УДК 519
ББК 22.17

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ ОПЕРАЦИОННОГО ЯДРА ОРГАНИЗАЦИИ

Харитонов М.А. [1]

(Волгоградский государственныйуниверситет, Волгоград)

Построена модель оптимизации операционного ядра организации, которое состоит из базового технологического модуля и сети модулей вспомогательных производств. Производственная функция операционного ядра представлена в виде суперпозиции производственных функций Леонтьева, отвечающих каждому из модулей. Данная модель может служить основой синтеза обобщенных механизмов управления организационной системой на большом интервале времени.

Ключевые слова: организационная система, операционное ядро, оптимизация структуры, производственная функция.

Введение

Синтез моделей и механизмов управления адаптацией и развитием организационной системы (ОС) на протяжении ее жизненного цикла мотивирует расширение и обобщение термина «механизм управления», включая в него в дополнение к алгоритму принятия управленческого решения также весь комплекс «сил и средств» ОС: сопутствующих алгоритмов и процедур, структурных элементов. Действительно, реализация оптимальных механизмов управления влечет постоянные и переменные затраты, учет которых корректирует их практическую оптимальность. Корректный расчет платы за снижение внутренней и внешней неопределенности показывает обусловленность оптимальности

[1] *Михаил Алексеевич Харитонов, аспирант, (kharitonov.mihail@gmail.com).*

механизмов управления ОС ее структурой и механизмами функционирования. Таким образом, расширение понятие оптимальности механизмов управления является переходом к исследованию оптимальности всего организационного комплекса. Локально оптимальные комплексы Г. Минцберг называет «организационными конфигурациями» [6]. Структурные и организационные изменения ОС можно трактовать как переходы между локально оптимальными конфигурациями или между обобщенными механизмами управления ОС. Моделирование структурных изменений ОС требует построения критерия эффективности в структурнозависимой форме. В работах [1, 2] таким критерием является функция затрат, т.е. результативность системы управления считается не зависящей от ее структуры. Последнее предположение, очевидно, сильно упрощает исследуемую модель. Оценка вклада структуры ОС в конечный результат ее деятельности – величину производственной функции (ПФ) – требует построения последней в структурнозависимой форме. В настоящей работе представлено обобщение модели оптимального управления структурой операционного ядра ОС со структурнозависимой ПФ в виде суперпозиции элементарных ПФ Леонтьева рассмотренной в статьях [3, 4].

1. Оптимальный простой m-факторный преобразователь

Простым преобразователем (ПП) Рис. 1 назовем детерминированный автомат с m скалярными входами (трансформационными факторами производства) и одним скалярным выходом - производственной функции (ПФ) Леонтьева $F = k\min(f_1/a_1, \ldots, f_m/a_m)$, где f_i - величины аргументов - трансформационных факторов производства, $a_1, \ldots, a_n$ - технологические коэффициенты, k - нормирующий множитель [5]. Использование m - факторной модели позволяет учитывать векторную природу макроэкономических факторов производства.

Задача оптимизации ПП имеет вид

$$(1) \qquad F = S\min(\frac{f_1}{A^1}, \frac{f_2}{A^2}, \ldots, \frac{f_m}{A^m}) \to \max_{f_i}, S = \sum_{i=0}^{m} A_i$$

и очевидное решение:

$$(2) \qquad f_1 = \frac{RA^1}{S},\, f_2 = \frac{RA^2}{S}, \ldots, f_m = \frac{RA^m}{S},\, F = \sum_{i=0}^{m} f_i = R.$$

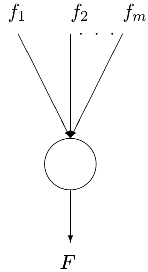

Рис. 1. Простой преобразователь

2. Оптимизация структуры m-факторного специализированного преобразователя

Свойство эластичности по аргументам (входам) появляется в специализированном преобразователе (СП) - последовательности нескольких вспомогательных ПП, производящих при необходимости недостающую часть одного из факторов производства для достижения максимальной эффективности (последнего в цепочке) базового ПП, отвечающего основному производству ОС. Эластичность СП по входам растет вместе с длиной цепочки до достижения максимума при некоторой ее (конечной) длине. Рассмотрим СП с входами $N, R^1N, R^2N, \ldots, R^{m-1}N$, ($R^1N, R^2N, \ldots, R_{m-1}N$ соответственно части факторов $R^1, R^2, \ldots, R^{m-1}$, участвующие в производстве недостающей части фактора N) и возможностью производства части фактора N в цепочке из n ПП (рис. 2). Величину n в дальнейшем будем называть структурой СП [3].

