

УДК 519.21 + 519.71
ББК 22.171

УПРАВЛЕНИЕ ВЫХОДНЫМИ ПОТОКАМИ ПРИОРИТЕТНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С УПРЕЖДЕНИЕМ¹

Пройдакова Е.В.²

(Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород)

Статья является продолжением цикла работ, посвященных изучению вероятностных свойств выходных потоков неклассических систем массового обслуживания. В работе рассматривается система управления конфликтными потоками требований с приоритетным направлением и упреждением. С помощью кибернетического подхода построена математическая модель выходных потоков системы в виде случайной пятимерной векторной последовательности. Проведено аналитическое исследование данной системы. Поставлен кибернетический эксперимент, позволяющий получить численные оценки некоторых параметров функционирования приоритетной системы и ее выходных потоков, а также решить задачу оптимизации управления.

Ключевые слова: выходной поток, управляющая система массового обслуживания, приоритетное обслуживание с упреждением, кибернетический подход, нелокальное описание, однородная векторная марковская последовательность.

¹ Работа выполнена в рамках госбюджетной темы Н-040 "Математическое моделирование и создание новых методов анализа эволюционных систем и систем оптимизации".

² Екатерина Вадимовна Пройдакова, кандидат физико-математических наук, доцент (rev_1@mail.ru).

Введение

Одним из актуальных направлений развития теории массового обслуживания и ее приложений является исследование алгоритмов управления потоками требований в системах с переменной структурой. Именно такие системы описывают поведение сложных процессов обслуживания с управлением в том числе и в условиях воздействия случайных факторов [1]. Встречающиеся в жизни системы с переменной структурой очень разнообразны. Во многих реальных задачах действует система массового обслуживания с преимуществом, когда на обработку поступает несколько потоков требований, обладающих определенным приоритетом.

С другой стороны, в современной теории массового обслуживания все больше внимания уделяется изучению свойств выходных потоков. Это в первую очередь связано с широким применением задач и методов теории массового обслуживания в организации производства и при создании сложных информационных систем. Как правило, такие системы имеют разветвленную структуру и состоят из двух и более подсистем, объединенных некоторым образом. Если в такой структуре имеется последовательное соединение, то выходной поток одной подсистемы является входным для другой. В этом случае возникает проблема исследования вероятностных распределений выходного потока подсистемы. Первые результаты в области выходных потоков были получены в 60-е годы XX века П.Дж. Берком, Дж.В. Коэном, Е. Рейчем и П.Д. Финчем. Данные результаты касались только простейших систем, то есть одноканальных систем обслуживания с неограниченной очередью, пуассоновским входным потоком и показательным законом обслуживания требований. В нашей стране выходными потоками в разное время занимались Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, Г.Ш. Цициашвили, И.И. Ежов, В.Ф. Каданков. В своих работах они рассматривали одноканальные системы с некоторыми усложнениями, касающимися вида входного потока, дисциплины формирования очереди и механизма обслуживания. Выходной поток, как правило, задавался ана-

логично входному, для этого использовался одного из следующих эквивалентных способов:

1) определялся процесс $\{\bar{\xi}(t); t \geq 0\}$, где случайная величина $\bar{\xi}(t)$ при $t > 0$ характеризовала число заявок, обслуженных системой за время $[0, t)$ и $\bar{\xi}(0) = 0$;

2) задавалась последовательность $\{(\tau'_i, \bar{\xi}'_i); i \geq 1\}$, в которой через случайные величины τ'_i и $\bar{\xi}'_i$ обозначались соответственно i -й момент появления требований на выходе и число требований обслуженных системой в этот момент времени.

Если для описания выходного потока использовать один из предложенных способов, то в общем случае не удастся найти конечномерные распределения процесса. Почти очевидно, что выходной поток существенно зависит от системы массового обслуживания, в которой он формируется. Следовательно, в описание выходного потока необходимо включать некоторые элементы самой системы. Более того, целесообразно следить не за отдельным требованием, а за некоторой случайной группой заявок, получая нелокальное описание выходного потока требований [2].

1. Описание кибернетического подхода

Классические методы построения и изучения математических моделей реальных систем обслуживания в основном исчерпываются двумя подходами. Первый из них основан на классических работах А.К. Эрланга, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, К. Пальма, Ф. Поллачека, Д.Дж. Кендалла, Б.В. Гнеденко и др. Данный подход в значительной степени является описательным и всегда предполагает формальное задание таких составляющих элементов системы, как входной поток, обслуживающее устройство, дисциплина формирования очереди и структура системы. Причем описание дисциплины очереди и структуры системы дается исключительно на содержательном уровне. Второй подход связан с исследованием А.А. Боровкова по созданию общих асимптотических методов анализа в теории массового обслуживания, в том числе доказательства предельных теорем. Упомянутые подходы смотрят на процесс изучения систем управления с

