

УДК 533.9.082.7
ББК 22.333

РЕКОНСТРУКЦИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ПИКАРА И ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Коренев П. С.

*(Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва)*

Для эффективного управления плазмой в токамаке, необходимо иметь динамическую модель системы «плазма-токамак». Задача осложняется высокой температурой плазмы, делающей невозможным прямое измерение распределения параметров плазмы в токамаке. В докладе представлен итерационный метод восстановления распределений тока и полоидального потока плазмы по измерениям магнитной диагностики токамака вне плазмы и метод построения линейных динамических моделей плазмы по полученным распределениям. Фактически решается задача идентификации, т.е. по накопленным экспериментальным данным строится модель равновесия плазмы в токамаке, а также динамическая модель плазмы с учетом динамики взаимосвязанных магнитных контуров — катушек полоидального магнитного поля и плазменного витка. Такой подход в зарубежной литературе принято называть «first principle equations».

Плазма, токамак, восстановление равновесия, линейные модели, идентификация.

1. Введение

Токамак (тороидальная камера с магнитными катушками) представляет собой выполненную в виде тора установку для удержания плазмы с целью достижения условий протекания управляемого ядерного синтеза [14]. На оси токамака располо-

жен центральный соленоид (CS), который, выступая в роли первичной обмотки трансформатора, создает в камере вихревое электрическое поле. Поле вызывает пробой газа, и в камере образуется плазма с проходящим по ней тороидальным током. Плазма удерживается комбинацией тороидального и полоидального магнитных полей, создаваемых катушками токамака.

Плазма в вытянутых по вертикали токамаках является вертикально неустойчивой и требует присутствия системы управления для стабилизации вертикального и горизонтального положения, а также поддержания заданных формы и тока. Для разработки регулятора обратной связи, необходима модель плазмы, которая, в свою очередь, зависит от распределения тока и полоидального магнитного потока в плазме. Данные распределения не могут быть измерены непосредственно внутри плазмы и должны быть восстановлены по данным магнитной диагностики вне плазмы [4]. Диагностика включает в себя пояса Роговского для измерения полного тока плазмы и токов в обмотках управления, магнитные петли для измерения полоидальных магнитных потоков и магнитные зонды для измерения составляющих поля. Для решения данной задачи разработано множество алгоритмов [1,2,6,12], самым известным из которых является код EFIT [7].

В разд. 2 приводится математическая постановка задачи восстановления равновесия плазмы и построения ее линейной модели. Метод решения задачи восстановления равновесия представляется в разд. 3, а построение линейных моделей описано в разд. 4. Также в докладе приведены результаты применения разработанных методов к токамаку Глобус-М (Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург), конфигурация которого показана на рис. 1.

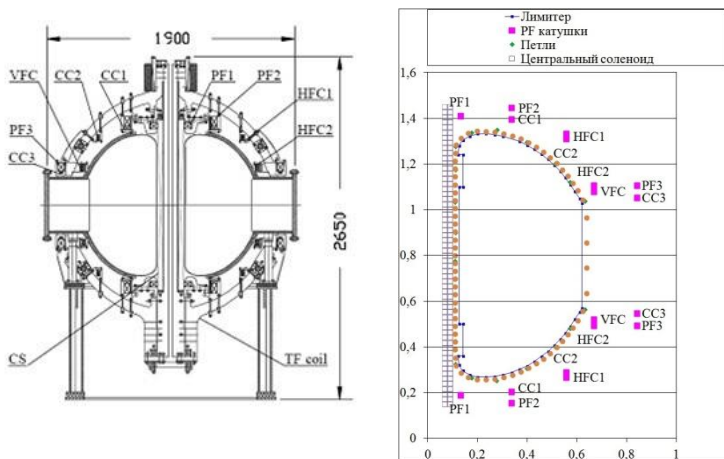


Рис. 1. Конфигурация токамака Глобус-М

2. Постановка задачи

Распределение плазмы в токамаке принято описывать функциями полоидального магнитного потока ψ и плотности тороидального тока J_ϕ [10]. Полоидальный магнитный поток в точке (r, z) в цилиндрической системе координат определяется как магнитный поток на радиан через окружность с центром на оси симметрии токамака, проходящей через точку (r, z) . Из уравнений Максвелла выводится дифференциальное уравнение, описывающее распределение полоидального потока в плазме токамака:

$$(1) \quad \Delta^* \psi \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 r J_\phi,$$

где μ_0 – магнитная постоянная. Выражая плотность тока при помощи уравнения баланса сил, получается уравнение Града-Шафранова [11]

$$(2) \quad \Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 \frac{d}{d\psi} p(\psi) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\psi} F^2(\psi),$$

здесь p – давление плазмы, а функция F пропорциональна полоидальному току плазмы $I_{pol} = 2\pi F / \mu_0$.

