

УДК 681.5.015
ББК 32.973

К ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ

Сакрутина Е. А.¹, Бахтадзе Н. Н.²

*(Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

Идентификационные модели находят широкое применение в современных системах управления, системах поддержки принятия решений, играют основополагающую роль в любой деятельности, связанной с процессом обработки сигналов. Методы, основанные на вейвлет-анализе, характеризуются уникальной способностью детализированного частотного анализа во времени выбирать «частотно-временные окна». В работе представлены разработанные авторами методы идентификации нелинейных нестационарных систем с использованием кратномасштабного вейвлет-преобразования.

Ключевые слова: вейвлеты, идентификация систем, ассоциативный поиск.

1. Введение

При решении задачи идентификации можно выделить широкий класс процессов, для управления которыми не достаточно построения линейных моделей. Кроме того, данные процессы могут иметь некоторые особенности в определенные моменты времени. В технических системах они зачастую имеют циклический характер. Примером причин этого факта может служить

¹ Сакрутина Екатерина Алексеевна, старший математик (consoft@ipu.ru).

² Бахтадзе Наталья Николаевна, доктор технических наук, профессор (bahfone@ipu.ru).

различие в составе сырья, поставляемого от различных поставщиков для технологических процессов непрерывного и полупрерывного производства. Другой пример – сезонные и суточные колебания нагрузки в электрических сетях, что оказывает непосредственное влияние на процесс оптимизации режимов управления передачей электроэнергии. Хорошо известны колебания фондового рынка, обусловленные целым рядом экономических закономерностей. Поэтому актуальным представляется решение задачи построения прогнозирующих моделей для нестационарных процессов такого типа.

В течение последних двадцати лет для анализа нестационарных процессов получило широкое применение вейвлет-преобразование (wavelet – «маленькая волна», «ondelette»), о чем свидетельствуют многочисленные публикации [1].

В отечественной литературе ее иногда называют «всплеском», подчеркивая осцилляционный характер. Вейвлет-преобразование сигналов является обобщением развития спектрального анализа, например, по отношению к преобразованию Фурье.

Первые работы по вейвлет-анализу временных (пространственных) рядов с выраженной неоднородностью появились в середине 1980-х годов [11]. Метод был позиционирован как альтернатива преобразованию Фурье, локализирующему частоты, но не дающему временного разрешения процесса. В дальнейшем появилась и развивается теория вейвлетов и ее многочисленные приложения.

Сегодня вейвлет-анализ используется для обработки и синтеза нестационарных сигналов, для решения задач сжатия и кодирования информации, обработки изображений, в теории и практике распознавания образов, в частности, в медицине, и во многих других сферах. Эффективной оказалась практика применения вейвлетов для исследования геофизических полей, временных метеорологических рядов, прогнозирования землетрясений. Подход эффективен для исследования функций и сигналов, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве, когда результаты анализа должны содержать не только частотную характеристику сигнала (распределение энергии сигнала по частотным составляющим), но и сведения о

локальных координатах, на которых проявляют себя те или иные группы частотных составляющих, или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигнала.

Вейвлет-анализ основан на применении специального линейного преобразования процессов для изучения интерпретируемых этими процессами реальных данных, характеризующих процессы и физические свойства реальных объектов, в частности, технологических процессов. Такое линейное преобразование осуществляется на основе специальных солитонно-подобных функций (вейвлетов), образующих ортонормированный базис в L^2 .

Вейвлет-преобразование (ВП) одномерного сигнала – это его представление в виде обобщенного ряда или интеграла Фурье по системе базисных функций. Метод основан на фундаментальной концепции представления произвольных функций на основе сдвигов и расширений одной локализованной небольшой волны или вейвлет-функции, которая быстро затухает по направлению к нулю. Вейвлет формируется таким образом, что образующая его функция (вейвлетообразующая функция, или материнский вейвлет) характеризуется определенным масштабом (частотой) и локализацией во времени за счет операций сдвига во времени и изменения временного масштаба. Временной масштаб аналогичен периоду осцилляций, т.е. обратен частоте, а сдвиг интерпретирует смещение сигнала по оси времени.

Вейвлет-преобразование ставит в соответствие одномерному процессу двумерную поверхность в трехмерном пространстве (частота и время полагаются независимыми переменными). Таким образом, свойства процесса исследуются как во временной, так и в частотной областях, предоставляя возможность исследовать динамику частотного состава процесса и его локальные особенности. Это позволяет выявлять координаты, при которых определенные частоты проявляются наиболее существенно. Графическая интерпретация вейвлет-преобразования может быть осуществлена посредством проектирования на плоскость и выделения изо-уровней, характеризующих изменения интенсивностей коэффициентов вейвлет-преобразования

при разных временных масштабах, а также получить расположение локальных экстремумов поверхностей.

