

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ВТОРОГО РОДА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ЕГО СХОДИМОСТИ¹

Кочетков С.А.²,

(Учреждение Российской академии наук Институт проблем
управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассмотрен один из алгоритмов скольжения второго рода при воздействии на систему внешних ограниченных гладких возмущений. Отличительной особенностью предложенной обратной связи является то, что дифференциальные уравнения замкнутой системы не являются однородными. Приведено доказательство конечной сходимости для таких систем в предположении, что возмущения действуют только по каналам управления. За счет использования нового алгоритма управления удалось придать системе свойство конечной сходимости за счет использования меньших ресурсов управления.

Ключевые слова: скользящие режимы второго рода, доказательство сходимости, метод усреднения для функции Ляпунова, оптимизированные затраты управляющих воздействий..

1. Введение

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью приобрела широкую известность в XX веке, начиная с работ Каратеодори К., который рассматривал их в предположении, что правая часть непрерывна по вектору состояния, а точки разрыва правой части по времени составляют

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №12-08-0865-а, 14-01-31190-мол-а.

² Кочетков Сергей Александрович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-93-21, kos@ipu.ru).

множество меры нуль. При некоторых дополнительных условиях он привел условия существования и единственности решения таких систем уравнений [12].

Бурное развитие теории автоматического управления в XX веке привело к системам дифференциальных уравнений, в которых в правой части может выбираться некоторое скалярное или векторное возействие, называемое управлением, для того чтобы придать замкнутой системе некоторые полезные свойства. Появилось большое количество задач из механики, электротехники, в которых за счет управления правая часть дифференциальных уравнений разрывна не только по времени, но и по пространству [2, 3, 10, 4, 9].

Особого внимания требует случай когда множество точек разрыва правой части дифференциального уравнения составит множество ненулевой меры. Рассмотрения таких систем с самого начала требует обобщение понятия решения. Данная проблема в основном была связана с релейными системами управления [17] и системами с переменной структурой [13], в которых при определенных условиях может возникать особый режим работы: скользящий режим [14, 24]. Существует различные способы доопределения движения в скользящем режиме [4, 14, 1, 15], Однако наиболее часто пользуются доопределением Филиппова А.Ф. Рассмотрим более подробно это доопределение для системы первого порядка

$$(1) \quad \dot{s} = -M \operatorname{sign}(s) + \xi(t), \quad M = \operatorname{const} > 0,$$

где $|\xi(t)| \leq \Sigma = \operatorname{const} > 0$ – внешнее возмущение, $\operatorname{sign}(\cdot)$ – функция знака.

При $M > \Sigma$ в системе (1) возникает скользящий режим, при движении в котором согласно доопределению Филиппова А.Ф. решение определяется как решение дифференциального включения

$$\dot{s} \in F(t, s),$$

где $F(t, s)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки функции $-M \operatorname{sign}(s^*) + \xi(t)$, когда $s^* \neq 0$, $t = \operatorname{const}$. В данном случае $\dot{s} \in [-M + \xi(t), M + \xi(t)]$, а

решение на поверхности разрыва доопределяется как

$$s(t) = 0, [M \operatorname{sign}(s(t))]_{eq} = \xi(t),$$

где обозначение введено $[\cdot]_{eq}$ введено, чтобы показать, что из-за переключений реле бесконечной частоты только некоторая средняя составляющая данного сигнала равна возмущению [14], в этом смысле запись $M \operatorname{sign}(s(t)) = \xi(t)$ некорректна.

В приведенном примере управление возникало сразу после дифференцирования поверхности скольжения, т.е. относительный порядок переменной скольжения по отношению к управлению равен единице. Такие случаи в теории скользящих режимов называются невырожденными [14], а сами скользящие движения в современной терминологии называются скользящими режимами первого рода [5]. Наличие разрывов приводит к тому, что для алгоритмов управления на скользящих режимах характерно конечное время попадания на многообразие скольжения. Обозначив время попадания на поверхность скольжения через t_r , можно записать его оценку

$$t_r \leq \frac{|s(0)|}{M - \Sigma}.$$

По аналогии, если управление появляется после двукратного интегрирования поверхности скольжения и за счет алгоритма управления в некоторый момент времени $t = t_r$ обеспечивается одновременное равенство $s(t_r) = \dot{s}(t_r) = 0$, то такой алгоритм называется алгоритмом скольжения второго рода [5, 6, 20]. Рассмотрим, так называемый, алгоритм “скручивания” для системы

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 \\ \dot{s}_2 &= u + \xi(s_1, s_2, t), \end{aligned}$$

в которой управление выбирается в виде

$$(3) \quad u = -M_2 \operatorname{sign}(s_2) - M_1 \operatorname{sign}(s_1),$$

где $M_1 = \operatorname{const} > 0$, $M_2 = \operatorname{const} > 0$, $|\xi(s_1, s_2, t)| \leq \Sigma$ – неизвестная функция, описывающая внешние возмущения и неопределенности системы.

