Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ им. В. А. ТРАПЕЗНИКОВА

С.А. Баркалов, Д.А. Новиков,
В. Ю. Песковатсков, В.И. Серебряков

ДВУХКАНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ АКТИВНОЙ ЭКСПЕРТИЗЫ

ПРЕПРИНТ

Москва 2000

УДК.65.012.

Баркалов С.А., Новиков Д.А., Песковатсков В. Ю., Серебряков В.И.
Двухканальная модель активной экспертизы - М., 2000 (Институт проблем управления им. Трапезникова В.А. РАН).

Рассматривается задача экспертного оценивания, в которой существует возможность искажения информации экспертами в соответствии с собственными интересами.

Рецензент: д.т.н. В. Н. Бурков

Текст препринта воспроизводится в том виде, в котором представлен авторами.

Утверждено к печати Редакционным советом Института.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема принятия решений или проблема выбора альтернатив - это, может быть, самый распространенный класс задач, с которыми сталкивается не только исследователь, но и инженер-конструктор, хозяйственный руководитель и т.п. И математика, вооруженная современными средствами вычислительной техники, в анализе этих проблем может сыграть выдающуюся роль...

Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.

Роль человека в современных системах управления является определяющей: он выступает генератором целей системы и альтернативных путей ее развития, определяет реальную структуру системы и формирует ее поведение. Наиболее сложным и ответственным этапом деятельности человека в системах управления и главным фактором всякого руководства и управления считается принятие решений. Моделирование процессов принятия решений сегодня становится центральным направлением автоматизации деятельности лица, принимающего решения (ЛПР).

Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В., Слядзь Н.Н., Глушков В.И. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. М.: Радио и связь, 1989.

Многообразие целей и задач, решаемых исполнителями при реализации большого проекта, большое число исполнителей, их возможности и способности, требования и условия, предъявляемые окружающей средой - всё это требует от ПМ владения большим количеством информации, необходимой для принятия эффективных управленческих решений. Но возможности ПМ ограничены, и он не всегда может сам непосредственно получить всю эту информацию. Поэтому возникает необходимость получения нужной информации от остальных участников проекта, окружающей среды и т.д. В управлении социально-экономическими системами, в том числе и в управлении проектами, важную роль играют механизмы экспертизы, то есть механизмы получения и обработки информации от экспертов - специалистов в конкретных областях.

Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег-Гео, 1997.

Без преувеличения можно сказать, что современная цивилизация – это цивилизация принятия решений. В любой плоскости взаимоотношений, в социальной, экономической, технической системах руководителям приходится принимать решения.

Любые ситуации, требующие принятия решений, содержат, как правило, большое количество неопределенностей, которые можно разделить на три класса. «Прежде всего, это - "неопределенности природы" - факторы нам просто неизвестные. Затем - "неопределенность противника". Человек всегда существует в условиях, при которых результаты его решений не строго однозначны, они зависят от действий других лиц (партнеров, противников и т.п.), действия которых он не может полностью учесть или предсказать. И, наконец, существуют так называемые "неопределенности желаний" или целей. В самом деле, перед исследователем всегда стоит несколько целей. Описать их одним показателем (критерием) невозможно...» ([10], С.8-9).

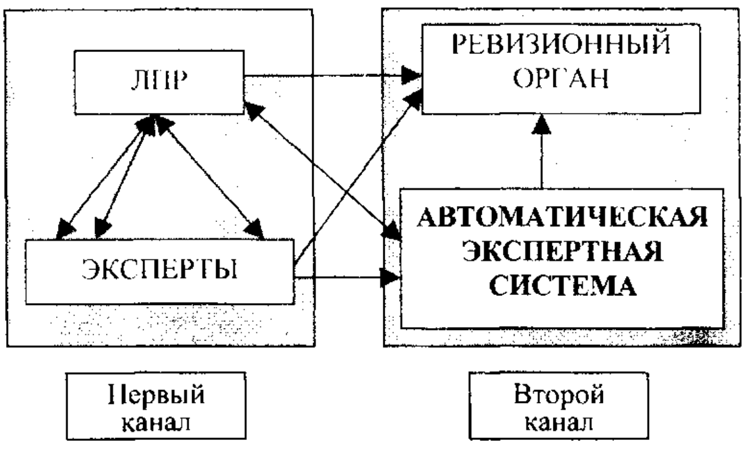
Очевидно, что свести возникающие задачи с неопределенностями к точно поставленным математическим задачам практически невозможно. «...Для этого надо тем или иным образом "снять" неопределенности, т.е. ввести какие-либо гипотезы. Но формирование гипотез - это уже прерогатива содержательного анализа, это формализация неформальных ситуаций. Таким образом, анализ задач принятия решений в условиях неопределенности не может быть завершен силами одних математиков. И всегда умение "эксперта", то есть профессионала в конкретной области, бывает необходимым, а подчас и решающим...» ([10], С.9).

В больших же системах эта необходимость привлечения экспертов еще более очевидна. На сегодняшний день существует множество механизмов проведения опросов экспертов и обработки их мнений. Мы будем рассматривать задачу активной экспертизы, экспертного оценивания, при котором существует возможность искажения информации экспертами в соответствии с собственными интересами (см. [5], С.57-69).

ЧАСТЬ 1. Описание двухканальной модели активной экспертизы

В настоящее время существует обширная литература о многоканальных (многовариантных) активных системах с хорошо проработанными механизмами и алгоритмами (см., например, [1]-[3]). Большинство работ рассматривает количественные характеристики исследуемых систем. Нас будет интересовать двухканальная модель активной экспертизы, где оцениваемые альтернативы могут быть сравнимы только по качественному признаку.

Рассмотрим следующую модель экспертизы:



Стрелками на схеме показаны потоки информации.

Опишем приведенную на схеме двухканальную модель экспертизы.

Пусть лицо, принимающее решение (ЛПР), должно проранжировать по степени предпочтительности какое-то количество объектов (альтернатив). Поскольку число объектов может быть достаточно велико и, кроме того, о некоторых из них ЛПР может иметь минимальное представление, поскольку самому ЛПР практически невозможно получить и обработать информацию о ранжируемых объектах, он привлекает экспертную группу (совет) для решения возникшей задачи.

Эксперты, на основе предоставленной ЛПР информации и каких-то своих характеристик (опыт, интуиция, компетентность и пр.) ранжируют рассматриваемые объекты (альтернативы). Затем по какому-то принципу информация об индивидуальных мнениях экспертов обрабатывается, формируется их коллективное согласованное мнение и полученная информация о порядке предпочтительности ранжируемых объектов (альтернатив) сообщается лицу, принимающему решение. И уже на основе этой полученной экспертной информации ЛПР принимает свое решение.

Согласованное мнение экспертов по заранее установленному правилу формирует автоматическая экспертная система, в которую также сообщается исходная информация о ранжируемых объектах (альтернативах), об экспертах и о ЛПР (то есть, она включает в себя пересчётную модель).

Сведения о принимаемых решениях и пр. сообщаются «ревизионному органу», который, вообще говоря, имеет главенствующий статус и способен в случае плохой работы ЛПР применить к нему те или иные санкции. Экспертная система также поставляет ему необходимую для этого информацию.

Поскольку в рассматриваемой модели все элементы обладают активным поведением, то есть способны искажать информацию в своих целях, то необходимо построить такую систему взаимодействия элементов, чтобы экспертам было выгодно сообщать достоверную информацию и, наоборот, невыгодно искажать сообщаемые лицу, принимающему решение, сведения.

Таким образом, мы хотим построить такую систему обработки экспертной информации и информации от ЛПР (а эту роль в модели выполняет автоматическая экспертная система, которая является не только "советчиком" для ЛПР, но и виртуальным экспертом компетентности и добросовестности экспертов и ЛПР, сообщая эти сведения соответственно ЛПР и (про самого ЛПР) ревизионному органу), чтобы обеспечить оптимальную (в оговариваемом ниже смысле) работу всей системы экспертизы.

В качестве механизма стимулирования будем использовать систему весов (своего рода коэффициентов компетентности экспертов и ЛПР), строить которую будем также на основе качественной задачи группового выбора специального вида.

Итак, для формализованной записи рассматриваемой модели нам понадобятся некоторые алгоритмы и сведения из теории группового экспертного выбора (эти алгоритмы, соответствующие утверждения мы построим и докажем в Части 2 настоящей работы).