В отличие от аппарата преобразования Фурье, когда используется функция, порождающая ортонормированный базис пространства посредством масштабного преобразования, вейвлет-преобразование формируется на основе базисной функции, локализованной в некоторой ограниченной области и принадлежащей пространству, т.е. всей числовой оси. По сравнению с «оконным» преобразованием Фурье, для получения преобразования на одной частоте уже не требуется вся временная информация. Преобразование Фурье не дает представления о локальных свойствах сигнала при достаточно быстрых изменениях во времени его спектрального состава. Таким образом вейвлет-анализ может обеспечить частотно-временной информацией о функции, которая во многих практических ситуациях является более актуальной, чем информация полученная с помощью стандартного Фурье-анализа.

Вейвлеты также обеспечивают мощный инструмент аппроксимации, который может быть использован для синтеза функций, которые плохо аппроксимируются другими методами, с минимальным количеством базисных функций.

Вейвлет-преобразование как математический инструмент служит, главным образом, для анализа данных во временной и частотной областях. Теория вейвлетов может быть использована для идентификации систем в разных аспектах. Исследование взаимодействия теории идентификации и вейвлет-анализа было в некоторой степени представлено в [9, 10]. Отмечено, что вейвлеты используются преимущественно для идентификации нелинейных систем с особенной структурой, где неизвестные изменяющиеся во времени коэффициенты могут быть представлены как линейная комбинация базисных вейвлет-функций [24, 26]. Такой подход получает развитие на основе использования кратномасштабного анализа [22], в котором собственно задача выбора вейвлетов решена. Другой подход использует базисные функции вейвлета в качестве входов системы. Далее, на основе анализа выхода системы, находят необходимые коэффициенты [14]. Кроме того, характеристики вейвлетов могут быть использованы для собственных частот и частот затухания системы [13,

20], путем использования гребней в вейвлет-аппроксимации системы в пространстве вход-выход.

Кроме непосредственного вейвлет-анализа, для идентификации систем могут быть использованы биортогональные вейвлеты [12], вейвлет-фреймы [23] или даже вейвлет-сети [21].

Существует много различных способов применения теории вейвлетов для идентификации линейных систем. Прейсиг и Риппин [16-19] исследовали идентификацию систем со специфической входо-выходной структурой, в которой параметры идентифицируются через сплайн-вейвлеты и их производные. В работе [7] представлен расширенный посредством ортонормированного преобразования метод наименьших квадратов с целью извлечения полезной информации из данных.

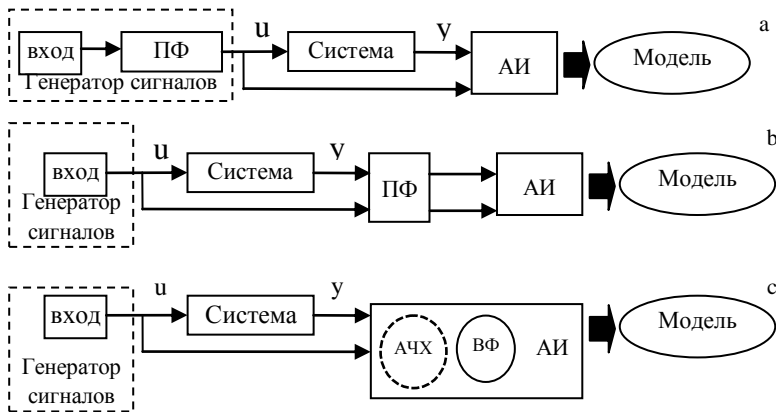


Рис. 1. Основные принципы предлагаемых алгоритмов; (а, б) показывают классические методы идентификации в частотной области, (с) является модификацией согласно текущей статье. ПФ – преобразование Фурье, АИ – алгоритм идентификации, АЧХ – анализ частотных характеристик, ВФ – вейвлет-фильтр.

