

УДК 681.5.011 + 519.853.4  
ББК 32.965 + 22.18

## ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОИСКА В ПРЯМЫХ И ДВОЙСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ<sup>1</sup>

Поздяев В. В.<sup>2</sup>

*(Арзамасский политехнический институт (филиал)  
Нижегородского государственного технического университета  
им. Р. Е. Алексеева, Арзамас)*

*Рассмотрены многомерные задачи оптимизации с полиномиальной целевой функцией и ограничениями в виде полиномиальных скалярных или матричных неравенств, а также основанный на теории моментов метод их решения. Продемонстрирована трансформация последнего в альтернативную схему, занимающую промежуточное положение между локальными и глобальными методами и при этом имеющую по сравнению с последними значительно меньшую вычислительную сложность. В базовой версии данная схема применяется к одномерным полиномиальным задачам в сочетании с прямым методом внутренней точки, но также обобщается на неполиномиальные задачи, многомерные задачи и прямой-двойственный метод внутренней точки.*

Ключевые слова: нелинейное программирование, матричные неравенства, полиномиальные неравенства, теория моментов.

### **Введение**

Одним из важнейших инструментов математической теории управления являются системы матричных неравенств. Наиболее

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 2.1748.2014/К и при частичной поддержке РФФИ (грант № 13-08-1092\_а).

<sup>2</sup> Владимир Васильевич Поздяев, кандидат физико-математических наук, доцент (vpozdyayev@gmail.com).

изученные из них — линейные матричные неравенства (ЛМН) — зачастую являются своего рода «конечной точкой»: сведение задачи к представлению в форме ЛМН обычно интерпретируется как ее решение. Возможность этого обусловлена в первую очередь выпуклостью описываемых данными неравенствами множеств.

Хотя многие задачи теории управления приводятся к форме ЛМН, возможно это далеко не всегда даже для концептуально несложных задач. Примером такой задачи, одновременно фундаментальной и простой в постановке, является стабилизация линейной системы по выходу, сводящаяся к системе билинейных матричных неравенств [9].

Задачи, представимые в виде нелинейных, но выпуклых матричных неравенств, все еще могут относительно эффективно решаться с помощью методов поиска локальных экстремумов. Значительно сложнее решаются задачи, сводящиеся лишь к невыпуклым неравенствам. В отдельных частных случаях (таких, как задача о статической обратной связи по состоянию, динамической обратной связи по выходу без ограничения на порядок регулятора) были найдены подходы, позволяющие сделать задачу выпуклой и найти эквивалентные формулировки в терминах систем ЛМН; см., например, [3, 6]. Для других, не менее фундаментальных, задач, таких как проектирование ПИД-регулятора, одновременная стабилизация, стабилизация статической обратной связью по выходу, эквивалентные системы ЛМН неизвестны. В общем случае можно рассматривать две основные категории методов решения такого рода задач.

- Локальные методы. Относительно просты, но чувствительны к выбору начального приближения и не гарантируют сходимости в ряде важных случаев. В литературе описаны — и реализованы в виде программного обеспечения — различные варианты локальных методов для разных типов задач.
- Глобальные методы. Зачастую основаны на методе ветвей

и границ, но есть и иные варианты; в данной работе рассматривается подход на базе проблемы моментов. Требуют значительных вычислительных ресурсов. Важную роль здесь играет представление отдельных этапов решения задачи в виде ЛМН. Его стратегия может сильно влиять на эффективность метода, но, к сожалению, в общем случае здесь невозможно избежать той или иной разновидности комбинаторного взрыва. Как следствие, применимость данных методов нередко ограничена задачами относительно небольшого размера.

Следует отметить, что встречающиеся в теории управления задачи на основе естественного обобщения ЛМН — полиномиальных матричных неравенств (ПМН) — зачастую имеют невысокий порядок полиномов и не слишком сложный характер невыпуклости. Последнее условие подразумевает, что невыпуклость как таковая не приводит к наличию большого количества ложных локальных минимумов, сложному рельефу вспомогательных целевых функций и т. п. Такие задачи могут быть противопоставлены задачам с патологическим характером невыпуклости, например, задачам оптимизации на множестве битовых векторов. (Последние представимы в виде ПМН, поскольку условие  $x_i \in \{0; 1\}$  эквивалентно системе  $x_i \geq 0$ ;  $x_i \leq 1$ ;  $x_i(x_i - 1) \geq 0$ . В этом случае область поиска представляет собой дискретное множество из  $2^n$  точек.)

