УДК 681.5.013
ББК 32.965.4+32.965.6

НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ПОЛУЧЕНИЮ РАЗРЕЖЕННЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Квинто Я. И.[1], **Поляк Б. Т.**[2], **Хлебников М. В.**[3], **Щербаков П. С.**[4]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматривается задача синтеза линейно-квадратичного регулятора разреженной структуры, использующего малое число управлений. Предлагается способ определения разреженной структуры регулятора и исследуется влияние степени разреженности регулятора на его качество. Предлагаемый подход продемонстрирован на примере динамики транспортного самолета.

Ключевые слова: линейно-квадратичный регулятор, полуопределённое программирование, линейные матричные неравенства, оптимальное управление.

Введение

Одной из первых областей применения идей разреженности, используемых в разнообразных областях, таких как обработка сигналов и изображений, распознавание образов и др., является ℓ_1-оптимизация. Восходящая к работе [8], она получила свое развитие в таких направлениях, как compressed sensing, ℓ_1-фильтрация и др. (см. [6, 9] и др.).

[1] *Квинто Яна Игоревна, кандидат технических наук (petriana@mail.ru).*
[2] *Поляк Борис Теодорович, доктор технических наук (boris@ipu.ru).*
[3] *Хлебников Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук (khlebnik@ipu.ru).*
[4] *Щербаков Павел Сергеевич, доктор физико-математических наук (sherba@ipu.ru).*

С математической точки зрения вместо трудной невыпуклой задачи минимизации числа ненулевых компонент вектора при выпуклых ограничениях рассматривается ее овыпукление, получаемое минимизацией l_1-нормы.

Вместе с тем, среди немногочисленных публикаций по построению разреженной обратной связи можно упомянуть [5], в которой разреженная структура оговорена заранее.

Данная работа посвящена уточнению подхода [7] к минимизации числа ненулевых строк или столбцов матрицы, связанного с детектированием нулевых строк в матрице линейно-квадратичного регулятора на основе техники линейных матричных неравенств [1, 2].

1. Разреженный линейно-квадратичный регулятор

Рассмотрим задачу построения линейно-квадратичного регулятора, использующего пониженное число управлений.

Как известно [1], в линейно-квадратичной задаче рассматривается система управления

(1) $$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$; пара (A, B) управляема. Закон управления в форме линейной обратной связи по состоянию

(2) $$u = Kx, \quad K \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

должен минимизировать квадратичный критерий качества

(3) $$J = \int\limits_0^\infty (x^\top Rx + u^\top Su)dt,$$

где $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — заданные положительно определенные матрицы.

Теорема 1. *[1]. Оптимальное значение функционала $\widehat{J}$ определяется решением задачи полуопределенного программирования*

(4) $$\gamma \longrightarrow \min$$

при ограничениях

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top & P & Y^\top \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -S^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} \gamma & x_0^\top \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *и скалярной переменной* γ.

При этом регулятор $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$ *стабилизирует систему, а* $\widehat{J} = x_0^\top \widehat{P}^{-1} x_0$.

Если в матрице регулятора K присутствуют нулевые строки, то при построении обратной связи будет задействовано пониженное число управлений, а именно, не будут использоваться управления, соответствующие номерам нулевых строк матрицы регулятора.

Вообще говоря, задача с таким нестандартным целочисленным критерием предполагает осуществление комбинаторного перебора всевозможных комбинаций нулевых строк в матрице регулятора K (с последующим решением для каждой из них задачи LQ-оптимизации (4)–(6)) и выбора оптимального варианта с учетом значения квадратичного критерия качества (3). Однако введение специальной матричной нормы и использование техники линейных матричных неравенств позволяют заменить исходную задачу на выпуклую задачу полуопределенного программирования (SDP), решение которой дает возможность получить эффективное приближение к ее оптимальному решению.

В [7] был предложен подход, предполагающий выполнение трех следующих этапов.