В работах [24, 20, 23, 11] доказана сходимость переменных данной системы к нулю за конечное время при условии, что

$$(4) \quad M_1 > M_2 + \Sigma, \quad M_2 > \Sigma.$$

По описанной схеме могут быть введены формальные определения скользящего режима r -рода, некоторые из которых можно найти в [5, 21].

Существует не так много методов исследования систем со скользящими режимами высших порядков. Большинство из них справедливо только для однородных дифференциальных уравнений, описывающих замкнутую систему управления [21, 23, 19]. В частности, если доказана асимптотическая сходимость переменных системы к нулю, то на основе качественной теории дифференциальных уравнений доказывается, что сходимость происходит за конечное время. Ограничения на однородность дифференциальных уравнений ограничивают класс систем и алгоритмов управления, которые могут быть использованы при синтезе.

В статье [22] рассмотрен редкий случай, когда удалось подобрать негладкую функцию Ляпунова для доказательства конечно-временной сходимости для одного из алгоритмов скользящего второго рода.

В работе [11] предложена модификация метода Зубова В.И. [7] для поиска кандидатов на функцию Ляпунова для некоторых алгоритмов управления на скользящих режимах второго рода. Однако использование данного подхода в предложенной ниже задаче весьма затруднительно.

Сложности поиска подходящей функции Ляпунова несколько ослаблены в публикации [25], где предложен альтернативный подход к доказательству конечной сходимости. Основная идея состоит в следующем: при конечной сходимости переменных системы к нулю за конечное время сойдется и любая положительно полуопределенная функция от этих переменных. Доказательство в этом случае можно провести на основе средней скорости затухания для некоторой функции, характеризующей энергию в системе. Например, для замкнутой системы (2)–(3) в качестве такой может быть выбрана

$$V = |s_1| + \frac{s_2^2}{2M}.$$

В данной работе предложен новый алгоритм управления

на скользящих режимах второго рода. Основная идея состоит в использовании модификации релейного алгоритма управления, предложенного в [8]. За счет введения радикального члена в управляющее воздействие удастся обеспечить конечную сходимость при меньших затратах ресурсов управления по сравнению с алгоритмом (3). Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведена постановка задачи. В следующем разделе рассмотрена основная идея синтеза управляющего воздействия и приведено доказательство сходимости за конечное время с оценкой интервала сходимости на основе функции Ляпунова, приведенной в [8] и идее усреднения, описанной выше. В разделе 4 приведен численный пример расчета оценок времени переходного процесса. Результаты работы и направления дальнейших исследований обсуждаются в заключении.

2. Выбор алгоритма управления

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления вида

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= \xi(s_1, s_2, t) + u, \end{aligned}$$

где $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $|\xi(t)| < \Sigma = \text{const} > 0$ – неизвестная функция внешних возмущений и неопределенностей системы, $|\xi(s_1, s_2, t)| \leq \bar{\Sigma} = \text{const} > 0$. Предполагается, что переменные s_1, s_2 доступны измерению.

Требуется синтезировать управляющее воздействие из класса ограниченных функций $|u(t)| \leq U = \text{const} > 0$, такое, что найдется момент времени t_r , после которого переменные системы равны нулю

$$s_1(t) = s_2(t) = 0, \quad \forall t > t_r.$$

2.2. Основная идея выбора управляющего воздействия

Все алгоритмы скольжения второго рода базируются на использовании релейной обратной связи, которая обеспечивает колебательный характер переходного процесса для переменных си-

стемы. Добавляя при этом за счет обратной связи некоторое трение можно обеспечить асимптотическую или конечно-временную сходимость переменных системы к нулю.

Например, рассмотрим систему (5) с так называемым “вихревым” алгоритмом

$$(6) \quad u = -\alpha s_2 - M \operatorname{sign}(s_1), \quad M > \Sigma, \quad \alpha(M - \Sigma) > \bar{\Sigma}.$$

Записывая производную от положительно полуопределенной функции Ляпунова

$$(7) \quad V = |s_1| - \frac{\xi}{M} s_1 + \frac{(\alpha s_1 + s_2)^2}{2M},$$

вдоль траекторий замкнутой системы

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= -\alpha s_2 - M \operatorname{sign}(s_1) + \xi(s_1, s_2, t), \end{aligned}$$

получим

$$\dot{V} = -\bar{\alpha}|s_1|, \quad \alpha = \alpha \left(1 - \frac{\Sigma}{M}\right) - \frac{\bar{\Sigma}}{M}.$$

Как видно, переменная $s_1(t)$ асимптотически убывает к нулю. В силу уравнений замкнутой системы легко может быть доказана и асимптотическая сходимость переменной $s_2(t)$.

Нелинейный осциллятор организуется за счет релейной составляющей $-M \operatorname{sign}(s_1)$ по аналогии с линейным осциллятором

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2, \\ \dot{s}_2 &= -\omega^2 s_1, \end{aligned}$$

а роль трения играет компонента $-\alpha s_2$.

Согласно поставленной задаче управления модифицируем алгоритм управления (6) на основе следующих соображений. Известно [18], что дифференциальное уравнение с квадратным корнем

$$\dot{s} = -\sqrt{|s|} \operatorname{sign}(s)$$

обладает свойством конечно-временной сходимости, из-за того, что правая часть не удовлетворяет условиям Липшица.