Настоящая статья посвящена анализу возможностей совместного использования теории вейвлетов [8] и теории иденти-

фикации систем [15]. Специфика подхода, представленного в настоящей работе, проиллюстрирована на рис. 1. Классический подход к идентификации систем в частотной области состоит в том, что необходимо сначала отфильтровать входные данные, подать отфильтрованные входы в систему, а затем провести идентификацию (см. рис. 1(a)). Этот подход имеет существенную ограниченность – необходима априорная информация о свойствах частот системы, чтобы выявлять важные частоты при построении фильтра. Кроме того, если какая-либо резонансная частота не выявлена, то отклик модели не будет ее содержать, и, соответственно, может быть утеряно важное свойство исходной системы. Проблема может быть решена путем использования фильтрации после подачи входов в систему (см рис.1(b)). Другой подход может заключаться в осуществлении вейвлет-фильтрации и частотного анализа неотфильтрованных входных и выходных сигналов. Однако чтобы сохранить временную структуру задачи идентификации систем, невозможно разделить вейвлет-преобразование и идентификацию. Таким образом, и частотный анализ и вейвлет-преобразование должны быть включены в алгоритм идентификации, как показано на рис. 1(c).

Разделы 2 и 3 настоящей статьи содержат необходимую для дальнейшего изложения справочную информацию о вейвлет-анализе, а последующие разделы посвящены анализу алгоритмов идентификации на основе вейвлетов.

2. Идентификация нелинейных систем на основе процедуры ассоциативного поиска

Для идентификации сложных нелинейных динамических объектов, таких как технологические процессы непрерывных и полунепрерывных производств, в работе [3-6, 25] был предложен алгоритм идентификации с непрерывной самонастройкой в режиме реального времени на основе построения **виртуальных моделей**. Алгоритм позволяет корректировать качество основных показателей выпускаемого продукта на основе статистической обработки данных приборных измерений и лабораторного контроля.

В каждый момент времени создается новая модель. Для построения модели формируется временная база данных архивной и текущей технологической информации. После определения прогноза выхода по текущему состоянию объекта эта виртуальная база уничтожается без запоминания.

Линейная динамическая прогнозирующая модель имеет следующий вид:

$$(1) \quad y_N = a_0 + \sum_{i=1}^m a_i y_{N-i} + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^S b_{js} x_{N-j,s}.$$

где y_N – прогноз выхода объекта на момент времени N , x_N – вектор входных воздействий, m – глубина памяти по выходу, n – глубина памяти по входу, S – размерность вектора входов, a_i и b_{js} – настраиваемые коэффициенты, причем $x_{N-j,s}$ выбраны не в порядке хронологического убывания, а в соответствии с определенным критерием, получившим название *ассоциативного импульса*.

Нелинейный динамический алгоритм состоит в построении в каждый момент времени аппроксимирующей гиперповерхности пространства входных векторов и соответствующих им одномерных выходов [2]. Для построения виртуальной модели, соответствующей некоторому моменту времени, выбираются точки в n -мерном пространстве, в определенном смысле близкие к текущему входному вектору. Критерии отбора точек описаны ниже. Размерность этой гиперповерхности выбирается эвристически. Поскольку архивы технологических данных различных производственных процессов, как правило, имеют значительную глубину, то для решения практических задач методом ассоциативного поиска целесообразно выбрать достаточно большое («с запасом») количество входных векторов из архива. Далее на основе классического (не рекуррентного) метода наименьших квадратов (МНК) определяется значение выхода в следующий момент времени. В предположении, что входные воздействия удовлетворяют условиям Гаусса-Маркова, оценки, получаемые по методу наименьших квадратов, являются состоятельными, несмещенными статистически эффективными.

Необходимо подчеркнуть, что такой алгоритм не строит единственную аппроксимирующую модель реального процесса

– он строит новую модель для каждого момента времени, будучи при этом эффективным алгоритмом идентификации, поскольку оценки параметров в любой момент времени являются наилучшими в смысле среднеквадратической ошибки. Каждая точка глобальной нелинейной поверхности регрессии получается в результате использования линейных «локальных» моделей.

Методы построения аппроксимирующей гиперповерхности определяются критерием отбора входных векторов из архива.

Критерий отбора входных векторов из архива для построения виртуальной модели в данный момент времени по текущему состоянию объекта состоял в том, что на первом шаге выбиралась точка (S -мерный вектор входов), для которой модуль разности первой компоненты и, соответственно, первой компоненты текущего входного вектора принимал минимальное значение по всему массиву архива входов. Далее из ранжированных по убыванию модулей разностей первых компонент выбиралась точка в пространстве входов, для которой минимальное значение принимал модуль разности вторых компонент, и так далее. По такой схеме отбирались R точек, $R \geq S$, без гарантии, что получаемая система линейных уравнений будет иметь решение.