ПФ этого СП задается системой уравнений (3)-(5):

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} N_i^0 + N_F^0 = N, \sum_{i=1}^{n} R_i^1 N + R_F^1 N = R^1 N, \ldots,$$

$$\ldots, \sum_{i=1}^{n} R_i^{m-1} N + R_F^{m-1} N = R^{m-1} N$$

$$(4)\quad f_1 = S_{a_1^i} \min(\frac{N_1^0}{a_1^0}, \frac{R_1^1 N}{a_1^1}, \ldots, \frac{R_1^{m-1} N}{a_1^{m-1}}), S_{a_1^i} = \sum_{i=0}^{m-1} a_1^i,$$

$$f_2 = S_{a_2^i} \min(\frac{f_1 + N_2^0}{a_1^0}, \frac{R_2^1 N}{a_2^1}, \ldots, \frac{R_2^{m-1} N}{a_2^{m-1}}),$$

$$f_k = S_{a_k^i} \min(\frac{1}{a_k^0}(f_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2} N_k^i + N_k^0), \frac{R_k^1 N}{a_k^1}, \ldots, \frac{R_k^{m-1} N}{a_k^{m-1}}), k = \overline{3, n}$$

$$(5)\quad F_N = S_{A^i} \min(\frac{1}{A^0}(f_n + \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i + N_F^0), \frac{R_F^1 N}{A^1}, \ldots, \frac{R_F^{m-1} N}{A^{m-1}})$$

Из переменных системы (3)-(5) составим вектор факторных потоков СП

(6)

$$\varphi_N = (N_1^0, N_2^0, \ldots, N_n^0, R_1^1 N, R_1^2 N, \ldots, R_1^{m-1} N, f_1, N_3^1, \ldots, N_n^1, R_2^1 N, R_2^2 N, \ldots, R_2^{m-1} N, f_2, N_4^2, \ldots, N_n^2, R_3^1 N, R_3^2 N, \ldots, R_3^{m-1} N, \ldots, f_n, R_n^1 N, R_n^2 N, \ldots, R_n^{m-1} N, N_F^n, N_F^0, R_F^1 N, R_F^2 N, \ldots, R_F^{m-1} N, \varphi_P).$$

Задача оптимизации ПФ СП (3)-(5) с переменной структурой при фиксированных значениях N, $R^1 N$, $R^2 N, \ldots, R^{m-1} N$ имеет вид:

(7)

$$F_N = S_{A^i} \min(\frac{1}{A^0}(f_n + \sum_{i=1}^{n-2} N_n^i + N_F^0), \frac{R_F^1 N}{A^1}, \ldots, \frac{R_F^{m-1} N}{A^{m-1}}) \to \max_{\varphi_N, n}$$

Из условий (3)-(5) видно, что решение оптимизационной задачи (7) зависит от множества различных параметров, к тому же данная задача сводится к задаче линейного большой размерности, что исключает ее аналитическое исследование (случай $m = 3$

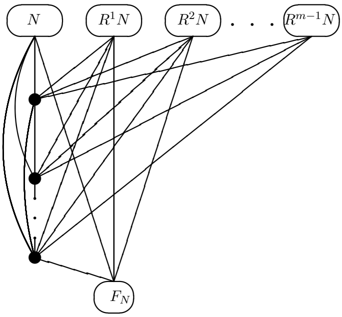

Рис. 2. m-факторный специализированный преобразователь с производством части фактора N состоящий из n простых преобразователей

рассмотрен в статье [3]. Для применения результатов решения (7) в других задачах управления в ОС, например, для решения задач стимулирования, а так же для построения теоретико-игровых моделей, использующих задачу управления структурными изменениями в ОС, необходимо сужение множества параметров, влияющих на решение (7). С связи с этим нужно получить теоретические оценки значения (7) хотя бы в частных случаях. Далее сформулируем и докажем некоторые утверждения относительно возможной оценки значений ПФ (7) для различных значений параметров, в частности, влияние технологических коэффициентов, межфакторных диспропорций и сложности структуры СП.

Утверждение 1. *Для m-факторного СП с технологическими коэффициентами $a_i^j = 1$, $A^j = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m-1$, и пропорциями между входами*

(8) $$N : R^1 : R^2N : \ldots : R^{m-1}N = x : 1 : 1 : \ldots : 1, \quad x < 1,$$

решение оптимизационной задачи (7) имеет вид:

(9) $$F_m(n,x) = \begin{cases} m^{n+1}x, n \leqslant \lfloor \frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} \rfloor \\ x + m - 1, n > \lfloor \frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} \rfloor \end{cases};$$

Доказательство. Докажем сначала равенство

(10) $$F_m(x,n) = m^{n+1}x,\ n \leqslant \lfloor \frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} \rfloor.$$

Доказательство (10) проведем, используя метод математической индукции по m, для каждого значения m проведем индукцию по переменной n, отвечающей за структуру СП.

