УДК 021.8 + 025.1
ББК 78.34

H_∞ СТАБИЛИЗАЦИЯ И КОМПЕНСАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К УПРАВЛЕНИЮ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ[1]

Емельянов М.А.[2],
(*Арзамасский политехнический институт Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, Арзамас*)

Повторяющиеся процессы характеризуются тем, что распространяют информацию по двум независимым направлениям. Они возникают при моделировании промышленных систем таких, как прокат металла и могут использоваться также в качестве базовых моделей для проектирования законов управления. В данной статье рассматривается задача стабилизации и компенсации возмущений с приложением к нелинейным повторяющимся процессам, где устойчивость характеризуется в терминах векторных функций Ляпунова, а задача компенсации возмущений решается с использованием H_∞ нормы. Для процессов с информационными нарушениями в канале обмена информацией, моделируемыми марковской цепью с конечным числом состояний, решается задача построения управления с итеративным обучением при наличии параметрических неопределенностей.

[1] *Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России №2.1748.2014/К и при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-08-01092_а).*
Автор выражает благодарность проф. П.В. Пакшину, проф. К. Галковскому и проф. Э. Роджерсу за ценное обсуждение содержания статьи.

[2] *Михаил Александрович Емельянов, аспирант, (607227, г. Арзамас, ул. Калинина, д.19, АПИ НГТУ им. Р.Е. Алексеева, кафедра прикладной математики, MikhailEmelianovArzamas@gmail.com).*

Ключевые слова: Нелинейные системы, дифференциальные процессы, повторяющиеся процессы, устойчивость, H_∞ норма, неопределенные параметры, информационные нарушения, управление с итеративным обучением.

Введение

Многие производственные системы выполняют последовательность циклов, называемых повторениями, каждый из которых протекает в течение определенного ограниченного отрезка времени, называемого длительностью повторения [1]. После окончания каждого цикла, система возвращается в начальное состояние и начинает выполнять новый цикл. Выходная переменная в таких системах называется профилем повторения. Характерным примером, который описан в [1] со ссылками на оригинальные авторские работы, является конвейер для резки угля, где профилем повторения (прохода) является верхняя часть угольного пласта выше нулевой линии, и целью является извлечение максимального количества угля за проход. Режущая машина опирается на предыдущий профиль прохода для того, чтобы произвести следующий проход, при этом не исключено, что могут возникнуть колебания профиля, амплитуда которых будет возрастать от повторения к повторению.

При появлении подобных колебаний, процесс должен быть остановлен для того, чтобы скорректировать профиль вручную для их гашения с целью восстановления нормального процесса резания и предотвращения возможных механических повреждений режущей машины. Альтернативой является использование управляющих воздействий, направленных на гашение указанных колебаний, но задача стабилизации в данном случае не может быть решена стандартными методами теории управления, поскольку здесь не учитывается двумерный характер системы, а именно то, что динамика системы зависит от двух переменных: времени на текущем цикле и номера цикла. Перед началом каждого следующего повторения, необходимо произвести сброс начального состояния системы. Для исследования таких систем в рамках линейных моделей была разработана строгая теория устойчивости [1] основанная на изучении свойств определенного линейного оператора в соответствующем банаховом пространстве. Примерами систем управления с итеративным обучением, где результаты были доведены до эксперимента, который подтвердил их высокую эффективность, являются работы [2] и [3], в которой получены необходимые и достаточные условия равновесия по Нэшу в игре с N участниками в рамках повторяющихся процессов с 2D динамикой с интересным приложением к моделированию простейшей сети газовых трубопроводов. Существующие алгоритмы построения управления для повторяющихся процессов не могут быть применены в нелинейной постановке, кроме случая если удается линеаризовать модель, и следовательно возникает необходимость в разработке строгой теории устойчивости для нелинейных повторяющихся процессов. Примером может служить работа [4], где управление с итеративным обучением применяется к конвейерной системе высокоточного лазерного напыления металла.

В данной работе получены новые результаты по устойчивости нелинейных дифференциальных повторяющихся процессов, с использованием нестандартного развития метода векторных функций Ляпунова. Далее задача построения управления и стабилизации возмущений решается путем использования H_∞ управления.

Эти результаты распространяются на модели, учитывающие возможные случайные отказы, перерывы в поступлении информации и другие факторы, которые можно рассматривать как случайные переключения. Такие переключения параметрического или структурного характера обычно описываются однородной марковской цепью с конечным числом состояний. Подобные модели в литературе получили название системы с марковскими скачками или системы случайной структуры [5].

