УДК 519.71
ББК 32.965

ЦИКЛИЧЕСКОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ И МУЛЬТИАГЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ[1]

Парсегов С.Э.[2]
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Дается обзор по истории алгоритмов циклического преследования. Приводятся современные модификация алгоритма.

Ключевые слова: циклическое преследование, консенсус, управление формациями, мультиагентные системы.

Введение

В последнее время многие научные сообщества из разных областей знания активно занимаются изучением идейно похожих явлений. Эти явления объединяют такие понятия как коллективное движение (группы животных в биологии, мобильные роботы в робототехнике), синхронизация осцилляторов в физике, распределенное принятие решение экспертами в социологии, распределенные методы в оптимизации и др. К сожалению, систематики в изучении этих задач нет: каждое сообщество часто использует свою терминологию; методы исследования варьируются от строгих математических до метода проб и ошибок, простых наблюдений за явлением. Тем не менее, именно идейная близость перечисленных задач привела к появлению математической теории взаимосвязанных динамических систем – нового раздела теории автоматического управления с собственной терминологией и методами. Общими чертами таких систем является сетевая структура (граф) связывающая локальными связями между собой ди-

[1] *Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант №13-07-00990).*
[2] *Сергей Эрнестович Парсегов, к.ф.-м.н. (s.e.parsegov@gmail.com).*

намические системы (агенты). Очень часто такие системы называют мульти- или многоагентными. На данный момент получено множество результатов по мультиагентным системам разной сложности, исследованы разные модели агентов, типов связей и структур (см. работы [2], [1], [11]).

Как и любое научное направление, теория мультиагентных систем имеет собственную историю. Наиболее распространенное среди ученых мнение заключается в том, что теория мультиагентных систем и тесно связанная с ней задача консенсуса появились с целью изучения и воспроизведения поведения биологических групп в природе. Примеры такого поведения: синхронизированное движение птиц в стае, животных в стадах, рыб в косяках. Как показывают наблюдения, это позволяет им оптимально перемещаться при миграциях, охотиться и обороняться. При этом живые организмы действуют децентрализованно (каждый способен отслеживать движение только соседа/соседей по группе), т.е. на основе локальной информации о соседях, тем не менее достигается глобальная цель движения в виде определенной геометрической конфигурации.

Историческая справка в известных автору обзорах и монографиях по мультиагентным системам (см., например [14], [15]) ограничивается небольшим набором фактов наблюдения за явлениями самосинхронизации в природе и технике (упомянутое поведение биологических групп, опыты Гюйгенса и Релея) и упоминанием работы Рейнолдса о правилах поведения в движущейся биологической формации [16]. Появление математической теории обычно относят к работе ДеГроота [6]. При этом упускается из вида, что для разных частных случаев мультиагентного/консенсусного поведения строились математические модели, доказывались условия устойчивости (либо достижения консенсуса). Первым, по видимому, ученые затронули вопросы моделирования движения в задачах преследования [10].

В работе делается попытка изложить историю появления и развития задач циклического преследования, а также их связь с мультиагентными системами и задачей консенсуса. Дается обзор по геометрическим задачам о перестановки вершин многоугольников, которые описываются уравнениями циклического преследования в дискретном времени. Кроме того приводятся разные алгоритмы в непрерывном времени.

1. Циклическое преследование

Ранние упоминания о преследовании и его исходе относятся к периоду Древней Греции (парадокс Зенона Элейского), попытки математического описания явления – построение так называемых *кривых преследования* – появились на много позднее с появление дифференциального и интегрального исчисления. В 1732 француз Пьер Буге, специалист по морской навигации и основатель фотометрии, посвящает одну из своих работ решению задачи о кривых преследования. В его постановке задачи имелось два корабля (преследователь и преследуемый, ни о какой "мультиагентности" речь тогда не шла), причем преследуемый корабль двигался по прямой. Учитывая, что скорости кораблей постоянны и одинаковы, было необходимо рассчитать траекторию корабля-перехватчика. В дальнейшем исследованием более сложных постановок задачи П. Буге занимались П. Мопертюи,
А. Брока, Д. Эш и др. В 1877 году Эдуар Люка поставил задачу о траекториях движения трех собак, помещенных в вершины равнобедренного треугольника и начинающих одновременно преследовать друг друга с одинаковой скоростью. Так появился класс задач циклического преследования со множеством участников. Более подробно с историей таких задач можно ознакомиться в монографии П. Наина [10] и работах [4], [18].

