РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили

ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Москва – 2004

УДК 519
ББК 32.81
Н 73

Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. **Прикладные модели информационного управления**. М.: ИПУ РАН, 2004. – 129 с.

Работа содержит результаты исследований прикладных теоретико-игровых моделей управления поведением агентов, принимающих решения на основе иерархии представлений о существенных параметрах, представлениях оппонентов, представлениях о представлениях и т.д. В том числе, рассматриваются задачи информационного управления в области экономики, маркетинга, политики и т.д.

Приведенные общие теоретические и частные прикладные результаты отражают единую методологию построения и изучения прикладных математических моделей информационного управления, которая может быть эффективно использована при решении широкого класса задач управления социально-экономическими системами.

Работа рассчитана на специалистов (теоретиков и практиков) по управлению социально-экономическими системами.

Рецензент: д.т.н., проф. В.В. Кульба

Утверждено к печати Редакционным советом Института

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена рассмотрению прикладных математических моделей информационного управления социально-экономическими системами. *Управлением* называется воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения. *Социально-экономические системы* включают в себя людей (отдельных индивидуумов, их группы и коллективы), поэтому управление такой системой заключается в побуждении людей к требуемому поведению. Однако человек самостоятельно принимает решения, значит для того, чтобы влиять на его поведение, необходимо иметь модель принятия им решений.

Модели принятия решений. Господствующая в науке на протяжении последнего полувека модель принятия субъектом решений (*гипотеза рационального поведения*) заключается в следующем: субъект стремится выбрать наилучшую в рамках имеющейся у него информации альтернативу. При этом в *модель принятия решений* входят, как минимум, множество альтернатив, из которого производится выбор, а также предпочтения субъекта на этом множестве, которые обычно описываются функцией полезности [13].

В случае, когда имеется только один субъект, дело обстоит достаточно просто – считается, что он выбирает из множества допустимых альтернатив такую альтернативу, на которой достигается максимум его функции полезности (выигрыша, предпочтения и т.д.) [10, 13, 21]. Отметим, что при этом существенной является *информированность* субъекта – та информация, которой он обладает на момент принятия решений о допустимых альтернативах, их предпочтительности, последствиях выбора той или иной альтернативы и т.д.

Если субъектов несколько, и выигрыш каждого зависит от выборов всех, то ситуация усложняется – для того, чтобы выбрать собственное действие субъект должен «предсказать», какие действия выберут его *оппоненты*. Моделями совместного принятия решений субъектами, интересы которых не совпадают, занимается *теория игр* [13], одной из основных задач которой является предсказание *решения игры* – устойчивого в том или ином смысле исхода взаимодействия рациональных субъектов (*игроков, агентов*).

Попробуем промоделировать ход рассуждений субъекта, принимающего решения. Пусть он считает, что его оппоненты выберут определенные действия. Тогда он должен выбрать свое действие, являющееся наилучшим при сложившейся обстановке. Но, если он считает своих оппонентов такими же рациональными, как и он сам, то он должен предположить, что при выборе своих действий они будут ожидать соответствующего выбора от него. Но тогда он должен учитывать и то, что оппоненты знают о том, что он считает их рациональными и так далее – получаем бесконечную цепочку «вложенных» рассуждений. Как же замкнуть эту бесконечную цепочку, какое решение принять в ситуации выбора? Наиболее распространенным способом такого «замыкания» является концепция так называемого *равновесия Нэша*. Равновесие Нэша – это такая ситуация, от которой никому из участников игры невыгодно отклоняться в одностороннем порядке. Иными словами: «если все оппоненты выбирают именно эту ситуацию, то и я ничего не выигрываю, отклоняясь от нее» – и так для каждого игрока.

Разумеется, тут есть много нюансов. Например: что, если равновесия Нэша не существует? или их несколько, и одни более выгодны для одного игрока, а другие – для другого? Бывает, как известно, и так, что ситуация равновесия оказывается для всех участников игры хуже, чем какая-то другая ситуация, не являющаяся равновесной. Все эти вопросы уже более полувека интенсивно обсуждаются специалистами, однако их анализ выходит за рамки настоящей книги.

Рефлексия. Описанный выше процесс и результат размышлений агента о принципах принятия решений оппонентами и о выбираемых ими действиях называется *стратегической рефлексией* [41]. В отличие от стратегической рефлексии, в рамках *информационной рефлексии* субъект анализирует свои представления об информированности субъектов, представления об их представлениях и т.д.

Большинство концепций решения в теории игр (в том числе и равновесие Нэша) подразумевает, что игра, в которую играют участники (т.е. состав участников игры, множества их стратегий, функции выигрыша), является *общим знанием*, то есть игра известна всем игрокам (агентам); всем известно, что игра всем известна; всем известно, что всем известно, что игра всем известна и т.д., опять же, до бесконечности.

Конечно, общее знание (или, иначе говоря, *симметричное* общее знание) является частным случаем, а в общем случае представления агентов, представления о представлениях и т.д. могут различаться. Например, возможно *асимметричное* общее знание, при котором игроки понимают игру по разному, но само это различное понимание является общим знанием. Возможно также *субъективное* общее знание, когда игрок считает, что имеет место общее знание (а на самом деле его может не быть).

В общем случае *иерархия представлений* агентов называется *структурой информированности*. Моделью принятия агентами решений на основании иерархии их представлений является *рефлексивная игра* [34, 41], в которой каждый агент моделирует в рамках своих представлений поведение оппонентов (тем самым порождаются *фантомные агенты* первого уровня, то есть агенты, существующие в сознании реальных агентов). Фантомные агенты первого уровня моделируют поведение своих оппонентов, то есть в их сознании существуют фантомные агенты второго уровня и т.д. Другими словами, каждый агент выбирает свои действия, моделируя свое взаимодействие с фантомными агентами, ожидая от оппонентов выбора определенных действий. Устойчивый исход такого взаимодействия называется *информационным равновесием* [34, 41].

Но, после выбора реальными агентами своих действий, они получают информацию, по которой можно явно или косвенно судить о том, какие действия выбрали оппоненты. Поэтому информационное равновесие может быть как *стабильным* (когда все агенты – реальные и фантомные – получают подтверждение своих ожиданий), так и нестабильным (когда чьи-то ожидания не оправдываются). Кроме того, стабильные равновесия можно, в свою очередь, подразделить на *истинные* (те стабильные информационные равновесия, которые остаются равновесиями, если агенты оказываются адекватно и полностью информированными) и *ложные*.

Информационное управление. Вернемся к рассмотрению информационного управления. Равновесие рефлексивной игры агентов зависит от структуры их информированности. Изменяя эту структуру, можно соответственно менять информационное равновесие. Поэтому *информационным управлением* будем называть воздействие на структуру информированности агентов, осуществляемое с целью изменения информационного равновесия.

Задача информационного управления может быть на качественном уровне сформулирована следующим образом: найти такую структуру информированности агентов, чтобы информационное равновесие их рефлексивной игры было наиболее предпочтительно с точки зрения *центра* – субъекта, осуществляющего управление.

Сделаем важное терминологическое замечание. Под информационным управлением иногда понимают информационное воздействие – сообщение определенной информации. Мы же рассматриваем «информацию» как объект управления, а не как средство управления. Иными словами, мы исходим из того, что центр может сформировать у агентов ту или иную структуру информированности (из некоторого множества структур), и исследуем, что в результате этого получается. За рамками наших рассмотрений остается вопрос о том, как именно следует формировать эту структуру.

Для каждой конкретной модели решение задачи информационного управления может быть разбито на несколько этапов.

Первый (наверное, наиболее трудоемкий) этап, который можно назвать построением модели поведения агентов – исследование информационного равновесия, то есть определение зависимости исхода рефлексивной игры агентов от структуры их информированности.

Второй этап заключается в решении собственно задачи управления – зная зависимость информационного равновесия от структуры информированности, необходимо найти наилучшую для центра структуру информированности. Под «наилучшей» имеется в виду допустимая структура, которая (с учетом затрат центра на ее формирование) побудит агентов выбрать как информационное равновесие наиболее выгодный для центра набор действий.

Третий этап включает исследование свойств информационного управления – его *эффективности*, определяемой как значение целевой функции центра на множестве информационных равновесий игры агентов, *стабильности* (можно накладывать требование, чтобы реализуемое центром информационное равновесие было стабильным) и *сложности*. Сложность информационного управления тесно связана с проблемой максимального ранга рефлексии, поэтому остановимся на этом свойстве информационного управления более подробно.

Проблема максимального ранга рефлексии. Структура информированности агентов представляет собой бесконечное дерево, на первом уровне которого находятся представления реальных агентов о существенных параметрах, на втором уровне – представления реальных агентов о представлениях оппонентов (то есть фантомные агенты первого уровня), на третьем – представления о представлениях о представлениях (то есть фантомные агенты второго уровня) и т.д.

Если начинающееся на каком-то уровне поддерево совпадает с поддеревом, имеющимся на более высоком уровне, то первое поддерево (и все его поддеревья) можно не рассматривать. Число попарно различных поддеревьев, входящих в информационную структуру, называется ее *сложностью*, а максимальная глубина дерева, получающегося после отбрасывания, начиная снизу, всех «повторяющихся» поддеревьев, – *глубиной* структуры информированности [34, 41]. Глубина поддерева, соответствующего некоторому реальному агенту, характеризует (на единицу превосходит) его *ранг рефлексии*.

Проблема максимального ранга рефлексии заключается в следующем: существуют ли ограничения (и какие в каждом конкретном случае) на ранг рефлексии агентов, такие, что увеличение ранга рефлексии сверх этого ограничения не имеет смысла. Выражение «не имеет смысла» требует пояснений.

Во-первых, известно, что возможности человека по переработке информации ограничены, и при принятии решений ни один человек не сможет рефлексировать «до бесконечности». Строгих результатов в этой области на сегодняшний день нет, а практика свидетельствует, что люди редко осуществляют рефлексию глубже второго-третьего уровня.

Во-вторых, во многих математических моделях удается показать, что увеличение глубины структуры информированности сверх некоторого уровня не приводит к появлению новых информационных равновесий [34]. С точки зрения агентов это означает, что увеличивать ранг рефлексии сверх этого уровня бессмысленно. А с точки зрения центра это означает, что при решении задачи информационного управления без потери эффективности можно ограничиться классом структур информированности, глубина которых ограничена данным уровнем.

Поэтому одним из результатов исследования задач информационного управления является определение максимального ранга рефлексии агентов (называемого *максимальным целесообразным* *рангом*), влиянием на который достаточно ограничиться центру при формировании структуры их информированности.

Перечисленные выше аспекты (модели принятия решений, рефлексия, информационное управление, его стабильность, сложность и т.д.) рассматриваются с теоретической точки зрения в первой главе настоящей работы. Цель этого рассмотрения – изложить общие результаты, необходимые для описания прикладных моделей.

Прикладные модели. Вторая глава – «Прикладные модели» – посвящена описанию постановок и результатов решения задач информационного управления для ряда широко распространенных на практике ситуаций. Перечислим кратко рассматриваемые модели.

«Игры поиска» (раздел 2.1) рассматривают взаимодействие двух игроков, являющихся подвижными точками в ограниченном с одной стороны «коридоре» (т.е. в области, представляющей собой полуполосу), – уклоняющегося (например, подводная лодка) и ищущего (например, вертолет или противолодочный корабль). Уклоняющийся игрок выбирает точку, где он «прячется», ищущий игрок выбирает свою скорость. Каждый из них имеет свои представления о таком параметре, как минимальное расстояние между ними, при котором происходит обнаружение. Кроме того, каждый из игроков имеет определенные представления о представлениях оппонента, представлениях о представлениях и т.д. Оказывается, что максимальный целесообразный ранг рефлексии ищущего игрока равен трем, а уклоняющегося – двум. При этом у уклоняющегося, в зависимости от структуры информированности, имеются лишь две равновесные стратегии – «стоять на месте, пытаясь отсрочить момент обнаружения» и «пытаться прорваться как можно раньше».

В разделе 2.2 рассматривается модель «**Производитель и посредник»**, в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида продукции, и центр, выступающий в роли посредника между агентом и рынком. Предполагается, что посредник точно знает рыночную цену, а производитель – нет.

Производитель и посредник заранее оговаривают пропорцию, в которой они будут делить доход, затем посредник сообщает производителю информацию (не обязательно достоверную) о рыночной цене, и, наконец, производитель выбирает объем производства.

Выбор посредником сообщения о рыночной цене может трактоваться как информационное управление. Стабильным будет такое информационное управление, при котором реальный доход производителя равен тому доходу, на который он и рассчитывал, исходя из сообщения посредника.

Оказывается, что, выбирая надлежащим образом информационное управление, посредник обеспечивает себе максимум дохода независимо от пропорции дележа (иными словами, посредник может соглашаться на любую долю, свой выигрыш он получит в любом случае). Интересно, что при этом в некоторых случаях производитель получает бóльшую прибыль, чем получил бы, если бы посредник сообщал истинное значение цены.

Модель **«Аккордная оплата труда»** (раздел 2.3) отражает ситуацию, в которой вознаграждение коллектива агентов за работу имеет следующий вид: каждый агент получает фиксированное вознаграждение, если агрегированный результат деятельности агентов (например, сумма их действий) превышает заданный норматив; вознаграждение равно нулю, если норматив не выполнен.

Агенты имеют иерархию представлений о нормативе. Помимо общего знания рассматриваются следующие варианты:

- представления агентов о нормативе попарно различны; тогда либо никто из агентов не работает, либо один агент выполняет весь объем работ;

- если структура информированности имеет глубину два, и каждый из агентов субъективно считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием, то множество возможных равновесных ситуаций максимально и совпадает со множеством индивидуально рациональных действий;

- если структура информированности имеет глубину два, и на ее нижнем уровне имеет место симметричное общее знание, то и в этом случае множество информационных равновесий является максимально возможным.

Полученные результаты полностью подтверждают интуитивно правдоподобный качественный вывод: в коллективе работников совместная работа возможна (является равновесием) лишь в том случае, когда имеется общее знание о том, какой объем работ необходимо выполнить для получения вознаграждения. Кроме того, незначительное изменение информационной структуры приводит к существенному изменению информационного равновесия.

Интересно, что возможно следующее стабильное информационное равновесие: каждый агент считает, что именно за счет его усилий выполнен весь объем работ, и это всем известно (и даже является общим знанием).

В модели **«Продавец и покупатель»** (раздел 2.4) продавец и покупатель, имеющие иерархию взаимных представлений о ценности продаваемого товара, должны придти к соглашению о цене, по которой произойдет сделка купли-продажи.

Необходимым условием заключения сделки оказывается следующее: с точки зрения обоих участников субъективные цены всех реальных и фантомных продавцов не превышают субъективных цен каждого из реальных и фантомных покупателей.

Наиболее простой структурой информированности, которую следует сформировать у покупателя и продавца для того, чтобы сделка произошла по требуемой для центра цене, является следующая – они должны быть уверены, что для всех их фантомных агентов (покупателя с точки зрения продавца, продавца с точки зрения покупателя и т.д.) ценность товара в точности равна цене, требуемой для центра.

В разделе 2.5 рассмотрена модель **«Заказчик и исполнитель»**, в которой неопределенным для заказчика параметром является известная исполнителю эффективность его работы. В этом случае, варьируя представления заказчика об эффективности работы исполнителя (то есть в рамках структуры информированности глубины два), любую стоимость договора (из определенного промежутка) можно сделать стабильным информационным равновесием.

В модели **«Коррупция»** (раздел 2.6) каждый из чиновников имеет субъективные представления о силе штрафов, накладываемых в случае обнаружения факта взяточничества и зависящих от «среднего уровня коррумпированности». Оказывается, что, если чиновники наблюдают средний уровень коррумпированности, то этот средний уровень в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о типах друг друга. При этом не важно, являются ли сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений чиновников друг о друге, и любое стабильное информационное управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

В разделе 2.7 описана модель **«Биполярный выбор»**, в которой рассматривается ситуация, когда агенты осуществляют выбор между двумя альтернативами, которые для общности называются позитивным и негативным полюсами. Например: кандидат на выборах (голосовать «за» или «против»), продукт или услуга (покупать или нет), этический выбор (поступить «хорошо» или «плохо») и пр.

Пусть имеются агенты трех типов: первые безусловно выбирают положительный полюс, вторые – выбирают положительный или отрицательный полюс в зависимости от того, как с их точки зрения поведут себя остальные агенты, третьи безусловно выбирают отрицательный полюс.

Предположим теперь, что центр имеет возможность воздействовать на ситуацию и стремится увеличить вероятность позитивного выбора в «популяции» в целом. Для этого центр может повлиять на агентов второй и третьей группы (агенты первой группы и так производят требуемый выбор). Во-первых, центр может повлиять на третью группу, переведя некоторую долю ее членов во вторую и затратив некий ресурс (например, финансовый). Во-вторых, центр может повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов о доле агентов третьего типа. В последнем случае влияние состоит в формировании у второй группы следующего представления: «определенная доля членов третьей группы перешла во вторую». Формирование такого представления также требует определенных затрат.

Иными словами, центр может изменить либо реальную, либо «фантомную», воображаемую, долю агентов третьего типа. При этом совокупный ресурс (бюджет), которым располагает центр, фиксирован. Задача центра состоит в следующем: распределить фиксированный ресурс на реализацию информационных воздействий таким образом, чтобы доля агентов, осуществивших позитивный выбор, была максимальной.

Оказывается, что если ресурса у центра «не очень много», то оптимальным управлением является, в зависимости от соотношения между параметрами, вложить весь этот ресурс либо в реальное, либо в «воображаемое» (происходящее в сознании агентов второго типа) изменение доли агентов третьего типа.

В модели **«Активная экспертиза»**, рассматриваемой в разделе 2.8, описывается ситуация принятия решений коллективом экспертов, каждый из которых имеет собственные представления о том, каким должен быть результат экспертизы и стремится соответствующим образом на него повлиять. Проблема манипулирования информацией со стороны агентов является традиционной в теории выбора [21, 36], задача же манипулирования результатами экспертизы со стороны центра – организатора экспертизы – до сегодняшнего дня практически не рассматривалась.

Пусть центр имеет возможность сформировать у экспертов представления о мнениях оппонентов. Тогда оказывается, что достаточно широкий диапазон коллективных решений может быть реализован как информационное равновесие (а иногда и единогласное решение) рефлексивной игры экспертов.

В модели **«Олигополия Курно»**, рассматриваемой в разделе 2.9, агенты выбирают объемы производства. Рыночная цена на продукцию убывает с ростом суммарного объема производства и зависит от спроса.

Если неопределенным параметром является спрос, и относительно него каждый из агентов имеет собственную иерархию представлений, то информационное равновесие существенным образом зависит от взаимных представлений агентов.

Если неопределенным параметром являются затраты агентов, то оказывается, что, наблюдая выбираемые действия, агенты могут в динамике придти к истинному информационному равновесию.

В разделе 2.10 рассматривается модель **«Формирование команды»**, в которой неопределенными параметрами являются эффективности деятельности агентов.

Под командой будем понимать коллектив (объединение людей, осуществляющих совместную деятельность и обладающих общими интересами), способный достигать цели автономно и согласованно, при минимальных управляющих воздействиях.

Существенными в определении команды являются два аспекта. Первый – достижение цели, то есть, конечный результат совместной деятельности является для команды объединяющим фактором. Второй аспект – автономность и согласованность деятельности – означает, что каждый из членов команды демонстрирует поведение, требуемое в данных условиях (позволяющих достичь поставленной цели), то есть то поведение, которого от него ожидают другие члены команды.

На сегодняшний день, несмотря на большое количество качественных обсуждений, практически отсутствуют формальные модели формирования команды и ее функционирования, поэтому в разделе 2.10 рассматривается модель формирования команды, основывающаяся на рассмотрении иерархий взаимных представлений агентов об эффективностях индивидуальной деятельности друг друга.

В рамках существующих представлений каждый агент может предсказать, какие действия выберут другие агенты, какие они понесут индивидуальные «затраты» и каковы будут суммарные затраты. Если выбор действий производится многократно, и наблюдаемая некоторым агентом реальность оказывается отличной от его представлений, то он вынужден корректировать свои представления и при очередном своем выборе использовать «новые» представления.

Анализ информационных равновесий показывает, что *командой* целесообразно считать множество агентов, выборы которых согласованы с иерархией их взаимных представлений друг о друге. Такое определение команды качественно близко к определениям стабильности и согласованности информационного управления, отвечающих за то, чтобы реальные действия или выигрыши агентов совпадали с ожидаемыми действиями или выигрышами.

Кроме того, можно сделать интересный вывод, что стабильность команды и слаженность ее работы может достигаться, в том числе, и при ложных представлениях членах команды друг о друге. Выход из ложного равновесия требует получения агентами дополнительной информации друг о друге.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что модели формирования команд и их деятельности, описываемые в терминах рефлексивных игр, не только отражают автономность и согласованность деятельности команды, но и позволяют ставить и решать задачи управления процессом формирования команды. Управленческие возможности заключаются в создании, во-первых, разнообразных ситуаций деятельности (обеспечивающих выявление существенных характеристик агентов – получаем модель научения) и, во-вторых, обеспечения максимальных коммуникаций и доступа членов команды ко всей существенной информации.

Модель **«Распределение ресурса»** (раздел 2.11) описывает ситуацию распределения центром ограниченного ресурса между агентами на основании заявок последних. В силу активности агентов, они способны к искажению информации, и в равновесии часть агентов (так называемые *диктаторы* [36]) получают оптимальное для себя количество ресурса, а остальные агенты – меньше оптимального.

Предположим, что агенты имеют иерархию представлений о том, кому из них какое количество ресурса необходимо. Оказывается, что стабильные неадекватные представления могут существовать только относительно агентов, не входящих в число диктаторов. При этом, однако, вектор распределяемых ресурсов оказывается таким же, как и в случае полного знания.

В модели **«Страхование»** (раздел 2.12) страхователи имеют иерархию взаимных представлений о вероятностях наступления страховых случаев и сообщают страховщику желательные размеры своих страховых взносов.

Оказывается, что информационным равновесием является любой набор заявок, обладающий следующим свойством: с точки зрения любого агента (как реального, так и фантомного) сумма заявок (реальных) страхователей равна ожидаемым суммарным потерям от страховых случаев, а каждая из заявок не превосходит ожидаемого страхового возмещения. При этом все равновесные действия реальных страхователей достигаются в рамках их субъективного общего знания друг о друге.

В разделе 2.13 рассматривается модель **«Реклама товара»**, в которой агент принимает решение о приобретении товара не только в зависимости от собственных предпочтений, но и от того, какая часть других агентов с его точки зрения собирается приобрести товар, или ожидает от него приобретения данного товара.

Оказывается, что большинство реальных рекламных кампаний могут быть описаны в рамках модели информационного управления с первым или вторым рангом рефлексии агентов.

Раздел 2.14 посвящен рассмотрению модели **«Предвыборная борьба»**, в которой информационное управление заключается в убеждении избирателей, поддерживающих определенных кандидатов, что их кандидаты не будут избраны и следует поддержать других кандидатов.

Оказывается, что получающееся в итоге такого управления информационное равновесие может быть стабильным, и, более того, – истинным.

Основная идея модели «**Конкурс**», рассматриваемой в разделе 2.15, заключается в том, что, влияя на представления участников конкурса о параметрах оппонентов, центр (организатор конкурса) может влиять на его результаты. Однако стабильным это информационное управление будет лишь в том случае, когда действия агентов совпадают с их действиями в условиях общего знания.

В разделе 2.16 рассматривается модель «**Нормы деятельности**». *Нормой* деятельности называется отображение множества возможных значений существенных параметров во множество допустимых векторов действий агентов. Другими словами, норма деятельности предписывает агенту, как ему вести себя в той или иной ситуации.

Задачей *институционального управления* (управления ограничениями и нормами деятельности [24]) является выбор допустимой согласованной нормы (то есть такой нормы, что предписываемое ею действие является информационным равновесием игры агентов), имеющей максимальную эффективность.

Оказывается, что за счет информационного управления, то есть воздействия на структуру информированности агентов, центр существенно расширяет свои возможности по институциональному управлению. Кроме того, достаточно ограничиться информационным воздействием на второй уровень структуры информированности агентов.

Завершив краткое описание моделей информационного управления, рассматриваемых во второй главе, приведем структуру изложения.

Структура изложения. Можно предложить несколько способов ознакомления с результатами настоящей работы. Первый способ – линейный – заключается в последовательном прочтении всех ее глав и разделов. Читатель, заинтересовавшийся той или иной конкретной прикладной моделью, может ограничиться прочтением введения и соответствующего раздела второй главы (все прикладные модели во второй главе рассматриваются независимо друг от друга).

ГЛАВА 1. РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ И ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В настоящей главе приводятся новые теоретические результаты исследования рефлексивных игр [34]. В том числе, в разделе 1.1 вводится определение рефлексивной игры и приводится описание ее решения – информационного равновесия. Раздел 1.2 содержит определение стабильности информационного равновесия – его свойства, заключающегося в том, что ожидания всех агентов относительно поведения оппонентов оправдываются. В разделе 1.3 стабильные информационные равновесия подразделяются на истинные (остающиеся равновесиями, когда агенты оказываются полностью и адекватно информированы друг о друге) и ложные. Условия существования истинных равновесий для случая, когда агенты наблюдают действия друг друга, рассмотрен в разделе 1.4. Проблемы динамики структур информированности – изменения представлений агентов на основе получаемой в ходе игры информации – обсуждаются в разделе 1.5. Заключительный раздел первой главы (раздел 1.6) посвящен формулировке задачи информационного управления – воздействия на информированность агентов, осуществляемого с целью побуждения их к выбору выгодных для центра информационных равновесий.

1.1. РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *агентов*, информированность которых описывается *информационной структурой* $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$, где $I_i = (\theta_i, \theta_{ij}, \theta_{ijk}, \ldots)$, $i, j, k \in N$, – структура информированности i-го агента, $i \in N$, $\theta_i \in \Omega$ – его представления о состоянии природы, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях j-го агента, $\theta_{ijk} \in \Omega$ – представления i-го агента о том, что j-ый агент думает о представлениях k-го агента и т.д. в общем случае до бесконечности [34].

Если задана структура информированности I, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и *фантомных* – то есть существующих в сознании других реальных и фантомных агентов). Выбор τ-агентом, где τ – некоторая последовательность индексов из множества N, своего действия x_τ в рамках гипотезы рационального поведения [34] определяется его структурой информированности I_τ, поэтому, имея эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет *рефлексию*). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Обозначим Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N, Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью, $|\sigma|$ – количество индексов в последовательности σ (для пустой последовательности $|\varnothing|$ принимается равным нулю).

Если «обычная» *игра в нормальной форме* определяется как кортеж $\Gamma = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}\}$, то *рефлексивной игрой* Γ_I называется игра, задаваемая кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, (f_i(\cdot))_{i \in N}, I\}$, где N – множество игроков (агентов), X_i – множество допустимых действий i-го игрока, $f_i(\cdot)\colon \Omega \times A' \to \Re^1$ – его целевая функция, $X' = \prod_{i \in N} X_i$, $i \in N$, I – структура информированности. Другими словами, отличие рефлексивной игры от игры в нормальной форме заключается в том, что в первой информированность игроков не является *общим знанием*[1], а описывается некоторой информационной структурой. Определим равновесие рефлексивной игры.

Набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, называется *информационным равновесием* [41], если выполнены следующие условия:

1. структура информированности I имеет конечную сложность ν, то есть, дерево I содержит конечный набор попарно различных поддеревьев;

2. $\forall \lambda, \mu \in \Sigma_+ \;\; \forall i \in N \; I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$;

3. $\forall i \in N$, $\forall \sigma \in \Sigma$

(1) $x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg}\max\limits_{y_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i1}^*, \ldots, x_{\sigma i,i-1}^*, y_i, x_{\sigma i,i+1}^*, \ldots, x_{\sigma in}^*)$.

Будем рассматривать регулярные структуры информированности [34], для задания которых введем вспомогательное понятие

---

[1] *Общим знанием называется факт, о котором известно всем агентам, а также всем агентам известно, что это всем известно и т.д. до бесконечности.*

регулярного конечного дерева (РКД), которое определим рекуррентно. Пусть в игре участвуют n агентов. Если (в простейшем случае) все агенты одинаково информированы, то структура информированности имеет сложность n и единичную глубину. Будем представлять эту ситуацию в виде дерева, состоящего из корневой вершины, n ребер и n висячих вершин. Далее РКД может «расти» следующим образом: к каждой висячей вершине τi, $\tau \in \Sigma$, присоединяется ровно $(n-1)$ ребро, при этом возникает $(n-1)$ висячая вершина τij, $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Построенное РКД будем интерпретировать так: если имеется висячая вершина τi, $\tau \in \Sigma$, то τi-агент одинаково информирован с τ-агентом (если τ – пустая последовательность, то τi-агент является реальным, и его субъективные представления совпадают с объективными).

Напомним, что, во-первых, максимальная глубина k_i РКД i-го реального агента в [34] названа *рангом* его *рефлексии*. Во-вторых, любая конечная регулярная информационная структура однозначно (с учетом *аксиомы автоинформированности* – $\forall\, i \in N$ $\forall\ \tau, \sigma \in \Sigma$ $\theta_{\tau i i \sigma} = \theta_{\tau i \sigma}$[34]) задается перечислением своих висячих вершин.

Обозначим множество параметрических (параметр – вектор $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \Omega^n$) равновесий Нэша

(3) $E_N(\boldsymbol{\theta}) = \{\{x_i\}_{i \in N} \in X' \mid \forall i \in N,\ \forall y_i \in X_i$

$$f_i(\theta_i, x_1, \ldots, x_n) \geq f_i(\theta_i, x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\}.$$

Предположим, что на нижнем уровне $\{\theta_{\tau ij}\}_{j \in N}$ конечной регулярной структуры информированности имеет место субъективное общее знание [34] фантомных агентов. Тогда с точки зрения τi-агента возможными являются равновесия их игры из множества $E_N(\{\theta_{\tau ij}\}_{j \in N})$. Определим множество наилучших ответов i-го агента на выбор оппонентами действий из множества $B \subseteq X_{-i}$ при множестве Ω возможных состояний природы:

(4) $BR_i(\Omega, B) = \bigcup\limits_{x_{-i} \in B,\, \theta \in \Omega} \operatorname{Arg}\max\limits_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i})$, $i \in N$,

а также следующие величины и множества

(5) $E_N = \bigcup\limits_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega^n} E_N(\boldsymbol{\theta})$,

(6) $X_i^0 = Proj_i\, E_N$, $i \in N$,

(7) $X_{-i}^{k} = \prod_{j \neq i} X_{i}^{k}$, $i \in N$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

где

(8) $X_{i}^{k} = BR_i(\Omega,\ X_{-i}^{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots, i \in N$.

Отображение $BR_i(\cdot, \cdot)$: $\Omega \times A_{-i} \to A_i$ называется *рефлексивным отображением* i-го агента, $i \in N$ [34]. В [34] доказано, что $X_{i}^{k} \subseteq X_{i}^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, i \in N$, то есть с ростом ранга рефлексии множества (8) возможных наилучших ответов агентов не сужаются.

Если структура информированности имеет конечную сложность, то можно построить *граф рефлексивной игры*, наглядно показывающий взаимосвязь между действиями агентов (как реальных, так и фантомных), участвующих в равновесии [34].

