно общих конструктивных методов.

Современные сложные многомерные прикладные задачи (например, задачи управления квантовыми системами, задачи управления, связанные с моделями социо-эколого-экономических систем, и т. п.) диктуют основные требования к методам решения задач управления: упрощение модели объекта, эффективные методы поиска приближенно-оптимальных управлений с

учетом больших размерностей и параллельная программная реализация соответствующих алгоритмов.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является разработка эффективных методов поиска приближенных решений задач оптимального управления, ориентированных на параллельные вычисления, на основе известных ранее и новых преобразований модели объекта управления, достаточных условий оптимальности и глобальных оценок.

Для достижения указанной цели в работе поставлены и решены следующие задачи:

1. Разработать теоретические основы и конструктивные методы упрощающих преобразований модели объекта, которые позволяют заменить исходную задачу семейством более простых задач (в смысле дальнейшего поиска приближенного решения) и тем самым составляют основу методики исследования.

2. Реализовать конструктивно минимаксный принцип Кротова улучшения управления как основу эффективных итерационных методов оптимизации управления.

3. Разработать на основе указанных подходов серию методов и алгоритмов приближенного поиска оптимального управления, ориентированных на параллельные вычисления с соответствующим программным обеспечением.

4. Применить разработанные методы для решения прикладных задач управления из различных областей, в том числе с применением суперЭВМ.

**Методы исследования.** Исследования, выполненные в работе, базируются на достаточных условиях оптимальности и глобальных оценках, принципах расширения и локализации. При алгоритмической и программной реализации использовались различные численные методы аппроксимации функций многих переменных, решения дифференциальных уравнений, нелинейного программирования. При написании компьютерных программ использовался язык программирования C++, при написании параллельных версий

программ использовалась Т-система с открытой архитектурой (OpenTS).

**Научная новизна результатов.** Все основные результаты диссертации являются новыми. Среди них наиболее важные:

- конструктивные методы упрощающих преобразований множества управлений динамической системы как модели объекта посредством расширения, аппроксимации и сужения;

- общая схема приближенного решения задач оптимального управления с использованием указанных и известных ранее преобразований в пространстве состояний, включающая глобальный поиск начального приближения, итерационные процедуры его улучшения и оценки;

- новые методы глобального улучшения управления в составе итерационных процедур на основе минимаксного принципа Кротова, ориентированные на параллельные вычисления.

**Теоретическая и практическая ценность** результатов, полученных в диссертации, заключается в разработке:

- методики приближенного решения задач управления на базе преобразований модели объекта, позволяющей создать гибкое математическое и программное обеспечение, легко адаптируемое к решению конкретных практических задач;

- итерационных процедур, использующих методы глобального улучшения управления, являющихся составной частью общей схемы поиска приближенного решения;

- алгоритмического и программного обеспечения для решения задач управления, позволяющего реализовать предлагаемый подход к поиску приближенных решений в среде параллельных вычислений и тем самым повысить его эффективность при решении различных прикладных задач.

Результаты диссертационной работы используются в Исследовательском центре системного анализа Института программных систем имени А.К. Айламазяна РАН и в лаборатории математических методов исследования

оптимальных управляемых систем Института проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, а также нашли применение при выполнении ряда крупных программ и проектов РФФИ и РГНФ.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, 6 глав основного материала, заключения, приложения и библиографического списка.

**В первой главе** приведены в краткой обзорной форме известные ранее теоретические положения, активно используемые в диссертационной работе, что позволяет сохранить целостный характер изложения дальнейшего материала.

**Вторая глава** посвящена различным преобразованиям модели объекта по принципу расширения или сужения области поиска решения, направленным на упрощение исходной задачи с точки зрения ее решения разрабатываемыми методами. Подобный подход расширяет возможности предварительного анализа задачи с применением эффективных специальных методов и процедур. Рассмотрены возможные конструктивные схемы реализации подобных преобразований. Подобные упрощения ориентированы на получение грубых приближений к глобальному решению с двусторонними оценками и на построение эффективных итерационных методов их улучшения.

Основное внимание уделяется эффективным нетрадиционным расширяющим преобразованиям правых частей дифференциальных динамических систем и, соответственно, множеств переходов дискретных систем. Предложены преобразования типа аппроксимации правой части дифференциальных уравнений в рабочей области выбранной аналитической конструкцией, что наиболее актуально в случае, когда исходная задача не имеет полного или достаточно простого аналитического описания. Также представлены сужающие преобразования, ограничивающие поиск решений в классах кусочных управлений с заданными базовыми функциями, что позволяет свести исходную задачу к дискретно-непрерывной задаче оптимального управления, которая

в непрерывной части не содержит управляющих функций.

На основе представленных преобразований предложена методика приближенного решения задач управления на основе общей схемы, которая является априорно приближенным подходом к исследованию задач управления в отличие от численных методов реализации теоретических результатов. Она хорошо согласуется с естественными допущениями при постановке прикладных задач, их особенностями и зарекомендовавшими себя разнообразными методами и приемами их математического исследования, что существенно расширяет возможности приближенного исследования задач управления, прежде всего — оптимального. Общая схема исследования ориентирована на реализацию в среде параллельных вычислений, т. к. заключается в поиске приближенных решений различными предложенными методами самостоятельных задач преобразованных семейств.

**В третьей главе** сформулирован общий подход к нелокальному улучшению управления на основе минимаксного принципа В. Ф. Кротова. Предлагаются новые конструктивные методы задания разрешающей функции посредством задачи Коши для линейного уравнения в частных производных в случае непрерывных систем и аналогичных рекуррентных соотношений для дискретных систем. Предложенные методы глобального улучшения не содержат, в отличие от других методов, ряда настроечных параметров, что существенно упрощает программную реализацию соответствующих алгоритмов.

Важное место занимает модификация метода глобального улучшения для систем с импульсными управляющими воздействиями, применяемая для прикладных задач управления квантовыми системами.

**В четвертой главе** представлены различные методы и алгоритмы, реализующие сформулированные выше подходы. Среди них методы улучшения управления, построенные по принципу локализации на основе аппроксимации общих уравнений метода глобального улучшения в окрестности траектории текущего приближения, как для систем общего вида, так и для важных

частных случаев.

Среди них метод для задач с частично закрепленным правым концом, метод с автоматическим подбором штрафных параметров для задач с фазовыми ограничениями. Приводятся соответствующие алгоритмы и вычислительные схемы двух типов, исследуется возможность их параллельной реализации. В схемах первого типа используется грубое приближение производных их разностными аналогами и параллельность по текущим параметрам, в схемах второго типа используется метод наименьших квадратов и его параллельная версия.

**В пятой главе** рассмотрен **актуальный класс квантовых систем с управлением**. С помощью разработанной модификации метода глобального улучшения решен ряд тестовых задач, и прикладные задачи высокой точной передачи одиночного возбуждения вдоль открытой цепочки с конечным числом спинов  $1/2$ , регулируемой с помощью изменяющегося во времени внешнего магнитного поля [136] и вращения плоской молекулы [126].

На основании полученных результатов можно заключить, что разработанная новая модификация метода глобального улучшения управления позволяет проводить расчеты для задач большой размерности со значительным сокращением расчетного времени при переходе к параллельной версии программы.

**В шестой главе** приведено решение других прикладных задач управления различной природы, демонстрирующее эффективность разработанных методов улучшения управления и представленной схемы приближенного исследования задач управления на основе преобразования модели объекта.

Так, с помощью разработанной методики приближенного решения задач управления проведено **исследование маневров безопасной нештатной посадки вертолета с определением нижней границы безопасной зоны** [38]. Расчеты проводились на модели динамики вертолета которая использовалась на фирме «КАМОВ» для исследования взлетно-посадочных

режимов. Модель не имеет полного аналитического описания, частично задана лишь компьютерными программами расчета, что заставило применить полиномиальные аппроксимации.

Полученная нижняя граница опасной зоны для одного из из рассмотренных сценариев нештатной ситуации представлена в виде графика зависимости горизонтальной скорости от высоты. Эти результаты позволили сделать вывод о повышении границы опасной зоны на 15% против начального приближения при сохранении качественного характера динамики управлений и состояния.

Разработаны параллельные алгоритмы оптимизации управления и соответствующий программный комплекс DSEEmodel 1.0 последней версии **социо-эколого-экономической модели региона**, учитывающей инновации, наиболее сложной из создаваемых с середины 1970-х годов под руководством В. И. Гурмана в Сибирском отделении Академии наук. Он снабжен удобным пользовательским интерфейсом, позволяющим оперировать сложными наборами данных при проведении многовариантных расчетов, связанных с разработкой стратегий устойчивого развития региона.

Исследована **задача автоматического управления аппаратными ресурсами**, с учетом ценности выделенных компьютерному приложению ресурсов (например, количества виртуальных машин, оперативной памяти, доли физического процессора, предоставляемых виртуальной машине и т. п.). Была построена математическая модель для системы, состоящей из  $n$  приложений, использующих один первичный ресурс и  $m$  различных категорий вторичных (зависимых от первичного) ресурсов и реализован соответствующий оптимизационный алгоритм. Результаты показывают, что при различных пользовательских нагрузках алгоритм дает устойчиво хорошее динамическое перераспределение ресурсов с учетом поддержания характеристик на целевом уровне.

**В заключении** подведены итоги проведенных исследований в виде пе-

речисления основных результатов и выводов.

**В приложении** дается описание особенностей программной реализации алгоритмов для работы с задачами оптимального управления динамическими системами, включая разрабатываемый в настоящее время в ИПС имени А.К. Айламазяна РАН программный комплекс (ПК) ISCON (Improvement and Synthesis of Control). Комплекс предназначен для моделирования сложных динамических процессов, а также решения оптимизационных задач и задач улучшения управления для различных прикладных областей на кластерном вычислительном устройстве. Особое внимание уделяется распараллеливанию вычислительных алгоритмов. Все параллельные алгоритмы, представленные в диссертационной работе, реализованы в рамках T-системы с открытой архитектурой (OpenTS) на языке программирования T++. T-система — система параллельного программирования, реализующая концепцию автоматического динамического распараллеливания программ, оригинальная российская разработка, выполненная под руководством С. М. Абрамова [1], [2], [3]. T-система автоматически (без участия программиста) выполняет распараллеливание фрагментов кода в программе, планировку вычислений, синхронизацию параллельных фрагментов кода, обмен данными между фрагментами программы и распределение данных по различным узлам кластера.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность научному консультанту д.т.н., профессору В. И. Гурману за внимание к работе, полезные замечания и советы.



# ГЛАВА 1

## Основные сведения из теории достаточных условий оптимальности

В этой главе представлена математическая постановка задачи оптимального управления непрерывными и дискретными системами в общем виде и приведены в краткой обзорной форме известные теоретические положения, активно используемые в диссертационной работе что позволяет сохранить целостный характер изложения дальнейшего материала, единство терминологии и создает значительные удобства при чтении работы.

### 1.1 Общая задача оптимизации и улучшения. Принцип расширения.

Пусть на некотором множестве  $\mathbf{M}$  с элементами  $m$  задан функционал  $I : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . С помощью дополнительных условий и ограничений задано множество  $\mathbf{D} \subset \mathbf{M}$ , называемое *допустимым множеством*.

Задача оптимизации: требуется найти минимизирующую последовательность  $\{m_s\} \subset \mathbf{D} : I(m_s) \rightarrow \inf I$ .

Принцип расширения состоит в том, чтобы заменить исходную задачу оптимизации со сложными ограничениями, другой, более простой задачей, где исключены те или иные связи, но такой чтобы ее решение удовлетворяло отброшенным связям и совпадало с решением исходной задачи [70]. Более точно, вводится множество  $\mathbf{E}$ , содержащее  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ . Вводится новый функционал  $L : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что на множестве  $\mathbf{D}$   $L(m) \leq I(m)$ , в частности,  $L$  совпадает с  $I$ .

**Лемма 1.1.** ([70]) Пусть имеется последовательность расширений

$\{(\mathbf{E}, L)_\beta\}$ , удовлетворяющая условиям

$$\mathbf{E}_\beta \supset \mathbf{D}, \quad L_\beta(m) \leq I(m), \quad m \in \mathbf{D},$$

последовательность нижних границ  $\{l_\beta\}$ ,  $l_\beta \leq L_\beta(m)$  на  $\mathbf{E}_\beta$ , и последовательность  $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ , такие что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} I(m_s) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} l_\beta. \quad (1.1)$$

Тогда последовательность  $\{m_s\}$  — минимизирующая в задаче  $(\mathbf{D}, I)$ , и любая  $(\mathbf{D}, I)$ –минимизирующая последовательность удовлетворяет условию (1.1).

Очевидно, для любого  $m \in \mathbf{D}$  справедлива оценка

$$\Delta(m) = I(m) - L(m) \geq 0.$$

Принцип расширения родственен принципу сравнения В. М. Матросова [80], при исследовании различных свойств систем. К задачам оптимального управления был применен А. И. Москаленко в форме теорем о совместной оптимальности, где наряду с исходной задачей фигурирует задача сравнения. Во введенных выше абстрактных терминах  $(\mathbf{D}, I)$  — исходная задача,  $(\mathbf{E}, L)$  — задача сравнения.

Задача улучшения: задан элемент  $m^I \in \mathbf{D}$ , требуется найти элемент  $m^{II} \in \mathbf{D}$ , на котором  $I$  меньше, т. е.  $I(m^{II}) < I(m^I)$ . Решая эту задачу последовательно, можно получить улучшающую, в частности, минимизирующую последовательность  $\{m_s\}$ .

Для решения взаимосвязанных задач оптимизации и улучшения управления применяются принципы расширения и локализации. Принцип расширения переформулировывается здесь очевидным образом: пусть имеется расширение  $(\mathbf{E}, L)$  и элементы  $m^I \in \mathbf{D}$  и  $m^{II} \in \mathbf{E}$ , удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{E} \supset \mathbf{D}, \quad L(m) = I(m), \quad m \in \mathbf{D},$$

$L(m^{II}) < L(m^I)$ ,  $m^{II} \in \mathbf{D}$ . Тогда  $I(m^{II}) < I(m^I)$ .

Принцип локализации [31] состоит в том чтобы сводить задачу улучшения к задаче оптимизации в окрестности известного элемента  $m^I$ . Для того чтобы решение не вышло из заданной окрестности, надо локализовать задачу, добавив с определенным весом к  $I$  функционал  $J$  типа нормы, такой что

$$J(m^I, m^I) = 0, \quad J(m^I, m) > 0, \quad m \neq m^I.$$

Получается вспомогательный функционал

$$I_\alpha(m) = (1 - \alpha)I(m) + \alpha J(m^I, m), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

При  $\alpha = 1$  рассматриваемый функционал принимает вид  $I_\alpha(m) = J(m^I, m)$ , так что  $m^I = \arg \min I_\alpha(m)$ .

**Лемма 1.2.** Пусть при  $0 < \alpha < 1$  существует  $m_\alpha \neq m^I$  такое, что  $I_\alpha(m_\alpha) = \min I_\alpha(m)$ . Тогда  $I(m_\alpha) < I(m^I)$ .

Таким образом, минимизация вспомогательного функционала  $I_\alpha(m)$  приводит к локальному улучшению исходного функционала  $I$  в сколь угодно малой окрестности  $m^I$ .

Другой вариант — использовать сужение  $\mathbf{U}_\alpha$  множества  $\mathbf{U}$ . Сужения могут задаваться различным образом в зависимости от специфики конкретных задач, например  $\mathbf{U}_\alpha = \mathbf{U} \cap \{u : |u - u^I| \leq \alpha\}$ , и т. п.

В малой окрестности задача может быть заменена приближенно более простой. Решая упрощенную задачу и при этом меняя параметр  $\alpha$ , можно добиться наиболее эффективного улучшения.

## 1.2 Оптимальное управление непрерывными системами

Рассмотрим постановку этой задачи как конкретизацию общей задачи об оптимуме  $(\mathbf{M}, \mathbf{D}, I : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R})$ . За множество  $\mathbf{M}$  примем совокупность всевозможных пар функций  $(x(t), u(t)) = m$ , где  $x^i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , непрерывны и об-

ладают кусочно-непрерывной производной на  $[t_I, t_F]$ , а  $u^j(t)$ ,  $j = \overline{1, p}$ , непрерывны всюду на  $[t_I, t_F]$ , кроме конечного числа точек, где они могут иметь разрывы первого рода. Множество  $\mathbf{D}$  выделяется из  $\mathbf{M}$  следующими связями и ограничениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_I, t_F], \\ x(t_I) &= x_I, \quad x(t_F) \in \Gamma, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t), \quad u(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)), \end{aligned}$$

где  $t_I, t_F, x_I$  фиксированы, функции  $f^i(t, x, u)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , заданы и непрерывны при всех  $t, x, u$ . Требуется найти минимизирующую последовательность  $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ , на которой функционал

$$I(m) = I(x, u) = F(x(t_F)),$$

стремится к своей нижней грани на  $\mathbf{D}$ , т. е.

$$I(m_s) \rightarrow I_* = \inf_{m \in \mathbf{D}} I(m).$$

Для решения воспользуемся принципом расширения. Для этого введем в рассмотрение функцию  $\varphi(t, x)$  непрерывную при всех  $t, x$  и обладающую непрерывными частными производными  $\varphi_t, \varphi_x = (\varphi_{x^1}, \dots, \varphi_{x^n})^T$  при всех  $t, x$ , за исключением конечного числа множеств  $t = \text{const}$  пространства  $(t, x)$ .

Обозначим

$$R(t, x, u) = \varphi_x^T f(t, x, u) + \varphi_t, \quad \mu(t) = \sup_{\substack{u \in \mathbf{U}(t, x), \\ x \in \mathbf{X}(t)}} R(t, x, u),$$

$$G(x) = F(x) + \varphi(t_F, x) - \varphi(t_I, x_I), \quad l = \inf_{x \in \Gamma \cap \mathbf{X}(t_F)} G(x).$$

Функционал  $L$  зададим как

$$L = G(x(t_F)) - \int_{t_I}^{t_F} R(t, x(t), u(t)) dt,$$

а множество  $\mathbf{E}$  получим непосредственно из множества  $\mathbf{D}$ , исключив дифференциальную связь  $\dot{x} = f(t, x, u)$ . Заметим, что  $L = I$  на множестве  $\mathbf{D}$ .

**Теорема 1.1.** (В. Ф. Кротов) Пусть имеются последовательность  $\{x_s, u_s\} = \{m_s\} \subset \mathbf{D}$  и последовательность функций  $\varphi_q(t, x)$ , такие, что

- 1)  $R_q(t, x_s(t), u_s(t)) - \mu_q(t) \rightarrow 0$ , при п.в.  $t \in [t_I, t_F]$ ;
- 2)  $G_q(x_s(t_F)) - l_q \rightarrow 0$ ;
- 3) функции  $\mu_q(t)$  кусочно-непрерывны, а числа  $l_q$  конечны;
- 4) последовательность  $R_q(t, x_s(t), u_s(t))$  ограничена.

Тогда последовательность  $\{m_s\}$  — минимизирующая. При этом справедлива оценка

$$I(m_s) - I_* \leq \Delta_{qs} = L_q(m_s) - l_q + \int_{t_I}^{t_F} \mu_q(t) dt.$$

Эта теорема сводит задачи оптимизации с дифференциальными связями к задаче без таких связей или, более детально, к задачам математического программирования (минимизации  $G(x)$  и максимизации  $R(t, x, u)$  при различных заданных значениях  $t$ ). Далее соотношения 1), 2) этой теоремы будем называть *соотношениями достаточных условий оптимальности*, а соответствующую функцию  $\varphi(t, x)$  — *разрешающей функцией*.

Можно «прочитать» теорему несколько иначе. А именно, любой заданной  $\varphi \in \Phi$  отвечают определенные построения функции  $R(t, x, u)$  и  $G(x)$  и соответственно значения  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{u}(t)$ , доставляющие максимум  $R$  и минимум  $G$  (для наглядности будем считать, что они существуют). Соответствующий набор  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  (может быть не единственный) зависит от выбранной функции  $\varphi$ , т. е.  $\tilde{m} = \tilde{m}(\varphi)$ . Он заведомо «обеспечивает» точные границы  $\mu(t)$  и  $l$  функций  $R$  и  $G$ , но в общем случае не обязан принадлежать множеству  $\mathbf{D}$ , т. е. быть допустимым. Разрешающей является функция  $\varphi$ , для которой найдется  $\tilde{m}$ , который оказывается допустимым ( $\tilde{m} \in \mathbf{D}$ ), либо может быть приближен сколь угодно точно некоторой последовательностью  $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ .

Непосредственной конкретизацией теоремы 1.1 может служить способ задания  $\varphi$ , который приводит к известным соотношениям метода динамического программирования Р. Беллмана [8].

Пусть  $x(t_F) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{X}(t) = \mathbb{R}^n$ . Построим при каждом  $x(t)$  функцию

$$\mathcal{R}(t, x) = \sup_{u \in \mathbf{U}(t, x)} R(t, x, u).$$

Функцию  $\varphi$  зададим так, чтобы

$$\mathcal{R}(t, x) = 0, \quad t \in [t_I, t_F], \quad G(x) = -\varphi(t_I, x(t_I)).$$

Подробнее

$$\sup_{u \in \mathbf{U}(t, x)} \varphi_x f(t, x, u) - \varphi_t = 0, \quad \varphi(t_F, x) = -F(x). \quad (1.2)$$

Это задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка.

Пусть решение  $\varphi(t, x)$  этой задачи существует. Обозначим через  $\tilde{u}(t, x)$  значение управления, при котором

$$R(t, x, \tilde{u}(t, x)) = \mathcal{R}(t, x) = 0,$$

а через  $x_*(t)$  — решение системы

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I.$$

Тогда элемент  $m_* = (x_*(t), u_*(t) = \tilde{u}(t, x_*(t)))$  и функция  $\varphi$  удовлетворяют условиям теоремы 1.1.

Функция  $\tilde{u}(t, x)$  определяет оптимальное управление с обратной связью или, иначе — *синтез оптимального управления*.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления с линейным управлением вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u) = g(t, x(t), u_1) + h(t, x(t))u_2, \quad t \in [t_I, t_F], \\ u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^p, \quad u_1(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^{p-k}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad x(t_F) \in \Gamma, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, t \in (t_I, t_F), \\ I &= F(x(t_F)) \rightarrow \inf. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выпишем функции  $R(t, x, u)$  и  $G(x)$  (1.3).

$$R(t, x, u_1, u_2) = \varphi_x^T (g(t, x, u_1) + h(t, x)u_2) + \varphi_t,$$

$$G(x) = F(x) + \varphi(t_F, x) + \text{const.}$$

Функцию  $\varphi(t, x)$  зададим так, чтобы  $R(t, x, u_1, u_2)$  не зависела от  $u_2$ , т. е.

$$\varphi_x^T h(t, x) = 0. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) представляет собой систему уравнений в частных производных относительно функции  $\varphi$  и называется *системой кратных максимумов*. Как известно, при условии совместности общим решением этой системы является произвольная непрерывная и дифференцируемая функция

$$\varphi = \tilde{\varphi}(t, y)$$

где  $y = \eta(t, x) = (\eta^1, \dots, \eta^{n-k})$  — совокупность независимых первых интегралов обыкновенной дифференциальной системы

$$\frac{dx}{d\tau} = h(t, x)u_2$$

называемой *предельной системой*. Предельная система характеризует поведение исходной системы при больших значениях неограниченного управления  $|u_2|$ , так что любая ее траектория может быть аппроксимирована траекториями исходной системы с любой точностью при достаточно большом  $|u_2|$ . Примем  $t, x$  в качестве новых аргументов функции  $\tilde{\varphi}$ , т. е.

$$\tilde{\varphi}(t, y) = \tilde{\varphi}(t, \eta(t, x)) = \varphi(t, x).$$

Функции  $R$  и  $G$  преобразуются к следующим:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(t, y, x, u_1) &= \tilde{\varphi}_y^T (\eta_x^T g(t, x, u_1) + \eta_t) + \tilde{\varphi}_t, \\ \tilde{G}(y) &= \min_{x \in \Gamma \cap \mathbf{Q}(t_F, y)} F(x) + \tilde{\varphi}(t_F, y) + \text{const}, \\ \mathbf{Q}(t, y) &= \{x : y = \eta(t, x)\}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Задача теперь сводится к исследованию на максимум функции  $\tilde{R}$  при каждом фиксированном  $t$  на множестве точек  $(y, x, u_1)$ , удовлетворяющих условиям

$y = \eta(t, x)$ ,  $u_1(t) \in \mathbf{U}(t, x(t))$ ,  $x(t_I) = x_I$ ,  $x(t_F) \in \mathbf{\Gamma}$ ,  $x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n$ ,  
 $t \in (t_I, t_F)$ .

Выражения (1.5) формально представляют собой функции  $R$  и  $G$  задачи оптимального управления вида

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \eta_x^T g(t, x(t), u_1(t)) + \eta_t, \quad t \in [t_I, t_F], \\ y &= \eta(t, x), \quad u_1(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^{p-1}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad x(t_F) \in \mathbf{\Gamma}, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, t \in (t_I, t_F), \\ y(t_I) &= \eta(t_I, x_I), \\ \tilde{F}(y(t_F)) &= \min_{x \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{Q}(t_F, y(t_F))} F(x) \rightarrow \inf. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь  $y(t)$  — непрерывная, кусочно-гладкая фазовая траектория,  $x(t)$ ,  $u_1(t)$  — кусочно-непрерывные управления.

Задача оптимального управления (1.3) может быть сведена к решению *производной задачи оптимального управления* (1.6), порядок  $n - k$  которой меньше порядка задачи (1.3) [31], а именно, при некоторых общих предположениях любое решение производной задачи аппроксимируется последовательностью решений исходной задачи. Решение  $\hat{x}(t)$  производной системы рассматривается как обобщенное решение исходной системы и называется *импульсным режимом*. Каждый непрерывный участок  $\hat{x}(t)$  назовем *магистралью*, а решение  $\hat{x}(t)$ , состоящее из конечного числа магистралей назовем *магистральным решением*.

Опишем кратко схему построения решения исходной задачи (1.3) в предположении, что задача (1.6) имеет магистральное решение  $(\hat{y}(t), \hat{x}(t), \hat{u}_1(t))$ .

Если  $\hat{x}(t)$  — непрерывная и кусочно-гладкая функция, то подставляя  $(\hat{x}(t), \hat{u}_1(t))$  в одно из уравнений исходной динамической системы (при условии, что при подстановке не получается тривиального соотношения типа  $0 = 0$ ), и разрешая его относительно  $u_2(t)$ , получим функцию  $\hat{u}_2(t)$ . В этом случае, в качестве решения задачи (1.3) можно задать

$$(\hat{x}(t), \hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t)).$$



Если же  $\widehat{x}(t)$  имеет конечное число точек разрыва первого рода (состоит из конечного числа магистралей), то решение задачи (1.3) предлагается строить в виде минимизирующей последовательности, заменяя  $\widehat{x}(t)$  на  $\widetilde{x}_s(t)$ , которая в  $s$ -окрестностях точек разрыва приближается непрерывной функцией, лишь бы соответствующее решение  $(\widetilde{y}_s(t), \widetilde{x}_s(t), \widehat{u}_1(t))$  задачи (1.6) было допустимым. Далее, аналогично вышеизложенному, с помощью уравнений исходной динамической системы для каждого  $(\widetilde{x}_s(t), \widehat{u}_1(t))$  получим функцию  $\widetilde{u}_{2_s}(t)$ . В этом случае, в качестве решения задачи (1.3) можно задать минимизирующую последовательность

$$(\widetilde{x}_s(t), \widehat{u}_1(t), \widetilde{u}_{2_s}(t)).$$

Множество решений задачи (1.6) шире множества решений исходной задачи (1.3), т. к. задаче (1.6) могут удовлетворять даже разрывные функции  $x(t)$ , недопустимые для задачи (1.3). Поэтому решение производной задачи (которую можно решать любым методом) доставляет нижнюю границу  $l$  функционалу в исходной задаче. Но поскольку, как было показано, существует допустимая последовательность  $x_s(t)$ , аппроксимирующая с любой точностью  $x(t)$ , то на этой последовательности  $F(x_s(t_F)) \rightarrow l$ , т. е.  $l$  есть нижняя грань, и тем самым решается исходная задача.

Пусть теперь управление  $u_2$  ограничено и допускает переходы между граничными значениями и ближайшими к ним магистралями и между магистралями за время, достаточно малое по сравнению с  $t_F - t_I$ . Тогда можно говорить о приближенном магистральном решении  $\widetilde{m} \in \mathbf{D}$  с верхней оценкой

$$I(\widetilde{m}) - \inf_{m \in \mathbf{D}} I \leq \Delta = I(\widetilde{m}) - l.$$

### 1.3 Оптимальное управление дискретными системами

Рассмотрим постановку этой задачи как конкретизацию общей задачи об оптимуме  $(\mathbf{M}, \mathbf{D}, I : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R})$ . За множество  $\mathbf{M}$  примем совокупность всевозможных пар функций  $m = (x(t), u(t))$ . Множество  $\mathbf{D}$  выделяется из  $\mathbf{M}$  следующими связями и ограничениями:

$$x(t+1) = f(t, x(t), u), \quad u \in \mathbf{U}(t, x), \quad x \in \mathbf{X},$$

где  $t_I, t_F, x(t_I) = x_I$  фиксированы,  $x(t_F) \in \Gamma$ .

Требуется найти минимизирующую последовательность  $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ , на которой  $I(m_s) \rightarrow I_* = \inf_{\mathbf{D}} I$ .

Будем применять принцип расширения. Введем в рассмотрение следующие конструкции:

$$R(t, x, u) = \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x), \quad (1.7)$$

$$\mu(t) = \sup_{u \in \mathbf{U}(t, x), x \in \mathbf{X}(t)} R(t, x, u),$$

$$G(x) = F(x) + \varphi(t_F, x) - \varphi(t_I, x_I), \quad (1.8)$$

$$l = \inf_{x \in \Gamma \cap \mathbf{X}(t_F)} G(x),$$

$$L = G(x(t_F)) - \sum_{t_I}^{t_F-1} R(t, x(t), u(t)).$$

**Теорема 1.2.** Пусть имеются последовательность  $\{m_s\} \in \mathbf{D}$  и последовательность  $\varphi_q$ , такие что

- 1)  $R_q(t, x_s(t), u_s(t)) - \mu_q(t) \rightarrow 0, \quad t \in \{t_I, \dots, t_F - 1\};$
- 2)  $G_q(x_s(t_F)) - l_q \rightarrow 0.$

Тогда последовательность  $\{m_s\}$  — минимизирующая и любая минимизирующая последовательность удовлетворяет условиям 1), 2). При этом имеет

место оценка

$$I(m_s) - I_* \leq \Delta_{sq} = L_q(m_s) - l_q + \sum_{t_I}^{t_F-1} \mu_q(t).$$

Непосредственной конкретизацией теоремы 1.2 может служить схема Беллмана, аналогичная таковой для непрерывной задачи.

$$\sup_{u \in \mathbf{U}(t,x)} \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) = 0, \quad (1.9)$$

$$G(x) = -\varphi(t_I, x(t_I)). \quad (1.10)$$

Пусть

$$\{u_s(t, x)\} = \arg \sup_{u \in \mathbf{U}(t,x)} R(t, x, u),$$

т. е. последовательность значений  $u(t, x) \in \mathbf{U}(t, x)$  при каждом  $t$  и  $x$  такая что

$$R(t, x, u_s(t, x)) \rightarrow \mathcal{R}(t, x) = 0, \quad t \in \{t_F - 1, \dots, t_I\},$$

а  $x_s(t)$  — последовательность решений системы

$$x(t+1) = f(t, x(t), u_s(t, x(t))).$$

Тогда последовательность  $\{m_s\}$  и функция  $\varphi$  удовлетворяют условиям теоремы 1.2:

$$R(t, x_s(t), u_s(t)) \rightarrow \mu(t) = 0,$$

$$G(x_s(t_F)) \rightarrow -\varphi(t_I, x(t_I)),$$

так что последовательность  $\{m_s\} = \{(x_s(t), u_s(t))\}$  — минимизирующая.

Функция  $u_s(t, x)$  при достаточно большом  $s$  определяет оптимальное управление с обратной связью или, иначе — *синтез оптимального управления* с любой степенью точности.

Так как процедура Беллмана связана с «проклятием размерности», то исследователи пошли по пути классификации задач с учетом их особенностей и развитию методов с учетом типовых задач. Возникли задачи для линейных

систем и линейно-квадратические задачи. С одной стороны, они разрешаются по методу Белмана достаточно просто, а с другой — линейно-квадратические аппроксимации модели объекта описывают поведение моделей в окрестности опорной, желаемой траектории, которую требуется реализовать на практике.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления с линейным управлением вида

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= f(t, x(t), u) = g(t, x(t), u_1) + h(t)u_2, \\
t &\in \{t_I, t_I + 1, \dots, t_F\}, \\
u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^p, \quad u_1 \in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^{p-k}, \quad u_2 \in \mathbb{R}^k \\
x(t_I) &= x_I, \quad x(t_F) \in \mathbf{\Gamma}, \quad x \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (t_I, t_F), \\
F(x(t_F)) &\rightarrow \inf.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Здесь  $h(t)$  —  $n \times k$ -матрица ранга  $k$ .

Выпишем функции  $R(t, x, u)$  и  $G(x)$  (1.11).

$$\begin{aligned}
R(t, x, u_1, u_2) &= \varphi(t+1, g(t, x, u_1) + h(t)u_2) - \varphi(t, x), \\
G(x) &= F(x) + \varphi(t_F, x) + const.
\end{aligned}$$

Положим

$$\varphi(t, x) = \tilde{\varphi}(t, \eta(t)x) = \tilde{\varphi}(t, y), \quad y = \eta(t)x,$$

где  $\eta(t)$  —  $(n-k) \times n$  матрица, удовлетворяющая условию

$$\eta(t+1)h(t) = 0.$$

Функции  $R$  и  $G$  преобразуются к следующим:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(t, y, x, u_1) &= \tilde{\varphi}(t+1, \eta(t+1)g(t, x, u_1)) - \tilde{\varphi}(t, y), \\
\tilde{G}(y) &= \min_{x \in \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{Q}(t_F, y)} F(x) + \tilde{\varphi}(t_F, y) + const, \\
\mathbf{Q}(t, y) &= \{x: y = \eta(t)x\}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Задача теперь сводится к исследованию на максимум функции  $\tilde{R}$  при каждом значении  $t$  на множестве точек  $(y, x, u_1)$ , удовлетворяющих условиям

$$y = \eta(t)x, \quad u_1(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)),$$

$$x(t_I) = x_I, \quad x(t_F) \in \Gamma, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (t_I, t_F).$$

Выражения (1.12) формально представляют собой функции  $R$  и  $G$  задачи оптимального управления вида

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \eta(t+1)g(t, x, u_1), \quad t \in \{t_I, t_I+1, \dots, t_F\}, \\ y &= \eta(t)x, \quad u_1(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^{p-k}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad x(t_F) \in \Gamma, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (t_I, t_F), \\ y(t_I) &= \eta(t_I)x_I, \\ \tilde{F}(y(t_F)) &= \min_{x \in \Gamma \cap \mathbf{Q}(t_F, y(t_F))} F(x) \rightarrow \inf. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Здесь  $y(t)$  — фазовая траектория,  $x(t)$ ,  $u_1(t)$  — управления.

Задача оптимального управления (1.11) может быть сведена к решению *производной задачи оптимального управления* (1.13), порядок  $n - k$  которой меньше порядка задачи (1.11) [31], а именно, любое решение производной задачи аппроксимируется последовательностью решений исходной задачи.

Опишем кратко схему построения решения исходной задачи (1.11) в предположении, что производная задача (1.13) имеет решение  $(\hat{y}(t), \hat{x}(t), \hat{u}_1(t))$ .

Подставляя  $(\hat{x}(t), \hat{u}_1(t))$  в одно из уравнений исходной динамической системы (при условии, что при подстановке не получается тривиального соотношения типа  $0 = 0$ ), и разрешая его относительно  $u_2(t)$ , получим функцию  $\hat{u}_2(t)$ . В качестве решения задачи (1.11) можно положить

$$(\hat{x}(t), \hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t)).$$

## ГЛАВА 2

### Преобразования модели объекта

В этой главе представлены различные виды преобразований модели объекта. Идея преобразования модели неявно существовала давно и нашла отражение, например, в [84, 114]. Здесь построение модели на этапе постановки задачи и ее преобразования, эквивалентные и упрощающие приближенные, рассматриваются как важный активный ресурс при создании методов поиска практически приемлемых решений. На основе общей схемы приближенного исследования задач управления представлена методика, которая заключается в использовании различных преобразований модели объекта на стадиях поиска начального приближенного решения и последующего его уточнения итерационными методами улучшения управления.

#### 2.1 Расширяющие преобразования систем с управлением

Пусть имеется непрерывная система с управлением

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u), \quad t \in \mathbf{T} = [t_I, t_F], \quad u \in \mathbf{U}(t, x). \quad (2.1)$$

Представим ее как комбинацию следующих связей:

$$\dot{x} = v, \quad v \in \mathbf{V}(t, x) = f(t, x, \mathbf{U}(t, x)), \quad (2.2)$$

которые накладываются на произвольное множество пар функции  $(x(t), u(t))$ , выделяя из него множество  $\mathbf{D}$  решений системы (2.1). Будем предполагать, что  $x(t)$  — кусочно-гладкие, а  $u(t)$ ,  $v(t)$  — кусочно-непрерывные. Очевидно, что замена множества  $\mathbf{V}(t, x)$  некоторым более широким  $\mathbf{V}_E(t, x) \supset \mathbf{V}(t, x)$  в (2.2) приводит к расширению и множества

решений  $\mathbf{D}$ . Таким образом, получаются расширения *первого типа* [44].  
Расширения *второго типа*, относящиеся к дифференциальной связи (2.2),  
получаются следующим образом. Вводится непрерывное и гладкое отобра-  
жение

$$y = \eta(t, x), \quad \eta: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (2.3)$$

Далее строится новая система с управлением

$$\dot{y} = \eta_x v + \eta_t, \quad v \in \mathbf{V}(t, x), \quad \eta(t, x) = y, \quad (2.4)$$

или, другими словами, система

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \eta_x f(t, x, u) + \eta_t, \quad u \in \mathbf{U}(t, x), \\ x &\in \mathbf{Q}(t, y) = \eta^{-1}(t, y). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь

$$\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left( \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad \eta_t = \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Множество функций  $x(t)$ , удовлетворяющих условиям (2.5) шире, чем  
исходное множество функций  $x(t)$ , удовлетворяющих условиям (2.1). В са-  
мом деле, если  $(x(t), u(t)) \in \mathbf{D}$ , то  $v(t) = \dot{x}(t)$ , и тройка функций  
 $(x(t), u(t), y(t) = \eta(t, x(t)))$  удовлетворяет (2.3) или (2.4) в силу равенства  
(2.5), т. е.  $(x(t), u(t)) \in \mathbf{E}$ . Следовательно,

$$(x(t), u(t)) \in \mathbf{D} \Rightarrow (x(t), u(t)) \in \mathbf{E}.$$

Это означает что  $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ .

Аналогичные типы расширений вводятся и для дискретных систем

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(t, x(t), u), \quad t \in \{t_I, \dots, t_F\}, \\ u(t) &\in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^p, \end{aligned} \quad (2.6)$$

иначе

$$\begin{aligned} x(t+1) &\in \mathbf{\Pi}(t, x(t)), \\ \mathbf{\Pi}(t, x(t)) &= f(t, x(t), \mathbf{U}(t, x(t))). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно, замена множества  $\mathbf{U}$  более широким множеством  $\mathbf{U}_E$ ,  $\mathbf{U}_E(t, x) \supset \mathbf{U}(t, x)$  (замена  $\mathbf{\Pi}$  на  $\mathbf{\Pi}_E \supset \mathbf{\Pi}$ ) приводит к расширению множества  $\mathbf{D}$  всех решений (2.6), (2.7). Тем самым получают расширения *первого* типа.

Далее, для каждого  $t$  вводится произвольное отображение

$$\eta(t): \mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{Y}(t)$$

и строится новая дискретная система с управлением

$$y(t+1) = \eta(t+1, f(t, x(t), u(t))), \quad (2.8)$$

$$u(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbf{Q}(t, y(t)) = \eta^{-1}(t, y(t)).$$

Множество всех  $(x(t), u(t))$ , удовлетворяющих (2.8), обозначим через  $\mathbf{E}$ .

Любое решение  $(x(t), u(t)) \in \mathbf{D}$  удовлетворяет (2.8), следовательно,  $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ . Таким образом, получают расширения *второго* типа.

В итоге вводится желаемый класс расширений  $\mathbf{E}$  исходной дискретной системы (2.8), в котором в дальнейшем будет выбираться разрешающее расширение для решения той или иной задачи.

Существуют такие специфические расширения обоих типов, называемые *релаксациями*, которые обеспечивают инвариантность любых интегральных характеристик исходной системы. Одно из них, хорошо известное в теории управления [143], относится к первому типу и получается заменой множества скоростей его выпуклым замыканием:

$$\dot{x} \in \mathbf{V}_C(t, x) = \overline{\text{co}} \mathbf{V}.$$

Релаксации второго типа возможны, в частности, для непрерывных систем с неограниченным линейным управлением

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u_1(t)) + h(t, x(t))u_2(t), \quad u_2 \in \mathbb{R}^k, \quad (2.9)$$

если (2.3) — многообразие полной управляемости предельной системы  $\frac{dx}{dt} = h(t, x)u_2$ , ее  $(n - m)$ -мерный интеграл,  $m \geq k$  [29]. Если матрица  $h$



в (2.9) не зависит от  $x$ , то интеграл  $\eta(t, x)$  линеен по  $x$  и записывается явно:  $y = \nu(t)x$ , где  $\nu(t)$  — матрица ортогональная к  $h(t)$  (т. е.  $\nu(t)h(t) = 0$ ).

Для дискретных систем нет аналога релаксационного расширения первого типа непрерывных систем. Однако для определенного класса дискретных систем существуют расширения второго типа, аналогичные релаксационным непрерывным системам. В частности, это справедливо для дискретных систем вида

$$x(t+1) = g(t, x(t), u_1) + h(t)u_2, \quad u_2 \in \mathbb{R}^k,$$

(в этом случае  $y = \nu(t)x$ ,  $\nu(t)$  должна быть ортогональна к  $h(t-1)$ , т. е.  $\nu(t+1)h(t) = 0$ ).

Среди расширений второго типа выделим специальное, со скалярной функцией  $y = \eta(t, x)$ , которая порождает системы с управлением (2.4), (2.5) первого порядка. Для них разнообразные задачи управления, в том числе — оптимального решаются непосредственно путем построения границ множеств достижимости:

$$Y_R(t) = [y_l(t), y_u(t)], \quad \dot{y}_{l,u} = \max, \min (\eta_x f(t, x, u) + \eta_t),$$

$$y_{l,u}(t+1) - y_{l,u}(t) = \max, \min (\eta(t+1, f(t, x(t), u)) - \eta(t, x)),$$

$\eta(t, x) = y_{l,u}(t)$ ,  $u(t) \in \mathbf{U}(t, x(t))$ ,  $x(t) \in \mathbf{X}(t)$ ,  $y(t_I) = \eta(t_I, x(t_I))$ . Назовем их расширениями типа Кротова, поскольку с их помощью получаются достаточные условия оптимальности и оценки, близкие по форме к условиям и оценкам Кротова [70].

### 2.1.1 Некоторые конструктивные схемы

Рассматривается система с управлением — непрерывная

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = [t_I, t_F], \quad (2.10)$$

или дискретная

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = \{t_I, t_I + 1, \dots, t_F\}, \quad (2.11)$$

и соответствующая задача оптимального управления:

$$\begin{aligned} x(t_I) = x_I, \quad x(t_F) \in \mathbf{\Gamma}, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t), \quad u(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)), \\ I = F(x(t_F)) \rightarrow \min(\inf). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В соответствии с общим подходом процедура приближенного исследования подобной задачи состоит из следующих этапов:

1) выполняется с помощью преобразования типа расширения переход к задаче  $(\mathbf{E}, I)$  из класса, для которого существует эффективный метод исследования и находится ее решения;

2) строится подходящая аппроксимация этого решения в классе допустимых  $\mathbf{D}$  исходной задачи в качестве ее приближенного решения;

3) находится его верхняя оценка  $\Delta$ ;

4) при необходимости найденное приближенное решение и оценка уточняются известными итерационными методами улучшения. Каждый из этапов может быть реализован неоднозначно.

В [31, 32, 53] рассмотрен ряд методов, реализующих эту процедуру на основе преобразований второго типа для вырожденных или близких к ним задач. Здесь сосредоточим внимание на преобразованиях первого типа, порожденных расширением множества скоростей. В рассматриваемой стандартной форме задачи оптимального управления зависимости, описывающие эти множества, в значительной мере определяют метод решения. Конструктивно расширения первого типа можно выполнить в компактной области  $\mathbf{B}$  изменения фазового и управляющего векторов, например, следующим образом. Задается аппроксимация  $\tilde{f}^i(t, x, u)$  в желаемом классе правой части исходной системы:  $f^i(t, x, u)$ . Для этого может быть использовано приближение функции по методу наименьших квадратов в области  $\mathbf{B}$  с помощью композиционных полиномов [109, 107, 12]. Далее рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(t, x(t), u(t)) + \theta(t, w(t), z(t)), \quad (2.13)$$

или дискретный вариант

$$x(t+1) = \tilde{f}(t, x(t), u(t)) + \theta(t, w(t), z(t)), \quad (2.14)$$

где  $\theta(t, w, z) = f(t, w, z) - \tilde{f}(t, w, z)$ ,  $w, z$  — новые управления,  $w(t) \in \mathbf{X}(t)$ ,  $z(t) \in \mathbf{U}(t, w(t))$ . Системы (2.13), (2.14) назовем *оценочными* для соответствующих систем (2.10), (2.11). Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Множество скоростей  $\tilde{V}(t, x)$  оценочной системы (2.13), (2.14) является расширением множества скоростей  $V(t, x)$  соответствующей исходной системы (2.10), (2.11), и, следовательно,  $\mathbf{D} \subset \tilde{\mathbf{D}}$ , где  $\tilde{\mathbf{D}}$  — множество допустимых оценочной системы.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим правую часть  $\tilde{V}(t, x)$  непрерывной системы (2.13). При наложении дополнительных связей  $z = u$ ,  $w = x$  она преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, x, u) + \theta(t, w, z) &= \tilde{f}(t, x, u) + \theta(t, x, u) = \\ &= \tilde{f}(t, x, u) + f(t, x, u) - \tilde{f}(t, x, u) = f(t, x, u), \end{aligned}$$

то есть  $\tilde{V}(t, x) \Big|_{z=u, w=x} = V(t, x)$ . В случае дискретной системы (2.14) наложение связей  $z = u$ ,  $w = x$  приводит к аналогичному результату.

Тем самым доказано, что исключение связей  $z = u$ ,  $w = x$  приводит к расширению множества  $V(t, x)$  исходной системы (2.10), (2.11) до некоторого множества  $V_E(t, x) = \tilde{V}(t, x)$  соответствующей оценочной системы (2.13), (2.14). Тем самым теорема доказана.

Если речь идет о задаче оптимального управления, то решение ее на любом расширении дает нижнюю границу минимизируемого функционала, а при специальном выборе расширяющего преобразования может дать нижнюю грань и соответственно точное решение исходной задаче.

**Пример 2.1.** Пусть требуется минимизировать функционал  $I(x) = \int_0^{t_F} |x(t)| dt$  в системе

$$\dot{x} = u, \quad x, u \in \mathbb{R}^1, \quad x(0) = \frac{1}{a}, \quad a > 0, \quad |x| \leq \frac{1}{a}, \quad |u| \leq 1.$$

Перепишем функционал в стандартной форме:  $I = x^0(t_F)$ ,  $\dot{x}^0 = |x|$  и заменим правую часть гладкой функцией  $a|x|^2$ . Соответствующее расширение получается заменой уравнения относительно  $x^0$   $\dot{x}^0 = a|x|^2 + |w| - a|w|^2$ . Минимуму  $I = x^0(t_F)$  при этом соответствует, очевидно минимум функции  $|w| - a|w|^2$  который в области  $|w| \leq 1/a$  равен нулю, и дело сводится к задаче о минимуме квадратического функционала  $J(x) = \int_0^{t_F} a|x(t)|^2 dt$ . Решение получившейся задачи

$$\begin{aligned}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) &= \left(-t + \frac{1}{a}, -1\right), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{a}, \\(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) &= (0, 0), \quad \frac{1}{a} < t \leq t_F,\end{aligned}$$

находится согласно принципу максимума. Тем самым получается нижняя оценка функционала исходной задачи  $I \geq aJ(\tilde{x}) = \frac{1}{3a^2} = \Delta$ . При этом в качестве приближенного решения исходной задачи можно выбрать пару  $(\tilde{x}, \tilde{u})$ . Легко видеть, что с увеличением  $a$  разность между значением функционала на приближенном решении  $I(\tilde{x}) = \frac{1}{2a^2}$  и нижней оценкой  $\Delta$  уменьшается (так уже при  $a \geq 13$   $I(\tilde{x}) - \Delta \leq 0.001$ ).

В общем случае расширяющих преобразований решение задачи  $(\mathbf{E}, I)$  не задает непосредственно решения исходной задачи  $(\mathbf{D}, I)$  и согласно общему подходу требует аппроксимации в  $\mathbf{D}$ , причем достаточно простой, чтобы эта операция имела практический смысл. Рассмотрим две схемы (которые, разумеется, не исключают других), подходящих с этой точки зрения:

- 1) вариационную;
- 2) экстремальное прицеливание.

В обеих объектом аппроксимации служит траектория  $x_*(t)$  решения задачи  $(\mathbf{E}, I)$  и строится управление с обратной связью  $\tilde{u}(t, x)$ , которым замыкается исходная система (2.10) или (2.11) для получения конкретного приближения при заданном начальном условии, а также для генерирования оценочной функции Кротова [53] и уточнения оценки  $\Delta$ , если она окажется слишком большой.

В вариационной схеме решается в форме синтеза линейно-квадратическая

задача, родственная известной задаче аналитического конструирования оптимальных регуляторов

$$\int_{t_I}^{t_F} (a|x(t) - x_*(t)|^2 + b|u(t) - \bar{u}(t)|^2) dt + c|x(t_F) - x_*(t_F)|^2 \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}(t) = A(t)(x(t) - x_*(t)) + B(t)(u(t) - \bar{u}(t)),$$

или, в дискретном варианте,

$$\sum_{t_I}^{t_F-1} (a|x(t) - x_*(t)|^2 + b|u(t) - \bar{u}(t)|^2) + c|x(t_F) - x_*(t_F)|^2 \rightarrow \min,$$

$$x(t+1) = A(t)(x(t) - x_*(t)) + B(t)(u(t) - \bar{u}(t)),$$

где  $\bar{u}(t)$  — среднее значение из  $\mathbf{U}(t, x_*(t))$ , а матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$  получаются в результате линеаризации правых частей (2.10), (2.11) в окрестности  $(x_*(t), \bar{u}(t))$ . Последние могут затем варьироваться с целью уменьшения оценки  $\Delta$ , т. е. рассматриваться как параметры настройки схемы.

В схеме экстремального прицеливания используется одноименный метод, предложенный в [62]. Позиционное управление получается из условий

$$\frac{d}{dt}|x(t) - x_*(t)|^2 \rightarrow \min_{v \in \mathbf{V}_E(t,x)},$$

$$|x(t+1) - x_*(t+1)|^2 \rightarrow \min_{v \in \mathbf{V}(t,x(t))},$$

соответственно для непрерывной и дискретной системы.

### 2.1.2 Преобразование к линейной системе и приложение к оцениванию множеств достижимости

Одна из возможных конструктивных реализаций — преобразование к линейной системе

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t, w, z) - A(t)w - B(t)z.$$

**Пример 2.2.** Рассмотрим нелинейную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= u, & \dot{x}^2 &= (x^1)^2 + u^2, & t &\in [0, 1], \\ x^1(0) &= 1, & x^2(0) &= 0, & -1 \leq u \leq 0, & 0 \leq x^1 \leq 1, \\ F(x(1)) &= x^2(1) \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Известно точное решение задачи

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &= \frac{e}{e^2 + 1} (e^{t-1} - e^{1-t}), & \bar{x}^1(t) &= \frac{e}{e^2 + 1} (e^{t-1} + e^{1-t}), \\ \bar{x}^2(t) &= \frac{e^{-2t}}{(e^2 + 1)^2} (e^{2t+4} + e^{4t} - e^{2t} - e^4), & F(\bar{x}(1)) &= \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} \approx 0.76.\end{aligned}$$

С помощью замены правой части исходной динамической системы семейством линейных функций с параметром  $-1 < b < 0$  перейдем к рассмотрению расширенного семейства задач оптимального управления

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= u, & \dot{x}^2 &= x^1 + bu + (z^2 + w^2 - z - bw), & t &\in [0, 1], \\ x^1(0) &= 1, & x^2(0) &= 0, & -1 \leq u, w \leq 0, & 0 \leq x^1, z \leq 1, \\ F(x(1)) &= x^2(1) \rightarrow \min.\end{aligned}$$

Используя принцип максимума Понтрягина найдем множество решений рассматриваемого семейства задач

$$\begin{aligned}\hat{u}(t, b) &= \begin{cases} -1, & t \in [0, b+1), \\ 0, & t \in [b+1, 1], \end{cases} \\ \hat{x}^1(t, b) &= \begin{cases} 1-t, & t \in [0, b+1), \\ -b, & t \in [b+1, 1], \end{cases} \\ \hat{x}^2(t, b) &= \begin{cases} -\frac{t^2}{2} + \left(\frac{3}{4} - b - \frac{b^2}{4}\right)t, & t \in [0, b+1), \\ -bt - \frac{t}{4} - \frac{tb^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{2}, & t \in [b+1, 1]. \end{cases}\end{aligned}$$

и, тем самым, получим оценку снизу функционала в исходной задаче

$$F(x(1)) \geq \max_{-1 < b < 0} F(\hat{x}(1)) = \frac{7}{12} \approx 0.58.$$

Для поиска семейства приближенных решений исходной задачи  $(\tilde{x}(t, b), \tilde{u}(t, b))$  разрешим исходную систему для семейства управлений  $\hat{u}(t, b)$ . Получим  $\tilde{u}(t, b) = \hat{u}(t, b)$ ,  $\tilde{x}^1(t, b) = \hat{x}^1(t, b)$ ,

$$\tilde{x}^2(t, b) = \begin{cases} t^2 - 2t + 2, & t \in [0, b + 1), \\ b^2t - \frac{2}{3}b^3 - b^2 + b + \frac{4}{3}, & t \in [b + 1, 1]. \end{cases}$$

$F(\tilde{x}(1, b)) = -\frac{2}{3}b^3 + b + \frac{4}{3}$ , причем

$$\min_{-1 < b < 0} F(\tilde{x}(1, b)) = F\left(\tilde{x}\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.86.$$

Универсальный метод решения задачи для такой преобразованной линейной системы (при любом конечном функционале  $I = F(x(t_F))$ ), по существу, сводится к построению ее множества достижимости в момент  $t_F$  и решению конечномерной задачи о минимуме функции  $F(x)$  на этом множестве.

Напомним, что *множеством достижимости*  $\mathbf{X}_R(\tau)$  системы (2.10) в момент  $\tau$  называется множество тех и только тех точек  $z \in \mathbb{R}^n$ , для каждой из которых существует ее решение  $x(t) \in \mathbf{D}$  такое, что  $x(\tau) = z$ . К этому непосредственно примыкают понятия: *множества достижимости в пространстве*  $(t, x)$  к моменту  $\tau$

$$\mathbf{B}_R(\tau) = \{(t, x) : x \in \mathbf{X}_R(t), \quad t_I \leq t \leq \tau\}$$

и *ансамбля траекторий* как отображения:  $t \rightarrow \mathbf{X}_R(t)$ . Множество  $\mathbf{X}^{\text{ext}} \supset \mathbf{X}_R$  назовем *внешней оценкой* множества достижимости  $\mathbf{X}_R$ .

Задача состоит в том, чтобы получить представление множества достижимости или его подходящей оценки непосредственно в конечномерном пространстве  $(x)$  или  $(t, x)$ , не прибегая к прямому перебору решений дифференциальной системы как элементов функционального пространства.

Описания и оценки областей достижимости могут иметь весьма широкий круг приложений в теории управления, главным образом в таких ее разделах, как управляемость, инвариантность, управление при неполной информации,

оптимальное управление, многокритериальные задачи, приближенные и численные методы.

Общие свойства множеств достижимости и ансамблей траекторий как интегральных характеристик дифференциальных включений, различные подходы к их описанию и оценке и важные приложения изучались в работах Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, А. А. Толстоногова, М. М. Хрусталева, Ф. Л. Черноусько, А. В. Лотова и многих других.

Для линейной системы множество достижимости строится  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$  известным способом с помощью семейства решений уравнений принципа максимума

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi, \quad \psi^T(t)(f(t, w, z) - A(t)w - B(t)z + B(t)u) \rightarrow \max_{(u, z, w)},$$

где  $\psi(0)$  пробегает как параметр семейства единичную сферу. Операция максимума выполняется на множестве  $\overline{\text{co}} \mathbf{V}_E(t, x)$ , что соответствует ослабленной системе  $\dot{x} \in \overline{\text{co}} \mathbf{V}_E(t, x)$ , для которой оптимальное управление заведомо существует, если  $\mathbf{V}$  компактно.

Это множество  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$  будет, очевидно, служить внешней оценкой множества достижимости исходной системы.

**Пример 2.3.** Рассмотрим систему

$$\dot{x}^1(t) = x^1(t) + b(x^1(t))^2 + u(t), \quad \dot{x}^2(t) = (u(t))^2, \quad t \in [0, 1], \quad (2.15)$$

при условиях  $|x^1(t)| \leq \gamma$ ,  $|u(t)| \leq 1$ ,  $b > 0$ . Множество достижимости системы (2.15) из точки  $x_I = 0$  обозначим через  $\mathbf{X}_R(t)$ . Построим внешнюю оценку множества  $\mathbf{X}_R(1)$ .

Для этого воспользуемся расширением рассматриваемого типа и заменим систему (2.15) линейной системой

$$\dot{x}^1(t) = x^1(t) + u(t) + b(w(t))^2, \quad \dot{x}^2(t) = (u(t))^2, \quad t \in [0, 1], \quad (2.16)$$

при условиях  $|x^1(t)| \leq \gamma$ ,  $|u(t)| \leq 1$ ,  $b > 0$ ,  $|w(t)| \leq \gamma$ .



Построим множество достижимости системы (2.16)  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$  из точки  $x_I = 0$ . Очевидно, что  $\mathbf{X}_R(t) \subset \tilde{\mathbf{X}}(t)$ , т. е.  $\tilde{\mathbf{X}}(1)$  — внешняя оценка множества  $\mathbf{X}_R(1)$ . Кроме того, для любой точки  $\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{X}}_R(1)$  существует точка  $x \in \mathbf{X}_R(1)$  такая, что справедлива оценка

$$|\tilde{x} - x| \leq \Delta = 2b\gamma^2.$$

Это следует из равенства

$$\max_{t \in [0,1], |x^1| \leq \gamma, |w| \leq \gamma} |x^1(t) + b(x^1(t))^2 + u(t) - (x^1(t) + u(t) + b(w(t))^2)| = b\gamma^2.$$

Для конкретных данных  $b = 0.01$ ,  $\gamma = 0.5$  множество  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ , построенное по указанному выше правилу, представлено на рис. 2.1. Оценка в этом случае составляет  $\Delta = 2 \cdot 0.01 \cdot 0.5^2 = 0.005$ .