Добавляя в управление (6) радикальный член, получим

$$(9) \quad \begin{aligned} u &= -\alpha s_2 - \alpha |s_2|^\beta \operatorname{sign}(s_2) - M \operatorname{sign}(s_1), \quad \beta = \operatorname{const} > 0, \quad 0 < \beta < 1; \\ \alpha(M - \Sigma) &> \bar{\Sigma}, \quad M > \Sigma, \quad \alpha = \operatorname{const} > 0, \quad M = \operatorname{const} > 0. \end{aligned}$$

Для дальнейших рассуждений запишем дифференциальные уравнения замкнутой системы (5), (9)

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 \\ \dot{s}_2 &= -\alpha s_2 - \alpha |s_2|^\beta \text{sign}(s_2) - M \text{sign}(s_1) + \xi(t, s_1, s_2). \end{aligned}$$

В следующем разделе доказывается, что наличие в правой части члена, не удовлетворяющего условиям Липшица, приводит к сходимости переменных замкнутой системы (10) к началу координат $(0, 0)$ за конечное время. Отметим, что данное свойство обеспечивается за счет меньших ресурсов управления по сравнению с алгоритмом “скручивания” (3).

3. Доказательство конечной сходимости с оценками времени

Для дальнейших рассуждений нам понадобится сравнение фазовых и временных характеристик замкнутой системы (10) и системы сравнения

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -f(y_2) - M \text{sign}(y_1) + \xi(t, s_1, s_2), \end{aligned}$$

где $f(y_2)$ – непрерывная нечетная функция, $f(0) = 0$, $f(y_2) > 0$, $\forall y_2 > 0$, $\frac{df(y_2)}{dy_2} > 0$, $\forall y_2 > 0$.

Пусть для функции $f(y_2)$ выполняется неравенство

$$\alpha(|s_2| + |s_2|^\beta) \geq |f(y_2)|, \quad y_2 = s_2 \in \mathbb{R}.$$

В статье [8] показано, что при выполнении этого соотношения и одинаковых начальных условиях, фазовые портреты систем (10) и (11) выглядят, как показано на рис. 1. Например, если рассмотреть третий квадрант, то кривая b соответствует фазовому портрету системы (11) и накрывает фазовый портрет a системы (10), т.к. скорость роста переменной $s_2(t)$ для любой точки фазового портрета $s_{2-} = y_2$ больше скорости роста переменной $y_2(t)$. Во втором квадранте кривая b , соответствующая фазовому портрету (11), накрывает фазовый портрет a системы (10), т.к. скорость роста переменной $s_2(t)$ для любой точки фазового

портрета $s_{2+} = y_2$ меньше, чем скорость роста переменной $y_2(t)$. Конечно эти рассуждения справедливы в пространстве, а не во времени, поэтому они будут использованы для получения оценок времени переходного процесса для системы (10) и для доказательства сходимости за конечное время переменных $s_1(t)$, $s_2(t)$.

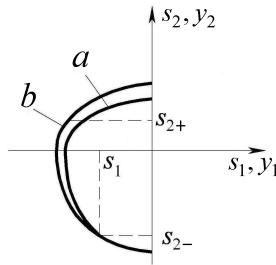


Рис. 1. Фазовые портреты систем (10) и (11)

Разобьем весь переходный процесс для переменных системы (10) на три этапа:

- 1) этап попадания в область

$$|s_2(t)| \leq \varepsilon_1 = \frac{M + \Sigma}{\alpha};$$

- 2) движение системы в области

$$\varepsilon_2 \leq |s_2(t)| \leq \frac{M + \Sigma}{\alpha},$$

где ε_2 некоторая положительная константа, которая будет указана ниже;

- 3) движение в области

$$|s_2(t)| \leq \varepsilon_2.$$

за конечное время к нулю.

Далее все этапы будут рассмотрены отдельно и приведены оценки времени движения в каждой из областей.

Введем следующие обозначения:

- 1) t_0 – начальный момент времени;
- 2) t_1 – момент времени, при котором $s_1(t_1) = 0$;
- 3) t'_1 – момент времени, при котором $s_2(t'_1) = 0$;
- 4) t_2 – момент времени, при котором $s_1(t_2) = 0$, $|s_2(t_2)| \leq \varepsilon_1$;
- 5) t'_3 – момент времени, при котором $|s_2(t'_3)| \leq \varepsilon_2$;
- 6) t_3 – момент времени, при котором $s_1(t_3) = 0$, $|s_2(t_3)| \leq \varepsilon_2$;
- 7) t_r – момент времени, в который возникает скользящий режим второго рода.

3.1. Оценивание времени попадания в ε_1 -область.

Рассмотрим случай, когда $s_1(t_0)s_2(t_0) < 0$. Пусть в первой ситуации $\alpha(|s_2(t_0)| + |s_2(t_0)|^\beta) > M + \Sigma$. Обозначим за $s_{2\min}$ значение переменной $s_2(t)$ при котором выполняется равенство

$$\alpha(|s_{2\min}| + |s_{2\min}|^\beta) = M - \Sigma.$$

Значение s_{\min} может быть найдено с помощью численных методов.