Таким образом, мы можем воспринимать невыпуклость задачи не как бинарный фактор, вынуждающий нас при его наличии в лучшем случае искать альтернативные формулировки задачи с более приемлемыми количественными характеристиками, а в худшем — смиряться с катастрофическим ростом объема вычислений, — а как неявную количественную характеристику, под которую подбираются параметры алгоритма поиска решения.

Далее мы будем рассматривать задачу нахождения глобальных экстремумов полиномиальной целевой функции на множе-

стве, заданном полиномиальными неравенствами (задача ПН):

$$(1) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_x f(x), \\ g_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

или полиномиальными матричными неравенствами (задача ПМН):

$$(2) \quad \begin{aligned} f^* &= \min f(x), \\ G_i(x) &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где  $f(x)$  и  $g_i(x)$  — (не обязательно выпуклые) полиномы,  $G_i(x)$  — матрицы, элементы которых являются полиномами от  $x$ , а знак неравенства в (2) понимается как требование положительной полуопределенности.

В работах [7, 4, 5] рассматривался метод решения таких задач, основанный на теории разложения полиномов в сумму квадратов и двойственной ей теории моментов. Данный результат относится к группе глобальных методов и обладает характерными недостатками, в первую очередь, склонностью к комбинаторному взрыву. Тем не менее, он может быть трансформирован к виду, значительно снижающему его вычислительную сложность, но сохраняющему ключевые особенности. Базовый набор такого рода трансформаций представлен в [1, 2].

В последующих параграфах изложены основные элементы исходного метода решения, а также его трансформированные версии для задач различной размерности в прямой и прямой-двойственной формах.

## 1. Базовый метод

Приведем основные положения базового метода решения задач ПН (1), опубликованного в [7].

Пусть  $b_r(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , — вектор, состоящий из одночленов, образующих базис пространства многочленов порядка не выше  $r$ :

$$b_r(x) = \left[ 1 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n \quad x_1^2 \quad x_1 x_2 \quad \dots \quad x_n^2 \quad \dots \quad x_1^r \quad \dots \quad x_n^r \right]^T,$$

а  $s_n(r) = C_{n+r}^r = \frac{(n+r)!}{n!r!}$  — его размерность. Каждому одночлену из  $b_r(x)$  поставим в соответствие вектор  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $\sum^i \alpha_i \leq r$  (далее будем записывать как  $\alpha \leq r$ ), показателей степеней  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; обозначим  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Для произвольного вектора  $p \in \mathbb{R}^{s_n(r)}$ , ассоциированного с пространством моментов  $x$  степени не выше  $r$ , будем индексировать его элементы двумя взаимозаменяемыми способами: по номеру элемента и по вектору показателей степеней; порядок элементов будем считать соответствующим структуре  $b_r(x)$ . Таким образом,  $p = [p_i]_{1 \leq i \leq s_n(r)} = [p_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha \leq r}$ , в том числе  $p_1 = p_{[0,0,\dots,0]}$ ,  $p_2 = p_{[1,0,\dots,0]}$  и т. д. Аналогичным образом будем индексировать строки и столбцы матриц там, где это применимо.

Рассмотрим некоторую (неизвестную) меру  $\mu$  и соответствующий ей вектор моментов  $y$ :

$$y = \int b_r(x) d\mu.$$

Пусть  $d_i = \lceil \frac{1}{2} \deg g_i(x) \rceil$ , а  $k$  удовлетворяет ограничениям  $2k \geq \deg f(x)$ ,  $k \geq d_i$ . Пусть  $f_\alpha$  — коэффициенты  $f(x)$  в базисе  $b_{2k}(x)$ , так что

$$\int f(x) d\mu = \int \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha x^\alpha d\mu = \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha.$$

ЛМН-релаксацией (1) называется задача

$$f^* = \min_y \sum_{\alpha \leq 2k} f_\alpha y_\alpha,$$

$$(3) \quad M_k(y) \geq 0,$$

$$M_{k-d_i}(g_i, y) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_{[0,0,\dots,0]} = 1,$$

