УДК 517.977
ББК 22.193

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ В МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ

**Емельянова Т.В.**[1]
(*Арзамасский политехнический институт, Арзамас*)
**Кусков А.А.**[2]
(*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург*)

*Матричные уравнения применяются во многих приложениях, особенно в теории управления. В настоящей работе выводятся аналитические формулы для точных решений алгебраических матричных уравнений Риккати. Эти решения выражены в виде золотого матричного сечения.*

Ключевые слова: алгебраические матричные уравнения Риккати, золотое сечение, среднее геометрическое матриц.

## 1. Введение

История золотого соотношения уходит вглубь тысячелетий. В дошедшей до нас античной литературе золотое сечение впервые встречается во II книге «Начал» Евклида. С тех пор теория золотого сечения получила активное развитие: обобщенные золотые сечения и «золотые» алгебраические уравнения, новые рекуррентные числовые последовательности – p-числа Фибоначчи и p-числа Люка, новая теория гиперболических функций, алгоритмическая теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и новая теория действи-

[1] *Емельянова Татьяна Владимировна, кандидат технических наук, доцент* (emelyanova@apingtu.edu.ru).
[2] *Кусков Андрей Александрович, студент* (emelyanova@apingtu.edu.ru).

тельных чисел, $Z$-свойство натуральных чисел, новые компьютерные арифметики и другие [2].

В настоящее время актуальна проблема решения уравнений Риккати, имеющих большое прикладное значение. К этой проблеме приводит ряд задач линейной теории оптимального управления. Поэтому представляет определенную ценность рассмотрение еще одного метода решения уравнений Риккати.

В данной статье рассмотрен метод золотого сечения для решения матричных уравнений Риккати. Разработан алгоритм реализации данного метода в системе компьютерной математики MATLAB.

## 2. Матричные уравнения Риккати

Уравнение Риккати встречается в различных областях математики, например, в алгебраической геометрии и в теории конформных отображений, и в прикладных задачах. В современной теории управления сложилась обширная область применения алгебраических матричных уравнений Риккати [4]:

$$XAX - MX - XM^T - B = 0,$$

где $A \geq 0$, $B \geq 0$, $M$ – квадратная матрица.

Например, стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати играет центральную роль в задачах линейно-квадратической, $H^2$ и $H^\infty$ оптимизации [7].

Рассмотрим матричные уравнения Риккати в следующем виде [6]:

(1) $XA^{-1}X + X - (B - A) = 0,$

(2) $XA^{-1}X - X - (B - A) = 0,$

где матрицы $A$, $B$ - квадратные с вещественными элементами, $0 < A \leq B$.

В работе [6] было обобщено понятие золотого сечения для положительно-определенных матриц.

Золотое сечение (золотая пропорция, деление в крайнем и среднем отношении) — соотношение двух величин, равное соотношению их суммы к большей из данных величин [1]. С математической точки зрения, отношение большей части к меньшей в золотом сечении выражается квадратичной иррациональностью:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

и, наоборот, отношение меньшей части к большей:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Приблизительная величина золотого сечения равна 1,6180339887. В процентном округлённом значении — это деление величины на 62 % и 38 %, соответственно [1].

Рассмотрим квадратные уравнения в общем виде:

(3) $$\frac{x^2}{a} \mp x - (b-a) = 0, \quad 0 < a \le b \ .$$

Уравнения (3) имеют единственные положительные вещественные решения, которые могут быть выражены через золотое сечение:

(4) $$a \natural b = \frac{1}{2}\left( \pm a + \sqrt{4ab - 3a^2} \right) \ .$$

Рассмотрим, например, квадратное уравнение $x^2$-$x$-1=0.Оно имеет единственное положительное решение:

(5) $$x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right).$$

Золотое соотношение для данного примера может быть вычислено по формуле (4) $1 \natural 2 = 1/2\left(1+\sqrt{5}\right)$, что соответствует решению (5) исходного уравнения.

Таким образом, решение алгебраического уравнения может быть найдено как золотое сечение коэффициентов рассматриваемого уравнения.

Необходимо найти решение алгебраических матричных уравнений (1) и (2) в виде золотого сечения. Для этого будем использовать понятие среднего геометрического двух матриц.

