

УДК 519.633  
ББК 34.327

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ПРОЦЕССА ОСТЫВАНИЯ И ЗАТВЕРДЕВАНИЯ СЛИТКА В УНРС<sup>1</sup>**

**Галкин А. В.<sup>2</sup>, Кузина Н. Е.<sup>3</sup>**

*(Липецкий государственный технический университет,  
Липецк)*

**Пименов В. А.<sup>4</sup>**

*(ОАО «НЛМК», Липецк)*

*Данная работа посвящена моделированию процесса остывания и затвердевания литой стали в установке непрерывной разливки стали (УНРС). В работе моделируется процесс охлаждения слитка с учетом особенностей конструкции УНРС, влияния засорения форсунок системы вторичного охлаждения, определяется возможность и место возникновения поперечных трещин с учетом эффекта «горячей хрупкости» стали после затвердевания сляба. Изменение теплофизических свойств стали (коэффициентов теплопроводности и теплоемкости) для различных марок в зависимости от температуры учтено с помощью экстраполяционных моделей.*

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, УНРС, метод конечных элементов (МКЭ), разреженные матрицы.

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 13-07-97519 p\_центр\_a

<sup>2</sup> Галкин Александр Васильевич, кандидат технических наук, доцент (avgalkin82@mail.ru).

<sup>3</sup> Кузина Нина Евгеньевна, студент (nina-1003@yandex.ru).

<sup>4</sup> Пименов Владимир Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (pimenov\_va@nlmk.ru).

## 1. Введение

Непрерывная разливка стали прочно утвердилась в практике металлургического производства. Определение температурного градиента в УНРС является важной инженерной задачей. Знание температурных полей срезов сляба позволяет определить количество теплоты, которое тело теряет в процессе охлаждения и скорость затвердевания стали под действием охлаждающих установок. Распределение температурных полей описывается уравнением теплопроводности. Рассмотрим его подробнее.

## 2. Решение уравнения теплопроводности методом конечных элементов

### 2.1. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Уравнение теплопроводности представляет собой дифференциальное уравнение с частными производными (ДУЧП) параболического типа. Численная характеристика теплопроводности материала равна количеству теплоты, проходящей через материал площадью  $1 \text{ м}^2$  за единицу времени (секунду) при единичном температурном градиенте. Данная численная характеристика используется при расчете теплопроводности для калибрования и охлаждения профильных изделий. Уравнение теплопроводности имеет вид:

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q(x, y, t).$$

Так как уравнение содержит только первую производную по времени, то начальные условия задаются только для искомой функции

$$(2) \quad T(x, y, t_0) = \varphi(x, y).$$

Процесс затвердевания стали в УНРС сопровождается непрерывным орошением сляба водой, а значит, имеет место конвективный теплообмен. Граничные условия третьего рода описывают конвективный теплообмен на границе

$$(3) \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} l_x - k \frac{\partial T}{\partial y} l_y = \alpha [T_{\text{среды}} - T]$$

где  $x, y$  – координаты в пространстве,  $T$  – вектор распределения температуры,  $k$  – коэффициент теплопроводности, (Вт/м $\cdot$ °С),  $l_x, l_y$  – длина граничащего участка, (м),  $T_{\text{среды}}$  – температура окружающей среды,  $\alpha$  – коэффициент теплообмена, (Вт/м $^2\cdot$ °С).

Нахождение точного аналитического решения возможно лишь для весьма ограниченного круга одномерных задач при использовании целого ряда допущений, негативно отражающихся на адекватности полученных результатов. Поэтому при математическом решении практических задач возникает необходимость интегрирования нелинейных ДУЧП численными методами, дающими приближенное решение в виде таблицы чисел. Одним из таких приближенных методов является метод конечных элементов.

## 2.2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ

В МКЭ исходная задача заменяется дискретной конечно-мерной моделью. Для построения используются треугольники и четырехугольники.

При грамотной нумерации узлов в матрице коэффициентов все ненулевые коэффициенты находятся между двумя линиями, параллельными главной диагонали. Расстояние между ней и этими линиями называется шириной полосы матрицы. Уменьшение ширины полосы приводит к сокращению размеров требуемой машинной памяти.