Покажем, что, чем больше скорость убывания переменной $s_2(t)$, тем больше оценка интервала времени $t_1 - t_0$. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{s}_1^* &= s_2^* \\ \dot{s}_2^* &= -v, \\ s_1^*(t_0) &= s_1(t_0), \quad s_2^*(t_0) = s_2(t_0), \quad v = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение некое значение $s'_1 = \text{const} > 0$, $0 < s'_1 < |s_1(t_0)|$. Интегрируя эти уравнения, получим следующую оценку интервала времени $t'_0 - t_0$, за которое выполнится

равенство $|s_1(t'_0)| = s'_1$

$$t'_0 - t_0 \leq \frac{2|s_1(t_0)|}{|s_2(t_0)| + \sqrt{s_2^2(t_0) - 2v(|s_1(t_0)| - s'_1)}}$$

Как видно, из этой оценки, чем больше скорость, тем больше время переходного процесса. Конечно, необходимо, чтобы данное выражение имело смысл, поэтому рассмотрим два варианта.

В первом варианте начальные условия такие, что

$$s_2^2(t_0) - 2v_{\max}|s_1(t_0)| \geq 0, \quad v_{\max} = \alpha(|s_2(t_0)| + |s_2(t_0)|^\beta) - M + \Sigma.$$

Тогда оценка времени

(12)

$$t_1 - t_0 \leq \frac{2|s_1(t_0)|}{|s_2(t_0)| + \sqrt{s_2^2(t_0) - 2v_{\max}|s_1(t_0)|}}, \quad s_2^2(t_0) - 2v_{\max}|s_1(t_0)| \geq 0.$$

Во втором варианте можно оценить этот интервал времени следующим образом. Вначале переменная $|s_2(t)|$ убывает до значения $s_{2\min}$ со скоростью v_{\max} за интервал времени

$$s_2^2(t_0) - 2v_{\max}|s_1(t_0)| < 0, \quad \Delta t_0 = t''_0 - t_0 = \frac{|s_2(t_0)|}{v_{\max}}.$$

Далее переменная $|s_1(t)|$ убывает со скоростью $s_{2\min}$ до нуля за отрезок времени

$$\Delta t'_0 = t_1 - t''_0 \leq \frac{s''_1}{s_{2\min}}, \quad s''_1 = |-|s_1(t_0)| + |s_2(t_0)|\Delta t_0 - \frac{v_{\max}}{2}(\Delta t_0)^2|.$$

Объединяя последние, два выражения получим оценку

(13)

$$t_1 - t_0 \leq \frac{|s_2(t_0)|}{v_{\max}} + \frac{|-2v_{\max}|s_1(t_0)| + s_2^2(t_0)|}{2v_{\max}s_{2\min}}, \quad s_2^2(t_0) - 2v_{\max}|s_1(t_0)| < 0.$$

Далее приводятся оценки интервала времени $t_2 - t_1$. Поскольку обсуждалось, что время движения в первом квадранте для системы (10) меньше, чем для системы сравнения (11), то с

помощью последней может быть оценен интервал $t'_1 - t_1$. Учитывая, что $|s_2(t_1)| \leq |s_2(t_0)|$, запишем указанную оценку для наименьшей скорости $M - \Sigma$

(14)

$$t'_1 - t_1 \leq \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha |s_2(t_0)| + M - \Sigma}{M - \Sigma} \right),$$

$$|s_1(t'_1)| \leq \left| 1 - \frac{M - \Sigma}{\alpha^2} \ln \left(\frac{\alpha |s_2(t_0)| + M - \Sigma}{M - \Sigma} \right) + \frac{|s_2(t_0)|}{\alpha} \right|.$$

Для оценки интервала времени $t_2 - t'_1$ введем некоторый коэффициент m , отражающий степень насыщения переменной $|s_2(t)|$, при этом можем указать нижнюю границу скорости роста переменной $|s_2(t)|$ на этом интервале времени

$$(15) \quad |\dot{s}_2(t)| \geq v_{\min 1} = (1 - m)(M - \Sigma) - \alpha \left(m \frac{M - \Sigma}{\alpha} \right)^\beta,$$

$$v_{\min 1} > 0, \quad m \in (0, 1).$$

Выбор параметра m поясним ниже.

