

УДК 519.7
ББК 22.18

МЕТОДЫ ДООПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОНОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Епифанов А. С.¹

*(Институт проблем точной механики
и управления РАН, Саратов)*

В работе рассматриваются процессы функционирования дискретных детерминированных динамических систем. Математическими моделями таких систем предполагаются дискретные детерминированные автоматы, законы функционирования которых представлены новым, предложенным и разработанным Твердохлебовым В.А., способом - геометрическими образами автоматных отображений. Рассматриваются частично заданные автоматные модели систем и проводится анализ эффективности применения классических методов интерполяции Ньютона, Лагранжа, Гаусса, методов сплайн-интерполяции и др. по отношению к частично заданным законам функционирования автоматов, представленным частично заданными геометрическими образами в форме числовых графиков. Разработаны новые методы выбора базовых точек интерполяции, учитывающие специфику интерполируемых автоматных моделей.

Ключевые слова: дискретная детерминированная динамическая система, автомат, автоматное отображение, геометрический образ автоматного отображения, интерполяция, аппроксимация.

¹ Антон Сергеевич Епифанов, кандидат физико-математических наук (epifanovas@list.ru).

1. Введение

Одним из важных свойств сложных человеко-машинных систем (СЧМС), используемых в настоящее время (авиационно-транспортных системы, атомных и гидроэлектростанций, сетей железных дорог, крупных промышленных предприятий, сетей газо- и нефтепроводов, телекоммуникационных сетей, распределенных вычислительных систем), является возможность перекрытия положительного экономического эффекта от использования СЧМС последствиями аварий и катастроф СЧМС. Ввиду этого задачи в проблеме обеспечения и поддержания безопасности функционирования СЧМС актуальны и являются предметом исследований огромных коллективов как отечественных, так и зарубежных ученых (см., например, [1-3, 5,6, 8-10, 12-16, 19]). Несмотря на это, полностью закрывающих проблему решений не получено.

Одной из принципиальных трудностей в задачах обеспечения и поддержания безопасности функционирования сложных человеко-машинных систем (СЧМС) является принципиальная невозможность построения полной, точной и компактной модели СЧМС ввиду огромной размерности таких систем, сложной структуры, большого числа связей между компонентами и подсистемами, наличия неопределенностей в функционировании, присутствия в системе процессов и компонент различной природы и т.д. Ввиду указанных особенностей СЧМС актуальными являются исследования по разработке методов построения модели СЧМС в целом (учитывающих разнородность процессов в СЧМС, изменения СЧМС во времени) на основе ограниченного набора полностью или частично заданных фактических процессов функционирования системы. В данной работе сложные человеко-машинные системы рассматриваются как дискретные детерминированные динамические системы. В качестве математических моделей таких систем используются дискретные детерминированные автоматы с большими конечными или счетно-бесконечными множествами состояний (на основе использования геометрического представления законов функционирования

(см.[17, 18]). Фундаментальные математические результаты по доопределению частично заданных геометрических структур представлены классическими методами интерполяции Ньютона, Лагранжа, Гаусса, Бесселя, Стирлинга, методами сплайн-интерполяции, методом наименьших квадратов и др. [7,11]. В данной работе на основе использования геометрического представления математических моделей законов функционирования СЧМС разрабатываются новые и используются классические методы интерполяции в качестве средства доопределения частично заданных законов функционирования СЧМС.

2. Геометрические образы автоматных отображений

Геометрический образ γ_s законов функционирования (см.[17,18]) (функции переходов $\delta: S \times X \rightarrow S$ и функции выходов $\lambda: S \times X \rightarrow Y$) инициального конечного детерминированного автомата $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$ с множествами состояний S , входных сигналов X и выходных сигналов Y определяется на основе введения линейного порядка ω в автоматном отображении $\rho'_s = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda'(s, p))\}$, где $\lambda'(s, p) = \lambda(\delta(s, p'), x)$, $p = p'x$.

Автоматное отображение ρ'_s (множество пар) упорядочивается линейным порядком ω , определенным на основе порядка ω_1 на X^* и заданным следующими правилами:

Правило 1. На множестве X вводим некоторый линейный порядок ω_1 (который будем обозначать \prec_1)

Правило 2. Порядок ω_1 на X распространим до линейного порядка на множестве X^* , полагая, что для любых слов $p_1, p_2 \in X^*$ неодинаковой длины $(|p_1| \neq |p_2|)$ $|p_1| < |p_2| \rightarrow p_1 \prec_1 p_2$; для любых слов $p_1, p_2 \in X^*$, для которых $|p_1| = |p_2|$ и $p_1 \neq p_2$, их отношение по порядку ω_1 повторяет отношение ближайших слева несовпадающих букв слов p_1 и

p_2 . Аналогично определяется порядок ω'_2 на множестве слов Y^* . После введения на множестве X^* линейного порядка ω_1 , получаем линейно упорядоченное множество $\rho_s = (\rho'_s, \omega'_1)$, где ω'_1 - порядок на ρ'_s , индуцированный порядком ω_1 на X^* .