1. Описание системы и постановка задачи

Рассмотрим нелинейный повторяющийся процесс с длительностью повторения $T < \infty$ который описываются на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ следующей моделью в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= f_1(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), w_k(t)), \\ y_{k+1}(t) &= f_2(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), w_k(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

где k — номер повторения (итерации) и $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния на текущей итерации, $y_k(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор профиля повторения, $u_k(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — входной вектор $w_k(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ — вектор возмущений; f_1 и f_2 нелинейные функции, такие что $f_1(0,0,0,0) = 0$, $f_2(0,0,0,0) = 0$, x и y — непрерывные функции, зависящие от t. Граничные условия, то есть, последовательность векторов начального состояния и начальный профиль повторения считаются известными и имеют вид

$$\begin{aligned} x_{k+1}(0) &= d_{k+1},\ k \geqslant 0, \\ y_0(t) &= f(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{aligned} \tag{2}$$

где элементы вектора $d_{k+1} \in \mathbb{R}^{n_x}$ известные постоянные; элементы вектора $f(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — известные функции t, $0 \leqslant t \leqslant T$. Кроме того, обозначив $|q|$ — евклидову норму вектора q, предположим, что $f(t)$ и d_{k+1} удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} &|f(t)|^2 \leqslant M_f, \\ &|d_{k+1}|^2 \leqslant \kappa_d z_d^k,\ k = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{3}$$

где $M_f > 0$ — конечный скаляр и $0 < z_d < 1$ определяет скорость сходимости последовательности начальных векторов состояния. Далее всюду будем считать, что граничные условия системы удовлетворяют (3).

Основой построения стабилизирующих управлений для линейных повторяющихся процессов является понятие устойчивости вдоль повторений. [1, 2]. Это понятие основано на свойствах линейного оператора в банаховом пространстве и, следовательно, не может быть использовано в случае нелинейных систем.

Определения, которые приводятся далее, позволяют расширить теорию и применить её для случая нелинейных процессов.

Определение 1. *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс* (1) *с граничными условиями* (2) *называется экспоненциально устойчивым если при* $w_k(t) = 0$

(4) $\quad |x_k(t)|^2 + |y_k(t)|^2 \leqslant \kappa \exp(-\lambda t)\zeta^k, \; , \lambda > 0, \; 0 < \zeta < 1,$

где ζ *и* λ *не зависят от* T.

Предположим, что $w_k(t) \in L_2([0,\infty),[0,\infty))$ и определим

$$||w||_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} |w_k(t)|^2 dt} < \infty.$$

Определение 2. *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс* (1) *с граничными условиями* (2) *называется экспоненциально устойчивым с* H_∞ *уровенем компенсации возмущений* γ *если он является экспоненциально устойчивым и при* $f(t) \equiv 0$ *и* $d_k \equiv 0$

(5) $$||y||_2 < \gamma ||w||_2.$$

Пусть $\bar{x}_{k+1}(t) = [x_{k+1}(t)^{\mathrm{T}} \; y_k(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, тогда запишем $u \in \Phi$ если $u = \varphi(\bar{x})$, где φ нелинейная функция вида $\varphi(0) = 0$. Задача заключается в построении такого закона управления $u \in \Phi$ чтобы система (1) была экспоненциально устойчивой. Аналогично, задача H_∞ управления сводится к построению такого $u \in \Phi$ чтобы система (1) была экспоненциально устойчивой с H_∞ уровнем компенсации возмущений γ.

2. Стабилизация и H_∞ управление

2.1. УСТОЙЧИВОСТЬ

Для получения условий экспоненциальной устойчивости (1) с граничными условиями (2) рассмотрим следующую векторную функцию Ляпунова

(6) $$V(x,y) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t)) \\ V_2(y_k(t)) \end{bmatrix},$$

$V_1(x) > 0,\ x \neq 0,\quad V_2(y) > 0,\ y \neq 0,\quad V_1(0) = 0,\ V_2(0) = 0$. Оператор дивергенции для данной функции вдоль траекторий системы (1) будет иметь вид

$$\text{(7)}\quad \mathrm{div}V(x_{u,k+1}(t), y_{u,k}(t)) = \frac{dV_1(x_{u,k+1}(t))}{dt} + \Delta_k V_2(y_{u,k}(t)),$$

где $\Delta_k V_2(y_{u,k}(t)) = V_2(y_{u,k+1}(t)) - V_2(y_{u,k}(t))$, индекс u показывают что повторяющийся процесс имеет вид (1) с граничными условиями (2) и известной функцией $u_{k+1}(t)$. В дальнейшем индекс может быть опущен. Пусть $L(x,u)$ нелинейная функция, удовлетворяющая условию:

$$\text{(8)}\qquad L(\bar{x}, u) \geqslant c(|\bar{x}|^2 + |u|^2),$$

для некоторого $c > 0$.

Теорема 1. *Допустим, что для некоторого $u = \varphi(\bar{x}) \in \Phi$ неравенство*

$$\text{(9)}\qquad \mathrm{div}V(x_{\varphi,k+1}(t), y_{\varphi,k}(t)) + L(\bar{x}_{\varphi,k+1}, \varphi(\bar{x}_{\varphi,k+1})) \leqslant 0$$

имеет решение $V(x,y) = [V_1(x)\ V_2(y)]^{\mathrm{T}}$, которое удовлетворяет соотношениям

$$\text{(10)}\qquad c_1|x|^2 \leqslant V_1(x) \leqslant c_2|x|^2,$$

$$\text{(11)}\qquad c_1|y|^2) \leqslant V_2(y) \leqslant c_2|y|^2,$$

где $c_1 > 0,\ c_2 > 0$. Тогда нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс, полученный применением $u = \varphi(\bar{x})$ к (1) *с граничными условиями* (2)*, является экспоненциально устойчивым.*

