УДК 533.95
ББК 30в6

ЗАДАЧА РАСЧЕТА РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ «ГЛОБУС-М»

Джумакаев Т. К.[1]
(*Московский физико-технический институт, Москва*)

Ставится задача расчета распределения равновесного полоидального потока плазмы в токамаке «Глобус-М» по заданным токам в обмотках полоидального поля. Приводится численный алгоритм решения уравнения равновесия плазмы Грэда-Шафранова, содержащий двойной цикл Лакнера-Пуассона. Создан код в программно-вычислительной среде MATLAB для расчета распределения полоидального потока в токамаке. Получен численный результат расчета равновесия плазмы для лимитерной фазы выбранной временной точки разряда в токамаке «Глобус-М» .

Ключевые слова: плазма, токамак, равновесие, уравнение Грэда-Шафранова, MATLAB

1. Введение

Решение задачи расчета равновесия плазмы в токамаке необходимо для расчета сценария плазменных разрядов. Эта задача распадается на две: прямую и обратную [1]. Прямая задача представляет собой отыскание конфигурации плазменного шнура при известных токах во внешних обмотках токамака. Решение обратной задачи дает возможность по заданной конфигурации плазмы отыскать величину токов во внешних обмотках для получения искомого равновесия плазмы.

Под сценарием разряда в токамаке понимается набор программно-изменяющихся токов в обмотках полоидального поля,

[1] *Джумакаев Тимур Казбекович, студент* (*timdzh93@gmail.com*).

которые обеспечивают заданные магнитные конфигурации плазмы.

Для решения задачи расчета равновесия плазмы используется нелинейное уравнение Грэда-Шафранова в частных производных [5], которое решается посредством двойного вложенного цикла. Во внешнем цикле (процедура Лакнера [3]) ищется магнитный поток на границе. Во внутреннем цикле уравнение Грэда-Шафранова линеаризуется, и решается получившееся в результате уравнение Пуассона [1].

В настоящей работе решается прямая задача расчета равновесия. Представлен результат расчета равновесия плазмы с применением цикла Лакнера-Пуассона для токамака «Глобус-М» [2].

2. Постановка задачи

Постановка задачи расчета равновесия плазмы состоит в следующем: при заданных координатах расположения внешних обмоток полоидального магнитного поля и токах в них найти распределение полоидального магнитного потока внутри вакуумной камеры токамака «Глобус-М». Под полоидальным магнитным полем в токамаке понимается поле, проходящее через полюса цилиндрической системы координат. Также существует тороидальное поле, проходящее по замкнутым линиям внутри плазменного шнура.

Для решения задачи воспользуемся уравнением равновесия Грэда-Шафранова [5] с краевыми условиями на главной оси тора и на бесконечности в цилиндрической системе координат (r,φ,z):

$$
(1)\quad \begin{cases}
r\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}\right]+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\mu_0 r\cdot\begin{cases} j_\varphi(r,\psi-\psi_p) & \psi>\psi_p \\ \sum\limits_{k=1}^{N} I_k\delta(r-r_k,z-z_k) & \psi<\psi_p \end{cases} \\
\psi(0,z)=0 \\
\lim\limits_{r,z\to\infty}\psi(r,z)=0
\end{cases}.
$$

где μ_0 – размерный коэффициент, при котором расстояние измеряется в метрах, ток в кА, магнитное поле в Тл, магнитный поток в В·с; ψ – искомая величина полоидального магнитного потока, ψ_p – полоидальный поток на границе плазменного шнура, r_k, z_k – заданные координаты внешних обмоток в цилиндрических координатах. I_k – ток в k-ой обмотке.

Здесь j_φ – функция распределения тороидального тока плазмы, которая предполагается заданной в следующем виде [1], [4]:

(2)
$$j_\varphi(r,\psi-\psi_p) = r\frac{dp}{d\psi} + \frac{dI^2}{d\psi}\cdot\frac{1}{r} \equiv$$
$$\equiv \lambda\left\{\beta r(\psi-\psi_p)^{\gamma_1} + (1-\beta)\frac{\hat{R}^2}{r}(\psi-\psi_p)^{\gamma_2}\right\} \equiv \lambda f(r,\psi-\psi_p).$$

где β – бета токовая (величина, характеризующая степень ограничения давления плазмы магнитным полем); γ_1, γ_2 – показатели распределения плотности тока, $\hat{R}^2$ – среднее значение r^2 для сечения плазменного шнура Ω_p.

