УДК 519.17+519.6
ББК 22.174

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР

Емельянова Т.В. [1]
(*Арзамасский политехнический институт, Арзамас*)
Зюзина А.Б.[2]
(Высшая школа экономики НИУ Нижегородский филиал, *Нижний Новгород*)

В данной статье рассматриваются сложные сетевые структуры и их основные характеристики. Проанализированы возможности ориентированных и неориентированных сетей. Исследованы сложные сетевые структуры на основе социальных сетей.

Ключевые слова: сложные сетевые структуры, графы, центральность графа, сетевая плотность графа, посредничество вершины.

1. Введение

В последнее время появился новый подход к изучению сложных систем, который рассматривает их как сетевые структуры. Под сетью понимается набор из элементов, которые называются вершинами, и связей между ними, которыми являются ребра [5]. Эти исследования имеют тесную связь со многими существующими системами: биологическими (функциональные

---

[1] *Емельянова Татьяна Владимировна, доцент, кандидат технических наук* (*emelyanova@apingtu.edu.ru*).
[2] *Зюзина Анастасия Борисовна, студентка* (*emelyanova @apingtu.edu.ru*).

сети мозга, функциональные сети кровеносной системы, метаболические сети клеток), техническими (сети электростанций, Интернет, The World Wide Web), социальными (сети дружбы и знакомства, сети актеров кино, сети соавторства).

Актуальность данной работы обусловлена тем, что в повседневной жизни люди часто сталкиваемся с таким явлением как сложные сетевые структуры, например, это может быть сеть передвижения транспорта в любом городе и между ними, расстановка товаров на складе и так далее. Именно такое огромное количество задач нуждается в оптимальном решении.

Исследование сетевых структур позволит совершенствовать работу данных структур, что даст возможность смоделировать поведение сетевых систем с учетом изменений (появлений новых взаимосвязей и структурных единиц). Моделирование сложных сетей приводит к улучшению практического использования сетевых структур, повышению их работоспособности и взаимосвязи в разных сферах применения.

2. Сложные сетевые структуры

Сложные сетевые структуры в современном мире занимают важную позицию почти во всех сферах общества и науки и зачастую являются неотъемлемой частью любого исследования.

Сложные сети – это существующие в природе сети (или графы) обладающие определенными способами описания, схемами расположения в них элементов[2].

Почти все объекты природы и общества могут быть представлены в виде сложных сетей.

Дж. Липнек и Дж. Стэмпс предложили охарактеризовать такие сети пятью ключевыми принципами [4]:

- наличие одной общей долгосрочной цели, которую поодиночке каждый элемент этой структуры не сможет полностью достигнуть;
- добровольность связей, на которой базируется вся сеть, обеспечивает гибкость и открытость этой сетевой структуре;
- отдельные элементы структуры, которые получают в итоге хорошие результаты, обязаны нести некоторую ответст-

венность за достижение конечной цели; взаимодействие между элементами (вершинами) в сложной структуре – важный аспект для достижения поставленной цели;

- большое количество вершин обеспечивают устойчивость и эластичность сети;
- большое количество уровней взаимодействия.

Существует два способа математического представления графа: матрица смежности вершин и матрица инцидентности[2].

Одной из характеристик сети является степень вершины. Степенью вершины называется число связей вершины [2]. Для ориентированной сети различаются степени по входу и степени по выходу. Распределение степеней вершин является очень важной характеристикой сети в целом. Большое количество сложных сетей имеют распределение степеней узлов с показателем, который варьируется между 2 и 3 [2].

Кластеризацией называют локальную характеристику сети, которая описывает степень взаимодействия между двумя смежными вершинами [2].

Коэффициент кластеризации вершины – это вероятность того, что смежные с данной вершиной вершины, между собой также смежные. То есть если вершина j имеет q_j смежных вершин с количеством связей между ними, равных числу t_j, то локальный коэффициент кластеризации вычисляется по формуле [2]:

(1) $$C_j(q_j) = \frac{t_j}{\frac{q_j(q_j-1)}{2}}.$$

Для многих сетей является необходимым определить некоторую степень важности входящих в нее вершин. Загруженность вершины i в сети определяется как суммарное число всех кратчайших путей между всеми остальными вершинами, которые «проходят» через вершину i.