ЧАСТЬ 2. Элементы теории группового экспертного выбора

§1. Постановка задачи

Под групповым выбором обычно понимается выработка согласованного группового решения о «порядке предпочтения» рассматриваемых объектов на основе индивидуальных мнений каждого из экспертов группы.

В состав экспертной группы часто включаются специалисты разных направлений, разных областей деятельности, что обеспечивает возможность достаточно разностороннего анализа ранжируемых объектов. Коллективное суждение обычно считается более обоснованным, чем индивидуальное.

Примерами типичных ситуаций группового выбора могут служить: распределение конкурсной комиссией (жюри) поощрений для совокупности представленных на конкурс проектов (произведений искусства); обсуждение и согласование нескольких альтернативных законопроектов законодательным собранием; ранжирование группой экспертов образцов новых промышленных изделий по перспективности их внедрения и др. [6,9].

Коллективный выбор может быть получен либо в результате обсуждения рассматриваемой проблемы экспертной группой и принятия решения путем голосования, либо в результате процедуры, состоящей в том, что каждый член группы независимо от других (то есть без обязательного обсуждения проблемы с остальными экспертами) делает свой индивидуальный выбор, а затем на основе индивидуальных мнений всех экспертов группы по заранее установленному правилу вырабатывается коллективное мнение. Очевидным преимуществом последнего способа является то, что при совместном обсуждении одни члены экспертной группы нередко оказывают влияние на других ее членов. Причиной такого влияния может быть не только убедительная аргументация, но и активность отдельных экспертов, решительность и напористость, с которыми они защищают свою точку зрения. Другой причиной влияния может быть авторитет эксперта, его научная или производственная репутация. Однако даже при независимой экспертизе итоговое решение зависит от огромного числа трудноуловимых факторов, таких, например, как эмоциональное состояние членов экспертной группы во время выработки решения.

Таким образом, проблема группового выбора трактуется как общая проблема перехода от заданных индивидуальных мнений экспертов к единому групповому мнению (при этом природа "индивидуумов" и их "предпочтений" может быть самой разной), причем правило обработки исходной информации (правило группового выбора) должно обеспечивать получение группового ранжирования, наилучшим образом представляющего мнения всех членов экспертной группы [6].

Перейдем к конкретной постановке задачи.

Пусть экспертная группа, состоящая из m экспертов, ранжирует n объектов

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

(по интенсивности проявления какого-то качественного признака). Пусть k-й эксперт $\left(k = \overline{1, m}\right)$ представляет свое мнение в виде матрицы парных сравнений:

$$R^k = \left(r_{ij}^k\right),$$

где

$$r_{ij}^k = \begin{cases} 2, \text{ если } a_i \underset{k}{\succ} a_j \\ 1, \text{ если } a_i \underset{k}{\sim} a_j \\ 0, \text{ если } a_i \underset{k}{\prec} a_j \end{cases}$$

и

$$r_{ij}^k = 2 - r_{ji}^k,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n},\ k = \overline{1, m}.$$

При этом также должно выполняться условие транзитивности экспертных предпочтений.

Затем на основании индивидуальных матриц по какому-то принципу (например, по правилу большинства) формируется матрица

$$R^* = \left(r_{ij}^*\right) \in Matr_{n,n},$$

полученная как «обобщенное» мнение группы экспертов. Однако, эта матрица может содержать в себе нарушение транзитивности предпочтений, то есть, например, может получиться ситуация, когда

$$a_{i_1} \overset{*}{\succ} a_{i_2} \overset{*}{\succ} a_{i_3} \overset{*}{\succ} a_{i_1} \text{ или}$$

$$a_{i_1} \overset{*}{\succ} a_{i_2} \overset{*}{\sim} a_{i_3} \overset{*}{\succ} a_{i_1} \text{ и т.п.}$$

Поэтому очевидным представляется требование предложить процедуру, которая на основе исходных данных (таких, например, как индивидуальные мнения экспертов группы

$$R^k = \left(r_{ij}^k\right), \quad k = \overline{1,m}$$

и группового выбора

$$R^* = \left(r_{ij}^*\right),$$

не являющегося ранжированием, и т.д.) строит некоторое ранжирование, в каком-то смысле "наилучшим образом" выражающее мнение всех членов экспертной группы.

Поставим задачу следующим образом:

<u>1 этап:</u> Определить, является ли R* ранжированием;

Если R*— ранжирование, то задача решена. Если же R^* не является ранжированием, то

<u>2 этап:</u> Построить такое ранжирование $\overline{\overline{R}}$, которое является ближайшим к групповому мнению R^* (в некоторой метрике).

То есть, обозначив через $d\left(\overline{R}, R^*\right)$ расстояние между $\overline{R}$ и R^*, получим требование:

$$d\left(\overline{R}, R^*\right) \to \min,$$

где групповой выбор R^* определяется условием:

$$\sum_{k=1}^{m} d\left(R^*, R^k\right) = \min_{R \in R(n)} \sum_{k=1}^{m} d\left(R, R^k\right),$$

где $R(n)$ — множество всевозможных матриц парных сравнений n объектов указанного выше вида.

То есть групповой выбор выбирается так, чтобы сумма расстояний от него до всех имеющихся индивидуальных экспертных ранжирований была минимальной. Групповой выбор, отвечающий этому условию, называется **медианой экспертных ранжирований.**

Чаще всего рассматривают (и мы тоже остановим на нем свой выбор) расстояние **Кемени-Снелла** [7], определяемое формулой:

$$d\left(R^1, R^2\right) = \sum_{i<j} \left| r_{ij}^1 - r_{ij}^2 \right|$$

Рассматриваемые в этой формуле $(n^2-n)/2$ элементов каждой матрицы содержат всю информацию об экспертных ранжированиях. Эта “популярность” расстояния Кемени-Снелла, объясняется тем, что только оно удовлетворяет следующим шести аксиомам [7]:

<u>**Аксиома 1:**</u> $d(R^1, R^2) \geq 0$**, причем** $d(R^1, R^2) = 0$ **тогда и только тогда, когда** $R^1 = R^2$.

<u>**Аксиома 2:**</u> $d(R^1, R^2) = d(R^2, R^1)$ **— симметричность.**

<u>**Аксиома 3:**</u> $d(R^1, R^2) \leq d(R^1, R^3) + d(R^3, R^2)$ **- неравенство треугольника. Причем** $d(R^1, R^2) = d(R^1, R^3) + d(R^3, R^2)$ **тогда и только тогда, когда** $R^1 \cap R^2 \subseteq R^3 \subseteq R^1 \cup R^2$.

Эти три аксиомы определяют геометрические свойства расстояния.

<u>**Аксиома 4:**</u> **Пусть** $\widetilde{R}^1$ **— ранжирование, полученное из** R^1 **перестановкой некоторых объектов, а** $\widetilde{R}^2$ **— ранжирование, полученное из** R^2 **точно такой же перестановкой. Тогда в результате этой перестановки расстояние между двумя ранжированиями не изменяется, то есть:**

$$d(\tilde{R}^1, \tilde{R}^2) = d(R^1, R^2).$$

<u>Аксиома 5:</u> Если два ранжирования отличаются друг от друга только на части рядом стоящих, составляющих сегмент объектов, то расстояние между исходными ранжированиями равно расстоянию между ранжированиями только этих объектов.

<u>Аксиома 6:</u> Минимальное расстояние между двумя несовпадающими ранжированиями равно 1, то есть:

$$\min_{R^1 \neq R^2} d\left(R^1, R^2\right) = 1.$$

Иногда рассматриваются не матрицы парных сравнений, а векторы, содержащие информацию о $(n^2-n)/2$ наддиагональных элементах матрицы парных сравнений. Вектор, соответствующий матрице R, может иметь, например, следующий вид:

$$\left(r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{14}, r_{24}, r_{34}, \ldots, r_{1n}, r_{2n}, \ldots, r_{n-1n}\right)$$

§2. Некоторые утверждения

В дальнейшем, для обоснования некоторых методов нахождения циклов (под циклом мы будем понимать нарушение транзитивности предпочтений) и методов построения ранжирований, нам понадобятся некоторые утверждения.