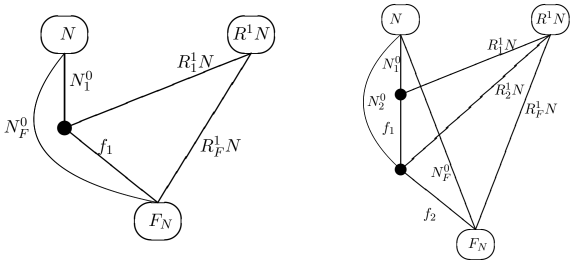

Рис. 3. 2-факторный сложный преобразователь с производством части фактора N состоящий из 1-го простого преобразователя и из 2-х простых преобразователей.

Для $m = 2$ уравнение (10) имеет вид:

$$F_2(x, n) = 2^{n+1}x. \tag{11}$$

Докажем (11) методом математической индукции по n.

Проверим справедливость (11) для $n = 1$. СП (см. Рис. 3) для $n = 1$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$N_1^0 + N_F^0 = x, R_1^1N + R_F^1N = 1$$
$$f_1 = 2\min(N_1^0, R_1^1N), F_2(1, x) = 2\min(f_1 + N_F^0, R_F^1N).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (12)\quad F_2(1, x) &= 2\min(f_1 + N_F^0, R_F^1N) = \\ &= 2\min(f_1+N_F^0, R_F^1N) = 2(f_1+N_F^0) = 2(2\min(N_1^0, R_1^1N)+N_F^0) = \\ &= 2(2N_1^0 + N_F^0) = 2^2(x - N_F^0) + 2N_F^0 \leqslant 2^2x. \end{aligned}$$

Все слагаемые в (12), кроме 2^2x, равны нулю, так как они полностью состоят из факторных потоков, которые осуществляют межслойный перенос части фактора N, нарушающего пропорции в $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1}$, но нарушение пропорций происходит только в случае, когда фактор N в избытке, то есть $x > 1$, а по условию $x < 1$. Поэтому в (12) и далее неравенство превращается в равенство.

Доказано, что (11) справедлива для $n = k + 1$, следовательно (11) верна для любого натурального числа n. Равенство (11) справедливо для $n = 1$. Проверим справедливость (11) для $n = 2$. СП (см. Рис. 3) для $n = 2$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$N_1^0 + N_2^0 + N_F^0 = x, R_1^1 N + R_2^1 + R_F^1 N = 1$$
$$f_1 = 2\min(N_1^0, R_1^1 N), f_2 = 2\min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N),$$
$$F = 2\min(f_2 + N_F^0, R_F^1 N)$$

Тогда имеем

$$F_2(2, x) = 2\min(f_2 + N_F^0, R_F^1 N) =$$
$$= 2(f_2 + N_F^0) = 2(2\min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N) + N_F^0) =$$
$$= 2(2(f_1 + N_2^0) + N_F^0) = 2(2(2\min(N_1^0, R_1^1 N) + N_2^0) + N_F^0) =$$
$$= 2(2(2N_1^0 + N_2^0) + N_F^0) = 2^3(x - N_2^0 - N_F^0) + 2^2 N_2^0 + 2N_F^0 =$$
$$= 2^3 x - (2^3 - 2^2)N_2^0 - (2^3 - 2)N_F^0 = 2^3 x$$

Предположим, что (11) справедлива для $n = k$, докажем ее справедливость для $n = k + 1$. СП для $n = k + 1$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$\sum_{i=1}^{k+1} N_i^0 + N_F^0 = N, \sum_{i=1}^{k+1} R_i^1 N + R_F^1 N = R^1 N \tag{13}$$
$$f_1 = 2\min(N_1^0, R_1^1 N), f_2 = 2\min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N),$$
$$f_3 = 2\min(f_2 + N_3^1 + N_3^0, R_3^1 N),$$
$$f_{k+1} = 2\min(f_k + \sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0, R_{k+1}^1 N),$$
$$F = 2\min(f_{k+1} + N_F^0, R_F^1 N)$$

Тогда имеем

$$F_2(k+1,x) = 2\min(f_{k+1} + N_F^0, R_F^1 N) = 2(f_{k+1} + N_F^0) =$$
$$= 2(2\min(f_k + \sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0, R_{k+1}^1 N) + N_F^0) =$$
$$= 2(2(f_k + \sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0) + N_F^0) = \ldots$$
$$\ldots = 2^k f_2 + 2^k(N_3^1 + N_3^0) + 2^{k-1}(\sum_{i=1}^{2} N_3^i + N_4^0) + \ldots$$
$$\ldots + 2^2(\sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0) + 2N_F^0 = 2^{k+2}N_1^0 + 2^{k+1}N_2^0 +$$
$$+\sum_{j=2}^{k} 2^j(\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_k^0 + 1) + 2N_F^0 = 2^{k+2}x - 2^{k+2}\sum_{i=2}^{k+1} N_{k+1}^i -$$
$$-(2^{k+2}-2)N_F^0 + 2^{k+2}N_2^0 + \sum_{j=2}^{k} 2^j(\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_{k+1}^0) = 2^{k+2}x.$$

Доказано, что (11) справедлива для $n = k+1$, следовательно (11) верна для любого натурального числа n.

