

УДК 519.711.3 + 519.863 + 681.516.77  
ББК 32.965.7

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ КЛАССА СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ<sup>1</sup>**

**Сысоев А.С.<sup>2</sup>**

*(Липецкий государственный технический университет, Липецк)*

*В работе описывается идемпотентный подход к графоструктурному моделированию класса систем массового обслуживания с переменной структурой; синтезируется алгоритм поиска оптимальных параметров таких систем; приводится метод анализа конечных изменений для структурной оптимизации класса систем.*

Ключевые слова: системы с переменной структурой, идемпотентная математика, численная оптимизация, анализ конечных изменений.

### **Введение**

Под системами с переменной структурой понимают такие системы, в которых связи между функциональными элементами меняются тем или иным образом в зависимости от состояния системы [10]. В качестве одного из классов таких систем можно указать многоканальные системы массового обслуживания (СМО) с ожиданием в очереди, в которых в разные моменты времени активен различный набор обслуживающих устройств. Отличительной особенностью таких систем является то, что каждое обслуживающее устройство имеет свою очередь, поступле-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 13-07-97519 *p\_центр\_a*.

<sup>2</sup> Антон Сергеевич Сысоев, ассистент ([anton\\_syssoyev@mail.ru](mailto:anton_syssoyev@mail.ru)).

ние заявок в которую идет непрерывно, независимо от того, активно устройство или нет. Подходы к моделированию систем массового обслуживания по применяемому при их построении математическому аппарату дают два типа систем: аналитические СМО и статистические СМО. Развитие математического моделирования привело к работам, использующим относительно новое направление прикладной математики – идемпотентную (тропическую) математику, позволяющую описывать модели, нелинейные в обычном понимании, линейными – в идемпотентном [5, 1]. Появились и прикладные работы, посвященные применению методов идемпотентной алгебры для моделирования и исследования различных классов СМО [4].

Примером СМО с переменной структурой с ожиданием является регулируемый перекресток. Критерий качества такой системы - величина средней агрегированной транспортной задержки. С практической точки зрения моделирование, оптимизация и анализ такой системы могут служить математическим базисом управленческих решений по реорганизации существующих объектов управления дорожным движением и могут быть использованы при проектировании планируемых перекрестков.

## **1. Идемпотентное моделирование систем с переменной структурой**

Пусть  $T$  – время цикла работы системы. Циклом назовем период времени переменных тактов работы ( $g$ ) и простоя ( $r$ ). Заметим, что приоритет обслуживания каждой заявки в описываемой системе задается дисциплиной FIFO. По прибытии заявки на соответствующее обслуживающее устройство системы решается вопрос о возможности ее немедленного обслуживания. Здесь необходимо рассматривать три возможных ситуации: (1) очередь обслуживания пуста, работа обслуживающего устройства разрешена; (2) очередь обслуживания пуста, обслуживающее устройство в данный момент не функционирует; (3) очередь обслуживания не пуста.

В ситуации (1) заявка, поступившая на обслуживание,

немедленно получает его. В ситуации (2) пришедшая в систему заявка занимает первую позицию в очереди обслуживания и дожидается момента окончания простоя обслуживающего устройства. Именно этот момент времени и будет для текущей заявки моментом выхода из системы – моментом окончания обслуживания. В ситуации (3), вне зависимости от состояния обслуживающего устройства, текущая заявка будет обслужена через некий случайный интервал времени  $\xi(k)$  после окончания обслуживания предыдущей заявки.

Пусть один цикл работы такой системы состоит из  $m$  фаз, число обслуживающих устройств в системе  $n$ . Под фазой будем понимать промежуток времени работы системы, в течение которого функционирует один из наборов обслуживающих устройств.

Ассоциируем с описываемой системой гиперграф  $(V, E)$ , такой, что множество его вершин  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , мощность которого совпадает с числом обслуживающих устройств  $n$ . Множество гиперребер  $E$  показывает структуру фаз функционирования системы.