позиции «черного ящика». Достижимая при их применении математическая общность результатов, как правило, не дает возможности получения конечномерных распределений для случайного процесса, описывающего поведение реальной системы. В данной работе при построении, анализе и оптимизации математической модели управляющей системы обслуживания и ее выходных потоков использовался так называемый «кибернетический подход», методологически разработанный А.А. Ляпуновым и С.В. Яблонским [3]. При таком подходе считается, что на систему целесообразно смотреть с точки зрения общего понятия управляющей системы, а не с позиции «черного ящика». В основе кибернетического подхода лежат следующие положения:

- 1) принцип дискретности актов функционирования системы во времени τ_i , $i \geq 0$, где случайный процесс $\{\tau_i; i \geq 0\}$ задает на $[0, \infty)$ шкалу тактов времени работы управляющей системы;
- 2) принцип нелокальности в описании строения системы;
- 3) принцип совместного рассмотрения блочного строения управляющей системы и ее функционирования во времени.

Эти принципы позволяют выделить схему, информацию, координаты и функцию управляющей системы обслуживания. Для схемы определяют следующие её составляющие блоки: внешняя среда, входные и выходные полюсы, внешняя память, внутренняя память, устройство по переработке информации внешней и внутренней памяти. Некоторые из перечисленных блоков конкретная схема может не включать. Схема управляющей системы обслуживания отражает её скелетное строение. Информация представляет собой состояния ячеек памяти в данный момент времени. Координаты описывают расположение блоков в схеме управляющей системы. Функция указывает действие, которое система может совершить, переходя к следующему дискретному моменту времени. Также вводится понятие алгоритма управления состояниями составляющих блоков схемы. При применении кибернетического подхода необходимо кодировать информацию или, что то же самое, осуществить математическое описание составляющих блоков схемы управляющей системы.

2. Описание работы системы на содержательном уровне и применение кибернетического подхода

В работе изучается система массового обслуживания, которая является математической моделью управления с помощью автомата-светофора независимыми и конфликтными транспортными потоками $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ на пересечении m магистралей. Конфликтность означает, что обслуживание каждого из потоков происходит в непересекающиеся промежутки времени. Поступающие потоки делятся на три типа: Π_1 — малоинтенсивный поток; Π_2, \dots, Π_{m-1} — потоки средней интенсивности и Π_m — интенсивный поток. Только поток Π_1 обладает приоритетом. Это означает, что любая заявка по потоку Π_1 должна быть обслужена как можно быстрее, но не прерывая обслуживания других требований. Под обслуживанием машин понимается их переезд через перекресток. У каждого из m потоков есть основной этап обслуживания и этап переналадки, за счет которых разрешается проблема безопасности движения транспорта на перекрестке. Во время переналадки продолжает обслуживаться тот же поток, что и на предыдущем основном этапе, но уже с большей интенсивностью. Для интенсивного потока Π_m дополнительно введен еще один промежуток времени, в котором продолжается его обслуживание. Таким образом, обслуживающее устройство должно иметь $2m + 1$ состояние $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}, \Gamma^{(2m+1)}$, где $\Gamma^{(2j-1)}$ — состояние обслуживающего устройства, при котором пропускается только поток Π_j с интенсивностью $\mu_j > 0$; $\Gamma^{(2j)}$ — состояние обслуживающего устройства, при котором пропускается только поток Π_j с интенсивностью $\mu'_j > \mu_j$; $\Gamma^{(2m+1)}$ — состояние обслуживающего устройства, при котором пропускается только поток Π_m с интенсивностью $\mu''_m > \mu_m$. Здесь μ_j (μ'_j) определяет среднее число заявок, обслуживающихся в единицу времени в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ ($\Gamma^{(2j)}$) соответственно, а μ''_m определяет среднее количество требований, обрабатываемых в единицу времени в состоянии $\Gamma^{(2m+1)}$. Длительности $T_1, T_2, \dots, T_{2m+1}$ состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m+1)}$ обслуживающего устройства являются управля-

ющими параметрами системы.

Входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ считаем пуассоновскими соответственно с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Интенсивность $\lambda_j, j = \overline{1, m}$ определяет среднее число заявок, поступивших к стоп-линии перекрестка за единицу времени. Для нашей системы $\lambda_1 \ll \lambda_m$. Стоит отметить, что для транспортных потоков при условии, что перекресток находится в начале транспортной магистрали и стоит хорошая погода, с большой достоверностью подтверждается движение машин по закону Пуассона. Особое положение закона Пуассона при аналитическом рассмотрении задач транспорта объясняется не только его простотой и адекватностью, но и тем, что многие ученые, такие как Ю.К. Беляев, Л. Брейман, Б.В. Гнеденко, Б.И. Григелинис, К. Пальм, А. Реньи, А.Я. Хинчин и др. достаточно полно изучили его свойства. Заявки, пришедшие в систему, или сразу поступают на обслуживание или образуют неограниченные очереди O_1, O_2, \dots, O_m . Из соответствующей очереди заявки выбираются на обслуживание группами. В качестве стратегий механизма обслуживания $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ выбраны экстремальные [2], поскольку они хорошо согласуются с реальными процессами на перекрестке. Потоки насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_m$ определяют выходные потоки системы при ее максимальной загрузке и эффективном функционировании, считаем их независимыми. Кибернетический подход позволил выделить следующие составляющие блоки схемы управляющей системы: 1) входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ — первый тип входных полюсов; 2) потоки насыщения $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_m$ — второй тип входных полюсов; 3) очереди O_1, O_2, \dots, O_m — внешняя память; 4) стратегии механизма обслуживания $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ — блок по переработке информации внешней памяти; 5) обслуживающее устройство с состояниями $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m+1)}$ — внутренняя память, алгоритм смены этих состояний — блок по переработке информации внутренней памяти; 6) выходные потоки системы $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \dots, \bar{\Pi}_m$ — выходные полюса.

