УДК 539.3
ББК 22.251

УПРАВЛЯЮЩИЕ ФАКТОРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Саталкина Л.В.[1], Кузьменко Н.В. [2]
(Липецкий Государственный технический университет, Липецк)

Эффективным средством решения задач теории упругости для неоднородных тел является использование метода граничных состояний (МГС), на каждом шаге разложения решения в асимптотический ряд методом возмущений. На качество решения влияет не только число итераций, но также размерность удерживаемого отрезка базиса пространства состояний и способ аппроксимации частного решения, обусловленного наличием массовых сил. Описан новый метод построения частного решения. Приведены примеры использования различных приемов, сказывающихся на качестве решения.

Ключевые слова: метод граничных состояний, метод Пуанкаре, неоднородная среда, управляющие факторы, неконсервативные силы.

Основным приемом решения задач для неоднородных сред является разложение по малому параметру. На каждом шаге декомпозиции в задачах теории упругости возникает эффект присутствия объемных сил [1]. Построение соответствующего частного решения составляет существенную проблему. Если силы относятся к классу потенциальных, то соответствующее решение находится из анализа общего решения Папковича-Нейбера. В общем случае о консервативности сил речи не идет. Иногда удается подобрать линейную комбинацию базиса

---

[1] Любовь Владимировна Саталкина, кандидат физико-математических наук (satalkina_lyubov@mail.ru)
[2] Никита Васильевич Кузьменко, соискатель (nik2.kuzmenko@mail.ru)

пространства состояний тела, удовлетворительно приближающую поля от массовых сил [3]. Выбор способа компенсации эффекта от присутствия массовых сил наряду с числом итераций метода Пуанкаре и размерностью удерживаемого отрезка базиса на каждой итерации применения МГС являются факторами, управляющими качеством вычислительного процесса.

МГС [2] основан на понятии состояния среды, под которым понимается любое частное решение определяющих соотношений среды, конкретно в изотропной теории упругости суть:

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (1)$$

обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}, \qquad (2)$$

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \qquad (3)$$

где u_i - компонента вектора перемещения, σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, λ, μ - параметры Ламе, X_i - массовые силы, δ_{ij} - символ Кронекера. Под внутренним, граничным состояниями упругой среды понимают наборы $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$, $\gamma = \{u_i|_{\partial V}, p_i|_{\partial V}\}$ соответственно, где ∂V - оператор взятия границы тела. Гильбертовы пространства внутренних и граничных состояний сопряжены гильбертовым изоморфизмом, что позволяет свести изучение внутреннего состояния к соответствующему граничному. Ортогонализация выполняется в соответствии с определениями скалярных произведений:

$$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi} \equiv \int_V \sigma_{ij}^{(1)}\, \varepsilon_{ij}^{(2)}\, dv,\ (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma} = \int_{\partial V} p_i^{(1)} u_i^{(2)} ds,\ (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma} = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi}.$$

После ортогонализации базиса атрибуты результирующего внутреннего и граничного состояний представляются соответственно рядами Фурье по элементам ортонормированного базиса:

$$u_i = \sum_k c_k\, u_i^{(k)}, \quad \sigma_{i\,j} = \sum_k c_k\, \sigma_{i\,j}^{(k)}, \quad \varepsilon_{i\,j} = \sum_k c_k\, \varepsilon_{i\,j}^{(k)}.$$

$$u_i\Big|_{\partial V} = \sum_k c_k u_i^{(k)}\Big|_{\partial V}, \quad p_i\Big|_{\partial V} = \sum_k c_k\, p_i^{(k)}\Big|_{\partial V}.$$

Совокупность соотношений (1) – (3) формулирует задачу линейной неоднородной теории упругости; по причине функционального наполнения коэффициентов Ламе, ее общее решение отсутствует. Декомпозиция задачи методом возмущений приводит к последовательности опять же линейных задач теории упругости, но уже с постоянными коэффициентами.

Полагая все параметры упругой среды непрерывно зависящими от x_i, представим их в виде степенных рядов по малому параметру β

$$\{\lambda, \mu, \nu\} = \{\lambda_0, \mu_0, \nu_0\} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\lambda_k(x_i), \mu_k(x_i), \nu_k(x_i)\}\beta^k$$

и будем искать характеристики упруго-статического поля в виде асимптотических рядов

$$\sigma_{i\,j} = \sigma_{i\,j}^0 + \beta\sigma_{i\,j}^1 + \ldots; \ \varepsilon_{i\,j} = \varepsilon_{i\,j}^0 + \beta\varepsilon_{i\,j}^1 + \ldots; \quad u = u^0 + \beta u^1 + \ldots;$$

$$X = X^0 + \beta X^1 + \ldots$$

Тогда исходные соотношения эквивалентны бесконечной последовательности линейных систем уравнений

$$\varepsilon_{i\,j}^m = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^m + u_{j,i}^m\right), \ s_{i\,j}^m = \lambda^0\, \varepsilon_{kk}^m\, \delta_{ij} + 2\,\mu^0\, \varepsilon_{i\,j}^m \ , \ (5)$$

$$s_{i\,j,j}^m + X_i^m = 0, \ X_i^m = \left(\lambda^1 \varepsilon_{kk}^{m-1}\delta_{i\,j} + 2\mu^1\, \varepsilon_{i\,j}^{m-1}\right)_{,j},$$