Определив на множестве Y линейный порядок ω_2 и разместив в системе координат D_1 с осью абсцисс (X^*, ω_1) и осью ординат (Y, ω_2) множество точек ρ_s , получаем геометрический образ γ_s законов функционирования инициального конечного детерминированного автомата $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$. Необходимо отметить, что линейные порядки ω_1 на X^* и ω_2 на Y в общем случае независимы. Это означает, что конкретный вид геометрического образа γ_s законов функционирования инициального конечного детерминированного автомата $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$ зависит от выбранных порядков ω_1 и ω_2 . Возможны и другие варианты линейных порядков на X^* (см., например, [17]). В данной работе исследование законов функционирования автоматов проводится с использованием определенного выше порядка ω_1 на X^* . Линейные порядки ω_1 и ω_2 позволяют заменять элементы множеств X^* и Y их номерами $r_1(p)$ и $r_2(p)$ по этим порядкам. В результате определяются две формы геометрических образов, во-первых, как символьная структура в системе координат D_1 , а во-вторых, как числовая структура в системе координат с целочисленными или вещественными положительными полуосями.

Из геометрического образа γ_s автомата A_s выделяется последовательность вторых координат точек геометрического образа, которая взаимнооднозначно соответствует полному геометрическому образу (при фиксированном порядке на множестве X^* и величине $m = |X|$). В результате законы функционирования автомата (то есть, фазовая картина) и конкретные процессы функционирования автомата (то есть, фазовые траектории) оказываются взаимнооднозначно определёнными последовательностью вторых координат точек геометрического образа. Это позволяет рассматривать произвольную последовательность элементов из конечного множества как последовательность вторых координат точек геометрического образа и,

следовательно, как задание законов функционирования автомата. Представление геометрического образа γ_s как числовой структуры позволяет использовать при постановках и в методах решения задач аппарат непрерывной математики: задание законов функционирования автоматов числовыми уравнениями, использование числовых процедур, интерполяцию и аппроксимацию частично заданных законов функционирования и т.п. Геометрический образ γ_s определяет полностью законы функционирования автомата A_s , то есть, всю фазовую картину связей входных последовательностей с выходными сигналами. Конкретные варианты процессов функционирования, то есть, фазовые траектории, имеют геометрические образы $\gamma_s(p)$, $p \in X^*$, в виде сечений γ_s по отдельным точкам. Геометрические образы также могут задаваться числовыми, а не символьными, уравнениями.

3. Анализ эффективности применения классических методов интерполяции для доопределения законов функционирования автоматов

Исследованные в данной работе инициальные автоматы вида $A_s = (S, X, Y, \delta, \lambda, s)$, где S , X и Y – множества состояний, входных и выходных сигналов, δ и λ – функции переходов и выходов вида $\delta: S \times X \rightarrow S$, $\lambda: S \times X \rightarrow Y$, а $s \in S$ – начальное состояние, представлены классами автоматов: классами (n, m, l) – автоматов, где $n = |S|$, $m = |X|$, $l = |Y|$, и классами $(n, m, l)_d$ начальных отрезков геометрических образов длины d , определяющих автоматы из класса (n, m, l) – автоматов.

Выбор и применение метода интерполяции по смыслу соответствуют принятию и реализации гипотезы о том, что метод интерполяции, применяемый к числовому графику, представляющему частично заданный геометрический образ автомата, достаточно точно восстанавливает точки геометрического образа, т.е. достаточно точно доопределяет частично заданные законы функционирования автомата. Следовательно, обоснованность результатов, полученных с использованием выбранного метода интерполяции, сведена к обоснованию правильности

гипотезы. В данном параграфе исследованы и разработаны методы выбора гипотезы (выбора конкретного метода интерполяции) для конкретных классов автоматов (класс (4,2,2)-автоматов, класс (8,2,2)-автоматов и класс (16,2,2)-автоматов) на примере выбора более точного метода интерполяции из двух методов интерполяции: Ньютона и Лагранжа (по аналогичной схеме также проведен анализ методов интерполяции Гаусса, Бесселя, Стирлинга и др.). Эти методы включают следующие этапы:

1 Этап. Определяется и конкретно строится класс автоматов U , в котором частично заданные автоматы методом интерполяции их частичных геометрических образов доопределяются до полных геометрических образов. Выбирается для исследования набор методов интерполяции (в данном разделе набор состоит из методов Ньютона и Лагранжа).

2 Этап. Для интерполяции определяются базовые точки (в работе для исследования предложено два новых варианта выбора базовых точек интерполяции: использование в качестве базовых точек вершин геометрических образов автономных подавтоматов и использование в качестве базовых точек интерполяции тех вершин геометрических образов законов функционирования автоматов, которые расположены на прямых, параллельных оси абсцисс).

3 Этап. Выбирается длина d геометрического образа, по частичному заданию которого интерполируется геометрический образ законов функционирования автомата.