1.1. Перестановка вершин многоугольника

Как уже указывалось выше, некоторые корни стратегии цик лического преследования берут начало в задачах элементарной геометрии, а именно в задачах перестановки вершин плоских многоугольников. В разделе дается описание некоторых алгоритмов такого рода. В 1878 году была опубликована работа Ж. Г. Дарбу [5], посвященная необычной геометрической задаче о перестановке вершин. Модифицированные задачи Дарбу, позволяющие получать иные геометрические конфигурации были рассмотрены в работах [7], [3]

Работа Дарбу является примером самого раннего математического описания стратегии циклического преследования, поэтому рассмотрим ее более подробно. В [5] предлагается алгоритм перестройки вершин многоугольника, к которым применяется одинаковое усредняющее правило. Пусть многоугольник имеет n вершин, все они пронумерованы. Алгоритм устроен следующим образом: на каждой итерации координата каждой вершины нового многоугольника определяются как среднее между координатами данной вершины и следующей по номеру вершины на предыдущей итерации. При этом для вершины n следующей по номеру является первая вершина многоугольника. Будем рассматривать эту задачу с использованием современного символизма.

В одномерном случае алгоритм Дарбу имеет вид:

$$x_i(t+1) = \frac{x_i(t) + x_{i+1}(t)}{2}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

В современных терминах можно сказать, что предложенный алгоритм изменения координат вершин соответствует динамике дискретной системы с координатами вершин в качестве состояний. В векторно-матричной форме динамика системы имеет вид

$$x(t+1) = Px(t), \tag{2}$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{3}$$

Как видно из (3), матрица P является циркулянтной. Собственные числа матрицы P имеют вид $\lambda_k(P) = 0.5(e^{2\pi jk/n} + 1)$, $k = 1, \ldots, n$ [8]. Легко заметить, что описанный алгоритм перестановки вершин является частным случаем задачи достижения консенсуса [11], [2], [1]. Матрица P является матрицей Перрона вида $P = I_n - \mathcal{L}$, где $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица, а $\mathcal{L}$ — лапласовская матрица графа системы (2).

Теорема 1 [5]**.** *Если рассмотреть бесконечную последовательность многоугольников, каждым из которых образован соединением середин сторон предыдущего. Многоугольники становятся меньше и меньше, стремятся стать подобными и полуправильными многоугольниками вписанными в эллипс.*

Это означает, что при $t \to \infty$ состояния системы стремятся к одному значению — *центроиду* (геометрическому центру) формации. Обобщение на двумерный случай строится просто: можно ввести вектор координат вершины

$$\xi_i = [x_i,\ y_i]^\top \tag{4}$$

и использовать произведение Кронекера для векторно-матричного описания движения всей системы (такой подход применим и в общем многомерном случае).

Замечание 1. Статья Дарбу и полученные в ней результаты занимают важное место в теории мультиагентных систем по многим причинам. Во-первых, в ней предложен и изучен частный случай задачи консенсуса задолго до появления этого термина, мультиагентных систем и т.п. Во-вторых, исследование предложенного им алгоритма проходило без использования векторно-матричного описания системы разностных уравнений, изучения спектра матрицы системы и применения теории устойчивости.