где матрица моментов  $M_k(y)$  и локализирующие матрицы  $M_{k-d_i}(g_i, y)$  конструируются исходя из соотношений

$$M_k(y) = \int b_k(x) b_k(x)^T d\mu,$$

$$M_{k-d}(g, y) = \int b_{k-d}(x) b_{k-d}(x)^T g(x) d\mu.$$

В [7, 4] показана связь между величинами экстремумов данной задачи и (1), а также приведен алгоритм извлечения глобальных экстремумов (1) из решения (3) для достаточно больших значений  $k$ . Существует обобщение данного результата на задачи ПМН (2), отличающееся главным образом формой локализуемых матриц [5]:

$$M_{k-d}(G, y) = \int (b_{k-d}(x)b_{k-d}(x)^T) \otimes G(x) d\mu.$$

Упомянутая выше проблема комбинаторного взрыва вызвана тем, что в ЛМН-релаксациях пространством поиска является пространство не переменных исходной задачи, а их моментов соответствующих порядков. Ввиду этого автором был предложен подход, основанный на дальнейшей трансформации ЛМН-релаксаций с целью возвращения задачи в (расширенное) исходное пространство поиска.<sup>3</sup> Также была разработана вычислительная схема, позволяющая с минимальными изменениями применить к новой задаче метод внутренней точки, который может использоваться для решения ЛМН-релаксаций.

## 2. Эквивалентное направление поиска

Пусть задача ПМН

$$(4) \quad \begin{aligned} f^* &= \min_x f(x), \\ F_i(x) &\geq 0, \\ \nu_x^T x &= 1, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> Решением задачи (3) является вектор моментов  $\tau$ -атомной меры, сосредоточенной на множестве искомых глобальных экстремумов. Трансформированный метод ищет данные элементы («атомы») напрямую, чем и обусловлено название «атомная оптимизация».

может быть получена из задачи ЛМН

$$\begin{aligned}
 f^* &= \min_y c^T y, \\
 \bar{F}_i(y) &\geq 0, \\
 \nu_y^T y &= 1, \\
 y &\in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, m,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

с помощью замены (трансформации пространства поиска)  $y = y(x)$ .

Один из простейших методов решения задачи (5) представляет собой применение метода Ньютона к серии подзадач минимизации целевых функций вида

$$\bar{f}^{(i)}(y) = c^T y - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \log \det \bar{F}_j(y),$$

где  $\{\mu^{(i)}\}$  — монотонно невозрастающая сходящаяся к 0 вещественная последовательность. Направление спуска (с учетом ограничения в виде равенства) имеет вид

$$\Delta y(y^{(i)}) = H_y^- \left( -g_y + \frac{\nu_y^T H_y^- g_y}{\nu_y^T H_y^- \nu_y} \nu_y \right),$$

где  $H_y^-$  — произвольная обобщенная обратная к  $H_y$  матрица;

$$g_y = \nabla_y \bar{f}^{(i)}(y^{(i)}) = c - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_y \log \det \bar{F}_j(y^{(i)}),$$

$$H_y = \nabla_y^2 \bar{f}^{(i)}(y^{(i)}) = -\mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_y^2 \log \det \bar{F}_j(y^{(i)}),$$

а элементы слагаемых под знаками сумм могут быть найдены как

$$\begin{aligned}
 (\nabla_y \log \det \bar{F}(y))_i &= \text{tr} \left( \bar{F}^{-1}(y) \left( \frac{d}{dy_i} \bar{F}(y) \right) \right), \\
 (\nabla_y^2 \log \det \bar{F}(y))_{ij} &= -\text{tr} \left( \bar{F}^{-1}(y) \left( \frac{d}{dy_i} \bar{F}(y) \right) \bar{F}^{-1}(y) \left( \frac{d}{dy_j} \bar{F}(y) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Как показано в [1], такой алгоритм естественным образом переносится в пространство поиска задачи (4). При этом вспомогательные целевые функции имеют вид

$$(7) \quad f^{(i)}(x) = f(x) - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \log \det F_j(x),$$

