

УДК 519.7

ББК 22.18

## МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

Епифанов А. С.<sup>1</sup>

(Институт проблем точной механики  
и управления РАН, Саратов)

*В статье осуществляется построение и анализ автоматных моделей дискретных динамических систем. Проводится оценка сложности законов функционирования автоматов на основе использования аппарата геометрических образов автоматов и спектра динамических параметров рекуррентного определения последовательностей. Исследованы оценки сложности автоматов в специальных классах. Осуществлено построение автоматных моделей по геометрическим кривым, имеющим прикладную интерпретацию, а также классификация построенных моделей по сложности.*

Ключевые слова: дискретная детерминированная динамическая система, математическая модель, автомат, автоматное отображение, геометрический образ законов функционирования автомата, оценка сложности.

### 1. Введение

Одной из фундаментальных составляющих математических моделей сложных дискретных динамических систем являются алгоритмы, реализуемые системой в соответствии с ее целевым предназначением. Для алгоритмически разрешимого класса задач существует бесконечное множество алгоритмов (решаю-

---

<sup>1</sup> Антон Сергеевич Епифанов, кандидат физико-математических наук (epifanovas@list.ru).

щих класс задач), которое может быть упорядочено по сложности. Со сложностью алгоритма в общем случае связана реализация алгоритмов в системе, определяющая ряд важнейших показателей: быстродействие, объем памяти, надежность, энергозатраты и т.п. В связи с этим, задачи построения новых методов для оценки сложности законов функционирования систем в целом и конкретных процессов функционирования являются актуальными. Число вариантов понятия сложности продолжает увеличиваться: оценки алгоритмов по их принадлежности к  $NP$  и  $P$  классам, сложность снизу, сверху, сложность в среднем, битовая сложность, мультипликативная сложность, Колмогоровская сложность (сложность Колмогорова — Хайтина), алгебраическая сложность, асимптотические оценки сложности и др.[1,4,5]. В данной работе осуществляется построение оценок сложности на основе использования аппарата геометрических образов автоматов и спектра динамических параметров рекуррентного определения последовательностей [6,7].

По одной из основных гипотез теории алгоритмов (которую в специальной литературе называют тезисом Черча-Тьюринга) в случае, если задача имеет решение (существует алгоритм решения), то существует машина Тьюринга, которая решает эту задачу. По данной гипотезе класс всех алгоритмов равномошен классу машин Тьюринга. В свою очередь машина Тьюринга является расширением конечного детерминированного автомата, класс преобразований которого ограничен числом состояний, входных и выходных сигналов. При снятии ограничения на конечность числа состояний автомата (что сделано Твердохлебовым В.А. за счет введения геометрических образов законов функционирования автоматов [6,7]) машина Тьюринга может быть представлена как автомат с бесконечным числом состояний, считывающий и записывающий информацию с ячеек ленты. В работе А.Н.Колмогорова и В.А.Успенского [4] отмечается: "... построение теории алгоритмов по образцу теории вычислительных машин требует во всяком случае некоторой идеализации понятия "машины". ... Вся идеализация, необходимая для перехода от реальных вычислительных машин к мате-

матическим алгоритмам, заключается в допущении неограниченного объема "памяти" машины.(с.6)".

Ввиду ограничений на объем статьи подробное описание используемого аппарата геометрических образов автоматов, предложенного и разработанного Твердохлебовым В.А., в явном виде не приводится и детально представлено, например, в работах [6,7]. Отметим только основные идеи, позволяющие представить законы функционирования автомата типа Мили ( $A_s=(S, X, Y, \delta, \lambda, s)$  с множествами состояний  $S$ , входных сигналов  $X$  и выходных сигналов  $Y$ , функцией переходов  $\delta: S \times X \rightarrow S$ , функцией выходов  $\lambda: S \times X \rightarrow Y$  и начальным состоянием  $s \in S$ ) в числовой форме (в форме геометрического образа  $\gamma_s$ ):

1. Линейно упорядочивается автоматное отображение  $\rho'_s = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda'(s, p))\}$ , где  $\lambda'(s, p) = \lambda(\delta(s, p'), x)$ ,  $p = p'x$ .

2. Элементы пар  $(p, y)$  автоматного отображения заменяются их номерами  $(r_1(p), r_2(y))$  по вводимым линейным порядкам.

3. Полученное множество пар чисел размещается в главном квадранте прямоугольной декартовой системы координат на плоскости.