Перечисленные составляющие блоки схемы управляющей системы представлены на рис. 1.

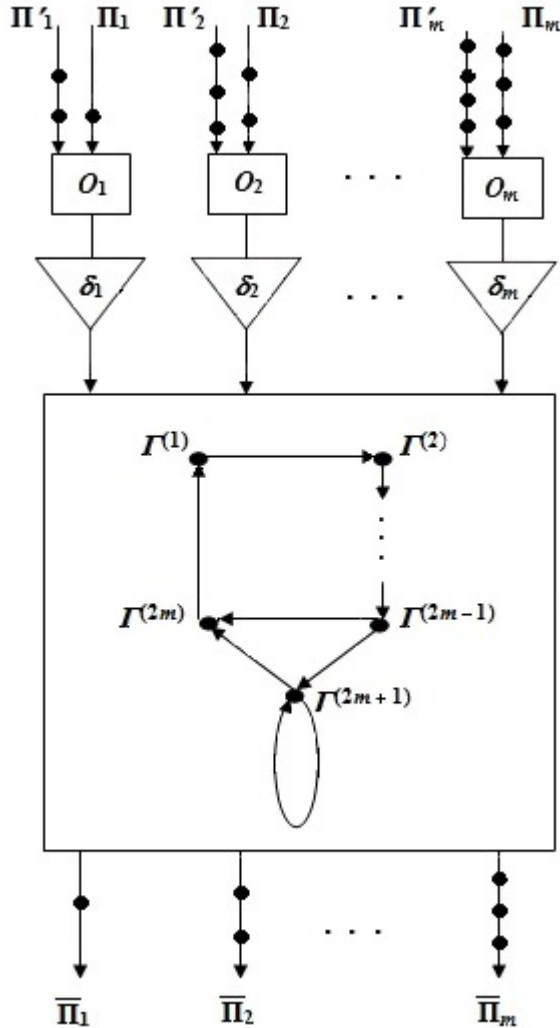


Рис. 1. Функциональная схема приоритетной управляющей системы обслуживания с упреждением

Набор состояний очередей в накопителях, состояний обслуживающего устройства, входных потоков, потоков насыщения и

потоков обслуженных требований полностью определяют информацию управляющей системы. Номера входных потоков, потоков насыщения, выходных потоков, накопителей, механизмов формирования очередей и номера состояний обслуживающего устройства задают координаты управляющей системы. Функция системы — это управление потоками (разрешение или запрещение начала обслуживания каждого из них) и непосредственно обслуживание неоднородных требований.

3. Математическая описание блоков схемы

В отличие от простейших классических случаев, рассматриваемая система не является одноканальной, обслуживание требований не подчиняется показательному закону, входные потоки обрабатываются в непересекающиеся промежутки времени, алгоритм смены состояний обслуживающего устройства зависит от очереди по приоритетному потоку Π_1 . В связи с этим функционирование системы в непрерывном времени является сложным векторным процессом, и тем более не является марковским процессом. Изучение таких характеристик системы как длина очереди и время ожидания обслуживания заявки по потоку, а также выходных потоков в непрерывном времени является трудноразрешимой задачей. Для решения данной проблемы и применялся кибернетический подход. Согласно положениям кибернетического подхода [3] управляющая система, которая реально функционирует в непрерывном времени, рассматривалась в специально подобранные дискретные моменты τ_i , $i = 0, 1, \dots$ или на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1})$. В связи с этим условимся, что величины τ_i , $i \geq 0$ являются моментами переключения состояний обслуживающего устройства. Пусть τ_0 — момент начала функционирования системы и он совпадает с некоторым моментом переключения светофора. Элементы τ_i случайны, поскольку значения $T_1, T_2, \dots, T_{2m+1}$ различны и можно задавать произвольные вероятности для состояний обслуживающего устройства в начальный момент времени τ_0 , а последовательность переключений состояний зависит от случайного поступления заявок по приоритетно-

му потоку Π_1 . Будем полагать, что $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$, $l'_j = [\mu'_j T_{2j}]$ и $l''_m = [\mu''_m T_{2m+1}]$, $l_j > l'_j$ и $l_m > l''_m$.