При математическом описании элемента возникает необходимость в индивидуализации его узлов. С этой целью узлу присваивается индекс  $i, j$  или  $k$ .

## 2.3. ДВУМЕРНЫЙ СИМПЛЕКС-ЭЛЕМЕНТ

В качестве функции элемента применяется полином:

$$(4) \quad T^{(e)} = a_1 + a_2 x + a_3 y.$$

Координатные пары трех узлов обозначаются через  $(X_i, Y_i)$ ,  $(X_j, Y_j)$ ,  $(X_k, Y_k)$ .

Решив систему (4) получаем:

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{I}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) T_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) T_j + \\ + (X_i Y_j - X_j Y_i) T_k], \\ a_2 = \frac{I}{2A} [(Y_j - Y_k) T_i + (Y_k - Y_i) T_j + (Y_i - Y_j) T_k], \\ a_3 = \frac{I}{2A} [(X_k - X_j) T_i + (X_i - X_k) T_j + (X_j - X_i) T_k], \end{cases}.$$

где  $A$  обозначает площадь треугольного элемента, значение которой связано с определителем [5]:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} I & X_i & Y_i \\ I & X_j & Y_j \\ I & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A.$$

#### 2.4. ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТА

Глобальная матрица теплопроводности имеет следующий вид:

$$(7) \quad [K] = \sum_{n=1}^N [K]^{(e)},$$

где

$$[K]^{(e)} = \frac{k_x}{4A} \begin{bmatrix} \beta_i^2 & \beta_i \beta_j & \beta_i \beta_k \\ \beta_i \beta_j & \beta_j^2 & \beta_j \beta_k \\ \beta_i \beta_k & \beta_j \beta_k & \beta_k^2 \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4A} \begin{bmatrix} \delta_i^2 & \delta_i \delta_j & \delta_i \delta_k \\ \delta_i \delta_j & \delta_j^2 & \delta_j \delta_k \\ \delta_i \delta_k & \delta_j \delta_k & \delta_k^2 \end{bmatrix} + K_{don}$$

— основные слагаемые,

$$K_{don} = \frac{hl_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{hl_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \frac{hl_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

— дополнительные слагаемые [4],

где  $\beta_i = Y_j - Y_k$ ,  $\beta_j = Y_k - Y_i$ ,  $\beta_k = Y_i - Y_j$ ,  $\delta_i = X_k - X_j$ ,  $\delta_j = X_i - X_k$ ,  $\delta_k = X_j - X_i$ ;

$l_{ij}$ ,  $l_{jk}$ ,  $l_{ki}$  — длины соответствующих сторон элемента;

$k_x$ ,  $k_y$  — коэффициент теплопроводности в направлении  $x$  и  $y$ ;

$h$  – коэффициент конвективного теплообмена, (Вт/м<sup>2</sup>•°С). Дополнительные слагаемые используются только для сторон элементов, граничащих с внешней средой.

Матрица теплоемкости. Вклад отдельного граничного элемента в эту матрицу определяется объемным интегралом, который должен быть вычислен для каждого элемента:

$$(8) [C]^{(e)} = c\rho \int_S \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} dS_f = \frac{c\rho A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

где  $c$  – удельная теплоемкость, (Дж/кг•°С),  $\rho$  – поверхностная плотность материала, (кг/м<sup>2</sup>),  $S$  – поверхность элемента;  $S_f$  – функция формы, определяемая, соответственно, для каждого узла  $S_i = (1/2A) \cdot (X_i Y_k - X_k Y_j + \beta_i x + \delta_i y)$ ,  $S_j = (1/2A) \cdot (X_k Y_i - X_i Y_k + \beta_j x + \delta_j y)$ ,  $S_k = (1/2A) \cdot (X_i Y_j - X_j Y_i + \beta_i x + \delta_i y)$ ;  $L_1, L_2, L_3$  – относительные координаты, определяемые как отношение расстояния от выбранной точки до одной из сторон к высоте, опущенной из противоположной вершины к этой стороне.

Вектор тепловой нагрузки. Вектор тепловой нагрузки складывается из следующих слагаемых:

$$(9) \{Q\}^{(e)} = \frac{hT_f l_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \frac{hT_f l_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \frac{hT_f l_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

где  $T_f$  – температура внешней среды.