В работе [7] была предложена и изучена модификация алгоритма Дарбу, позволяющая получать новые геометрические образы и обладающая рядом интересных свойств. Как и в [5], рассматривается многоугольник на плоскости, у которого $x, y \in \mathbb{R}^n$ — векторы координат пронумерованных вершин. Первая вершина многоугольника "следует" за вершиной номер n. На каждой итерации алгоритма вершины многоугольника сначала усредняются по правилу, аналогичному [5]:

$$\hat{x}_i(t+1) = \frac{x_i(t) + x_{i+1}(t)}{2}, \quad \hat{y}_i(t+1) = \frac{y_i(t) + y_{i+1}(t)}{2},$$

после чего к координатам применяется преобразование

$$x(t+1) = \frac{\hat{x}(t+1)}{\|\hat{x}(t+1)\|}, \quad y(t+1) = \frac{\hat{y}(t+1)}{\|\hat{y}(t+1)\|}.$$

Таким образом, происходит нормализация векторов x и y.

Алгоритм в векторно-матричной форме:

$$x(t+1) = \frac{Px(t)}{\|Px(t)\|}, \quad y(t+1) = \frac{Py(t)}{\|Py(t)\|} \tag{5}$$

где матрица P имеет вид (3).

Теорема 2 [7]. *Пусть начальное расположение точек таково, что $\sum x_i(0) = \sum y_i(0) = 0$. Тогда при $t \to \infty$ они стремятся рас- положиться на эллипсе с центром в нуле и повернутом на $\pi/4$. Матрица S этого предельного эллипса вычисляется следующим образом. Введем векторы*

$$c = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \cos(2\pi/n) \\ \cos(4\pi/n) \\ \vdots \\ \cos(2\pi(n-1)/n) \end{bmatrix}; \quad s = \begin{bmatrix} \sin(0) \\ \sin(2\pi/n) \\ \sin(4\pi/n) \\ \vdots \\ \sin(2\pi(n-1)/n) \end{bmatrix}$$

и составим матрицу $A \in \mathbb{R}^2$ вида

$$A = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \frac{c^\top x(0)}{\sqrt{(c^\top x(0))^2 + (s^\top x(0))^2}} & \frac{s^\top x(0)}{\sqrt{(c^\top x(0))^2 + (s^\top x(0))^2}} \\ \frac{c^\top y(0)}{\sqrt{(c^\top y(0))^2 + (s^\top y(0))^2}} & \frac{s^\top y(0)}{\sqrt{(c^\top y(0))^2 + (s^\top y(0))^2}} \end{bmatrix}.$$

Предельный эллипс имеет вид

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi^\top S^{-1} \xi = 1\}$$

где $S = (AA^\top)^{1/2}$.

В [7] показано, что скорость сходимости совокупности к предельному эллипсу зависит от начального расположения точек (близости $x(0)$, $y(0)$ к некоторой двумерной плоскости) и от количества n точек, которое однозначно определяет матрицу P. Точнее, сходимость зависит от отношения 3-го и 2-го максимальных собственных значений матрицы P и тем медленнее, чем больше n.

Глубокий анализ и различные модификации алгоритма Ван Лоуна были проведены в [3].

Замечание 2. Следует отметить, что алгоритм Ван Лоуна не может быть назван в полной мере мультиагентным. В мультиагентных системах как правило используется локальная информация о соседях, в то время как операция нормировки требует знания глобальной информации о координатах всех агентов группы.

Описание алгоритмов, подобных рассмотренным, выше и их историю можно найти в работе А. Вагнера и Брукштейна (см. [18] и ссылки в ней).

1.2. Непрерывные алгоритмы

Перейдем к рассмотрению простейшего непрерывного алгоритма циклического преследования для агентов-интеграторов. Очевидно, что как и в дискретном случае, задача может быть сформулирована следующим образом: имеется группа из n пронумерованных агентов. В одномерном случае положение i-го агента определяется его координатой x_i. Закон движения для i-го агента заключается в преследовании $(i + 1)$-го соседа со скоростью равной (либо пропорциональной) расстоянию между i-м и $(i+1)$-м агентами. При этом агент n преследует первого агента в группе. Линейную непрерывную математическую модель циклического преследования с моделями агентов в виде интеграторов первого порядка можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i && (6)\\ u_i &= x_{i+1} - x_i, \quad i = 1, \dots, n. && (7) \end{aligned}$$

Векторно-матричное описание алгоритма имеет вид

$$\dot{x} = Cx, \tag{8}$$

где C — циркулянтная матрица вида

$$(9)\qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Собственные числа такой матрицы имеют вид $\lambda_k() = e^{2\pi jk/n} - 1$, $k = 1, \dots, n$.