Степень важности вершин сети определяется по формуле[2]:

$$(2) \quad B(i) = \sum_{st} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}},$$

где $\sigma_{st}(i)$ – количество кратчайших путей из вершины s в вершину t; σ_{st} – общее число кратчайших путей между всеми парами s и t.

Эта величина является индикатором самых влиятельных и важных элементов в сетях. Например, она необходима в изучении транспортных потоков и, как правило, называется загруженностью (нагрузкой) вершины, потому что характеризует и определяет долю проходящих через эту вершину кратчайших путей. Вершины с высокой степенью B являются самыми загруженными. В отличие от степени вершины понятие важности вершины отражает связанность графа.

3. Свойства сложных сетевых структур

Для того, чтобы анализировать сложные сети, необходимо получить некоторые данные, информацию об этой сети. Этому способствуют такие свойства сетей, как размер сети, сетевая плотность, центральность и централизация, эквивалентность.

Главным аспектом, который определяет размер сети, является число непосредственных связей. Размер сети вычисляется как (g-1), где g – количество вершин графа [1]. Таким образом, размер сети варьирует от 1, когда в графе всего лишь две вершины, и до максимального значения, которое вычисляется по формуле (g-1).

Под понятием «сетевая плотность» понимают силу связанности в сети или соотношение присутствующих и возможных связей для дихотомических измерений. Плотность связей неориентированного графа можно вычислить по формуле [1]:

$$(3) \quad \Delta = \frac{L}{\frac{g(g-1)}{2}} = \frac{2L}{g(g-1)},$$

где L – количество уже существующих связей в данном графе или подграфе.

Плотность ориентированного графа вычисляется по следующей формуле [1]:

(4) $$\Delta = \frac{L}{g(g-1)}.$$

При измерении степени центральности особое место занимает количество вершин в графе, с которым связана вершина, степень центральности которой необходимо измерить. В самом простом случае степень центральности вычисляется по формуле [1]:

(5) $$C_D(n_i) = d(n_i) = x_{i+} = \sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji},$$

где $C_D(n_i)$ – уровень центральности вершины n_i.

Для сравнения степеней центральности вершин между разными сетями, необходимо рассчитать стандартизированную оценку центральности по следующей формуле [1]:

(6) $$C_{D^*}(n_i) = \frac{d(n_i)}{g-1} = \frac{\sum_j x_{ij}}{g-1}.$$

Кроме того, можно рассчитать степень центральности для всей сети [1]:

(7) $$C_D = \frac{\sum_{i=1}^{g}\left[C_D(n^\bullet) - C_D(n_i)\right]}{\max\sum_{i=1}^{g}\left[C_D(n^\bullet) - C_D(n_i)\right]},$$

где $C_D(n_i)$ – степень вершины; $C_D(n^\bullet)$ – максимальная степень центральности вершины из всех рассчитанных.

Иногда, в соответствии с условием задачи, необходимо сравнить различные структуры и определить, которая же из них обеспечивает наилучшую централизацию вершин. Для этого существует формула, которая определяет нормированную степень центральности для всей сети [1]:

(8) $$C_D^{'} = \frac{\sum_{i=1}^{g}\left[C_D(n^\bullet) - C_D(n_i)\right]}{(g-1)(g-2)}.$$

Плотность центральности показывает, насколько близко вершина расположена относительно других вершин сети, то есть централь – это позиция, из которой необходимо делать минимальное количество шагов к остальным позициям группы. Формула для измерения плотности центральности [1]:

(9) $$C_C(n_i) = \left[\sum_{j=1}^{g} d(n_i, n_j) \right]^{-1},$$

где $C_C(n_i)$ – плотность центральности вершины; $d(n_i,n_j)$ – число связей между вершинами n_i и n_i и $i \neq j$. Максимальное значение индекса равно $(g\text{-}1)^{-1}$. Таким образом, нормированный коэффициент плотности вершины определить по следующей формуле [1]:

(10) $$C_C^{'}(n_i) = \frac{g-1}{\left[\sum_{j=1}^{g} d(n_i, n_j) \right]} = (g-1) C_C(n_i).$$

Нормированная плотность центральности сети [1]:

(11) $$C_C = \frac{\sum_{i=1}^{g} \left[C_C^{'}(n^{\bullet}) - C_C^{'}(n_i) \right]}{\frac{\left[(g-2)(g-1) \right]}{2g-3}},$$

где $C_C^{'}(n^{\bullet})$ – максимальное нормализованное значение центральности вершины.