Среднее геометрическое $A\#B$ положительно полуопределенных матриц $A$ и $B$ определяется и характеризуется максимумом всех $X \ge 0$, для которых матрица

$$\begin{pmatrix} A & X \\ X & B \end{pmatrix}$$

является положительно полуопределенной [5]. Если $A$ является обратимой, то среднее геометрическое положительно полуопределенных матриц $A$ и $B$ можно вычислить по следующей формуле [5]:

$$A\# B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{1/2}A^{1/2}. \tag{6}$$

Одним из главных свойств среднего геометрического положительно-определенных матриц $A$ и $B$ является то, что его можно применить для решения матричных уравнений Риккати.

Лемма Риккати. Пусть $A$ – положительно определенная матрица, $B$ – положительно определенная (полуопределенная) матрица. Тогда среднее геометрическое матриц $A\#B$ является единственным положительно определенным (полуопределенным) решением уравнения Риккати $XA^{-1}X=B$ [3].

Операция вычисления среднего геометрического имеет следующие свойства [3]:

а) $A\#B=B\#A$

б) $(A\#B)^{-1}=A^{-1}\#B^{-1}$ для положительно определенных матриц $A$ и $B$;

в) $M(A\#B)M^{T}=(MAM^{T})\# (MBM^{T})$ для любой несингулярной матрицы $M$;

г) $2(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\leq A\#B\leq 1/2(A+B)$ для положительно определенных матриц $A$ и $B$.

Теорема 1. Пусть $A$ – положительно определенная матрица, $B$ – положительно полуопределенная матрица. Тогда нелинейные матричные уравнения

$$0 = X^2 \pm X - A^2,$$

$$0 = BX^{-1}B - X \pm A,$$

$$0 = XA^{-1}X \pm X - B$$

имеют единственные положительно определенные решения

$$S_1^{\pm}(A) = \frac{1}{2}\left(\mp I + I\#\left(I + 4A^2\right)\right),$$

$$S_2^{\pm}(A,B)=\frac{1}{2}\left(\pm A + A\#\left(A+4BA^{-1}B\right)\right),$$

$$S_3^{\pm}(A,B)=\frac{1}{2}\left(\mp A + A\#\left(A+4B\right)\right),$$

соответственно [6].

Рассмотрим матричные уравнения (1) и (2). Пусть

$Y = A^{-1/2}XA^{-1/2}$ и $D = A^{-1/2}(B-A)A^{-1/2}$.

Тогда $Y^2 \pm Y - D = 0$ и, следовательно, по теореме 1 получим:

$Y = S_1^{\pm}\left(D^{1/2}\right)$.

Отсюда можно определить положительно определенные решения уравнений (1) и (2), соответственно:

$$X = A^{1/2}YA^{1/2} = A^{1/2}S_1^{\pm}\left(D^{1/2}\right)A^{1/2} =$$

$$= A^{1/2}\left(\frac{1}{2}\left(\mp I + I\#\left(I+4D\right)\right)\right)A^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mp A + A\#\left(A+4(B-A)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\mp A + A\#\left(4B-3A\right)\right),$$

что соответствует решениям $S^{\pm}_3$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть *A* и *B* – положительно определенные матрицы, причем $A \le B$. Матричные уравнения Риккати (1) и (2) имеют единственные положительно определенные решения, соответственно:

(7) $X = A \natural B = \frac{1}{2}\left(-A + A\#\left(4B-3A\right)\right)$,

(8) $X = A \overline{\natural} B = \frac{1}{2}\left(A + A\#\left(4B-3A\right)\right)$.

$A \natural B$ называется золотым сечением матриц *A* и *B* [6].

<u>Следствие.</u> Пусть *A* и *B* – положительно определенные матрицы ($A \le B$). Тогда используя теорему 2 можно установить взаимосвязь между золотыми сечениями уравнений (1) и (2):

(9) $A \natural B + A = A \overline{\natural} B$.

Рассмотрим некоторые свойства золотого сечения $A \natural B$ [6].

Пусть *A* и *B* – положительно определенные матрицы и $A \le B$.

а) $M(A \natural B)M^{\mathrm{T}}=(MAM^{\mathrm{T}}) \natural (MBM^{\mathrm{T}})$ для любой несингулярной матрицы $M$ размера $n$x$n$.

б) $A \natural B=A\#B$, тогда и только тогда, когда $A=B$.

в) $A \natural B=1/2\cdot A^{1/2}(I+(4A^{-1/2}BA^{-1/2}-3I)^{1/2})A^{1/2}$.

