УДК 517.922
ББК 22.161.1я7

ПОИСК СИММЕТРИЙ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА[1]

Боронин И.А.[2], Шевляков А.А.[3] (ИПУ РАН, Москва)

Найдена алгебра симметрий для одномерного уравнения фильтрации газа в пористых средах в резервуарах месторождений углеводородов. Различные допущения относительно входящих в уравнение параметров приводят к существованию существенно разных симметрий.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, дифференциальная геометрия, симметрии.

Введение

Уравнение

$$(b(u)u)_t = (a(u)u_x)_x, \tag{1}$$

$a, b \in C^\infty(R)$, с одной неизвестной u, зависящей от переменных t и x, описывает процесс фильтрации газа в пористых средах. Это уравнение является обобщением нелинейного уравнения теплопроводности, в числе прочего оно учитывает деформируемость пористой среды и сжимаемость флюидов. В качестве неизвестной функции обычно выступает давление. Представляет интерес поиск его симметрий, для чего можно воспользоваться известными методами [1, 2].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №12-08-01238-а)

[2] Иван Андреевич Боронин (anarsull23@yandex.ru)
[3] Андрей Анатольевич Шевляков (aash29@gmail.com).

1. Поиск симметрий

Поверхность, описываемая в пространстве джетов уравнением (1), обозначим F.

$$F = (b(u)u)_t - (a(u)u_x)_x.$$

Будем искать классические симметрии вида

$$X = A(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + C(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Вычислим продолжение векторного поля X в пространство 2-джетов $X^{(2)}$. Условие, при котором X является инфинитезимальной симметрией F:

$$X^{(2)}F\Big|_F = 0.$$

В качестве внутренней координаты выберем $u_{xx} = \frac{(b_u u+b)u_t - a_u u_x^2}{a}$. Определяющие уравнения симметрий имеют вид

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{a}(B_{x,x}a^2 + 2\,a\,(b_u u + b)\,A_x - a\,(b_u u + b)\,B_t - \\
- (-ab_{uu}u + (-2\,a + a_u u)\,b_u + a_u b)\,C) = 0,\\
\tfrac{1}{a}(-Ca_{uu}a + 2\,A_{x,u}a^2 + C{a_u}^2 - C_{uu}a^2 - a_u a C_u) = 0,\\
2\,B_x a = 0,\\
2\,B_u a = 0,\\
B_{uu}a + a_u B_u = 0,\\
-C_{x,x}a + C_t\,(b_u u + b) = 0,\\
-a_u A_u + A_{uu}a = 0,\\
2B_{x,u}a + (2\,b + 2\,b_u u)\,A_u + 2\,a_u B_x = 0,\\
-2\,C_{x,u}a + A_{x,x}a + (-b_u u - b)\,A_t - 2\,a_u C_x = 0.
\end{gathered}$$

Предположим, $a(u) \neq 0$ и $b_u u + b \neq 0$. Тогда $B = B(t)$, $A = A(x,t)$. С учетом этих упрощений количество определяющих уравнений сократится до 4.

(2) $$-Ca_{uu}a + Ca_u^2 - a_u a C_u - C_{uu}a^2 = 0,$$

(3) $$C(a_u(b_u u + b) - a(b_{uu}u + 2b_u)) = a(2A_x - B_t)(b_u u + b),$$

(4) $$-C_{xx}a + C_t(b_u u + b) = 0,$$

(5) $$-2C_{xu}a + A_{xx}a - 2a_u C_x - A_t(b_u u + b) = 0.$$

Уравнение (2) может быть решено относительно C, что дает

$$C = \frac{1}{a}(C_1(x,t)\hat{a} + C_2(x,t)), \hat{a} = \int a(u)du.$$

В уравнении (3) коэффициент при C имеет существенное значение. В случае когда он не равен 0, имеем, с учетом сделанного предположения $a(u) \neq 0$ и $b_u u + b \neq 0$

$$C\frac{(a_u(b_u u + b) - a(b_{uu}u + 2b_u))}{a(b_u u + b)} = 2A_x - B_t,$$

и уравнение (3) может быть переписано в виде

(6) $$C\frac{k'}{k} + 2A_x - B_t = 0,$$

где $k(u) = \frac{(bu)'}{a}$.

Выразим C,

$$C = (B_t - 2A_x)\frac{k}{k'},$$

подставим его в уравнение (4). Получим

$$B_{tt} - 2A_{xt}k + 2A_{xxx} = 0$$

Продифференцируем по x,

$$A_{xxxx} = kA_{xxt}.$$

Так как k зависит от u (случай k=const будет рассмотрен отдельно), из этого уравнения следует

$$A_{xxxx} = 0,$$

$$A_{xxt} = 0.$$

Продифференцируем (6) по x и t, получим

$$C_{xt}\frac{k'}{k} + 2A_{xxt} - B_{xtt} = 0,$$
$$C_{xt} = 0.$$

С учетом этого продифференцируем (4) по x, получим

$$C_{xxx} = 0.$$

Продифференцируем (5) по t, получим

$$A_{tt} = 0.$$

Продифференцируем (6) по t, получим

$$C_{tt} = 0.$$

В силу полученных условий на функцию C она может быть записана в следующем виде:

$$C_{xt} = 0 \implies C = F(x,u) + G(t,u)$$

$$C_{xxx} = 0 \implies F_{xxx} = 0 \implies F(x,u) = \alpha(u)x^2 + \beta(u)x + \gamma(u)$$