Построение расчетной схемы. Для решения поставленной задачи имеем общую формулу:

$$(10) [A]\{T_i\} = \{B\},$$

где

$$[A] = [C] + \frac{\Delta t}{2}[K],$$

$$\{B\} = \left( [C] - \frac{\Delta t}{2}[K] \right) \{T_o\} + \Delta t \{Q\}.$$

Получаем СЛАУ, которая решается методом Гаусса. Матрица  $A$  квадратная и имеет большую размерность. При этом она является разреженной, поэтому для повышения эффективности

решения системы можно использовать специальные способы хранения и обработки разреженных матриц [2].

## 2.5. РАЗРЕЖЕННЫЕ МАТРИЦЫ

Основная задача – оптимизировать процесс решения с точки зрения затрат машинной памяти и времени. Возможности решения этой задачи связаны с игнорированием нулей матрицы за счет того, что:

- арифметические операции с нулями не производятся;
- нули не обязательно хранить в машинной памяти.

Все способы хранения разреженных матриц заключаются в том, чтобы хранить только ненулевые элементы матрицы или, может быть, небольшое количество нулей вместе с ними.

а) Разреженный строчный формат – это наиболее широко используемая форма хранения разреженных матриц. Необходимо завести три одномерных массива:

AN – массив ненулевых элементов исходной матрицы,

JA – массив соответствующих столбцовых индексов ненулевых элементов исходной матрицы,

IA – так называемый «массив указателей» – целочисленный массив,  $i$ -ая компонента которого указывает, с какой позиции массивов AN и JA начинается описание  $i$ -ой строки исходной матрицы.

б) Разреженный столбцовый формат. Здесь все элементы хранятся не по строчкам, а по столбцам. Если транспонировать исходную матрицу и найти ее строчный формат, то результатом будет разреженный столбцовый формат.

в) Выделение диагональных элементов матрицы для симметричной матрицы. Используются те же массивы AN, JA, IA, только добавляется еще один массив AD, в котором хранятся диагональные элементы матрицы. В массиве AN хранится только верхняя часть матрицы, так как она является симметричной.

г) Диагональная схема хранения ленточных матриц. Квадратная матрица называется  $2(m + 1)$  – диагональной или ленточной, если  $a_{ij}=0$  для всех  $i, j$ , таких что  $|i - j| > m$ . Число  $2(m + 1)$  – это ширина ленты,  $m$  – полуширина.

Матрицы можно хранить в одном из вышеописанных видов и вычисления производить именно с такими матрицами [1].

### 3. Результаты моделирования

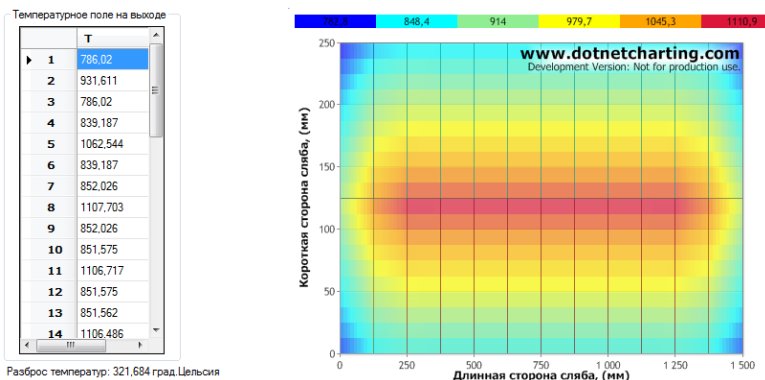
Было разработано программное средство, моделирующее процесс затвердевания стали в УНРС. В программе использованы следующие значения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости (таблица 1).

*Таблица 1. Формулы для вычисления коэффициентов для разных марок стали*

Марка стали	Теплопроводность	Теплоемкость
08Ю	$k = 93,36 - 0,04T$	$c = 436,33 + 0,28T$
09Г2	$k = 50 - 0,041T$	$c = 447,79 + 0,27T$
17Г1С	$k = 66,5 - 0,02T$	$c = 473,46 + 0,23T$

Данные формулы получены регрессионным анализом табличных данных из [6].

