УДК 517.935.2 + 681.5.015.23
ББК 32.965.4

МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА ДЛЯ МАТРИЦ В СОПРОВОЖДАЮЩЕЙ ФОРМЕ С РАВНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ[1]

Тремба А.А.[2]
(Учреждение Российской академии наук Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

В статье приводится явный вид матричной экспоненты для матриц, записанных в сопровождающей форме (форме Фробениуса), в случае одинаковых вещественных собственных значений матрицы (корней характеристического уравнения). Знание матричной экспоненты позволяет в явном виде записать решение, например, линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, при произвольных начальных условиях. Частный случай одинаковых вещественных корней характеристического уравнения важен для оценивания уклонений в системе, при этом для матричной экспоненты получено аналитическое решение.

Ключевые слова: матричная экспонента, кратные корни, сопровождающая матрица.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-07-00067-а.*
Автор признателен Б.Т. Поляку, М.В. Хлебникову и П.С. Щербакову за плодотворные обсуждения результатов.

[2] *Андрей Александрович Тремба, кандидат физико-математических наук (Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел. (495) 334-90-49, atremba@ipu.ru).*

Введение

Решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

(1) $$\dot{x}(t) = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

определяется корнями характеристического уравнения системы и начальными условиями $x(0)$.

В работе рассматриваются системы с сопровождающей матрицей[3] (форме Фробениуса)

(2) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Важность исследования систем с сопровождающей матрицы проявилась еще в теоремах Калмана о наблюдаемости и управляемости [3, 5].

Кроме того, такие матрицы соответствуют линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами,

(3) $$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0,$$

причем ℓ-я компонента решения $x_\ell(t)$ соответствует $\ell - 1$-й производной $y^{\ell-1}(t)$. Характеристический полином

(4) $$f(s) \doteq s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0,$$

является характеристическим полиномом системы (1) с матрицей в форме (2), а его корни являются собственными числами матрицы A.

Эти представления эквивалентны, но матричное представление предпочтительнее, так как в этом случае решение системы

[3] *Как правило, сопровождающей (companion matrix) называется матрица, транспонированная к приведенной. С точки зрения матричной экспоненты отличия несущественны.*

выражается через начальные условия с помощью матричной экспоненты

$$x(t) = e^{At}x(0).$$

В редких случаях для матричной экспоненты e^{At} существует аналитическое выражение, например, когда матрица A диагональная или является жордановым блоком [3, 8]. Для транспонированной матрицы верно $e^{A^T t} = \left(e^{At}\right)^T$. В общем виде решение, как правило, находится численно, например, методами Эйлера или Рунге-Кутты; в случае кратных корней при большой размерности системы возникают неустойчивости. Следует отметить, что для фиксированного момента времени t матричную экспоненту можно найти численно. Ряд таких алгоритмов исследован в [9].

1. Постановка задачи

Для матрицы в сопровождающей форме (2) требуется найти матричную экспоненту в случае, когда все собственные значения вещественные и кратные. Пусть они равны $\lambda_i = -\sigma < 0, i = 1, \ldots, n$. В этом случае характеристический полином (4) принимает вид

$$f(s) = (s+\sigma)^n = s^n + C_n^1 \sigma s^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1}\sigma^{n-1}s + C_n^n \sigma^n.$$

где использованы биномиальные коэффициенты $C_n^k \doteq \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Поясним, почему исследование кратных корней важно. Дело в том, что наличие одинаковых корней является в некотором роде самым плохим случаем. Нестрого же интерес к поведению системы при кратных корнях может быть обосновано следующим: если некоторые корни характеристического уравнения (4) совпадают $\lambda_1 = \lambda_2 \ldots = \lambda_\eta \neq \lambda_{\eta+1} \neq \ldots \neq \lambda_n$, то решение дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + \ldots C_\eta t^{\eta-1})e^{\lambda_1 t} + C_{\eta+1}e^{\lambda_{\eta+1}t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

Коэффициенты $C_1, \ldots, C_n$, конечно, зависят от начальных условий, но присутствие полинома при экспоненте показывает, что при небольших значениях времени переходной процесс по сути определяется не экспонентой, убывающей в устойчивых системах, а коэффициентами полинома.

В указанном частном случае, когда все производные в начальных условиях (компоненты $x_2(0), \ldots, x_n(0)$) нулевые, решение находится легко [7]. Аналогичные решения можно получить и для некоторых других начальных условий, но в общем случае необходимо знать и исследовать матричную экспоненту.

По-видимому, впервые этим вопросом для матриц в сопровождающей форме занимался Полоцкий в 70-х годах прошлого века, в связи с исследованием уклонений в линейных системах («всплеска» в его терминологии), однако он получал выражение решений в рекуррентной форме, без использования матричной экспоненты [4]. Также интересна недавняя серия работ Акунова, Дударенко, По́линовой и Ушакова, в которых демонстрируется связь кратных корней и уклонений системы. [1, 2]. В этих работах, помимо кратных вещественных корней, исследуется и случай кратных комплексных корней, а также поведение систем с корнями, близкими друг другу. Отличие этих работ в том, что исследуются матрицы в форме жорданового блока. Автор предполагает, что технически можно найти матрицу преобразования между жордановым блоком и матрицей в сопровождающей форме, но в явном виде его записать сложно.