4 Этап. К выбранным на этапе 2 базовым точкам интерполяции применяются методы интерполяции Ньютона и Лагранжа.

5 Этап. Результаты интерполяции представляются следующими числовыми показателями:

- для каждого инициального автомата и каждого метода интерполяции определяется число правильно восстановленных вершин геометрического образа законов функционирования автомата;

- для рассматриваемого класса автоматов и заданной длины геометрических образов законов функционирования автоматов

вычисляются величины n_d^N - число автоматов в рассматриваемом классе, для которых методом Ньютона правильно восстановлено больше точек, чем методом Лагранжа, n_d^L - число автоматов в рассматриваемом классе, для которых методом Лагранжа правильно восстановлено больше точек, чем методом Ньютона и n_d^{NL} - число автоматов в рассматриваемом классе, для которых методы Ньютона и Лагранжа имеют одинаковую эффективность.

6 Этап. Выбирается функция для оценки эффективности методов интерполяции, т.е. для определения в исследуемом наборе методов интерполяции наиболее эффективного метода. В работе используется функция

$$F(n_d^N, n_d^L, n_d^{NL}) = 1 - \frac{\min(n_d^N, n_d^L) + n_d^{NL}}{\max(n_d^N, n_d^L) + n_d^{NL}},$$

по значениям которой сравниваются по эффективности методы интерполяции Ньютона и Лагранжа.

В данной работе проведен сравнительный анализ точности интерполяции методами Ньютона и Лагранжа, а также модифицированными методами Ньютона и Лагранжа. Модификация методов интерполяции состоит в том, что базовыми точками интерполяции являются точки геометрических образов автоматов вида $A_1=(S, \{0\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$ и $A_2=(S, \{1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$. Введенная для сравнения эффективности интерполяции методами Ньютона и Лагранжа функция

$$F(n_d^N, n_d^L, n_d^{NL}) = 1 - \frac{\min(n_d^N, n_d^L) + n_d^{NL}}{\max(n_d^N, n_d^L) + n_d^{NL}}$$

имеет ограничение - $n_d^N + n_d^L + n_d^{NL} \neq 0$, где n_d^N , n_d^L и n_d^{NL} определены выше (см. этап 5 метода). Используются следующие свойства функции F :

1. функция F принимает значения из отрезка $[0,1]$;
2. функция F принимает значение 0, если методы интерполирования Ньютона и Лагранжа имеют одинаковую точность;
3. функция F принимает значение отличное от 0 только в том случае, когда интерполяция одним из методов более точная;

4. функция F принимает значение 1, когда только один из методов правильно восстанавливает некоторые точки графика.

В теоремах 3.1 - 3.4 отражены результаты анализа эффективности применения методов интерполяции Ньютона и Лагранжа по отношению к частично заданным геометрическими образами автономных подавтоматов автоматам класса (4,2,2)-автоматов (более 67 млн. инициальных автоматов) при различных значениях длины начального отрезка геометрического образа (ввиду ограничений на объем статьи результаты по другим исследованным методам интерполяции в явном виде не приводятся).

Теорема 3.1. Пусть базовыми точками интерполяции для частично заданного геометрического образа длины d каждого автомата $A=(S, \{0,1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$ из класса инициальных (4,2,2)-автоматов являются точки геометрических образов автономных подавтоматов $A_0=(S, \{0\}, Y, \delta_0, \lambda_0, s_0)$ и $A_1=(S, \{1\}, Y, \delta_1, \lambda_1, s_0)$ автомата A . Тогда для методов интерполяции Ньютона и Лагранжа при $d=30$ в классе инициальных (4,2,2) – автоматов выполняется отношение $n_d^N > n_d^L$ и функция F принимает значение $F(n_{30}^N, n_{30}^L, n_{30}^{NL}) = 0,65$ (метод интерполяции Ньютона с оценкой 0,65 точнее метода Лагранжа).

Теорема 3.2. Пусть базовыми точками интерполяции для частично заданного геометрического образа длины d каждого автомата $A=(S, \{0,1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$ из класса инициальных (4,2,2)-автоматов являются точки геометрических образов автономных подавтоматов $A_0=(S, \{0\}, Y, \delta_0, \lambda_0, s_0)$ и $A_1=(S, \{1\}, Y, \delta_1, \lambda_1, s_0)$ автомата A . Тогда для методов интерполяции Ньютона и Лагранжа при $d=62$ в классе инициальных (4,2,2) – автоматов выполняется отношение $n_d^N > n_d^L$ и функция F принимает значение $F(n_{62}^N, n_{62}^L, n_{62}^{NL}) = 0,44$ (метод интерполяции Ньютона с оценкой 0,44 точнее метода Лагранжа).