Вершинами этого ориентированного графа являются действия x_τ, $\tau \in \Sigma_+$, отвечающие попарно нетождественным структурам информированности I_τ, или компоненты структуры информированности θ_τ, или просто номер τ реального или фантомного агента, $\tau \in \Sigma_+$.

Между вершинами проведены дуги по следующему правилу: к каждой вершине $x_{\sigma i}$ проведены дуги от $(n - 1)$ вершин, отвечающих структурам $I_{\sigma ij}$, $j \in N \setminus \{i\}$. Если две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами, будем изображать одно ребро с двумя стрелками.

Подчеркнем, что граф рефлексивной игры соответствует системе уравнений (1) (то есть определению информационного равновесия), в то время как решения ее может и не существовать.

Итак, граф G_I рефлексивной игры Γ_I (см. определение рефлексивной игры выше), структура информированности которой имеет конечную сложность, определяется следующим образом:

- вершины графа G_I соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, то есть попарно нетождественным структурам информированности;

- дуги графа G_I отражают взаимную информированность агентов: если от одного агента (реального или фантомного) существует путь к другому агенту, то второй адекватно информирован о первом [34].

Если в вершинах графа G_I изображать представления соответствующего агента о состоянии природы, то рефлексивная игра Γ_I с конечной структурой информированности I может быть задана кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, G_I\}$, где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, G_I – граф рефлексивной игры.

Отметим, что во многих случаях рефлексивную игру более удобно (и наглядно) описывать именно в терминах графа G_I, а не дерева информационной структуры – см. многочисленные примеры в [34] и ниже.

1.2. СТАБИЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Одной из особенностей «классического» равновесия Нэша является его самоподдерживающийся характер – если игра повторяется несколько раз, и все игроки кроме i-го выбирают одни и те же равновесные действия, то и i-му нет резона отклоняться от своего равновесного действия. Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что представления всех игроков о реальности адекватны – значение состояния природы является общим знанием.

В случае информационного равновесия ситуация, вообще говоря, может быть иной. Действительно, в результате однократного разыгрывания игры может оказаться, что какие-то из игроков (или даже все) наблюдают не тот результат, на который они рассчитывали. Это может быть связано как с неверным представлением о состоянии природы, так и с неадекватной информированностью о представлениях оппонентов. В любом случае, самоподдерживающийся характер равновесия нарушается – если игра повторяется во второй раз, действия игроков могут измениться.

Однако в некоторых случаях самоподдерживающийся характер равновесия может иметь место и при различных (и, вообще говоря, неверных) представлениях агентов. Говоря неформально, это происходит тогда, когда каждый агент (как реальный, так и фантомный) наблюдает тот результат игры, которого ожидает. Для формального изложения нам понадобится дополнить описание рефлексивной игры.

Напомним, что рефлексивная игра задается кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, I\}$, где $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество участников игры (игроков, агентов), X_i – множество допустимых действий i-го агента, $f_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to \Re^1$ – его целевая функция, $i \in N$, I – структура информированности. Дополним эту конструкцию набором функций $w_i(\cdot)$: $\Omega \times X' \to W_i$, $i \in N$, каждая из которых отображает вектор (θ, x) в элемент w_i некоторого множества W_i. Этот элемент w_i и есть то, что i-й агент наблюдает в результате разыгрывания игры.

Функцию $w_i(\cdot)$ будем называть *функцией наблюдения* i-го агента. Будем считать, что функции наблюдения являются общим знанием среди агентов.

Если $w_i(\theta, x) = (\theta, x)$, т. е. $W_i = \Omega \times X'$, то i-й агент наблюдает как состояние природы, так и действия всех агентов. Если, напротив, множество W_i состоит из одного элемента, то i-й агент ничего не наблюдает.

Пусть в рефлексивной игре существует информационное равновесие x_τ, $\tau \in \Sigma_+$ (напомним, что τ – произвольная непустая конечная последовательность индексов из N). Зафиксируем $i \in N$ и рассмотрим i-го агента. Он ожидает в результате игры пронаблюдать величину

(1) $w_i (\theta_i, x_{i1}, ..., x_{i,i-1}, x_i, x_{i,i+1}, \dots, x_{in})$.

На самом же деле он наблюдает величину

(2) $w_i (\theta, x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Поэтому требование стабильности для i-агента означает совпадение величин (1) и (2) (напомним, что эти величины являются элементами некоторого множества W_i).

Пусть величины (1) и (2) равны, т. е. i-агент и после разыгрывания игры не сомневается в истинности своих представлений. Однако является ли это достаточным основанием для того, чтобы он и в следующий раз выбрал то же действие x_i? Ясно, что ответ отрицательный, что продемонстрируем на следующем примере.

Пример 1. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$), приведенными на рисунке 1,

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (0,1) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 1. Матрицы выигрышей в примере 1

а граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на рисунке 2.

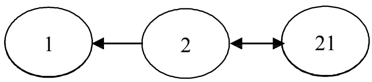

Рис. 2. Граф рефлексивной игры в примере 1

Пусть при этом $\theta = \theta_1 = 1$, $\theta_2 = \theta_{21} = 2$, и каждый агент наблюдает свой выигрыш (т.е. функция наблюдения агента совпадает с его функцией выигрыша). Ясно, что информационным равновесием является набор $x_1 = x_2 = x_{21} = 2$, т. е. первый и второй агенты, а также 21-агент выбирают вторые действия. Однако реальное состояние природы $\theta = 1$ становится известным второму агенту после розыгрыша игры (и получения им выигрыша 0 вместо ожидаемого 2). Поэтому в следующий раз второй агент выберет действие $x_2 = 1$, что побуждает и первого агента изменить свое действие (выбрать $x_1 = 1$). •[1]

Таким образом, для стабильности равновесия необходимо чтобы и ij-агент, $i, j \in N$, наблюдал «нужную» величину. Он ожидает в результате игры пронаблюдать

(3) $w_j\,(\theta_{ij}, x_{ij1}, \ldots, x_{ij,j-1}, x_{ij}, x_{ij,j+1}, \ldots, x_{ijn})$.

На самом же деле (т. е. i-субъективно, ведь ij-агент существует в сознании i-агента) он наблюдает величину

(4) $w_j\,(\theta_i, x_{i1}, \ldots, x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}, \ldots, x_{in})$.

Поэтому требование стабильности для ij-агента означает совпадение величин (3) и (4).

В общем случае, т. е. для τi-агента, $\tau i \in \Sigma_+$, условие стабильности определим следующим образом.

---

[1] *Символ "•" здесь и далее обозначает окончание примера, доказательства и т.д.*

Определение. Информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I, если для любого $\tau i \in \Sigma_+$ выполняется

(5) $w_i\,(\theta_{\tau i}, x_{\tau i1}, \ldots, x_{\tau i,i\text{-}1}, x_{\tau i}, x_{\tau i,i+1}, \ldots, x_{\tau in}) =$

$= w_i\,(\theta_\tau, x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau,i\text{-}1}, x_{\tau i}, x_{\tau,i+1}, \ldots, x_{\tau n})$.

Информационное равновесие, не являющееся стабильным, будем называть *нестабильным*. В частности, информационное равновесие в примере 1 является нестабильным.

Утверждение 1. Пусть структура информированности I имеет сложность ν, и существует информационное равновесие $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (5) содержит не более чем ν попарно различных условий.

Доказательство. Рассмотрим две любые тождественные [34] структуры информированности: $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$. Поскольку $x_{\tau i}$ – равновесие, имеем $\theta_{\lambda i} = \theta_{\mu i}$, $x_{\lambda i} = x_{\mu i}$, $I_{\lambda ij} = I_{\mu ij}$, $x_{\lambda ij} = x_{\mu ij}$ для любого $j \in N$. Поэтому условия стабильности (5) для λi- и μi-агентов тождественно совпадают. Так как имеется ν попарно различных структур информированности, количество попарно различных условий (5) не превышает ν. •

1.3. ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Стабильные информационные равновесия будем разделять на два класса – истинные и ложные равновесия. Определение предварим примером.

Пример 2. Рассмотрим игру, в которой участвуют три агента с целевыми функциями

$$f_i(r_i, x_1, x_2, x_3) = x_i - \frac{x_i(x_1 + x_2 + x_3)}{r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$. Целевые функции являются общим знанием с точностью до типов агентов – параметров $r_i > 0$. Вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ типов агентов может интерпретироваться как состояние природы. При этом здесь и далее подразумевается, что свой собственный тип известен каждому агенту достоверно.

Граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на рисунке 3, при этом $r_2 = r_3 = r$, $r_{21} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = c$. Общим знанием является следующее: каждый игрок знает свой тип и наблюдает сумму действий оппонентов.

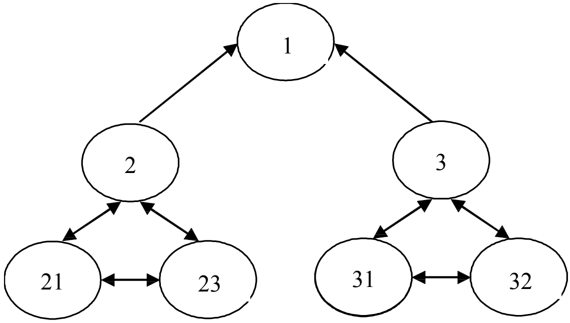

Рис. 3. Граф рефлексивной игры в примере 2

Нетрудно вычислить единственное информационное равновесие этой игры:

(1) $x_2 = x_3 = (3\,r - 2\,c) / 4$,

$x_{21} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = (2\,c - r) / 4$,

$x_1 = (2\,r_1 - 3\,r + 2\,c) / 4$.

Условия стабильности (см. выражение (5) предыдущего раздела) в данном случае выглядят следующим образом:

(2) $x_{21} + x_{23} = x_1 + x_3$, $x_{31} + x_{32} = x_1 + x_2$.

Записаны условия для 2- и 3-агентов, поскольку для 1-, 21-, 23-, 31-, 32-агентов они тривиальны.

Подставляя (1) в (2), получаем, что необходимым и достаточным условием стабильности является равенство

(3) $2\,c = r_1 + r$.

Пусть условие (3) выполнено. Тогда равновесные действия реальных агентов таковы:

(4) $x_2 = x_3 = (3\,r - r_1) / 4$, $x_1 = (3\,r_1 - 2\,r\,) / 4$.

Предположим теперь, что типы агентов стали общим знанием (см. рисунок 4).

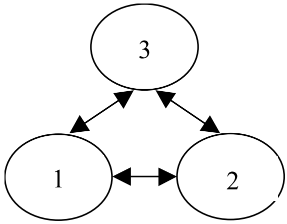

Рис. 4. Общее знание в примере 2

Нетрудно убедиться, что в случае общего знания единственным равновесием будет (4). •

Таким образом, при выполнении условия (3) имеет место несколько парадоксальная ситуация. Представления второго и третьего агентов не соответствуют действительности (рисунок 3), однако их равновесные действия (4) в точности такие, как были бы в случае одинаковой информированности (рисунок 4). Назовем такое стабильное информационное равновесие истинным.

Определение. Пусть набор действий $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ (или о наборе $(r_1, \ldots, r_n)$ типов агентов).

Из определения, в частности, следует, что в условиях общего знания любое информационное равновесие является истинным. Рассмотрим еще один случай, когда этот факт имеет место.

Утверждение 2. Пусть целевые функции агентов имеют вид

$$f_i\,(r_i, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i\,(r_i, x_i, z_i(x_{-i})),$$

а функции наблюдения – вид $w_i(\theta, x) = z_i(x_{-i})$, $i \in N$. Содержательно это означает следующее: выигрыш каждого агента зависит от его типа, его действия и функции наблюдения, зависящей от действий остальных агентов (но не от их типов).

Тогда любое стабильное равновесие является истинным.

Доказательство. Пусть $x_{\tau i}$, $\tau i \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие, и условия утверждения выполнены. Тогда для любого $i \in N$ имеем:

$$x_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{i,-i}) = \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} \varphi_i\,(r_i, y_i, z_i(x_{i,-i})).$$

В силу стабильности справедливо равенство $z_i(x_{i,-i}) = z_i(x_{-i})$, поэтому

$$x_i \in \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} \varphi_i\,(r_i, y_i, z_i(x_{-i})) = \operatorname*{Arg\,max}_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{-i})\,.$$

Последнее соотношение означает (в силу произвольности $i \in N$), что набор $(x_1, \ldots, x_n)$ является равновесным при полной информированности. •

Определение. Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем *ложным*.

Таким образом, ложное равновесие – это такое стабильное информационное равновесие, которое не является равновесием в случае одинаковой информированности агентов (в условиях общего знания).

Пример 3. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$) на рисунке 5.

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \begin{pmatrix} (2,2) & (4,1) \\ (1,4) & (3,3) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Рис. 5. Матрицы выигрышей в примере 3

Пусть, далее, в реальности $\theta = 2$, однако оба агента считают общим знанием $\theta = 1$. Каждый агент наблюдает пару (x_1, x_2), которая и является функцией наблюдения.

Информационным равновесием является выбор каждым агентом действия 1. Если бы общим знанием было бы реальное состояние природы, равновесным был бы выбор каждым агентом действия 2. Таким образом, выигрыши агентов в информационном равновесии оказываются б**о**льшими, чем если бы общим знанием было реальное состояние природы. •

1.4. СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ АГЕНТОВ

В разделе 1.1 приведено определение информационного равновесия, которое может интерпретироваться как набор субъективных равновесий – i-й (реальный) агент, $i \in N$, обладающий структурой информированности I_i, определяет набор действий $(x^*_{i\sigma}(I_{i\sigma}))_{\sigma \in \Sigma}$, который является равновесием с его субъективной точки зрения. В частности, он ожидает от j-го реального агента, $j \in N$, выбора действия $x^*_{ij}(I_{ij})$ (напомним, что фантомный ij-агент является образом j-го агента в представлениях i-го).

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда функцией наблюдения является вектор действий всех агентов:

$$w_i(\theta, x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда *стабильным* является информационное равновесие $x^* = (x^*_{\sigma i})_{i \in N,\ \sigma \in \Sigma}$, удовлетворяющее следующему соотношению:

(1) $\forall\ i \in N, \forall\ \sigma \in \Sigma\ \ x^*_{\sigma i} = x^*_i$.

Соотношение (1) означает, что действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим (реальным или фантомным) агентом.

Введем следующее предположение относительно целевых функций $f_i(\cdot)$ и множеств Ω, X_i:

А.1. $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$, для любых представлений $\theta_{\sigma i} \in \Omega$ и $\theta'_{\sigma i} \in \Omega$ таких, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x^*_{\sigma i,-i} \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$

(2) $BR_i(\theta_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing$,

где $BR_i(\theta_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x^*_{\sigma i 1}, \ldots, x^*_{\sigma i, i-1}, y_i, x^*_{\sigma i, i+1}, \ldots, x^*_{\sigma i n})$.

<u>Утверждение 3.</u> Пусть выполнено предположение А1 и существует информационное равновесие x^*. Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только в том случае, если структура информированности игры такова, что

(3) $\forall\ i \in N, \forall\ \sigma \in \Sigma\ \ \theta_{\sigma i} = \theta_i$.

Доказательство. Пусть выполнено (3). Тогда структура информированности игры имеет единичную глубину и $\forall\, i \in N$, $\forall\, \sigma \in \Sigma\ \ I_{\sigma i} = I_i$, откуда сразу следует равенство $x^*_{\sigma i} = x^*_i$ (см. второе условие в определении информационного равновесия). Необходимость доказана.

Достаточность докажем методом «от противного». Пусть выполнено условие (1), но существуют такие $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta_i$.

Поскольку x_i^* и $x_{\sigma i}^*$ являются компонентами информационного равновесия x^*, они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(\theta_i, x_{i,-i}^*), \\ x_{\sigma i}^* \in BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i,-i}^*). \end{cases}$$

С учетом (1) последнюю систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(\theta_i, x_{-i}^*), \\ x_i^* \in BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{-i}^*), \end{cases}$$

откуда следует, что $BR_i(\theta_i,\ x_{-i}^*) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i},\ x_{-i}^*) \neq \varnothing$.

Пришли к противоречию с (2). •

Следствие. Если выполнено предположение А.1, то стабильные информационные равновесия могут возникать только в рамках структур информированности, удовлетворяющих (3), то есть в рамках структур информированности единичной глубины. При этом, в частности, невозможны ложные равновесия.

Уместно отметить аналогию между условием А.1 и «условием равноправия функций предпочтения» в [6, с. 259].

При ослаблении требования (1) результат утверждения 3 теряет силу. Например, если считать «стабильным» информационное равновесие x^*, удовлетворяющее свойству

(4) $\forall i, j \in N \;\; x_{ji}^* = x_i^*$

(действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим реальным агентом), то в рамках предположения А.1 существуют структуры информированности, не удовлетворяющие (3), при которых соответствующие информационные равновесия «стабильны» в смысле (4).

Утверждение 3 важно как с точки зрения задач анализа, так и с точки зрения задач синтеза. Действительно, оно позволяет при исследовании свойств информационных равновесий для определенного класса ситуаций (определяемых предположением А1) выделять при помощи условия (3) множества информационных структур, при которых информационные равновесия могут быть стабильными. С точки зрения задачи информационного управления, утверждение 3 накладывает ограничения на множество управляющих воздействий, приводящих к стабильному равновесию игры управляемых субъектов.

Пусть теперь каждый из n агентов характеризуется своим типом $r_i \geq 0$, $i \in N$, и каждый агент знает свой тип, но, вообще говоря, не знает тип остальных агентов. Будем считать, что целевая функция i-го агента имеет вид $f_i(r_i, x)$, т. е. зависит от его собственного типа, но не от типов оппонентов. Относительно типов каждый из агентов имеет иерархию представлений, состоящую из следующих компонент: r_{ij} – представление i-го агента о типе j-го агента, r_{ijk} – представление i-го агента о представлениях j-го агента о типе k-го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Содержательное различие между обсуждениями в терминах неопределенного параметра θ и в терминах вектора типов $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Re_+^n$ состоит в следующем. В первом случае иногда естественным является предположение о том, что значение θ наблюдается агентами, которые могут на основании этого корректировать свои представления. Во втором случае предполагается, что вектор типов $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ непосредственно не наблюдаем, поэтому агенты могут корректировать свои представления лишь на основании наблюдаемых действий оппонентов. При этом, согласно утверждению 2, все стабильные равновесия являются истинными. Поэтому сосредоточим внимание на исследовании стабильности. Условие (1) и здесь будет задавать стабильное информационное равновесие, а предположение А.1 и утверждение 3 перепишем следующим образом.

А.1$^{\mathbf{r}}$. $\forall\ i \in N$, $\forall\ \sigma \in \Sigma$, для любых представлений $r_{\sigma i}$ и $r'_{\sigma i}$ таких, что $r_{\sigma i} \neq r'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x^*_{\sigma i,-i} \in X_{-i}$

$$BR_i(r_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) \cap BR_i(r'_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \varnothing,$$

где $BR_i(r_{\sigma i},\ x^*_{\sigma i,-i}) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y_i \in X_i} f_i(r_{\sigma i}, x^*_{\sigma i1}, \ldots, x^*_{\sigma i,i-1}, y_i, x^*_{\sigma i,i+1}, \ldots, x^*_{\sigma in})$.

Утверждение 3$^{\text{r}}$. Пусть выполнено предположение А1$^{\text{r}}$ и существует информационное равновесие x^*. Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только в том случае, если структура информированности игры такова, что

$$\forall\, i \in N,\ \forall\, \sigma \in \Sigma\ \ r_{\sigma i} = r_i.$$

Доказательство утверждения 3^r дословно повторяет доказательство утверждения 3, надо лишь заменить θ на r и А1 на А1^r.

Определим следующие множества:

- множество Ψ пар (x, I), таких, что $x \in X'$, $I \in \mathfrak{I}$ и вектор x является информационным равновесием при структуре информированности I, где $\mathfrak{I}$ – множество всевозможных структур информированности (отметим, что $\mathfrak{I}$ зависит от вектора типов r).
- множество $\Psi_X(I) \subseteq X'$ векторов действий агентов, являющихся информационными равновесиями в рамках структуры информированности I;
- множество $\Psi_I(x) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, в рамках которых вектор x действий агентов является информационным равновесием (решение обратной задачи).

Определим также подмножества этих множеств, выделяемые требованием стабильности информационного равновесия:

- множество Ψ^s пар (x, I), таких, что $x \in X'$, $I \in \mathfrak{I}$ и вектор x является стабильным информационным равновесием при структуре информированности I;
- множество $\Psi_X^s(I) \subseteq X'$ векторов действий агентов, являющихся стабильными информационными равновесиями в рамках структуры информированности I;
- множество $\Psi_I^s(x) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, в рамках которых вектор x действий агентов является стабильным информационным равновесием.

Обозначим: I_0 – структуру информированности единичной глубины, которая соответствует тому, что вектор r истинных типов агентов является общим знанием. Заметим, что $\Psi_X^s(I_0) = \Psi_X(I_0)$ – любое информационное равновесие, соответствующее общему знанию, является стабильным.

В терминах введенных множеств *истинное равновесие* образует любая пара $(x, I) \in \Psi^s$ такая, что $(x, I_0) \in \Psi$. Содержательно это означает, что вектор действий x останется (стабильным) информационным равновесием, если вектор типов станет общим знанием.

Ложное равновесие образует любая пара $(x, I) \in \Psi^s$ такая, что $(x, I_0) \notin \Psi$. Содержательно это означает, что вектор действий x перестанет быть информационным равновесием, если вектор типов станет общим знанием.

Пусть $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ – стабильное равновесие. Определим для каждого $i \in N$ следующие множества:

$$R_i = \{r_i \in \Re_+ \mid x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*)\}.$$

Эти множества не зависят от структуры информированности. Поэтому они позволяют сформулировать два утверждения, проясняющие связь между структурой информированности и стабильностью равновесия.

<u>Утверждение 4.</u> Пусть x^* – стабильное равновесие. Если для любого $i \in N$ множество R_i состоит ровно из одного элемента, то вектор типов является общим знанием (и, соответственно, равновесие истинное).

Доказательство. Пусть x^* – стабильное равновесие и для любого $i \in N$ множество R_i состоит ровно из одного элемента. Предположим, что существуют такие i и σ, что $r_{\sigma i} \neq r_i$. Из стабильности равновесия вытекает, что

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*), \\ x_i^* \in BR_i(r_{\sigma i}, x_{-i}^*), \end{cases}$$

откуда по определению множества R_i вытекает, что несовпадающие $r_{\sigma i}$ и r_i принадлежат этому множеству. Получили противоречие с тем, что оно состоит из одного элемента. •

<u>Утверждение 5.</u> Если равновесие x^* является стабильным при некоторой структуре информированности, то для элементов этой структуры при любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется $r_{\sigma i} \in R_i$.

Доказательство. Пусть равновесие x^* является стабильным. Тогда $\forall\ i \in N\ \forall\ \sigma \in \Sigma$ выполняется $x_i^* \in BR_i(r_{\sigma i}, x_{-i}^*)$, т. е. $r_{\sigma i} \in R_i$. •

Утверждение 5 накладывает довольно жесткие требования на структуру информированности: если равновесие является стабильным, то все типы реальных агентов, а также представления о типах принадлежат множествам R_i.

1.5. ДИНАМИКА СТРУКТУР ИНФОРМИРОВАННОСТИ

Рассмотрим динамику поведения агентов – *повторяющуюся рефлексивную игру* (ПРИ)[1], заключающуюся в многократном повторении рефлексирующими агентами актов выбора своих действий. Динамические эффекты могут возникнуть, если в процессе игры агенты получают новую информацию, свидетельствующую о необходимости коррекции своих представлений – изменения значений компонентов структуры информированности. Таким образом, в ПРИ на каждом шаге выбор каждого агента состоит из двух этапов – коррекции компонентов структуры информированности и выбора действия, являющегося субъективным информационным равновесием в рамках новой структуры его информированности.

Определим *историю игры* – совокупность выбранных к рассматриваемому моменту времени действий агентов и реализовавшихся значений их целевых функций. Множество всевозможных историй игры, которые могут сложиться на очередном шаге, обозначим H. Каждый из агентов обладает в общем случае только частью информации об объективной истории игры – ему достоверно известны его собственные действия и значения его целевой функции, а также, быть может, действия и/или значения целевых функций некоторых оппонентов и/или какие-либо другие агрегированные характеристики результатов деятельности всех или части агентов. Назовем эту информацию $h_i \in H_i \subseteq H$ *субъективной историей игры* i-го агента.

На основании своей субъективной истории игры каждый агент оценивает правильность своих представлений, корректирует их тем или иным образом, и на следующем шаге выбирает действия на основании «новых» представлений.

В силу гипотезы рационального поведения активных агентов при выборе действий каждый из них стремится, чтобы его действие было наилучшим ответом на прогнозируемую обстановку в рамках имеющихся представлений о значении состояния природы. Поэтому *равновесием повторяющейся рефлексивной игры* можно считать такую совокупность структур информированности игры в

---

[1] *Отметим, что повторяющуюся рефлексивную игру не следует трактовать как игру в развернутой форме, так как в первой на каждом шаге все агенты выбирают свои действия одновременно и независимо.*

целом и векторов действий реальных агентов, что каждое из действий принадлежит соответствующему субъективному равновесию, определенному на основании данной структуры информированности. Такую совокупность представлений агентов и их действий будем называть *согласованной* – действия агентов совпадают с прогнозируемыми в рамках сложившейся структуры информированности и наоборот: структура информированности принадлежит множеству решений обратной задачи информационного управления [24].

Формализуем приведенные выше качественные рассуждения о динамике поведения агентов.

Выше были определены три множества: множество Ψ пар (x, I), таких, что $x \in X'$, $I \in \mathfrak{I}$ и вектор x является информационным равновесием при структуре информированности I, где $\mathfrak{I}$ – множество всевозможных РКД; множество $\Psi_X(I) \subseteq X'$ векторов действий агентов, являющихся информационными равновесиями в рамках структуры информированности I; множество $\Psi_I(x) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, в рамках которых вектор x действий агентов является информационным равновесием.

В более общем случае, обозначив $h(x) \subseteq H$ – множество всевозможных историй игры, которые могут сложиться при векторе действий $x \in X'$ на очередном шаге, $X(h)$ – множество векторов действий агентов, приводящих к реализации истории игры $h \in H$, определим:

- множество Ψ_h пар (h, I), таких, что $h \in H$, $I \in \mathfrak{I}$, $\exists\, x \in X'$: $h \in h(x)$ и вектор x является информационным равновесием при структуре информированности I;
- множество $\Psi_h(I) = \bigcup\limits_{x \in \Psi(I)} h(x) \subseteq H$ историй игры, реализуемых векторами действий, являющихся информационными равновесиями при структуре информированности I;
- множество $\Psi_h(h) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, в рамках которых существует вектор x действий агентов, являющийся информационным равновесием и приводящий к реализации данной истории, то есть $h \in h(x)$.

Определим *модель динамики информационной структуры* i-го агента, $i \in N$, как отображение $G_i(I_i, \Psi_h(h_i))$: $\mathfrak{I} \times 2^{\mathfrak{I}} \to \mathfrak{I}$ текущей информационной структуры i-го агента и множества $2^{\mathfrak{I}}$ информационных структур $\Psi_h(h_i)$, согласованных с наблюдаемой им на рассматриваемом шаге[1] историей игры h_i, во множество информационных структур.

Содержательно модель динамики информационной структуры описывает, как агент изменяет иерархию своих представлений в зависимости от ее текущего значения и множества информационных структур, которые согласованы с субъективной истории игры.

Формально последовательность информационных структур i-го агента и последовательность его действий при заданной начальной информационной структуре I_i^0 можно записать в следующем виде:

(1) $I_i^t \in G_i(I_i^{t-1}, \Psi_h(h_i^{t-1})), i \in N, t = 1, 2, \ldots,$.

(2) $x_i^t \in \Psi_X(I_i^t),$

Равновесие ПРИ формально можно определить как множество векторов x с компонентами

(3) $x_i \in \Psi_X(I_i), i \in N,$

и информационных структур

(4) $I_i \in G_i(I_i, \Psi_h(h_i(x_i))), i \in N.$

Как и в любых моделях динамики коллективного поведения [20, 22, 23, 35], при исследовании ПРИ возникают следующие задачи:

- получение условий существования равновесия ПРИ и его единственности;
- изучение устойчивости и скорости сходимости последовательностей (1) и (2) в зависимости от модели $G(\cdot)$ динамики информационной структуры;
- анализ областей притяжения различных равновесий и др.

Качественно сложность теоретического анализа свойств ПРИ обусловлена тем, что в них изменяются информационные структуры, и для одной и той же статической рефлексивной игры существует множество динамических аналогов, порождаемых разнообразными моделями динамики информационных структур. Кроме того, различные модели динамики информационных структур

---

[1] *Отметим, что в рамках рассматриваемой модели каждый агент изменяет свою структуру информированности на основании только наблюдаемых на текущем шаге результатов, а не на основании всей предшествующей траектории.*

порождают различные определения равновесия ПРИ (см. выражение (3)) – одна и та же пара (x, I) может быть равновесием ПРИ с одной моделью динамики информационных структур и не быть равновесием ПРИ с другой моделью.

Общие результаты исследования ПРИ на сегодняшний день отсутствуют, поэтому ниже (во второй главе) приведен анализ простейших частных случаев.

1.6. ЗАДАЧА ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Управлением, в соответствии с определением, приведенным в [7, 13], называется воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения. Управляемая система – множество рациональных агентов, принимающих самостоятельные решения о выбираемых действиях – в рамках теоретико-игровой модели (см. раздел 1.1) описывается множеством агентов N, совокупностью их целевых функций $(f_i(\cdot))_{i \in N}$, допустимых множеств $(X_i)_{i \in N}$ и информированностью I. Значит, управление фиксированным множеством агентов может заключаться в воздействии на: целевые функции (*мотивационное управление* [29]), допустимые множества (*институциональное управление* [24]) и информированность (*информационное управление* [33, 34]). Так как настоящая работа посвящена прикладным моделям именно информационного управления, рассмотрим его более подробно.

С теоретико-игровой точки зрения задача управления состоит в том, чтобы сформировать для управляемых субъектов (агентов) такую игру, чтобы ее исход был наиболее благоприятным для управляющего органа (центра). Соответственно, задачу информационного управления можно неформально (качественно) сформулировать следующим образом: найти такую структуру информированности, чтобы исход рефлексивной игры агентов (информационное равновесие) был бы наиболее благоприятен для центра.

Отметим, что за рамками наших рассмотрений остается вопрос о том, каким образом центру следует «убедить» агентов в том, что имеют место те или иные состояния природы и представления оппонентов. Различные способы такого убеждения рассмотрены, например, в [14, 18, 34, 40] (см. также принцип доверия в [33] и ссылки и обсуждение в [34]).

Перейдем к формальной постановке задачи. Пусть на множестве действий агентов и структур информированности задана целевая функция центра $\Phi(x, I)$. Пусть, далее, центр может сформировать любую структуру информированности из некоторого множества $\mathfrak{I}'$. При структуре информированности $I \in \mathfrak{I}'$ исходом игры является информационное равновесие из множества $\Psi_X(I)$. Множество $\Psi_X(I)$ может быть пустым, тогда центр, ввиду отсутствия равновесия, не может рассчитывать на тот или иной исход игры. Поэтому введем множество допустимых структур, для которых существует хотя бы одно равновесие: $\mathfrak{I} = \{I \in \mathfrak{I}' \mid \Psi_X(I) \neq \varnothing\}$.