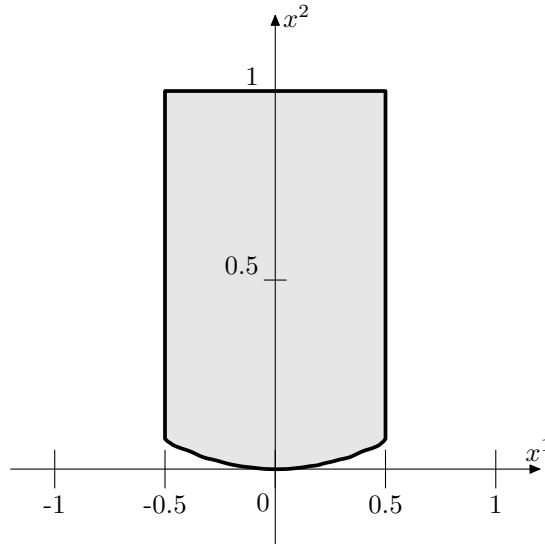


Рисунок 2.1 —

Независимо от того, как задается расширение  $\mathbf{V}_E(t, x)$ , возможен следующий универсальный подход. Пусть при каждом  $t, x$  определено множество  $\mathbf{V}_E(t, x)$  такое, что  $\mathbf{V}(t, x) \subset \mathbf{V}_E(t, x)$  при всех  $(t, x) \in \mathbf{T} \times \mathbb{R}^n$ . Построим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{\nu}^i &= \sup\{v^i : v \in \mathbf{V}_E(t, x), x \in \mathbf{K}^i(t, \nu)\}, \\ \nu^i(t_I) &= \sup\{x_I^i : x_I \in \mathbf{X}_I\}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\mathbf{K}^i(t, \nu) = \{x : x^j \leq \nu^j, j \neq i, \nu^i = x^i\} \cap \mathbf{X}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Множество  $\mathbf{X}$ , определяющее фазовые ограничения в исходной системе, здесь и далее есть некоторая априорная внешняя оценка множества достижимости системы (2.10), возможно, совпадающая с  $\mathbb{R}^n$ .

**Лемма 2.1.** Пусть множество  $\mathbf{V}(t, x)$  ограничено и на отрезке  $[t_I, \tau]$  существует решение системы (2.17). Тогда множество

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x^i \leq \nu^i, i = 1, 2, \dots, n\} \cap \mathbf{X}_0^{\text{ext}}(t)$$

является внешней оценкой  $\mathbf{X}^{\text{ext}}(t)$  множества достижимости  $\mathbf{X}_R(t)$  системы (2.10).

Построение множества достижимости или его оценки может рассматриваться как универсальный метод решения задачи оптимального управления, поскольку при этом она сводится к решению конечномерной задачи

$$F(x) \rightarrow \min_{x \in \Gamma \cap \mathbf{Q}_R}$$

и восстановлению обратным счетом соответствующей траектории  $x(t)$ .

### 2.1.3 Преобразование к системам с линейным управлением

Рассмотрим теперь преобразования первого типа, приводящие к системам с линейным управлением. Как указано выше, признаком вырожденности задачи, допускающей явный переход к производной задаче, является присутствие в правой части системы (2.10) (соответственно (2.13)), линейно входящего управления с матричным коэффициентом, зависящим только от времени. Рассматриваемое преобразование состоит в замене исходных систем системами вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g(t, x(t)) + B(t)u(t) + \theta(t, w(t), z(t)), \\ x(t+1) &= g(t, x(t)) + B(t)u(t) + \theta(t, w(t), z(t)), \end{aligned}$$

где, как и в предыдущем разделе,  $w, z$  — новые управления,  $w(t) \in \mathbf{X}(t)$ ,  $z(t) \in \mathbf{U}(t, w(t))$ .

Дальнейшее состоит в переходе к соответствующим производным системам, поиску магистральных решений и их аппроксимации в исходном классе. Если производная задача не поддается простому решению, то ее можно преобразовать далее по любой из рассмотренных схем.

## 2.2 Использование достаточных условий

### ОПТИМАЛЬНОСТИ

Если применять расширения типа Кротова, т. е. такие, при которых дифференциальные связи полностью исключаются, а функционал с помощью функции  $\varphi(t, x)$  заменяется обобщенным лагранжианом, то можно проводить аппроксимацию исходной системы упрощенной моделью без априорного расширения (формально полагая  $\theta(t, w, z) = 0$ ) с целью получения достаточно хорошей приближенной функции Кротова  $\tilde{\varphi}(t, x)$ , разрешающей упрощенную задачу. Такая функция, примененная к исходной системе, дает возможность генерировать приближенно оптимальное управление  $\tilde{u}(t, x)$  с оценкой, которая позволяет судить о качестве полученного приближенного управления, и как следствие, о качестве выбранной аппроксимации динамической системы [103].

Рассмотрим вначале непрерывную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_I, t_F], \\
 x(t_I) &= x_I, \\
 u(t) &\in \mathbf{U}(t) \subset \mathbb{R}^p, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, \\
 F(x(t_F)) &\rightarrow \inf,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

и дискретной задачи оптимального управления

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in \{t_I, t_I+1, \dots, t_F\}, \\
x(t_I) &= x_I, \\
u(t) &\in \mathbf{U}(t) \subset \mathbb{R}^p, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, \\
F(x(t_F)) &\rightarrow \inf.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Пусть  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  — допустимое решение задачи (2.18). Тогда согласно [70] для любой непрерывно-дифференцируемой функции  $\varphi(t, x)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\Delta(\bar{x}, \bar{u}, \varphi) &= F(\bar{x}(t_F)) - \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} G(x) + \int_{t_I}^{t_F} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} R(t, x, u) dt = \\
&= F(\bar{x}(t_F)) - \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} \left( F(x) + \varphi(t_F, x) - \varphi(t_I, x_I) \right) + \\
&\quad + \int_{t_I}^{t_F} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \varphi_x^T f(t, x, u) + \varphi_t \right) dt.
\end{aligned}$$

Для случая дискретных систем справедлива аналогичная оценка [31]

$$\begin{aligned}
\Delta(\bar{x}, \bar{u}, \varphi) &= F(\bar{x}(t_F)) - \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} G(x) + \sum_{t=t_I}^{t_F-1} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} R(t, x, u) = \\
&= F(\bar{x}(t_F)) - \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} \left( F(x) + \varphi(t_F, x) - \varphi(t_I, x_I) \right) + \\
&\quad + \sum_{t=t_I}^{t_F-1} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) \right) = \\
&= F(\bar{x}(t_F)) - \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} \left( F(x) + \varphi(t_F, x) \right) + \\
&\quad + \sum_{t=t_I+1}^{t_F-1} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x) \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \sup_{u \in \mathbf{U}(t_I)} \varphi(t_I + 1, f(t_I, x_I, u)).$$

В [70, 31] для непрерывной и дискретной систем доказано, что для любой допустимой пары  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  и функции  $\varphi$  оценка  $\Delta(\bar{x}, \bar{u}, \varphi) \geq 0$ , а если тройка функций  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \varphi)$  удовлетворяет достаточным условиям оптимальности Кротова, то пара  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  оптимальна и  $\Delta(\bar{x}, \bar{u}, \varphi) = 0$ .

Произведем преобразование правой части динамической системы, упрощающее, с точки зрения поиска оптимального решения, исходную задачу (2.18), и рассмотрим соответствующую непрерывную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{f}(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_I, t_F], \\ x(t_I) &= x_I, \\ u(t) &\in \mathbf{U}(t) \subset \mathbb{R}^p, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, \\ F(x(t_F)) &\rightarrow \inf. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Предположим, что известно оптимальное решение  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  задачи (2.20) и разрешающая достаточные условия оптимальности функция  $\tilde{\varphi}(t, x)$ , тогда оценка этого решения, как решения задачи (2.20) равна нулю и имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{\varphi}) &= F(\tilde{x}(t_F)) - \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} \left( F(x) + \tilde{\varphi}(t_F, x) - \tilde{\varphi}(t_I, x_I) \right) + \\ &+ \int_{t_I}^{t_F} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \tilde{\varphi}_x^T \tilde{f}(t, x, u) + \varphi_t \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Пусть пара  $(\bar{x}(t), \tilde{u}(t))$  — допустимая пара задачи (2.18), т. е.  $\bar{x}(t)$  — траектория, соответствующая управлению  $\tilde{u}(t)$  в силу системы (2.18). Тогда для оценки этого решения, как решения задачи (2.18), справедливо неравенство

$$\Delta(\bar{x}, \tilde{u}, \tilde{\varphi}) = F(\bar{x}(t_F)) - \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} \left( F(x) + \tilde{\varphi}(t_F, x) - \tilde{\varphi}(t_I, x_I) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_I}^{t_F} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \tilde{\varphi}_x^T f(t, x, u) + \tilde{\varphi}_t \right) dt = \\
& = F(\bar{x}(t_F)) - F(\tilde{x}(t_F)) + F(\tilde{x}(t_F)) - \inf_{x \in \mathbf{X}(t_F)} \left( F(x) + \tilde{\varphi}(t_F, x) - \tilde{\varphi}(t_I, x_I) \right) + \\
& + \int_{t_I}^{t_F} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \tilde{\varphi}_x^T f(t, x, u) - \tilde{\varphi}_x \tilde{f}(t, x, u) + \tilde{\varphi}_x^T \tilde{f}(t, x, u) - \tilde{\varphi}_t \right) dt \leq \\
& \leq F(\bar{x}(t_F)) - F(\tilde{x}(t_F)) + \int_{t_I}^{t_F} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \tilde{\varphi}_x f(t, x, u) - \varphi_x \tilde{f}(t, x, u) \right) dt.
\end{aligned}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Пусть  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  — оптимальное решение задачи (2.20), функция  $\tilde{\varphi}(t, x)$  разрешает соотношения достаточных условий оптимальности для задачи (2.20), а пара  $(\bar{x}(t), \tilde{u}(t))$  — допустимая пара задачи (2.18). Тогда справедливо неравенство

$$\Delta(\bar{x}, \tilde{u}, \tilde{\varphi}) \leq F(\bar{x}(t_F)) - F(\tilde{x}(t_F)) + \int_{t_I}^{t_F} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \tilde{\varphi}_x f(t, x, u) - \varphi_x \tilde{f}(t, x, u) \right) dt.$$

Аналогично случаю непрерывных систем, произведем преобразование правой части динамической системы (2.19), и рассмотрим соответствующую дискретную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= \tilde{f}(t, x(t), u(t)), \quad t \in \{t_I, t_I+1, \dots, t_F\}, \\
x(t_I) &= x_I, \\
u(t) &\in \mathbf{U}(t) \subset \mathbb{R}^p, \quad x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n, \\
F(x(t_F)) &\rightarrow \inf.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.3.** Пусть  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  — оптимальное решение задачи (2.21), функция  $\tilde{\varphi}(t, x)$  разрешает соотношения достаточных условий оптимальности

для задачи (2.21), а пара  $(\bar{x}(t), \tilde{u}(t))$  — допустимая пара задачи (2.19). Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{x}, \tilde{u}, \tilde{\varphi}) &\leq F(\bar{x}(t_F)) - F(\tilde{x}(t_F)) + \\ &+ \sum_{t=t_I+1}^{t_F-1} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X}(t), \\ u \in \mathbf{U}(t)}} \left( \tilde{\varphi}(t+1, f(t, x, u)) - \tilde{\varphi}(t+1, \tilde{f}(t, x, u)) \right) + \\ &+ \sup_{u \in \mathbf{U}(t_I)} \left( \tilde{\varphi}(t_I+1, f(t_I, x_I, u)) - \tilde{\varphi}(t_I+1, \tilde{f}(t_I, x_I, u)) \right). \end{aligned}$$

**Замечание.** Если функция  $\tilde{\varphi}(t, x)$  линейна, т. е.  $\tilde{\varphi} = \psi^T(t)x$ , то правая часть полученных неравенств будет стремиться к нулю при равномерном стремлении  $\tilde{f}(t, x, u)$  к  $f(t, x, u)$ . Следовательно, будет стремиться к нулю и оценка  $\Delta(\bar{x}, \tilde{u}, \tilde{\varphi})$ .

**Пример 2.4.** Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 20e^{-(x(t)-1)^2 - (u(t)+1)^2} + 2x(t) + 2x(t)u(t) - u^2(t), \quad t \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ -50 &\leq x(t) \leq 50, \quad u \in \{-2, -2 + 0.1, \dots, 2 - 0.1, 2\}, \\ x(0) &= -1, \quad F(x(3)) = x(3) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Известно решение задачи

$$\hat{u}(t) = (\hat{u}(0), \hat{u}(1), \hat{u}(2)) = (1.7, 0, 0.5), \quad F(\hat{x}(3)) = -49.9885.$$

Приближим правую часть исходной динамической системы с помощью МНК как функцию двух переменных  $f(x, u)$  в допустимой области с помощью различных непрерывных функций (полиномов)  $\tilde{f}(x, u)$ . Найдем решение  $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$  приближенной задачи и его оценку в исходной задаче (с поиском функции  $\varphi(t, x)$  по схеме Беллмана).

1) Построив приближение с помощью линейной функции

$$\tilde{f}(x, u) = -1.1898 + 1.9002x + 0.0076u,$$

получим  $\max_{x,u} |f(x,u) - \tilde{f}(x,u)| \approx 197.803$ ,  $\tilde{u}(t) = (-2, -2, -2)$ ,  $F(\tilde{x}(3)) = -14.7065$ . Найдем решение  $(\bar{x}(t), \tilde{u}(t))$  исходной задачи, соответствующее управлению  $\tilde{u}(t)$ , и его оценку  $\Delta = 47.9992$  (при этом  $F(\bar{x}(3)) = -1.9893$ ).

2) Построив приближение с помощью полинома второй степени

$$\tilde{f}(x,u) = 0.3519 + 2.0002x - 0.0947u + 1.9999xu - 0.0002x^2 - 1.0232u^2,$$

получим  $\max_{x,u} |f - \tilde{f}| = 19.5766$ ,  $\tilde{u}(t) = (-0.1, 1.4, 1.7)$ ,  $F(\tilde{x}(3)) = -49.9948$ . Найдем решение  $(\bar{x}(t), \tilde{u}(t))$  исходной задачи, соответствующее управлению  $\tilde{u}(t)$ , и его оценку  $\Delta = -6.1765$  при этом  $F(\bar{x}(3)) = -56.165$ ). Полученное отрицательное значение оценки говорит о недопустимости полученного решения. Однако для полноты вычислительного эксперимента, целесообразно подвинуть границы допустимой области таким образом, чтобы решение  $(\bar{x}(t), \tilde{u}(t))$  стало допустимым, и посчитать его оценку в полученной задаче. Так, заменив допустимую область  $[-50, 50]$  в конечный момент времени на  $[-56.2, 50]$ , получим оценку  $\Delta = 0.0273$ .

3) Построив приближение с помощью полинома третьей степени

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,u) = 0.3397 + 2.0011x - 0.3384u + 1.9999xu - 0.0002x^2 - 1.0151u^2 + \\ + 0.0001x^2u + 0.0538u^3, \end{aligned}$$

получим  $\max_{x,u} |f - \tilde{f}| = 19.39$ ,  $\tilde{u}(t) = (0.4, 0.5, 1.8)$ ,  $F(\tilde{x}(3)) = -49.9995$ . Найдем решение  $(\bar{x}(t), \tilde{u}(t))$  исходной задачи, соответствующее управлению  $\tilde{u}(t)$ , и его оценку  $\Delta = -3.5127$  (при этом  $F(\bar{x}(3)) = -53.5011$ ). Заменив допустимую область  $[-50, 50]$  в конечный момент времени на  $[-53.51, 50]$ , получим  $\Delta = 0$ .

4) Построив приближение в четырех подобластях

$$D_1 = [0, 50] \times [-2, 0], \quad D_2 = [0, 50] \times [0, 2],$$

$$D_3 = [-50, 0] \times [-2, 0], \quad D_4 = [-50, 0] \times [0, 2]$$



допустимой области с помощью полиномов второй степени

$$D_1 : \tilde{f}(x, u) = 3.7395 + 1.6932x - 0.8173u + 1.9957xu - 0.0049x^2 - 1.4594u^2,$$

$$\max_{(x,u) \in D_1} |f - \tilde{f}| = 16.2002,$$

$$D_2 : \tilde{f}(x, u) = 0.8815 + 1.9564x - 0.6479u + 0.0122xu + 0.0005x^2 - 0.8770u^2,$$

$$\max_{(x,u) \in D_2} |f - \tilde{f}| = 6.5192,$$

$$D_3 : \tilde{f}(x, u) = 0.8953 + 2.0752x - 0.1790u + 2.0010xu + 0.0012x^2 - 1.1012u^2,$$

$$\max_{(x,u) \in D_3} |f - \tilde{f}| = 6.3844,$$

$$D_4 : \tilde{f}(x, u) = 0.2042 + 2.0105x - 0.1454u + 1.9972xu + 0.0001x^2 - 0.9729u^2,$$

$$\max_{(x,u) \in D_4} |f - \tilde{f}| = 2.5025,$$

получим  $\tilde{u}(t) = (0.8, 1.9, -0.1)$ ,  $F(\tilde{x}(3)) = -49.9784$ . Найдем решение  $(\bar{x}(t), \tilde{u}(t))$  исходной задачи, соответствующее управлению  $\tilde{u}(t)$ , и его оценку  $\Delta = -0.6353$  (при этом  $F(\bar{x}(3)) = -50.6238$ ). Заменив допустимую область  $[-50, 50]$  в конечный момент времени на  $[-50.65, 50]$ , получим  $\Delta = 0.0245$ .

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют сделать вывод о том, что оценка приближенного решения исходной задачи, действительно, тем лучше, чем лучше аппроксимация правой части динамической системы (в смысле уменьшения величины  $\max_{x,u} |f(x, u) - \tilde{f}(x, u)|$ ).

## 2.3 Аппроксимация моделей с неполным аналитическим описанием

На практике типичны ситуации, когда динамические модели не имеют полного аналитического описания, что делает невозможным применение для их исследования многих теоретических методов. Соотношения модели могут быть заданы таблично, либо в виде компьютерных подпрограмм. Также не редки ситуации, когда модель имеет громоздкое описание, что затрудняет

проведение качественного анализа. В этих случаях для восполнения аналитического описания модели, либо упрощения ее вида используется аппроксимация модели объекта. Она позволяет свести исследование сложных, либо не имеющих полного описания систем к исследованию более простых и представленных аналитически систем, обладающих свойствами исходных.

Для аппроксимации исходной системы

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p,$$

упрощенной моделью с целью уменьшения величины  $\theta(t, w, z)$  равномерно в области изменения переменных (в дальнейшем полагая  $\theta(t, w, z) = 0$ ), предлагается применять алгоритм аппроксимации многомерных функций многих переменных  $f(t, x, u)$  (при фиксированных моментах времени) по методу наименьших квадратов многомерными полиномами

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^m \psi_j g_j(z), \quad z = (z^1, z^2, \dots, z^{n+p})^T = (x, u) \in \mathbb{R}^{n+p},$$

где  $g_j(z) = \prod_{i=1}^{n+p} (z^i)^{k_i(j)}$  — некоторый набор заданных базисных функций,  $k_i(j)$  — целые положительные числа, а  $\psi_j$  — соответствующий набор коэффициентов, подлежащих определению. Решается следующая задача минимизации суммы квадратов отклонений между известными значениями исходной функции и значениями приближающей конструкции в узловых точках (МНК):

$$S = \sum_{i=1}^{\beta} (\varphi(z_i) - f(t, x_i, u_i))^2 \rightarrow \min_{\{\psi_j\}}$$

где  $\beta$  — количество узлов аппроксимации. Эта задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. В общем случае эта система разрешима, а если число узлов аппроксимации больше либо равно количеству коэффициентов аппроксимирующего полинома и сетка узлов не вырождена, то имеет единственное решение.

Невырожденность сетки узлов подразумевает их более или менее равномерное распределение в рассматриваемом пространстве.

Подобная аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны). Помимо использования аппроксимации на этапе преобразования модели объекта, можно эффективно использовать ее для приближенного решения соотношений Кротова-Беллмана, когда они не могут быть разрешены в аналитическом виде. Это происходит при увеличении размерностей исследуемого объекта и пространства, в котором он описывается. Количество необходимых вычислений возрастает экспоненциально, и мы сталкиваемся с так называемым «проклятием размерности». Применение аппроксимации позволяет избежать этого эффекта и приближенно разрешить соотношения.

Схему аппроксимации функции многих переменных по МНК в общем виде можно записать в следующем образом:

- 1) задается сетка узлов аппроксимации;
- 2) в заданных узлах вычисляются значения приближаемой функции;
- 3) задаются базисные функции аппроксимирующего полинома;
- 4) формируются с помощью узлов аппроксимации и базисных функций матрица и столбец свободных членов для системы линейных алгебраических уравнений;
- 5) решается полученная система.

МНК обладает большим преимуществом в вычислительном плане, т. к. обладает потенциальным параллелизмом на четвертом шаге схемы. А именно, область формирования исходных данных может быть разбита на части, в каждой из которых строится матрица и столбец свободных членов для системы уравнений с помощью исходных значений в узлах текущей части. Общая матрица получается в этом случае, как сумма всех построенных «частичных»

матриц (это же справедливо и для свободных членов). Подобная особенность позволяет существенно сократить расчетное время компьютерных программ, реализующих приближение многомерных функций по МНК.

## 2.4 Преобразования, приводящие к дискретно–непрерывным системам

Рассмотрим непрерывную задачу оптимального управления  $(\mathbf{D}, I)$  следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_I, t_F], \\ x(t_I) &= x_I, \quad u(t) \in \mathbf{U}(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ I &= F(x(t_F)) \rightarrow \inf, \end{aligned} \tag{2.22}$$

где  $u(t)$  — кусочно непрерывное  $p$ -мерное управление. Введем в рассмотрение множество кусочных  $p$ -мерных управлений  $\mathbf{U}(b(t, w), q)$  с базовой вектор-функцией  $b(t, w)$ , зависящей от  $k$  параметров и непрерывной по всем своим аргументам. Здесь  $q$  — целое положительное число (число отрезков разбиения рабочего временного интервала  $[t_I, t_F]$ ). Пусть  $W$  — действительная матрица параметров размера  $k \times q$  вида

$$W = \begin{pmatrix} w^1(t_I) & w^1(t_I + h) & \dots & w^1(t_I + (q - 1)h) \\ w^2(t_I) & w^2(t_I + h) & \dots & w^2(t_I + (q - 1)h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^k(t_I) & w^k(t_I + h) & \dots & w^k(t_I + (q - 1)h) \end{pmatrix},$$

где  $h = \frac{t_F - t_I}{q}$ , тогда любую функцию  $u(t)$  рассматриваемого класса кусочных управлений  $\mathbf{U}(b(t, w), q)$  можно записать в виде

$$u(t) = b(t, w(t)) = \begin{cases} b(t, w(t_I)), & t \in [t_I, t_I + h), \\ b(t, w(t_I + h)), & t \in [t_I + h, t_I + 2h), \\ \vdots \\ b(t, w(t_I + (q - 1)h)), & t \in [t_I + (q - 1)h, t_F). \end{cases}$$

Отметим, что задание базовой функции в виде постоянной вектор-функции  $b(t, w) = (w^1, w^2, \dots, w^p)^T$  приводит к классу кусочно-постоянных управлений, а в виде линейной вектор-функции  $b(t, w) = (w^1 t + w^2, w^3 t + w^4, \dots, w^{2p-1} t + w^{2p})^T$  приводит к классу кусочно-линейных управлений.

Проведем сужающее преобразование модели объекта, а именно, вместо исходной задачи оптимального управления  $(\mathbf{D}, I)$  будем рассматривать задачу (2.22) на множестве кусочных управлений  $\mathbf{U}(b(t, w), q)$ , которое, очевидно, вкладывается в множество допустимых управлений исходной задачи. Обозначим множество допустимых полученной задачи через  $\mathbf{D}(b(t, w), q) \subset \mathbf{D}$ , а соответствующую суженную задачу через  $(\mathbf{D}(b(t, w), q), I)$ . Решение суженной задачи дает оценку сверху для функционала исходной задачи, т. е. справедливо неравенство

$$\inf_{m \in \mathbf{D}} I(x, u) \leq \inf_{m \in \mathbf{D}(b(t, w), q)} I(x, u).$$

Суженную задачу  $(\mathbf{D}(b(t, w), q), I)$  можно записать в виде задачи оптимального управления для дискретно-непрерывной системы

$$\begin{aligned} y(t+h) &= g(t, y(t), w(t)), \quad t \in \{t_I, t_I+h, \dots, t_F-h\}, \\ y(t_I) &= x_I, \quad w \in \mathbb{R}^k, \quad b(t, w(t)) \in \mathbf{U}(t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \\ I &= F(y(t_F)) \rightarrow \inf, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где  $g(t, y(t), w(t))$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{z}(\tau) &= f(\tau, z(\tau), b(\tau, w(t))), \quad \tau \in [t, t+h], \\ z(t) &= y(t), \end{aligned} \tag{2.24}$$

взятое в точке  $\tau = t+h$ . Как нетрудно видеть, непрерывная система нижнего уровня в данном случае не содержит управления, в то время как дискретная система верхнего уровня содержит  $k$  управлений. Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.1.** Если пара  $(y(t), w(t))$  является допустимой парой в задаче (2.23), то пара  $(x(t), u(t))$ , где  $u(t) = b(t, w(t))$ , а  $x(t)$  определяет-

ся на каждом отрезке непрерывности  $u(t)$  как решение задачи Коши (2.24), является допустимой парой задачи (2.22).

Рассмотренное сужающее преобразование позволяет для решения исходной задачи использовать методы и соответствующие алгоритмы решения дискретных задач, что существенно сокращает объемы вычислений в силу дискретизации времени и применения рекурсивных соотношений вместо их непрерывных аналогов — уравнений в частных производных. В процессе программной реализации алгоритмов улучшения управления для непрерывных задач оптимального управления подобное сужающее преобразование естественным образом необходимо и чаще всего осуществляется для постоянных или линейных базовых функций.

На практике целесообразно строить семейство вложенных суженных задач  $(\mathbf{D}(b(t, w), 2^i q), I)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , при фиксированной базисной функции с целью получения последовательности оценок

$$\begin{aligned} \inf_{(x,u) \in \mathbf{D}} I(x, u) &\leq \dots \leq \inf_{(x,u) \in \mathbf{D}(b(t,w), 4q)} I(x, u) \leq \\ &\leq \inf_{(x,u) \in \mathbf{D}(b(t,w), 2q)} I(x, u) \leq \inf_{(x,u) \in \mathbf{D}(b(t,w), q)} I(x, u). \end{aligned}$$

**Пример 2.5.** Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= x^1(t) + u(t), \quad t \in [0, 1], \\ \dot{x}^2(t) &= (x^2(t))^2 + (u(t))^2, \\ x^1(0) &= 1, \quad x^2(0) = 0, \quad I = F(x(1)) = x^2(1) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Известно точное решение этой задачи

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \frac{e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}(t-2)}}{e^{2\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} + 1}, \\ \hat{x}(t) &= \frac{e^{\sqrt{2}t}(\sqrt{2} + 1) + e^{-\sqrt{2}(t-2)}(\sqrt{2} - 1)}{e^{2\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} + 1}, \end{aligned}$$

при этом оптимальное значение функционала

$$F(\hat{x}(1)) = \frac{e^{2\sqrt{2}} - 1}{e^{2\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} + 1} \approx 1.6895.$$

Построим семейство суженных задач, выбрав в качестве базовой функции постоянную функцию  $b(t, w) = w$ . Или, другими словами, решим исходную задачу на множестве кусочно-постоянных функций  $\mathbf{U}(w, q)$ . Суженную задачу  $(\mathbf{D}(w, q), I)$  можно записать в виде задачи оптимального управления для дискретно-непрерывной системы

$$\begin{aligned} y^1(t+h) &= g^1(t, y(t), w(t)), \quad t \in \{0, h, \dots, 1-h\}, \quad h = \frac{1}{q}, \\ y^2(t+h) &= g^2(t, y(t), w(t)), \\ y^1(0) &= 1, \quad y^2(0) = 0, \quad w \in \mathbb{R}^1, \\ I &= F(y(1)) = y^1(1) \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где  $(g^1(t, y(t), w(t)), g^2(t, y(t), w(t)))^T$  — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{z}^1(\tau) &= z^1(\tau) + w(t), \quad \tau \in [t, t+h], \\ \dot{z}^2(\tau) &= (z^1(\tau))^2 + (w(t))^2, \\ z^1(t) &= y^1(t), \quad z^2(t) = y^2(t), \end{aligned}$$

взятое в точке  $\tau = t+h$ . Решение задачи Коши для непрерывной системы нижнего уровня можно выписать явно в аналитическом виде, что позволяет переписать задачу для дискретной системы верхнего уровня в виде стандартной дискретной задачи оптимального управления

$$\begin{aligned} y^1(t+h) &= b_1 y^1(t) + b_2 w(t), \quad t \in \{0, h, \dots, 1-h\}, \\ y^2(t+h) &= y^2(t) + a_1 (y^1(t))^2 + a_2 y^1(t) w(t) + a_3 (w(t))^2, \\ y^1(0) &= 1, \quad y^2(0) = 0, \quad I = F(y(1)) = y^1(1) \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где  $a_1 = \frac{e^{2h}-1}{2}$ ,  $a_2 = (e^h - 1)^2$ ,  $a_3 = \frac{e^{2h}}{2} - 2e^h + 2h + \frac{3}{2}$ ,  $b_1 = e^h$ ,  $b_2 = e^h - 1$ .

Для решения полученной дискретной задачи оптимального управления можно воспользоваться схемой Беллмана, функцию Кротова при этом следует искать в виде  $\varphi(t, y^1, y^2) = -y^2 + \psi(t)y^1$ . Разрешая соотношения схемы Беллмана, находим функцию  $\psi(t)$  и оптимальное управление  $\hat{w}(t, y^1)$  в виде управления с обратной связью

$$\psi(t) = \psi(t+h)b_1^2 - a_1 + \frac{(2\psi(t+h)b_1b_2 - a_2)^2}{4(a_3 - \psi(t+h)b_2^2)}, \quad t = 1-h, \dots, 0, \quad \psi(1) = 0,$$

$$\widehat{w}(t, y^1) = \frac{2\psi(t+h)b_1b_2 - a_2}{2a_3 - 2\psi(t+h)b_2^2} y^1, \quad t = 0, h, \dots, 1-h.$$

Замыкая дискретную систему полученным управлением, можно найти соответствующее управление в виде программного управления  $\widehat{w}(t)$  и оптимальную траекторию  $\widehat{y}(t)$ .

Было построено семейство вложенных суженных задач  $(\mathbf{D}(w, 2^i q), I)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , с целью получения последовательности уменьшающихся оценок исходного функционала. На рисунке 2.2 приведены сравнительные графики оптимальных управлений для исходной задачи  $(\mathbf{D}, I)$  (пунктирная линия) и для задач  $(\mathbf{D}(w, 2), I)$ ,  $(\mathbf{D}(w, 8), I)$ ,  $(\mathbf{D}(w, 32), I)$ .

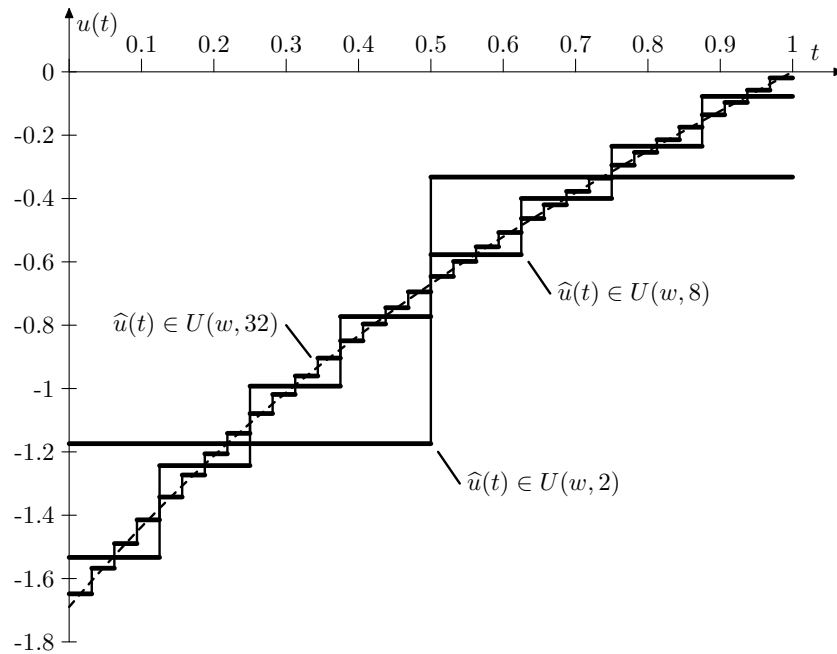


Рисунок 2.2 –



Результаты аналитических расчетов приведены в следующей таблице.

**Таблица 2.1.**

$q$	$F(\hat{y}(1))$	$F(\hat{y}(1)) - F(\hat{x}(1))$
2	1.7534	0.0638
4	1.7053	0.0158
8	1.6935	0.0040
16	1.6905	0.0010
32	1.6898	0.0002
64	1.6896	0.0001
128	1.6895	0.0000

## 2.5 Схема приближенного исследования задач управления

При практическом исследовании прикладных задач следует иметь в виду, что в распоряжении исследователя далеко не всегда имеется готовая математическая постановка задачи и даже готовая математическая модель исследуемого объекта. Зачастую объекты управления настолько сложны и представлены настолько сложными и разнотипными описаниями (аналитические формулы, табличные зависимости, компьютерные программы), что они исключают непосредственное применение теоретических методов и выбор хороших начальных приближений интуитивным путем. Поэтому ранее известные и создающиеся методы работы с математическими моделями, сколь бы ни эффективными они были сами по себе, требуют определенных подготовительных шагов, также выполняемых по приближенным схемам. В целом предлагается общая схема приближенного исследования задач управления, состоящей из следующих основных этапов (рисунок 2.3).

**Этап 1.** Упрощающие преобразования модели объекта на основе принципа расширения (введение новых множеств  $\mathbf{E}^i \supset \mathbf{D}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ), или преобразо-

вания типа аппроксимации (введение новых множеств  $\mathbf{E}^i$ ,  $i - n = \overline{1, l}$ , таких, что свойства элементов множеств  $\mathbf{E}^i$  и  $\mathbf{D}$  похожи), или сужающие преобразования (введение новых множеств  $\mathbf{E}^i = \mathbf{D}^i(b(t, w), q) \subset \mathbf{D}$ ,  $i - n - l = \overline{1, s}$ ), позволяющие заменить исходную задачу  $(\mathbf{D}, I)$  семейством задач  $(\mathbf{E}^i, I)$  для которых возможно эффективно проводить последующие этапы исследования;

**Этап 2.** Поиск решений  $m^{k_i} = (x^{k_i}, u^{k_i}) \in \mathbf{E}^i$ ,  $i = \overline{1, n + l + s}$ ,  $k_i = \overline{1, l_i}$  (точных или приближенных) семейства задач  $(\mathbf{E}^i, I)$  и тем самым поиск оценки снизу функционала  $I$  в виде

$$\inf_{m \in \mathbf{D}} I(m) \geq \max_{i=\overline{1, n}, k_i=\overline{1, l_i}} I(m^{k_i});$$

или оценки сверху функционала  $I$  в виде

$$\inf_{m \in \mathbf{D}} I(m) \leq \min_{i-n-l=\overline{1, s}, k_i=\overline{1, l_i}} I(m^{k_i});$$

**Этап 3.** Построение приближенных решений  $\tilde{m}^{k_i} = (\tilde{x}^{k_i}, \tilde{u}^{k_i}) \in \mathbf{D}$  исходной задачи с использованием решений  $m^{k_i}$ , полученных на предыдущем этапе исследования, подсчет оценок приближенных решений  $\Delta(\tilde{m}_i^k)$ ;

**Этап 4.** Выбор лучшего приближенного решения  $\tilde{m} = (\tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathbf{D}$  из решений, полученных на предыдущем этапе исследования.

Результатом первого этапа предлагаемой схемы исследования является семейство задач  $(\mathbf{E}^i, I)$ ,  $i = \overline{1, s}$ , поиск решений которых гораздо проще поиска решения исходной задачи  $(\mathbf{D}, I)$ . Так, указанное семейство может содержать:

- линейные задачи оптимального управления с ограниченным управлением, линейно-квадратические задачи, решение которых, как известно, не представляет особых трудностей и может быть получено в точном виде;

- задачи оптимального управления, правая часть динамической системы которых линейна по управлению, что часто позволяет найти качественное приближенное решение задачи после перехода к производной задаче на основе принципа расширения, т. е. повторяя этап 1;

- задачи оптимального управления, правая часть динамической системы которых линейна по состоянию, для которых приближенное решение может быть найдено весьма эффективно с помощью глобальных алгоритмов улучшения управления;

- дискретно-непрерывные задачи оптимального управления, которые не содержат управлений на нижнем непрерывном уровне;

- другие виды задач оптимального управления, для которых известны методы поиска точного или качественного приближенного решения.

Семейство задач  $(\mathbf{E}^i, I)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , может быть получено с помощью расширений двух типов:

1) расширения с помощью замены правой части динамической системы при условии выполнения включения  $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}^i$ ;

2) расширения с помощью замены переменных  $y = \eta(t, x)$  и перехода к производной системе (метод кратных максимумов).

Расширения второго типа хорошо известны [31], поэтому в настоящей работе основное внимание уделено расширениям первого типа, ранее не изучавшиеся систематически.

Семейство задач  $(\mathbf{E}^i, I)$ ,  $i = \overline{n+1, m}$ , может быть получено, например, с помощью аппроксимации правой части динамической системы в рабочей области выбранной аналитической конструкцией, что наиболее актуально в случае, когда исходная задача не имеет полного или достаточно простого аналитического описания. Для аналитического представления модели объекта предлагается процедура, аналогичная статистическим схемам обработки массивов эмпирических данных, основанная на методе наименьших квадратов (МНК) [46]. Приближение правых частей дифференциальных уравнений, описывающих динамические системы, с использованием МНК позволяет использовать разнообразные конструкции аппроксимирующих полиномов в зависимости от особенностей объекта и решаемой задачи управления. Кроме того, алгоритмы, построенные на основе МНК, хорошо подходят для реали-

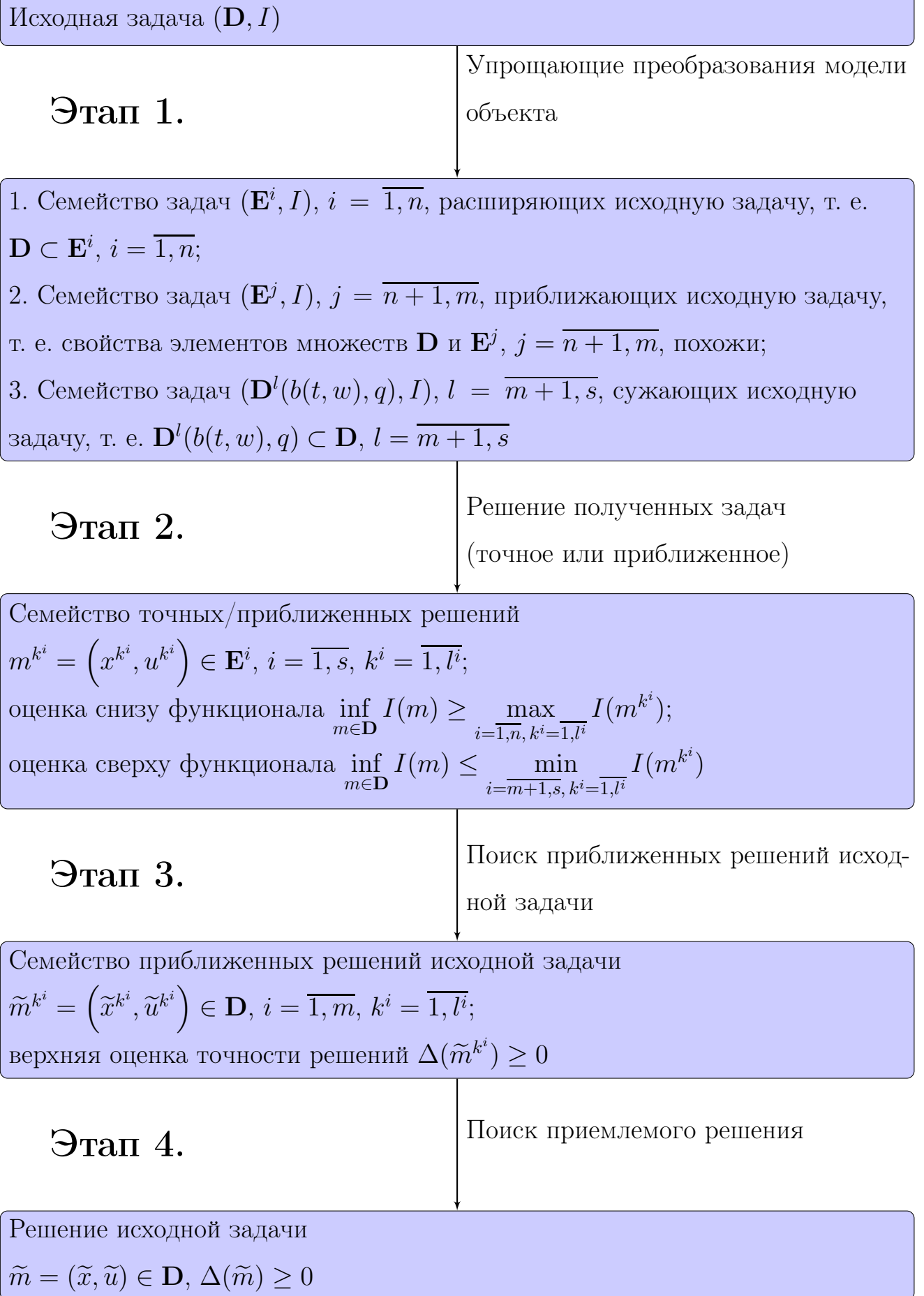


Рисунок 2.3 –

зации в среде параллельных вычислений. Из различных типов упрощающих преобразований модели объекта более простые, например линейные, могут быть использованы и для моделей, представленных полностью в аналитических терминах, с целью их упрощения и проведения эффективного качественного анализа.

Это же семейство включает задачи, полученные посредством применения расширений типа Кротова, т. е. таких, при которых дифференциальные связи полностью исключаются, а функционал с помощью функции  $\varphi(t, x)$  заменяется обобщенным лагранжианом. В этом случае можно проводить аппроксимацию исходной системы упрощенной моделью без априорного расширения с целью получения достаточно хорошей приближенной функции Кротова  $\tilde{\varphi}(t, x)$ , разрешающей упрощенную задачу. Такая функция, примененная к исходной системе, дает возможность генерировать приближенно оптимальное управление  $\tilde{u}(t, x)$  с оценкой, которая позволяет судить о качестве полученного управления, и как следствие, о качестве выбранной аппроксимации динамической системы.

Семейство задач  $(\mathbf{D}^l(b(t, w), q), I), l = \overline{m+1, s}$ , может быть получено с помощью сужающих преобразований, ограничивающих поиск решений в классах кусочных управлений с заданными базовыми функциями. В этом случае исходная задача сводится к дискретно-непрерывной задаче оптимального управления, которая на нижнем (непрерывном) уровне не содержит управляющих функций, что позволяет применять к решению задачи известные методы для дискретных систем. Подобный подход позволяет существенно упростить и сократить время расчетов, что особенно актуально для систем большой размерности.

Второй этап исследования предполагает поиск точного решения семейства задач, полученных на этапе 1, если точное решение можно найти, и поиск приближенного решения в противном случае. Поиск приближенного решения может быть проведен на основе качественного анализа задачи с ис-

пользованием, если это необходимо, различных упрощающих допущений. Качественный анализ позволяет выработать достаточно простые приближенно-оптимальные законы управления, пригодные к использованию на практике в процессе эксплуатации. Так, наибольший интерес представляют законы управления, полученные в первом приближении на основе моделей, линеаризованных полностью или частично (относительно переменных управления), допускающих систематическое понижение порядка и приближенную декомпозицию по принципу расширения. Разработана эффективная процедура такого анализа, позволяющая учесть разнообразные фазовые ограничения, характерные для прикладных задач [38].

Поиск приближенных решений на втором этапе исследования или их уточнение может быть проведено с помощью различных итерационных методов глобального или локального улучшения управления, которые также разрабатываются и совершенствуются на основе предложенного подхода в дополнение к существующим методам.

Полученные на первом этапе с помощью принципа расширения задачи  $(\mathbf{E}^i, I)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , обладают несомненным преимуществом перед задачами, полученными с помощью аппроксимации, т. к. позволяют дополнительно с помощью своих решений, найденных на втором этапе, найти нижнюю оценку функционала исходной задачи. Аналогичным образом, решения суженных задач  $(\mathbf{D}^l(b(t, w), q), I)$ ,  $l = \overline{m+1, s}$ , позволяют найти верхнюю оценку минимума функционала исходной задачи.

В силу того, что большинство полученных приближенных решений не являются допустимыми решениями исходной задачи, основная цель третьего этапа исследования заключается в аппроксимации приближенных решений, полученных на втором этапе, допустимыми решениями исходной задачи и, при необходимости, уточнении решений с помощью итерационных методов улучшения. Отметим, что одни и те же итерационные методы глобального или локального улучшения могут быть использованы и на втором, и на тре-

твом этапах исследования.

Четвертый этап исследования является весьма субъективным и сильно зависит от практической реализуемости окончательного решения. Так, выбор решения  $\tilde{m} \in \mathbf{D}$  может осуществляться из условия

$$\tilde{m} = \arg \min_{i=\overline{1,s}, k_i=\overline{1,l_i}} I(\tilde{m}^{k_i}),$$

или условия

$$\tilde{m} = \arg \min_{i=\overline{1,s}, k_i=\overline{1,l_i}} \Delta(\tilde{m}^{k_i}),$$

или из особенностей рассматриваемой практической прикладной задачи. Предлагаемая схема обладает большим преимуществом, т. к. позволяет получать множество решений прикладной задачи, что делает возможным в случае необходимости выбирать лучшее приемлемое решение с учетом неучтенных в модели ограничений, неопределенностями в описании модели и критерия качества управления и т. п.

Предложенная схема является априорно приближенным подходом к исследованию задач управления, в отличие от численных методов реализации теоретических результатов. Она хорошо согласуется с естественными допущениями при постановке прикладных задач, их особенностями и зарекомендовавшими себя разнообразными методами и приемами их математического исследования, что существенно расширяет возможности приближенного исследования задач управления, прежде всего — оптимального. Общая схема исследования ориентирована на реализацию в среде параллельных вычислений, т. к. заключается в поиске приближенных решений различными предложенными методами самостоятельных задач семейства  $(\mathbf{E}^i, I)$ .

Еще один аргумент в пользу априорно приближенного подхода — неопределенность, связанная с субъективностью критерия оптимальности, представленного минимизируемым функционалом. При постановке задачи требуется дать описание множества допустимых  $\mathbf{D}$ , что связано с моделированием объекта управления, и описание функционала  $I$ , сопоставляющего каждо-

му возможному варианту управления определенную числовую оценку. Это вызывает, соответственно, неопределенности двух типов. Первый тип обусловлен недостаточно полным представлением об объекте управления, недостатком информации о нем, второй — субъективным характером критерия сравнения (функционала  $I$ ).

Если неопределенности первого типа хотя бы принципиально устранимы за счет наблюдения и изучения объекта, то неопределенности второго типа, связанные с неоднозначностью одного из элементов задачи — функционала  $I$ , принципиально неустранимы и влекут неопределенность решения при сколь угодно точном описании этого множества. Это хорошо известная проблема неопределенности целей при принятии решений, изучаемая в теории управления, исследовании операций и системном анализе. Хотя существует ряд процедур, которые позволяют формулировать неочевидный критерий оптимальности, исходя из более простых и очевидных посылок, построение его остается интуитивным актом, отражающим в значительной мере субъективные представления исследователя о качестве того или иного варианта.

В этом заключена возможность (а практически — необходимость) упрощенного описания класса  $D$ , чтобы модель можно было отнести к тому или иному типу из числа хорошо изученных в теории. Не имеет практического смысла уточнять решение задачи оптимального управления за счет усложнения модели и, следовательно, всей процедуры исследования, если это решение для пользователя не может быть окончательным.

## 2.6 Выводы к главе 2

Исследованы различные преобразования модели объекта по принципу расширения, аппроксимации или сужения области поиска решения, направленные на упрощение исходной задачи с точки зрения ее решения разрабатываемыми методами. Подобный подход расширяет возможности предвари-



тельного анализа задачи с применением эффективных специальных методов. Рассмотрены возможные конструктивные схемы реализации указанных преобразований. Решение задачи оптимального управления на любом расширении дает нижнюю границу минимизируемого функционала, а при специальном выборе расширяющего преобразования может дать нижнюю грань и соответственно точное решение исходной задачи.

Рассмотрено приложение этого подхода к получению оценок множеств достижимости управляемых систем, что в свою очередь тесно связано с приближенной оптимизацией управления.

Предложены преобразования типа аппроксимации правой части динамической системы в рабочей области выбранной аналитической конструкцией, что наиболее актуально в случае, когда исходная задача не имеет полного или достаточно простого аналитического описания.

Представлены сужающие преобразования, ограничивающие поиск решений в классах кусочных управлений с параметрами, что позволяет свести исходную задачу к дискретно-непрерывной задаче оптимального управления, не содержащей в непрерывной части управляющих функций. Этот подход позволяет применять к решению задачи известные методы для дискретных систем и, следовательно, существенно упростить и сократить время расчетов.

На основе представленных преобразований предложена схема приближенного решения задач управления, которая является априорно приближенным подходом к исследованию задач управления, в отличие от численных методов реализации теоретических результатов. Она ориентирована на реализацию в среде параллельных вычислений и хорошо согласуется с естественными допущениями при постановке прикладных задач.

## ГЛАВА 3

### Оптимизация управления на основе минимаксного принципа

В этой главе предлагаются конструктивные методы, реализующие общий подход к эффективному улучшению управления [73, 133, 66, 67] (получивший название минимаксного принципа), посредством линейного уравнения в частных производных для случая непрерывных систем и соответствующих линейных рекуррентных соотношений для случая дискретных систем.

В абстрактных терминах минимаксный принцип состоит в задании функционала  $L(x(t), u(t))$  так чтобы он достигал максимума по  $x(t)$  на заданной паре  $m^I = (x^I(t), u^I(t))$ , тогда его минимизация по  $u(t)$  и наложение связи множества  $\mathbf{D}$ , приведет к некоторой паре  $m^{II}$  такой что  $I(m^{II}) \leq I(m^I)$ .

Вначале рассмотрим случай дискретной системы, как более простой при реализации.

#### 3.1 Дискретные системы

Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in \mathbf{T} = \{t_I, \dots, t_F\}, \\x(t_I) &= x_I, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^p, \\I(x(t), u(t)) &= F(x(t_F)) \rightarrow \min.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Задача улучшения ставится следующим образом: пусть известен допустимый элемент задачи (3.1)  $(x^I(t), u^I(t))$ , требуется найти допустимый элемент задачи (3.1)  $(x^{II}(t), u^{II}(t))$ , такой что  $F(x^{II}(t_F)) < F(x^I(t_F))$ .

Для любой функции  $\varphi(t, x)$  запишем конструкции, фигурирующие в до-

статочных условиях оптимальности:

$$L(x, u; \varphi) = G(x(t_F)) - \sum_{t=t_I}^{t_F-1} R(t, x, u),$$

где

$$G(x) = F(x) + \varphi(t_F, x) - \varphi(t_I, x_I),$$

$$R(t, x, u) = \varphi(t+1, f(t, x, u)) - \varphi(t, x).$$

Заметим, что  $L(x, u; \varphi) = F(x(t_F))$  на любой допустимой паре  $(x, u)$ .

Одна итерация известного метода глобального улучшения [73, 133] заключается в следующем:

0) Имеем начальный допустимый процесс  $(x^I(t), u^I(t))$ .

1) Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений:

$$R(t, x^I(t), u^I(t)) = \min_x R(t, x, u^I(t)), \quad t \in \{t_I, \dots, t_F - 1\}, \quad (3.2)$$

$$G(x^I(t_F)) = \max_x G(x). \quad (3.3)$$

2) Строим функцию:

$$\tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}(t, x^I(t))} R(t, x, u; \varphi^0).$$

3) Решая систему

$$x(t+1) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс  $(x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t))$ .

Далее будем называть соотношения (3.2), (3.3) *соотношениями метода глобального улучшения*, а соответствующую функцию  $\varphi^0(t, x)$  — *разрешающей функцией*.

Здесь предлагается искать разрешающую функцию  $\varphi^0(t, x)$  из условия, чтобы функционал  $L(x(t), u^I(t))$  не зависел от  $x(t)$  (это специальный случай максимума по  $x(t)$ )

$$R(t, x(t), u^I(t)) = 0, \quad t \in \{t_I, \dots, t_F - 1\}, \quad (3.4)$$

$$G(x) = -\varphi(t_I, x_I). \quad (3.5)$$

Тогда соотношения (3.2), (3.3) перепишутся в более простом виде, а именно, в виде линейных рекуррентных соотношений

$$\varphi(t, x) = \varphi(t + 1, f(t, x, u^I(t))), \quad t \in \{t_I, \dots, t_F - 1\}, \quad (3.6)$$

$$\varphi(t_F, x) = -F(x). \quad (3.7)$$

Одна итерация построенного метода глобального улучшения заключается в следующем:

0) Имеем начальный допустимый процесс  $(x^I(t), u^I(t))$ .

1) Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (3.6), (3.7).

2) Строим функцию:

$$\tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}(t, x^I(t))} \varphi^0(t + 1, f(t, x, u)) - \varphi^0(t, x). \quad (3.8)$$

3) Решая систему

$$x(t + 1) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс  $(x^{II}(t), u^{II}(t))$ .

**Теорема 3.1.** Вышеописанный метод глобального улучшения гарантирует неухудшение функционала, т. е. выполнение неравенства  $I(x^I(t), u^I(t)) - I(x^{II}(t), u^{II}(t)) \geq 0$ . Если же для функции  $\varphi^0$ , разрешающей соотношения (3.6), (3.7), условие

$$R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0) = \max_{u \in \mathbf{U}(t, x^I(t))} R(t, x^I(t), u; \varphi^0),$$

не выполняется хотя бы при одном значении  $t \neq t_F$ , то будет верно строгое неравенство

$$I(x^I(t), u^I(t)) - I(x^{II}(t), u^{II}(t)) > 0.$$

**Доказательство.** Имеем

$$F(x^I(t_F)) - F(x^{II}(t_F)) = L(x^I(t), u^I(t); \varphi^0) - L(x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) =$$

$$\begin{aligned}
&= G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) + \\
&+ \sum_{t=t_I}^{t_F-1} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) = \\
&= G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) + \\
&+ \sum_{t=t_I}^{t_F-1} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0)) + \\
&+ \sum_{t=t_I}^{t_F-1} (R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) = \\
&= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,
\end{aligned}$$

где  $\Delta_1 = G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) = 0$  в силу (3.5),

$\Delta_2 = \sum_{t=t_I}^{t_F-1} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0)) \geq 0$  в силу (3.8),

$\Delta_3 = \sum_{t=t_I}^{t_F-1} (R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) = 0$  в силу (3.4). Тем самым теорема доказана.

Заметим, что фактически табулировать и запоминать функцию  $\tilde{u}(t, x(t))$  не требуется; она вычисляется при прямом счете; достаточно иметь только представление  $\varphi^0$ .

**Пример 3.1.** Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления

$$x(t+1) = 2x(t) + x^2(t) + 2x(t)u(t) + u^2(t), \quad t \in \{0, 1, 2\},$$

$$x(0) = -1,$$

$$F = x(2) \rightarrow \min.$$

Известно оптимальное решение задачи:  $u_*(0) = 1$ ,  $u_*(1) = 2$ ,  $F_* = -4$ .

Решим задачу с помощью метода глобального улучшения, задав некоторый начальный допустимый процесс.

0) Имеем начальный процесс  $u^I(0) = 0$ ,  $u^I(1) = 0$ ,  $x^I(0) = -1$ ,  $x^I(1) = -1$ ,  $x^I(2) = -1$ ,  $F(x^I(2)) = -1$ .

1) Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (3.6), (3.7):

$$\varphi^0(2, x) = -x,$$

$$\varphi^0(1, x) = \varphi^0(2, f(1, x, u^I(1))) = -2x - x^2,$$

$$\varphi^0(0, x) = \varphi^0(1, f(0, x, u^I(0))) = -2(2x + x^2) - (2x + x^2)^2.$$

2) Строим функции:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(1, x) &= \arg \max_u \{-2x - x^2 - 2xu - u^2 + 2x + x^2\} = \\ &= \arg \max_u \{-2xu - u^2\} = -x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(0, x) &= \arg \max_u \{-2(2x + x^2 + 2xu + u^2) - \\ &- (2x + x^2 + 2xu + u^2)^2 + 2(2x + x^2) + (2x + x^2)^2\} = \\ &= \arg \max_u \{-4xu - 4xu^3 - 8x^2u - 6x^2u^2 - 4x^3u - 6u^2 - u^4\}.\end{aligned}$$

3) Находим улучшенный процесс  $x^{\text{II}}(0) = -1$ ,  $u^{\text{II}}(0) = \arg \max_u \{-12u^2 + 4u^3 - u^4\} = 0$ ,  $x^{\text{II}}(1) = -1$ ,  $u^{\text{II}}(1) = 1$ ,  $x^{\text{II}}(2) = -2$ ,  $F(x^{\text{II}}(2)) = -2$ .

4) Найденный улучшенный допустимый процесс принимаем за начальный допустимый процесс и повторяем все шаги метода.

5) Имеем начальный процесс  $u^{\text{I}}(0) = 0$ ,  $u^{\text{I}}(1) = 1$ ,  $x^{\text{I}}(0) = -1$ ,  $x^{\text{I}}(1) = -1$ ,  $x^{\text{I}}(2) = -2$ ,  $F(x^{\text{I}}(2)) = -2$ .

6) Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (3.6), (3.7):

$$\varphi^0(2, x) = -x,$$

$$\varphi^0(1, x) = \varphi^0(2, f(1, x, u^{\text{I}}(1))) = -x^2 - 4x - 1,$$

$$\varphi^0(0, x) = \varphi^0(1, f(0, x, u^{\text{I}}(0))) = -2(2x + x^2)^2 - 4(2x + x^2) - 1.$$

7) Строим функции:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(1, x) &= \arg \max_u \{-2x - x^2 - 2xu - u^2 + x^2 + 4x + 1\} = \\ &= \arg \max_u \{-2xu - u^2 + 2x + 1\} = -x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(0, x) &= \arg \max_u \{-(2x + x^2 + 2xu + u^2)^2 - \\ &- 4(2x + x^2 + 2xu + u^2) - 1 + (2x + x^2)^2 + 4(2x + x^2) + 1\} = \\ &= \arg \max_u \{-6x^2u^2 - u^4 - 8x^2u - 4xu^2 - 4x^3u - 4xu^3 - 8xu - 4u^2\}.\end{aligned}$$

8) Находим улучшенный допустимый процесс  $(x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t))$ :  $x^{\text{II}}(0) = -1$ ,  $u^{\text{II}}(0) = \arg \max_u \{-u^4 + 4u^3 - 6u^2 + 4u\} = 1$ ,  $x^{\text{II}}(1) = -2$ ,  $u^{\text{II}}(1) = 2$ ,  $x^{\text{II}}(2) = -4$ ,  $F(x^{\text{II}}(2)) = -4$ . Он же является оптимальным процессом в исходной задаче.