а направление поиска, эквивалентное в малом направлению (6), равно (см. теоремы 1, 2, 3 в [1] и комментарии к ним)

$$(8) \quad \Delta x(x^{(i)}) = \tilde{H}_x^- \left( -g_x + \frac{\nu_x^T \tilde{H}_x^- g_x}{\nu_x^T \tilde{H}_x^- \nu_x} \nu_x \right).$$

Здесь  $\tilde{H}_x^-$  — произвольная обобщенная обратная к  $\tilde{H}_x$  матрица, а градиент  $g_x$  и модифицированный гессиан  $\tilde{H}_x$  находятся по формулам

$$g_x = \nabla_x f^{(i)}(x^{(i)}) = \nabla_x f(x^{(i)}) - \mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \nabla_x \log \det F_j(x^{(i)}),$$

$$\tilde{H}_x = \tilde{\nabla}_x^2 f^{(i)}(x^{(i)}) = -\mu^{(i)} \sum_{j=1}^m \tilde{\nabla}_x^2 \log \det F_j(x^{(i)}),$$

где  $\tilde{\nabla}_x^2 = \nabla_x^2 - \sum_i^i (\nabla_x^2 y_i) \frac{d}{dy_i}$ ; слагаемые под знаками сумм могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} (\nabla_x \log \det F(x))_i &= \text{tr} \left( F^{-1}(x) \left( \frac{d}{dx_i} F(x) \right) \right), \\ (\tilde{\nabla}_x^2 \log \det F(x))_{ij} &= -\text{tr} \left( F^{-1}(x) \left( \frac{d}{dx_i} F(x) \right) F^{-1}(x) \left( \frac{d}{dx_j} F(x) \right) \right). \end{aligned}$$

### 3. Прямая форма

Для решения задач ПН с  $n = 1$  в качестве трансформации пространства поиска достаточно взять переход из пространства атомов в пространство моментов  $y = y(z)$ , где  $z$  — вектор в пространстве атомов  $\mathbb{R}^{r \times (n+1)} = \mathbb{R}^{2r}$ , имеющий структуру

$$z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r & p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{bmatrix}^T,$$



где  $x_i \in \mathbb{R}$  — атомы,  $p_i \in (0; 1)$  — их веса; вектор моментов  $y$  имеет размерность  $s_1(2k) + 1 = 2k + 2$  и состоит из элементов вида

$$y_j = y_{[j-1]} = \sum_{i=1}^r p_i x_i^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, 2k + 2.$$

Старший,  $2k + 1$ -й, момент не входит ни в (3), ни в  $\Delta y$ , и нужен исключительно для равенства размерностей  $y$  и  $z$ , которое обеспечивается дополнительным соотношением  $r = k + 1$ .

Интерпретируя ЛМН-релаксацию рассматриваемой задачи как форму (5), мы можем записать эквивалентную задачу вида (4) без использования вектора моментов следующим образом:

(9)

$$\begin{aligned} f^* &= \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j), \\ F_0(z) &= \sum_{j=1}^r p_j (b_k(x_j) b_k(x_j)^T) \geq 0, \\ F_i(z) &= \sum_{j=1}^r p_j (b_{k-d_i}(x_j) b_{k-d_i}(x_j)^T) g_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \nu_z^T z &= \sum_{j=1}^r p_j = 1. \end{aligned}$$

Данная форма задачи напрямую подходит для решения модифицированным методом внутренней точки с вычислением эквивалентного ньютоновского направления поиска  $\Delta z(z^{(i)})$  по формуле (8).

Особенностью (9) является то, что формулировка данной задачи и расчет  $\Delta z(z^{(i)})$  не нуждаются в вычислении вектора моментов  $y$ . Вследствие этого, ограничения, связывающие порядки полиномов в задаче ПН с размером неравенств и количеством неизвестных в ЛМН-релаксации, а также количеством атомов в новом алгоритме оптимизации, более не являются неотъемлемой частью метода решения. Это позволяет брать в качестве целевой

функции и ограничений полиномы произвольного порядка и даже достаточно гладкие неполиномиальные функции. Таким образом, новый алгоритм естественным образом переносится на обобщение задачи ПН для более широкого класса функций. Конечно, гарантии нахождения глобального минимума для данной расширенной трактовки задачи и алгоритма оптимизации уже не будут иметь места: они по-прежнему будут относиться только к классу задач, для которых мы изначально строили ЛМН-релаксации.

