УДК 519.833 + 025.1
ББК 22.18

О СТРАТЕГИЧЕСКОЙ РЕФЛЕКСИИ В ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ[1]

Корепанов В.О.[2]
(*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Исследуется стратегическая рефлексия игроков в игре двух лиц. При этом рациональный игрок может задуматься над выбором своего ранга стратегической рефлексии и ситуация переходит к игре рангов. Показывается, что при некоторых ограничениях на исходную игру, игра рангов имеет не больше двух равновесий Нэша в чистых стратегиях соответствующих равновесиям Нэша исходной игры.

Ключевые слова: стратегическая рефлексия, игра рангов стратегической рефлексии, равновесие Нэша в чистых стратегиях.

1. Введение

Данная работа является продолжением [1], где было показано, что в игре рангов, построенной для биматричной игры, не может быть больше двух равновесий по Нэшу в чистых стратегиях. Данное свойство игры рангов может упростить выбор рационального игрока, если в исходной игре равновесий Нэша много для выбора из них единственного. Статья не раскрывает вопрос о том, какие равновесия Нэша остаются в игре рангов, это вопрос дальнейших исследований.

---

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта 13-07-00491 А.*

[2] *Всеволод Олегович Корепанов, кандидат технических наук*, (*vkorepanov@ipu.ru*).

2. Стратегическая рефлексия

Рассмотрим игру в нормальной форме двух игроков, $N = \{1, 2\}$. Пусть множества действий первого и второго игрока соответственно X_1 и X_2. Действия игроков обозначим соответственно x_1 и x_2 или x и y (x_1, $x \in X_1$, x_2, $y \in X_2$), в зависимости от контекста. Игроки принимают свои решения одновременно и независимо, вектор действий игроков называется ситуацией игры – $s = (x, y)$. Обстановка игры – действие оппонента $s_{-i} = x_{3-i}$. Целевые функции игроков, задающие их выигрыши $f_1, f_2 : X_1 \mathrm{x} X_2 \to \mathbb{R}$. Будем считать, что запись $(a,\ s_{-i})$ сохраняет правильный порядок аргументов, то есть

$$(1)\quad (a, s_{-i}) = \begin{cases} (a, s_{-i}) = (a, x_2), i = 1 \\ (s_{-i}, a) = (x_1, a), i = 2 \end{cases}$$

Будем рассматривать такие целевые функции и множества действий игроков, что максимумы целевых функций по действиям игроков в произвольной обстановке достигаются и единственны

$$(2)\quad \forall i \forall s_{-i} \in X_{3-i} \left| Arg \max_{v \in X_i} f_i(v, s_{-i}) \right| = 1,$$

поэтому далее используем запись $arg \max\limits_{v \in X_i} f_i(v,\ s_{-i})$.

Например, вогнутые функции на компактах удовлетворяют свойству (2).

Определение 1. Обозначим через $br_i(s)$ – наилучший ответ игрока i на ситуацию s:

$$(3)\quad br_i(s) = \arg\max_{v \in X_i} f_i(v, s_{-i}).$$

Рассмотрим модель стратегической рефлексии, основанную на понятии ранг рефлексии как один из возможных способов стратегических размышлений. В этом случае игрок не думает о поиске некоторого «равновесия» в игре с равным ему оппонентом, а строит или имеет упрощённую модель принятия решений оппонентом.

Предположим, что в игре есть некая «фокальная точка», ситуация которая очевидна/логична для выбора игроками её компонент, обозначим её $s^0 = (x^0, y^0)$. Это может быть в том числе, но не обязательно, некая концепция равновесия: равновесие в доминантных стратегиях, максиминное, Нэша и т.д.

Представим себе, что игрок знает все компоненты этой фокальной точки. Будем говорить, что игрок обладает рангом рефлексии 0, если он выбирает свою компоненту фокальной точки. Тогда, рационально размышляя, игрок может подумать, что оппонент выберет фокальную точку, и ему тогда нужно выбрать наилучший ответ на компоненту фокальной точки оппонента. Такой игрок обладает рефлексией ранга 1 и выбирает своим действием $x_i^1 = br_i(s^0)$, обозначим $s^1 = (x_1^1, x_2^1)$. В общем случае игрок i ранга k выбирает $x_i^k = br_i(s^{k-1})$.