Коэффициент λ ищется из условия нормировки по величине полного тока плазмы I_{pl}, считающегося заданным [1]:

(3) $$\lambda\mu_0 \iint_{\Omega_p} f(r,\psi-\psi_p)drdz = I_{pl}.$$

Функция (2) выбирается таким образом, чтобы оба ее слагаемых, зависящих от давления и полоидального тока плазмы соответственно, давали одинаковый вклад в тороидальный ток, т.е. имели бы одинаковый профиль в координатах (r,z). Также эта функция должна сохранять известную для токамака величину запаса устойчивости. Эта величина характеризует устойчивость удержания плазмы.

Токамак «Глобус-М» является сферическим токамаком, то есть расстояние от оси вращения до центра образующего сечения камеры лишь немногим больше расстояния от центра сечения до края камеры (радиуса камеры). Настоящая работа посвящена решению задачи расчета равновесия плазмы для этой установки.

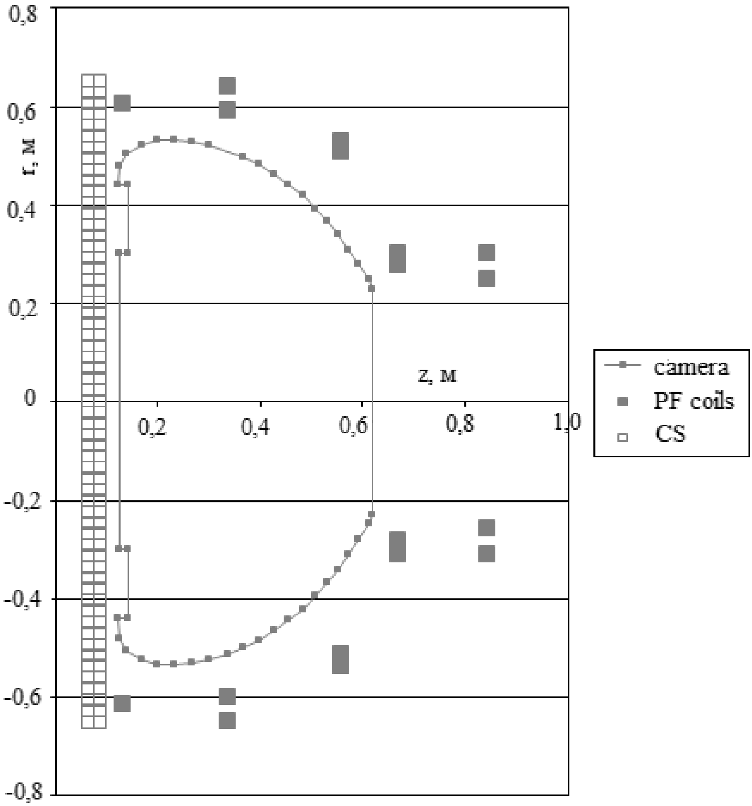

Рис. 1. Сечение токамака «Глобус-М»

Автором данной работы создан код в среде программирования MATLAB для решения этой задачи. На вход исполняемой программы для расчета равновесия плазмы поступает информация о координатах внешних обмоток, их линейных размерах и токах в них, а также о линейных размерах счетной области и количестве узлов численной сетки, построенной на ней. Последняя нужна для работы используемого в коде пакета MATLAB PDE Toolbox. Результатом работы программы является матрица распределения на узлах сетки равновесного полоидального магнитного потока и ее графическое представление в виде линий уровня на двумерной счетной области.

3. Метод решения

3.1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Задачу расчета равновесия, использующую уравнение (1), невозможно решить стандартными численными методами, из-за нелинейности уравнения Грэда-Шафранова и условий на бесконечности. Поэтому приходится использовать нетривиальный подход.

Метод решения, представленный в данной работе, использует двойной вложенный цикл Лакнера-Пуассона [1]. Во внешнем цикле, производится переход от условий для потока на бесконечности к граничным условиям для конечной заранее определенной счетной области. Во внутреннем цикле правая часть уравнения Грэда-Шафранова линеаризуется посредством подстановки решения с предыдущей итерации и сводится к уравнению Пуассона, которое уже решается с помощью стандартных численных функций MATLAB PDE Toolbox (пакета MATLAB для решения уравнений в частных производных).

3.2. ВНЕШНИЙ ЦИКЛ (*ПРОЦЕДУРА ЛАКНЕРА*)

Еще до выполнения алгоритма задается прямоугольная область Ω, предположительно содержащая плазменный шнур, но не содержащая внешних обмоток. Это нужно для упрощения расчета, чтобы правую часть уравнения (1) в области $\psi < \psi_p$ можно было считать нулевой.