Требуется найти функции распределений полоидального потока и тороидального тока, удовлетворяющие уравнению (1) и ограничениям

$$\psi(r_i, z_i) = \psi_i, \quad i = 1, \dots, K,$$

$$B(r_j, z_j) = B_j, \quad j = 1, \dots, L,$$

$$\int_S J_\varphi dS = I_p,$$

где K и L – количество измерений полоидального магнитного потока ψ_i и поля B_j соответственно.

При помощи найденных распределений далее необходимо построить линейную модель плазмы в токамаке в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$y = Cx,$$

где u и y – входы и выходы модели, а x — вектор состояния модели.

3. Численное восстановление распределений полоидального потока и тороидальной плотности тока плазмы

Для восстановления равновесия плазмы нами был создан численный код FCDI (Flux and Current Distribution identification) в программно-вычислительной среде MATLAB. В коде применяется итерационный метод Пикара. На каждой итерации функции $p'(\psi)$ и $F^{2'}(\psi)$ в уравнении (2) аппроксимируются полиномиальными функциями

$$p'_n(\psi_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n_p} \alpha_{kn} x_{n-1}^k,$$

$$F_n^{2'}(\psi_{n-1}) = \sum_{l=1}^{n_F} \beta_{ln} x_{n-1}^l,$$

где x_n – нормализованный полоидальный поток на n -й итерации, равный 1 на магнитной оси и 0 на границе плазмы. Количество коэффициентов $n_p + n_F$ выбирается исходя из количества доступных независимых измерений магнитной диагностики.

В результате решения уравнения Града-Шафранова получается выражение для распределения магнитного потока как линейной функции от коэффициентов α_{kn} , β_{ln}

$$\psi_n(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{n_p} \alpha_{kn} \psi_{kn}^p(\vec{r}) + \sum_{l=1}^{n_p} \beta_{ln} \psi_{ln}^F(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{n_e} G(\vec{r}, \vec{r}_m) I_m,$$

где G – известная функция Грина [3] для уравнения (1) и I_m – токи в обмотках полоидального поля токамака.

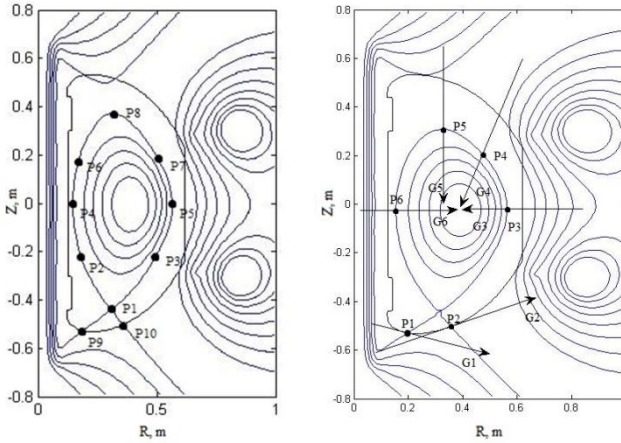


Рис. 2. Восстановленные распределения полоидального потока в токамаке Глобус-М и точки измерения формы плазмы: (а) полоидального потока на сепаратрисе и (б) зазоров между первой стенкой и сепаратрисой

Коэффициенты α_{kn} , β_{ln} находятся на каждой итерации в результате минимизации функционала

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^K \left(\frac{\psi_n(\vec{r}_i) - \psi_i}{\sigma_i^\psi} \right)^2 + \sum_{j=1}^L \left(\frac{B_n(\vec{r}_j) - B_j}{\sigma_j^B} \right)^2 + \left(\frac{I_n - I_p}{\sigma^I} \right)^2 + \left(\frac{F_z}{\sigma^F} \right)^2,$$

где σ^ψ , σ^B и σ^I – погрешности измерения полоидального магнитного потока, поля и полного тока плазмы соответственно, F_z – вертикальная сила, действующая на плазму, а σ^F – подбираемый коэффициент. Для регуляризации задачи используется сингулярное разложение [5].

Код FCDI был применен к экспериментальным данным токамака Глобус-М. Примеры восстановленных в результате равновесий представлены на рис. 2.