Понятно, что рефлексировать игроки могут до сколь угодно большого ранга, но есть ограничения как со стороны времени вычисления действия игрока ранга k, так и с точки зрения рациональности увеличения ранга рефлексии. Во втором случае возможны ситуации, когда увеличение ранга рефлексии, начиная с некоторого ранга m нецелесообразно [2].

3. Игра рангов стратегической рефлексии

Выбор определённого ранга игроком означает, что он считает, что у оппонента ранг на единицу меньше. Но игрок может ошибаться (ранг оппонента неизвестен в общем случае) и даже выбор наибольшего возможного ранга не может гарантировать высокий выигрыш [2]. Поэтому, рациональный игрок должен попытаться «разумно» выбрать свой ранг.

Более того, если игрок выбирает свой ранг, не зная ранга оппонента, то он может предположить, что оппонент тоже выбирает свой ранг, который однозначно определяет его действие. Возникает игра выбора ранга стратегической рефлексии или просто игра рангов, в которой действия игроков – выбор их ранга рефлексии.

Логично предположить, что если для некоторых рангов u и v выполняется $x_i^u = x_i^v$, то в игре рангов их можно отождествить под минимальным номером из u и v. Множества тех рангов, которые нельзя отождествить обозначим R_1 и R_2 соответственно для первого и второго игрока.

(4) $R_i = \{u \mid \neg(\exists v : v < u \,\&\, x_i^v = x_i^u)\}$

Тогда игра рангов это G^r = ({1,2}, R_1, R_2, g_1, g_2), где $g_i : R_1, R_2 \to \mathbb{R}$, $g_i(u, v) = f_i(x^u, y^v)$.

По построению игры рангов и свойству (1) следует, что выполняется свойство, аналогичное (1): функции g_i достигают своего единственного максимума по каждой переменной.

Утверждение 1. Для произвольной игры переход к игре рангов не приводит к появлению новых равновесий в чистых стратегиях. [1]

Доказательство. Пусть (u, v) – равновесие в игре рангов. Покажем, что x^u – наилучший ответ на y^v в исходной игре. По построению игры рангов верно:

$\exists i \in R_1, j \in R_2 : br_1(a, y^v) = x^{v+1} = x^i$ и $br_2(x^u, a) = y^{u+1} = y^j$.

Но наилучший ответ первого игрока в игре рангов всегда единственен и по определению равновесия это и есть u, то есть $u = i$. Аналогично доказывается, что y^v – наилучший ответ на x^u в исходной игре. Тогда пара (x^u, y^v) – равновесие Нэша в исходной игре.

В силу произвольности выбора равновесной пары получаем, что любое равновесие в чистых стратегиях игры рангов соответствует равновесию исходной игры, т.е. новых равновесий не появится (каждое равновесие игры рангов соответствует равновесию исходной игры). ■

Попробуем ответить на вопрос количества равновесных по Нэшу ситуаций в игре рангов. Во-первых, отметим, что рефлексивные действия можно представить следующей схемой [2]:

[1] Аналогично утверждению 3 в [1], доказательство такое же

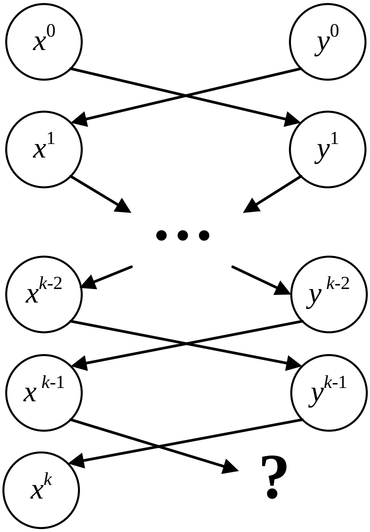

Рис. 1 Схема рефлексивных действий

Здесь стрелками обозначена взаимосвязь действий – то, что действие игрока определённого ранга является наилучшим ответом на действие оппонента предыдущего ранга рефлексии. Можно заметить, что такая схема разбивается ровно на две *цепочки стратегической рефлексии (цепочки СР)*: $x^0 \to y^1 \to x^2 \to y^3 \to \ldots$ и $y^0 \to x^1 \to y^2 \to x^3 \to \ldots$ (см. рисунок 2).