Определим при $j = \overline{1, m}$ и $i = 0, 1, \dots$ следующие случайные элементы:

1) $\eta_{j,i}$ — число заявок потока Π_j , пришедших за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\eta_{j,i} \in X = \{0, 1, \dots\}$;

2) $\xi_{j,i}$ — максимально возможное число требований, которое может обслужиться за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ по потоку Π_j , $\xi_{j,i} \in \{0, l'_j, l_j\}$ при $j = \overline{1, m-1}$, а $\xi_{m,i} \in \{0, l''_m, l'_m, l_m\}$;

3) Γ_i — состояние обслуживающего устройства на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m+1)}\}$;

4) $\varkappa_{j,i}$ — длина очереди по потоку Π_j в момент τ_i , $\varkappa_{j,i} \in X$;

5) $\bar{\xi}_{j,i}$ — число реально обслуженных заявок потока Π_j за промежуток времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\bar{\xi}_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \dots, l_j\}$;

6) $\bar{\xi}_{j,-1}$ — число реально обслуженных заявок потока Π_j за промежуток времени $[0, \tau_0)$, $\bar{\xi}_{j,-1} \in Y_j$.

Семейство случайных величин $\{\bar{\xi}_{j,i}; j = \overline{1, m}, i = 0, 1, \dots\}$ задает нелокальное описание выходных потоков. Заявки из очередей отбираются согласно экстремальной стратегии механизма обслуживания, то есть $\bar{\xi}_{j,i} = \min \{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}; \xi_{j,i}\}$. Входные потоки считаем пуассоновскими, поэтому справедливо равенство $P(\eta_{j,i} = u_j | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}) = (\lambda_j T_r)^{u_j} (u_j!)^{-1} \exp\{-\lambda_j T_r\} = \varphi_j(u_j, T_r)$, где $u_j \in X$, $r = \overline{1, 2m+1}$.

Введём в рассмотрение функции $f_j: \Gamma \rightarrow \{0, l''_m, l'_j, l_j\}$, $j = \overline{1, m}$ такие, что

$$f_j(\Gamma^{(r)}) = \begin{cases} l_j, r = 2j - 1, j = \overline{1, m}; \\ l'_j, r = 2j, j = \overline{1, m}; \\ l''_j, r = 2m + 1, j = m; \\ 0, r \in \{1, 2, \dots, 2m + 1\} \setminus \{2j - 1, 2j\}, j = \overline{1, m-1}; \\ 0, r \in \{1, 2, \dots, 2m - 2\}, j = m. \end{cases}$$

Тогда $\xi_{j,i}$ будут определяться как $\xi_{j,i} = f_j(\Gamma_i)$, где $j = \overline{1, m}$, $i = 0, 1, \dots$. Для описания приоритетного алгоритма с упреждением смены состояний обслуживающего устройства определим

при $\Gamma^{(r)} \in \Gamma$, $w_1 \in X$ и $u_1 \in X$ функцию $U(\Gamma^{(r)}, w_1, u_1)$:

$$U(\Gamma^{(r)}, w_1, u_1) = \begin{cases} \Gamma^{(1)}, r = 2m; \\ \Gamma^{(r+1)}, r = \overline{1, 2m-2}; \\ \Gamma^{(2m)}, r \in \{2m-1, 2m+1\}, w_1 = 0, u_1 > 0; \\ \Gamma^{(2m)}, r \in \{2m-1, 2m+1\}, w_1 > 0; \\ \Gamma^{(2m+1)}, r \in \{2m-1, 2m+1\}, w_1 = u_1 = 0. \end{cases}$$

Тогда $\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \eta_{1,i})$. Таким образом обслуживающее устройство имеет циклический алгоритм работы, но при этом его следующее состояние Γ_{i+1} зависит не только от предыдущего состояния Γ_i , а также и от длины очереди и числа заявок, поступивших по приоритетному потоку Π_1 . В силу независимости входных потоков и потоков насыщения, изучалась только векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$, определяющая поведение системы по приоритетному Π_1 и интенсивному Π_m потокам. Данная последовательность также определяет и нелокальное описание выходных потоков по этим направлениям, причем за выходной поток отвечают компоненты $\bar{\xi}_{1,i}$ и $\bar{\xi}_{m,i}$, а $\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{m,i}$ играют роль меток. Считаем, что в момент τ_0 задано распределение вектора $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{m,0}, \bar{\xi}_{1,-1}, \bar{\xi}_{m,-1})$, то есть при $\Gamma^{(s)} \in \Gamma$, $x_1 \in X$, $x_m \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_m \in Y_m$ известны вероятности $P(\Gamma_0 = \Gamma^{(s)}, \varkappa_{1,0} = x_1, \varkappa_{m,0} = x_m, \bar{\xi}_{1,-1} = y_1, \bar{\xi}_{m,-1} = y_m)$.