Описанные методы глобального улучшения управления обладают рядом преимуществ перед активно развиваемыми в настоящее время методами локального улучшения. Соотношения рассмотренного метода (3.6), (3.7) для поиска разрешающей функции весьма удобны для программной реализации соответствующего алгоритма. При этом расчет по формулам (3.6)–(3.8) может производиться с использованием аппроксимации функции  $\varphi^0(t, x)$  при каждом фиксированном  $t$  (например, с помощью полиномов по методу наименьших квадратов), что даст возможность проводить анализ получаемой аппроксимации функции  $\varphi^0(t, x)$  в виде аналитических выражений. Соответствующий алгоритм представлен на рисунке 3.1 и состоит из следующих шагов.

1. Разрешается система (3.1) при заданных  $u^{\text{I}}(t)$  и  $x^{\text{I}}(t_I) = x_I$ , определяется  $m^{\text{I}} = (x^{\text{I}}(t), u^{\text{I}}(t))$ .

2. Задаются сетки узлов в пространстве состояний и управлений:

$$S_x(t) = \{x^{\text{I1}}(t) - \Delta x^1, x^{\text{I1}}(t), x^{\text{I1}}(t) + \Delta x^1\} \times \dots \\ \dots \times \{x^{\text{In}}(t) - \Delta x^n, x^{\text{In}}(t), x^{\text{In}}(t) + \Delta x^n\},$$

$$S_u = \{u_-^1, u_-^1 + h_u^1, \dots, u_+^1 - h_u^1, u_+^1\} \times \dots \times \{u_-^p, u_-^p + h_u^p, \dots, u_+^p - h_u^p, u_+^p\},$$

где  $\Delta x^i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $h_u^j$ ,  $j = \overline{1, p}$ , — некоторые числа (регуляторы метода).

3. На сетке узлов  $S_x(t)$  с помощью МНК ищется аппроксимация в виде полинома функции  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (3.6), (3.7).

4. Разрешается при заданном  $x(t_I) = x_I$  система

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), \arg \max_{u \in S_u} \varphi^0(t+1, f(t, x(t), u))\right),$$

определяется  $m^{\text{II}} = (x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t))$ .

5. Если  $F(x^{\text{II}}(t_F)) - F(x^{\text{I}}(t_F)) \leq \varepsilon$ , то в качестве текущего улучшенного управления выбирается  $u^{\text{I}}(t) = u^{\text{II}}(t)$ , и осуществляется переход на шаг 2, иначе итерации завершаются.

Существенно снизить время работы программы, реализующей описанный алгоритм, можно при решении задач управления некоторыми классами непрерывных систем за счет поиска разрешающей функции  $\varphi^0(t, x)$  из задачи Коши для уравнения в частных производных, являющейся аналогом соотношений (3.6), (3.7) [100].

## 3.2 Непрерывные системы

Рассмотрим непрерывную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_I, t_F], \\ x(t_I) &= x_I, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset R^p, \\ I(x(t), u(t)) &= F(x(t_F)) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Запишем конструкции, фигурирующие в достаточных условиях оптимальности:

$$L(x, u; \varphi) = G(x(t_F)) - \int_{t_I}^{t_F} R(t, x, u) dt - \varphi(t_I, x(t_I)),$$

где

$$G(\xi) = F(\xi) + \varphi(t_F, \xi),$$

$$R(t, x, u) = \varphi_x^T(t, x) f(t, x, u) + \varphi_t(t, x).$$

Заметим, что  $L(x, u; \varphi) = I(x, u)$  на любой допустимой паре  $(x, u)$ .

Одна итерация известного метода глобального улучшения [73, 133] для непрерывных систем заключается в следующем:

- 0) Имеем начальный допустимый процесс  $(x^{\text{I}}(t), u^{\text{I}}(t))$ .
- 1) Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений

$$R(t, x^{\text{I}}(t), u^{\text{I}}(t)) = \min_{x(t)} R(t, x(t), u^{\text{I}}(t)), \quad (3.10)$$



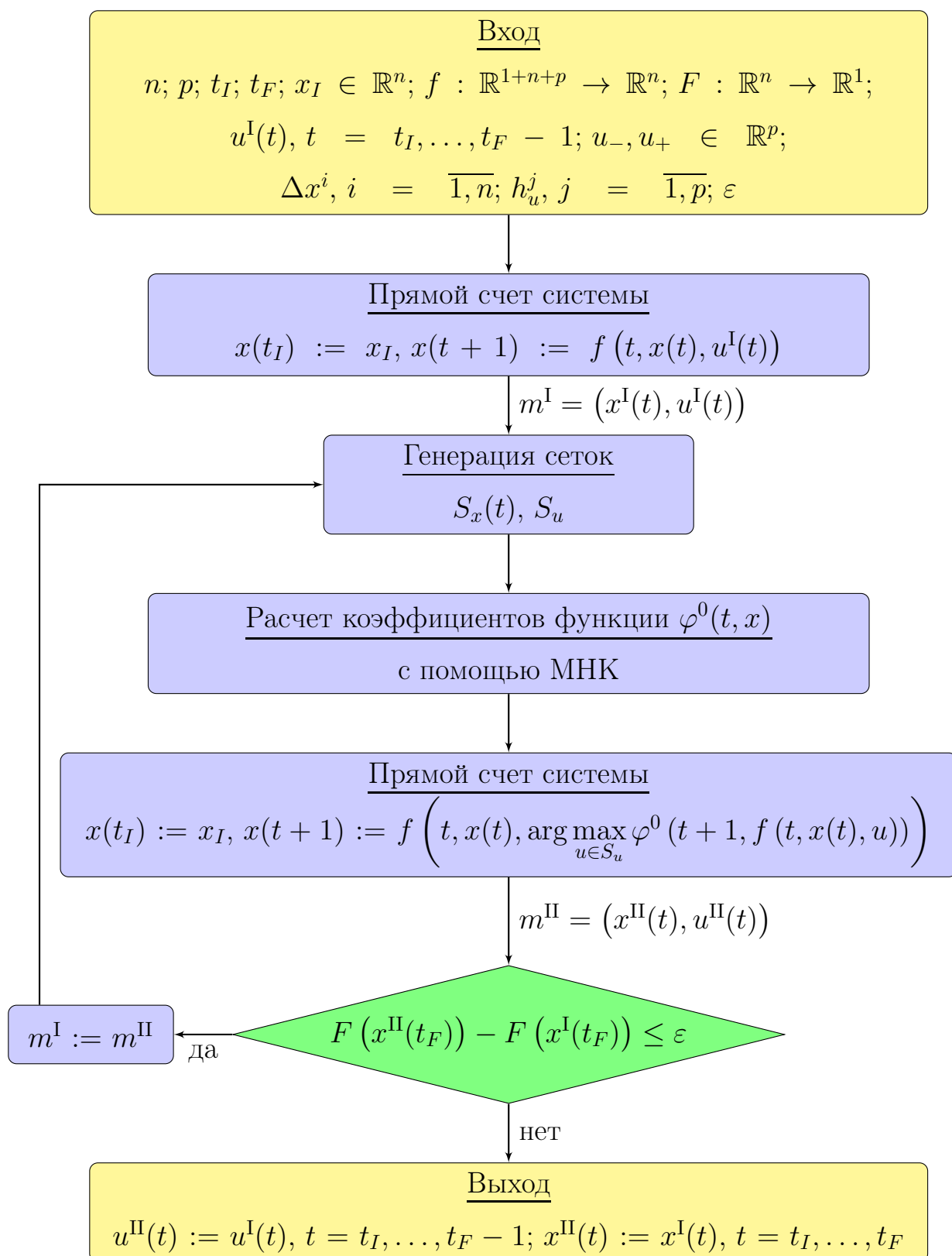


Рисунок 3.1 –

$$G(x^I(t_F)) = \max_x G(x). \quad (3.11)$$

2) Строим функцию

$$\tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}(t, x^I(t))} R(t, x, u; \varphi^0). \quad (3.12)$$

3) Решая задачу Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс  $(x^{II}(t), u^{II}(t))$ .

Метод гарантирует неухудшение функционала, т. е. выполнение неравенства  $I(x^I(t), u^I(t)) - I(x^{II}(t), u^{II}(t)) \geq 0$  [73].

Как и в дискретном случае предлагается искать функцию  $\varphi^0(t, x)$  из условия, чтобы функционал  $L(x(t), u^I(t))$  не зависел от  $x(t)$

$$R(t, x(t), u^I(t)) = 0, \quad t \in [t_I, t_F], \quad (3.13)$$

$$G(x) = -\varphi(t_I, x_I). \quad (3.14)$$

Тогда соотношения (3.10), (3.11) перепишутся в виде задачи Коши для линейного уравнения в частных производных

$$\varphi_x^T(t, x) f(t, x, u^I(t)) + \varphi_t(t, x) = 0, \quad (3.15)$$

$$F(x) + \varphi(t_F, x) = 0. \quad (3.16)$$

Одна итерация построенного метода глобального улучшения для непрерывных систем заключается в следующем:

0) Имеем начальный допустимый процесс  $(x^I(t), u^I(t))$ .

1) Ищем  $\varphi^0(t, x)$  из соотношений (3.15), (3.16) как решение задачи Коши для уравнения в частных производных.

2) Строим функцию

$$\tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}(t, x^I(t))} (\varphi_x^{0T}(t, x) f(t, x, u) + \varphi_t^0(t, x)). \quad (3.17)$$

3) Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t))), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс  $(x^{II}(t), u^{II}(t))$ .

**Теорема 3.2.** Вышеописанный метод глобального улучшения гарантирует неухудшение функционала, т. е. выполнение неравенства  $I(x^I(t), u^I(t)) - I(x^{II}(t), u^{II}(t)) \geq 0$ . Если же для функции  $\varphi^0$ , разрешающей соотношения (3.15), (3.16), условие

$$R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0) = \max_{u \in \mathbf{U}(t, x^I(t))} R(t, x^I(t), u; \varphi^0)$$

не выполняется на некотором промежутке  $(t_1, t_2) \in [t_I, t_F]$ ,  $t_1 < t_2$ , то будет верно строгое неравенство  $I(x^I(t), u^I(t)) - I(x^{II}(t), u^{II}(t)) > 0$ .

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} & I(x^I(t), u^I(t)) - I(x^{II}(t), u^{II}(t)) = \\ & = L(x^I(t), u^I(t); \varphi^0) - L(x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) = \\ & = G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) + \\ & + \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) dt = \\ & = G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) + \\ & + \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0)) dt + \\ & + \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) dt = \\ & = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \end{aligned}$$

где  $\Delta_1 = G(x^I(t_F)) - G(x^{II}(t_F)) = 0$  в силу (3.14),

$\Delta_2 = \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0)) dt \geq 0$  в силу (3.17), а

при невыполнении условия  $R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0) = \max_{u \in \mathbf{U}(t, x^I(t))} R(t, x^I(t), u; \varphi^0)$

$\forall t \neq T$  в силу (3.17) верно  $\Delta_2 > 0$ ,

$\Delta_3 = \int_{t_I}^{t_F} (R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)) dt \geq 0$  в силу (3.13). Тем самым теорема доказана.

Укажем случаи, когда соотношения для поиска разрешающей функции в виде задачи Коши для уравнения в частных производных (3.15), (3.16), могут быть заменены поиском коэффициентов разрешающей функции из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулируем указанные случаи в виде двух утверждений.

**Утверждение 3.1.** Если в постановке непрерывной задачи

$$f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u), \quad F(x) = \eta^T x,$$

то искомое решение задачи Коши для уравнения в частных производных можно найти в виде  $\varphi^0(t, x) = \nu(t) + \psi^T(t)x$ , где  $\nu(t)$ ,  $\psi(t)$  являются решением задачи Коши для системы  $n+1$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -A^T(t, u^I(t))\psi(t), & \psi(t_F) &= -\eta, \\ \dot{\nu}(t) &= -B^T(t, u^I(t))\psi(t), & \nu(t_F) &= 0. \end{aligned}$$

**Утверждение 3.2.** Если в постановке непрерывной задачи

$$f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u), \quad F(x) = \eta^T x + x^T \rho x,$$

то искомое решение задачи Коши для уравнения в частных производных можно найти в виде  $\varphi^0(t, x) = \nu(t) + \psi^T(t)x + x^T \sigma(t)x$ , где  $\nu(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\sigma(t)$  являются решением задачи Коши для системы  $n + n^2 + 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -A^T(t, u^I(t))\psi(t) - 2\sigma(t)B(t, u^I(t)), & \psi(t_F) &= -\eta, \\ \dot{\sigma}(t) &= -2\sigma(t)A(t, u^I(t)), & \sigma(t) &= -\rho, \\ \dot{\nu}(t) &= -B^T(t, u^I(t))\psi(t), & \nu(t_F) &= 0. \end{aligned}$$

Указанными частными случаями далеко не исчерпываются возможности использования соотношений глобального улучшения в форме линейных уравнений в частных производных и их дискретных аналогов. Так нетрудно показать, что и для общих линейно-квадратических относительно переменных

состояния задач — дискретной

$$x(t+1) = A(t, u)x(t) + B(t, u), \quad I = \sum_{t=t_I}^{t_F-1} x^T(t) a(t, u) x(t) + \eta^T x(t_F) + x(t_F)^T \rho x(t_F)$$

и непрерывной

$$\dot{x} = A(t, u)x(t) + B(t, u), \quad I = \int_{t_I}^{t_F} x^T(t) a(t, u(t)) x(t) dt + \eta^T x(t_F) + x(t_F)^T \rho x(t_F),$$

указанным соотношениям удовлетворяют линейно-квадратические разрешающие функции  $\varphi$ .

Но они могут быть использованы и в общем случае путем задания разрешающих функций в форме многомерных полиномов и глобальной аппроксимации в заданной области соотношений на некоторой сетке узлов в окрестности текущего приближения. Рассмотрим это подробнее. Ограничимся для краткости дискретным случаем. Рассуждения для непрерывного случая аналогичны. Функцию  $\varphi$ , зададим в форме

$$\varphi(t, x) = \psi^T(t) g(t, x), \quad (3.18)$$

где  $g(t, x)$  — некоторый набор базисных функций, а  $\psi$  — соответствующий набор коэффициентов, подлежащих определению посредством аппроксимации рассмотренных выше соотношений метода улучшения (3.6), (3.7) на некоторой сетке узлов по известному методу наименьших квадратов. Так для уравнения (3.6) будем иметь:

$$\sum_{\alpha} \left( \psi^T(t) g(t, x_{\alpha}(t)) - \mathcal{H}_{\alpha}(t) \right)^2 \rightarrow \min_{\psi(t)}, \quad t \in \mathbf{T} \setminus t_F,$$

где  $\alpha$  — номер узла,  $\mathcal{H}_{\alpha}(t) = \psi^T(t+1) g(t+1, f(t, x_{\alpha}(t), u^I(t)))$ . Минимизируемое выражение — строго выпуклая квадратичная функция от  $\psi(t)$ , ее минимум достигается в стационарной точке, удовлетворяющей линейному уравнению относительно  $\psi(t)$

$$M(t)\psi(t) = \left( \sum_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}(t) g^T(t, x_{\alpha}(t)) \right)^T,$$

с невырожденной матрицей

$$M(t) = \left( \sum_{\alpha} g(t, x_{\alpha}(t)) g^T(t, x_{\alpha}(t)) \right)^T.$$

Аналогично производится аппроксимация граничного условия (3.7). Это приводит к линейным уравнениям относительно  $\psi(t)$ ,  $\psi(t_F)$ , в результате разрешения которых получается линейная дискретная система вида:

$$\psi(t) = \mathcal{K}(t, \psi(t+1)), \quad t \in \mathbf{T} \setminus t_F, \quad \psi(t_F) = \mathcal{K}_F,$$

$\mathcal{K}_F$  — значение, получаемое при аппроксимации граничного условия.

Размеры окрестности могут регулироваться по принципу локализации во взаимосвязи с порядком аппроксимирующих полиномов.

Это дает возможность строить разнообразные итерационные процедуры различных порядков, в том числе — многометодные, с учетом специфики конкретных задач с ориентацией на параллельные вычисления.

Для непрерывных систем непосредственный выигрыш от параллельной реализации получается при известном представлении решения задачи Коши (3.15), (3.16) посредством уравнения характеристик

$$\dot{\psi}(t) = -f_x^T(t, x, u^I(t))\psi(t), \quad \psi(t_F) = -F_x(x(t_F)), \quad \dot{x}(t) = f(t, x, u^I(t)).$$

В пространстве состояний в момент  $t_F$  задается сетка узлов и для каждого узла интегрируется справа налево это уравнение совместно с исходным независимо от других узлов; при этом получаемые значения  $\psi$  — это готовые значения  $\varphi_x$  в соответствующих точках прохождения характеристики. Очевидно эти расчеты могут выполняться непосредственно в параллельном режиме.

Аналогичное представление возможно и для дискретного аналога линейного уравнения в частных производных, хотя в учебной литературе оно не отражено.

Теоремы 3.1 и 3.2 означают, что рассматриваемый метод глобального улучшения обеспечивает монотонность по функционалу построенного на его основе итерационного процесса. Другими словами, получается невозрастающая числовая последовательность  $I(m_s)$ . Если функционал  $I(m)$  ограничен снизу на множестве  $\mathbf{D}$ , то, как известно из анализа, эта последовательность имеет предел. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 3.3.** Если функционал  $I$  ограничен снизу на множестве  $\mathbf{D}$  и операции метода глобального улучшения выполнимы на каждой итерации, то этот метод генерирует монотонный итерационный процесс, сходящийся по функционалу  $I$ .

### 3.3 Улучшение для систем с линейным неограниченным управлением

Рассмотрим задачу улучшения начального элемента  $(x^I(t), u^I(t))$  для задачи вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) = g(t, x(t), u_1(t)) + h(t, x(t))u_2(t), \quad t \in [t_I, t_F], \\ u &= (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^p, \quad u_1(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^{p-1}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad F(x(t_F)) \rightarrow \inf. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь  $x(t)$  — непрерывная, кусочно-гладкая фазовая траектория,  $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$  — кусочно-непрерывное управление.

Дискретизация непрерывных процессов — типичная процедура при построении вычислительных методов, позволяющая заменить рассматриваемую непрерывную задачу дискретной задачей вида (3.1). После такой замены задачу улучшения можно решать различными итерационными методами (см. главы 3, 4) с применением современной вычислительной техники. Однако, применение численных методов улучшения в случае задачи (3.19) затрудняют отсутствие ограничений на управление  $u_2$  и проблема выбора начального управления  $u^I(t)$ .

Для рассматриваемой задачи (3.19) существует возможность преодоления указанных сложностей. Воспользуемся методом преобразования исходной системы к производной [31], который позволяет свести задачу улучшения начального управления для системы (3.19) к задаче улучшения начального управления  $(x^I(t), u_1^I(t))$  для производной задачи

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \eta_x^T g(t, x(t), u_1(t)) + \eta_t, \quad t \in [t_I, t_F], \\ y &= \eta(t, x), \quad u_1(t) \in \mathbf{U}(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^{p-1}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad y(t_I) = \eta(t_I, x_I), \\ \tilde{F}(y(t_F)) &= \min_{x \in \mathbf{Q}(t_F, y(t_F))} F(x) \rightarrow \inf, \\ \mathbf{Q}(t, y) &= \{x : y = \eta(t, x)\}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Здесь  $y(t)$  — непрерывная, кусочно-гладкая фазовая траектория,  $x(t), u_1(t)$  — кусочно-непрерывные управления,  $\eta(t, x) = (\eta^1, \dots, \eta^{n-1})$  — совокупность независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = h(t, x).$$

Теперь для решения полученной задачи (3.20) улучшения управления  $(x^I(t), u_1^I(t))$  можно произвести дискретизацию системы и воспользоваться итерационными методами улучшения управления (например, методом глобального улучшения, описанным в предыдущем пункте). Найденный процесс  $(y^{\text{II}}, x^{\text{II}}(t), u_1^{\text{II}}(t))$ , а точнее его аппроксимацию с помощью допустимых процессов исходной задачи (3.19) [31], можно выбрать в качестве начального приближения для задачи улучшения (3.19).

**Пример 3.2.** Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 u, \quad \dot{x}^2 = -1 - x^1 u, \quad t \in [0, 10], \\ x^1(0) &= 0, \quad x^2(0) = 0, \quad F(x(10)) = x^2(10) \rightarrow \min, \end{aligned}$$

и начальное управление  $u^I(t) = 1$ , которому соответствует допустимый процесс  $x^{1I}(t) = \cos t - 1, x^{2I}(t) = -\sin t$ .



Здесь  $h(t, x) = (x^2, -x^1)^T$ ,  $\eta(t, x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2$  — первый интеграл системы  $\frac{dx}{dt} = h(t, x)$ . Тогда с помощью замены переменных

$$x^1 = x^1(y, \theta) = \sqrt{y} \cos \theta, \quad x^2 = x^2(y, \theta) = \sqrt{y} \sin \theta,$$

исходная задача переходит в задачу для производной системы

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2\sqrt{y} \sin \theta, \quad t \in [0, 10], \\ y(0) &= 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi], \\ \tilde{F}(y(10)) &= \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} F(x(y(10), \theta)) = -\sqrt{y(10)} \rightarrow \min, \end{aligned}$$

где  $\theta$  — кусочно-непрерывное управление. Если присоединить отброшенное уравнение

$$\dot{\theta} = -\frac{\cos \theta}{\sqrt{y}} - u,$$

то получится представление исходной системы в новых фазовых переменных  $y, \theta$  вместо прежних  $x^1, x^2$ . Таким образом, исходная задача улучшения заменяется задачей улучшения управления

$$\theta^I(t) = -\frac{\pi + t}{2}, \quad t \in [0, \pi], \quad \theta^I(t) = \frac{3\pi - t}{2}, \quad t \in (\pi, 10)$$

для производной задачи.

Решим задачу улучшения численно с помощью метода глобального улучшения (программная реализация формул (3.6–3.8) при дискретизации системы методом Рунге-Кутты четвертого порядка) двумя различными способами.

*Способ 1.* Решим исходную задачу улучшения управления  $u^I(t)$ , поставив принудительно ограничения на управление  $|u(t)| \leq 3$ .

*Способ 2.* Решим производную задачу улучшения начального управления  $\theta^I(t)$ . Затем с помощью полученного решения  $(u^{\text{II}}(t), \theta^{\text{II}}(t))$  и отброшенного уравнения, а точнее его разностного аналога при шаге дискретизации  $h$

$$u(t) = -\frac{\cos(\theta(t))}{\sqrt{y(t)}} - \frac{\theta(t+h) - \theta(t)}{h},$$

построим начальное управление  $u^I(t)$  и решим исходную задачу улучшения, поставив ограничения на управление

$$\min_{t \in [0,10]} u^I(t) \leq u(t) \leq \max_{t \in [0,10]} u^I(t).$$

При решении по *способу 1* было проведено 19 итераций и достигнуто значение функционала  $F = -9.7601$  на колеблющемся около нуля управлении в пределах отрезка  $[-1.014, 1.374]$ . При решении по *способу 2* уже на второй итерации улучшения для производной задачи было достигнуто значение функционала  $\tilde{F} = -10$  на управлении  $\theta^{\text{II}} = -\frac{\pi}{2}$ , а построенное начальное управление  $u^I(t) = 0$  и соответствующие ему  $x^1(t) = 0$ ,  $x^2(t) = -t$  являются оптимальным процессом исходной задачи и в дальнейшем улучшении, очевидно, не нуждаются. Оптимальное значение функционала при этом  $F = -10$ .

Представленный пример наглядно демонстрирует эффективность предлагаемого перехода от исходной задачи улучшения к задаче улучшения для производной системы с целью качественного выбора начального управления для последующих итерационных методов улучшения. Стоит также отметить хорошую работу метода глобального улучшения как для решения напрямую исходной задачи, так и для решения производной задачи.

Родственный метод, более сложный в вычислительном плане, но не требующий явного описания интеграла предельной системы и соответственно — производной задачи, представлен в [71].

### 3.4 Приближенный синтез управления на основе метода улучшения

Проблема приближенного синтеза управления для непрерывной задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_I, t_F], \\ x(t_I) &= x_I, \quad u \in \mathbf{U}, \quad F(x(t_F)) \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{3.21}$$

заключается в построении последовательности функций  $\{u_s(t, x)\}_{s=1,2,\dots}$  такой, что для любых  $\tau \in [t_I, t_F)$ ,  $x_\tau \in \mathbb{R}^n$  справедливо

$$F(x_{s-1}(t_F; x_\tau)) \geq F(x_s(t_F; x_\tau)), \quad s = 2, 3, \dots,$$

где  $x_s(t; x_\tau)$  — решение задачи Коши  $\dot{x} = f(t, x, u_s(t, x))$ ,  $x(\tau) = x_\tau$ . При этом каждую функцию  $u_s(t, x)$  искомой последовательности, следуя [68], будем называть *приближенным синтезом управления*.

Известен метод последовательных приближений для поиска приближенного синтеза управления с использованием соотношений Беллмана [9, 57], который состоит в следующем.

0) Имеем начальный приближенный синтез  $u^I(t, x)$ , т. е. такую функцию, для которой при любом  $x_\tau \in \mathbb{R}^n$  процесс  $(x^I(t; x_\tau), u^I(t; x_\tau))$  является допустимым. Здесь  $x^I(t; x_\tau)$  — решение задачи Коши  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^I(t, x(t)))$ ,  $x(t_I) = x_\tau$ , а  $u^I(t; x_\tau) = u^I(t, x^I(t; x_\tau))$ .

1) Ищем  $\varphi(t, x_\tau)$  из соотношений Беллмана:

$$R(t, x, u^I(t, x)) \triangleq \varphi_x^T(t, x) f(t, x, u^I(t, x)) + \varphi_t(t, x) = 0, \quad (3.22)$$

$$G(x) \triangleq F(x) + \varphi(t_F, x_\tau) = 0, \quad (3.23)$$

при  $x = x^I(t; x_\tau)$ . Выразив  $x_\tau = \xi(t, x)$ , находим  $\varphi^0(t, x) = \varphi(t, \xi(t, x))$ .

2) Строим новый приближенный синтез:

$$u(t, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}} R(t, x, u; \varphi^0).$$

В результате итерационного повторения описанных шагов получают последовательности  $\{u_s(t, x)\}$  и  $\varphi_s(t, x)$ , если процесс построения этих последовательностей оказывается возможным [57]. Здесь функции  $\varphi_s(t, x)$  строятся сложным образом, что связано в первую очередь с интегрированием исходной системы при управлениях, зависящих от фазовых координат. Избавиться от этой сложности, а также упростить соотношения Беллмана (3.22), (3.23)

для поиска разрешающей функции позволяет метод глобального улучшения управления.

Нетрудно видеть, что соотношения (3.15), (3.16) метода глобального улучшения управления, являются аналогами соотношений Беллмана (3.22), (3.23) для поиска приближенного синтеза управления методом последовательных приближений. Разница заключается лишь в том, что вместо начального управления в форме синтеза  $u^I(t, x)$  в соотношениях (3.15), (3.16) используется начальное управление в виде функции времени — программное управление  $u^I(t)$ . Одна итерация предлагаемого метода поиска приближенного синтеза управления состоит в следующем.

0) Имеем начальное допустимое управление  $u^I(t)$ , т. е. такую функцию, для которой при любом  $x_\tau \in \mathbb{R}^n$  процесс  $(x^I(t; x_\tau), u^I(t))$  является допустимым. Здесь  $x^I(t; x_\tau)$  — решение задачи Коши  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^I(t))$ ,  $x(t_I) = x_\tau$ .

1) Ищем  $\varphi(t, x_\tau)$  из соотношений (3.15), (3.16) при  $x = x^I(t; x_\tau)$ . Выразив  $x_\tau = \xi(t, x)$ , находим  $\varphi^0(t, x) = \varphi(t, \xi(t, x))$ .

2) Строим приближенный синтез:

$$\tilde{u}(t, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}} R(t, x, u; \varphi^0),$$

который, в силу свойств метода глобального улучшения, гарантирует выполнение неравенства  $F(x^I(t_F; x_\tau)) \geq F(x^{II}(t_F; x_\tau))$  для любого  $x_\tau \in \mathbb{R}^n$ . Здесь  $x^{II}(t; x_\tau)$  — решение задачи Коши  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \tilde{u}(t, x(t)))$ ,  $x(t_I) = x_\tau$ .

Таким образом, соотношения Беллмана для определения следующего приближения к синтезу управления существенно упрощаются и позволяют на некоторых классах задач отойти от приближенного задания искомой разрешающей функции  $\varphi(t, x)$  в виде интерполяционного полинома для функции нескольких переменных, как было независимо предложено в работах различных авторов (см., например, [9, 16, 68, 57]). Однако, найденное управление  $u(t, x)$  гарантирует улучшение начального программного управления лишь

на одной итерации, т. к. выбор подходящего программного управления для следующей итерации оказывается в общем случае неочевидным.

Остановимся подробнее на случае непрерывной задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t, u(t))x(t), \quad t \in [t_I, t_F], \\ x(t_I) &= x_I, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbf{U} \subset R^p, \\ F(x(t_F)) &= \eta^T x(t_F) + x^T(t_F) \rho x(t_F) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где матрица  $\rho$  неположительно определена. Сформулируем для нее теорему об улучшении начального программного управления на одной итерации с помощью построенного управления в форме синтеза из соотношений метода глобального улучшения.

**Теорема 3.3.** Пусть  $u^I(t)$  — некоторое допустимое управление задачи (3.24),  $\tau$  — любое число из интервала  $[t_I, t_F)$ ,  $x_\tau$  — произвольный  $n$ -мерный вектор,  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица решений системы  $\dot{x} = A(t, u^I(t))x$  такая, что  $\Phi(\tau)$  есть единичная матрица, а  $\Psi(t)$  — фундаментальная матрица решений системы  $\dot{x} = -A^T(t, u^I(t))x$  такая, что  $\Psi(t_F)$  есть единичная матрица. Справедливо неравенство

$$F(x^{\text{II}}(t_F)) \leq F(x^{\text{I}}(t_F)),$$

где  $x^{\text{I}}(t)$  — решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t, u^I(t))x(t), \quad t \in [\tau, t_F], \quad x(\tau) = x_\tau,$$

$x^{\text{II}}(t)$  — решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t, u(t, x(t)))x(t), \quad t \in [\tau, t_F], \quad x(\tau) = x_\tau,$$

$$u(t, x) = \arg \max_{u \in \mathbf{U}} \left( - \left( 2x^T (\Phi^{-1}(t))^T \Phi^T(t_F) \rho^T + \eta^T \right) \Psi^T(t) A(t, u) x \right).$$

**Доказательство.** Выберем произвольным образом допустимое управление  $u^I(t)$ , момент времени  $\tau$  и  $n$ -мерный вектор  $x_\tau$ . Проведем одну итерацию метода глобального улучшения управления для задачи (3.24)

с начальным управлением  $u^I(t)$  и начальным условием  $x(\tau) = x_\tau$ . А именно, сначала найдем функцию  $\varphi(t, x) = \psi^T(t)x$ , где  $\psi(t)$  — решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A^T(t, u^I(t))\psi(t), \quad \psi(t_F) = -\eta - 2\rho x^I(t_F),$$

что следует из [69, 104]. Заметим, что  $x^I(t_F) = \Phi(t_F)\Phi^{-1}(\tau)x_\tau$ , следовательно, можно записать  $\psi(t) = -\Psi(t)(\eta + 2\rho\Phi(t_F)\Phi^{-1}(\tau)x_\tau)$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x; \tau, x_\tau) &= \arg \max_{u \in \mathbf{U}} (\psi^T(t)A(t, u)x) = \\ &= \arg \max_{u \in \mathbf{U}} \left( -(\eta + 2\rho\Phi(t_F)\Phi^{-1}(\tau)x_\tau)^T \Psi^T(t)A(t, u)x \right) = \\ &= \arg \max_{u \in \mathbf{U}} \left( -\left( 2x_\tau^T (\Phi^{-1}(\tau))^T \Phi^T(t_F)\rho^T + \eta^T \right) \Psi^T(t)A(t, u)x \right). \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что  $\tilde{u}(\tau, x_\tau; \tau, x_\tau) = u(\tau, x_\tau)$ . Убедимся в этом простой подстановкой

$$\begin{aligned} u(\tau, x_\tau) &= \arg \max_{u \in \mathbf{U}} \left( -\left( 2x_\tau^T (\Phi^{-1}(\tau))^T \Phi^T(t_F)\rho^T + \eta^T \right) \Psi^T(\tau)A(\tau, u)x_\tau \right) = \\ &= \tilde{u}(\tau, x_\tau; \tau, x_\tau). \end{aligned}$$

Тем самым теорема доказана.

Вышеизложенная теорема позволяет организовать вычислительный процесс поиска приближенного синтеза управления в заданной области изменения начальных условий  $x_I \in \mathbf{X}_I \subset \mathbb{R}^n$ . Будем предполагать, что поставленная задача поиска приближенного синтеза в заданной области решена, если известно приближенно оптимальное по функционалу управление в некоторой достаточно частой сетке узловых точек множества  $\mathbf{X}_I$ . Очевидно, поставленная задача может быть решена, как задача улучшения для каждого узла заданной сетки, что потребовало бы вычислений разрешающей функции для каждого узла на каждой итерации. С помощью вышедоказанной теоремы эти вычисления можно существенно сократить.

Для этого задается начальное управление  $u^I(t)$ , для которого проводится одна итерация метода глобального улучшения с целью получения управления в форме синтеза  $\tilde{u}(t, x)$ . Обозначим это управление через  $u^I(t, x)$ . В силу

вышеоказанной теоремы, управление  $u^I(t, x)$  улучшает начальное управление  $u^I(t)$  для любого  $x_I \in \mathbf{X}_I$ , и, следовательно, на первой итерации метода нахождение разрешающей функции удалось провести одновременно для всех узловых точек. Далее, разбив сетку узловых точек на достаточно крупные подмножества, можно выбрать в каждом подмножестве начальную точку  $x_I$  и построить для второй итерации программное управление  $u^{II}(t)$ , решая систему с начальным условием  $x(t_I) = x_I$  замкнутую управлением  $u^I(t, x)$ . Теперь вторая итерация проводится отдельно в каждом подмножестве узловых точек для своего программного управления  $u^{II}(t)$ . Это позволяет на второй итерации метода найти разрешающую функцию одновременно для всех узловых точек текущего подмножества. Для следующей итерации каждое текущее подмножество опять разбивается на части, после чего шаги метода повторяются аналогичным образом. Отметим, что в каждом подмножестве текущая итерация проходит независимо и при программной реализации может проводиться параллельно, сокращая тем самым время вычислений.

### 3.5 Выводы к главе 3

Предложены новые конструктивные методы, реализующие известные соотношения метода для произвольных систем посредством линейных рекуррентных соотношений для дискретных систем и задачи Коши для линейного уравнения в частных производных для непрерывных систем. Доказаны соответствующие теоремы об улучшении.

Представленные рекуррентные соотношения для поиска разрешающей функции существенно упрощают программную реализацию алгоритмов, соответствующих методам глобального улучшения для дискретных систем. При этом существенно снизить время работы программы, реализующей описанный метод, можно при решении задач управления некоторыми классами непрерывных систем за счет поиска разрешающей функции из задачи Коши

для уравнения в частных производных и последующего сужающего преобразования. В виде двух утверждений сформулированы случаи, когда соотношения для поиска разрешающей функции в виде решения задачи Коши для уравнения в частных производных существенно упрощаются и могут быть заменены поиском коэффициентов разрешающей функции из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Представлена модификация глобального метода улучшения применительно к задаче оптимального управления для непрерывной линейной по состоянию динамической системы с линейным неограниченным управлением.

На основе соотношений метода глобального улучшения исследована задача приближенного синтеза оптимального управления.



## ГЛАВА 4

### Методы и алгоритмы приближенной оптимизации управления

В этой главе подробно описаны итерационные методы и соответствующие алгоритмы, разработанные на основе общих подходов, предложенных в предыдущих разделах. Указаны особенности их реализации в параллельных вычислениях.

#### 4.1 Улучшение с использованием принципа локализации

Рассматривается дискретная система с управлением вида

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in \mathbf{T} = \{t_I, t_I + 1, \dots, t_F\}, \\x(t_I) &= x_I, \quad I = F(x(t_F)) \rightarrow \min,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ . Пусть  $\mathbf{D}$  - множество допустимых пар  $(x(t), u(t))$  — решений системы (4.1).

Задача улучшения в этом случае ставится следующим образом: пусть известен допустимый элемент  $m^I = (x^I(t), u^I(t)) \in \mathbf{D}$ , требуется найти допустимый элемент  $m^{II} = (x^{II}(t), u^{II}(t)) \in \mathbf{D}$ , такой что

$$I(m^{II}) = F(x^{II}(t_F)) < I(m^I) = F(x^I(t_F)).$$

Общие конструкции метода улучшения управления приведены в [31], где на основе принципа локализации элемент  $m^{II}$  ищется путем аппроксимации

решения следующей задачи:

$$\begin{aligned}
y(t+1) &= g(t, y(t), v(t)), \quad t \in \mathbf{T} = \{t_I, \dots, t_F\}, \\
y^0(t+1) &= y^0(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (v^i(t))^2, \\
y(t_I) &= 0, \quad y^0(t_I) = 0, \\
G_\alpha(y^0(t_F), y(t_F)) &= \alpha y^0(t_F) + (1 - \alpha) F(y(t_F) + x^I(t_F)) \rightarrow \min,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где  $y(t) = x(t) - x^I(t)$ ,  $v(t) = u(t) - u^I(t)$ ,  $\alpha$  — некоторое действительное число из отрезка  $[0, 1]$  (регулятор метода),

$$g(t, y, v) = f(t, y + x^I(t), v + u^I(t)) - f(t, x^I(t), u^I(t)).$$

Будем искать функцию, разрешающую приближенные соотношения метода глобального улучшения, в виде

$$\varphi(t, y^0, y) = \nu(t) + \psi^0(t)y^0 + \psi^T(t)y + \frac{1}{2}y^T\sigma(t)y,$$

где значения  $\nu(t)$ ,  $\psi^0(t)$ ,  $\psi^T(t)$ ,  $\sigma(t_F)$  находятся из соответствующих приближенных соотношений для задачи (4.2):

$$\begin{aligned}
\varphi(t_F, y^0, y) + G_\alpha(y^0, y) &\approx 0, \\
\varphi(t, y^0, y) - \varphi(t+1, y^0, g(t, y, 0)) &\approx 0, \quad t = t_{F-1}, \dots, t_I.
\end{aligned}$$

При этом управление (в форме синтеза) для задачи (4.2) ищется из условия:

$$v^{\text{II}}(t, y) \approx \arg \max_v \varphi \left( t+1, y^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (v^i)^2, g(t, y, v) \right) = 0, \quad t = t_{F-1}, \dots, t_I.$$

Таким образом, искомое решение  $m^{\text{II}} = (x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t))$  задачи (4.1) записывается как

$$\begin{aligned}
x^{\text{II}}(t_I) &= x_I, \quad x^{\text{II}}(t+1) = f(t, x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t)), \quad t \in T \setminus \{t_I\}, \\
u^{\text{II}}(t) &= v^{\text{II}}(t, x^{\text{II}}(t) - x^I(t)) + u^I(t), \quad t \in T \setminus \{t_F\}.
\end{aligned}$$

## 4.2 Методы улучшения

Ниже представлены два типа методов улучшения второго-первого порядка, получающихся при различных способах реализации указанных приближенных соотношений. В методах первого типа используется грубое приближение производных их разностными аналогами, в методах второго типа используется аппроксимация с помощью метода наименьших квадратов.

### 4.2.1 Методы первого типа

Здесь значения  $\nu(t_F)$ ,  $\psi^0(t_F)$ ,  $\psi^T(t_F)$ ,  $\sigma(t_F)$  находятся из условий:

$$\begin{aligned} \nu(t_F) &= -G_\alpha(0), \quad \psi^0(t_F) = -\alpha, \\ \psi^i(t_F) &= -\frac{1}{\gamma\Delta x^i} (G_\alpha(0|\gamma\Delta x^i) - G_\alpha(0)), \\ \sigma^{ii}(t_F) &= -\frac{1}{(\gamma\Delta x^i)^2} (G_\alpha(0|2\gamma\Delta x^i) - 2G_\alpha(0|\gamma\Delta x^i) + G_\alpha(0)), \\ \sigma^{ij}(t_F) &= -\frac{1}{\gamma^2\Delta x^i\Delta x^j} (G_\alpha(0|\gamma\Delta x^i, \gamma\Delta x^j) - \\ &\quad - G_\alpha(0|\gamma\Delta x^i) - G_\alpha(0|\gamma\Delta x^j) + G_\alpha(0)), \quad i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\gamma$  — некоторое число (регулятор метода),  $\Delta x^i$  — единица масштаба переменной  $x^i$ . Здесь через  $G_\alpha(0|\gamma\Delta x^i)$  обозначено значение функции  $G_\alpha$  в точке

$$(y^0, y^1, \dots, y^{i-1}, y^i, y^{i+1}, \dots, y^n) = (0, 0, \dots, 0, \gamma\Delta x^i, 0, \dots, 0).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} H_\alpha(t, y, v) &= \nu(t+1) - \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^p (v^i)^2 + \psi^T(t+1)g(t, y, v) + \\ &\quad + \frac{1}{2}g^T(t, y, v)\sigma(t+1)g(t, y, v). \end{aligned}$$

Используя приближенное тейлоровское представление этой функции относительно  $y, v$  в окрестности нуля,

$$\tilde{H}(t, y, v) = H^0 + H_y^0 y + H_v^0 v + \frac{1}{2} (y^T H_{yy}^0 y + y^T H_{yv}^0 v + v^T H_{vy}^0 y + v^T H_{vv}^0 v),$$

коэффициенты которого получаются заменой производных разностными аналогами, положим

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t, y) &= \arg \max_v \left( H_v^{T0} v + \frac{1}{2} (y^T H_{yv}^0 v + v^T H_{vy}^0 y + v^T H_{vv}^0 v) \right) = \\ &= -N_\alpha^{-1}(t) (M_\alpha(t) + P_\alpha^T(t)y), \quad t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\},\end{aligned}$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} N^{jj}(t) = \frac{H_\alpha(t, 0|2\delta\Delta u^j) - 2H_\alpha(t, 0|\delta\Delta u^j) + H_\alpha(t, 0)}{(\delta\Delta u^j)^2}, \\ N^{kj}(t) = \frac{1}{\delta^2\Delta u^k\Delta u^j} (H_\alpha(t, 0|\delta\Delta u^k, \delta\Delta u^j) - H_\alpha(t, 0|\delta\Delta u^k) - \\ - H_\alpha(t, 0|\delta\Delta u^j) + H_\alpha(t, 0)), \quad k, j = \overline{1, p}, k \neq j, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M^j(t) = \frac{1}{\delta\Delta u^j} (H_\alpha(t, 0|\delta\Delta u^j) - H_\alpha(t, 0)), \\ P^{ij}(t) = \frac{1}{\gamma\delta\Delta x^i\Delta u^j} (H_\alpha(t, 0|\gamma\Delta x^i, \delta\Delta u^j) - H_\alpha(t, 0|\gamma\Delta x^i) - \\ - H_\alpha(t, 0|\delta\Delta u^j) + H_\alpha(t, 0)), \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}, \end{array} \right. \quad (4.5)$$

где  $\delta$  — некоторое число (регулятор метода),  $\Delta u^j$  — единица масштаба переменной  $u^j$ . Здесь через  $H_\alpha(t, 0|\gamma\Delta x^i, \delta\Delta u^j)$  обозначено значение функции  $H_\alpha$  в точке

$$\begin{aligned}(t, y^1, \dots, y^{i-1}, y^i, y^{i+1}, \dots, y^n, v^1, \dots, v^{j-1}, v^j, v^{j+1}, \dots, v^p) = \\ = (t, 0, \dots, 0, \gamma\Delta x^i, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \delta\Delta u^j, 0, \dots, 0).\end{aligned}$$

Далее, положив  $L_\alpha(t, y) = H_\alpha(t, y, 0)$ , получим:

$$\begin{aligned}\nu(t) &= L_\alpha(t, 0), \quad \psi^0(t) = -\alpha, \\ \psi^i(t) &= \frac{1}{\gamma\Delta x^i} (L_\alpha(t, 0|\gamma\Delta x^i) - L_\alpha(t, 0)), \\ \sigma^{ii}(t) &= \frac{1}{(\gamma\Delta x^i)^2} (L_\alpha(t, 0|2\gamma\Delta x^i) - 2L_\alpha(t, 0|\gamma\Delta x^i) + L_\alpha(t, 0)), \\ \sigma^{ij}(t) &= \frac{1}{\gamma^2\Delta x^i\Delta x^j} (L_\alpha(t, 0|\gamma\Delta x^i, \gamma\Delta x^j) - L_\alpha(t, 0|\gamma\Delta x^i) - \\ &- L_\alpha(t, 0|\gamma\Delta x^j) + L_\alpha(t, 0)), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.\end{aligned} \quad (4.6)$$

Положим

$$\tilde{u}(t, x) = \tilde{v}(t, x - x^I(t)) + u^I(t). \quad (4.7)$$

С помощью уравнений системы (4.1) найдем улучшенный элемент

$$m^{\text{II}} = (x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t)):$$

$$\begin{aligned} x^{\text{II}}(t+1) &= f(t, x^{\text{II}}(t), \tilde{u}(t, x)), \\ x^{\text{II}}(t_I) &= x_I, u^{\text{II}}(t) = \tilde{u}(t, x^{\text{II}}(t)). \end{aligned}$$

Соответствующий этому локальному методу алгоритм представлен на рисунке 4.1 и состоит из следующих шагов.

1. Разрешается система (4.1) при заданных  $u^{\text{I}}(t)$ ,  $t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}$ , и  $x^{\text{I}}(t_I) = x_I$ , откуда определяем  $m^{\text{I}} = (x^{\text{I}}(t), u^{\text{I}}(t))$ . Задается сетка по регуляторам  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  метода:

$$S(\beta) = \left\{ (\alpha, \gamma, \delta) \in \{0, h_\alpha, \dots, 1\} \times \{\gamma_{\min}, \gamma_{\min} + h_\gamma, \dots, \gamma_{\max}\} \times \{\delta_{\min}, \delta_{\min} + h_\delta, \dots, \delta_{\max}\} \right\}_{\beta=1}^{\beta_{\max}}.$$

2. Для каждого значения  $\beta = \overline{1, \beta_{\max}}$  задается  $(\alpha, \gamma, \delta) = S(\beta)$ ,  $t = t_F$ , находятся  $\nu(t_F)$ ,  $\psi^0(t_F)$ ,  $\psi(t_F)$ ,  $\sigma(t_F)$  согласно равенствам (4.3). Для каждого значения  $t = t_F - 1, \dots, t_I + 1, t_I$  находится  $N_\alpha(t)$  согласно равенствам (4.4). Если  $\det(N_\alpha(t)) = 0$ , то задается следующее значение  $\beta$  и  $N_\alpha^{-1}(t) = E$ ,  $P_\alpha(t) = 0$ ,  $M_\alpha(t) = -u^{\text{I}}(t)$ ,  $t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}$ , иначе берется следующее значение  $t$  и вычисляются  $N_\alpha^{-1}(t)$ ,  $P_\alpha(t)$ ,  $M_\alpha(t)$ ,  $\nu(t)$ ,  $\psi^0(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\sigma(t)$  по формулам (4.4)–(4.6).

3. Для каждого значения  $\beta = \overline{1, \beta_{\max}}$  разрешается система (4.1) относительно  $x^{\text{II}}(t)$  при заданном  $x^{\text{II}}(t_I) = x_I$  и управлением, вычисленном по формуле (4.7), т. е.

$$u = -N_\alpha^{-1}(t) (M_\alpha(t) + P_\alpha^{\text{T}}(t) (x^{\text{II}}(t) - x^{\text{I}}(t))) + u^{\text{I}}(t),$$

откуда определяется

$$m^{\text{II}}|_\beta = (x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t))|_\beta.$$

4. Вычисляются значения

$$\Delta_{\max} = \max_{\beta} (F(x^{\text{I}}(t_F)) - F(x^{\text{II}}(t_F)|_\beta)),$$

$$\beta^{\text{II}} = \arg \max_{\beta} (F(x^{\text{I}}(t_F)) - F(x^{\text{II}}(t_F)|_{\beta})).$$

Если  $\Delta_{\max} \geq \varepsilon$ , то в качестве текущего улучшенного управления выбирается  $u^{\text{I}}(t) = u^{\text{II}}(t)|_{\beta^{\text{II}}}$ , и текущая итерация заканчивается, иначе полагается  $u^{\text{II}}(t) = u^{\text{I}}(t)$ ,  $t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}$  и итерации завершаются. Возможен также вариант продолжения итераций с переходом к шагу 1, где задается более мелкая сетка  $S(\beta)$ .

Это метод *второго* порядка (название происходит от генерирующей его функции Кротова, заданной полиномом второго порядка). Если положить  $\sigma(t) = 0$ , то он автоматически сводится к более простому методу *первого* порядка.

#### Пример 4.1.

$$\begin{aligned} x^1(t+1) &= x^1(t) + (u^1(t))^2, \quad t \in \mathbf{T} = \{0, 1, 2\}, \\ x^2(t+1) &= (x^2(t))^2 + (u^2(t))^2, \\ x(0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}^2, \\ I = F(x(2)) &= x^1(2) + x^2(2) \rightarrow \min, \\ u^{\text{I}}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x^{\text{I}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При этом  $F(x^{\text{I}}(2)) = 4$ .

В результате работы алгоритма при различном выборе регуляторов метода  $\alpha, \gamma, \delta$  (масштаб переменных:  $\Delta x^1 = \Delta x^2, \Delta u^1 = \Delta u^2$ ) получены улучшенные значения функционала  $F(x(2))$ . Наименьшее значение  $F(x^{\text{II}}(2)) = 0.047$ , ( $\Delta_{\max} = 3.953$ ). Соответствующая улучшенная пара:

$$\begin{aligned} u^{\text{II}}(t) &= \begin{pmatrix} -0.125 & -0.125 \\ -0.125 & -0.125 \end{pmatrix}, \\ x^{\text{II}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0.016 & 0.031 \\ 0 & 0.016 & 0.016 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

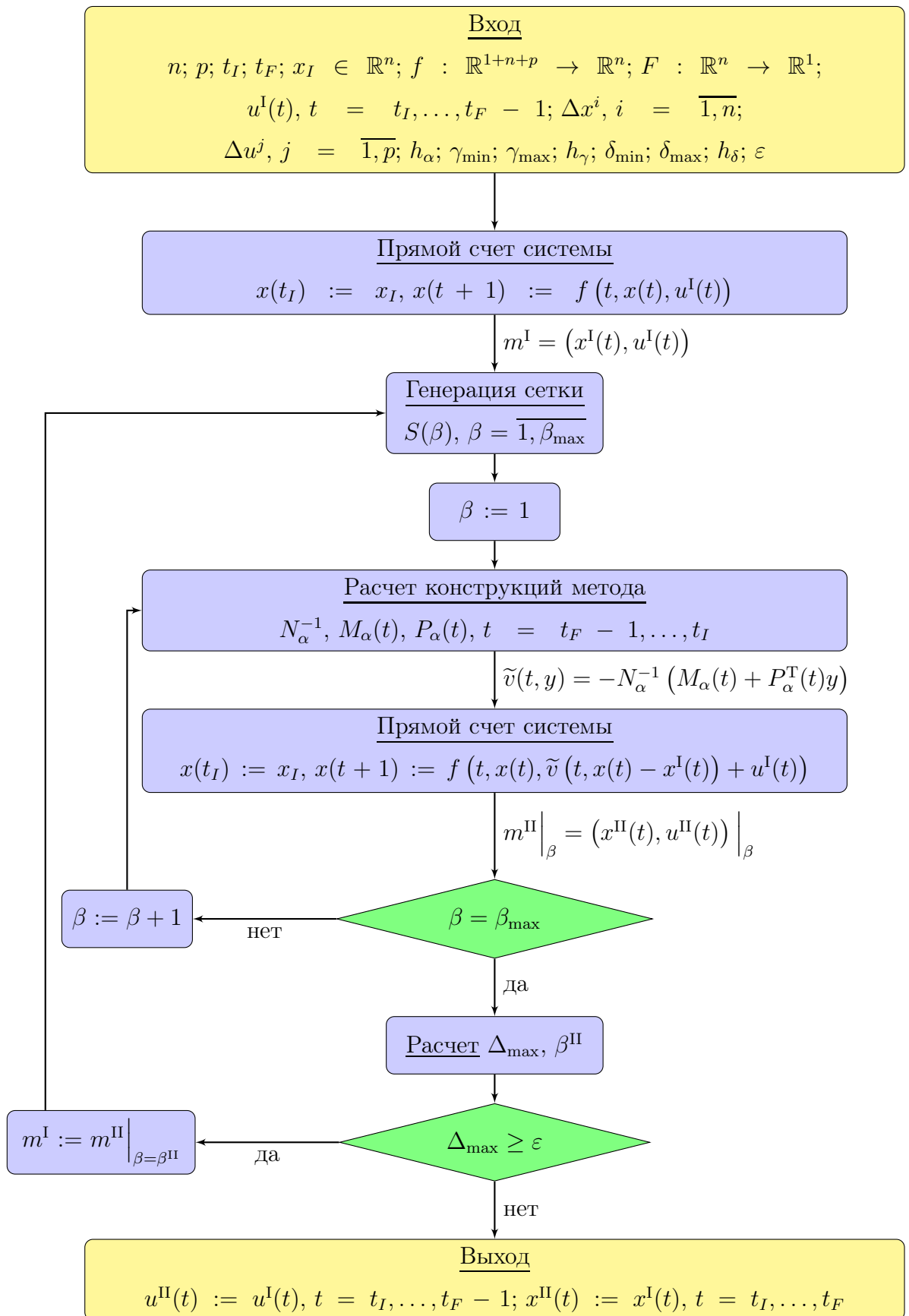


Рисунок 4.1 –

### Пример 4.2.

$$\begin{aligned}
 x^1(t+1) &= x^1(t) + (x^2(t))^2 u^1(t), \quad t \in \mathbf{T} = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\
 x^2(t+1) &= 2x^2(t) + (u^2(t))^2, \\
 x^3(t+1) &= x^3(t) + (x^1(t))^2 + (x^2(t))^2 + (u^1(t))^4 + (u^2(t))^4, \\
 x(0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}^2, \\
 F(x(4)) &= x^3(4) \rightarrow \min. \\
 u^I(t) &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \\
 x^I(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.031 & 0.313 & 1.844 \\ 0 & 0.25 & 0.75 & 1.75 & 3.75 \\ 0 & 0.125 & 0.313 & 1.001 & 4.286 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

При этом  $F(x^I(2)) = 4.286$ .

В результате работы алгоритма при различном выборе регуляторов метода  $\alpha, \gamma, \delta$  (масштаб переменных:  $\Delta x^1 = \Delta x^2 = \Delta x^3, \Delta u^1 = \Delta u^2$ ), аналогично предыдущему примеру, получены различные улучшенные значения функционала  $F$ . Наименьшее значение  $F(x^{\text{II}}(2)) = 0$  (совпадает с теоретическим минимумом). Соответствующая улучшенная пара:

$$u^{\text{II}}(t) = 0, \quad x^{\text{II}}(t) = 0.$$

#### 4.2.2 Методы второго типа

Функцию Кротова будем искать, как и прежде, в виде

$$\varphi(t, y^0, y) = \nu(t) + \psi^0(t)y^0 + \psi^T(t)y + \frac{1}{2}y^T\sigma(t)y.$$

Построим сетку узлов в пространстве состояний и управлений:

$$\begin{aligned}
 S_x(t) &= \{x^1(t) - \gamma\Delta x^1, x^1(t), x^1(t) + \gamma\Delta x^1\} \times \dots \\
 &\dots \times \{x^n(t) - \gamma\Delta x^n, x^n(t), x^n(t) + \gamma\Delta x^n\},
 \end{aligned}$$



$$S_u(t) = \{u^1(t) - k\delta\Delta u^1, u^1(t) - (k-1)\delta\Delta u^1, \dots, u^1(t) + k\delta\Delta u^1\} \times \dots \\ \dots \times \{u^p(t) - k\delta\Delta u^p, u^p(t) - (k-1)\delta\Delta u^p, \dots, u^p(t) + k\delta\Delta u^p\},$$

где  $\gamma, k, \delta$  — некоторые числа (регуляторы метода).

Значения  $\nu(t_F), \psi^0(t_F), \psi^T(t_F), \sigma(t_F)$  найдем из условий

$$\sum_{(y^0, y+x^I(t_F)) \in \{-\gamma, 0, \gamma\} \times S_x(t_F)} \left( \nu(t_F) + \psi^0(t_F)y^0 + \psi^T(t_F)y + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}y^T\sigma(t_F)y + G_\alpha(t, y^0, y) \right)^2 \rightarrow \min. \quad (4.8)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H_\alpha(t, y^0, y, v) = \nu(t+1) + \psi^0(t+1) \left( y^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (v^i)^2 \right) + \\ + \psi^T(t+1)g(t, y, v) + \frac{1}{2}g^T(t, y, v)\sigma(t+1)g(t, y, v). \quad (4.9)$$

Используя равенство (4.9), положим

$$\tilde{v}(t, y) = \arg \max_{v+u^I(t) \in S_u(t)} (H_\alpha(t, y^0, y, v)).$$

Значения  $\nu(t), \psi^0(t), \psi(t), \sigma(t), t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}$  находим из условий

$$\sum_{(y^0, y+x^I(t)) \in \{-\gamma, 0, \gamma\} \times S_x(t)} \left( \nu(t) + \psi^0(t)y^0 + \psi^T(t)y + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}y^T\sigma(t)y - H_\alpha(t, y^0, y, 0) \right)^2 \rightarrow \min. \quad (4.10)$$

Положим  $\tilde{u}(t, y) = \tilde{v}(t, y) + u^I(t)$ . С помощью уравнений системы (4.1) найдем улучшенный элемент  $m^{\text{II}} = (x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t))$ . Нетрудно видеть, что формулы (4.8) и (4.10) — приближенное нахождение коэффициентов аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов.

Соответствующий алгоритм второго порядка представлен на рисунке 4.2 и состоит из следующих шагов.

1. Разрешается система (4.1) при заданных  $u^I(t)$  и  $x^I(t_I) = x_I$ , определяется  $m^I = (x^I(t), u^I(t))$ . Задаются сетки  $S_x(t), S_u(t)$ . Задаются сетка для регуляторов  $\alpha, \gamma, k, \delta$  метода:

$$S(\beta) = \left\{ (\alpha, \gamma, k, \delta) \in \{0, h_\alpha, \dots, 1\} \times \{\gamma_{\min}, \gamma_{\min} + h_\gamma, \dots, \gamma_{\max}\} \times \right. \\ \left. \times \{k_{\min}, k_{\min} + h_k, \dots, k_{\max}\} \times \{\delta_{\min}, \delta_{\min} + h_\delta, \dots, \delta_{\max}\} \right\}_{\beta=1}^{\beta_{\max}}.$$

Для каждого значения  $\beta = \overline{1, \beta_{\max}}$  выполняется следующий шаг.

2. Полагается  $(\alpha, \gamma, \delta) = S(\beta)$ ,  $t = t_F$ , находятся  $\nu(t_F)$ ,  $\psi^0(t_F)$ ,  $\psi(t_F)$ ,  $\sigma(t_F)$  согласно равенствам (4.8). Для каждого значения  $t = t_F - 1, \dots, t_I + 1, t_I$  согласно равенствам (4.10) находятся  $\nu(t)$ ,  $\psi^0(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\sigma(t)$ .

3. Для каждого значения  $\beta = \overline{1, \beta_{\max}}$  разрешаем систему (4.1) при заданном  $x(t_I) = x_I$  и

$$\tilde{u}(t, x) = \tilde{v}(t, x - x^I) + u^I(t),$$

определяется  $m^{\text{II}} = (x^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t))$ .