Твердохлебовым В.А. в работе [6] показано, что при выбранных и зафиксированных линейном порядке на порядке на множестве  $X^*$  и величине  $m = |X|$  геометрический образ автомата однозначно определяется последовательностью вторых координат его точек. Это позволило рассматривать произвольную последовательность элементов из конечного множества как последовательность вторых координат точек геометрического образа и, следовательно, как задание законов функционирования автомата. Ввиду ограничений на объем статьи используемый метод построения законов функционирования автомата по последовательности, предложенный и разработанный Твердохлебовым В.А., в явном виде не приводится и содержится, например, в работах [6,7]. Параграфы 3,4 данной работы содержат результаты анализа (с использованием спектра рекуррентного определения последовательностей) законов функционирования автоматов, заданных числовыми последовательностями.

## 2. Спектр динамических параметров рекуррентного определения последовательностей

Для строгого представления свойств последовательности Твердохлебовым В.А. введен спектр динамических параметров рекуррентного определения последовательности [6,7], характеризующий последовательность по взаимосвязям (взаиморасположению) элементов в ней. Рассмотрим спектр для произвольных последовательностей. Пусть  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  - конечное множество и  $\xi$  последовательность элементов из множества  $U$ :  $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$ . Спектр  $\Omega(\xi)$  динамических характеристик последовательности  $\xi \in U^*$  имеет иерархическую структуру, состоящую из уровней  $\Omega(\xi) = (\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$ . Каждый конкретный вариант реализации (представление значениями параметров) любого уровня  $\Omega_i(\xi)$  определяет разбиение множества  $U^*$  на подмножества по свойствам совпадения характеристик. Подмножества такого разбиения будем рассматривать как классы эквивалентности последовательностей. Введём следующие обозначения.

Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$ , где  $U^v$  - множество всех последовательностей длины  $v$  элементов из множества  $U$ , наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность  $\bar{\xi}$ , будем обозначать  $m_0(\bar{\xi})$ . Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$ , наибольшую длину начального отрезка последовательности  $\bar{\xi}$ , определяемого рекуррентной формой порядка  $m$ , будем обозначать  $d^m(\bar{\xi})$ . Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq |\bar{\xi}| - 1$ , число смен рекуррентных форм порядка  $m$ , требующихся при определении последовательности  $\bar{\xi}$ , будем обозначать  $r^m(\bar{\xi})$ . Для любой последовательности  $\bar{\xi} \in U^v$  и  $m \in N^+$ , где  $1 \leq m \leq m_0(\bar{\xi})$  и  $j$ , где  $1 \leq j \leq r^m(\bar{\xi})$  длину  $j$ -го

отрезка в определении последовательности  $\bar{\xi}$  будем обозначать  $d_j^m(\bar{\xi})$ .

Используя введенные обозначения определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:  $-\Omega_0(\bar{\xi}) = \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle$ ;  $-\Omega_1(\bar{\xi}) = \langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \dots, d^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$ ;  $-\Omega_2(\bar{\xi}) = \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \dots, r^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$ ;  $-\Omega_3(\bar{\xi}) = \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \dots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$ , где  $\alpha = m_0(\bar{\xi})$  и  $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \dots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \rangle$  ( $n_j$  – номер последнего отрезка в определении последовательности  $\bar{\xi}$  как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка  $j$ ). Четвёртый уровень  $\Omega_4(\bar{\xi})$  спектра  $\Omega(\bar{\xi})$  добавляет к характеристикам в предшествующих уровнях оценку сложности правил и вариантов использования правил. Формально  $\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$ , где  $\Theta$  – оператор замены в  $\Omega_3(\bar{\xi})$  величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

Рекуррентная форма  $F(z_{t-m}, z_{t-m+1}, \dots, z_{t-1}) = z_t$  порядка  $m$  определяет последовательность  $\xi = \langle u(1), u(2), \dots, u(t), \dots \rangle$  если для любого  $t, m < t$  и  $t \in N$ ,  $F(u_{t-m}, u_{t-m+1}, \dots, u_{t-1}) = u_t$ . Рекуррентная форма  $F$  рассматривается как правило, определяющее последовательность  $\xi$ , сложность которого может быть выражена с помощью величин  $m_0$  (наименьший порядок рекуррентной формы) и  $n = |W|$ , где  $W$  – множество значений переменных  $\xi_i$ . Простейшая формула, определяющая числовое значение оценки сложности использованной рекуррентной формы, имеет вид  $\theta = \frac{m_0 \cdot k}{n^{m_0-1}}$ , где  $k$  – число знаков в последовательности, порожденных применением рекуррентной формы  $F$ .