Таким образом (10) доказана для $m = 2$.

Для $m = 3$ уравнение (10) имеет вид:

(14) $$F_3(x,n) = 3^{n+1}x.$$

Докажем его методом математической индукции по n.

Проверим справедливость (14) для $n = 1$. СП (см. Рис. 4) для $n = 1$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$N_1^0 + N_F^0 = x, R_1^1 N + R_F^1 = 1, R_1^2 N + R_F^2 N = 1,$$
$$f_1 = 3\min(N_1^0, R_1^1 N, R_1^2 N), F = 3\min(f_1 + N_F^0, R_F^1 N, R_F^2 N)$$

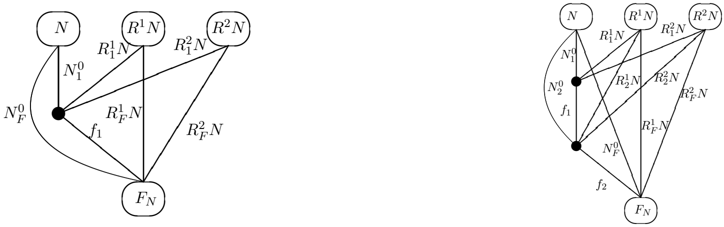

Рис. 4. 3-факторный сложный преобразователь с производством части фактора N состоящий из 1-го простого преобразователя и из 2-х простых преобразователей.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} F_3(1,x) &= 3\min(f_1+N_F^0, R_F^1N, R_F^2N) = 3(f_1+N_F^0) = \\ &= 3(f_1+N_F^0) = 3(3\min(N_1^0, R_1^1N, R_1^2N) + N_F^0) = \\ &= 3(3N_1^0+N_F^0) = 3^2N_1^0 + 3N_F^0 = 3^2(x-N_F^0) + 3N_F^0 = \\ &= 3^2x - (3^2-3)N_F^0 = 3^2x \end{aligned}$$

Равенство (14) справедливо $n = 1$. Проверим справедливость (14) для $n = 2$. СП (см. Рис. 4) для $n = 2$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$N_1^0 + N_2^0 + N_F^0 = N, R_1^1N + R_2^1 + R_F^1N = R^1N,$$
$$R_1^2N + R_2^2N + R_F^1N = R^2N, f_1 = 3\min(N_1^0, R_1^1N, R_1^2N),$$
$$f_2 = 3\min(f_1+N_2^0, R_2^1N, R_2^2N), F = 3\min(f_2+N_F^0, R_F^1N, R_F^3N)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} F_3(2,x) &= 3\min(f_2+N_F^0, R_F^1N, R_F^2N) = 3(f_2+N_F^0) = \\ &= 3(3\min(f_1+N_2^0, R_2^1N, R_2^2N) + N_F^0) = \\ &= 3(3(3\min(N_1^0, R_1^1N, R_1^2N) + N_2^0) + N_F^0) = \\ &= 3(3(3N_1^0+N_2^0)+N_F^0) = 3^3(x-N_2^0-N_F^0) + 3^2N_2^0 + 3N_F^0 = \\ &= 3^3x - (3^3-3^2)N_2^0 - (3^3-3)N_F^0 = 3^3x \end{aligned}$$

Равенство (14) справедливо для $n = 2$.

Предположим, что (10) справедлива для $n = k$, докажем ее справедливость для $n = k + 1$. СП для $n = k + 1$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$\sum_{i=1}^{k+1} N_i^0 + N_F^0 = N, \sum_{i=1}^{k+1} R_i^1 N + R_F^1 N = R^1 N,$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} R_i^2 N + R_F^2 N = R^2 N, f_1 = 3\min(N_1^0, R_1^1 N, R_1^2 N),$$

$$f_2 = 3\min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N, R_2^2 N),$$

$$f_3 = 3\min(f_2 + N_3^1 + N_3^0, R_3^1 N, R_3^2 N)$$

$$f_{k+1} = 3\min(f_k + \sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0, R_{k+1}^1 N, R_{k+1}^2 N),$$

$$F = 3\min(f_{k+1} + N_F^0, R_F^1 N, R_F^2 N)$$

Тогда имеем

$$F_3(k+1, x) = 3\min(f_{k+1} + N_F^0, R_F^1 N, R_F^2) = 3(f_{k+1} + N_F^0) =$$

$$= 3(3\min(f_k + \sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0, R_{k+1}^1 N, R_{k+1}^2 N) + N_F^0) = \ldots$$

$$\ldots = 3^k f_2 + 3^k(N_3^1 + N_3^0) + 3^{k-1}(\sum_{i=1}^{2} N_3^i + N_4^0) + \ldots$$