Тогда оценка интервала времени $t_2 - t'_1$ может быть составлена из двух составляющих. Первое значение соответствует оценке интервала времени, за которое переменная $|s_2(t)|$ достигает значения $m \frac{M - \Sigma}{\alpha}$, двигаясь со скоростью $v_{\min 1}$. Обозначая этот интервал времени $t_1^* - t'_1$, запишем его оценку

$$t_1^* - t'_1 \leq \frac{m(M - \Sigma)}{\alpha v_{\min 1}}.$$

На втором интервале времени $t_2 - t_1^*$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |\dot{s}_1(t)| &\geq m \frac{M - \Sigma}{\alpha}, \\ t_2 - t_1^* &\leq \frac{\left| 1 - \frac{M - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha |s_2(t_0)| + M - \Sigma}{M - \Sigma} \right) + \frac{|s_2(t_0)|}{\alpha} \right|}{m(M - \Sigma)}. \end{aligned}$$

Объединяя последние два неравенства, запишем оценку интервала времени

$$(16) \quad t_2 - t'_1 \leq c_1(m_1^*),$$

где параметр m_1^* в функции

$$c_1(m) = \frac{m(M - \Sigma)}{\alpha(1 - m)(M - \Sigma) - \alpha^2 \left(m \frac{M - \Sigma}{\alpha} \right)^\beta} +$$

$$+ \frac{\left| 1 - \frac{M - \Sigma}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha |s_2(t_0)| + M - \Sigma}{M - \Sigma} \right) + |s_2(t_0)| \right|}{m(M - \Sigma)}$$

выбирается из условия ее минимума

$$m_1^* = \arg \min_{m \in (0, 1)} c_1(m).$$

Во второй ситуации $\alpha(|s_2(t_0)| + |s_2(t_0)|^\beta) < M + \Sigma$. Рассмотрим также два варианта развития событий. Первая оценка соответствует следующим начальным условиям

$$\alpha(|s_2(t_0)| + |s_2(t_0)|^\beta) > M - \Sigma,$$

$$(17) \quad t_2 - t_0 \leq \frac{2|s_1(t_0)|}{|s_2(t_0)| + \sqrt{s_2^2(t_0) - 2v_{\max}|s_1(t_0)|}},$$

при $s_2^2(t_0) - 2v_{\max}|s_1(t_0)| \geq 0$;

$$t_2 - t_0 \leq \frac{|s_2(t_0)|}{v_{\max}} + \frac{|1 - 2v_{\max}|s_1(t_0)| + s_2^2(t_0)|}{2v_{\max}s_{2\min}},$$

при $s_2^2(t_0) - 2v_{\max}|s_1(t_0)| < 0$.

Рассмотрим более детально вариант, когда начальные условия по переменной $s_2(t)$ такие, что $\alpha(|s_2(t_0)| + |s_2(t_0)|^\beta) < M - \Sigma$. Для этого введем некоторый коэффициент m , отражающий степень насыщения переменной $s_2(t)$

$$|\dot{s}_2(t)| \geq v_{\min 2} = (1 - m)(M - \Sigma) - \alpha \left(m \frac{M - \Sigma}{\alpha} \right)^\beta,$$

$$v_{\min 2} > 0, \quad m \in (m_0, 1), \quad m_0 = \frac{\alpha |s_2(t_0)|}{M - \Sigma}.$$

Выбор параметра m поясним ниже.

Тогда оценка интервала времени $t_2 - t_0$ может быть составлена из двух оценок. Первое значение соответствует оценке интервала времени, за которое переменная $|s_2(t)|$ достигает значения $m \frac{M - \Sigma}{\alpha}$, двигаясь со скоростью $v_{\min 2}$. Обозначая этот интервал времени $t_1^* - t_0$, запишем его оценку

$$t_1^* - t_0 \leq \frac{m(M - \Sigma) - \alpha|s_2(t_0)|}{\alpha v_{\min 2}}.$$

На втором интервале времени $t_2 - t_1^*$ справедливы соотношения

$$|\dot{s}_1(t)| \geq m \frac{M - \Sigma}{\alpha}, \quad t_2 - t_1^* \leq \frac{\alpha|s_1(t_0)|}{m(M - \Sigma)}.$$

Объединяя последние два неравенства, запишем оценку интервала времени

$$(18) \quad t_2 - t_0 \leq c_2(m_2^*),$$

где параметр m_2^* в функции

$$c_2(m) = \frac{m(M - \Sigma) - \alpha|s_2(t_0)|}{\alpha(1 - m)(M - \Sigma) - \alpha^2 \left(m \frac{M - \Sigma}{\alpha} \right)^\beta} + \frac{\alpha|s_1(t_0)|}{m(M - \Sigma)}$$

выбирается из условия ее минимума

$$m_2^* = \arg \min_{m \in (m_0, 1)} c_2(m).$$

Аналогичные рассуждения могут быть приведены для случая $s_1(t_0)s_2(t_0) \geq 0$. При этом оценка интервала времени $t_2 - t_0$ может быть записана согласно (14), (16).

3.2. Оценка времени попадания в ε_2 -область.