Теорема 3.3. Пусть базовыми точками интерполяции для частично заданного геометрического образа длины d каждого автомата $A=(S, \{0,1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$ из класса инициальных (4,2,2)-

автоматов являются точки геометрических образов автономных подавтоматов $A_0=(S, \{0\}, Y, \delta_0, \lambda_0, s_0)$ и $A_1=(S, \{1\}, Y, \delta_1, \lambda_1, s_0)$ автомата A . Тогда для методов интерполяции Ньютона и Лагранжа при $d=126$ в классе инициальных $(4,2,2)$ – автоматов выполняется отношение $n_d^N > n_d^L$ и функция F принимает значение $F(n_{126}^N, n_{126}^L, n_{126}^{NL}) = 0,14$ (метод интерполяции Ньютона с оценкой 0,14 точнее метода Лагранжа).

Теорема 3.4. Пусть базовыми точками интерполяции для частично заданного геометрического образа длины d каждого автомата $A=(S, \{0,1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$ из класса инициальных $(4,2,2)$ -автоматов являются точки геометрических образов автономных подавтоматов $A_0=(S, \{0\}, Y, \delta_0, \lambda_0, s_0)$ и $A_1=(S, \{1\}, Y, \delta_1, \lambda_1, s_0)$ автомата A . Тогда для методов интерполяции Ньютона и Лагранжа при $d=254$ в классе инициальных $(4,2,2)$ – автоматов выполняется отношение $n_d^N > n_d^L$ и функция F принимает значение $F(n_{254}^N, n_{254}^L, n_{254}^{NL}) = 0,14$ (метод интерполяции Ньютона с оценкой 0,14 точнее метода Лагранжа).

Из теорем 3.1-3.4 следует, что при небольших длинах частично заданных геометрических образах законов функционирования автоматов из класса $(4,2,2)$ -автоматов, следует использовать метод интерполяции Ньютона, а при длинах геометрических образов от 126 до 254 интерполяция методами Ньютона и Лагранжа выравнивается по точности.

4. Доопределение частично заданных законов функционирования автоматов в 15 непустых подклассах класса $(4,2,2)$ -автоматов

С использованием классификации конечных детерминированных автоматов, которая основывается на декомпозиции абстрактного автомата на комбинационную часть и память и использовании для функций переходов и выходов классификации Поста, проводится анализ эффективности применения классических методов интерполяции для доопределения частично заданных законов функционирования автоматов в 15

непустых подклассах класса $(4,2,2)$ – автоматов. На рис.1 приведена следующая схема такой декомпозиции, соответствующей автоматам типа Мили. Выделение для анализа из класса $(4,2,2)$ -автоматов подклассов автоматов осуществляется на основе новой классификации конечных детерминированных автоматов, предложенной в работе [17]. Предполагается, что автомат определен следующим образом: $A = (\{0,1\}^2, \{0,1\}, \{0,1\}, (\delta_1, \delta_2), \lambda)$, где функции δ_1, δ_2 и λ – логические функции вида $\delta_i: \{0,1\}^2 \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, $\lambda: \{0,1\}^2 \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$. Предложенная в работе [17] и применяемая в данной работе классификация конечных детерминированных автоматов, базируется на использовании для характеристики функций δ_1, δ_2 и λ сочетаний пересечений пяти замечательных классов Поста и их дополнений относительно P_2 .



Рис. 1. Схема декомпозиции автомата типа Мили.

Введем следующие обозначения: K_0 – класс функций, сохраняющих 0; K_0^- – дополнение K_0 до P_2 ; K_1 – класс функций, сохраняющих 1; K_1^- – дополнение K_1 до P_2 ; K_L – класс линейных функций; K_L^- – дополнение K_L до P_2 ; K_S – класс самодвойственных функций; K_S^- – дополнение K_S до P_2 ; K_M – класс монотонных функций; K_M^- – дополнение K_M до P_2 . Для обозначения классов функций, принадлежащих сочетаниям пересечений определенных выше классов, будем использовать букву K с пятью нижними индексами по правилам:

$$K_{ijou v} = K_a \cap K_b \cap K_c \cap K_d \cap K_e, \text{ где } i = \begin{cases} 0, a = \bar{0} \\ 1, a = 0 \end{cases}, \quad j = \begin{cases} 0, b = \bar{1} \\ 1, b = 1 \end{cases},$$

$$\omega = \begin{cases} 0, c = \bar{L} \\ 1, c = L \end{cases}, \quad u = \begin{cases} 0, d = \bar{S} \\ 1, d = S \end{cases}, \quad v = \begin{cases} 0, e = \bar{M} \\ 1, e = M \end{cases}. \quad \text{Например:}$$

$K_{01100} = K_{\bar{0}} \cap K_1 \cap K_L \cap K_{\bar{S}} \cap K_{\bar{M}}$. Для обозначения класса автоматов, функции переходов и выходов которых принадлежат классу функций алгебры логики

$$K_{ijou v} = K_a \cap K_b \cap K_c \cap K_d \cap K_e, \text{ где } i = \begin{cases} 0, a = \bar{0} \\ 1, a = 0 \end{cases}, \quad j = \begin{cases} 0, b = \bar{1} \\ 1, b = 1 \end{cases},$$

$$\omega = \begin{cases} 0, c = \bar{L} \\ 1, c = L \end{cases}, \quad u = \begin{cases} 0, d = \bar{S} \\ 1, d = S \end{cases}, \quad v = \begin{cases} 0, e = \bar{M} \\ 1, e = M \end{cases}, \text{ будем использовать букву}$$

Н с пятью нижними индексами. Например: H_{01100} - класс автоматов, у которого функции переходов и выходов принадлежат классу функций алгебры логики $K_{01100} = K_{\bar{0}} \cap K_1 \cap K_L \cap K_{\bar{S}} \cap K_{\bar{M}}$.

