

УДК 533.9.07

ББК 31.49

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ МЕТОДОМ ПОДВИЖНЫХ ФИЛАМЕНТОВ

Прохоров А. А.<sup>1</sup>

(Московский государственный университет  
им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Москва)

*Представлен метод восстановления распределения полоидального магнитного потока внутри вакуумной камеры сферического токамака Глобус – М (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, г. С-Петербург) в присутствии плазмы в реальном времени по измерениям с магнитных петель и поясов Роговского. Метод основан на аппроксимации распределенного тока плазмы суммой токов от филаментов (бесконечно тонких кольцевых витков). Построены линейные модели для управления формой, током и положением плазмы в токамаке Глобус-М на основании разработанного кода восстановления равновесия.*

Ключевые слова: токамак, полоидальный магнитный поток, функция Грина, восстановление равновесия плазмы, магнитное управление плазмой.

## 1. Введение

Для управления положением, формой и током плазмы токамака, как правило, разрабатываются и исследуются системы с обратной связью на линейных моделях [1, 7], полученных посредством линеаризации плазмо-физических кодов, например, DINA [3]. В этом случае при решении уравнений равновесия не решается задача реконструкции равновесия плазмы [6] для того,

---

<sup>1</sup> Артем Андреевич  
(prohorov.artem@physics.msu.ru).

Прохоров, студент

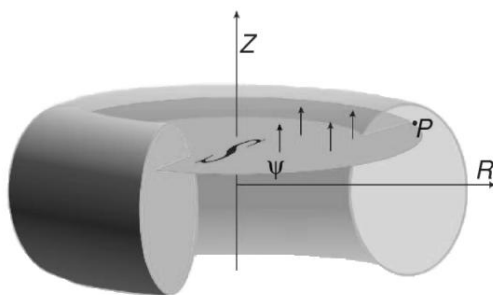
чтобы управлять полоидальным магнитным потоком, связанным с геометрическими параметрами плазмы или самими геометрическими параметрами. Для управления же формой плазмы в реальном времени необходимы алгоритмы восстановления равновесия по измерениям вне плазмы, чтобы на их основе можно было получить линейные модели плазмы [10], синтезировать по ним регуляторы и применять их в контуре обратной связи совместно с алгоритмом реконструкции равновесия [11].

## **2. Восстановление распределения полоидального магнитного потока внутри камеры токамака**

### **2.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКОВ И ПОТОКОВ ОТ ФИЛАМЕНТОВ**

Для описания физических процессов в токамаке обычно используется цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$  в предположении, что любая физическая величина не зависит от угла  $\varphi$  при аксиальной симметрии токамака. Для описания электромагнитных явлений в камере токамака вводится функция полоидального потока как полоидального потока на один радиан, проходящего через круг, на границе которого лежит точка  $P$  (рис. 1):

$$(1) \quad \psi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{S(P)} \vec{B} d\vec{S}.$$



*Рис. 1. К определению полоидального потока в токамаке*

Основной идеей метода филаментов (англ. filament – нить, волосок, волокно) является аппроксимация распределенного тока плазмы суммой токов от точечных источников (бесконечно тонких кольцевых витков, лежащих в горизонтальной плоскости) [2,9]:

$$(2) \quad J_{\varphi}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M I_m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m),$$

где  $J_{\varphi}(\mathbf{r})$  – тороидальная плотность тока плазмы,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор на плоскости  $(r, z)$ ,  $I_m$  – ток в  $m$ -ом филаменте,  $\mathbf{r}_m$  – координата  $m$ -го филамента,  $M$  – число филаментов,  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)$  – дельта-функция.

В результате такой замены распределение полоидального потока от плазмы на плоскости  $(r, z)$ , может быть найдено как сумма распределений полоидального потока от точечных источников:

$$(3) \quad \Psi_{pl}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M I_m G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}),$$

где  $\Psi_{pl}(\mathbf{r})$  – распределение полоидального потока от плазмы,  $I_m$  – ток в  $m$ -ом филаменте,  $G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r})$  – функция Грина [5], явный вид которой представлен ниже:

$$(4) \quad G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}) = \mu_0 \sqrt{r_m r} \left[ (1 - k^2/2) K(k^2) - E(k^2) \right] / \pi k,$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $K, E$  – эллиптические интегралы первого и второго рода,  $k^2 = 4r_m r / ((r_m + r)^2 + (z_m - z)^2)$ .