4. Вычисляются значения

$$\Delta_{\max} = \max_{\beta} (F(x^I(t_F)) - F(x^{\text{II}}(t_F)|_{\beta})),$$

$$\beta^{\text{II}} = \arg \max_{\beta} (F(x^I(t_F)) - F(x^{\text{II}}(t_F)|_{\beta})).$$

Если  $\Delta_{\max} \geq \varepsilon$ , то в качестве текущего улучшенного управления выбирается  $u^I(t) = u^{\text{II}}(t)|_{\beta^{\text{II}}}$ , и текущая итерация заканчивается, иначе полагается  $u^{\text{II}}(t) = u^I(t)$ ,  $t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}$  и итерации завершаются.

Из этого алгоритма *второго* порядка при  $\sigma(t) = 0$  получается алгоритм *первого* порядка.

**Пример 4.3.** Рассматривается задача из примера 4.1 и та же допустимая пара  $(x^I(t), u^I(t))$ . В результате работы алгоритма при различном выборе регулятора метода  $\alpha$  ( $\gamma\Delta x^1 = \gamma\Delta x^2 = 1$ ,  $\delta\Delta u^1 = \delta\Delta u^2 = 0.25$ ,  $k = 4$ ) получены различные улучшенные значения функционала  $F$ . Наименьшее из них  $F(x^{\text{II}}(2)) = 0$ . Ему соответствует пара  $x^{\text{II}}(t) = 0$ ,  $u^{\text{II}}(t) = 0$ , что лучше соответствующих результатов алгоритмов 1-го типа.

**Пример 4.4.** Для примера 4.2 и той же допустимой пары  $(x^I(t), u^I(t))$  в результате работы алгоритма получаются следующие наименьшее значение функционала на сетке регуляторов метода и соответствующая пара:

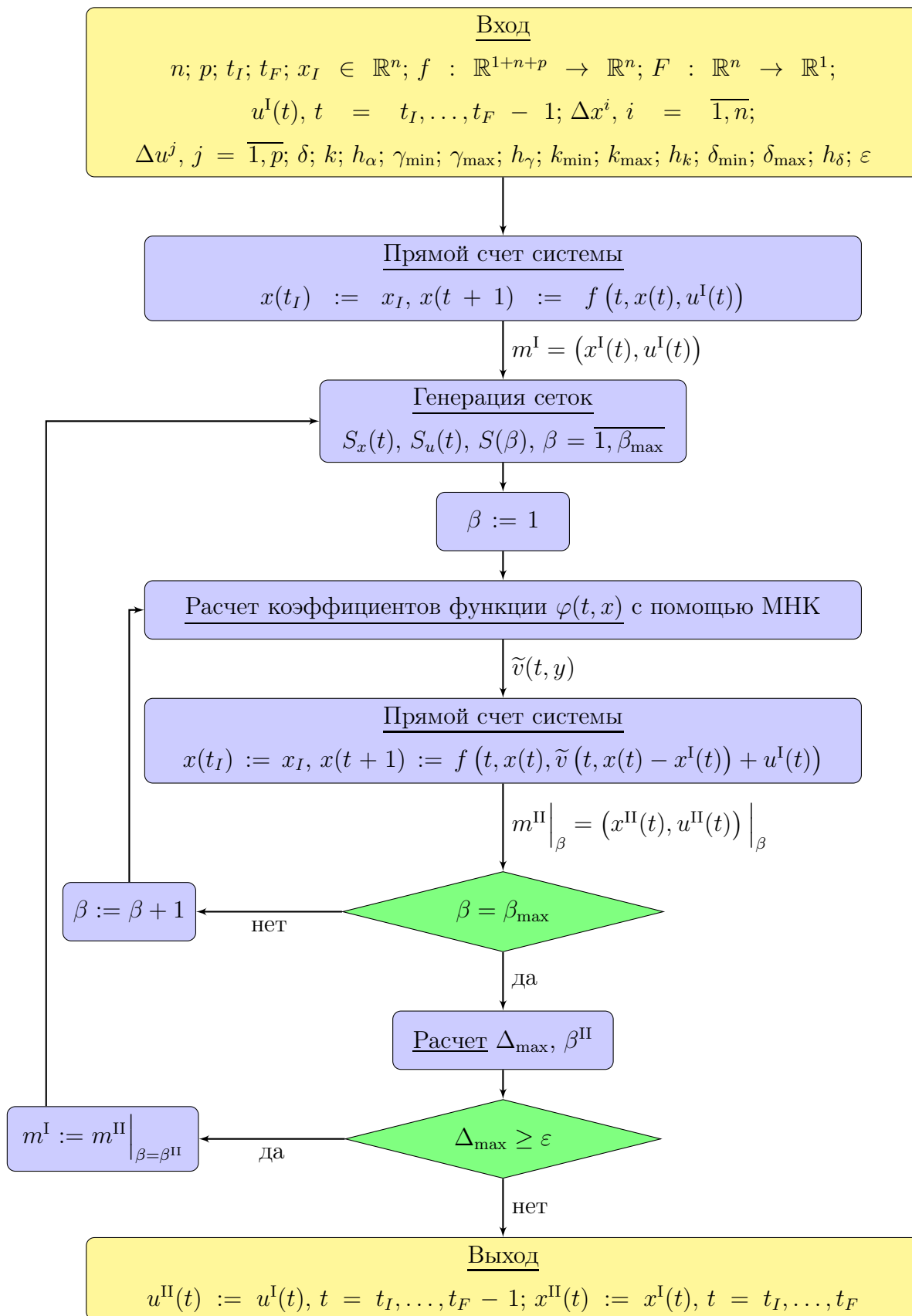


Рисунок 4.2 –

$$F(x^{\text{II}}(2)) = 1.070,$$

$$u^{\text{II}}(t) = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 & -0.5 & -0.25 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.25 \end{pmatrix},$$

$$x^{\text{II}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.063 \\ 0 & 1 & 1.063 & 1.063 & 1.070 \end{pmatrix}.$$

Этот результат хуже соответствующих результатов алгоритмов 1-го типа.

Представленные методы первого и второго типа обладают естественным параллелизмом. А именно, основные шаги соответствующих алгоритмов могут производиться независимо для каждого набора регуляторов (параметров) того или иного метода. Однако число итераций для различных наборов параметров может существенно отличаться. Эту особенность следует учесть при параллельной реализации алгоритмов на вычислительных устройствах (системы динамического распараллеливания программ предпочтительнее). Кроме явного внешнего параллелизма алгоритмы обладают еще и внутренним параллелизмом. Например, для алгоритмов, соответствующих методам второго типа, реализацию МНК можно выполнить в параллельном режиме.

### 4.2.3 Метод улучшения простой аппроксимации скользящего режима

В соответствии с [50] аппроксимация скользящего режима непрерывной системы

$$\dot{x} = g(\tau, x, u), \quad \tau \in [\tau_I, \tau_F], \quad x(\tau_I) = x_I,$$

$$(\tau_F, x_F) \in \mathbf{\Gamma}, \quad J = F(\tau_F, x(\tau_F)),$$

описывается двухуровневой моделью, на верхнем уровне которой действуют дискретные управления — моменты переключений между базовыми управлениями, а на нижнем — кусочно-непрерывные управления, близкие к базовым. Ограничение на правом конце снимается посредством штрафа  $S(\tau, x)$ ,

так что  $F(\tau, x)$  заменяется функцией

$$F_a(\tau, x) = (1 - a)F(\tau, x) + aS(\tau, x), \quad 0 < a < 1.$$

Итерационный метод улучшения строится как чередование итераций улучшения дискретного управления на верхнем уровне и непрерывного управления на нижнем уровне; при этом непрерывные процессы улучшаются по дискретной схеме посредством их дискретизации с достаточно мелким шагом, что позволяет применить один и тот же метод на обоих уровнях.

Итак, на верхнем уровне решается дискретная задача улучшения

$$\begin{aligned} \tau_I(t+1) &= w(t), \quad x_I(t+1) = x_F(t), \quad t \in \{t_I, t_I+1, \dots, t_F\}, \\ \tau_I(t_I) &= \tau_I, \quad x_I(t_I) = x_I, \\ \tau_I &< w(t_I) < w(t_I+1) < \dots < w(t_F) < \tau_F, \\ I &= F_a(\tau_F, x_F(t_F+1)), \end{aligned}$$

где  $w(t) = \tau_F(t)$ ,  $t \in \{t_I, t_I+1, \dots, t_F\}$  — дискретное управление (моменты переключений между базовыми управлениями).

На нижнем уровне решается также дискретная задача улучшения для системы

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + h(t)g(t, x(t), u(t)), \quad t \in \{t_I, t_I+1, \dots, t_F\}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad I = F_a(t_F, x(t_F)), \end{aligned}$$

где  $h(t)$  — шаг дискретизации (переменный).

Проиллюстрируем эту процедуру на примере [43].

**Пример 4.5.** Рассматривается задача оптимального управления системой

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= ((u)^2 - x^3)^2 + (x^2 - \frac{1}{4}(\tau)^2)^2 + \frac{1}{2}(\tau)^2 u, \\ \dot{x}^2 &= x^3, \quad \dot{x}^3 = u, \quad \tau \in [1, 2], \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} x^1(1) &= 0, \quad x^2(1) = \frac{1}{4}, \quad x^3(1) = \frac{1}{2}, \\ x^2(2) &= 1, \quad x^3(2) = 1, \quad J(x(2)) = x^1(2) \rightarrow \inf. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Нетрудно убедиться, что решением задачи (4.11), (4.12) будет скользящий режим

$$\widehat{x}^1(\tau) = \frac{1 - \tau^3}{6}, \quad \widehat{x}^2(\tau) = \frac{\tau^2}{4}, \quad \widehat{x}^3(\tau) = \frac{\tau}{2}, \quad \widehat{u}_{0,1} = \pm \left(\frac{\tau}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Действительно, задав функцию Кротова в одноименных достаточных условиях в виде

$$\varphi(\tau, x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2}(\tau)^2 x^3,$$

получим

$$R(\tau, x, u) = \dot{x}^1 - ((u)^2 - x^3)^2 - \left(x^2 - \frac{\tau^2}{4}\right)^2 + \tau x^3, \quad G = const.$$

Видно, что на рассматриваемом режиме функция  $R$  при каждом  $\tau$  имеет максимум, а функция  $G$  — тривиальный минимум, т. е. достаточные условия выполняются, и определяется  $\inf J = -\frac{7}{6}$ .

Рассмотрим простую аппроксимацию этого решения, построенную по стандартному правилу с числом  $s = 5$  элементарных промежутков  $[\tau_{2i}, \tau_{2i+2})$ ,  $\tau_0 = 1, \tau_{2i} = \tau_{2i-2} + s^{-1}, i = \overline{1, 5}$ , основного разбиения отрезка  $[1, 2]$ . Каждый промежуток в свою очередь делится на две части точками  $\tau_{2i+1}, i = \overline{0, 4}$ . Далее строится решение задачи (4.11), (4.12) при соответствующем базовом управлении  $\widehat{u}_{0,1}$  на каждой части элементарного промежутка. Тем самым получается кусочно-непрерывная программа управления

$$u_s(\tau) = \begin{cases} \widehat{u}_0(\tau_{2i}), & \tau \in [\tau_{2i}, \tau_{2i+1}), \\ \widehat{u}_1(\tau_{2i+2}), & \tau \in [\tau_{2i+1}, \tau_{2i+2}), \quad i = \overline{0, 4}, \end{cases}$$

и соответствующая ей кусочно-гладкая траектория

$$\begin{aligned} x_s(\tau) &= r(\tau; \tau_j, x_s(\tau_j - 0), u_s(\tau_j)), \\ x_s(\tau_0 - 0) &= \widehat{x}(\tau_0), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{0, 9}, \end{aligned}$$

где через  $r(\tau; \tau^*, x^*, u^*)$  обозначено решение системы (4.11) при  $u = u^*$  и условии  $x(\tau^*) = x^*$ . Точки  $\tau_{2i+1}, i = \overline{0, 4}$ , выбираются из условия

$$\begin{aligned} &r^3(\tau_{2i+1}; \tau_{2i}, \widehat{x}(\tau_{2i}), \widehat{u}_0(\tau_{2i})) = \\ &= r^3(\tau_{2i+1}; \tau_{2i+2}, \widehat{x}(\tau_{2i+2}), \widehat{u}_1(\tau_{2i+2})). \end{aligned}$$

Таким образом, пара  $(u_s(\tau), x_s(\tau))$  представляет собой простую аппроксимацию скользящего режима. Для рассматриваемого примера получены числовые значения управления, точек переключения управления и траектории на правом конце

$$\{u_s(\tau_0), \dots, u_s(\tau_9)\} = \{0.707; -0.775; 0.775; -0.837; \\ 0.837; -0.894; 0.894; -0.949; 0.949; -1\},$$

$$\{\tau_1, \dots, \tau_9\} = \{1.172; 1.2; 1.366; 1.4; 1.561; 1.6; 1.757; 1.8; 1.954\},$$

$$x_s(2) = (0.545; 1.026; 1.000)^T.$$

Ставится задача улучшения известного управления  $u^I(t) = u_s(t)$ : найти управление  $u^II(t)$  такое, чтобы соответствующая траектория  $x^II(t)$  удовлетворяла системе (4.11), условиям на левом конце и следующим условиям на правом конце

$$|x^{1II}(2) - x_s^1(2)| \rightarrow \min, |x^{iII}(2) - 1| \leq \varepsilon, i = 1, 2, \varepsilon = 0.010.$$

Указанные условия на правом конце временного отрезка учитываются методом штрафов, т. е. заменой исходного функционала  $J$  функционалом

$$I = F_a(x(2)) = a^1 x^1(2) + a^2 (x^2(2) - 1)^2 + a^3 (x^3(2) - 1)^2,$$

при этом коэффициенты  $a^i, i = 1, 2, 3$ , выбираются в начале каждой итерации по предыдущему улучшению из условия

$$a^1 x^1(2) = a^2 (x^2(2) - 1)^2 = a^3 (x^3(2) - 1)^2.$$

На верхнем уровне рассматривается дискретная система

$$\tau(t+1) = w(t),$$

$$x(t+1) = r(w(t); \tau(t), x(t), u(t)), \quad t \in T = \{0, 1, \dots, 8\},$$

$$\tau(0) = 1, \quad x(0) = (0; 0.25; 0.5)^T,$$

$$1 < w(0) < w(1) < \dots < w(8) < 2,$$

с функционалом

$$I = F(r(2; \tau(9), x(9), u(9))),$$

где  $\{u(0), \dots, u(9)\} = \{u_s(\tau_0), \dots, u_s(\tau_9)\}$ . В качестве начального допустимого управления здесь выступает

$$\{w^I(0), \dots, w^I(8)\} = \{\tau_1, \dots, \tau_9\}.$$

На нижнем уровне рассматривается непрерывная задача (4.11), (4.12) с функционалом  $F_a(x(2))$ , для которой известно допустимое кусочно-непрерывное управление  $u_s(\tau)$  и моменты переключений управления. Решим задачу улучшения тем же методом. Для этого заменим задачу дискретным аналогом:

$$x^1(t+1) = x^1(t) + h(t) \left( ((u(t))^2 - x^3(t))^2 + \left(x^2(t) - \frac{\tau_t^2}{4}\right)^2 + \frac{\tau_t^2}{2} u(t) \right),$$

$$x^2(t+1) = x^2(t) + h(t)x^3(t),$$

$$x^3(t+1) = x^3(t) + h(t)u(t), \quad t \in T = \{0, 1, \dots, 10\},$$

$$x^1(0) = 0, \quad x^2(0) = \frac{1}{4}, \quad x^3(0) = \frac{1}{2}, \quad I = F(x(10)) \rightarrow \inf.$$

В качестве начального допустимого управления здесь выступает

$$\{u^I(0), \dots, u^I(9)\} = \{u_s(\tau_0), \dots, u_s(\tau_9)\}.$$

После проведения трех пар итераций (дискретных и непрерывных поочередно) получено управление

$$\begin{aligned} \{u^{\text{II}}(1), u^{\text{II}}(w^{\text{II}}(0)), \dots, u^{\text{II}}(w^{\text{II}}(8))\} &= \{0.778; -0.718; \\ &0.775; -0.805; 0.860; -0.875; 0.906; -0.935; 0.958; -0.985\}, \\ \{w^{\text{II}}(0), \dots, w^{\text{II}}(8)\} &= \{1.090; 1.165; 1.346; 1.366; \\ &1.540; 1.566; 1.737; 1.767; 1.933\}, \end{aligned}$$

причем значение соответствующей траектории в правом конце стало равным  $x(2) = (0.554; 1.010; 0.995)^T$ . Видно, что значение отклонения  $(x^2(2) - 1)$



уменьшается с начального значения 0.026 до 0.010, значение отклонения  $(x^3(2) - 1)$  на третьей итерации равно 0.005 (достигается требуемая точность  $\varepsilon = 0.010$ ).

### 4.3 Итерационные методы в задачах с фазовыми ограничениями

Рассматривается дискретная система с управлением следующего вида:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in \mathbf{T} = \{t_I, \dots, t_F\}, \\ x(t_I) &= x_I, \quad F_0(x(t_F)) = l^T x(t_F) \rightarrow \min, \\ x_- \leq x(t) \leq x_+, \quad t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}, \quad x_{-F} \leq x(t_F) \leq x_{+F}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где  $x, x_I, l \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ . Вектора-ограничения

$$x_- = \{x_-^1, \dots, x_-^n\}, \quad x_+ = \{x_+^1, \dots, x_+^n\},$$

$$x_{-F} = \{x_{-F}^1, \dots, x_{-F}^n\}, \quad x_{+F} = \{x_{+F}^1, \dots, x_{+F}^n\}$$

могут содержать  $\pm\infty$  (случай отсутствия того или иного ограничения).

Используя штрафные функции, заменим исходную задачу (4.13) соответствующей задачей без фазовых ограничений:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in \mathbf{T} = \{t_I, \dots, t_F\}, \\ z(t+1) &= z(t) + \frac{1}{m} \delta(x(t)), \\ x(t_I) &= x_I, \quad z(t_I) = 0, \\ F(x(t_F), z(t_F)) &= \beta_0 l^T x(t_F) + \beta_1^T z(t_F) + \beta_2^T \delta_F(x(t_F)) \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $m = t_F - t_I$ ,

$$\delta^i(x) = -\min\{0, x^i - x_-^i\} + \max\{0, x^i - x_+^i\}, \quad i = \overline{1, n},$$

максимальное отклонение  $x^i$  от отрезка  $[x_-^i, x_+^i]$ ,

$$\delta_F^i(x) = -\min\{0, x^i - x_{-F}^i\} + \max\{0, x^i - x_{+F}^i\}, \quad i = \overline{1, n},$$

максимальное отклонение  $x^i$  от отрезка  $[x_{-F}^i, x_{+F}^i]$ ,  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  — весовые коэффициенты (выбираются на каждой итерации из учета равенства соответствующих частей функционала  $F$ ).

Пусть  $\mathbf{D}$  — множество допустимых троек  $(x(t), z(t), u(t))$  — решений системы (4.14).

Задача улучшения для полученной задачи ставится следующим образом: пусть известен элемент

$$m^I = (x^I(t), z^I(t), u^I(t)) \in \mathbf{D},$$

требуется найти элемент

$$m^{II} = (x^{II}(t), z^{II}(t), u^{II}(t)) \in \mathbf{D},$$

такой, что

$$F(x^{II}(t_F), z^{II}(t_F)) < F(x^I(t_F), z^I(t_F)).$$

Согласно общим конструкциям метода улучшения управления без фазовых ограничений элемент  $m^{II}$  ищется путем аппроксимации решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= g(t, y(t), v(t)), \quad t \in \mathbf{T} = \{t_I, \dots, t_F\}, \\ \mu(t+1) &= \mu(t) + m^{-1}\delta(y(t) + x^I(t)) - m^{-1}\delta(x^I(t)), \\ y^0(t+1) &= y^0(t) + \frac{1}{2}v^T(t)v(t), \\ y(t_I) &= 0, \quad \mu(t_I) = 0, \quad y^0(t_I) = 0, \\ G_\alpha(y^0(t_F), y(t_F), \mu(t_F)) &= \alpha y^0(t_F) + \\ &+ (1 - \alpha)F(y(t_F) + x^I(t_F), \mu(t_F) + z^I(t_F)) \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где  $y(t) = x(t) - x^I(t)$ ,  $\mu(t) = z(t) - z^I(t)$ ,  $v(t) = u(t) - u^I(t)$ ,

$$g(t, y(t), v(t)) = f(t, y(t) + x^I(t), v(t) + u^I(t)) - f(t, x^I(t), u^I(t))$$

$\alpha$  — некоторое действительное число из полуинтервала  $(0, 1]$  (регулятор метода).

Будем искать разрешающую функцию в виде

$$\varphi(t, y^0, y, \mu) = w(t) + \psi^0(t)y^0 + \psi^T(t)y + \frac{1}{2}y^T\sigma(t)y + \xi^T(t)\mu,$$

где значения  $w(t)$ ,  $\psi^0(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\sigma(t)$ ,  $\xi(t)$  находятся из следующих приближенных соотношений метода глобального улучшения для задачи (4.15):

$$\begin{aligned} \varphi(t_F, y^0, y, \mu) &\approx -G_\alpha(y^0, y, \mu), \\ \varphi(t, y^0, y, \mu) &\approx \varphi(t+1, y^0, g(t, y, 0), \mu + m^{-1}\delta(y + x^I(t)) - m^{-1}\delta(x^I(t))), \\ &t = t_{F-1}, \dots, t_I. \end{aligned}$$

При этом управление (в форме синтеза) для задачи (4.15) ищется из условия:

$$\begin{aligned} v^{\text{II}}(t, y) &\approx \arg \max_v \varphi(t+1, y^0 + \frac{1}{2}v^T v, g(t, y, v), \\ &\mu + m^{-1}\delta(y + x^I(t)) - m^{-1}\delta(x^I(t))), \quad t = t_{F-1}, \dots, t_I. \end{aligned}$$

Таким образом, управление (в форме синтеза) для задачи (4.13) записывается следующим образом:

$$u^{\text{II}}(t, x) = v^{\text{II}}(t, x - x^I(t)) + u^I(t), \quad t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}. \quad (4.16)$$

**Замечание.** В случае метода первого порядка матричная функция  $\sigma(t)$  полагается тождественным нулем. Все остальные конструкции для метода как первого, так и второго порядка одинаковы.

Соответствующий этому методу алгоритм представлен на рисунке 4.3 и состоит из следующих шагов.

1. Разрешается система (4.14) при заданных  $u^I(t)$ ,  $t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}$ ,  $x^I(t_I) = x_I$ ,  $z^I(t_I) = 0$ , откуда определяем  $m^I = (x^I(t), z^I(t), u^I(t))$ .

2. Выбираются весовые коэффициенты  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  как решения следующей подзадачи.

*Подзадача.* Известны величины  $h_0, h_1, \dots, h_k$ . Требуется найти коэффициенты  $b_0, b_1, \dots, b_k$ ,  $\sum_{i=0}^k b_i = 1$ , такие, что выполняются равенства

$$b_0 h_0 = b_1 h_1 = \dots = b_k h_k.$$

Решение подзадачи записывается в следующем виде:

$$b_i = \frac{P}{Sh_i}, \quad i = \overline{0, k}, \quad P = \prod_{i=0}^k h_i, \quad S = \sum_{i=0}^k \frac{P}{h_i}.$$

3. Для каждого значения  $\alpha \in \{\alpha_{min}, \alpha_{min} + h_\alpha, \dots, 1\}$  согласно формуле (4.16) находится  $u^{\text{II}}(t)|_\alpha$ ,  $t \in \mathbf{T} \setminus \{t_F\}$ . Определяется  $m^{\text{II}}|_\alpha = (x^{\text{II}}(t), z^{\text{II}}(t), u^{\text{II}}(t))|_\alpha$ .

4. Элемент считается улучшенным, если уменьшена величина штрафов или при равной величине штрафов уменьшено значение целевого функционала исходной задачи. В этом случае шаги алгоритма повторяются.

#### 4.4 Метод приближенно–оптимального синтеза управления в окрестности заданной траектории

Рассмотрим задачу оптимального управления следующего вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_I, t_F], \quad (4.17)$$

$$x(t_I) = x_I, \quad (4.18)$$

$$Qx(t_F) = Qx_F, \quad (4.19)$$

$$F(\overline{Q}x(t_F)) \rightarrow \min, \quad (4.20)$$

где условие  $Qx(t_F) = Qx_F$  выражает закрепление всех или части фазовых траекторий на правом конце, т. е.  $Q$  —  $k \times n$ –матрица ранга  $k$ , содержащая в каждой строке нули и ровно одну единицу,  $0 \leq k \leq n$ .

Предположим, что известно некоторое приближенное решение  $(u^{\text{I}}(t), x^{\text{I}}(t))$  задачи (4.17)–(4.20), которое не удовлетворяет условию (4.19). Поставим задачу наилучшего удовлетворения условию (4.19) (возможно с ухудшением значения функционала  $F(\overline{Q}x(t_F))$ ).

Проведем линеаризацию системы (4.17) в окрестности решения  $(u^{\text{I}}(t), x^{\text{I}}(t))$  и найдем синтез управления [99] для задачи оптимального

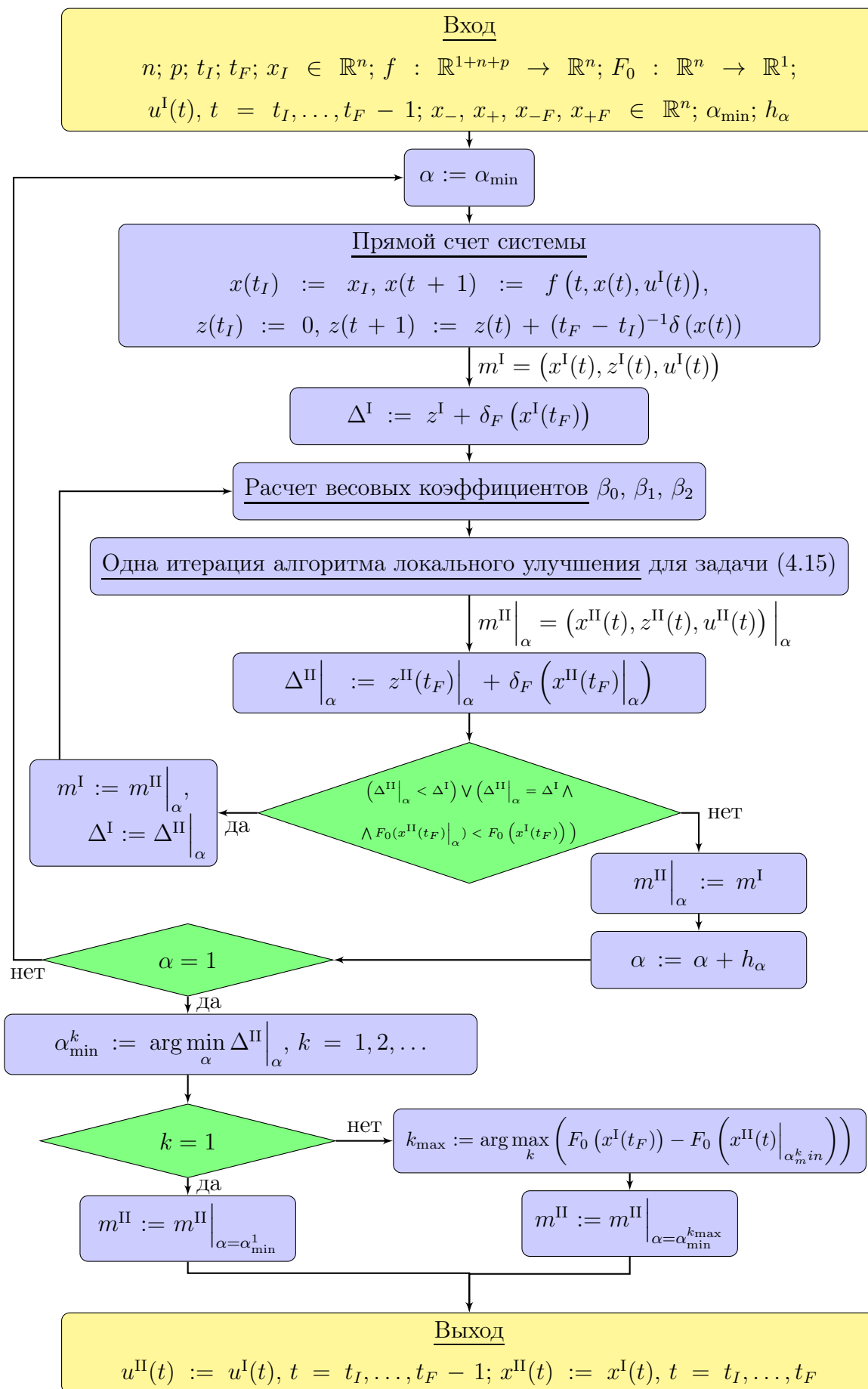


Рисунок 4.3 –

управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + L(t), \quad t \in [t_I, t_F], \quad (4.21)$$

$$x(t_I) = x_I, \quad (4.22)$$

$$Qx(t_F) = Qx_F, \quad (4.23)$$

$$J = \int_{t_I}^{t_F} f_0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (4.24)$$

где

$$A(t) = f_x^T(t, x^I, u^I), \quad B(t) = f_u^T(t, x^I, u^I),$$

$$L(t) = f(t, x^I, u^I) - f_x^T(t, x^I, u^I) x^I - f_u^T(t, x^I, u^I) u^I,$$

$$f_0(x, u) = (x - x^I)^T M(t)(x - x^I) + (u - u^I)^T R(t)(u - u^I),$$

$M(t)$  — непрерывная неотрицательно определенная функциональная матрица,  $R(t)$  — непрерывная положительно определенная функциональная матрица имеющая обратную.

Предположим, что решение  $(u^{\text{II}}(t), x^{\text{II}}(t))$  задачи оптимального управления (4.21)–(4.24) существует. Тогда оно удовлетворяет дифференциальным уравнениям принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)x(t) + \frac{1}{2}B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\psi(t) + B(t)u^I(t) + L(t), \\ \dot{\psi}(t) &= -A^T(t)\psi(t) + 2M(t)(x(t) - x^I(t)), \\ x(t_I) &= x_I, \quad Qx(t_F) = Qx_F, \quad \overline{Q}\psi(t_F) = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где  $\overline{Q}$  —  $(n - k) \times n$ -матрица, содержащая в каждой строке нули и ровно одну единицу, такая, что  $\text{rank} \begin{pmatrix} Q \\ \overline{Q} \end{pmatrix} = n$ .

Общее решение системы (4.25) можно записать так

$$x(t) = \Phi_1(t)C + g_1(t), \quad \psi(t) = \Phi_2(t)C + g_2(t),$$

где  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix}$  — фундаментальная матрица однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (4.25),

$C = C(t_I, x_I, t_F, Qx_F)$  — произвольный постоянный вектор размера  $2n$ ,  
 $g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$  — частное решение системы (4.25).

**Замечание.** В случае, когда  $M(t) \equiv 0$ , частное решение  $g(t)$  можно искать в виде  $g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ , где  $g_1(t)$  — решение дифференциальной системы  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u^I(t) + L(t)$ .

Из граничных условий найдем

$$C(t_I, x_I, t_F, Qx_F) = \Delta(t_I, t_F)^{-1} \left( \begin{pmatrix} x_I \\ Qx_F \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1(t_I) \\ Qg_1(t_F) \\ \bar{Q}g_2(t_F) \end{pmatrix} \right).$$

где  $\Delta(t_I, t_F) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t_I) \\ Q\Phi_1(t_F) \\ \bar{Q}\Phi_2(t_F) \end{pmatrix}$ . Следовательно, решение запишется в виде:

$$\begin{aligned} x^{\text{II}}(t) &= \Phi_1(t)C(t_I, x_I, t_F, Qx_F) + g_1(t), \\ u^{\text{II}}(t) &= \frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t) (\Phi_2(t)C(t_I, x_I, t_F, Qx_F) + g_2(t)) + u^I(t). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Считая правый конец частично закрепленным можно получить управление в форме синтеза [102]

$$u(t, x) = \frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t) (\Phi_2(t)C(t, x, t_F, Qx_F) + g_2(t)) + u^I(t).$$

**Пример 4.6.** Рассмотрим пример 4.5 об улучшении простой аппроксимации скользящего режима. Сформулируем задачу в терминах текущего раздела.

Итак, имеем задачу оптимального управления следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= ((u)^2 - x^3)^2 + (x^2 - \frac{1}{4}(\tau)^2)^2 + \frac{1}{2}(\tau)^2 u, \\ \dot{x}^2 &= x^3, \quad \dot{x}^3 = u, \quad \tau \in [1, 2], \\ x^1(1) &= 0, \quad x^2(1) = \frac{1}{4}, \quad x^3(1) = \frac{1}{2}, \\ x^2(2) &= 1, \quad x^3(2) = 1, \quad J(x(2)) = x^1(2) \rightarrow \inf. \end{aligned}$$

Известно некоторое приближенное решение  $(u^I(t), x^I(t))$  задачи — простая аппроксимация скользящего режима (см. пример 4.5), которое не удовлетворяет условиям  $x^2(2) = 1$ ,  $x^3(2) = 1$ , а именно:

$$x^I(2) = (0.560, 1.035, 1.014)^T.$$

Поставим задачу наилучшего удовлетворения условиям  $x^2(2) = 1$ ,  $x^3(2) = 1$ , (возможно с ухудшением значения функционала  $J(x(2))$ ).

Был организован итерационный метод, воспроизводящий на каждой итерации формулы (4.26). Уже на третьей итерации было достигнуто наилучшее выполнение требуемых условий:

$$x^II(2) = (0.607, 1, 1)^T.$$

Рассмотренный итерационный метод может быть использован не только для непосредственного решения задачи оптимального управления, но и для аппроксимации полученных решений после преобразований типа расширения.

## 4.5 Выводы к главе 4

Подробно описаны методы и соответствующие алгоритмы улучшения дискретного управления на основе принципа локализации и аппроксимации соотношений метода глобального улучшения в окрестности траектории текущего приближения.

Представлены два типа методов улучшения второго-первого порядка, получающихся при различных способах поиска разрешающей функции из приближенных соотношений метода глобального улучшения для полученной задачи. В методах первого типа используется грубое приближение производных их разностными аналогами. В методах второго типа используется метод наименьших квадратов. Все представленные методы доведены до вычисли-



тельных схем, а также исследована возможность параллельной реализации соответствующих алгоритмов на суперЭВМ.

Описан также новый метод улучшения траектории в окрестности текущего решения, основанный на сведении задачи к известной линейно-квадратической. Рассмотрено приложение метода к коррекции простой аппроксимации скользящего режима как обобщенного решения задачи управления.

Представлена модификация методов для учета фазовых ограничений по методу штрафов с автоматической регулировкой штрафных коэффициентов.

## ГЛАВА 5

### Задачи оптимизации управления в квантовых системах

В настоящее время появляется все больше работ, предлагающих применять теорию оптимального управления к задачам управления квантовым состоянием атомов и молекул под действием управляемого внешнего поля (см. например, теоретический обзор [90] и прикладные задачи [27, 136, 132, 137, 139, 140, 141, 142]). За последние несколько лет были достигнуты значительные успехи в квантовой теории информации (см., например, обзорную работу С. М. Алдошина, А. И. Зенчука, Э. Б. Фельдмана и М. А. Юрищева, 2012, [4]), что позволяет надеяться на быстрый прогресс в развитии квантовых технологий.

Большинство подобных задач, по сути, сводятся к задаче оптимального управления конечномерным уравнением Шрёдингера вида

$$\dot{z}(t) = -IH(u(t))z(t), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (5.1)$$

где гамильтониан  $H$  зависит от функции управления  $u(t)$ , при этом, по существу, решается задача перевода системы из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. Система (5.1) может быть получена, например, из исходного уравнения Шрёдингера, после разложения волновой функции и соответствующих операторов по полной системе собственных функций, в виде конечномерной аппроксимации — динамической системы с управлением, в которой роль фазовых координат играют коэффициенты разложения волновой функции.

Применение существующих численных методов оптимального управления к задачам подобного класса наталкивается на естественные трудности, связанные с большими размерностями квантовых систем, что влечет за собой неограниченный рост времени работы соответствующих расчетных компью-

терных программ. Большим преимуществом в данном случае обладают методы глобального улучшения управления (см. главу 3) прежде всего благодаря отсутствию настроечных параметров.

В данной главе рассматривается ряд задач управления квантовыми системами, к которым применяются различные варианты и модификации общего метода глобального улучшения.

## 5.1 Улучшение управления в одном классе гамильтоновых систем

Рассмотрим задачу оптимального управления для конечномерного уравнения Шрёдингера вида

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -IH(u(t))z(t), \quad t \in [t_I, t_F], \\ z(t_I) &= z_I, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad u(\cdot) \in \mathbf{U}(m, u_{low}, u_{up}), \\ J(z, u) &= F(z(t_F)) = \sum_{j=1}^n |z^j(t_F) - z^{j*}|^2 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $z(t)$  — комплекснозначная кусочно-дифференцируемая функция,  $I$  — комплексная единица,  $\mathbf{U}(m, u_{low}, u_{up})$  — множество  $p$ -мерных функций, принимающих постоянное значение на полуинтервалах  $[t_I + jh, t_I + (j+1)h)$ ,  $j = \overline{0, m-1}$ ,  $h = \frac{t_F - t_I}{m}$ , и подчиняющихся ограничениям  $u_{low} \leq u(t) \leq u_{up}$ ,  $H(u)$  — действительная симметрическая функциональная матрица (гамильтониан) непрерывная по  $u$ ,  $z^* \in \mathbb{C}^n$  — заданная точка. Нетрудно видеть, что данная задача является задачей наилучшего попадания в заданную точку.

Система имеет динамический инвариант  $S = \sum_{j=1}^n |z^j(t_I)|^2 = \sum_{j=1}^n |z^j(t)|^2$ , следовательно, исходный квадратичный функционал качества переписется в линейном виде  $F(z(t_F)) = \sum_{j=1}^n |z^j(t_F) - z^{j*}|^2 = S + \sum_{j=1}^n |z^{j*}|^2 - 2\mu(z^*, z(t_F))$ , где функция  $\mu(z^*, z) = \operatorname{Re} z^{*T} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z^{*T} \operatorname{Im} z$  линейна по своим аргументам. Функция  $\mu(z^*, z)$ , по сути, является действительной частью скалярного произведения соответствующих векторов  $(z^*, z) = z^{*T} \bar{z}$ . Всюду в дальнейшем

будем предполагать, что  $\sum_{j=1}^n |z^{j*}|^2 = S$ , поэтому целевой функционал окончательно примет вид

$$F(z(t_F)) = 2S - 2\mu(z^*, z(t_F)).$$

Отметим, что задача (5.2) может быть эквивалентным образом выписана в терминах действительных переменных. Для этого достаточно выделить отдельно действительную и мнимую части рассматриваемых величин. Соответствующая действительная постановка при этом будет иметь вид задачи управления гамильтоновой системой вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\dot{z}(t) \\ \operatorname{Im}\dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & H(u(t)) \\ -H(u(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}z(t) \\ \operatorname{Im}z(t) \end{pmatrix}.$$

Однако при рассмотрении в терминах комплексных переменных запись как самой задачи, так и дальнейших соотношений метода ее решения более компактна.

С помощью сужающего преобразования (см. п. 2.4) введем в рассмотрение дискретную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} y(t+h) &= f(t, y(t), u(t)), \quad t \in \{t_I, t_I+h, \dots, t_F-h\}, \\ y(t_I) &= z_I, \quad y \in \mathbb{C}^n, \quad u(\cdot) \in \mathbf{U}(m, u_{low}, u_{up}), \\ F(y(t_F)) &\rightarrow \min, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где  $f(t, y(t), u(t))$  — решение задачи Коши

$$\dot{x}(\tau) = -IH(u(t))x(\tau), \quad \tau \in [t, t+h], \quad x(t) = y(t), \tag{5.4}$$

взятое в точке  $\tau = t+h$ .

Поставим задачу улучшения управления для исходной системы: пусть имеется допустимая пара  $(z^I, u^I)$  задачи (5.2), требуется найти допустимую пару  $(z^{II}, u^{II})$  задачи (5.2) такую, чтобы выполнялось неравенство  $F(z^{II}(t_F)) \leq F(z^I(t_F))$ . Для системы (5.3) аналогично: пусть имеется допустимая пара  $(y^I, u^I)$  задачи (5.3), требуется найти допустимую пару  $(y^{II}, u^{II})$  задачи (5.3) такую, чтобы выполнялось неравенство  $F(y^{II}(t_F)) \leq F(y^I(t_F))$ .

**Утверждение 5.1.** Множества допустимых управлений для задач (5.2) и (5.3) совпадают и, кроме того, для каждого допустимого управления  $\bar{u}(t)$  значения функционала качества на соответствующих траекториях  $\bar{z}(t)$  и  $\bar{y}(t)$  совпадают, т. е. верно равенство  $F(\bar{z}(t_F)) = F(\bar{y}(t_F))$ . Следовательно, задачи улучшения управления для (5.2) и (5.3) эквивалентны.

Для решения поставленной задачи улучшения управления будем использовать метод глобального улучшения [73, 69], а именно, соотношения метода для линейной по состоянию динамической системы с линейным функционалом качества [104] (см. п. 3.2).

Одна итерация метода глобального улучшения для задачи (5.3) состоит из следующих шагов.

1) Имеем начальный допустимый процесс  $(y^I(t), u^I(t))$ .

2) Ищем функцию  $\varphi(t, y)$  из соотношений

$$\begin{aligned} \varphi(t, y) &= \varphi(t + h, f(t, y, u^I(t))), \quad t \in \{t_I, t_I + h, \dots, t_F - h\}, \\ \varphi(t_F, y) &= 2S - F(y). \end{aligned} \quad (5.5)$$

3) Строим функцию

$$\tilde{u}(t, y) = \arg \max_{y \in \mathbf{U}} (\varphi(t + h, f(t, y, u))), \quad t \in \{t_I, t_I + h, \dots, t_F - h\}.$$

4) Находим улучшенный допустимый процесс из соотношений

$$y(t + h) = f(t, y(t), \tilde{u}(t, y(t))), \quad t \in \{t_I, t_I + h, \dots, t_F - h\}, \quad y(t_I) = z_I.$$

При программной реализации второго шага метода на задачах большой размерности возникают трудности. Следующая теорема позволяет осуществить второй шаг более эффективно, т. к. сводит его к решению одной задачи Коши.

**Теорема 5.1.** Функция  $\varphi(t, y) = \mu(\psi(t), y)$ , где  $\psi(t)$  — решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -IH(u^I(t))\psi(t), \quad t \in [t_I, t_F], \quad \psi(t_F) = 2z^*, \quad (5.6)$$

разрешает соотношения (5.5).

Доказательство. Для указанной в условии теоремы функции  $\varphi(t, y)$  проверим выполнение последнего из соотношений (5.5). Имеем

$$\varphi(t_F, y) = \mu(\psi(t_F), y) = \mu(2z^*, y) = 2S - (2S - 2\mu(z^*, y)) = 2S - F(y),$$

следовательно, проверяемое соотношение верно.

Рассмотрим соотношения (5.5) при  $t = t_F - h$ :

$$\varphi(t_F - h, y) = \varphi(t_F, f(t_F - h, y, u^I(t_F - h))). \quad (5.7)$$

Используя (5.4), преобразуем правую часть равенства (5.7):

$$\begin{aligned} \varphi(t_F, f(t_F - h, y, u^I(t_F - h))) &= \mu(\psi(t_F), f(t_F - h, y, u^I(t_F - h))) = \\ &= \mu(\psi(t_F), M(t_F)y), \end{aligned}$$

где  $M(t_F) = e^{-IH(u^I(t_F-h))h}$  — значение при  $\tau = t_F$  фундаментальной матрицы решений задачи Коши

$$\dot{x}(\tau) = -IH(u^I(t_F - h))x(\tau), \quad \tau \in [t_F - h, t_F], \quad x(t_F - h) = y,$$

обращающейся при  $\tau = t_F - h$  в единичную матрицу.

По условию теоремы и в силу рассматриваемого класса управлений  $\mathbf{U}(m, u_{low}, u_{up})$  на отрезке  $[t_F - h, t_F]$  функция  $\psi(t)$  является решением задачи Коши

$$\dot{x}(\tau) = -IH(u^I(t_F - h))x(\tau), \quad \tau \in [t_F - h, t_F], \quad x(t_F) = \psi(t_F),$$

поэтому левая часть (5.7) примет вид

$$\varphi(t_F - h, y) = \mu(\psi(t_F - h), y) = \mu(M^{-1}(t_F)\psi(t_F), y).$$

В силу унитарности матрицы  $M(t_F)$  можем записать

$$\mu(\psi(t_F), M(t_F)y) = \mu(M^{-1}(t_F)\psi(t_F), y),$$

следовательно, левая и правая часть доказываемого равенства совпадают.

Для полного доказательства теоремы достаточно рассмотреть аналогичным образом соотношения (5.5) последовательно при  $t = t_F - 2h, \dots, 0$ .  $\square$

Предложенная методика применения сужающего преобразования с последующим решением полученной задачи методом глобального улучшения демонстрируется на задачах управления квантовыми системами. В частности, на задаче вращения плоской молекулы и на задаче высокоточной передачи квантового состояния вдоль длинной спиновой цепочки.

### 5.1.1 Управление передачей возбуждения в спиновой цепочке

Эффективная передача квантовой информации является важной проблемой для решения задачи практической реализации квантовых компьютеров. Спиновые цепочки уже давно рассматриваются в качестве кандидатов для обеспечения квантовой коммуникации.

Основные усилия в настоящее время направлены на организацию переноса квантового состояния между концами цепочки, что актуально для реализации квантовых коммуникационных устройств. За этот период были предложены разные методы передачи состояния вдоль цепочки. Среди них как весьма эффективный обсуждается метод передачи с помощью неоднородного магнитного поля вдоль спиновой цепочки (см., например, D. Burgarth, V. Giovannetti, S. Bose, 2007, [127]; V. Balachandran, J. Gong, 2007, [122]; M. Murphy, S. Montangero, V. Giovanetti, T. Calarco, 2010, [136]; S. I. Doronin, A. I. Zenchuk, 2010, [129]).

К задаче передачи квантового состояния в спиновой цепочке успешно применялся метод глобального улучшения Кротова [136], причем было отмечено, что этот метод не испытывает особых трудностей на больших размерностях и позволяет не только передавать возбуждение с высокой точностью, но и проводить исследования фундаментального понятия квантового ограничения

скорости передачи. В [136] акцент сделан на важность и анализ полученных результатов и нет подробного разбора инструментов исследований — применяемого алгоритма и вычислительных схем.

Рассмотрим известную задачу передачи одиночного возбуждения вдоль открытой цепочки с конечным числом спинов  $1/2$ , регулируемой с помощью изменяющегося во времени внешнего магнитного поля [136, 122].

Следуя [136], математическую постановку соответствующей задачи оптимального управления в предположении, что все параметры системы отмасштабированы и принимают безразмерные величины, причем постоянная Планка и величина спин-спинового взаимодействия равны единице, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -IH(u(t))z(t), \quad t \in [0, t_F], \\ z(0) &= z_I = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad z \in \mathbb{C}^n, \\ u &\in U(t, m, u_{low}, u_{up}) \subset \mathbb{R}^2, \quad S = 1, \\ J(z, u) &= F_0(z(t_F)) = 1 - |z^n(t_F)|^2 \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{5.8}$$

где гамильтониан  $H(u) = H_0 + H_1(u)$  является суммой трёхдиагональной постоянной матрицы

$$H_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

отвечающей за спин-спиновое взаимодействие, и диагональной матрицы

$$H_1(u) = \text{diag} \{ f^1(u), f^2(u), \dots, f^n(u) \},$$

отвечающей за воздействие внешнего магнитного поля, где  $f^j(u(t)) = u^1(t) (j - 1 - u^2(t) - 0,5t)^2$ ,  $j = \overline{1, n}$ .



В рассматриваемой системе присутствуют взаимодействия между ближайшими спинами в цепочке и взаимодействия каждого спина с внешним магнитным полем. На рисунке 5.1 для случая  $n = 51$ ,  $t_F = 100$  представлен процесс передачи возбуждения по спиновой цепочке при отсутствии воздействия внешнего магнитного поля (при  $u^I(t) = 0$ ). При этом, хотя возбуждение и достигает последнего спина в цепочке, но минимальное значение целевого функционала на рассматриваемом промежутке времени не меньше, чем  $F_0(z(t)) = 0,8706$ , т. е. точность передачи квантового состояния мала (на превышает 12,94%), что вызвано дисперсионным эффектом. Улучшить точность передачи можно с помощью внешнего поля: если спины находятся далеко от минимума поля, то оно доминирует над спин-спиновым взаимодействием, в противном случае доминирует связь ближайших соседних спинов. Этот управляемый процесс, как будет продемонстрировано ниже в вычислительных экспериментах, позволяет проводить высокоточную передачу возбуждения по спиновой цепочке [105].

Вычислительный алгоритм, соответствующий представленной выше модификации глобального метода улучшения управления, состоит из следующих шагов.

- 1) Задается начальное управление  $u^I(t) = 0$ .
- 2) Вычисляется соответствующая траектория  $z^I(t)$  с применением методов численного интегрирования и ищется точка  $z^*$  множества  $1 - |z^n(t_F)|^2 = 0$ , ближайшая к  $z^I(t_F)$ . А именно, полагается  $z^{j*} = 0$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $z^{n*} = \frac{z^{nI}(t_F)}{|z^{nI}|}$ .
- 3) Функция  $\psi(t)$  находится как решение задачи Коши (5.6) с применением методов численного интегрирования.
- 4) Улучшенное управление  $u^{II}(t)$  находится из условия максимизации функции  $\mu(\psi(t+h), f(t, y(t), u))$  на множестве допустимых управлений в каждый момент времени  $t = t_I, t_I + h, \dots, t_F - h$  (с применением числен-

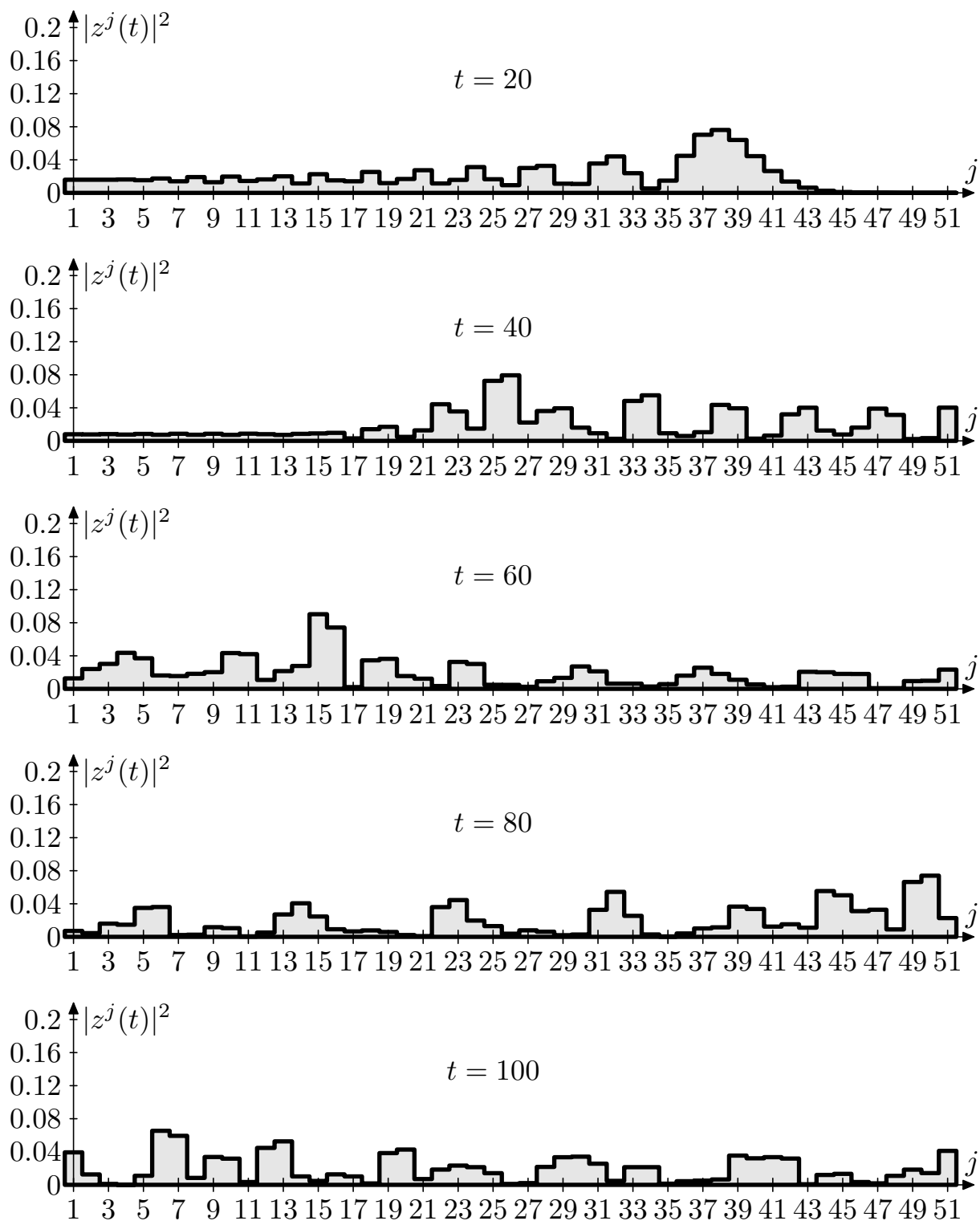


Рисунок 5.1 – Передача возбуждения при отсутствии внешнего поля.

ных методов интегрирования и поиска максимума), при этом

$$y(t+h) = f(t, y(t), u^{\text{II}}(t)), \quad t \in \{t_I, t_I + h, \dots, t_F - h\}, \quad y(t_I) = z_I.$$

5) Полагается  $u^{\text{I}}(t) = u^{\text{II}}(t)$  и выполняется переход на шаг 2.

Были проведены расчеты для случая спиновой цепочки, состоящей из  $n = 51$  спина, при  $t_F = 100$ ,  $m = 10000$ ,  $u_{\text{low}} = (-2, -2)^{\text{T}}$ ,  $u_{\text{up}} = (2, 2)^{\text{T}}$ . Результаты для каждой четной из 20 итераций приведены в следующей таблице.

На рисунке 5.2 представлен процесс передачи возбуждения по спиновой цепочке при управлении, найденном на 20-ой итерации алгоритма. При этом достигнуто значение функционала  $F_0(z(100)) = 0,0026$  (точность передачи квантового состояния составила 99,7%). Графики соответствующих управлений представлены на рисунке 5.3.

**Таблица 5.1.**

Номер итерации	$F_0(z(t_F))$	$z^{n*}$	$F(z(t_F))$	Точность передачи, %
0	0,9589	$0,6116 + 0,7912I$	1,5947	4,1
2	0,1579	$0,6117 + 0,7911I$	0,1641	84,2
4	0,0419	$0,6113 + 0,7914I$	0,0421	95,8
6	0,0223	$0,6119 + 0,7910I$	0,0223	97,8
8	0,0175	$0,6116 + 0,7912I$	0,0175	98,2
10	0,0120	$0,6111 + 0,7915I$	0,0119	98,8
12	0,0088	$0,6115 + 0,7913I$	0,0084	99,2
14	0,0048	$0,6117 + 0,7911I$	0,0048	99,5
16	0,0031	$0,6105 + 0,7920I$	0,0036	99,6
18	0,0030	$0,6115 + 0,7913I$	0,0030	99,7
20	0,0026	$0,6116 + 0,7912I$	0,0025	99,7

Параллельная программная реализация алгоритма в рамках T-системы с открытой архитектурой OpenTS позволила сократить время расчета одной

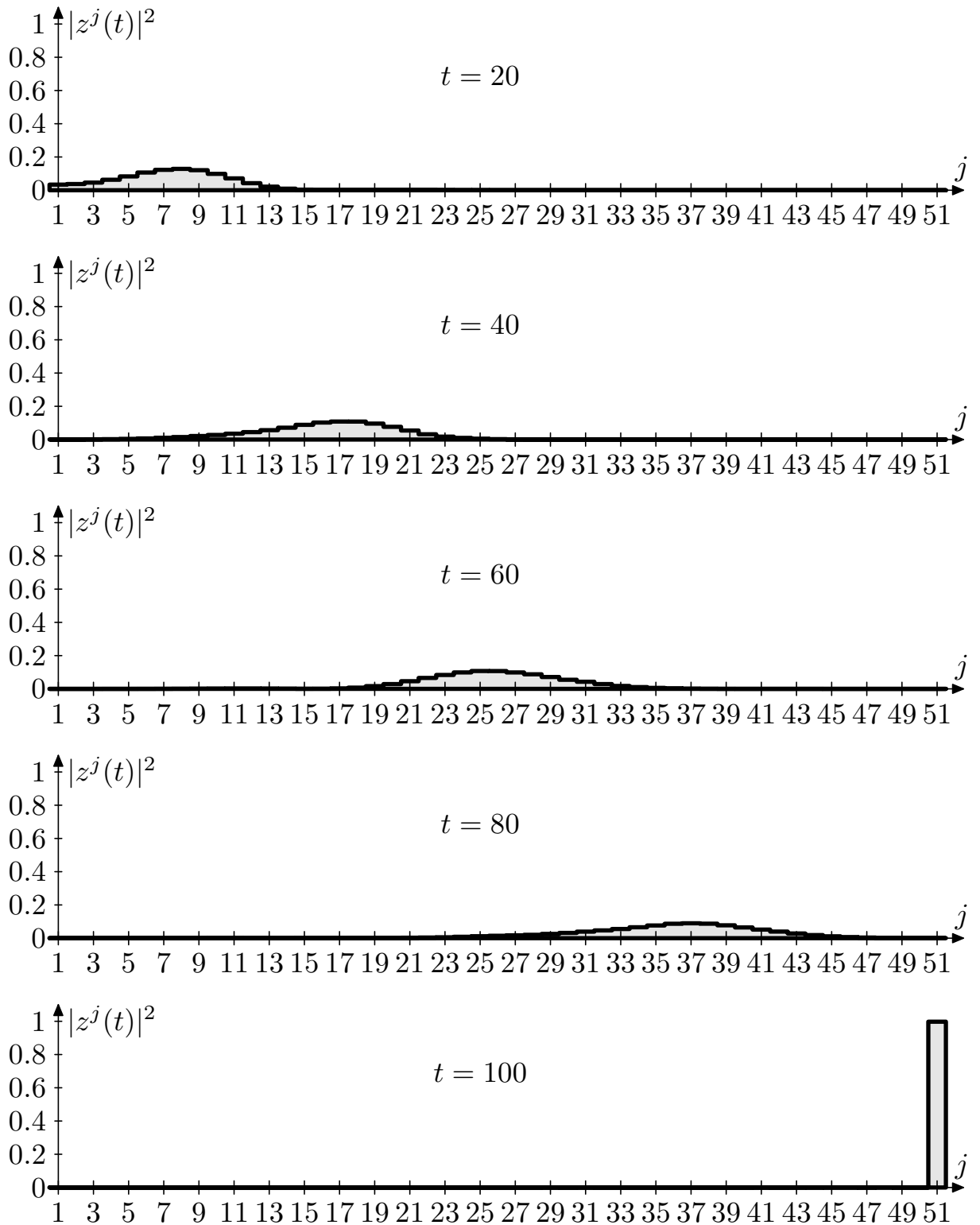


Рисунок 5.2 – Передача возбуждения при управляемом внешнем поле.