### **3. Оценка сложности законов функционирования автоматов, заданных последовательностями, на основе использования спектра динамических параметров**

Среди различных подходов к оценке сложности процессов, алгоритмов, законов функционирования автоматов и реализаций этих законов для исследования выбран подход, при котором используется геометрическое представление поведения автоматов. Рекуррентное описание последовательностей дает полную и глубокую характеристику взаиморасположения элементов в последовательности: определяет функциональную зависимость элемента последовательности от непосредственно предшествующей ему подпоследовательности элементов. Числовым показателем при рекуррентном определении последовательности является длина однозначно сопоставляемой элементу предшествующей подпоследовательности. На основе этих свойств определения последовательности рекуррентными формами Твердохлебовым В.А. [6,7] предложены 5 уровней спектра (см. параграф 2). Проведено исследование, в котором спектр используется как средство для оценки сложности законов функционирования автоматов, оценки сложности реализаций алгоритмов, для оценки сложности по геометрическим свойствам трасс формулы-1, для оценки сложности последовательностей ДНК различных живых существ, для оценки сложности функций алгебры логики. Кроме этого, были классифицированы по сложности взаиморасположения цифр в начальных отрезках последовательностей длины до 10 млн. знаков, представляющих приближенно иррациональные числа  $\pi$ ,  $e$ ,  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (т.н.

золотое сечение),  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\ln(2)$ ,  $\ln(10)$ ,  $\zeta(3) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3}$ , константа

Каталана  $C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ , константа Эйлера (Постоянная

Эйлера — Маскерони)  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n))$  и др.

На основе использования спектра динамических характеристик проведена оценка сложности и классификация последовательностей из Международного банка последовательностей The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™ (OEIS™) (см.[12] ), состоящего из более чем 150000 последовательностей.

Ввиду ограничений на объем статьи приводятся только результаты исследований по оценке сложности управления движением по трассам Формулы-1, а также некоторые результаты по оценке сложности автоматов, построенных по указанным выше фундаментальным математическим последовательностям.

Для оценки сложности взаиморасположения цифр в начальных отрезках последовательностей, представляющих приближения иррациональных чисел  $\pi$ ,  $e$ ,  $\varphi$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\ln(2)$ ,  $\ln(10)$ ,  $\zeta(3)$ , константа Каталана  $C$ , константа Эйлера  $\gamma$ ) и др. рассмотрим последовательности длины до 1000000 знаков ( $\pi$  и  $e$  дополнительно построены и проанализированы до 10 млн.знаков). Эти структуры сравнены и классифицированы по сложности на основе показателей первых двух уровней спектра, т.к. числовые структуры, соответствующие третьему и четвертому уровню имеют практически не представимую размерность. Например, в представлении показателей четвертого уровня спектра для последовательности длины 1 млн.знаков, приближенно представляющей число  $\pi$ , содержится более 1000000000 знаков.

Определение 1. Сравнимые по входам инициальные автоматы  $A_1=(S_1, X, Y_1, \delta_1, \lambda_1, s_{01})$ , где  $s_{01} \in S_1$ , и  $A_2=(S_2, X, Y_2, \delta_2, \lambda_2, s_{02})$ , где  $s_{02} \in S_2$ , будем называть изоморфными по выходам, если  $|Y_1|=|Y_2|$  и существует такое взаимно-однозначное отображение  $\varphi: Y_1 \xrightarrow{на} Y_2$ , для которого выполняется условие :

$$(\forall p \in X^*) \big( |p| = \nu \rightarrow \lambda_2(s_{02}, p) = \varphi(\lambda_1(s_{01}, pr_1 p)) \varphi(\lambda_1(\delta_1(s_{01}, pr_1 p), pr_2 p)) \dots$$

$\dots \varphi(\lambda_1(\delta_1(s_{01}, pr_{12\dots v-1} p), pr_v p))$ , где  $pr_{1\dots d} p$  - префикс длины  $d$  последовательности  $p$ .

Каждый инициальный автомат  $A=(S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ , где  $|Y|=l$ , и семейство не тождественных взаимно-однозначных отображений вида  $\varphi: Y \xrightarrow{na} Y$  определяют множество из  $l!$  изоморфных по выходам автоматов, которое будем обозначать  $\Psi(A, Y)$ . Это означает, что каждая оценка сложности законов функционирования инициального автомата распространяется на весь класс изоморфных по выходам автоматов (включающий  $v = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot l$  автоматов). Введем следующие обозначения:  $H = \{e, \pi, \varphi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \ln(2), \ln(10), \zeta(3), C, \gamma\}$ ,  $H_d$  - множество начальных отрезков длины  $d$  последовательностей, определяющих элементы множества  $H$ , а  $\alpha_d^m(H_d) = \{A_d^m(e), A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\ln(2)), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(\zeta(3)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma)\}$ , где  $A_d^m(\beta)$ ,  $\beta \in H_d$ , - дискретный детерминированный автомат с числом входных сигналов  $m$  и  $\beta$  является последовательностью вторых координат точек геометрического образа автомата.