Во внешнем цикле для j-ой итерации считается магнитный поток на границе этой области следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \psi^{j+1}(r,z)\Big|_{\partial\Omega} &= \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k^j G(r,z,r_k,z_k) + \\ &+ \lambda^j \mu_0 \iint\limits_{\Omega_p} G(r,z,r_x,z_x) f_\varphi(r,\psi^j - \psi_p) dS_x \end{aligned} \quad (4)$$

где $G(r,z,r_x,z_x)$ – поток в точке (r, z) от тока, расположенного в точке (r_x,z_x), являющийся функцией Грина [3]:

(5) $$G(r,z,r_x,z_x)=\sqrt{\frac{r\cdot r_x}{k^2}}\left[\left(2-k^2\right)K(k)-2E(k)\right].$$

Здесь:

(6) $$k^2=\frac{4r\cdot r_x}{(r+r_x)^2+(z-z_x)^2}.$$

$K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода [1]:

(7) $$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

(8) $$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

3.3. ВНУТРЕННИЙ ЦИКЛ

Целью этого этапа алгоритма является сведение уравнения Грэда-Шафранова к уравнению Пуассона, решаемому стандартными численными методами MATLAB PDE Toolbox. Для этого используется следующая итерационная формула [1]:

(9) $$\begin{cases}\Delta\psi^{j,n+1}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi^{j,n}}{\partial r}-\mu_0\lambda^{j,n+1}r\begin{cases}f(r,\psi^{j,n}-\psi_p) & \psi^{j,n}>\psi_p\\ 0 & \psi^{j,n}<\psi_p\end{cases}.\\ \psi(r,z)^{j,n+1}\Big|_{\partial\Omega}=\psi(r,z)^{j,1}\Big|_{\partial\Omega}\end{cases}$$

Здесь n – номер итерации внутреннего цикла. В правую часть подставляется решение, полученное на предыдущем шаге, тем самым линеаризуя ее. На первой итерации используется грубое начальное приближение для предполагаемого решения задачи.

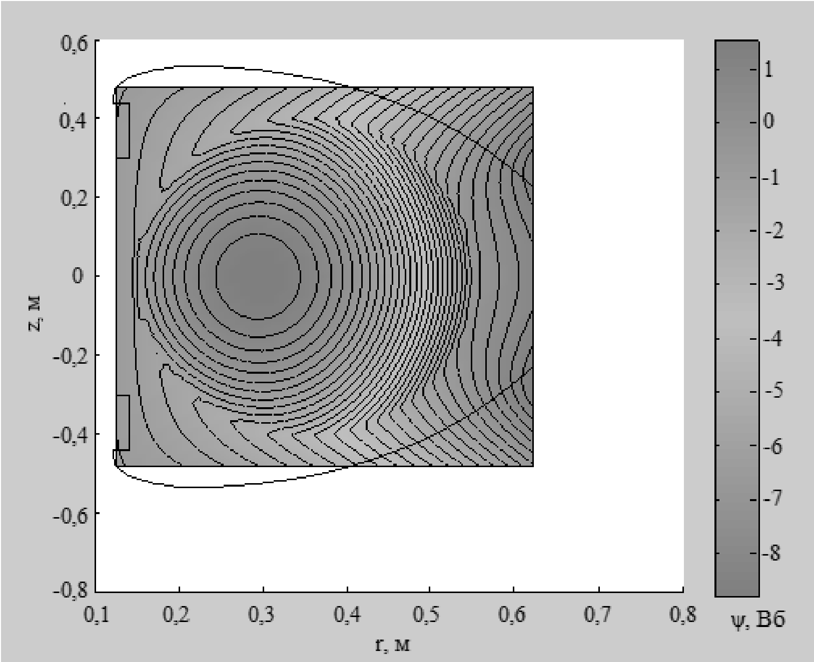

Рис. 2. Линии уровня для приближения полоидального магнитного потока

Нормировочный множитель $\lambda^{j,n+1}$ вычисляется следующим образом [1]:

(10) $\lambda^{j,n+1}\mu_0 \iint\limits_{\Omega_p} f(r,\psi^{j,n}-\psi_p)drdz = I_{pl}$.

В данной работе полученное уравнение Пуассона (9) решается в среде программирования MATLAB, используя стандартную функцию poisolv пакета MATLAB PDE Toolbox.

4. Результаты

Процесс управления плазмой в токамаке имеет две фазы: лимитерную и диверторную. Лимитерная фаза характеризуется тем, что плазменный шнур касается в одной точке внутренней стенки камеры. В диверторной фазе граница плазмы в сечении является самопересекающейся кривой, а плазменный шнур находится только внутри этой кривой, хотя условие для существования плазмы выполняется и для другой области.

