УДК 519.714 + 681.514
ББК 22.1

АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛМН

Белов А.А.[1] **Андрианова О.Г.**[2],
(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В работе предлагается метод анизотропийного анализа дискретных дескрипторных систем, основанный на одном из эквивалентных представлений в пространстве состояний дескрипторных систем. При этом полученные условия являются выпуклыми.

Ключевые слова: Анизотропийная норма, дескрипторные системы, линейные матричные неравенства.

1. Введение

При составлении математических моделей систем в физических переменных можно получить модели, сочетающие в себе дифференциальные и алгебраические уравнения. Такие системы, называемые дескрипторными, нашли свое применение в различных областях науки и техники [6, 8].

Несмотря на очевидное удобство в составлении математических моделей, методы анализа и синтеза таких систем существенно отличаются и бывают достаточно сложны в реализации. Это вызвано тем, что из-за алгебраических уравнений связи дескрипторные системы приобретают свойства, не характерные для обыкновенных систем в пространстве состояний. К таким свойствам можно отнести невозможность разрешить систему относительно производной, необходимость подачи на вход системы до-

[1] *Белов Алексей Анатольевич, с.н.с. лаб.№1, (a.a.belov@inbox.ru),*
[2] *Андрианова Ольга Геннадьевна, математик лаб.№1, (andrianovaog@gmail.com).*

статочно гладких сигналов, а также непричинное в дискретном случае (импульсное в непрерывном случае) поведение.

Перечисленные выше особенности создают трудности при обобщении методик, успешно разработанных для обыкновенных систем. Некоторые задачи до сих пор являются нерешенными для дескрипторных систем. К одной из таких задач относится создание вычислительно эффективных методов анализа и синтеза. В данной работе разработан алгоритм анизотропийного анализа, основанный на методах выпуклой оптимизации.

Анизотропийная теория берет свое начало из работ [2, 10]. В основе подхода лежит теоретико-информационное представление случайных сигналов. Анизотропийная теория изучает реакцию системы на воздействующие на нее «цветные» шумы. Под «цветностью» понимается информационное уклонение Кульбака-Лейблера от гауссовского белого шума [2]. Критерием качества в данном случае выступает анизотропийная норма системы. Задача анизотропийного анализа для обыкновенных систем с использованием линейных матричных неравенств была решена в [9]. Этот результат был обобщен на дескрипторные системы в [4]. Однако условия, полученные в перечисленных работах, являются нестрогими, а также из-за наличия вырожденных матриц в ограничениях — невыпуклыми. В данной работе сформулирована новая частотная теорема в терминах линейных матричных неравенств, позволяющая разработать вычислительно эффективный алгоритм анизотропийного анализа дескрипторных систем.

Структура работы следующая. В разделе 2 приведены предварительные сведения по теории анизотропийного анализа и основы теории дискретных дескрипторных систем. В разделе 3 получены условия новой частотной теоремы в терминах линейных матричных неравенств для обыкновенных систем. В разделе 4 сформулирована новая частотная теорема для дескрипторных систем и приведен численный пример.

2. Основные теоретические сведения

2.1. Дескрипторные системы

Дискретная дескрипторная система в пространстве состояний имеет вид

$$
\begin{aligned}
Ex(k+1) &= Ax(k) + Bf(k), \\
y(k) &= Cx(k) + Df(k),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $f(k) \in \mathbb{R}^m$ и $y(k) \in \mathbb{R}^p$ – входной и выходной сигналы соответственно. E, A, B, C, D – постоянные матрицы соответствующих размерностей. $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – вырожденная матрица, $\operatorname{rank} E = r \leqslant n$.

<u>**Определение 1.**</u> *Дескрипторная система* (1) *называется допустимой, если она регулярная (*$\exists\lambda \neq 0 : \det(\lambda E - A) \neq 0$*), причинная (*$\deg\det(zE - A) = \operatorname{rank} E$*)и устойчивая (*$\rho(E, A) = \max|\lambda|_{\lambda\in\{z|\det(zE-A)=0\}} < 1$*). Более подробную информацию можно найти в [6, 11].*

Предполагаем, что система (1) является регулярной, тогда существуют две невырожденные матрицы $\overline{W}$ и $\overline{V}$ такие, что $\overline{W}E\overline{V} = \operatorname{diag}(I_r, 0)$ [6]. Преобразование координат имеет вид

$$
\overline{V}^{-1}x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix},
\tag{2}
$$

где $x_1(k) \in \mathbb{R}^r$ и $x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$. Система (1) во второй эквивалентной форме (ЭФ2) задается следующими уравнениями [6]:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1u(k), \\
0 &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2u(k), \\
y(k) &= C_1x_1(k) + C_2x_2(k) + Du(k),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где

(4)

$$
\overline{W}A\overline{V} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \overline{W}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \qquad C\overline{V} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}.
$$

Матрицы $\overline{W}$ и $\overline{V}$ находятся из сингулярной декомпозиции

$$
E = U\operatorname{diag}(S, 0)Z^{\mathrm{T}},
$$

Также следует заметить, что система является причинной, если $\det(A_{22}) \neq 0$, и устойчивой, если $\rho(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) < 1$ [11].