1 этап. Решаем исходную задачу линейно-квадратичной оптимизации (4)–(6) и находим матрицу $\widehat{Y}$, оптимальный регулятор $\widehat{K}$ и оптимальное значение критерия $\widehat{J}$.

2 этап. Определяем, какие строки в найденном регуляторе можно сделать нулевыми. Для этого вводим матричную норму

$$\|M\|_{r_1} = \sum_{i=1}^{m} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |m_{ij}|, \quad M \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

и решаем задачу SDP

$$(7) \qquad \min \|Y\|_{r_1} \quad \text{при} \quad (5),\ (6), \quad \gamma \leqslant \alpha \widehat{J},$$

относительно переменных P, Y и γ при некотором значении параметра $\alpha > 1$. В результате в матрице $\widehat{Y}$ будет присутствовать некоторое количество нулевых строк.

3 этап. Решается исходная задача (4)–(6) относительно переменных P, Y и γ, причем в структуре матрицы Y зафиксировано расположение нулевых строк, найденное на предыдущем этапе. В результате получаем регулятор K_{sp} со строчно-разреженной структурой.

Метод позволяет получать разреженные регуляторы с относительно малыми потерями по критерию качества.

2. Постановка задачи

Оказывается, что решение задачи на этапе 2 в большой степени зависит от выбора параметра α, поскольку $n_0 = n_0(\alpha)$, где n_0 — число ненулевых строк в матрице Y. При последовательном увеличении параметра α, начиная со значений, близких к единице, в матрице регулятора наблюдается появление все большего числа нулевых строк. При этом для каждого значения параметра $\alpha = \alpha'$ получается стабилизирующий регулятор $K_{\mathrm{sp}}(\alpha)$ с некоторым, не обязательно максимально возможным числом нулевых строк. На рис. 1 для некоторой системы с $m = 4$, $n = 10$ приведен пример зависимости количества нулевых строк регулятора от α, а также изменение степени устойчивости замкнутой системы в зависимости от α. Для разных систем границы и ширина интервала допустимых значений α, а также характер зависимости от α количества нулевых строк могут сильно отличаться. При этом непосредственый перебор по α приводит к большим вычислительным затратам, поскольку каждый раз приходится решать задачу SDP большой размерности. Более того, при $n \gg 1$ полный перебор в принципе невозможен. Поэтому возникает необходимость в разработке простого способа детектирования нулевых строк.

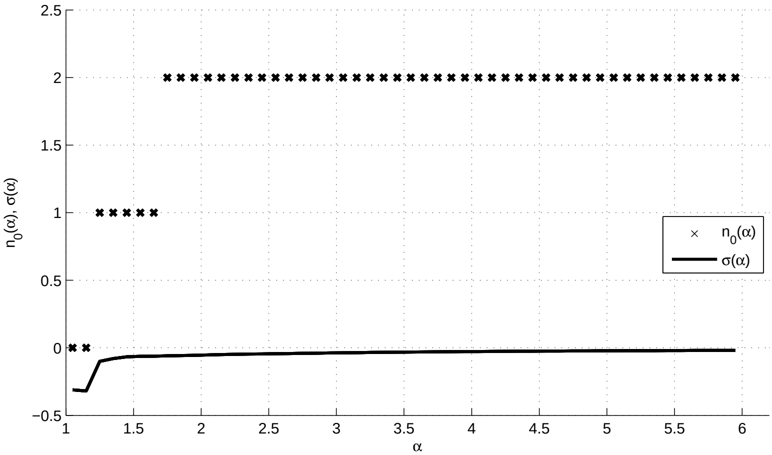

Рис. 1. Пример зависимости количества нулевых строк от α

При этом понятно, что количество нулевых строк в регуляторе влияет на «эффективность»: чем их больше, тем хуже значение критерия качества относительно оптимального.