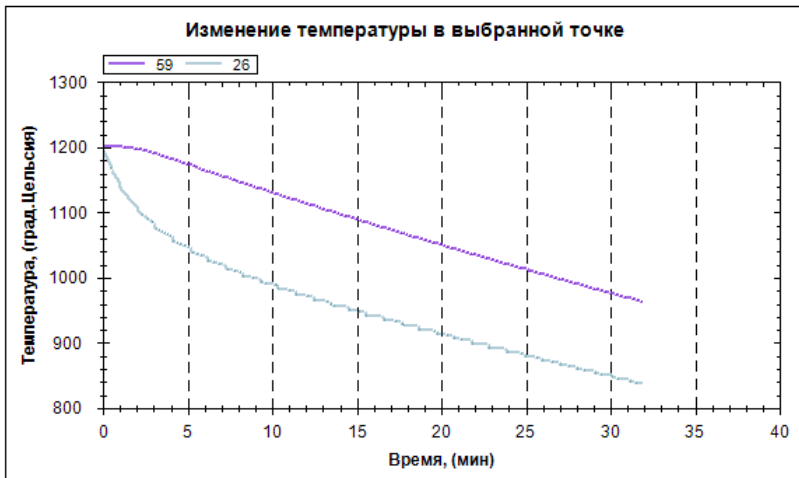
После моделирования получены следующие результаты (рисунок 1).



*Рис.1. Температурное поле слэба после затвердевания*

На рисунке 1 слева видны численные значения температур среза сляба на выходе из УНРС. Данные температуры соответствуют реальным данным. На рисунке 1 справа наглядно виден распределение температур на срезе сляба.

Также для каждой точки, для которой находятся температуры, можно проследить динамику остывания. На рисунке 2 производится сравнение скоростей остывания для внутренней и внешней точек. Точка 26 является внешней. Очевидно, что в ней процесс остывания начинается значительно раньше, затем точки остывают приблизительно с равной скоростью.



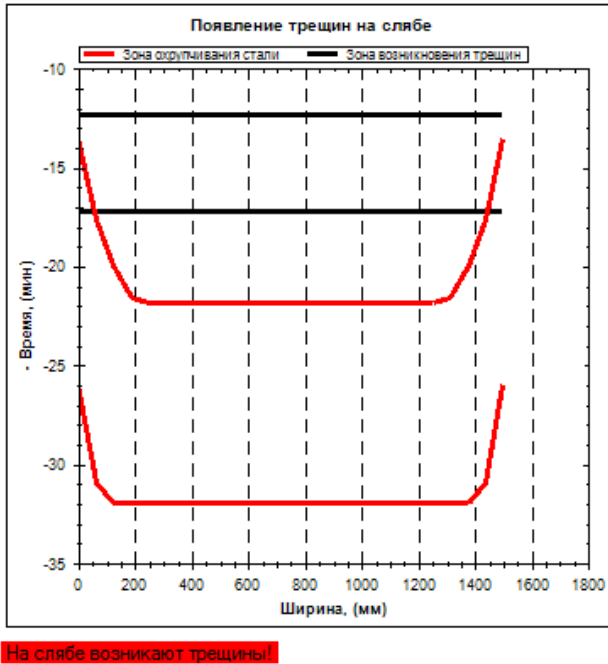
*Рис.2. Изменение температуры в выбранной точке*

Рассматриваемая в данной работе УНРС имеет участок поворота, на котором стальной сляб меняет свою форму. При этом сначала сляб сжимается, а затем расширяется. Это грозит возникновением трещин. Причем вероятность возникновения трещин больше со стороны внутреннего радиуса, т.к. там деформация стали значительно больше.

Трещины на «опасном» участке возникают не всегда. Существует понятие «охрупчивание стали». Оно означает, что при температурном воздействии на сталь меняется ее структура, при этом снижается пластичность и вязкость. Трещины возникнут в



случае, когда сталь станет хрупкой именно на «опасном» участке. Программа отслеживает для каждой марки стали, возникнут ли трещины или нет по выбранной системе охлаждения, и в каком месте (рисунок 3) [3].



