

УДК 519.715 + 681.514
ББК 22.1

СИНТЕЗ АНИЗОТРОПИЙНОГО РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА ПРИ СТРУКТУРИРОВАННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ¹

Юрченков А.В.²

*(Учреждение Российской академии наук Институт проблем
управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)*

Получено решение задачи синтеза анизотропийного регулятора при структурированной неопределенности в модели объекта управления.

Ключевые слова: анизотропийная теория робастного стохастического управления, структурированная неопределенность, метод гомотопий.

Введение

Последние двадцать лет в теории управления развивается направление, названное авторами анизотропийной теорией робастного управления [22, 25, 9]. Особенностью этой теории является выбор таких способов описания внешнего возмущения и коэффициента усиления от входа к управляемому выходу системы, которые обобщают постановки известных задач \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -управления.

Впервые задачи \mathcal{H}_2 -теории управления были сформулированы в работах Р.Е. Калмана и А.М. Летова в середине XX века. Позже задача \mathcal{H}_2 -оптимизации рассматривалась авторами J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar и B.A. Francis в работе [10]. Проблемы \mathcal{H}_∞ -оптимизации могут быть найдены в работах

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-07-00267.

² Александр Викторович Юрченков, аспирант (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 495 334-92-60 внутр. тел. 1645).

Д. Зеймса [26], Д. Дойла [11], Б. Фрэнсиса [17], К. Гловера [10], Д. Гу [17], Н. Бермана, У. Шейкеда [7, 15], К. Шерера [23, 24], Т. Ивасаки, Р. Скелтона [22, 19], П. Гаинета [13, 14], П. Апкарьяна [5, 6] и др.

При решении задачи обеспечения робастного качества для линейной дискретной системы вводится a -анизотропийная норма системы $\|F\|_a$. Это направление развивается в ряде работ А.В. Семенова, И.Г. Владимирова, А. П. Курдюкова [22, 25], М. Карни [20], И. Петерсона, М. Джеймса, П. Даймонда [9].

В работе [2] приведено решение стохастической задачи \mathcal{H}_∞ -оптимизации для системы с параметрической неопределенностью. Авторами продемонстрировано, как можно изменить математическую модель системы путем введения дополнительного входа, что позволяет погрузить задачу в более общую, которая решается методами анизотропийной теории.

В данной работе формулируется и решается анизотропийная задача стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации для линейных дискретных систем со структурированной неопределенностью.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему F , описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_0 q_k + B_1 w_k + B_2 u_k, \\ z_k &= C_1 x_k + D_{12} u_k, \\ (1) \quad p_k &= C_2 x_k + D_{22} u_k, \\ y_k &= C_3 x_k + D_{33} w_k, \\ q_k &= \Delta p_k, \end{aligned}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z_k \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $p_k \in \mathbb{R}^{m_0}$ — выход неопределенности, $y_k \in \mathbb{R}^{p_2}$ — наблюдаемый выход, $q_k \in \mathbb{R}^{m_0}$ — вход неопределенности, $u_k \in \mathbb{R}^{m_2}$ — управление, $w_k \in \mathbb{R}^{m_1}$ — возмущение. Матрицы системы (1) будем считать известными, за исключением матрицы оператора неопределенности Δ , которая принадлежит множеству

$$(2) \quad \Delta = \left\{ \Delta = \text{block diag}(\Delta_1, \Delta_2) : \Delta_i \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}, \|\Delta_i\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Структурная схема рассматриваемого объекта представлена на рис.1.

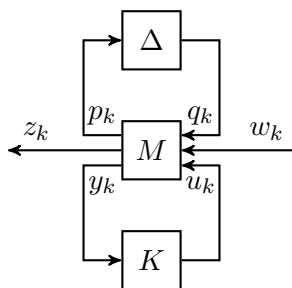


Рис. 1. Система с неопределенностью и регулятором в контуре обратной связи

Задача анизотропийной оптимизации состоит в следующем:

Задача 1 Для системы вида (1) и верхней границы уровня средней анизотропии возмущения $\alpha \geq 0$ найти стабилизирующий регулятор $K \in \mathcal{K}$, который минимизирует максимальное значение α -анизотропийной нормы системы $F_l(F_u(M, \Delta), K)$ по всем допустимым значениям неопределенности $\Delta \in \Delta$, т.е. доставляет минимум функционалу

$$(3) \quad J_0(K) = \sup_{\Delta \in \Delta} \|F_l(F_u(M, \Delta), K)\|_\alpha.$$

Опишем множество допустимых регуляторов \mathcal{K} . Регулятор K будем называть допустимым (из множества \mathcal{K}), если он является стабилизирующим и причинным.