Для проведения исследований были разработаны алгоритмы и программы, позволившие построить указанные спектры для рассмотренных величин. Результаты построения двух первых уровней спектров (ввиду ограничений на объем статьи показатели  $\Omega_1$  приведены в явном виде, а показатели  $\Omega_0$  могут быть получены после тривиального анализа показателей  $\Omega_1$ ) динамических параметров для указанных последовательностей приведены в таблицах 1, 2. Синтез и минимизация автоматов по последовательностям из множества  $H_d$  проведен при различных значениях числа  $m \in U$  входных сигналов автоматов ( $U = \{2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000\}$ ). В теоремах 1 - 5 приведены результаты построения показателей спектров для множества  $\alpha_d^m(H_d)$  (при различных значениях  $d$ ) и разбиения по совпадению показателей на классы эквивалентности по сложности.

**Теорема 1.** Законы функционирования автоматов из  $\alpha_d^m(H_d)$ , где  $d=1000000$ :



- по сложности, определяемой нулевым уровнем  $\Omega_0$  спектра  $\Omega$ , образуют 2 класса эквивалентности по сложности:

$$\{ A_d^m(e), A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\zeta(3)) \} \text{ и } \\ \{ A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\ln(2)), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma) \};$$

- по сложности, определяемой первым уровнем  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

Доказательство см. [7]. В теореме 1 представлены оценки сложности законов функционирования автоматов, для случая их определения последовательностями вторых координат точек их геометрических образов длины  $d=1000000$ . Полученные классы сложности не являются инвариантными относительно изменения длины  $d$  рассматриваемых последовательностей. В теоремах 2 - 5 показано как изменяется сложность законов функционирования автоматов при определении этих законов геометрическими образами различной длины. Доказательство теорем 1 - 5 аналогичны и для доказательства теорем использовались одни и те же программные средства для получения значений показателей спектра.

*Таблица 1. Характеристики первого уровня  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  для последовательностей, задающих приближения величин  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\varphi$ ,  $\zeta(3)$  ( $m_0$  - порядок рекуррентной формы).*

$m_0$	$\pi$	$e$	$\sqrt[3]{2}$	$\varphi$	$\zeta(3)$
1	4	5	5	3	5
2	23	10	25	14	5
3	64	10	25	63	52
4	136	10	224	90	183
5	556	500	800	989	612
6	1302	500	872	1211	843
7	4608	2738	3673	3551	2854
8	15442	23552	6733	15320	11923
9	33853	29433	62895	24707	73588
10	240489	159939	278219	111204	96694
11	694410	172265	389536	320819	96694

12	857994	947499	988084	942583	846617
13	100000 0	100000 0	1000000	1000000	1000000

Теорема 2. Законы функционирования автоматов из  $\alpha_d^m(H_d)$ , где  $d=1000$ , по сложности: - определяемой нулевым уровнем  $\Omega_0$  спектра  $\Omega$  образуют 2 класса эквивалентности по сложности:  $\{ A_d^m(e), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\zeta(3)) \}$  и

$\{ A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\ln(2)), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma) \}$ ;

- определяемой первым уровнем  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

Теорема 3. Законы функционирования автоматов из  $\alpha_d^m(H_d)$ , где  $d=10000$ , по сложности: - определяемой нулевым уровнем  $\Omega_0$  спектра  $\Omega$  образуют 3 класса эквивалентности по сложности:

$\{ A_d^m(e), A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\zeta(3)), A_d^m(\gamma) \}$ ,  
 $\{ A_d^m(\ln(10)), A_d^m(\sqrt[3]{2}) \}$  и  $\{ A_d^m(\ln(2)), A_d^m(C) \}$ ;

- определяемой первым уровнем  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

*Таблица 2. Характеристики первого уровня  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  для последовательностей, задающих приближения величин  $\sqrt{2}$ ,  $\ln(2)$ ,  $\ln(10)$ ,  $C$  и  $\gamma$  ( $m_0$  - порядок рекуррентной формы).*

$m_0$	$\sqrt{2}$	$\ln(2)$	$\ln(10)$	$C$	$\gamma$
1	4	8	4	5	4
2	4	20	20	9	14
3	54	61	31	44	22
4	90	263	75	44	119
5	177	397	186	493	358
6	1727	1029	1473	1760	1439
7	2213	1493	4393	2855	3824
8	27278	5295	4393	9733	24170
9	34745	8569	33233	9733	27532
10	81199	119254	183978	154020	115831

11	552217	815449	331272	155872	393168
12	100000 0	100000 0	1000000	1000000	1000000

**Теорема 4.** Законы функционирования автоматов из  $\alpha_d^m(H_d)$ , где  $d=100000$ , по сложности:

- определяемой нулевым уровнем  $\Omega_0$  спектра  $\Omega$  образуют 3 класса эквивалентности по сложности:  $\{ A_d^m(e), A_d^m(\pi), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\ln(2)), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma) \}$ , и  $\{ A_d^m(\sqrt{2}) \}$  и  $\{ A_d^m(\zeta(3)) \}$ ;

