УДК 62.50
ББК В161.84я43

ПАССИВНОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ 2D СИСТЕМ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ [1]

Емельянова Ю. П. [2],
(*Арзамасский политехнический институт Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, Арзамас*)

В статье рассматриваются нелинейные дискретные повторяющиеся процессы, описываемые моделью в пространстве состояний. Для решения задач стабилизации рассматриваемой системы вводится и используется понятие пассивности, называемое G-пассивностью, и новое понятие векторной функции накопления. Результаты обобщаются на случай повторяющихся процессов с возможными нарушениями, моделируемыми марковской цепью с конечным числом состояний. Эти новые результаты применяются к решению задачи синтеза управления с итеративным обучением в условиях информационных нарушений.

Ключевые слова: нелинейные системы, дискретные системы, 2D системы, повторяющиеся процессы, пассивность, векторная функция Ляпунова, информационные нарушения, управление с итеративным обучением.

---

[1] *Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России №2.1748.2014/К и при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-08-01092_а).*
Автор выражает благодарность проф. П.В. Пакшину, проф. К. Галковскому и проф. Э. Роджерсу за ценное обсуждение содержания статьи.

[2] *Юлия Павловна Емельянова, аспирантка, (607227, г. Арзамас, ул. Калинина, д.19, АПИ НГТУ им. Р.Е. Алексеева, кафедра прикладной математики, EmelianovaJulia@gmail.com).*

Введение

Задача стабилизации нелинейных 2D систем мало рассматривалась в литературе. В случае нелинейных 1D систем, теория диссипативности [6] — один из наиболее мощных методов синтеза управления, где частная форма диссипативности, известная как пассивность (и ее обобщения) [1, 2] играет важную роль в решении задач глобальной стабилизации для широкого класса нелинейных систем. В этой статье понятие пассивности обобщается на случай дискретных нелинейных повторяющихся процессов, которые являются важным классом 2D систем. Результаты получены на основе подхода с использованием векторной функции накопления, отличающегося от подхода, используемого в [3] и обеспечивают управление с нелинейной обратной связью по выходу, которое гарантирует экспоненциальную устойчивость рассматриваемого процесса.

В реальных приложениях могут возникнуть нарушения и, поэтому, в данной статье результаты обобщаются на случай нелинейных повторяющихся процессов с возможными нарушениями, которые моделируются марковской цепью с конечным числом состояний. В этом случае используется понятие пассивности, основанное на стохастическом аналоге векторной функции накопления, для получения управления с нелинейной обратной связью по выходу, которое гарантирует экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом для рассматриваемой системы с возможными нарушениями. Затем результаты применяются к решению задачи синтеза управления с итеративным обучением в условиях информационных нарушений.

1. Описание системы и основные понятия

Рассмотрим нелинейный дискретный повторяющийся процесс, описываемый следующей моделью в пространстве состояний

$$
(1)\qquad
\begin{gathered}
x_{k+1}(t+1)=f_1(x_{k+1}(t),y_k(t),u_{k+1}(t)),\\
y_{k+1}(t)=f_2(x_{k+1}(t),y_k(t),u_{k+1}(t)),\\
z_{k+1}(t)=g(x_{k+1}(t),y_k(t),u_{k+1}(t)),\\
0\leqslant t\leqslant T,\ k=0,1,2,...,
\end{gathered}
$$

где $x_k(t)\in\mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния на текущем шаге повторения k, $y_k(t)\in\mathbb{R}^{n_y}$ — вектор профиля текущего повторения, $z_k(t)\in\mathbb{R}^{n_z}$ — вспомогательный вектор для анализа и синтеза закона управления и $f_1,\ f_2$ и g — нелинейные функции такие, что $f_1(0,0,0)=0,\ f_2(0,0,0)=0,\ g(0,0,0)=0$.

Граничные условия заданы в виде последовательности начальных значений вектора состояния и начального профиля повторения

$$
(2)\qquad
\begin{gathered}
x_{k+1}(0)=d_{k+1},\ k\geqslant 0,\\
y_0(t)=f(t),\ 0\leqslant t\leqslant T,
\end{gathered}
$$

где элементы $n_x\times 1$-мерного вектора d_{k+1} известные константы и $f(t)$ — $n_y\times 1$-мерный вектор, элементы которого известные функции от t. Предполагается, что существуют действительные числа $M_f>0$ и $0<\zeta_d<1$ такие, что d_{k+1} и $f(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$
(3)\qquad |f(t)|^2\leqslant M_f,\ |d_{k+1}|^2\leqslant \zeta_d\lambda_d^{k+1},\ k=0,1,...
$$

где $|.|$ означает евклидову норму вектора, величина λ_d характеризует скорость сходимости последовательности начальных значений вектора состояния. Далее повсюду будем считать, что граничные условия удовлетворяют (3).