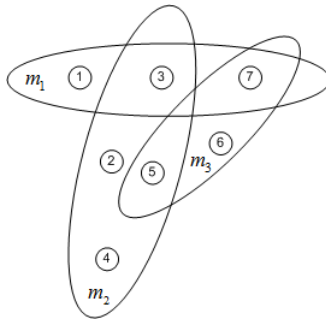


Рис. 1. Пример гиперграфа, ассоциированного с системой

На рис. 1 представлен пример гиперграфа системы с переменной структурой с 7 обслуживающими устройствами, функционирующими следующим образом: в фазе 1 — устройства 1, 3 и 7; в фазе 2 — устройства 2, 3, 4 и 5; в фазе 3 — устройства 5, 6 и 7.

Матрица инцидентности  $C$  гиперграфа  $(V, E)$ , построенная над идемпотентным полукольцом  $R$ , имеет следующую структуру:

$$\|c\|_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если устройство } j \text{ функционирует в фазе } i, \\ \varepsilon, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим:

$A(k) = (a_1(k), \dots, a_n(k))^T$  – вектор моментов прибытия заявок в систему,

$D(k) = (d_1(k), \dots, d_n(k))^T$  – вектор моментов выхода обслуженных заявок,

$W(k) = (w_1(k), \dots, w_n(k))^T$  – вектор неслучайных моментов ожидания заявками обслуживания,

$\Xi(k) = (\xi_1(k), \dots, \xi_n(k))^T$  – вектор случайных моментов ожидания заявками обслуживания.

Тогда рассматриваемую систему можно аналитически представить с помощью следующего выражения [2, 7]

$$(1) \quad D(k) = A(k) \oplus W(k) \oplus (D^T(k-1) \otimes \Xi(k))^T,$$

где  $w_l(k) = \bigotimes_{\substack{c_{ij} \neq \varepsilon \\ i=cur}} \bar{c}_{ij}^{g_i}$ ,  $\bar{c}_{ij}$  – инверсный к  $c_{ij}$  элемент,

$cur$  – переменная-счетчик, хранящая информацию о числе фаз, прошедших с начала функционирования цикла системы,  $l, j = 1, \dots, n$ .

Выражение (1) показывает динамику цикла функционирования многоканальной системы массового обслуживания с переменной структурой и может быть использовано для имитации работы регулируемого перекрестка.

## **2. Постановка и решение задачи оптимизации частного случая системы массового обслуживания с переменной структурой**

В общей постановке задачи глобальной оптимизации необходимо найти точку  $(x_1, \dots, x_n)$ , доставляющую глобальный оп-

тимум функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  при заданной системе смешанных ограничений.

Частным случаем рассматриваемой проблемы является следующая постановка задачи из предметной области: найти минимум агрегированной задержки на регулируемом перекрестке, то есть найти оптимальное время цикла и его оптимальное распределение по фазам регулирования [8, 9, 11].

В строгой постановке: найти точку  $(T, g_1, \dots, g_m)$  такую, что

$$(2) \quad f(T, g_1, \dots, g_m) = \frac{\sum_{i=1}^m f_i(T, g_i) \cdot v_i}{\sum_{i=1}^m v_i} \rightarrow \min$$

при системе ограничений

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^m g_i = T, \\ T_{\min} \leq T \leq T_{\max}, \\ (g_i)_{\min} \leq g_i \leq (g_i)_{\max}, \quad i = 1, \dots, m, \\ g_1, \dots, g_m > 0. \end{cases}$$

Здесь

$$f_i(T, g_i) = k_f^i \frac{T \left(1 - \frac{g_i}{T}\right)^2}{2 \left(1 - \min\{1, X_i\} \frac{g_i}{T}\right)} + 15t_e \left( (X_i - 1) + \sqrt{(X_i - 1)^2 + 240 \frac{X_i}{t_e \cdot \frac{s_i g_i}{T}}} \right),$$

$$X_i = \frac{v_i T}{s_i g_i},$$

$T$  – время цикла светофорного регулирования (с),

$g_i, i = 1, \dots, m$  – длительность фаз светофорного регулирования (с),

$f(T, g_1, \dots, g_m)$  – значение функции агрегированной задержки (с),

$k_f^i, i = 1, \dots, m$  – коэффициент, определяющий тип прибытия транспортных средств,

$v_i, i = 1, \dots, m$  – интенсивность прибытия транспортных средств на направлении  $i$  (прив.авт./час),

$s_i, i = 1, \dots, m$  – поток насыщения направления  $i$  (прив.авт./час),

$T_{\min(\max)}$  – ограничения на длительность времени цикла светофорного регулирования (с),

$(g_i)_{\min(\max)}, i = 1, \dots, m$  – ограничения на длительности фаз светофорного регулирования (с),

$t_e$  – время для прогноза вычисления задержки (мин).