3. Выбор нулевых строк

После решения на первом этапе задачи полуопределенного программирования рассмотрим «вклад» (v_i) строки y_i в 1-норму матрицы $\hat{Y}$:

$$v_i = \frac{\|\hat{y}_i\|_1}{\|\hat{Y}\|_1}, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Выдвинем гипотезу: чем меньше «вклад» строки в норму матрицы $\hat{Y}$, тем «безболезненнее» отказ от соответствующего ей управления.

Рассмотрим функции $v_i = v_i(\alpha)$. На начальном интервале возрастания α величины v_i в значительной степени изменяются, поэтому затруднительно произвести ранжирование v_i. Однако при достаточно больших α поведение величин v_i становится гораздо более устойчивым: они асимптотически сходятся к некоторым постоянным. В разных задачах этот «*интервал установления*» величин v_i различен и может быть определен перебором по α. Поэтому на втором этапе следует выбирать достаточно большое значение α_0. Чтобы убедиться в том, что для выбранного α_0 величины v_i уже «установились» (т.е. определились кандидаты на обнуление) можно взять дополнительное значение $\alpha_0' > \alpha_0$, вычислить для него v_i' и сравнить упорядочивание строк (оно должно совпасть с v_i).

Итак, при выделении нулевых строк будем опираться на полученное ранжирование строк по компонентам v_i. Возможны 2 варианта:

1. Естественными кандидатами на обнуление являются строки с $v_i \leqslant \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. При таком выборе максимально возможное количество выбранных кандидатов ограничено выбором ε, но потери по критерию качества наименьшие. Достоинствами этого способа являются «автоматическое» определение положения нулевых строк в матрице регулятора и близость получаемого решения к оптимальному; недостаток заключается в неопределенности выбора параметра ε.

2. Можно попытаться обнулять бóльшее количество строк (вплоть до $m - 1$), опираясь лишь на порядок следования кандидатов, а не значения v_i. В таком случае можно получить значительные потери по критерию качества, что является недостатком такого способа. В качестве достоинства такого подхода можно отметить возможность непосредственно влиять на количество нулевых строк, в то же время избегая перебора всевозможных вариантов их расположения.

4. Модификация алгоритма

1 этап. Решаем задачу (4)–(6), находим матрицу $\hat{Y}$, оптимальный регулятор $\hat{K}$ и соответствующее ему значение критерия $\hat{J}$.

2 этап. Выбираем некоторое $\alpha_0 >> 1$, решаем задачу (7) и для полученной матрицы $\hat{Y}$ вычисляем величины $v_i(\alpha)$, $i = 1, ..., m$. Располагаем номера строк по возрастанию v_i; удобно за-

писывать полученные значения в виде вектор-столбца с компонентами (n_i, v_i), $i = 1, ..., m$, где n_i – номера строк, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$. Для проверки правильности порядка строк выбираем $\alpha_0' > \alpha_0$, вычисляем v_i' и упорядочиваем номера строк по возрастанию v_i'. Сравниваем порядки номеров строк и выделяем строки – «кандидаты на обнуление».

Фиксируем выбранные нулевые строки в матричной переменной Y.

3 этап. Решаем исходную задачу при фиксированной структуре матрицы Y. Находим регулятор K_{sp}, вычисляем соответствующее значение критерия качества J_{sp}. Отношение

$$\text{perf} = \frac{J_{\text{sp}}}{\hat{J}}$$

показывает, насколько изменилось оптимальное значение критерия качества при выбранном расположении нулевых строк.

Отметим необходимость контролирования степени устойчивости системы и величины критерия качества J_{sp} при увеличении числа нулевых строк регулятора.

5. Пример

Рассмотрим линеаризованную модель динамики транспортного самолета (пример AC9 из библиотеки тестовых примеров COMP$l_e ib$ [4]): порядок системы $n = 10$, число управлений $m = 4$.

Построим оптимальный линейно-квадратичный регулятор $\hat{K}$ и регулятор со строчно-разреженной структурой K_{sp}, сравнив значения критерия качества при различных вариантах выбора нулевых строк. Будем полагать $R = S = I$ и $x_0 = (11...1)^\top$.