Для линейных повторяющихся процессов основой синтеза законов управления является понятие устойчивости вдоль повторений. Эффективность этого определения подтверждена экспериментальными проверками [4, 5]. Понятие устойчивости вдоль повторений требует, чтобы при ограниченном начальном профиле повторения обеспечивалась ограниченная последовательность профилей повторения для всех возможных значений длины повторения и основывается на свойствах линейного оператора в банаховом пространстве. Поэтому понятие устойчивости вдоль повторений не может быть непосредственно перенесено на нелинейный случай. Следующее определение представляет собой одно из возможных развитий понятия устойчивости вдоль повторений на нелинейный случай.

Определение 1. *Нелинейный повторяющийся процесс* (1) *и* (2)*, где* $u \equiv 0$*, называется экспоненциально устойчивым, если*

$$|x_k(t)|^2 + |y_k(t)|^2 \leqslant \kappa\zeta^{k+t}, \ \ 0 < \zeta < 1, \tag{4}$$

где ζ *не зависит от* T*.*

Основная цель статьи найти такой закон управления с обратной связью $u(x, y)$, который обеспечивал бы экспоненциальную устойчивость системы (1), (2). Последующий анализ основан на расширении понятия пассивности на класс дискретных нелинейных повторяющихся процессов с использованием следующей векторной функции накопления

$$V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t)) \\ V_2(y_k(t)) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $V_1(x) > 0,\ x \neq 0,\ \ V_2(y) > 0,\ y \neq 0,\ \ V_1(0) = 0,\ V_2(0) = 0.$

Оператор дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (1) имеет вид

$$\mathrm{div} V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = \Delta_t V_1(x_{k+1}(t)) + \Delta_k V_2(y_k(t)), \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_t V_1(x_{k+1}(t)) &= V_1(x_{k+1}(t+1)) - V_1(x_{k+1}(t)), \\ \Delta_k V_2(y_k(t)) &= V_2(y_{k+1}(t)) - V_2(y_k(t)). \end{aligned}$$

Определение 2. *Нелинейный дискретный повторяющийся процесс* (1), (2) *называется экспоненциально G-пассивным, если существует векторная функция* (5)*, скалярная функция* $S(x, y)$ *и* *положительные скаляры c_1, c_2, c_3 такие, что*

$$
\begin{array}{rcl}
c_1|x|^2 & \leqslant & V_1(x) \leqslant c_2|x|^2, \\
c_1|y|^2 & \leqslant & V_2(y) \leqslant c_2|y|^2, \\
\operatorname{div} V(x_{k+1}(t), y_k(t)) & \leqslant & z^{\mathrm{T}}_{k+1}(t) G u_{k+1}(t) - \\
 & - & S(x_{k+1}(t), y_k(t)), \\
S(x,y) & \geqslant & c_3(|x|^2 + |y|^2),
\end{array}
\tag{7}
$$

где G — постоянная матрица соответствующего размера.

Это определение является 2D аналогом определения, данного в [2] для 1D систем.

2. Пассивность и стабилизация

Следующая теорема развивает хорошо известные результаты теории пассивности 1D систем на нелинейные дискретные повторяющиеся процессы.

Теорема 1. *Пусть нелинейный дискретный повторяющийся процесс* (1), (2) *G-пассивен. Предположим также, что существует функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi(0) = 0$ и $z^T G \varphi(z) > 0$, если $z \neq 0$. Тогда система* (1), (2) *с законом управления*

$$
u_{k+1}(t) = u(z_{k+1}(t)) = -\varphi(z_{k+1}(t))
\tag{8}
$$

является экспоненциально устойчивой.

Доказательство. Из (7) следует, что существуют $\bar{c}_3 < c_3$ такие, что $\zeta^{\frac{1}{2}} < \lambda = 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} < 1$ и, используя (8), получим

$$
\begin{gathered}
\operatorname{div} V(x_{k+1}(t), y_k(t)) \leqslant -z^{\mathrm{T}}_{k+1}(t) G \varphi(z_{k+1}(t)) \\
-\bar{c}_3(|x|^2 + |y|^2) \leqslant -\bar{c}_3(|x|^2 + |y|^2).
\end{gathered}
\tag{9}
$$

С учетом (7), неравенство (9) может быть переписано в виде

$$
\begin{aligned}
V_1(x_{k+1}(t+1)) \leqslant \lambda V_1(x_{k+1}(t)) + \lambda V_2(y_k(t)) - \\
- V_2(y_{k+1}(t)).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Решая неравенство (10) относительно $V_1(x_{k+1}(t))$ имеем

$$(11)\quad V_1(x_{k+1}(t)) \leqslant V_1(x_{k+1}(0))\lambda^t + \\ + \sum_{p=0}^{t-1}[\lambda V_2(y_k(p)) - V_2(y_{k+1}(p))]\lambda^{t-p-1},$$