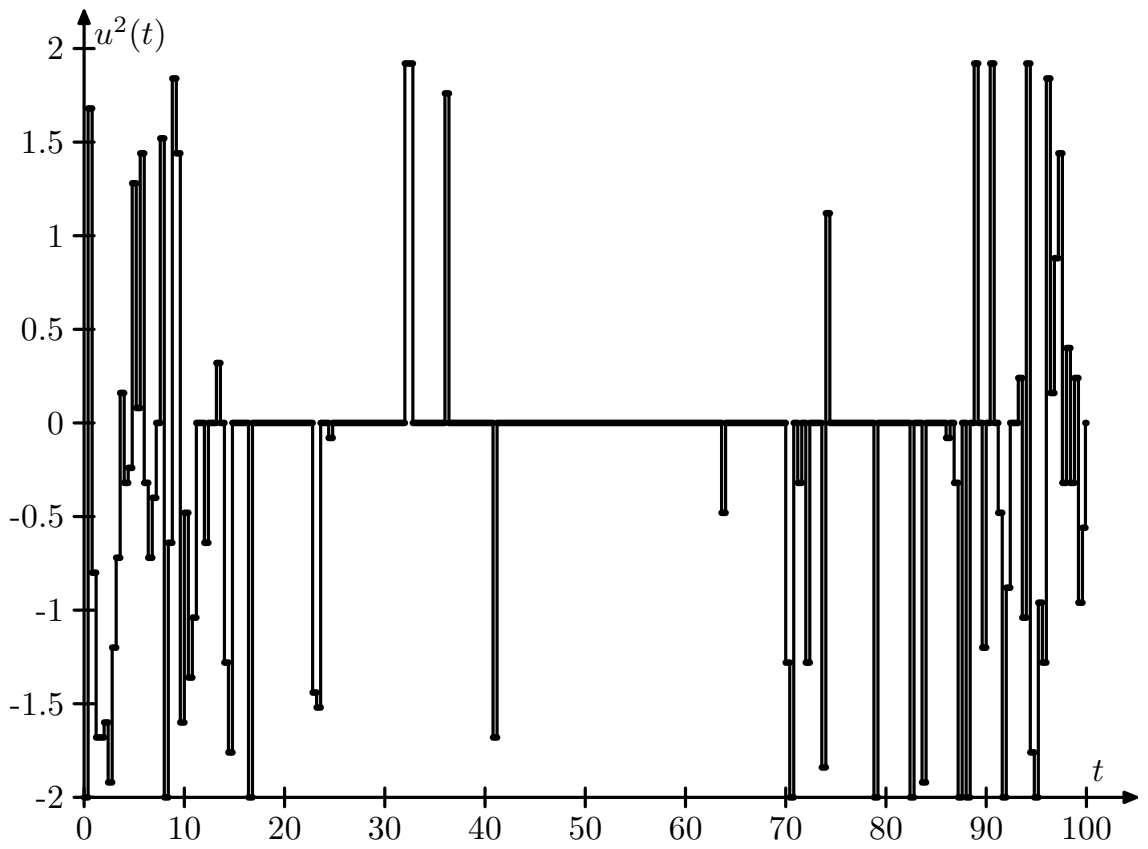
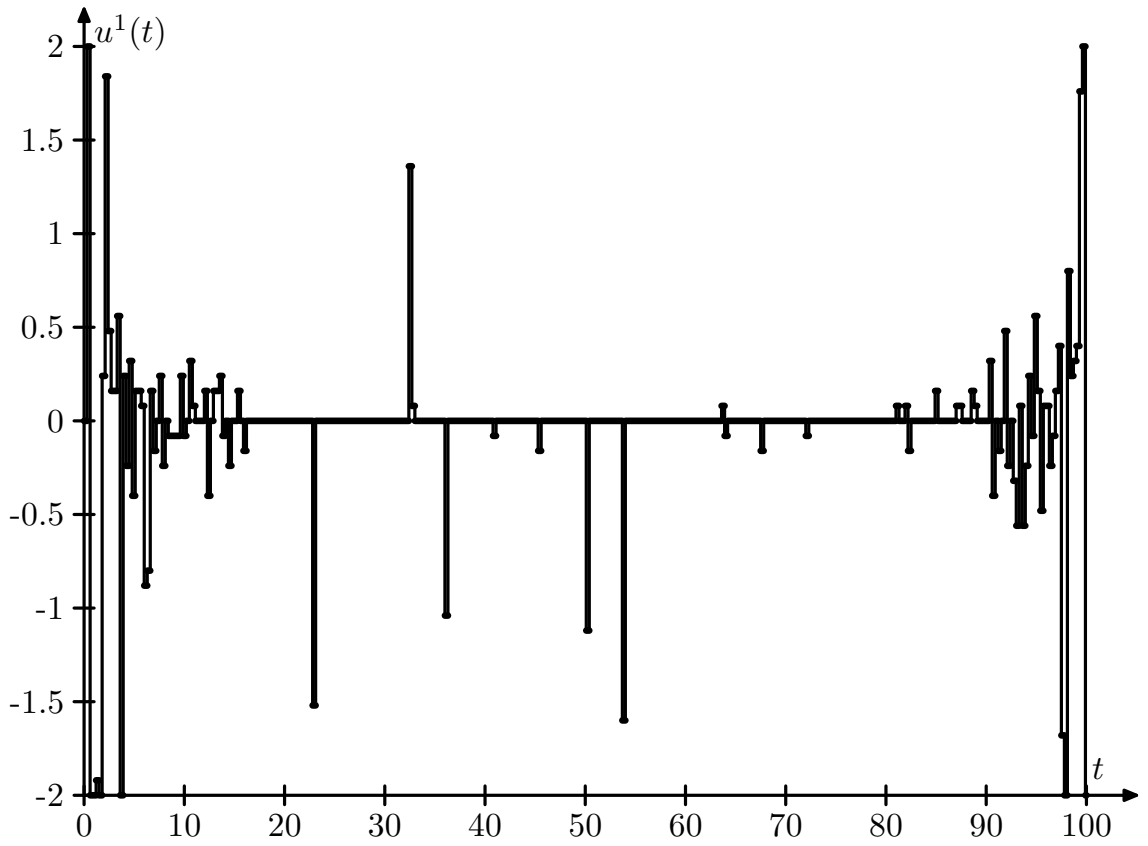


Рисунок 5.3 – Найденное после 20 итераций управление.

итерации алгоритма с 1147 минут (19 часов 7 минут) на одном ядре до 76 минут ( $\approx 1$  часа 16 минут) на 51 ядре суперкомпьютера «Blade», расположенном в Институте программных систем имени А.К. Айламазяна РАН. Здесь стоит отметить, что алгоритм разрабатывался для широкого круга задач, и не учитывает всех особенностей рассматриваемой конкретной задачи. Оптимизация программы в рамках отдельно взятой задачи, конечно, позволила бы провести дополнительное сокращение времени расчетов.

Таким образом, разработанная новая модификация метода глобального улучшения управления позволяет проводить расчеты по улучшению управления для задач большой размерности. Проведенные тестовые вычислительные эксперименты для задач большой размерности, в том числе для задачи управления передачи квантового состояния в спиновой цепочке, с помощью программной реализации разработанного метода, позволяют сделать вывод об эффективности метода для рассматриваемого класса задач управления квантовыми системами. Отметим также значительное сокращение расчетного времени при переходе к параллельной версии программы, что весьма важно при практическом проведении многовариантных расчетов, связанных с исследованиями различных свойств и характеристик рассматриваемых квантовых систем.

### 5.1.2 Преобразование к производной системе

Рассмотрим класс квантовых систем с управлением [19, 66, 67, 69], которые имеют линейный по управлению гамильтониан  $H(u) = -P_A - uP_B$ . Обозначив

$$z = (z^1, \dots, z^{2n}) = (\alpha^1, \dots, \alpha^n, \beta^1, \dots, \beta^n),$$

поставим задачу улучшения управления для гамильтоновой системы вида

$$\dot{z} = \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & P_A \\ -P_A & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & P_B \\ -P_B & 0 \end{pmatrix} \right) \right) z, \quad (5.9)$$

$$z(t_I) = z_I, \quad t \in [t_I, t_F], \quad (5.10)$$

$$F_0(z(t_F)) \rightarrow \min. \quad (5.11)$$

Так как для симметрической матрицы  $P_B$  существует невырожденная матрица  $\widetilde{M}$ , приводящая ее к диагональному виду

$$\widetilde{M}^{-1}P_B\widetilde{M} = D,$$

то задача улучшения управления (5.9)–(5.11) с помощью линейного невырожденного преобразования

$$z = Mx = \begin{pmatrix} \widetilde{M} & 0 \\ 0 & \widetilde{M} \end{pmatrix} x$$

может быть приведена к задаче улучшения управления

$$\dot{x} = f(t, x) + \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} ux, \quad t \in [t_I, t_F], \quad (5.12)$$

$$x(t_I) = x_I, \quad (5.13)$$

$$F(x(t_F)) = F_0(Mx(t_F)) \rightarrow \min, \quad (5.14)$$

где  $D$  — диагональная матрица с элементами  $d^1, \dots, d^n \in \mathbb{R}^1$  на главной диагонали (без ограничения общности можем считать, что матрица  $D$  невырождена, т. к. в противном случае рассматривали бы систему меньшего порядка),

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{M}^{-1}P_A\widetilde{M} \\ -\widetilde{M}^{-1}P_A\widetilde{M} & 0 \end{pmatrix} x.$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^{2n}$  — непрерывная, кусочно-гладкая фазовая траектория,  $u(t) \in R^1$  — кусочно-непрерывное неограниченное управление.

Задача улучшения управления (5.12)–(5.14): задана допустимая пара  $(x^I(t), u^I(t))$ , требуется найти допустимую пару  $(x^{II}(t), u^{II}(t))$ , для которой справедливо неравенство  $F(x^{II}(t_F)) < F(x^I(t_F))$ . Решая эту задачу итерационно, можно получить улучшающую, в частности, минимизирующую последовательность  $\{x_s(t), u_s(t)\}$ . Однако, применение численных итерационных

методов улучшения (например, метода глобального улучшения) затрудняют отсутствие ограничений на управление и проблема выбора начального управления  $u(t)$ . На практике приходится ставить и затем варьировать в многочисленных вычислительных экспериментах принудительное ограничение на управление (например, в виде  $|u(t)| \leq const$ ) и начальное управление.

Особенностью класса задач (5.12)–(5.14) является возможность явного преобразования исходной задачи улучшения к задаче улучшения управления для системы меньшей размерности с ограниченным управлением, что позволяет осуществить аналитически или с помощью итерационных методов улучшения управления поиск качественного начального приближения для исходной задачи улучшения. А именно, для подобных систем возможен поиск магистральных решений, которые можно выбирать в качестве начального приближения для последующих процедур улучшения.

Воспользуемся методом преобразования исходной системы к производной [70, 31], который позволяет свести задачу улучшения начального управления для системы (5.12) к производной задаче меньшего порядка с ограниченным управлением. Для задач управления периодическими процессами это преобразование может быть сделано явно [37, 52]. Для этого найдем  $y = \eta(t, x) = (\eta^1, \dots, \eta^{2n-1})$  — совокупность независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} x.$$

Имеем

$$y^i = \eta^i(x) = (x^i)^2 + (x^{n+i})^2, \quad i = \overline{1, n},$$

$$y^{n+j} = \frac{1}{d^{j+1}} \arccos \frac{x^{j+1}}{y^{j+1}} - \frac{1}{d^1} \arccos \frac{x^1}{y^1}, \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Тогда с помощью замены переменных

$$x^1 = x^1(y, \theta) = \sqrt{y^1} \cos(d^1 \theta), \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$



$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= x^{n+1}(y, \theta) = \sqrt{y^1} \sin(d^1\theta), \\
x^i &= x^i(y, \theta) = \sqrt{y^i} \cos(d^i(\theta + y^{n+i-1})), \\
x^{n+i} &= x^{n+i}(y, \theta) = \sqrt{y^i} \sin(d^i(\theta + y^{n+i-1})), \quad i = \overline{2, n},
\end{aligned}$$

исходная задача (5.12)–(5.14) переходит в задачу для производной системы

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= g(t, y, \theta), \quad t \in [t_0, t_F], \\
y &\in \mathbb{R}^{2n-1}, \quad \theta \in [-\pi, \pi], \\
y(t_I) &= \eta(x(t_I)), \\
\tilde{F}(y(t_F)) &= \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} F(x(y(t_F), \theta)) \rightarrow \min,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

где  $\theta(t)$  — кусочно-непрерывное управление,

$$\begin{aligned}
g^1 &= 2\sqrt{y^1} (f^1(t, x(y, \theta)) \cos(d^1\theta) + f^{n+1}(t, x(y, \theta)) \sin(d^1\theta)), \\
g^{j+1} &= 2\sqrt{y^{j+1}} \left( f^{j+1}(t, x(y, \theta)) \cos(d^{j+1}(\theta + y^{n+j})) + \right. \\
&\quad \left. + f^{n+j+1}(t, x(y, \theta)) \sin(d^{j+1}(\theta + y^{n+j})) \right), \quad j = \overline{1, n-1}, \\
g^{n+j} &= \frac{f^{n+j+1}(t, x(y, \theta)) \cos(d^{j+1}(\theta + y^{n+j}))}{d^{j+1} \sqrt{y^{j+1}}} - \\
&\quad \frac{-f^{j+1}(t, x(y, \theta)) \sin(d^{j+1}(\theta + y^{n+j}))}{d^{j+1} \sqrt{y^{j+1}}} - \\
&\quad \frac{f^{n+1}(t, x(y, \theta)) \cos(d^1\theta) - f^1(t, x(y, \theta)) \sin(d^1\theta)}{d^1 \sqrt{y^1}}.
\end{aligned}$$

Если присоединить уравнение

$$\dot{\theta} = \frac{f^{n+1}(t, x(y, \theta)) \cos(d^1\theta) - f^1(t, x(y, \theta)) \sin(d^1\theta)}{d^1 \sqrt{y^1}} - u, \tag{5.16}$$

с начальным условием  $\theta(t_I) = \theta_I(x_I)$ , то получится представление исходной системы в новых фазовых переменных  $y^1, \dots, y^{2n-1}, \theta$  вместо прежних  $x^1, \dots, x^{2n}$ .

Для решения полученной задачи улучшения управления можно воспользоваться методом глобального улучшения (см. п. 3.1). После чего, в качестве

начального приближения для задачи улучшения (5.12)–(5.14) можно выбрать аппроксимацию полученного процесса  $(y^{\text{II}}(t), \theta^{\text{II}}(t))$  с помощью допустимых процессов исходной задачи (5.12)–(5.14) [31]. При этом может оказаться весьма полезным ранее отброшенное уравнение (5.16), выражающее связь управления  $u(t)$  в исходной системе и управления  $\theta(t)$  в производной системе. Дальнейшее улучшение найденного начального управления в исходной задаче можно также производить с помощью метода глобального улучшения (см. п. 3.1).

**Пример 5.1.** Рассмотрим задачу оптимального управления (5.12)–(5.14)

$$\text{при } P_B = E_n, \text{ т. е. } d^i = 1, i = \overline{1, n}, P_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}^1.$$

На первом этапе исследования посредством замены переменных

$$x^i = x^i(y, \theta), \quad i = \overline{1, 2n},$$

с учетом справедливости равенств

$$f^i(t, x) = bx^{2n-i+1}, \quad f^{n+i}(t, x) = -bx^{n-i+1}, \quad i = \overline{1, n},$$

рассматриваемая задача оптимального управления переходит в задачу оптимального управления для производной системы (5.15), где

$$\begin{aligned} g^1(t, y, \theta) &= 2b\sqrt{y^1 y^n} \sin y^{2n-1}, \\ g^{i+1}(t, y, \theta) &= 2b\sqrt{y^{i+1} y^{n-i}} \sin(y^{2n-i-1} - y^{n+i}), \quad i = \overline{1, n-2}, \\ g^n(t, y, \theta) &= -2b\sqrt{y^1 y^n} \sin y^{2n-1}, \\ g^{n+i}(t, y, \theta) &= -b\sqrt{\frac{y^{n-i}}{y^{i+1}}} \cos(y^{2n-i-1} - y^{n+i}) + b\sqrt{\frac{y^n}{y^1}} \cos y^{2n-1}, \\ g^{2n-1}(t, y, \theta) &= b \left( \sqrt{\frac{y^n}{y^1}} - \sqrt{\frac{y^1}{y^n}} \right) \cos y^{2n-1}. \end{aligned}$$

Поскольку выражения для  $g$  фактически не зависят от  $\theta$ , то производная система становится неуправляемой, и второй этап исследования вырождается в задачу минимизации функции одной переменной

$$F(x(\tilde{y}(t_F), \theta)) \rightarrow \min_{\theta \in [-\pi, \pi]},$$

где  $\tilde{y}(t)$  — решение задачи Коши

$$\dot{y} = g(y), \quad y(t_I) = \eta(x(t_I)), \quad t \in [t_I, t_F].$$

Обозначим  $\theta_F = \arg \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} F(x(\tilde{y}(t_F), \theta))$ , тогда третий этап исследования сводится к поиску функции  $u(t)$ , обеспечивающей существование функции  $\theta(t)$ , которая подчинена системе равенств

$$\dot{\theta}(t) = -b \sqrt{\frac{\tilde{y}^n(t)}{\tilde{y}^1(t)}} \cos \tilde{y}^{2n-1} - u(t), \quad t \in [t_I, t_F],$$

$$\theta(t_I) = \theta_I = \theta_I(x_I), \quad \theta(t_F) = \theta_F, \quad \theta(t) \in [-\pi, \pi].$$

Таких функций  $u(t)$  очевидно бесконечно много. Выберем одну из них посредством выбора функции  $\theta(t)$ , а именно, положим

$$\theta(t) = \frac{\theta_F - \theta_I}{t_F - t_I} t + \frac{\theta_I t_F - \theta_F t_I}{t_F - t_I}.$$

Тогда функцию  $u(t)$ , доставляющую минимум функционалу  $F(x(t_F))$ , можно взять в виде

$$u(t) = -b \sqrt{\frac{\tilde{y}^n(t)}{\tilde{y}^1(t)}} \cos \tilde{y}^{2n-1} - \frac{\theta_F - \theta_I}{t_F - t_I}.$$

Например, решим задачу оптимального управления при  $n = 2$ ,  $b = 1$ ,  $t_I = 0$ ,  $x(t_I) = (1, 1, 0, 0)^T$ ,

$$F(x(t_F)) = x^1(t_F)x^2(t_F) \rightarrow \min.$$

В этом случае для определения функции  $\tilde{y}(t)$  следует решить задачу Коши

$$\dot{y}^1 = 2\sqrt{y^1 y^2} \sin y^3,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}^2 &= -2\sqrt{y^1 y^2} \sin y^3, \\ \dot{y}^3 &= \left( \sqrt{\frac{y^2}{y^1}} - \sqrt{\frac{y^1}{y^2}} \right) \cos y^3, \\ y(0) &= (1, 1, 0)^T. \end{aligned}$$

Получим  $\tilde{y}^1(t) = 1$ ,  $\tilde{y}^2(t) = 1$ ,  $\tilde{y}^3(t) = 0$ . Найдем  $\theta_I = 0$  и  $\theta_F$ :

$$\begin{aligned} \theta_F &= \arg \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} F(x(\tilde{y}(t_F), \theta)) = \\ &= \arg \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} \sqrt{\tilde{y}^1(t_F)} \cos \theta \sqrt{\tilde{y}^2(t_F)} \sin(\theta + \tilde{y}^3(t_F)) = \\ &= \arg \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} \cos^2 \theta = \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Положим для определенности  $\theta_F = \frac{\pi}{2}$ , тогда функцию  $u(t)$ , доставляющую минимум функционалу  $F(x(t_F))$  равный 0, можно взять в виде

$$u(t) = -\frac{\pi}{2t_F} - 1.$$

**Пример 5.2.** Рассмотрим задачу (5.12)–(5.14) при  $d^1 = -1$ ,  
 $d^i = 1$ ,  $i = \overline{2, n}$ , т. е.  $P_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $P_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & 0 & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b \in \mathbb{R}^1$ .

На первом этапе исследования посредством замены переменных

$$x^i = x^i(y, \theta), \quad i = \overline{1, 2n},$$

с учетом справедливости равенств

$$f^i(t, x) = bx^{2n-i+1}, \quad f^{n+i}(t, x) = -bx^{n-i+1}, \quad i = \overline{1, n},$$

рассматриваемая задача оптимального управления переходит в задачу оптимального управления для производной системы (5.15), где

$$g^1(t, y, \theta) = 2b\sqrt{y^1 y^n} \sin(2\theta + y^{2n-1}),$$

$$g^{i+1}(t, y, \theta) = 2b\sqrt{y^{i+1}y^{n-i}} \sin(y^{2n-i-1} - y^{n+i}), \quad i = \overline{1, n-2},$$

$$g^n(t, y, \theta) = -2b\sqrt{y^1y^n} \sin(2\theta + y^{2n-1}),$$

$$g^{n+i}(t, y, \theta) = -b\sqrt{\frac{y^{n-i}}{y^{i+1}}} \cos(y^{2n-i-1} - y^{n+i}) - \\ -b\sqrt{\frac{y^n}{y^1}} \cos(2\theta + y^{2n-1}),$$

$$g^{2n-1}(t, y, \theta) = -b \left( \sqrt{\frac{y^n}{y^1}} + \sqrt{\frac{y^1}{y^n}} \right) \cos(2\theta + y^{2n-1}).$$

Здесь отброшено уравнение с начальным условием

$$\dot{\theta} = b\sqrt{\frac{y^n}{y^1}} \cos(2\theta + y^{2n-1}) - u, \quad \theta(t_I) = \theta_I = \theta_I(x_I),$$

которое может оказаться полезным при восстановлении на третьем этапе исследования управления  $u(t)$  для исходной задачи оптимального управления по найденному решению задачи оптимального управления для производной системы.

Например, решим задачу улучшения начального управления  $u^I(t) = 0$  при  $n = 3$ ,  $b = 1$ ,  $t_I = 0$ ,  $t_F = 0.25$ ,

$$x(t_I) = (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T, \quad x_* = (0, 1, 1, 1, 0, 0)^T,$$

$$F(x(t_F)) = (x(t_F) - x_*)^T (x(t_F) - x_*(t_F)) \rightarrow \min,$$

т. е. задачу минимизации расстояния до заданной точки  $x_*$ . Преобразуем функционал с учетом инварианта рассматриваемой системы:

$$F(x(t_F)) = x^T(t_F)x(t_F) + x_*^T x_* - 2x^T(t_F)x_* = 6 - 2x^T(t_F)x_*.$$

Попробуем решить задачу улучшения численно с помощью глобального метода улучшения (см. п. 3.1) двумя различными способами.

*Способ 1.* Применим алгоритм глобального улучшения непосредственно к исходной задаче, поставив принудительно ограничения на управления, например в виде отрезка  $u(t) \in [-10; 10]$ , при приближении разрешающей функции  $\varphi^0(t, x)$  с помощью полиномов первого порядка.

Способ 2 (с использованием общей схемы исследования задач управления). Применим алгоритм глобального улучшения на втором этапе исследования к производной задаче, соответствующей исходной задаче,

$$\dot{y}^1 = 2\sqrt{y^1 y^3} \sin(2\theta + y^5), \quad t \in [0, t_F],$$

$$\dot{y}^2 = 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

$$\dot{y}^3 = -2\sqrt{y^1 y^3} \sin(2\theta + y^5),$$

$$\dot{y}^4 = -1 - \sqrt{\frac{y^3}{y^1}} \cos(2\theta + y^5),$$

$$\dot{y}^5 = -\cos(2\theta + y^5) \left( \sqrt{\frac{y^3}{y^1}} + \sqrt{\frac{y^1}{y^3}} \right),$$

$$y(0) = (1, 1, 1, 0, 0)^T,$$

$$\tilde{F}(y(t_F)) = \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} F(x(y(t_F), \theta)) \rightarrow \min,$$

при приближении разрешающей функции  $\varphi^0(t, y)$  с помощью полиномов второго порядка. Начальному управлению  $u^I(t) = 0$  здесь соответствует начальное управление  $\theta^I(t) = t$ . На улучшенном управлении  $\theta^{II}(t)$  значение функционала составило  $F(y^{II}(2.5)) = -2.94465$ . Далее на третьем этапе исследования с помощью ранее отброшенного уравнения

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{y^3}{y^1}} \cos(2\theta + y^5) - u,$$

а точнее, с помощью его разностного аналога

$$u(t) = -\frac{\theta(t+h) - \theta(t)}{h} + \sqrt{\frac{y^3(t)}{y^1(t)}} \cos(2\theta(t) + y^5(t)),$$

построим начальное управление  $u^I(t)$  для итерационной процедуры улучшения в исходной задаче, поставив ограничения на управления, например в виде

$$u(t) \in \left[ \min_{t \in [t_0, t_F]} u^I(t), \max_{t \in [t_0, t_F]} u^I(t) \right]$$

(в нашем случае  $u(t) \in [0; 30]$ ), при приближении разрешающей функции  $\varphi^0(t, x)$  с помощью полиномов первого порядка.

Полученные значения функционала на первых девяти итерациях алгоритма представлены в таблице 5.2.

Из таблицы видно, что второй способ решения (применение общей схемы исследования задач управления) позволил уже на первой итерации алгоритма глобального улучшения получить значение функционала меньшее, чем при первом способе решения, и существенно улучшить значение функционала на последующих итерациях. На рисунке 5.4 представлены графики улучшенного управления (на девятой итерации алгоритма глобального улучшения) при расчете по способу 1 (сплошная линия) и по способу 2 (пунктирная линия). Соответствующие траектории представлены на рисунках 5.5 и 5.6 соответственно для способа 1 и способа 2.

**Таблица 5.2.**

Номер итерации	Значение $F(x(t_F))$ (способ 1)	Значение $F(x(t_F))$ (способ 2)
0	5.20076	5.96956
1	0.72426	0.01352
2	0.38822	0.01025
3	0.32999	0.00943
4	0.19492	0.00899
5	0.18185	0.00876
6	0.11579	0.00861
7	0.10929	0.00845
8	0.08474	0.00830
9	0.08214	0.00826

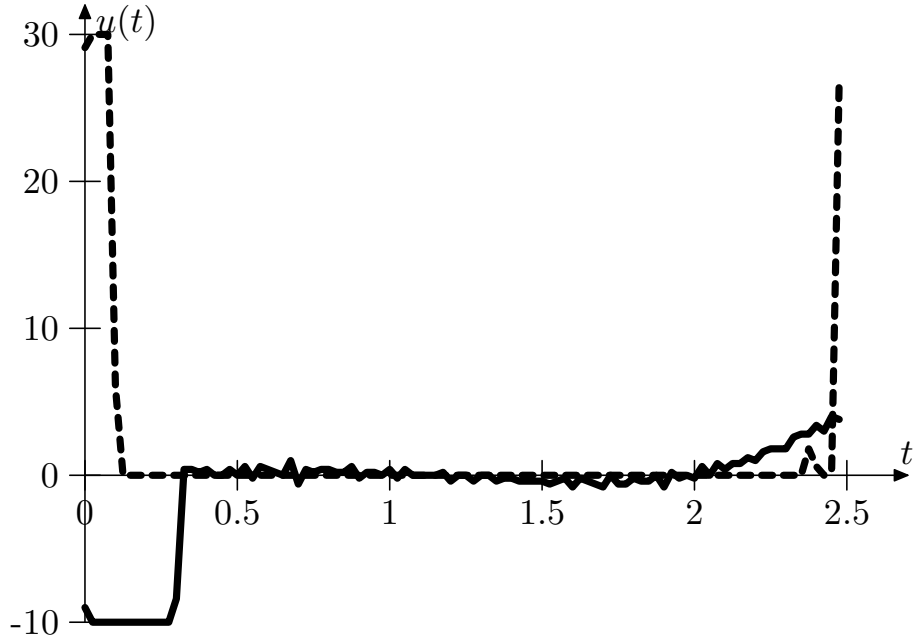


Рисунок 5.4 –

**Пример 5.3.** Рассмотрим пример условной квантовой системы из [69] — системы (5.9)–(5.11) при  $n = 2$ ,  $t_I = 0$ ,  $z(0) = (-1, 1, -1, 1)^T$ ,

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F_0(z(t_F)) = z^T(t_F)Qz(t_F) \rightarrow \min,$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Инвариант рассматриваемой системы  $\|z(t)\| = z^T(t)z(t) = z^T(0)z(0) = 4$ , т. е. исходная задача равносильна задаче на минимум функционала

$$F_1(x(t_F)) = (z^3(t_F) \pm 2)^2 = 4 \pm 4z^3(t_F) + (z^3(t_F))^2 = 8 \pm 4z^3(t_F).$$

В [69] при  $t_F = 0.5$  при принудительном ограничении на управление  $|u| \leq 3$  было получено значение функционала  $F = -9.4845$  на пятой итерации алгоритма глобального улучшения Кротова.



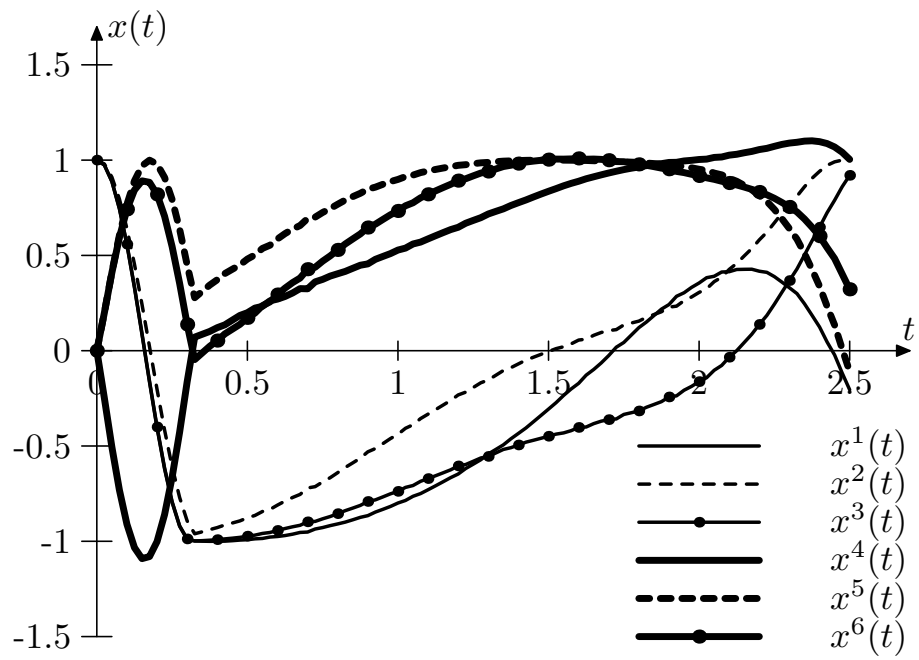


Рисунок 5.5 –

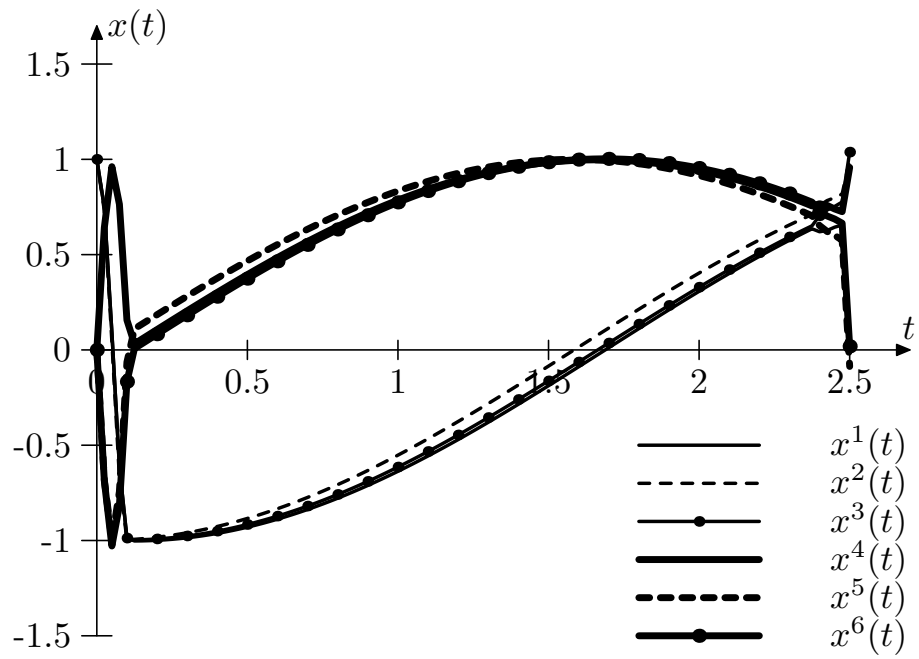


Рисунок 5.6 –

Решим задачу с помощью глобального алгоритма улучшения, представленного в данной работе, двумя способами.

*Способ 1.* Применим алгоритм глобального улучшения к исходной задаче, выбрав начальное управление  $u^I(t) = 0.3$  (как и в [69]). Полученные значения функционала  $F_0$  для двух вариантов расчетов: расчет 1 при квадратичной аппроксимации функции  $\varphi(t, z)$ ; менее качественный, но более быстрый, расчет 2 при поиске функции  $\varphi(t, z)$  как решения уравнений в частных производных, соответствующей функционалу  $F_1$ , и максимальное время, потраченное на одну итерацию, представлены в таблице 5.3. Расчет второго типа, хотя он и является менее качественным, очевидно, заменит расчет первого типа для решения задач большой размерности, т. к. позволяет существенно повысить быстродействие соответствующей компьютерной программы.

**Таблица 5.3.**

Итерация	$F_0$ при расчете 1	$F_0$ при расчете 2
0	-5.7363	-5.7363
1	-10.0555	-9.6634
2	-10.1575	-10.0026
3	-10.1594	-9.8456
4	-10.1594	-9.9975
5	-10.1594	-9.8501
Максимальное время одной итерации, с	86	46

*Способ 2 (с использованием общей схемы исследования задач управления).* Заменяем исходную задачу улучшения задачей улучшения для производной системы.

а) Найдем матрицу  $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$  такую, что  $\widetilde{M}^{-1}P_B\widetilde{M} = D$ , где

$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$  – диагональная матрица. Для этого найдем собственные значения матрицы  $P_B$ :  $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ , т. е. можно положить  $d_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ ,  $d_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ .

Далее из системы уравнений  $P_B \widetilde{M} = \widetilde{M} D$ , которая принимает вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$$

находим  $m_{11}, m_{12} \neq 0$ ,  $m_{21} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} m_{11}$ ,  $m_{22} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} m_{12}$ . Для определенности положим  $m_{11} = m_{12} = 2$ , тогда  $m_{21} = 3 + \sqrt{13}$ ,  $m_{22} = 3 - \sqrt{13}$ , т. е.

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 + \sqrt{13} & 3 - \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

б) Произведем в исходной системе замену переменных

$$z = Mx = \begin{pmatrix} \widetilde{M} & 0 \\ 0 & \widetilde{M} \end{pmatrix} x,$$

тогда исходная система примет вид

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{M}^{-1} P_A \widetilde{M} \\ -\widetilde{M}^{-1} P_A \widetilde{M} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} ux.$$

Учитывая, что

$$\widetilde{M}^{-1} P_A \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{\sqrt{13}} & -3 + \frac{9}{\sqrt{13}} \\ -3 - \frac{9}{\sqrt{13}} & 1 + \frac{4}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$F(x(t_F)) = x^T(t_F) Q x(t_F) = z^T(t_F) (\widetilde{M}^{-1})^T Q \widetilde{M}^{-1} z(t_F) = z^T(t_F) Q_0 z(t_F),$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} -48 - 12\sqrt{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -48 + 12\sqrt{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -34 - 6\sqrt{13} & -8 \\ 0 & 0 & -8 & -34 + 6\sqrt{13} \end{pmatrix},$$

$$x(0) = M^{-1}z(0) = \left( \frac{5\sqrt{13}}{52} - \frac{1}{4}, -\frac{5\sqrt{13}}{52} - \frac{1}{4}, \frac{5\sqrt{13}}{52} - \frac{1}{4}, -\frac{5\sqrt{13}}{52} - \frac{1}{4} \right)^T = x_0,$$

исходная задача оптимального управления перейдет в задачу

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & A_0 \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} ux, \quad t \in [0, t_F],$$

$$x(0) = x_0,$$

$$F(x(t_F)) = x^T(t_F)Q_0x(t_F) \rightarrow \min.$$

в) Выпишем замену переменных [101], приводящую полученную систему к производной системе.

$$x^1(y, \theta) = \sqrt{y^1} \cos(d_1\theta), \quad x^3(y, \theta) = \sqrt{y^1} \sin(d_1\theta),$$

$$x^2(y, \theta) = \sqrt{y^2} \cos(d_2(\theta + y^3)), \quad x^4(y, \theta) = \sqrt{y^2} \sin(d_2(\theta + y^3)).$$

Здесь первые интегралы системы  $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} x$  имеют вид

$$\eta^1(x) = y^1 = (x^1)^2 + (x^3)^2, \quad \eta^2(x) = y^2 = (x^2)^2 + (x^4)^2,$$

$$\eta^3(x) = y^3 = \frac{1}{d_2} \arccos \frac{x^2}{\sqrt{y^2}} - \frac{1}{d_1} \arccos \frac{x^1}{\sqrt{y^1}}.$$

Тогда производная задача примет вид

$$\dot{y}^1 = 2\sqrt{y^1 y^2} a_{12} \sin(d_2(\theta + y^3) - d_1\theta), \quad t \in [0, t_F],$$

$$\dot{y}^2 = 2\sqrt{y^1 y^2} a_{21} \sin(d_1\theta - d_2(\theta + y^3)), \quad \theta \in \left[ -\frac{\pi}{d_1}, \frac{\pi}{d_1} \right],$$

$$\dot{y}^3 = \frac{a_{11}}{d_1} - \frac{a_{22}}{d_2} + \left( \frac{a_{12}\sqrt{y^2}}{d_1\sqrt{y^1}} - \frac{a_{21}\sqrt{y^1}}{d_2\sqrt{y^2}} \right) \cos(d_1\theta - d_2(\theta + y^3)),$$

$$y(0) = \eta(x(0)) \approx (0.0187, 0.7121, -2.1497)^T,$$

$$\tilde{F}(y(t_F)) = \min_{\theta \in \left[ -\frac{\pi}{d_1}, \frac{\pi}{d_1} \right]} F(x(y(t_F), \theta)) \rightarrow \min.$$

Здесь отброшено уравнение

$$\dot{\theta} = -\frac{a_{11}}{d_1} - \frac{a_{12}\sqrt{y^2}}{d_1\sqrt{y^1}} \cos(d_1\theta - d_2(\theta + y^3)) - u.$$

г) Найдем  $\theta^I(t)$ , соответствующее начальному управлению  $u^I(t) = 0.3$ . Применим алгоритм глобального улучшения сначала к производной задаче и найдем улучшенное управление  $\theta^{II}(t)$  (как наилучшая, была выбрана седьмая итерация). С помощью отброшенного уравнения, а точнее, его разностного аналога

$$u(t) = \frac{\theta(t) - \theta(t+h)}{h} - \frac{a_{11}}{d_1} - \frac{a_{12}\sqrt{y^2}}{d_1\sqrt{y^1}} \cos(d_1\theta - d_2(\theta + y^3)),$$

найдем новое начальное управление  $u^I(t)$ . Применим алгоритм глобального улучшения нового начального управления к исходной задаче, поставив ограничения на управление в виде

$$u \in \left[ \min_{t \in [0, t_F]} u^I(t), \max_{t \in [0, t_F]} u^I(t) \right]$$

(в нашем случае  $|u| \leq 203$ ). Полученные значения функционала  $F_0$  для двух вариантов расчетов: расчет 1 при квадратичной аппроксимации функции  $\varphi(t, z)$ ; менее качественный, но более быстрый, расчет 2 при поиске функции  $\varphi(t, z)$  как решения уравнений в частных производных, соответствующей функционалу  $F_1$ , и максимальное время, потраченное на одну итерацию, представлены в таблице 5.4.

На основании полученных результатов можно заключить, что предложенный алгоритм, построенный на основе общего метода Кротова глобального улучшения управления, служит хорошим инструментом для численного решения задач улучшения рассматриваемого класса. При этом применение общей схемы исследования обеспечивает высокую эффективность поиска оптимального управления, когда оно не ограничено, либо хорошее приближение к оптимуму в случае ограниченного управления для последующего итерационного улучшения в исходной задаче.

**Таблица 5.4.**

Итерация	$F_0$ при расчете 1	$F_0$ при расчете 2
0	-6.6623	-6.6623
1	-11.6184	-11.4022
2	-11.6799	-11.5715
3	-11.6950	-11.3952
4	-11.7124	-11.5665
5	-11.7281	-11.3948
Максимальное время одной итерации, с	85	45

## 5.2 Управление квантовой системой с дискретным спектром

Рассмотрим известный пример вращения плоской молекулы [126, 106]. Состояние системы в момент времени  $t$  описывается точкой  $\psi(t) \in L^2(\Omega, \mathbb{C})$ , где  $\Omega$  — одномерный тор. Уравнение Шрёдингера записывается в виде

$$I \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \theta) = -\Delta \psi(t, \theta) + u(t) \cos \theta \psi(t, \theta), \quad (5.17)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа–Бельтрами на  $\Omega$ . Самосопряженный оператор  $\Delta$  имеет чисто дискретный спектр  $\{k^2, k \in \mathbb{N}\}$ . Все его собственные значения имеют кратность 2, а собственное значение 0 — простое. Собственное значение 0 соответствует постоянным функциям, а собственное значение  $k^2$  при  $k > 0$  соответствует двум собственным функциям  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\theta)$  и  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\theta)$ . Гильбертово пространство  $H = L^2(\Omega, \mathbb{C})$  разбивается на два подпространства  $H_e$  и  $H_o$  — пространства четных и нечетных функций из  $H$  соответственно. Пространства  $H_e$  и  $H_o$  устойчивы под действием динамики (5.17).

Наша цель — в подпространстве  $H_o$  перевести волновую функцию  $\psi(t, \theta)$  из первого собственного подпространства (соответствующего собственному

значению 1) во второе (соответствующее собственному значению 4).

Перепишем уравнение (5.17) в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \theta) = I\Delta\psi(t, \theta) - Iu(t) \cos \theta \psi(t, \theta), \quad (5.18)$$

разложим по собственным функциям  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\theta)$  волновую функцию

$$\psi(t, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k(t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\theta),$$

а также операторы  $I\Delta$  и  $-Iu(t) \cos \theta$ . Тогда уравнение (5.18) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = (A + u(t)B)z.$$

Аппроксимации Галеркина порядка  $N$  для  $A, B$  запишутся в виде

$$A^{(N)} = - \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (N-1)^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N^2 I \end{pmatrix},$$

$$B^{(N)} = -I \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая конечномерная аппроксимация последнего уравнения запишется как

$$\frac{dz}{dt} = (A^{(N)} + u(t)B^{(N)})z, \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

т. е. получаем систему рассматриваемого выше класса, где  $H(u) = A^{(N)}I + B^{(N)}Iu$ .

В [126] показано, что при замене исходной системы ее аппроксимацией Галеркина порядка  $N = 22$  ошибка будет меньше  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-6}$ , если  $\|u(t)\|_{L^1} \leq \frac{13}{3}$ . Применим вышеописанную модификацию метода глобального улучшения к задаче

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= H(u(t)) z(t), \quad t \in [0, 20], \\ z(0) &= (1, 0, \dots, 0)^T, \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad N = 22, \quad u \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \end{aligned}$$

с функционалом наилучшего попадания в точку  $z^* = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$  (что соответствует выводу модуля второй компоненты  $z^2(t)$  на единицу). Результаты расчетов по улучшению начального управления  $u^1 = 0$  для каждой четной из 10 итераций представлены в следующей таблице.

Рисунок 5.7 представляет найденное управление, рисунок 5.8 — соответствующую динамику модуля второй компоненты  $z^2(t)$ . Интересным оказался тот факт, что найденное управление сильно напоминает предложенную в [126] (без привлечения теории оптимального управления) функцию управления  $u(t) = \frac{\cos(3t)}{q}$ , где  $q$  выбиралось из условия  $\|u(t)\|_{L^1} \leq \frac{13}{3}$  на рассматриваемом отрезке времени  $[0, t_F]$ .

**Таблица 5.5.**

Номер итерации	$F(z(t_F))$	$ z^2(t_F) ^2$
0	2	0
2	0.00013	0.999993
4	$1.6 \cdot 10^{-5}$	0.999994
6	$5.5 \cdot 10^{-6}$	0.999995
8	$5.1 \cdot 10^{-6}$	0.999995
10	$5.1 \cdot 10^{-6}$	0.999995

### 5.3 Выводы к главе 5

Представлена модификация глобального метода улучшения применительно к задаче оптимального попадания в заданное конечное состояние для ко-



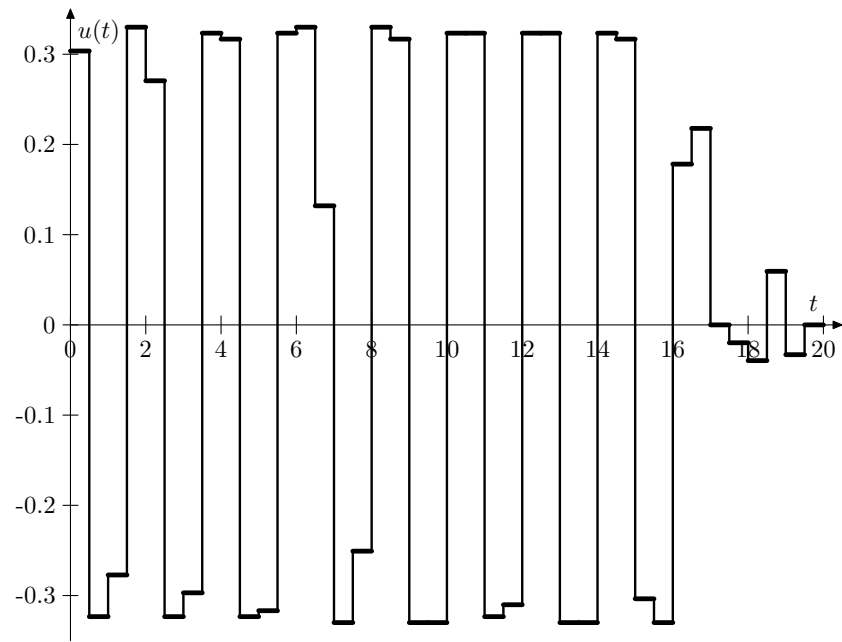


Рисунок 5.7 – Найденное управление  $u(t)$ .

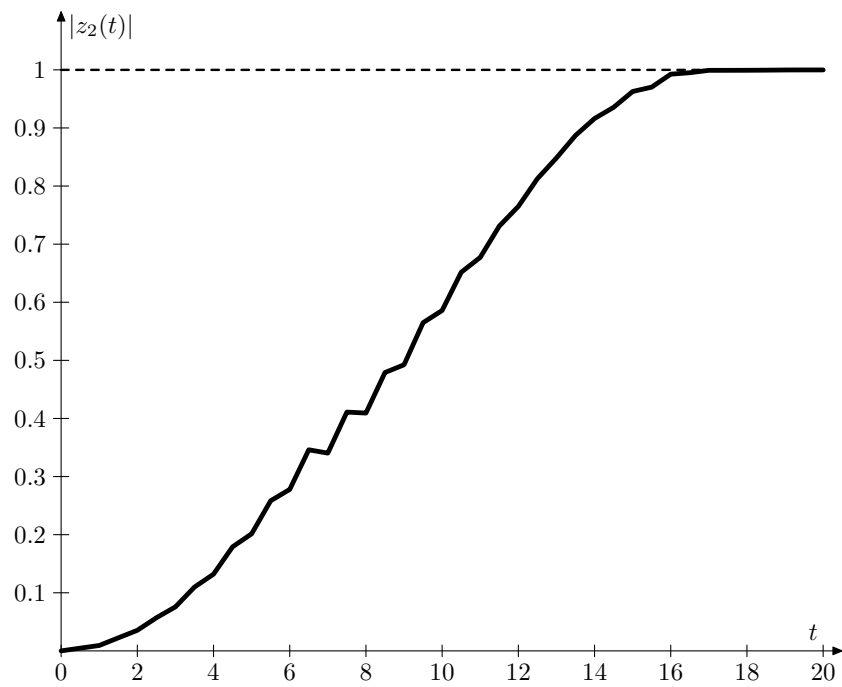


Рисунок 5.8 – Изменение  $|z^2(t)|^2$ .

нечномерного уравнения Шрёдингера. Задача может быть эквивалентным образом выписана в терминах действительных переменных после выделения действительной и мнимой части рассматриваемых величин. Соответствующая действительная постановка при этом будет иметь вид задачи управления гамильтоновой системой. Однако при рассмотрении в терминах комплексных переменных запись как самой задачи, так и соотношений метода ее решения более компактна. Для решения соответствующей задачи улучшения управления использованы соотношения для поиска разрешающей функции метода глобального улучшения для непрерывной линейной по состоянию динамической системы с линейным функционалом качества, а после проведения сужающего преобразования исходной задачи использован метод глобального улучшения для дискретных систем.

Методика приближенного решения исходной задачи с помощью сужающего преобразования и последующего применения параллельного метода глобального улучшения для задач управления квантовыми системами продемонстрирована на задачах передачи квантового состояния в длинных спиновых цепочках и управляемого вращения плоской молекулы.

Разработанная модификация метода глобального улучшения управления позволяет проводить расчеты по улучшению управления для задач большой размерности, характерных для квантовых приложений. Проведенные тестовые вычислительные эксперименты для задачи управления передачей квантового состояния в спиновой цепочке, с помощью программной реализации разработанного метода, позволяют сделать вывод об эффективности метода для рассматриваемого класса задач управления квантовыми системами.

## ГЛАВА 6

### Другие приложения

В этой главе приведено решение прикладных задач из различных областей, демонстрирующее эффективность разработанного общего подхода к приближенному исследованию задач управления.

#### **6.1 Оптимизация маневров нештатной посадки вертолета**

Известно, что в случае полного отказа двигателей вертолета посадку можно совершить на режиме самовращения несущего винта (режиме авторотации). Переход на режим самовращения возможен при определенных ограничениях на соотношение горизонтальной скорости и высоты в начале маневра, которые позволяют очертить границы опасной зоны. Аналогичная нештатная ситуация возникает и при отказе одного из двух двигателей, которыми снабжены вертолеты многих типов, и она более вероятная, хотя и при более узких границах опасной зоны.

В связи с этим актуальна задача нахождения по заданным значениям горизонтальной, вертикальной скоростей и угловой скорости вращения несущего винта нахождения максимально возможной высоты для начала безопасной посадки и соответствующее оптимальное управление.

Расчеты проводились на модели движения вертолета в продольной вертикальной плоскости в земной системе координат, предназначенной для ис-

следования взлетно-посадочных характеристик вертолета:

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= m^{-1} (-X \cos \theta - T \sin u^1), \\ \dot{x}^2 &= m^{-1} (-X \sin \theta - T \cos u^1 - G), \\ \dot{x}^3 &= f^3(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, \tilde{N}) + \frac{P}{x^3}(N - \tilde{N}), \\ \dot{x}^4 &= x^2,\end{aligned}$$

где  $x^1, x^2$  — горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости,  $x^3$  — угловая скорость вращения несущего винта,  $x^4$  — высота,  $u^1$  — угол отклонения вектора тяги от вертикали,  $u^2$  — общий шаг несущего винта,  $N$  — располагаемая мощность двигателей (рассматривается как внешнее воздействие в нештатной ситуации),  $P, Q, R, \tilde{N}$  — константы,  $m, G$  — масса и вес вертолета соответственно,  $X = Q((x^1)^2 + (x^2)^2)$ ,  $T = F_T(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2)$ ,  $\theta = \arctan \frac{x^2}{x^1}$ .

Заданы начальные значения фазовых переменных  $x(0)$ , ограничения на фазовые переменные во время ( $x_- \leq x(t) \leq x_+$ ) и в конце ( $x_{-F} \leq x(t_F) \leq x_{+F}$ ) маневра, ограничения на управления ( $u_- \leq u(t) \leq u_+$ ):

$$\begin{aligned}x(0) &= (0, 0, 29.6, 0)^T, \\ u_- &= (-0.348, 0.08)^T, \quad u_+ = (0.348, 0.348)^T, \\ x_- &= (0, -3.2, 24.6, -\infty)^T, \quad x_+ = (+\infty, 0, 30.8, +\infty)^T, \\ x_{-F} &= (0, -3.2, 24.6, -\infty)^T, \quad x_{+F} = (8, 0, 30.8, +\infty)^T.\end{aligned}$$

Требуется минимизировать конечную высоту  $F(x(t_F)) = x^4(t_F)$ , что равносильно максимизации нижней границы опасной зоны аварийной посадки.

Эта модель не имеет полного аналитического описания, что затрудняет качественный анализ и заставляет с самого начала применять приближенные методы.

Аналитическое представление уравнений движения (их правых частей), хотя бы приближенное, необходимо для реализации основных этапов решения задачи — качественного анализа с целью поиска начального приближенно оптимального решения и последующего итерационного улучшения. Для

этого предлагается процедура аппроксимации (см. п. 2.3), аналогичная статистическим схемам обработки массивов эмпирических данных. На первом этапе исследования был проведен расчет узловых значений исследуемых зависимостей  $F_T(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2)$  и  $f^3(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, \tilde{N})$ , и затем с помощью компьютерной программы, реализующей МНК в параллельном режиме, построено семейство полиномиальных аппроксимаций правой части динамической системы [10, 12].

Целесообразно строить не одну, а несколько различных аппроксимаций. Часть из них может выбираться в классе, допускающем эффективный качественный анализ, не обеспечивая при этом высокой точности. Например, это может быть класс линейных относительно  $x$  и  $u$  конструкций, поскольку имеется далеко продвинутое общая теория линейных управляемых систем, либо класс конструкций, линейных относительно всех или части компонентов  $u$ , поскольку соответствующие управляемые системы допускают преобразование к производным системам меньшего порядка.

Другая часть, напротив, преследует цель возможно более точного описания для использования на этапе итерационного улучшения универсальными методами, не зависящими от специфики модели. Окончательный выбор аппроксимирующей конструкции может быть сделан по естественному критерию минимума среднеквадратического отклонения полинома в узлах аппроксимации при прочих равных условиях (одинаковое число искомым коэффициентов и число узлов).

Для рассматриваемых режимов характерны весьма жесткие ограничения на переменные состояния, при которых получаются достаточно узкие рабочие диапазоны изменения этих переменных. Это дает основания принять в качестве сравнительно грубой аппроксимации модели движения на этапе качественного анализа линейную конструкцию. На втором этапе исследования был проведен с помощью метода кратных максимумов качественный анализ, в результате которого сформировался начальный приближенный эле-

мент  $m^I = (x^I(t), u^I(t))$  (параметрически зависящий от момента переключения первого управления  $\tau$  и от  $t_F$ ) [38].

В дальнейшем, расчеты по улучшению управления проводились на одной из нелинейных аппроксимаций выражений  $F_T(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2)$  и  $f^3(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, \tilde{N})$  (на которой наблюдались хорошие результаты исследования зависимости динамики от параметров начального управления). Исследуемая система при этом имеет вид динамической системы

$$\dot{x}^1 = -4.41 \cdot 10^{-4} \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} x^1 - 9.8u^1,$$

$$\dot{x}^2 = -4.41 \cdot 10^{-4} \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} x^2 + 0.122(x^3)^2 F_T(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2) - 9.792,$$

$$\dot{x}^3 = f^3(x^1, x^2, x^3, u^1, u^2, 357) + 0.192(x^3)^{-1}(N - 357), \quad \dot{x}^4 = x^2.$$

Улучшение управление для указанной нелинейной аппроксимации модели при наличии исходных фазовых ограничений проводилось на суперкомпьютере семейства «СКИФ» с помощью компьютерной программы [61], реализующей в параллельном режиме алгоритм улучшения управления при наличии фазовых ограничений (см. п. 4.3) [11, 47].

На рисунках 6.1–6.3 представлены результаты работы программы улучшения при фиксированных значениях параметров (начальная итерация — сплошной линией, итерация 37 — пунктирной линией, итерация 74 — линией с точками).