Если при заданной структуре $I \in \mathfrak{I}$ множество информационных равновесий $\Psi_X(I)$ состоит более чем из одного элемента, то обычно (см., например, [12]) принимается одно из следующих двух предположений:

1. *гипотеза благожелательности* (ГБ), состоящая в том, что у центра есть возможность обеспечить выбор агентами «нужного» равновесия;
2. *принцип максимального гарантированного результата* (МГР), состоящий в том, что центр рассчитывает на наихудшее для себя равновесие игры агентов.

В соответствии с ГБ и МГР получаем, соответственно, постановку задачи информационного управления в двух вариантах:

(1) $\max\limits_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow[I \in \mathfrak{I}]{} \max$;

(2) $\min\limits_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow[I \in \mathfrak{I}]{} \max$.

Разумеется, в случае, когда для любого $I \in \mathfrak{I}$ множество $\Psi_X(I)$ состоит ровно из одного элемента, (1) и (2) совпадают.

Задачу (1) (либо (2)) будем называть *задачей информационного управления в форме целевой функции*.

Опишем теперь задачу информационного управления в несколько иной постановке, не зависящей от целевой функции центра. Пусть центр стремится добиться от агентов выбора вектора действий $x \in X'$. Зададимся вопросом: для каких векторов x и каким образом (т. е. при помощи формирования какой структуры I) центр может это сделать? Иначе говоря, вторая возможная постановка задачи информационного управления состоит в нахождении *множества достижимости* – множества векторов $x \in X'$, для каждого из которых множество $\Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$

(3) непусто, либо

(4) состоит ровно из одного элемента,

а также соответствующих допустимых структур информированности $I \in \Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$ для каждого такого вектора x. Условие (3) соответствует ГБ, условие (4) – МГР,

Задачу (3) (либо (4)) будем называть *задачей информационного управления в форме множества достижимости*.

Еще раз подчеркнем, что вторая постановка не зависит от целевой функции центра, и отражает лишь его возможность при помощи информационного управления привести систему в то или иное состояние.

Как в первой, так и во второй постановке центр может либо интересоваться, либо не интересоваться стабильностью получившегося информационного равновесия. Если требуется осуществить стабильное информационное управление, т. е. привести систему в стабильное информационное равновесие, то в приведенных выше постановках требуется заменить Ψ на Ψ^s и термин «равновесие» на «стабильное равновесие».

Подытожим вышесказанное. Задачу информационного управления будем рассматривать

- в форме целевой функции либо множества достижимости;
- с использованием гипотезы благожелательности (ГБ) либо принципа максимально гарантированного результата (МГР);
- с требованием стабильности или без требования стабильности.

Выбор одного из этих восьми вариантов определяется конкретной моделируемой ситуацией. Однако в любом случае необходимым (и, как показывает опыт, наиболее сложным и трудоемким для исследователя) этапом является установление связи между структурой информированности и вектором действий агентов, т. е. исследование информационного равновесия.

Во второй главе рассмотрен ряд частных моделей информационного управления в различных прикладных областях, и для каждой модели мы будем оговаривать наиболее адекватную (с точки зрения авторов) постановку задачи.

ГЛАВА 2. ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ

В настоящей главе рассматривается набор независимых друг от друга прикладных моделей информационного управления. Большинство из них отражают воздействия на информированность экономических агентов (производителей и покупателей продукции, заказчиков и исполнителей работ и т.д.), некоторые же – на информированность участников предвыборной борьбы, избирателей и т.д.

2.1. ИГРЫ ПОИСКА

Игра поиска в условиях общего знания. Поиск активно уклоняющегося объекта является типичным примером конфликтного взаимодействия, который может быть исследован методами теории игр. Простейшие игровые задачи поиска были исследованы в конце 60-х годов XX в. (в частности, в монографии [1]). Общей теории игр поиска на данный момент не существует; ряд частных результатов изложен в работе [37]; см. также [45] и обзор в монографии [16].

Рассмотрим *игру поиска*, в которой участвуют два игрока, управляющие точечными объектами: ищущим объектом 1 и уклоняющимся объектом 2 (в дальнейшем будем отождествлять игроков и управляемые ими объекты). Поисковой областью, где перемещаются объекты, является прямоугольник евклидовой плоскости $\{(x, y) \mid 0 \le x \le D, 0 \le y \le 2L)\}$, $D, L > 0$. Ищущий объект начинает движение из точки (D, L) и движется по отрезку $y = L$ с выбранной им скоростью α, $0 \le \alpha \le A$, $A > 0$. Он обнаруживает объект 2 в некоторый момент, если расстояние между объектами в этот момент сократилось до величины $l = \theta - k\,\alpha$, $k > 0$. Содержательно величина l интерпретируется как «зоркость» ищущего (которая уменьшается с ростом его скорости) – расстояние, на котором он может обнаружить уклоняющегося. Уклоняющийся объект может выбрать точку в прямоугольнике, для своего местоположения. Ясно, что это должна быть точка на отрезке $y = 0$ либо на отрезке $y = L$. Поэтому можно считать, что выбор объекта 2 определяется одним числом δ, $0 \le \delta \le D$, – абсциссой точки, где он «прячется».

Ищущий объект стремится обнаружить уклоняющегося, причем за как можно меньшее время. Если обнаружение не происходит, то для ищущего более выгодно, чтобы уклоняющийся находился от него на как можно меньшем расстоянии (это расстояние характеризуется выбором δ).

С учетом вышесказанного целевую функцию ищущего зададим следующим образом:

$$(1)\; f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D-\delta}{\alpha}, & \theta \ge L + k\alpha, \\ -\frac{D}{\alpha} - c(\delta), & \theta < L + k\alpha, \end{cases}$$

где $M > 0$ – «премия» за обнаружение (которое происходит, если $l \ge L$), а $c(\delta)$ – возрастающая функция, для которой $c(0) = 0$, характеризующая потери игрока 1 в случае, если обнаружение не происходит. Игра является антагонистической, так что интересы игрока 1 строго противоположны интересам игрока 2.

Таким образом, игра полностью характеризуется целевой функцией $f(\alpha, \delta)$, положительными параметрами D, L, A, M, k, θ и функцией $c(\delta)$, которые будем считать общим знанием для первого и второго игроков.

Для нахождения седловой точки игры (1) найдем $\max\limits_{\alpha} \min\limits_{\delta} f(\alpha, \delta)$. Имеем:

$$\min_{\delta} f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D}{\alpha}, & \theta \ge L + k\alpha, \\ -\frac{D}{\alpha} - c(D), & \theta < L + k\alpha, \end{cases}$$

$$\max_{\alpha} \min_{\delta} f(\alpha, \delta) = \max\{M - \tfrac{D}{\alpha^0}, -\tfrac{D}{A} - c(D)\},$$

где $\alpha^0 = (\theta - L)/k$ – скорость, при которой $l = L$, т. е. обнаружение происходит наиболее «экономным» образом.

Далее будем считать выполненными следующие условия:

$$(2)\; \alpha^0 \le A,\; M - \tfrac{D}{\alpha^0} \ge -\tfrac{D}{A}.$$

Первое из условий (2) означает, что скорость α^0 является возможной для объекта 1; второе условие означает, что обнаружение дает объекту 1 достаточно существенную прибавку к выигрышу. Отметим, что первое условие является техническим, оно упрощает дальнейшие выкладки. Второе же является принципиальным, обеспечивая существование равновесия в игре (1).

При выполнении условий (2) имеем:

$$\max_{\alpha}\ \min_{\delta} f(\alpha, \delta) = M - \tfrac{D}{\alpha^0} = f(\alpha^0, 0).$$

Аналогично:

$$\max_{\alpha} f(\alpha, \delta) = \max\{M - \tfrac{D-\delta}{\alpha^0}, -\tfrac{D}{A} - c(\delta)\}.$$

В силу (2) справедлива цепочка неравенств

$$M - \tfrac{D-\delta}{\alpha^0} \geq M - \tfrac{D}{\alpha^0} \geq -\tfrac{D}{A} \geq -\tfrac{D}{A} - c(\delta),$$

поэтому

$$\max_{\alpha} f(\alpha, \delta) = M - \tfrac{D-\delta}{\alpha^0}$$

и

$$\min_{\delta}\ \max_{\alpha} f(\alpha, \delta) = M - \tfrac{D}{\alpha^0} = f(\alpha^0, 0).$$

Таким образом, у игры (1) при условии (2) существует единственная точка равновесия (α^0, 0).

Информационная рефлексия. В этом подразделе мы рассмотрим возможность информационной рефлексии [34] в игре поиска (1). Будем считать, что функция $f(\alpha, \delta)$ и параметры D, L, A, M, k являются общим знанием, а относительно параметра θ у игроков 1 и 2 существуют точечные регулярные структуры информированности $I_1 = (\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \ldots)$ и $I_2 = (\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \ldots)$ соответственно (подробнее о понятиях «регулярности» и «точечности» см. [34], см. также раздел 1.1). Будем также считать, что общим знанием является выполнение условий (2), которые можно переписать в виде следующего двойного неравенства:

(3) $L + \tfrac{k}{MD^{-1} + A^{-1}} \leq \theta \leq L + kA.$

Что касается функции $c(\delta)$, то достаточно, чтобы общим знанием было ее возрастание и тот факт, что $c(0) = 0$.

Рассмотрим принятие решений игроками в порядке возрастания ранга их рефлексии, начиная со второго ранга.

а) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftrightarrow 121$ (подробнее о графе рефлексивной игры см. [34]), что соответствует второму рангу рефлексии. Тогда 12-игрок (игрок 2 в представлении игрока 1) выбирает действие $\delta_{12} = 0$. Наилучшим ответом на это со стороны игрока 1 является выбор скорости

(4) $\alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}$.

б) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом $2 \leftarrow 21 \leftrightarrow 212$, что соответствует второму рангу рефлексии. Тогда 21-игрок выбирает скорость $\alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k}$. Действие игрока 2 зависит от того, состоится ли, с его точки зрения, обнаружение. Если оно состоится, т. е. выполнено условие

$$\theta_2 - k\alpha_{21}^0 \geq L,$$

что равносильно $\theta_2 \geq \theta_{21}$, то лучшим ответом является выбор $\delta_2 = 0$. В противном случае, т. е. при $\theta_2 < \theta_{21}$, наилучший выбор $\delta_2 = D$ (индекс «2» поставлен для обозначения того, что это действие реального игрока 2).

в) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftarrow 121 \leftrightarrow 1212$, что соответствует третьему рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с результатом *б*), возможны два случая: $\theta_{12} \geq \theta_{121}$, $\delta_{12} = 0$ и $\theta_{12} < \theta_{121}$, $\delta_{12} = D$. В первом случае наилучшим ответом является α_1^0, определяемое соотношением (4), во втором – любое $\alpha_1 \in [0, \alpha_1^0]$.

В результате получаем:

(5) $$\alpha_1 \begin{cases} = \alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}, & \theta_{12} \geq \theta_{121}, \\ \in [0, \alpha_1^0], & \theta_{12} < \theta_{121}. \end{cases}$$

г) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом $2 \leftarrow 21 \leftarrow 212 \leftrightarrow 2121$, что соответствует третьему рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с предыдущими рассмотрениями, имеем:

$$\alpha_{2121} = \alpha_{2121}^0, \ \delta_{212} = 0, \ \alpha_{21} = \alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k},$$

(6) $$\delta_2 = \begin{cases} 0, & \theta_2 \geq \theta_{21}, \\ D, & \theta_2 < \theta_{21}. \end{cases}$$

Результат аналогичен *б*).

д) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftarrow 121 \leftarrow 1212 \leftrightarrow 12121$, что соответствует четвертому рангу рефлексии. Тогда, аналогично *в*), возможны два случая: $\theta_{12} \geq \theta_{121}$, $\delta_{12} = 0$, $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}$ и $\theta_{12} < \theta_{121}$, $\delta_{12} = D$, $\alpha_1 \in [0, \alpha_1^0]$.

е) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом 2←21←212←2121↔21212, что соответствует четвертому рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с результатом *в*), возможны два случая: $\theta_{212} \geq \theta_{2121}$, $\delta_{212} = 0$, $\alpha_{21} = \alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k}$ и $\theta_{212} < \theta_{2121}$, $\delta_{212} = D$, $\alpha_{21} \in [0, \alpha_{21}^0]$. В первом случае наилучший ответ определяется (6).

Второй случай несколько сложнее для анализа, поскольку игрок 2 может ожидать от игрока 1 любого действия из отрезка $[0, \alpha_{21}^0]$. Здесь мы имеем дело с интервальной неопределенностью, наиболее распространенным способом устранения которой является нахождение максимального гарантированного результата (см., например, [13]). В данном случае, как нетрудно видеть,

$$\max_{\alpha \in [0, \alpha_{21}^0]} f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D - \delta}{\alpha_{21}^0}, & \theta_2 \geq \theta_{21}, \\ -\frac{D}{\alpha_{21}^0} - c(\delta), & \theta_2 < \theta_{21}. \end{cases}$$

Поэтому гарантирующее действие $\delta_2 = \arg\min_{\delta} \max_{\alpha \in [0, \alpha_{21}^0]} f(\alpha, \delta)$ будет определяться теми же соотношениями (6).

Видно, что с увеличением ранга рефлексии игроков множество их субъективно равновесных действий не увеличивается по сравнению со вторым рангом для игрока 2 и третьим рангом для игрока 1. В соответствии с терминологией, предложенной в [34], ранги 3 для игрока 1 и 2 для игрока 2 называются *максимальными целесообразными* рангами рефлексии. Сформулируем соответствующее утверждение.

<u>Утверждение 6.</u> Максимальные целесообразные ранги рефлексии в рефлексивной игре поиска (1) равны 3 для ищущего игрока и 2 для уклоняющегося игрока.

Доказательство проведем по индукции. Базис индукции: если ранг игрока 1 равен 3, то его действие определяется соотношениями (5); если ранг игрока 2 равен 2 или 3, то его действие определяется соотношениями (6). Эти случаи рассмотрены выше.

Рассмотрим теперь принятие решений игроком 1 с n-м рангом рефлексии, $n \geq 4$. Ранг 12-игрока равен $n - 1$, и его действие по предположению определяется соотношениями (6). Соответственно, наилучший ответ игрока 1, как было показано в *в*), определяется соотношениями (5). Теми же соотношениями (5) определяется наилучший ответ игрока 1 с третьим рангом рефлексии, откуда вытекает первая часть утверждения (об игроке 1).

Если же принимает решение игрок 2 с рангом n, то, по предположению, действие 21-игрока с рангом $n - 1$ определяется соотношениями (5). Наилучший ответ игрока 2 на эти действия определяется, как было показано в *е*), соотношениями (6). Теми же соотношениями (6) определяется наилучший ответ игрока 2 со вторым или третьим рангом рефлексии, откуда вытекает вторая часть утверждения (об игроке 2). •

Содержательно доказанное утверждение означает, что игрок 2 либо занимает положение как можно дальше от игрока 1, выбирая $\delta_2 = 0$ (если считает, что его обнаружат), либо пытается сразу осуществить «прорыв», выбирая $\delta_2 = D$. Стратегия $0 < \delta_2 < D$ не является равновесной ни при каких структурах информированности.

Равновесные стратегии игрока 1 либо $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}$ (если $\delta_{12} = 0$), либо любая из отрезка $[0, \alpha_1^0]$ (если $\delta_{12} = D$).

Возможности информационного управления вторым игроком на этом исчерпываются, и оба равновесия достижимы в рамках ранга 2. Если центр может воздействовать на представления игрока 1 о своих возможностях (которые отражает параметр θ), все определяется том, переоценивает ли их игрок 1. Если не переоценивает, то обнаружение состоится, если нет – не состоится.

Предположим, что по результатам игры игроки наблюдают факт обнаружения (либо необнаружения), а также – в случае обнаружения – выбор игрока 2 (т. е. δ_2).Тогда информационное равновесие будет стабильным в случае $\theta_2 \geq \theta_{21}$, $\theta_1 \leq \theta$. Содержательно это означает:

1. игрок 2 считает, что игрок 1 не переоценивает свои возможности;

2. так оно на самом деле и есть (хотя и не обязательно игрок 2 оценивает возможности игрока 1 адекватно).

Некоторые обобщения. Обсудим качественно возможные обобщения полученных результатов на случай более сложных поисковых ситуаций. Во многих случаях поиск так или иначе сводится к «прочесыванию» поискового множества. Даже если уклоняющийся игрок может перемещаться в процессе игры (а не только в ее начале выбирать свое местоположение), при соответствующих условиях на скорости игроков и параметры поискового множества обнаружение возможно в результате планомерного «прочесывания» (поисковые задачи второго типа по классификации, предложенной в [44]). Стратегии (траектории) «прочесывания» на ряде поисковых множеств были предложены в работах [42-44].

При применении ищущим игроком этих стратегий у уклоняющегося игрока имеются, по сути, те же две альтернативы, что и в рассмотренном выше случае – либо «скрываться», либо «прорываться». Увеличение ранга рефлексии не приводит к появлению «промежуточных» равновесных стратегий.

2.2. ПРОИЗВОДИТЕЛЬ И ПОСРЕДНИК

Рассмотрим ситуацию, в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида продукции, и центр, являющийся посредником. Они взаимодействуют следующим образом:

1) оговариваются доли λ и $(1 - \lambda)$, в соответствии с которыми доход делится между производителем и посредником соответственно, $\lambda \in (0; 1)$;

2) посредник сообщает производителю оценку $\tilde{\theta}$ рыночной цены θ;

3) производитель производит некоторый объем продукта $y \geq 0$ и передает его посреднику;

4) посредник реализует его по рыночной цене и передает производителю оговоренную долю дохода $\lambda\, \theta y$, а себе забирает $(1 - \lambda)\, \theta y$.

Предполагается, что посредник в точности знает рыночную цену, а производитель, напротив, не обладает никакой априорной информацией о ней.

Производитель характеризуется функцией издержек $c(y)$, которая связывает объем продукции и затраты на его производство (будем считать, что ограничения на мощность отсутствуют, то есть может производиться любой объем продукции).

В описанной ситуации ключевую роль играют три параметра – доля λ, цена θ и объем продукции y. О доле участники договариваются заранее, цену сообщает посредник, объем продукции выбирает производитель.

Теперь рассмотрим вопрос о том, как будут вести себя участники ситуации после того, как они договорились о долях λ и $(1 - \lambda)$. Производитель, стремясь максимизировать свою прибыль, выбирает объем производства y^* в зависимости от своей функции издержек, причитающейся ему доли дохода и сообщаемой посредником рыночной цены. Предположим, что производитель изначально доверяет посреднику, причем у производителя нет возможности проверить, насколько сообщение посредника соответствует действительности. В этом случае посредник может сообщить значение $\tilde{\theta}$, не совпадающее, вообще говоря, с истинным значением рыночной цены θ. Выбор посредником сообщения $\tilde{\theta}$ можно трактовать как осуществление информационного управления.

Наконец, предположим, что посредник стремится проводить стабильное информационное управление, то есть обеспечивать производителю тот доход, который он ожидает получить, исходя из значения $\tilde{\theta}$.

В рамках описанных выше предположений целевые функции посредника и производителя выглядят, соответственно, следующим образом:

$$f_0(y, \tilde{\theta}) = \theta y - \tilde{\theta} \lambda y, \quad f(y, \tilde{\theta}) = \tilde{\theta} \lambda y - c(y).$$

Подчеркнем, что эти целевые функции записаны с учетом стабилизации, то есть перераспределения доходов центром (в качестве центра здесь выступает посредник), с целью добиться стабильности управления (см. раздел 1.2).

Наложим на функцию издержек ограничения таким образом, чтобы прибыль производителя (равная разности дохода и издержек) принимала максимальное значение ровно в одной точке $y^* = y^*(\tilde{\theta}) > 0$. Для этого достаточно потребовать, чтобы она была дважды дифференцируемой, и выполнялись условия:

$$c(0) = c'(0) = 0, \quad c'(y) > 0, \quad c''(y) > 0 \quad \text{при} \quad y > 0,$$
$$c'(y) \to \infty \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Потребуем также выполнения следующего свойства: функция $(y\, c'(y))'$ является непрерывной, возрастающей и стремится к бесконечности при $y \to \infty$.

При этих условиях справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7.

1) Выбирая оптимальное для себя значение $\tilde{\theta}$, посредник может обеспечить максимальное значение своей целевой функции независимо от значения λ.

2) Существует $\lambda^* = \lambda^*(\theta)$ такое, что

a) если $\lambda = \lambda^*$, то оптимальным для посредника является сообщение истинного значения цены (то есть $\tilde{\theta} = \theta$),

b) если $\lambda < \lambda^*$ ($\lambda > \lambda^*$), то производитель получает бóльшую (меньшую) прибыль по сравнению с той, которую он получил бы при $\tilde{\theta} = \theta$ (то есть в случае сообщения посредником истинного значения цены).

3) Для степенных функций издержек $c(y) = ky^{\alpha}$ ($k > 0$, $\alpha > 1$) и только для них вышеупомянутое значение λ^* является константой (не зависит от цены θ): $\lambda^* = 1/\alpha$.

Доказательство. Получив от посредника сообщение $\tilde{\theta}$, производитель максимизирует свою целевую функцию, выбирая объем производства $\tilde{y} = \arg\max\limits_{y \in A} f(y, \tilde{\theta})$ из условия $c'(\tilde{y}) = \tilde{\theta}\,\lambda$.

Подставим $\tilde{y}$ в целевую функцию посредника и, с учетом соотношения $\dfrac{d\tilde{y}}{d\tilde{\theta}} = \dfrac{\lambda}{c''(\tilde{y})}$, приравняем нулю ее производную. После преобразований получаем уравнение

(1) $c'(\tilde{y}) + \tilde{y}\, c''(\tilde{y}) = \theta$.

Это уравнение имеет единственное решение $\tilde{y}$ (подчеркнем, что объем производства $\tilde{y}$ зависит только от реальной цены на рынке θ), которому соответствует оптимальное для посредника сообщение

(2) $\tilde{\theta} = \dfrac{c'(\tilde{y})}{\lambda}$.

При этом функция полезности посредника

$$f_0(\tilde{y}, \tilde{\theta}) = \tilde{y}\,(\theta - c'(\tilde{y})),$$

очевидно, не зависит от доли λ. Пункт 1 утверждения доказан. Заметим, что при этом прибыль производителя также не зависит от λ:

(3) $f(\tilde{y}, \tilde{\theta}) = \tilde{y}\, c'(\tilde{y}) - c(\tilde{y})$.

Определим долю λ^* следующим образом:

(4) $\lambda^* = \dfrac{c'(\tilde{y})}{\theta}$.

Сопоставляя (2) и (4), видим, что при $\lambda = \lambda^*$ оптимальным для посредника является сообщение $\tilde{\theta} = \theta$.

Пусть теперь $\lambda < \lambda^*$. Тогда для оптимального сообщения посредника имеем (из (2) и (4)):

(5) $\tilde{\theta} = \dfrac{\lambda^*}{\lambda}\theta > \theta.$

Если бы посредник сообщил θ, то производитель выбрал бы y^*, решив уравнение

(6) $c'(y^*) = \theta\,\lambda$

и получил бы прибыль

(7) $f(y^*, \tilde{\theta}) = y^* c'(y^*) - c(y^*)$.

Сопоставляя (2), (5) и (6) получаем (с учетом возрастания $c'(y)$), что $\tilde{y} > y^*$. Далее, нетрудно убедиться, что функция $y\, c'(y) - c(y)$ возрастает. Поэтому сравнение (3) и (7) показывает, что при сообщении θ прибыль производителя меньше, чем при сообщении $\tilde{\theta}$.

Аналогично доказывается, что при $\lambda > \lambda^*$ имеет место обратное – прибыль производителя при сообщении θ больше, чем при сообщении $\tilde{\theta}$. Пункт 2 доказан.

Проверим, при каком условии на функцию издержек $c(y)$ правая часть (4) не зависит от θ. Из (1) видно, что для этого необходимо совместное выполнение соотношений

$$\frac{c'(y)}{\theta} = k_1, \quad \frac{y c''(y)}{\theta} = 1 - k_1 \quad (k_1 \text{ – константа}).$$

Деля второе из них на первое, получаем дифференциальное уравнение

(8) $y\,c''(y) - k_2\,c'(y) = 0,$

где $k_2 = (1 - k_1)/k_1$ – произвольная константа. Решая уравнение (8), получаем (с учетом условий на функцию $c(y)$): $c(y) = ky^{\alpha}$, где $k > 0$, $\alpha > 1$. Нетрудно убедиться (воспользовавшись соотношениями (1) и (4)), что при этом $\lambda^* = 1/\alpha$. •

2.3. АККОРДНАЯ ОПЛАТА ТРУДА

Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и n агентов, осуществляющих совместную деятельность.

Стратегией i-го агента является выбор действия $y_i \in X_i = \Re^1_+$, $i \in N$, стратегией центра – выбор системы стимулирования, определяющей размер вознаграждения каждого агента в зависимости от результата их совместной деятельности. Предположим, что технология взаимодействия агентов такова, что для достижения требуемого результата необходимо, чтобы сумма их действий была не меньше заданной величины $\theta \in \Omega$. В этом случае i-й агент получает от центра фиксированное вознаграждение σ_i, $i \in N$, в случае же $\sum_{i \in N} y_i < \theta$ вознаграждение каждого агента равно нулю.

Реализация действия $y_i \geq 0$ требует от i-го агента затрат $c_i(y, r_i)$, где $r_i > 0$ – его тип (параметр, описывающий индивидуальные характеристики), $i \in N$.

Относительно функций затрат агентов предположим, что $c_i(y, r_i)$ – непрерывная возрастающая по y_i и убывающая по r_i функция, причем $\forall\ y_{-i} \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$, $\forall\ r_i > 0$ $c_i(0, y_{-i}, r_i) = 0$, $i \in N$.

Описанную модель взаимодействия будем далее называть игрой «Аккордная оплата труда».

Определим множество индивидуально рациональных действий агентов

$$IR = \{y \in X' = \prod_{i \in N} X_i \mid \forall\ i \in N\ \sigma_i \geq c_i(r_i)\}.$$

Если затраты агентов сепарабельны, то есть затраты $c_i(y_i, r_i)$ каждого агента зависят только от его собственных действий и не зависят от действий других агентов, получаем, что $IR = \prod_{i \in N} [0; y_i^+]$,

где

$$y_i^+ = \max \{y_i \geq 0 \mid c_i(y_i, r_i) \leq \sigma_i\},\ i \in N.$$

Обозначим

$$Y(\theta) = \{y \in X' \mid \sum_{i \in N} y_i = \theta\},$$

$$Y^*(\theta) = \operatorname{Arg} \min_{y \in Y(\theta)} \sum_{i \in N} c_i(y, r_i).$$

Рассмотрим последовательно различные варианты информированности агентов о значении параметра $\theta \in \Omega$. Как мы увидим, даже небольшое усложнение структуры информированности может существенно изменить множество информационных равновесий рассматриваемой рефлексивной игры.

Вариант I. Предположим, что значение $\theta \in \Omega$ является общим знанием. Тогда равновесием игры агентов является параметрическое равновесие Нэша, принадлежащее множеству

(1) $E_N(\theta) = IR \cap Y(\theta)$.

Определим также множество эффективных по Парето действий агентов:

(2) $Par(\theta) = IR \cap Y^*(\theta)$.

Так как $\forall\ \theta \in \Omega\ \ Y^*(\theta) \subseteq Y(\theta)$, то из (1) и (2) следует, что множество эффективных по Парето действий является одним из равновесий Нэша. Но множество равновесий Нэша может оказаться шире – в частности, при $\theta \geq \max_{i \in N} y_i^+$ оно всегда содержит вектор нулевых действий.

Пусть функции затрат агентов являются функциями затрат типа Кобба-Дугласа: $c_i(y_i, r_i) = r_i\ \varphi(y_i / r_i)$, где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, удовлетворяющая равенству $\varphi(0) = 0$.

Тогда (см., например [7, с. 97]) эффективной по Парето является единственная точка: $y^*(\theta) = \{ y_i^*(\theta)\}$, где $y_i^*(\theta) = \theta\, r_i / \sum_{j \in N} r_j$, $i \in N$.

Вычислим $y_i^+ = r_i\ \varphi^{-1}(\sigma_i / r_i)$, $i \in N$, тогда при

(7) $\sigma_i \geq r_i\ \varphi(\theta / \sum_{j \in N} r_j)$, $i \in N$,

множество Парето не пусто.

Множества равновесий Нэша в игре $n = 2$ агентов для двух значений θ: $\theta_2 > \theta_1$ приведены на рисунке 6 (точка (0; 0) является равновесием Нэша в обоих случаях).

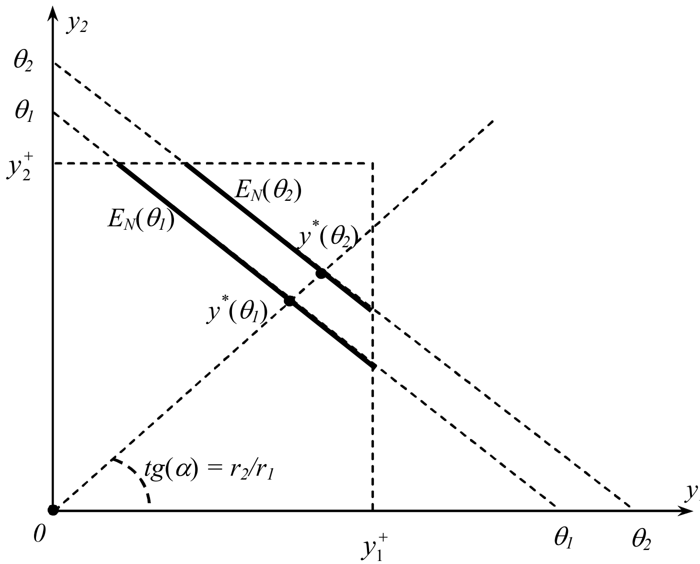

Рис. 6. Параметрическое равновесие Нэша игры агентов

Итак, мы рассмотрели простейший вариант информированности агентов, соответствующий ситуации, когда значение параметра $\theta \in \Omega$ является общим знанием. Рассмотрим следующий (в порядке возрастания сложности структуры информированности агентов) вариант информированности, в рамках которого общим знанием являются индивидуальные представления $\{\theta_i\}$ агентов о значении параметра $\theta \in \Omega$.

Вариант II. Предположим, что представления агентов о неопределенном параметре попарно различны (и при этом являются общим знанием). Не ограничивая общности, занумеруем агентов таким образом, чтобы их представления возрастали: $\theta_1 < \ldots < \theta_n$. Структура возможных равновесий в этой ситуации описывается следующим утверждением.

Утверждение 8. В игре «Аккордная оплата труда», для которой $\theta_i \neq \theta_j$ при $i \neq j$, равновесными (в зависимости от соотношения между параметрами) могут быть следующие $(n + 1)$ исходов: $\{y^* \mid y_i^* = 0,\ i \in N\}$; $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \in N,\ i \neq k\}$, $k \in N$. Содержательно это означает следующее: либо никто не работает, либо работает один k-й агент, выбирая действие θ_k.

