УДК 6250
ББК 30

КРИТЕРИИ НАЗНАЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ МАТРИЦЫ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Уткин А.В.
(*Учреждение Российской академии наук
Институт проблем управления РАН, Москва*)

В статье рассмотрены вопросы модального управления, а именно разработаны критерии назначения собственных чисел матрицы замкнутой системы с учётом требований к переходному процессу, точности регулирования и ограничений на управляющие воздействия на примере линейной системы второго порядка.

Ключевые слова: задача модального управления, блочный подход, назначения спектра матрицы замкнутой системы, требования к переходному процессу.

1. Введение

Задача модального управления [1] была поставлена и решалась в начальный период становления теории управления в основном для линейных систем с одни входом и одним выходом (SISO - системы) и в настоящее время модальное управление считается одним из основных методов синтеза систем управления. Спектр матрицы замкнутой системы задавался исходя из показателей переходного процесса, таких как перерегулирование, колебательность, время переходного процесса (время схождения в заданную область) относительно выходной переменной. Сам факт того, что показатели переходного процесса плохо формализуемы в терминах модели объекта управления, приводит лишь к эмпирическим методам нахождения собственных чисел замкнутых систем (метод корневого годографа). Та же ситуация складывается и в методе квадратичной оптимизации

[2], где возникают трудности, связанные с формализацией выбора квадратичного критерия исходя из требуемых характеристик переходного процесса.

Удивительным представляется тот факт, что разработанные в до компьютерную эпоху методы модального управления до сих пор в полной мере не развиты и для линейных SISO – систем и, тем более, для многосвязных систем (MIMO - системы) в основных задачах модального управления - задание собственных чисел замкнутой системы и синтез обратной связи, обеспечивающий заданный спектр замкнутой системы. Сдерживающими факторами в развитии теории модального управления по- прежнему являются невозможность формализовать требования к переходному процессу в терминах модели объекта управления и, кроме того, характерная для современных систем управления высокая размерность и многосвязность моделей объектов управления.

Вообще создаётся впечатление, что авторы сознательно избегают трактовать проблему выбора спектра [3]. Вместо этого внимание сосредотачивается на относительно второстепенных механизмах определения матрицы коэффициентов модального регулятора при неких «заданных» собственных значениях, неясно каких.

2. Обсуждение проблемы. Постановка задачи

Рассматривается линейная многомерная стационарная система вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + u, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^2$, $u \in R$ – вектор состояния и вектор управлений соответственно. За управляемый выход системы принимается координата x_1.

Для системы (1) ставится задача задания спектра замкнутой системы с тем, чтобы обеспечить заданное перерегулирование по выходной переменной $X_{1max} = const > 0$ и заданным временем процесса сходимости. Как обычно, под временем сходимости понимается время попадания в заданную окрестность нуля.

Для стабилизации выхода системы (1) целесообразным видится использование блочного подхода:

Согласно идеологии блочного подхода [4], введём в систему (1) неособую замену переменных:

(2) $\bar{x}_2 = x_2 + k_1 x_1$.

Тогда, дифференцируя (2) в силу системы (1) получим:

$$\dot{\bar{x}}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u + k_1 x_2 .$$

Далее, выполняя обратную подстановку из уравнения (2) вместо x_2, система (1) примет следующий вид

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 + \bar{x}_2,$$
$$\dot{\bar{x}}_2 = (a_1 - k_1 a_2 - k_1^2) x_1 + (a_2 + k_1)\bar{x}_2 + u.$$

Выбрав стабилизирующее управление в виде $u = -(a_1 - k_1 a_2 - k_1^2) x_1 + k_2 \bar{x}_2$, получим следующую замкнутую систему

(3) $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 + \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= (a_2 + k_1 + f_2)\bar{x}_2, \end{aligned}$$

где $\lambda_1 = -k_1$, $\lambda_2 = a_2 + k_1 + f_2$,

а $f_1 = -(a_1 - \lambda_1 a_2 - \lambda_1^2)$, $f_2 = -a_2 - \lambda_1 - \lambda_2$.

Систему (3) можно переписать в виде:

(4) $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -\lambda_2 \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Далее если предположить, что $x_1(0) > 0$, и в уравнении замены переменных (2) $\bar{x}_2(0) = x_2(0) + k_1 x_1(0) > k_1 x_1(0)$, то $x_1(t)$ будет возрастать, пока не будет выполняться неравенство $\bar{x}_2(t) = x_2(t) + k_1 x_1(t) > k_1 x_1(t)$. При этом, чем больше $f_2 = (a_2 + \lambda_1 + \lambda_2)$, тем быстрее это неравенство выполнится.

Отсюда можно сделать очевидный вывод, о необходимости выбирать $\lambda_1, \lambda_2 \to \infty \Rightarrow f_1, f_2 \to \infty$ и $\|f\| \to \infty$, что на практике неприемлемо. Конечно, при $\lambda_1, \lambda_2 \to \infty$ перерегулирование отсутствует, но выбор бесконечного управления в реальных системах невозможен.