Аналогично выписываются распределения полоидального потока, создаваемые катушками управления и пассивными структурами – элементами вакуумной камеры:

$$(5) \quad \Psi_{coils}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^L I_l G(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}), \quad \Psi_{vv}(\mathbf{r}) = \sum_{v=1}^V I_v G(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}),$$

где  $I_l, I_v$  – токи в катушках и элементах камеры,  $L$  – число катушек,  $V$  – число элементов вакуумной камеры.

В итоге суммарное распределение полоидального потока на плоскости  $(r, z)$  включает в себя три суммы:

$$(6) \quad \Psi(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M I_m G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}) + \sum_{l=1}^L I_l G(\mathbf{r}_l, \mathbf{r}) + \sum_{v=1}^V I_v G(\mathbf{r}_v, \mathbf{r}).$$

## 2.2. МЕТОД ПОДВИЖНЫХ ФИЛМЕНТОВ

Метод филаментов подразумевает определение расположения филаментов и токов, протекающих в них, таким образом, чтобы норма отклонения созданного филаментами магнитного сигнала (магнитная индукция или магнитный поток) и значения тока в филаментах от измеренных величин была минимальной.

На действующей установке Глобус-М во время сценария измеряются значения магнитного потока в 21 точке расположения магнитных петель, закрепленных по периметру вакуумной камеры (рис.2). Также во время плазменного разряда определяются ток плазмы и ток плазмы в сумме с током по вакуумной камере с помощью поясов Роговского [6].

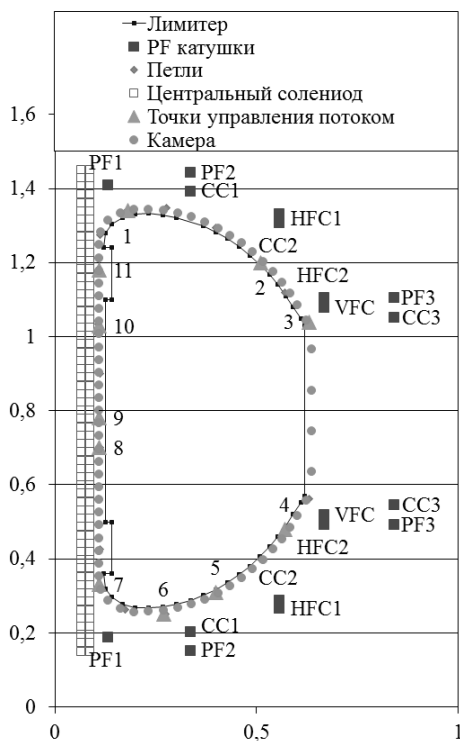


Рис. 2. Расположение катушек полоидального поля в токамаке ГЛОБУС-М в вертикальном сечении

Исходя из перечисленных данных, составляется функционал

$$(7) \quad F = \sum_{i=1}^N c_i [\Psi(\mathbf{r}_i) - \Psi_i]^2 + p_1 \left( \sum_{m=1}^M I_m - I_{pl} \right)^2 + \\ + p_2 \left( \sum_{m=1}^M I_m + \sum_{v=1}^V I_v - I_{pl+vv} \right)^2 \rightarrow \min_{\delta I_m, \delta I_v, \delta \mathbf{r}_m},$$

который необходимо минимизировать по значениям координат филаментов, токов, протекающих в них, а также токов в элементах вакуумной камеры, т.к. при произвольном разбиении камеры на кольцевые элементы, токи, протекающие в этих элементах, неизвестны. В функционале  $F$  величины  $c_i$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  – нормирующие коэффициенты,  $N=21$  – число магнитных петель,  $\Psi_i$  – измеренное значение потока  $i$ -ой магнитной петель,  $I_{pb}$ ,  $I_{pl+vv}$  – измеренные значения тока плазмы и тока плазмы в сумме с током по вакуумной камере. Все измеряемые величины зависят от времени и в эксперименте регистрируются с некоторым дискретным шагом, поэтому равновесие плазмы восстанавливается для какого-то выбранного момента времени, т.к. для каждого момента времени будет иметься свое восстановленное равновесие.