При построении аналогичной трансформации для многомерных задач возникают дополнительные ограничения: необходимость использования минимально возможных значений  $k$  для избежания комбинаторного взрыва; желательность обобщения метода на количество атомов, не поддерживаемое напрямую исходным методом и т. д. Тем не менее, общая структура метода сохраняется, а «эквивалентная» задача, решаемая методом внутренней точки, может выглядеть следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}
 f^* &= \min_z \sum_{j=1}^r p_j f(x_j), \\
 \bar{F}_0(z) &= M_0'^T V \operatorname{diag}(p_1, p_2, \dots, p_r) V^T M_0' \geq 0, \\
 (10) \quad \bar{F}_i(z) &= \sum_{j=1}^r p_j G_i(x_j) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
 \bar{F}_{ij}(z) &= p_j G_i(x_j) + \lambda I \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r, \\
 \nu_z^T z &= \sum_{j=1}^r p_j = 1,
 \end{aligned}$$

где атомы  $x_i$  принадлежат  $\mathbb{R}^n$ ; вектор моментов имеет вид  $y = y(z) = \sum_{i=1}^r p_i b_k(x_i)$ ; пространство атомов состоит из векторов  $z = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_r^T \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_r]^T$ ;  $V \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r}$  — матрица,  $i$ -й столбец которой равен  $b_1(x_i)$  ( $n$ -мерная матрица Вандермонда порядка 1 для векторов  $x_i$ );  $M_0' = \operatorname{diag}([1], M_0) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times r}$ , где  $M_0 \in \mathbb{R}^{n \times (r-1)}$  — матрица, столбцы которой являются элементами произвольного базиса  $(r-1)$ -мерной гиперплоскости, проходящей через текущую конфигурацию атомов  $x_i$ ;  $\lambda \geq 0$  — параметр, значение которого изначально выбирается достаточно

большим для выполнения неравенств  $\bar{F}_{ij}(z^{(0)}) \geq 0$  и далее систематически уменьшается по мере нахождения промежуточных приближений  $z^{(i)}$ .

#### 4. Двойственная форма

Для задачи полуопределенного программирования

$$\begin{aligned} f^* &= \min_y f(y) = \min_y c^T y, \\ (11) \quad F(y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i y_i \geq 0, \\ y &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

двойственная задача имеет вид [10]

$$\begin{aligned} (12) \quad g^* &= \max_Z -\operatorname{tr} F_0 Z, \\ \operatorname{tr} F_i Z &= c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ Z &\geq 0, \\ Z &= Z^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \end{aligned}$$

где роль неизвестной играет матрица  $Z$ . Она также является задачей полуопределенного программирования и может быть представлена в виде, аналогичном (11).

Величина  $\eta = c^T y + \operatorname{tr} F_0 Z = \operatorname{tr} F(y) Z \geq 0$  известна как «интервал двойственности». Существуют результаты (см., например, [8], §4.2), показывающие, что во многих важных классах задач (в частности, при условии строгой разрешимости прямой и двойственной задач) достижимо равенство  $\eta = 0$ .

Прямая и двойственная задачи могут быть объединены:

$$\begin{aligned} (13) \quad h^* &= \min_{y, Z} c^T y + \operatorname{tr} F_0 Z = \min_{y, Z} \operatorname{tr} F(y) Z, \\ F(y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m F_i y_i \geq 0, \\ Z &\geq 0, \\ \operatorname{tr} F_i Z &= c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ y &\in \mathbb{R}^n, \quad Z = Z^T \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Методы решения таких задач генерируют последовательности точек  $(y^{(k)}, Z^{(k)})$ , в которых  $y^{(k)}$  являются субоптимальными реше-