В целях преодоления проблемы разрешимости соответствующей системы уравнений и с целью повышения быстродействия можно применить следующий подход.

Рассмотрим простейший случай, когда ассоциативный импульс определяется как минимальное расстояние до текущего вектора входов в смысле выбранной метрики в S -мерном пространстве. В качестве расстояния (нормы в \mathbf{R}^S) между точками выбирается величина («Манхэттенское расстояние»):

$$d_{N,N-j} = \sum_{s=1}^S |x_{N,s} - x_{N-j,s}|, \quad \forall j=1, \dots, n,$$

где $x_{N,s}$ – компоненты вектора входов в текущий момент времени N .

В силу одного из свойств нормы («неравенство треугольника») имеем:

$$d_{N,N-j} \leq \sum_{s=1}^S |x_{N,s}| + \sum_{s=1}^S |x_{N-j,s}|, \quad \forall j=1, \dots, n.$$

Пусть для текущего вектора входов x^N

$$(2) \sum_{s=1}^S |x_{N,s}| = d_N.$$

Для построения аппроксимирующей гиперповерхности для вектора x_N отберем из архива входных данных такие векторы $x_{N-j}, j=1, \dots, n$, что для некоторого заданного D_N будет выполнено условие:

$$d_{N,N-j} \leq d_N + \sum_{s=1}^S |x_{N-j,s}| \leq D_N, \quad \forall j=1, \dots, n.$$

где D_N может быть выбрано, например, из условия

$$D_N \geq 2d_N^{\max} = 2 \max_j \sum_{s=1}^S |x_{N-j,s}|.$$

Если в выбранной области не наберется достаточного числа входов для применения МНК, т.е. соответствующая система линейных уравнений окажется неразрешимой, то выбранный критерий отбора точек в пространстве входов можно будет ослабить путем увеличения порога D_N .

Предлагаемая процедура построения аппроксимирующей поверхности обладает более высоким быстродействием по сравнению с обычным перебором, поскольку величины

$$d_{N-k} = \sum_{s=1}^S |x_{N-k,s}|, \quad k=1, \dots, N-1,$$

для всех моментов времени, предшествующих N , могут быть на этапе обучения однократно определены и ранжированы, а по мере поступления нового входа этот ряд пополняется новым членом.

Для построения прогнозирующей модели, соответствующей некоторому моменту времени, из архива выбираются векторы, в определенном смысле близкие к текущему входному вектору (см. рис. 2). Далее на основе МНК определяется прогнозируемое значение выхода.

Таким образом, алгоритм построения прогнозирующей (идентификационной) модели состоит в следующем:

1 Шаг. Для вновь поступившего текущего входного вектора x_N задаем область векторов входов (из архива) (см. рис. 2 и 3), допустимо близких (по критерию минимума расстояния (нормы в \mathbf{R}^S) между точками S -мерного пространства:

$$d_{N,N-j} = \sum_{s=1}^S |x_{N,s} - x_{N-j,s}|, \quad \forall j=1, \dots, n,$$

к исследуемому текущему вектору входов. Для этого назначаем D_N . (Либо эксперт определяет непосредственно числовые значения, либо разработчики руководствуются самыми простыми соображениями, что мы и сделали на первом этапе, применив соотношение (2)).

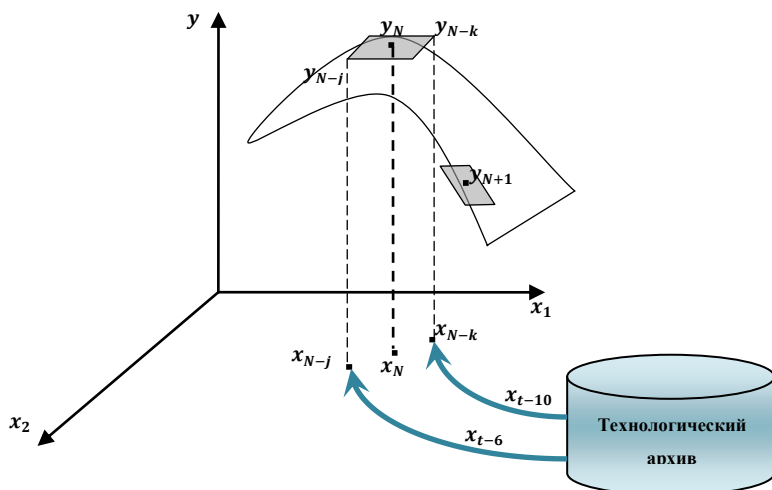


Рис. 2. Построение прогнозирующей модели, соответствующей некоторому моменту времени.