$$\ldots + 3^2(\sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0) + 3N_F^0 = 3^k(3\min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N, R_2^2 N)) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} 3^j (\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_k^0 + 1) + 3N_F^0 =$$

$$= 3^{k+1}(f_1 + N_2^0) + \sum_{j=2}^{k} 3^j (\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_k^0 + 1) + 3N_F^0 =$$

$$= 3^{k+2}(x - \sum_{i=2}^{k+1} N_{k+1}^i - N_F^0) + 3^{k+2} N_2^0 +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} 3^j (\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_k^0 + 1) + 3N_F^0 = 3^{k+2}x - 3^{k+2} \sum_{i=2}^{k+1} N_{k+1}^i -$$

$$- 3^{k+2} N_F^0 + 3^{k+2} N_2^0 + \sum_{j=2}^{k} 3^j (\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_{k+1}^0) + 3N_F^0 = 3^{k+2}x$$

Доказано, что (14) справедлива для $n = k + 1$, следовательно (14) верна для любого натурального числа n.

Таким образом (10) доказана для $m = 3$.

Предположим, что (10) справедлива для $m = p$, докажем ее справедливость для $m = p + 1$. Для $m = p + 1$ уравнение (10) имеет вид:

(15) $$F_{p+1}(x, n) = (p + 1)^{n+1} x.$$

Проверим справедливость (15) для $n = 1$. СП для $n = 1$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$N_1^0 + N_F^0 = x, R_1^1 N + R_F^1 N = 1, \ldots, R_1^p N + R_F^p N = 1$$
$$f_1 = (p + 1) \min(N_1^0, R_1^1 N, \ldots, R_1^p N),$$
$$F = (p + 1) \min(f_1 + N_F^0, R_F^1 N, \ldots, R_F^p N)$$

Тогда имеем

$$F_{p+1}(1, x) = (p + 1) \min(f_1 + N_F^0, R_F^1 N, \ldots, R_F^p N) =$$
$$= 2(f_1 + N_F^0) = (p + 1)(f_1 + N_F^0) =$$
$$= (p + 1)((p + 1) \min(N_1^0, R_1^1 N, \ldots, R_1^p N) + N_F^0) =$$
$$= (p + 1)((p + 1)N_1^0 + N_F^0) = (p + 1)^2 N_1^0 + (p + 1)N_F^0 =$$
$$= (p+1)^2(x - N_F^0) + (p+1)N_F^0 = (p+1)^2 x - ((p+1)^2 - (p+1))N_F^0 =$$
$$= (p + 1)^2 x$$

Равенство (15) справедливо для $n = 1$.

Проверим справедливость (15) для $n = 2$. СП для $n = 2$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$N_1^0 + N_2^0 + N_F^0 = N, R_1^1 N + R_2^1 N + R_F^1 N = R^1 N, \dots$$
$$R_p^1 N + R_p^1 N + R_F^1 N = R^p N, f_1 = (p+1)\min(N_1^0, R_1^1 N, \dots, R_1^p N),$$
$$f_2 = (p+1)\min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N, \dots, R_2^p N),$$
$$F = (p+1)\min(f_2 + N_F^0, R_F^1 N, \dots, R_F^p N)$$

Тогда имеем

$$F_{p+1}(2,x) = (p+1)\min(f_2 + N_F^0, R_F^1 N) = (p+1)(f_2 + N_F^0) =$$
$$= (p+1)((p+1)\min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N, \dots, R_2^p N) + N_F^0) =$$
$$= (p+1)((p+1)(f_1 + N_2^0) + N_F^0) =$$
$$= (p+1)((p+1)((p+1)\min(N_1^0, R_1^1 N, \dots, R_1^p N) + N_2^0) + N_F^0) =$$
$$= (p+1)^3 N_1^0 + (p+1)^2 N_2^0 + (p+1) N_F^0 =$$
$$= (p+1)^3 (x - N_2^0 - N_F^0) + (p+1)^2 N_2^0 + (p+1) N_F^0 =$$
$$= (p+1)^3 x - ((p+1)^3 - (p+1)^2) N_2^0 - ((p+1)^3 - (p+1)) N_F^0 =$$
$$= (p+1)^3 x$$

Равенство (15) справедливо для $n = 2$.