Отдельно рассматриваются вершины, которые являются промежуточными для выполнения действия между другими вершинами. Такие вершины называются посредниками.

Центральность посредничества вершины рассматривается как контроль связей между определенными позициями и определяется по формуле [1]:

(12) $$C_B(n_i) = \sum_{j<k} \frac{g_{jk}(n_i)}{g_{jk}},$$

где $g_{jk}(n_i)$ – количество кратчайших путей, которые проходят через вершину n_i, g_{jk} – количество всех возможных кратчайших маршрутов между парами вершин n_j и n_k.

Так как максимальное количество связей между всеми вершинами графа равно $(g\text{-}1)(g\text{-}2)/2$, то нормированная оценка центральности посредничества вершины вычисляется по формуле [1]:

(13) $$C_B^{'}(n_i) = \frac{C_B(n_i)}{(g-1)(g-2)/2}.$$

Центральность группы вершин можно рассчитать по формуле [1]:

$$(14)\ C_B = \frac{2\sum_{i=1}^{g}\left[C_B(n^{\bullet}) - C_B(n_i)\right]}{(g-1)^2(g-2)},$$

где $C_B(n^{\bullet})$ - максимальная степень центральности вершины.

Стандартизированная оценка центральности сети можно определить на формуле [1]:

$$(15)\ C_B^{'} = \frac{\sum_{i=1}^{g}\left[C_B^{'}(n^{\bullet}) - C_B^{'}(n_i)\right]}{(g-1)}.$$

Часто при описании структурных свойств сети используют понятия сходства отдельных вершин. Выявление таких похожих позиций позволяет сделать граф более простым, соединяя воедино схожие по своим свойствам вершины. Если вершины n_i и n_j структурно эквивалентны, тогда их соответствующие строки и столбцы в матрице смежности будут равны между собой.

4. Вычисление параметров сложной сети в MatLAB

Одним из распространенных видов сложных сетевых структур являются социальные сети, объединения социальных позиций людей (социальных вершин и связей между ними). В рамках социальной сети социальные вершины делятся по разным признакам и критериям: по доходу, интересам, месте работы и так далее.

Рассыпанные в пространстве социальные связи, объединяясь, собираются в одну большую сложную сеть, которая охватывает огромное число индивидов (например, торговля в сети, телефонная связь, «всемирная паутина» Internet, телевидение и другие).

Рассмотрим в качестве примера сложной сетевой структуры социальную сеть студентов факультета экономики НИУ ВШЭ - Москва (одного из курсов). Исходные данные – это матрицы смежности вершин графов, которыми являются результаты опроса студентов.

Рассмотрены ориентированные графы, одинакового размера – 173х173 – по числу опрошенных студентов.

Сеть построена следующим образом:

1) граф дружбы: если студент А дружит со студентом Б, то проводится стрелка между вершинами А и Б (рис.1);

2) граф взаимопомощи: если студент А обращается за помощью к студенту Б, то между вершинами А и Б проводится стрелка (рис.2).