2 Шаг. Начинаем выбирать входные векторы из архива. Всего их нужно отобрать столько, чтобы соответствующая система линейных уравнений, необходимая для получения прогноза по методу наименьших квадратов, оказалась разрешимой. Для отбора проверяем, принадлежит данный вектор обозначенной области «близости к текущему входному вектору», или нет. Таким образом, динамический алгоритм состоит в построении в каждый момент времени аппроксимирующей гиперповерхности пространства входных векторов и соответствующих им одномерных выходов.

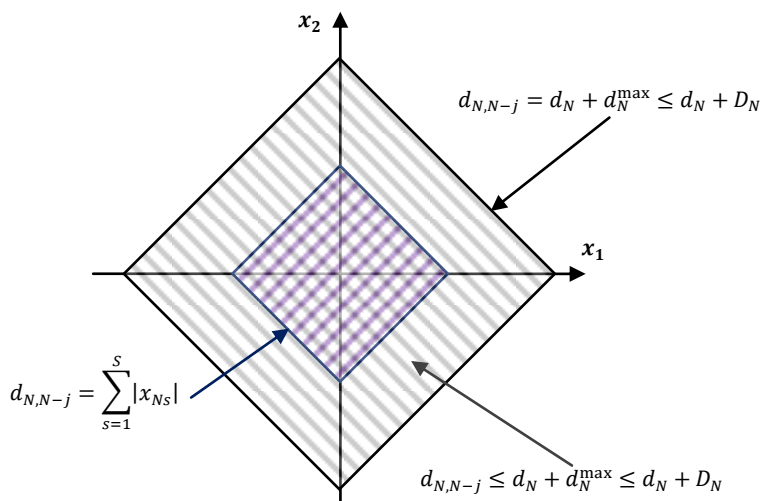


Рис. 3. Область векторов входов допустимо близких к входному вектору.

3 Шаг. На основе метода наименьших квадратов определяется значение выхода в следующий момент времени. В соответствии с классической теоремой, получаемые таким образом оценки параметров в любой момент времени являются наилучшими в смысле среднеквадратической ошибки. При этом каждая точка глобальной нелинейной поверхности регрессии получается в результате использования линейных «локальных» моделей.

Полученные результаты по исследованию «близости» входных векторов из архива текущему входному вектору в момент времени N одновременно с решением задачи прогноза сформировали наборы векторов, которые в дальнейшем используются в качестве результатов «обучения». А именно: теперь для формирования «близкого окружения» для каждого нового вектора входов могут быть использованы уже готовые наборы архивных заготовок, что существенно увеличивает быстродействие алгоритма. Эти наборы в терминах процедуры ассоциативного поиска являются ассоциациями.

3. Применение вейвлет-анализа для построения прогнозирующих моделей методом ассоциативного поиска

Применение вейвлет-анализа для построения прогнозирующих моделей методом ассоциативного поиска представляется актуальным в условиях нестационарности, как для случая нестационарного входного сигнала, так и в случае немоделируемой динамики самого объекта.

Для большинства практических приложений, в особенности, для задач управления с идентификатором, входное воздействие представляет собой вектор. Пусть каждая компонента этого вектора удовлетворяет условиям Гаусса-Маркова, в частности, условию независимости членов последовательности. Кроме того, предположим, что для любого момента времени компоненты вектора входов взаимно независимы. В то же время предположим, каждая из компонент вектора входов не является стационарной последовательностью; однако, ее сингулярные проявления, случайно проявляющиеся во времени, в определенном смысле схожи либо идентичны. В технических системах некоторая «повторяемость» свойств входных сигналов может быть отмечена при статистическом анализе данных систем мониторинга. Некоторые процессы имеют ярко выраженную цикличность, например, процесс динамики нагрузки в электрических сетях, и т.д.

Для того, чтобы применить алгоритм ассоциативного поиска, нам по-прежнему необходимо выбрать из архива векторы, близкие к текущему вектору входов в смысле выбранного критерия (ассоциативного импульса).

Сначала ограничимся рассмотрением одномерного случая (один вход – один выход). Поскольку входная последовательность не является стационарной, представляется целесообразным исследовать дискретные вейвлет-разложения входных сигналов. В общем случае такое разложение может быть представлено формулой

$$(3) \quad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \varphi_{j,k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

где j – глубина кратно-масштабного разложения, уровень детализации анализа, c_{jk} – масштабирующие коэффициенты, $d_{j,k}$ – детализирующие коэффициенты.