2.2. Средняя анизотропия последовательности и анизотропийная норма системы

Пусть задана стационарная последовательность $W = \{w(k)\}_{k\geqslant 0}$ интегрируемых с квадратом случайных векторов из $\mathbb{R}^m$, представляющих собой дискретные случайные процессы. Составим из элементов W на интервале времени $[0, N]$ случайный вектор

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w(0) \\ \dots \\ w(N-1) \end{bmatrix},$$

все конечномерные вероятностные распределения которого абсолютно непрерывны.

Анизотропия случайного вектора $\mathbf{A}(W_{0:N-1})$ есть минимальное значение относительной энтропии [10] относительно гауссовских распределений в $\mathbb{R}^m$ с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей:

$$\mathbf{A}(W_{0:N-1}) = \frac{m}{2}\ln\left(\frac{2\pi e}{m}\mathbf{E}(|W_{0:N-1}|^2)\right) - h(W_{0:N-1}),$$

где $h(W_{0:N-1}) = \mathbf{E}\ln f(W_{0:N-1}) = -\int_{\mathbb{R}^{mN}} f(w)\ln f(w)dw$ – дифференциальная энтропия, а $f : \mathbb{R}^{mN} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – плотность распределения вероятности mN-мерного вектора $W_{0:N-1}$.

Средняя анизотропия последовательности W – это усредненная по времени анизотропия случайного вектора, она может быть найдена по формуле

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty}\frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}. \tag*{5)}$$

Пусть случайная последовательность W генерируется из гауссовского белого шума V с помощью формирующего фильтра G , передаточная функция $G(z)$ которого принадлежит пространству Харди $H_2^{m\times m}$ матричнозначных функций, аналитических в открытом единичном круге на комплексной плоскости и имеющих конечную H_2-норму, определяемую выражением

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Trace}\, S(\omega) d\omega\right)^{1/2},$$

где $S(\omega) = \widehat{G}(\omega)\widehat{G}(\omega)^* \ (-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi)$ – спектральная плотность W, $\widehat{G}(\omega) = \lim_{l\to 1} G(l\mathrm{e}^{i\omega})$ – граничное значение передаточной функции G.

Средняя анизотропия (5) случайной стационарной гауссовской последовательности $W = GV$ может быть определена в терминах спектральной плотности $S(\omega)$ и H_2-нормы формирующего фильтра G по формуле

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2} d\omega.$$

Средняя анизотропия характеризует «расстояние» между сигналом и гауссовским белым шумом. Более подробную информацию можно найти в [1, 2].

Обозначим за $Y = PW$ выход линейной дискретной системы $P \in H_\infty^{p\times m}$, передаточная функция $P(z)$ которой аналитична в открытом единичном круге $|z| < 1$, $P(z)$ имеет конечную H_∞-норму.

Определение 2. *a-Анизотропийная норма системы P при заданном значении $a \geqslant 0$ определена как*

(6) $$|\!|\!| P |\!|\!|_a = \sup\left\{\|PG\|_2/\|G\|_2 :\ G \in \mathbf{G}_a\right\},$$

т.е. как наибольший коэффициент усиления по отношению к классу формирующих фильтров

$$\mathbf{G}_a = \left\{G \in H_2^{m\times m} :\ \overline{\mathbf{A}}(G) \leqslant a\right\}.$$

Итак, a-анизотропийная норма $\|\!|P|\!\|_a$ описывает стохастический коэффициент усиления системы P относительно входной последовательности W.

Замечание 1. Случайная последовательность W полностью определяется формирующим фильтром G, следовательно, обозначения $\overline{\mathbf{A}}(G)$ и $\overline{\mathbf{A}}(W)$ эквивалентны.

3. Новая анизотропийная частотная теорема для обыкновенных систем

Рассмотрим обыкновенную дискретную систему, записанную в следующем виде:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Dw(k), \end{aligned} \tag{7}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайная стационарная последовательность с известным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) = a$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ — наблюдаемый выход. A, B, C, D — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Передаточная функция системы (7) определяется выражением

$$F(z) = C(zI - A)^{-1}B + D.$$

Для устойчивой системы (7) справедлива следующая теорема [9].

