ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 433, № 5, с. 1–4

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.86

ДВУСТОРОННИЕ РЕСУРСНЫЕ СЕТИ – НОВАЯ ПОТОКОВАЯ МОДЕЛЬ

© 2010 г. О. П. Кузнецов, Л. Ю. Жилякова

Представлено академиком С.Н. Васильевым 21.01.2010 г.

Поступило 17.02.2010 г.

Классическая модель потоков в сетях [1, 2] и ее динамические модификации (см., например, [3]) характеризуются двумя свойствами: а) сеть открыта: в ней имеются источники, передающие ресурсы в сеть, и стоки, которые поглощают ресурсы; б) промежуточные вершины служат передаточными звеньями между источниками и стоками. В статических задачах задержка ресурсов в промежуточных вершинах запрещена [1], в динамических задачах, как правило, нежелательна [3].

В настоящей работе рассматривается динамическая модель замкнутой системы, в которой ресурсы не поступают и не расходуются. Ресурсы содержатся в вершинах, между которыми происходит обмен. Основной задачей является анализ процессов обмена и вопросы их стабилизации.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Ресурсной сетью назовем ориентированный граф, вершинам v_i которого приписаны неотрицательные числа $q_i(t)$, изменяющиеся в дискретном времени t и называемые ресурсами, а ребрам (v_i, v_j) – положительные числа r_{ij}, постоянные во времени и называемые проводимостями; n – число вершин. Состояние сети в момент t – вектор $Q(t) = (q_1(t), ..., q_2(t), ..., q_n(t))$. В каждый момент вершины передают по выходящим ребрам количество ресурса, зависящее от проводимостей ребер. Правила передачи ресурса удовлетворяют следующим условиям:

а) сеть замкнута, т.е. ресурсы извне не поступают;

б) ресурс, отдаваемый вершиной, вычитается из ее ресурса; ресурс, приходящий в вершину, прибавляется к ее ресурсу, т.е. выполнен закон сохранения суммарного ресурса W: $\forall t \sum_{i=1}^{n} q_i(t) = W$.

Матрицей проводимости сети будем называть матрицу $R = \|r_{ij}\|_{n \times n}$.

1.2. Состояние $Q(t)$ называется устойчивым, если

$$Q(t) = Q(t+1) = Q(t+2) = Q(t+3) = \ldots$$

Состояние $Q = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ называется асимптотически достижимым из состояния $Q(0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, ..., n$.

Состояние сети называется предельным, если оно либо устойчиво, либо асимптотически достижимо.

1.3. Ресурсная сеть называется однородной, если все проводимости равны, а правило функционирования сети – следующее: в момент $t+1$ вершина v_i по каждому из m_i выходящих ребер отдает: r единиц ресурса, если $m_i r \le q_i(t)$; $\frac{q_i(t)}{m_i}$ в противном случае.

1.4. Пару ребер $\langle(v_i, v_j), (v_j, v_i)\rangle$ назовем двусторонней парой. Сеть, вершины которой соединены только двусторонними парами, назовем двусторонней сетью.

1.5. Двусторонняя сеть называется полной, если любые две вершины соединены двусторонней парой, и симметричной, если в каждой двусторонней паре проводимости одинаковы.

1.6. Суммарной проводимостью сети r_{sum} назовем сумму проводимостей всех ее ребер: $r_{\text{sum}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$.

2. ОДНОРОДНЫЕ ДВУСТОРОННИЕ СЕТИ

В этом разделе рассматриваются однородные двусторонние полные сети (ОДП-сети) без петель. В таких сетях $m_i = n - 1$ для всех i; в матрице R по диагонали стоят нули, остальные элементы равны r. Правило 1.3 выглядит так: в момент $t+1$ вершина v_i по каждому из $n - 1$ выходящих ребер

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва

Педагогический институт Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

отдает: r единиц ресурса, если $r(n-1) \le q_i(t)$ (правило 1); $\frac{q_i(t)}{n-1}$ в противном случае (правило 2).

Три свойства ОДП-сетей

2.1. Если для некоторого t' $q_i(t') = q_j(t')$, то для всех $t > t'$ $q_i(t) = q_j(t)$. Это следует из того, что с момента t обе вершины получают и отдают одинаковое количество ресурса.