4. Линейные модели плазмы в токамаке

4.1. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ В ТОКАМАКЕ

Пренебрегая процессами переноса на малом временном промежутке, динамику плазмы в токамаке можно описать уравнениями Кирхгофа для магнитно взаимосвязанных контуров катушек токамака и витка плазменного тока. Для получения линейной модели плазмы в токамаке запишем линеаризированные уравнения Кирхгофа

$$(3) \quad M\dot{I} + M_p \dot{I}_p + RI = U, M_p^T \dot{I} + M_{pp} \dot{I}_p + \frac{\partial \Psi_{pc}}{\partial \vec{r}_p} = 0,$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{cv} \\ M_{vc} & M_{vv} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_c & 0 \\ 0 & R_v \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_c \\ 0_{N_v \times 1} \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}_p} = \begin{bmatrix} \partial \Psi_{cp} / \partial r_p & \partial \Psi_{cp} / \partial z_p \\ \partial \Psi_{vp} / \partial r_p & \partial \Psi_{vp} / \partial z_p \end{bmatrix}, \vec{r}_p = \begin{bmatrix} r_p \\ z_p \end{bmatrix}, M_p = \begin{bmatrix} M_{pc} \\ M_{pv} \end{bmatrix}, \frac{\partial \Psi_{pc}}{\partial \vec{r}_p} = \begin{bmatrix} \partial \Psi_{pc} / \partial r_p \\ \partial \Psi_{pc} / \partial z_p \end{bmatrix}^T,$$

где M – блочная матрица индуктивностей, R – диагональные матрицы сопротивлений, Ψ – матрицы создаваемых контурами магнитных потоков, U – напряжения на катушках полоидально-го поля, индексы c, v, p обозначают катушки, вакуумную камеру токамака и плазму, соответственно. В работе делаются физические допущения:

- пренебрегается массой и сопротивлением плазмы
- считается, что плазма не меняет свою форму при смещении по вертикали и горизонтали (концепция «жесткой модели»),
- изменение тока плазмы не сопровождается изменением профиля распределения плотности тока.

Так как плазма считается не имеющей массы, силы, действующие на плазму в любой момент, должны быть равны нулю. Запишем уравнение баланса сил

$$(4) \quad F_p \vec{r}_p + F_I I = 0,$$

$$F_p = \begin{bmatrix} \partial F_r / \partial r_p & \partial F_r / \partial z_p \\ \partial F_z / \partial r_p & \partial F_z / \partial z_p \end{bmatrix}, F_I = \begin{bmatrix} \partial F_r / \partial I_c & \partial F_r / \partial I_v \\ \partial F_z / \partial I_c & \partial F_z / \partial I_v \end{bmatrix}.$$

Подставляя (4) в (3) получим

$$\tilde{M} \dot{I} + RI = U,$$

$$\tilde{M} = M - \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}_p} F_r^{-1} F_I - M_p M_{pp}^{-1} \left(M_p^T - \frac{\partial \Psi_{pc}}{\partial \vec{r}_p} F_r^{-1} F_I \right),$$

в конечном виде линейная система запишется как

$$\dot{I} = AI + BU,$$

$$y = CI,$$

где вектор токов в катушках и вакуумной камере токамака выступает в качестве вектора состояний, а напряжения на катушках являются входами системы. Матрицы A и B выражаются через матрицы индуктивностей и сопротивлений по формулам

$$A = -\tilde{M}^{-1} R, \quad B = \tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} 1_{N_c \times N_c} & 0_{N_c \times N_v} \end{bmatrix}^T.$$

В качестве выходов системы используются токи в катушках, положение магнитной оси плазмы, ток плазмы и приращение полоидального потока в наборе точек Γ на границе плазмы. Строки матрицы C могут быть получены как следующие выражения

$$\delta \psi_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \left(M_{\Gamma I} - \frac{\partial \Psi_{\Gamma p}}{\partial \vec{r}_p} F_r^{-1} F_I - M_{\Gamma p} M_{pp}^{-1} \left(M_p^T - \frac{\partial \Psi_{pc}}{\partial \vec{r}_p} F_r^{-1} F_I \right) \right),$$

$$\delta I_p = -M_{pp}^{-1} \left(M_p^T - \frac{\partial \Psi_{pc}}{\partial \vec{r}_p} F_r^{-1} F_I \right), \delta \vec{r}_p = -F_r^{-1} F_I.$$

4.2. МОДЕЛИ ДЛЯ ТОКАМАКА ГЛОБУС-М

Для токамака Глобус-М нами были получены два типа моделей, отличающиеся представлением вакуумной камеры. В первом случае камера разбивалась на множество независимых контуров тока (филаментов) [9], второй метод заключается в задании распределения плотности тока на камере как линейной комбинаций нескольких базисных распределений (пространственных мод) [8]. Модели, полученные методом филаментов более точны, но имеют большую размерность – около 75 со-

стояний, модели с модами имеют размерность – около 10 состояний. В обоих случаях, полученные модели имеют один неустойчивый действительный полюс порядка 10^3 с^{-1} , что согласуется с экспериментальными данными токамака Глобус-М.