Доказательство. Пусть $(V(x,y), \varphi(\bar{x})$ удовлетворяют (9), тогда нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс (при отсутствии возмущений) может быть записан как

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= \bar{f}_1(x_{k+1}(t), y_k(t), \varphi(x_{k+1}(t), y_k(t)),\\ y_{k+1}(t) &= \bar{f}_2(x_{k+1}(t), y_k(t), \varphi(x_{k+1}(t), y_k(t)), \end{aligned}$$

где $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ нелинейные функции виде $\bar{f}_1(0,0,0) = 0$ и $\bar{f}_2(0,0,0) = 0$. Из (8) и (9) следует что

$$\text{(13)}\qquad \mathrm{div}V(x_{\varphi,k+1}(t), y_{\varphi,k}(t)) \leqslant -c(|x_{\varphi,k+1}|^2 + |y_{\varphi,k}(t)|^2.$$

Следовательно необходимо показать что нелинейный повторяющийся процесс (12) является экспоненциально устойчивым при выполнении условий (10), (11) и (13).

Из неравенства (13) следует что существуют такие $c_3 < c_2$ что $z_d^{\frac{1}{2}} < 1 - \frac{c_3}{c_2} < 1$. Далее из неравенств (10), (11) и (13) следует

$$\text{(14)}\quad \frac{dV_1(x_{k+1}(t))}{dt} + \lambda V_1(x_{k+1}(t)) + V_2(y_{k+1}(t)) - \zeta V_2(y_k(t)) \leqslant 0,$$

где $\lambda = \frac{c_3}{c_2}$, $\zeta = 1 - \frac{c_3}{c_2} \in (0, 1)$. Разрешив неравенство (14) относительно $V_1(x_{k+1}(t))$ получим

$$\text{(15)}\quad V_1(x_{k+1}(t)) \leqslant V_1(x_{k+1}(0))\mathrm{e}^{-\lambda t} - \\ - \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}[V_2(y_{k+1}(s)) - \zeta V_2(y_k(s))]ds.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} W_{k+1}(t) &= V_1(x_{k+1}(0))\mathrm{e}^{-\lambda t} - V_1(x_{k+1}(t)), \\ H_k(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} V_2(y_k(s))ds, \end{aligned}$$

это позволяет переписать выражение (15) в следующем виде

$$\text{(16)}\qquad H_{k+1}(t) \leqslant \zeta H_k(t) + W_{k+1}(t).$$

Разрешив неравенство (16) относительно H получим

$$\text{(17)}\qquad H_n(t) \leqslant \zeta^n H_0(t) + \sum_{k=1}^{N} W_k(t)\zeta^{n-k}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} V_1(x_k(t))\zeta^{n-k} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} V_2(y_n(s))ds \leqslant \\ \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n} V_1(x_k(0))\zeta^{n-k} + \\ + \zeta^n \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} V_2(y_0(s))ds.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$(18)\quad \mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{k=1}^{n}V_1(x_k(t))\zeta^{-k}+\zeta^{-n}\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda s}V_2(y_n(s))ds\leqslant$$

$$\leqslant \zeta^{-n}\sum_{k=1}^{n}V_1(x_k(0))\zeta^{n-k}+$$

$$+\,\mathrm{e}^{\lambda t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}V_2(y_0(s))ds.$$

Оценив правую часть выражения (18) с учетом граничных условий (2) получим

$$(19)\quad \zeta^{-n}\sum_{k=1}^{n}V_1(x_k(0))\zeta^{n-k}+\mathrm{e}^{\lambda t}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}V_2(y_0(s))ds\leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2M_f(\mathrm{e}^{\lambda T}-1)}{\lambda}+c_2\kappa_d\sum_{k=}^{\infty}\zeta^k=$$

$$=\frac{c_2M_f(\mathrm{e}^{\lambda T}-1)}{\lambda}+\frac{c_2\kappa_d}{1-\zeta}=C$$

из неравенств (18) и (19) следует что

(20) $\quad c_1|x_n(t)|^2\zeta^{-n}\mathrm{e}^{\lambda t}\leqslant C,$ для всех $t\in[0,\infty],\ n=0,1,...$

и

(21) $\quad c_1t|y_n(\tau)|^2\zeta^{-n}\mathrm{e}^{\lambda\tau}\leqslant C,$ для всех $\tau\in[0,\infty],\ n=0,1,...$

Отсюда нетрудно видеть, что справедливо (4). Теорема доказана.