4. Результаты аналитического исследования

Распределение случайных величин $\eta_{j,i}$, $\xi_{1,i-1}$ существенно зависит от выбора вектора $b = (T_1, T_2, \dots, T_{2m+1})$, где $b \in B = \{(T_1, T_2, \dots, T_{2m+1}) : T_1 > 0, T_2 > 0, \dots, T_{2m+1} > 0\}$. Вектор b является управлением конфликтными потоками в приоритетной системе обслуживания с упреждением.

Лемма 1 (см. [4, с. 6]). *Для векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}), i \geq 0\}$ справедливо рекуррентное соотношение: $(\Gamma_{i+1}, \varkappa_{1,i+1}, \varkappa_{m,i+1}, \bar{\xi}_{1,i}, \bar{\xi}_{m,i}) = (U(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \eta_{1,i}), \max\{0, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, \max\{0, \varkappa_{m,i} + \eta_{m,i} - \xi_{m,i}\}, \min\{\varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}, \xi_{1,i}\}, \min\{\varkappa_{m,i} + \eta_{m,i}, \xi_{m,i}\})$.*

Лемма 2 (см. [5, с. 193]). При заданном распределении начального вектора $(\Gamma_0, \varkappa_{1,0}, \varkappa_{m,0}, \bar{\xi}_{1,-1}, \bar{\xi}_{m,-1})$ последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ является однородной марковской цепью.

Примем следующие обозначения для вероятностей: $P(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(s)}, \varkappa_{1,i+1} = x_1, \varkappa_{m,i+1} = x_m, \bar{\xi}_{1,i} = y_1, \bar{\xi}_{m,i} = y_m) = Q_{i+1}(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$. В работе [4] были получены рекуррентные соотношения для одномерного распределения $\{Q_i(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m): \Gamma^{(s)} \in \Gamma, x_1, x_m \in X, y_1 \in Y_1, y_m \in Y_m\}$ последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ и доказано, что для них выполняется условие нормировки $\sum_{s=1}^{2m+1} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} Q_{i+1}(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1$.

Лемма 3 (см. [4, с. 8]). Пространство E всех возможных состояний однородной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ распадается на незамкнутое множество E_0 несущественных состояний и на минимальное замкнутое множество E_1 существенных сообщающихся аperiodических состояний.

Несущественные состояния могут возникнуть за счет выбора начального распределения. Марковская цепь выходит из таких состояний за один шаг и больше никогда в эти состояния не возвращается. Этот факт позволяет в дальнейшем рассматривать только замкнутое множество E_1 существенных состояний, в частности задавать на нем начальное распределение.

Лемма 4 (см. [4, с. 18]). Для векторной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ при любом начальном распределении либо $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0$ для всех $(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E_1$ и в исследуемой управляющей системе не существует стационарного движения, либо $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = Q^*(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \geq 0$, $\sum_{(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E_1} Q^*(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1$ и в системе существует стационарное движение.

В работе [4] были получены рекуррентные соотношения для производящих функций за такт работы системы $\Phi_i(\Gamma^{(s)}, y_1, y_m, z_1, z_m) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m}$, $i = 0, 1, \dots, \Gamma^{(s)} \in \Gamma, y_1 \in Y_1, y_m \in Y_m, |z_1| \leq 1, |z_m| \leq 1$ и за период $T = \sum_{r=1}^{2m} T_r$ работы системы $\Phi_{2mi}(\Gamma^{(s)}, y_1, y_m, z_1, z_m) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(s)}, x_1, x_m, y_1, y_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m}$, $i = 0, 1, \dots, \Gamma^{(s)} \in \Gamma, y_1 \in Y_1, y_m \in Y_m, |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$. На основании полученных соотношений были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если справедливо $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 \geq 0$, то имеет место предельное равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0$ для всех $(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E_1$.

Теорема 2. Пусть выполнены неравенства: $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 < 0$, $\lambda_m T_{2m+1} < l''_m$, $\lambda_1 T (l_1 + l'_1)^{-1} - \lambda_1 T_{2m+1} (l_m + l'_m) ((l_1 + l'_1) l''_m)^{-1} + \lambda_m T_{2m+1} (l''_m)^{-1} > 1$. Тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0$ для любого состояния $(\Gamma^{(r)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E_1$.

Теорема 3. Для существования стационарного распределения однородной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{m,i}, \bar{\xi}_{1,i-1}, \bar{\xi}_{m,i-1}); i \geq 0\}$ достаточно выполнения двух неравенств: $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 < 0$, $\lambda_m T - l_m - l'_m < 0$.

