

УДК 517.977.1
ББК 3 965-01я7

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТА-КУБА¹

Шевляков А.А.² (ИПУ РАН, Москва)

Для системы уравнений и неравенств, описывающих движение робота-куба по плоской поверхности, ищется управление, позволяющее переместить центр масс в заданное положение по горизонтали. Из условий проскальзывания получаются неравенства, которым управление должно удовлетворять для решения поставленной задачи.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, односторонние связи, трение, управление.

1. Введение

Благодаря новым численным методам, раздел теоретической механики, изучающий системы твердых тел с односторонними связями, получил существенное развитие в последние 20 лет. Изучаемые в этом разделе системы описываются системами дифференциальных уравнений, неравенств и включений. Подобные математические объекты могут служить моделями реальных механических и электромеханических систем, таких как роботы.

В нескольких лабораториях мира в настоящее время исследуются оригинальные конструкции роботов, дающие им новые возможности. Одним из объектов исследования являются так называемые рои роботов - многочисленные группы роботов, способные согласованно выполнять задачу. Дру-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-07-00743 и 12-07-00329-а)

² Андрей Анатольевич Шевляков (aash29@gmail.com).

гая возможность, которой обладает рой - формирование из нескольких элементарных роботов других, более сложных и обладающих большими возможностями. В качестве элементарного робота лабораторией Computer Science and Artificial Intelligence Laboratory (CSAIL) Массачусетского технологического института был предложен робот в форме куба M-block, обладающий возможностью самостоятельного перемещения и соединения с другими подобными кубами с помощью магнитов [1].

Другой пример робота в форме куба — робот Cubli [2], изготовленный Федеральным Технологическим институтом Цюриха. Он снабжен маховиками, позволяющими ему совершать «шаги», прыжки и балансировать на вершине и ребре.

Подобная конструкция позволяет, в частности, запрыгивать на ступеньки лестницы, в том числе существенно превосходящие самого робота по размеру.

При решении задачи математического моделирования подобных систем приходится учитывать наличие односторонних связей и контактов, что сильно усложняет задачу.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу перемещения робота-куба в заданное положение на плоской поверхности. В качестве управляющего воздействия используется момент, создаваемый внутренними маховиками.

3. Математическая модель

Рассмотрим двумерное движение куба и его взаимодействие с плоской поверхностью. Предположим, что куб взаимодействует с поверхностью только в точках вершин. В качестве управляющего воздействия выберем момент, приложенный к кубу.

Для записи уравнений движения куба введем 3 системы координат. Система координат G неподвижная, связана с зем-

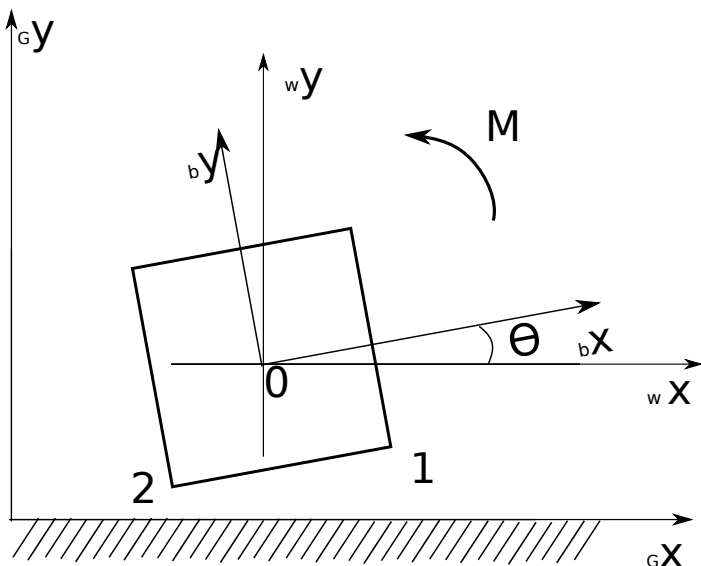


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы

лей. Система b подвижная, жестко связана с телом, ее начало находится в центре масс тела. Система w подвижная, с осями, параллельными осям системы G , ее начало находится в центре масс тела.

