

УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА, АППРОКСИМАЦИИ¹

Щербаков П.С.²

(Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Обсуждается важное понятие множества достижимости динамических линейных систем, формулируются основные свойства, объясняются причины трудностей точной характеристики, предлагаются эффективные регулярные вычислительные средства для приближенного описания, основанные на понятии инвариантных эллипсоидов. Приводятся примеры.

Ключевые слова: линейные системы, внешние возмущения, множество достижимости, инвариантные эллипсоиды.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Объектом исследования в докладе является линейная динамическая система

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние (фазовая переменная), а $w \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, ограниченное в какой-либо норме. Изучается область фазового пространства

$$\mathcal{R}(T) = \{x(T) : \dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = 0, \quad \|w\| \leq 1\}$$

¹ Автор счастлив выразить глубокую благодарность Б.Т. Поляку и М.В. Хлебникову за возможность многолетнего плодотворного сотрудничества.

² Щербаков Павел Сергеевич, доктор физико-математических наук (cavour118@mail.ru).

которое может рассматриваться как неопределенность в состоянии системы, накопившаяся к моменту времени T под воздействием неизвестных возмущений. Это множество называется *множеством достижимости системы в момент времени T* . Понятно, что описание этого множества или построение его гарантированных внешних аппроксимаций является принципиально важным.

В докладе обсуждаются очевидные и менее очевидные свойства таких множеств: ограниченность для конечных T , выпуклость, центральная симметрия, вложенность по T и др.

Наиболее интересен случай устойчивых систем, в котором $\mathcal{R}(T)$ конечно при любом $T > 0$; множество $\mathcal{R}(\infty)$ называем просто множеством достижимости. Двумя существенными свойствами множеств достижимости является *инвариантность* и *притягиваемость*. Первое из них означает, что траектория системы, начавшись в достижимом множестве, останется в нем при любом возмущении во все моменты времени. Второе свойство означает, что траектория системы, начавшись вне достижимого множества стремится к нему (или попадает в него и остается внутри в соответствии с первым свойством).

В докладе рассматриваются два основных класса возмущений: сигналы, ограниченные либо в норме ℓ_2 , либо в норме ℓ_∞ . В первом случае нетрудно получить явное описание множества достижимости (через решение соответствующего уравнения Ляпунова) в виде эллипсоида.

Второй случай значительно более сложен, и сколько-нибудь точное описание невозможно при размерностях выше $n = 3$. Обсудив принципиальную возможность описания множества достижимости с помощью опорных полупространств (см. рис. 1), мы переходим к конструктивным методам построения внешних аппроксимаций. Все они основаны на отыскании квадратичных функций Ляпунова для устойчивой системы и характеризации *инвариантных эллипсоидов*, ограничивающих множество достижимости (см. рис. 2).

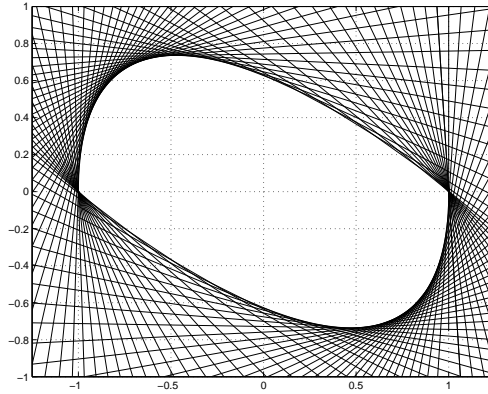


Рис. 1. Достижимое множество устойчивой системы второго порядка как пересечение опорных полуплоскостей.

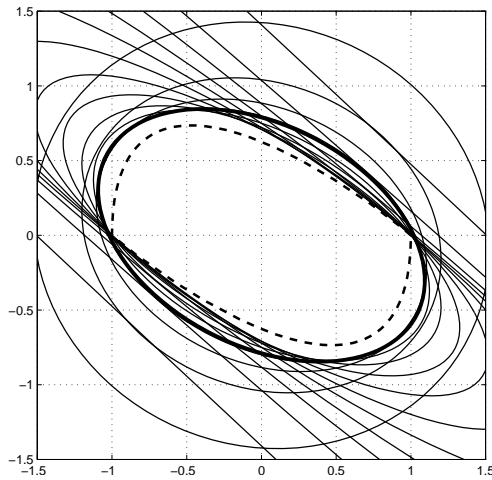


Рис. 2. Аппроксимация достижимого множества инвариантными эллипсами.

Показывается, каким образом находится минимальный по тому или иному критерию эллипсоид, обсуждаются вопросы точности аппроксимации, приводятся примеры. Также вводятся

некоторые сопутствующие понятия, такие как *ограничивающий эллипсоид*, *наихудшее возмущение* и др.

В заключительной части доклада формулируется и кратко обсуждается способ решения задачи об оптимальном подавлении возмущений — построении стабилизирующей обратной связи, минимизирующей размер инвариантного эллипсоида для замкнутой системы. Основным техническим средством является аппарат линейных матричных неравенств, описанию которого также уделяется некоторое внимание. Наконец, приводятся дальнейшие обобщения и развития рассмотренной техники.

Литература

1. ПОЛЯК Б.Т., ХЛЕБНИКОВ М.В., ЩЕРБАКОВ П.С. *Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств)*. – М.: ЛЕНАНД, 2014.
2. BLANCHINI F., MIANI S. *Set-Theoretic Methods in Control*. – Boston: Birkhäuser, 2008.
3. BOYD S., EL GHAOU L., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. – Philadelphia: SIAM, 1994.

REACHABLE SETS OF LINEAR SYSTEMS: DEFINITIONS, BASIC PROPERTIES, APPROXIMATIONS

Pavel Shcherbakov, Institute of Control Sciences, RAS, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495)334-76-41.

Abstract: The paper deals with an important notion of reachable sets for linear dynamical systems. We formulate basic properties, explain inherent difficulties in the exact characterization, and propose regular efficient tools for approximate description based on the concept of invariant ellipsoids. Numerical examples are provided.

Keywords: linear systems, exogenous disturbances, reachable sets, invariant ellipsoids.