Учитывая систему ограничений-неравенств (3), получаем множество  $X$ , на котором будет происходить минимизация.

Задача сводится к задаче условной минимизации с ограничением-равенством. Для перехода к задаче безусловной минимизации построим квадратичную штрафную функцию  $\varphi(T, g_1, \dots, g_m, \beta)$ , которая будет стремительно увеличиваться за пределами множества  $X$  и обращаться в ноль внутри его.

Получаем задачу многомерной безусловной минимизации

$$(4) \quad \tilde{f}(T, g, \beta) = f(T, g) + \varphi(T, g, \beta) \rightarrow \min.$$

Решение полученной задачи (4) проведено численно на основе предложенного мультистартового параллельного алгоритма безусловной многомерной минимизации с кластеризацией.

**Шаг 0.** Настройка параметров алгоритма. На этом шаге необходимо задать:

$n$  – число моделируемых равномерно распределенных точек на области оптимизации,

$\Delta\beta$  – приращение параметра штрафной функции,

$\varepsilon_1 > 0$  – точность шага алгоритма оптимизации,

$\varepsilon_2 > 0$  – точность алгоритма,

$\delta > 0$  – параметр кластеризации.

**Шаг 1.** В качестве начального значения для множителя штрафной функции положить  $\beta = 0$ . Тем самым будет найден глобальный оптимум исходной функции без учета ограничения-равенства.

**Шаг 2.** Для заданной функции без ограничений необходимо смоделировать на множестве  $X$   $n$  равномерно распределенных в  $R^{m+1}$  точек  $x_1, \dots, x_n$ .

**Шаг 3.** Минимизация функции со штрафом для конкретного параметра  $\beta$ .

**Шаг 3.1.** Используя полученные точки в качестве начальных, провести одну или несколько итераций алгоритма статистического градиента с целью улучшения рабочих точек. В результате получены точки  $z_1, \dots, z_n$  (для первой итерации используются точки шага 2, для последующих – точки шага 3.4).

**Шаг 3.2.** Применить кластеризацию к полученным точкам  $z_1, \dots, z_n$ .

**Шаг 3.2.1.** Положить, что все точки принадлежат различным кластерам.

**Шаг 3.2.2.** Найти ближайшую пару  $z_i, z_j$ , такую, что

$$\rho_{ij} = \arg \min_{k,l=1,\dots,N} \rho_{kl}.$$

**Шаг 3.2.3.** Если расстояние между ближайшими соседями не превосходит некоторое достаточно малое число  $\delta > 0$ , то  $z_i, z_j$  объединяются в один кластер, и, тем самым, число кластеров сокращается на единицу.

Пусть получено  $m$  кластеров. Если  $m = 1$ , переход к шагу 3.4, иначе – к шагу 3.3.

**Шаг 3.3.** Выбрать наиболее перспективных представителей от всех кластеров (т.е. точку из каждого кластера, доставляющую наилучшее значение целевой функции). Положить  $N = m$  и перейти к шагу 3.1.

**Шаг 3.4.** Положение - в окрестности глобального минимума. Выбрать представителя единственного кластера и использовать его в качестве начальной точки для алгоритма локальной оптимизации (например, алгоритма статистического градиента).

Для окончания шага безусловной оптимизации используется критерий

$$(5) \quad \left| \tilde{f}(z^k, \beta^k) - \tilde{f}(z^{k-1}, \beta^k) \right| \leq \varepsilon_1.$$

Если условие (5) выполнено, переход к шагу 4.

**Шаг 4.** Проверка условия окончания алгоритма

$$(6) \quad \left| \tilde{f}(z^{k+1}, \beta^k) - \tilde{f}(z^k, \beta^{k-1}) \right| \leq \varepsilon_2.$$

Если условие (6) выполнено – положить  $x^* = z^{k+1}$ , в противном случае – переход к шагу 5.

**Шаг 5.** Пересчет (увеличение) параметра  $\beta$  штрафной функции по заданному правилу:  $\beta^{k+1} = \beta^k + \Delta\beta$ . Переход на шаг 2.

В приведенном алгоритме в качестве метода локальной оптимизации использован алгоритм статистического градиента.