и обозначая $H_k(t) = \sum_{p=0}^{t-1} V_2(y_k(p))\lambda^{t-1-p}$ из (11) получим, что

$$(12)\quad H_{k+1}(t) \leqslant \lambda H_k(t) + \lambda^t V_1(x_{k+1}(0)) - V_1(x_{k+1}(t)).$$

Решение неравенства (12) относительно $H_k(t)$ дает следующее

$$(13)\quad H_k(t) \leqslant \lambda^k H_0(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i}(\lambda^t V(x_{i+1}(0)) - \\ - V(x_{i+1}(t)))$$

или с учетом выражения для $H_k(t)$

$$(14)\quad \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} V_1(x_{i+1}(t)) + \sum_{p=0}^{t-1} \lambda^{t-1-p} V_2(y_k(p)) \leqslant \\ \leqslant \lambda^t \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} V_1(x_{i+1}(0)) + \lambda^k \sum_{p=0}^{t-1} \lambda^{t-1-p} V_2(y_0(p)).$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему

$$(15)\quad \lambda^{-(t-1)} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-i} V_1(x_{i+1}(t)) + \lambda^{-(k-1)} \sum_{p=0}^{t-1} \lambda^{-p} V_2(y_k(p)) \leqslant \\ \leqslant \lambda^{-(k-1)} \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} V_1(x_{i+1}(0)) + \\ + \lambda^{-(t-1)} \sum_{p=0}^{t-1} \lambda^{t-1-p} V_2(y_0(p)) = \kappa.$$

Преобразуя правую часть (15) с учетом (3) имеем

$$\lambda^{-(k-1)}\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{k-1-i}V_1(x_{i+1}(0))+\lambda^{-(t-1)}\sum_{p=0}^{t-1}\lambda^{t-1-p}V_2(y_0(p))\leqslant$$

$$\leqslant c_2\kappa_d\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{-i}\zeta^{i+1}+c_2M_f\sum_{p=0}^{\mathrm{T}}\lambda^{-p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_2\kappa_d}{1-\lambda}+\frac{c_2M_f(\lambda^{-\mathrm{T}}-1)}{\lambda^{-1}-1}.$$

Левую часть неравенства (15), в соответствии с (7), усилим следующим образом

$$\lambda^{-(k-1)}\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{k-1-i}V_1(x_{i+1}(0))+ \\ +\lambda^{-(t-1)}\sum_{p=0}^{t-1}\lambda^{t-1-p}V_2(y_0(p))\geqslant c_1\lambda^{-(k-1)}\lambda^{-(t-1)}|x_k(t)|^2 \tag{16}$$

и

$$\lambda^{-(k-1)}\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{k-1-i}V_1(x_{i+1}(0))+ \\ +\lambda^{-(t-1)}\sum_{p=0}^{t-1}\lambda^{t-1-p}V_2(y_0(p))\geqslant c_1\lambda^{-(k-1)}\lambda^{-(t-1)}|y_k(t-1)|^2. \tag{17}$$

Окончательно из (15)–(17) следует, что справедливо (4) с $\zeta=\lambda$. Теорема доказана.

Заметим, что функция накопления (5) может рассматриваться как векторная функция Ляпунова для системы (1) с законом управления (8), который гарантирует экспоненциальную устойчивость.

Рассмотрим случай, когда (1) имеет вид

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t)=A_{11}x_{k+1}(t) &+ A_{12}y_k(t)+\\ &+ B_1(x_{k+1}(t),y_k(t))u_{k+1}(t),\\ y_{k+1}(t)=A_{21}x_{k+1}(t) &+ A_{22}y_k(t)+\\ &+ B_2(x_{k+1}(t),y_k(t))u_{k+1}(t), \end{aligned} \tag{18}$$

и выберем функцию накопления в виде (5), где $V_1(x_{k+1}(t)) = x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)P_1x_{k+1}(t)$ и $V_1(y_k(t)) = y_k^{\mathrm{T}}(t)P_2y_k(t)$, и P_1 и P_2 — симметричные положительно определенные матрицы (обозначим это как > 0) соответствующих размерностей $P_1 = P_1^{\mathrm{T}} > 0$ и $P_2 = P_2^{\mathrm{T}} > 0$, удовлетворяющие неравенству Ляпунова

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P\bar{A} - P + Q < 0, \tag{19}$$

где $\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\ P = P_1 \oplus P_2,\ Q > 0.$

Обозначим

$$B(x_{k+1}(t), y_k(t)) = [B_1^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))\ B_2^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))]^{\mathrm{T}}$$

и определим вспомогательный выходной вектор для (18) в виде

$$\begin{aligned} z_{k+1}(t) = 2B^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))P\bar{A}[x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)\ y_k^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} + \\ + B^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))PB(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Вычисляя дивергенцию векторной функции (5) получим

$$\begin{aligned} \mathrm{div}V(x_{k+1}(t), y_k(t)) = [x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t), y_k^{\mathrm{T}}(t)](\bar{A}^{T}P\bar{A} - \\ - P)[x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t), y_k^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} + z_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)u_{k+1}(t) \leqslant \\ \leqslant z_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)u_{k+1}(t) - [x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t), y_k^{\mathrm{T}}(t)]Q[x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t), y_k^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Из (21) следует, что система (18)– (20) G-пассивна при $G = I$ (где I — единичная матрица соответствующей размерности).