Теорема 1. *Пусть система (7) с передаточной функцией $F(z)$ является устойчивой и принадлежит пространству Харди ($F \in \mathcal{H}_\infty^{q\times m}$). Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ a-анизотропийная норма системы ограничена сверху числом γ, т.е.*

$$\|\!|F|\!\|_a \leqslant \gamma,$$

если существует такой скаляр $\eta > \gamma^2$ и $n \times n$-матрица $\Phi = \Phi^{\mathrm{T}} > 0$, для которых справедливы следующие неравенства

$$\eta - (e^{-2a}\det(\eta I_m - B^{\mathrm{T}}\Phi B - D^{\mathrm{T}}D))^{1/m} < \gamma^2, \tag{8}$$

$$(9)\qquad \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}\Phi A-\Phi+C^{\mathrm{T}}C & A^{\mathrm{T}}\Phi B+C^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}}\Phi A+D^{\mathrm{T}}C & B^{\mathrm{T}}\Phi B+D^{\mathrm{T}}D-\eta I_m \end{bmatrix}<0.$$

Перепишем неравенство (9) в следующей форме:

(10)

$$\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}C & C^{\mathrm{T}}D \\ D^{\mathrm{T}}C & D^{\mathrm{T}}D \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\Phi(-\Phi)^{-1}\Phi\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\Phi & 0 \\ 0 & -\eta I_m \end{bmatrix}<0.$$

Так как $\Phi=\Phi^{\mathrm{T}}>0$, то $\begin{bmatrix} -\Phi & 0 \\ 0 & -\eta I_m \end{bmatrix}<0$. Значит,

$$(11)\qquad \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}C & C^{\mathrm{T}}D \\ D^{\mathrm{T}}C & D^{\mathrm{T}}D \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\Phi(-\Phi)^{-1}\Phi\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}<0.$$

Используя лемму Шура, получим неравенство, эквивалентное неравенству (11):

$$(12)\qquad \begin{bmatrix} -\Phi & \Phi A & \Phi B \\ A^{\mathrm{T}}\Phi & C^{\mathrm{T}}C & C^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}}\Phi & D^{\mathrm{T}}C & D^{\mathrm{T}}D \end{bmatrix}<0.$$

Таким образом,

$$(13)\qquad \begin{bmatrix} -\Phi & \Phi A & \Phi B \\ A^{\mathrm{T}}\Phi & C^{\mathrm{T}}C-\Phi & C^{\mathrm{T}}D \\ B^{\mathrm{T}}\Phi & D^{\mathrm{T}}C & D^{\mathrm{T}}D-\eta I_m \end{bmatrix}<0,$$

откуда имеем $M^{\mathrm{T}}\Xi M<0$

при $M^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix}$, $\Xi=$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Phi \\ 0 & C^{\mathrm{T}}C-\Phi & C^{\mathrm{T}}D & 0 \\ 0 & D^{\mathrm{T}}C & D^{\mathrm{T}}D-\eta I_m & 0 \\ \Phi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, неравенство (9) может быть записано в виде $N^{\mathrm{T}}\Xi N<0$,

где $N^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I_n \\ 0 & I_n & 0 & A^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & I_m & B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

Применяя лемму о проекции [5], получим

$$\Xi+\Upsilon^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}\Psi+\Psi^{\mathrm{T}}Y\Upsilon<0,$$

где $\Psi = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix}$, $\Upsilon = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}I_n & A & B & -I_n \end{bmatrix}$, а $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — произвольная матрица.

Используя предыдущие выкладки, сформулируем новую анизотропийную частотную теорему для обыкновенных систем.

Теорема 2. *Пусть система (7) с передаточной функцией $F(z)$ является устойчивой и принадлежит пространству Харди ($F \in \mathcal{H}_\infty^{q\times m}$). Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ a-анизотропийная норма системы ограничена сверху числом γ, т.е.*

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant \gamma,$$

если существует такой скаляр $\eta > \gamma^2$, $n\times n$-матрица $\Phi = \Phi^{\mathrm{T}} > 0$ и произвольная матрица $n \times n$-матрица Y, для которых справедливы следующие неравенства

$$\eta - (e^{-2a}\det(\eta I_m - B^{\mathrm{T}}\Phi B - D^{\mathrm{T}}D))^{1/m} < \gamma^2$$