Рассмотрим следующие классы матриц третьего порядка (каждому классу принадлежат матрицы, получающиеся друг из друга перестановкой строк и соответствующих столбцов):

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Здесь суммы строк одинаковы, но $r_{13} \neq r_{31}$.

$$\mathrm{I}_2 = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathrm{I}_3 = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$$

В I_2 и I_3 суммы строк различны и их значения принадлежат множеству $\{2,3,4\}$.

$$\mathrm{J}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Здесь суммы строк одинаковы и, кроме того, все элементы одинаковы.

$$J_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Здесь суммы строк принадлежат множеству $\{2,5\}$, точнее суммы двух строк равны двум, а одной — пяти.

$$J_3 = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$$

Здесь суммы строк различны и принадлежат множеству $\{1,3,5\}$.

$$J_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Здесь суммы строк принадлежат множеству $\{1,4\}$, причем суммы двух строк равны четырем, а одной — единице.

Получим:

$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ — множество матриц парных сравнений третьего порядка, содержащих циклы, то есть нарушение транзитивности предпочтений.

$J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$ — множество матриц парных сравнений третьего порядка, в которых транзитивность предпочтений не нарушена, то есть представляющих некоторые ранжирования трех объектов.

<u>Утверждение 1:</u> Матрица парных сравнений

$$R = \left(r_{ij}\right) \in \mathrm{Matr}_{n,n}\text{, }\textbf{где}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad a_i \succ a_j \\ 1, & \text{если} \quad a_i \sim a_j \\ 0, & \text{если} \quad a_i \prec a_j \end{cases}$$

содержит цикл тогда и только тогда, когда существует ее подматрица третьего порядка (лежащая на пересечении каких-то b-ой, c-ой, d-ой строк и b-го, c-го, d-го столбцов), удовлетворяющих одному из следующих двух условий:

1) Суммы строк ее различны и принадлежат множеству {2,3,4};

2) Суммы строк одинаковы, но $r_{bd} \neq r_{db}$;

Причем цикл образуют объекты a_b; a_c; a_d. (Здесь условие 1) означает, что подматрица принадлежит $I_2 \cup I_3$; условие 2) означает, что подматрица принадлежит I_1).

<u>Доказательство:</u>

Пусть существует подматрица третьего порядка, удовлетворяющая условию 1) или 2). Докажем, что в этом случае матрица R содержит цикл. Действительно, в этом случае подматрица принадлежит множеству I, и, следовательно, содержит цикл (причем его образуют строки, входящие в подматрицу).

Пусть теперь известно, что матрица R содержит цикл. Докажем, что три строки, его образующих, составляют *подматрицу третьего порядка, обязательно удовлетворяющую одному из условий* 1) *или* 2). *Предположим противное: цикл есть, но подматрица не удовлетворяет ни одному из условий* 1) *или* 2). *Однако, если подматрица не удовлетворяет условиям* 1) *или* 2), *то она принадлежит множеству J, которое состоит лишь из матриц, не содержащих циклы. (Здесь* $U = I \cup J$ *-множество всех матриц парных сравнений третьего порядка указанного вида,* $I \cap J = \varnothing$ *).*

Полученное противоречие и доказывает то, что выполнено условие 1) или 2).Таким образом, Утверждение 1 доказано.

Пусть есть m экспертов, которые ранжируют n объектов

$$a_1, a_2, \dots, a_n .$$

Каждый k-ый эксперт $\left(k = \overline{1,m}\right)$ записывает свое решение в виде вектора

$$W^k = \left(w_s^k\right), \quad s = \overline{1, \frac{n^2 - n}{2}},$$

получаемого из матрицы парных сравнений R^k, например, по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
w_1^k &= r_{12}^k \\
w_2^k &= r_{13}^k \\
w_3^k &= r_{23}^k \\
w_4^k &= r_{14}^k \\
w_5^k &= r_{24}^k \\
w_6^k &= r_{34}^k \\
&\vdots \\
w_{n^2-n/2}^k &= r_{n-1n}^k
\end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\alpha(t)=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq t}}^{m}\ \sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^k-w_s^t\right|$$

Здесь $\alpha(t)$ — суммарное расстояние от мнения t-го эксперта до всех остальных.

<u>**Утверждение 2:**</u> **Для каждой пары (t_1,t_2) $\left(t_1=\overline{1,m},\ t_2=\overline{1,m}\right)$ справедливо следующее неравенство:**

$$\alpha(t_1)\leq\alpha(t_2)+(m-2)\cdot\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^{t_1}-w_s^{t_2}\right|$$

<u>***Доказательство:***</u>

Имеем:

$$\alpha(t_1)=\sum_{\substack{k=1\\ k\neq t_1}}^{m}\ \sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^k-w_s^{t_1}\right|=\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq t_1}}^{m}\left|w_s^k-w_s^{t_1}\right|=$$

$$=\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq t_1}}^{m}\left|w_s^k-w_s^{t_2}+w_s^{t_2}-w_s^{t_1}\right|\leq\leq\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left(\sum_{\substack{k=1\\ k\neq t_1}}^{m}\left|w_s^k-w_s^{t_2}\right|+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq t_1}}^{m}\left|w_s^{t_2}-w_s^{t_1}\right|\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left(\sum_{\substack{k=1\\ k\neq t_1}}^{m}\left|w_s^k-w_s^{t_2}\right|+(m-1)\cdot\left|w_s^{t_2}-w_s^{t_1}\right|\right)=$$

$$= \sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \left(\sum_{\substack{k=1\\ k\neq t_2}}^{m} \left|w_s^k - w_s^{t_2}\right| - \left|w_s^{t_1} - w_s^{t_2}\right| + (m-1)\cdot\left|w_s^{t_2} - w_s^{t_1}\right| \right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \left(\sum_{\substack{k=1\\ k\neq t_2}}^{m} \left|w_s^k - w_s^{t_2}\right| + (m-2)\cdot\left|w_s^{t_2} - w_s^{t_1}\right| \right) = \alpha(t_2) + (m-2)\cdot \sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \left|w_s^{t_2} - w_s^{t_1}\right|.$$

Утверждение 2 доказано.

Рассмотрим вновь матрицу парных сравнений

$$R^* = \left(r_{ij}^*\right)\left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}\right),$$

полученную как обобщенное мнение группы экспертов. Пусть $S(i)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ — сумма элементов i-ой строки.

Утверждение 3: Матрица парных сравнений содержит цикл, если выполнено одно из следующих условий:

1) Для некоторой пары (i, j) $S(i) > S(j)$**, но** $r_{ij}^* \neq 2$ **;**

2) Для некоторой пары (i, j) $S(i) = S(j)$ **, но** $r_{ij}^* \neq 1$ **;**

3) Для некоторой пары (i, j) $S(i) < S(j)$ **, но** $r_{ij}^* \neq 0$ **.**

Доказательство:

Пусть N_i *— число объектов, "лучших", чем* a_i,

n_i *— число объектов, "худших", чем* a_i.

Тогда $(n - N_i - n_i)$ *— число объектов, эквивалентных (равноценных)* a_i.

Аналогично для j:

N_j *— число объектов, "лучших", чем* a_j,

n_j — *число объектов, "худших", чем* a_j.

Тогда $(n - N_j - n_j)$ — *число объектов, эквивалентных (равноценных)* a_j.

Докажем 1):

Предположим противное (предварительно заметив, что

$$S(i) = N_i \cdot 0 + n_i \cdot 2 + (n - N_i - n_i) \cdot 1 = n - N_i + n_i$$

$$S(j) = N_j \cdot 0 + n_j \cdot 2 + (n - N_j - n_j) \cdot 1 = n - N_j + n_j)$$

Имеем: $n - N_i + n_i > n - N_j + n_j$, *следовательно*

$$N_j - N_i > n_j - n_i$$

(то есть не зависит от n). У нас $r_{ij}^* \neq 2$. ***Имеем два случая:***

а) $r_{ij}^* = 1$, *то есть* $a_i \sim a_j$.

Здесь $N_i = N_j$, $n_i = n_j$, *то есть* $0 = N_j - N_i > n_j - n_i = 0$.

Получили противоречие;

б) $r_{ij}^* = 0$, *то есть* $a_i \prec a_j$.

Здесь $N_i > N_j$, $n_i < n_j$, *то есть* $0 > N_j - N_i > n_j - n_i > 0$.

Получили противоречие.

Тем самым доказано 1).

Докажем 2):

Предположим противное: Имеем: $N_i - N_j = n_i - n_j$. *Но у нас* $r_{ij}^* \neq 1$. *Имеем два случая:*

а) $r_{ij}^* = 2$, *то есть* $a_i \succ a_j$.