В рамках рассматриваемой системы потребуем выполнение основных предположений:

$$(A) \quad \begin{aligned} D_{12}^T C_1 &= 0, \\ D_{12}^T D_{12} &= I; \end{aligned}$$

(B) номинальная система (при $\Delta \equiv 0$) наблюдаема и управляема;

$$(C) \quad p_1 < m_1;$$

(D) матрица D_{33} в (1) имеет полный строчный ранг:

$$\text{rank} D_{33} = p_2 \leq m_1;$$

(E) матрица D_{12} в (1) имеет полный столбцовый ранг:

$$\text{rank} D_{12} = m_2 \leq p_1;$$

Предположение (A) не ограничивает общности, так как если оно не выполнено, то к системе следует применить преобразование, указанное в [16], которое приводит ее к указанному виду. Предположения (B) являются стандартными для задач управления. Предположение (C) гарантирует, что для любого регулятора K система $F_l(F_u(M, \Delta), K)$ удовлетворяет неравенству $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F_l(*)\|_2 < \|F_l(*)\|_\infty$. Предположение (D) гарантирует невырожденность уравнения Риккати для оптимального оценивателя из раздела 7.1, а (E) — невырожденность уравнения Риккати для оптимального \mathcal{H}_2 -регулятора, полученного в 8.2.

2. Погружение в более общую задачу стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации

На основе модели (1) введем вспомогательную систему:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k + B_3 \eta_k, \\ \tilde{z}_k &= \begin{bmatrix} C_1 x_k + D_{12} u_k \\ \gamma_1 C_{12} x_k \\ \gamma_2 C_{22} x_k \\ \gamma_1 D_{1,22} u_k \\ \gamma_2 D_{2,22} u_k \end{bmatrix}, \\ y_k &= C_3 x_k + D_{33} w_k, \end{aligned}$$

где $\gamma_i, i = \overline{1, 2}$ — некоторые положительные параметры, матрица неопределенности имеет диагональный вид $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2)$, $\Delta_i \in \mathbb{R}^{s_i \times s_i}$, $s_1 + s_2 = m_0$, а матрица B_3 имеет блочный вид $B_3 = [B_{01}, B_{02}, B_{01}, B_{02}]^T$, где блоки получены из матрицы B_0 следующим образом $B_0 = [B_{01}, B_{02}]$, $B_{0i} \in \mathbb{R}^{n \times s_i}$, аналогично разбиваются матрицы C_2 и D_{22} , $C_2 = [C_{12}, C_{22}]^T$, $C_{i2} \in \mathbb{R}^{s_i \times n}$

и $D_{22} = [D_{1,22}, D_{2,22}]^T$, $D_{i,22} \in \mathbb{R}^{s_i \times m_2}$. Исходная система (1) будет являться вложенной по отношению к системе (4), если принять $\eta_k = (\Delta_1 C_{12} x_k, \Delta_2 C_{22} x_k, \Delta_1 D_{1,22} u_k, \Delta_2 D_{2,22} u_k)^T$. Схема замкнутой системы примет вид, изображенный на рис.2.

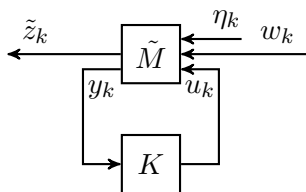


Рис. 2. Замкнутая система с дополнительным входом

Сформулируем задачу стохастической \mathcal{H}_∞ -оптимизации для системы (4):

Задача 2 Для системы вида (4) и верхней границы уровня анизотропии входного сигнала $a \geq 0$ найти допустимый регулятор $K \in \mathcal{K}$, который минимизирует максимальное значение a -анизотропийной нормы передаточной функции системы $F_l(\tilde{M}, K)$ для любых входных воздействий, т.е. доставляет минимум функционалу

$$(5) \quad J(K, \gamma) = \sup_{\eta_k \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}} \sup_{W \in \mathcal{BW}_a} \left(\|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\Gamma \eta\|_{\mathcal{P}}^2 \right).$$

3. Связь между задачей 2 и смешанной задачей оптимизации

Следующая теорема поясняет, почему решение задачи 2 эквивалентно решению смешанной задачи оптимизации.