Доказательство. Пусть вектор действий $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ является равновесием (очевидно, при этом $y_i^* \leq y_i^+$ для любого $i \in N$). Пусть существует такое $k \in N$, что $y_k^* > 0$. Покажем, что в этом случае $\sum_{i \in N} y_i^* = \theta_k$.

Действительно, если $\sum_{i \in N} y_i^* < \theta_k$, то k-й агент не рассчитывает на получение вознаграждения и, следовательно, может увеличить свой (субъективно ожидаемый) выигрыш с отрицательного до нулевого, выбрав нулевое действие. Если же $\sum_{i \in N} y_i^* > \theta_k$, то k-й агент рассчитывает на получение вознаграждения, однако он может увеличить свой выигрыш, выбрав вместо y_k^* действие $\max\{0, \theta_k - \sum_{i \in N \setminus \{k\}} y_i^*\} < y_k^*$. Таким образом, при $\sum_{i \in N} y_i^* \neq \theta_k$ k-й агент может увеличить свой выигрыш, что противоречит равновесности вектора y^*.

Мы показали, что, если $y_k^* > 0$, то $\sum_{i \in N} y_i^* = \theta_k$. Но в силу условия $\theta_i \neq \theta_j$, $i \neq j$, это равенство может выполняться лишь для одного $k \in N$. Поэтому если $y_k^* > 0$, то $y_i^* = 0$ для всех $i \neq k$. При этом, очевидно, $y_k^* = \theta_k$. •

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких соотношениях между параметрами θ_i, y_i^+, $i \in N$, реализуется каждое из равновесий, перечисленных в формулировке утверждения 8.

Вектор (0, …, 0) является равновесным в случае, когда никакой i-й агент не может собственными усилиями выполнить достаточную (с его точки зрения) для получения вознаграждения работу (либо это усилие составляет в точности y_i^+, так что выигрыш i-го агента остается нулевым). Это условие формально записывается следующим образом: $y_i^+ \le \theta_i$ для любого i.

Вектор $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \ne k\}$ является равновесным, если $\theta_k \le y_k^+$, а все агенты с номерами $i > k$, считая, что вознаграждения не будет, являются недостаточно эффективными, чтобы собственными усилиями компенсировать величину $\theta_i - \theta_k$. Формально: $\theta_k + y_i^+ \le \theta_i$ для любого $i > k$.

Возможные равновесия в игре двух агентов изображены на рисунке 7. Заметим, что, в отличие от варианта I, существует область, в которой равновесие отсутствует.

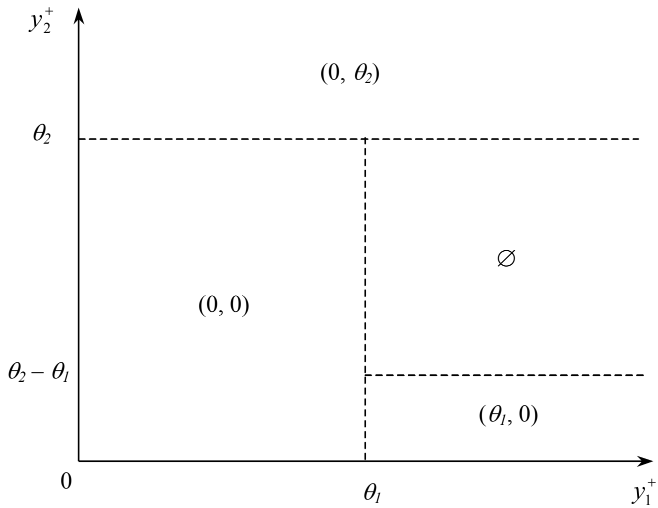

Рис. 7. Равновесия в игре двух агентов
(*область, где равновесия нет, обозначена символом «$\varnothing$»*)

Рассмотрим теперь общий случай, когда представления агентов могут и совпадать: $\theta_1 \le \ldots \le \theta_n$. В этом случае может появиться целая область равновесий, аналогично варианту I. Пусть, например, выполняются соотношения $\theta_m = \theta_{m+1} = \ldots = \theta_{m+p}$, $\theta_i \neq \theta_m$ при $i \notin \{m, \ldots, m+p\}$. Тогда при выполнении условий $\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* \geq \theta_m$ и $\theta_m + y_i^+ \leq \theta_l$, $i > m$, равновесным является любой вектор $\{y^* \mid \sum_{k=m}^{m+p} y_k^* = \theta_m$, $y_k^* \leq y_k^+$, $k \in \{m, \ldots, m+p\}$; $y_i^* = 0$, $i \notin \{m, \ldots, m+p\}\}$. Содержательно это означает, что в равновесии всю работу выполняют агенты, которые одинаково представляют себе необходимый для получения вознаграждения объем работы.

Вариант III. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину 2, но каждый агент считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием. В этом случае множество возможных равновесных ситуаций становится максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 9. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два (при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием), что вектор y^* является единственным равновесием.

Доказательство. Достаточно для каждого $i \in N$ положить $\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0; \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0 \end{cases}$ (здесь ε – произвольное положительное число) и выбрать любые $\theta_{ij} > \sum_{i \in N} y_i^+$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда i-й агент ожидает от оппонентов нулевых действий, а его собственным субъективно равновесным действием является y_i^*. •

Замечание 1. Построенное в доказательстве утверждения 9 равновесие является (объективно) Парето-эффективным, если сумма $\sum_{i \in N} y_i^*$ равна истинному значению неопределенного параметра θ.

Замечание 2. Действие $y_i^* = y_i^+$ является равновесным, если $\theta_i = y_i^+$. Однако при этом равновесным будет и действие $y_i^* = 0$ – в обоих случаях субъективно ожидаемый i-м агентом выигрыш равен нулю.

Вариант IV. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину два, и на нижнем уровне имеется симметричное общее знание. Иными словами, каждый фантомный агент считает: неопределенный параметр равен θ, и это общее знание.

Оказывается, что и в этом случае множество равновесных ситуаций является максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 10. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два с симметричным общим знанием на нижнем уровне, что вектор y^* является единственным равновесием.

Доказательство. Возьмем любое значение $\theta > \sum_{i \in N} y_i^+$ и будем считать, что это значение является общим знанием среди фантомных агентов. Тогда единственным равновесием в игре фантомных агентов является выбор каждым из них нулевого действия.

Далее, для каждого $i \in N$ положим

$$\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0 \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0 \end{cases},$$

где ε – произвольное положительное число. Тогда, как нетрудно видеть, наилучшим ответом i-го агента на ожидаемые им нулевые действия оппонентов является выбор действия y_i^*. •

Замечания 1 и 2, сделанные при анализе варианта III, можно повторить дословно и для варианта IV.

Таким образом, мы исследовали структуру информационных равновесий игры «Аккордная оплата труда» при различных вариантах информированности агентов. Полученные результаты полностью подтверждают интуитивно правдоподобный качественный вывод: в коллективе работников совместная работа возможна (является равновесной) лишь в том случае, когда имеется общее знания о том, какой объем работ необходимо выполнить для получения вознаграждения.

Рассмотрим теперь вопрос о стабильности информационного равновесия. Анализ проведем для варианта II, когда имеется асимметричное общее знание. Будем считать, что в результате игры общим знанием среди агентов становится факт выплаты или невыплаты вознаграждения.

Равновесие $(0, \ldots, 0)$, очевидно, стабильно в любом случае: никто не работает, не ожидает получить вознаграждение и не получает его.

Равновесие вида $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k,\ y_i^* = 0,\ i \in N,\ i \neq k\}$, $k \in N$, в случае $\theta_1 < \ldots < \theta_n$ возможно, как было показано выше, при $\theta_k \le y_k^+$, $\theta_k + y_i^+ \le \theta_i$ для любого $i > k$. Тогда i-агенты с номерами $i \le k$ ожидают выплаты вознаграждения, а с номерами $i > k$ – не ожидают. Поэтому единственная возможность стабильности – условие $k = n$. Таким образом, получаем условие стабильности

(8) $\theta_n \le y_n^+$.

Аналогично при $\theta_1 \le \ldots \le \theta_{m-1} < \theta_m = \ldots = \theta_n$ стабильным является любой набор $\{y^* \mid \sum_{k=m}^{n} y_k^* = \theta_m,\ y_k^* \le y_k^+,\ k \in \{m, \ldots, n\};\ y_i^* = 0,$ $i \notin \{m, \ldots, m + p\}\}$.

В соответствии с утверждением 9, центр может при помощи информационного управления (в частности, путем формирования структуры, при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием) добиться от агентов любого набора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0;\, y_i^+)$. Оказывается, что существует и стабильное информационное управление, обеспечивающее этот результат. Покажем это для $y_i^* > 0$.

Пусть задан набор $y^* \in \prod_{i \in N} (0;\, y_i^+)$, $\sum_{i \in N} y_i^* \ge \theta$. Положим для каждого $i \in N$ $\theta_i = y_i^*$ и для каждого $j \in N \setminus \{i\}$ возьмем любые θ_{ij} такие, что $\theta_{ij} < \theta_i$. Тогда для i-агента субъективно выполнено условие стабильности (8) и y_i^* – его единственное равновесное действие. При этом

1. работа будет выполнена и агенты получат вознаграждение;
2. получение вознаграждения будет ожидаемым исходом для всех реальных и фантомных агентов.

Содержательно, ситуация при этом возникает следующая: каждый агент считает, что именно он выполнил всю работу, и что это – общее знание.

2.4. ПРОДАВЕЦ И ПОКУПАТЕЛЬ

Пусть продавец и покупатель (которых будем обозначать «s» – seller и «*b*» – buyer соответственно) должны придти к компромиссу относительно стоимости некоторого товара, услуги, работ по договору и т.д.

Обозначим: θ_b – представления покупателя о ценности для него товара (максимальную цену, которую он готов за него заплатить); θ_s – представления продавца о ценности для него товара (минимальную цену, за которую он готов продать товар); θ_{bs} – представления покупателя о представлениях продавца, θ_{sb} – представления продавца о представлениях покупателя; θ_{sbs} – представления продавца о том, что о его представлениях думает покупатель, и т.д. Будем считать, что $\theta_\tau \in \Re^1_+$, где τ – произвольная конечная последовательность индексов (в том числе, пустая) из множества участников сделки $\{«s»; «b»\}$. Далее множество всевозможных конечных последовательностей индексов будем обозначать Σ_+, объединение Σ_+ с пустой последовательностью будем обозначать Σ.

Рассмотрим, какими свойствами должны обладать взаимные представления покупателя и продавца для того, чтобы сделка была возможна. Из условия того, что сделка может произойти, только если ценность товара для покупателя не ниже, чем для продавца, получаем следующую систему неравенств:

(1) $\forall\ \tau \in \Sigma\ \ \theta_{\tau b} \geq \theta_\tau,\ \theta_{\tau s} \leq \theta_\tau.$

Из (1) следует, что субъективный размер области компромисса может быть представлен в виде:

(2) $\Delta_\tau = \theta_{\tau b} - \theta_{\tau s}$, $\tau \in \Sigma$,
причем $\forall\ \tau \in \Sigma\ \ \Delta_\tau \geq 0$.

Обсудим теперь возможные механизмы компромисса. При заданных субъективных представлениях и, следовательно, заданной области компромисса, которая не пуста в силу (1) и (2), возможны различные процедуры дележа «прибыли» Δ (определения точки компромисса).

Первый вариант (дележ прибыли) заключается в задании отображения $\pi = (\pi_s, \pi_b)$: $\Re_+^2 \to \Re_+^2$, удовлетворяющего для всех $\theta_b \geq \theta_s$ следующим свойствам:

$$\pi_s(\theta_s, \theta_b) + \pi_b(\theta_s, \theta_b) = \Delta,$$

$$\frac{\partial \pi_s(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} \leq 0, \quad \frac{\partial \pi_s(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \pi_b(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} \leq 0, \quad \frac{\partial \pi_b(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0,$$

содержательные интерпретации которых очевидны. Примером является инвариантный относительно аддитивного сдвига представлений механизм компромисса $\pi_s = \alpha\,(\theta_b - \theta_s)$, $\pi_b = (1 - \alpha)\,(\theta_b - \theta_s)$, где $\alpha \in [0; 1]$. Как отмечалось выше, аксиоматическая характеризация различных механизмов компромисса является перспективной задачей, выходящей, однако, за рамки настоящего исследования.

Второй вариант (непосредственное определение точки компромисса) заключается в задании отображения π: $\Re_+^2 \to \Re_+^1$, удовлетворяющего для всех $\theta_b \geq \theta_s$ следующим свойствам:

$$\theta_s \leq \pi(\theta_s, \theta_b) \leq \theta_b,$$

$$\frac{\partial \pi(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \pi(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0,$$

содержательные интерпретации которых также очевидны. Примером является инвариантный относительно аддитивного сдвига представлений механизм компромисса $\pi = \alpha\,\theta_b + (1 - \alpha)\,\theta_s$, где $\alpha \in [0; 1]$.

Ясно, что эти два варианта механизмов эквивалентны, поэтому в дальнейшем для определенности будем иметь в виду второй вариант.

Рефлексивную игру продавца и покупателя формализуем следующим образом. Допустимым действием каждого из игроков – продавца и покупателя – является сообщение (одновременно с оппонентом независимо от него) «своей» цены – x_s и x_b соответственно. На основании сообщений игроков сделка либо не совершается (при $x_s > x_b$), либо совершается по цене $\pi(x_s, x_b)$ (при $x_s \le x_b$). Функции выигрыша в этой игре имеют следующий вид:

$$f_s(\theta_s, x_s, x_b) = \begin{cases} \pi(x_s, x_b) - \theta_s, & x_s \le x_b, \\ -\varepsilon_1, & x_s > x_b, \end{cases}$$

$$f_b(\theta_b, x_s, x_b) = \begin{cases} \theta_b - \pi(x_s, x_b), & x_s \le x_b, \\ -\varepsilon_2, & x_s > x_b, \end{cases}$$

где ε_1 и ε_2 – произвольные положительные числа (затраты на подачу заявки в случае, если сделка не состоится). Кроме того, будем считать, что каждый из агентов может вообще отказаться от переговоров; при этом сделка не совершается и агент, не подавший заявку, получает нулевой выигрыш.

Опишем теперь информированность участников игры. Будем считать, что допустимые действия и целевые функции являются общим знанием с точностью до величин θ_s и θ_b. Пусть, далее, продавец и покупатель обладают точечной структурой информированности конечной сложности следующего вида: $I_s = (\theta_s, \theta_{sb}, \theta_{sbs}, \ldots)$, $I_b = (\theta_b, \theta_{bs}, \theta_{bsb}, \ldots)$ – напомним, что в силу аксиомы автоинформированности индексы «s» и «b» чередуются.

Рассмотрим вопрос о том, каковы возможные информационные равновесия в описанной рефлексивной игре. Для определенности будем сначала вести рассуждения для одного из агентов – продавца.

Для того, чтобы определить равновесное действие продавца x_s^*, необходимо определить равновесные действия всех фантомных агентов, существующих в его представлении. Таким образом, для нахождения x_s^* необходимо найти все $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Набор действий $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$, является (с точки зрения продавца) информационным равновесием (и продавец не откажется от переговоров), если и только если $x_{s\tau}^* \equiv x_s^*$ для любого $\tau \in \Sigma$ и $\theta_s' \le x_s^* \le \theta_s''$ где $\theta_s' = \max_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau s}$, $\theta_s'' = \min_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau b}$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$, – информационное равновесие. Рассмотрим произвольное непустое τ и равновесное действие $x_{s\tau sb}^*$. По определению информационного равновесия действие $x_{s\tau s}^*$ максимизирует по $x_{s\tau s}$ функцию $f_s(\theta_{s\tau s}, x_{s\tau s}, x_{s\tau sb}^*)$. Иначе говоря, $s\tau s$-агент (продавец) ожидает от $s\tau sb$-агента (покупателя) действие $x_{s\tau sb}^*$. Далее, соотношение $\theta_{s\tau s} > x_{s\tau sb}^*$ означает, что $s\tau s$-агент (продавец) ожидает от оппонента заявки, меньшей его субъективной цены; следовательно, субъективно оптимальным для него будет отказ от переговоров и сделка не состоится, что противоречит предположению. Значит, $\theta_{s\tau s} \le x_{s\tau sb}^*$ (субъективная цена продавца не превосходит заявленной цены покупателя). Но тогда, очевидно, $x_{s\tau s}^* = x_{s\tau sb}^*$ – для продавца оптимально назвать цену, совпадающую с ценой покупателя.

Аналогично показывается, что, если $x_{s\tau bs}^*$ – равновесное действие, то $\theta_{s\tau b} \ge x_{s\tau bs}^*$ и $x_{s\tau b}^* = x_{s\tau bs}^*$.

Таким образом, для произвольного τ справедливы соотношения $x_{s\tau}^* = x_s^*$, $\theta_{s\tau s} \le x_s^* \le \theta_{s\tau b}$. Поскольку структура информированности имеет конечную сложность, попарно различных элементов $\theta_{s\tau}$ конечное число. Поэтому из последнего неравенства следует, что $\theta_s' \le x_s^* \le \theta_s''$.

$\Leftarrow$ Пусть число x_s^* таково, что $\theta_s' \le x_s^* \le \theta_s''$. Тогда для любого $\tau \in \Sigma$ имеем $\theta_{s\tau} \le x_s^* \le \theta_{s\tau b}$, $\theta_{s\tau s} \le x_s^* \le \theta_{s\tau}$. Поэтому набор действий $x^*_{s\tau} = x^*_s$, $\tau \in \Sigma$, является (с точки зрения продавца) информационным равновесием и продавец не откажется от переговоров (заметим, что соотношения (1) выполнены). •

Аналогичный факт, как нетрудно проверить, справедлив и для покупателя. Объединяя эти два факта, получаем следующее утверждение.

Утверждение 11. Набор действий x^*_σ, $\sigma \in \Sigma_+$, является информационным равновесием (и сделка будет совершена), если и только если для любого $\tau \in \Sigma$ справедливы соотношения $x^*_{s\tau} = x^*_s$, $x^*_{b\tau} = x^*_b$ и $\theta_s' \le x^*_s \le \theta_s''$ $\theta_b' \le x^*_b \le \theta_b''$ где $\theta_s' = \max\limits_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau s}$, $\theta_s'' = \min\limits_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau b}$, $\theta_b' = \max\limits_{\tau \in \Sigma} \theta_{b\tau s}$, $\theta_b'' = \min\limits_{\tau \in \Sigma} \theta_{b\tau b}$.

Утверждение 11, в частности, показывает, каким образом следует сформировать структуру информированности игры в случае, когда управляющий орган (центр), во-первых, имеет возможность формировать любую структуру, и, во-вторых, стремится обойтись наиболее простой.

Пусть, например, центр стремится обеспечить заключение сделки по цене, где $\theta_s \le \theta^* \le \theta_b$, т.е. сделать θ^* единственной равновесной ценой. Тогда достаточно сформировать у агентов структуры информированности следующего вида: $I_s = (\theta_s, \theta^*, \theta^*, \theta^*, \ldots)$, $I_b = (\theta_b, \theta^*, \theta^*, \theta^*, \ldots)$. Нетрудно видеть, что при этом $\theta_s' = \theta_s'' = \theta_b' = \theta_b'' = \theta^*$. Поэтому, согласно утверждению, единственным информационным равновесием будет то, для которого $x^*_s = x^*_b = \theta^*$. Заметим, что это информационное равновесие является *стабильным*, то есть сделка будет заключена именно по той цене, на которую рассчитывали агенты, делая свои заявки.

Сделаем следующее важное замечание (см. также введение к настоящей работе): мы исходим из предположения о том, что центр может сформировать у агентов *любую* структуру информированности. В рамках этого предположения нас интересует следующий вопрос: *какой* должна быть эта структура. Вопрос о том, *как* центру надлежит ее формировать, выходит за рамки настоящей работы и требует особого рассмотрения с привлечением данных психологии, социологии и пр.

Рассмотрим следующий пример: пусть субъективная цена продавца составляет 20, покупателя – 50, и центр стремится обеспечить совершение сделки по цене 40. Тогда ему следует сообщить продавцу следующее: «покупатель считает: субъективные цены покупателя и продавца равны 40, и это – общее знание», а покупателю – следующее: «продавец считает: субъективные цены продавца и покупателя равны 40, и это – общее знание». Тем самым, формируются следующие структуры информированности агентов: $I_s = (20, 40, 40, 40, \ldots)$, $I_b = (50, 40, 40, 40, \ldots)$. Оба агента подадут заявки 40, и сделка состоится.

2.5. ЗАКАЗЧИК И ИСПОЛНИТЕЛЬ

Настоящая модель наиболее тесно связана с рассмотренными, например, в [29] нерефлексивными теоретико-игровыми моделями определения параметров договора на основании анализа оптимального действия исполнителя, то есть действия, максимизирующего разность между доходом заказчика и затратами исполнителя.

Предположим, что заказчик имеет целевую функцию

$$\Phi(y,\ \sigma) = H(y) - \sigma(y),$$

представляющую собой разность между его доходом $H(y)$ от деятельности (действия) $y \in A = \Re^1_+$ исполнителя и стимулированием, выплачиваемым исполнителю.

Относительно целевой функции исполнителя предположим, что она имеет вид:

$$f(y,\ \sigma,\ \theta) = \sigma(y) - c(y,\ \theta),$$

то есть определяется разностью между стоимостью договора и затратами $c(y,\ \theta)$, зависящими от действия исполнителя $y \in A$ и скалярного параметра $\theta \in \Omega \subseteq \Re_+^1$, причем $\forall\ \theta \in \Omega \quad c(0,\ \theta) = 0$ и $\forall\ y \in A\ c(y,\ \theta)$ является невозрастающей функцией $\theta \in \Omega$. Другими словами, содержательно параметр θ может интерпретироваться как квалификация (эффективность деятельности) исполнителя.

Таким образом, в настоящей модели присутствует единственный неопределенный параметр – эффективность деятельности исполнителя $\theta \in \Omega$, значение которого достоверно известно исполнителю, но неизвестно заказчику.

Если бы значение θ было общим знанием, то оптимальным было бы следующее действие исполнителя (см., например, [29]):

(1) $y^*(\theta) = \arg \max\limits_{y \in A} [H(y) - c(y, \theta)]$.

Например, если $H(y) = y$, $c(y, \theta) = y^2 / 2\ \theta$, то $y^*(\theta) = \theta$.

Если истинное значение эффективности исполнителя, которое ему самому достоверно известно, неизвестно заказчику, то заказчик вынужден использовать ту или иную процедуру устранения неопределенности. Перечислим некоторые возможные варианты.

Во-первых, заказчик может использовать принцип максимального гарантированного результата:

$$y^г = \arg \max_{y \in A} [H(y) - \max_{\theta \in \Omega} c(y, \theta)],$$

рассчитывая на прибыль $\max\limits_{y \in A} [H(y) - \max\limits_{\theta \in \Omega} c(y, \theta)]$.

Во-вторых, заказчик может использовать те или иные механизмы с сообщением информации исполнителем относительно эффективности его деятельности [1, 36], или предлагать последнему меню договоров в соответствии с результатами, приведенными в [16, 47].

Третий вариант поведения заказчика заключается в том, чтобы либо сделать конкретные предположения о свойствах функции затрат исполнителя и подставить их в выражение (1), либо осуществлять информационную рефлексию по поводу значений параметра $\theta \in \Omega$. Рассмотрим последний случай более подробно.

Информационная структура рассматриваемой рефлексивной игры имеет вид $I_s = (\theta_s, \theta_{sb}, \theta_{sbs}, \ldots)$, $I_b = (\theta_b, \theta_{bs}, \theta_{bsb}, \ldots)$, однако не все компоненты являются независимыми. Дело в том, что истинное значение параметра θ достоверно известно исполнителю ($\theta_s = \theta$), и это является общим знанием. Поэтому для любого $\tau \in \Sigma$ выполнено равенство $\theta_{\tau s} = \theta_\tau$.

Так как модель с общим знанием рассматривалась выше (см. выражение (1); граф рефлексивной игры для этого случая имеет вид: $B \leftrightarrow S$), то рассмотрим несколько более сложную модель, для которой граф иерархической рефлексивной игры имеет вид $S \leftarrow B \leftrightarrow BS$. Если «первый ход» делает заказчик, он предлагает исполнителю договор стоимостью $c(y^*(\theta_b), \theta_b)$. В соответствии с выражением (1), в данной модели заказчик соглашается в случае, если выполнено

(2) $\theta_b \le \theta$.

При этом заказчик получает прибыль

$$u_b^0 = H(y^*(\theta_b)) - c(y^*(\theta_b), \theta_b),$$

а прибыль исполнителя равна

(3) $u_s^0 = c(y^*(\theta_b), \theta_b) - c(y^*(\theta_b), \theta)$,

где $y^*(\cdot)$ определяются выражением (1).

Если же $\theta_b > \theta$, то взаимодействие между данными заказчиком и исполнителем невозможно, так как последний (в силу условия его индивидуальной рациональности) откажется заключать договор, стоимость которого не компенсирует затрат.

Итак, в рассматриваемой модели можно, варьируя $\theta_b \le \theta$, любую точку θ_b сделать информационным равновесием. Заметим, что и здесь, как и в модели купли-продажи, информационное равновесие является стабильным – заказчик ожидает от исполнителя принятия договора, что и будет реализовано.

Рассмотрение более сложных структур информированности является в данной модели неоправданным – оно не дает ничего нового по сравнению с соотношениями (1) – (3). Это связано с тем, что исполнитель является по существу пассивным участником ситуации – он может лишь принять или отвергнуть тот единственный контракт, который «навязывает» ему делающий первый ход заказчик. При этом величины θ_{sb}, θ_{sbs} и т. д. не играют роли.

С другой стороны, заказчик также знает об этой «пассивности» исполнителя, поэтому при определении договора он учитывает лишь θ_b, но не величины, соответствующие более высокому рангу рефлексии – θ_{bs}, θ_{bsb} и т.д.

2.6. КОРРУПЦИЯ

Рассмотрим следующую теоретико-игровую модель коррупции. Пусть имеются n агентов – чиновников, дополнительный доход каждого из которых пропорционален сумме полученных им взяток $x_i \ge 0$, предложение которых будем считать неограниченным, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$. Пусть каждый из n агентов характеризуется своим типом $r_i > 0$, $i \in N$, и тип агента достоверно ему известен, но не известен остальным агентам. Содержательно тип агента может интерпретироваться как субъективное восприятие им «силы» штрафов.

За коррупционную деятельность ($x_i \geq 0$), вне зависимости от ее размера, на агента может быть наложен штраф $\chi_i(x, r_i)$, зависящий от действий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re_+^n$ всех агентов и типа данного агента.

Таким образом, целевая функция i-го агента имеет вид:

(1) $f_i(x, r_i) = x_i - \chi_i(x, r_i),\ i \in N.$

Относительно функции штрафов предположим, что она имеет вид

(2) $\chi_i(x, r_i) = \varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i).$

Содержательно предположение (2) означает, что штраф, накладываемый на i-го агента зависит от его действия и от агрегированной обстановки $Q_i(x_{-i})$ (которая может интерпретироваться как «общий уровень коррумпированности остальных чиновников» с точки зрения i-го агента).

Предположим, что число агентов и общий вид целевых функций являются общим знанием, а относительно параметра $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \Re_+^n$ каждый из агентов имеет иерархию представлений: r_{ij} – представление i-го агента о типе j-го агента, r_{ijk} – представление i-го агента о представлениях j-го агента о типе k-го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Предположим также, что агенты наблюдают общий уровень коррумпированности. Поэтому стабильность информационного равновесия будет иметь место при любых представлениях о типах реальных или фантомных оппонентов, таких, что соответствующее информационное равновесие приводит к одному и тому же значению агрегата $Q_i(\cdot)$ для любого $i \in N$.

Тогда, как нетрудно видеть, для целевых функций агентов (1), (2) выполнены условия утверждения 2 раздела 1.3. Поэтому для любого числа агентов и любой структуры информированности все стабильные равновесия в рассматриваемой игре являются истинными (частный пример игры трех агентов рассмотрен в разделе 1.3). Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 12. Пусть набор действий x_τ^*, $\tau \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие в игре (1), (2). Тогда это истинное равновесие.

Следствие. Уровень коррумпированности в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о типах друг друга. При этом не важно, являются ли сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений. Поэтому любое стабильное информационное управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

Предположим, что

$$\varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i) = x_i\,(Q_i(x_{-i}) + x_i) / r_i,\ Q_i(x_{-i}) = \sum_{j \neq i} x_j,\ i \in N,$$

и все типы одинаковы: $r_1 = \ldots = r_n = r$.

Тогда, как нетрудно убедиться, равновесные действия агентов таковы: $x_i = \dfrac{r}{n+1}$, $i \in N$, а общий уровень коррумпированности составляет $\sum_{i \in N} x_i = \dfrac{nr}{n+1}$.

Изменить последнюю величину можно лишь повлияв непосредственно на типы агентов.

2.7. БИПОЛЯРНЫЙ ВЫБОР

Рассмотрим ситуацию, когда агенты из бесконечно большой «популяции» осуществляют выбор между двумя альтернативами, которые будем для общности называть позитивным и негативным полюсами. Это может быть кандидат на выборах (голосовать «за» или «против»), продукт или услуга (покупать или нет), этический выбор (поступить «хорошо» или «плохо») и пр.

В силу бесконечности числа агентов будем считать, что при решении задачи управления всей «популяцией» выбор каждого конкретного агента не играет роли, а важна доля агентов, выбирающих позитивный полюс. Иначе это можно сформулировать следующим образом: действием «агрегированного» агента является вероятность x выбора им позитивного полюса.

Примем следующие предположения.

1. Существует n различных типов агентов.

2. Доля агентов i-го типа составляет α_i, $0 \le \alpha_i \le 1$.

3. Действие агента i-го типа задается *функцией реакции на ожидание*

$$\pi(p),\ \pi : [0, 1] \to [0, 1],$$

где p – ожидаемая агентами вероятность выбора позитивного полюса произвольным агентом из «популяции». Иными словами, если агент ожидает, что доля выбравших позитивный полюс составляет p, то его действие x_i определяется следующим образом:

$$x_i = \pi_i\,(p).$$

4. Пункты 1–3 являются общим знанием (см., напр, [34]) среди агентов.

Пусть $x_i \in [0, 1]$ – действие агента i-го типа. Тогда доля выбравших позитивный полюс составляет

$$p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\ .$$

Определим *равновесие биполярного выбора* как набор действий x_i, удовлетворяющих системе соотношений

(1) $x_i = \pi_i(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j)$, $i = 1, \ldots, n$.

В качестве отступления заметим, что соотношения (1) являются одной из возможностей описания биполярного выбора. Другие возможные подходы обсуждаются, например, в работах В.А. Лефевра [19], Т.А. Таран [39] и др. В этих работах предполагается, что принимающий решение агент осуществляет *рефлексию первого рода* [34], т.е. занимает позицию наблюдателя по отношению к своему поведению, своим мыслям и чувствам. Иными словами, в нем существует несколько соотнесенных друг с другом уровней, а итоговое решение определяется как влиянием внешней среды, так и состоянием этих уровней. В данной же работе агент понимается как индивид, т.е. «неделимый», и осуществляет *рефлексию второго рода* – относительно принятия решений оппонентами.