Тогда $N_i < N_j$, $n_i > n_j$, *то есть* $0 < n_i - n_j = N_i - N_j < 0$. ***Получили** противоречие;*

б) $r^*_{ij} = 0$, *то есть* $a_i \prec a_j$.

Здесь $N_i > N_j$, $n_i < n_j$, *то **есть*** $0 > n_i - n_j = N_i - N_j > 0$.
Получили противоречие.

Тем самым доказано 2).

Докажем 3):

*Предположим противное: **Имеем:*** $n_i - n_j < N_i - N_j$. ***Но** у нас* $r^*_{ij} \neq 0$. *Имеем два случая:*

а) $r^*_{ij} = 1$, *то есть* $a_i \sim a_j$.

Здесь $N_i = N_j$, $n_i = n_j$, *то есть* $0 = n_i - n_j < N_i - N_j = 0$. ***Получили** противоречие;*

б) $r^*_{ij} = 2$, *то есть* $a_i \succ a_j$.

Здесь $N_i < N_j$, $n_i > n_j$, *то есть* $0 < n_i - n_j < N_i - N_j < 0$.

Получили противоречие.

Тем самым доказано 3).

<u>Утверждение 3</u> доказано.

<u>Замечание:</u> В случае, когда:

$S(i) > S(j)$ **, но** $r^*_{ij} = 2$ **или**

$S(i) = S(j)$ **, но** $r^*_{ij} = 1$ **или**

$S(i) < S(j)$ **, но** $r^*_{ij} = 0$ **, никаких противоречий нет.**

<u>Утверждение 4:</u> Пусть $R = (r_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ **- матрица парных сравнений и** $W = (w_1, \ldots, w_{\frac{n^2-n}{2}})$ **- соответствующий ей вектор, где**

$$w_1 = r_{12}$$
$$w_2 = r_{13}$$
$$w_3 = r_{23}$$
$$w_4 = r_{14}$$
$$w_5 = r_{24}$$
$$w_6 = r_{34}$$
$$\vdots$$
$$w_{\frac{n^2-n}{2}} = r_{n-1\,n}$$

Тогда связь между индексами l с одной стороны и (i , j) с другой в соотношении $w_l = r_{ij}$ **определяется следующими формулами:**

1) $$i = l - \frac{1}{2} k \cdot (k-1)$$
$$j = k + 1\,,$$

где $k = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{8l - 7}\right)\right]$ **— номер группы координат вектора W (см. Табл.1);**

2) $$l = i + \frac{1}{2} \cdot (j-1) \cdot (j-2)$$

Табл.1

k	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**...**
l	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**...**
i	**1**	**1**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
j	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**5**	**5**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**...**

__Доказательство:__

Очевидно, что для любого l из k-ой группы ***справедливо*** *двойное неравенство:*

$$\frac{(k-1)\cdot k}{2} < l \le \frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

Равенство в последнем случае относится к последнему элементу группы, то есть

$$k^2 + k - 2l = 0\,,\; k = \frac{1}{2}\cdot\left(-1+\sqrt{1+8l}\right).$$

Для остальных l $k^2 + k - 2l < 0$, *поэтому* $k > \frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{1+8l}\right)$ *или* $k = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{1+8l}\right)\right]$. *Для получения единой формулы заменим l на (l -1), то есть*

$$k = k(l) = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{8l-7}\right)\right]$$

при *l из k-ой группы.*

Докажем теперь, что

$$i = i(k) = l(k) - \frac{1}{2}\cdot k\cdot(k-1)$$
$$j = j(k) = k+1.$$

Сначала заметим, что в группе k всего k пар (i , j). ***Доказательство будем вести по индукции по номеру группы координат k.***

При k=1:

$$1)\, i = i(1) = l(1) - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1-1) = 1,$$
$$j = 1+1 = 2\,.$$

Очевидно, что здесь все условия выполнены.

При k=2:

$$1)\, i = i(2) = 1(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 2 - 1 \cdot 1 = 1 ,$$
$$j = 2 + 1 = 3 \ ,$$

$$2)\, i = i(2) = 1(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 3 - 1 \cdot 1 = 2 ,$$
$$j = 2 + 1 = 3 \ .$$

Здесь также все условия выполнены.

Пусть условия выполнены для $k=\xi$, то есть:

$$1)\, i = i(\xi) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi - 1) = 1, \Rightarrow 1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi - 1),$$
$$j = j(\xi) = \xi + 1 \ ,$$

$$2)\, i = i(\xi) = 1 + 1 - \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi - 1) = 2,$$
$$j = j(\xi) = \xi + 1 ,$$
$$\vdots$$

$$\xi)\, i = i(\xi) = 1 + \xi - 1 - \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi - 1) = \xi,$$
$$j = j(\xi) = \xi + 1 \ .$$

Докажем, что условия выполнены и для $k=\xi+1$:

$$1)\, i = i(\xi + 1) = 1 + \xi - \frac{1}{2} \cdot (\xi + 1) \cdot \xi =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi - 1) + \xi - \frac{1}{2} \cdot (\xi + 1) \cdot \xi =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \xi + \xi - \frac{1}{2} \cdot \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \xi = 1,$$
$$j = j(\xi + 1) = \xi + 2 \ ,$$

$$2)\, i = i(\xi + 1) = 2,$$
$$j = j(\xi + 1) = \xi + 2,$$

$$\vdots$$

$$\xi + 1)i = i(\xi + 1) = \xi + 1,$$
$$j = j(\xi + 1) = \xi + 2.$$

Итак, мы доказали, что

$$\begin{cases} i = l - \frac{1}{2}\cdot k\cdot(k-1) & \Rightarrow \quad l = i + \frac{1}{2}\cdot k\cdot(k-1) \\ j = k+1 & \Rightarrow \quad k = j-1. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $l = i + \frac{1}{2}\cdot(j-1)\cdot(j-2)$.

<u>Утверждение 4</u> доказано.

§3. Методы поиска циклов и построения ранжирований

Здесь мы опишем некоторые методы поиска циклов (нарушения транзитивности предпочтений) и методы ("жадные" алгоритмы) построения ранжирования, достаточно близкого к групповому выбору.

Перед применением каждого из методов рекомендуется привести матрицу парных сравнений перестановкой строк и соответствующих им столбцов к эквивалентной ей матрице, в которой строки упорядочены по невозрастанию сумм.

<u>Метод 1</u>

Этот метод ищет циклы в матрице парных сравнений (поиск основан на **<u>Утверждении 1</u>**), позволяет ликвидировать нарушение транзитивности экспертных предпочтений, получив некоторое ранжирование в форме матрицы парных сравнений. Суть его в следующем: в матрице парных сравнений

$$R = (r_{ij}) \in Matr_{n,n}, \text{ где}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad a_i \succ a_j \\ 1, & \text{если} \quad a_i \sim a_j, \quad i,j = \overline{1,n}. \\ 0, & \text{если} \quad a_i \prec a_j \end{cases}$$

рассматриваются всевозможные подматрицы третьего порядка, лежащие на пересечении *x*-ой, *y*-ой, *z*-ой строк и *x*-го, *y*-го, *z*-го столбцов $x = \overline{1, n-2}, y = \overline{x+1, n-1}, z = \overline{y+1, n}$.

Затем считаются суммы строк подматрицы, то есть:

$$S_1 = r_{xx} + r_{xy} + r_{xz},$$

$$S_2 = r_{yx} + r_{yy} + r_{yz},$$

$$S_3 = r_{zx} + r_{zy} + r_{zz}.$$

Образуется множество $D = \{S_1, S_2, S_3\}$.

Если $D = \{2,3,4\}$ или $S_1 = S_2 = S_3$, но $r_{zx} \neq r_{xz}$, то строки *x*, *y*, *z* образуют цикл и надо изменить элемент r_{yz} и проверить отсутствие циклов заново; иначе рассматривается следующая подматрица.

Результат — ранжирование.

Метод 2

Этот метод выполняет те же функции, что и первый, однако он основан на “множественной идеологии”.