Теорема 1. Решение задачи 2 является также решением следующей смешанной задачи оптимизации: для фиксированных параметров γ_1 и γ_2 найти допустимый регулятор $K \in \mathcal{K}$, та-

кой что

$$(6) \quad \|T_{zw}\|_a \rightarrow \min_K,$$

$$(7) \quad \|T_{z\eta_i}\|_\infty \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Теорема 2 показывает связь между критериями качества задачи 1 и 2.

Теорема 2. Для любых входных воздействий $W \in \mathcal{BW}_a$ и $\eta_k \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}$ выполняется неравенство

$$(8) \quad J_0(K) \leq J(K, \gamma).$$

Теоремы 1 и 2 означают, что исходную задачу с критерием качества (3) можно свести к задаче 2. Критерий качества (5) будет мажорирующим критерием для (3), причем разность $J(K, \gamma) - J(K)$ будет минимальна, если найдется γ_0 , удовлетворяющее условиям теоремы 2.

4. «Наихудший» вход с ограниченной энергией для системы, замкнутой произвольным регулятором

Решение задачи 2 начнем с поиска наихудшего входного воздействия η с ограниченной энергией. Пусть регулятор K имеет следующую реализацию

$$(9) \quad \begin{aligned} \xi_{k+1} &= \hat{A}\xi_k + \hat{B}y_k, \\ u_k &= \hat{C}\xi_k, \end{aligned}$$

где \hat{A} , \hat{B} и \hat{C} — неизвестные матрицы. Наихудший вход η формируется следующим образом:

$$(10) \quad \tilde{\eta}_k = L\zeta_k + \Sigma^{1/2}w_k = L_1x_k + L_2\xi_k + \Sigma^{1/2}w_k,$$

где матрицы L и $\Sigma^{1/2}$ подлежат определению. Замкнутая система $F_l(M, K)$ изображена на рис.2, ее реализация в пространстве

состояний представлена ниже:

(11)

$$F_l(\tilde{M}, K) = \left[\begin{array}{cc|cc} A & B_2\hat{C} & B_1 & B_3 \\ \hline \hat{B}C_3 & \hat{A} & \hat{B}D_{33} & 0 \\ C_1 & D_{12}\hat{C} & 0 & 0 \\ \gamma_1 C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 D_{1,22}\hat{C} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 D_{2,22}\hat{C} & 0 & 0 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c|cc} \tilde{A} & \tilde{B} & \tilde{F} \\ \hline \tilde{C} & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Обозначим вектор состояния замкнутой системы $F_l(\tilde{M}, K)$ как объединенный вектор состояния объекта управления x_k и регулятора ξ_k , то есть $\zeta_k \equiv (x_k, \xi_k)^T$ и введем следующую матрицу:

$$(12) \quad Q \equiv \begin{bmatrix} C_1^T C_1 + \gamma_1^2 C_{12}^T C_{12} + \gamma_2^2 C_{22}^T C_{22} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \hat{C}^T (D_{12}^T D_{12} + \gamma_1^2 D_{1,22}^T D_{1,22} + \gamma_2^2 D_{2,22}^T D_{2,22}) \hat{C} & \dots \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим дискретное алгебраическое уравнение Риккати относительно матрицы $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$$(13) \quad \tilde{Y} = \tilde{A}^T \tilde{Y} \tilde{A} + L^T \Sigma^{-1} L + Q,$$

$$(14) \quad L = [L_1, L_2] = \Sigma \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{A},$$

$$(15) \quad \Sigma = (\Gamma^2 - \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{F})^{-1},$$

где матрица $L \in \mathbb{R}^{l \times 2n}$ разделена на два блока L_1 и L_2 . Решение \tilde{Y} уравнения (13)-(15) называется стабилизирующим, если матрица \tilde{Y} симметрическая, матрица Σ положительно определена и матрица $\tilde{A} + \tilde{F}L$ асимптотически устойчива. Заметим, что для любых фиксированных $\gamma_i > \|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty$, $i = \overline{1, 4}$ уравнение (13)-(15) имеет единственное решение.