Тогда согласно теореме 1 закон управления

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) = -[I + B^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))PB(x_{k+1}(t), y_k(t))]^{-1} \times \\ \times 2B^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))P\bar{A}[x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t), y_k^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{22}$$

обеспечит экспоненциальную устойчивость системы (18)– (22).

3. Обобщение на случай систем с возможными нарушениями

Результаты, полученные в разделе 2 обобщаются на случай нелинейных повторяющихся процессов с возможными нарушениями:

$$
(23)\qquad \begin{aligned}
x_{k+1}(t+1) &= g_1(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), r(t)),\\
y_{k+1}(t) &= g_2(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), r(t)),\\
z_{k+1}(t) &= g_3(x_{k+1}(t), y_k(t), u_{k+1}(t), r(t)).
\end{aligned}
$$

Нарушения $r(t)$ $(t \geqslant 0)$ моделируются дискретной марковской цепью с конечным числом состояний $\mathbb{N} = \{1, \ldots, \nu\}$ и следующими вероятностями перехода

$$
(24)\ \mathrm{P}(r(t+1) = j \mid r(t) = i) = \pi_{ij},\ \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} = 1,\ i \in \mathbb{N}.
$$

В этой модели g_1, g_2 и g_3 — нелинейные функции такие, что для всех $r \in \mathbb{N}$ $g_1(0,0,0,r) = 0,\ g_2(0,0,0,r) = 0,\ g_3(0,0,0,r) = 0$, все остальные обозначения, включая граничные условия соотвествуют ранее принятым в разделе 1. Выбор модели нарушений (24) мотивирован тем фактом, что переменная t — это время вдоль повторения и отсюда вполне естественно, что нарушения развиваются во времени.

Определение 3. *Нелинейный повторяющийся процесс* (23), (2) *при* $u \equiv 0$ *называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом, если*

$$
(25)\qquad \mathrm{E}[|x_k(t)|^2 + |y_k(t)|^2] \leqslant \kappa \zeta^{k+t},\ \ 0 < \zeta < 1,
$$

где E *— оператор математического ожидания и* ζ *не зависит от* T.

Задача состоит в том, чтобы найти такой закон управления $u(x, y)$, который обеспечивал бы устойчивость системы (23), (2) в среднем квадратическом. Подход к решению базируется на распространении теории пассивности на рассматриваемый класс систем. Выберем векторную функцию накопления в виде

$$
(26)\qquad V(x_{k+1}(t), y_k(t), r(t)) = \begin{bmatrix} V_1(x_{k+1}(t), r(t)) \\ V_2(y_k(t), r(t)) \end{bmatrix},
$$

где $V_1(x,r) > 0,\ x \neq 0,\ \ V_2(y,r) > 0,\ y \neq 0,\ V_1(0,r) = 0,\ V_2(0,r) = 0$. Введем операторы $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{D}_k$ определяемый вдоль траекторий системы (23):

$$\mathcal{D}_t V(\xi,\eta,i) = \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(t+1), r(t+1)) - V_1(x_{k+1}(t), r(t)) \mid \\ \mid x_{k+1}(t) = \xi, y_k(t) = \eta, r(t) = i],$$

$$\mathcal{D}_k V(\xi,\eta,i) = \mathrm{E}[V_2(y_{k+1}(t), r(t)) - V_2(y_k, r(t)) \mid \\ \mid x_{k+1}(t) = \xi, y_k(t) = \eta, r(t) = i],$$

и определим оператор $\mathcal{D}$ как стохастический аналог оператора дивергенции в разделе 1:

$$\mathcal{D}V(\xi,\eta,i) = \mathcal{D}_t V(\xi,\eta,i) + \mathcal{D}_k V(\xi,\eta,i). \tag{27}$$

Определение 4. *Нелинейный дискретный повторяющийся процесс* (23), (2) *с возможными нарушениями, описываемыми марковской цепью* (24) *называется G-пассивным в среднем квадратическом, если существует векторная функция* (26), *скалярная функция $S(\xi,\eta,i)$ и положительные скалярные величины c_1, c_2, c_3 такие, что*

$$\begin{gathered} c_1|\xi|^2 \leqslant V_1(\xi,i) \leqslant c_2|\xi|^2, \\ c_1|\eta|^2 \leqslant V_2(\eta,i) \leqslant c_2|\eta|^2, \\ \mathcal{D}V(\xi,\eta,i) \leqslant z^T G u - S(\xi,\eta,i), \\ S(\xi,\eta,i) \geqslant c_3(|\xi|^2 + |\eta|^2), \end{gathered} \tag{28}$$

где G — постоянная матрица соответствующей размерности.