Пусть результат группового выбора представлен вектором

$$(r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{14}, r_{24}, r_{34}, \ldots, r_{1n}, r_{2n}, \ldots, r_{n-1n}),$$

полученным из матрицы парных сравнений $R = (r_{ij})$. Предлагается способ получения ранжирования, основанный на идее: “Пусть k объектов уже проранжированы и надо, рассматривая (k+1)-ый объект, получить ранжирование объектов, количество которых равно (k+1).” Каждому из n объектов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ставится в соответствие три множества:

$L_i = \{j: a_j \succ a_i\}$ - множество индексов объектов, “лучших”, чем *i*-ый;

$E_i = \{j: a_j \sim a_i\}$ - множество индексов объектов, эквивалентных *i*-му;

$H_i = \{j: a_j \prec a_i\}$ - множество индексов объектов, “худших”, чем *i*-ый,.

$$i = \overline{1,n}.$$

Сначала полагаем:

$$E_i = \{i\},$$
$$L_i = \varnothing,$$
$$H_i = \varnothing, \quad i = \overline{1,n}$$

вводим вектор, выполняя при этом следующие преобразования: поскольку первый объект “предопределяет ситуацию” и, поэтому, не может быть причиной образования цикла, то при вводе элемента r_{1j}:

если $r_{1j} = 2$, то $H_1 := H_1 + E_j$, $L_j := E_1 + L_1$;

если $r_{1j} = 1$, то $E_1 := E_1 + E_j$, $E_j := E_1$, $L_j := L_1$, $H_j := H_1$;

если $r_{1j} = 0$, то $L_1 := L_1 + E_j$, $H_j := E_1 + H_1$.

При вводе элемента $r_{ij} (i \neq 1)$:

если $r_{ij} = 2$, то $H_i := H_i + E_j + H_j$, $L_j := L_j + E_i + L_i$;

если $r_{ij} = 1$, то $E_i := E_i + E_j, E_j := E_i$, $L_i := L_i + L_j, L_j := L_i$,

$$H_i := H_i + H_j, \; H_j := H_i;$$

если $r_{ij} = 0$, то $L_i := L_i + E_j + L_j$, $H_j := H_j + E_i + H_i$.

Если $L_i \cap E_i = L_i \cap H_i = H_i \cap E_i = \varnothing$ и $L_j \cap E_j = L_j \cap H_j = H_j \cap E_j = \varnothing$, то можно вводить следующий элемент, иначе - получается цикл и надо вводить $r_{ij}^{новое}$ (при этом $L_i, H_i, E_i, L_j, H_j, E_j$ пересчитываются с предыдущей итерации).

Метод 3

Опираясь на приведенное выше **Утверждение 3** мы можем точно определить, является полученный групповой выбор (представленный в виде матрицы парных сравнений) ранжированием или нет. Если является, то задача решена, если же нет (а нас интерссует именно этот случай), то мы хотим получить некоторое ранжирование, "близкое" к полученному групповому выбору.

Предлагается следующий алгоритм поиска такого ранжирования (см. [11]). Пусть $S(i), i = \overline{1,n}$ - сумма элементов i-ой строки матрицы $R^* = \left(r_{ij}^*\right) \in Matr_{n,n}$, где

$$r_{ij}^* = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad a_i \succ a_j \\ 1, & \text{если} \quad a_i \sim a_j \\ 0, & \text{если} \quad a_i \prec a_j \end{cases}.$$

Шаг 1: Привести матрицу парных сравнений R^* к виду (перестановкой строк и соответствующих столбцов), в котором строки упорядочены по невозрастанию сумм их элементов, то есть к виду, в котором $S(1) \ge S(2) \ge \ldots \ge S(n)$.

Шаг 2: Для $i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{i+1, n}$:

1) если $S(i) > S(j)$, но $r^*_{ij} \neq 2$, то матрица R^* содержит цикл.

В этом случае исправляем: $r^*_{ij} := 2; r^*_{ji} := 0$. Перейти к **Шагу 1**.

2) если $S(i) = S(j)$, но $r^*_{ij} \neq 1$, то матрица R^* содержит цикл.

В этом случае исправляем: $r^*_{ij} := 1;\ r^*_{ji} := 1$. Перейти к **Шагу 1**.

Шаг 3: Получено нестрогое ранжирование всех ***n*** объектов, причем для $i = \overline{1, n-1}$:

если $S(i) > S(i+1)$, то $a_i \succ a_{i+1}$;

если $S(i) = S(i+1)$, то $a_i \sim a_{i+1}$.

§4. Сужение поиска

Рассмотрим суммарное расстояние от индивидуального мнения эксперта до индивидуальных мнений остальных членов экспертной группы:

$$\alpha(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^{m} d\left(W^t, W^k\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq t}}^{m} \sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \left|w_s^k - w_s^t\right|, \quad t = \overline{1, m}$$

Наряду с $\alpha(t), t = \overline{1, m}$ будем рассматривать суммарное отклонение полученного группового выбора от всех представленных индивидуальных ранжирований

$$\alpha(*) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \left|w_s^k - w_s^*\right|.$$

Обозначим $\Delta\alpha(t)=\alpha(t)-\alpha(*)$ - разность между суммарным отклонением от индивидуального мнения t-го эксперта до мнений всех остальных и суммарным отклонением полученного группового выбора от всех индивидуальных мнений экспертов.

Имеем (см.[11]):

$$\Delta\alpha(t)=\alpha(t)-\alpha(*)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq t}}^{m}\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^k-w_s^t\right|-\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^k-w_s^*\right|=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^k-w_s^*+w_s^*-w_s^t\right|-\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^k-w_s^*\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^k-w_s^*\right|+\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^*-w_s^t\right|-\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^k-w_s^*\right|=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^*-w_s^t\right|=m\cdot\sum_{s=1}^{\frac{n^2-n}{2}}\left|w_s^*-w_s^t\right|=m\cdot d\left(W^*,W^t\right).$$

Отсюда $d\left(W^*,W^t\right)\geq\dfrac{\Delta\alpha(t)}{m}$.

Если $\tilde{t}$ — номер "лучшего" эксперта, то $d\left(W^*,W^{\tilde{t}}\right)\geq\dfrac{\Delta\alpha(\tilde{t})}{m}$.

Пусть $\bar{l}$ — расстояние от группового выбора W^* до ближайшего к нему ранжирования $\bar{\tilde{W}}$, то есть $\bar{l}=d\left(W^*,\bar{\tilde{W}}\right)$. Предполагается искать ранжирование $\overline{\tilde{W}}$ в кольце

$$d\left(W^*,W^{\tilde{k}}\right)-1\geq\bar{l}\geq\left\lceil\frac{\Delta\alpha(\tilde{t})}{m}\right\rceil.$$

Началом такого поиска будет $\tilde{l}_1 = \left[\frac{\Delta\alpha(\tilde{t})}{m}\right]$. Если на этом расстоянии ранжирований нет, то ищем на расстоянии $\tilde{l}_2 = \tilde{l}_1 + 1$ и так далее. Если ранжирования в кольце не найдено, то рассматриваем $\overline{W} = W^{\tilde{k}}$ (здесь $\tilde{k}$: $d\left(W^{\tilde{k}}, W^*\right) = \min\limits_{k=\overline{1,m}} d\left(W^k, W^*\right)$, то есть $\tilde{k}$ - номер эксперта, мнение которого ближе к групповому выбору W^* среди всех представленных индивидуальных ранжирований).

Как видно, даже при таком "сужении" пространства векторов (до кольца), поиск ранжирования, ближайшего к полученному групповому выбору, — процесс долгий и трудоемкий. Поэтому хотелось бы получить простой алгоритм поиска ранжирования, ближайшего к групповому выбору.

Замечание: **Метод 3** позволяет за конечное число шагов построить некоторое ранжирование. Машинный эксперимент показал, что примерно в 80% случаев ранжирование, полученное на основе группового выбора с помощью этого алгоритма попадает в кольцо.