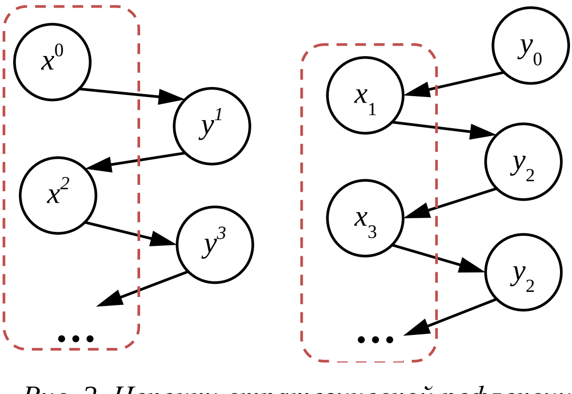

Рис. 2. Цепочки стратегической рефлексии

Очевидно, что каждой цепочке СР может принадлежать только одна ситуация равновесия Нэша, т.к. после появления одной из компонент равновесия Нэша в цепочке СР, цепочка «зацикливается». Рисунок 3 иллюстрирует это.

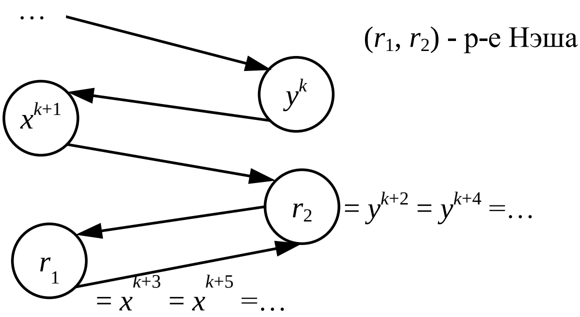

Рис. 3. Остановка цепочки наилучших ответов на равновесии Нэша

Это важное свойство, которое далее, в связке с доказательством, что любое равновесие в игре рангов появляется в одной из цепочек СР, даст ограничение на количество равновесных ситуаций в игре рангов.

Утверждение 2. Если (u, v) – равновесие Нэша в игре рангов, то $|u - v| \leq 1$.

Доказательство. Пусть $u > (v+1)$. По утверждению 1 (x^u, y^v) – равновесие Нэша в исходной игре. Следовательно, по свойству (1): $x^{v+1} = x^u$. Но тогда u не может принадлежать действию игрока 1 в игре рангов по её построению (ранг u должен быть минимальным из равных по действию игрока).

Аналогично доказывается случай $v > (u+1)$. ■

Утверждение 2 как раз и является причиной тесной связи равновесий Нэша в игре рангов с цепочками СР, что показывается в доказательстве утверждения 3:

Утверждение 3. В игре рангов существует не более двух равновесий Нэша в чистых стратегиях.

Доказательство. Пусть (u, v) – равновесие Нэша в игре рангов и $|u-v|=1$, значит x^u, y^v принадлежат одной цепочке СР и она «зацикливается» с шага $\min(u, v)$, т.к. (x^u, y^v) – равновесие Нэша в исходной игре. Если же $u = v$, то обе цепочки СР зацикливаются с шага u. Других случаев соотнесения u и v по утверждению 2 – нет.

То есть любое равновесие Нэша «зацикливает» одну из цепочек СР. Поскольку же любая цепочка СР не может иметь больше одного цикла, получаем, что в игре рангов не может быть равновесий Нэша больше чем цепочек СР. ■

Литература

1. ГУБАНОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *О стратегической рефлексии в биматричных играх* // Управление большими системами. – М.: ИПУ РАН. – 2008. – № 21. – С. 49–57.
2. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексивные игры*. М.: СИНТЕГ, 2003. – 158 с.

ARTICLE TITLE, ABOUT STRATEGIC REFLECTION IN TWO-PERSON GAMES

Vsevolod Korepanov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., (vkorepanov@ipu.ru).

Abstract: *Исследуется The strategic reflection of players in two-person games are considered. While rational player can think about the choice of his rank of strategic reflection and the situation goes to the game of ranks. It is shown that under certain restrictions on the original game, the game of ranks has no more than two Nash equilibriums in pure strategies corresponding to Nash equilibriums of the original game.*

Keywords: strategic reflection, game of ranks of strategic reflection, Nash equilibrium in pure strategies.