### **3. Структурная оптимизация систем с переменной структурой методами анализа конечных изменений**

Идея анализа функций многих переменных с целью установления влияний конечных изменений аргументов на конечное изменение значения функции уходит корнями в экономический факторный анализ [3], для чего существуют различные методы. Один из методов опирается на использование теоремы Лагранжа о промежуточной точке, в результате чего факторное разложение результирующего показателя имеет вид:

$$(7) \quad \Delta f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i + \alpha \Delta x_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\xi) \cdot \Delta x_i,$$

где  $\Delta x_i$  – приращения аргументов функции,  $\alpha$  – параметр промежуточной точки, определяющий коэффициенты факторного влияния.

В математическом анализе принято рассматривать оценку изменения величин в форме разностей (приращений) финального  $x$  и начального  $x_0$  значений. Однако возможны и другие оценки



изменения величин, например, по аналогии с конечными разностями (приращениями)  $\Delta x = x_0 - x$ , конечные частные (индексы)  $ix = \frac{x}{x_0}$  (при  $x_0 \neq 0$ ). Такой подход приводит к появлению методики более общего анализа, нежели экономический факторный анализ, – анализа конечных изменений.

Теорема Лагранжа представляет собой основную модель аддитивного различительного исчисления (7). Путем логарифмирования (экспоненцирования) аргумента (функции) возможно получение основной модели мультипликативного различительного исчисления (8) и смешанных моделей аддитивного-мультипликативного (9) и мультипликативно-аддитивного (10) различительных исчислений

$$(8) \quad iy = \prod_{i=1}^n (ix_i)^{\gamma_i},$$

где  $\gamma_i = \frac{\xi_i}{f(\xi)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$  – частные эластичности в промежуточной точке;

$$(9) \quad iy = \prod_{i=1}^n \left( \exp \left( \frac{1}{f(\xi)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \right) \right)^{\Delta x_i},$$

$$(10) \quad \Delta y = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \cdot \xi_i \right) \cdot \ln ix_i.$$

В ходе исследования произведен поиск параметра промежуточной точки для возможности проведения анализа конечных изменений дробно-рациональных функций специального вида

$$(11) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i},$$

где  $x_i \geq 0$ ,  $a_0, a_i, b_i \geq 0$ .

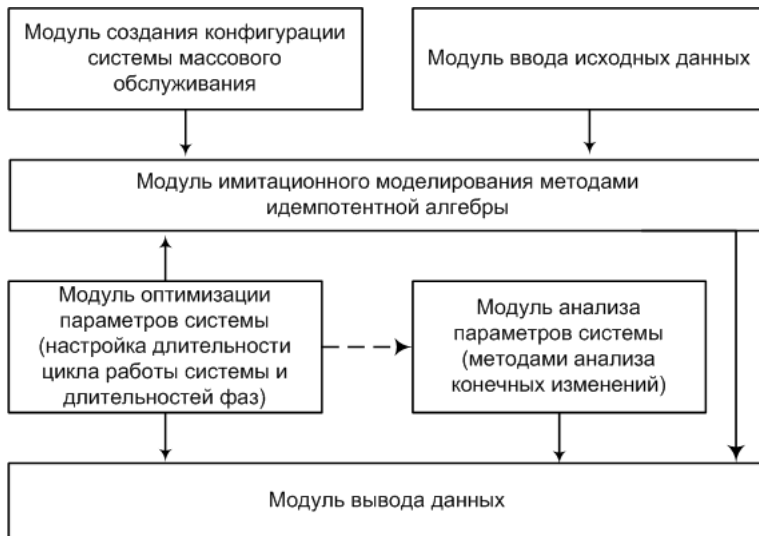
Выражения для параметра промежуточной точки модели (11) имеет вид

$$(12) \quad \alpha = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i + \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n (x_i^0 + \Delta x_i)}}{\sum_{i=1}^n \Delta x_i}.$$

#### **4. Программное обеспечение для моделирования и оптимизации систем массового обслуживания с переменной структурой**

В ходе исследования разработан программный комплекс «Моделирование и оптимизация процессов на регулируемом перекрестке» [6], который состоит из следующих модулей:

- основной модуль «SMO», реализующий имитационную идемпотентную модель многоканальной системы массового обслуживания переменной структуры, описанную выше;
- основной модуль «Optimization», реализующий численный мультистартовый параллельный алгоритм безусловной многомерной минимизации;
- вспомогательный модуль «Crossroad», служащий для построения конфигурации регулируемого перекрестка и дальнейшей работы с ней.