Для упрощения процедуры минимизации токи и функция Грина линеаризуются:

$$(8) \quad I_m = I_m^0 + \delta I_m, \quad I_v = I_v^0 + \delta I_v, \\ G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}) = G(\mathbf{r}_m^0, \mathbf{r}) + \left. \frac{\partial G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_m} \right|_{\mathbf{r}_m^0} \delta \mathbf{r}_m,$$

где  $I_m^0$ ,  $I_v^0$  – начальные значения токов в филаментах и элементах камеры, определяемые как соответствующий полный ток, деленный на количество элементов,  $\mathbf{r}_m^0$  – начальные положения филаментов. Минимизация функционала теперь проводится по отклонениям токов  $\delta I_m$  и  $\delta I_v$  и отклонениям координат  $\delta \mathbf{r}_m$ .

При использовании (8) формулу (7) при отбрасывании величин второго порядка малости можно привести к виду:

$$(9) \quad F = \|kx - p\|^2 \rightarrow \min_x,$$

где  $x = (\delta I_m, \delta I_v, \delta \mathbf{r}_m)^T$ ,  $k \in \mathbb{R}^{(N+2) \times (3M+L)}$ ,  $p \in \mathbb{R}^{(N+2)}$ .

Нормальное псевдорешение системы  $kx=p$  находится посредством сингулярного разложения [4]. Результат решения системы представлен на рис. 3 и 4.

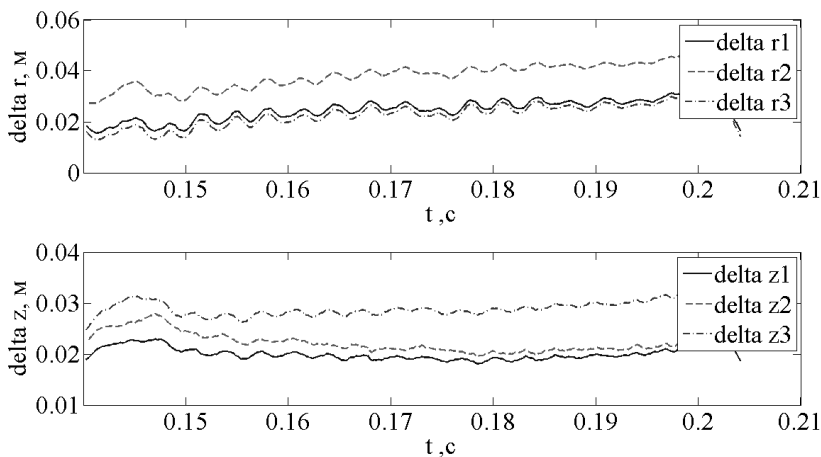


Рис. 3. Зависимость смещения филаментов от времени разряда

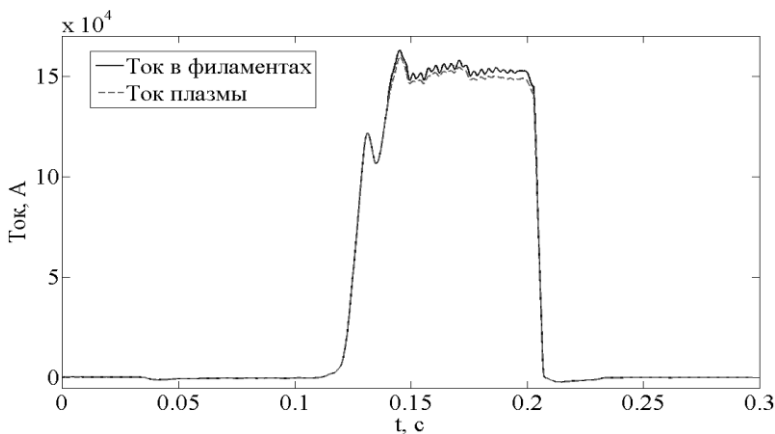


Рис. 4. Зависимость суммарного тока в филаментах и тока в плазме от времени разряда

В итоге алгоритм нахождения распределения полоидального потока состоит в том, чтобы по измерениям с датчиков тока-мака Глобус-М строить матрицы  $k$  и  $p$ , определять методом сингулярного разложения псевдорешение  $x$  и, используя формулы (6) и (8), находить распределение  $\Psi(\mathbf{r})$ .