Теорема 2. *Пусть нелинейный повторяющийся процесс* (23), (2) *с нарушениями, моделируемыми марковской цепью*(24), *G-пассивен в среднем квадратическом. Предположим также, что существует функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi(0) = 0$ и $z^T G\varphi(z) > 0$, если $z \neq 0$. Тогда система* (23), (2) *с законом управления*

$$u_{k+1}(t) = u(z_{k+1}(t)) = -\varphi(z_{k+1}(t)) \tag{29}$$

экспоненциально устойчива в среднем квадратическом.

Доказательство. Из (28) следует, что существует $\bar{c}_3 < c_3$ такая, что $\zeta^{\frac{1}{2}} < \lambda = 1 - \frac{\bar{c}_3}{c_2} < 1$ и, учитывая (29), имеем

$$\mathrm{div}V(\xi,\eta,i) \leqslant -z^T G\varphi(z) - \bar{c}_3(|\xi|^2+|\eta|^2) \leqslant -\bar{c}_3(|\xi|^2+|\eta|^2). \tag{30}$$

Применяя оператор математического ожидания к обеим частям (30) и, учитывая (28), можем записать

$$
\begin{aligned}
(31)\quad & \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(t+1), r(t+1))] \leqslant \lambda \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(t), r(t))] + \\
& + \lambda \mathrm{E}[V_2(y_k(t), r(t) - V_2(y_{k+1}(t), r(t))].
\end{aligned}
$$

Решая неравенство (31) относительно $V_1(x_{k+1}(t))$ получим

$$
\begin{aligned}
(32)\quad & \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(t)), r(t+1)] \leqslant \mathrm{E}[V_1(x_{k+1}(0), r(0))]\lambda^t + \\
& + \sum_{p=0}^{t-1} \mathrm{E}[\lambda V_2(y_k(p), r(p)) - V_2(y_{k+1}(p), r(p))]\lambda^{t-p-1},
\end{aligned}
$$

и обозначив $H_k(t) = \sum\limits_{p=0}^{t-1} \mathrm{E}[V_2(y_k(p), r(p))]\lambda^{t-1-p}$ из (32), получим неравенство

$$
(33)\quad H_{k+1}(t) \leqslant \lambda H_k(t) + \mathrm{E}[\lambda^t V_1(x_{k+1}(0)) - V_1(x_{k+1}(t))].
$$

Решая (33) относительно $H_k(t)$, приходим к соотношению

$$
\begin{aligned}
H_k(t) \leqslant \lambda^k H_0(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} \mathrm{E}[\lambda^t V(x_{i+1}(0), r(0)) - \\
- V(x_{i+1}(t), r(t))]
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} \mathrm{E}[V_1(x_{i+1}(t), r(t))] + \sum_{p=0}^{t-1} \lambda^{t-1-p} \mathrm{E}[V_2(y_k(p), r(p))] \leqslant \\
& \leqslant \lambda^t \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-1-i} \mathrm{E}[V_1(x_{i+1}(0), r(0))] + \lambda^k \sum_{p=0}^{t-1} \lambda^{t-1-p} \mathrm{E}[V_2(y_0(p), r(p))].
\end{aligned}
$$

Остальная часть доказательства аналогична доказательству теоремы в предыдущем разделе.

Рассмотрим частный случай системы (23)

$$
\begin{aligned}
& x_{k+1}(t) = A_{11}(r(t))x_{k+1}(t) + A_{12}(r(t))y_k(t) + \\
& \qquad + B_1(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t), \\
(34)\quad & y_{k+1}(t) = A_{21}(r(t))x_{k+1}(t) + A_{22}(r(t))y_k(t) + \\
& \qquad + B_2(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t).
\end{aligned}
$$

Выберем функцию накопления (26) с $V_1(x_{k+1}(t)) = x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)P_1(r(t))x_{k+1}(t)$ и $V_1(y_k(t)) = y_k^{\mathrm{T}}(t)P_2(r(t))y_k(t)$, где $P_1(i) > 0$ и $P_2(i)(i) > 0,\ i \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют следующей системе билинейных матричных неравенств

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}(i)W(i)\bar{A}(i) - P(i) + Q(i) < 0,\ i \in \mathbb{N}, \tag{35}$$