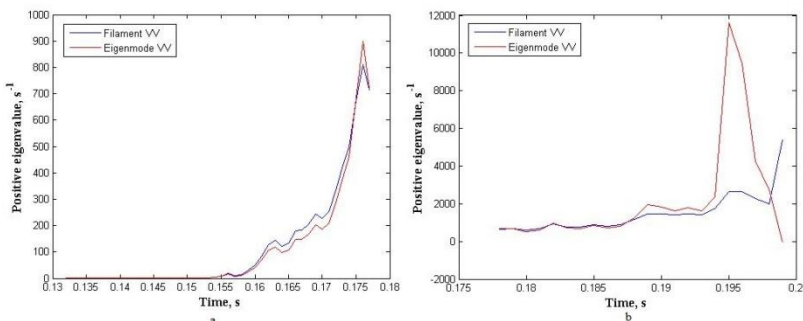


Рис. 3. График изменения неустойчивого полюса моделей в течение лимитерной (а) и диверторной (б) фазы разряда

Изменения неустойчивых полюсов модели в течение выбранного плазменного разряда № 31648 показаны на рис. 3, оба типа моделей дают почти одинаковое значение неустойчивого полюса, за исключением конца разряда, когда модель с модами дает заметно неточное значение полюса. Может быть внесена корректировка посредством учета массы плазмы в ее уравнениях [13].

Разряд принято разделять на лимитерную фазу, когда плазма касается лимитера и более неустойчивую диверторную фазу при которой соприкосновения не происходит. На диверторной фазе образуется сепаратрисная магнитная поверхность, внутри которой расположена плазма (рис. 2).

В ходе диверторной части разряда модели меняются слабо, что дает возможность построить эффективный многомерный регулятор для замкнутой системы управления формой плазмы. Слабое изменение моделей продемонстрировано на рис. 4, где отображены максимальные и минимальные сингулярные числа передаточных функций моделей и ганкелевы сингулярные числа

сбалансированной реализации системы для различных моментов диверторной фазы [11].

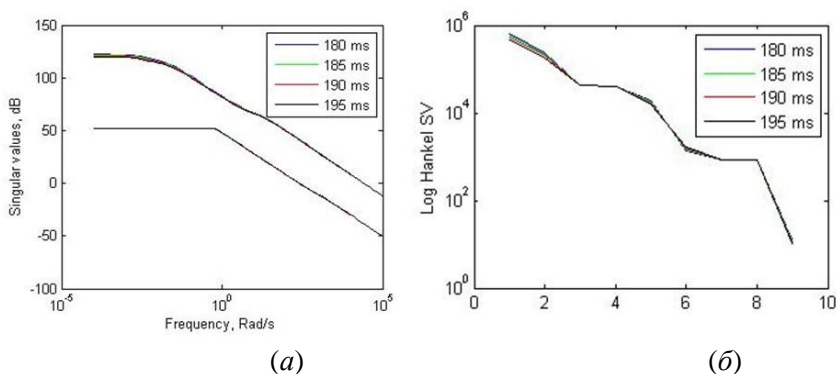


Рис. 4. Максимальное и минимальное сингулярные числа (а) и ганкелевы сингулярные числа (б) для полученных моделей.

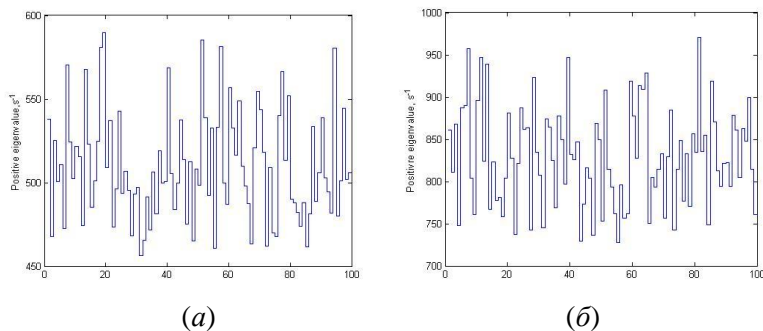


Рис. 5. Возмущенные значения неустойчивого полюса для моделей с филаментами (а) и модами (б)

Также нами было проведено исследование полученных моделей на робастность относительно возмущений распределения тока плазмы. Были сгенерированы наборы из 100 моделей, в которых ток плазмы был возмущен в пределах 3-х %, а вертикальная координата магнитной оси смещена в пределах 2,5 см. Изменения неустойчивого полюса моделей с использованием филаментов и мод показано на рис. 5. При этом относительное

изменение неустойчивого полюса меньше для моделей с использованием филаментов.