Такая система будет описываться уравнениями (1).

$$(1) \quad m \frac{d\vec{V}_0}{dt} = -m\vec{g} + \sum_{i=1}^4 (\bar{F}_i^N + \bar{F}_i^T),$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^4 (\bar{r}_i \times (\bar{F}_i^N + \bar{F}_i^T))|_z + u,$$

$$(2) \quad 0 \leq y_i \perp F_i^N \leq 0,$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= 0, -\mu F_i^N \leq F_i^T \leq \mu F_i^N, \\ \dot{x}_i &> 0, F_i^T = -\mu F_i^N, \\ \dot{x}_i &< 0, F_i^T = \mu F_i^N. \end{aligned}$$

Здесь V_0 — скорость центра масс куба, r_i — радиус-векторы вершин, \bar{F}_i^N и \bar{F}_i^T — силы реакции поверхности в этих точках.

Запись $0 \leq y_i \perp F_i^N \geq 0$ означает, что при наличии касания пола точкой i только одна из величин y_i и N_i^y не равна 0, и обе они больше либо равны 0. ω — угловая скорость тела. Последние 3 уравнения описывают закон трения Кулона, т.е. сухое трение и трение покоя в точках контакта.

3.1. Контакт

Рассмотрим условие (2). Оно называется условием дополнителности и описывает тот факт, что силы реакции опоры отличны от нуля в точке лишь в том случае, если имеет место контакт в этой точке. В более общем случае

$$(4) \quad 0 \leq F_i(q) \perp \lambda_{n,i} \geq 0,$$

где $F_i(q)$ — расстояние до поверхности от точки с номером i , $\lambda_{n,i}$ — сила реакции в этой точке. Пусть имеет место контакт в т. i , то есть $F_i(q) = 0$. Тогда, продифференцировав (6), получим

$$(5) \quad 0 \leq \dot{F}_i(q) \perp \lambda_{n,i} \geq 0.$$

Аналогично, если $\dot{F}_i(q) \equiv 0$, то

$$(6) \quad 0 \leq \ddot{F}_i(q) \perp \lambda_{n,i} \geq 0.$$

$$(7) \quad \ddot{F}_i = \nabla F_i^T \ddot{q} + f(\dot{q}, q) = 0,$$

а в случае рассматриваемой системы,

$$(8) \quad \ddot{y}_i = \dot{V}_0 + {}_b x_i(-\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta) - {}_b y_i(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta).$$

Подставив (1) в (8), получим систему уравнений и неравенств, где неизвестными выступают силы реакции связей. Следует отметить, что количество уравнений зависит от того, сколько вершин куба соприкасаются с поверхностью (количество активных связей). Такая задача называется линейной задачей дополнителности (linear complementarity problem, LCP). Известны различные методы ее решения: точные, итерационные, сводящие ее к задаче оптимизации и др.

3.2. Столкновение

В случае, когда $y_i = 0$ и $\dot{y}_i = 0$, имеет место столкновение вершины куба с поверхностью. Для продолжения расчета необходимо выбрать такой закон изменения скорости, который позволил бы перевести систему в допустимое состояние, т.е. $\dot{y}_i \geq 0$. Такие законы являются в некотором смысле эвристическими, и, как правило, нарушают предположение о твердом теле. Для произвольной формы тела и поверхности поиск такого закона является сложной задачей. С некоторыми модификациями в этой задаче можно использовать известные законы Ньютона и Пуассона [4].

3.3. Трение

Случай с ненулевым трением может быть сведен к линейной задаче дополнителности с помощью следующих преобозначений. Пусть $\dot{F}_{t,i} = G_i^T(q)\dot{q}$ — скорость в касательном направлении в точке контакта. Тогда

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{t,i}^+ = \mu\lambda_{n,i} + \lambda_{t,i}, \\ \lambda_{t,i}^- = \mu\lambda_{n,i} - \lambda_{t,i}, \\ \dot{F}_{t,i}^+ = \frac{1}{2}(|\dot{F}_{t,i}| + \dot{F}_{t,i}|), \\ \dot{F}_{t,i}^- = \frac{1}{2}(|\dot{F}_{t,i}| - \dot{F}_{t,i}|), \end{array} \right.$$

и

$$(10) \quad \begin{array}{l} 0 \leq \lambda_{t,i}^+ \perp F_{t,i}^+ \geq 0, \\ 0 \leq \lambda_{t,i}^- \perp F_{t,i}^- \geq 0. \end{array}$$

4. Управление

В случае полного отсутствия проскальзывания и отрывов, перемещение куба по плоскости довольно ограничено — положения устойчивого равновесия отстоят друг от друга на длину ребра куба. Таким образом, перемещение куба в произвольную заданную точку потребует управления проскальзыванием.