г) если $A<B$, то $A \natural B=1/2(A+(B-A)\#(4A+A(B-A)^{-1}A))$.

д) средне гармонически-геометрические золотые неравенства $A\le 2(A^{-1}+B^{-1})^{-1}\le A\#B\le A \natural B\le B$.

е) если $B\ge 3A$ ($B\le 3A$), то $A \natural B\le 1/2(A+B)$ ($A \natural B\ge 1/2(A+B)$).

ж) $(A \natural B)\#(A \overline{\natural} B)=A\#(B-A)$.

з) $A \natural B=A\#(B-A \overline{\natural} B)$ $A \overline{\natural} B=A\#(B+A \natural B)$.

## 3. Программная реализация алгоритма решения матричных уравнений Риккати

Алгоритм решения матричных уравнений Риккати требует выполнения различных математических функций с матрицами (сложение, умножение, обращение матриц, а также возведение матриц в дробную степень). Поэтому для реализации этого алгоритма наиболее подходящей системой программирования является MATLAB.

С помощью программных средств MATLAB можно вычислить значения (7) и (8), а затем сравнить их с результатами, полученными при решении уравнений (1) и (2), соотвественно, в интерактивной системе моделирования динамических систем Simulink.

Рассмотрим алгоритм вычисления золотого сечения положительно-определенных матриц.

Сначала выполняется инициализация исходных данных. Затем необходимо проверить являются ли матрицы $A$ и $B$ положительно определенными. Для этого вычисляются собственные значения матриц $A$ и $B$. Если все собственные значения положительны, то матрица является положительно определенной. Еще одним обязательным условием алгоритма является обратимость матрицы $A$. Затем следует проверка условия $A\le B$.

Далее вычисляется среднее геометрическое двух матриц (6) и золотое сечение в соответствии с формулами (7) или (8). При подстановке полученного решения в исходные уравнения (1) или (2) необходимо убедится, что равенства выполняются.

Были использованы следующие исходные данные:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 1.2 & 0.5 \\ 1.3 & 0.6 & 1.5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1.864 & 1.272 & 1.209 \\ 1.225 & 1.851 & 1.041 \\ 1.133 & 1.099 & 1.982 \end{bmatrix}.$$

В результате решения уравнения (1) с помощью золотого сечения в системе MATLAB были получены следующие числовые значения:

Золотое сечение:

$$X = A \natural B = \begin{bmatrix} 0.1254 & 0.1826 & 0.1053 \\ 0.1695 & 0.4860 & 0.1987 \\ 0.7494 & 0.5780 & 0.8936 \end{bmatrix}.$$

Проверка решения уравнение Риккати (1):

$$1.0e\text{-}014 \cdot \begin{bmatrix} 0.0666 & 0.0278 & -0.0694 \\ 0.1110 & 0.4219 & 0.0777 \\ -0.2220 & -0.7438 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

В результате решения уравнения (2) с помощью золотого сечения в системе MATLAB были получены следующие числовые значения:

Золотое сечение:

$$X = A \overline{\natural} B = \begin{bmatrix} 1.7894 & 1.0542 & 1.1145 \\ 0.9949 & 1.1371 & 0.7394 \\ 0.5819 & 1.0774 & 1.3760 \end{bmatrix}.$$

Проверка решения уравнение Риккати (2):

$$1.0e\text{-}014 \cdot \begin{bmatrix} 0.1110 & 0.0777 & 0.0000 \\ -0.0333 & 0.2887 & 0.0111 \\ -0.2665 & -0.7438 & -0.3109 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнений (1) и (2) в системе моделирования Simulink привело к тем же результатам (рис.1, 2), из чего можно сделать вывод, что значения, полученные по формулам (7) и (8), являются единственными положительно определенными решениями.