В классе (4,2,2)-автоматов выделены 15 подклассов (остальные 17 подклассов являются пустыми), каждый из которых определяется сочетанием свойств Поста для комбинационных компонент, представляющих функции переходов и выходов автоматов (в самом мощном классе содержится 864000 инициальных автоматов, подробное описание исследованных классов содержится, например, в [18]). Эти условия – интерполяция методами Ньютона и Лагранжа, рассмотрение 15 выделенных по свойствам Поста для комбинационных компонент автомата подклассов класса (4,2,2)-автоматов, выбор базовых точек интерполяции по геометрическим образам автономных подавтоматов – были зафиксированы для проведения исследования. В качестве переменных значений использовались длины начальных отрезков геометрических образов автоматов из класса (4,2,2)-автоматов.

С использованием разработанных алгоритмов и программ проведены вычисления и анализ по следующей схеме.

1. Каждый из 15 подклассов автоматов был построен.

2. Для каждого автомата каждого подкласса были построены геометрические образы длины до 254 вершин.

3. Для каждого подкласса автоматов и всех автоматов из этого подкласса были построены автономные подавтоматы, определяющие базовые точки интерполяции.

4. Из геометрических образов длины 254 были выделены начальные отрезки с длинами $d_1=30, d_2=62, d_3=126$ и $d_4=254$.

5. Для каждой длины d_i , где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, для каждого подкласса автоматов и всех автоматов из этого подкласса по указанным в п.2 базовым точкам интерполяции (входящим в выделенный начальный отрезок длины d_i) была проведена интерполяции методами Ньютона и Лагранжа.

6. По результатам, полученным реализаций п.п.1-5, для каждого определяемого этими пунктами варианта интерполяции вычислены величины $n_{d,i}^N, n_{d,i}^L, n_{d,i}^{NL}$ (имеющие в i -ом непустом подклассе класса (4,2,2) – автоматов тот же смысл, что и величины n_d^N, n_d^L, n_d^{NL} в классе (4,2,2) – автоматов) и значения функ-

$$ции $F(n_{d,i}^N, n_{d,i}^L, n_{d,i}^{NL}) = 1 - \frac{\min(n_{d,i}^N, n_{d,i}^L) + n_{d,i}^{NL}}{\max(n_{d,i}^N, n_{d,i}^L) + n_{d,i}^{NL}}$.$$

Результаты вычислений и анализа (в качестве примера) для подкласса H_{00000} класса (4,2,2)-автоматов представлены теоремами 4.1 – 4.2.

Теорема 4.1. Пусть базовыми точками интерполяции для частично заданного геометрического образа длины d каждого автомата $A=(S, \{0,1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$ из класса T_1 , полученного пересечением класса H_{00000} и класса (4,2,2)-автоматов, являются точки геометрических образов автономных подавтоматов вида $A_0=(S, \{0\}, Y, \delta_0, \lambda_0, s_0)$ и $A_1=(S, \{1\}, Y, \delta_1, \lambda_1, s_0)$ автомата A . Тогда для методов интерполяции Ньютона и Лагранжа при $d=126$ в классе T_1 выполняется отношение $n_{126,1}^N > n_{126,1}^L$ и функция F принимает значение $F(n_{126,1}^N, n_{126,1}^L, n_{126,1}^{NL}) = 0,13$ (метод интерполяции Ньютона с оценкой 0,13 точнее метода Лагранжа).

Теорема 4.2. Пусть базовыми точками интерполяции для частично заданного геометрического образа длины d каждого

автомата $A=(S, \{0,1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$ из класса T_1 , полученного пересечением класса H_{00000} и класса $(4,2,2)$ -автоматов, являются точки геометрических образов автономных подавтоматов вида $A_0=(S, \{0\}, Y, \delta_0, \lambda_0, s_0)$ и $A_1=(S, \{1\}, Y, \delta_1, \lambda_1, s_0)$ автомата A . Тогда для методов интерполяции Ньютона и Лагранжа при $d = 254$ в классе T_1 выполняется отношение $n_{254,1}^N > n_{254,1}^L$ и функция F принимает значение $F(n_{254,1}^N, n_{254,1}^L, n_{254,1}^{NL}) = 0,15$ (метод интерполяции Ньютона с оценкой 0,15 точнее метода Лагранжа).

По аналогичной схеме проведен анализ эффективности применения классических методов интерполяции во всех 15 непустых подклассах класса $(4,2,2)$ – автоматов и для каждого подкласса определен наиболее эффективный метод.