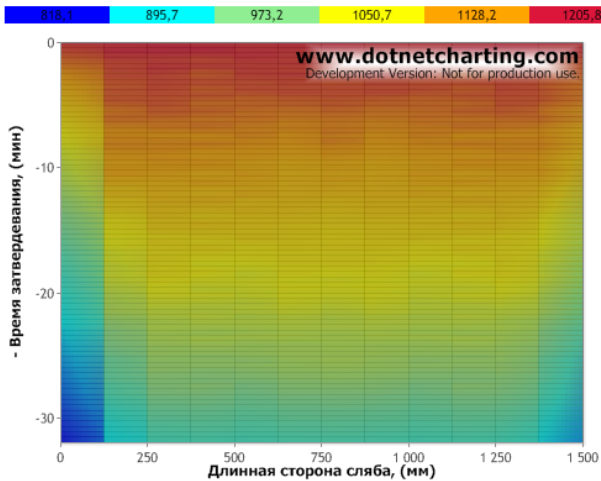
*Рис.3. Наличие трещин при выбранной системе охлаждения*

При реальном процессе работы УНРС в системе охлаждения могут возникать неполадки. В частности, это забитые форсунки. Это может произойти в следующих случаях:

- вода с примесями;
- в начале процесса охлаждения под действием высоких температур испарения.

Зададим вероятность появления забитых форсунок 50% в начале процесса охлаждения. Постепенно эта вероятность будет уменьшаться в связи с тем, что вторая причина будет значительно меньше влиять на появление неполадок в системе охлажде-

ния. На рисунке 4 отображен процесс затвердевания широкой стороны сляба с учетом наличия забитых форсунок.



*Рис.4. Учет забитых форсунок*

Видно, что процесс затвердевания в начале происходит неравномерно. Это как раз связано неполным орошением поверхности сляба водой. В последние 8 метров температура сляба постепенно выравнивается, и, ближе к концу процесса затвердевания, температуры широкой стороны сляба становятся практически симметричными относительно середины сляба.

#### **4. Заключение**

В данной работе рассмотрены особенности процесса затвердевания стали в УНРС. Построенная модель описывает формирование стального сляба в криволинейных УНРС с вертикальным участком. Для исследования она интересна тем, что в процессе затвердевания на одном из участков сляб меняет свою форму, что может привести к формированию трещин.

## **Литература**

1. БЛАТОВ И.А., ГЛУШАКОВА Т.Н. *Численные методы для разреженных матриц: методическое указание.* – Воронеж: ВГУ, 1994. – 32 с.
2. ЗИНКЕВИЧ О.С. *Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ.* – М.: Мир, 1975. – 539 с.
3. ПАРШИН В.М., БУЛАНОВ Л.В. *Непрерывная разливка стали.* – Липецк: ОАО «НЛМК», 2011. – 221 с.
4. РУМЯНЦЕВ А.В. *Метод конечных элементов в задаче теплопроводности: учебное пособие.* – Калининград: Калинингр. ун-т., 1995. – 170 с.
5. СЕГЕРЛИНД Л. *Применение метода конечных элементов. Пер. с англ.* – М.: Мир, 1979. – 392 с.
6. СОРОКИН В.Г. *Стали и сплавы. Марочник.* – М.: Интермет-Инжиниринг, 2001. – 608 с.

## **MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL REGIME OF PROCESS INGOT COOLING AND SOLIDIFICATION IN STEEL CONTINUOUS CASTING PLANT**

**Alexander Galkin**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Cand.Sc., assistant professor (avgalkin82@mail.ru).

**Nina Kuzina**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, student (nina-1003@yandex.ru).

**Vladimir Pimenov**, NLMK, Lipetsk, Cand.Sc. (pimenov\_va@nlmk.ru).

*Abstract: This paper describes the modeling process cooling and solidification of molten steel in the steel continuous casting plant. In this paper modeled process of the cooling taking into account features of design of steel continuous casting plant, influence clogging nozzles secondary cooling system, determined the possibility and location of transverse cracks with the effect of "hot brittleness" after hardening steel slab. Changing the thermophysical properties of steel (thermal conductivity and thermal capacity) for different*

*grades depending on temperature is taken into account by using extrapolation model..*

Keywords: heat conduction equation, steel continuous casting plant, finite-element method, sparse matrix.