§5. Метод «ВеГа» (алгоритм нахождения ранжирования, ближайшего к полученному групповому выбору)

Пусть $R^* = (r_{ij}^*)$, $i, j = \overline{1, n}$ — матрица парных сравнений, выражающая групповое мнение экспертной группы (то есть групповой выбор) и $W^* = (w_1^*, \ldots, w_{\frac{n^2-n}{2}}^*)$ - соответствующий ей вектор, где

$$
\begin{aligned}
w_1^* &= r_{12}^* \\
w_2^* &= r_{13}^* \\
w_3^* &= r_{23}^* \\
w_4^* &= r_{14}^* \\
w_5^* &= r_{24}^* \\
w_6^* &= r_{34}^* \\
&\vdots \\
w^*_{\frac{n^2-n}{2}} &= r^*_{n-1n}.
\end{aligned}
$$

Рассматриваемый здесь метод **«ВеГа»** предназначен для поиска ранжирования (записанного в виде вектора) $\check{W}$, ближайшего к групповому выбору W^*, то есть:

$$\check{W}: d\left(\check{W}, W^*\right) = \min_{W-\textit{ранжированиям}} d\left(W, W^*\right).$$

Метод имеет некоторое идеологическое сходство с методами ветвей и границ (отсюда и его название), но есть и определенные различия; сходства и различия обсуждаются ниже.

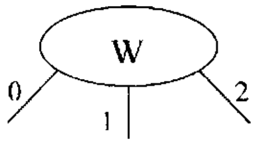
Итак, рассмотрим сам метод:

Начальный рекорд: В качестве начального рекорда выбирается наименее удаленное от группового выбора ранжирование среди всех имеющихся в наличии (а в наличии у нас есть: ранжирования, сообщенные экспертами, а также ранжирования, полученные с помощью некоторых простых алгоритмов, например **Метода Борда** или **Метода 3**, описанного выше), то есть верхняя граница кольца:

$$R^\circ = \bar{l} = \min\left\{\min_{i=\overline{1,m}} d\left(W^i, W^*\right), d\left(\overline{W}^{\text{метод3}}, W^*\right), \ldots\right\} = d\left(\tilde{W}, W^*\right).$$

Здесь $\tilde{W}$ - “лучшее” из имеющихся ранжирование.

Ветвление: Ветвление ведется по каждой j-ой координате, $j=\overline{1,\frac{n^2-n}{2}}$, то есть для вектора W — по значениям $w_j=0,\ w_j=1,\ w_j=2$, то есть



Начало: Начальным вектором является вектор $W^{II}=(1,1,\ldots,1)$, так как от него до всех остальных векторов не более, чем $\frac{n^2-n}{2}$ различий.

Стратегия: Стратегия обхода дерева может быть самой разнообразной, например, для нахождения ранжирования, ближайшего к полученному групповому выбору "вручную", удобно искать ***«По минимуму расстояния от текущего вектора до группового выбора на данном уровне данной ветки»***, то есть по $\min d\left(W^{\bullet},W^{*}\right)$ на данном уровне данной ветки (здесь $W^{\bullet}$ — текущий вектор), а для программирования наиболее простым является левосторонний (правосторонний) обход.

Ветка закрывается в случаях:

1) **если** первые $\frac{s^2-s}{2}$ координат $(s\geq 3)$ содержат цикл.

Доказательство:

Пусть первые $\frac{s^2-s}{2}$ *координат* $(s\geq 3)$ *содержат цикл. Это* *означает, что соответствующий диагональный "минор" (здесь под диагональным "минором" будем понимать квадратную подматрицу размера* $S \times S$, *расположенную на главной диагонали) содержит цикл. Следовательно (см.* ***Утверждение 1****) и вся матрица (весь вектор) независимо от всех прочих (последующих) координат (то есть для любых значений остальных координат) содержит цикл (нарушение транзитивности предпочтений). Поэтому ветка, содержащая все эти вектора, начинающиеся* $\frac{s^2 - s}{2}$ *координатами, содержащими цикл, отсекается (за ненадобностью рассмотрения).*

2) **если** $\bar{l} - l = d\left(\hat{W}, W^*\right)$ (где $d\left(\hat{W}, W^*\right) = \sum_{k=1}^{j} \left| w_k^{\bullet} - w_k^* \right|$ (если рассматриваем j-ую координату)) **и** $\hat{W} = (w_1^{\bullet}, w_2^{\bullet}, \dots, w_j^{\bullet}, w_{j+1}^*, \dots, w_{\frac{n^2-n}{2}}^*)$ (здесь $\hat{W}$ - "дополняющий" к W^* вектор, то есть в каждой вершине дерева рассматриваем два вектора: текущий и " дополняющий" к нему) содержит цикл.

Доказательство:

$\hat{W}$ — *вектор, ближайший к групповому выбору* W^* *на данной ветке (среди всех оставшихся на ней векторов), так как он отличается от* W^* *лишь в первых* j *координатах (а остальные совпадают). Таким образом, если* $\bar{l} - l = d\left(\hat{W}, W^*\right)$ *и* $\hat{W}$ *содержит цикл, то* $\forall\ W \neq \hat{W} d\left(W, W^*\right) > \bar{l} - l$, *то есть* $d\left(W, W^*\right) \geq R$, *следовательно ветка отсекается (если бы* $\hat{W}$ *было* *ранжированием, то это была бы* ***единственная точка, на которой*** *рекорд улучшается на единицу).*

3) **<u>если</u>** $\bar{l} - 1 < d\left(\tilde{W}, W^*\right)$.

<u>Доказательство:</u>

Так как $\tilde{W}$ *— вектор, ближайший к* W^* *на данной ветке, то* $\forall\ W \neq \tilde{W}\ d\left(W, W^*\right) > R$ *(то есть все остальные векторы могут лишь ухудшить рекорд), поэтому ветка отсекается.*

<u>Обновление рекорда:</u>

1) **<u>если</u>** $\bar{l} - 1 = d\left(\tilde{W}, W^*\right)$ **<u>и</u>** $\tilde{W}$ — ранжирование, **<u>то</u>** верхняя граница кольца уменьшается на единицу, то есть $\bar{l} := \bar{l} - 1$ и рекорд улучшается $R := \bar{l}$.

<u>Замечание:</u> Условие 1) можно модифицировать:

1′) **<u>если</u>** $\bar{l} > d\left(\tilde{W}, W^*\right)$ **<u>и</u>** $\tilde{W}$ — ранжирование, **<u>то</u>** верхняя граница кольца уменьшается на величину $\bar{l} - d\left(\tilde{W}, W^*\right)$, то есть $\bar{l} := d\left(\tilde{W}, W^*\right)$ и рекорд улучшается $R := \bar{l}$.

2) **<u>если</u>** $d\left(W^\bullet, W^*\right) < R$ **<u>и</u>** $W^\bullet$ — ранжирование, **<u>то</u>** $R := d\left(W^\bullet, W^*\right)$.

<u>Результат:</u> ранжирование $\check{W}$, на котором достигнут последний рекорд.

<u>Замечание</u>: Основными преимуществами данного метода являются:

1) Простота использования;

2) Алгоритмов построения точного оптимума для поставленной выше задачи существует немного (например, см. [8]

С.140), и они значительно уступают в простоте и в количестве производимых для достижения оптимума операций));

3) Поскольку, в отличие от методов ветвей и границ (где допустимые точки находятся лишь на последнем уровне дерева), метод «ВеГа» в каждой своей вершине содержит допустимую точку, то:

а) Если на каком-то шаге достигнута достаточная точность (не оптимум, но близость полученного ранжирования к групповому выбору удовлетворительна), то можно остановиться;

б) Хранить нужно (это особенно важно с точки зрения программирования) лишь уже построенные, но еще не рассмотренные вершины (узлы), а все рассмотренные можно уничтожить.

§6. Анализ и выводы

Нами была поставлена следующая задача:

1) Разработать методы обнаружения циклов в получаемом групповом выборе R^*;

2) Построить такое ранжирование $\overline{R}$, которое является ближайшим к групповому мнению R^*, не являющимся ранжированием.

Поставленная проблема решена: найдены методы обнаружения нетранзитивности предпочтений (методы поиска циклов), выработаны алгоритмы построения ранжирований, не оптимальных, но близких к полученному групповому выбору ("жадные" алгоритмы) и, наконец, создан алгоритм построения точного решения задачи, то есть алгоритм нахождения ближайшего (то есть оптимального) ранжирования к групповому выбору (метод «ВеГа»); доказаны соответствующие утверждения.