2.2. Если для некоторого t' $q_i(t') \le r(n-1)$, то для всех $t > t'$ $q_i(t) \le r(n-1)$.

Это следует из того, что v_i в момент t отдает весь свой ресурс, а получить от других $n-1$ вершин может не более чем $r(n-1)$.

2.3. Если для всех i $q_i(t) \ge r(n-1)$, то состояние $Q(t)$ устойчиво.

Это следует из того, что все вершины получают и отдают $r(n-1)$ единиц ресурса.

О процессе, в предельном состоянии которого ресурсы во всех вершинах равны, будем говорить, что в нем происходит выравнивание.

Теорема 1. *Для ОДП-сети без петель с числом вершин $n > 2$ существует порог выравнивания T,* равный $rn(n-1)$ *независимо от начального состояния сети. Иными словами*,

1) *если суммарный ресурс W сети не превосходит $T = rn(n-1)$, то при любом начальном состоянии сети ее предельным состоянием является вектор* $\left(\frac{W}{n}, \frac{W}{n}, \ldots, \frac{W}{n}\right)$;

2) *если $W > rn(n-1)$, то при любом начальном состоянии сети, в котором не все ресурсы равны, выравнивание не происходит*.

Конкретная характеристика предельных состояний для случая 2 дается теоремой 2. Введем следующие понятия и обозначения.

Начальное упорядочение вершин представим как

$$q_1(0) \ge q_2(0) \ge \ldots \ge q_k(0) > q_{k+1}(0) \ge \ldots \ge q_n(0),$$

где $q_k(0) > r(n-1)$, а $q_{k+1}(0) \le r(n-1)$.

Представим эти величины в виде

$$q_1(0) = r(n-1) + c_1(0), \ldots, q_k(0) = r(n-1) + c_k(0),$$
$$q_{k+1}(0) = r(n-1) - d_{k+1}(0), \ldots, q_n(0) = r(n-1) - d_n(0),$$

где все $c_i > 0$, $d_i \ge 0$.

Назовем множество вершин, для которых $q_i(t) > r(n-1)$, зоной $Z^+(t)$, множество вершин, для которых $q_i(t) \le r(n-1)$, – зоной $Z^-(t)$. Зона $Z^+(0)$ – это первые k вершин, зона $Z^-(0)$ – остальные вершины. Обозначим через $C(t)$ сумму всех $c_i(t)$, через $D(t)$ – сумму всех $d_j(t)$.

Теорема 2. *Если $W > rn(n-1)$, то предельным состоянием ОДП-сети является вектор* $(q_1 - h_l, q_2 - h_l, \ldots, q_l - h_l, r(n-1), \ldots, r(n-1))$, *где* $l = k$ *и* $h_k = \frac{D(0)}{k}$, если $c_k(0) \ge \frac{D(0)}{k}$; *в противном случае $l \le k$ – наибольшее целое число, такое что* $c_l(0) \ge h_l$, $h_l = \frac{C_l(0) - s}{l}$, *где* $C_l(0) = \sum_{i=1}^{l} c_i(0)$.

Пример. $n = 5$, $r = 2$, $W = 43$. Здесь $k = 3$, $l = 2$, строки соответствуют моментам времени.

0	11.00	10.00	9.00	7.00	6.00
1	10.25	9.25	8.25	7.50	7.75
2	10.06	9.06	8.06	7.94	7.88
3	10.02	9.02	8.02	7.97	7.98
4	10.00	9.00	8.00	8.00	7.99
5	10.00	9.00	8.00	8.00	8.00

....

Легко показать, что для ОДП-сети с петлями $T = rn^2$.

3. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДВУСТОРОННИЕ ПОЛНЫЕ СЕТИ

В этом разделе рассматривается более общий случай полных двусторонних сетей: несимметричные двусторонние полные сети с петлями (НДП-сети). Для их анализа используются результаты теории матриц [4, 5] и дискретных цепей Маркова [5–7], в частности тот факт, что для любого полного графа с петлями его матрица R положительна, а следовательно, неразложима и примитивна.

Обозначим суммарную проводимость $\sum_{j=1}^{n} r_{ji}$ всех входящих ребер i-й вершины через r_i^{in}; суммарную выходную проводимость $\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ – через r_i^{out}. Проводимость петли входит в обе суммы.