Третий этап исследования стал возможен благодаря организации взаимодействия между программой улучшения управления и исходной компьютерной программой по расчету правых частей дифференциальных уравнений, описывающих исследуемую динамическую систему. Это позволило провести серию расчетов по улучшению программы управления на исходной модели [59]. На рисунках 6.4–6.6 представлено улучшение начального управления с ограничением времени переключения с одного значения управления на другое (начальная итерация — сплошной линией, итерация 19 — пунктирной

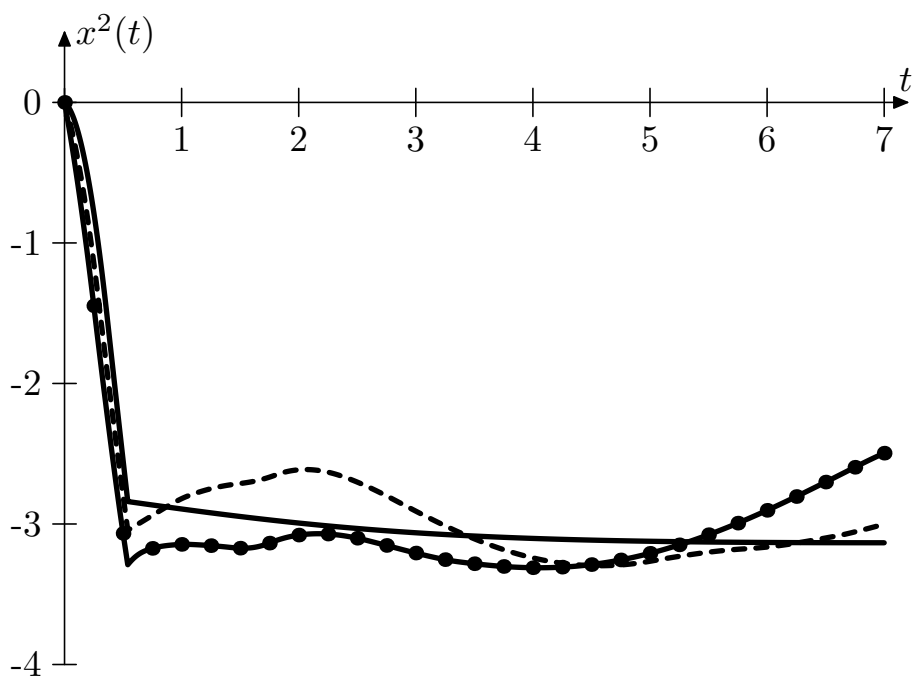
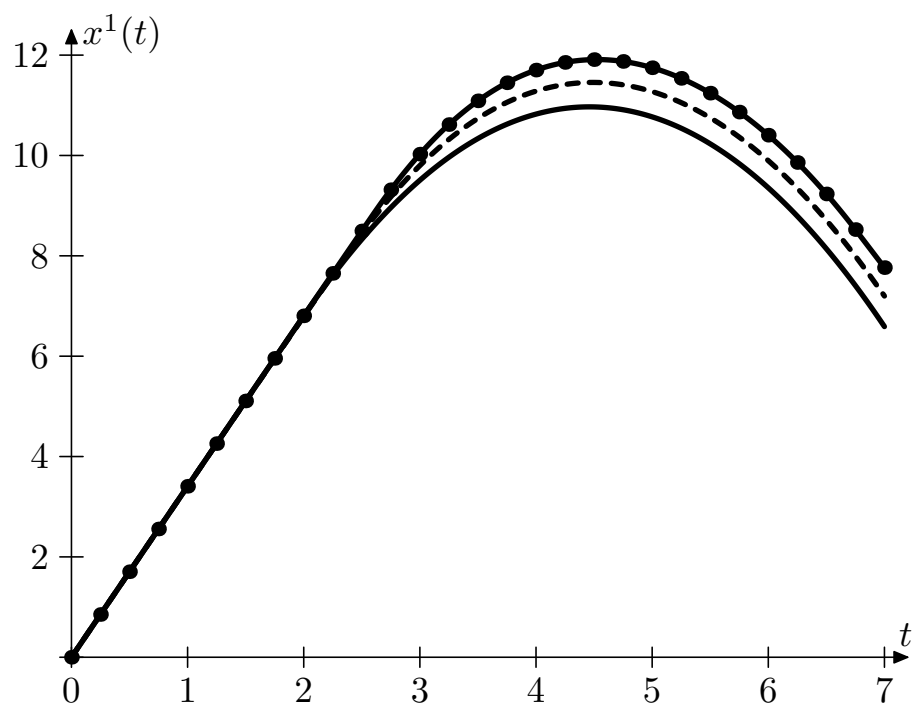


Рисунок 6.1 –

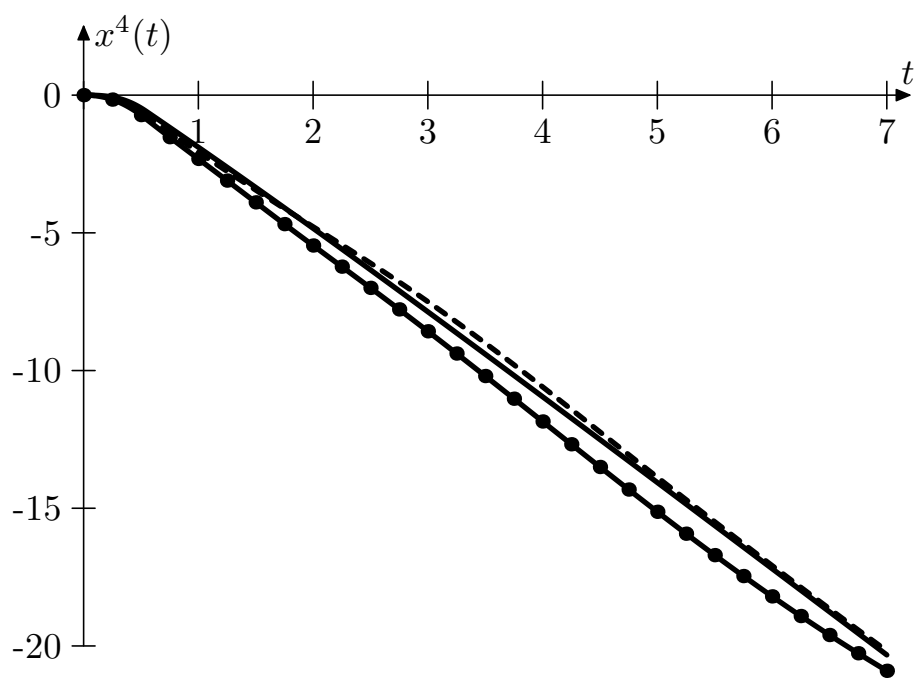
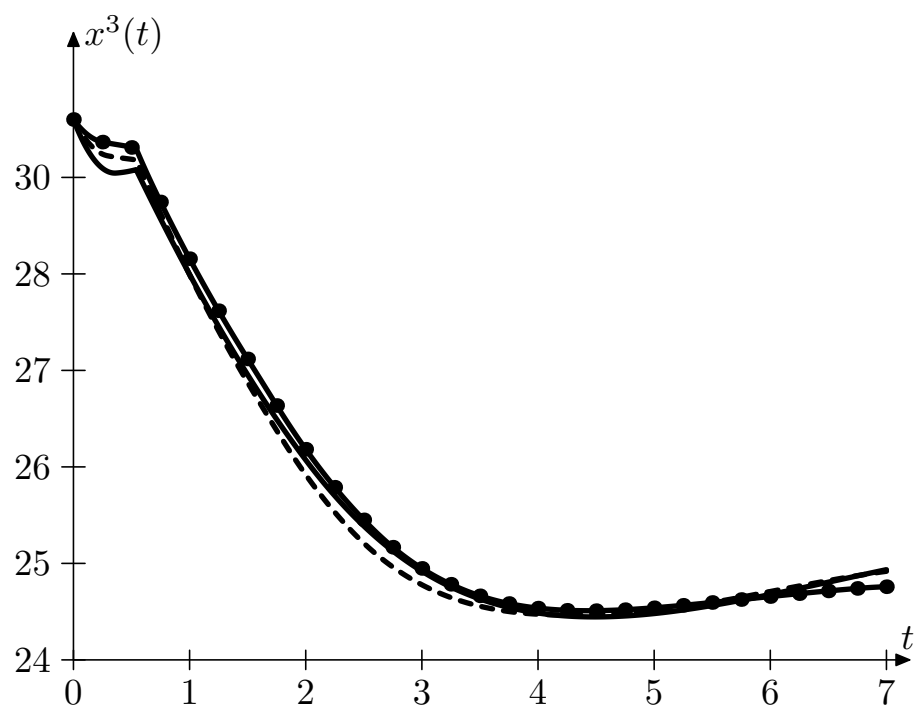


Рисунок 6.2 –



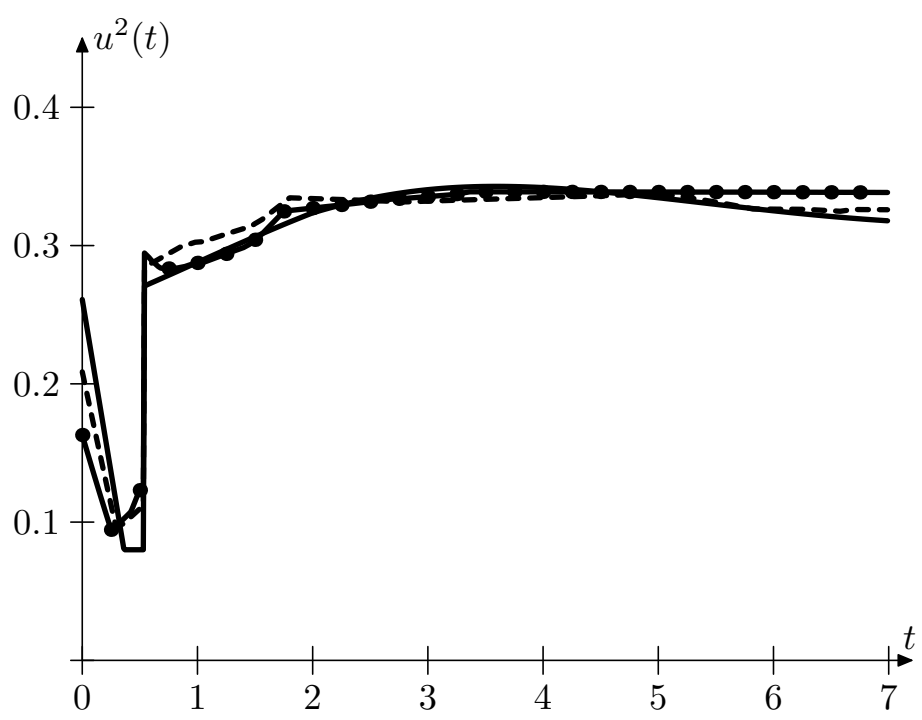
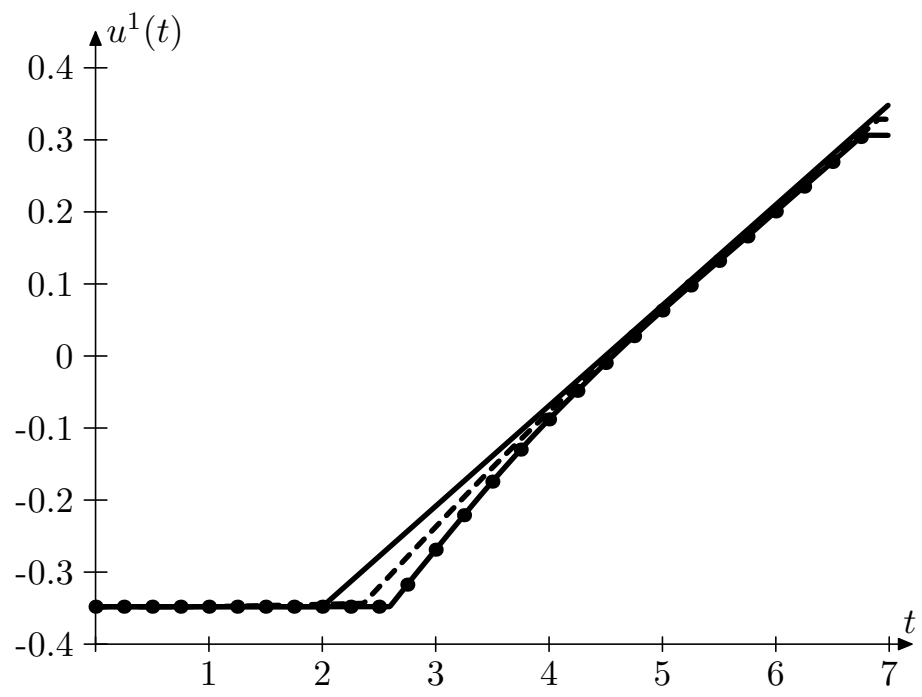


Рисунок 6.3 –

линией, итерация 105 — линией с точками). Видно, что траектория, соответствующая начальной программе управления, не удовлетворяла граничному условию  $x^2(t_F) \geq -3.2$ . Это связано с неизменными погрешностями при переходе от аппроксимации к исходной модели движения. Выбранные две итерации (19, 105) позволяют судить о хорошей работе программы, т. к. на всех этих итерациях управления и траектории удовлетворяют всем требуемым ограничениям, а значение целевого функционала  $x^4(t_F)$  на итерации 105 оказывается почти равным первоначальному (достигнуто попадание в допустимое множество и при этом не ухудшилось значение целевого функционала).

Проведенные вычислительные эксперименты для нелинейной аппроксимации исходной модели позволяют сделать вывод о значительном сокращении расчетного времени при переходе на параллельный вариант программы. Вычисления проводились на 256 различных наборах параметров метода улучшения для начальной программы управления, при нарушении требуемых ограничений соответствующей начальной траекторией. В результате работы программы удалось уменьшить значение целевого функционала, удовлетворив при этом всем ограничениям.

Был проведен запуск программ на различном числе узлов и замер времени работы в каждом случае для оценки эффективности распараллеливания программ. Полученные результаты представлены в таблице 6.1 и на рисунке 6.7 для случая программы аппроксимации по МНК, в таблице 6.2 и на рисунке 6.8 для случая программы улучшения управления. Эти данные позволяют сделать вывод об эффективном распараллеливании указанного класса алгоритмов.

С помощью описанной программы улучшения управления для дискретных динамических систем была организована серия расчетов по определению нижней границы опасной зоны при аварийной посадке вертолета. Для каждого значения меняющегося параметра  $x^1(0)$  расчет состоял из следующих

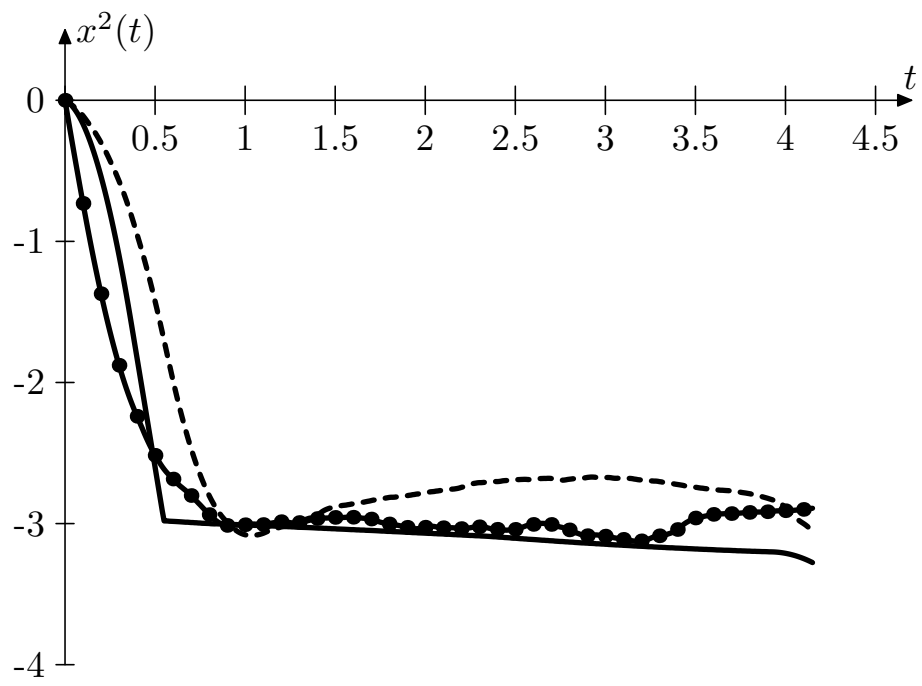
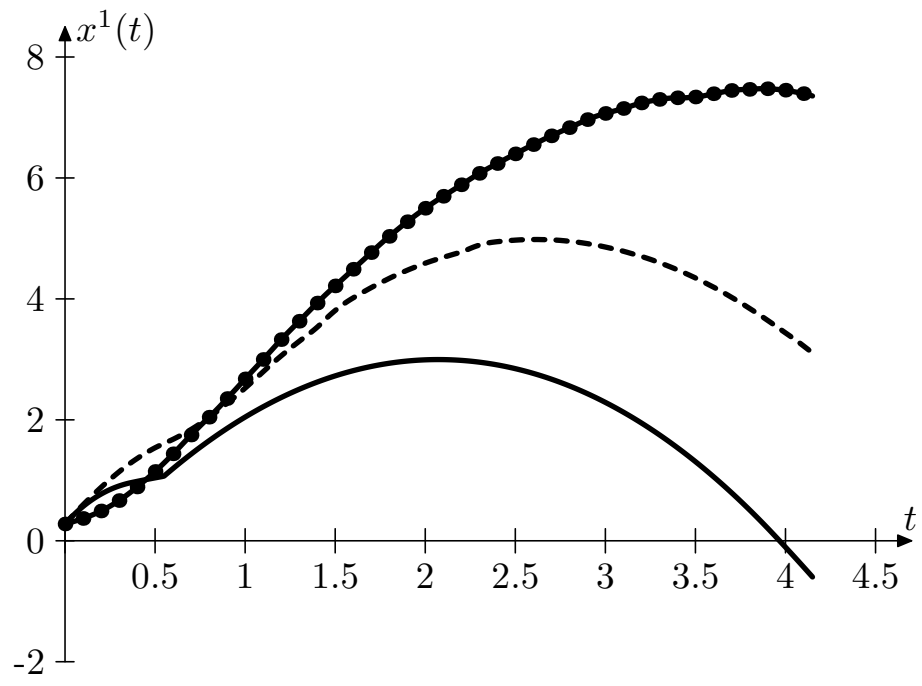


Рисунок 6.4 –

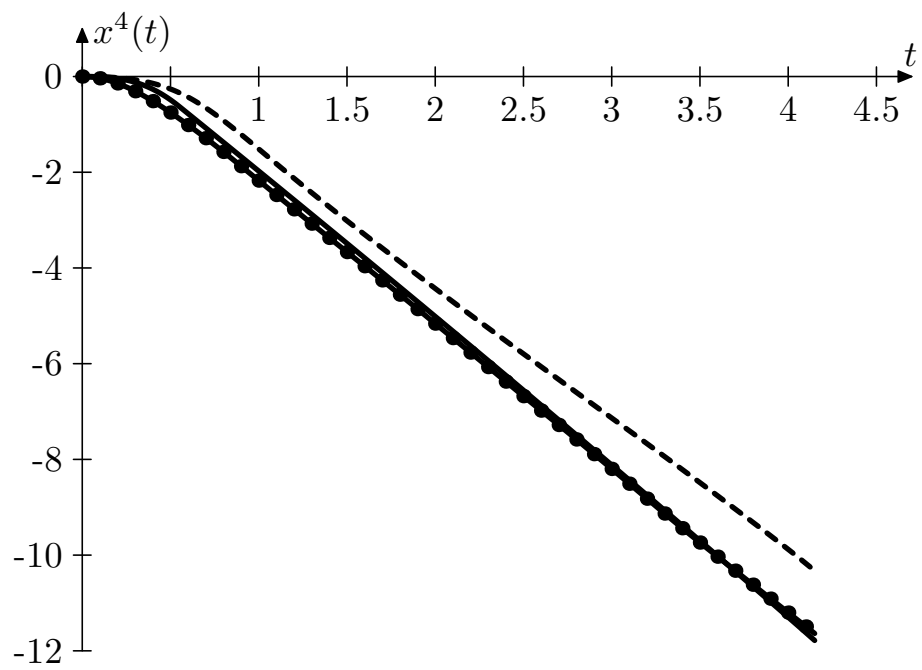
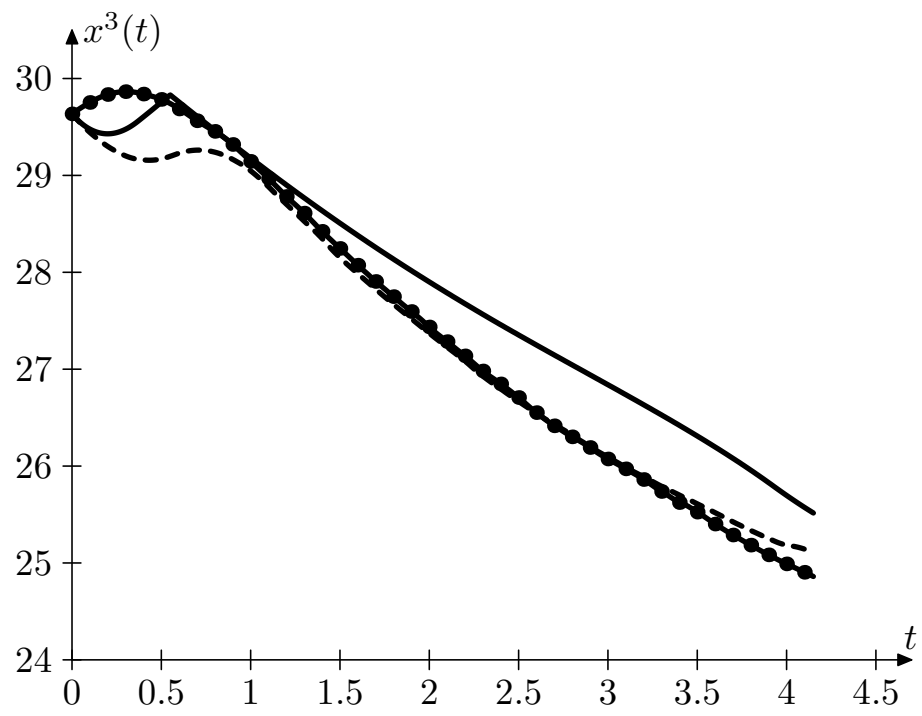


Рисунок 6.5 –

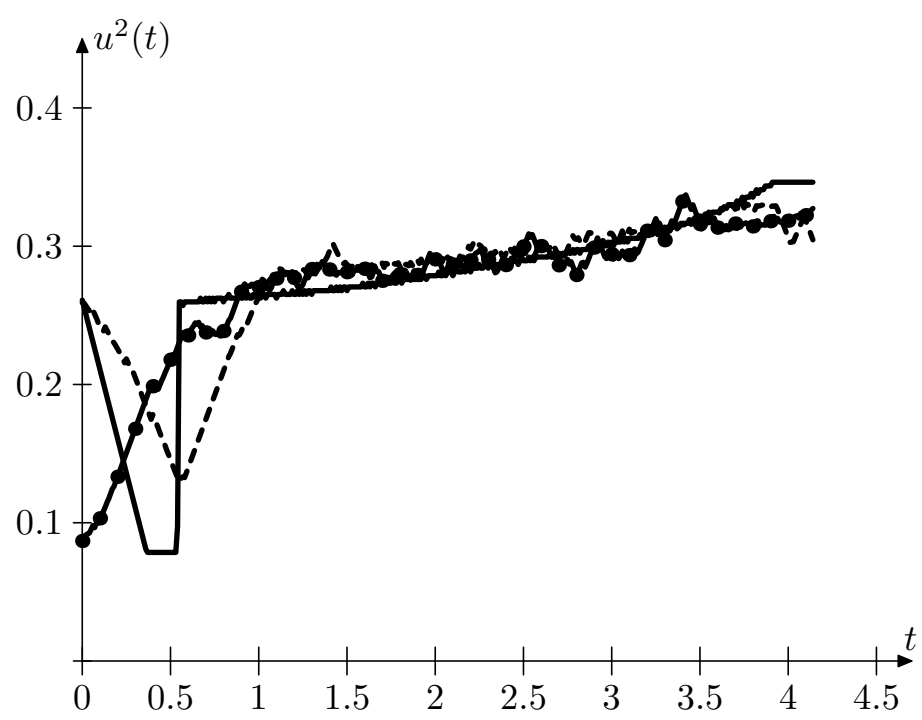
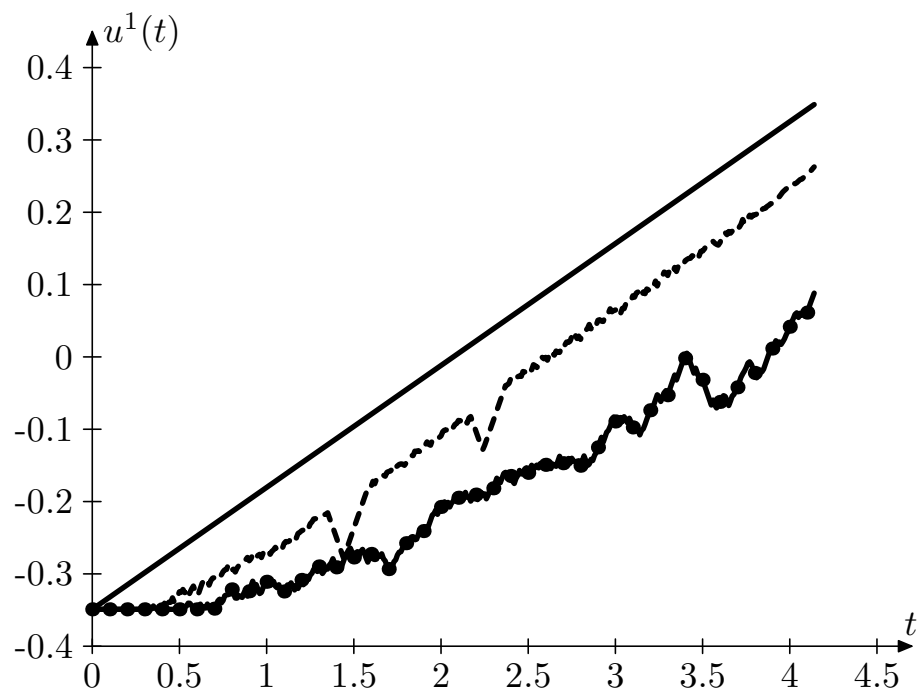


Рисунок 6.6 –

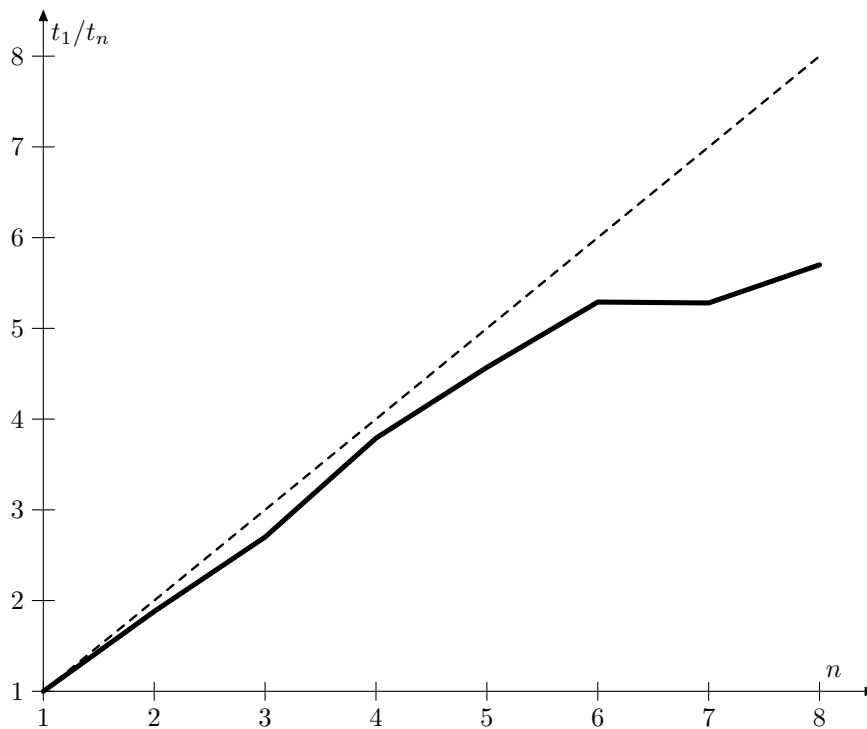


Рисунок 6.7 –

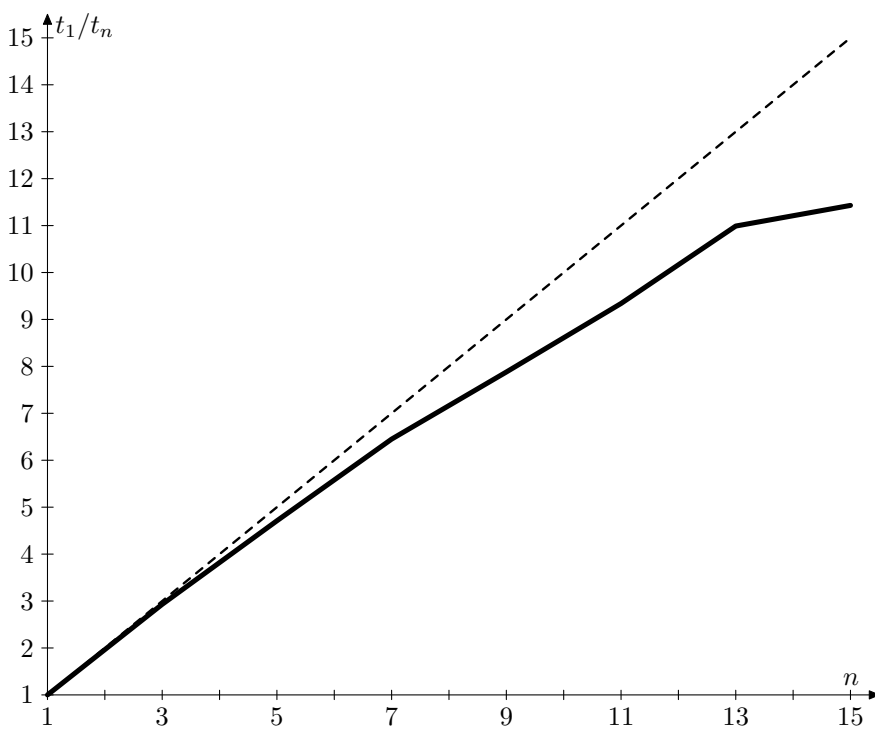


Рисунок 6.8 –

шагов.

I. Согласно второму этапу общей схемы исследования и проделанному ранее качественному анализу на линейной аппроксимации модели объекта, ищем начальное приближение на нелинейной аппроксимации. Для этого задаем моменты времени  $\tau$ ,  $t_F$ , шаг по времени  $h$  и соответствующие управления

$$u^1(t) = \begin{cases} u_-^1, & t < \tau, \\ \frac{u_-^1 - u_+^1}{t_F - h - \tau}(t - \tau) + u_-^1, & \tau \leq t \leq t_F - h, \end{cases}$$

$u^2(t) = -0.35t + 0.261$  пока  $x^2(t) \leq x_-^2$ , затем  $u^2(t)$  выбирается из условия  $x^2(t) = \text{const}$ . Проектируем полученную программу управления на допустимое множество, далее перебором значений  $t_F$ ,  $\tau$  добиваемся допустимости (возможно, с небольшой погрешностью) соответствующей траектории при максимизации  $t_F$ . Таким образом, получаем начальное приближенное решение — элемент  $m^I = (x^I, u^I)$ .

II. Улучшаем на исходной модели объекта полученное начальное приближение по критерию  $x^4(t_F) \rightarrow \min$ , при этом по возможности увеличивая значение  $t_F$ . Этот шаг соответствует третьему этапу общей схемы исследования и дает возможность получить допустимые решения исходной задачи.

Полученная нижняя граница опасной зоны для наиболее жесткого из рассмотренных сценариев нештатной ситуации [38] представлена на рисунке 6.9 в виде графика зависимости горизонтальной скорости  $V$  (в текущих обозначениях это  $x^1(0)$ ) от высоты  $H$  (в текущих обозначениях это  $-x^4(t_F)$ ). Эти результаты позволили сделать вывод о повышении границы опасной зоны на 15% против начального приближения при сохранении качественного характера динамики управлений и состояния.

**Таблица 6.1.** Анализ эффективности программы.

Число узлов: $n$	Время работы программы: $t_n$ , с	Ускорение: $t_1/t_n$
1	3338.35	1
2	1779.79	1.88
3	1237.14	2.70
4	880.25	3.79
5	729.92	4.57
6	631.72	5.29
7	632.00	5.28
8	586.20	5.70

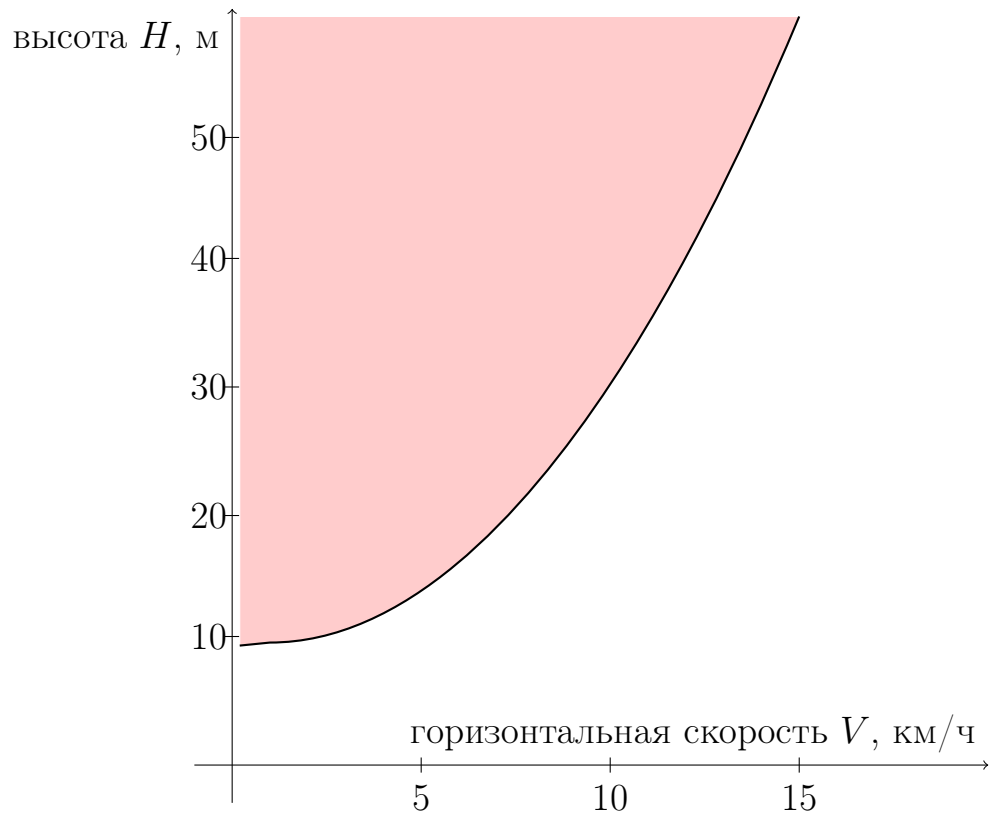
**Таблица 6.2.** Анализ эффективности программы.

Число узлов: $n$	Время работы программы: $t_n$ , с	Ускорение: $t_1/t_n$
1	1029.85	1
3	351.99	2.93
5	218.83	4.71
7	159.60	6.45
9	130.71	7.88
11	110.29	9.34
13	93.69	10.99
15	90.10	11.43

## 6.2 Социо-эколого-экономическая модель развития региона

В данном разделе рассматривается одна из последних версий модели, разработанных в ходе многолетних исследований с середины 1970-х годов в Сибирском отделении Академии наук в связи с решением проблемы сохранения природного комплекса озера Байкал и прилегающего региона.





**Рисунок 6.9 –**

Эта версия, представленная в [42], наиболее перспективна для различных приложений, но и наиболее сложна по сравнению с предшествующими. Она не могла быть реализована в полном объеме на обычных компьютерах, даже самых современных. Для практических вычислений требовались различные упрощающие допущения и высокая степень агрегирования. Появление доступных суперкомпьютеров открывает здесь новые возможности, которые демонстрируются и в данной диссертационной работе.

Концепция рассматриваемой модели трактует регион как открытую систему, разделенную условно на три взаимодействующих подсистемы: экономическую, природную и социальную. Экономическая подсистема включает традиционные производственный и непроизводственный секторы, и нетрадиционные виды деятельности, направленные на восстановление или улучшение в определенном смысле состояния природной и социальной подсистем. Динамика природной и социальной подсистем описывается однотипно. Учитыва-

ется важнейший фактор развития — инновации путем видоизменения созданной ранее региональной модели и дополнения ее специальным блоком. При этом понятие «инновация» трактуется формально как любое целенаправленное изменение параметров исходной модели, которые прежде рассматривались как константы. Число параметров исходной модели, как правило, достаточно велико.

Модель описывается следующими соотношениями:

$$c = (E - A(\theta))y - Bu - A^z z - B^z u^z - A^d d - B^d u^d, \quad (6.1)$$

$$\dot{r} = N(r - \bar{r}) - C(\theta)y - Du - D^z u^z + C^z z + im^r - ex^r, \quad (6.2)$$

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max},$$

$$\dot{k} = u - [\delta]k, \quad \dot{k}^z = u^z - [\delta^z]k^z, \quad \dot{k}^d = u^d - [\delta^d]k^d, \quad (6.3)$$

$$y_{\min} \leq y \leq [\beta]k, \quad 0 \leq z \leq [\beta^z]k^z, \quad 0 \leq d \leq [\beta^d]k^d, \quad (6.4)$$

$$u \leq 0, \quad u^z \leq 0, \quad u^d \leq 0,$$

$$\dot{\theta} = -([\delta] + H_{inv} + [H_{dif}]) (\theta - \bar{\theta}), \quad (6.5)$$

$$\dot{\Pi} = \left( (1-l)p^T c - l(r - \bar{r})^2 \right) e^{-\rho t}, \quad 0 \leq l \leq 1. \quad (6.6)$$

Здесь в качестве переменных состояния выступают вектора:  $k \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $k^z \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $k^d \in \mathbb{R}^{n_3}$  — основные фонды в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах ( $n_3 = n_1(n_1 + n_2)$ ),  $r \in \mathbb{R}^{n_1}$  — индексы состояния природной среды и социума,  $\theta \in \mathbb{R}^{n_3}$  — инновационные индексы (агрегированное описание изменения за счет инноваций элементов матрицы прямых затрат в экономическом секторе  $A(\theta)$  и матрицы коэффициентов прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем  $C(\theta)$ ),  $\Pi \in \mathbb{R}$  — функционал благосостояния. Переменными управления служат векторы  $y$ ,  $z$ ,  $d$  — выпуски продукции по отраслям, активное природо-социо-восстановление, активные инновации,  $u$ ,  $u^z$ ,  $u^d$  — инвестиции в экономическом, природо-социо-восстановительном и инновационном секторах. Остальные величины, входящие в модель (6.1)–(6.6):

$c$  — конечное потребление;  $\Gamma(k) = [\beta]k$ ,  $\Gamma^z(k^z) = [\beta^z]k^z$ ,  $\Gamma^d(k^d) = [\beta^d]k^d$ ,  
 $\delta$ ,  $\delta^z$ ,  $\delta^d$  — мощности и темпы амортизации в экономическом, природо-социо-  
восстановительном и инновационном секторах;  $p$  — цены;  $\bar{r}$  — заданная функ-  
ция (опорная), например получаемая из статистического прогноза;  $im^r$ ,  $ex^r$  —  
миграционные потоки загрязнений и ресурсов;  $A^z$ ,  $A^d$  — прямые затраты в  
природо-социо-восстановительном и инновационном секторах;  $B$ ,  $B^z$ ,  $B^d$  —  
фондообразующие затраты в указанных секторах;  $N$  — коэффициенты вза-  
имовлияния компонентов природной и социальной подсистем;  $D$ ,  $D^z$  — ко-  
эффициенты воздействия на компоненты природной и социальной подсистем  
при инвестициях в отрасли экономики и в природо-социо-восстановительный  
сектор;  $H_{inv}$ ,  $[H_{dif}]$  — матрицы, отражающие влияние инвестиций и диффу-  
зии инноваций,  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$  — минимально и максимально допустимые индексы  
состояния природной среды и социума,  $y_{\min}$  — минимально допустимые вы-  
пуски продукции по отраслям.

Данная модель может трактоваться как непрерывная, так и дискретная  
по времени. Точкой сверху в непрерывном варианте обозначаются производ-  
ные по времени (так  $\dot{k} = \frac{dk}{dt}$  и т. д.), а в дискретном — конечные разности  
( $\dot{k} = \frac{k(t+h)-k(t)}{h}$  и т. д.), где  $h$  — временной шаг, который удобно задавать  
равным единице времени (типично — году),  $h = 1$ . Все величины в правых  
частях уравнений и в конечных соотношениях берутся в момент  $t$ .

Одной из важных целей построения модели (6.1)–(6.6), как и в классиче-  
ских задачах экономической динамики, является оптимальный выбор управ-  
ляющих воздействий по критерию максимума некоторого функционала по-  
лезности. Эта процедура служит по существу продолжением процесса мо-  
делирования, определяя поведение действующих сторон (агентов) исходя из  
единого принципа. Здесь предлагается достаточно очевидный критерий опти-  
мальности: на заданном отрезке времени  $[t_I, t_F]$  (период, горизонт планиро-  
вания) максимизировать величину  $\Pi(t_F)$  (функционал благосостояния) при  
заданных ограничениях и заданном состоянии в начале периода:  $\Pi(t_I) = 0$ ,

$$k(t_I) = k_I, k^z(t_I) = k_I^z, k^d(t_I) = k_I^d, r(t_I) = r_I, \theta(t_I) = \theta_I.$$

После представления наборов фазовых и управляющих переменных модели (6.1)–(6.6) в виде соответствующих векторов  $x = (k, k^z, k^d, r, \theta, \Pi)$ ,  $u = (y, z, u, u^z, u^d, d)$ , замены ограничений штрафными добавками в минимизируемый функционал и проведения дискретизации по времени, задачу оптимизации для социо-эколого-экономической модели (6.1)–(6.6) можно рассматривать как задачу оптимального управления в стандартной форме

$$\begin{aligned} x(t+h) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = \{t_I, \dots, t_F\}, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p, \\ n &= n_1 + 2n_2 + 2n_1(n_1 + n_2) + 1, \\ p &= 2n_1 + 2n_2 + 2n_1(n_1 + n_2), \\ x(t_I) &= x_I, \quad F(x(t_F)) \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{6.7}$$

и применять к ее исследованию известные методы теории оптимального управления.

### 6.2.1 Программно-алгоритмический инструментарий

На основе рассматриваемой версии модели разработан программно-алгоритмический комплекс DSEEmodel 1.0 для суперЭВМ серии «СКИФ» Союзного государства «Россия-Белоруссия» [48, 39, 49]. Все основные алгоритмы комплекса программ DSEEmodel 1.0 реализованы в рамках Т-системы с открытой архитектурой (OpenTS) [1, 2, 3] и предназначены для работы с дискретной моделью региона. Однако, с помощью предложенного преобразования (см. п. 2.4), можно свести непрерывную социо-эколого-экономическую модель к дискретно-непрерывной модели, не содержащей управлений на непрерывном уровне. Это позволяет рассматривать задачу для дискретной социо-эколого-экономической модели и для дальнейших расчетов использовать реализованные алгоритмы комплекса DSEEmodel 1.0, отслеживая точность при решении непрерывных задач нижнего уровня с помощью подходя-

щих численных методов решения задачи Коши.

Комплекс DSEEmodel 1.0 предназначен для компьютерной поддержки следующих типов расчетов:

1. Сценарный анализ — программа поиска решения (прямого расчета системы) при задании всех входных величин;
2. Моделирование неопределенностей — программы случайных изменений коэффициентов и входов моделей с целью исследования их на устойчивость и чувствительность.
3. Грубая глобальная оптимизация — программа поиска магистральных решений, характерных для данной модели, как приближенных глобально оптимальных, которые можно выбирать в качестве начальных приближений для последующего итерационного уточнения (этап 1 и этап 2 общей схемы исследования задач управления).
4. Последовательное улучшение и приближенно-оптимальный синтез управления — программа, реализующая итерационное улучшение приближенных решений (этап 3 общей схемы исследования задач управления).

Более общая цель создания модели региона — проведение широкой серии вычислительных экспериментов при широком участии экспертов и руководителей–практиков для выбора обоснованной стратегии развития. Такие расчеты должны давать ответы на вопросы типа «что будет, если ...?», т. е. оценивать последствия возможных решений, которые формулируются как некоторые сценарии. Источниками разнообразных содержательных сценариев могут выступать подходы к решению существующих проблем (спад производства, устаревшие технологии, угроза уникальному природному объекту и т. п.), неопределенность внешних факторов и критериев, практически значимые аппроксимации и интерпретации идеализированных оптимальных решений.

Для проведения вычислительных экспериментов непосредственно с математической моделью требуются формальные сценарии. Под формальным сценарием понимается любая заданная комбинация входов. Их источниками могут выступать: «перевод» содержательных сценариев на язык модели (при этом одному и тому же содержательному сценарию могут отвечать различные интерпретации, т. е. различные формальные сценарии), анализ чувствительности модели и оптимальных решений к параметрам и неопределенностям, что позволяет выявить, с одной стороны, группу наиболее значимых параметров, в отношении которых требования к эмпирическим данным должны быть особенно жесткими, а с другой — возможные несущественные компоненты и связи, игнорирование которых позволяет упростить модель или ее информационное наполнение.

Систематизация возможных формальных сценариев с учетом опыта работы с предшествующими версиями модели и их приложений позволило сформулировать требования к создаваемому компьютерному инструментарию.

Предполагается прямой расчет системы (6.1)–(6.6)) при задании входных величин:  $n_1, n_2, t_I, t_F, h, k(t_I), k^z(t_I), k^d(t_I), r(t_I), \theta(t_I), \Pi(t_I), \delta, \delta^z, \delta^d, \bar{r}, im^r, ex^r, p, \bar{\theta}, \rho, l, N, H_{inv}, H_{dif}, C^z, D, D^z, A^z, A^d, B, B^z, B^d$ , и управлений  $y, z, d, u, u^z, u^d$  в моменты времени  $t_I, \dots, t_F - h$ .

Алгоритм расчета последователен, но приобретает явный параллелизм при наличии нескольких независимых наборов входных величин.

В качестве моделирования неопределенностей предполагается исследовать чувствительность целевого функционала  $F_0(\Pi(t_F)) = -\Pi(t_F)$  при заданных управлениях к малым изменениям коэффициентов матрицы прямого воздействия отраслей экономики на компоненты природной и социальной подсистем  $C(\theta)$  и матрицы прямых затрат в экономическом секторе  $A(\theta)$ .

Данный сценарий предполагает задание входных величин:  $n_1, n_2, t_I, t_F, h, k(t_I), k^z(t_I), k^d(t_I), r(t_I), \theta(t_I), \Pi(t_I), \delta, \delta^z, \delta^d, \bar{r}, im^r, ex^r, p, \bar{\theta}, \rho, l, N, H_{inv}, H_{dif}, C^z, D, D^z, A^z, A^d, B, B^z, B^d$ , и управлений  $y, z, d, u, u^z, u^d$

в моменты времени  $t_I, \dots, t_F - h$ . В дальнейшем производится расчет для каждого нового набора входов с изменением одного коэффициента матрицы  $A(\theta)$  (матрицы  $C(\theta)$ ) на 1% от исходного значения текущего коэффициента. При этом очевидно, вычисления могут вестись параллельно для каждого текущего значения входов. По окончании сравниваются изменения значения целевого функционала  $F_0$  на исходном наборе входных данных и на текущих наборах входных данных.

Рассматриваемая модель региона (6.1)–(6.6) допускает при некоторых идеализирующих допущениях применение специального высокоэффективного метода поиска магистральных решений [42], который состоит в следующем.

Из рассматриваемой системы (6.1)–(6.6) исключаются дифференциальные уравнения относительно  $k^z$ ,  $k^d$  и  $\theta$ . Управления  $u$ ,  $z$  считаются неограниченными,  $u^d = 0$ ,  $d = 0$ ,  $C(\theta) = const = C(\theta(t_I))$ ,  $A(\theta) = const = A(\theta(t_I))$ ,  $B^z = 0$ ,  $D = 0$ ,  $D^z = 0$ . Ищется решение задачи оптимального управления следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= u - [\delta]k, \quad t \in [t_I, t_F], \\ \dot{r} &= N(r - \bar{r}) - Cy + C^z z + im^r - ex^r, \\ \dot{\Pi} &= \left( (1-l)p^T((E-A)y - Bu - A^z z) - l(r - \bar{r})^2 \right) e^{-\rho t}, \\ k(t_I) &= k_I, \quad k(t_F) = k_F, \quad r(t_I) = r_I, \quad \Pi(t_I) = 0, \\ -\Pi(t_F) &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Применяется специальный метод [31] преобразования к производной системе (см. п. 1.2), который, вкратце состоит в следующем. Записывается вспомогательная система

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau_1} &= E, \quad \frac{\partial r}{\partial \tau_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_1} = -(1-l)e^{-\rho t} p^T B, \\ \frac{\partial k}{\partial \tau_2} &= 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \tau_2} = C^z, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_2} = -(1-l)e^{-\rho t} p^T A^z, \end{aligned}$$

где  $\tau_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\tau_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ , и находится ее интерграл (скалярный)

$$I(t) = \Pi(t) + \tilde{p}^T(t) B k(t) + \tilde{p}^T(t) A^z (C^z)^{-1} r(t), \quad (6.9)$$

где  $\tilde{p}(t) = (1-l)e^{-\rho t}p$ . Заметим, что  $\dot{\tilde{p}}(t) = -\rho\tilde{p}(t)$ . Далее записывается полная производная (6.9) в силу системы (6.8)

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \dot{P}(t) - \rho\tilde{p}^T(t)Bk(t) + \tilde{p}^T(t)B\dot{k}(t) - \\ &- \rho\tilde{p}^T(t)A^z(C^z)^{-1}r(t) + \tilde{p}^T(t)A^z(C^z)^{-1}\dot{r}(t) = \\ &= \tilde{p}^T(t) (E - A - A^z(C^z)^{-1}C) y(t) - \\ &- \tilde{p}^T(t)B(\rho E + [\delta])k(t) - \\ &- le^{\rho t} (r(t) - \bar{r})^2 + \tilde{p}^T(t)A^z(C^z)^{-1} (N - \rho E) r(t) + \xi(t), \end{aligned}$$

где  $\xi(t)$  — функция только от  $t$ .

В результате максимизации полученного выражения при каждом  $t \in [t_I, t_F]$  по переменным  $y, k, r$  в области

$$\begin{aligned} r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}, \quad k_{low}(t) \leq k(t) \leq k_{up}(t), \\ y_{min} \leq y(t) \leq [\beta]k(t), \end{aligned}$$

где  $k_{low}(t) = k_I e^{-[\delta]t}$ ,  $k_{up}(t) = k_F e^{[\delta](t_F-t)}$  — решения уравнения  $\dot{k} = -[\delta]k$  при условиях  $k(t_I) = k_I$ ,  $k(t_F) = k_F$  соответственно, получается тройка функций  $\hat{y}(t)$ ,  $\hat{k}(t)$ ,  $\hat{r}(t)$ , называемая магистралью. Ее комбинация с заданными граничными точками, как правило, разрывна. Предлагается аппроксимировать магистральное решение в окрестности разрывов линейными функциями с заданными коэффициентами наклона.

А именно,

1. Максимизация по  $k$ .

а) если  $\{-p^T B(\rho E + [\delta])\}_i > 0$ , то

$$\hat{k}_i(t) = \begin{cases} \lambda(t; t_0, t_0 + s, k_i(t_0), k_{up i}(t_0 + s)), & t \in [t_0, t_0 + s), \\ k_{up i}(t), & t \in [t_0 + s, t_F], \end{cases}$$

где  $\lambda(t; \tau_0, \tau_1, x_0, x_1)$  — прямая, проходящая через точки  $(\tau_0, x_0)$ ,  $(\tau_1, x_1)$  (выход на магистраль).

б) если  $\{-p^T B(\rho E + [\delta])\}_i < 0$ , то

$$\hat{k}_i(t) = \begin{cases} k_{low i}(t), & t \in [t_0, t_F - s), \\ \lambda(t; t_F, t_F - s, k_i(t_F), k_{low i}(t_F - s)), & t \in [t_F - s, t_F]. \end{cases}$$



в) если  $\{-p^T B(\rho E + [\delta])\}_i = 0$ , то

$$\widehat{k}_i(t) = \lambda(t; t_0, t_F, k_i(t_0), k_i(t_F)), \quad t \in [t_0, t_F].$$

2. Максимизация по  $y$ .

Если справедливо  $\{p^T (E - A - A^z(C^z)^{-1}C)\}_i \geq 0$ , то  $\widehat{y}_i(t) = \{[\beta]\widehat{k}(t)\}_i$ ; иначе  $\widehat{y}_i(t) = 0$ .

3. Максимизация по  $r$ .

Расчет вспомогательных величин  $r^*$  и  $\widetilde{r}$ :

$$r^* = \bar{r} + \frac{1-l}{2l} (p^T A^z (C^z)^{-1} (N - \rho E))^T,$$

$$\widetilde{r} = \begin{cases} r^*_i, & \text{если } l \neq 0, r^*_i \in [r_{\min i}, r_{\max i}], \\ r_{\min i}, & \text{если } l \neq 0, r^*_i < r_{\min i}, \\ & \text{или } l = 0, \{p^T A^z (C^z)^{-1} (N - \rho E)\}_i < 0, \\ r_{\max i}, & \text{если } l \neq 0, r^*_i > r_{\max i}, \\ & \text{или } l = 0, \{p^T A^z (C^z)^{-1} (N - \rho E)\}_i > 0. \end{cases}$$

$$\widehat{r}_i(t) = \begin{cases} r_i(t_0), & \text{если } l = 0, \{p^T A^z (C^z)^{-1} (N - \rho E)\}_i = 0, \\ \begin{cases} \lambda(t; t_0, t_0 + s, r_i(t_0), \widetilde{r}), & t \in [t_0, t_0 + s), \\ \widetilde{r}, & t \in [t_0 + s, t_F], \end{cases} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее, из уравнений (6.8)  $\dot{k} = u - [\delta]k$  находим  $\widehat{u} = \widehat{k} + [\delta]\widehat{k}$ . Из уравнений (6.8)  $\dot{r} = N(r - \bar{r}) - Cy + C^z z + im^r - ex^r$  находим  $\widehat{z} = (C^z)^{-1} (\widehat{r} - N(\widehat{r} - \bar{r}) + C\widehat{y} - im^z + ex^z)$ . Используя ограничения (6.4)  $0 \leq z \leq [\beta^z]k^z$  и условия  $k^z(t_I) = k_I^z$ ,  $k^z(t_F) = k_F^z$  (если они заданы), полагаем  $\widehat{k}_i^z = \frac{1}{\beta_i^z} \widehat{z}_i$ . Если это необходимо, то аппроксимируем решение в окрестности разрывов линейными функциями с заданными коэффициентами наклона:

$$\widehat{k}_i^z(t) = \begin{cases} \lambda(t; t_0, t_0 + s, k_i^z(t_0), \frac{1}{\beta_i^z} \widehat{z}_i(t_0 + s)), & t \in [t_0, t_0 + s), \\ \frac{1}{\beta_i^z} \widehat{z}_i(t), & t \in [t_0 + s, t_F - s), \\ \lambda(t; t_F, t_F - s, k_i^z(t_F), \frac{1}{\beta_i^z} \widehat{z}_i(t_F - s)), & t \in [t_F - s, t_F]. \end{cases}$$

Далее, из уравнений (6.3) находим  $\widehat{u}^z = \dot{\widehat{k}}^z + [\delta^z] \widehat{k}^z$ .

Найденную аппроксимацию магистрального управления составят функции  $\widehat{y}(t)$ ,  $\widehat{z}(t)$ ,  $\widehat{u}(t)$ ,  $\widehat{u}^z(t)$ ,  $u^d(t) = 0$ ,  $d(t) = 0$ , которые можно использовать в качестве начального приближения в нижеописанной итерационной процедуре улучшения управления.

Поиск магистрального решения предполагает задание входных величин:  $n_1, n_2, t_I, t_F, h, k(t_I), k^z(t_I), k^d(t_I), r(t_I), \theta(t_I), \Pi(t_I), \delta, \delta^z, \delta^d, \bar{r}, im^r, ex^r, p, \bar{\theta}, \rho, l, N, H_{inv}, H_{dif}, C^z, D, D^z, A^z, A^d, B, B^z, B^d, r_{\min}, r_{\max}, \beta, \beta^z, \beta^d, y_{\min}$ , и, возможно, некоторых из величин  $k(t_F), k^z(t_F), r(t_F)$ . В случае, когда все величины  $k(t_F)$  заданы, алгоритм поиска магистрального решения последователен. В случае, когда некоторые из величин  $k(t_F)$  не заданы, алгоритм поиска магистрального решения должен выполняться на некотором количестве принудительно заданных вариантов недостающих исходных величин, что порождает параллельные вычисления.

Задача улучшения управления в данном случае ставится следующим образом: имеется начальное решение задачи оптимального управления (6.7) — допустимый элемент  $m^I = (x^I(t), u^I(t))$ , требуется найти допустимый элемент  $m^{II} = (x^{II}(t), u^{II}(t))$ , такой, что  $F(x^{II}(t_F)) < F(x^I(t_F))$ .

Метод улучшения первого порядка в случае, когда  $F = F_0$  (т. е. ограничения не учтены с помощью штрафных добавок в минимизируемом функционале), выражается формулами

$$\begin{aligned} u^{II}(t) &= u^I(t) + \frac{1}{h\alpha} f_u^T(t, x^I(t), u^I(t)) \psi(t+h), \\ \psi(t) &= f_x^T(t, x^I(t), u^I(t)) \psi(t+h), \quad t = t_f - h, \dots, t_I, \\ \psi(t_F) &= (0, \dots, 0, 1 - \alpha)^T, \end{aligned}$$

где  $\alpha \in (0, 1]$  — параметр метода. Для исследуемой модели (6.1)–(6.6) сложность заключается в процедуре выбора весовых коэффициентов при добавлении штрафных добавок в минимизируемый функционал и в нахождении

матриц частных производных  $f_u$  и  $f_x$  в силу нелинейности исходной модели (6.1)–(6.6). Для преодоления первой сложности предложена достаточно универсальная процедура выбора весовых коэффициентов при добавлении штрафных добавок на каждой итерации метода улучшения (см. п. 4.3). Матрицы же частных производных были вычислены аналитически.

Алгоритм улучшения управления предполагает задание входных величин:  $n_1, n_2, t_I, t_F, h, k(t_I), k^z(t_I), k^d(t_I), r(t_I), \theta(t_I), \Pi(t_I), \delta, \delta^z, \delta^d, \bar{r}), im^r, ex^r, p, \bar{\theta}, \rho, l, N, H_{inv}, H_{dif}, C^z, D, D^z, A^z, A^d, B, B^z, B^d, r_{\min}, r_{\max}, \beta, \beta^z, \beta^d, y_{\min}$ , и начальных управлений  $y, z, d, u, u^z, u^d$  в моменты времени  $t_I, \dots, t_F - h$ . В области изменения параметра метода улучшения  $\alpha$  выбирается равномерно несколько значений, и параллельно для каждого значения параметра проводятся итерации улучшения начального управления.

Одним из важнейших условий эффективности итерационного улучшения является удачный выбор начального приближения, т. е. успешное выполнение расчетов типа 2.

## 6.2.2 Тестовые расчеты

Были проведены расчеты для двух условных регионов с основными исходными данными, соответствующими Переславскому региону [42] и Байкальскому региону [120]. Реальных данных в настоящее время далеко не достаточно для формирования полных наборов, необходимых для практических содержательных расчетов. Это самостоятельный сложный комплекс междисциплинарных эмпирических исследований, связанных с моделированием конкретных регионов и организованных также на основе концептуальной модели. Представление об этом дают соответствующие разделы монографий [120, 42]. Для проведения тестовых расчетов реальные данные были дополнены значительным количеством условных. В качестве параметров, подлежащих инновационным изменениям, были выбраны коэффициенты матриц пря-

мых производственных затрат  $A$  прямых воздействий отраслей экономики на компоненты природы и социума  $C$ . С учетом возможностей высокопроизводительных параллельных вычислений агрегирования в инновационном блоке не производилось.

Для непрерывной модели региона типа «Переславский» соответствующий набор данных представлен в таблице 6.3. Экономика здесь представлена тремя агрегированными отраслями, состояние природно-социального блока характеризуется четырьмя индексами:  $r^1$  — приведенный запас природных ресурсов,  $r^2$  — качество природной среды,  $r^3$  — численность населения,  $r^4$  — индекс социального развития. Вектор инновационных индексов составляют 9 коэффициентов матрицы  $A$  и 12 коэффициентов матрицы  $C$ . Общая размерность вектора состояния составляет 54, вектора управлений — 56.

Были проведены три типа расчетов (1, 3, 4). Вначале находилось магистральное решение (расчет типа 3), затем оно модифицировалось в начальное приближение для управлений, и рассчитывался соответствующий сценарий (расчет типа 1), далее запускался итерационный процесс улучшения (расчет типа 4). Результаты представлены на рисунках 6.10–6.14 (магистральное решение отмечено индексом  $I$ , а улучшенное решение — индексом  $II$ ). Значения экономических переменных отнесены к начальным значениям, а природно-социальных — к опорным (невозмущенным). Они демонстрируют качественный характер оптимальной стратегии устойчивого развития региона, несмотря на условность исходных данных. А именно, природно-социальные индексы остаются в заданных границах. При этом 1-я и 2-я отрасли оказываются нерентабельными с учетом затрат на восстановление природной и социальной среды, и их выпуски остаются на нижней границе, определенной из условий занятости. Третья отрасль становится рентабельной на 15-м году в результате инновационных процессов, и ее выпуск переключается на максимальный. В целом экономика остается нерентабельной, но тенденция накопления регионального дохода сменяется с отрицательной на положительную.

Таблица 6.3.