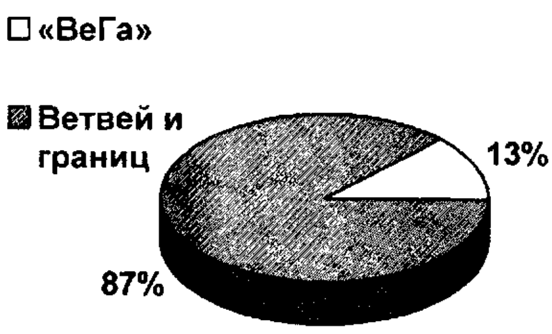
Имеется программная реализация метода «ВеГа». На основе проведенного машинного эксперимента получен следующий сравнительный анализ числа производимых итераций для достижения оптимума (результаты сведены в Табл.2):

Табл.2 Максимальное количество рассмотренных вершин (проведенных итераций).

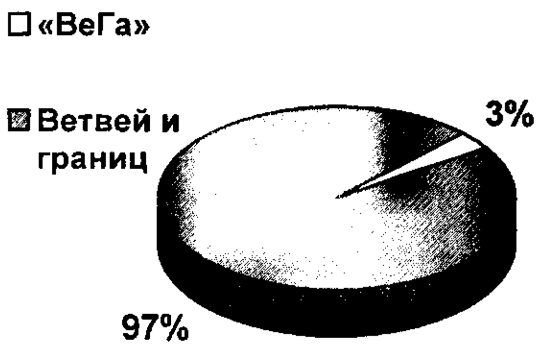
Методы	3 объекта	4 объекта	5 объектов	6 объектов	7 объектов	8 объектов
«ВеГа»	4	26	104	1505	14087	50977
Ветвей и границ	27	729	50049	14348907	10460353203	22876792454961

В следующих диаграммах показано процентное соотношение количества проведенных итераций (за 100% взято общее (суммарное) количество итераций):

<u>3 объекта:</u>



4 <u>объекта:</u>



Для большего числа объектов доля, приходящаяся на метод «ВеГа» составляет меньше 1%.

Другой важной характеристикой метода «ВеГа» является то, что в нем максимальное количество хранимых вершин (объем информации) равно $3 \cdot \frac{n^2 - n}{2} + 1$ (где n — количество рассматриваемых объектов), а в методах ветвей и границ оно равно $3 \cdot \frac{3^{\frac{n^2 - n}{2}} - 1}{2} + 1$.

Так, например для 10 объектов эти значения соответственно равны: 136 и 4 146 619 059 826 250 579 464.

Таким образом, метод «ВеГа» позволяет достаточно быстро и с минимальными затратами на хранение информации получить искомое решение.

Алгоритм, составляющий метод «ВеГа» и соответствующая программа имеют открытую архитектуру (как и некоторые методы ветвей и границ), которая позволяет видоизменять алгоритм в зависимости от предъявляемых к нему требований (например, усовершенствовать метод можно введением дополнительных условий сокращения перебора (отсечения вершин) и условий смены рекорда и т.д.)

Перейдем теперь к формализации рассматриваемой двухканальной модели активной экспертизы, используя полученные в этой части алгоритмы и утверждения.

ЧАСТЬ 3. Результаты анализа двухканальной модели активной экспертизы

Пусть эксперты упорядочены по близости к полученному групповому выбору

$$D(R^1, R^*) \le d(R^2, R^*) \le \cdots \le d(R^m, R^*).$$

Построим систему весов, присваиваемых экспертам для учёта при последующих экспертизах (то есть, коэффициенты компетентности). Будем считать, что веса должны быть построены таким образом, чтобы более близкий к групповому выбору эксперт имел более высокий вес.

Существует множество такого рода построений. Мы будем рассматривать следующий "качественный алгоритм":

Проранжируем экспертов по проведенной ими экспертизе (эксперт тем предпочтительнее, чем он ближе к полученному групповому выбору).

Пусть S(i) - сумма элементов i-ой строки полученной матрицы парных сравнений. Получим:

Веса строим следующим образом:

$$S(1) \ge S(2) \ge \cdots \ge S(m).$$

Пусть p(i) - вес i-го эксперта, тогда

$$p(i) \doteq \frac{S(i)}{\sum_{k=1}^{m} S(k)} = \frac{S(i)}{m^2}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{m} p(i) = 1 .$$

Достоинством данного алгоритма является простота использования.

Недостаток: не учитывается степень близости к полученному групповому выбору. Кроме того, после первой экспертизы лучший эксперт может получить вес в 2m-1 раз больший, чем худший. И если он "случайно" попал в лучшие, то он будет сильнее влиять на результаты следующих экспертиз (и его будет очень трудно поставить на соответствующее его компетентности место). Поэтому будем проводить взвешивание на основе нескольких экспертиз. Например, на основе достаточно большого числа N тестовых экспертиз.

Полученные строки предпочтений экспертов нужно обработать методом ВеГа. И на основе полученной строки предпочтений по указанному алгоритму получить веса экспертов.

Но нас интересует итерационный (динамический) процесс присваивания весов экспертам. Здесь предлагается следующая процедура.

Будем пересчитывать вес эксперта на основе всех проведённых ранее ранжирований (то есть уже на основе N+1, N+2 и так далее экспертиз). Преимущество такого рода процедуры состоит в том, что учитывается вся имеющаяся об экспертах информация, даже если группа экспертов изменяется, эксперт пропускает экспертизу и т.д.

Аналогичным образом находится вес ЛПР (ранжируем его вместе с экспертами по степени близости к групповому выбору) и на основе информации обо всех экспертизах присваиваем вес ЛПР.

Все данные об экспертах и получаемом групповом ранжировании, а также о принимаемом ЛПР решении и его обоснованности поступает в ревизионный орган. Разумеется, если ЛПР сам как-то присваивает веса экспертам, то в результате принимаемое решение может быть сколь угодно изменено. Поэтому ревизионному органу поступает информация и в реальном виде (на основе принятой ЛПР системы весов и т.д.) и в идеальном виде (том, который бы она имела при использовании рекомендованной процедуры).

Рассмотрим характеристики рассматриваемой системы:

Очевидно, что получаемый групповой выбор зависит не только от индивидуальных мнений членов экспертной группы, но и от весов каждого из экспертов, то есть:

$$R^* = R^*(R^1, R^2, \ldots, R^m; p(1), p(2), \ldots, p(m)) =$$
$$= R^*(\underbrace{R^1, \ldots, R^1}_{m^2 p(1)}, \underbrace{R^2, \ldots, R^2}_{m^2 p(2)}, \ldots, \underbrace{R^m, \ldots, R^m}_{m^2 p(m)}),$$

Здесь $m^2 p(1) + m^2 p(2) + \ldots + m^2 p(m) = m^2 \cdot 1 = m^2$.

Таким образом, можно провести параллель между весом эксперта и количеством голосов, которыми он владеет. При этом, общее число голосов в системе равно m^2.

Целевые показатели экспертов.

Вообще говоря, если бы ранжирование проводилось один раз, то очевидным представляется, что целевая функция i-го эксперта была бы:

$$f_i = f_i(R^i, R^*) = d(R^i, R^*) = \sum_{j=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \left| w_j^i - w_j^* \right| \to \min$$

Но, поскольку мы рассматриваем многостадийную (многоитерационную) систему ранжирований объектов (проведения экспертиз), то целевой функцией i-го эксперта является:

$$p(i) \to \max$$

Как уже отмечалось выше, вес эксперта:

$$p(i) = \frac{S(i)}{\sum_{k=1}^{m} S(k)} = \frac{S(i)}{m^2},$$

где m – число экспертов в экспертной группе, n – число ранжируемых объектов (альтернатив), R^* - групповой выбор экспертов.

Очевидно, что вес эксперта зависит от всех предыдущих проводимых им ранжирований и от получаемого при этих ранжированиях групповых мнениях экспертов:

$$p(i) = p(i; (R^i, R^*)^1, (R^i, R^*)^2, \ldots)$$

<u>Утверждение:</u> Для каждого эксперта справедливо неравенство:

$$\frac{1}{m^2} \le p(i) \le \frac{2m-1}{m^2}, \quad i = \overline{1,n} \qquad (*)$$

<u>Доказательство:</u>

В соответствии с системой построения весов, самый некомпетентный эксперт в самом худшем для него случае может иметь в матрице парных сравнений экспертов S(i)=1, *поэтому:*

$$\frac{1}{m^2} \le p(i)$$

Аналогичным образом, самый компетентный эксперт в самом лучшем для себя случае может иметь в матрице парных сравнений S(i)=2m-1, поэтому:

$$p(i) \le \frac{2m-1}{m^2}$$

Утверждение доказано.

Целевые показатели ЛПР.