Пусть $\psi(t)$ – вейвлеты Хаара, а $x(t)$ – одномерный вход. Для выбранного уровня детализации L для текущего одномерного входа $x(t)$ получаем кратномасштабное разложение:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N/2^L} c_k \varphi_{L,k}(t) + \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad N \geq 2^L.$$

Коэффициенты вычисляются посредством алгоритма Малла.

В процедуре ассоциативного поиска будем отбирать из архива такие входы $x(t^*)$, для которых вейвлет-разложение той же глубины L

$$x(t^*) = \sum_{k=1}^{N/2^L} c_k^* \varphi_{L,k}(t) + \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^* \psi_{j,k}(t^*)$$

удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(4) \quad \left| \sum_{k=1}^{N/2^L} c_k^* \varphi_{L,k}(t^*) \right| + \left| \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^* \psi_{j,k}(t^*) \right| \leq c_L,$$

где c_L – положительная величина, $c_L \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$; а для всех коэффициентов $d_{j,k}$, $k=1, \dots, N/2^j$ существует такая константа \mathcal{C}_{jk} , что

$$(5) \quad |d_{j,k}^*| \leq \frac{\mathcal{C}_{jk} - |\psi_{kj}(t)| |d_{j,k}|}{|\psi_{kj}(t^*)|}$$

В силу неравенства треугольника, имеем:

$$\left| \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^* \psi_{j,k}(t^*) - \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k} \psi_{j,k}(t^*) \right| + \left| \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right| \leq \mathcal{C}_j,$$

где

$$\mathcal{C}_j = \frac{N}{2^{j-1}} \max_{k=1, \dots, N/2^j} c_{j,k}$$

Из совместного выполнения условий (4) и (5) следует

$$\begin{aligned}
& \left| x(t^*) - x(t) \right| \leq \left| x(t^*) \right| + \left| x(t) \right| = \\
& \left| \sum_{k=1}^{N/2^L} c_k^* \varphi_{L,k}(t) + \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^* \psi_{j,k}(t^*) \right| + \\
& \left| \sum_{k=1}^{N/2^L} c_k \varphi_k(t) + \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{N/2^L} c_k^* \varphi_{L,k}(t) \right| + \left| \sum_{k=1}^{N/2^L} c_k \varphi_k(t) \right| + \\
& \sum_{j=1}^L \left| \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^* \psi_{j,k}(t^*) \right| + \sum_{j=1}^L \left| \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \right| \leq c_L + L\tilde{\epsilon}_j = \text{const} > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, ассоциативный импульс, т.е. критерий отбора входных векторов из архива, выражается совокупностью условий (4), (5).

Рассмотрим случай многомерного входа. Прогнозируемое значение выхода в процедуре ассоциативного поиска получается с помощью метода наименьших квадратов. С учетом независимости компонент вектора входов следует формировать критерий ассоциативного поиска как условие существования таких констант $\tilde{\epsilon}_{ij}^s$, где $s=1, \dots, S$ размерность вектора входов, что одновременно выполняются неравенства:

$$(6) \quad \left| d_{kj}^{s*} \right| \leq \frac{\tilde{\epsilon}_{kj}^s - \left| \psi_{kj}^s(t) \right| \left| d_{kj}^s \right|}{\left| \psi_{kj}^s(t^*) \right|},$$

для всех $s=1, \dots, S$.

Выбираемым из архива P векторам $x(t^*)$ соответствуют P известных выходов, удовлетворяющих уравнениям виртуальных линейных моделей:

$$y(t^*) = \sum_{s=1}^S \hat{h}^s x^s(t^*).$$

Прогнозируемое значение $y(t)$ вычисляется по методу наименьших квадратов.

Рассмотрим случай немоделируемой внутренней динамики объекта. В процедуре ассоциативного поиска на каждом такте мы строим свою линейную модель нелинейного объекта.

$$y(t) = \sum_{s=1}^S \hat{h}^s x^s(t).$$

В нестационарном случае коэффициенты переходной функции, вообще говоря, зависят от t . Пусть на первом этапе процедуры ассоциативного поиска из технологического архива выбраны P входных векторов $x(t^*)$, удовлетворяющих условиям (1) и (6). Построенные виртуальные модели имеют вид:

$$y(t^*) = \sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t^*) x^s(t^*).$$

С учетом вейвлет-разложения входных сигналов имеем:

$$y(t^*) = \sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t^*) \left[\sum_{k=1}^{N/2^L} c_k^{s*} \varphi_{L,k}^s(t) + \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*) \right] =$$

$$\sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t^*) \sum_{k=1}^{N/2^L} c_k^{s*} \varphi_{L,k}^s(t) + \sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t^*) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*)$$

Заметим, что $\hat{h}^s(t)$ и $\hat{h}^s(t^*)$, в общем случае, различны. Рассмотрим два специальных случая, когда это различие можно формализовать.