Правила, аналогичные 1.3, по которым происходит распределение ресурса в несимметричной сети, таковы. В момент $t+1$ вершина v_i в ребро v_m отдает: r_{im} единиц ресурса, если $q_i(t) > r_i^{\text{out}}$ (правило 1); $\frac{r_{im}}{r_i^{\text{out}}} q_i(t)$ в противном случае (правило 2).

В симметричной сети имеет место равенство

$$r_i^{\text{in}} = r_i^{\text{out}}. \qquad (1)$$

Однако для выполнения (1) симметричность матрицы не является необходимым условием.

Ресурсную сеть с несимметричной матрицей R назовем квазисимметричной, если для всех i

условие (1) выполняется, и несимметричной, если для некоторого i оно не выполняется.

Введем обозначение $\Delta r_i = r_i^{\text{in}} - r_i^{\text{out}}$.

Вершины несимметричной сети разделим на три класса:

1) вершины-аттракторы, для которых $\Delta r_i > 0$;

2) вершины-источники, $\Delta r_i < 0$;

3) нейтральные вершины, $\Delta r_i = 0$.

В симметричных и квазисимметричных сетях все вершины нейтральны.

Пусть среди n вершин сети имеется l аттракторов, k источников и $n - l - k$ нейтральных вершин. Будем считать, что аттракторы имеют номера от 1 до l, источники – от $l + 1$ до $l + k$, нейтральные вершины – от $l + k + 1$ до n.

Свойства НДП-сетей

3.1. В процессе функционирования НДП-сетей ресурс в нейтральных вершинах может временно стабилизироваться, а затем снова изменяться. Свойство 2.1 однородных сетей сохраняется лишь для источников и нейтральных вершин.

3.2. Если для некоторого t' $q_i(t') \le r_i^{\text{in}}$, то для всех $t > t'$ $q_i(t) \le r_i^{\text{in}}$ $(i > l)$.

Назовем множество вершин, для которых $q_i(t) \le r_i^{\text{out}}$, зоной $Z^-(t)$; множество вершин, для которых $q_i(t) > r_i^{\text{out}}$, – зоной $Z^+(t)$. Из свойства 3.2 следует, что источники и нейтральные вершины, раз попав в Z^-, уже не смогут ее покинуть, поскольку для них $r_i^{\text{in}} \le r_i^{\text{out}}$.

Теорема 3. *В НДП-сети для любого начального состояния $Q(0) = (q_1(0), q_2(0), \dots q_n(0))$ и любого суммарного ресурса W существует такой момент времени t', что*

$$\forall t > t' \quad q_i(t) \le r_i^{\text{in}}, \quad i > l. \tag{2}$$

По теореме 3 все источники и нейтральные вершины перейдут в зону $Z^-(t)$, однако условие (2) более сильно.

Теорема 4. *В НДП-сети при любом начальном распределении ресурса $W > r_{\text{sum}}$ существует предельное состояние $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$, причем q_i^* для всех неаттракторов $(i > l)$ не зависят от суммарного ресурса W и начального состояния сети.*

Теорема 5. *В НДП-сети существует пороговое значение суммарного ресурса T, такое что при $W \le T$ все вершины начиная с некоторого t' переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ непуста для любого t. T единственно и не зависит от суммарного ресурса W и его начального распределения $Q(0)$.*

Из принципа Дирихле следует, что $T \le r_{\text{sum}}$. Для однородных сетей по теореме 1 выполняется равенство: $T = r_{\text{sum}}$. В несимметричных сетях $T < r_{\text{sum}}$.

При $W \le T$ и $t > t'$ все вершины сети функционируют по правилу 2; каждая вершина получает ресурс от остальных вершин и ресурс из петли, отданный на предыдущем такте t:

$$Q(t+1) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r_{i1}}{r_i^{\text{out}}} q_i(t), \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{r_{in}}{r_i^{\text{out}}} q_I(t)\right). \tag{3}$$

Из (3) следует, что $Q(t + 1) = Q(t) \cdot (D^{-1}R)$, где $D = \operatorname{diag}\{r_1^{\text{out}}, \dots, r_n^{\text{out}}\}$.