ниями, дающими верхние границы  $f^* \leq c^T y^{(k)}$ , а  $Z^{(k)}$  — сертификатами, обеспечивающими нижние границы  $f^* \geq -\text{tr } F_0 Z^{(k)}$ . Степень субоптимальности каждого  $y^{(k)}$ , таким образом, не превышает соответствующего интервала двойственности:

$$c^T y^{(k)} - f^* \leq \eta^{(k)} = c^T y^{(k)} + \text{tr } F_0 Z^{(k)}.$$

Описанная в [1, 2] техника трансформации применима и к объединенной прямой-двойственной задаче. Рассмотрим простейший случай. Пусть векторы  $x$  и  $y(x)$  имеют одинаковую размерность, и матрица Якоби  $J = (\frac{dy_i}{dx_j})_{ij}$  невырождена. Учитывая, что  $c_i = \frac{d}{dy_i} f(y)$  и  $F_i = \frac{d}{dy_i} F(y)$ , и применяя трансформацию  $y = y(x)$ , запишем (13) в следующем виде:

$$\begin{aligned} h^* &= \min_{x, Z} \text{tr } F(y(x))Z, \\ F(y(x)) &\geq 0, \\ Z &\geq 0, \\ \nabla_x \text{tr } F(y(x))Z &= \nabla_x f(y(x)), \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad Z = Z^T \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Новая запись ограничений в виде равенств возможна в силу того, что ([1], лемма 2)

$$\nabla_x \text{tr } F(y(x))Z = J^T \nabla_y \text{tr } F(y)Z = J^T \nabla_y f(y) = \nabla_x f(y(x)).$$

В то время как в (13) коэффициенты и правая часть системы уравнений (относительно неизвестной  $Z$ )  $\nabla_y \text{tr } F(y)Z = \nabla_y f(y)$  являются константами, для системы  $\nabla_x \text{tr } F(y(x))Z = \nabla_x f(y(x))$  это уже не так. С другой стороны, поскольку  $J$  — невырожденная квадратная матрица, данные ограничения задают одно и то же подпространство, не зависящее от  $x$ .

Разложим  $Z$  по произвольному базису  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2}$ , пространства симметричных  $n \times n$ -матриц:  $Z = \sum_i G_i z_i$ . Оба варианта ограничений в виде равенств можно представить в виде  $A_y z = b_y$  и  $A_x z = b_x$ , где

$$A_x = \left[ \text{tr} \left( \frac{d}{dx_i} F(y(x)) \right) G_j \right]_{ij}, \quad A_y = \left[ \text{tr} \left( \frac{d}{dy_i} F(y) \right) G_j \right]_{ij},$$

$$b_x = \left[ \frac{d}{dx_i} f(y(x)) \right]_i, \quad b_y = \left[ \frac{d}{dy_i} f(y) \right]_i, \\ z = [z_i]_i.$$

Возвращаясь к (3), мы видим, что структура такой системы имеет существенное отличие: матрицы  $F(y)$  однородны по отношению к  $y$ , но при этом одна из неизвестных фактически исключена из задачи дополнительным ограничением  $y_{[0]} = 1$ . Ввиду этого первая строка  $A_y$  и первый элемент  $b_y$  (соответствующие  $y_{[0]}$ ) должны быть удалены. Для этого достаточно умножить слева  $A_y$  и  $b_y$  на  $\nu_y^\perp$  или, эквивалентно,  $A_x$  и  $b_x$  на  $\nu_x^\perp$  (где  $M^\perp$  — произвольная матрица максимального ранга такая, что  $M^\perp M = 0$ ):

$$(14) \quad \begin{aligned} h^* &= \min_{x,Z} \operatorname{tr} F(y(x))Z, \\ F(y(x)) &\geq 0, \\ Z &\geq 0, \\ \left( \nu_x^\perp A_x \right) z &= \nu_x^\perp b_x, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad Z = Z^T \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

В линейных ограничениях указанной формы задействованы все атомы, и попытка их обобщения на случай иного количества последних (что эквивалентно изменению размерности  $x$ ) неизбежно привела бы к изменению размерности соответствующего подпространства. Избежать этого позволяет альтернативная форма ограничений. В частности, можно показать, что для одномерных задач, когда  $x$  имеет структуру  $x = [x_1 \dots x_r \ p_1 \dots p_r]^T$ , система  $\nu_x^\perp \nabla_x \operatorname{tr} F(y(x))Z = \nu_x^\perp \nabla_x f(y(x))$  эквивалентна  $\left( \frac{d}{d\tilde{x}} \right)^k \operatorname{tr} F(y(\tilde{x}))Z = \left( \frac{d}{d\tilde{x}} \right)^k f(y(\tilde{x}))$ ,  $k = 1, \dots, n-2$ , где  $\tilde{x}$  — один атом с весом  $\tilde{p} = 1$ . При этом, как и ранее, задаваемое такой системой подпространство не зависит от  $\tilde{x}$ . Данная форма совместима с любым количеством атомов в конфигурации.