Вернемся к обсуждению равновесия биполярного выбора. Заметим, что выражения (1) задают отображение единичного гиперкуба $[0, 1]^n$ на себя:

(2) $(x_1,\ldots, x_n) \to (\pi_1(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j), \ldots, \pi_n(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j))$.

Если функции $\pi_i(\cdot)$ непрерывны (что представляется довольно естественным предположением), то и отображение (2) непрерывно. Тогда по теореме о неподвижной точке (см., например, [35]) у системы (1) имеется хотя бы одно решение.

Приведем пример. Пусть существуют агенты трех типов ($n = 3$), действия которых определяются следующими функциями:

$$\pi_1(p) \equiv 1, \quad \pi_2(p) = p, \quad \pi_3(p) \equiv 0.$$

Содержательно: агенты первого типа независимо ни от чего выбирают позитивный полюс, агенты третьего типа – негативный. Что касается агентов второго типа, то они колеблются, и их действия совпадают с ожидаемым действием «популяции» в целом.

Система (1) в данном случае сводится к соотношениям

$$x_1 = 1, \; x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \; x_3 = 0,$$

откуда (здесь и далее полагаем, что $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, 3$)

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}, x_3 = 0.$$

При этом

(3) $p = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_2}$.

Предположим теперь, что некий управляющий орган – центр – имеет возможность повлиять на ситуацию и стремится увеличить вероятность позитивного выбора в «популяции» в целом (т.е. величину p). Для этого центр может повлиять на агентов второй либо третьей группы (агенты первой группы и так выбирают $x_1 = 1$). Пусть центр может повлиять на третью группу, переведя долю y ее членов во вторую и затратив некий ресурс (например, финансовый) в объеме $C_2 y$. Центр может также повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов о α_3 (независимо от фактического значения этого параметра). Именно, влияние состоит в формировании у второй группы следующего представления:

«доля x членов третьей группы перешли во вторую». Затраты на формирование такого представления составляют C_1x.

Иными словами, центр может изменить либо реальную, либо «фантомную», воображаемую долю агентов третьего типа. При этом совокупный ресурс (бюджет), которым располагает центр, составляет C.

Задача центра состоит в следующем: распределить ресурс C (т.е. выбрать доли x и y) таким образом, чтобы вероятность p была максимальной. Формально оптимизационная задача центра ставится следующим образом (см. (3)):

(4) $p(x, y) = \alpha_1 + (\alpha_2 + y\,\alpha_3)\ \dfrac{\alpha_1}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)} \to \max$

при ограничениях

(5) $C_1x + C_2y \le C,\quad 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1.$

Легко видеть, что задача (4) сводится к максимизации функции $\varphi(x, y) = \dfrac{\alpha_2 + y\alpha_3}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)}$.

Функция $\varphi(x, y)$ возрастает по обоим аргументам x и y, поэтому первое из ограничений (5) обращается в равенство. Поэтому задача свелась к нахождению максимума функции

$$\psi(x) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3(C - C_1x)/C_2}{1-(\alpha_2 + x\alpha_3)} = \frac{1}{C_1C_2}\ \frac{\alpha_2C_2/C_1 + \alpha_3C/C_1 - x\alpha_3}{1-\alpha_2 - x\alpha_3}.$$

Нетрудно видеть, что функция $\psi(x)$ является монотонно возрастающей (соответственно, монотонно убывающей или константой) если выражение

(6) $\dfrac{\alpha_2C_2}{C_1} + \dfrac{\alpha_3C}{C_1} - (1 - \alpha_2)$

положительно (соответственно, отрицательно или равно нулю).

Введем обозначения: $k_1 = \dfrac{C_1}{C}$, $k_2 = \dfrac{C_2}{C}$. Тогда условие положительности выражения (6) запишется в виде

(7) $\alpha_3 > k_1 - \alpha_2\,(k_1 + k_2)$.

Далее будем предполагать, что $C_1 > C$ и $C_2 > C$. Содержательно это означает, что у центра не так много ресурсов, чтобы всех агентов третьего типа «превратить» в агентов второго типа. При этом оптимальным будет такой выбор центра, когда весь ресурс вкладывается в увеличение либо реальной, либо воображаемой (при выполнении (7)) доли агентов второго типа.

Зависимость оптимального выбора центра от параметров (α_2, α_3) изображена на рисунке 8.

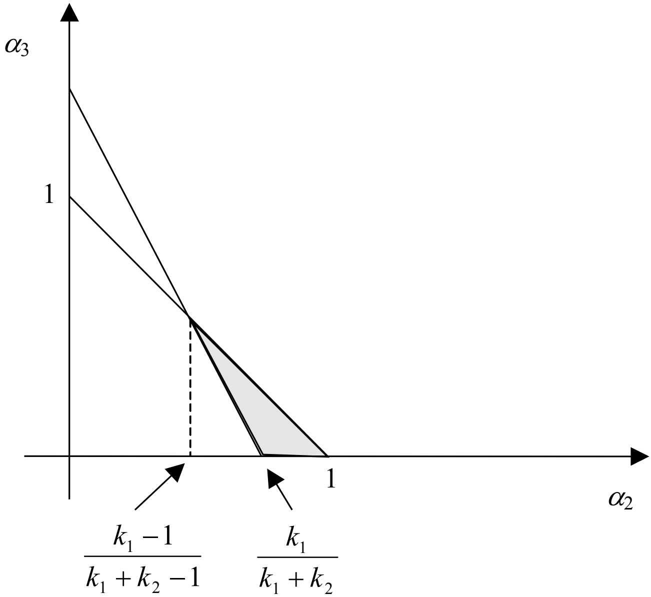

Рис. 8. Оптимальный выбор центра

На рисунке 8 заштрихована область, где выполнено условие (7), т.е. оптимально для центра весь ресурс направить на изменение представлений:

(8) $x = \dfrac{C}{C_1}$, $y = 0$.

Решение (8) отвечает ситуации, когда доля α_2 агентов второго типа достаточно велика. Из рисунка 8 видно, что если $\alpha_2 > \dfrac{k_1}{k_1 + k_2}$, то решение (8) всегда оптимально. Если же

(9) $\frac{k_1 - 1}{k_1 + k_2 - 1} < \alpha_2 < \frac{k_1}{k_1 + k_2}$,

то решение (8) оптимально при достаточно больших α_3. Содержательно последний случай означает следующее: при некотором диапазоне значений параметра α_2 (т.е. при выполнении (9)) оптимально влиять на представления, когда они слишком пессимистичны (т.е. когда α_3 достаточно велико и, следовательно, велика вероятность p выбора негативного полюса).

В заключение отметим, что рассмотрен простейший случай информационного управления в условиях биполярного выбора. Дальнейшее развитие модели (увеличение числа типов агентов, усложнение структуры информированности, усложнение функций реакции на ожидание) и ее сопоставление с наблюдаемыми результатами действий экономических (покупатели) и политических (избиратели) агентов представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

2.8. АКТИВНАЯ ЭКСПЕРТИЗА

Рассмотрим пример рефлексивного управления агентами со стороны центра в модели активной экспертизы. Сначала приведем описание модели и известные результаты исследования [7, 26] *механизмов экспертизы* – получения и обработки информации от экспертов – специалистов в предметных областях.

Пусть имеются n экспертов (далее – агентов), оценивающих какой-либо объект по скалярной шкале (объектом может быть кандидат на пост руководителя, вариант финансирования, эффективность проекта и т.д.). Каждый агент сообщает оценку $s_i \in [d; D]$, $i \in N$, где d – минимальная, а D – максимальная оценка. Итоговая оценка – *коллективное решение* $x = \pi(s)$ – является функцией оценок, сообщенных агентами, $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$. Обозначим $r_i \in [d; D]$ – субъективное мнение i-го агента, то есть его истинное представление об оцениваемом объекте. Предположим, что процедура $\pi(s)$ формирования итоговой оценки является строго возрастающей по всем переменным непрерывной функцией, удовлетворяющей *условию единогласия*: $\forall a \in [d, D]$ $\pi(a, a, \dots, a) = a$.

Обычно предполагается, что агенты сообщают свои истинные мнения $\{r_i\}_{i \in N}$. При этом если каждый из агентов немного ошибается (несознательно и в зависимости от своей квалификации), то, например, средняя оценка $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$ достаточно объективно и точно оценивает объект. Однако если агенты заинтересованы в результатах экспертизы, то они не обязательно будут сообщать свое истинное мнение, то есть механизм $\pi(\cdot)$ может быть подвержен манипулированию.

Формализуем интересы агента. Предположим, что каждый агент, будучи специалистом в своей области, заинтересован в том, чтобы результат экспертизы x был максимально близок к его мнению r_i.

Приведем пример манипулирования. Пусть $n = 3$, $d = 0$, $D = 1$, $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.5$, $r_3 = 0.6$ (агенты упорядочены по возрастанию точек пика), и центр использует следующий механизм обработки оценок: $x = \pi(s) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} s_i$. Если $s_i \equiv r_i, i = \overline{1,3}$, то есть если все агенты сообщают правду, то $x = 0.5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным представлением второго агента, и он полностью удовлетворен коллективным решением. Остальные же агенты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0.5$, а $r_3 > 0.5$. Легко вычислить $s^* = (0; 0,5; 1)$ – равновесие Нэша при данном векторе типов.

Определим следующие числа: $w_1 = \pi(d, D, D) = \pi(0, 1, 1) = 2/3$; $w_2 = \pi(d, d, D) = \pi(0, 0, 1) = {}^1/_3$ (отметим, что $\pi(0, 0, 0) = 0$ и $\pi(1, 1, 1) = 1$). При этом $w_2 \le r_2 \le w_1$ $(1/3 \le 1/2 \le 2/3)$ – на отрезке $[w_2; w_1]$ второй агент является «диктатором с ограниченными полномочиями» (его полномочия ограничены границами отрезка). Построим теперь для рассматриваемого примера механизм, в котором всем агентам выгодно сообщить достоверную информацию, и коллективное решение в котором будет то же, что и в механизме $\pi(\cdot)$.

Организатор экспертизы – центр – может попросить агентов сообщить истинные значения $r = \{r_i\}_{i \in N}$ и использовать их следующим образом (эквивалентный прямой механизм): упорядочить агентов в порядке возрастания сообщенных точек пика; если существует число $q \in \overline{2, n}$, такое, что $w_{q-1} \geq r_{q-1}$; $w_q \leq r_q$ (легко показать, что существует единственный агент с таким номером q), то $x^* = \min (w_{q-1}; r_q)$. В нашем примере $q = 2$ и $1/2 = \min (2/3; 1/2)$.

При этом, очевидно, $s_i^* = d, i < q, s_i^* = D, i > q$. Итак, по сообщению r центр, воспользовавшись числами w_1 и w_2, восстановил равновесие Нэша s^*.

Можно проверить, что в построенном прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для агентов, причем итоговая оценка та же, что и в исходном механизме.

Опишем, следуя [7], общий случай (произвольного числа агентов). Пусть все r_i различны и упорядочены в порядке возрастания, то есть $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ и s^* – равновесие Нэша ($x^* = \pi(s^*)$). По аналогии с рассмотренным выше примером можно показать, что если $x^* > r_i$, то $s_i^* = d$, если $x^* < r_i$, то $s_i^* = D$. Если же $d < s_i^* < D$, то $x^* = r_i$. При этом если $x^* = r_q$, то $\forall j < q \quad s_j^* = d, \;\; \forall j > q \quad s_j^* = D$, а сама величина s_q^* определяется из условия

$$\pi\left(\underbrace{d, d, \ldots, d}_{q-1}, s_q^*, \underbrace{D, D, \ldots, D}_{n-q}\right) = r_q \cdot$$

Таким образом, для определения ситуации равновесия достаточно найти номер q. Для этого введем $(n – 1)$ число:

$$w_i = \pi\left(\underbrace{d, d, \ldots, d}_{i}, \underbrace{D, D, \ldots, D}_{n-i}\right), \; i = \overline{1, n} \cdot$$

Видно, что $w_0 = D > w_1 > w_2 > \ldots > w_n = d$, и если $w_i \leq r_i \leq w_{i-1}$, то $x^* = r_i$, то есть i-ый агент является диктатором на отрезке $[w_i; w_{i-1}]$. Легко показать, что существует единственный агент q, для которого выполнено $w_{q-1} \geq r_{q-1}$, $w_q \leq r_q$.

Определив таким образом q, можно найти итоговую оценку в равновесии: $x^* = \min (w_{q-1}; r_q)$. Сообщение достоверной информации $(\tilde{r}_i \equiv r_i)_{i \in N}$ при этом является доминантной стратегией [7].

Отказавшись от предположения о том, что вектор типов агентов является общим знанием, получаем, что к стабильному информационному равновесию приводят следующие представления реальных и фантомных агентов:

$$r_{\sigma q(r)} \in [\min \{w_{q(r)-1}; r_{q(r)}\}; r_{q(r)}],\ \sigma \in \Sigma,$$
$$r_{\sigma i} \le \min \{w_{q(r)-1}; r_{q(r)}\},\ \sigma \in \Sigma,\ i < q(r),$$
$$r_{\sigma i} \ge \min \{w_{q(r)-1}; r_{q(r)}\},\ \sigma \in \Sigma,\ i > q(r).$$

Рассмотрим пример. Пусть $n = 3$, $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.5$, $r_3 = 0.6$, и центр использует следующий механизм обработки оценок: $x = \pi(s) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} s_i$. Если $s_i \equiv r_i,\ i = \overline{1,3}$, то есть если все эксперты сообщают правду, то $x = 0.5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным представлением второго эксперта, и он удовлетворен результатом полностью. Остальные же эксперты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0.5$, а $r_3 > 0.5$. Следовательно, они попытаются сообщить другие s_1 и s_3. Пусть они сообщают $s_1^* = 0,\ s_2^* = 0.5,\ s_3^* = 1$. Тогда $x^* = \pi(s_1^*, s_2^*, s_3^*) = 0{,}5$. Итоговая оценка не изменилась, но «новый» вектор сообщений является уже равновесием Нэша, то есть в рассматриваемом примере $w_0 = 1$, $w_1 = 2/3$, $w_2 = 1/3$, $w_3 = 0$, следовательно $q = 2$ и

$$r_2 = 1/2 = \min (2/3; 1/2).$$

Таким образом, к стабильному информационному равновесию приводят следующие представления реальных и фантомных агентов: $r_{\sigma 2} = 1/2$, $r_{\sigma 1} \le 1/2$, $r_{\sigma 3} \ge 1/2$, $\sigma \in \Sigma$.

Выше мы, фактически, доказали, что для любого механизма экспертизы $\pi(\cdot)$ можно построить эквивалентный прямой механизм, в котором сообщение достоверной информации является равновесием Нэша. Этот результат позволяет говорить, что, если центр заинтересован в получении достоверной информации от агентов, то он может этого добиться, используя неманипулируемый прямой механизм. Однако интересы центра могут быть другими.

Предположим, например, что центр заинтересован в том, чтобы результат экспертизы был как можно ближе к значению $x_0 \in [d; D]$. Пусть центру известны мнения агентов $\{r_i \in [d; D]\}_{i \in N}$, но никому из них не известны достоверно мнения остальных. Рефлексивное управление в данной ситуации заключается в формировании у агентов таких структур информированности (представлений о представлениях оппонентов), чтобы сообщаемая ими как субъективное информационное равновесие информация приводила бы к принятию наиболее выгодного для центра (наиболее близкого к x_0) решения.

Обозначим $x_{0i}(a_i, r_i)$ – решение уравнения

(1) $\pi(a_i, \ldots, a_i, x_0, a_i, \ldots, a_i) = r_i$,

в котором x_0 стоит на i-ом месте, $i \in N$.

Содержательно, условие (1) – наилучший ответ i-го агента на единогласное сообщение остальными агентами величины a_i.

В силу монотонности и непрерывности механизма $\pi(\cdot)$ при фиксированном типе r_i i-го агента $x_{0i}(a_i, r_i)$ – непрерывная убывающая функция a_i. Потребуем, чтобы $x_0 \in [d; D]$, тогда $\forall\ a_i \in \Re^1$, $\forall\ r_i \in [d; D]$

(2) $x_0 \in [d_i(r_i); D_i(r_i)]$, $i \in N$,

где

(3) $d_i(r_i) = \max \{d; x_{0i}(D, r_i)\}$, $D_i(r_i) = \min \{D; x_{0i}(d, r_i)\}$, $i \in N$.

Утверждение 13. Если тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат x_0, для которого выполнено

(4) $x_0 \in [\max\limits_{i \in N} d_i(r_i); \min\limits_{i \in N} D_i(r_i)]$

может быть реализован как единогласное коллективное решение.

Доказательство. В силу описанной выше структуры равновесия Нэша в механизме активной экспертизы множество информационных равновесий есть $[d; D]^n$.

Рассмотрим следующую структуру информированности i-го агента: $r_{ij} = a_i$, $j \neq i$, $r_{ijk} = a_i$, $k \in N$, то есть все оппоненты с точки зрения i-го агента имеют одинаковые точки пика, равные a_i (см. выражение (1)), считают, что он сам имеет такую же точку пика, и считают этот факт общим знанием.

Таким образом, i-ый агент ожидает от всех оппонентов сообщения a_i как информационного равновесия их игры (отметим, что при этом центру не нужно строить сложные и глубокие структуры информированности и вычислять для них информационные равновесия). Его наилучшим ответом (в силу определения (1) величины a_i) является сообщение $x_{0i}(a_i, r_i)$, диапазон возможных значений которого определяется выражениями (2)-(3). Получили, что $X_i(r_i) = [d_i(r_i); D_i(r_i)]$, $i \in N$.

Так как требуется единогласное принятие решения, то следует вычислить пересечение множеств (2)-(3) по все агентам, что дает выражение (4).

Итак, все агенты сообщают x_0 и в силу условия единогласия это решение принимается (сторонним наблюдателям невозможно придраться к «демократичности» механизма принятия решений и результатам его использования). •

Применим утверждение 13 к линейному анонимному (напомним, что *анонимным* называется механизм принятия решений, симметричный относительно перестановок агентов [21, 25]) механизму экспертизы $\pi(s) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} s_i$, $s_i, r_i \in [0; 1]$, $i \in N$. Вычисляем $a_i = \frac{n\, r_i - x_0}{n-1}$, $i \in N$. Получаем из условия $a_i \in [0; 1]$ (или из (2)-(4)) границы диапазона единогласно реализуемых коллективных решений:

(5) $\max\{0; n(\max_{i \in N} r_i - 1) + 1\} \le x_0 \le \min\{1; n \min_{i \in N} r_i\}$.

Интересно отметить, что из (5) следует ограничение

$$\max_{i \in N} r_i - \min_{i \in N} r_i \le 1 - \frac{1}{n}$$

на разброс мнений экспертов, при котором существует хотя бы один результат x_0, реализуемый за счет рефлексивного управления как единогласно принятое коллективное решение.

С другой стороны, из (5) следует, что $x_0 \in [0; 1]$, если

$$\max_{i \in N} r_i \le 1 - \frac{1}{n}, \quad \min_{i \in N} r_i \ge \frac{1}{n}.$$

Последнее условие свидетельствует, что в линейном анонимном механизме экспертизы достаточным условием единогласной реализации любого коллективного мнения в результате рефлексивного управления является следующее: не должно существовать экспертов как с очень низкими оценками, так и с очень высокими оценками.

Откажемся теперь от требования единогласного принятия коллективного решения. Введем два вектора:

$$d(r) = (d_1(r_1), d_2(r_2), \ldots, d_n(r_n)), \quad D(r) = (D_1(r_1), D_2(r_2), \ldots, D_n(r_n)).$$

Утверждение 14. Если тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат x_0, для которого выполнено

(6) $x_0 \in [\pi(d(r)); \pi(D(r))]$.

может быть реализован как коллективное решение.

Доказательство. Утверждение 14 отличается от утверждения 13 тем, что в нем, с одной стороны, отсутствует одинаковость равновесных сообщений агентов, с другой стороны – расширяется ограничение на реализуемое как информационное равновесие коллективное решение (условие (49) заменено на (6)).

Фиксируем вектор $r \in [d; D]^n$ точек пика агентов. В соответствии со структурой равновесия, описанной выше, каждый агент в равновесии сообщает либо минимальную заявку (ноль), либо максимальную (единицу), либо свой истинный тип (если данный агент является диктатором). Так как у каждого агента можно сформировать произвольные представления о типах остальных агентов и их представлениях и т.д., то каждого из них можно убедить в том, что множество возможных обстановок игры составляет $[d; D]^{n-1}$.

Для этого достаточно сформировать, например, следующую структуру информированности глубины три: *ij*-ый агент должен быть диктатором и этот факт должен быть общим знанием для *ijk*-агентов.

В ходе доказательства утверждения 13 установлено, что $X_i(r_i) = [d_i(r_i); D_i(r_i)]$, $i \in N$. В силу того, что информационные структуры агентов формируются независимо, получаем, что вектор минимальных равновесных заявок есть $d(r)$, максимальных – $D(r)$. Из монотонности и непрерывности процедуры $\pi(\cdot)$ принятия решений следует (6). •

Применим утверждение 14 к линейному анонимному механизму экспертизы $\pi(s) = \frac{1}{n}\sum_{i \in N} s_i$, $s_i, r_i \in [0; 1]$, $i \in N$. Вычислим, какое сообщение s_i i-го агента является для него субъективно оптимальным при обстановке s_{-i} (обозначим $S_{-i} = \sum_{j \neq i} s_j \in [0; n-1]$):

(7) $s_i(r_i, S_{-i}) = n\, r_i - S_{-i}$, $i \in N$.

Следовательно, $X_i(r_i) = [\max\ \{0;\ 1 - n\ (1 - r_i)\};\ \min\ \{1;\ n\ r_i\}]$, $i \in N$. Подставляя с учетом (7) левые и правые границы множеств $X_i(r_i)$ в линейный анонимный механизм планирования, получаем:

(8) $$x_0 \in [\sum_{i \in N} \frac{1}{n} \max\ \{0;\ 1 - n\ (1 - r_i)\};\ \sum_{i \in N} \frac{1}{n} \min\ \{1;\ n\ r_i\}].$$

Из утверждений 13 и 14 (см. их доказательства, содержащие описание вида минимальной структуры информированности, реализующей заданное коллективное решение) можно сделать следующий вывод.

Следствие. При решении задач рефлексивного управления в механизмах активной экспертизы достаточно ограничиться вторым рангом рефлексии экспертов.

Рассмотрим приведенный выше числовой пример с тремя агентами, имеющими точки пика: $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.5$, $r_3 = 0.6$. Пусть $x_0 = 0.8$. Если все агенты сообщают правду, то в непрямом механизме $x = 0.5$; в соответствующем прямом (неманипулируемом) механизме будет принято то же решение. То есть, центру хотелось бы, чтобы каждый из агентов сообщил б*о*льшую оценку, приблизив тем самым итоговое решение к 0.8.

Условие (5) в рассматриваемом примере выполнено. Вычислим следующие величины:

$$0.8 + 2\ a_1 = 3 \times 0.4 \to a_1 = 0.2,$$
$$0.8 + 2\ a_2 = 3 \times 0.5 \to a_2 = 0.35,$$
$$0.8 + 2\ a_3 = 3 \times 0.6 \to a_3 = 0.5.$$

Центр формирует у первого агента убеждение, что типы остальных агентов равны 0.2, они считают, что его тип также равен 0.2 и с их точки зрения этот факт – общее знание. Аналогичные «убеждения» – соответственно 0.35 и 0.5 – формируются у второго и третьего агентов.

Наилучшим ответом первого агента (приводящим к тому, что коллективное решение совпадает с его точкой пика) на сообщение 0.2 остальными агентами является сообщение 0.8. Это же сообщение (в силу определения a_i) является наилучшим ответом всех остальных агентов (второго и третьего). Итак, все сообщают 0.8, и это решение единогласно принимается.

В рассматриваемом числовом примере условие (8) выполнено для любого $x_0 \in [0; 1]$, то есть $n\ (\max_{i \in N}\ r_i - 1) + 1 \le 0$ и $n\ \min_{i \in N}\ r_i \ge 1$.

Рассмотрим другой пример: пусть $n = 2$, $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.7$. Тогда из (5) получаем, что существует единственное x_0, равное 0.4, которое реализуемо как единогласное коллективное решение. В то же время, множество реализуемых в соответствии с утверждением 14 коллективных решений составляет отрезок [0.2; 0.7].

Совпадение границ этого отрезка с типами агентов случайно: например, при $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.5$ единогласно реализуемы коллективные решения из отрезка [0; 0.2], а в рамках утверждения 14 – из отрезка [0; 0.6].

В заключение рассмотрения рефлексивного управления в механизмах активной экспертизы отметим, что результаты утверждений 13 и 14 были получены в предположении, что тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам. Более реалистичным является предположение, что каждый из участников (центр и эксперты) имеет свои представления о диапазонах типов оппонентов, то есть управленческие возможности центра ограничены. Анализ множества коллективных решений, которые могут быть реализованы в этом случае как информационные равновесия, представляется перспективной задачей будущих исследований.

2.9. ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО

Рассмотрим организационную систему, в которой участвуют n агентов с целевыми функциями следующего вида:

$$(1)\quad f_i(\theta, x) = (Q - \alpha \sum_{j \in N} x_j)\, x_i - \frac{x_i^2}{2 r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N$, $\alpha > 0$.

Содержательно, x_i – объем выпуска продукции i-ым агентом, Q – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж (см. модели олигополии Курно в [33, 34, 47]), а второе слагаемое – как затраты на производство. Параметр r_i (тип i-го агента) характеризует эффективность (квалификацию) его деятельности.

Наилучший ответ i-го агента имеет следующий вид:

$$(2)\quad BR_i(x_{-i}, r_i) = (Q - \alpha \sum_{j \neq i} x_j) / (2\,\alpha + 1 / r_i),\ i \in N.$$

Предположим, что каждый агент наблюдает цену $(Q - \alpha \sum_{j \neq i} x_j)$. Тогда выполнены условия утверждения 2, поэтому в рассматриваемой модели ложных равновесий не возникает, т.е. возможно только истинное стабильное информационное равновесие. Приведем иллюстративный численный пример.

Пусть $n = 2$, $\alpha = 1$, $Q = 5$, $r_1 = r_2 = 1$. Вычисляем параметрическое равновесие Нэша:

$$(3)\ x_1(r_1, r_2) = \frac{[1 - \frac{2r_2 + 1}{r_2}]Q}{1 - \frac{(2r_1 + 1)(2r_2 + 1)}{r_1 r_2}},$$

$$(4)\ x_2(\mathrm{r}_1, r_2) = \frac{[1 - \frac{2r_1 + 1}{r_1}]Q}{1 - \frac{(2r_1 + 1)(2r_2 + 1)}{r_1 r_2}}.$$

Из выражений (3) и (4) можно найти типы агентов, при которых наблюдаемый вектор действий (x_1, x_2) будет стабильным информационным равновесием:

(5) $r_1(x_1, x_2) = 1 / [(Q - x_2) / x_1 - 2]$,

(6) $r_2(x_1, x_2) = 1 / [(Q - x_1) / x_2 - 2]$.

Рассмотрим модель динамики представлений агентов о типах друг друга. Пусть каждый из них независимо выбирает действие, подставляя в (3) или (4) свой тип и свои представления о типах оппонента. Затем, после наблюдения выбора оппонента, каждый агент вычисляет в соответствии (5) или (6) новую оценку типа оппонента и в соответствии с гипотезой индикаторного поведения корректирует свои представления. Затем выбор повторяется и т.д.

На рисунках 9-11 приведены графики динамики представлений агентов.

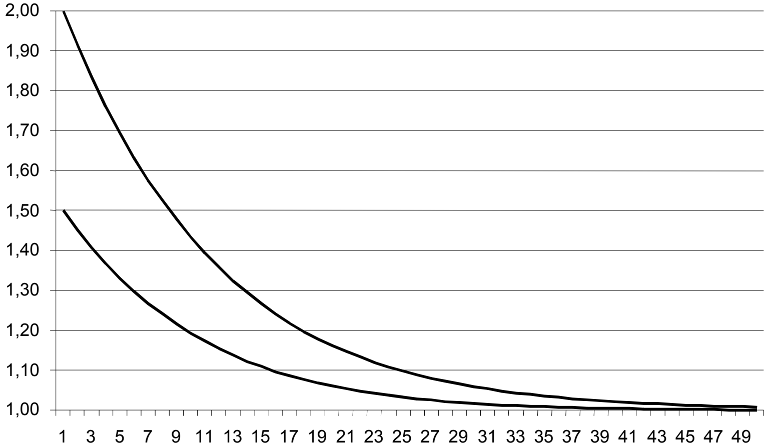

Рис. 9. Оба агента первоначально переоценивают друг друга ($r_{12} = 2$, $r_{21} = 1$)

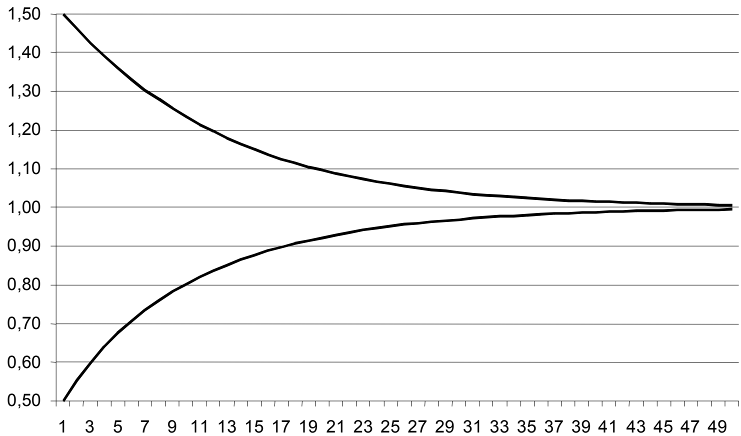

Рис. 10. Первый агент первоначально переоценивает второго, а второй – недооценивает первого ($r_{12} = 1.5$, $r_{21} = 0.5$)

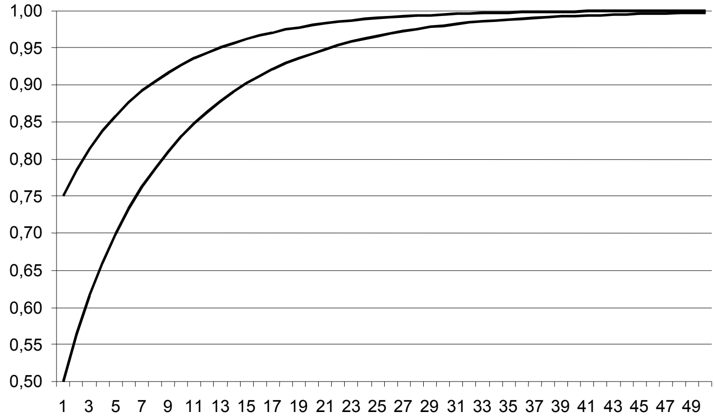

Рис. 11. Оба агента первоначально недооценивают друг друга ($r_{12} = 0.75$, $r_{21} = 0.5$)

Видно, что представления каждого агента о типах оппонента монотонно сходятся к соответствующему истинному значению (1; 1), а действия агентов стремятся к истинному информационному равновесию – параметрическому равновесию Нэша со значениями параметров, равными истинным типам агентов.