Теорема 3. Пусть $\|T_{\tilde{z}\eta_i}\|_\infty < \gamma_i$, $i = \overline{1, 4}$. Тогда

(16)

$$\sup_{\eta \in l_{\mathcal{P}}^{2m_0}} \left\{ \|\tilde{Z}\|_{\mathcal{P}}^2 - \|\Gamma\eta\|_{\mathcal{P}}^2 \right\} = \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^T \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^T \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{B}) R_{ww}(0) + \right. \\ \left. + 2(\tilde{A}^T \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^T \tilde{Y} \tilde{B}) R_{w\zeta}(0) \right\},$$

где \tilde{Y} , L и Σ удовлетворяют уравнению (13)–(15), а наихудший вход формируется согласно (10).

Наихудший вход $\tilde{\eta}$ может быть сгенерирован из входного сигнала W посредством формирующего фильтра $G_1 \in \mathcal{RH}_\infty^{(2m_0) \times m_1}$, внутреннее состояние которого является копией состояния ζ_k системы $F_l(\tilde{M}, K)$. Реализация такого фильтра имеет вид

$$(17) \quad \tilde{G}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} + \tilde{F}L & \tilde{B} + \tilde{F}\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array} \right].$$

5. «Наихудший» вход с ограниченным спектром для системы, замкнутой допустимым регулятором при «наихудшем» дополнительном входе с ограниченной энергией

Рассмотрим систему (4), на вход которой подается (10). На языке передаточных функций вход–выходное соотношение имеет вид $Z = F_w W$, где F_w имеет следующую структуру

$$(18) \quad F_w = F_l(\tilde{M}, K) \left[\begin{array}{c} I \\ \tilde{G}_1 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} A_w & B_w \\ \hline C_w & 0 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} A + B_3 L_1 & B_2 \hat{C} + B_3 L_2 & B_1 + B_3 \Sigma^{1/2} \\ \hline \hat{B} C_3 & \hat{A} & \hat{B} D_{33} \\ \hline C_1 & D_{12} \hat{C} & 0 \\ \hline \gamma_1 C_{12} & 0 & 0 \\ \hline \gamma_2 C_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \gamma_1 D_{1,22} \hat{C} & 0 \\ \hline 0 & \gamma_2 D_{2,22} \hat{C} & 0 \end{array} \right],$$

где матрицы $L = [L_1, L_2]$ и $\Sigma^{1/2}$ определяются из (13)–(15). Структурная схема системы представлена на рис.3.

На данном этапе необходимо обеспечить на вход системы наихудшую входную последовательность $\tilde{W} \in \mathcal{W}_a$, доставляющую максимум функционалу $\|F_w\|_2^2$. Для этого необходимо ре-

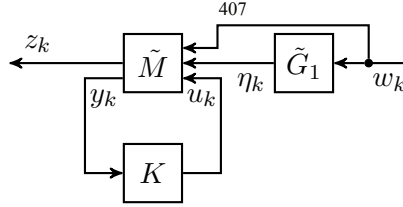


Рис. 3. Замкнутая система с дополнительным входом

шить следующую задачу оптимизации

$$(19) \quad \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_a} \|F_w G_0\|_2^2 = \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_a} \|F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} G_0\|_2^2.$$

Задача (19) может быть решена с помощью анизотропийной теории. Частотное описание наихудшего фильтра \tilde{G}_0 можно получить согласно утверждению.

Теорема 4. Пусть система $F_w \in \mathcal{RH}^{(p_1+2m_0) \times m_1}$ удовлетворяет условию $\frac{1}{\sqrt{m}} \|F_w\|_2 < \|F_w\|_\infty$. Если спектральная плотность фильтра $G_0 \in \mathcal{RH}^{m_1 \times m_1}$ имеет вид

$$(20) \quad \hat{G}_0(\omega) \hat{G}_0^*(\omega) = \left(I_{m_1} - q \hat{F}_w^* \hat{F}_w \right)^{-1}, \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

для $q = \overline{A}^{-1}(G_0)$, то G_0 принадлежит множеству наихудших формирующих фильтров.