Матрицу $D^{-1}R$ обозначим через R':

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{r_1^{\text{out}}} & \frac{r_{12}}{r_1^{\text{out}}} & \dots & \frac{r_{1n}}{r_1^{\text{out}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{\text{out}}} & \frac{r_{n2}}{r_n^{\text{out}}} & \dots & \frac{r_{nn}}{r_n^{\text{out}}} \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (3) можно переписать в виде

$$Q(t+1) = Q(t) \cdot R'.$$

Для НДП-сети R' – положительная стохастическая матрица, описывающая регулярную цепь Маркова [6, 7]. Поэтому при $W \le T$ сеть является эргодической системой. Вектор предельного состояния Q^* для нее существует, единствен для любого W и не зависит от начального распределения ресурса по вершинам. Вектор-столбец $Q^{*\text{T}}$ является левым собственным вектором стохастической матрицы R' с собственным числом $\lambda_1 = 1$, т.е.

$$Q^{*\text{T}} = (R')^{\text{T}} \cdot Q^{*\text{T}} \text{ или } Q^* = Q^* \cdot (R').$$

Пусть $Q^{1*} = (q_1^{1*}, q_2^{1*}, \dots, q_n^{1*})$ – вектор предельного состояния сети при единичном суммарном ресурсе ($W = 1$).

Предел степеней стохастической матрицы $\lim\limits_{n \to \infty} (R')^n$ $(R')^n = (R')^\infty$ – матрица предельных вероятностей перехода цепи Маркова. Для НДП-сети матрица $(R')^\infty$ существует, причем [7]

$$(R')^\infty = \begin{pmatrix} Q^{1*} \\ Q^{1*} \\ \dots \\ Q^{1*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \\ q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_1^{1*} & q_2^{1*} & \dots & q_n^{1*} \end{pmatrix}.$$

Для любого $W \le T$ будет выполняться: $Q^* = Q^{1*} \cdot W$.

Рассмотрим поведение НДП-сети при $W > T$. Аттрактор назовем истинным, если при $W > T$ вблизи предельного состояния он окажется в зоне $Z^+(t)$.

Теорема 6. *Вершина* v_i *является истинным аттрактором, если и только если на ней дискретная функция* $f(i) = \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$ *достигает минимума. НДП-сеть имеет больше одного истинного аттрактора тогда и только тогда, когда* $f(i)$ *принимает наименьшее значение в нескольких вершинах.*

Теорема 7. *Если НДП-сеть обладает одним истинным аттрактором с номером* a, *то* $T = \frac{r_a^{out}}{q_a^{1*}}$.

Координаты вектора предельного состояния $Q^* = (\tilde{q}_1^*, \tilde{q}_2^*, \ldots, \tilde{q}_n^*)$, соответствующего суммарному ресурсу $W = T$, находятся по формуле: $\tilde{q}_i^* = \frac{r_a^{out}}{q_a^{1*}} q_i^{1*}$.

Теорема 8. *Координаты вектора предельного состояния НДП-сети* $Q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ *зависят от величины суммарного ресурса* W *и определяются следующим образом*:

1) *при* $W \le T$, *где* $T = \min \frac{r_i^{out}}{q_i^{1*}}$: $q_i^* = q_i^{1*} \cdot W$

2) *при* $W > T$ $q_i^* = q_i^{1*} \cdot T$, *где* i — *номера неаттракторов. Оставшийся ресурс распределяется между истинными аттракторами.*

Таким образом, Q^* определяется: 1) суммарными выходными проводимостями вершин r_i^{out}; 2) любой строкой матрицы $(R')^\infty$ и 3) суммарным ресурсом W. При $W > T$ становится существенным деление вершин на истинные аттракторы и остальные вершины: если сеть имеет больше одного истинного аттрактора, она становится лишь частично эргодической системой, поскольку предельное распределение ресурса по аттракторам зависит от начального состояния сети; ресурс во всех остальных вершинах от него не зависит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. 276 с.
2. *Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B.* Network Flows: Theory, Algorithms and Applications. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
3. *Fleischer L., Skutella M.* In: Proc. XXXV ACM / SIAM Symp. Discrete Algorithms SODA-03. January 2003. Baltimore, 2003. P. 66–75.
4. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 272 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
6. *Романовский В.И.* Дискретные цепи Маркова. М.; Л.: Госнаучтехиздат, 1949. 436 с.
7. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. 272 с.