2.10. ФОРМИРОВАНИЕ КОМАНДЫ

В последнее время в менеджменте, управлении проектами и других разделах прикладной теории управления организационными системами все большее внимание уделяется командной деятельности персонала организации. Под *командой* понимается коллектив (объединение людей, осуществляющих совместную деятельность и обладающих общими интересами), способный достигать цели автономно и согласованно, при минимальных управляющих воздействиях.

Существенными в определении команды являются два аспекта. Первый – достижение цели, то есть конечный результат совместной деятельности является для команды системообразующим фактором. Второй аспект – автономность и согласованность деятельности – означает, что каждый из членов команды демонстрирует поведение, требуемое в данных условиях (позволяющих достичь поставленной цели), то есть то поведение, которого от него ожидают другие члены команды.

На сегодняшний день, несмотря на большое количество качественных обсуждений, практически отсутствуют формальные модели формирования команды и ее функционирования, поэтому в настоящем разделе приводится модель формирования команды, основывающаяся на рассмотрении иерархий взаимных представлений агентов о *типах* друг друга, то есть о существенных параметрах, определяющих эффективность индивидуальной деятельности[1].

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ агентов. Стратегией i-го агента является выбор действия $y_i \geq 0$, что требует от него затрат $c_i(y_i, r_i)$, где $r_i > 0$ – тип данного агента, отражающий эффективность его деятельности (будем считать, что функции затрат являются функциями типа Кобба-Дугласа). Предположим, что целью совместной деятельности агентов является обеспечение суммарного «действия» $\sum_{i \in N} y_i = R$ с минимальными суммарными затратами $\sum_{i \in N} c_i(y_i, r_i)$. С теоретико-игровой точки зрения можно условно считать, что целевые функции агентов совпадают и определяются взятыми с обратным знаком суммарными затратами.

Содержательными интерпретациями данной задачи являются: выполнение заказа объединением предприятий, выполнение заданного объема работ бригадой, отделом и т.д. Без ограничения общности положим $R = 1$.

Если вектор $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ является общим знанием [34], то, решая задачу условной оптимизации, каждый из агентов может вычислить оптимальный вектор действий

$$y^*(r) = (y_1^*(r),\ y_2^*(r),\ \dots,\ y_n^*(r)),$$

где

(1) $y_i^*(r) = r_i / \sum_{j \in N} r_j$, $i \in N$.

Рассмотрим несколько различных вариантов информированности агентов о векторе их типов, отличающихся от общего знания

[1] *Предполагается, что чем выше эффективность деятельности агента (больше значение его типа), тем меньше его затраты.*

(в рассматриваемой модели имеется иерархия представлений агентов о параметрах друг друга). А именно, ограничимся двумя случаями: в первом каждый агент имеет представления $r_{ij} > 0$ о типах других агентов, во втором – представления $r_{ijk} > 0$ об этих представлениях, $i, j, k \in N$.

В качестве отступления отметим, что если существует центр, которому известны истинные типы агентов и который осуществляет мотивационное управление, то, независимо от информированности агентов при использовании центром пропорциональной системы стимулирования со ставкой оплаты $1 / \sum_{j \in N} r_j$ каждый из агентов независимо выберет соответствующее действие (1) [29].

Будем считать, что свой тип каждому агенту известен достоверно. Кроме того, в рамках аксиомы автоинформированности [34] получаем, что $r_{ii} = r_i$, $r_{iij} = r_{ij}$, $r_{ijj} = r_{ij}$, $i, j \in N$.

В рамках своих представлений каждый агент может предсказать, какие действия выберут другие агенты, какие они понесут индивидуальные затраты и каковы будут суммарные затраты. Если выбор действий производится многократно, и наблюдаемая некоторым агентом реальность оказывается отличной от его представлений, то он вынужден корректировать свои представления и при очередном своем выборе использовать «новые» представления.

Совокупность наблюдаемых i-ым агентом параметром назовем его *субъективной историей игры* и обозначим h_i, $i \in N$. В рамках рассматриваемой модели субъективная история игры может включать:

1) действия, выбранные другими агентами (будем считать, что свои действия агент знает всегда) – $y_{-i} = (y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$;

2) затраты (фактические) других агентов (при этом он может вычислить и суммарные затраты) – $c_{-i} = (c_1, c_2, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n)$;

3) суммарные затраты всех агентов – $c = \sum_{i \in N} c_i$;

4) действия и затраты (фактические) других агентов (при этом он может вычислить и суммарные затраты) – $(y_{-i}; c_{-i})$;

5) действия других агентов и суммарные затраты – $(y_{-i}; c)$.

Видно, что варианты неравнозначны: вариант четыре наиболее «информативен», вариант три менее «информативен», чем вариант два и т.д. Выбор варианта информированности является одним из способов информационного управления со стороны центра.

Два случая структур информированности (представления вида r_{ij} и вида r_{ijk}) и пять вариантов субъективных историй игры (будем считать, что субъективные истории и структуры информированности всех агентов одинаковы, иначе число возможных вариантов резко возрастает) порождают десять моделей, условно обозначенных 1-10 (см. таблицу 1).

Таблица 1

Модели формирования команды

Субъективная история игры	Структура информированности	
	$\{r_{ij}\}$	$\{r_{ijk}\}$
y_{-i}	Модель 1	Модель 6
c_{-i}	Модель 2	Модель 7
c	Модель 3	Модель 8
$(y_{-i};\ c_{-i})$	Модель 4	Модель 9
$(y_{-i};\ c)$	Модель 5	Модель 10

Рассмотрим, какие процедуры принятия решений могут использовать агенты при выборе своих действий. В рамках структуры информированности $\{r_{ij}\}$ i-ый агент может выбирать свое действие либо следуя процедуре (1), тогда

(2) $y_i^*(\{r_{ij}\}) = r_i / \sum_{j \in N} r_{ij}$,

либо он может, оценив действия оппонентов в соответствии с процедурой (2), вычислить свое действие, приводящее к требуемой сумме действий:

(3) $y_i^*(\{r_{ij}\}) = 1 - \sum_{j \neq i} (r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij}),\ i \in N.$

Легко видеть, что процедуры (2) и (3) эквивалентны.

В рамках структуры информированности $\{r_{ijk}\}$ i-ый агент может, оценив действия оппонентов в соответствии с процедурой (1):

(4) $y_{ij}^*(\{r_{ijk}\}) = r_{ij} / \sum_{k \in N} r_{ijk}$, $j \in N,$

вычислить свое действие, приводящее к требуемой сумме действий:

(5) $y_i^*(\{r_{ijk}\}) = 1 - \sum_{j \neq i} (r_{ij} / \sum_{k \in N} r_{ijk}),\ i \in N.$

Описав модели принятия агентами решений в статике, рассмотрим *динамику их коллективного поведения*.

Предположим, что на каждом шаге агенты принимают решения, используя информацию только о предыдущем шаге, то есть субъективная история игры включает только соответствующие значения предыдущего периода времени. Этим предположением мы исключаем из рассмотрения случай, когда принятие решений осуществляется на основании всей наблюдаемой рассматриваемым агентом предшествующей траектории игры. (Модели принятия решений в подобном случае чрезвычайно сложны (см. обзор и результаты исследования моделей динамических организационных систем в [28]) и вряд ли позволят сделать содержательно интерпретируемые выводы.)

Обозначим $W_i^t(h_i^t)$ – текущее положение цели i-го агента в периоде t – его представления I_i^t о типах оппонентов, которые могли бы приводить к наблюдаемым данным агентом их выборам в периоде $t = 0, 1, 2, \ldots, i \in N$.

Предположим, что первоначально агенты имеют представления I_i^t и изменяют их в зависимости от субъективной истории игры в соответствии с *гипотезой индикаторного поведения* [26]:

(6) $I_i^{t+1} = I_i^t + \gamma_i^t\ (W_i^t(h_i^t) - I_i^t),\ t = 1, 2, \ldots, i \in N,$

где γ_i^t – вектор, компоненты которого – числа из отрезка [0; 1], интерпретируемые как «величины шагов» к положению цели и обладающие описываемыми в [35] свойствами, необходимыми для сходимости процедуры (6). Так как представления каждого агента описываются конечным числом параметров r_{ij} или r_{ijk}, $i, j, k \in N$, то под записью (6) будем понимать «векторную» формулировку закона независимого изменения компонент структуры информированности.

Отметим, что гипотеза индикаторного поведения является лишь одним из возможных вариантов описания коллективного поведения [20, 22, 23, 35], но мы ограничимся ее использованием, так как, с одной стороны, ее свойства исследованы наиболее подробно по сравнению с другими процедурами, а с другой стороны –

как показывают имитационные эксперименты, она достаточно адекватно описывает поведение многих реальных субъектов.

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы корректно определить, что будет пониматься под командой. А именно, **командой** будем считать множество агентов, выборы которых согласованы с иерархией их взаимных представлений друг о друге. В рассматриваемой модели командой будет набор агентов с такой структурой информированности, которая является неподвижной точкой отображения (6) при условии, что действия, выбираемые агентами в зависимости от структур их информированности, определяются выражениями (2) или (5). Введенное определение команды качественно близко к определениям свойств *стабильности* и *согласованности информационного управления*, отвечающих за то, чтобы реальные действия или выигрыши агентов совпадали с ожидаемыми действиями или выигрышами (см. выше и [33, 34]).

Таким образом, в каждом конкретном случае динамика изменения взаимных представлений агентов описывается зависимостью $W_i^t(\cdot)$ положения цели от субъективной истории игры. Рассмотрим модели 1-10 (см. таблицу 1), детализировав историю игры и положения целей.

<u>Модель 1.</u> Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает действия x_{-i}, выбранные другими агентами.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их действия, выбираемые в соответствии с выражением (2), совпадут с наблюдаемыми действиями x_{-i}:

(7) $\Omega_i^1 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij} = x_j, j \in N \setminus \{i\}\}$.

Обозначим $w_{ij}^t(x_{-i}^t)$ – j-ую проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^1. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать следующим образом

(8) $r_{ij}^{t+1} = r_{ij}^t + \gamma_{ij}^t\ (w_{ij}^t(x_{-i}^t) - r_{ij}^t), j \in N \setminus \{i\}, t = 1, 2, \dots, i \in N,$

а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Отметим, что данная процедура определения положения цели не является единственно возможной. Например, альтернативой является вычисление агентом на основе своих представлений предполагаемых действий других агентов в соответствии с процедурой (2), а затем выбор своего действия, дополняющего сумму действий оппонентов до требуемой величины (в рассматриваемой модели принятой равной единице) – см. также пример ниже.

Модель 2. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает затраты c_{-i} других агентов.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их затраты, при действиях, выбираемые в соответствии с выражением (2), совпадут с наблюдаемыми затратами c_{-i}:

(9) $$\Omega_i^2 = \{r_{ij} > 0, j \in N \setminus \{i\} \mid c_j(r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij}, r_{ij}) = c_j, j \in N \setminus \{i\}\}.$$

Обозначим $w_{ij}^t(c_{-i})$ – j-ую проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^2. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать процедурой (8), а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Качественно, данный случай (в смысле информативности и разрешимости соответствующей системы уравнений – см. выражения (7) и (9)) не сильно отличается от модели 1.

Модель 3. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ij}\}$, наблюдает суммарные затраты c всех агентов.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых суммарные затраты совпадут с наблюдаемыми суммарными затратами c:

(10) $$\Omega_i^3 = \{r_{ij} > 0, j \in N\setminus\{i\} \mid c_i(y_i, r_i) + \sum_{j \in N\setminus\{i\}} [c_j(r_{ij} / \sum_{j \in N} r_{ij}, r_{ij})] = c\}.$$

Обозначим $w_{ij}^t(c)$ – j-ую проекцию ближайшей к точке $(r_{ij}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^3. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать процедурой (8) а выбор им действий будет следовать выражению (2).

Качественно, данный случай (в смысле информативности и множественности решений уравнения, входящего в определение множества Ω_i^3 в выражении (10), а также сложности моделирования) существенно отличается от моделей 1 и 2.

Модели 4 и 5 описываются по аналогии с моделями 1 и 2 и рассматривать их подробно мы не будем.

Модель 6. Будем считать, что агент i, имеющий структуру информированности $\{r_{ijk}\}$, наблюдает действия x_{-i}, выбранные другими агентами.

Обозначим множество тех типов оппонентов i-го агента, при которых их действия, выбираемые в соответствии с выражением (4), совпадут с наблюдаемыми действиями x_{-i}:

(11) $\Omega_i^6 = \{r_{ijk} > 0, j \in N \setminus \{i\}, k \in N \mid r_{ij} / \sum_{k \in N} r_{ijk} = x_j, j \in N \setminus \{i\}\}$.

Обозначим $w_{ijk}^t(x_{-i}^t)$ – jk-ую проекцию ближайшей к точке $(r_{ijk}^t)_{j \in N \setminus \{i\}}$ точки множества Ω_i^6. Тогда динамику представлений i-го агента можно описать следующим образом

(12) $r_{ijk}^{t+1} = r_{ijk}^t + \gamma_{ij}^t\,(w_{ijk}^t(x_{-i}^t) - r_{ijk}^t), j \in N \setminus \{i\}, t = 1, 2, \ldots, i \in N,$

а выбор им действий будет следовать выражению (5), то есть:

(13) $y_i^{t*}(\{r_{ijk}^t\}) = 1 - \sum_{j \neq i} (r_{ij}^t / \sum_{k \in N} r_{ijk}^t), i \in N.$

Модель 6 по технике описания и анализа аналогична модели 1, модель 7 – модели 2 т.д., поэтому рассматривать подробно модели 7-10 мы не будем.

Итак, с точки зрения каждого из агентов в модели 1 имеется $n - 1$ уравнение с $n - 1$ неизвестным, в модели 2: $n - 1$ уравнение с $n - 1$ неизвестным, в модели 3: одно уравнение с $n - 1$ неизвестным, в модели 4: $2(n - 1)$ уравнений с $n - 1$ неизвестным, в модели 5: n уравнений с $n - 1$ неизвестным, в модели 6: $n - 1$ уравнение с $n(n - 1)$ неизвестным и т.д.

В заключение настоящего раздела рассмотрим наиболее простую из десяти перечисленных выше моделей, а именно – модель 1 системы из трех агентов, имеющих сепарабельные квадратичные функции затрат $c_i(y_i, r_i) = (y_i)^2 / 2 r_i$.

Модель 1 (пример). Из (7) вычисляем:

$$w_{13}(x_2, x_3) = x_3 r_1 / (1 - x_2 - x_3),$$
$$w_{12}(x_2, x_3) = x_2 r_1 / (1 - x_2 - x_3),$$
$$w_{21}(x_1, x_3) = x_1 r_2 / (1 - x_1 - x_3),$$
$$w_{23}(x_1, x_3) = x_3 r_2 / (1 - x_1 - x_3),$$
$$w_{31}(x_1, x_2) = x_1 r_3 / (1 - x_1 - x_2),$$
$$w_{32}(x_1, x_2) = x_2 r_3 / (1 - x_1 - x_2),$$

Пусть r_1 =1,8; r_2 = 2; r_3 = 2,2, а начальные представления агентов о типах друг друга одинаковы и равны двум. Объективно оптимальным (в смысле минимума суммарных затрат) является вектор действий (0,30; 0,33; 0,37).

Предположим, что агенты действуют следующим образом: на основании собственных представлений о своем типе и типах оппонентов они вычисляют в соответствии с процедурой (2) действия оппонентов, доставляющие «субъективный» суммарный минимум сумме затрат (предсказывают действия оппонентов); сравнивают наблюдаемые действия с предсказанными и изменяют свои представления о типах оппонентов пропорционально разности между наблюдаемыми и предсказанными действиями с коэффициентом пропорциональности γ_{ij}^t = 0,25, $i, j \in N$, t = 1, 2, … .

В результате такой процедуры получаем через 200 шагов вектор действий (0,316; 0,339, 0,345) и следующие представления агентов о типах друг друга $r_{12} = 1{,}93 < r_2$, $r_{13} = 1{,}94 < r_3$, $r_{21} = 1{,}86 > r_1$, $r_{23} = 2{,}01 < r_3$, $r_{31} = 2{,}02 > r_1$, $r_{32} = 2{,}17 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью, ситуация является стабильной – ожидаемые действия и наблюдаемые совпадают с точностью до четырех знаков после запятой.

На рисунке[1] 12 приведена динамика действий агентов, на рисунке 4 – суммарное «рассогласование» действий агентов (корень из суммы квадратов разностей наблюдаемых и ожидаемых действий).

---

[1] *Все рисунки настоящего примера представляют собой результаты имитационного моделирования.*

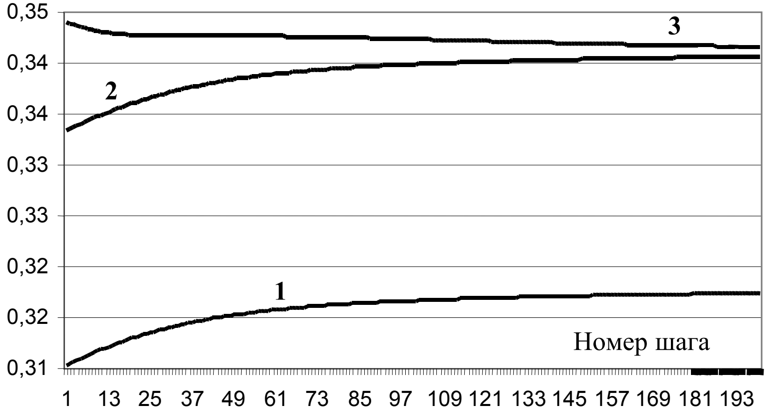

Рис. 12. Динамика действий агентов

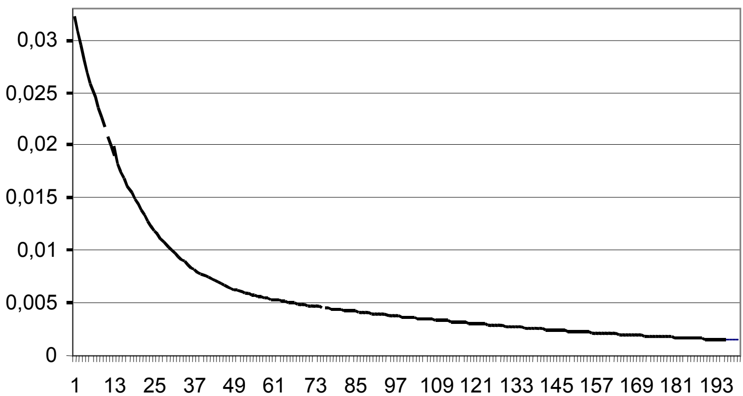

Рис. 13. Динамика рассогласования

Пусть при $r_1 = 1{,}8;$ $r_2 = 2;$ $r_3 = 2{,}2$ начальные представления агентов о типах друг друга изменились и стали равны следующим значениям

$$r_{12}^0 = 2,\ r_{13}^0 = 2{,}5,\ r_{21}^0 = 1{,}5,\ r_{23}^0 = 2{,}5,\ r_{31}^0 = 1{,}5,\ r_{32}^0 = 2.$$

Объективно оптимальным (в смысле минимума суммарных затрат) является по-прежнему вектор действий (0,30; 0,33; 0,37).

Через 200 шагов вектор действий (0,298; 0,3484, 0,3524) и следующие представления агентов о типах друг друга $r_{12} = 2{,}1 > r_2$, $r_{13} = 2{,}12 < r_3$, $r_{21} = 1{,}71 < r_1$, $r_{23} = 2{,}01 < r_3$, $r_{31} = 1{,}85 > r_1$, $r_{32} = 2{,}16 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью, ситуация является стабильной – ожидаемые действия и наблюдаемые совпадают с точностью до четырех знаков после запятой.

На рисунке 14 приведена динамика действий агентов, на рисунке 15 – суммарное «рассогласование» действий агентов.

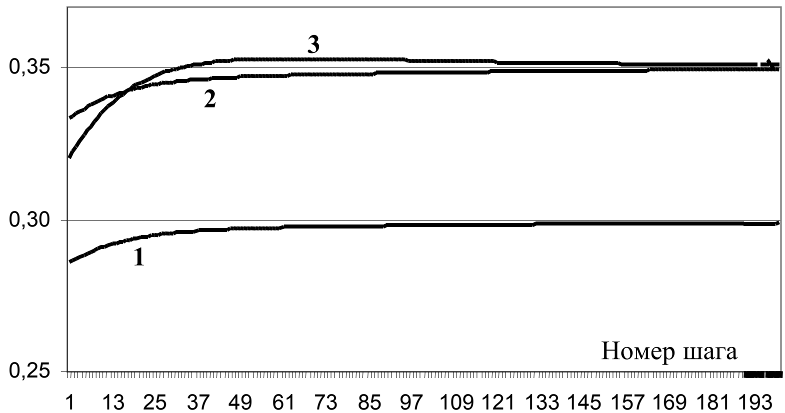

Рис. 14. Динамика действий агентов

При использовании процедуры (8) при тех же начальных данных получаем вектор действий (0,318; 0,341, 0,341) и следующие представления агентов о типах друг друга $r_{12} = 1{,}93 < r_2$, $r_{13} = 1{,}93 < r_3$, $r_{21} = 1{,}87 > r_1$, $r_{23} = 2{,}00 < r_3$, $r_{31} = 1{,}05 > r_1$, $r_{32} = 2{,}2 > r_2$. Несмотря на несовпадение представлений с реальностью, в этом случае ситуация также является стабильной – ожидаемые действия и наблюдаемые совпадают с точностью до шести знаков после запятой.

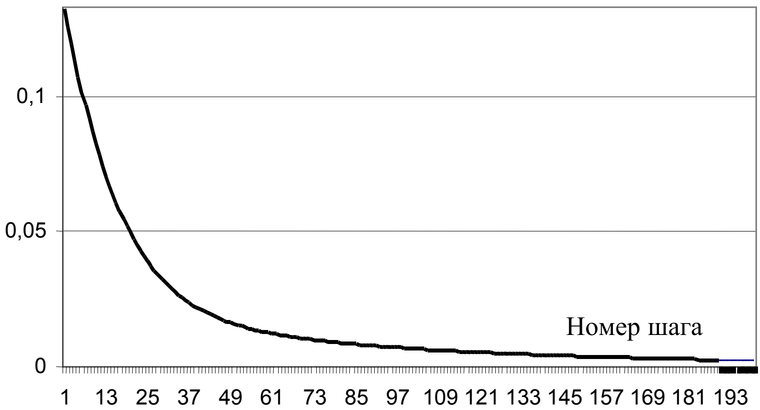

Рис. 15. Динамика рассогласования

Такое явление, как стабильность информационного равновесия, в котором представления агентов друг о друге не совпадают с истиной, имеет простое объяснение: набор систем уравнений (7) для всех агентов относительно представлений агентов и их действий имеет не единственное решение. Действительно, например, в случае двух агентов система из трех уравнений

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{r_{12}}{r_1 + r_{12}} = x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ \dfrac{r_{21}}{r_2 + r_{21}} = x_1 \end{cases}$$

с четырьмя неизвестными r_{12}, r_{21}, x_1, x_2 имеет бесконечное множество решений: выражая все неизвестные через x_1 получим следующее семейство решений (при подстановке представлений агентов в (2) получаются тождества): $r_{12} = r_1 (1 / x_1 - 1)$, $r_{21} = r_2\, x_1 / (1 - x_1)$, $x_2 = 1 - x_1$, $x_1 \in (0; 1)$.

Отметим, что переход к модели 4, то есть добавление информации о затратах оппонентов, может сузить множество решений соответствующей системы уравнений. В рассматриваемой модели одновременное наблюдение затрат и действий агента позволяет однозначно определить его тип (за один шаг).

Приведем пример. Пусть имеются два агента, у которых $r_1 = 1{,}5$; $r_2 = 2{,}5$. Начальные представления: $r_{12}^0 = 1{,}8$, $r_{21}^0 = 2{,}2$, то есть существенно «неправильные». Конечные (через 200 шагов) представления агентов друг о друге равны $r_{12} = 1{,}747$; $r_{21} = 2{,}147$, то есть не приблизились к истине.

На рисунке 16 приведена динамика действий агентов, на рисунке 17 – суммарное «рассогласование» действий агентов.

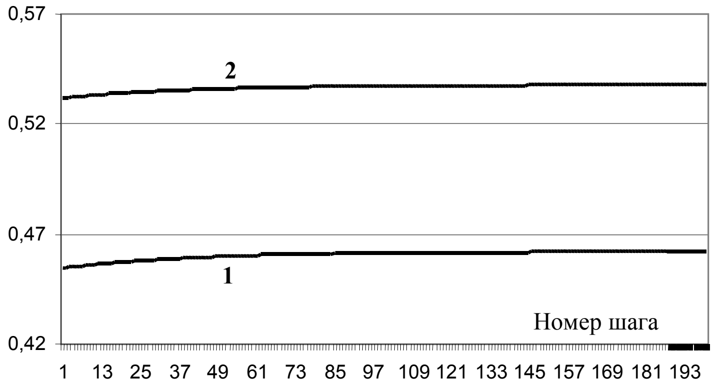

Рис. 16. Динамика действий агентов

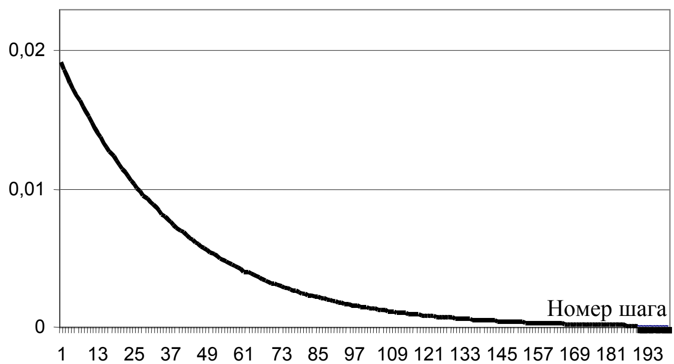

Рис. 17. Динамика рассогласования

Субъективно равновесными являются действия $x_1 = 0{,}4614$; $x_2 = 0{,}5376$. При этом наблюдаемые действия являются информационным равновесием – они согласованы с индивидуальными представлениями агентов (удовлетворяют системе уравнений (14)).

Множество субъективных равновесий для рассматриваемого примера изображено на рисунке 18, на котором кружком помечена начальная точка, ромбиком – истинные значения типов, стрелкой указано изменение представлений агентов.

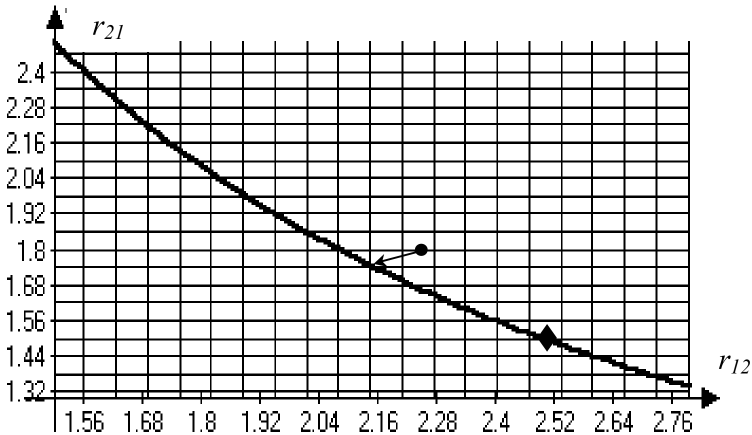

Рис. 18. Множество субъективных равновесий

Из системы уравнений (14) следует, что стабильными будут все информационные равновесия, удовлетворяющие следующему условию:

(15) $r_{12}\, r_{21} = r_1\, r_2$.

Множество взаимных представлений (r_{12}; r_{21}), удовлетворяющих (15) представляет собой гиперболу на соответствующей плоскости. Пример такой гиперболы для случая $r_1 = 2$; $r_2 = 1$.

Проведенный анализ дает возможность не только определить множество ложных равновесий (15), но и исследовать области их притяжения: из (8) следует, что динамика взаимных представлений удовлетворяет следующему уравнению:

(16) $\dfrac{\Delta r_{12}^t}{\Delta r_{21}^t} = \dfrac{\gamma_{12}^t}{\gamma_{21}^t}\ \dfrac{r_{12}^{t-1}}{r_{21}^{t-1}}$, $t = 1, 2, \dots$,

следовательно, при постоянных и одинаковых «шагах» γ траекториями изменения взаимных представлений будут прямые, проходящие через ноль. Угол наклона этих прямых (см. рисунок 19) – областей притяжения точек их пересечения с гиперболой (15) – определяется начальной точкой (например, любая начальная точка, лежащая на выделенной на рисунке 19 жирным шрифтом прямой $r_{12} = r_{21} / 2$, приводит к истинному равновесию).

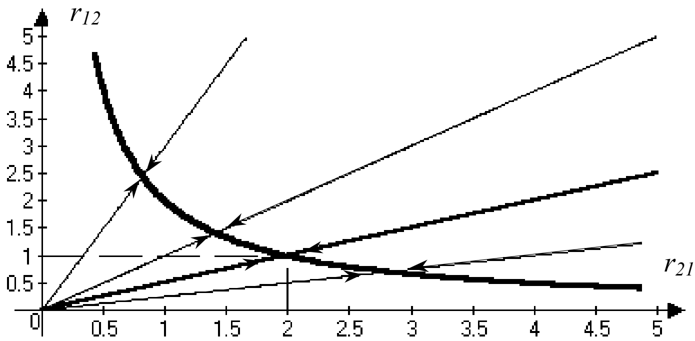

Рис. 19. Множество субъективных равновесий и области их притяжения

Данный факт представляет интерес с точки зрения информационного управления – зная интересующую его конечную точку, центр легко может вычислить множество начальных точек (прямую), начав движение из которой агенты сами придут в требуемое для центра равновесие[1].

Завершив рассмотрение примера, можно сделать вывод, что стабильность команды и слаженность ее работы может достигаться, в том числе, и при ложных представлениях членах команды друг о друге. Выход из ложного равновесия требует получения агентами дополнительной информации друг о друге.

Таким образом, модели формирования и деятельности команд, описываемые в терминах рефлексивных игр, не только отражают автономность и согласованность деятельность команды, но и

[1] *В случае переменных «шагов» задача сводится к поиску траектории, удовлетворяющей (16) и проходящей через заданную точку множества (16).*

позволяют ставить и решать задачи управления процессом формирования команды.

Действительно, из рассмотрения моделей 1-10 следует, что существенной является та информация, которой обладают агенты об истории игры. Поэтому одна из управленческих возможностей заключается в создании, во-первых, разнообразных ситуаций деятельности (обеспечивающих выявление существенных характеристик агентов – см. модели научения в [23]) и, во-вторых, обеспечения максимальных коммуникаций и доступа ко всей существенной информации.

Кроме того, проведенный анализ свидетельствует, что на скорость формирования команды (скорость сходимости к равновесию) существенно влияют параметры γ – «размеры шагов», фигурирующие в процедурах динамики коллективного поведения агентов (см. также [22, 35]). Влияние на эти параметры также может рассматриваться как управление со стороны центра[1].

В связи с приведенными примерами возникает естественный вопрос: насколько ситуация ложного равновесия характерна? Попытаемся прояснить это, сформулировав в общем случае условия его возникновения (применительно к модели 1).