5. Кибернетический эксперимент

Кибернетический подход позволил выделить блоки схемы управляющей системы и найти функциональные связи между этими блоками. Полученные результаты дали возможность поставить кибернетический эксперимент (применить метод имитационного моделирования) для численного исследования системы. Для приоритетной управляющей системы с упреждением не удастся аналитически найти ряд характеристик, в том числе вероятностные законы распределения выходных потоков. Чтобы получить их численные оценки, а также найти квазиоптимальные

параметры функционирования системы, была создана соответствующая имитационная модель. В качестве примера рассмотрим случай $m = 2$. При моделировании учитывались условия существования стационарного режима функционирования системы $\lambda_1 T - l_1 - l'_1 < 0$ и $\lambda_2 T - l_2 - l'_2 < 0$, где $T = \sum_{s=1}^4 T_s$.

В начале работы имитационной модели задавались следующие параметры: 1) длительности T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5 состояний обслуживающего устройства; 2) интенсивности λ_1 и λ_2 поступления требований; 3) интенсивности $\mu_1, \mu'_1, \mu_2, \mu'_2$ и μ''_2 обслуживания требований. Также учитывались физические ограничения на некоторые параметры: $T_2 \geq 4, T_4 \geq 4, T_5 \geq 4, T_1 \geq T_2, T_3 \geq T_4, T \geq 60, l_1 > l'_1, l_2 > l'_2$ и $l_2 > l''_2$.

Моделирование включало в себя два этапа. На первом этапе определялся момент перехода системы в квазистационарный режим функционирования. Для определения начала квазистационарного режима при заданном наборе входных параметров одновременно наблюдались невозмущенная и возмущенная системы. В начальный момент времени очереди первой (невозмущенной) системы были пусты, а длины очередей второй (возмущенной) системы были отличны от нуля. На i -м шаге вычислялись значения $\widetilde{M\gamma_{j,i}^0}$ и $\widetilde{M\gamma_{j,i}^+}$, $j = 1, 2$ оценок среднего времени ожидания начала обслуживания требования по потокам в первой и второй системах. Затем определялись значения γ_i^0 и γ_i^+ оценок среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки в системах, где $\gamma_i^0 = (\lambda_1 \widetilde{M\gamma_{1,i}^0} + \lambda_2 \widetilde{M\gamma_{2,i}^0}) / (\lambda_1 + \lambda_2)$, $\gamma_i^+ = (\lambda_1 \widetilde{M\gamma_{1,i}^+} + \lambda_2 \widetilde{M\gamma_{2,i}^+}) / (\lambda_1 + \lambda_2)$. При выполнении условия $|\gamma_i^0 - \gamma_i^+| \geq \delta \gamma_i^0$, $\delta \in (0, 1)$ переходили к $(i + 1)$ -му шагу. В противном случае, когда $|\gamma_i^0 - \gamma_i^+| < \delta \gamma_i^0$, считали, что система достигла квазистационарного режима и фиксировали время наблюдения, которое и являлось оценкой времени переходного процесса. При моделировании использовали $\delta = 0,05$.

На втором этапе моделировалась работа системы в квазистационарном режиме для нахождения численных оценок характе-

ристик системы. Были найдены: 1) оценки $\widetilde{M\gamma_1}$ и $\widetilde{M\gamma_2}$ среднего времени ожидания начала обслуживания требования по первому и второму потокам; 2) оценка γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольного требования; 3) оценки $\widetilde{M\kappa_1}$ и $\widetilde{M\kappa_2}$ средней очереди перед зеленым светом по первому и второму потокам. Здесь $\varkappa_{j,i} \equiv \kappa_j$, $j = 1, 2$ определяет очередь в квазистационарном режиме по потоку Π_j перед переходом обслуживающего устройства в состояние $\Gamma^{(2j-1)}$. Для случайной величины $\bar{\xi}_{j,i-1} \equiv \theta_j$, которая при $j = 1, 2$ определяет в квазистационарном режиме число обслуженных заявок за время, пока обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$, вычислялись статистический ряд распределения, выборочное математическое ожидание $\widetilde{M(\theta_j)}$ и выборочная дисперсия $\widetilde{D(\theta_j)}$. Методом сокращенного перебора решалась задача оптимизации по критерию $\gamma^* \rightarrow \min$. В таблице 1 приведены фрагменты результатов, полученных при фиксированных значениях $T_2 = T_4 = 4, T_5 = 5, \mu_1 = \mu_2 = 1, \mu'_1 = \mu'_2 = 1,25, \mu''_2 = 1,4, \lambda_1 = 0,1$ и $\lambda_2 = 0,4$.