- определяемой первым уровнем  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

**Теорема 5.** Законы функционирования автоматов из  $\alpha_d^m(H_d)$ , где  $d=500000$ , по сложности: - определяемой нулевым

уровнем  $\Omega_0$  спектра  $\Omega$  образуют 2 класса эквивалентности по сложности:  $\{ A_d^m(\pi), A_d^m(\sqrt{2}), A_d^m(\ln(2)) \}$  и  $\{ A_d^m(e), A_d^m(\varphi), A_d^m(\sqrt[3]{2}), A_d^m(\ln(10)), A_d^m(\zeta(3)), A_d^m(C), A_d^m(\gamma) \}$ ;

- определяемой первым уровнем  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  образуют одноэлементные классы эквивалентности по сложности.

#### **4. Оценка сложности автоматных моделей управления движением болидов по трассам** **Формулы-1**

В данном параграфе на основе использования аппарата геометрических образов законов функционирования автоматов проводится анализ свойств трасс 19 официальных этапов автомобильной гоночной серии «Формула-1». Анализ свойств гоночных трасс сводится к исследованию свойств плоских кривых, представляющих собой масштабированные карты реальных трасс. По таким кривым осуществляется построение законов функционирования дискретных детерминированных динамических систем (автоматов). Для оценки сложности и классифика-

ции трасс используется спектр динамических параметров рекуррентного определения последовательностей.

Процесс управления движением по заданному маршруту в приближенной форме можно представить в виде следующих основных составляющих: анализа информации о текущей ситуации; выбор и приложение управляющего воздействия к органам управления. Сложность управления движением по заданному маршруту существенно зависит от специфики маршрута, которая определяется на основе многих факторов: длины маршрута, графика движения, физических характеристик объекта движения, трассы, специальных знаков и сигналов, внешних условий среды и т.п. Кроме того, сложность управления зависит и от свойств органов управления и ограничений, накладываемых на процесс управления. Все существенные факторы возможно закодировать с помощью символов конечного алфавита и представить, таким образом, специфику маршрута в виде последовательности элементов из конечного множества.

Использование геометрических образов законов функционирования автоматов позволило представлять фазовые картины едиными математическими структурами – ломаными линиями с числовыми координатами точек. Это позволяет рассматривать геометрические кривые с автоматной интерпретацией, т.е. как способ задания законов функционирования автомата. В данной работе с автоматной интерпретацией рассматриваются геометрические кривые, представляющие собой масштабированные карты трасс этапов формулы-1. На основе использования спектра  $\Omega$  для анализа числовых последовательностей, представляющих специфику трасс, производится оценка сложности и классификация по сложности 19 трасс этапов формулы -1. Кроме того, по каждой кривой (представляющую трассу) осуществляется построение класса автоматов при различных значениях мощности входного алфавита и различных способах доопределения функции переходов автомата (необходимость доопределения и возможные методы доопределения содержатся, например, в работе [3]). Построенные автоматы минимизируются и на основе числа состояний в минимальном автомате, сопоставленном трассе, проводится классификация трасс по сложности.

#### *4.1. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ СПЕКТРОВ ДЛЯ ТРАСС ГОНОЧНОЙ СЕРИИ «ФОРМУЛА -1»*

В данной части работы с использованием спектра динамических параметров осуществляется исследование свойств гоночных трасс 19 официальных этапов формулы 1:

1. Гран-при Австралии (трасса Альберт-Парк)
2. Гран-при Бахрейна (трасса Сахир)
3. Гран-при Бельгии (отменен)
4. Гран-при Бразилии (трасса Интерлагос)
5. Гран-при Великобритании (трасса Сильверстоун)
6. Гран-при Венгрии ( трасса Хунгароринг)
7. Гран-при Германии (трасса Хоккенхаймринг)
8. Гран-при Европы (трасса Нюрбургринг)
9. Гран-при Испании (трасса Каталунья Монтмелло)
10. Гран-при Италии (трасса Аутодроме Национале)
11. Гран-при Канады (трасса Автодром имени Жиля Вильнева)
12. Гран-при Китая (трасса Шанхай Интернешнл)
13. Гран-при Малайзии (трасса Сепанг)
14. Гран-при Монако (трасса Монте-Карло)
15. Гран-при Сан-Марино (трасса имени Энцо и Дино Феррари)
16. Гран-при США (Автодром Индианаполис Мотор Спидвей)
17. Гран-при Турции (трасса Курткой)
18. Гран-при Франции (трасса Маньи-Кур Невер)
19. Гран-при Японии (трасса Сузука Интернешнл).