Предположим, что (15) справедлива для $n = k$, докажем ее справедливость для $n = k + 1$. СП для $n = k + 1$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$\sum_{i=1}^{k+1} N_i^0 + N_F^0 = N, \sum_{i=1}^{k+1} R_i^1 N + R_F^1 N = R^1 N, \dots$$
$$\dots, \sum_{i=1}^{k+1} R_i^p N + R_F^p N = R^p N, f_1 = (p+1)\min(N_1^0, R_1^1 N, \dots, R_1^p N),$$

$$f_2 = (p+1)\min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N, \ldots, R_2^p N),$$
$$f_3 = (p+1)\min(f_2 + N_3^1 + N_3^0, R_3^1 N, \ldots, R_3^p N),$$
$$f_{k+1} = (p+1)\min(f_k + \sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0, R_{k+1}^1 N, \ldots, R_{k+1}^p N),$$
$$F = (p+1)\min(f_{k+1} + N_F^0, R_F^1 N, \ldots, R_F^p N)$$

Пусть $\xi = p + 1$, тогда имеем

$$F_{p+1}(k+1, x) =$$
$$= \xi \min(f_{k+1} + N_F^0, R_F^1 N, \ldots, R_F^p N) = \xi(f_{k+1} + N_F^0) =$$
$$= \xi(\xi \min(f_k + \sum_{i=1}^{k-1} N_{k+1}^i + N_{k+1}^0, R_{k+1}^1 N, \ldots, R_{k+1}^p N) + N_F^0) = \ldots$$
$$\ldots = \xi^{k+1}(f_1 + N_2^0) + \sum_{j=2}^{k} \xi^j (\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_k^0 + 1) + \xi N_F^0 =$$
$$= \xi^{k+2} N_1^0 + \xi^{k+1} N_2^0 + \sum_{j=2}^{k} \xi^j (\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_k^0 + 1) + \xi N_F^0 =$$
$$= \xi^{k+2} x - \xi^{k+2} \sum_{i=2}^{k+1} N_{k+1}^i - \xi^{k+2} N_F^0 + \xi^{k+2} N_2^0 +$$
$$+ \sum_{j=2}^{k} \xi^j (\sum_{i=1}^{k-j+1} N_{k-j+3}^i + N_k^0 + 1) + \xi N_F^0 = \xi^{k+2} x$$

Формула (15) верна для $n = k + 1$. Таким образом, согласно методу математической индукции, равенство (10) справедливо для любых натуральных n и $m \geqslant 2$. Первая часть утверждения доказана.

Перейдем к доказательству второй части утверждения, а именно, покажем справедливость второго уравнения (9). Оно (9) показывает, что оценка (10) верна, только до достижения F максимального значения, которое равно сумме ее аргументов, так как в случае (8) максимальное значение F определяется соотношением:

$$F^* = m - 1 + x$$

откуда, можно найти значение n, при котором достигается этот максимум, решив показательное уравнение:

$$m^{n+1}x = m - 1 + x.$$

Его решение — $n = \frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} - 1$, но так как n — целое (по смыслу задачи параметр n характеризует сложность структуры СП, то есть число ПП, осуществляющих вспомогательное производство), то оптимальным значением n будет минимальное целое число, превосходящее $\frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} - 1$, следовательно

(16) $$n^* = \lfloor \frac{\ln \frac{m-1+x}{x}}{\ln m} \rfloor.$$

Вторая часть утверждения доказана.

Утверждение 2. *Для m-факторного СП с технологическими коэффициентами $a_i^j = 1$, $A^j = 1$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m-1$, и пропорциями между входами*

(17) $$N : R^1 : R^2N : \ldots : R^{m-1}N = 1 : x : x : \ldots : x, \quad x < 1,$$

решение оптимизационной задачи (7) имеет вид:

(18) $$F_m(x, n) = mx.$$

Доказательство. По условию (17) имеются излишки фактора N, поэтому все ПП, отвечающие за вспомогательное производство, то есть ПП, осуществляющие производство недостающей части фактора N, кроме ПП, отвечающего базовой технологии равны нулю:

$$f_1 = m \min(N_1^0, R_1^1 N, \ldots, R_1^p N) = 0,$$

$$f_2 = m \min(f_1 + N_2^0, R_2^1 N, \ldots, R_2^p N) = 0,$$

$$f_k = m \min(f_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2} N_k^i + N_k^0, R_k^1 N, \ldots, R_k^p N) = 0, k = \overline{3, n}.$$

Так как $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_k = 0$, то $F_m(x, n)$ имеет вид:

$$F_m(x, n) = m \min(N_F^0, R_F^1 N, \dots, R_F^p N).$$

Учитывая (17), получаем

$$F_m(x, n) = m \min(1, x, \dots, x) = mx.$$

Пример 1. При единичных технологических коэффициентах доказана оценка:

$$F_m(n, x) = m^{n+1} x.$$

СП (см. Рис. 4) при $m = 3$ и $n = 1$ задается следующими балансовыми соотношениями

$$N_1^0 + N_F^0 = N, R_1^1 N + R_F^1 N = R^1 N, R_1^2 N + R_F^2 N = R^2 N \tag{19}$$

$$f_1 = (a + b + c) \min(\frac{N_1^0}{a}, \frac{R_1^1 N}{b}, \frac{R_1^2 N}{c}),$$

$$F = (A + B + C) \min(\frac{f_1 + N_F^0}{A}, \frac{R_F^1 N}{B}, \frac{R_F^2 N}{C})$$