(14)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^{\mathrm{T}} & YA & YB & \Phi^{\mathrm{T}} - Y^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}Y & 0 \\ A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & -\Phi & 0 & A^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & 0 & -\eta I_m & B^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \\ \Phi - Y - \frac{1}{2}Y^{\mathrm{T}} & YA & YB & -Y - Y^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -I_q \end{bmatrix} < 0.$$

4. Основной результат

Рассмотрим дескрипторную систему, записанную в пространстве состояний

(15)
$$\begin{aligned} E_d x(k+1) &= A_d x(k) + B_d w(k), \\ y(k) &= C_d x(k) + D_d w(k), \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайная стационарная последовательность с известным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) = a$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ — наблюдаемый выход. E_d, A_d, B_d, C_d, D_d — известные постоянные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что $\operatorname{rank} E_d = r < n$. Передаточная функция $P(z)$ системы записывается выражением

$$P(z) = C_d(zE_d - A_d)^{-1}B_d + D_d.$$

Основываясь на условиях новой частотной теоремы для обыкновенных систем и алгоритме приведения дескрипторных систем ко второй эквивалентной форме, сформулируем условия анизотропийной частотной теоремы для дескрипторных систем вида (15).

Теорема 3. *Пусть система (15) с передаточной функцией $P(z)$ является допустимой и принадлежит пространству Харди ($P \in \mathcal{H}_\infty^{q\times m}$). Предполагается также, что* $\operatorname{rank} E_d = \operatorname{rank}(E_d,\, B_d)$. *Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ a-анизотропийная норма системы ограничена сверху числом γ, т.е.*

$$\|P\|_a \leqslant \gamma,$$

если существуют такие матрицы $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, скалярные величины $\eta > \gamma^2$ и $\alpha > 0$, для которых справедливы следующие неравенства

(16) $$\eta - (e^{-2a}\det(\eta I_m - B_d^{\mathrm{T}}\Pi B_d - D_d^{\mathrm{T}} D_d))^{1/m} < \gamma^2$$

и

(17)
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^{\mathrm{T}} & \Gamma A_d & \Gamma B_d & L^{\mathrm{T}} - Q^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}Q & 0 \\ A_d^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}} & \Pi A_d + A_d^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}} - \Theta & \Pi B_d & A_d^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}} & C_d^{\mathrm{T}} + \alpha A_d^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}C_d^{\mathrm{T}} \\ B_d^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}} & B_d^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}} & -\eta I_q & B_d^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}} & D_d^{\mathrm{T}} + \alpha B_d^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}}C_d^{\mathrm{T}} \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^{\mathrm{T}} & \Gamma A_d & \Gamma B_d & -Q - Q^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & C_d + \alpha C_d \Pi A_d & D_d + \alpha C_d \Pi B_d & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

где $\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}$.

Для вычисления a-анизотропийной нормы дескрипторной системы необходимо решить следующую задачу оптимизации: найти $\gamma_* = \inf \gamma$ на множестве $\{L,\, Q,\, R,\, S,\, \alpha,\, \eta,\, \gamma\}$, которое удовлетворяет неравенствам (16), (17). Если минимальное значение γ_* найдено, то a-анизотропийная норма системы P может быть приближенно вычислена по формуле

(18) $$\|P\|_a \approx \gamma_*.$$

Пример 1. Рассмотрим дискретную дескрипторную систему, заданную в пространстве состояний следующими матрицами:

$$E_d = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \ A_d = \begin{bmatrix} 0.7 & -3.25 & -0.7 & 0 \\ 1.8 & 0.4 & -6.4 & 2.6 \\ 1.0 & -1.9 & -5.4 & 2.4 \\ -0.6 & -2.7 & 5.4 & -2.8 \end{bmatrix},$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 3.2 & -3.5 \\ 2.5 & -7.9 \\ 3.8 & -7.6 \\ -1.2 & 8.2 \end{bmatrix},$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.45 & 0.6 \end{bmatrix}, \ D_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.0 \end{bmatrix}, \ \operatorname{rank} E_d = 2.$$

Легко проверить, что система является причинной и устойчивой. Результаты вычисления a-анизотропийной нормы на основе частотной теоремы представлены на рис. 1. На рис. 2 показана абсолютная ошибка вычисления анизотропийной нормы относительно значений, полученных по алгоритму на основе Риккати-подхода [3].

5. Выводы

В работе приведена новая частотная теорема, содержащая достаточные условия ограниченности a-анизотропийной нормы обыкновенной системы. Данный результат обобщен на дескрипторные системы. Полученные условия являются выпуклыми, а алгоритм анализа системы на их основе — вычислительно эффективным.