Применив численный метод, приведенный в предыдущих пунктах, удалось получить решение задачи для лимитерной фазы в виде матрицы распределения равновесного полоидального магнитного потока по узлам расчетной сетки. Графическое представление решения в виде линий уровня показано на рисунке 3.

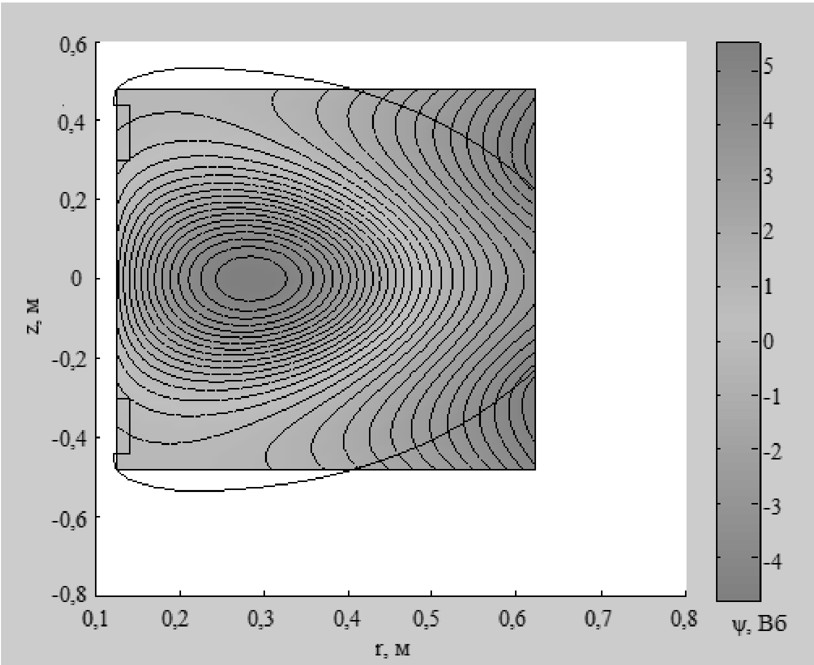

Рис. 3. Рассчитанное равновесие для лимитерной фазы токамака «Глобус-М»

5. Заключение

В среде программирования MATLAB был реализован код, решающий задачу расчета равновесия плазмы в токамаке «Глобус-М». Эта программа основана на двойном цикле Лакнера-Пуассона, который решает уравнение равновесия Грэда-Шафранова.

В работе представлено решение задачи для лимитерной фазы токамака. Тем не менее, еще не получено равновесие для диверторной фазы.

Расчет равновесия для обеих фаз токамака будет важным практическим результатом, который может найти применение в реальном эксперименте на токамаке «Глобус-М».

Литература

1. ВОЗНЕСЕНСКИЙ В.А., ГАСИЛОВ Н.А., ДНЕСТРОВСКИЙ Ю.Н., КУЗНЕЦОВ А.Б., СЫЧУГОВ Д.Ю., ЦАУН С.В. *TOKAMEQ – код для расчета равновесия плазмы в токамаке* // Препринт ИАЭ-6208/7, Москва - 2001.
2. GUSEV, V.K., AZIZOV, E.A., ALEKSEEV A.B., ET AL *Globus-M results as the basis for a compact spherical tokamak with enhanced parametres Globus-M2* // Nuclear Fusion, 2013, Vol. 53, 093013, 14 pp.
3. LACKNER, K. *Computation of ideal MHD equilibria* // Computer Physics Communications, 1976, Vol. 12, No. 1, pp. 33-44.
4. LAO, L.L., ST. JOHN, H., STAMBAUGH, R.D., KELLMAN, A.G., PFEIFFER, W. *Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks* // Nuclear Fusion, 1985, Vol. 25, No. 11, pp. 1611-1622.
5. WESSON, J. *Tokamaks, Third Edition* // Clarendon Press-Oxford, 2004, pp. 105-136.

PROBLEM OF COMPUTATION OF PLASMA EQUILIBRIUM IN TOKAMAK "GLOBUS-M"

Timur Dzhumakaev, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, student (timdzh93@gmail.com).

Abstract: *The problem of computation of equilibrium poloidal flux distribution in tokamak "Globus-M" with given currents in poloidal field coils is formulated. Numerical algorithm of solving Grad-Shafranov plasma equilibrium equation which contains double Lackner-Poisson cycle is given. Code in programming environment MATLAB for calculation of poloidal flux distribution in tokamak is created. Numerical result of plasma equilibrium computation for limiter phase of chosen time point of discharge in tokamak "Globus-M" is obtained.*

Keywords: plasma, tokamak, equilibrium, Grad-Shafranov equation.