2.2. H_∞ УПРАВЛЕНИЕ

Рассмотрим нелинейный повторяющийся процесс вида (1) где граничные условия имеют вид (2) с произвольной функцией $w_k(t)\in L_2([0,\infty),[0,\infty))$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Допустим, что для некоторого $u=\varphi(\bar{x})\in\Phi$ неравенство*

$$(22)\quad \mathrm{div}V(x_{\varphi,k+1}(t),y_{\varphi,k}(t))+\varepsilon(|x_{\varphi,k+1}(t)|^2+$$

$$+\,|y_{\varphi,k}(t)|^2-\gamma^2|w_k(t)|^2)\leqslant 0,$$

будет иметь решение в виде функции $V(x,y)$ удовлетворяющее (10) *и* (11)*, где ε – некоторый положительный скаляр. Тогда* *нелинейный повторяющийся процесс полученный в результате применения $u = \varphi(\bar{x})$ к системе (1) с граничными условиями (2) является экспоненциально устойчивым с H_∞ уровнем компенсации возмущений γ.*

Доказательство. Пусть $(V(x,y), \varphi(\bar{x}))$ есть решение неравенства (22). Из (22) следует, что если $w \equiv 0$, то

$$\mathrm{div} V(x_{\varphi,k+1}(t), y_{\varphi,k}(t)) \leqslant -\varepsilon(|x_{\varphi,k+1}(t)|^2 + |y_{\varphi,k}(t)|^2) \tag{23}$$

и согласно теореме 1 система (1) является экспоненциально устойчивой. Предположим, что $w_k(t) \in L_2([0,\infty),[0,\infty))$, $f(t) \equiv 0$ и $d_k \equiv 0$. Неравенство (23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dV_1(x_{\varphi,k+1}(t))}{dt} + V_2(y_{\varphi,k+1}(t)) - V_2(y_{\varphi,k}(t)) \leqslant \\ &\leqslant -\varepsilon(|x_{\varphi,k+1}(t)|^2 + |y_{\varphi,k}(t)|^2 - \gamma^2|w_k(t)|^2) \leqslant \\ &\leqslant -\varepsilon(|y_{\varphi,k}(t)|^2 - \gamma^2|w_k(t)|^2). \end{aligned} \tag{24}$$

Интегрируя и суммируя обе части неравенства (24), совершая перестановку слагаемых с учетом нулевых граничных условий, получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\int_0^t |y_{\varphi,k}(s)|^2 ds \leqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\int_0^t \gamma^2|w_k(s)|^2 ds - \\ &-\sum_{k=0}^{n} V_1(x_{\varphi,k+1}(t)) - \int_0^t V_2(y_{\varphi,k}(t)) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{n}\int_0^t \gamma^2|w_k(s)|^2 ds. \end{aligned} \tag{25}$$

Полагая в (25) $n,\ t \to \infty$, получим, что справедливо неравенство (5) выполняется и теорема доказана.

3. Нелинейные дифференциальные повторяющиеся процессы при наличии нарушений

В данной главе полученные результаты распространены для случая нелинейных дифференциальных повторяющихся процессов при наличии нарушений. Нарушения описываются моделью в пространстве состояний в виде скачкообразных изменений параметров или структуры, управляемых однородной марковской цепью с конечным числом состояний. Такие модели получили название систем с марковскими скачками или систем со случайной структурой [6, 5].

Пусть нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс описывается следующей моделью в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= g_1(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), w_k(t), r(t)), \\ y_{k+1}(t) &= g_2(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), w_k(t), r(t)), \end{aligned} \tag{26}$$

где $r(t)$ $(t \geqslant 0)$ представляет собой марковскую цепь с дискретным числом состояний $\mathbb{N} = \{1, \ldots, \nu\}$ и вероятностями перехода вида

$$\mathrm{P}(r(t+\tau) = j \mid r(t) = i) = \begin{cases} \pi_{ij}\tau + o(\tau), & \text{if} \quad j \neq i, \\ 1 + \pi_{ii}\tau + o(\tau), & \text{if} \quad j = i, \end{cases} \tag{27}$$

$i, j = 1, \ldots, \nu,$ $\pi_{ij} > 0,$ $\pi_{ii} = -\sum\limits_{i \neq j}^{\nu} \pi_{ij};$ g_1 и g_2 – нелинейные функции, такие, что для всех $r \in \mathbb{N}$ $g_1(0,0,0,0,r) = 0, g_2(0,0,0,0,r) = 0$, x и y непрерывные функции, зависящие от t. Дальнейшие обозначения аналогичны принятым в (1) и граничные условия вновь задаются в виде (2).

Дадим определение экспоненциальной устойчивости и H_∞ компенсации возмущений для системы (26).

Определение 3. *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс* (26) *с граничными условиями* (2) *экспоненциально устойчив в среднем квадратическом если*

$$\mathrm{E}[|x_k(t)|^2 + |y_k(t)|^2] \leqslant \kappa \exp(-\lambda t)\zeta^k, \ , \lambda > 0, \ 0 < \zeta < 1, \tag{28}$$

где E *– оператор математического ожидания, причем* ζ *и* λ *не зависят от* T.