где $\bar{A}(i) = \begin{bmatrix} A_{11}(i) & A_{12}(i) \\ A_{21}(i) & A_{22}(i) \end{bmatrix},\ P(i) = P_1(i) \oplus P_2(i),\ W(i) = \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} P_1(j) \oplus P_2(i)$ и $Q(i) > 0$. Обозначим $B(x_{k+1}(t), y_k(t)) = [B_1^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))\ \ B_2^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))]^{\mathrm{T}}$ и определим вспомогательный вектор вида

$$\begin{aligned} z_{k+1}(t) &= 2B^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))W(i)\bar{A}(i)[x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)\ y_k^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} + \\ &+ B^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))W(i)B(x_{k+1}(t), y_k(t))u_{k+1}(t),\ r(t) = i. \end{aligned} \tag{36}$$

Вычисляя дивергенцию функции вдоль траекторий системы (23) получим

$$\begin{aligned} \mathrm{div}V(\xi, \eta, i) &= [\xi^{\mathrm{T}}, \eta^{\mathrm{T}}](\bar{A}^{\mathrm{T}}(i)W(i)\bar{A}(i) - \\ &- P(i))[\xi^{\mathrm{T}}, \eta^{\mathrm{T}}]^T + z^{\mathrm{T}}u \leqslant z^{\mathrm{T}}u - [\xi^{\mathrm{T}}, \eta^{\mathrm{T}}]Q[\xi^{\mathrm{T}}, \eta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{37}$$

Из (37) следует, что процесс (34) и (36) G-пассивен при $G = I$. Тогда согласно теореме 2 закон управления

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= \\ &= -[I + B^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))W(i)B(x_{k+1}(t), y_k(t))]^{-1} \times \\ &\times 2B^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t), y_k(t))W(i)\bar{A}(i)[x_{k+1}^{\mathrm{T}}(t), y_k^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}, \\ &\qquad r(t) = i \end{aligned} \tag{38}$$

обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы (23), (38).

4. Приложение к задачам управления с итеративным обучением

Рассмотрим систему, функционирующую в повторяющемся режиме, динамика которой описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) &= C(r(t))x_k(t) \end{aligned} \tag{39}$$

со следующими граничными условиями

$$y_0(t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x_k(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots \tag{40}$$

где k — номер повторения, $u_k(t) \in \mathbb{R}^l, x_k(t) \in \mathbb{R}^n$ и $y_k(t) \in \mathbb{R}^m$ — входной вектор, вектор состояния и выходной вектор соответственно в момент $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, T — интервал повторения, $r(t)$ – непрерывная марковская цепь с конечным числом состояний $\mathbb{N} = \{1, \ldots, \nu\}$, соответствующих числу возможных нарушений и с вероятностями перехода вида (24).

Пусть $y_{ref}(t)$ — желаемый выходной вектор при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда $e_k(t) = y_{ref}(t) - y_k(t)$ — ошибка обучения на шаге k и целью является построение такой последовательности входных функций, что желаемый выходной сигнал достигается постепенным улучшением текущего сигнала с каждым последующим повторением, которое, в случае отсутствия нарушений, может быть выражено как условие сходимости ошибки обучения и входного вектора, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} |e_k(t)| = 0,\ \lim_{k\to\infty} |u_k(t) - u_\infty(t)| = 0. \tag{41}$$

Закон управления с итеративным обучением на каждом последующем шаге формируется как управление на текущем шаге плюс корректирующая добавка к управлению. В данной работе закон управления с итеративным обучением на шаге $k + 1$ имеет вид

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Delta u_{k+1}(t), \tag{42}$$

где $\Delta u_{k+1}(t)$ — корректирующая добавка к управлению. Принципиальной особенностью управления с итеративным обучением является то, что информация на текущем шаге доступна для использования на последующем для вычисления $\Delta u_{k+1}(t)$. Это позволяет использовать информацию, которая не является причинно-следственной в общепринятом смысле, а создается и хранится на предыдущем шаге. Учитывая стохастический характер нарушений введем понятие сходимости.

Определение 5. *Закон управления* (42) *системой* (39) *называется сходящимся, если для всех* $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\mathrm{E}[|e_k(t)|^2] = \mathrm{E}[|y_{ref}(t) - y_k(t)|^2] \to 0,\ k \to \infty \tag{43}$$

и

(44) $$\mathrm{E}[|u_k(t) - u_\infty(t)|^2] \to 0,\ k \to \infty.$$

Введем вспомогательный вектор

(45) $$\upsilon_{k+1}(t+1) = x_{k+1}(t) - x_k(t).$$

Тогда рассматриваемая система может быть записана в стандартной форме линейного дискретного повторяющегося процесса

(46) $$\begin{aligned} \upsilon_{k+1}(t+1) &= A\upsilon_{k+1}(t) + B\Delta u_{k+1}(t-1), \\ e_{k+1}(t) &= -C(r(t))A\upsilon_{k+1}(t) + e_k(t) \\ &- C(r(t))B\Delta u_{k+1}(t-1). \end{aligned}$$