5. Методы сплайн-интерполяции частично заданных автоматов

Выбор базовых точек интерполяции характеризуется числом базовых точек и конфигурациями их расположения. К классическим вариантам расположения базовых точек относится расположение первых координат базовых точек интерполяции на одинаковом расстоянии по оси абсцисс. В данной работе выбор базовых точек интерполяции определялся новым критерием, в котором учитывается интерпретация точек интерполируемого графика: базовыми точками интерполяции полагаются вершины геометрических образов автономных подавтоматов $A_0=(S, \{0\}, Y, \delta_0, \lambda_0, s_0)$ и $A_1=(S, \{1\}, Y, \delta_1, \lambda_1, s_0)$ автомата $A=(S, \{0,1\}, Y, \delta, \lambda, s_0)$. Координаты таких базовых точек удобно вычислять, т.к. они соответствуют приложению к исследуемому автомату периодических входных последовательностей с периодом, состоящим из одного входного сигнала – 0 или 1. Такой критерий выбора базовых точек интерполяции далее в работе будем называть методом 1 выбора базовых точек. Также предложен следующий критерий выбора базовых точек интерполяции: базовыми точками интерполяции для доопределения графика, представляющего частично заданные законы

функционирования автомата, предлагается использовать точки, расположенные на прямых, параллельных оси абсцисс. Такие точки удобно определять экспериментально с помощью простых устройств, выделяющих в последовательностях выходных сигналов только один заданный сигнал (такой метод выбора базовых точек далее в работе будем называть методом 2). Для рассматриваемых в данной статье классов автоматов число входных сигналов равно двум. Каждый частично заданный геометрический образ автомата предполагается заданным двумя сечениями, которые представляют собой геометрические образы автономных подавтоматов. На рис.2 (часть 2) приведен частично заданный геометрическими образами двух автономных подавтоматов геометрический образ (2,2,16)-автомата длины $d = 62$ и построенный по этим базовым точкам сплайн.

Первое сечение представлено пятью точками с номерами 1, 3, 7, 15, 31 (данным точкам соответствуют следующие пять входных последовательностей: x_1 , x_1x_1 , $x_1x_1x_1$, $x_1x_1x_1x_1$, $x_1x_1x_1x_1x_1$), второе сечение представлено пятью точками с номерами 2, 6, 14, 30, 62 (данным точкам соответствуют следующие пять входных последовательностей: x_2 , x_2x_2 , $x_2x_2x_2$, $x_2x_2x_2x_2$, $x_2x_2x_2x_2x_2$). Таким образом, при $d = 62$, анализ эффективности сплайн-интерполяции проводится по отношению к частично заданным 10 базовыми точками интерполяции (точками с номерами 1, 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, 31, 62) геометрическим образам автоматов. Анализ эффективности интерполяции в исследуемых в данной части работы классах автоматов проводится при $d \in \{30, 62, 126, 254, 510, 1022\}$, таким образом число базовых точек интерполяции при $d=30$ равно 8, при $d=62$ равно 10, при $d=126$ равно 12, при $d=254$ равно 14, при $d=510$ равно 16, при $d=1022$ равно 18.

В данной части работы проводится анализ эффективности сплайн-интерполяции для доопределения частично заданных автоматов в классе (2,2,16)-автоматов, классе (2,2,32)-автоматов, классе (4,2,2)-автоматов, классе линейных (8,2,2)-автоматов и др. Спецификой сплайн-интерполяции, в отличие от полиномиальной интерполяции, когда вся аппроксимируемая зависимость описывается одним полиномом, является построе-

ние на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ отдельного полинома со своими коэффициентами. Далее кратко приводится описание основных используемых в работе сплайнов.

1. Одним из самых простых видов сплайнов является линейный сплайн - это сплайн, составленный из полиномов первой степени, т.е. из отрезков прямых линий. Точность интерполяции линейными сплайнами невысока. В некоторых случаях кусочно-линейная аппроксимация функции может оказаться эффективнее по некоторым критериям, чем аппроксимация более высокого порядка.

2. Сплайн Эрмита - сплайн третьего порядка, производная которого принимает в узлах сплайна заданные значения. В каждом узле сплайна Эрмита задано не только значение функции, но и значение её первой производной. Сплайн Эрмита имеет непрерывную первую производную.

3. Сплайн Катмулла-Рома – аналог сплайна Эрмита, специфическим свойством которого является определение производ-

ной: $f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$. Как и сплайн Эрмита, сплайн Катмулла-

Рома имеет непрерывную первую производную и разрывную вторую. Значения сплайна Катмулла-Рома зависят только от значений функции в четырех соседних точках (двух слева, двух справа).

4. Кубический сплайн. Все сплайны (за исключением линейного сплайна), используемые в данной работе, являются кубическими сплайнами - в том смысле, что они являются кусочно-кубическими функциями. Однако, когда говорят "кубический сплайн", то обычно имеют в виду конкретный вид кубического сплайна, который получается, если потребовать непрерывности первой и второй производных. Кубический сплайн задается значениями функции в узлах и значениями производных на границе отрезка интерполяции (либо первых, либо вторых производных).