Чтобы описать наихудший формирующий фильтр \tilde{G}_0 в пространстве состояний, будем искать сигнал \tilde{w}_k в виде

$$(21) \quad \tilde{w}_k = L_w \zeta_k + \Sigma_w^{1/2} v_k,$$

где $L_w \in \mathbb{R}^{m_1 \times 2n}$ такая, что $A_w + B_w L_w$ асимптотически устойчива, а $\Sigma_w \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ положительно определенная симметрическая матрица. Соответствующий формирующий фильтр G_0 со входом $V \in \mathcal{W}_0$ и выходом $W \in \mathcal{W}_a$ имеет следующую реализацию в пространстве состояний

$$(22) \quad \tilde{G}_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_w + B_w L_w & B_w \Sigma_w^{1/2} \\ \hline L_w & \Sigma_w^{1/2} \end{array} \right].$$

Рассмотрим уравнение Риккати относительно матрицы $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$$(23) \quad R = A_w^T R A_w + q C_w^T C_w + L_w^T \Sigma_w^{-1} L_w,$$

$$(24) \quad L_w = \Sigma_w (B_w^T R A_w + q D_w^T C_w),$$

$$(25) \quad \Sigma_w = (I_{m_1} - B_w^T R B_w)^{-1}.$$

Решение уравнения (23)–(25) называется стабилизирующим, если матрица R симметрическая, матрица Σ_w положительно определена, а матрица $A_w + B_w L_w$ асимптотически устойчива. Следующая теорема дает явные выражения для матриц L_w и Σ_w , то есть реализацию фильтра (22).

Теорема 5. Пусть система (18) асимптотически устойчива, $q \in [0, \|F_w\|_\infty^{-2})$ и матрицы L_w и Σ_w соответствуют стабилизирующему решению R уравнения Риккати (23)–(25). Тогда

- 1) формирующий фильтр (22) удовлетворяет (20);
- 2) α -анизотропийная норма системы F_w задается выражением

$$\|F_w\|_a = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{m_1}{\text{Trace}(L_w P L_w^T + \Sigma_w)} \right),$$

где P — это решение уравнения Ляпунова

$$(26) \quad P = (A_w + B_w L_w) P (A_w + B_w L_w)^T + B_w \Sigma_w B_w^T$$

и параметр $q \in [0, \|F_w\|_\infty^{-2})$ удовлетворяет уравнению

$$(27) \quad a = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m_1 \Sigma_w}{\text{Trace}(L_w P L_w^T + \Sigma_w)} \right).$$

Из теоремы 5 следует, что

$$J(K, \gamma) = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{m_1}{\text{Trace}(L_w P L_w^T + \Sigma_w)} \right)^{1/2}$$

Представление входного сигнала \tilde{w}_k как (21) позволяет преобразовать выражение (16) для функционала $J(K, \gamma)$, явно выражая ковариации $R_{ww}(0)$ и $R_{w\zeta}(0)$:

$$\begin{aligned} R_{ww}(0) &= L_w P L_w^T + \Sigma_w, \\ R_{w\zeta}(0) &= L_w P, \end{aligned}$$

где P — это решение уравнения Ляпунова (26).

Лемма 1. Для заданной системы (4) с входными сигналами η_k и w_k , формирующимися согласно (10) и (21), значение критерия качества (5) будет равно

$$\begin{aligned} (28) \quad J(K, \gamma) &= \text{Trace} \left\{ (\tilde{B}^T \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{B}^T \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{B}) (L_w P L_w^T + \Sigma_w) + \right. \\ &\quad \left. + 2(\tilde{A}^T \tilde{Y} \tilde{F} \Sigma \tilde{F}^T \tilde{Y} \tilde{B} + \tilde{A}^T \tilde{Y} \tilde{B}) L_w P \right\}, \end{aligned}$$

где матрицы входящие в правую часть вычисляются согласно выражению (11), решениям уравнений Риккати (13)–(15) и (23)–(25).

После синтеза обоих формирующих фильтров G_0 и G_1 замкнутая система имеет вид, представленный рис.4.