Как было показано в работе [8] для переменной $y_2(t)$ системы (11) в ε_1 -области ($t \geq t_2$) может быть записана мажоранта

$$(19) \quad |y_2(t)| \leq \frac{M + \Sigma}{\alpha} e^{-\frac{\gamma_0}{2}(t - t_2)}, \quad t \geq t_2,$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\alpha(M - \Sigma)}{2(M + \Sigma)} \ln \left(\frac{1}{1 - 0.533c} \right), \quad c = \frac{M - \Sigma - \frac{\bar{\Sigma}}{\alpha}}{M + \Sigma}.$$

Используя данное неравенство, можно записать мажоранту для переменной $s_2(t)$ и оценить время, за которое она попадет в некоторую ε_2 -область. Для этого введем ближайшие моменты времени $t_{2s} > t_2$, $t_{2y} > t_2$ такие, что

$$s_1(t_{2s}) = 0, \quad y_1(t_{2y}) = 0.$$

Выше обсуждалось, что $|s_2(t_{2s})| \leq |y_2(t_{2y})|$. Неравенство (19) было получено для следующей оценки интервала времени [8]

$$t_{2y} - t_2 \leq \frac{2\varepsilon_1}{M - \Sigma}.$$

Найдем оценку интервала времени $t_{2s} - t_2$ для системы (10). После этого, введя корректирующий коэффициент, запишем результирующую мажоранту для $s_2(t)$. Обозначим за t'_2 ($t'_2 > t_2$) ближайший момент времени, при котором $s_2(t'_2) = 0$. Тогда оценка интервала времени $t'_2 - t_2$

$$(20) \quad |s_2(t)| \geq M - \Sigma, \quad t'_2 - t_2 = \frac{\varepsilon_1}{M - \Sigma}.$$

Для оценки интервала $t_{2s} - t'_2$, как и ранее в выражении (15), введем коэффициент m , отражающий степень насыщения переменной $s_2(t)$. Проводя рассуждения из предыдущего подраздела, запишем оценку интервала $t_{2s} - t_2$ с учетом последнего неравенства

$$(21) \quad t_{2s} - t_2 \leq c_3(m_3^*) \frac{\varepsilon_1}{M - E},$$

где параметр m^* в функции

$$c_3(m) = \left(1 + \frac{1}{2m} + \frac{m}{(1 - m) - \alpha^{1-\beta}(M - E)^{\beta-1}m^\beta} \right)$$

выбирается из условия ее минимума

$$m_3^* = \arg \min_{m \in (0,1)} c(m).$$

С учетом (19), (21) и неравенства $|s_2(t_{2s})| \leq |y_2(t_{2y})|$ запишем мажоранту для переменной $|s_2(t)|$, $t \geq t_2$

(22)

$$|s_2(t)| \leq \varepsilon_1 e^{\gamma(t-t_2)}, \quad \gamma = \frac{\alpha(M - \Sigma)}{2c_3(m_3^*)(M + \Sigma)} \ln \left(\frac{1}{1 - 0.533c} \right).$$

Тогда оценка интервала времени попадания переменной $|s_2(t)|$ из ε_1 -области в заданную ε_2 -окрестность

$$|t'_3 - t_2| \leq \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Значение ε_2 будет введено ниже.

Рассуждения в следующем подразделе будут проводиться, начиная с момента времени t_3 , поэтому запишем аналогично (21) оценку интервала времени

$$|t_3 - t'_3| \leq c_3(m_3^*) \frac{\varepsilon_2}{M - E}.$$

Объединяя два последних неравенства, запишем окончательно

$$(23) \quad |t_3 - t_2| \leq \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + c_3(m_3^*) \frac{\varepsilon_2}{M - E}.$$

3.3. Оценка времени движения в ε_2 -области

Для оценки времени движения на последнем этапе рассмотрим положительно полуопределенную функцию Ляпунова на основе (7)

$$(24) \quad V = \left(|s_1| - \frac{\xi}{M} s_1 + \frac{(\alpha s_1 + s_2)^2}{2M} \right)^{\frac{1-\beta}{2}},$$

производная которой вдоль траекторий системы (10)

$$(25) \quad \dot{V} \leq \frac{-\bar{\alpha}|s_1| - \frac{\alpha^2}{M}|s_2|^\beta s_1 \text{sign}(s_2) - \frac{\alpha}{M}|s_2|^{1+\beta}}{\left(|s_1| - \frac{\xi}{M} s_1 + \frac{(\alpha s_1 + s_2)^2}{2M} \right)^{\frac{1+\beta}{2}}},$$

где $\bar{\alpha} = \alpha \left(1 - \frac{\Sigma}{M} \right) - \frac{\bar{\Sigma}}{M}$.

Исследуем траектории системы (10) на полупериоде колебаний при начальных условиях

$$(26) \quad s_1(t_3) = 0, \quad s_2(t_3) = -\varepsilon_2.$$

Знак переменной $s_2(t)$ выбран для определенности. В этом случае на фазовой плоскости движения системы на полупериоде колебаний будут происходить во третьем и втором квадрантах.