Пусть $N : R^1 N : R^2 N = 0.1 : 1 : 1$, $a = 1, b = 10, c = 10$, $A = B = C = 1$, тогда

$$f_1 = (1 + 10 + 10) \min(\frac{0.03}{1}, \frac{0.3}{10}, \frac{0.3}{10}) = 21 \cdot 0.03 = 0.63 \tag{20}$$

$$F_3(1, 0.1) = 3 \min(0.63 + 0.07, 0.7, 0.7) = 3 \min(0.7, 0.7, 0.7) =$$
$$= 2.1 > 3^2 \cdot 0.1 = 0.9$$

Таким образом, для случая (20) оценка (14) неверна.

Пусть $N : R^1 N : R^2 N = 0.1 : 1 : 1$, $a = 2, b = 1, c = 1$, $A = B = C = 1$, тогда

$$f_1 = (2 + 1 + 1) \min(\frac{0.1}{1}, \frac{0.05}{1}, \frac{0.05}{1}) = 4 \cdot 0.05 = 0.2 \tag{21}$$

$$F_3(1, 0.1) = 3 \min(0.2 + 0.0, 0.2, 0.2) = 3 \min(0.2, 0.2, 0.2) =$$
$$= 0.6 < 3^2 \cdot 0.1 = 0.9$$

Таким образом, для случая (21) оценка (14) верна.

Следовательно, при одних и тех же пропорциях между факторами производства технологические коэффициенты можно подобрать таким образом, что оценка (14) может как выполняться, так и не выполняться. •

3. Оптимизация структуры операционного ядра ОС

Структура операционного ядра ОС (ОЯ) — совокупность СП, обеспечивающих возможность вспомогательного производства каждого из факторов — представлена на Рис. 5

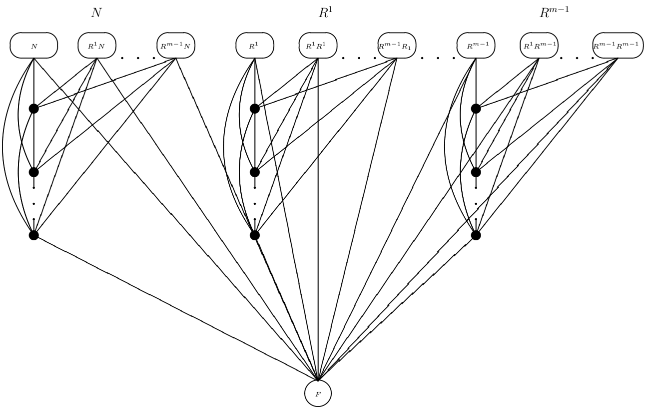

Рис. 5. Структура операционного ядра ОС.

ПФ СП на рис. 5 состоит из m СП (см. рис. 2), каждый из которых соответственно производит недостающие части факторов $N, R^1, \ldots, R^{m-1}$. На рис. 5 обозначено: $R^1N, \ldots, R^{m-1}N$ — соответственно части факторов $R^1, \ldots, R^{m-1}$, участвующие в производстве недостающей части фактора N; $R^1R^1, \ldots, R^{m-1}R^1$ — соответственно части факторов $R^1, \ldots, R^{m-1}$, участвующие в производстве недостающей части фактора R_1; $R^1R^{m-1}, \ldots, R^{m-1}R^{m-1}$ — соответственно части факторов $R^1, \ldots, R^{m-1}$, участвующие в производстве недостающей части фактора R^{m-1}. ПФ этого ОЯ имеет вид:

$$F = \sum_{i=0}^{m-1} A_i \min\left(\frac{F_N}{A_0}, \frac{F_{R^1}}{A_1}, \ldots, \frac{F_{R^{m-1}}}{A_{m-1}}\right) \to \max_{\Phi, \mathbf{n}}, \qquad (22)$$

где $F_N, F_{R^1}, \ldots, F_{R^{m-1}}$ — значения соответствующего СП (определяются аналогично (7)). $\Phi = (\varphi_N, \varphi_{R^1}, \ldots, \varphi_{R^{m-1}}, \varphi_P)$ — вектор факторных потоков структуры ОЯ, а $\varphi_N, \varphi_{R^1}, \ldots, \varphi_{R^{m-1}}$

— вектора факторных потоков соответствующего СП (определяются аналогично (6)), $\mathbf{n} = (n_N, n_{R^1}, \ldots, n_{R^{m-1}})$, где $n_N, n_{R^1}, \ldots, n_{R^{m-1}}$ — число слоев каждого СП $(N, R^1, \ldots, R^{m-1})$.