Предположим, что $w_k(t) \in L_2([0,\infty),[0,\infty))$ и определим

$$||w||_{\mathrm{E}} = \sqrt{\mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}|w_k(t)|^2 dt\right]} < \infty.$$

Определение 4. *Нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс* (26) *с граничными условиями* (2) *является экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом с заданным уровнем компенсации возмущений* γ *если выполняется условие экспоненциальной устойчивости и для всех* $w_k(t) \in L_2([0,\infty),[0,\infty)) \neq 0$ *при* $f(t) \equiv 0$ *и* $d_k \equiv 0$

(29) $$||y||_{\mathrm{E}} < \gamma ||w||_{\mathrm{E}}.$$

Предположим, что $u = \varphi(\bar{x}) \in \Phi$. Для получения условий экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом системы (26), применим метод векторной функции Ляпунова

(30) $$V(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t), r(t)) \\ V_2(y_k(t), r(t)) \end{bmatrix},$$

где $V_1(x,r) > 0,\ x \neq 0,\ V_2(y,r) > 0,\ y \neq 0,\ V_1(0,r) = 0,\ V_2(0,r) = 0$

Рассмотрим операторы $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$,заданные вдоль траекторий системы (26):

$$\mathcal{D}_1 V(\xi,\eta,i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(t+\Delta t), r(t+\Delta t) - V_1(x_{k+1}(t), r(t)) \mid \\ \mid x_{k+1}(t) = \xi, y_k(t) = \eta, r(t) = i],$$

$$\mathcal{D}_2 V(\xi,\eta,i) = \mathrm{E}[V_2(y_{k+1}(t), r(t)) - V_2(y_k(t), r(t)) \mid \\ \mid x_{k+1}(t) = \xi, y_k(t) = \eta, r(t) = i].$$

Пусть $V_1(\xi,i)$ дифференцируема по ξ для каждого $i \in \mathbb{N}$ тогда, в силу (26) и (27), получим, что

(31) $$\mathcal{D}_1 V(\xi,\eta,i) = \\ = g_1^{\mathrm{T}}(\xi,\eta,\varphi(\bar{\xi}),w,i)\frac{\partial V_1(\xi,i)}{\partial \xi} + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{i,j} V_1(\xi,j),$$

где $\bar{\xi} = [\xi^{\mathrm{T}}\ \eta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Запишем стохастический аналог оператора дивергенции $\mathcal{D}$:

(32) $$\mathcal{D}V(\xi,\eta,i) = \mathcal{D}_1 V(\xi,\eta,i) + \mathcal{D}_2 V(\xi,\eta,i))$$

Теорема 3. *Рассмотрим нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс вида* (26) *с граничными условиями* (2) *при* $u = \varphi(\bar{x}) \in \Phi$. *Предположим что неравенство*

$$\mathcal{D}V(\xi, \eta, i) + L(\bar{\xi}, \varphi(\bar{\xi})) \leqslant 0 \tag{33}$$

имеет решение $V(x, y) = [V_1(x)\ V_2(y)]^{\mathrm{T}}$ *, которое удовлетворяет* (10) *и* (11). *Тогда данный процесс является экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом.*

Доказательство. Из выражений (8) и (33) следует, что

$$\mathcal{D}V(\xi, \eta, i) \leqslant -c(|\xi|^2 + |\eta|^2. \tag{34}$$

Из неравенства (34) легко увидеть что существуют такие $c_3 < c_2$ что $z_d^{\frac{1}{2}} < 1 - \frac{c_3}{c_2} < 1$ и из неравенств (10), (11) и (34) имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathcal{D}_1 V(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t))] + \lambda \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(t), r(t))] + \\ + \mathrm{E}[V_2(y_{k+1}(t), r(t))] - \zeta \mathrm{E}[V_2(y_k(t), r(t))] \leqslant 0, \end{aligned} \tag{35}$$

где $\lambda = \frac{c_3}{c_2}$, $\zeta = 1 - \frac{c_3}{c_2} \in (0, 1)$. Разрешив неравенство (35) относительно $V_1(x_{k+1}(t))$ получим

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(t), r(t))] \leqslant \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(0), r(0))]\mathrm{e}^{-\lambda t} - \\ - \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \mathrm{E}[V_2(y_{k+1}(s), r(s)) - \zeta V_2(y_k(s), r(s))] ds. \end{aligned} \tag{36}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} W_{k+1}(t) &= \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(0), r(0))\mathrm{e}^{-\lambda t} - V_1(x_{k+1}(t), r(t))], \\ H_k(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \mathrm{E}[V_2(y_k(s), r(s))] ds \end{aligned}$$

и запишем неравенство (36) в следующем виде

$$H_{k+1}(t) \leqslant \zeta H_k(t) + W_{k+1}(t). \tag{37}$$

Решая неравенство (37) относительно H получим

$$H_n(t) \leqslant \zeta^n H_0(t) + \sum_{k=1}^{N} W_k(t) \zeta^{n-k} \tag{38}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[V_1(x_k(t), r(t))]\zeta^{n-k} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \mathrm{E}[V_2(y_n(s), r(s))]ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[V_1(x_k(0), r(0))]\zeta^{n-k} +$$

$$+ \zeta^n \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \mathrm{E}[V_2(y_0(s), r(s))]ds.$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$\mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[V_1(x_k(t), r(t))]\zeta^{-k} + \zeta^{-n} \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda s} \mathrm{E}[V_2(y_n(s), r(s))]ds \leqslant$$

$$\leqslant \zeta^{-n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}[V_1(x_k(0), r(0))]\zeta^{n-k} +$$

$$+ \mathrm{e}^{\lambda t} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} \mathrm{E}[V_2(y_0(s), r(s))]ds$$

остальная часть доказательства такая же как и в теореме 1 с очевидными изменениями в обозначениях.