где $\overset{m}{s}_{i\,j}$ выполняет роль компоненты тензора напряжений и находится по решении задачи итерации m. Тензор напряжений восстанавливается по правилу

$$\sigma_{i\,j}^m = s_{i\,j}^m + \lambda^1 \varepsilon_{kk}^{m-1}\delta_{i\,j} + 2\mu^1\, \varepsilon_{i\,j}^{m-1}.$$

Совокупность соотношений (5) определяет последовательность задач, решением которых должны явиться поля соответствующих приближений.

Для задачи каждого приближения справедливо общее решение Аржаных-Слободянского

$$u_i^k = 4(1-\nu_0)B_i - (x_j B_j + B_0)_{,i} + \chi_{,i}^k ,$$

которое обеспечивает способ построения базиса пространства внутренних состояний.

Учет объемных сил возможен в следующих вариантах:

а) учет неконсервативных объемных сил

$$\mathrm{X}_i^k = -\Pi^k{}_{,i}\,,\; \chi^k{}_{,ii} = \frac{1-2\nu_0}{2\mu_0(1-\nu_0)}\Pi^k\,;$$

б) в случае непотенциального характера фиктивных объемных сил X_i^k потенциальные функции Π^k иногда удается подобрать приближенно методом наименьших квадратов минимизацией невязки между силами X_i^k и $-\Pi^k_{,i}$;

в) аппроксимация неконсервативных сил обратным методом.

Третий подход является эффективным. Каждую компоненту вектора перемещений разложим в ряд Тейлора по системе фундаментальных многочленов Вейерштрасса. Моном $w = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}(x,y,z)$, образуя некоторое допустимое упругое состояние. Например, в случае $\mathbf{u} = \{w,0,0\}$ по цепочке (1), (2) определяем соответствующие тензоры напряжений и деформаций

$$\hat{\varepsilon}^\bullet = \frac{w}{2}\begin{pmatrix} 2\alpha x^{-1} & \beta y^{-1} & \gamma z^{-1} \\ \beta y^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma z^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}^\bullet = w\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\alpha x^{-1} & \mu\beta y^{-1} & \mu\gamma z^{-1} \\ \mu\beta y^{-1} & \lambda\alpha x^{-1} & 0 \\ \mu\gamma z^{-1} & 0 & \lambda\alpha x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Использование уравнений равновесия (3) позволяет выписать значение объемной силы

$$\mathbf{X} = -w \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\,\alpha\,(\alpha-1)x^{-2} + \mu\,\beta\,(\beta-1)y^{-2} + \mu\,\gamma\,(\gamma-1)z^{-2} \\ (\lambda+\mu)\alpha\,\beta\,x^{-1}y^{-1} \\ (\lambda+\mu)\,\alpha\,\gamma\,x^{-1}z^{-1} \end{pmatrix},$$

обеспечивающее замыкание определяющих соотношений.
Варьируя α, β, γ, можно предложить множество таких состояний. Перебирая всевозможные варианты в пределах $\alpha+\beta+\gamma \le n$, получаем множество векторов объемных сил, компоненты которых образованы однородными многочленами до порядка $n-2$ включительно. Это множество образует базис, позволяющий разложить произвольный вектор непрерывных объемных сил в ряд Фурье по его элементам.
Наличие базиса позволяет провести его ортогонализацию в соответствии со скалярным произведением

$$\left(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}\right) = \int_V \mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{X}^{(2)} dV .$$

Любой непрерывный вектор объемных сил может быть представлен в виде ряда Фурье:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}_{opm}^{(k)}, \quad c_k = \left(\mathbf{X}, \mathbf{X}_{opm}^{(k)}\right).$$

Поскольку раскладываемая сила $\mathbf{X}$ известна, то неравенство Бесселя позволяет оценить ошибку аппроксимации:

$$\delta = \sqrt{(\mathbf{X}, \mathbf{X})} - \sqrt{\sum_k c_k^2} \; .$$

Величина δ служит основанием для выбора длины удерживаемого отрезка базиса гильбертова пространства объемных сил.