Утверждение 3. *Для ОЯ ОС с единичными технологическими коэффициентами и пропорциями между входами*

$$N : R_1N : R_2N : \ldots : R_{m-1}N = x_0 : 1 : 1 : \ldots : 1,$$
$$R_1 : R_1R_1 : R_2R_1 : \ldots : R_{m-1}R_1 = x_1 : 1 : 1 : \ldots : 1,$$
$$\ldots$$
$$R_{m-1} : R_1R_{m-1} : R_2R_{m-1} : \ldots : R_{m-1}R_{m-1} = x_{m-1} : 1 : 1 : \ldots : 1,$$
$$\max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} x_j < 1, n = n_N = n_{R_1} = \ldots = n_{R_{m-1}},$$

решение оптимизационной задачи (22) имеет вид:
(23)
$$F_m(n, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} m^{n+2} x_{min}, n \leqslant \lfloor \frac{\ln \frac{m x_{min} + m(m-1)}{x_{min}}}{\ln m} \rfloor - 1 \\ m x_{min} + m(m-1), n > \lfloor \frac{\ln \frac{m x_{min} + m(m-1)}{x_{min}}}{\ln m} \rfloor - 1 \end{cases},$$
где $x_{min} = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant m-1} x_j$, $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})$.

Доказательство. Доказательство следует из Утверждения 1.

Утверждение 4. *Для ОЯ ОС с единичными технологическими коэффициентами и пропорциями между входами*

$$N : R_1N : R_2N : \ldots : R_{m-1}N = 1 : x_0 : x_0 : \ldots : x_0,$$
$$R_1 : R_1R_1 : R_2R_1 : \ldots : R_{m-1}R_1 = 1 : x_1 : x_1 : \ldots : x_1, \ldots$$
$$\ldots, R_{m-1} : R_1R_{m-1} : R_2R_{m-1} : \ldots : R_{m-1}R_{m-1} =$$
$$= 1 : x_{m-1} : x_{m-1} : \ldots : x_{m-1},$$
$$\max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} x_j < 1, n = n_N = n_{R_1} = \ldots = n_{R_{m-1}},$$

решение оптимизационной задачи (22) имеет вид:
(24) $$F_m(x, n) = m^2 \min_{0 \leqslant j \leqslant m-1} x_j.$$

Доказательство. Доказательство следует из Утверждения 2.

4. Выводы и перспективы

Для синтеза организационных конфигураций на основе представленного инструмента моделирования, позволяющего оценивать эффективность различных подсистем ОС по их вкладу в конечный результат, необходимо аналогичным образом построить и их структурнозависимые производственные функции и решить задачу структурной оптимизации, параметризованную распределением ресурса между ними. Оптимизация структуры ОС сводится к поиску оптимальной степени информационной и организационной эффективности, числа слоев ОЯ, вида управленческой иерархии при заданной неопределенности внешней среды. Кроме того, представленный инструмент может использоваться для моделирования организационной адаптации к инновационному процессу, спонтанно изменяющему технологические коэффициенты различных ПФ ПП, в результате чего изменяется оптимальная пропорция их аргументов. Алгоритмы адаптации зависят, с одной стороны, от внутренней институциональной среды ОС, стимулирующей или, наоборот, запрещающей фрактализацию структуры операционного ядра, с другой — от отношения скорости организационных процессов и частоты возникновения технологических инноваций [4].

Литература

1. ВОРОНИН А.А, МИШИН С.П. *Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы* // Автоматика и телемеханика, 2002, № 5. С. 120–132.
2. ВОРОНИН А.А, МИШИН С.П. *Оптимальные иерархические структуры* // М. ИПУ РАН, 2003.—214 с.
3. ВОРОНИН А.А., ХАРИТОНОВ М.А. *Модель численной оптимизации структуры операционного ядра организации* // Управление большими системами. Выпуск 39. М.: ИПУ РАН, 2012. С.165–183
4. ВОРОНИН А.А., ХАРИТОНОВ М.А. *Модель динамической оптимизации операционного ядра организационной*

системы // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2012. № 2 (17) С.41-59
5. КЛЕЙНЕР Г.Б. *Производственные функции. Теория, методы, применение.* // М.: Финансы и статистика, 1986. - 239 с.
6. МИНЦБЕРГ Г. *Структура в кулаке. Создание эффективной организации* // Пер. с английского под ред. Ю.Н. Каптуревского.- СПб.: Питер, 2002.-512 с.

OPTIMIZATION MODEL OF ORGANIZATION'S OPERATING CORE

Mikhail Kharitonov, Volgograd State University, Volgograd, postgraduate student (kharitonov.mihail@gmail.com).

Abstract: We suggest a constrained optimization model of an organization's operating core, whose structure consists of a basic technological module and modules of support facilities. The production function of the operating core is represented as a superposition of Leontief production functions corresponding to each of the modules. The proposed model may serve as the basis for generalized mechanisms synthesis of organizational system control on the long time interval.

Keywords: organizational system, operating nuclear, optimization of the structure, production function.