Очевидно, что структура такой системы может быть представлена циклическим графом с соответствующей лапласовской матрицей $\mathcal{L} = -C$, а протокол управления обеспечивает сходимость агентов к стационарному центроиду формации.

1.3. Двумерный случай

Рассмотрим на плоскости n мобильных агентов, движение каждого агента описывается одиночным интегратором

$$(10)\qquad \dot{\xi}_i = u_i$$

В простейшей стратегии циклического преследования управление определяется следующим образом

$$(11)\qquad u_i = \xi_{i+1} - \xi_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Динамика всей системы определяется выражением

$$(12)\qquad \dot{\xi} = (C \otimes I_2)\xi,$$

где $\xi = \left[\xi_1^\top, \xi_2^\top, \dots, \xi_n^\top\right]^\top$ и C имеет вид (9)

Замечание 3. По существу последнее выражение означает, что координаты x и y каждого из агентов никак не связаны, т.е. (12) описывает движение двух независимых систем. В общем случае между координатами может существовать связь. Такая связь может описываться некоторой матрицей.

Обобщение приведенной выше стратегии на случай, когда каждый агент преследует следующего по номеру соседа вдоль линии визирования, повернутой на одинаковый для всех агентов угол смещения $\alpha \in [-\pi,\ \pi]$, было рассмотренох в работах [12], [13]. Приведем некоторые результаты.

Пусть управление на входе i-го агента будет определятся следующей формулой

$$(13)\qquad u_i = R(\alpha)(\xi_{i+1} - \xi_i),$$

где $R(\alpha)$ - матрица поворота

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Система уравнений, описывающая динамику всей системы из n агентов имеет вид

$$\dot{\xi} = (C \otimes R(\alpha))\xi. \tag{15}$$

Собственные числа матрицы C имеют следующий вид $\{e^{2\pi jk/n} - 1\}_{k=1}^{n}$. Из свойств произведения Кронекера следует, что $2n$ собственных чисел матрицы $C \otimes R(\alpha)$ имеют вид $\{(e^{2\pi jk/n} - 1)e^{\pm j\alpha}\}_{k=1}^{n}$.

Теорема 3 [13]. *$C \otimes R(\alpha)$ имеет ровно два нулевых собственных числа и*

1) *при $0 \leqslant |\alpha| < \frac{\pi}{n}$ все ненулевые собственные числа лежат в открытой левой полуплоскости*

2) *при $|\alpha| = \frac{\pi}{n}$ два ненулевых собственных числа лежат на мнимой оси, остальные ненулевые собственные числа лежат в открытой левой полуплоскости*

3) *при $\frac{\pi}{n} < |\alpha| < \frac{2\pi}{n}$ два ненулевых собственных числа лежат в открытой правой полуплоскости, остальные ненулевые собственные числа лежат в открытой левой полуплоскости*

В [12], [13] указывается, что матрица $C \otimes R(\alpha)$ является диагонализируемой при любом значении угла α. Также, изучая структуру собственных векторов циркулянтной матрицы легко показать [12], [13], что агенты начиная с любых начальных условий в $\mathbb{R}^2$, за исключением множества меры нуль, экспоненциально сходятся

1) при $0 \leqslant |\alpha| < \frac{\pi}{n}$ к единственной предельной точке, называемой их начальным центром масс

2) при $|\alpha| = \frac{\pi}{n}$ к круговой формации с равноотстоящими агентами

3) при $\frac{\pi}{n} < |\alpha| < \frac{2\pi}{n}$ к формации в виде логарифмической спирали с равноотстоящими агентами

Замечание 4. Приведенные выше результаты получены для агентов в $\mathbb{R}^2$ с динамикой в виде одиночных интеграторов, а положение центроида формации определяется начальным расположением агентов. Полученные результаты могут быть легко обобщены на случай движения в трехмерном пространстве.