Рассмотрим нелинейный повторяющийся процесс вида (26) с произвольными $w_k(t) \in L_2([0,\infty), [0,\infty))$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть для некоторого* $u = \varphi(\bar{x}) \in \Phi$ *неравенство*

$$\mathcal{D}V(\xi, \eta, i) + \varepsilon(|\xi|^2 + |\eta|^2 - \gamma^2 |w|^2) \leqslant 0,$$

где ε *- положительный скаляр, имеет решение* $V(x, y)$*, которое удовлетворяет* (10) *и* (11)*. Тогда нелинейный дифференциальный повторяющийся процесс, получающийся в результате применения* $u = \varphi(\bar{x})$ *к* (26), (2) *является экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом с* H_∞ *уровнем компенсации возмущений* γ.

Доказательство. Пусть $(V(x,y),\varphi(\bar{x}))$ – решение неравенства (39). Из неравенства (39) следует что если $w \equiv 0$, то

$$\mathcal{D}V(\xi,\eta,i) \leqslant -\varepsilon(|\xi|^2+|\eta|^2) \tag{39}$$

и по теореме 3 отсюда следует, что система (26) экспоненциально устойчива в среднем квадратическом. Предположим, что $w_k(t) \in L_2([0,\infty),[0,\infty))$, $f(t) \equiv 0$ и $d_k \equiv 0$. Из неравенства (39) имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathcal{D}_1 V(x_{k+1}(t),r(t))] + \mathrm{E}[V_2(y_{k+1}(t),r(t)) -\\ - V_2(y_k(t),r(t))] \leqslant -\varepsilon\mathrm{E}[(|x_{k+1}(t)|^2+|y_k(t)|^2] -\\ -\gamma^2\mathrm{E}[|w_k(t)|^2)] \leqslant -\varepsilon\mathrm{E}[|y_{\varphi,k}(t)|^2-\gamma^2|w_k(t)|^2].\end{aligned} \tag{40}$$

Интегрируя и суммируя обе части неравенства (40), совершая перестановку слагаемых и применив нулевые граничные условия получим

$$\begin{aligned}\varepsilon\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{n}\int_0^t |y_{\varphi,k}(s)|^2ds] \leqslant \varepsilon\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{n}\int_0^t \gamma^2|w_k(s)|^2ds] -\\ -\sum_{k=0}^{n}\mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(t),r(t)) - \int_0^t V_2(y_k(t),r(t))] \leqslant\\ \leqslant \varepsilon\mathrm{E}[\sum_{k=0}^{n}\int_0^t \gamma^2|w_k(s)|^2ds].\end{aligned} \tag{41}$$

Полагая в неравенстве (41) $n,\ t\to\infty$ получим, что выпол няется (29) и теорема доказана.

4. Управление с итеративным обучением при наличии неопреленностей и нарушений в информационном канале

В данной главе полученные результаты применяются для построения закона управления с итеративным обучением для линейной системы, описываемой следующей моделью в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t),\\ y(t) &= C(\delta(t),r(t))x(t),\end{aligned} \tag{42}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояний, $u \in \mathbb{R}^m$ - вектор входных значений, $y \in \mathbb{R}^p$ - вектор выходных значений и $\delta \in \mathbb{R}^N$ - вектор неопределённых параметров в канале информационного взаимодействия, $r(t)$ - марковская цепь с конечным числом состояний $\mathbb{N} = \{1, \ldots, \nu\}$ соответствующим числу возможных нарушений и вероятностями перехода, описываемыми (27)

Неопределённости, связанные с динамикой системы, носят аффинный характер с возможными вариациями относительно центральной номинальной модели, описанные матрицами $(C(r))$ вдоль осей $(C_j(r))$ имеют вид:

(43) $$C(\delta(t), r) = C + \sum_{j=1}^{N} \delta_j(t) C_j(r),\ r \in \mathbb{N},$$

где N - размерность вектора неопределенностей. Каждый $\delta_j(t)$ из неравенства (42) и (43) ограничен на интервале

(44) $$\underline{\delta}_j(t) \leqslant \delta_j(t) \leqslant \overline{\delta}_j(t).$$

Множество возможных значений δ обозначим через $\boldsymbol{\Delta}$, его конечное множество вершин определится как

(45) $$\boldsymbol{\Delta}_v = \left\{ \delta(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) & \ldots & \delta_N(t) \end{pmatrix} : \delta_j(t) \in \{\underline{\delta}_j, \overline{\delta}_j\} \right\},$$

Чтобы сформулировать задачу синтеза управления с итеративным обучением, введем целочисленную величину k, определяющую номер повторения. Динамика системы с учетом повторений будет иметь вид

(46) $$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) &= C(\delta(t), r(t)) x_k(t), \end{aligned}$$

с соответствующими граничными условиями

(47) $$y_0(t) \ = \ 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x_k(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots$$

где $u_k(t), x_k(t)$ и $y_k(t)$ - входной вектор, вектор состояний, и выходной вектор соответственно, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, T – длина повторения.