Будем рассматривать ЛПР как (m+1)-го эксперта. Тогда его целевая функция при однократном проведении ранжирования:

$$f_{ЛПР} = f_{ЛПР}(R^{ЛПР}, R^{**}) = d(R^{ЛПР}, R^{**}) = \sum_{j=1}^{\frac{n^2-n}{2}} \left| w_j^{ЛПР} - w_j^{**} \right| \to \min .$$

Здесь R^{**} - групповой выбор с учетом мнения ЛПР $R^{ЛПР}$; а с учетом многоитерационности, целевая функция ЛПР:

$$p(ЛПР) \to \max$$

Соответственно, вес ЛПР вычисляется по формуле:

$$p(ЛПР) = \frac{S(ЛПР)}{\sum_{k=1}^{m+1} S(k)} = \frac{S(ЛПР)}{(m+1)^2} .$$

<u>Утверждение:</u> Для веса ЛПР справедливо неравенство:

$$\frac{1}{(m+1)^2} \le p(ЛПР) \le \frac{2m+1}{(m+1)^2} . \qquad (**)$$

<u>Доказательство:</u>

В соответствии с системой построения весов, ЛПР в самом худшем для него случае может иметь в матрице парных сравнений экспертов S(ЛПР)=1, поэтому:

$$\frac{1}{(m+1)^2} \le p(ЛПР).$$

Аналогичным образом, ЛПР в самом лучшем для себя случае может иметь в матрице парных сравнений

$$S(ЛПР) = 2(m+1) - 1 = 2m + 1,$$

поэтому:

$$p(ЛПР) \le \frac{2m+1}{(m+1)^2}.$$

Утверждение доказано.

Очевидно, что поскольку ЛПР владеет всей информацией об индивидуальных предпочтениях экспертов и о получаемом на их основе групповом экспертном ранжировании, то он оказывается в более выгодном положении относительно экспертов. И, поскольку он принимает решение, то может сильно повлиять на получаемый с учетом его точки зрения групповой выбор $\mathbf{R}^{**}$ и, таким образом, на свой вес p(ЛПР).

Утверждение: Веса экспертов лежат в более жестких границах относительно веса ЛПР.

Доказательство:

Сравним левые границы неравенств (*) и (**). Очевидно, что для любого m выполнено неравенство:

$$\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m^2}.$$

Сравним правые границы неравенств (*) и (**). Получаем:

$$\frac{2m-1}{m^2}-\frac{2m+1}{(m+1)^2}=\frac{(2m-1)(m+1)^2-(2m+1)m^2}{m^2(m+1)^2}=$$

$$=\frac{(2m-1)(m^2+2m+1)-2m^3-m^2}{m^2(m+1)^2}=\frac{2m^2-1}{m^2(m+1)^2}>0.$$

Утверждение доказано.

Безусловно, поскольку эксперты и ЛПР обладают активным поведением, то реальный их выигрыш (проигрыш) от их активности составляет соответственно разность между полученными весами и весами, которые они получили бы, если сообщали свои истинные мнения, то есть: $|p(i)-p_{\text{истинное}}(i)|$ и $|p(\text{ЛПР})-p_{\text{истинное}}(\text{ЛПР})|$.

Таким образом, если бы эксперты владели информацией об алгоритме присваивания им весов, а также информацией обо всех представленных экспертных мнениях (других экспертов) и алгоритме получения группового решения, то они могли бы оценить для себя эту разность. Поскольку, в конечном счете веса экспертам присваивает ЛПР, то получить значение этой разности практически невозможно. Есть возможность только получения такой разности по рекомендуемым экспертной системой значениям весов, если эксперты также дополнительно сообщают свои истинные значения (что, вообще говоря, практически невозможно и требует дополнительного исследования). Но, из-за того, что веса лежат в жестких границах (см. заключение), возможности манипуляции ограничены.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных в Части 2 настоящей работы методов, построена система взвесов членов экспертной группы и лица, принимающего решение. Поскольку в полученной системе взвешивания веса лежат в жестких границах, зависящих только от количества экспертов, то между экспертами будет происходить конкуренция (так называемые, горизонтальные связи). Фактически, чем более компетентен эксперт, чем большее количество раз он сообщил более точную информацию о порядке предпочтения ранжируемых объектов, тем выше его вес. Поэтому экспертам выгодно сообщать информацию, более близкую к согласованному мнению (которое они, безусловно, могут только предсказывать). Очевидно, что при росте компетентности эксперта и, соответственно, его веса, максимум (минимум) того, что он может достичь, - это верхняя (соответственно, нижняя) граница отрезка

$$\left[\frac{1}{m^2}, \frac{2m-1}{m^2}\right].$$

Действительно, если эксперт каждый раз сообщает более (соответственно менее) близкую к оптимальной информацию, то вес его монотонно растет (падает). Поскольку монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена, то последовательность весов эксперта сходится. И, если возрастающая (убывающая) последовательность сходится, то ее предел совпадает с верхней (нижней) гранью множества ее значений.

Более того, даже если для какого-то эксперта последовательность его весов не является монотонной, то, поскольку из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся (к конечному пределу) подпоследовательность (теорема Больцано-Вейерштрасса), то для любого эксперта существует верхний и нижний пределы последовательности его весов. Разумеется, компетентность эксперта может изменяться во времени, он может сообщать искаженную информацию и т.п., поэтому ситуация несколько сложнее. Тем не менее, невозможность выйти за границы отрезка гарантирует нам некоторую (требующую дополнительных исследований) устойчивость модели. Кроме того, согласно описанному выше методу присваивания весов экспертам, для того, чтобы заработать какой-то высокий вес, необходимо на протяжении большого числа проводимых экспертиз сообщать близкую к оптимальной информацию. То есть, быстро изменить положение в свою пользу эксперт не может.

Аналогичные рассуждения применимы и к ЛПР.

Естественно, поскольку ЛПР принимает решения, то эти решения (а также присваиваемые им экспертам веса), могут отличаться от рекомендованных экспертной системой. В силу развития современной вычислительной техники и малой ресурсопотребляемости используемых алгоритмов, экспертная система может хранить и обрабатывать информацию обо всех проведенных экспертизах и всех возможных вариантах экспертиз (с учетом весов, присваиваемых ЛПР и экспертной системой отдельно), если такая необходимость возникнет. Тогда ревизионный орган получит возможность в динамике увидеть реальное и “идеальное” поведение системы. И, в нужный, с его точки зрения, момент вмешаться (например, уволить ЛПР или применить какие-либо иные санкции).

Несомненно, предложенная модель двухканальной активной экспертизы в силу открытой архитектуры, может адаптироваться и модифицироваться по мере необходимости в каждом конкретном случае ее практического использования.

Литература

1. *Авдеев В.П., Бурков В.Н., Киселева Т.В.* Проблематика многовариантных активных систем// Изв. вуз. Черная металлургия. 1998. N6.
2. *Авдеев В.П., Бурков В.Н., Еналеев А.К., Киселева Т.В.* Многоканальные организационные механизмы: Опыт применения в АСУ. Препринт. М.:ИПУ РАН, 1986.
3. *Авдеев В.П., Бурков В.Н., Еналеев А.К., Киселева Т.В., Кузнецов А.Ф.* Двухканальный организационный механизм функционирования автоматизированных систем. - В кн: Сб. научных трудов, М.:ИПУ РАН, 1986, С. 24-31.
4. *Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В., Слядзь Н.Н., Глушков В.И.* Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. М.: Радио и связь, 1989.
5. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Как управлять проектами. М.: Синтег-Гео, 1997.
6. *Гохман О.Г.* Экспертное оценивание. Воронеж, 1991.
7. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Кибернетическое моделирование, М., 1972.
8. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа. М., 1982.
9. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. М., 1974.
10. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
11. *Песковатсков В.Ю.* Об одном подходе к проблеме группового ранжирования. - В кн: Сборник работ студентов и аспирантов факультета ПММ. Выпуск 1, Воронеж, 1997, С. 58-63.

Содержание

Баркалов С.А., Новиков Д.А., Песковатсков В. Ю., Серебряков В.И.
Двухканальная модель активной экспертизы
Препринт

Формат бумаги 60×84/16. Уч.-Изд. л. 2,1.
Тираж 100. Заказ 9 .
117806, Москва, Профсоюзная 65
Институт проблем управления
Им. В.А. Трапезникова