Введем моменты времени t_3'' , t_4 такие, что

$$s_2(t_3'') = 0, \quad s_1(t_4) = 0.$$

Покажем, что как при определенном выборе параметров алгоритма управления (9), так и размеров ε_2 -области, производная функции Ляпунова (25) неположительная. Для этого рассмотрим числитель дроби (25)

$$(27) \quad z = -\bar{\alpha}|s_1| - \frac{\alpha^2}{M}|s_2|^\beta s_1 \text{sign}(s_2) - \frac{\alpha}{M}|s_2|^{1+\beta}.$$

Частные производные по переменным s_1 , s_2

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s_1} &= -\bar{\alpha} \text{sign}(s_1) - \frac{\alpha^2}{M}|s_2|^\beta \text{sign}(s_2), \\ \frac{\partial z}{\partial s_2} &= -\frac{\alpha^2 \beta s_1 |s_2|^{\beta-1}}{M} - \frac{\alpha(1+\beta)}{M}|s_2|^\beta. \end{aligned}$$

Проведем исследование функции z в области, ограниченной прямыми $s_1 = -s = \text{const} < 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_2 = s_2(t_2)$. Как известно [16], для поиска наименьшего и наибольшего значения функции двух переменных необходимо найти ее локальные экстремумы, провести исследование функции на границах области и в “угловых точках”. Как видно, на границах $s_1 = 0$ и $s_2 = 0$ функция z отрицательна. Исследуем поведение функции z на границе $s_1 = -s$ с помощью второй частной производной (28). Как видно, на линии уровня $s_1 = -s$ имеется точка максимума при

$$s_2 = \frac{\alpha c_s \beta}{\beta + 1}.$$

Подставляя полученное значение точки экстремума в функцию (27), запишем

$$z = -c_s \left(\bar{\alpha} - \frac{\alpha^2}{M} \frac{|s_2|^\beta}{\beta + 1} \right) = -c_s (\bar{\alpha} - k\alpha^\beta)$$

где $k = \frac{(M + \Sigma)^2}{M(\beta + 1)^{1+\beta}} \left(\frac{1}{2} \frac{\beta}{M - \Sigma} \right)^\beta$.

В параметр $\bar{\alpha}$ коэффициент α входит в первой степени, поэтому с учетом неравенства $0 < \beta < 1$ найдется такое значение α^* , что

$$(29) \quad \bar{\alpha} - k(\alpha^*)^\beta = \alpha^* \left(1 - \frac{\Sigma}{M} \right) - \frac{\bar{\Sigma}}{M} - k(\alpha^*)^\beta \geq 0.$$

При выполнении этого неравенства функция z принимает отрицательные значения на любой линии уровня $s_1 = -c_s$.

Выбор параметра α согласно неравенству (29) может оказаться избыточным. С учетом экспоненциальной сходимости в ε_1 -области введем размер ε_2 -области, в которой функция z также отрицательна на линиях уровня $s_1 = -c_s$

$$(30) \quad \varepsilon_2 = \left(\frac{\bar{\alpha} M (\beta + 1)}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

На последнем шаге исследуем функцию z на локальные экстремумы. Приравнявая нулю частные производные (28) найдем точку, подозреваемую на экстремум

$$s_1 = -\frac{1 + \beta}{\alpha\beta} \left(\frac{\bar{\alpha} M}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad s_2 = \left(\frac{\bar{\alpha} M}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Однако вычисляя вторые частные производные и определитель,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial s_1^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s_1 \partial s_2} = -\frac{\alpha^2 \beta |s_2|^{\beta-1}}{M}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial s_2^2} &= -\frac{(\beta-1)\alpha^2 \beta s_1 |s_2|^{\beta-2}}{M} - \frac{\alpha \beta (1+\beta)}{M} |s_2|^{\beta-1}; \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial s_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial s_1 \partial s_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial s_1 \partial s_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial s_2^2} \end{vmatrix} &= -\left(\frac{\partial^2 z}{\partial s_1 \partial s_2} \right)^2 < 0 \end{aligned}$$

получим, что данная точка является седловой.

Окончательно получим, что при выборе параметра α согласно неравенству (29) или размера ε_2 -области согласно (30), функция z , а, следовательно, и производная функции Ляпунова (25) во втором квадранте неположительны.

С учетом асимптотической сходимости можем записать

$$|s_2(t_4)| < |s_2(t_3)| = \varepsilon_2.$$

Используя это неравенство, перепишем оценку (25) в третьем квадранте ($s_1 < 0$, $s_2 < 0$)

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -(2M)^{\frac{1+\beta}{2}} \frac{\bar{\alpha}|s_1| + \frac{\alpha^2}{M}|s_2|^\beta s_1 \text{sign}(s_2) + \frac{\alpha}{M}|s_2|^{1+\beta}}{\varepsilon_2^{1+\beta}} \leq \\ &\leq -2^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{2} \alpha M^{\frac{\beta-1}{2}} \frac{|s_2|^{1+\beta}}{\varepsilon_2^{1+\beta}}. \end{aligned}$$

Запишем среднее значение производной (31) на интервале времени $t \in [t_3, t_4]$, учитывая, что во втором квадранте $\dot{V} \leq 0$

$$(32) \quad \dot{V}_{av} = \frac{1}{t_4 - t_3} \int_{t_3}^{t_4} \dot{V}_3 \leq -\frac{2^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{2} \alpha M^{\frac{\beta-1}{2}}}{x^{1+\beta}(t_4 - t_3)} \int_{t_3}^{t_4'} |s_2(\tau)|^{1+\beta} d\tau.$$