5. Заключение

Модели, полученные представленным в докладе методом, планируется применять на токамаке Глобус-М. Сейчас ведется разработка регуляторов положения, тока и формы плазмы на основе этих моделей. Алгоритмы, позволяющие восстанавливать равновесие плазмы, будут в дальнейшем реализованы в темпе наблюдений.

Литература

1. ЗАЙЦЕВ Ф. С. *Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы* / Москва, МАКС Пресс, 2005
2. ЗОТОВ И. В., ПЕРСИЯНОВ И. С., СЫЧУГОВ Д. Ю. *Контроль границы плазмы в токамаке в режиме реального времени* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. – 2004. – вып. 4. – С. 44–54.
3. ARIOLA M., PIRONTI A. *Magnetic control of tokamak plasmas* / Springer-Verlag, 2008.
4. BEGHI A., CENEDESE A. *Advances in real-time plasma boundary reconstruction: from the gap description to a deformable model approach* // IEEE Control Systems. – 2005. – vol. 25. – P. 44–64.
5. FORSYTHE G. E., MALCOLM M. A., MOLER C. B. *Computer methods for mathematical computations* / Englewood Cliffs, NJ, 1977.
6. HOFMANN F., TONETTI G. *Fast identification of plasma boundary and X-points in elongated tokamaks* // Nuclear Fusion. – 1988. – vol. 28. – P. 519–522.
7. LAO L. L., JOHN H. ST., STAMBAUGH R. D., KELLMAN A. G., PREIFFER W. *Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks* // Nuclear Fusion. – 1985. – vol. 25. – P. 1611–1622.

8. LAZARUS E. A., LISTER J. B., NEILSON G. H. *Control of the vertical instability in tokamaks* // Nuclear Fusion. – 1990. – vol. 30. – P. 111–141.
9. MITRISHKIN Y.V., DOKUKA V.N., KHAYRUTDINOV R.R. *Linearization of ITER plasma equilibrium model on DINA code* // Proc. 32nd EPS Plasma Physics Conference, Tarragona, Spain, ID P5.080, June 2005.
10. PIRONTI A., WALKER M. *Fusion, tokamaks, and plasma control* // IEEE Control Systems. – 2005. – vol. 25. – P. 30–43.
11. SKOGESTAD S., POSTLETHWAITE I. *Multivariable feedback control* / / 2-nd ed. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2005.
12. SWAIN D. W., NEILSON G. H. *An efficient technique for magnetic analysis of noncircular, high beta tokamak equilibria* // Nuclear Fusion. – 1982. – vol. 22. – P. 1015–1030.
13. WALKER M. L., HUMPHREYS D. A. *A multivariable analysis of the plasma vertical instability in tokamaks* // in proc. The 45st IEEE CDC., – 2006. – P. 2213–2219.
14. WESSON J. *Tokamaks* / 2-nd ed. – Clarendon press, Oxford, 1997.

PICARD ITERATION METHOD OF EQUILIBRIUM RECONSTRUCTION AND CONSTRUCTION OF LINEAR DYNAMIC MODELS FOR TOKAMAK PLASMA

Pavel Korenev, Moscow State University, Moscow, Faculty of physics, student (pkorenev92@mail.ru).

Abstract: A dynamical model of tokamak-plasma system is required in order to effectively control plasma in the tokamak. The problem is complicated by high temperature in the tokamak which makes impossible to directly measure the plasma state. The paper presents iterative method of plasma current and poloidal flux distributions reconstruction on the base of magnetic diagnostics measurements and the method of further linear model construction with obtained distributions. The problem can be considered as an identification problem where one must find a model of the system by its outputs and inputs. The methods employed in the paper are based on the

basic physical laws of electric circuits' dynamic; this approach is known as «first principle equations» abroad.

Keywords: Plasma, tokamak, equilibrium reconstruction, linear models, identification.