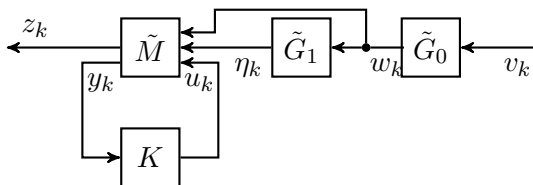


Рис. 4. Замкнутая система с „наихудшими“ формирующими фильтрами

6. \mathcal{H}_2 -регулятор в форме наблюдателя

Рассмотрим систему

$$(29) \quad \mathcal{F} = F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} I \\ \tilde{G}_1 \end{bmatrix} \tilde{G}_0 = F_l(\tilde{M}, K) \begin{bmatrix} \tilde{G}_0 \\ \tilde{G}_1 \tilde{G}_0 \end{bmatrix},$$

представленную на рис.4, где фильтры построены в соответствие с процедурами, описанными в предыдущем разделе, для некоторого регулятора K . Замкнутая система имеет реализацию в пространстве состояний

$$\mathcal{F} = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B} \\ * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & \tilde{D} \end{array} \right],$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= A + B_3 L_1 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w1}, \\ \tilde{A}_{12} &= B_2 \hat{C} + B_3 L_2 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w2}, \\ \tilde{B} &= (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) \Sigma_w^{1/2}, \\ \tilde{C}_{21} &= C_3 + D_{33} L_{w1}, \\ \tilde{C}_{22} &= D_{33} L_{w2}, \\ \tilde{D} &= D_{33} \Sigma_w^{1/2}, \end{aligned}$$

а матрицы L, Σ, L_w и Σ_w такие, как в (14)–(15) и (24)–(25). Задача 2 эквивалента задаче оптимизации

$$\inf_{K \in \mathcal{K}} J(K, \gamma) = \inf_{K \in \mathcal{K}} \|\mathcal{F}\|_2^2 = \inf_{K \in \mathcal{K}} \frac{\|F_l(\tilde{M}, K)\|}{\|\tilde{G}_1(K)\|} \left[\begin{array}{c} I \\ \tilde{G}_1(K) \end{array} \right] \tilde{G}_0(K) \Big\|_2^2.$$

Это задача \mathcal{H}_2 -оптимизации в условиях неполной информации о векторе состояния для системы (29), на вход которой поступает «белый шум». Решение такой задачи хорошо известно [10]. В соответствии с принципом разделения, решение указанной задачи разбивается на два этапа. На первом этапе строится оцениватель состояния. На втором этапе строится статический регулятор, обеспечивающий минимум \mathcal{H}_2 -нормы передаточной функции замкнутой системы.

Опишем процедуру построения регулятора, оценивающего состояние системы. Рассмотрим уравнение Риккати относительно

но матрицы $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$(30) \quad S = \tilde{A}_{11} S \tilde{A}_{11}^T + \tilde{B} \tilde{B}^T - \Lambda \Theta \Lambda^T,$$

$$(31) \quad \Theta = \tilde{C}_{21} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{D} \tilde{D}^T,$$

$$(32) \quad \Lambda = (\tilde{A}_{11} S \tilde{C}_{21}^T + \tilde{B} \tilde{D}^T) \Theta^{-1}.$$

Решение $S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ уравнения (30)–(32) называется стабилизирующим, если матрица S является положительно полуопределенной и матрица $\tilde{A}_{11} - \Lambda \tilde{C}_{21}$ асимптотически устойчива. Заметим, что в силу предположения (D) уравнение (30)–(32) имеет не более одного стабилизирующего решения.

Теорема 6. Пусть система (4) удовлетворяет предположениям (A), (B) и (D) и пусть матрицы реализации в пространстве состояний допустимого регулятора (9) удовлетворяют соотношениям

$$(33) \quad \begin{aligned} \hat{A} &= \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12} - \Lambda(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22}), \\ \hat{B} &= \Lambda, \end{aligned}$$

где матрица Λ выражается через стабилизирующее уравнение Риккати (30)–(32). Тогда регулятор (9) является оценивающим.

Доказательство теоремы — суть хорошо известной процедуры построения фильтра Калмана для замкнутой системы (29), на вход который поступает «белый шум».