*Рис. 2. Структура комплекса для моделирования и оптимизации регулируемых перекрестков*

Структура программного комплекса представлена на рис. 4.

Данный программный комплекс предназначен для: а) формирования структуры исследуемого регулируемого перекрестка и имитационного моделирования процесса его функционирования с заданными параметрами; б) нахождения оптимальной длительности цикла и оптимального распределения ее по фазам светового регулирования; в) произведения анализа над функцией транспортной задержки с целью выявления проблемных фаз в организационной структуре перекрестка.

## 5. Численные примеры

В ходе исследования рассмотрены примеры работы нескольких функционирующих в Липецке регулируемых перекрестков. Моделирование проводилось с помощью разработанного модуля имитационного моделирования. Показана непротиворечивость полученных результатов. Исходные данные по параметрам перекрестка для оптимизации, а также результаты, полученные после оптимизации классическим методом Вебстера [12] и по предложенному алгоритму, приведены в табл. 1.

*Таблица 1. Сравнительные результаты оптимизации*

		Фаза 1	Фаза 2	Фаза 3	Фаза 4
Интенсивность движения в критической группе, прив.авт./ч		1533	242	242	1086
Поток насыщения в критической группе, прив.авт./ч		1800	1800	1800	1800
Длительность фаз, с	до	38	16	8	23
	после	31,5	9,8	9,9	21,5
	Webster	12,6	7	7	8,9
v/c-отношение	до	<b>1,905</b>	<b>0,714</b>	<b>1,428</b>	<b>2,229</b>
	после	<b>1,966</b>	<b>0,997</b>	<b>0,987</b>	<b>2,040</b>
	Webster	2,399	0,682	0,682	2,407
Задержка, с	до	<b>212,2</b>	<b>54,75</b>	<b>14,97</b>	<b>647,52</b>
	после	<b>207,09</b>	<b>48,87</b>	<b>11,63</b>	<b>367,28</b>
	Webster	213,7	40,26	11,25	412,83

По данным табл. 1 можно сделать вывод, что использование предлагаемого метода оптимизации, во-первых, также как и классический подход Вебстера, стремится к балансировке v/c-

отношений в фазах, и, во-вторых, в результате экономия времени агрегированной задержки составляет 30,1%.

Алгоритм получения средней задержки для регулируемого перекрестка приводит к модели вида  $f = \frac{\sum_{i=1}^n f(v_i) \cdot v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$ . Анализ

этой функции, где в качестве каждого  $f(v_i)$  выступают выражения из системы (2), является вычислительно сложной задачей. Для упрощения анализа применим к функции  $f$  разложение в ряд Маклорена (до трех членов). В результате такого приема получаем модель, структурно схожую с формулой (11). Параметр средней точки для данной модели вычисляется согласно выражению (12).

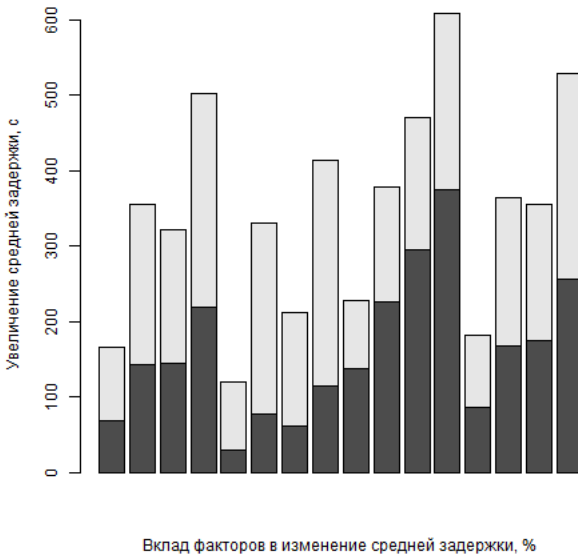


Рис. 3. Результаты анализа двухфазного перекрестка

Пример результатов анализа двухфазного регулируемого пе-

реквестка, построенный в виде полного факторного эксперимента, приведен на рис. 3. На рис. 3 демонстрируется конечное изменение задержки транспортного регулирования в зависимости от конечных изменений факторов - интенсивностей критических групп в фазах - и процентное влияние факторов.