Представим корректирующую поправку в виде суммы двух компонент

(47) $$\Delta u_{k+1}(t) = \Delta_1 u_{k+1}(t) + \Delta_2 u_{k+1}(t),$$

Компонента $\Delta_1 u_{k+1}(t)$ должна обеспечивать экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом (46) при $\Delta_2 u_{k+1}(t) \equiv 0$. Предположим также, что вектор состояния x доступен измерению, тогда

(48) $$\Delta u_{k+1}(t-1) = \Delta_1 u_{k+1}(t-1) = \\ = F_1(i)\upsilon_{k+1}(t) + F_2(i)e_k(t),\ \ r(t-1) = i.$$

Для построения матриц усиления стабилизирующего управления $F_1(i)$ and $F_2(i)$, $i \in \mathbb{N}$, воспользуемся условиями теоремы 2.

Выберем векторную функцию Ляпунова (26) в виде $V_1(\upsilon_{k+1}(t), r(t-1))) = \upsilon_{k+1}^{\mathrm{T}}(t)P_1(r(t-1))\upsilon_{k+1}(t)$, $V_2(e_k(t), r(t-1)) = e_k^{\mathrm{T}}(t)P_2(r(t-1))e_k(t)$, где $P_1 > 0$ и $P_2 > 0$. В (46), Δu в правой части зависит от $t-1$ и определение стохастического оператора дивергенции $\mathcal{D}$ функции (26) в этом случае должно быть отлично от используемого в предыдущем разделе:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t V(\xi,\eta,i) = \mathrm{E}[V_1(\upsilon_{k+1}(t+1), r(t)) - V_1(\upsilon_{k+1}(t), r(t-1)) \mid \\ \mid \upsilon_{k+1}(t) = \xi, e_k(t) = \eta, r(t-1) = i], \\ \mathcal{D}_k V(\xi,\eta,i) = \mathrm{E}[V_2(e_{k+1}(t), r(t-1)) - V_2(e_k, r(t-1)) \mid \\ \mid \upsilon_{k+1}(t) = \xi, e_k(t) = \eta, r(t-1) = i]. \end{aligned}$$

Вычисляя этот оператор вдоль траекторий системы (46)–(48) получим следующие достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом

$$
\begin{gathered}
P(i) = \mathrm{diag}[P_1(i)\ P_2(i)] > 0,\\
\sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} A_{ci}^{\mathrm{T}}(j) H_i(j) A_{ci}(j) - P(i) + Q(i) < 0, i \in \mathbb{N},
\end{gathered} \tag{49}
$$

где $Q(i) = Q^{\mathrm{T}}(i) > 0, H_i(j) = \mathrm{diag}[P_1(j)\ P_2(i)]$,
$A_{ci}(j) = \left[\begin{array}{cc} A + BF_1(i) & BF_2(i) \\ -C(j)A - C(j)BF_1(i) & I - C(j)BF_2(i) \end{array} \right].$

Обозначая $X(i) = P^{-1}(i)$ и вводя дополнительные переменные $Y_1(i), Y_2(i)$, после простых, но громоздких вычислений получим конечное число линейных матричных уравнений и неравенств разрешимых относительно этих переменных

$$
\begin{gathered}
\left[\begin{array}{ccc} S_{11}(i) & S_{12}(i) & S_{13}(i) \\ S_{12}^{\mathrm{T}}(i) & S_{22}(i) & 0 \\ S_{13}^{\mathrm{T}}(i) & 0 & S_{33}(i) \end{array} \right] > 0,\\
X(i) > 0,\ i \in \mathbb{N},
\end{gathered} \tag{50}
$$

где $S_{11}(i) = \mathrm{diag}[X_1(i)\ X_2(i)],\ S_{12}(i) = [S_{121}(i) \ldots S_{12\nu}(i)]$,
$S_{12j}(i) = \pi_{ij}^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cc} \bar{A}(i) & BY_2(i) \\ -C(j)\bar{A}(i) & X_2(i) - C(j)BY_2(i) \end{array} \right],\ \bar{A}(i)$
$= AX_1(i) + BY_1(i),\ S_{13}(i) = \mathrm{diag}[X_1(i)\ X_2(i)],\ S_{22}(i)$
$= \mathrm{diag}[X_1(1)\ X_2(i)\ X_1(2)\ X_2(i) \ldots X_1(\nu)\ X_2(i)],\ S_{33}(i)$
$= Q^{-1}(i),\ Y_1(i) = F_1(i)X_1(i),\ Y_2(i) = F_2(i)X_2(i)$, π_{ij} определяется (24) и справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Рассмотрим систему* (46) *и* (48) *и предположим, что соотношения* (50) *разрешимы и* $F_1(i) = Y_1(i)X_1^{-1}(i)$ *и* $F_2(i) = Y_2(i)X_2^{-1}(i),\ i \in \mathbb{N}$. *Тогда закон управления с итеративным обучением сходится.*