Литература

1. ВЛАДИМИРОВ И.Г., ДАЙМОНД Ф., КЛОЕДЕН П. *Анизотропийный анализ робастного качества линейных*

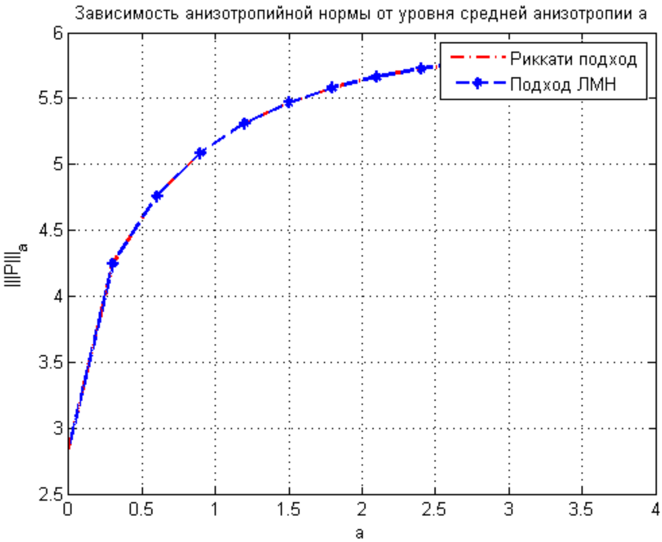

Рис. 1. a-Анизотропийная норма дескрипторной системы

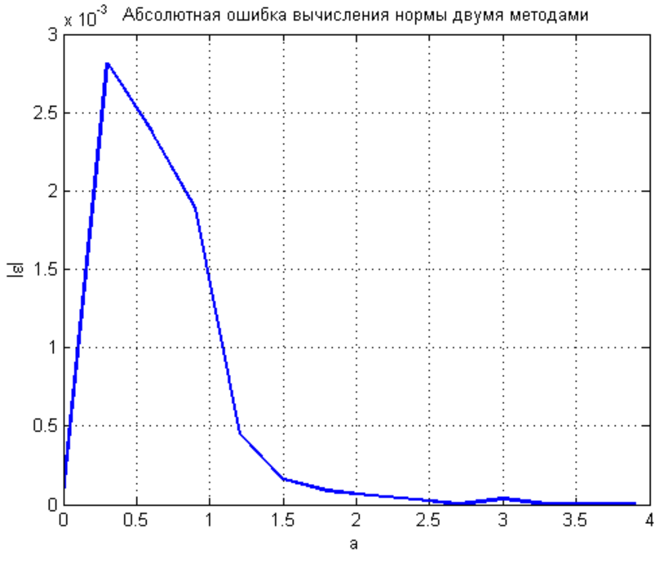

Рис. 2. Абсолютная ошибка метода относительно Риккати-подхода

нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 8. – С. 92-111.

2. ВЛАДИМИРОВ И.Г., КУРДЮКОВ А.П., СЕМЕНОВ А.В. *Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем* // Доклады РАН. – 1995. – Т. 342. №. 3. – С. 583-585.
3. ANDRIANOVA, O. G., BELOV, A. A. *Anisotropy-based bounded real lemma for linear discrete-time descriptor systems* // Proc. 2013 International Conference on Process Control, Strbske Pleso, Slovakia, 2013. P. 57-62.
4. BELOV, A. A., ANDRIANOVA, O. G. *Computation of anisotropic norm for descriptor systems using convex optimization* // Proc. 2013 International Conference on Process Control, Strbske Pleso, Slovakia, 2013. P. 173-178.
5. BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E., AND BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory.* SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1994.
6. DAI, L. *Singular Control Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, New York, Springer-Verlag, 1989.
7. FENG, Y., YAGOUBI, M. *On a state feedback H_∞ control for discrete-time singular systems* // Preprint submitted to IEEE Transactions on Automatic Control. Received: March 27, 2013.
8. STYKEL, T. *Analisys and numerical solutions of generalised Lyapunov equations*. Ph. D. thesis, Institut fur Mathematik, Techische Universitat Berlin, Berlin, 2002.
9. TCHAIKOVSKY, M. M., KURDJUKOV, A. P., AND TIMIN, V. N. *Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities* // Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy, 2011. P. 2332-2337.
10. VLADIMIROV, I. G., KURDJUKOV, A. P., AND SEMYONOV, A. V. *State-space solution to anisotropy-based stochastic H_∞-optimization problem*// Proc. 13th IFAC World

Congress, San-Francisco, CA, USA, 1996. – P. 427-432.

11. XU, S., LAM, J. *Robust Control and Filtering of Singular Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Berlin, Springer-Verlag, 2006.