Анализ свойств гоночных трасс сводится к исследованию свойств плоских кривых, представляющих собой масштабированные карты реальных трасс. Карты трасс официальных этапов формулы -1 и детальная информация о каждом этапе представлена в сети Интернет по адресу [9-11]. Анализ каждой из 19 геометрических кривых состоит в извлечении из кривой числовой последовательности, которая интерпретируется как последовательность вторых координат точек геометрического образа автомата. Для элементов множества, состоящего из 19 извлеченных последовательностей строятся спектры и на основе совпадения числовых показателей спектра множество разбивается на классы эквивалентных последовательностей. Кроме того, по каждой из 19 кривых построены автоматы.

На каждой кривой выбирались точки, соответствующие поворотам и точки, обозначенные как контрольные при прохождении трассы (данные точки используются в ходе квалификации и непосредственно в гонке). Направление обхода для каждой кривой совпадает с направлением движения болидов формулы - 1 по трассе, которой сопоставляется кривая. В качестве начальной точки рассматривалась точка старта болидов в гонке. Количество точек, задающих приближение кривой зафиксировано для всех 19 кривых и равно 23 – среднему количеству поворотов для рассматриваемых трасс. Таким образом количество элементов в числовой последовательности, сопоставленной кривой равно 23. Извлеченные из масштабированных карт трасс формулы-1 последовательности длины 23 были проанализированы с использованием спектра динамических параметров. Для каждой последовательности построены спектры и по совпадению значений параметров на уровнях  $\Omega_0 - \Omega_3$  спектра  $\Omega$  построены разбиения  $P_0, P_1, P_2, P_3$  множества рассматриваемых последовательностей на классы эквивалентных последовательностей (см.таблицу 1).

*Таблица 3. Информация о разбиениях  $P_0, P_1, P_2, P_3$  по показателям спектра  $\Omega$  на уровнях  $\Omega_0 - \Omega_3$ .*

Характеристика	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Число подклассов в разбиении	3	7	9	9
Максимальная мощность подкласса	10	2	1	1
Минимальная мощность подкласса	1	1	1	1

Анализ полученных результатов показывает, что значительное увеличение (почти в 6 раз) числа классов эквивалентных последовательностей наблюдается при построении разбиения  $P_1$  (число классов увеличивается с 3 до 17), при этом в 5 раз уменьшается значение максимальной мощности класса в разбиении (с 10 элементов в классе до 2 элементов). Разбиение  $P_2$  увеличивает число классов до 19, т.е. все классы в разбиении  $P_2$  являются одноэлементными. В таблице 4 приведены классы

эквивалентных этапов формулы-1 (по совпадению показателей спектра для последовательностей, кодирующих трассу этапа). Самым сложным на нулевом уровне  $\Omega_0$  спектра  $\Omega$  оказалась последовательность, кодирующая трассу Маньи-Кур Невер Гран-при Франции (см.рис.1). В работах [9-11] приведена информация о всех 19 трассах формулы-1. Характеристики трассы Маньи-Кур гран-при Франции, извлеченные из [9-11], подтверждают тот факт, что данная трасса является одной из сложнейших в чемпионате. В один класс разбиения  $P_1$  (по показателям первого уровня  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$ ) попали этапы гран-при Канады (трасса Автодром имени Жилия Вильнева) и гран-при Японии (трасса Сузука Интернешнл).

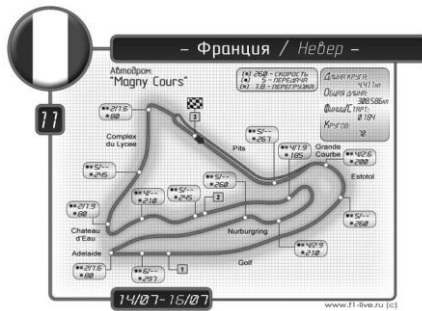


Рис.1. Трасса Маньи-Кур Гран-При Франции – 11го официального этапа формулы 1.

В [9-11] приведены данные о трассах, которые подтверждают, что они имеют близкую сложность. Информация, приведенная в таблице 5 (извлеченная из [9-11]), также подтверждает одинаковую сложность данных трасс (для указанных сильнейших пилотов формулы-1 число побед на обеих трассах отличается не более, чем на 1, или совпадает). Эквивалентными по показателям первого уровня  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  являются последовательности, кодирующие этапы: гран-при Китая (трасса Шанхай Интернешнл) и гран-при Германии (трасса Хоккенхаймринг). Остальные 17 классов разбиения  $P_1$  являются одноэлементными. Разбиение  $P_2$  содержит 19 одноэлементных классов. Для каждого из 19 этапов вычислено значение характе-

ристики  $\theta$ , построены классы эквивалентных этапов формулы-1 по совпадению значения характеристики  $\theta$ . Разбиение  $P_\theta$  содержит 10 классов эквивалентности, максимальное число элементов - 4 содержится в классе, значение характеристики  $\theta$  в котором также является максимальным ( $\theta = 2.85714$ ). Разбиение  $P_\theta$  включает 4 одноэлементных класса, 4 двухэлементных класса, один трехэлементный и один четырехэлементный класс. Минимальное значение характеристики  $\theta = 0.0601052$ .