Условие непроскальзывания может быть записано как

$$\ddot{F}_s = 0,$$

$$\ddot{F}_{t,s} = 0.$$

Из этих условий и уравнений (1) могут быть получены выражения для реакций λ_n и λ_t , которые линейно зависят от управлений.

Для случая единичных массы, момента инерции и расстояния от точки контакта до центра масс было получено следующее выражение

$$\lambda_t = -\frac{1}{2} \cos \theta u - \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta g + \sin \theta \dot{\theta}^2$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2} g + \frac{1}{2} g \cos^2 \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \sin \theta u.$$

Принимая во внимание неравенства (10), мы видим возможность управлять режимом движения куба с помощью изменения момента. Действительно, если выбрать управление таким образом, что, с одной стороны,

$$\lambda_t + \lambda_n \mu \geq 0,$$

а с другой

$$\lambda_t - \lambda_n \mu \leq 0,$$

то проскальзывание будет отсутствовать. Если же нарушить одно из этих неравенств, то можно добиться проскальзывания, и, следовательно, движения точки соприкосновения с поверхностью в нужную сторону. Через некоторое время проскальзывания можно остановить его и стабилизировать угол, например линейной обратной связью, после чего весь цикл может быть повторен. Таким образом, можно совершать "шаги" на расстояние, меньшее чем длина ребра куба.

5. Моделирование

Для численного моделирования использовался пакет SICONOS, созданный в лаборатории BIPOP INRIA в Гренобле. Эта библиотека представляет собой набор численных

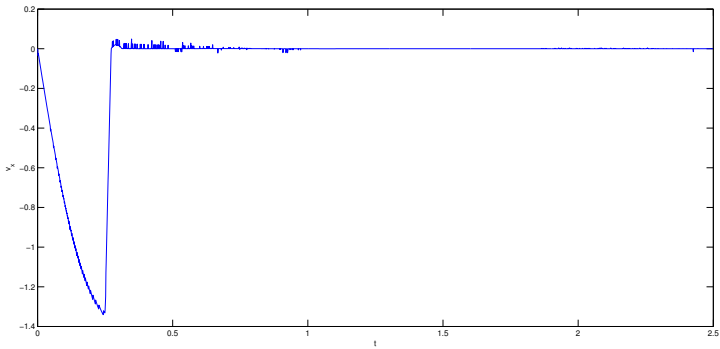


Рис. 2. Зависимость скорости нижней точки от времени

методов для решения задач механики с односторонними связями. Основной способ ее использования состоит в написании кода на языке С, описывающего механическую систему и вызывающего предоставляемые функции. На рисунке 2 представлен график скорости нижней точки куба в зависимости от времени. В момент $t = 0.25$ происходит переключение с режима проскальзывания в режим стабилизации.

6. Заключение

На данном этапе предложено разрывное управление, переключающее систему между режимами проскальзывания и вращения вокруг точки контакта. Такое управление позволяет переместить центр масс в заданную точку.

Литература

1. Rus D. Modular Self-Reconfigurable Robot Systems // Robotics & Automation Magazine. 2007. Vol. 14 , No. 1. P. 43–52.
2. Gajamohan M., Muehlebach M., Widmer T., D'Andrea R. The Cubli: A Reaction Wheel Based 3D Inverted

- Pendulum // 2013 European Control Conference (ECC). Zurich, Switzerland, 2013. P. 268–274
3. Brogliato B., Genot F., Hurmuzlu Y. Modeling, Stability and Control of Biped Robots A General Framework // Rapport de recherche №4290, 2001. 88 p.
 4. Glocker C. Newton's and Poisson's impact law for the non-convex case of reentrant corners // Complementarity, Duality and Symmetry in Nonlinear Mechanics: Proceedings of the IUTAM Symposium, AMMA Vol. 6, Kluwer Akad. Publ. 2004, pp. 101-125
 5. Lavalle S. Planning Algorithms.// Cambridge: Cambridge University Press. 2006. 842 p.