Процедура решения полученной задачи практически идентична процедуре решения соответствующей ЛМН-релаксации в прямой-двойственной форме. Основное отличие заключается в использовании в формулах для вычисления направления спуска

градиента и модифицированного гессиана  $g_x$  и  $\tilde{H}_x$  вместо  $g_y$  и  $H_y$ : см. (6) и (8). Отметим, что существуют различные версии формул для определения направления спуска по  $x$  и по  $Z$ , см., например, методы уменьшения потенциала в [10]. В приведенном далее примере использован метод, сохраняющий направление спуска по  $x$  в виде (8) и формирующий на его основе направление спуска по  $Z$ .

## 5. Пример

Рассмотрим пример, решенный в [1] прямым методом:

$$f^* = \min_x x^2,$$

$$g_1(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1 \geq 0.$$

Графики  $f(x)$  и  $g_1(x)$  приведены на рис. 1. Неравенство  $g_1(x) \geq 0$  задает область поиска в виде двух отрезков, на которых  $f(x)$  имеет по одному локальному минимуму в точках  $\pm\sqrt{1 - \sqrt{2}/2} \approx \pm 0,5412$ , соответственно.

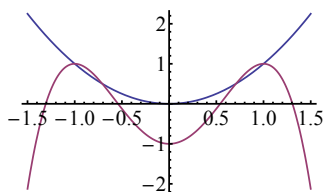


Рис. 1. Графики  $f(x)$  и  $g_1(x)$

Построим трансформированную прямую-двойственную форму ЛМН-релаксации данной задачи. Как и в оригинальной работе, размеры матриц в ЛМН-релаксации определяются параметрами  $d_1 = \lceil \frac{1}{2} \deg g_1(x) \rceil = 2$  и  $k \geq \max\{\lceil \frac{1}{2} \deg f(x) \rceil, d_1\} = 2$ . Для минимального порядка  $k = 2$  (и  $r = k + 1 = 3$ ) соответству-

ющая ЛМН-релаксация (3) имеет вид

$$f^* = \min_y y_{[2]},$$

$$M_2(y) = \begin{bmatrix} y_{[0]} & y_{[1]} & y_{[2]} \\ y_{[1]} & y_{[2]} & y_{[3]} \\ y_{[2]} & y_{[3]} & y_{[4]} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$M_1(g_1, y) = \begin{bmatrix} -2y_{[4]} + 4y_{[2]} - y_{[0]} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$y_{[0]} = 1,$$

или, в форме (5),

$$f^* = \min_y c^T y,$$

$$F(y) = \begin{bmatrix} y_{[0]} & y_{[1]} & y_{[2]} & 0 & y_{[1]} \\ & y_{[2]} & y_{[3]} & 0 & y_{[2]} \\ & & y_{[3]} & y_{[4]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2y_{[4]} + 4y_{[2]} - y_{[0]} \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\nu_y^T y = 1,$$

$$y = [y_{[0]} \ y_{[1]} \ y_{[2]} \ y_{[3]} \ y_{[4]} \ y_{[5]}]^T,$$

$$c = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\nu_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

Воспользуемся той же трансформацией пространства поиска, что и ранее:

$$y_{[j]} = \sum_{i=1}^r p_i x_i^j, \quad j = 0, 1, \dots, 2k+1,$$

где  $x_i$  и  $p_i$  — новые неизвестные, составляющие вектор

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_r]^T.$$

Тогда

$$F(y(x)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 p_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{i=1}^3 p_i g_1(x_i) \end{bmatrix},$$

$Z$  — симметричная матрица  $4 \times 4$ ;  $\nu_x = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ ; в качестве  $\nu_x^\perp$  можно взять матрицу

$$\nu_x^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Подставим данные величины в (14) и решим полученную задачу указанным в предыдущем параграфе методом.