Кроме того, в данном параграфе содержатся результаты более подробного анализа сложности 69 трасс, на которых проводились все официальные этапы автомобильной гоночной серии «Формула-1» с 1950 по 2011г.г.

*Таблица 4. Классы эквивалентных на нулевом уровне  $\Omega_0$  спектра  $\Omega$  этапов формулы-1.*

Класс	Этап формулы-1	Трасса
$K_1$	Гран-при Бахрейна	Сахир
	Гран-при Малайзии	Сепанг
	Гран-при Канады	Автодром имени Ж.Вильнева
	Гран-при Германии	Хоккенхаймринг
	Гран-при Венгрии	Хунгароринг
	Гран-при Турции	Курткой
	Гран-при Бельгии	Спа
	Гран-при Китая	Шанхай Интернешнл
	Гран-при Японии	Сузука Интернешнл
	Гран-при Бразилии	Интерлагос
$K_2$	Гран-при Австралии	трасса Альберт-Парк
	Гран-при Сан-Марино	Автодром имени Феррари
	Гран-при Европы	трасса Нюрбургринг
	Гран-при Испании	Каталунья Монтмелло
	Гран-при Италии	Аутодроме Национале
	Гран-при Великобритании	Сильверстоун
	Гран-при США	Автодром Индианаполис
$K_3$	Гран-при Франции	Маньи-Кур Невер



Анализ свойств гоночных трасс проводится на основе исследования свойств геометрических кривых, представляющих собой масштабированные карты реальных трасс. Анализ трасс состоит в построении кодов трасс (исследованы различные степени приближения - от 40 до 400 точек), которые также интерпретируются как соответствующие последовательности вторых координат точек геометрических образов автоматов.

*Таблица 5. Информация о числе побед различных пилотов на трассе им.Жюль Вильнева и трассе Сузука Интернешнл.*

Пилот	Число побед на трассе им.Жюль Вильнева	Число побед на трассе Сузука Интернешнл
Михаэль Шумахер	7	6
Мика Хаккинен	1	2
Айртон Сенна	2	2
Герхард Бергер	1	2
Дэймон Хилл	1	2
Кими Райкконен	1	1

Для элементов множества, состоящего из 69 построенных числовых последовательностей кодов строятся спектры и на основе совпадения числовых показателей спектра множество разбивается на классы эквивалентных последовательностей. По каждой из 69 кривых осуществлено построение семейства автоматов (при различном числе входных сигналов автомата и различных способах доопределения функции переходов автоматов).

Построение числовых последовательностей кодов трасс при анализе сложности управления движением по трассе заданного объекта может быть реализовано различными способами и с разной степенью точности и полноты. В общем случае для решения прикладных задач в коде должны быть представлены: геометрические свойства маршрута, физические свойства маршрута (задымленность, туман, тип покрытия, наличие на покрытии трассы веществ, влияющих на сцепление и др.), свойства объекта движения (например, способность набирать/снижать

скорость с заданной интенсивностью), свойства органа управления объектом движения, свойства объектов сигнализации. В данной работе при проведении анализа свойств трасс рассматриваются только геометрические свойства маршрутов ввиду того, что за 60 лет происходили существенные изменения в техническом регламенте «Формулы-1», оказывающие принципиальное влияние на свойства объекта движения, свойства органа управления и характеристики средств сигнализации (десятки раз вводились и отменялись ряд ограничений на мощность двигателя, диаметр и ширину покрышек, геометрию и размеры задних и передних антикрыльев, использование систем помощи при и ускорении болида и др.). В данной работе выбран способ, который предполагает выбор базиса стандартных участков движения и их кодирования, разбиение всего маршрута на стандартные участки и построение кода всего маршрута как числовой последовательности кодов стандартных участков. При этом используется существующая гоночная классификация стандартных участков движения (см., например, [9-11]), для которых (на конкретном интервале времени действия технических правил для болидов) на основе опытных данных определены конкретные значения характеристик, позволяющие проходить стандартный участок быстрее всего: скорость входа на стандартный участок, скорость выхода, передача, на которой необходимо входить в участок, передача, на которой необходимо выходить из участка, способ прохождения участка. На рис.2 приведены карты двух трасс: (а) - Brands Hatch (Кент, Великобритания, 14 гран-при) и (б) - Hockenheimring (Хокенхайм, Германия, 33 гран-при) с выбранным разбиением трасс на стандартные участки.