1) Аддитивный сдвиг:

$$\hat{h}^s(t^*) = \hat{h}^s(t) + a^s(t^*), \text{ где } |a^s(t^*)| \leq C_a^{add} = \text{const} > 0, \forall s = 1, \dots, S.$$

Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда степень детализации кратномасштабного анализа достаточно высока, что приводит к обнулению коэффициентов масштабирования c_{ik}^s , где $s=1, \dots, S$. В этом случае имеем место соотношение:

$$\sum_{s=1}^S (\hat{h}^s(t) + a^s(t^*)) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*) =$$

$$\sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*) + \sum_{s=1}^S a^s(t^*) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*).$$

В частности, при

$$|a^s(t^*)| = C_a^{add} = \text{const} > 0$$

имеем

$$y(t^*) - SC_a^{add} \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*) = \sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t^*) &= y(t^*) - SC_a^{add} \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*) = \\ (6) \quad &\sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*). \end{aligned}$$

2) Мультипликативный сдвиг: Пусть

$$\hat{h}^s(t^*) = \hat{h}^s(t) \cdot a^s(t^*), \text{ где } |a^s(t^*)| \leq C_a^{mult} = const > 0, \forall s = 1, \dots, S.$$

Тогда справедливы равенства:

$$\begin{aligned} y(t^*) &= \sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*) = \\ &\sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t) \cdot a^s(t^*) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*) \end{aligned}$$

В частности, при

$$|a^s(t^*)| \leq C_a^{mult}$$

имеем соотношение

$$(7) \quad y(t^*) = \sum_{s=1}^S \hat{h}^s(t) \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^{N/2^j} C_a^{mult} d_{j,k}^{s*} \psi_{j,k}^s(t^*)$$

Уравнения (6), (7) непосредственно используются в алгоритме прогнозирования, вместе с уравнением для $y(t)$. Заметим, что все уравнения содержат теперь в качестве неизвестных коэффициенты $\hat{h}^s(t)$.

Литература

1. КОЗЛОВ П.В., ЧЕН Б.Б. Вейвлет-преобразование и анализ временных рядов // Вестник КРСУ. – 2002. – № 2. – С. 64–69.

2. ЧАДЕЕВ В.М. *Цифровая идентификация нелинейных динамических объектов* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 12. – P. 85–93.
3. BAKHTADZE N.N., LOTOTSKY V.A., VLASOV S.A., SAKRUTINA E.A. *Associative Search and Wavelet Analysis Techniques in System Identification* // IFAC-PapersOnLine. ISSN: 1474-6670. 16th IFAC Symposium on System Identification. – 2012. – Vol. 16, No. 1. – P. 1227–1232.
4. BAKHTADZE N., LOTOTSKY V., MAXIMOV E., PAVLOV B. *Associative Search Models in Industrial systems* // Preprints of IFAC Workshop on Intelligent Manufacturing Systems IMS'07. – Alicante: University of Alicante, 2007. – P. 156–161.
5. BAKHTADZE N.N., PAVLOV B.V., SAKRUTINA E.A. *Development of Intelligent Identification Models and their Applications to Predict the Submarine Dynamics by Use of Computer Simulation Complexes* // IFAC-PapersOnLine. ISSN: 1474-6670. Manufacturing Modelling, Management, and Control. – 2013. – Vol. 7, No. 1. – P. 1244–1249.
6. BAKHTADZE N.N., YADYKIN I.B., LOTOTSKY V.A., MAXIMOV E.M., SAKRUTINA E.A. *Multi-Agent Approach to Design of Multimodal Intelligent Immune System for Smart Grid* // IFAC-PapersOnLine. ISSN: 1474-6670. Manufacturing Modelling, Management, and Control. – 2013. – Vol. 7, No. 1. – P. 1161–1169.
7. CARRIER J.F., STEPHANOPOULOS G. *Wavelet-based modulation in control-relevant process identification* // AIChE Journal. – 1998. – Vol. 44, No. 2. – P. 341–360.
8. FRAZIER M. *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*. – Springer, 1999. – 501 p.
9. GHANEM R., ROMEO F. *A wavelet-based approach for model and parameter identification of non-linear systems* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2001. – Vol. 36, No. 5. – P. 835–859.
10. GHANEM R., ROMEO F. *A wavelet-based approach for the identification of linear time-varying dynamical systems* // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Vol. 234, No. 4. – P. 555–576.