Результаты анализа полученной функции структуры (11) при помощи моделей (7-10) могут служить основанием для принятия управленческих решений по реорганизации существующего режима функционирования регулируемого перекрестка и при устройстве планирующихся на этапе их моделирования.

## **6. Выводы и перспективы**

Системы с переменной структурой давно зарекомендовали себя как надежный и универсальный инструмент моделирования различных процессов, в которых функциональные связи между элементами описываемой системы меняются с динамикой самой системы. Рассматриваемый класс систем массового обслуживания с переменной структурой отличается сменяющимися в процессе функционирования системы наборами обслуживающих устройств.

Процесс моделирования любой системы сопряжен с ее анализом и оптимизацией. Для оценки качества функционирования системы используются функционалы качества, описываемые уравнениями, в общем случае нелинейной структуры, что обосновывает разработку специального алгоритма численной оптимизации.

Предложенный класс систем массового обслуживания может быть расширен и использован для описания функционирования большого количества технических систем и технологических процессов.

## **Литература**

1. БЛЮМИН С.Л., ЖБАНОВ С.А. *Идемпотентная математика: некоторые предпосылки и приложения* // Вести

- высших учебных заведений Черноземья. — Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2011. — №2(24). — С. 41-44.
2. БЛЮМИН С.Л., СЫСОЕВ А.С., ЧЕРНЫХ О.О. *Идемпотентный подход к моделированию: транспортные системы и оптимизация подвижных процессов* // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2012. №2. С. 43-46.
  3. БЛЮМИН С.Л., СУХАНОВ В.Ф., ЧЕБОТАРЕВ С.В. *Экономический факторный анализ: Монография*. Липецк: ЛЭГИ, 2004. — 148 с.
  4. КРИВУЛИН Н.К. *Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем*. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. — 256 с.
  5. МАСЛОВ В.П. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении*. М.: Физматлит, 1994. — 144 с.
  6. ПОПОВА Д.И., СЫСОЕВ А.С., БЛЮМИН С.Л. *Моделирование и оптимизация процессов на регулируемом перекрестке* // М.: Роспатент, 2013. — № 2013-616785 от 19.07.2013.
  7. СЫСОЕВ А.С. *Имитационное идемпотентное моделирование транспортных систем* // Управление большими системами: материалы IX Всероссийской школы-конференции молодых учёных. Том 1. Тамбов-Липецк: изд-во Першина Р.В. — 2012. — С. 97-100.
  8. СЫСОЕВ А.С. *Синтез мультистартового параллельного алгоритма безусловной многомерной оптимизации для минимизации функции транспортной задержки* // Управление большими системами: материалы X Всероссийской школы-конференции молодых ученых. Том 3. Уфимск. гос. авиац. тех. ун-т. Уфа: УГАТУ, 2013. — С. 273-276.
  9. СЫСОЕВ А.С. *Численный алгоритм оптимизации функции транспортной задержки на регулируемом перекрестке* // Научно-технический вестник Поволжья. 2012. № 5. — С. 324-330.
  10. УТКИН В.И. *Скользкие режимы в задачах оптимизации и управления*. М: Наука, Главная редакция физико-

математической литературы, 1981. — 368 с.

11. SYSOEV A.S. *Synthesis of parallel algorithm for multidimensional optimization for traffic delay function* // Proceedings of the Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT2013), Vienna-Budapest-Bratislava, September 15-21, 2013, Volume 2, Ufa State Aviation Technical University, 2013. — pp. 88-91.
12. WEBSTER F.V. *Traffic Signal Settings. Road Research Technical Paper No. 39*. London: Great Britain Road Research Laboratory, 1958.

## MODELING AND OPTIMIZATION OF A CLASS OF VARIABLE STRUCTURE QUEUEING SYSTEMS

**Anton Sysoev**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, assistant lecturer (anton\_sysoyev@mail.ru).

*Abstract: The paper consists idempotent approach to graphostructural modeling of a class of variable structure queueing systems; the algorithm for optimal parameters of such class of queueing systems, the method of analysis of finite fluctuations for structural optimization.*

**Keywords:** variable structure systems, idempotent mathematics, numerical optimization, analysis of finite fluctuations.