На основании вышеизложенного алгоритма в среде MATLAB был разработан численный код, результаты работы которого представлены на рис. 5. Возвышение в центре соответствует полоидальному потоку, создаваемому филаментами.

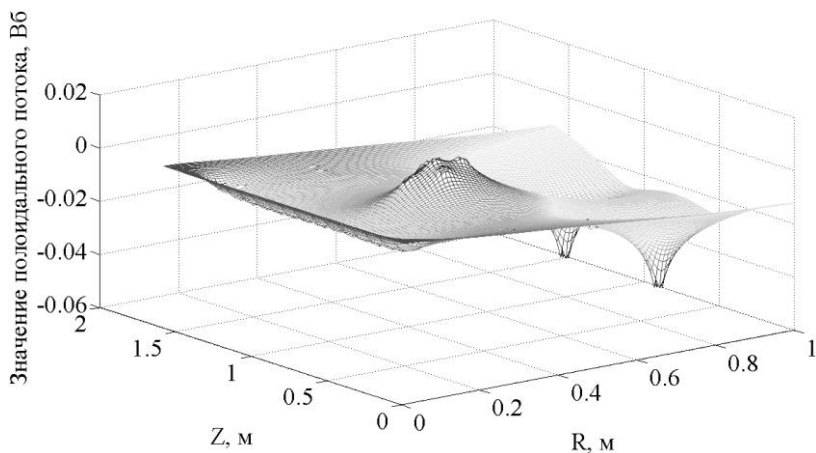


Рис. 5. Распределение полоидального потока при  $t=0,19c$

### 3. Определение границы плазмы

Известно [5], что распределение полоидального потока в пространстве  $(r, \varphi, z)$  представляет собой семейство торообразных вложенных поверхностей, каждая из которых является поверхностью равного давления, магнитного поля и полоидального потока. Поэтому граница плазмы в плоскости  $(r, z)$  определяется по полученному распределению полоидального магнитного потока как линия равного уровня с максимальным возможным значением потока, причем вся линия должна цели-

ком находиться внутри вакуумной камеры. Результаты определения границы представлены на рис. 6.

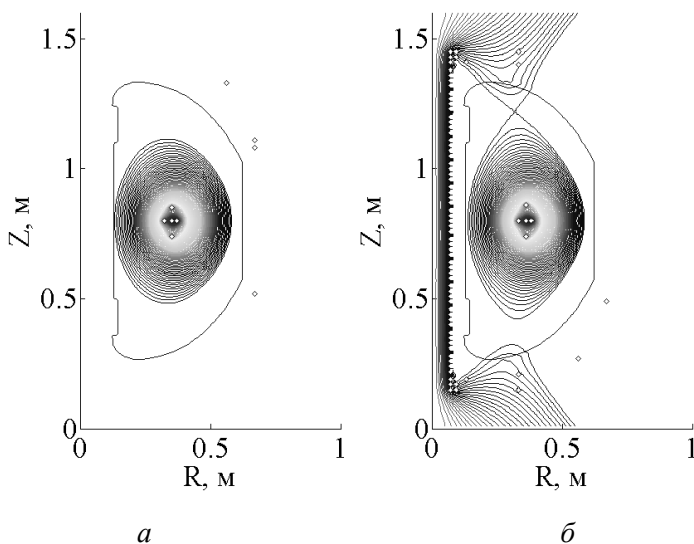


Рис. 6. Граница плазмы: а – для лимитерной фазы ( $t=0,147$ ); б – для диверторной фазы ( $t=0,179$ )

#### 4. Создание линейных моделей

По аналогии с методикой получения линейных моделей [8] были получены модели следующего вида:

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{(L+V) \times (L+V)}$ ,  $L$ ,  $V$  – число катушек и элементов вакуумной камеры,  $B \in \mathbb{R}^{(L+V) \times L}$ ,  $x \in \mathbb{R}^{(L+V) \times 1}$  – вектор-столбец, состоящий из приращений токов в катушках и элементах камеры,  $u \in \mathbb{R}^{L \times 1}$  – вектор-столбец, состоящий из приращений напряжений в управляющих катушках. Вектор выхода  $y \in \mathbb{R}^{(2+1+L+6+N) \times 1}$  включает в себя сдвиги плазмы по вертикали и горизонтали, приращение полного тока плазмы, приращения тока в  $L$  управляющих



катушках, смещения плазмы в 6-ти характерных точках границы, необходимых для управления формой плазмы, и  $N$  приращений потока на петлях ( $N=21$ ). В соответствии с этим, матрица  $S$  имеет размерность  $(2+1+L+6+N) \times (L+V)$ .

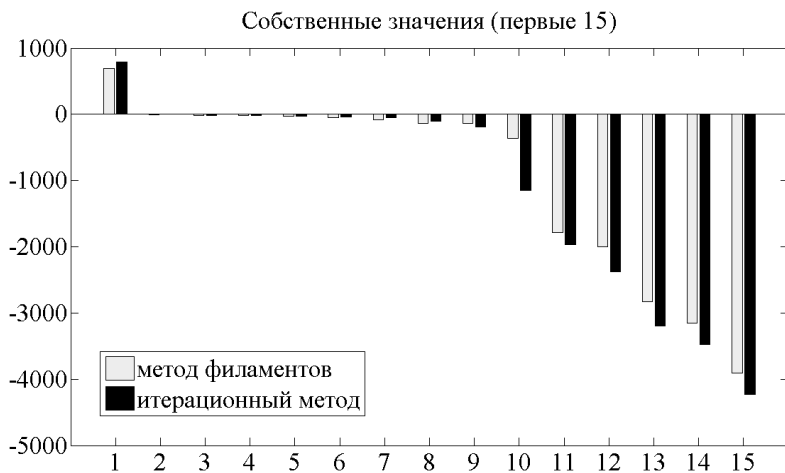


Рис. 7. Сравнение линейных моделей для  $t=0,18$ .

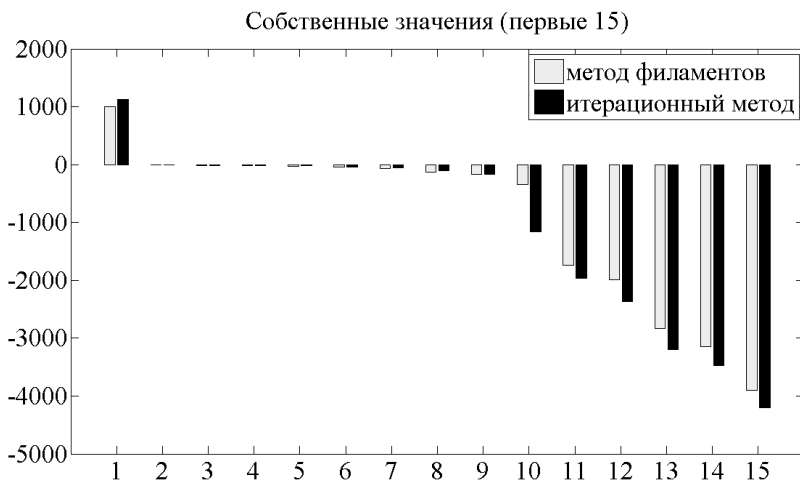


Рис. 8. Сравнение линейных моделей для  $t=0,185$ .

Сравнение линейных моделей, для получения которых использовался метод филаментов и итерационный метод [8], приведено на рис. 7 и 8. Из рисунков видно, что оба метода дают одно неустойчивое собственное значение матрицы  $A$  в (10), которое характерно для вытянутой по вертикали плазмы, и близкие собственные значения для различных моментов времени.