Пусть вектор типов агентов $r = (r_1, \mathrm{r}_2, ..., r_n)$ является общим знанием, и при данном векторе существует единственный оптимальный вектор действий $y^*(r) = (y_1^*(r), y_2^*(r), ..., y_n^*(r))$. Тем самым, определено n функций φ_i: $r \to y_i^*(r)$, $i \in N$, ставящих в соответствие вектору типов r оптимальное действие i-го агента (будем считать, что функции φ_i определены лишь на таких векторах типов, для которых существует (притом единственный) вектор оптимальных действий.)

Теперь предположим, что только что описанная ситуация выполняется *субъективно*: каждый из агентов *считает*, что вектор типов является общим знанием. Тогда структура информированности игры описывается N векторами вида $(r_{i1}, r_{i2}, ..., r_{in})$, $i \in N$. Информационное равновесие $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ будет стабильным,

---

[1] *Следует иметь в виду, что, с одной стороны, увеличение размера шага ведет к увеличению скорости сходимости, однако при слишком больших размерах шагов процедура может оказаться неустойчивой.*

если каждый из агентов увидит те действия оппонентов, какие и ожидает. Это означает выполнение соотношений

(17) $\varphi_i(r_{j1}, r_{j2}, \ldots, r_{jn}) = y_i^*(r)$, $i,j \in N$.

Если равновесие y^* является произвольным, то (17) задает $n\,(n-1)$ ограничение на структуру информированности. Если, далее, тип каждого агента фиксирован (и, разумеется, известен самому агенту), то для выполнения соотношений (17) требуется вычислить $n\,(n-1)$ величину r_{ij}, $i, j \in N$, $i \neq j$.

Системе (17) заведомо удовлетворяет набор r_{ij}, для которого $r_{ij} = r_j$ при всех i и j. Таким образом, вопрос о существовании ложного равновесия при фиксированном наборе типов $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ сводится к следующему: существует ли у системы (17), в которой $n\,(n-1)$ уравнение и столько же подлежащих определению величин, более одного решения?

Можно выдвинуть следующую гипотезу: ситуация ложного равновесия является скорее исключением, и его возникновение в рассмотренных выше примерах обусловлено специфическим видом взаимодействия агентов. Этот тезис подтверждают некоторые из рассматриваемых в настоящей работе примеров, в которых ложного равновесия не возникает.

2.11. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА

В рассмотренных выше моделях (формирование команды, дуополия Курно) исследовалась стабильность информационного равновесия, определяемого как «равновесие Нэша» игры агентов (реальных и/или фантомных). В ряде моделей оказывается, что существует более сильное равновесие – равновесие в доминантных стратегиях (РДС), определяемое как вектор абсолютно оптимальных (то есть не зависящих от обстановки и вектора типов остальных агентов) действий агентов.

Утверждение 15. РДС является стабильным информационным равновесием.

Справедливость утверждения 15 вытекает из определений РДС и информационного равновесия. Из него следует, что в системах, в которых существует РДС, задача исследования информационного равновесия отчасти вырождается. Однако это не значит, что вырождается задача исследования стабильности равновесия – как показывают рассматриваемые ниже модели механизмов распределения ресурса и активной экспертизы выбор агентами доминантных стратегий может производиться в рамках широкого диапазона их взаимных представлений друг о друге.

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ агентов, имеющих целевые функции $f_i(x_i, r_i)$, где $x_i \geq 0$ – количество выделяемого i-му агенту ресурса, $r_i \geq 0$ – его тип – оптимальное для него количество ресурса, то есть будем считать, что $f_i(x_i, \cdot)$ – однопиковая функция [26] с *точкой пика* r_i, $i \in N$.

Будем считать, что каждый агент достоверно знает свою точку пика (свой тип), тогда как центр не имеет об этих точках никакой информации.

Задачей центра является распределение ресурса R на основании заявок $s_i \in [0; R]$, $i \in N$, агентов (то есть действиями агентов в рассматриваемой модели являются выбираемые ими сообщения центру). Принцип принятия решений центром: $x_i = \pi_i(s)$, $i \in N$, где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ называется *механизмом* (*процедурой*) *планирования*.

Относительно свойств процедуры планирования, следуя [7, 8, 26], предположим:

1) $\pi_i(s)$ непрерывна и строго монотонно возрастает по s_i, $i \in N$;

2) $\pi_i(0, s_{-i}) = 0 \ \forall \ s_{-i} \in [0; R]^{n-1}$, $i \in N$;

3) механизм распределения ресурса анонимен, то есть произвольная перестановка номеров агентов приводит к соответствующей перестановке количеств получаемых ими ресурсов.

В [8, 25, 26] доказано, что в случае, когда типы агентов являются общим знанием, во-первых, ситуация равновесия Нэша $s^*(r)$ игры агентов имеет (для механизмов, удовлетворяющих свойствам 1 и 2) следующую структуру: $\forall \ i \in N, \ \forall \ r \in \Re^n$

(1) $\pi_i(s^*(r)) < r_i \Rightarrow s_i^*(r) = R,$

(2) $s_i^*(r) < R \Rightarrow \pi_i(s^*(r)) < r_i,$

и, во-вторых, все механизмы распределения ресурса, удовлетворяющие свойствам 1-3, эквивалентны (то есть приводят к тем же равновесиям) механизму пропорционального распределения: агенты получают ресурс в количестве

$$(3)\ \pi_i(s) = \begin{cases} s_i, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j \le R \\ \min\left\{ s_i,\ R\, s_i / \sum_{j=1}^{n} s_j \right\}, & \text{если } \sum_{j=1}^{n} s_j > R \end{cases},$$

Последнее утверждение позволяет сконцентрировать внимание на механизме (3).

В [8, 25] изложен алгоритм поиска равновесия Нэша игры агентов, основывающийся на *процедуре последовательного распределения ресурса*[1]. Ее идея заключается в следующем:

0. Агенты упорядочиваются по возрастанию точек пика. Множество диктаторов (т.е. агентов, получающих оптимальное для себя количество ресурса) является пустым.

1. Весь ресурс распределяется между агентами поровну.

2. Если $r_1 < R / n$, то первый агент включается в множество диктаторов, и всем агентам выделяется ресурс в количестве r_1 (если $r_1 < R / n$, то множество *диктаторов*[2] пусто и все агенты в равновесии сообщают одинаковые заявки и получают одинаковое количество ресурса, на этом алгоритм останавливается).

3. Положив $r_i := r_i - r_1,\ i := i - 1,\ R := R - n\, r_1$, повторяем шаг 2 (число повторений второго шага, очевидно, не превосходит числа агентов).

В результате применения процедуры последовательного распределения ресурса определяется множество $D(r) \subseteq N$ диктаторов, получающих ресурс в оптимальном для себя объеме (определяемым точками пика). Остальные агенты (не диктаторы) получают в силу анонимности механизма распределения ресурса одинаковое его количество:

$$x_0(r) = (R - \sum_{j \in D(r)} r_j\,) / (n - |D(r)|).$$

---

[1] *Отметим, во-первых, что процедура последовательного распределения ресурса является прямым механизмом – использует непосредственно информацию о точках пика агентов. Во-вторых, данная процедура является неманипулируемой, то есть, каждому агенту выгодно сообщать центру достоверную информацию о своей точке пика при условии, что центр обязуется использовать процедуру последовательного распределения.*

[2] *Напомним, что диктатором называется агент, получающий абсолютно оптимальный для себя план* ($x_i = r_i$).

Откажемся теперь от предположения о том, что типы агентов являются общим знанием, и исследуем информационные равновесия и их стабильность. Будем считать, что функцией наблюдения каждого агента является вектор действий оппонентов (см. раздел 1.4). Тогда, согласно утверждению 2 из раздела 1.3, возможны лишь истинные информационные равновесия. При этом, однако, представления о типах оппонентов могут быть как адекватными, так и не адекватными.

Рассмотрим следующие варианты:

Случай 1. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что

$$D(r) = N$$

(такое возможно, если $\sum_{j \in N} r_j \le R$).

Тогда истинные типы агентов являются общим знанием.

Случай 2. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что $D(r) = \varnothing$ – такое возможно, если

(4) $\min_{i \in N} \{r_i\} > R / n$.

Тогда наилучший ответ каждого агента не зависит от его субъективных представлений, удовлетворяющих (4), и любая комбинация таких представлений агентов будет образовывать истинное равновесие.

Больший интерес представляет промежуточный случай, когда существуют как агенты-диктаторы, так и не-диктаторы.

Случай 3. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что

$$D(r) \ne \varnothing,\ D(r) \ne N.$$

Тогда, с учетом наблюдаемости выбираемых действий, агент-диктатор по определению в равновесии получает ресурс, в точности равный его типу. Следовательно, относительно их типов ни у кого из агентов стабильных неадекватных представлений быть не может (см. случай 1):

(5) $r_{\sigma i} = r_i,\ \sigma \in \Sigma,\ i \in D(r)$.

Относительно же типов агентов из множества $N \setminus D(r)$ стабильные неадекватные представления могут существовать:

(6) $r_{\sigma i} \ge \min_{j \in N \setminus D(r)} r_j,\ \sigma \in \Sigma,\ i \in N \setminus D(r)$.

Приведем пример. Пусть $n = 3$, $R = 1$, $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.3$, $r_3 = 0.6$. Тогда

$$s_1^* = 0.4,\ s_2^* = 0.6,\ s_3^* = 1,$$

$$x_1^* = r_1 = 0.2,\ x_2^* = r_2 = 0.6,\ x_3^* = 0.5.$$

Из (5) и (6) получаем, что имеет место: $\forall\, \sigma \in \Sigma$

$$r_{\sigma 1} = r_1,\ r_{\sigma 2} = r_2,\ r_{\sigma 3} \geq 0.5.$$

Таким образом, в монотонных анонимных механизмах распределения ресурса стабильные неадекватные представления могут существовать только относительно типов агентов, не входящих в число диктаторов. При этом, однако, вектор распределяемых ресурсов оказывается таким же, как и в случае полного знания.

2.12. СТРАХОВАНИЕ

В формальных моделях управления риском, в том числе – страхования (актуарная математика), как правило, не учитываются свойства активности страхователей и страховщиков, проявляющиеся в рефлексии, способности искажать информацию и т.д. Исключение составляют работы [3, 8], рассматривающие модели взаимного и смешанного страхования, в которых страховщик использует информацию, сообщаемую страхователями, для определения параметров страховых контрактов, и предлагается «механизм скидок», в котором каждому страхователю выгодно сообщение достоверной информации. В настоящем разделе рассматриваются модели взаимного страхования, в которых агенты – участники системы взаимного страхования – имеют иерархию представлений о вероятностях наступления страховых случаев для каждого из них.

Рассмотрим объединение из n страхователей (которое в модели взаимного страхования будем считать страховщиком) – агентов, имеющих целевые функции (определяемые ожидаемыми полезностями)

(1) $Ef_i = g_i - r_i + p_i\,[h_i - Q_i],\ i \in N$,

где g_i отражает детерминированную прибыль от хозяйственной деятельности i-го страхователя; r_i – страховой взнос; h_i – страховое возмещение; p_i – вероятность наступления страхового случая (будем считать, что страховые случаи у различных агентов – независимые события); Q_i – потери при наступлении страхового случая, $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множество страхователей. Для простоты ограничимся описанием взаимодействия страхователей в течение одного промежутка времени, на протяжении которого однократно производится сбор взносов и компенсация ущербов.

В соответствии с (1) предполагается, что все страхователи одинаково относятся к риску, но в общем случае различаются вероятностями наступления страхового случая и соответствующими потерями. Известно (см. [3, 8] и др.), что перераспределение риска взаимовыгодно только для агентов, отличающихся отношением к риску. Поэтому, с одной стороны, можно считать, что все страхователи нейтральны к риску, а, с другой стороны, что основными эффектами, требующими исследования в рассматриваемой модели взаимного страхования, являются рефлексия страхователей и неполная их информированность – так как все страхователи одинаково относятся к риску, то при условии, что все они обладают полной информацией друг о друге, допустимо произвольное его перераспределение между ними; если же информированность неполная или отсутствует общее знание, то возможно нарушение требования сбалансированности взносов и ожидаемых выплат.

В условиях полной информированности суммарный страховой взнос равен $R = \sum_{i \in N} r_i$, а ожидаемое страховое возмещение равно $H = \sum_{i \in N} p_i h_i$. Так как рассматривается взаимное (некоммерческое) страхование, то в силу принципа эквивалентности [3] должно иметь место $R = H$, то есть

(2) $\sum_{i \in N} r_i = \sum_{i \in N} p_i h_i$.

Отметим, что условие (2) отражает равенство суммарного страхового взноса математическому ожиданию выплат, то есть, задачи о разорении фонда взаимного страхования не рассматриваются.

Если осуществляется полное возмещение ущерба (предположение о неполном возмещении ущерба, то есть априорная фиксация предполагаемого уровня страхового возмещения, не изменит качественно основных результатов анализа механизмов взаимного страхования) при наступлении страхового случая ($h_i = Q_i$, $i \in N$, $H = \sum_{i \in N} p_i Q_i$), то в условиях полной информированности можно было бы использовать следующий механизм взаимного страхования:

(3) $r_i = p_i\, Q_i,\ i \in N,$

в рамках которого страховой взнос каждого страхователя в точности равен его ожидаемому ущербу (страховая сумма совпадает с потерями, а страховой тариф, равный нетто-ставке, определяется соответствующей вероятностью наступления страхового случая).

Однако, если индивидуальные параметры страхователей известны только им самим (и не наблюдаются другими страхователями), то использование механизма (3) невозможно. Поэтому рассмотрим две альтернативы. Первая – сообщение страхователями информации о вероятностях наступления страховых случаев [3]. Вторая – анализ механизма взаимного страхования, удовлетворяющего системе взаимных представлений агентов о существенных параметрах.

Механизмы с сообщением информации. Если оценки $\{s_i\}$ вероятностей наступления страховых случаев могут сообщаться страхователями друг другу, то все страхователи будут стремиться занизить вероятности наступления страхового случая, следовательно, одним из равновесий будет сообщение минимальных оценок. Поэтому рассмотрим несколько альтернативных механизмов взаимного страхования.

Обозначим $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ – вектор сообщений агентов. Пусть в страховом договоре оговаривается, что страховой взнос каждого страхователя определятся сообщенными оценками вероятностей наступления страхового случая, то есть $r_i(s_i) = s_i\, Q_i$, а после наступления страховых случаев возмещение осуществляется пропорционально собранному страховому фонду $R(s) = \sum_{i \in N} r_i(s)$, то есть

(4) $h_i(s) = \alpha(s)\, Q_i,\ i \in N,$

где $\alpha(s)$ – единая доля страхового возмещения (отношение страхового возмещения $h_i(s)$ к страховой сумме Q_i), определяемая исходя из соотношения между страховым фондом $R(s)$ и необходимым объемом страхового возмещения H. Выбор зависимости $\alpha(\cdot)$ является стратегией управления.

Подставляя (4) в (1), получаем, что условие выгодности участия во взаимном страховании для i-го страхователя можно записать в виде:

(5) $s_i \le \alpha(s)\, p_i,\ i \in N$.

Если используется следующая стратегия управления:

(6) $\alpha(s) = \min \{R(s) / H;\ 1\}$,

то получаем, что балансовое условие (2) выполнено всегда, а из (5) следует, что сообщение страхователя не превышает истинного значения вероятности наступления страхового случая: $s_i \le \alpha(s)\, p_i$, $i \in N$.

Подставляя (4) и (6) в (1) и вычисляя производную по s_i, получим, что механизм (6) является манипулируемым, то есть сообщение достоверной информации невыгодно страхователям. Содержательно, каждый из страхователей стремится занизить вероятность наступления страхового случая, так как данное занижение сильнее уменьшает размер страхового взноса, чем долю страхового возмещения.

Альтернативой для (5) является использование следующего механизма взаимного страхования. Пусть страхователи заключают договор, в котором оговаривается, что в начале рассматриваемого периода они должны сообщить оценки вероятностей наступления страхового случая (страховые взносы в начале периода не собираются!), а затем в конце рассматриваемого периода (когда реализовались страховые случаи) они полностью компенсируют «пострадавшим» ущерб, а размер взноса каждого из страхователей определяется на основании сообщенных в начале периода оценок. Ожидаемое возмещение при этом равно $H = \sum_{i \in N} p_i Q_i$, следовательно, сумма взносов должна равняться H, то есть

(7) $\sum_{i \in N} r_i(s) = H$,

где зависимости $r_i(\cdot)$ являются механизмом управления. Ожидаемое значение целевой функции страхователя имеет вид:

(8) $Ef_i = g_i - r_i(s),\ i \in N$,

а условие выгодности участия во взаимном страховании:

(9) $r_i(s) \le p_i\, Q_i,\ i \in N$.

Если выбрать следующий механизм управления, при котором взнос каждого страхователя пропорционален сообщенному им ожидаемому ущербу:

$$(10)\ r_i(s) = \frac{s_i Q_i}{\sum_{i \in N} s_i Q_i} H,\ i \in N,$$

то максимум (8) достигается при минимальных сообщениях, то есть механизм (10) также является манипулируемым.

Анализ условий (9)-(10) подсказывает, что для того, чтобы уменьшить искажение информации следует выбрать такой механизм управления, в котором размер страхового взноса убывал бы с ростом заявки страхователя. Примером может служить механизм

$$(11)\ r_i(s) = \frac{1/s_i}{\sum_{i \in N} (1/s_i)} H,\ i \in N.$$

Подставляя (11) в (8), получаем, что механизм (11) не побуждает страхователей занижать заявки, но он и не обеспечивает сообщения достоверной информации.

Таким образом, каждый из механизмов (10) и (11) обладает своими преимуществами: механизм (10) сбалансирован и обеспечивает выполнение условия (7), но при его использовании страхователи занижают заявки; а механизм (11) побуждает страхователей завышать заявки, но не обеспечивает «сбалансированности» в смысле (7). Для того чтобы построить механизм, который одновременно обладал бы всеми этими привлекательными свойствами, наверное, следует пытаться добиться рационального баланса между возрастанием и убыванием целевой функции страхователя по его сообщению. Однако для взаимного страхования такой баланс невозможен по следующим причинам. Взаимное страхование, в силу своей некоммерческой направленности, является с точки зрения страхователей «игрой с нулевой суммой» (из условия (2) следует, что суммарные взносы должны быть равны ожидаемому суммарному возмещению), поэтому занижение страхового взноса одним из страхователей приводит к тому, что это занижение компенсируется всеми страхователями (в том числе и исказившим информацию, но в меньшей пропорции – см. (10) или (11)). Поэтому для «борьбы» с искажением информации необходимо привлечение дополнительных ресурсов, зависимость объема которых от сообщений страхователей должна побуждать их к сообщению достоверной информации. Примером таких ресурсов могут служить ресурсы третьих (по отношению к рассматриваемым выше участникам страхового контракта) лиц, используемые в смешанном страховании, анализ которого проведен в работе [1].

Рефлексивная модель. Рассмотрим ситуацию, когда координирующий орган (центр) обладает некоторой информацией о потерях от страховых случаев $\{\tilde{Q}_i\}$ и вероятностях их наступления $\{\tilde{p}_i\}$, причем величины $\{\tilde{Q}_i\}$ и $\{\tilde{p}_i\}$ являются общим знанием (при этом не обязательно $\tilde{Q}_i = Q_i$ и $\tilde{p}_i = p_i$). Каждый страхователь сообщает центру свой взнос s_i, либо отказывается от страхования. Если все страхователи сообщают свои взносы, центр проверяет, выполняется ли соотношение

$$(12)\quad \sum_{i\in N} s_i \geq H = \sum_{i\in N} \tilde{p}_i \tilde{Q}_i .$$

Если (12) выполнено, заключается договор о взаимном страховании. Если хотя бы один страхователь отказался, либо неравенство (12) не выполнено, договор не заключается.

В описанной ситуации целевая функция i-го страхователя имеет следующий вид:

$$f_i(p_i, s_i, \ldots, s_n) = \begin{cases} p_i \tilde{Q}_i - s_i, & \sum\limits_{i\in N} s_i \geq H, \\ -\varepsilon_i \quad , & \sum\limits_{i\in N} s_i < H, \end{cases}$$

где ε_i – произвольная положительная константа (организационные затраты в случае, если договор о страховании не будет заключен). Будем также считать, что в случае отказа страхователя от участия он получает нулевой выигрыш.

Информация участников игры описывается их представлениями о параметрах p_i – вероятностях наступления страховых случаев. Обозначим за p_{ij} – представления i-го агента (страхователя) о значении p_j; p_{ijk} – представления i-го агента о представлениях j-го агента о значении p_k, и т. д., $i, j, k \in N$. В совокупности эти представления образуют структуру информированности.

Информационные равновесия в этой рефлексивной игре страхователей описываются следующим утверждением, в формулировке которого за Σ обозначено множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N (в том числе пустая последовательность).

Утверждение 16. Пусть страхователи обладают структурой информированности конечной сложности. Набор действий $s^*_{\sigma i}$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием (и договор о взаимном страховании будет заключен), если и только если условия

$$\sum_{j \in N} s^*_j = H, \quad \forall\ i \in N\ \ s^*_i \le p_i \widetilde{Q}_i$$

являются общим знанием. Последнее означает по определению, что для любого $\sigma \in \Sigma$ выполнено

(13) $\forall\ i \in N\ \ \sum_{j \in N} s^*_{\sigma ij} = H, \quad s^*_{\sigma i} \le p_{\sigma i} \widetilde{Q}_i$.

Доказательство. Пусть набор действий $s^*_{\sigma i}$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием (и договор о взаимном страховании будет заключен). Зафиксируем произвольные значения $\sigma \in \Sigma$ и $i \in N$. Действие $s^*_{\sigma i}$ максимизирует по $s_{\sigma i}$ целевую функцию σi-агента $f_i(p_{\sigma i}, s^*_{\sigma i1}, \dots, s^*_{\sigma i, i-1}, s_{\sigma i}, s^*_{\sigma i, i+1}, \dots, s^*_{\sigma i1})$. Поэтому он выбрал минимальное действие, при котором выполняется условие $\sum_{j \in N} s^*_{\sigma ij} \ge H$; очевидно, при этом неравенство обращается в равенство. Целевая функция должна принимать неотрицательное значение (иначе σi-агенту лучше было бы отказаться от участия в договоре), откуда получаем условие $p_{\sigma i} \widetilde{Q}_i - s^*_{\sigma i} \ge 0$.

Далее, пусть для любого $\sigma \in \Sigma$ выполнено (13). Тогда каждое действие $s^*_{\sigma i}$ максимизирует целевую функцию σi-агента $f_i(p_{\sigma i}, s^*_{\sigma i1}, \dots, s^*_{\sigma i, i-1}, s_{\sigma i}, s^*_{\sigma i, i+1}, \dots, s^*_{\sigma i1})$. Поэтому набор действий $s^*_{\sigma i}$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием. •

Отметим, что если хотя бы один реальный или фантомный (существующий в чьих-то представлениях) агент откажется от участия, то, договор не будет заключен. При этом отказ всех агентов формально также будет равновесием – отсюда необходимость оговорки в скобках в формулировке утверждения 16.

Ранги рефлексии страхователей и равновесия. Рассмотрим вопрос о том, насколько сложными должны быть субъективные представления страхователя, чтобы были достижимы все возможные информационные равновесия. В работе [34] эта задача была названа задачей о нахождении максимального целесообразного ранга рефлексии. Следующее утверждение показывает, что в данном случае этот ранг равен единице.

Утверждение 17. Все возможные действия i-го реального агента, $i \in N$, в рефлексивной игре страхователей достигаются в рамках его субъективного общего знания о наборе $(p_1, \ldots, p_n)$, т. е. в рамках структуры информированности, для которой $\forall \sigma \in \Sigma \;\; \forall j \in N \;\; p_{i\sigma j} = p_{ij}$.

Доказательство. Для действия, состоящего в неучастии агента, утверждение очевидно (достаточно объявить в качестве общего знания $p_{ij} = 0$ для всех $j \in N$).

Далее будем рассматривать ситуацию с точки зрения i-го агента, $i \in N$. Пусть его действие s_i^* субъективно является равновесным в некотором равновесии $s_{i\sigma j}^*$, $\sigma \in \Sigma$ $j \in N$. Тогда, согласно утверждению 16, для всех $j \in N$ выполняются соотношения $\sum_{j \in N} s_{ij}^* = H, \;\; 0 \le s_{ij}^* \le \widetilde{Q}_j$.

Положим $p_{i\sigma j} = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$, $j \in N$ (т. е. сформируем структуру информированности, при которой с точки зрения i-го агента имеет место общее знание). Тогда, как нетрудно видеть, для набора действий $w_{i\sigma j}^* = s_{ij}^*$ субъективно (с точки зрения i-го агента) выполнено условие (13). Поэтому набор $w_{i\sigma j}^*$, $\sigma \in \Sigma$, $i, j \in N$, субъективно является информационным равновесием, причем действие i-го агента в этом равновесии совпадает с его действием в исходном равновесии $s_{i\sigma j}^*$. •

Таким образом, в настоящем разделе исследована модель взаимного страхования с информационной рефлексией страхователей. Описано множество информационных равновесий, в которых может состояться договор о страховании. Показано, что все равновесные действия страхователя достигаются в условиях субъективного общего знания страхователей друг о друге.

2.13. РЕКЛАМА ТОВАРА

В настоящем разделе рассматриваются модели информационного управления, осуществляемого средствами массовой информации (СМИ), на примере рекламы и предвыборных технологий.

1. Предположим, что имеется агент – объект информационного воздействия. Цель воздействия – сформировать у агента определенное отношение к конкретному объекту или субъекту.

В случае рекламы агентом является потребитель, а объектом – товар или услуга [38]. Требуется, чтобы потребитель приобрел данный товар или услугу.

В случае предвыборных технологий агентом является избиратель, а субъектом – кандидат. Требуется, чтобы избиратель проголосовал за данного кандидата [46].

Рассмотрим i-го агента. Всех остальных агентов объединим в одного, для обозначения которого будем использовать индекс j. Пусть $\theta \in \Omega$ – объективная характеристика объекта, неизвестная достоверно ни одному из агентов. В качестве характеристик могут выступать потребительские свойства товаров, качества кандидатов и т.д.

Обозначим $\theta_i \in \Omega$ – представления i-го агента об объекте, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях об объекте j-го агента, и т.д.

Предположим для простоты, во-первых, что множество возможных действий каждого агента состоит из двух действий: $X_i = X_j = \{a; r\}$, где действие a (accept) соответствует приобретению товара или услуги, голосованию за рассматриваемого кандидата и т.д., а действие r (reject) – отказу от приобретения товара или услуги, голосованию за других кандидатов и т.д. Во-вторых, предположим, что множество Ω состоит из двух элементов, характеризующих качества объекта – g (good) и b (bad), то есть $\Omega = \{g; b\}$.

Рассмотрим последовательно (в порядке усложнения) ряд моделей поведения агента.

<u>Модель 0 (рефлексия отсутствует).</u> Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множества Ω свойств объекта во множество X_i действий агента, то есть B_i: $\Omega \to X_i$. Примером такого отображения может служить

следующее: $B_i(g) = a$, $B_i(b) = r$, то есть, если агент считает, что товар (кандидат) хороший, то он его приобретает (отдает за него свой голос), и отвергает в противном случае.

В данной модели информационное управление заключается в формировании у агента представлений об объекте, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$. В настоящей работе технологии информационного управления (то есть способы формирования требуемых представлений) не рассматриваются – см. их описание в [14, 38, 46].

Модель 1 (первый ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта и $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов – во множество X_i его действий, то есть B_i: $\Omega \times \Omega \to X_i$. Примерами такого отображения могут служить следующие:

$$B_i(g, g) = a, B_i(g, b) = a, B_i(b, g) = r, B_i(b, b) = r,$$

и

$$B_i(g, g) = a, B_i(g, b) = r, B_i(b, g) = a, B_i(b, b) = r.$$

В первом случае агент ориентируется на собственное мнение, во втором – на мнение других агентов («общественное мнение»).

В данной модели информационное управление является рефлексивным управлением [34], и заключается в формировании у агента представлений об объекте и о представлениях других агентов, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо в первом случае сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$, θ_{ij} – любое, а во втором случае – $\theta_{ij} = g$, θ_i – любое.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении посредством СМИ не всегда воздействие направлено на формирование непосредственно θ_{ij} – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно – у агента формируются представления о поведении (выбираемых действиях) других агентов, по которым данный агент может восстановить их представления. Примерами косвенного формирования представлений θ_{ij} могут служить рекламные лозунги «Новое поколение выбирает Pepsi», «В то время, когда все настоящие мужики …», обращение к мнению авторитетных людей и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения значительное число избирателей собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Модель 2 (второй ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта, $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов, и $\Omega \ni \theta_{iji}$ – представлений агента о представлениях других агентов о его собственных представлениях – во множество X_i его действий, то есть B_i: $\Omega \times \Omega \times \Omega \to X_i$. Примером такого отображения, в котором проявляются отличные от нулевой и первой моделей свойства, может служить следующее:

$$\forall\, \theta \in \Omega\ B_i(\theta, \theta, g) = a,\ B_i(\theta, \theta, b) = r.$$

В данном случае агент следует своей «социальной роли» и производит выбор, которого от него ожидают другие агенты.

В рассматриваемой модели информационное управление является рефлексивным управлением и заключается в формировании у агента представлений о представлениях других агентов о его собственных представлениях, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_{iji} = g$.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении воздействие не всегда направлено на формирование непосредственно θ_{iji} – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно – у агента формируются представления о том, что другие агенты ожидают от него определенных действий. В данном случае речь идет о так называемом социальном влиянии, многочисленные примеры которого можно найти в учебниках по социальной психологии [14].

Примерами косвенного формирования представлений θ_{iji} могут служить лозунги «Ты записался добровольцем?», «А ты купил (сделал) …?», «В Вашем положении (при Вашем статусе) …?» и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения большинство представителей социальной группы, к которой принадлежит (или с которой идентифицирует себя) агент, собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Таким образом, мы рассмотрели простейшие модели информационного управления посредством СМИ, сформулированные в терминах рефлексивных моделей принятия решений и структур информированности. Во всех этих моделях ранг рефлексии не превышал двух (исключением является, наверное, очень редко встречающаяся на практике ситуация, когда информационное воздействие направлено на формирование сразу всей информационной структуры, например путем навязывания «общего знания» – «Голосуй сердцем!», «… – наш выбор!» и т.д.).

Представить себе реальные ситуации, в которых информационное воздействие направлено на более глубокие компоненты структуры информированности, затруднительно. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является изучение формальных моделей информационного управления (и технологий этого управления) агентами, осуществляющими коллективное принятия решений в условиях взаимосвязанной информированности.

2. Предположим теперь, что имеется два типа агентов: агенты первого типа склонны приобретать товар независимо от его рекламы, агенты второго типа в отсутствии рекламы приобретать товар не склонны. Обозначим $\theta \in [0; 1]$ – долю агентов первого типа.

Агенты второго типа, доля которых есть $1 - \theta$, подвержены влиянию рекламы, но не осознают этого. Социальное влияние [] отразим следующим образом: будем считать, что агенты второго типа с вероятностью $p(\theta)$ выбирают действие a, и с вероятностью $1 - p(\theta)$ выбирают действие r. Зависимость $p(\cdot)$ – вероятности выбора – от доли агентов, склонных приобретать товар, отражает нежелание агентов быть «белыми воронами».