На первом этапе оптимальное значение функционала
$\hat{J} = 8{,}6881$.

На втором этапе положим $\alpha = 5$ и вычислим v_i, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$v = \begin{pmatrix} 4{,}0303 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0235 \\ 5{,}5260 \end{pmatrix}.$$

При упорядочивании v_i по возрастанию получаем следующую последовательность пар (n_i, v_i):

$$\begin{gathered} (2; 0{,}0000), \\ (3; 0{,}0235), \\ (1; 4{,}0303), \\ (4; 5{,}5260). \end{gathered}$$

На рис. 2 показано изменение величин $v_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Для $\alpha \geqslant 2$ наблюдается монотонность функций $v_i(\alpha)$, а начиная с $\alpha \approx 5$ их значения практически стабилизируются (см. рис. 2), поэтому выбранное значение $\alpha = 5$ достоверно ранжирует строки по величинам $v_i(5)$ и выделяет строки-«кандидаты».

Итак, строки с номерами $2, 3$ имеют вклады, близкие к нулю. Попробуем их положить нулевыми. Кроме того, можно попытаться избавиться еще от одного управления, считая нулевой строку с номером 1 (хотя её вклад намного больше единицы).

Оптимальный строчно-разреженный регулятор для случая, когда нулевыми являются строки, непосредственно определенные алгоритмом (с номерами $2, 3$), имеет вид:

$$K_{\text{sp}} = \begin{pmatrix} -0{,}2171 & 0 & 0 & 0{,}9508 \\ 0{,}1620 & 0 & 0 & 0{,}1567 \\ 1{,}2493 & 0 & 0 & -0{,}1971 \\ 1{,}2353 & 0 & 0 & -0{,}6789 \\ -0{,}3497 & 0 & 0 & 0{,}0271 \\ -0{,}4672 & 0 & 0 & 0{,}0039 \\ -0{,}0060 & 0 & 0 & 0{,}0159 \\ 0{,}0143 & 0 & 0 & 0{,}0057 \\ -0{,}0159 & 0 & 0 & -0{,}0132 \\ 0{,}1958 & 0 & 0 & -1{,}6924 \end{pmatrix},$$

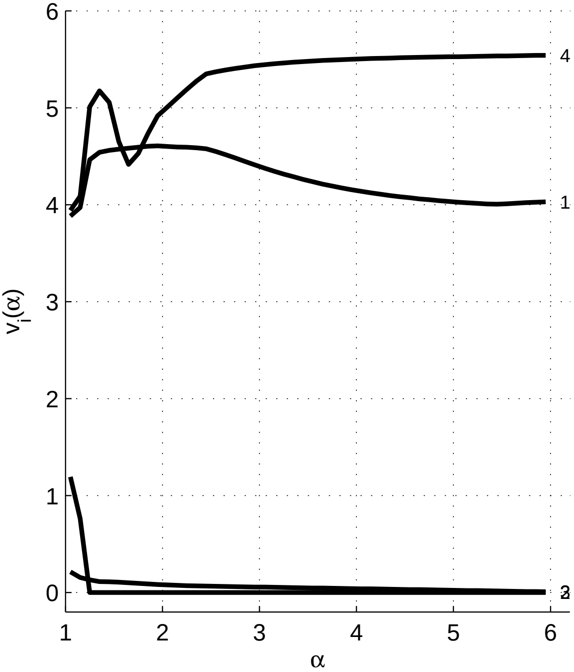

Рис. 2. Изменение величин $v_i(\alpha)$

при этом $J_{\text{sp}} = 10{,}1749$, т.е. значение критерия качества ухудшилось на 17% по сравнению с оптимальным значением.

Если же в регуляторе зафиксировать нулевые строки с номерами $1, 2, 3$, то значение критерия качества возрастет более чем в 400 раз по сравнению с оптимальным.