Таблица 1. Значения оценок $\widetilde{M\gamma_1}$, $\widetilde{M\gamma_2}$, γ^* , $\widetilde{M\kappa_1}$, $\widetilde{M\kappa_2}$ для различных длин периода T

T	T_1	T_3	$\widetilde{M\gamma_1}$	$\widetilde{M\gamma_2}$	γ^*	$\widetilde{M\kappa_1}$	$\widetilde{M\kappa_2}$
120	12	100	61,36	2,02	13,89	11,84	6,21
	16	96	48,65	2,89	12,05	10,34	7,80
	20	92	38,79	7,16	13,49	9,31	12,49
100	12	80	49,55	1,68	11,25	9,39	5,03
	16	76	38,63	3,37	10,42	8,41	7,60
	20	72	29,72	7,46	11,92	7,23	11,74
80	8	64	38,56	1,61	9,03	7,57	4,39
	12	60	29,82	3,41	8,68	6,515	6,93
	18	54	20,96	7,72	10,37	5,49	10,52
60	6	46	24,45	1,96	6,46	5,28	4,24
	12	40	18,32	4,36	7,15	4,51	6,74
	16	36	15,26	6,54	8,29	4,16	8,55

Из таблицы 1 следует, что при указанных параметрах ми-

нимум оценки γ^* равен 6,46 и он достигается при значениях $T = 60$, $T_1 = 6$, $T_3 = 46$, которые являются квазиоптимальными. При этих же значениях для первого выходного потока выборочное математическое ожидание $\widetilde{M}(\theta_1) = 4,94$ и выборочная дисперсия $\widetilde{D}(\theta_1) = 1,84$, а для второго потока $\widetilde{M}(\theta_2) = 22,26$ и $\widetilde{D}(\theta_2) = 21,23$. В таблицах 2 и 3 приведены статистические ряды распределения числа требований потока Π_j , $j = 1, 2$, обслуженных в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$. Данные ряды получены при квазиоптимальных параметрах, здесь y_j — число обслуженных требований, а p_j^* — соответствующие статистические вероятности.

Таблица 2. Статистический ряд распределения числа требований первого потока, обслуженных в состоянии $\Gamma^{(1)}$

y_1	0	1	2	3	4	5	6
p_1^*	0	0,022	0,046	0,102	0,151	0,158	0,521

Таблица 3. Статистический ряд распределения числа машин, обслуженных по второму направлению за время, пока светофор находился в состоянии $\Gamma^{(3)}$

y_1	0	...	10	11	12	13	14
p_1^*	0	...	0	0,003	0,006	0,014	0,022
y_1	15	16	17	18	19	20	21
p_1^*	0,019	0,038	0,070	0,051	0,069	0,056	0,082
y_1	22	23	24	25	26	27	28
p_1^*	0,080	0,087	0,084	0,075	0,074	0,049	0,040
y_1	29	30	31	32	33	34	35
p_1^*	0,023	0,016	0,012	0,011	0,007	0,002	0,004
y_1	36	37	38	39	40	...	46
p_1^*	0,001	0,002	0,002	0,001	0	...	0

Определим загрузку системы по j -му потоку следующим образом: $\rho_j = \lambda_j T (\mu_j T_{2j-1} + \mu'_j T_{2j})^{-1}$, $j = 1, 2$. Общая загрузка системы $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Для различных значений интенсивностей входных потоков были получены усредненные по 10 различ-

ным реализациям процесса оценки γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольного требования (рис. 2).

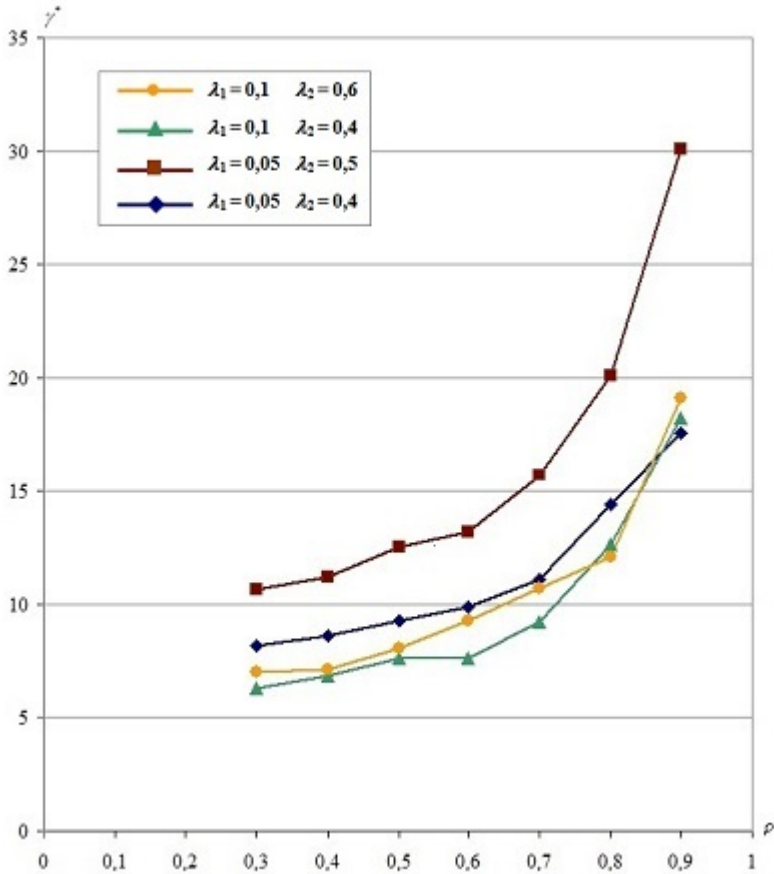


Рис. 2. Изменение оценки γ^* в зависимости от загрузки ρ

Полученные результаты показывают, что с ростом загрузки системы оценка γ^* среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки возрастает по нелинейному закону. Но при этом γ^* уменьшается при сокращении периода T работы