В качестве начального приближения возьмем атомы

$$x_1 = 0,8; \ x_2 = 1,0; \ x_3 = 1,2; \ p_1 = p_2 = p_3 = 1/3.$$

Пусть начальное значение  $Z$  — произвольная положительно определенная матрица, удовлетворяющая линейным ограничениям, например:

$$Z = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм делает 5 серий по 10 шагов, начиная с  $\mu = 1$  и уменьшая  $\mu$  в 4 раза в каждой следующей серии. На рис. 2 приведены графики интервала двойственности, траектории атомов и их весов. Мы видим, что (как и при решении задачи в прямой форме в [1]) два атома находят глобальные экстремумы в обеих допустимых областях и приобретают конечные веса, а третий атом теряет свою значимость. При этом уровень интервала двойственности служит формальной гарантией точности решения.

## 6. Заключение

В данной работе продемонстрированы возможности применения метода атомной оптимизации к решению задач невыпуклого программирования, в первую очередь, задач ПН и ПМН раз-



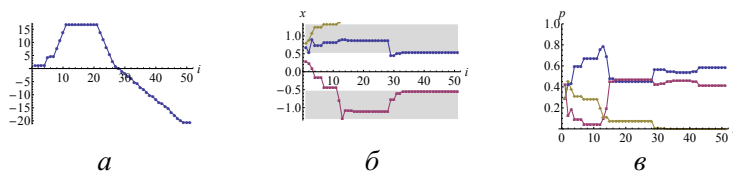


Рис. 2. Графики  $\ln \operatorname{tr} F(y(x))Z$ ,  $x_i$  и  $p_i$

личной размерности. Показаны подходы к трансформированию прямых и прямых-двойственных форм задач.

### Литература

1. ПОЗДЯЕВ В.В. *Атомная оптимизация, часть 1: трансформация пространства поиска и одномерные задачи* // Управление большими системами. 2011. № 36. С. 39–80.
2. ПОЗДЯЕВ В.В. *Атомная оптимизация, часть 2: многомерные задачи и полиномиальные матричные неравенства* // Управление большими системами. 2013. № 43. С. 95–123.
3. BOYD S., GHAOUI L.E., FERON E., BALAKRISHNAN V. *Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM studies in applied mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
4. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Detecting global optimality and extracting solutions in GloptiPoly* // Positive polynomials in control. 2005. P. 1–18.
5. HENRION D., LASSERRE J.-B. *Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback* // Trans. Automatic Control, IEEE. 2006. Vol. 51, No. 2. P. 192–202.
6. IWASAKI T., SKELTON R. *Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions* // Journal of Optimization Theory and Applications. 1995. Vol. 85. P. 291–307.

7. LASSERRE J.-B. *Global optimization with polynomials and the problem of moments* // SIAM Journal on Optimization. 2001. Vol. 11, No. 3. P. 796–817.
8. NESTEROV Y., NEMIROVSKII A. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM studies in applied and numerical mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
9. SYRMOS V.L., ABDALLAH C.T., DORATO P., GRIGORIADIS K. *Static output feedback—a survey* // Automatica. 1997. Vol. 33, No. 2. P. 125–137.
10. VANDENBERGHE L., BOYD S. *Semidefinite programming* // SIAM Review. 1994. Vol. 38. P. 49–95.

## SEARCH SPACE TRANSFORMATION IN PRIMAL AND DUAL MATRIX INEQUALITY SYSTEMS

**Vladimir Pozdyayev**, Arzamas Polytechnical Institute of R. E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University, Arzamas, Cand.Sc., associate professor (vpozdyayev@gmail.com).

*Abstract: Multidimensional optimization problems with a polynomial objective function and polynomial matrix inequality constraints are considered. A transformation of the moment theory-based solution method is presented, which allows to significantly reduce its computational complexity while keeping the ability to solve problems of the kind we are interested in. The basic scheme deals with 1D polynomial problems and primal interior point methods, but it can be generalized to non-polynomial problems, multidimensional problems, and primal-dual interior point solution methods.*

**Keywords:** nonlinear programming, matrix inequalities, polynomial inequalities, moment theory.