Пусть $y_{ref}(t)$ - подаваемый опорный вектор при $0 \leqslant t \leqslant T$, где каждый элемент $y_{ref}(t)$ дифференцируем. Тогда $e_k(t) =$

$y_{ref}(t) - y_k(t)$ - ошибка на текущем шаге k и целью является построение последовательности входных функций, таких что качество управляющего сигнала будет улучшаться при каждом успешном повторении, для этого в отсутствии нарушений должны выполняться следующие условия сходимости

$$\lim_{k\to\infty} |e_k(t)| = 0,\ \lim_{k\to\infty} |u_k(t) - u_\infty(t)| = 0. \tag{48}$$

Задачей закона управления с итеративным обучением является формирования входного управления на текущем шаге, используя информацию с предыдущего шага:

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Delta u_{k+1}(t), \tag{49}$$

где $\Delta u_{k+1}(t)$ - корректирующая поправка. Важной особенностью управления с итеративным обучением является использование информации с пройденного шага для расчёта $\Delta u_{k+1}(t)$. С учетом стохастической природы $r(t)$ требуются следующие изменения в описании условий сходимости.

Определение 5. *Алгоритм управления с итеративным обучением* (49) *системой* (46) *называется сходящимся если для всех* $0 \leqslant t \leqslant T$ *справедливы отношения*

$$\mathrm{E}[|e_k(t)|^2] = \mathrm{E}[|y_{ref}(t) - y_k(t)|^2] \to 0,\ k \to \infty \tag{50}$$

и

$$\mathrm{E}[|u_k(t) - u_\infty(t)|^2] \to 0,\ k \to \infty. \tag{51}$$

Чтобы описать динамику управления с итеративным обучением в стандартной форме повторяющегося дифференциального процесса введем в рассмотрение вспомогательный вектор вида

$$\dot{v}_{k+1}(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t), \tag{52}$$

и

$$e_{k+1}(t) - e_k(t) = -C(\delta(t), r(t))A \int_0^t (x_{k+1}(\tau)- \\ - x_k(\tau))d\tau - C(\delta(t), r(t))B \int_0^t (u_{k+1}(\tau) - u_k(\tau))d\tau. \tag{53}$$

Тогда динамика управления с итеративным обучением может быть записана в виде линейного дифференциального повторяющегося процесса с неопределённостями

$$
\begin{aligned}
(54)\qquad \dot{\upsilon}_{k+1}(t) &= A\upsilon_{k+1}(t) + B\int_0^t \Delta u_{k+1}(\tau)d\tau,\\
e_{k+1}(t) &= -C(\delta(t), r(t))A\upsilon_{k+1}(t) + e_k(t)\\
&- C(\delta(t), r(t))B\int_0^t \Delta u_{k+1}(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим случай когда

$$
(55)\ \Delta u_{k+1}(t) = F_1(i)\dot{\upsilon}_{k+1}(t) + F_2(i)\dot{e}_k(t), \text{ если } r(t) = i.
$$

Если (55) гарантирует экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом системы (54) тогда согласно определению 5 закон управления с итеративным обучением является сходящимся.

Чтобы получить матрицы усиления $F_1(i)$ и $F_2(i)$, $i \in \mathbb{N}$, воспользуемся условиями теоремы 3. Выберем векторную функцию Ляпунова вида (30) где $V_1(\upsilon_{k+1}(t), r(t)) = \upsilon_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)P_1(r(t))\upsilon_{k+1}(t)$, $V_2(e_k(t), r(t)) = e_k^{\mathrm{T}}(t)P_2(r(t))e_k(t)$, при $P_1 > 0$, $P_2 > 0$. Стохастический оператор дивергенции $\mathcal{D}$ функции (30) в данном случае должен удовлетворять (33). Для вычисления данного оператора вдоль траектории системы (54) и (55) запишем условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом

$$
P(i) = \mathrm{diag}\{P_1(i)\ P_2(i)\} > 0,
$$

$$
(56)\qquad A_{c1}^{\mathrm{T}}(\delta, i)P(i) + P(i)A_{c1}(\delta, i) + \sum_{j=1}^{\nu}\pi_{ij}I^{1,0}P(j)I^{1,0} -
$$

$$
-I^{0,1}P(i)I^{0,1} + A_{c2}^{\mathrm{T}}(\delta, i)P(i)A_{c2}(\delta, i) < 0,\ i \in \mathbb{N},\ \delta \in \mathbf{\Delta},
$$

где

$$
I^{1,0} = \begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ I^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & I \end{bmatrix},
$$

$$A_{c2}(\delta,i)=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -C(\delta,i)A-C(\delta,i)BF_1(i) & I-C(\delta,i)BF_2(i) \end{array}\right],$$

$$A_{c1}(i)=\left[\begin{array}{cc} A+BF_1(i) & BF_2(i) \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