Каждому базисному вектору $\mathbf{X}^{(k)}$ соответствуют вектор перемещения $\overset{\bullet(k)}{\mathbf{u}}$ и тензоры деформаций и напряжений $\hat{\varepsilon}^{\bullet(k)}$, $\overset{\bullet(k)}{\hat{\sigma}}$, в совокупности образующие внутреннее состояние $\overset{\bullet(k)}{\xi} = \left\{\overset{\bullet(k)}{\mathbf{u}}, \overset{\bullet(k)}{\hat{\varepsilon}}, \overset{\bullet(k)}{\hat{\sigma}}\right\}$. Любой линейной комбинации $\mathbf{X}^{(k)}$ соответствует такая же комбинация состояний $\overset{\bullet(k)}{\xi}$. Таким образом, после проведения ортогонализации и разложения объемной силы в ряд можно эффективно построить линейную комбинацию, определяющую напряженно-деформированное состояние $\xi^{\bullet}$, обусловленное объемной силой $\mathbf{X}$. Знание этого состояния позволяет проводить декомпозицию решения задачи: $\xi = \xi^{\circ} + \xi^{\bullet}$, где ξ, ξ° – искомое внутреннее состояние и состояние, обусловленное граничными условиями (ГУ), учитывающими компенсацию граничного эффекта от наличия объемных сил.

Для подтверждения эффективности предложенного метода решена задача. Полушар безразмерного радиуса $R=1$ защемлен по основанию (плоскость $Oxyz$) и находится в равновесии под действием объемной силы $X = \{0,0,-1\}$. Коэффициент Пуассона $\nu = 1/4$. По мере приближения к сферической границе параметры Ламе возрастают $\lambda = \mu = 1 + \beta\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. Требуется восстановить напряженно-деформированное состояние полушара.

На каждом шаге итерации компоненты вектора объемных сил в (5) являются многочленами при надлежащем выборе базиса пространства сил, они приближаются с абсолютной точностью, что кардинальным образом сказывается на качестве решения.

Влияние размерности удерживаемого отрезка базиса можно отследить, наблюдая за насыщением суммы Бесселя – левой части неравенства Бесселя $b = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}$. Это позволяет рационально назначить размерность отрезка базиса. На рис. 1 приведена диаграмма зависимости суммы Бесселя от количества элементов базиса в пределах 70 элементов по результатам второй итерации МГСВ.

В качестве иллюстрации по реализации трех итераций метода граничных состояний с возмущениями при $\beta = 0.1$ приведены линии уровня наибольших касательных напряжений в осевом сечении $y = 0$.

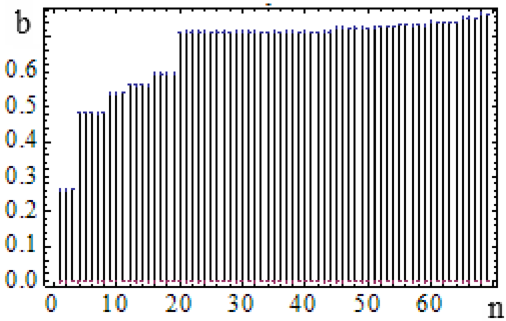

Рис. 1. Насыщение суммы Бесселя

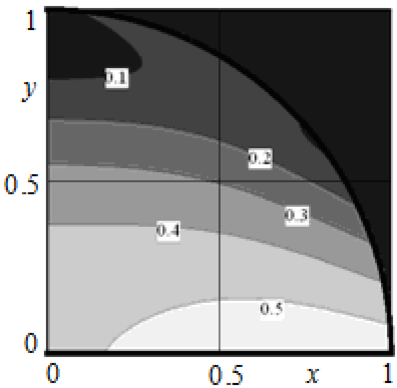

Рис. 2. Изохромы

Как видно из рис. 2, зона, примыкающая к оси вблизи полюса деформирована слабо, а разрушение следует ожидать в экваториальном сечении примерно на уровне $r = 0.7$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-97505).

Литература

1. ЛОМАКИН В.А. *Теория упругости неоднородных тел*. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 368 с.

2. ПЕНЬКОВ В.Б., ПЕНЬКОВ В.В. *Метод граничных состояний для решения задач линейной механики* // Дальневосточный математический журнал. – 2001. – Т.2, №2. – С.115-137.
3. ПЕНЬКОВ В.Б., САТАЛКИНА Л.В. *Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости.* LAP LAMBERT: Acad. Publ., Germany, 2012. 116 с.

Abstract: Effective means of solving the problems of elasticity theory for inhomogeneous bodies is using the method of boundary states (MBS) at each step of the decomposition of the solution in the asymptotic series by the method of perturbations. Not only the number of iterations, but also the dimension of held cut of basis of the space of states and a method of approximation of a partial solution, made by the presence of mass forces, affect the quality of the decision. New method for the construction of a partial solution is described. Examples of using of different techniques, affecting the quality of decisions are done.

Keywords: method of boundary states, the method of Poincare, heterogeneous environment, the control factors, nonconservative forces.