## 5. Заключение

Реализован в среде MATLAB численный код восстановления равновесия плазмы в токамаке по диагностике вне плазмы с помощью метода филаментов, который основан на аппроксимации распределенного тока плазмы суммой токов от бесконечно тонких кольцевых витков. Код решает задачу восстановления равновесия плазмы безитерационным способом, который сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений в каждый дискретный момент времени в течение плазменного разряда в токамаке. Этот подход должен позволить достигнуть высокого быстродействия восстановления распределения полоидального потока в токамаке.

Построены линеаризованные модели для управления формой, током и положением плазмы в токамаке на основании разработанного кода восстановления равновесия плазмы.

Полученные результаты планируется применить на токамаке Глобус-М, прежде всего, алгоритм восстановления равновесия плазмы в реальном времени. Также планируется провести верификацию полученных линейных моделей плазмы для установки Глобус-М по экспериментальным данным.

## Литература

1. ЗЕНКОВ С.М., МИТРИШКИН Ю.В., ФОКИНА Е.К. *Системы управления положением, током и формой плазмы в токамаке T-15* // Проблемы управления. – 2013. – № 4. – С. 2–10.

2. ЗОТОВ И., ПЕРСИЯНОВ И., СЫЧУГОВ Д. *Контроль границы плазмы в токамаке в режиме реального времени* // Вопросы атомной науки и техники серия Термоядерный синтез. — 2004. — № 4. — С. 44–54.
3. ЛУКАШ В.Э., ДОКУКА В.Н., ХАЙРУТДИНОВ Р.Р. *Программно-вычислительный комплекс ДИНА в системе MATLAB для решения задач управления плазмой токамака* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. — 2004. — Вып. 1. — С. 40–49.
4. ФОРСАЙТ ДЖ., МАЛЬКОЛЬМ М., МОУЛЕР К. *Машинные методы математических вычислений*. — М.:Мир, 1980. — 280 с.
5. ARIOLA M., PIRONTI A. *Magnetic Control of Tokamak Plasmas*. — Berlin: Springer, 2008. — 181 p
6. BEGHI A., CENEDESE A. *Advances in Real-Time Plasma Boundary Reconstruction* // IEEE Control Systems Magazine. — 2005. — Vol. 25, N 5 — P. 44–64.
7. MITRISHKIN Y.V., KARTSEV N.M., ZENKOV S.M. *Plasma vertical position, shape, and current control in T-15 tokamak*. Proc. of the IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management and Control", Saint Petersburg, Russia, June 19-21, 2013. — P. 1820–1825.
8. MITRISHKIN Y.V., KORENEV P.S., KARTSEV N.M., PATROV M.I. *Plasma shape control with a linear model for Globus-M tokamak*. 41st Conference on Plasma Physics, Berlin, Germany, June 23-27, 2014. Accepted for presentation and publication.
9. SWAIN D.W., NEILSON G.H. *An Efficient Technique for Magnetic Analysis of Noncircular, High-Beta Tokamak Equilibria* // Nuclear Fusion. — 1982. — Vol. 22. — P. 1015–1030
10. WALKER M.L. AND HUMPHREYS D.A. *Valid coordinate systems for linearized plasma shape response models in tokamaks* // Fusion Science and Technology. — 2006. — Vol. 50, Nov. — P. 473–489.
11. YUAN Q.P., XIAO B.J., LUO Z.P., ET AL. *Plasma current, position and shape feedback control on EAST* // IOP Publishing

and International Atomic Energy Agency, Nuclear Fusion. – 2013 – Vol. 53, 043009. – 10 p.

## **EQUILIBRIUM PLASMA RECOVERY BY MOVING FILAMENTS IN A TOKAMAK**

**Artyom Prokhorov**, M. V. Lomonosov Moscow State University,  
Faculty of Physics, Moscow, student  
(prohorov.artem@physics.msu.ru).

*Abstract: Recovery method of distribution of the poloidal magnetic flux inside the vacuum vessel of GLOBUS-M tokamak in the presence of plasma by real-time measurements from the magnetic loops and the Rogowski coils is presented. The method is based on approximation of the distributed current of plasma by the sum of currents from filament (infinitely thin ring rounds). Linear models to control the shape, the current and the position of the plasma in tokamak Globus-M are obtained.*

**Keywords:** tokamak, poloidal flux, Green's function, equilibrium plasma recovery, magnetic control.