обслуживающего устройства. С помощью построенной имитационной модели также изучался вопрос о продолжительности переходного процесса в системе после некоторого начального возмущения в виде задания размеров начальных очередей по каждому входному потоку. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что с увеличением загрузки ρ продолжительность переходного процесса в системе возрастает и наблюдается резкое ее увеличение при больших ($\rho > 0,8$) загрузках системы.

Целесообразность применения алгоритма с упреждением обоснована в ряде работ, например [2]. Данный алгоритм широко применяется для управления интенсивным потоком транспорта на основной магистрали и приоритетным малоинтенсивным потоком пешеходов, когда появление пешехода фиксируется установленной на перекрестке кнопкой вызова. Результаты имитационного моделирования подтверждают также тот факт, что приоритетный алгоритм с упреждением дает меньшее значение оценки среднего времени ожидания начала обслуживания произвольного требования, чем циклический алгоритм [6] то есть относительно критерия $\gamma^* \rightarrow \min$ является более выгодным.

6. Заключение

В статье демонстрируется эффективность применения кибернетического подхода при построении математической модели и изучении вероятностных свойств выходных полюсов приоритетной управляющей системы конфликтного обслуживания. С помощью указанного подхода получено математическое описание выходных полюсов системы в виде пятимерной векторной марковской последовательности со счетным числом состояний, включающей такие элементы самой системы, как очереди и состояния обслуживающего устройства. Для построенной последовательности приводятся результаты аналитического исследования, в том числе предельные теоремы, позволяющие найти ее конечномерные распределения и существенно сократить время поиска квазиоптимального управления. В работе также поставлен кибернетический эксперимент, обеспечивающий возмож-

ность проведения численного исследования системы и ее выходных потоков. Предложен алгоритм поиска квазиоптимальных параметров управления по критерию минимизации среднего времени ожидания начала обслуживания произвольного требования, приведены новые результаты численного исследования системы. Ранее, автором были получены подобные результаты для циклической управляющей системы [7]. Но по сравнению с циклическим случаем, здесь предлагается более сложный алгоритм смены состояний внутренней памяти, который использует информацию о состоянии внешней памяти.

Литература

1. ЗОРИН А.В., ФЕДОТКИН М.А. *Анализ и оптимизация процессов с разделением времени, функционирующих в случайной среде* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математика.- 2004. - № 1. - С. 92-103.
2. ФЕДОТКИН М.А. *Процессы обслуживания и управляющие системы* // Математические вопросы кибернетики. - 1996. - Вып.6. - С. 51-70.
3. ЛЯПУНОВ А.А., ЯБЛОНСКИЙ С.В. *Теоретические проблемы кибернетики* // Проблемы кибернетики. М.: Физматгиз. - 1963. - С. 5-22.
4. ПРОЙДАКОВА Е.В. *Анализ свойств выходных потоков в системе массового обслуживания с приоритетным направлением*. Нижний Новгород. - 2006. Деп. в ВИНТИ 21.12.2006. № 1602-B2006.
5. ПРОЙДАКОВА Е.В. *Исследование вероятностных свойств выходных потоков в системе управления с приоритетным направлением* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. - 2012. - № 5(2). - С. 190-196.
6. ПРОЙДАКОВА Е.В. *Численное исследование циклической и приоритетной систем управления конфликтными потоками требований* // Вестник Нижегородского универ-

ситета им. Н.И. Лобачевского. - 2013. - № 3(1). - С. 199-205.

7. ПРОЙДАКОВА Е.В., ФЕДОТКИН М.А. *Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками* // Автоматика и телемеханика. - № 06. - 2008.- С. 96-107.

CONTROL OF OUTPUT FLOWS OF PRIORITY SYSTEM SERVICE WITH FEEDFORWARD

Ekaterina Proidakova, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Candidate of physical and mathematical sciences, docent (pev_1@mail.ru).

Abstract: This paper is a continuation of the series of works, devoted to the study of probabilistic properties of output flows of nonclassical queuing systems. Here we consider the system of control of conflict flow requirements with priority and proactivity. Using cybernetic approach mathematical model of the output system flows in the form of a five-dimensional random vector sequence is constructed and investigated. This system is also analyzed analytically. In order to obtain numerical estimates of certain functioning parameters of the studied system and its output flows and to solve the problem of management optimization, the cybernetic experiment is conducted.

Keywords: output flow, control queuing system, priority service proactively cybernetic approach, nonlocal description, homogeneous Markov vector sequence.