Если истинная доля θ агентов первого типа является общим знанием, то агенты ожидают, что именно θ агентов приобретут товар, а фактически наблюдают, что товар приобрели

(1) $x(\theta) = \theta + (1 - \theta)\, p(\theta)$

агентов (напомним, что мы предположили, что влияние рекламы не осознается агентами). Так как $\forall\, \theta \in [0; 1]$ $\theta \le x(\theta)$, то косвенное социальное влияние оказывается самоподтверждающим – «Смотрите, оказывается склонны приобретать товар больше людей, чем мы считали!».

Проанализируем теперь асимметричную информированность. Так как агенты первого типа выбирают свои действия независимо, то можно считать их адекватно информированными как о параметре θ, так и о представлениях агентов второго типа.

Рассмотрим модель информационного регулирования, в которой центр, проводящий рекламную акцию, формирует у агентов второго типа представления θ_2 о значении параметра θ.

Сделав маленькое отступление, обсудим свойства функции $p(\theta)$. Будем считать, что $p(\cdot)$ – неубывающая на $[0; 1]$ функция, такая, что $p(0) = \varepsilon$, $p(1) = 1 - \gamma$, где ε и δ – константы, принадлежащие единичному отрезку, такие, что $\varepsilon \leq 1 - \delta$. Содержательно ε соответствует тому, что некоторые агенты второго типа «ошибаются» и, даже если считают, что все остальные агенты имеют второй тип, то приобретают товар. Константа δ характеризует в некотором смысле подверженность агентов влиянию – у агента второго типа имеется шанс быть самостоятельным и, даже если он считает, что все остальные агенты приобретут товар, отказаться от покупки. Частный случай $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ соответствует независимым агентам второго типа, отказывающимся от приобретения товара.

Так как агенты не подозревают о наличии манипуляции со стороны центра (см. принцип доверия в [33]), то они ожидают увидеть, что θ_2 агентов приобретут товар. Фактически же его приобретут

(2) $x(\theta, \theta_2) = \theta + (1 - \theta)\, p(\theta_2)$.

Если доход центра пропорционален доле агентов, приобретающих товар, а затраты на рекламу $c(\theta, \theta_2)$ являются неубывающей функцией θ_2, то целевая функция центра (разность между доходом и затратами) в отсутствии рекламы равна (1), а в ее присутствии:

(3) $\Phi(\theta, \theta_2) = x(\theta, \theta_2) - c(\theta, \theta_2)$.

Следовательно, эффективность информационного регулирования можно определить как разность между (3) и (1), а задачу информационного регулирования записать в виде:

(4) $\Phi(\theta, \theta_2) - x(\theta) \to \max\limits_{\theta_2}$.

Обсудим теперь ограничения задачи (4). Первое ограничение: $\theta_2 \in [0; 1]$, точнее: $\theta_2 \geq \theta$.

Рассмотрим пример: пусть $p(\theta) = \sqrt{\theta}$, $c(\theta, \theta_2) = (\theta_2 - \theta) / 2\sqrt{r}$, где $r > 0$ – размерная константа. Тогда задача (4) имеет вид:

(5) $(1 - \theta)(\sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta}) - (\theta_2 - \theta) / 2\sqrt{r} \to \max\limits_{\theta_2 \in [\theta; 1]}$.

Решение задачи (5) имеет вид: $\theta_2(\theta) = \max\{\theta; r(1 - \theta)^2\}$, то есть при $\theta \geq \frac{(2r+1) - \sqrt{4r+1}}{2r}$ информационное регулирование для центра не имеет смысла (затраты на рекламу не окупаются, так как достаточная доля агентов приобретает товар в отсутствии рекламы).

Наложим теперь дополнительно к $\theta_2 \in [\theta; 1]$ требование стабильности информационного регулирования, а именно, в предположении наблюдаемости доли агентов, приобретающих товар, будем считать, что агенты второго типа должны наблюдать значение доли агентов, приобретающих товар, не меньшее, чем им сообщил центр, то есть условие стабильности имеет вид:

$$x(\theta, \theta_2) \geq \theta_2.$$

Подставляя (2), получим:

(6) $\theta + (1 - \theta)\, p(\theta_2) \geq \theta_2$.

Следовательно, оптимальным стабильным решением задачи информационного регулирования будем решение задачи максимизации (4) при ограничении (6).

Легко проверить, что в рассматриваемом примере любое информационное регулирование будет стабильным в смысле (6). Если же понимать под стабильностью полное совпадение ожидаемых и наблюдаемых агентами результатов (то есть потребовать выполнение (6) как равенства), то единственным стабильным информационным регулированием будет сообщение центра, что все агенты являются агентами второго типа, то есть $\theta_2 = 1$ (что чаще всего и имеет место в рекламе).

В заключение настоящего раздела отметим, что решение задачи (4), (6) является ложным равновесием, так как, если агенты второго типа узнают истинное значение $\theta \in [0; 1]$, то они смогут констатировать, что $\theta \leq \theta_2$ и их действия не изменятся.

2.14. ПРЕДВЫБОРНАЯ БОРЬБА

Рассмотрим пример рефлексивного управления в предвыборной борьбе. Пусть имеются три кандидата – *a, b* и *c*, и выборы проводятся по принципу простого большинства (кандидату для победы достаточно получить поддержку половины избирателей плюс один голос). Если ни один из кандидатов не набрал большинства голосов, то состоится следующий тур с другими кандидатами, которых обозначим *d*. Допустим, что имеются три группы избирателей, доли которых составляют α_1, α_2 и α_3 ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). Предпочтения групп избирателей, являющиеся общим знанием, приведены в таблице 2.

Таблица 2

Предпочтения групп избирателей

α_1	α_2	α_3
a	*b*	*c*
b	*c*	*a*
c	*a*	*b*
d	*d*	*d*

Вычислим для каждого попарного сравнения кандидатов число (долю) избирателей, считающих, что один кандидат лучше другого: $S_{ab} = \alpha_1 + \alpha_3$, $S_{ac} = \alpha_1$, $S_{ba} = \alpha_2$, $S_{bc} = \alpha_1 + \alpha_2$, $S_{ca} = \alpha_2 + \alpha_3$, $S_{cb} = \alpha_2$.

Рассмотрим игру избирателей, в которой множество стратегий каждого из них есть $A = \{a, b, c\}$. Предполагая, что вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$ является общим знанием, получаем, что множество равновесий Нэша составляют шесть векторов:

$$(a, a, a) \to a,\ (b, b, b) \to b,\ (c, c, c) \to c,$$
$$(a, b, a) \to a,\ (a, c, c) \to c,\ (b, b, c) \to b.$$

Рассмотрим теперь рефлексивную игру, считая, что активные действия по навязыванию структуры информированности второму и третьему агенту предпринимает первый агент, цель которого – «избрать» кандидата *a*. Пусть структура информированности соответствует графу рефлексивной игры, приведенному на рисунке 20.

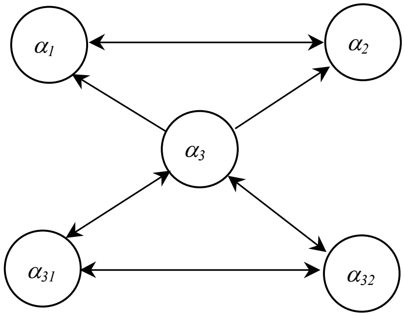

Рис. 20. Граф рефлексивной игры «Выборы»

Цель первой группы – во-первых, убедить третью группу, что наиболее предпочтительный с ее точки зрения кандидат *c* «не пройдет» (и это якобы является общим знанием), и следует поддержать кандидата *a*. Для этого должно достаточно выполнения:
(1) $\alpha_{32} + \alpha_3 < 1/2$, $\alpha_{31} + \alpha_3 > 1/2$, $\alpha_{31} + \alpha_3 + \alpha_{32} = 1$.

Во-вторых, первой группе следует убедить вторую, что будет избран кандидат *a* и от ее действий ничего не зависит (поддерживать кандидата *a* вторая группа будет в последнюю очередь). Для этого достаточно, чтобы она была адекватно информирована о представлениях третьей группы (см. рисунок 20).

Так как от второй группы исход выборов не зависит, то можно считать, что она проголосует за наиболее предпочтительного с ее точки зрения кандидата *b*, то есть информационным равновесием будет вектор (*a, b, a*). Этот вектор является стабильным информационным равновесием. Более того, так как (*a, b, a*) – одно из равновесий Нэша в условиях полного знания (см. выше), то это – истинное равновесие (хотя представления третей группы могут быть ложными).

2.15. КОНКУРС

Рассмотрим, следуя [7], следующий конкурсный механизм (аукцион). Пусть центр обладает R_0 единицами ресурса. Размер возможной заявки от каждого из агентов фиксирован и равен x_0 (для простоты будем считать, что $k = R_0 / x_0$ – целое число, меньшее числа *n* агентов, участвующих в конкурсе – так называемая *гипо-*

теза дефицитности). Агенты сообщают центру цену $\{y_i\}$, по которой они готовы приобрести ресурс, затем центр упорядочивает агентов по убыванию предложенных цен и продает ресурс по заявленным ценам – сначала агенту, предложившему максимальную цену, затем – следующему за ним и т.д., пока не закончится весь ресурс.

Обозначим x_i – количество ресурса, получаемого i-ым агентом, $i \in N$. Пусть $\varphi_i(x_i, r_i)$ – доход i-го агента от использования ресурса (возрастающая по x_i гладкая вогнутая функция, удовлетворяющая условию $\varphi_i(0, r_i) = 0$), где r_i – тип агента, характеризующий эффективность использования им ресурса, то есть $\varphi_i(\cdot)$ возрастает по r_i, $i \in N$. Из условия индивидуальной рациональности (неотрицательности целевой функции[1] $f_i(y, x_i, r_i) = \varphi_i(x_i, r_i) - y_i\, x_0)$ получаем максимальную цену $p_i(r_i) = \varphi_i(x_0, r_i) / x_0$, которую готов заплатить i-ый агент за получение «порции» x_0 ресурса, $i \in N$.

Упорядочим агентов по убыванию типов[2]: $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n$. В силу введенных предположений упорядочение агентов по максимальным ценам будет такое же: $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$.

В условиях полной информированности равновесными будут следующие сообщения (так называемое аукционное решение):

$$y_i^*(r) = p_{k+1} + \delta,\ i = \overline{1,k},\ \ y_i^*(r) = 0,\ i = \overline{k+1,n},$$

где δ – сколь угодно маленькая строго положительная константа, то есть первые k агентов – победители аукциона – приобретут ресурс почти по цене первого проигравшего, а все проигравшие откажутся от участия в аукционе.

Эффективность аукциона с точки зрения агентов, определяемая отношением суммарного полученного ими эффекта к количеству распределенного ресурса, равна:

$$(1)\ K(r, R_0) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_0, r_i) / R_0.$$

Эффективность аукциона с точки зрения центра, определяемая отношением полученной им суммы к количеству распределенного ресурса, равна:

---

[1] *Отказываясь от участия в аукционе, агент всегда может обеспечить себе нулевое значение целевой функции.*

[2] *Будем считать, что, если типы двух агентов совпадают, то существует правило, по которому они упорядочиваются.*

(2) $K_0(r, R_0) = p_{k+1} + \delta$.
и не возрастает с ростом числа агентов.

В качестве отступления сравним эффективность аукциона с эффективностью *механизма внутренних цен* для случая $\varphi_i(x_i, r_i) = 2\sqrt{r_i x_i}$:

(3) $\lambda(s) = \sqrt{\dfrac{\sum_{i \in N} s_i}{R_0}}$,

(4) $x_i(s) = \dfrac{s_i}{\sum_{j \in N} s_j} R_0$, $j \in N$,

в рамках которого центр устанавливает внутреннюю цену (3) за единицу ресурса, а целевые функции агентов имеют вид:
(5) $f_i(x_i, r_i) = \varphi_i(x_i, r_i) - \lambda\, x_i$, $i \in N$.

Для данного конкретного вида целевых функций агентов эффективности (1) и (2) примут вид:

(6) $K(r, R_0) = 2 \sum_{i=1}^{k} \sqrt{r_i} \,/ \sqrt{kR_0}$,

(7) $K_0(r, R_0) = 2 \sqrt{\dfrac{(k+1) r_{k+1}}{R_0}}$,

где $R = \sum_{i \in N} r_i$.

По аналогии с (6) и (7) вычислим эффективности механизма внутренних цен:

(8) $K(r, R_0) = \sqrt{\dfrac{R}{R_0}}$,

(9) $K_0(r, R_0) = \sqrt{\dfrac{R}{R_0}}$.

Сравнивая (6) с (8) и (7) с (9), получаем, что с точки зрения агентов эффективность конкурсного механизма выше по сравнению с эффективностью механизма внутренних цен, если:
(10) $\sum_{i \in N} r_i \le 4\,(k + 1)\, r_{k+1}$,

а с точки зрения центра, если:

(11) $\sum_{i=1}^{k} \sqrt{r_i / k} \geq \sqrt{\sum_{i \in N} r_i} / 2.$

Вернемся к анализу аукционного механизма. Построенное аукционное решение будет реализовано только если истинные значения типов всех агентов являются общим знанием. Рассмотрим, что произойдет в случае, когда агенты не имеют достоверной информации о типах друг друга.

Анализ информационного равновесия для рассматриваемой модели аукциона приведен в [33], поэтому сконцентрируем внимание на стабильности информационного равновесия. Исходом аукциона (при заданных R_0 и k) является множество победителей аукциона и цена p_{k+1}, по которой центр будет продавать агентам ресурс (см. выше). Следовательно, при заданном множестве $Q \subseteq N$ победителей и цене p стабильным будет любая совокупность представлений, во-первых, приводящая к тому, что агенты из множества Q являются первыми в упорядочении представлений о типах по убыванию, и, во-вторых, такая, что представления всех (реальных и фантомных) агентов о типе агента, занявшего $k+1$-е место в этом упорядочении, равны p.

Нетрудно видеть, что все охарактеризованные информационные равновесия являются истинными: каковы бы ни были взаимные представления агентов, победители назначают цену p, а остальные отказываются от участия в конкурсе.

2.16. НОРМЫ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В настоящем разделе рассматривается пример, иллюстрирующий целесообразность совместного использования информационного и институционального управления (то есть управления ограничениями и нормами деятельности [24]).

Нормой деятельности называется отображение $\aleph: \Omega \to X'$ множества возможных состояний природы во множество допустимых векторов действий агентов [24].

Пусть предпочтения центра заданы на множестве состояний природы, норм деятельности и действий агентов: $\Phi(\theta, \aleph(\cdot), y)$. Предполагая, что агенты следуют установленным нормам, обозначим $K(\aleph(\cdot)) = F_\theta(\Phi(\theta, \aleph(\cdot), \aleph(\theta)))$ – *эффективность институционального управления* $\aleph(\cdot)$, где $F_\theta(\cdot)$ – оператор устранения неопределенности. В качестве оператора устранения неопределенности (в зависимости от информированности центра) может использоваться гарантированный результат по множеству Ω, или математическое ожидание по известному распределению вероятностей $p(\theta)$ на множестве Ω и т.д.

Тогда *задачей институционального управления* при ограничениях $M_\aleph$ на нормы деятельности будет выбор допустимой нормы $\aleph^*(\cdot) \in M_\aleph$, имеющей максимальную эффективность [24]:

$$\aleph^*(\cdot) = \arg \max_{\aleph(\cdot) \in M_\aleph} K(\aleph(\cdot)),$$

при условии, что агенты следуют установленным нормам деятельности. Будем называть норму $\aleph(\cdot)$ *согласованной*, если предписываемое ей действие является информационным равновесием игры агентов.

Можно сформулировать *обратную задачу информационного управления*: пусть задан вектор $x^* \in X'$ действий агентов, требуется найти множество $I(x)$ структур информированности, при которых данный вектор действий является информационным равновесием. Имея решение этой задачи, можно ставить и решать множество других задач управления – как институционального, так и информационного, например, совместного определения информационной структуры и нормы, реализующих заданные действия агентов, и др.

Пусть ОС состоит из двух агентов, имеющих целевые функции

(1) $f_i(\theta, y) = (\theta - y_1 - y_2)\, y_i - (y_i)^2 / 2,\ i = 1, 2,$

множества допустимых действий составляют положительную полуось, а $\Omega = [1; 2]$.

Множества наилучших ответов агентов в рассматриваемом примере состоят из одной точки:

(2) $BR_1(\theta_1, y_2) = (\theta_1 - y_2) / 3,$

(3) $BR_2(\theta_2, y_1) = (\theta_2 - y_1) / 3.$

Предположим, что субъективные представления агентов о состоянии природы являются общим знанием, тогда параметрическое равновесие Нэша есть

(4) $y_i^*(\theta_1, \theta_2) = (3\ \theta_i - \theta_{3-i}) / 8,\ i = 1, 2.$

На рисунке 21 приведены множества наилучших ответов агентов при различных $\theta \in \Omega$, а также следующие множества:

$E_N^0 = \bigcup_{\theta \in \Omega} E_N(\theta, \theta, ..., \theta)$ – множество всевозможных параметрических равновесий Нэша – отрезок FG;

$E_N = \bigcup_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega^n} E_N(\boldsymbol{\theta})$ – четырехугольник $AGCF$;

$E = \prod_{i \in N} \mathrm{Proj}_i\ E_N$ – квадрат ABCD;

E^4 (см. определение ниже) – шестиугольник $KLMNPH$.

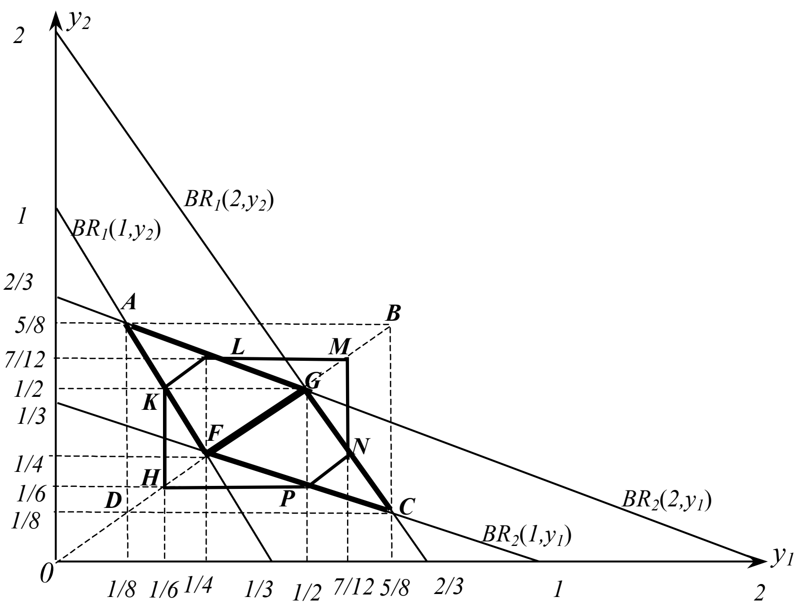

Рис. 21. Множества равновесий

Приведем решения обратных задач информационного управления для следующих вариантов.

Вариант I. Пусть центр осуществляет унифицированное (однородное) информационное регулирование, то есть, структура информированности i-го агента есть $I_i = \theta,\ i \in N,\ \theta \in \Omega$ и сообщаемое центром значение состояния природы θ является общим знанием. Фрагмент (для i-го и j-го агентов) графа соответствующей рефлексивной игры имеет вид $\theta \leftrightarrow \theta$ и не зависит от рассматриваемых агентов.

Множество всевозможных информационных равновесий игры агентов в этом случае есть отрезок (1/4; 1/4) – (1/2; 1/2). Множество информационных равновесий при фиксированном $\theta \in [1;\ 2]$ есть точка с координатами $(\theta / 4;\ \theta / 4)$. Поэтому согласованной является единственная норма $\aleph_i^1(\theta) = \theta / 4,\ i = 1,\ 2$.

Решение обратной задачи следующее: реализуемыми как информационные равновесия являются одинаковые действия обоих агентов из отрезка [1/4; 1/2]. Для того чтобы агенты выбрали вектор действий $x^1 = (\alpha,\ \alpha)$ следует выбрать $\theta = 4\ \alpha,\ \alpha \in [1/4;\ 1/2]$.

Вариант II. Пусть центр осуществляет персонифицированное информационное регулирование, то есть, структура информированности i-го агента есть $I_i = \theta_i,\ \theta_i \in \Omega,\ i \in N$, и индивидуальные представления агентов о состоянии природы являются общим знанием. Фрагмент (для i-го и j-го агентов) графа соответствующей рефлексивной игры имеет вид $\theta_i \leftrightarrow \theta_j$. Тогда множество всевозможных информационных равновесий игры агентов есть E_N, то есть шире, чем в первом варианте.

Множество всевозможных информационных равновесий E_N игры агентов в этом случае – параллелограмм $AGCF$ (см. рисунок 21). Множество информационных равновесий при фиксированном векторе $(\theta_1,\ \theta_2) \in [1;\ 2]^2$ есть точка с координатами, определяемыми выражением (4). Поэтому согласованной является единственная норма $\aleph_i^2(\theta_1,\ \theta_2) = (3\ \theta_i - \theta_{3-i}) / 8,\ i = 1,\ 2$.

Решение обратной задачи следующее: реализуемыми как информационные равновесия являются действия агентов из параллелограмма $AGCF$. Для того чтобы агенты выбрали вектор действий $x^2 = (x_1^2,\ x_2^2)$ следует выбрать $\theta_1 = 3\ x_1^2 + x_2^2,\ \theta_2 = x_1^2 + 3\ x_2^2$.

Вариант III. Пусть центр осуществляет рефлексивное управление, сообщая каждому агенту информацию о неопределенном параметре, а также то, что о значениях этого параметра думают («знают») остальные агенты, то есть, структура информированности i-го агента есть $I_i = \{\theta_i,\ \theta_{ij}\},\ \theta_i,\ \theta_{ij} \in \Omega,\ i,\ j \in N$. Фрагмент (для i-

го агента) графа соответствующей рефлексивной игры имеет вид $\theta_i \leftrightarrow \theta_{ij}$.

Множество всевозможных информационных равновесий E игры агентов в этом случае – квадрат ABCD (см. рисунок 21).

Рассмотрим для примера первого агента. С его субъективной точки зрения множество информационных равновесий при фиксированном векторе $(\theta_1, \theta_{12}) \in [1; 2]^2$ есть точка с координатами, определяемыми выражением (4), то есть

(7) $y_1^*(\theta_1, \theta_{12}) = (3\ \theta_1 - \theta_{12}) / 8,\ y_2^*(\theta_1, \theta_{12}) = (3\ \theta_{12} - \theta_1) / 8.$

Из (7) получаем, что чтобы первый агент выбрал действие $x_1^3 \in X_1^0 = [1/8; 5/8]$ вектор (θ_1, θ_{12}) должен удовлетворять:

(8) $(3\ \theta_1 - \theta_{12}) / 8 = x_1^3$,

(9) $(3\ \theta_{12} - \theta_1) / 8 \in BR_2(\theta_{12}, x_1^3) = (\theta_{12} - x_1^3) / 3.$

Условие (9) выполнено всегда в силу определения информационного равновесия, поэтому

(10) $\Omega_1^3(x_1^3) = \{(\theta_1, \theta_{12}) \in [1; 2]^2 \mid (3\ \theta_1 - \theta_{12}) / 8 = x_1^3\}.$

Аналогично, для второго агента

(11) $\Omega_2^3(x_2^3) = \{(\theta_2, \theta_{21}) \in [1; 2]^2 \mid (3\ \theta_2 - \theta_{21}) / 8 = x_2^3\}.$

Согласованной является норма $\aleph_i^3(\theta_i, \theta_{ij}) = (3\ \theta_i - \theta_{ij}) / 8,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2.$

Вариант IV. Альтернативой варианту III является следующий: центр формирует у i-го агента (например, путем публичного сообщения значения параметра $\theta \in \Omega$, а затем частного сообщения значения параметра $\theta_i \in \Omega$) структуру информированности $I_i = (\theta_i, \{\theta_{ij} = \theta\}_{j \neq i})$. Обозначим $\theta_i^4 = (\theta_i, \theta) \in \Omega^2,\ i \in N$.

Фрагмент (для i-го агента) графа соответствующей рефлексивной игры имеет вид $\theta_i \leftarrow \theta \leftrightarrow \theta$. Множество равновесий Нэша игры фантомных агентов второго и третьего уровня структуры информированности есть $E_N(\theta, \theta, \ldots, \theta)$ – см. выражение (3), причем это множество могут вычислить все агенты. Следовательно, $X_i^4(\theta_i, \theta) = BR_i(\theta_i, E_N(\theta, \theta, \ldots, \theta))$. Обозначим множество возможных информационных равновесий в рассматриваемом варианте

(12) $E^4 = \bigcup_{\theta \in \Omega} \{y \in A' \mid y_i \in \bigcup_{\theta_i \in \Omega} X_i^4(\theta_i, \theta)\}.$

В рассматриваемом примере множество E^4 представляет собой шестиугольник $KLMNPH$ – см. рисунок 21.

Фиксируем вектор $x^4 \in X'$ действий агентов. Обозначим $\Omega^4(x^4)$ – такое множество значений векторов параметров $(\{\theta_i\}_{i \in N}, \theta) \in \Omega^{n+1}$, при котором данный вектор действий является информационным равновесием (решение обратной задачи информационного управления):

(13) $\Omega^4(x^4) = \{(\{\theta_i\}_{i \in N}, \theta) \in \Omega^{n+1} \mid \forall i \in N$
$x_i^4 \in BR_i(\theta_i, E_N(\theta, \theta, ..., \theta))\}$.

Так как информированностью i-го агента является вектор $\theta_i^4 \in \Omega^2$, то получаем, что в рассматриваемом варианте IV норма $\aleph_i^4(\cdot)$ является согласованной, если

(14) $\forall\, \theta_i^4 \in \Omega^2,\ \aleph_i^4(\theta_i^4) \in X_i^4(\theta_i^4)$.

Отметим, что в общем случае множество E^4, то есть множество векторов $x^4 \in A'$, для которых $\Omega^4(x^4) \neq \varnothing$, может отличаться от любого из множеств E_N, E_N^0 и E. Единственно, можно с уверенностью утверждать, что $E^4 \subseteq E$, $\prod_{i \in N} \mathrm{Proj}_i\, E_N^0 \subseteq E^4$.

Итак, в случае стационарных рефлексивных отображений рассмотренные четыре варианта информационных воздействий исчерпывают все многообразие возможных информационных равновесий. Наверное, при воздействии центра на более глубокие (третий, четвертый и т.д.) уровни структуры информированности агентов, множества согласованных норм деятельности могут «расширяться». Однако так как нормы являются отображением структур информированности в действия, сравнивать множества согласованных норм при структурах информированности различной глубины затруднительно, поэтому ограничимся описанными выше четырьмя вариантами.

Результаты исследования обратных задач информационного управления для четырех рассмотренных вариантов позволяют сделать вывод, что с точки зрения множеств информационных равновесий эти варианты соотносятся следующим образом [24]:

$$\mathrm{I} \subseteq \mathrm{II} \subseteq \mathrm{III},\ \mathrm{IV} \subseteq \mathrm{III},\ \mathrm{II} \subseteq \mathrm{IV};\ \mathrm{II} \cap \mathrm{IV} \neq \varnothing,$$

а с точки зрения множеств согласованных норм: $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{IV} \subseteq \mathrm{III} = \mathrm{II}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен ряд теоретико-игровых моделей информационного управления социально-экономическими системами. Проведенный анализ свидетельствует, что целенаправленное воздействие на информированность управляемых субъектов является эффективным средством управления, которое может и должно использоваться на практике наряду с такими «традиционными» типами управления как институциональное и мотивационное.

Следует отметить, что в настоящей работе не нашли отражения результаты исследования эффектов рефлексии в скрытом управлении, а также в художественной деятельности. С ними можно ознакомиться в монографии [34].

Перспективным направлением дальнейших прикладных исследований представляется расширение класса реальных систем, для которых формулируются и используются формальные модели информационного управления, в первую очередь, за счет задач моделирования финансовых рынков.

Полученные на сегодняшний день и приведенные в настоящей работе результаты вовсе не являются исчерпывающими. Тем не менее, они отражают общую методологию построения и изучения прикладных математических моделей информационного управления, которая может быть эффективно использована при решении широкого класса задач управления социально-экономическими системами.

ЛИТЕРАТУРА

1 Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

2 Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 – 25.

3 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Кулик О.С., Новиков Д.А. Механизмы страхования в социально-экономических системах. М.: ИПУ РАН, 2001.

4 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.

5 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Управление риском: механизмы взаимного и смешанного страхования // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 125 – 131.

6 Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.

7 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. М.: Синтег, 2003.

8 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997.

9 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: Синтег, 1999.

10 Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

11 Гламаздин Е.С., Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы управления корпоративными программами: информационные системы и математические модели. М.: Спутник+, 2003.

12 Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003.

13 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002.

14 Зимбардо Ф., Ляйппе М. Социальное влияние. СПб.: Питер, 2000.

15 Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. М.: ИПУ РАН, 2003.

16 Ким Д.П. Методы поиска и преследования подвижных объектов. М.: Наука, 1989.

17 Коргин Н.А. Неманипулируемые механизмы обмена в активных системах. М.: ИПУ РАН, 2003.

18 Кульба В.В., Малюгин В.Д., Шубин А.Н., Вус М.А. Введение в информационное управление. С.Пб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 1999.

19 Лефевр В.А. Алгебра совести. М.: «Когито-Центр», 2003.

20 Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.

21 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.

22 Новиков Д.А. Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 4. С. 187 – 189.

23 Новиков Д.А. Закономерности итеративного научения. М.: ИПУ РАН, 1998.

24 Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2003.

25 Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

26 Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: Синтег, 1999.

27 Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003.

28 Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИПУ РАН, 2002.

29 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: Синтег, 2003.

30 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.

31 Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000.

32 Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.

33 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. М.: ИПУ РАН, 2002.

34 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: Синтег, 2003.

35 Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.

36 Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: score неманипулируемость и множества диктаторства. М.: ИПУ РАН, 2001.

37 Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. СПб., Изд-во С.-Пб. ун-та, 1992.

38 Сэндидж Ч., Фрайбургер В., Ротцолл К. Реклама: теория и практика. М.: Прогресс, 1989.

39 Таран Т.А. Логические модели рефлексивного выбора // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 103 – 117.

40 Чалдини Р. Психология влияния. СПб.: Питер, 2001.

41 Чхартишвили А.Г. Информационное равновесие / Управление большими системами. Сборник трудов молодых ученых. Общая редакция – Д.А. Новиков. Выпуск 3. М.: ИПУ РАН, 2003. С. 100 – 119.

42 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Метод следящих областей в задачах поиска // Математический сборник. – 1993. – Т. 184, № 10. – с. 107–134.

43 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамические задачи поиска и обнаружения на некоторых замкнутых поверхностях // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 11. – с. 1948–1957

44 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. – 1995. – Т. 1, Вып. 4. – с. 827–862.

45 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Геометрия поисковых задач с информационной дискриминацией // ВИНИТИ, серия «Современная математика и приложения. Тематические обзоры». 1996. Т. 32. Динамические системы.

46 Шейнов В.П. Скрытое управление человеком (психология манипулирования). М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 848 с.

47 Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.