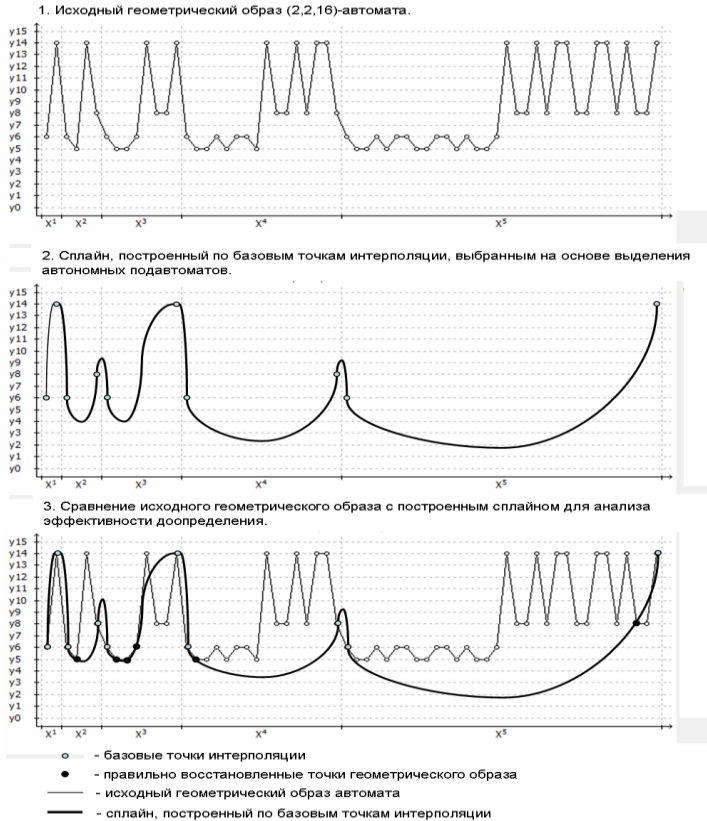


Рис.2. Схема анализа эффективности сплайн-интерполяции (на примере (2,2,16)-автомата): 1. построение исходного геометрического образа; 2. выбор базовых точек интерполяции на основе выделения автономных подавтоматов исходного автомата и построение по данным точкам сплайна; 3. подсчет числа правильно восстановленных точек на основе сравнения исходного геометрического образа и построенного сплайна.

5. Сплайн Акимы - это особый вид сплайна, устойчивый к выбросам. Недостатком кубических сплайнов является то, что они склонны осциллировать в окрестностях точки, значения второй координаты которой существенно отличаются от значе-

ний вторых координат соседних по оси абсцисс точек. В отличие от кубического сплайна, сплайн Акимы в меньшей мере подвержен влиянию выбросов - на отрезках, граничащих с выбросом, практически отсутствуют признаки осцилляции.

На основе использования: аппарата геометрических образов автоматов [17,18]; сплайнов в качестве средства доопределения частично заданных законов функционирования автоматов и двух предложенных методов выбора базовых точек интерполяции проведен анализ эффективности доопределения в следующих классах автоматов: в классе (2,2,8)-автоматов, в классе (2,2,16)-автоматов, в классе (2,2,32)-автоматов и в 15 его непустых подклассах (выделенных на основании свойств Поста для комбинационных частей автоматов), в классе (4,2,2)-автоматов и в 15 его непустых подклассах, в классе линейных (8,2,2)-автоматов. Для каждого класса определен сплайн (из множества используемых сплайнов), который наиболее эффективно восстанавливает геометрические образы автоматов в классе. Отмечено, что в классах (2,2,32)-автоматов и (2,2,16) – автоматов наиболее эффективным оказался сплайн Акимы, а в классе линейных (8,2,2) - автоматов - кубический сплайн. Получены оценки точности доопределения в 15 непустых подклассах класса (2,2,32)-автоматов и 15 непустых подклассах класса (4,2,2)-автоматов.

6. Выводы

В работе изложены модели и методы, разработанные для интерполяции частично заданных законов функционирования автоматов, заданных автоматными отображениями, размещенными на геометрических кривых линиях. В статье разработаны методы интерполяции использующие: базовые точки интерполяции, вторые координаты которых получены сечениями геометрических образов прямыми линиями, параллельными оси абсцисс; базовые точки интерполяции, выделенные первыми элементами некоторых вершин геометрических образов (на основе выделения автономных подавтоматов). Получены оценки для сравнения по точности интерполяции методами Ньютона

и Лагранжа (Гаусса, Стирлинга, Бесселя и др.) для автоматов с частично заданными геометрическими образами, представляющими класс $(4,2,2)$ -автоматов и его подклассы, класс линейных $(8,2,2)$ -автоматов, некоторые подклассы класса $(16,2,2)$ -автоматов и др. Проведен анализ эффективности доопределения частично заданных законов функционирования автоматов на основе сплайн-интерполяции. Исследованы геометрические образы автоматов длины до 1022 знаков в классе $(2,2,16)$ -автоматов, классе $(2,2,32)$ -автоматов, классе $(4,2,2)$ -автоматов, классе линейных $(8,2,2)$ -автоматов и др. Получена сравнительная оценка по точности интерполяции в указанных классах линейного сплайна, сплайна Эрмита, кубического сплайна, сплайна Акимы и др.