$k(0)$	211 251 37.3	$k^z(0)$	4 12 0.15 8.5
$k^d(0)$	1 2 1 1 2 1 1 2 1 1 1 1 2 1 2 1 1 1 1 2 2	$r(0)$	5755 0.8 69.5 0.44
$r_{min}$	5000 0.3 60 0.4	$r_{max}$	6000 1.3 120 0.8
$\bar{r}$	6000 0.7 100 0.5	$p$	1 1 1
$\delta$	0.06 0.06 0.07	$\delta^z$	0.07 0.09 0.06 0.11
$\delta^d$	0.06 ... 0.06	$y_{min}$	42.2 43.925 9.325
$\beta$	0.4 0.35 0.5	$\beta^z$	3.7 0.019 0.03 0.0026
$\beta^d$	0.003 ... 0.003	$H_{inv}$ (diag)	0.01 ... 0.01
$A$	0.08 0.001 $1e - 05$ 0.5 0.4 0.35 0.001 0.006 0.06	$B$	0 0 0 0.45 0.65 0.4 0 0 0
$A^z$	0.2 80 3 200 0.4 90 40 1000 0 0.6 20 3000	$B^z$	0 0 0 0 0.3 0.35 0.2 0.15 0 0 0 0
$C$	0 0.011 0 0.0018 0.002 0.0011 0.0001 0.0005 0.0003 0.0002 0.0001 0.0003	$C^z$	1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1
$im^r, ex^r, \rho, l, D, D^z, H_{dif}, N$ — нулевые			

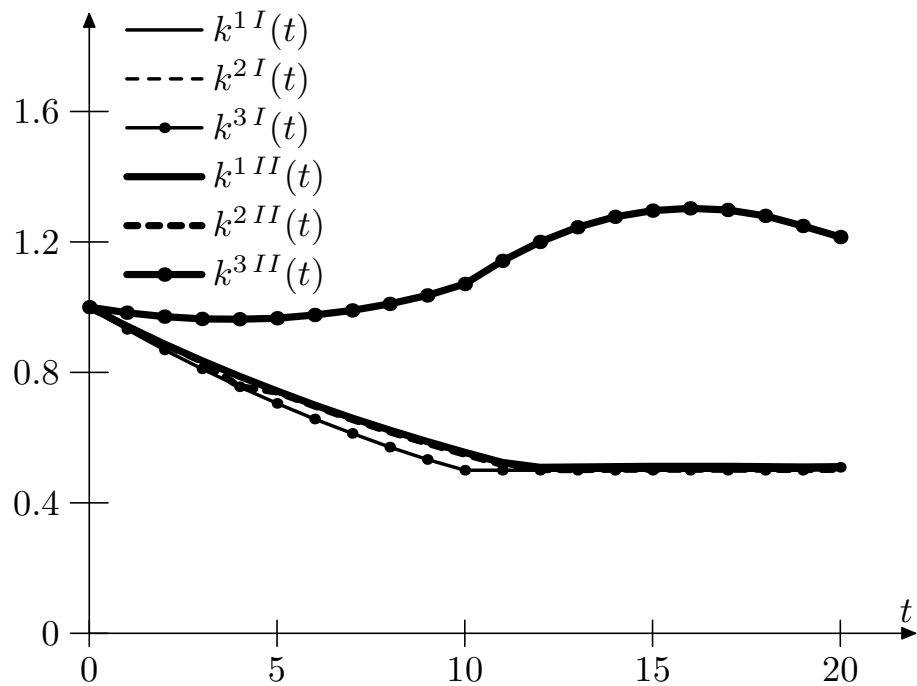


Рисунок 6.10 –

Для условного региона типа «Байкальский» были проведены расчеты типа 2 по моделированию неопределенностей. А именно, исследовались изменения целевого функционала в процентах при изменении коэффициентов матриц  $A$  и  $C$  также в процентах (т. е. в терминах логарифмических производных).

Базовый набор данных был сформирован исходя из информации, предоставленной специалистами Иркутского и Бурятского научных центров сибирского отделения РАН. Экономика при этом описывалась наиболее детально как совокупность 38 отраслей, а природно-социальный блок — посредством 8-ми агрегированных индексов. Полные размерности динамической системы (6.7), соответствующей построенной социо-эколого-экономической модели (6.1)–(6.6), составили  $n = 3551$ ,  $p = 3588$ , т. е. получившаяся конкретная модель описывает динамику 3551 величины под действием 3588 управляющих воздействий.

Таблица данных и детальные результаты расчетов здесь не приводятся из-за громоздкости. В целом выявлена резкая дифференциация чувствительностей, что позволит в дальнейшем радикально уменьшить размерность наибо-

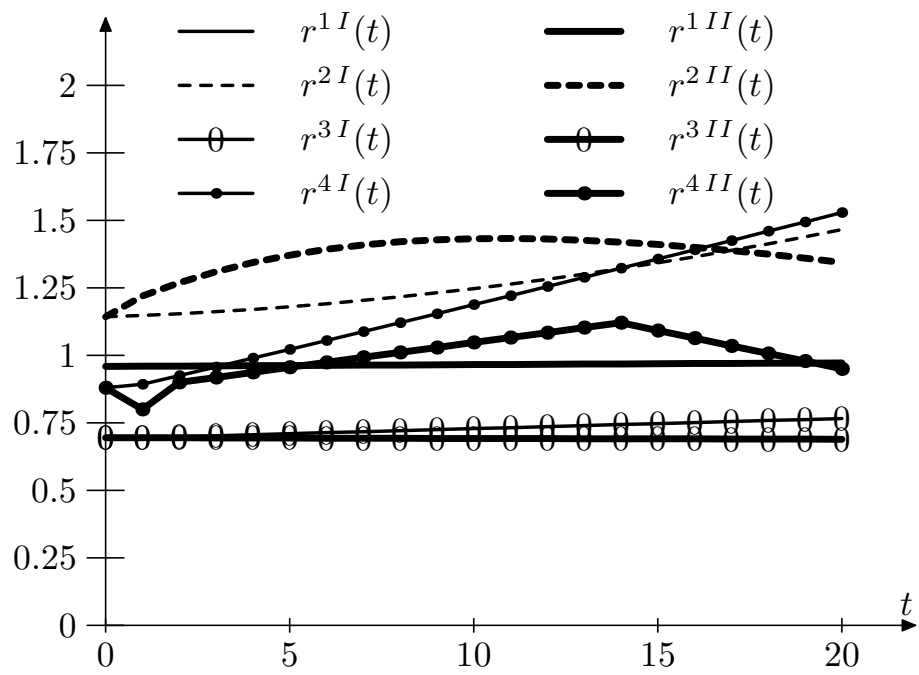


Рисунок 6.11 –

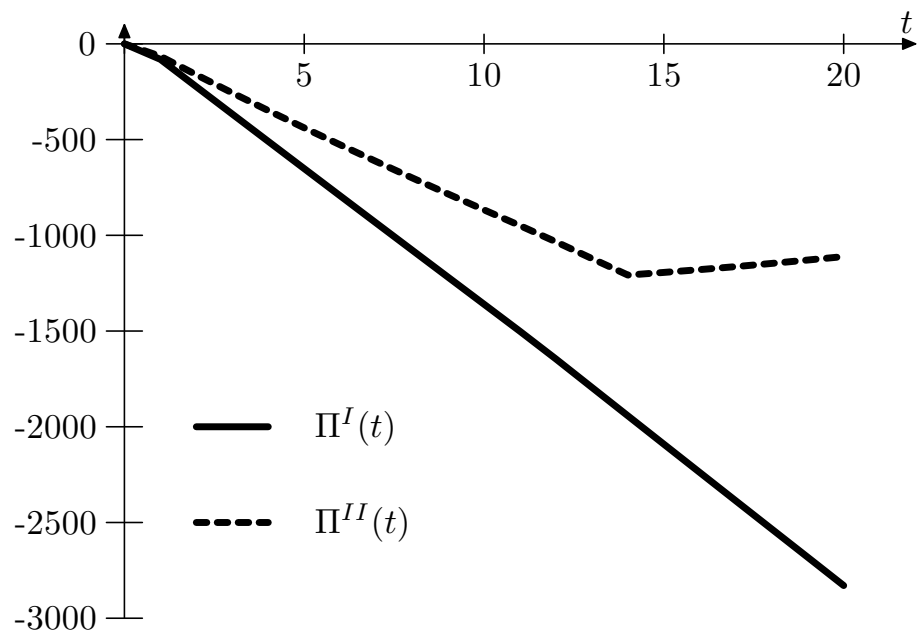


Рисунок 6.12 –

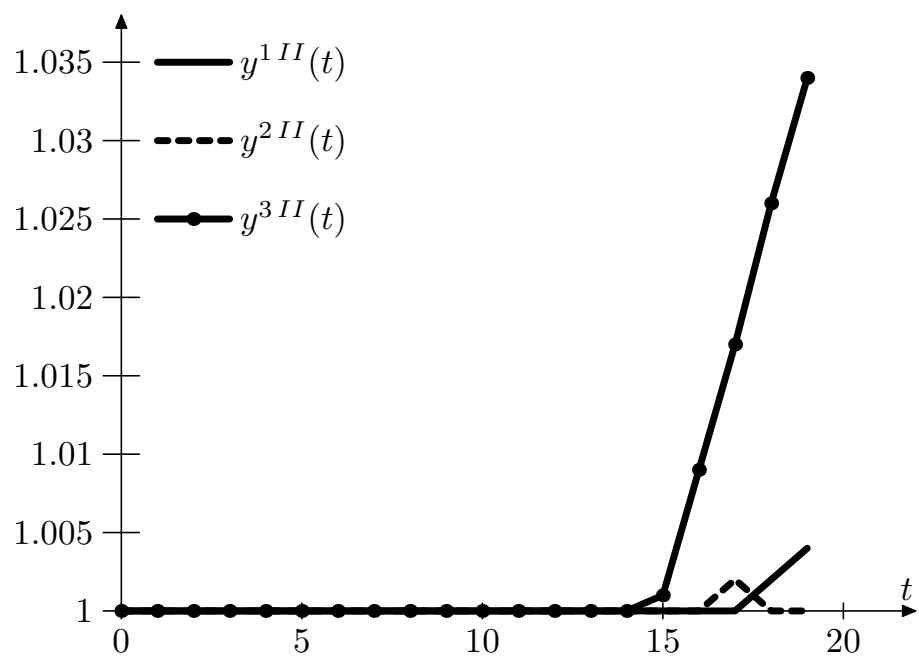


Рисунок 6.13 –

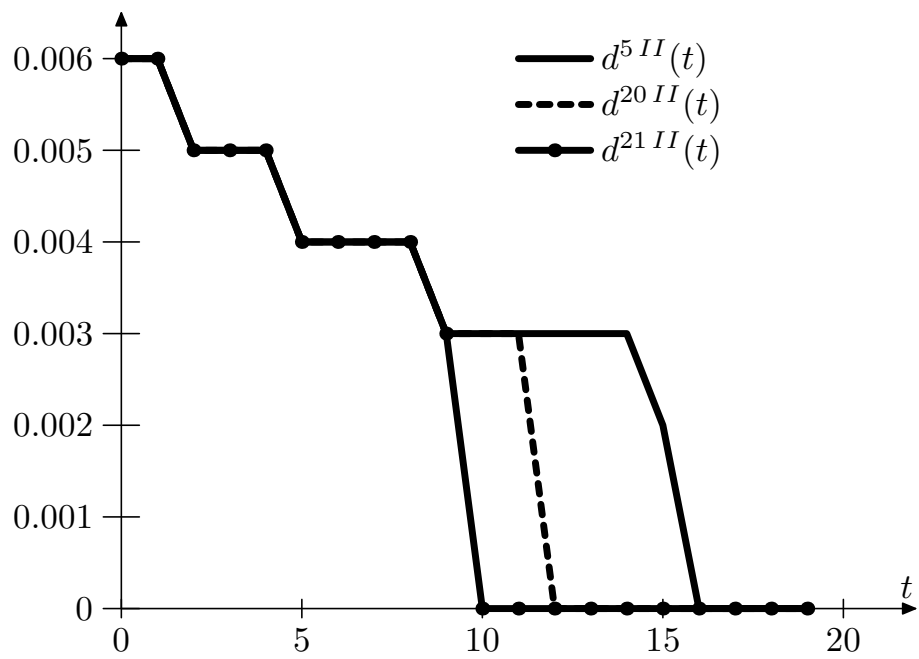


Рисунок 6.14 –



лее громоздкого инновационного блока и тем самым всей конкретной модели в более сложных расчетах.

Проводились вычислительные эксперименты по исследованию эффективности параллельной версии программ анализа чувствительности и улучшения управления на суперкомпьютере СКИФ МГУ «Чебышёв». Полученные данные представлены в таблице 6.4 и на рисунке 6.15 для случая программы анализа чувствительности, в таблице 6.5 и на рисунке 6.16 для случая программы улучшения управления.

**Таблица 6.4.** Эффективность параллельной версии программы

Число процессоров (ядер)	Время работы программы, с (мин)	Ускорение
8	3466 (58)	6.232
19	1483 (25)	14.565
38	785 (13)	27.516
64	520 (9)	41.538

**Таблица 6.5.** Эффективность параллельной программы

Число процессоров (ядер)	Время работы программы, с (мин)	Ускорение
1	703 (12)	1
2	394 (7)	1.78
4	230 (4)	3.06
9	202 (3)	3.48

Аналогичные эксперименты проводились с параллельными версиями программ оптимизации на суперкомпьютере СКИФ «Первенец-М», расположенном в ИПС РАН. Полученные данные представлены в таблице 6.6 и на рисунке 6.17 для случая программы поиска магистрального решения, на рисунке 6.18 для случая программы поиска магистрального решения с последующим расчетом динамики.

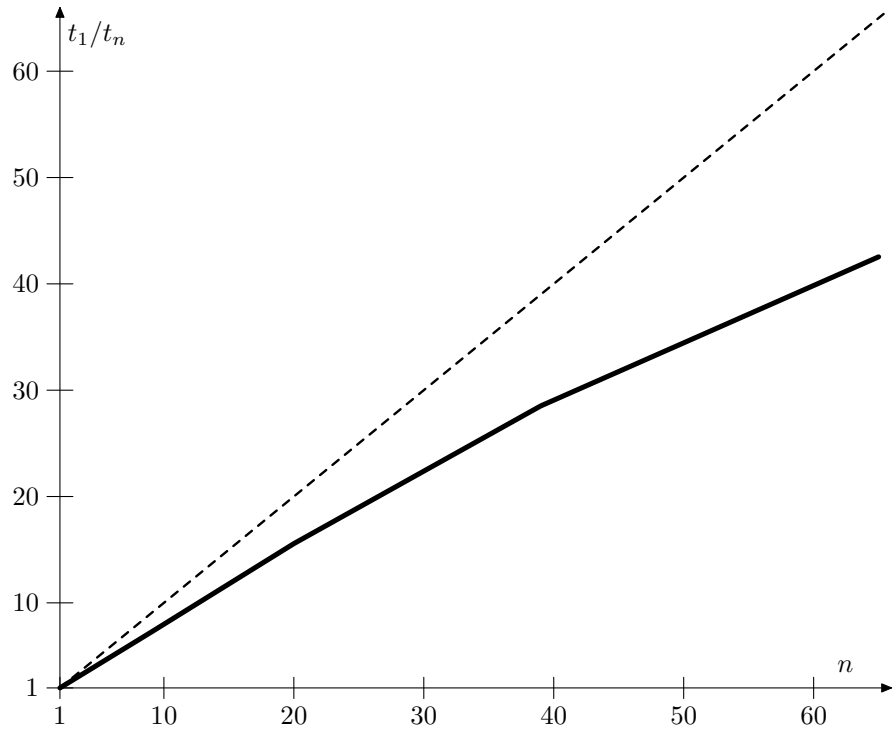


Рисунок 6.15 –

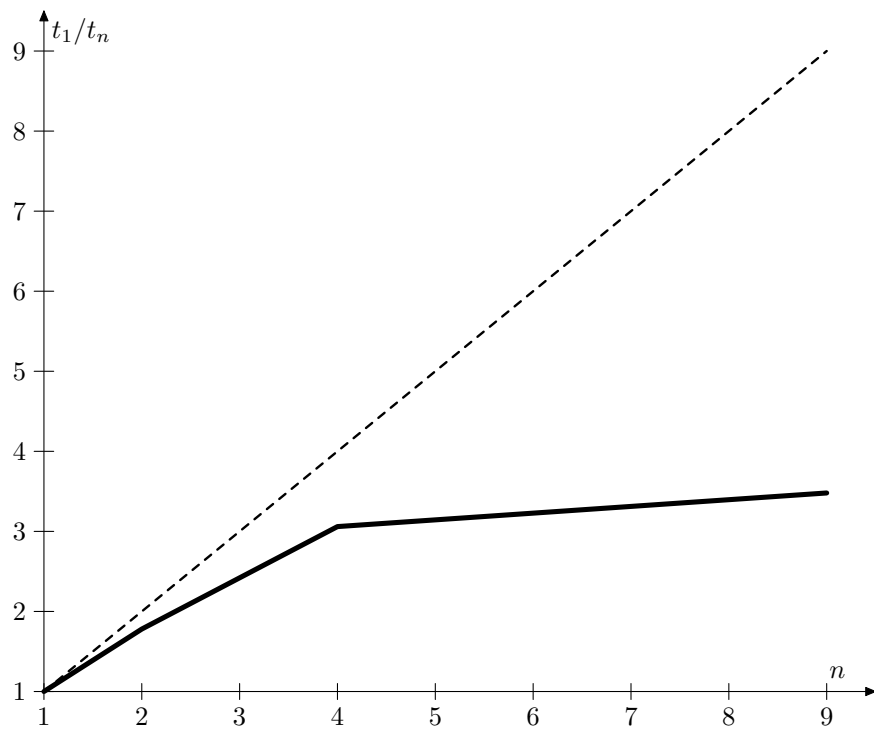


Рисунок 6.16 –

**Таблица 6.6.** Эффективности параллельных программ оптимизации

Число процессоров (ядер)	Время работы программы, с (мин)	Ускорение
Поиск магистрального решения		
1	603 (10)	1
4	173 (3)	3.49
8	105 (2)	5.74
16	89 (1)	6.78
Поиск магистрального решения с последующим расчетом динамики		
1	2275 (38)	1
4	622 (10)	3.66
8	351 (6)	6.48
16	288 (5)	7.90

В целом на основании проведенных исследований можно заключить, что применение суперкомпьютеров кластерного типа для реализации описанной концепции модели региона открывает новые перспективы ее эффективного использования, немислимые ранее при использовании обычных компьютеров с последовательным исполнением программ из-за большой размерности практически значимых версий модели и сложной системы данных. В особенности это относится к инновационным процессам, учет которых в модели без искусственного агрегирования приводит к драматическому росту ее размерности и числа параметров, требующих идентификации.

С другой стороны и задачи, связанные с моделью, как многовариантные, естественным образом приспособлены для параллельных вычислений на кластерах и не требуют сложных процедур распараллеливания. При определенной организации многовариантных вычислительных экспериментов и трактовке их результатов они становятся инструментом не только трудоемких количественных оценок, но и качественного анализа, позволяя выделить ве-

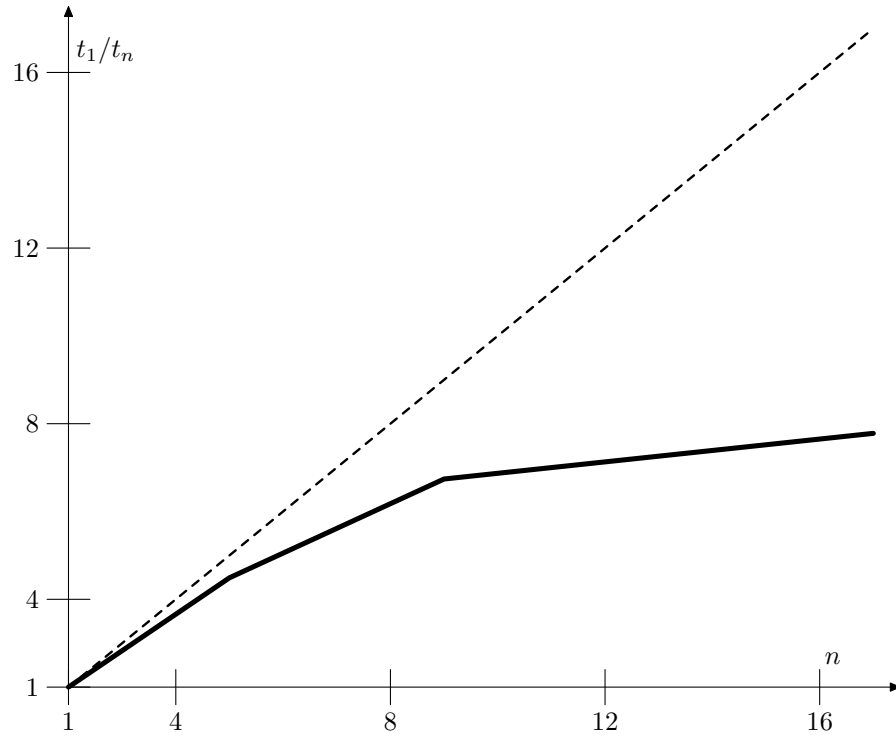


Рисунок 6.17 –

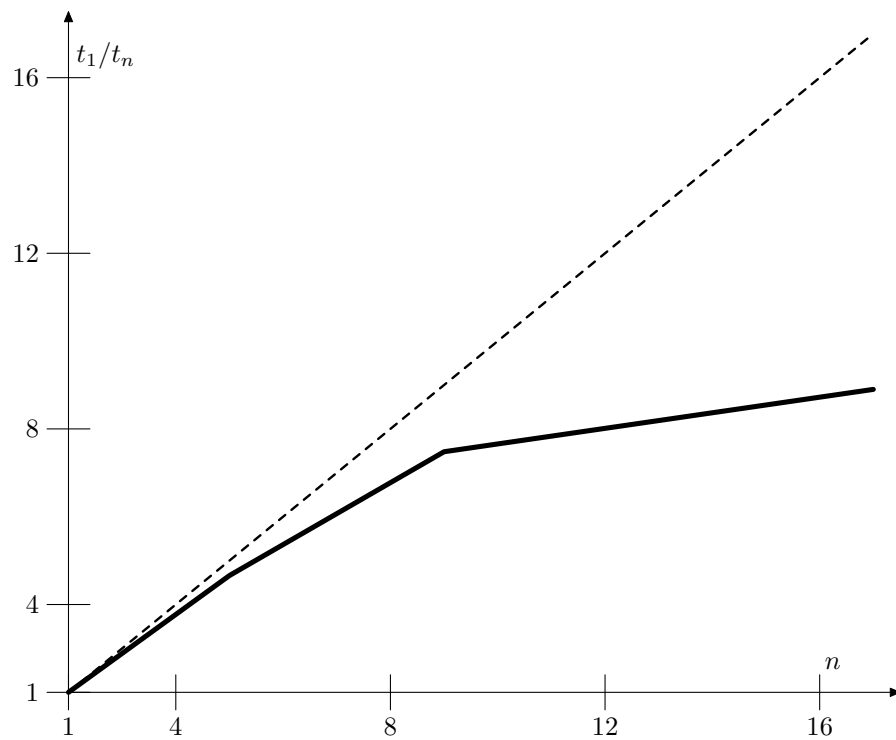


Рисунок 6.18 –

дущие факторы, переменные и параметры, на которых требуется сосредоточиться при последующих эмпирических исследованиях.

### 6.3 Динамическое распределение ресурсов

При работе на традиционных кластерах, количество вычислительных узлов, используемых тем или иным приложением, служит в качестве основной и естественной метрики потребления аппаратных ресурсов. При использовании виртуальных машин (виртуальная машина (ВМ) — программная среда, эмулирующая работу реального, физического компьютера) также можно задействовать эту метрику для распределения ресурсов. Однако, в дополнение к этому, технология ВМ предлагает целый ряд новых возможностей по управлению ресурсами, которые сложно или невозможно реализовать при использовании традиционных компьютеров. Это способствует эффективному использованию ресурсов, поскольку можно выделять приложению ровно столько ресурсов, сколько ему требуется, повышая, тем самым, КПД аппаратных средств. Консолидация ВМ и автоматическое перераспределение ресурсов, основанное на загрузженности приложений и их приоритетах, предоставляет ИТ-администраторам возможность обеспечивать корректную работу большего числа сервисов в рамках имеющейся инфраструктуры.

Рассматривается задача автоматического управления аппаратными ресурсами, которое способно учитывать ценность выделенных компьютерному приложению ресурсов (например, количества виртуальных машин (ВМ), обеспечивающих работу приложения, оперативной памяти ВМ, доли физического процессора, предоставляемой ВМ, при текущей пользовательской нагрузке [85]). Это позволит оптимально использовать ресурсы в процессе эксплуатации системы приложений, а именно, динамически добавлять или убирать количество каждого ресурса во время работы приложения с учетом потребностей и приоритетов других приложений системы.

Построим соответствующую математическую модель для системы, состоящей из  $n$  приложений, использующих один первичный ресурс и  $m$  различных категорий вторичных (зависимых от первичного) ресурсов.

Пусть  $v^i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — количество первичного ресурса, обеспечивающего работу приложения  $i$ , в момент времени  $t$ . Обозначим через  $r^{ij}(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , — количество вторичного ресурса  $j$ , выделенного приложению  $i$  в момент времени  $t$ . Ограничения на использование ресурсов записываются в виде

$$v(t) \in \mathbf{V}(t), \quad r^i(t) \in \mathbf{R}^i(t, v^i(t)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.10)$$

где  $\mathbf{V}(t)$ ,  $\mathbf{R}^i(t)$  — некоторые компактные множества.

Предполагается, что каждое компьютерное приложение имеет индивидуальный набор  $k^i$  характеристик, которые однозначно описывают его текущее состояние с точки зрения пользователя (например, время отклика приложения, количество сетевых ошибок). Характеристика зависит от количества первичного ресурса, обеспечивающего работу приложения, от объема вторичных ресурсов, предоставленных приложению, и от оказываемой на приложение с течением времени неуправляемой пользовательской нагрузки  $L^i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . При этом характеристики могут быть составлены либо на испытательном стенде до запуска приложения в эксплуатацию, либо непосредственно в процессе работы приложения в табличном виде. В рамках общей схемы приближенного решения задач на первом этапе исследования при практических расчетах предполагается по этим данным построить аппроксимации полиномиальными функциями по МНК.

Обозначим через

$$p^{ik} = p^{ik} (v^i(t), r^{i1}(t), r^{i2}(t), \dots, r^{im}(t), L^i(t)),$$

$i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, k^i}$ , характеристику  $k$  приложения  $i$ , через  $\widetilde{p}^{ik}(t)$  — целевой уровень соответствующей характеристики (желаемое значение характеристики, ниже которого она не должна опускаться во время эксплуатации

компьютерного приложения). С помощью функций

$$\sigma^i(t) = \sum_{k=1}^{k^i} \alpha_{ik} p^{ik} (v^i(t), r^{i1}(t), \dots, r^{im}(t), L^i(t)), \quad (6.11)$$

можно получить некоторую суммарную оценку характеристик каждого из приложений в момент времени  $t$ . Здесь через  $\alpha_{ik}$  обозначены весовые коэффициенты, выбираемые согласно значимости каждой характеристики приложения. Будем называть функции  $\sigma^i(t)$  уровнями сервиса приложений.

Задача состоит в поддержании значения уровня сервиса (6.11) не ниже некоторого целевого уровня сервиса (поддержание каждой характеристики не ниже ее целевого уровня) в моменты времени

$$\mathbf{T} = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_0 + qh = t_1\}.$$

Данная задача равносильна минимизации отклонения уровня сервиса

$$\delta^i = \sum_{k=1}^{k^i} \alpha_{ik} \sum_{t=0}^q \max \left\{ 0, \widetilde{p}^{ik}(t_0 + th) - p^{ik}(v^i(t_0 + th), r^{i1}(t_0 + th), \dots, r^{im}(t_0 + th), L^i(t_0 + th)) \right\}$$

для системы приложений в совокупности, с учетом приоритета каждого из приложений. Обозначим через  $\delta^{i+}$  максимум  $\delta^i$  при всех допустимых значениях ресурсов (минимум  $\delta^i$ , очевидно, равен нулю).

*Замечание.* Для задачи поддержания характеристики не выше ее целевого уровня на дискретном наборе моментов времени  $\mathbf{T}$  отклонение можно записать в виде

$$\sum_{t=0}^q \max \left\{ 0, -\widetilde{p}^{ik}(t_0 + th) + p^{ik}(v^i(t_0 + th), r^{i1}(t_0 + th), \dots, r^{im}(t_0 + th), L^i(t_0 + th)) \right\};$$

для задачи поддержания положительной характеристики как можно ближе к нулю на дискретном наборе моментов времени  $\mathbf{T}$  отклонение можно записать в виде

$$\sum_{t=0}^q p^{ik} (v^i(t_0 + th), r^{i1}(t_0 + th), \dots, r^{im}(t_0 + th), L^i(t_0 + th));$$

Тогда исходную задачу динамического распределения ресурсов можно поставить в виде дискретной задачи оптимального управления следующего вида:

$$\begin{aligned}
y^i(t+h) &= y^i(t) + \sum_{k=1}^{k^i} \alpha_{ik} \max \left\{ 0, \widetilde{p}^{ik}(t) - p^{ik}(v^i(t), \right. \\
&\quad \left. r^{i1}(t), \dots, r^{im}(t), L^i(t)) \right\}, \\
t \in \mathbf{T} &= [t_0, t_1], \quad y^i(t_0) = 0, \quad , i = \overline{1, n}, \\
v(t) \in \mathbf{V}(t), \quad r^i(t) &\in \mathbf{R}^i(t, v^i(t)), \quad i = \overline{1, n}, \\
F(y(t_1)) &= \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{y^i(t_1)}{\delta^{i+}} \rightarrow \min,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

где  $y^i(t)$  — сумма отклонений уровня сервиса приложения  $i$  к моменту времени  $t$  (т. е. в моменты времени  $t_0, t_0 + h, \dots, t$ ), через  $\beta_i$  обозначены весовые коэффициенты, выбираемые согласно приоритету каждого приложения (большее значение весового коэффициента соответствует более высокому приоритету соответствующего приложения). Здесь роль управлений играют функции  $v^i(t), r^{ij}(t), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ .

Рассмотрим один из самых подходящих для дальнейшей практической реализации вариантов поставленной задачи оптимального управления (6.12), а именно, предположим, что на рассматриваемом промежутке времени управления постоянны, т. е.  $v^i(t) = v^i, r^{ij}(t) = r^{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ . Тогда, согласно всем введенным обозначениям, задача динамического управления ресурсами для системы приложений может быть сформулирована в виде последовательности задач поиска минимума функции  $n(m+1)$  переменных  $F(y(t_{1s})) = G(v_s^i, r_s^{ij})$  при условиях (6.10), т. е.

$$\begin{aligned}
F(y(t_{1s})) &= G(v_s^i, r_s^{ij}) \rightarrow \min_{v, r}, \\
v(t) \in \mathbf{V}(t), \quad r^i(t) &\in \mathbf{R}^i(t, v^i(t)), \quad i = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

на множестве конечных временных отрезков  $\mathbf{T}^0 = [t_{00}, t_{10}]$ , где  $t_{10} = t_{00} + q^0 h^0$ ,  $\mathbf{T}^1 = [t_{01}, t_{11}]$ , где  $t_{11} = t_{01} + q^1 h^1$ , и т. д.

Спецификой рассматриваемой задачи является зависимость вида динамической системы (6.12) от неизвестных функций  $L^i(t), i = \overline{1, n}$ . При этом



предполагается, что известны значения этих функций в некоторые предшествующие рассматриваемому отрезку времени моменты

$$t_{0_s} - l^s h^s, t_{0_s} - (l^s - 1)h^s, \dots, t_{0_s} - h^s.$$

Этот факт позволяет осуществлять прогноз изменения функций  $L^i(t)$  на рассматриваемом отрезке времени (например, с помощью численных методов аппроксимации функций одной переменной) и тем самым периодически выполнять преобразования модели к семейству задач (первый этап общей схемы исследования) с последующим поиском их приближенных решений (этапы 2 и 3 общей схемы исследования).

Полученное таким образом управление (количество выделяемых ресурсов) будет носить кусочно-постоянный характер:

$$v^i(t) = v_s^i, \quad r^{ij}(t) = r_s^{ij}, \quad t \in \mathbf{T}_s = [t_{0_s}, t_{1_s}], \quad s = 0, 1, \dots,$$

что позволит легко реализовать его на практике в процессе эксплуатации системы приложений или использовать в качестве начального управления в некоторой итерационной процедуре улучшения управления.

Рассмотрим метод решения задачи динамического управления ресурсами на примере системы двух приложений: картографический сервис «MapServer» и вычислительный сервис «X-Com» [85].

Ресурсы, предоставленные приложениям:  $v^i$  — количество виртуальных машин (ВМ) обеспечивающих работу приложения,  $r^{i1}$  — оперативная память ВМ (RAM, Мбайт),  $r^{i2}$  — доля физического процессора предоставляемая ВМ (CPU, %).

Ограничения на предоставление ресурсов:

$$v^i(t) \geq 1, \quad n \leq \sum_{i=1}^n v^i(t) \leq v^+, \quad \sum_{i=1}^n r^{ij}(t) \leq r^{j+} v^+,$$

$$r^{j-} \leq r^{ij}(t) \leq r^{j+} v^+ - (n-1)r^{j-},$$

$$r^{j-} v^i(t) \leq r^{ij}(t) \leq r^{j+} v^i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

где  $n = 2$ ,  $m = 2$ ,  $r^{1-} = 128$ ,  $r^{1+} = 512$ ,  $r^{2-} = 10$ ,  $r^{2+} = 100$ ,  $v^+ = 3$ .

Для построения уровня сервиса первого приложения на дискретном наборе моментов времени  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$  используются функции  $p^{11}(v^1, r^{11}, r^{12}, L^1)$  — среднее время отклика приложения,  $p^{12}(v^1, r^{11}, r^{12}, L^1)$  — процент сетевых ошибок и  $L^1(t)$  — пользовательская нагрузка на приложение, а также величина желаемого времени отклика  $\widetilde{p}^{11} = 3000$  миллисекунд.

Функции  $p^{11}(v^1, r^{11}, r^{12}, L^1)$  и  $p^{12}(v^1, r^{11}, r^{12}, L^1)$  заданы таблично своим профилем производительности в некоторой области изменения переменных. Функция  $L^1(t)$  задана своими значениями в моменты времени  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Предлагается по этим данным построить аппроксимации функций непрерывными функциями  $\bar{p}^{11}$ ,  $\bar{p}^{12}$ ,  $\bar{L}^1$  по методу наименьших квадратов. Аппроксимации были построены в виде

$$\bar{p}^{1k}(v^1, r^{11}, r^{12}, L^1) = \max \left\{ 0, \sum_{i=1}^{70} a_{ki}(v^1)(r^{11})^{s_{k1i}}(r^{12})^{s_{k2i}}(L^1)^{s_{k3i}} \right\},$$

где  $a$  — найденные согласно МНК постоянные действительные числа, а целые показатели степеней  $s_{kli}$  удовлетворяют условиям  $-2 \leq s_{kli} \leq 2$ ,  $-1 \leq \sum_{l=1}^3 s_{kli} \leq 2$ ;

$$\bar{L}^1(t) = b_0(L^1(0), \dots, L^1(4)) + b_1(L^1(0), \dots, L^1(4))t,$$

где  $b_0(L^1(0), \dots, L^1(4))$ ,  $b_1(L^1(0), \dots, L^1(4))$  — найденные согласно МНК постоянные действительные числа.

Теперь отклонение уровня сервиса можно построить следующим образом

$$\delta^1 = \sum_{t=0}^4 \max \left\{ 0, -\widetilde{p}^{11} + \bar{p}^{11}(v^1, r^{11}, r^{12}, \bar{L}^1(5+t)) \right\} + \sum_{t=0}^4 \bar{p}^{12}(v^1, r^{11}, r^{12}, \bar{L}^1(5+t)).$$

Можно подсчитать и максимальное отклонение уровня сервиса  $\delta^{1+} = 15070$ .

Для построения уровня сервиса второго приложения на дискретном наборе моментов времени  $\{5, 6, 7, 8, 9\}$  используется функция  $p^{21}(v^2, r^{21}, r^{22})$  —

скорость расчета задач, находящихся в очереди, а также момент желаемого окончания расчетов  $\theta$  и величина начальной желаемой скорости расчета задач  $\widetilde{p}^{21}(0) = 18$  задач/сек, что позволяет рассчитать текущую желаемую скорость расчета задач  $\widetilde{p}^{21}(5) = \widetilde{p}^{21}(0)(\theta - 5)$  задач/сек.

Функция  $p^{21}(v^2, r^{21}, r^{22})$  задана таблично своим профилем производительности в некоторой области изменения переменных. Предлагается по этим данным построить аппроксимацию функции непрерывной функцией  $\bar{p}^{21}$  по методу наименьших квадратов. Аппроксимация была построена в виде

$$\begin{aligned} \bar{p}^{21}(v^2, r^{21}, r^{22}) = & 0.92451 - 0.00024r^{21} + 0.09777r^{22} - \\ & - 0.345475v^2 + 0.0002r^{21}v^2. \end{aligned}$$

Теперь отклонение уровня сервиса можно построить следующим образом

$$\delta^2 = \sum_{t=0}^4 \max \left\{ 0, \widetilde{p}^{21}(5) - \bar{p}^{21}(v^2(5), r^{21}(5), r^{22}(5)) \right\}.$$

Можно подсчитать и максимальное отклонение уровня сервиса  $\delta^{2+} = 90$ .

Теперь минимизируем функцию  $G(v^i, r^{ij})$  можно записать в виде

$$G(v^1, v^2, r^{11}, r^{12}, r^{21}, r^{22}) = \sum_{i=1}^2 \beta_i \frac{\delta^i(v^i, r^{i1}, r^{i2})}{\delta^{i+}} \rightarrow \min, \quad (6.13)$$

где  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  (это означает равные приоритеты обоих приложений).

Написана программа, моделирующая работу системы двух указанных приложений при задаваемой пользовательской нагрузке с применением описанного метода выбора ресурсов [108].

Описание работы программы:

Шаг 1. Полагается  $s = 1$ ,  $t_{0s} = 5$  мин.

Шаг 2. Снимаются показания пользовательской нагрузки  $L^1(t)$  в моменты времени  $t_{0s} - 5$ ,  $t_{0s} - 4$ ,  $t_{0s} - 3$ ,  $t_{0s} - 2$ ,  $t_{0s} - 1$ . Производится расчет прогноза изменения пользовательской нагрузки по методу наименьших квадратов с помощью полинома первой степени  $\bar{L}^1(t) = b_0 + b_1t$ .

Шаг 3. Для полученной функции пользовательской нагрузки  $\bar{L}^1(t)$  на временном отрезке  $\mathbf{T}^s = [t_{0s}, t_{1s}]$ ,  $t_{1s} = 9$  мин., решается задача условной минимизации. А именно, ищется минимум функции шести переменных (6.10) в допустимой области

$$G(v^*, r^*) = \min_{(v,r) \in \mathbf{W}} G(v^1, v^2, r^{11}, r^{12}, r^{21}, r^{22}),$$

$$\mathbf{W} = \left\{ (v, r) \left| \begin{array}{l} v^i \geq 1, 2 \leq v^1 + v^2 \leq v^+, r^{1j} + r^{2j} \leq r^{j+} v^+, \\ r^{j-} \leq r^{ij}(t) \leq r^{j+} v^+ - r^{j-}, \\ r^{j-} v^i(t) \leq r^{ij}(t) \leq r^{j+} v^i(t), i, j = 1, 2 \end{array} \right. \right\},$$

методом покоординатного спуска с постоянным шагом, в качестве начального приближения выбирается случайным образом набор точек в допустимой области.

Шаг 4. Перераспределяются ресурсы приложениям согласно найденным значениям ресурсов  $(v^*, r^*)$ . Пересчитывается целевой уровень второго приложения по формуле

$$\widetilde{p}^{21} = \frac{\widetilde{p}^{21}(t_{0s})(\theta - t_{0s}) - 5p^{21}(v^{2*}, r^{21*}), r^{22*}}{\theta - t_{0s} - 5}.$$

Полагается  $s = s + 1$ ,  $t_{0s} = t_{0s} + 5$ . Осуществляется переход на Шаг 2.

Для проведения тестовых расчетов был сгенерирован случайным образом набор гладких пользовательских нагрузок  $L(\tau_k)$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_k = \tau_{k-1} + 1$ , из диапазона  $500 = L^- \leq L(\tau_k) \leq L^+ = 1500$ :

$$\begin{aligned} L(\tau_0) &= \text{random}(L^-, L^+), \\ L(\tau_1) &= L(\tau_0) + \text{random}(\Delta^-, \Delta^+), \\ &\text{if}(L(\tau_1) > L^+) L(\tau_1) = L^+, \\ &\text{if}(L(\tau_1) < L^-) L(\tau_1) = L^-, \\ L(\tau_{k+2}) &= 2L(\tau_{k+1}) - L(\tau_k) + \text{random}(\Delta^-, \Delta^+), \\ &\text{if}(L(\tau_{k+2}) > L^+) L(\tau_{k+2}) = L^+, \\ &\text{if}(L(\tau_{k+2}) < L^-) L(\tau_{k+2}) = L^-, \\ k &= 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $\Delta^- = -25$ ,  $\Delta^+ = 25$  — максимально возможные отклонения от основного линейного направления (образованного предыдущими двумя значениями моделируемой функции  $L$ ), отвечающие за гладкость. Результат частично представлен на рисунке 6.19 (первый вариант пользовательской нагрузки представлен сплошной линией, второй — пунктирной).

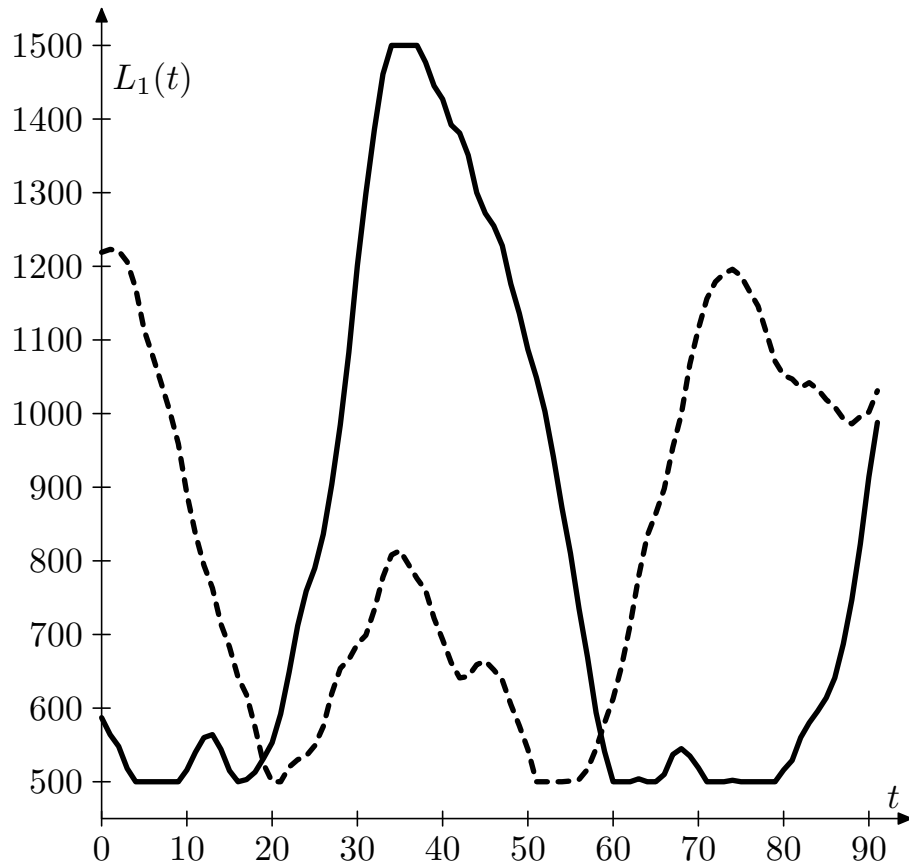


Рисунок 6.19 –

Результаты работы программы при  $v^+ = 3$  (не более трех ВМ на оба приложения в сумме) и постоянных равных приоритетах приложений для каждого из вариантов прогноза представлены на рисунках 6.20–6.25 (рисунки 6.20–6.22 соответствуют первому варианту пользовательской нагрузки, рисунки 6.22–6.24 — второму варианту). Из рисунков видно, что при различных пользовательских нагрузках алгоритм дает устойчиво хорошее динамическое перераспределение ресурсов с учетом поддержания характеристик на целевом уровне.

На рисунках 6.26–6.31 (рисунки 6.26–6.28 соответствуют первому варианту пользовательской нагрузки, рисунки 6.29–6.31 — второму варианту) представлены результаты работы программы при  $v^+ = 3$  (не более трех ВМ на оба приложения в сумме) и увеличивающемся приоритете второго приложения (в зависимости от роста целевого уровня сервиса — желаемой скорости расчета задач) для каждого из вариантов прогноза. Изменяющийся во времени целевой уровень второго приложения имеет смысл ограниченного конечного времени расчета. Из рисунков видно, что при различных пользовательских нагрузках алгоритм дает устойчиво хорошее динамическое перераспределение ресурсов с учетом поддержания изменяющихся характеристик на целевом уровне.

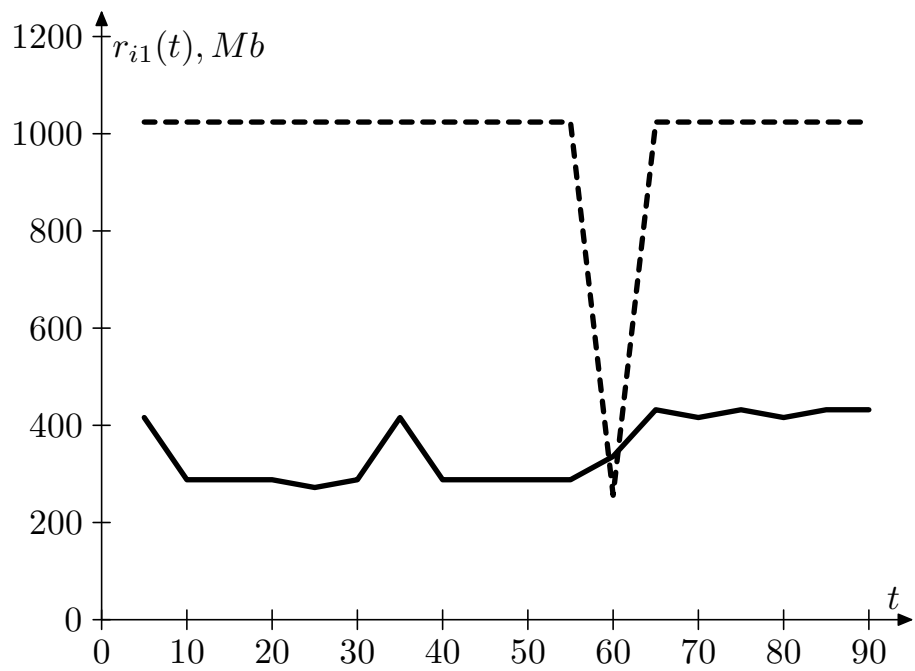


Рисунок 6.20 – Оперативная память

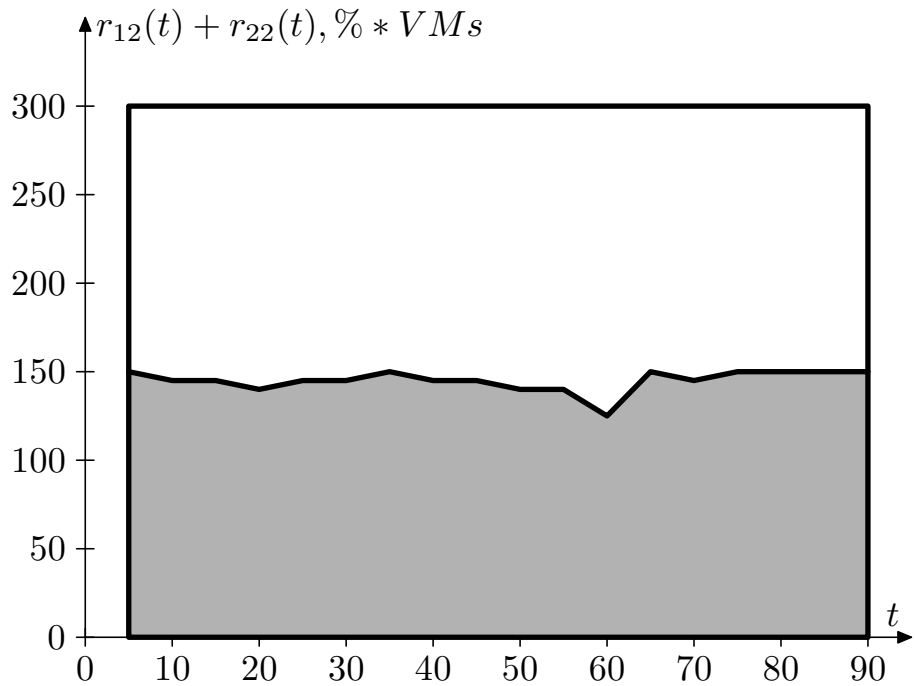


Рисунок 6.21 – Доли процессора

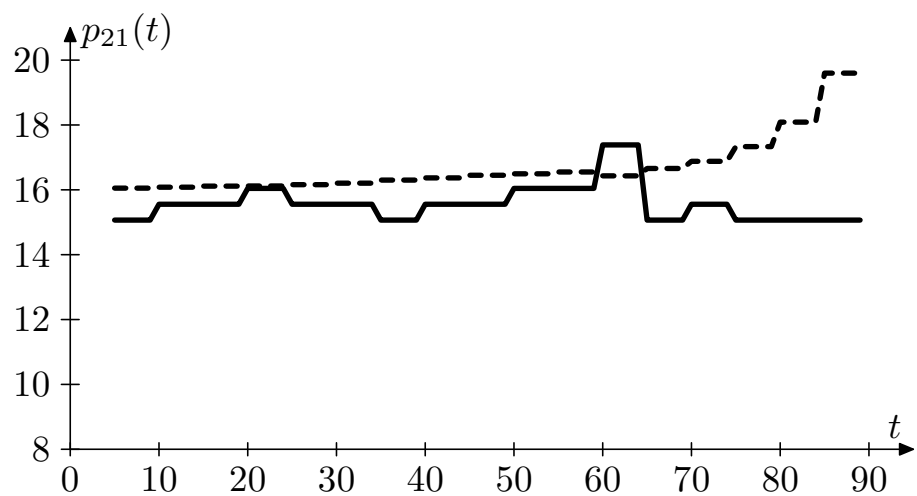
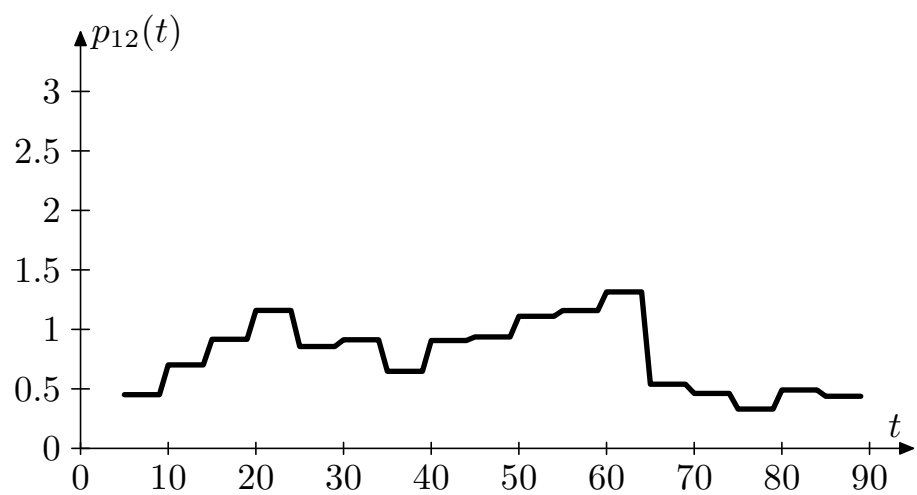
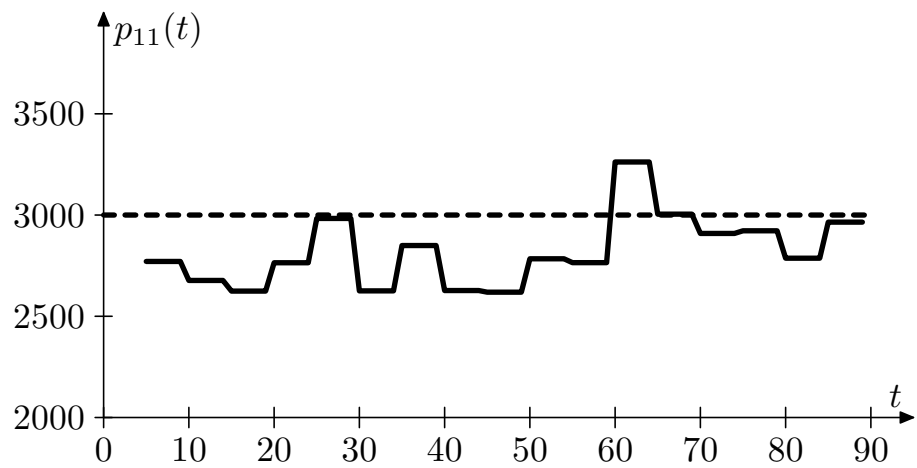


Рисунок 6.22 –



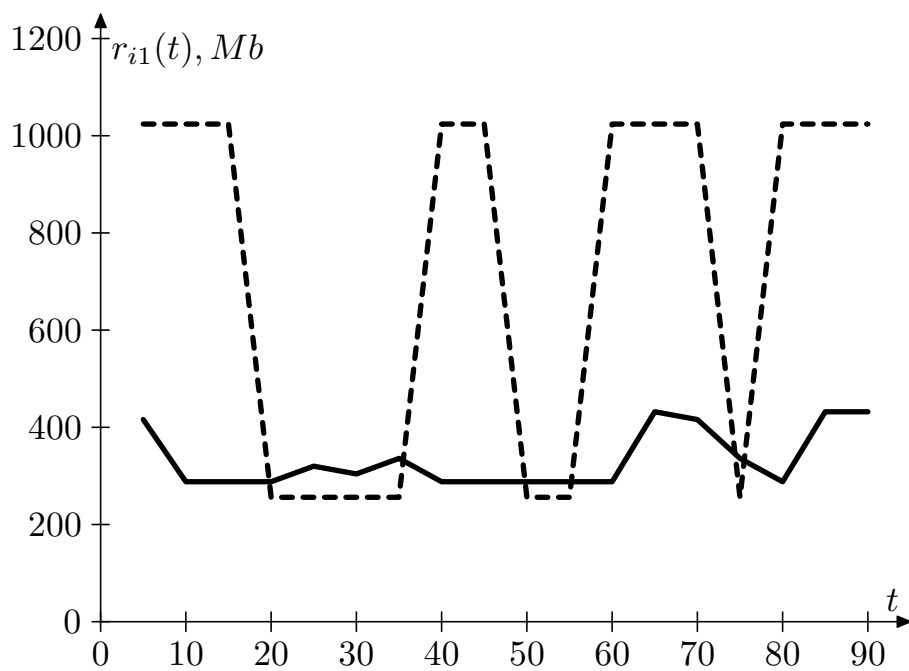


Рисунок 6.23 – Оперативная память

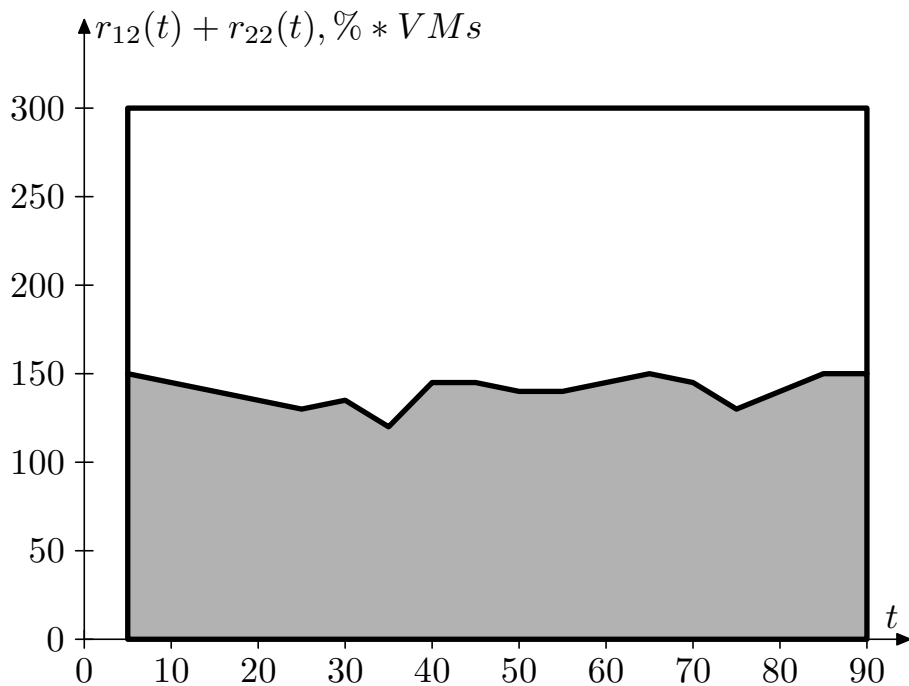


Рисунок 6.24 – Доли процессора

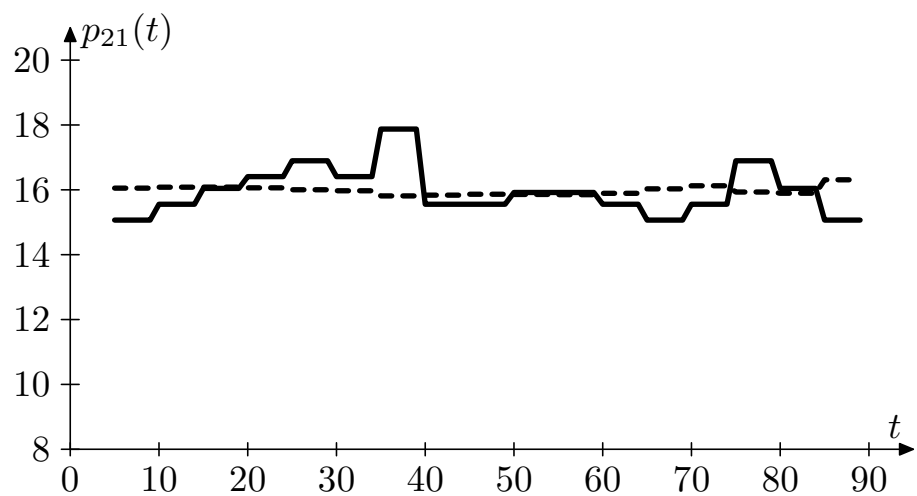
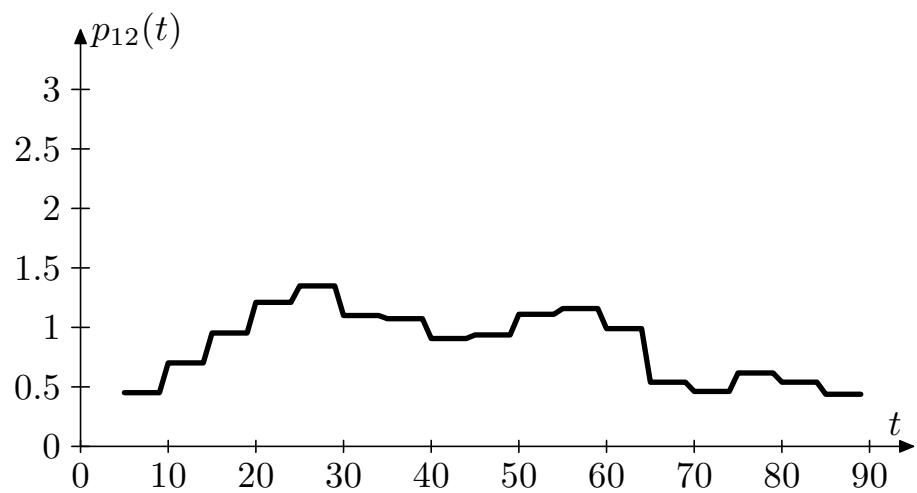
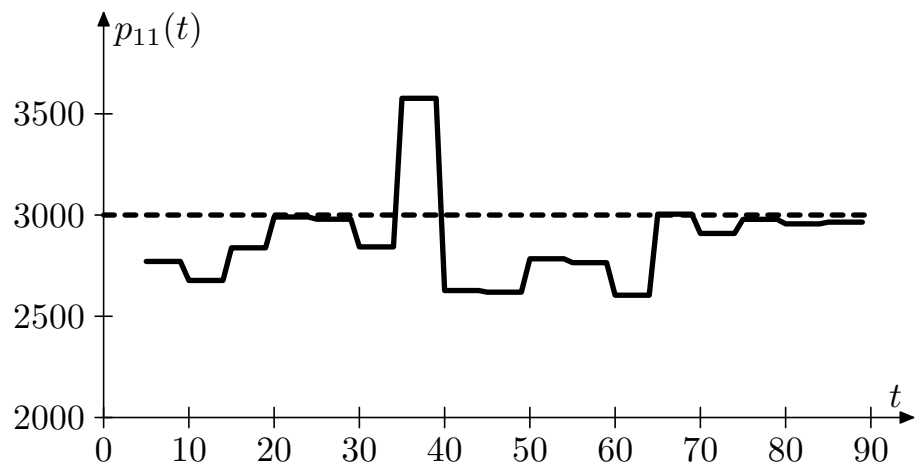


Рисунок 6.25 –

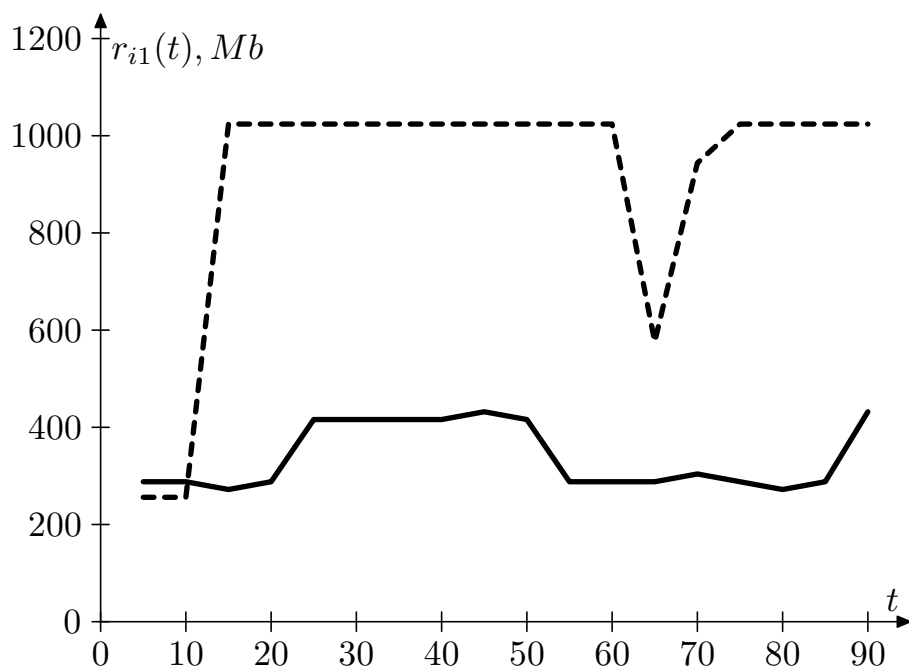


Рисунок 6.26 – Оперативная память

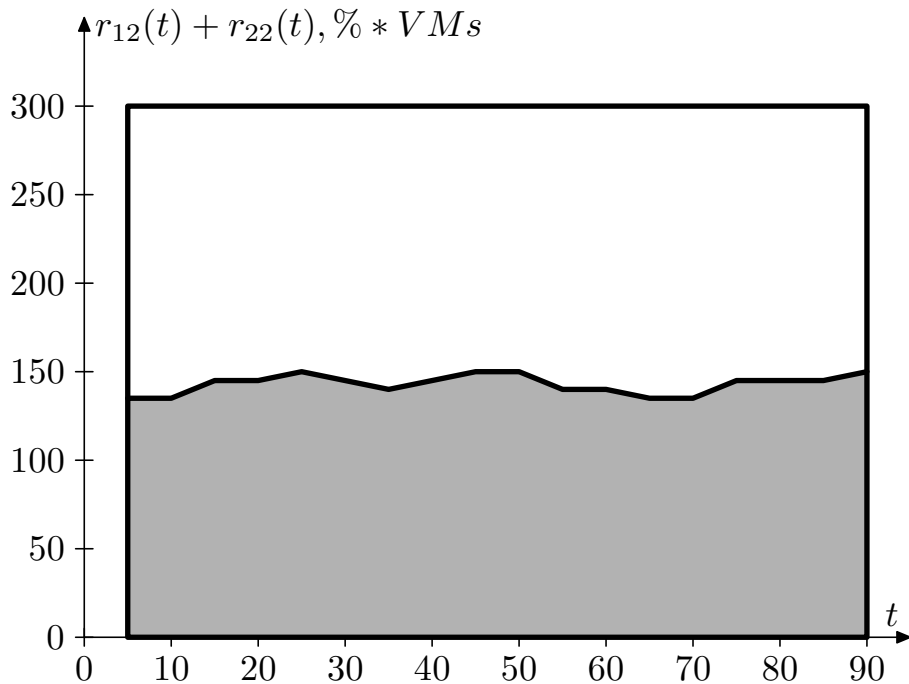


Рисунок 6.27 – Доли процессора

## 6.4 Выводы к главе 6

Методика оптимизации управления на основе преобразований модели объекта с использованием итерационных методов улучшения, представленная в диссертационной работе, показала свою применимость на прикладных задачах управления объектами различной физической природы. Отмечено значительное сокращение расчетного времени при переходе к параллельным версиям программ, соответствующих разработанным методам, что весьма важно при практическом проведении многовариантных расчетов, связанных с исследованиями различных свойств и характеристик рассматриваемых динамических систем.