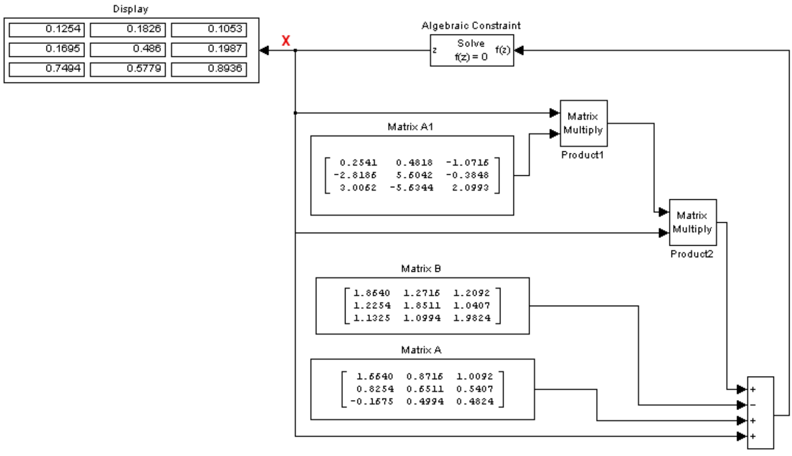


*Рисунок 1. Решение уравнения (1) с помощью средств Simulink.*

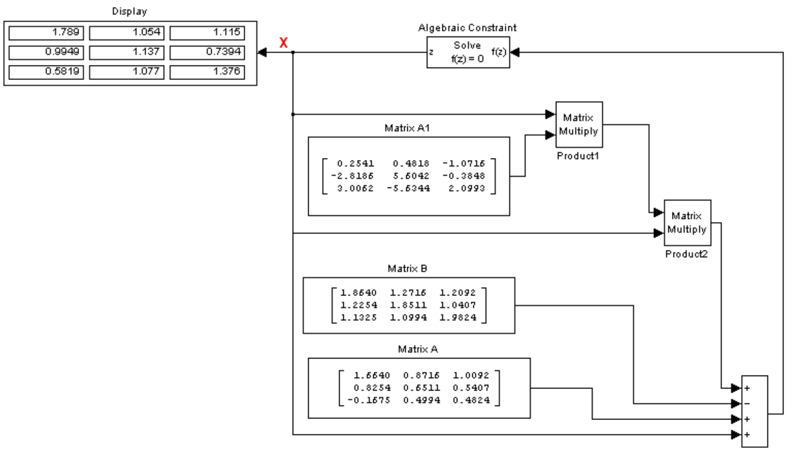


*Рисунок 2. Решение уравнения (2) с помощью средств Simulink.*

## 4. Заключение

Матричных уравнений Риккати часто применяются во многих системах управления. В данной работе рассмотрено золотого сечения положительно определенных матриц и приведены примеры его применения к алгебраическим матричным уравнениям Риккати.

Алгоритм решения алгебраических матричных уравнений Риккати с использованием золотого сечения реализован в системе компьютерной математики MATLAB. Полученные результаты подтверждены с помощью решения этих же уравнений в интерактивной системе моделирования динамических систем Simulink без использования золотого сечения.

Таким образом, золотое сечение определяет единственное решение алгебраических матричных уравнений Риккати.

## Литература

1. ЛАВРУС В. *Золотое сечение*. НиТ, 2000. – 22 с.
2. СТАХОВ А.П. *Золотое сечение, священная геометрия и математика гармонии* // Метафизика. Век XXI: сборник. – М.: Бином, 2006. – С. 174-215.
3. ANDO, T. Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products // Linear Algebra Appl. – 1979. – №26. – P. 203–241.
4. BERNSTEIN D.S. Matrix Mathematics / Princeton University Press. – Princeton: Oxford, 2005. – 726 p.
5. LAWSON, J. D., LIM, Y. The geometric mean, matrices, metrics, and more //Amer. Math.Monthly.–2001.– № 108. – P.797–812.
6. LIM, Y. The matrix golden mean and its applications to Riccati matrix equations // SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. – 2006. – Vol. 29, № 1. – P. 54–66.
7. http://matlab.exponenta.ru/mu_analys/book2/default.php (последняя дата обращения: 27.06.2014).

# APPLICATION OF GOLDEN MEAN IN THE MATRIX EQUATIONS

**Tatyana Emelyanova**, Arzamas Polytechnic Institute, Arzamas, Cand.Tech.Sci, docent (*emelyanova@apingtu.edu.ru*).
**Andrey Kuskov,** St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, student (*emelyanova@apingtu.edu.ru*).

*Abstract: Matrix equations are used in many applications, especially in control theory. In this paper, analytical formulas are derived for the exact solutions of Riccati algebraic matrix equations. These solutions are expressed in the form of a matrix golden mean..*

Keywords: Riccati algebraic matrix equations, *golden mean,* geometric mean matrices.