Другим примером обобщения и развития задачи циклического преследования может послужить работа [17], в которой предлагается иерархическая схема циклического преследования.

2. Заключение

Задача циклического преследования имеет множество интересных особенностей и приложений. С одной стороны, она является лишь частным случаем задачи консенсуса. С другой стороны, ее отличают такие особенности, как специфическая структура графа (минимальное число связей между агентами, необходимых для обмена информацией), особый вид матриц системы, позволяющий аналитически вычислять собственные числа. Модели такого рода находят широкое применение в задачах управления мобильными роботами и т.п.

Литература

1. АГАЕВ Р. П., ЧЕБОТАРЕВ П. Ю. *Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (Обзор базовых результатов)*, Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 “Сетевые модели в управлении”, 2010. С. 470–505.
2. ЧЕБОТАРЕВ П. Ю., АГАЕВ Р. П. *Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов*, Автоматика и Телемеханика, 2009, №3, С. 136–151.
3. ЩЕРБАКОВ П. С. *Управление формациями: схема Ван Лоуна и другие алгоритмы*, Управление большими си-

стемами. Специальный выпуск 30.1 “Сетевые модели в управлении”, 2010. С. 681–696.

4. BRUCKSTEIN A. M., COHEN N. AND EFRAT A. *Ants, crickets and frogs in cyclic pursuit*, Center Intell. Syst. Technion-Israel Inst. Technol., Haifa, Israel, Tech. Rep. 9105, 1991.
5. DARBOUX J. G. *Sur un problème de géométrie élémentaire*, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques, 2(1): 298–304, 1878.
6. M. H. DaGroot, Reaching a Consensus, *Journal of the American Statistical Association*, Volume 69, Issue 345, pp. 118–121, 1974.
7. ELMACHTOUB A. N., VAN LOAN C. F. *From Random Polygon to Ellipse: An Eigenanalysis*, SIAM Review, 52(1): 151–170, 2010.
8. GRAY R. M. *Toeplitz and Circulant Matrices: A review*, Foundations and Trends in Communications and Information Theory, 2(3) 2006, pp. 155–239.
9. HARA S., KIM T. H. AND HORI Y. *Distributed Formation Control for Target-Enclosing Operations Based on a Cyclic Pursuit Strategy*, Proc. IFAC World Congress, 2008, pp. 6602–6607.
10. NAHIN P. J. *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion*, Princeton University Press, 2007
11. OLFATI-SABER R., FAX J. A., AND MURRAY R. M. *Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems*, Proceedings of the IEEE, 95(1): 215–233, 2007.
12. PAVONE M. AND FRAZZOLI E. *Decentralized policies for geometric pattern formation and path coverage*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 129(5): 633–643, 2007.
13. RAMIREZ J. L., PAVONE M., FRAZZOLI E. AND MILLER D. W. *Distributed Control of Spacecraft Formations via Cyclic Pursuit: Theory and Experiments*, AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 33(5): 1655–1669, 2010.

14. W. Ren and R. Beard, *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control*, London: Springer-Verlag, 2008.
15. W. Ren, Y. Cao, *Distributed Coordination of Multi-agent Networks: Emergent Problems, Models, and Issues*, London: Springer-Verlag, 2011.
16. C. Reynolds, Flocks, herds and schools: a distributed behavioral model, *Proceedings of ACM SIGGRAPH Conference*, 1987.
17. S. L. Smith, M. E. Broucke and B. A. Francis, A Hierarchical Cyclic Pursuit Scheme for Vehicle Networks, *Automatica*, 41(6): 1045–1053, 2005.
18. I. A. Wagner, A. M. Bruckstein, Row straightening via local interactions, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 16(3): 287–305, 1997.

CYCLIC PURSUIT AND MULTI-AGENT SYSTEMS

Sergey Parsegov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD (s.e.parsegov@gmail.com).

Abstract: A review of history and evolution of cyclic pursuit algorithms is given. Modern modifications of the algorithm are presented

Keywords: cyclic pursuit, consensus, formation control, multi-agent systems.