Заключительный этап в решении задачи 2 заключается в построении статического регулятора для разомкнутой системы

$$\mathcal{T} = \left[\begin{array}{cc|cc} A & B_3 L + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_w & (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) \Sigma_w^{1/2} & B_2 \\ 0 & A_w + B_w L & B_w \Sigma^{1/2} & 0 \\ \hline C_1 & 0 & 0 & D_{12} \\ C_3 & D_{33} L_w & D_{33} \Sigma_w^{1/2} & 0 \end{array} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}
 A & B_3 L_1 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w_1} & & \\
 0 & A + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w_1} + B_3 L_1 & & \\
 * & * & \dots & \\
 \hline
 C_1 & 0 & & \\
 C_3 & D_{33} L_{w_1} & & \\
 & B_3 L_2 + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w_2} & * & B_2 \\
 & (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_{w_2} + B_3 L_2 + B_2 \hat{C} & * & 0 \\
 \dots & * & * & * \\
 \hline
 & 0 & 0 & D_{12} \\
 & D_{33} L_{w_2} & D_{33} \Sigma_w^{1/2} & 0
 \end{array} \right],$$

где матрицы $L, \Sigma^{1/2}, L_w, \Sigma_w^{1/2}$ такие же, как и в теоремах 3 и 5. Система \mathcal{T} изображена на рис.5.

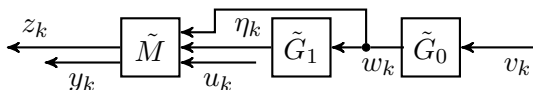


Рис. 5. Разомкнутая система

Рассмотрим уравнение Риккати относительно матрицы $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$:

$$(34) \quad T = A_u^T T A_u + C_u^T C_u - N^T \Upsilon N,$$

$$(35) \quad \Upsilon = B_u^T T B_u + D_{12}^T D_{12},$$

$$(36) \quad N = [N_1, N_2] = -\Upsilon^{-1} (B_u^T T A_u + D_{12}^T C_u),$$

где $A_u \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $B_u \in \mathbb{R}^{2n \times m_2}$ и $C_u \in \mathbb{R}^{p_1 \times 2n}$ определяются следующим образом:

$$A_u = \begin{bmatrix} A & (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_w + B_3 L \\ 0 & A + (B_1 + B_3 \Sigma^{1/2}) L_w + B_3 L + B_2 \hat{C} \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_u = [C_1 \ 0].$$

Решение $T = T^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ уравнения (34)–(36) будем называть стабилизирующим, если матрица T положительно определена, а

матрица $A_u + B_u N$ асимптотически устойчива. Из-за предположения, что матрица D_{12} в (1) имеет полный столбцовый ранг, то уравнение (34)–(36) имеет не более одного решения.

Теорема 7. Пусть система (1) удовлетворяет предположениям (A), (B), (E) и пусть матрицы реализации в пространстве состояний оценивающего регулятора (9) вычисляются согласно соотношениям (33) и уравнению

$$(37) \quad \hat{C} = N_1 + N_2,$$

где матрицы N_1 и N_2 выражаются через стабилизирующее решение уравнения Риккати (34)–(36). Тогда регулятор (9) является решением задачи 2.

Доказательство теоремы представляет собой синтез оптимального LQG -регулятора с критерием минимизации \mathcal{H}_2 -нормы передаточной матрицы замкнутой системы.

7. Заключение

В данной работе получен алгоритм построения оптимального управления на основе минимизации анизотропийной нормы замкнутой системы. Задача ставится для дискретной линейной системы со структурированной неопределенностью и заданным уровнем средней анизотропии входного сигнала. Показано, что решение задачи построения анизотропийного регулятора может быть сведено к решению задачи \mathcal{H}_∞ -оптимизации для системы с одним дополнительным входом.

Литература

1. КИЦУЛ П.И., ЛИПЦЕР Р.Ш. *Рекуррентное оценивание случайных последовательностей* М.: Изд-во Ин-та пробл. упр. — 1976.
2. КУРДЮКОВ А.П., МАКСИМОВ Е.А. *Решение стохастической задачи \mathcal{H}_∞ -оптимизации для линейных дискретных систем с параметрической неопределенностью* // Автоматика и Телемеханика. — 2006. — №8. — С. 112–142.