Так методика приближенного решения исходной задачи с помощью преобразования типа аппроксимации и расширяющего преобразования с последующим применением параллельных методов локального улучшения продемонстрирована на задаче поиска нижней границы опасной зоны при аварийной посадке вертолета.

На основе предложенных преобразований, итерационных методов и соответствующих алгоритмов для поддержки компьютерных расчетов при работе с социо-эколого-экономической моделью региона разработан программно-алгоритмический комплекс DSEEmodel 1.0 для суперЭВМ, реализующий на кластерном вычислительном устройстве параллельные методы сценарных расчетов, оптимизации и улучшения приближенно-оптимального управления для дискретной социо-эколого-экономической модели с целью проведения многовариантных расчетов, связанных с разработкой стратегии устойчивого развития региона.

Рассмотрена задача автоматического управления аппаратными ресурсами, которое способно учитывать ценность выделенных компьютерному приложению ресурсов (например, количества виртуальных машин, обеспечивающих работу приложения, оперативной памяти, доли физического процессора,

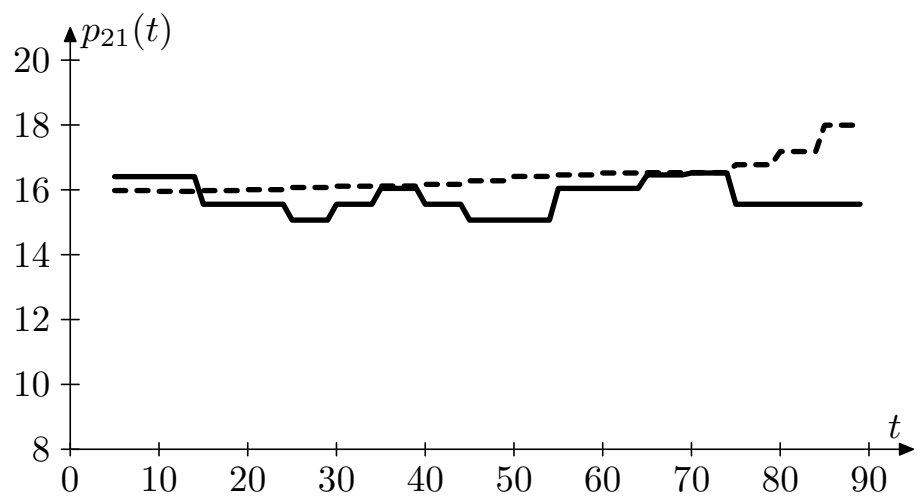
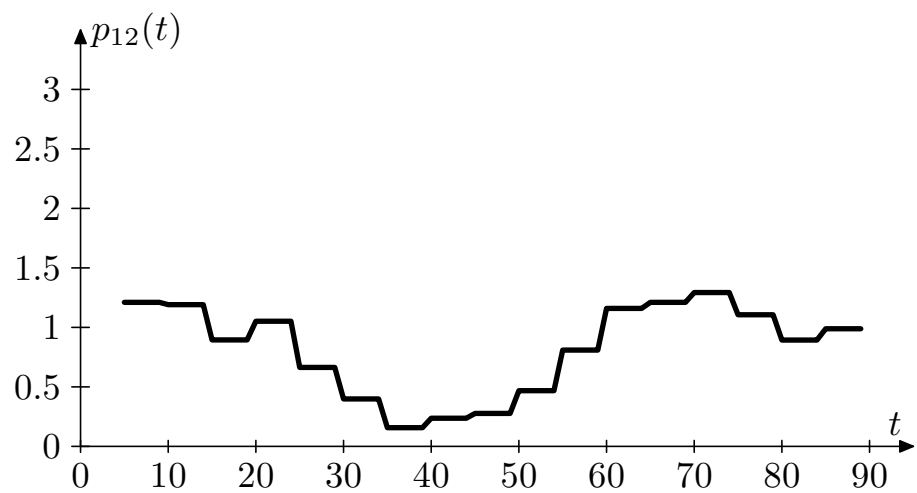
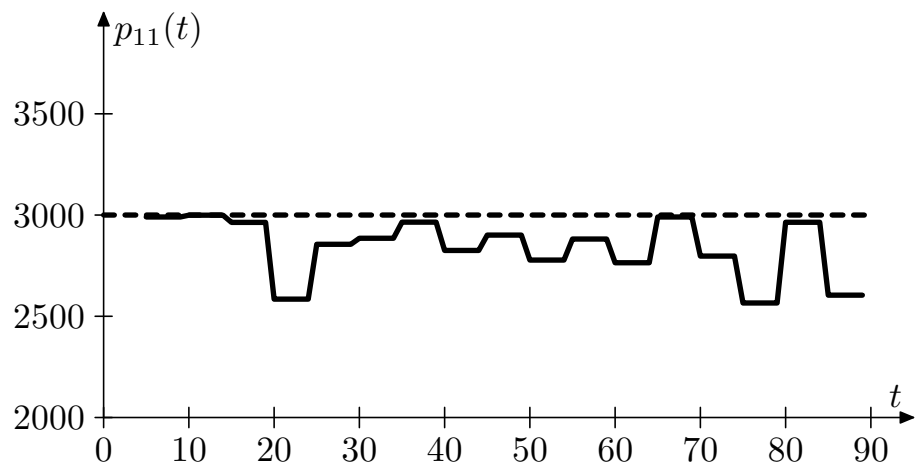


Рисунок 6.28 –

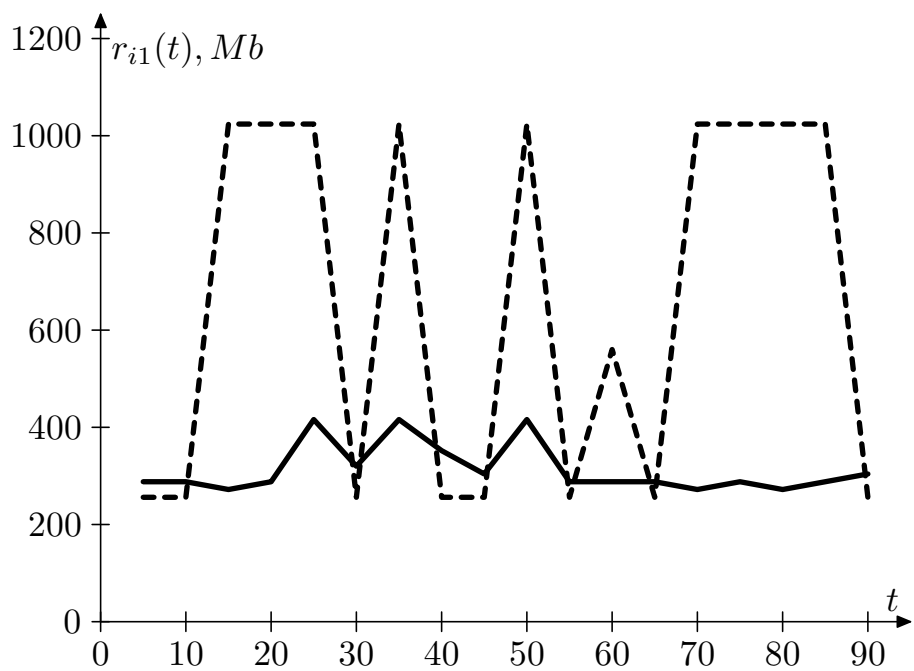


Рисунок 6.29 – Оперативная память

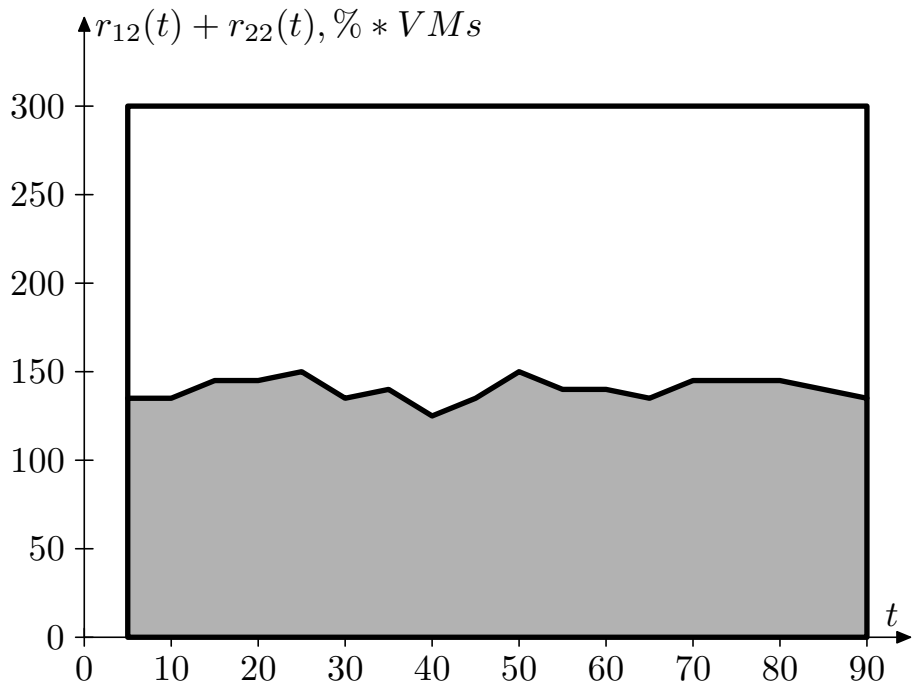


Рисунок 6.30 – Доли процессора

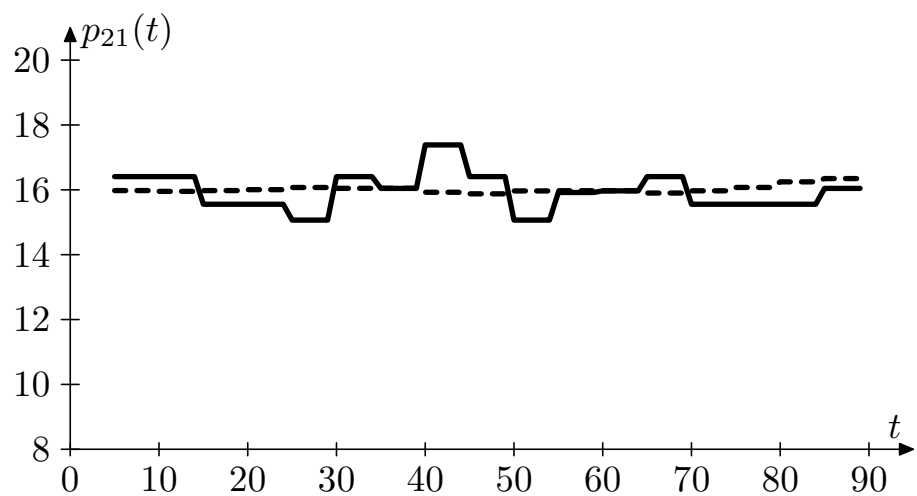
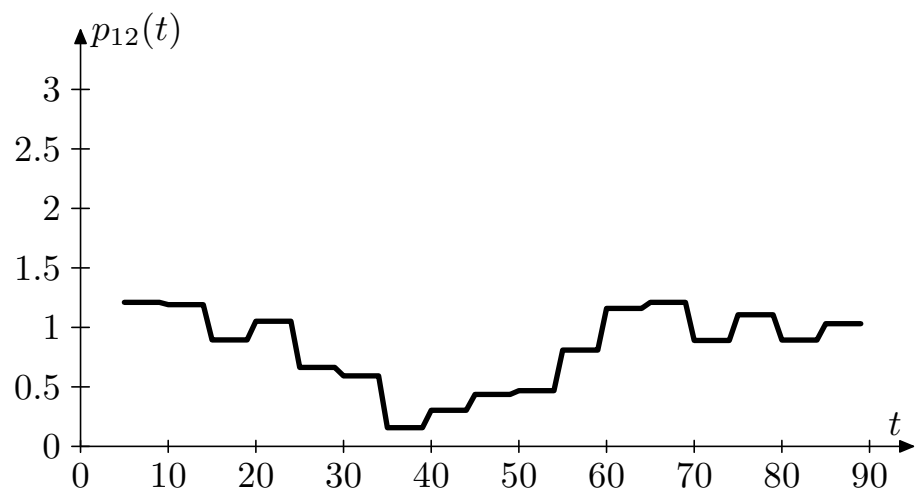
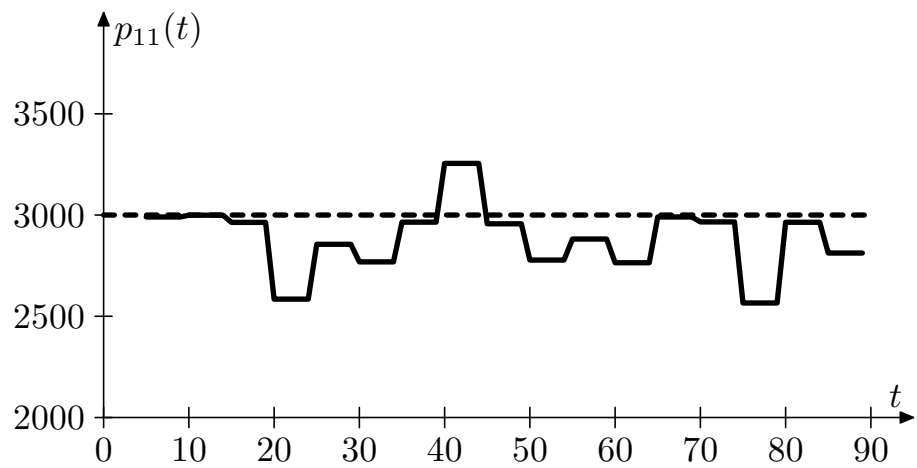


Рисунок 6.31 –

предоставляемых виртуальной машине и т. п.) при текущей пользовательской нагрузке с учетом потребностей и приоритетов других приложений системы. Предложена математическая модель задачи и метод ее решения. Написана программа, моделирующая работу системы двух компьютерных приложений при задаваемой пользовательской нагрузке, соответствующая предложенному методу. Из результатов работы программы видно, что при различных пользовательских нагрузках метод дает устойчиво хорошее динамическое перераспределение ресурсов с учетом поддержания характеристик на целевом уровне.



## Заключение

Исследован и представлен конструктивно класс преобразований динамической системы как модели объекта управления на основе расширения множества управлений. Предложена общая схема приближенного исследования задач оптимального управления с использованием этого класса, известных преобразований в пространстве состояний, достаточных условий оптимальности Кротова и глобальных оценок. Она включает поиск глобальных приближенно-оптимальных решений и их последующее итерационное улучшение с оценками точности.

Для построения эффективных итерационных процедур предложена реализация минимаксного принципа глобального улучшения управления применительно к системе общего вида посредством задачи Коши для линейного уравнения в частных производных относительно разрешающей функции Кротова и его дискретного аналога. Указаны возможности эффективного приближенного решения задачи Коши в общем случае посредством параллельных алгоритмов и важные частные случаи, когда она разрешается в терминах линейной или линейно-квадратической конструкции.

На основе предложенных общих подходов с применением принципа локализации разработана серия новых методов и алгоритмов приближенного решения задач оптимального управления, как для систем общего вида, так и для важных частных случаев. Среди них метод для задач с частично закрепленным правым концом, метод с автоматическим подбором штрафных параметров для задач с фазовыми ограничениями, метод улучшения в случае импульсных управлений. Соответствующие алгоритмы доведены до вычислительных схем, и исследована возможность их параллельной реализации.

Разработанные методы и алгоритмы применены для решения ряда прикладных задач. С одной стороны, эти задачи имеют самостоятельное практическое значение, а с другой — представляют ценный экспериментальный

материал, демонстрирующий эффективность всего предложенного инструментария.

Среди них важное место занимают актуальные задачи управления в квантовых системах. В частности, эффективность метода глобального улучшения с применением сужающего преобразования и сокращение времени расчетов при переходе к параллельной версии продемонстрированы на задаче передачи квантового состояния в длинных спиновых цепочках.

В задаче построения нижней границы опасной зоны при нештатной посадке вертолета нашли применение практически все основные элементы описанной общей схемы приближенного исследования: аналитическая аппроксимация многомерными полиномами, поиск глобального начального приближения на упрощенной модели с фазовыми ограничениями, его итерационное улучшение, оценка множества достижимости.

Для работы с социо-эколого-экономической моделью региона разработан программно-алгоритмический комплекс DSEEmodel 1.0, реализующий на кластерной суперЭВМ многовариантные расчеты с приближенной оптимизацией многочисленных управляющих воздействий, где специальные преобразования модели при поиске начального приближения играют решающую роль, поскольку классические методы неприменимы из-за вырожденности соответствующих задач.

В целом реализованные в работе принципы, методы и алгоритмы представляют собой априорно приближенный подход к исследованию задач управления, использующий достижения теории оптимального управления, отвечающий самой природе сложных прикладных задач и имеющий перспективы дальнейшего развития.

## Приложение

Разрабатываемый в настоящее время в ИПС имени А.К. Айламазяна РАН программный комплекс (ПК) ISCON (Improvement and Synthesis of Control) предназначен для моделирования сложных динамических процессов, а также решения оптимизационных задач и задач улучшения управления для различных прикладных областей на кластерном вычислительном устройстве. Для этого в нем реализованы алгоритмы аппроксимации, оптимизации, локального и глобального улучшения приближенно оптимального управления. Главными компонентами комплекса являются графический интерфейс, сервер управления, управляющие модули и набор исполняемых модулей.

Графический интерфейс предназначен для ввода начальных данных, постановки задачи, выбора метода решения задачи, управления потоками данных, визуализации и сохранения результатов. Сервер управления участвует в обеспечении пользователям доступа к возможностям комплекса, принимает запросы на решение выбранных задач с выбранными пользователем настройками. Управляющие модули принимают полученную от сервера управления информацию и выполняют развертывание полигона для вычислений, запуская в дальнейшем либо локально, либо удаленно исполняемый модуль решаемой задачи. Так же они обеспечивают сбор выходных данных и их передачу обратно серверу управления.

Функционирование графического интерфейса, сервера управления и управляющих модулей в семействе операционных систем Windows обеспечивается возможностями .NET framework версии 2.0 или 3.0. В свою очередь исполняемые модули могут быть написаны на любом языке программирования, работать в любой операционной системе, могут быть системными командами, математическими пакетами и прочими инструментами, параллельными и последовательными по типу выполнения. Для некоторых решаемых задач требуется наличие x-сервера на стороне клиента (для вывода дополнительной

графической информации).

Область применения программного комплекса определяется реализованными методами (исполняемыми модулями), предназначенными для приближения правых частей дифференциальных уравнений, описывающих динамические системы, многомерными полиномами (алгоритм аппроксимации по МНК), локального и глобального улучшения приближенно оптимальной программы управления динамической системой. Среди реализованных алгоритмов, например, следующие:

- аппроксимация многомерных функций (правых частей дифференциальных уравнений, описывающих динамические системы) по методу наименьших квадратов;
- локальное улучшение управления в задаче оптимального управления динамической системой с ограничениями;
- локальное улучшение управления в задаче оптимального управления с частично фиксированным правым концом;
- глобальное улучшение управления в задаче оптимального управления динамической системой без фазовых ограничений.

Программный комплекс достаточно универсален и имеет большое прикладное значение, т. к. настройка комплекса на конкретную прикладную задачу может быть выполнена в виде самостоятельно работающего отчуждаемого комплекса программ.

ПК содержит: сервер управления (средство управления и контроля комплексом), управляющие модули (инструменты формирования среды для решения поставленных задач), исполняемые модули (выполняют счет поставленных задач) и интерфейс пользователя (средство запуска счета параметризованных задач). Стандартная схема работы ПК с решаемой задачей выглядит следующим образом.

1. Подключение пользователя к серверу управления с помощью графического интерфейса.

2. Формирование пользователем текста решаемой задачи, списка загружаемых и получаемых файлов.
3. Запуск счета задачи, загрузка выбранных пользователем файлов на сервер управления.
4. Формирование сервером управления и управляющими модулями среды для решения поставленной задачи.
5. Запуск выбранных исполняемых модулей и ожидание окончания счета.
6. Получение основного выходного текста (формируется управляющим модулем) и файлов с результатами вычислений, передача их пользователю.
7. Завершение работы системы.

Для параллельной реализации ПК была использована гетерогенная аппаратная среда. Компоненты ПК физически разделены. Графический интерфейс, сервер управления и управляющие модули работают на платформе IBM PC, а аппаратная платформа для исполняемых модулей вообще не фиксируется. В составе ПК в частности есть исполняемые модули, работающие на аппаратной платформе IBM PC, модули, выполняющиеся на аппаратной платформе суперкомпьютеров «СКИФ» кластерного уровня, которая включает: управляющую ЭВМ (фронтенд), вычислительные узлы кластерного уровня; системную сеть кластера (SCI), объединяющую вычислительные узлы; вспомогательную сеть (семейства Ethernet, с поддержкой TCP/IP), объединяющую управляющую ЭВМ и вычислительные узлы. Семейство суперкомпьютеров «СКИФ» базируется на масштабируемой кластерной архитектуре, реализуемой на классических кластерах из вычислительных узлов на основе компонент широкого применения (стандартных микропроцессоров, модулей памяти, жестких дисков и материнских плат, в том числе с поддержкой SMP). Кластер работает под операционной системой Linux (RedHat 6.2), особенностью реализации СКУ СКИФ является использование в каждом узле двух

процессоров. Такая гибкость при работе с исполняемыми модулями оказалась возможной из-за активного использования протокола SSH (Secure Shell) при построении управляющих модулей, сетевого протокола прикладного уровня, позволяющего производить удаленное управление операционной системой и передачу файлов.

## Специальные универсальные классы

При программировании на языке C++ различных алгоритмов решения задач оптимального управления большим преимуществом является возможность создания универсальных классов соответствующих исходной задаче или текущей итерации. Объявление класса определяет новый тип, связывающий код и данные между собой. Таким образом, класс является логической абстракцией, а объект — это экземпляр класса (соответствует конкретной задаче или конкретной итерации алгоритма).

Приведем класс `zadacha`, используемый для хранения входных данных при решении задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа неравенств, различных внутри временного отрезка и на правом конце, с помощью метода локального улучшения управления.

```
class zadacha {
public: unsigned zn;
        unsigned zp;
        unsigned zm;
        unsigned zporyadok_metoda;
        double zt0;
        double zt1;
        double zst_t;
        std::vector<double> zx0,
                zx_n, zindikator_n,
```

```

        zx_v, zindikator_v,
        zx_nF, zindikator_nF,
        zx_vF, zindikator_vF,
        zu_n, zu_v, znaklon;
std::string vhad_file, params_file, upr_file;

    void set(std::string fname);
};

```

Класс `zadacha` используется для хранения целочисленных значений типа `unsigned` размерности вектора состояния, вектора управления, числа разбиений временного отрезка (соответственно данные `zn`, `zp`, `zm`), целого числа `zporjadok_metoda`, отвечающего за выбор метода решения задачи, вещественных значений типа `double` начального, конечного момента времени и шага по времени (соответственно данные `zt0`, `zt1`, `zst_t`). Также в классе хранятся динамические вектора типа `vector<double>`, содержащие начальное значения вектора состояния `zx0`, нижние/верхние ограничения вектора состояния, индикаторы наличия/отсутствия нижнего/верхнего ограничения вектора состояния внутри временного отрезка (соответственно данные `zx_n`, `zx_v`, `zindikator_n`, `zindikator_v`), и на правом конце временного отрезка (соответственно данные `zx_nF`, `zx_vF`, `zindikator_nF`, `zindikator_vF`), нижние/верхние ограничения вектора управления, величину максимально возможной скорости изменения управления (соответственно данные `zu_n`, `zu_v`, `znaklon`). Строковая переменная `vhod_file` — имя текстового файла, содержащего числовые значения вышеперечисленных величин (соответствующих конкретной задаче), `params_file` — имя текстового файла, содержащего значения параметров выбранного метода решения исходной задачи, `upr_file` — имя текстового файла, содержащего начальное значение вектора управления.

Функция `set`, объявленная внутри класса, имеет доступ ко всем элементам своего класса и отвечает за установку конкретного объекта класса

`zadacha` по данным их текстового файла `fname`.

Приведем класс `iter`, используемый для хранения текущей итерации при решении задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа неравенств, различных внутри временного отрезка и на правом конце, с помощью метода локального улучшения управления.

```
class iter {
public: std::vector<double> tr, up, zet;
       std::vector<double> part;
       std::vector<double> vesa;
       double Fin0;
       double Fin;
       unsigned step;

       void set(std::vector<double> U, zadacha os);
       void show(zadacha os);
       void fshow(std::string name, zadacha os);
       void fshow_ap(std::string name, zadacha os);
       std::vector<double> sost_x(unsigned I, unsigned nn);
       std::vector<double> sost_u(unsigned I, unsigned pp);
       std::vector<double> sost_z(unsigned I, unsigned nn);
};
```

Здесь динамические векторы типа `vector<double>` содержат значение траектории, управления и отклонения траектории от допустимого множества на всем временном отрезке (соответственно данные `tr`, `up`, `zet`), части и весовые коэффициенты оштрафованного функционала (соответственно данные `part`, `vesa`), вещественные переменные типа `double` содержат значения функционала исходной задачи и оштрафованного функционала (соответственно данные `Fin0`, `Fin`), целочисленная переменная `step` содержит значение интервала по времени для вывода объекта `iter` и позволяет сократить объем



вывода в задачах, решаемых на очень мелкой сетке значений времени.

Функция `set`, объявленная внутри класса, имеет доступ ко всем элементам своего класса и отвечает за установку конкретного объекта класса `iter` по данным вектора управления `vector<double> U` и объекта `zadacha os`. Функции `show`, `fshow`, `fshow_ap` отвечают за форматированный вывод объекта класса `iter` на консоль, в новый файл и в существующий файл как добавление соответственно. Активно используемые, в силу особенностей алгоритмов решения задач улучшения управления, функции `sost_x`, `sost_u`, `sost_z` позволяют получить по текущей итерации значения вектора состояния, управления и отклонения от допустимого множества в конкретный момент времени  $I$ .

Универсальность введенных классов заключается в том, что основные их члены и функции-члены остаются неизменными для различных задач оптимального управления, решаемых различными методами. Одинаковый вывод результатов позволяет использовать одни и те же приложения для наглядного построения графиков и дальнейшего проведения анализа результатов, что немаловажно при многометодных процедурах решения исходных задач в многочисленных вычислительных экспериментах.

## Программная реализация параллельных алгоритмов

Вычислительные эксперименты, проводимые в рамках исследования той или иной прикладной задачи оптимального управления, зачастую могут быть разбиты на семейство независимых задач, аналогичных исходной и отличающихся друг от друга лишь начальными данными, или временным отрезком, или ограничениями на управление и т. п. В этом случае расчеты могут быть легко организованы в параллельном режиме без изменений исходного программного кода. Для этого достаточно лишь организовать внешнюю рассылку задач с различными входными данными на различные вычислительные

узлы суперЭВМ.

В данной диссертационной работе основное внимание уделяется более глубокому уровню распараллеливания программ — распараллеливание вычислительных алгоритмов. Так, например, в алгоритме приближения многомерных функций по МНК распараллеливается формирование матриц СЛАУ отдельно в подобластях рабочего диапазона, в алгоритме локального улучшения производится распараллеливание по параметрам метода (см. главу 3), в алгоритме глобального улучшения параллельно выполняется многомерная максимизация (см. главу 4) и т. д. Подобное распараллеливание программы необходимо должно быть выполнено в исходном программном коде.

Все параллельные алгоритмы, представленные в диссертационной работе, реализованы в рамках T-системы с открытой архитектурой (OpenTS) [1, 2, 3]. T-система — система параллельного программирования, реализующая концепцию автоматического динамического распараллеливания программ. Это — оригинальная российская разработка, которая ведется в Институте программных систем РАН. T-система автоматически (без участия программиста) выполняет распараллеливание фрагментов кода в программе, планировку вычислений, синхронизацию параллельных фрагментов кода, обмен данными между фрагментами программы и распределение данных по различным узлам кластера. Причем, эти действия определяются и выполняются в динамике, во время исполнения программы (а не планируются заранее, в статике, во время компиляции).

T-система предоставляет язык программирования T++ (очень простой параллельный диалект C++), который предназначен для эффективной реализации динамического распараллеливания. Он позволяет смешивать чистую функциональную и императивную мощь C++ на уровне T-вызовов. Рекомендуется следующая организация разработки программы на языке T++.

1. На этапе построения алгоритма разрабатывается его верхний уровень на базе парадигмы функционального программирования.

2. Этап разработки программного кода включает в себя решение вопроса о том, какие фрагменты алгоритма (какая часть программного кода) будут реализованы в виде T-функций, а какая часть в виде привычного последовательного исполняемого кода в стандарте языка C++.
3. Этап реализации программы и ее первичной отладки на однопроцессорном компьютере.
4. Этап отладки на многопроцессорной установке заключается в отладке программы на одиночном SMP-компьютере и дальнейшем запуске на кластере.

Отметим, что при реализации программы для T-системы программист обязан адекватно изложить алгоритм в функциональном стиле — описать программу в виде набора T-функций. Кроме этого, он должен стремиться выбрать оптимальный размер T-функции (оптимально подобрать среднюю вычислительную сложность T-функции). Так, слишком малая вычислительная сложность T-функций может привести к большим накладным расходам (например, время, затраченное на передачи T-функций и данных для них в другие узлы кластера, превысит время счета самой этой функции). В то же время, слишком большая вычислительная сложность T-функций может привести к малому количеству порождаемых в процессе счета гранул параллелизма и, как следствие, к неравномерной загрузке вычислительных узлов кластера.

Рассмотрим организацию распараллеливания на примере достаточно простой программы. Приведем код параллельной программы расчета чувствительности целевого функционала к малым изменениям коэффициентов матрицы прямых затрат в экономическом секторе  $A$  при заданном управлении. Эта программа является одним из основных рабочих программных модулей программного комплекса DSEE\_model 1.0 для работы с социо-эколого-экономической моделью региона (см. п. 6.2.1). Реализована простая параллельность независимых расчетов по малым изменениям каждого элемента

матрицы  $A$  (количество гранул параллелизма при этом совпадает с размерностью матрицы  $A$ ).

```
//----- chuA_main_D.tpp -----  
#include <fstream>  
#include <string>  
#include <iostream>  
  
#include "obr_m.h"  
#include "VecFile.h"  
#include "zadacha_DSEE.h"  
#include "Iter_SEE.h"  
#include "functions_SEE.h"  
#include "Fnames_SEE.h"  
  
using namespace std;  
  
//-----  
tfun int main(int argc, char* argv[])  
{  
    string os_vhod_file="vhod.txt";  
    zadacha os;  
    os.set(os_vhod_file);  
    data_out(os);  
    change_variables(os);  
  
    string file_in_u="chuA_u.txt",  
           file_F_from_A="chuA_F.txt",  
           file_Fgr_from_A="chuA_Fgr.txt";
```

```

fnames FNames;
strcpy(FNames.name1,file_in_u.c_str());
strcpy(FNames.name2,file_F_from_A.c_str());
strcpy(FNames.name3,file_Fgr_from_A.c_str());

const unsigned cst=os.n_model[0]*os.n_model[0];
tval struct oresult ores[cst];
int current=0;

cout << "main: " << cst << " processes are started."
      << endl << endl;

for (unsigned i=0;i<os.n_model[0];i++) {
  for (unsigned j=0;j<os.n_model[0];j++) {
    tct(atRank (current % ts::realsuperSize));
    chuA(current, i,j, FNames, ores[current]);
    current++;
  }
}

ofstream Fout(FNames.name2);
ofstream grafikout(FNames.name3);

for (int i=0;i<current;i++) {
struct oresult res=(struct oresult) ores[i];
  Fout << "i=" << res.i1 << " j=" << res.i2 << " F'="
      << res.d1 << " F=" << res.d2 << " F0=" << res.d3
      << " delta F=" << res.d4 << std::endl;
  grafikout << res.i2 << " " << res.i1 << " " << res.d1

```

```

        << " " << res.d4 << std::endl;
    };

    Fout.close();
    grafikout.close();

    cout << "end" << endl;
    return 0;
}
//-----

```

Приведем также описание используемой T-функции `chuA`, содержащееся в модуле `functions_SEE.h`.

```

//-----
tfun int chuA(unsigned cur, unsigned I, unsigned J, fnames Fnames,
              tout struct oresult ores)
//-----

```

Видно, что при написании программы к стандартному набору C++ были добавлены лишь четыре ключевых слова языка T++: `tval`, `tfun`, `tout`, `tct`.

Атрибут `tval` можно указывать непосредственно перед описанием типа переменной, при этом переменная кратко называется T-переменной и содержит неготовую величину. Неготовые величины производятся с помощью вызова T-функций и в каждый момент времени либо не готовы (при этом их значение не определено, а попытка обращения к ним влечет за собой приостановку обращающейся функции), либо готовы, т. е. уже посчитаны. Нельзя изменить собственно неготовую величину, но можно присвоить T-переменной другую неготовую величину.

Атрибут `tfun` указывается непосредственно перед описанием типа функции, соответствующая функция кратко называется T-функцией. T-функции

являются функциями, которые выполняются каждая в своем потоке управления. При этом они могут одновременно выполняться на разных процессорах в многопроцессорной системе. Отметим, что функция `main` также должна быть объявлена как T-функция. Перед описанием типа выходного аргумента T-функции указывается атрибут `tout`, при этом соответствующие переменные становятся неготовыми, а их поставщиком является вызванная T-функция.

T-контекст `tct(atRank(current % ts::realsuperSize))` указывает на то, что все T-функции (в данном примере — это T-функция `chuA`), которые порождены в пределах блока, следует направлять для вычисления на узле с рангом `current % ts::realsuperSize`. Общее количество параллельных процессов в данной программе определяет переменная `cst`, которая соответствует размерности матрицы  $A$ .

В заключение отметим, что динамическое распараллеливание, обеспечиваемое T-системой, имеет ряд преимуществ не только для случая, когда вопросы организации параллельного счета решаются во время исполнения программы, но и для выравнивания нагрузки в гетерогенных и/или меняющихся со временем параллельных вычислительных системах, а также для задач, обладающих гранулами различной тяжести, как, например, для случая реализованного алгоритма улучшения. При этом, использование неявных конструкций распараллеливания вычислений позволяет легко переносить программы между различными платформами параллельных вычислений — многопроцессорными системами, вычислительными кластерами, метакластерными системами и т. п.

## Список использованных источников

1. Абрамов С. М., Есин Г. И., Загоровский И. М., Матвеев Г. А., Роганов В. А. Принципы организации отказоустойчивых параллельных вычислений для решения вычислительных задач и задач управления в Т-Системе с открытой архитектурой (OpenTS) // Тр. Межд. конф. «Программные системы: теория и приложения» — М.: Наука\*Физматлит, 2006. Т. 1. С. 257–264.
2. Абрамов С. М., Загоровский И. М., Коваленко М. Р., Матвеев Г. А., Роганов В. А. Миграция от MPI к платформе OpenTS: эксперимент с приложениями PovRay и ALCMD // Тр. Межд. конф. «Программные системы: теория и приложения», Переславль-Залесский, октябрь 2006. М.: Наука, Физматлит, Т. 1. С. 265–275.
3. Абрамов С. М., Кузнецов А. А., Роганов В. А. Кроссплатформенная версия Т-системы с открытой архитектурой // Тр. Межд. науч. конф. «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2007)», Челябинск, 29 января - 2 февраля 2007 г., Челябинск, изд. ЮУрГУ. Т. 1. С. 115–121.
4. Алдошин С. М., Зенчук А. И., Фельдман Э. Б., Юрищев М. А., На пути к созданию маатриалов для квантовых компьютеров // Успехи химии, 2012. Т. 81. №2. С. 91–104.
5. Анрион Р. Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1979.
6. Батурин В. А., Гурман В. И., Дыхта В. А. и др. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения. — Новосибирск: Наука, 1990.
7. Батурин В. А., Урбанович Д. Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. — Новосибирск: Наука, 1997.
8. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960.



9. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления. — М.: Наука, 1969.
10. Бельшев Д. В., Блинов А. О., Фраленко В. П. Параллельный алгоритм аппроксимации моделей управляемых систем // Тр. четвертой межд. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления», 2008. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. С. 968–978.
11. Блинов А. О., Гурман В. И., Трушкова Е. А., Фраленко В. П., Программный комплекс оптимизации законов управления // Программные продукты и системы, 2009. № 2(86). С. 95–100.
12. Блинов А. О., Фраленко В. П. Приложение метода наименьших квадратов к задачам моделирования и оптимизации // Сб. тр. науч.-практической совместной конф. студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников Института программных систем Российской академии наук и «Университета города Переславля» им. А.К. Айламазяна, г. Переславль-Залесский, апрель 2008 / Под редакцией С. М. Абрамова и С.В. Знаменского. В двух томах. — Переславль-Залесский: Изд-во «Университет города Переславля», 2008. Т. 1, С. 67–78.
13. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
14. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. — М.: Наука, 1973.
15. Бортакровский А. С., Пантелеев А. В. Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // Автоматика и телемеханика. 1987. № 7. С. 57–66.
16. Букреев В. З. Об одном методе приближенного синтеза оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1968. № 11. С. 5–13.
17. Булдаев А. С. Проекционные процедуры нелокального улучшения линейно управляемых процессов // Известия вузов. Математика. 2004. № 1. С. 18–24.

18. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. — Улан-Удэ: Изд-во Бурятск. гос. ун-та, 2008.
19. Бутковский А. Г., Самойленко Ю. И. Управление квантово-механическими процессами. — М.: Наука, 1984.
20. Васильев С. Н., Жерлов А. К., Федосов Е. А., Федунев Б. Е. Интеллектуальное управление динамическими системами. — М.: Наука\*Физматлит, 1999.
21. Васильев О. В., Аргучинцев А. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. — М.: Физматлит, 1999.
22. Васильев О. В., Тятюшкин А. И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1981. Т. 21. № 6.
23. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Современное состояние теории оптимальных процессов // Автоматика и телемеханика. 1972. № 9.
24. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования. — Минск: Изд-во Белорусского университета, 1980.
25. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. — Минск: Университетское, 1984.
26. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. — Новосибирск: Наука, 2009.
27. Горнов А. Ю., Двуреченский А. В., Зароднюк Т. С., Зиновьева А. Ф., Ненашев А. В. Задача оптимального управления в системе полупроводниковых квантовых точек // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 108–114.
28. Гурман В. И. Оптимизация дискретных систем. — Иркутск: Издательство Иркутского университета, 1970.
29. Гурман В. И. Об оптимальных процессах с неограниченными производными // Автоматика и телемеханика. 1972. № 12. С. 14–21.

30. Гурман В. И. К теории оптимальных дискретных процессов // Автоматика и телемеханика. 1973. № 6.
31. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления. — М.: Физматлит, 1985, 1997.
32. Гурман В. И. Магистральные решения в процедурах поиска оптимальных управлений // Автоматика и телемеханика. 2003. № 3. С. 61–71.
33. Гурман В. И. Магистральные решения в задачах оптимального управления квантомеханическими системами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 115–126.
34. Гурман В. И., Батурич В. А. Алгоритм улучшения управления, основанный на оценках областей достижимости // Деп. в ВИНТИ, № 651-85, 1985.
35. Гурман В. И., Батурич В. А., Расина И. В. Приближенные методы оптимального управления. — Иркутск, Изд-во Иркут. Ун-та, 1983.
36. Гурман В. И., Батурич В. А., Данилина Е. В. и др. Новые методы улучшения управляемых процессов. — Новосибирск: Наука, 1987.
37. Гурман В. И., Знаменская Л. Н. Управление колебаниями при ограниченном ресурсе управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 1. С. 41–49.
38. Гурман В. И., Квоков В. Н., Ухин М. Ю. Приближенные методы оптимизации управления летательным аппаратом // Автоматика и телемеханика. 2008. № 3. С. 191–201.
39. Гурман В. И., Матвеев Г. А., Трушкова Е. А. Социо-эколого-экономическая модель региона в параллельных вычислениях // Управление большими системами. Выпуск 32. М.: ИПУ РАН, 2011. С. 109–130.
40. Гурман В. И., Расина И. В. О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума // Автоматика и телемеханика. 1979. № 10. С. 12–18.

41. Гурман В. И., Расина И. В., Батулин В. А., Данилина Е. В. Достаточные условия относительного минимума в задачах улучшения и синтеза управления. В кн.: Методы оптимизации и их приложения. — Новосибирск: Наука. Сиб. Отд-ие, 1982. С. 80–102.
42. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / Под ред. В. И. Гурмана, Е. В. Рюминой. — М.: Наука, 2001.
43. Гурман В. И., Трушкова Е. А. Метод улучшения управления для дискретных систем // Вестник Тамбовского Университета. Сер. Естественные и технические науки. Под редакцией В. М. Юрьева. Тамбов, 2007. — Т. 12. Вып. 4, С. 439–441.
44. Гурман В. И., Трушкова Е. А. Оценки множеств достижимости управляемых систем // Дифференциальные уравнения, 2009. Т. 45. № 11. С. 1601–1609.
45. Гурман В. И., Трушкова Е. А. Приближенные методы оптимизации управляемых процессов // Эл. науч. журнал Института программных систем имени А.К. Айламазяна РАН «Программные системы: теория и приложения», 2010. № 4 (Т. 1). С. 67–83.
46. Гурман В. И., Трушкова Е. А., Блинов А. О. Приближенная глобальная оптимизация управления на основе преобразований модели объекта // Автоматика и телемеханика. 2009. № 5. С. 13–23.
47. Гурман В. И., Трушкова Е. А., Блинов А. О. Приближенная оптимизация управления в параллельных вычислениях // Вестник Бурятского государственного университета, 2010. Математика и информатика. Вып. 9. С. 18–28.
48. Гурман В. И., Трушкова Е. А., Матвеев Г. А., Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ DSEEmodel 1.0 № 20106160006, 14 сентября 2010 г.

49. Гурман В. И., Трушкова Е. А., Расина И. В., Усенко О. В. Иерархическая модель неоднородной дискретной системы и ее приложения // Управление большими системами. Выпуск 41. М.: ИПУ РАН, 2013. С. 249–269.
50. Гурман В. И., Трушкова Е. А., Ухин М. Ю. Улучшение управления, реализующего скользящий режим // Автоматика и телемеханика. 2008. № 3. С. 161–171.
51. Гурман В. И., Ухин М. Ю. Приближенный синтез оптимального управления в задачах с магистральными решениями // Тр. второй межд. конф. по проблемам управления, ИПУ РАН, 2003.
52. Гурман В. И., Ухин М. Ю. Синтез оптимального управления периодическими процессами при неограниченном времени // Автоматика и телемеханика. 2007. № 2. С. 17–25.
53. Гурман В. И., Ухин М. Ю., Ни Минь Кань. Практические схемы оптимизации управления на основе принципа расширения // Автоматика и телемеханика. 2006. № 4. С. 25–41.
54. Гюрджиев В. Г. Метод возможных направлений для решения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями // Деп. в ВИНТИ 18.09.1980, № 4099-80.
55. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. Т. 5, № 3, 1965.
56. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
57. Зубов В. И. лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
58. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // УМН. 1948. Т. 3. № 6. С. 89–185.
59. Квоков В. Н., Трушкова Е. А., Ухин М. Ю. Метод улучшения управления на имитационной модели объекта и его приложение к задаче оптимизации маневров нештатной посадки вертолета // Сборник научных трудов

«Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева». 2009. № 1. С. 161–169.

60. Келли Г. Дж. Метод градиентов. В кн.: Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана. — М.: Наука, 1965.

61. Коваленко М. Р., Матвеев Г. А., Осипов В. И., Трушкова Е.А. Параллельный алгоритм улучшения управления // Тр. четвертой междунар. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления», 2008. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. С. 979–984.

62. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

63. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985.

64. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.

65. Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума // Автоматика и телемеханика. I, № 12, 1962; II, № 5, 1963; III, № 7, 1963; IV, № 11, 1965.

66. Кротов В. Ф. Об оптимизации управления квантовыми системами // Доклады РАН, 2008. № 3. С. 316–319.

67. Кротов В. Ф. Управление квантовыми системами и некоторые идеи теории оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2009. № 3. С. 15–23.

68. Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И. Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. — М.: Машиностроение, 1969.

69. Кротов В. Ф., Булатов А. В., Батурина О. В. Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 64–78.

70. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
71. Кротов В. Ф., Моржин О. В., Трушкова Е. А. Разрывные решения задач оптимального управления. Итерационный метод оптимизации. // Автоматика и телемеханика. 2013. № 12. С. 31–55.
72. Кротов В. Ф., Фельдман И. Н. Итерационные методы решения экстремальных задач. В кн.: Моделирование технико-экономических процессов. — М.: Изд-во Московского экономико-статистического института, 1978.
73. Кротов В. Ф., Фельдман И. Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168.
74. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. О методе последовательных приближений для задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1962. Т. 2, № 6.
75. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций // Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1966. Т. 6. № 2.
76. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977.
77. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. М. Основы вариационного исчисления. Т. 2. — ОНТИ, 1937.
78. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов, II // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 5.
79. Лотов А. В., Поспелова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений. — Макс Пресс, Москва, 2008.
80. Матросов В. М. Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова // Диф. уравнения, I, 1968, Т. 4, № 8, С. 1374–1386; II, 1969, Т. 4, № 10, С. 1739–1752; III, 1969, Т. 5, № 7, С. 1171–1185; IV, 1969, Т. 5, № 18, С. 2129–2143.

81. Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н. Метод сравнения в математической теории систем. — Новосибирск: Наука, 1980.
82. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1971.
83. Москаленко А. И. Достаточные условия совместной оптимальности систем // Докл. АН СССР, 1977, Т. 232, № 3, С. 524–527.
84. Москаленко А. И. Методы нелинейных отображений в оптимальном управлении. — Новосибирск: наука, 1983.
85. Московский А. А., Первин А. Ю., Walker В. Оптимальное управление ресурсами виртуальных инструментов на вычислительном кластере // Тр. четвертой межд. конф. «Параллельные вычисления и задачи управления», 2008. ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН. С. 968–978.
86. Ни Минь Кань, Ухин М. Ю. Реализация магистральных решений задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 6. С. 54–60.
87. Орлов А. Г., Расина И. В. Метод улучшения второго порядка сложных процессов. — Новосибирск, 1977.
88. Охоцимский Д. Е. К теории движения ракет // Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10, № 2.
89. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физических наук, 1957. Т. 15, Вып. 1а.
90. Печен А., Рабиц Х. Некогерентное управление открытыми квантовыми системами // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 42. С. 179–185.
91. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.



92. Расина И. В. Две формы достаточных условий оптимальности и метод улучшения второго порядка для сложных процессов. Юбилейный сборник научных трудов к 10-летию СИПЭУ. — Иркутск, изд-во «Макаров», 2004. С. 180–192.

93. Расина И. В. Сложные процессы с параметрами. Актуальные проблемы права, экономики и управления в Сибирском регионе // Сб. статей межд. науч.-практической конф., Иркутск: СИПЭУ, 2005. Вып. I, Т. II, С. 42–44.

94. Расина И. В. Сложные дискретные процессы с запаздыванием по состоянию. Актуальные проблемы права, экономики и управления в Сибирском регионе // Сб. статей межд. науч.-практической конф., Иркутск: СИПЭУ, 2007. Вып. III, Т. I, С. 348–351.

95. Салмин В. В., Ишков С. А., Старинова О. Л. Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой. Самара: Издательство СНЦ РАН, 2006.

96. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.

97. Субботин А. И. Минимальные и вязкие решения уравнений Гамильтона-Якоби. — М.: Наука, 1991.

98. Токарев В. В. Методы оптимальных решений: Учеб. пособие для вузов. [В 2 т.] Серия: Анализ и поддержка решений. Физматлит, 2011.

99. Трушкова Е. А. Синтез оптимальных траекторий, подчиненных граничным условиям, для линейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2011. № 3. С. 3–14.

100. Трушкова Е. А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 151–159.

101. Трушкова Е. А. Улучшение управления в одном классе систем с линейным неограниченным управлением // Эл. науч. журнал Института программных систем имени А.К. Айламазяна РАН «Программные системы: теория и приложения», 2011. № 1 (Т. 2). С. 39–50.

102. Трушкова Е. А. Синтез управления в окрестности приближенного решения задачи с частично закрепленным правым концом // Эл. науч. журнал Института программных систем имени А.К. Айламазяна РАН «Программные системы: теория и приложения», 2010. № 2 (Т. 2). С. 31–35.

103. Трушкова Е. А. Оценка приближенно оптимальных решений на основе преобразований модели объекта // Вестник Бурятского государственного университета, 2011. Математика и информатика. Вып. 9. С. 47–51.

104. Трушкова Е. А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 151–159.

105. Трушкова Е. А. Об одном классе задач оптимального управления для квантовых систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 1. С. 35–46.

106. Трушкова Е. А. Метод глобального улучшения для гамильтоновых систем с управляемыми коэффициентами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2013. Т. 13. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1, ч. 2. С. 95–99.

107. Трушкова Е. А., Блинов А. О. Метод улучшения управления в моделировании динамических систем // Сб. докл. третьей всеросс. науч.-практической конф. по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности, Санкт-Петербург, 2008. Т. 1. С. 234–236.

108. Трушкова Е. А., Матвеев Г. А. Модель динамического распределения ресурсов // Вестник Бурятского государственного университета, 2011. Математика и информатика. Вып. 9. С. 274–279.

109. Ухин М. Ю. Приближенный синтез оптимального управления. — М.: Физматлит, 2006.

110. Федоренко Р. П. Метод проекции градиента в задачах оптимального управления. — М., Препринт ИПМ АН СССР, № 45, 1975.

111. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.

112. Хрусталеv М. М. О достаточных условиях оптимальности в задачах с ограничениями на фазовые координаты // Автоматика и телемеханика. 1967. № 4.
113. Хрусталеv М. М. Необходимые и достаточные условия для задачи оптимального управления // Доклады АН СССР. 1973. Т. 211. № 1.
114. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. — Физматлит, 2006.
115. Чуклов Б. Т. Применение вариационного метода последовательных улучшений по управлению для оптимизации взлетной траектории вертолета // Труды ЛИИ. 1972. №221. С. 1—26.
116. Шатровский Л. И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1962. № 2.
117. Энеев Т. М. О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления // Космические исследования, 1968. Т. 4. № 4.
118. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту. В кн.: Математическая экономика. — М.: Мир, 1974.
119. Модели управления природными ресурсами // Под ред. В. И. Гурмана. — М.: Наука, 1981.
120. Эколого-экономическая стратегия развития региона: Математическое моделирование и системный анализ на примере Байкальского региона. — Новосибирск: Наука, 1990.
121. Организация Объединенных Наций: основные факты. — М.: Издательство «Весь Мир», 2005.
122. Balachandran V., Gong J. Adiabatic Quantum Transport in a Spin Chain with a Moving Potential // Phys. Rev. Lett. 2007. URL:<http://arxiv.org/abs/0712.1628v1>.

123. Bardi M., Capuzzo Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacoby-Bellman equations. — Boston: Birkhauser, 1997.
124. Bose S. // Phys. Rev. Lett., 91 207901, 2003.
125. Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A. // The Physics of Quantum Information, Berlin, Heidelberg: Springer, 2000.
126. Boussaid N., Caponigro M., Chambrion T. Periodic control laws for bilinear quantum system with discrete spectrum. 2011. URL: <http://arXiv.org/pdf/1111.4550v1>.
127. Burgarth D., Giovanetti V., Bose S. // Phys.Rev.A75 062327, 2007.
128. Courant R. Variational Methods for Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. V. 49, № 1.
129. Doronin S. I., Zenchuk A. I. // Phys. Rev. A 81 022321, 2010.
130. Gurman V. I., Ukhin M. Yu. The extension principle in control problems. Constructive methods and applied problems. — Moscow: Fizmatlit, 2005.
131. Jacobson D. H. New second-order and first-order algorithms for determining optimal control. A differential programming approach // J. Optimiz. Theory and Applications. 1968. V. 2. № 4.
132. Koch C. P. et al. Stabilization of ultracold molecules using optimal control theory //Physical Review A. 2004. T. 70. № 1. C. 013402.
133. Krotov V. F. Global methods in optimal control theory. — N.Y.: Marcel Dekker, 1996.
134. Lions P. L. Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations. — Boston: Pitman, 1982.
135. Lotov A. V. , Bushenkov V. A., Kamenev G. K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of the Pareto Frontier, Applied Optimization, 89, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004.
136. Murphy M., Montangero S., Giovannetti V., Calarco T. Communication at the quantum speed limit along a spin chain //Physical Review A. 2010. T. 82. № 2. C. 022318.

137. Maximov I. I. et al. A smoothing monotonic convergent optimal control algorithm for nuclear magnetic resonance pulse sequence design // The Journal of chemical physics. 2010. T. 132. № 8. C. 084107-084107-9.

138. Nielsen M. A., Chuang I. L. // Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

139. Palao J. P., Kosloff R., Koch C. P. Protecting coherence in optimal control theory: State-dependent constraint approach // Physical Review A. 2008. T. 77. № 6. C. 063412.

140. Reich D. M., Ndong M., Koch C. P. Monotonically convergent optimization in quantum control using Krotov's method // The Journal of Chemical Physics. 2012. T. 136. C. 104103.

141. Schirmer S. G., de Fouquieres P. Efficient algorithms for optimal control of quantum dynamics: the Krotov method unencumbered // New Journal of Physics. 2011. T. 13. № 7. C. 073029.

142. Sklarz S. E., Tannor D. J. Loading a Bose-Einstein condensate onto an optical lattice: An application of optimal control theory to the nonlinear Schrodinger equation // Physical Review A. 2002. T. 66. № 5. C. 053619.

143. Warga J. Relaxed Variational Problems // J. Math. Anal. Appl. 1962. V. 4. № 1. P. 111–127.