Компонента $\Delta_2 u_{k+1}(t)$ в законе управления может быть использована для обеспечения пассивности относительно некоторых выходных векторов и по теореме 2 это дает робастность управления корректирующей поправки к управлению относительно возможных нелинейностей на входе. Рассмотрим вспомогательный вектор

$$(51)\quad z = 2\sum_{j=1}^{\nu}\pi_{ij}[B^{\mathrm{T}}\ B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(j)]H_i(j)A_{ci}(j)[v^{\mathrm{T}}\ e^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}+ \\ +[B^{\mathrm{T}}\ B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(j)]H_i(j)[B^{\mathrm{T}}\ B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(j)]^{\mathrm{T}}\Delta_2 u,$$

для которого

$$(52)\quad \mathcal{D}V(\xi,\eta,i) = [\xi^{\mathrm{T}},\eta^{\mathrm{T}}]\sum_{j=1}^{\nu}\pi_{ij}[A_{ci}^{\mathrm{T}}(j)A_{ci}(j)- \\ -P(i)][\xi^{\mathrm{T}},\eta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + z^{\mathrm{T}}\Delta_2 u \leqslant \\ \leqslant -[\xi^{\mathrm{T}},\eta^{\mathrm{T}}]Q(i)[\xi^{\mathrm{T}},\eta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + z^{\mathrm{T}}\Delta_2 u.$$

Тогда согласно теореме 2, при $G = I$ обеспечивается среднеквадратическая G-пассивность и для

$$(53)\quad \Delta_2 u_{k+1}(t-1) = \\ = -[I + \sum_{j=1}^{\nu}\pi_{ij}[B^{\mathrm{T}}\ B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(j)]H_i(j)[B^{\mathrm{T}}\ B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(j)]^{\mathrm{T}}]^{-1}\times \\ \times 2\sum_{j=1}^{\nu}\pi_{ij}[B^{\mathrm{T}}\ B^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(j)]H_i(j)A_{ci}(j)[v_{k+1}^{T}(t)\ e_k(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \\ r(t-1) = i$$

обеспечивается экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом.

5. Заключение

В данной статье впервые получены результаты по применению пассивности в анализе устойчивости и синтезе законов управления для нелинейных повторяющихся процессов, включая случай возможных нарушений. Повторяющиеся процессы особый класс 2D систем, имеющий важные физические приложения. Важно отметить, что адекватность применения 2D моделей была экспериментально подтверждена в рамках линейной теории при построении управления с итеративным обучением для портального робота [4]. Результаты обобщаются на случай с возможными нарушениями. В целом, полученные результаты обеспечивают основу для дальнейшего развития теории диссипативности 2D систем.

Литература

1. BYRNES C., ISIDORI A., AND WILLEMS J. *Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimun phase nonlinear systems* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1991. – Vol. 36, – P. 1228—1240.
2. FRADKOV A. AND HILL D. *Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlineaqr systems* // Automatica. – 1998. – Vol. 34, – P. 697–703.
3. HADDAD W., HUI Q., CHELLABONA V., AND NERSESOV S. *Vector dissipativity thepry for discrete-time large-scale nonlinear dynamical systems* // Advances in Difference Equations. – 2001. – Vol. 1. – P. 37–66.
4. HLADOWSKI L., GALKOWSKI K., CAI Z., ROGERS E., FREEMAN C., AND LEWIN P. *Experimentally supported 2D systems based iterative learning control law design for error convergence and performance* // Control Engineering Practice. – 2010. – Vol. 18, – P. 339—348.
5. ROGERS E., GALKOWSKI K., AND OWENS D. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes* // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 2007. – Vol. 349. Berlin: Springer-Verlag.
6. WILLEMS J.C. *Dissipative dynamical systems part i: General theory* // Arch. Rational Mech. Analysis, vol. 45, pp. 325 – 351, 1972. IEEE Trans. Automat. Contr. – 1991. – Vol. 36, – P. 1228–1240.

PASSIVITY BASED STABILIZATION OF NONLINEAR 2D SYSTEMS WITH APPLICATION TO ITERATIVE LEARNING CONTROL

Julia Emelianova, Arzamas Polytechnical Institute of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas, postgraduate student, (EmelianovaJulia@gmail.com).

Abstract: The paper considers nonlinear discrete-time repetitive processes using the state-space model setting. A form of passivity, termed G-passivity, is introduced and used, together with new vector storage function, to develop a new design for output feedback based control to guarantee exponential stability of the controlled system. An extension to repetitive processes with possible failures, modeled by finite state Markov chain, is also given. Finally, these new results are applied to iterative learning control design in the presence of sensor failures.

Keywords: nonlinear systems, discrete systems, $2D$ systems, repetitive process, passivity, vector Lyapunov function, information failures, iterative learning control.