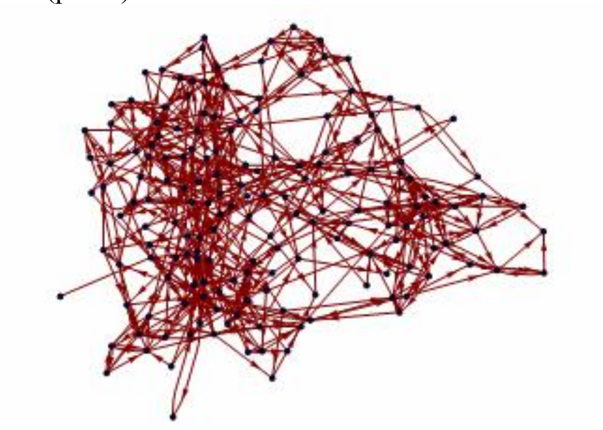

Рис.1.Граф дружбы

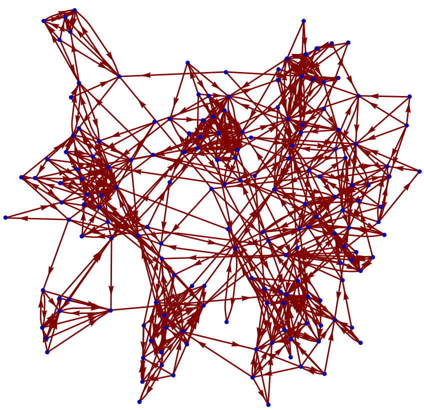

Рис. 2. Граф взаимопомощи

Для вычисления параметров сети была написана программа с использованием компьютерной среды MatLAB. Программа рассчитывает такие параметры как количество связей в графе, размер сети и плотность сети, степень центральности и стандартизированную оценку центральности каждого графа.

Для заданных графов дружбы и взаимопомощи были получены результаты, которые представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Параметры графа	*Граф дружбы*	*Граф взаимопомощи*
Размер	173	173
Количество связей	629	651
Плотность – формула(4)	0.0211386	0.0218779
Степень центральности - формула (7)	47.2	42.8
Нормированная степень центральности - формула (8)	0.0080	0.0072759
Нормированная плотность центральности - формула (11)	241.3369	243.08
Стандартизированная оценка центральности сети - формула (15)	2.3984e-004	5.6071e-004

Также были определены необходимые индивидуальные оценочные критерии для рассматриваемых сложных сетей:

Граф дружбы:

1) Взаимная дружба определилась у 185 пар;

2) Взаимная дружба определилась у 30 троек.

Графа взаимопомощи:

1) «Активные помощники» - студенты, активно оказывающие помощь – 57 человек;

2) Максимальное число студентов, которым помогали «активные помощники» - 5;

3) Студент, чаще всего обращающийся за помощью – 1 (номер студента 162).

Таким образом, разработанная программа является универсальной и может определять параметры сложной сети.

5. Заключение

В результате исследований можно сделать следующие выводы:

- были исследованы сложные сетевые структуры, а также особенности и характер взаимодействия между элементами;
- применены математические методы для анализа сетевых структур и разработана программа для вычисления параметров сложных сетей;
- рассмотрены особенности применения сетевых структур на примере социальных сетей.

Таким образом, сложные сетевые структуры имеют множество параметров, анализируя которые можно делать выводы об использовании этих сетей в различных ситуациях.

Литература

1. ГРАДОСЕЛЬСКАЯ Г.В. *Сетевые измерения в социологии. Учебное пособие*. – М.: Новый учебник, 2004. – 240 с.
2. ЕВИН И.А. *Введение с теорию сложных сетей* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. – Том 2, №2. – С. 121-141.
3. ОРЕ О. *Теория графов*. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
4. ШЕРЕШЕВА М.Ю. *Формы сетевого взаимодействия компаний.* – М. : Издат. дом Гос. ун-та «Высшей школы экономики». – 2010. – 339 с.
5. NEWMAN, M. The structure and function of complex networks. // SIAM Review, 2003. – Vol.45. – P.167-256.
6. PRICE, D. Networks of Scientific Papers. // Science, 1965. – Vol.149. – P. 510-515.
7. MILGRAM, S. The Small World Problem. //Psychology Today. 1967. – Vol.2. – P.60-67.

STUDY MODELS COMPLICATED NETWORK STRUCTURES

Tatyana Emelyanova, Arzamas Polytechnic Institute, Arzamas, Cand.Tech.Sci, docent (*emelyanova@apingtu.edu.ru*).
Anastasiya Zuzina, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, student (*emelyanova@apingtu.edu.ru*).

Abstract: *This article explores the complex network structures and their main characteristics. Analyzed the possibility oriented and undirected networks. Investigated complicated network structures based on social networks.*

Keywords: complicated network structures, graphs, graph centrality, network density graph, mediation vertices.