Литература

1. *Безопасность критических инфраструктур: математические и инженерные методы анализа и обеспечения* / под ред. Харченко В.С. – НАУ им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 641 с.
2. БЕРМАН А.Ф., НИКОЛАЙЧУК О.А., ЮРИН А.Ю. *Интеллектуальная информационная система анализа отказов* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – №4. – С.88-96.
3. ВИЛЬВЕР П.Ю., ПРОТАСОВ А.В. *Имитационное моделирование сложных динамических систем с использованием сетей Петри* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2011. – №7. – С.35-39.
4. ГЛУШКОВ В.М. *Синтез цифровых автоматов*. – М.: Физматгиз, 1962. – 476с.
5. ЗАТУЛИВЕТЕР Ю.С., ХОДАКОВСКИЙ И.А. *Обзор программных методов повышения надежности распределенных вычислений*. / Всероссийская конференция с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения». – М.: ИПУ РАН, 2008. С.30-33.

6. КАРАВАЙ М.Ф., ПАРХОМЕНКО П.П., ПОДЛАЗОВ В.С. *Универсальная сетевая структура для отказоустойчивых многопроцессорных систем реального времени* //Тр. конф. «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения». – М.: ИПУ РАН, С.583–597.
7. КОРНЕЙЧУК Н.П., БАБЕНКО В.Ф., ЛИГУН А.А. *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*. – К.: Наукова думка, 1992. – 304 с.
8. КУЛЬБА В. В., МИКРИН Е. А., ПАВЛОВ Б. В., ПЛАТОНОВ В. Н. *Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов*. – М.: Наука, 2006.
9. МИКРИН Е.А., КОЧКАРОВ А.А., СОМОВ Д.С. *Мониторинг функционирования сложных технических систем в условиях внешних угроз. Метод структурно-интегрированных индикаторов и иерархия моделей*. – М.: ИПУ РАН, 2010. – 53 с.
10. МИКРИН Е. А., ШЕЛКОВ А. Б., ПАВЕЛЬЕВ В. В. *Методы восстановления данных в распределенных автоматизированных системах*. - М. : ИПУ РАН, 2009. – 67 с.
11. ПОЛОВКО А.М., БУТУСОВ П.Н. *Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации*. - СПб.: БХВ-Петербург, 2004г. – 320с.
12. *Проблемы управления безопасностью сложных систем : РМЕСС-08* : тр. XVI междунар. конф., Москва, дек. 2008 г. / - М. : РГГУ, 2008. - 497 с.
13. РЕЗЧИКОВ А.Ф., ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Причинно-следственные модели производственных систем*. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. – 137 с.
14. РУДЕНКО Ю.Н., УШАКОВ И.А. *Надежность систем энергетики*. – М.:Наука , 1986.
15. РЯБИНИН И.А., ПАРФЕНОВ Ю.М. *Надежность и эффективность структуры сложных технических систем. //Основные вопросы теории и практики надежности*. Минск, «Наука и техника», 1982, С.25-39.
16. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Особенности диагностирования человеко-машинных систем* // Тр. конференции "Техниче-

ские и программные средства систем управления, контроля и измерения". – М.: ИПУ РАН. 2010. – С. 146 – 156.

17. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А. *Геометрические образы законов функционирования автоматов.*–Саратов:Наука,2008.– 183с.
18. ТВЕРДОХЛЕБОВ В.А., ЕПИФАНОВ А.С. *Представление автоматных отображений геометрическими структурами:*– Саратов: «Наука», 2013. – 204 с.
19. ХЕНЛИ ДЖ. Э., КУМАМОТО Х. *Надежность технических систем и оценка риска.* – М.: Машиностроение, 1984.

METHODS OF REGULARIZATION OF LOWS OF FUNCTIONING OF DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS

Anton Epifanov, Institute of Precision Mechanics and Control Sciences of RAS, Saratov, Cand.Sc.(epifanovas@list.ru).

Abstract: In paper are considered processes of functioning of discrete determined systems. As mathematical models of such systems assumed discrete determined automats, lows of functioning of which are presented by offered and developed by Tverdokhlebov V.A. new way – by geometrical images of automata mappings. New methods of choice of base points of interpolation, take into account specificity of interpolated automats models, are developed. Also is spend performance analysis of application of classical interpolation methods (Newton, Lagrange, Gauss, methods of spline-interpolation etc.) to partially set lows of functioning of automats, presented by partially set geometrical images in form of numerical graphics.

Keywords: discrete determined dynamic system, mathematical model, automaton, automata mapping, geometrical image of automata mapping, interpolation, approximation.