Для поиска нижней оценки интеграла от переменной $|s_2|^{1+\beta}$ запишем в третьем квадранте оценки

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 &\leq v, \quad s_2(t) \geq -\varepsilon_2 + v(t - t_3), \quad t_3 \leq t \leq t_{3r}; \\ v &= \alpha(\varepsilon_2 + \varepsilon_2^\beta) + M + \Sigma \leq 2(M + \Sigma), \quad t_{3r} - t_3 = \frac{\varepsilon_2}{v}. \end{aligned}$$

Оценка интеграла

$$(33) \quad \int_{t_3}^{t_3'} |s_2(\tau)|^{1+\beta} d\tau \geq \int_{t_3}^{t_{3r}} |-\varepsilon_2 + v(\tau - t_3)|^{1+\beta} d\tau \leq \frac{\varepsilon_2^{2+\beta}}{2(2 + \beta)(M + \Sigma)}.$$

Для вычисления средней скорости осталось оценить интервал времени $t_4 - t_3$, что можно сделать аналогично (21)

$$|t_4 - t_3| \leq c_3(m_3^*) \frac{\varepsilon_2}{M - \Sigma}.$$

Подставляя последнее неравенство и оценку (33) в выражение (32), получим окончательно

$$(34) \quad \dot{V}_{av} \leq - \frac{2^{\frac{\beta}{2}} \alpha M^{\frac{\beta-1}{2}} (M - E)}{\sqrt{2}(2 + \beta)(M + \Sigma)c_3(m_3^*)}.$$

Оценка времени схождения к нулю

$$(35) \quad |t_r - t_3| \leq \frac{V(t_3)}{|\dot{V}_{av}|} = \frac{(2 + \beta)(M + \Sigma)c_3(m_3^*)\varepsilon_2^{1-\beta}}{\alpha(M - \Sigma)}.$$

4. Заключение

В статье было рассмотрено доказательство сходимости одного из алгоритма скольжения второго рода и приведена оценка конечного времени сходимости переменных системы к нулю при воздействии на систему внешних ограниченных гладких возмущений. Отметим, что с помощью предложенного алгоритма управления сходимость переменных системы обеспечивается при меньших затратах ресурсов управления по сравнению с существующими алгоритмами управления второго рода. В приведенном доказательстве не требуется однородности дифференциальных уравнений, описывающих замкнутую систему управления, что значительно расширяет класс функций, которые могут использоваться в обратной связи.

Литература

1. Айзерман М.А., Пятницкий Е.С. Основы теории разрывных систем. АИТ. 1974. Ч. I: № 7. С. 33–47; Ч. II: № 8. С. 39–61.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
4. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1972.

5. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: управление при неопределенности. М.: Наука, 1997.
6. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка. Вычислительные алгоритмы и методы. 1990. Т. 2. № 3. С. 89–100.
7. *Зубов В.И.* Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). М.: Высш. шк., 1984.
8. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Инвариантность в системах с несогласованными возмущениями. *АиТ.* 2013. № 7. С. 46–83.
9. *Кочетков С.А., Уткин А.В., Уткин В.А.* Робастное управление электромагнитным подвесом на основе вихревых алгоритмов. Управление большими системами: сборник трудов. М.: ИПУ РАН, 2014. Выпуск 47. С. 187–211.
10. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
11. *Поляков А.Е., Позняк А.С.* Метод функций ляпунова для систем со скользящими режимами высших порядков. *АиТ.* № 5. 2011. С. 47–68.
12. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.2.–М.: Изд-во иностранной литературы, 1954.
13. *Теория систем с переменной структурой/* Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970.
14. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
15. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
16. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М.: Физматлит, 2003.
17. *Цыпкин Я.З.* Теория релейных систем управления. М.: Наука, 1972.
18. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.
19. *Bhat S.P., Bernstein D.S.* Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE*

- Tans. on Automatic Control, vol. 43, No. 5. PP. 678–682.
20. *Levant A.* Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control. *Int. J. Control.* 1993. V. 58. No. 6. P. 1247–1263.
 21. *Levant A.* Higher Order Sliding Modes, Differentiation and Output Feedback Control. *Int. J. Control.* 2003. V. 76. No. 9–10. P. 924–941.
 22. *Moreno J.A., Osorio M.* Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm. *IEEE Trans. on Automatic Control.* 2012. V. 57. No. 4. P. 1035–1040.
 23. *Orlov Y.* Finite Time Stability and Robust Control Synthesis of Uncertain Switched Systems. *SIAM J. Control Optimization.* 2005. V. 43. No. 4. P. 1253–1271.
 24. *Utkin V.I., Guldner J., Shi J.* Sliding mode control in Electromechanical Systems. Taylor and Francis, London, 2009.
 25. *Utkin V.* On Convergence Time and Disturbance Rejection of Super-Twisting Control. 2013. *IEEE Trans. on Automatic Control.* 2013. V. 58, No. 8. P. 2013–2017.

Sergey A. Kochetkov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior research worker (kos@ipu.ru).

Keywords: second order sliding modes, the proof of convergence, the averaging procedure for Lyapunov function, optimized costs of control efforts..