2. Матричная экспонента

В работе [6] были получены аналитическое решения, в том числе и для производных, линейного дифференциального уравнения (3): в виде

$$y^{\ell}(t) = \bar{t} P_{\ell} Q^{[0]} x_0 e^{-\sigma t}, \tag{5}$$

где $\bar{t} \doteq (t^{n-1}, t^{n-2}, \ldots t, 1)$, а матрицы $P_\ell,\ \ell = 0, \ldots, n-1$ и $Q^{[0]}$ зависят только от σ и имеют вид

$$(P_\ell)_{i,j} = \begin{cases} (-\sigma)^{\ell-i+j} \dfrac{\ell!}{(\ell-i+j)!} \dfrac{(n-j)!}{(n-i)!(i-j)!} & ,\ 0 \leqslant i-j \leqslant \ell, \\ 0 & ,\ i < j, \\ 0 & ,\ j < i-\ell, \end{cases}$$

$$(Q_{[0]})_{i,j} = \begin{cases} \sigma^{n+1-i-j} \dfrac{1}{(n+1-i-j)!(j-1)!} & ,\ i+j \leqslant n+1, \\ 0 & ,\ i+j > n+1. \end{cases}$$

Такая форма записи была выбрана, исходя из того, что решение дифференциального уравнения (3) в случае всех кратных корней описывается формулой

$$y^{(\ell)}(t) = (p_1^{[\ell]} t^{n-1} + p_2^{[\ell]} t^{n-2} + \ldots + p_{n-1}^{[\ell]} t + p_n^{[\ell]}) e^{-\sigma t} \doteq p^{[\ell]}(t) e^{-\sigma t},$$

а коэффициенты т.н. «префиксных» полиномов $p^{[\ell]}(t),\ \ell = 0, \ldots, n-1$ удалось явно выразить через начальные условия и параметр σ.

Теорема 1. *Если все собственные числа сопровождающей матрицы A вида* (2) *вещественны, кратны и равны $-\sigma < 0$, то матричная экспонента e^{At} имеет вид*

$$e^{At} = (I_n \otimes \bar{t}) \mathcal{P}(\sigma) (\mathbf{1} \otimes Q^{[0]}(\sigma)) e^{-\sigma t} \tag{6}$$

где использовано произведение Кронекера $\otimes$, единичная матрица $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор из единиц $\mathbf{1} \doteq (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$:

$$(I_n \otimes \bar{t}) = \begin{bmatrix} \bar{t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{t} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{1} \otimes Q^{[0]}) = \begin{bmatrix} Q^{[0]} \\ Q^{[0]} \\ \vdots \\ Q^{[0]} \end{bmatrix}.$$

В записи (6) явно показано, какие элементы зависят от времени t и параметра σ.

Доказательство. Если записать $x_\ell(t) \equiv y^{(\ell-1)}(t)$ покомпонентно, то можно получить выражение для $x(t) = (I_n \otimes \bar{t})\mathcal{P}(\mathbf{1} \otimes Q^{[0]})e^{-\sigma t}x(0)$. Поскольку оно верно для произвольных начальных условий (в частности, для всех ортов), то матрица перед $x(0)$ совпадает с матричной экспонентой e^{At}. В выражении матрицы $\mathcal{P}$ использовано тождество $P_0 \equiv I_n$.

3. Заключение

Для линейного однородного дифференциального уравнения, или соответствующей ей системы линейных дифференциальных уравнений с матрицей в сопровождающей форме (2), получено аналитическое решение для произвольных начальных условий. При этом рассматривался частный случай, когда все корни характеристического полинома уравнения (системы) вещественные и равные. Решение записывается с помощью матричной экспоненты, заданной явно формулой (6).

Литература

1. АКУНОВ Т.А. *Степень близости простой и кратной структур собственных чисел: минимизация выброса траекторий свободного движения апериодической системы* / Т.А. Акунов, Н.А. Дударенко, Н.А. Полинова, А.В. Ушаков. Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2014, – № 2 (90). – С. 39–46.
2. ДУДАРЕНКО Н.А. *Кратность собственных чисел матрицы состояния апериодической системы как причинный*

фактор появление выбросов в траекториях по норме вектора состояния свободного движения и системного вырождения / Н.А. Дударенко, Т.А. Акунов, Н.А. Полинова. XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, ИПУ РАН, 16-19 июня 2014 г., – С. 173–182.

3. КАЛМАН, Р. *Очерки по математической теории систем* / Р. Калман, П. Фалб., М. Арбиб. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
4. ПОЛОЦКИЙ В.Н. *О максимальных ошибках наблюдающих устройств Люенбергера для систем с одним выходом* // Автоматика и телемеханика. – 1980, № 3, – С. 31–35.
5. ПОЛЯК, Б.Т. *Робастная устойчивость и управление* / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 273 с.
6. ПОЛЯК, Б.Т. *Аналитическое решение линейного дифференциального уравнения с одинаковыми корнями характеристического полинома* / Б.Т. Поляк, А.А. Тремба. XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, ИПУ РАН, 16-19 июня 2014 г., – С. 212–217.
7. ФЕЛЬДБАУМ А.А. *О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования* // Автоматика и Телемеханика. – 1948. № 4. – С. 253–279.
8. ХОРН, Р. *Матричный анализ* / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
9. MOLER, C. *Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later* // C. Moler, Ch. Van Loan. SIAM review. – 2003. –Vol. 45, №. 1, –P. 3–49.

MATRIX EXPONENTIAL FOR COMPANION MATRIX WITH EQUAL REAL EIGENVALUES

Andrey Tremba, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Ph.D. (atremba@ipu.ru).
(Moscow, Profsoyuznaya st., 65, (495) 334-90-49).

Abstract: Matrix exponential for a specific class of matrices is presented in analytic form. The matrix class is companion matrices class having all equal real eigenvalues. The matrix exponential knowledge allows to get solution of linear differential equation with constant coefficients for arbitrary initial conditions.

Keywords: matrix exponential, multiple roots, peak estimate.