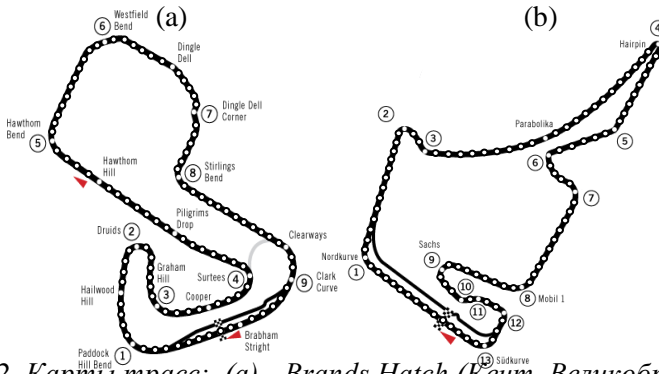


Рис.2. Карты трасс: (a) - Brands Hatch (Кент, Великобритания); (b) - Hockenheimring (Хокенхайм, Германия).

Построены числовые последовательности кодов всех 69 трасс и проведен их анализ с использованием спектра динамических параметров  $\Omega$ . Также рассмотрено несколько трасс планируемых к использованию в «Формуле-1», в том числе трасса в г.Сочи. Вычислены значения показателей на четырех уровнях  $\Omega_0 - \Omega_3$  спектра  $\Omega$  и на основе полученных значений построены классы эквивалентных по сложности последовательностей и соответствующих им трасс. В качестве примера приведем значения показателей на уровне  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  спектра  $\Omega$  для последовательностей, кодирующих трассы, изображенные на рис.2. Показатели на нулевом уровне спектра: последовательность  $\xi_1$ , кодирующая трассу (a) Brands Hatch -  $\Omega_0(\xi_1) = m_0(\xi_1) = 19$ ; последовательность  $\xi_2$ , кодирующая трассу (b) Hockenheimring -  $\Omega_0(\xi_2) = m_0(\xi_2) = 21$  (для выбранного варианта кодирования трассы). Значения показателей для  $\xi_1$  и  $\xi_2$  на уровнях  $\Omega_1 - \Omega_3$  в явном виде не приводятся ввиду большой размерности.

## 5. Выводы

Изложены результаты, показывающие возможность практического использования спектра динамических параметров для определения свойств и оценки сложности законов функционирования

рования дискретных детерминированных динамических систем на основе исследования свойств числовых последовательностей, взаимно-однозначно определяющих законы функционирования. Построены оценки сложности для последовательностей, задающих приближения фундаментальных математических величин. Проведен анализ сложности более 70 трасс «Формулы - 1». По геометрическим кривым на плоскости, представляющим масштабированные карты трасс, построены и проанализированы классы автоматов.

### **Литература**

1. АБРАМОВ С.А. *Лекции о сложности алгоритмов.* – М.: МЦНМО, 2009. – 252 с.
2. БОГДАНОВ О., ЦЫГАНКОВ Э.С. *Основы мастерства.* Изд-во ДОСААФ СССР, 1986г. - 60с.
3. КОЛМОГОРОВ А.Н., УСПЕНСКИЙ В.А. *К определению алгоритма.* // *Успехи математических наук.* - 1958.- Т.ХІІІ, №4.- С.3-28.
4. ЛУПАНОВ О.Б. *Асимптотические оценки сложности управляющих систем.* - М.: Изд-во МГУ, 1984.
5. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Геометрические образы законов функционирования автоматов.*–Саратов:Наука,2008.– 183с.
6. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А., ЕПИФАНОВ А.С. *Представление автоматных отображений геометрическими структурами.*– Саратов: Наука, 2013. – 204 с.
7. ЦЫГАНКОВ Э.С. *Безопасное прохождение поворотов.* Изд-во Транспорт, 1993г.
8. <http://www.f1-live.ru> (дата обращения 03.06.2014)
9. <http://www.mclaren.com/formula1> (дата обращения 17.06.2014)
10. <http://www.formyla-1.ru> (дата обращения 21.06.2014)
11. <http://www.oeis.org> (дата обращения 15.06.2014)

## METHODS OF COMPLEXITY ESTIMATION OF LOWS OF FUNCTIONING OF AUTOMATONS MODELS OF SYSTEMS

**Anton Epifanov**, Institute of Precision Mechanics and Control Sciences of RAS, Saratov, Cand.Sc.(epifanovas@list.ru).

*Abstract: In paper are constructed and spend analysis of automata models of discrete determined dynamic systems. Are spend complexity estimation of lows of functioning of automaton based on use of mathematical apparatus of geometrical images of automata mappings and spectrum of dynamic parameters of recurrent definition of sequences. Also are constructed automata models by geometrical curves and spend classification of constructed models by complexity.*

**Keywords:** discrete determined dynamic system, mathematical model, geometrical image of automaton, complexity estimation.