В таблице 1 приведено сравнение эффективности при последовательном обнулении одной, двух и трёх строк в регуляторе (от «лучшего» к «худшему»); полужирным шрифтом выделены варианты, включающие строки с наименьшими значениями $v_i(\alpha)$ (т.е. предложенные алгоритмом).

Таким образом, в рассматриваемом примере упорядочивание

Таблица 1. Сравнение эффективности при $n_0 = 1, 2, 3$

Номера нулевых строк (n_i)	Степень устойчивости системы (σ_{sp})	Эффективность (perf)
2	-0,4447	1,0501
3	-0,4447	1,1210
1	-4,5640e-004	423,6491
4	0	2,1940e+003
2, 3	-0,4447	1,1711
1, 2	-1,8555e-004	440,0591
1, 3	-4,3048e-004	407,0943
2, 4	0	2,3028e+003
3, 4	0	1,9241e+003
1, 4	0,0129	2,1878e+003
1, 2, 3	-1,5485e-004	404,2662
2, 3, 4	0	1,6119e+003
1, 2, 4	-	(нет решения ЛМН)
1, 3, 4	0,0129	2,1162e+003

строк по величинам $v_i(5)$ соответствует реальным потерям по критерию качества.

Заключение

Предложенный способ детектирования нулевых строк позволяет получать оптимальные линейно-квадратичные регуляторы строчно-разреженной структуры, т.е. использующие малое число управлений. Детектирование соответствующих строк в матрице регулятора может быть организовано как алгоритмически, так и путем последующей дооптимизации, избегая комбинаторного перебора решений.

Литература

1. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. *Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств.*. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 560 с.
2. BOYD S., EL GHAOUI L., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. – Philadelphia: SIAM, 1994.
3. MATVEEV A.S., SAVKIN A.V. *Estimation and Control over Communication Networks*. – Boston: Birkhäuzer, 2008.
4. LEIBFRITZ F. *COMPleib: COnstraint Matrix-optimization Problem library - a collection of test examples for nonlinear semidefinite programs, control system design and related problems. Tech.-Report 2004*. – URL: http://www.friedemann-leibfritz.de/COMPlib_Data/COMPlib_Main_Paper.pdf (дата обращения: 15.05.2014).
5. LIN F., FARDAD M., JOVANOVIĆ M.R. Design of optimal sparse feedback gains via the alternating direction method of multipliers // IEEE Trans. Automat. Control. – 2013. – Vol. 58, №9. – P. 2426–2431.
6. OZAY N., SZNAIER M., LAGOA C., CAMPS O. *A sparsification approach to set membership identification of a class of affine hybrid systems* // Proc. 47th IEEE Conf. Decision and Control. December 9–11, 2008. – P. 123–130.
7. POLYAK B., KHLEBNIKOV M., SHCHERBAKOV P. *An LMI Approach to Structured Sparse Feedback Design in Linear Control Systems* // Proc. 2013 European Control Conference. – Zurich: IEEE Control System Society, 2013. – P. 833-838.
8. TIBSHIRANI R. *Regression shrinkage and selection via the lasso* // J. Royal Stat. Soc. – 1996. – Vol. 58, Iss. 1. – P. 267–288.
9. TROPP J.A. *Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part II: Convex relaxation* // Sign.

Processing. – 2006. – Vol. 86. – P. 589–602.

CERTAIN EXPERIMENTS ON THE SPARSE CONTROLLERS DESIGN

Kvinto Yana I., Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (petriana@mail.ru).
Khlebnikov Mikhail V., Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (khlebnik@ipu.ru).
Shcherbakov Pavel S., Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (sherba@ipu.ru).
Polyak Boris T., Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (boris@ipu.ru).

Abstract: LQ-problem with a row-sparse controller reducing the number of controls is considered. We propose the simple method of detection the zero-rows in the controller matrix and investigate the dependence between the number of zero-rows and the efficiency of the controller. The approach is demonstrated via benchmark dynamical model of transport aircraft.

Keywords: LQ-problem, semidefinite programming, linear matrix inequalities, optimal control.