Зададим $X(i)=P^{-1}(i)$, $Y(i)=F_1(i)X_1(i)$, $Y_2(i)=F_2(i)X_2(i)$, после громоздких, но простых преобразований получаем набор необходимых линейных матричных неравенств относительно этих переменных

$$\begin{gathered}\left[\begin{array}{ccc} S_{11}(\delta,i) & S_{12}(\delta,i) & S_{13}(i) \\ S_{12}^{\mathrm{T}}(\delta,i) & -X(i) & 0 \\ S_{13}^{\mathrm{T}}(i) & 0 & S_{33}(i) \end{array}\right]<0, \\ X(i)>0,\ \delta\in\mathbf{\Delta}_v,\ i\in\mathbb{N}, \end{gathered} \tag{57}$$

где $S_{11}(\delta,i)=\left[\begin{array}{cc} A_{c11}(i) & BY_1(i) \\ (BY_1(i))^{\mathrm{T}} & -X_2(i) \end{array}\right]$, $S_{12}(\delta,i)=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ A_{c12}(\delta,i) & A_{c22]}(\delta,i) \end{array}\right]^{\mathrm{T}}$, $A_{c11}(i)=AX(i)+BY_1(i)$ $+\,(AX(i)+BY_1(i))^{\mathrm{T}}+\pi_{ii}X_1(i)$, $A_{c12}(\delta,i)=-C(\delta,i)AX_1(i)-C(\delta,i)BY_1(i)$, $A_{c22}(\delta,i)=X_2(i)-C(\delta,i)BY_2(i)$, $S_{13}(i)=[\pi_{i1}^{\frac{1}{2}}X(i)I^{1,0}\ldots\pi_{i\,i-1}^{\frac{1}{2}}X(i)I^{1,0}\pi_{i\,i+1}^{\frac{1}{2}}X(i)I^{1,0}\ldots\pi_{i\nu}^{\frac{1}{2}}X(i)I^{1,0}]$,
$S_{33}(i)=\mathrm{diag}[-X(1)\ldots-X(i-1)\ -X(i+1)\ldots-X(\nu)]$.

Теорема 5. *Рассмотрим систему* (54) *и предположим что линейные матричные неравенства* (57) *при* $\delta\in\mathbf{\Delta}_v,\ i\in\mathbb{N}$, *разрешимы и* $F_1(i)=Y_1(i)X_1^{-1}(i)$, $F_2(i)=Y_2(i)X_2^{-1}(i)$, $i\in\mathbb{N}$. *Тогда алгоритм управления с итеративным обучением* (49), (55) *сходится.*

5. Выводы и перспективы

В данной работе представлены новые результаты по устойчивости нелинейных дифференциальных повторяющихся процессов. Чтобы продемонстрировать эффективность полученных теоретических результатов, показано, как они могут быть применены для построения управления с итеративным обучением при информационных нарушениях. Эти результаты могут рассматриваться как базовые для дальнейших более глубоких исследований нелинейных повторяющихся процессов, с целью более полного раскрытия их потенциала.

Литература

1. E. ROGERS, K. GALKOWSKI AND D.H. OWENS *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 349* // Springer-Verlag. - 2007. –Vol. 349.
2. L. HLADOWSKI, K. GALKOWSKI, Z. CAI, E. ROGERS, C.T. FREEMAN AND P.L. LEWIN *Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance*. //Control Engineering Practice. – 2010. –Vol. 18. – P. 339 -348.
3. T. P. AZEVEDO-PERDICOULIS AND G. JANK *Disturbance attenuation of linear quadratic OL-Nash games on repetitive proceses with smoothing on the gas dynamics*. //Multidimensional Systems and Signal Processing. – 2012. –Vol. 23. – P. 135 - 153.
4. P. M. SAMMONS D. A. BRISTOW AND R. G. LANDERS *Iterative learning control of bead morphology in laser metal deposition processes*. //Proc. American Control Conference. – 2013. – P. 5962–5967.
5. I. YA. KATS AND A. A. MARTYNYK *Stability and stabilization of nonlinear systems with random structures*. //Taylor & Francis. – 2002.
6. M. MARITON *Jump linear systems in automatic control*. //Marcel Dekker. – 1990.

H_∞ BASED STABILIZATION AND DISTURBANCE ATTENUATION FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL REPETITIVE PROCESSES WITH AN ITERATIVE LEARNING CONTROL APPLICATION*

Mikhail Emelianov, Arzamas Polytechnical Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas, postgraduate student, (MikhailEmelianovArzamas@gmail.com).

Abstract: Repetitive processes propagate information in two independent directions and arise in the modeling of industrial systems such as metal rolling and can also be used as a setting for control law design. This paper addresses stabilization and disturbance attenuation for differential nonlinear repetitive processes where vector Lyapunov functions are used to characterize a physically relevant stability property and the disturbance attenuation is expressed in terms of an H_∞ *norm. An extension to processes with failures modeled by a finite state Markov chain is also developed and applied to iterative learning control design in the presence of model uncertainty and information channel failures.*

Keywords: nonlinear systems, differential processes, repetitive processes, stability, H_∞ norm, uncertain parameters, information failures, iterative learning control.