$$C_{tt} = 0 \implies G_{tt} = 0 \implies G(t,u) = \xi(u)t + \eta(u)$$

$$C = \alpha(u)x^2 + \beta(u)x + \gamma(u) + \xi(u)t$$

Подставив C в (2), получим

$$-(\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \xi t)a_{uu}a + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \xi t)a_u^2-$$
$$-a_u a(\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' + \xi' t) - a^2(\alpha'' x^2 + \beta'' x + \gamma'' + \xi'' t) = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось, коэффициенты при x^2, x, t и свободный член должны быть равны 0. Это условие дает следующее уравнение на функцию α

$$-\alpha a_{uu} a + \alpha a_u^2 - \alpha' a_u a - \alpha'' a^2 = 0.$$

В точности такие же уравнения получаются для функций β, γ, ξ.

Решив это уравнение, получим

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \hat{a} + \alpha_2}{a},$$

$\hat{a} = \int a(u)du$, α_1, α_2 – константы. Аналогично для β, γ, ξ.

Подставим C в таком виде в уравнение (4).

$$\xi(u)(bu)' - 2\alpha(u)a = 0,$$

$$(\xi_1 \hat{a} + \xi_2)k - 2\alpha_1 \hat{a} - 2\alpha_2 = 0.$$

Из этого уравнения возможны 2 следствия – либо $\xi_1 = \xi_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, либо

$$k = 2\frac{\alpha_1 \hat{a} + \alpha_2}{(\xi_1 \hat{a} + \xi_2)}.$$

Второй случай в этой работе мы не рассматриваем.

Таким образом, $C = \beta(u)x + \gamma(u)$.

Продифференцируем уравнение (6) по x и подставим C в найденном виде.

$$\beta \frac{k'}{k} + 2A_{xx} = 0.$$

Левое слагаемое зависит только от u, а правое только от x, t. Их сумма может быть равна 0 только в случае если оба они равны постоянным. Далее мы рассмотрим только случай $\beta = A_{xx} = 0$. Следовательно $C = \gamma(u)$.

Тогда из уравнения (5) следует $A_t = 0$. Таким образом, $A = A_1 x + A_2$.

Продифференцировав (6) по t, получим $B_{tt} = 0$, откуда следует $B = B_1 t + B_2$.

С учетом этого уравнение (6) примет вид

$$\frac{\gamma_1 \hat{a} + \gamma_2}{a} \frac{k'}{k} + 2A_1 - B_1 = 0.$$

Можно рассматривать различные случаи, при которых это условие выполнено. Дли примера рассмотрим случай $\gamma_1 = 0$, $\frac{k'}{k}\frac{1}{a} = E = const$. Решим уравнение

$$\frac{\gamma_2}{a}\frac{k'}{k} = E.$$

$$k = C_1 e^{\frac{E}{\gamma_2}\hat{a}} = \frac{(bu)'}{a}.$$

Тогда, чтобы условие выполнялось, функции a и b должны удовлетворять условию

$$(bu)' = aC_1 e^{\frac{E}{\gamma_2}\hat{a}}.$$

В этом случае $\gamma_2 E + 2A_1 - B_1 = 0$,$\gamma_2 = \frac{-2A_1 + B_1}{E}$

Тогда векторное поле симметрии имеет следующие координаты

$$\begin{array}{c} A = A_1 x + A_2, \\ B = B_1 t + B_2, \\ C = \frac{-2A_1 + B_1}{aE}, \end{array}$$

Отдельно рассмотрим случаи

1)$C = 0$ и

2) $(a_u(b_u u + b) - a(b_{uu} u + 2b_u)) = 0$.

1) При $= 0$

$$2A_x - B_t = 0.$$

Продифференцируем по x,

$$A_{xx} = 0.$$

Тогда из (5) следует $A_t = 0$.

В этом случае исследование показало наличие лишь тривиальных симметрий (сдвиг по x, t и масштабирование). Более интересен случай, когда
2) $a(b_{uu}u + 2b_u) - a_u(b_u u + b) = 0$.

Это условие эквивалентно условию $a = k(bu)_u$, $k = K = const$. Тогда из (3) и остальных уравнений следует, что искомые коэффициенты векторного поля имеют вид

$$\begin{gathered} A = \alpha x + A_1, \\ B = 2\alpha t + B_1, \\ C = \frac{1}{a}(C_1\hat{a} + C_2(x,t)), \\ (C_2(x,t))_t - K(C_2(x,t))_{xx} = 0, \end{gathered}$$

где α, A_1, B_1, C_1, K — константы, функция $C_2(x,t)$ должна удовлетворять уравнению теплопроводности с коэффициентом K, $\hat{a} = \int a(u)du$, при выполнении следующих условий на функции a и b

$$\begin{gathered} a \neq 0, \\ (bu)_u \neq 0, \\ a = K(bu)_u. \end{gathered}$$

2. Заключение

В зависимости от функций a и b рассмотренное уравнение может обладать существенно различным набором симметрий. В самом общем случае уравнение обладает алгеброй симметрий состоящей из сдвига по x, t и масштабирования. В работе удалось описать несколько классов функций, при принадлежности к которым a и b уравнение фильтрации имеет более богатую алгебру симметрий, в том числе бесконечномерную.

Литература

1. Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов, И. С. Красильщик. — М.: Факториал Пресс. 2005. 384 с.
2. П. Олвер. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир. 1989. 639 с.