3. Синтез на основе блочного подхода

Основная идея состоит в введении фиктивных возмущений в исходную систему и применении блочного подхода для получения матрицы замкнутой системы, , что позволяет в дальнейшем ввести некоторые нижние ограничения при назначении спектра матрицы замкнутой системы.

Рассмотрим линейную многомерную стационарную систему вида:

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \eta_1(t), \\ \dot{x}_2 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + u + \eta_2(t) \end{aligned}$$

где $x \in R^2$, $u \in R$ $, \eta \in R^2$ – вектор состояния, вектор управлений и фиктивных возмущений. Фиктивные возмущения полагаются ограниченными функциями $|\eta_1| \le N_1 = const, |\eta_2| \le N_2 = const$.

Для системы (1) ставиться задача стабилизации переменной $x_1 \to 0,\ t \to \infty$ при минимальном перерегулировании $x_{\max}$.

Согласно предыдущему разделу, после выбора аналогичной обратной связи, можно переписать систему (1*) в блочном замкнутом виде

$$(3^*)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 + \bar{x}_2 + \eta_1, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= (a_2 + k_1 + f_2)\bar{x}_2 + k_1\eta_1 + \eta_2, \end{aligned}$$

где $\lambda_1 = -k_1,\ \lambda_2 = a_2 + k_1 + f_2$,

а $f_1 = -(a_1 - \lambda_1 a_2 - \lambda_1^2),\ f_2 = -a_2 - \lambda_1 - \lambda_2$,

и далее в виде аналогичном (4)

$$(4^*)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + \bar{x}_2 + \eta_1, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -\lambda_2\bar{x}_2 + \lambda_1\eta_1 + \eta_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что решение задачи стабилизации системы второго порядка (1) относительно переменной x_1 при наличии внешних возмущений возможно лишь с заданной точностью.

Предполагая, что во втором уравнении $\eta_2 = 0$, можно записать при заданных окрестностях сходимости Δ_1 и Δ_2 для переменных x_1 и x_2 соответственно, следующие неравенства:

$$\frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2} \le \Delta_2 \Rightarrow \lambda_2 \ge \frac{\lambda_1 N_1}{\Delta_2}, \qquad \frac{\Delta_2 + N_1}{\lambda_1} \le \Delta_1 \Rightarrow \lambda_1 \ge \frac{\Delta_2 + N_1}{\Delta_1}.$$

Далее можно вывести неравенства для конструктивного выбора корней (при выбранных Δ_1 и Δ_2).

$$\lambda_1 \ge \frac{\Delta_2 + N_1}{\Delta_1} \text{ и } \lambda_2 \ge \frac{\lambda_1 N_1}{\Delta_2}.$$

4. Заключение

В работе предложены критерии назначения собственных чисел матрицы замкнутой системы с учётом требований к переходному процессу, точности регулирования и ограничений на управляющие воздействия на примере линейной системы второго порядка. Основная идея заключается в применении блочного подхода и введении в систему виртуальных возмущений, что в конечном итоге позволяет получить нижние оценки для выбора спектра замкнутой блочной системы. Именно применение блочного подхода позволяет найти прямую зависимость между собственными числами замкнутой системы и требуемыми окрестностями сходимости переменных объекта управления. Важно отметить, что данный подход является практически значимым, так как на практике на любой объект управления в той или иной степени действуют внешние возмущения, что позволяет в дальнейшем применять данный подход в более широкой робастной постановке. Кроме того, данный подход легко распространяется на многомерный случай, что учитывая неуклонно возрастающую размерность современных объектов управления, даёт неоспоримые преимущества.

Литература

1. АНДРЕЕВ Ю.Н. *Управление конечномерными линейными объектами*. М.: Наука, 1976.
2. КВАКЕРНААК Х., СИВАН Р. *Линейные оптимальные системы управления.* М.: Мир, 1977.
3. БАЛОНИН Н.А. *Новый курс теории управления движением.* СПб.: Изд-во С. – Петерб. Ун-та, 2000.
4. ДРАКУНОВ С.В., ИЗОСИМОВ Д.Б., ЛУКЬЯНОВ А.Г., УТКИН В.А., УТКИН В.И. *Принцип блочного управления I* // АиТ. - 1990. - №5. - С.38–47.

THE CRITERIA FOR THE SPECTRUM ASSIGNMENT OF THE CLOSED-LOOP DYNAMIC MATRIX

Utin Anton, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senion research worker (utkin-av@rambler.ru).

Abstract: *In this paper the modal control problem is discussed. The criteria for the choice of the matrix spectrum of the closed-loop system with the requirements to the transition process, accuracy of regulation and restrictions on control actions is developed.*

Keywords: modal control, block control principle, spectrum of the matrix of closed-loop system, the requirements for transition process.