3. КУСТОВ А.Ю., КУРДЮКОВ А.П., НАЧИНКИНА Г.Н. *Стохастическая теория анизотропного робастного управления* // Научное издание. — М.: ИПУ РАН, 2012. — 128 с.
4. APKARIAN P., GAHINET P., BECKER G. *Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example* // Automatica, — 1995. — Vol. 31, №9. — P. 1251–1261.
5. APKARIAN P., NOLL D. *Nonsmooth \mathcal{H}_∞ -synthesis* // IEEE Trans. Automat. Control. — 2006. — Vol. 51, №1. — P. 71–86.
6. APKARIAN P., RAVANBOD-HOSSEINI L., NOLL D. *Time domain constrained \mathcal{H}_∞ -synthesis* // Int. J. Robust Nonlinear Contr. — 2010.
7. BERMAN N., SHAKED U. *\mathcal{H}_∞ Control for Discrete-Time Nonlinear Stochastic Systems* // IEEE Trans. Automat. Control. — 2006. — Vol. 51, №6. — P. 1041–1046.
8. DIAMOND P., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V., VLADIMIRIV I.G. *Homotopy methods and anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization of control systems* // Report 97–14, The University of Queensland, Australia. — 1997. — P. 1–22.
9. DIAMOND P., VLADIMIRIV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems* // Int. J. Control. — 2001. — Vol. 74, №1. — P. 28–42.
10. DOYLE J.C., GLOVER K., KHARGONEKAR P.P., AND FRANCIS B.A. *State-space solution to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems* // IEEE Trans. AC. — 1989. Vol. 34. — P. 831–846.
11. DOYLE J., ZHOU K., GLOVER K., BODENHEIMER B. *Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance objectives II: Optimal control* // IEEE Trans. Automat. Control. — 1994. — Vol. 39. — P. 1575–1587.
12. FRANCIS B.A. *A Course of \mathcal{H}_∞ Control Theory* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. — 1987. — Vol.

88. — Berlin, Heidelberg: Springer, 141 p.
13. GAHINET P. *Explicit controller formulas for LMI-based \mathcal{H}_∞ synthesis* // Automatica. — 1996, Vol. 32, №7. — P. 1007–1014.
14. GAHINET P., APKARIAN P. *A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control* // Int. J. of Robust Nonlinear Contr. — 1994. — Vol. 4, №4. — P. 421–448.
15. GERSON E., SHAKED U., YAESH I. *\mathcal{H}_∞ control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise* // Automatica. — 2001. — Vol. 37. — P. 409–417.
16. GREEN M., LIMEBEER D.J.N. *Linear robust control* N. J.: Prentice Hall. — 1995. — 538 p.
17. GU D.-W., TSAI M.C., O'YOUNG S.D., AND POSTLETHWAITE I. *State-space formulate for discrete-time \mathcal{H}_∞ optimization*. Int. J. of Contr. — 1989. — Vol. 49. — P. 1683–1723.
18. IWASAKI T., SKELTON R.E. *All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas* // Automatica. — 1994. — Vol. 30, № 8. P. 1307–1317.
19. IWASAKI T., SKELTON R.E., GRIGORIADIS K. M. *A United Algebraic Approach to Linear Control Design* // Published in 1997.
20. KARNY M. *Towards fully probabilistic control design* // Automatica. — 1996. — Vol. 32. — P. 1719–1722.
21. MARITON M., BERTRAND R. *A homotopy algorithm for solving coupled Riccati equations* // Optimal. Contr. Appl. Meth. — 1985. — Vol. 6. — P. 351–357.
22. SEMYONOV A.V., VLADIMIROV I.G., AND KURDJUKOV A.P. *Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization* // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Florida, USA. — 1994. — Vol. 3. — P. 2249–2250.
23. SCHERER C. *Theory of Robust Control* Mechanical Engineering Systems and Control Group Delft University of

- Technology The Netherlands. — April 2001. — 160 p.
24. SCHERER C., GAHINET P., CHILALI M. *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization* // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1997. — Vol. 42, № 7. — P. 896–911.
 25. VLADIMIROV I.G., KURDJUKOV A.P., SEMYONOV A.V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem* // Proc. 13 IFAC World Congr. — USA, 1996. — Paper IFAC-3d-01.6. — **H**, P. 427–432.
 26. ZAMES G. *Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses* IEEE Trans. Automat. Control. — 1981. — Vol. 26, №2. — P. 301–320.

ANISOTROPIC ROBUST REGULATOR SYNTHESIS FOR STRUCTURED UNCERTAINTY CONTROL MODEL

Alexander Yurchenkov, Institute of Control Sciences of RAS,
Moscow.

Abstract: The anisotropic control synthesis problem is considered and solved. The model of the control plant contains a structured uncertainty.

Keywords: robust stochastic control anisotropic theory, structured uncertainty, homotopy method.