11. GROSSMAN A., MORLET J. *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape* // SIAM J. Math. – 1984. – Vol. 5, No. 4. – P. 723–736.
12. HO K., BLUNT S. *Adaptive sparse system identification using wavelets* // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. – 2003. – Vol. 49, No. 10. – P. 656–667.
13. KIJEWski T., KAREEM A. *Wavelet transforms for system identification in civil engineering* // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. – 2003. – Vol. 18, No. 5. – P. 339–355.
14. KIRAN S.R., RAJU S.S.N., VARADARAJAN S., SHANKAR E.A., HERRERA J.C., ALVAREZ J.A., RIVERA I., OLGUIN M., ARUMUGAM S., RAMAREDDY S., ET AL. *LTI system identification using wavelets* // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – 2009. – Vol. 10, No. 1. – P. 1–8.
15. LJUNG L. *System Identification: Theory for the User*. – Prentice Hall, 1999. – 672 p.
16. PREISIG H.A. *Parameter estimation using multi-wavelets* // 20th European Symposium on Computer Aided Process Engineering in: Computer Aided Chemical Engineering. Elsevier, 2010. – Vol. 28. – P. 367–372.
17. PREISIG H.A., RIPPIN D.W.T. *Theory and application of the modulating function method-I. Review and theory of the method and theory of the spline-type modulating functions* // Computers & Chemical Engineering. – 1993. – Vol. 17, No. 1. – P. 1–16.
18. PREISIG H.A., RIPPIN D.W.T. *Theory and application of the modulating function method-II. Algebraic representation of mal-etinsky's spline-type modulating functions* // Computers & Chemical Engineering. – 1993. – Vol. 17, No. 1. – P. 17–28.
19. PREISIG H.A., RIPPIN D.W.T. *Theory and application of the modulating function method-III, application to industrial process, a well-stirred tank reactor* // Computers & Chemical Engineering. – 1993. – Vol. 17, No. 1. – P. 29–39.
20. RUZZENE M., FASANA A., GARIBALDI L., PIOMBO B. *Natural frequencies and dampings identification using wavelet*

- transform: application to real data* // Mechanical Systems and Signal Processing. – 1997. – Vol. 11, No. 2. – P. 207–218.
21. SHI H.-L., CAI Y.-L., QIU Z.-L. *Improved system identification approach using wavelet networks* // Journal of Shanghai University (English Edition). – 2005. – Vol. 9, No. 2. – P. 159–163.
 22. STASZEWSKI W. *Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transform* // Journal of Sound and Vibration. – 1998. – Vol. 214, No. 4. – P. 639–658.
 23. SURESHBABU N., FARRELL J.A. *Wavelet-based system identification for nonlinear control* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1999. – Vol. 44, № 2. – P. 412–417.
 24. TSATSANIS M., GIANNAKIS G. *Time-varying system identification and model validation using wavelet* // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2002. – Vol. 41, No. 12. – P. 3512–3523.
 25. VÁŇA Z., PREISIG H.A. *System identification in frequency domain using wavelets: Conceptual remarks* // Systems & Control Letters. – 2012. – Vol. 61, № 10. – P. 1041–1051.
 26. WEI H.L., BILLINGS S.A. *Identification of time-varying systems using multiresolution wavelet models* // International Journal of Systems Science. – 2002. – Vol. 33, № 15. – P. 1217–1228.

TOWARDS THE POSSIBILITY OF APPLYING THE WAVELET ANALYSIS TO CONSTRUCT PREDICTING MODELS

Ekaterina Sakrutina, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Senior Mathematician (consoft@ipu.ru).

Наталья Бахтадзе, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (bahfone@ipu.ru).

Abstract: Identification models found a broad application in advanced control systems, decision support systems, play a fundamental role in any kind of activity concerned with the signal processing process. Methods based on the wavelet analysis are characterized

with a unique ability of the detailed frequency analysis in the time to select “frequency-time windows”. In the paper, methods of identification of non-linear time-varying systems by use of the multiple scale wavelet transform, developed by the authors, are presented.

Keywords: wavelets, system identification, associative search.