УДК 519.71
ББК 01.01.09

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ШАГА ДИСКРЕТИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ АНАЛОГА КРУГОВОГО КРИТЕРИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Брынцева Т. А[2], *(Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург)*

Находятся оценки максимального шага дискретизации для непрерывных нелинейных систем с дискретным управлением на основе кругового критерия для систем с запаздыванием. Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность оценки для линейного и нелинейного случая.

Ключевые слова: оценка шага дискретизации, системы с запаздыванием, синхронизация нелинейных систем, мобильные роботы.

Введение

В данной работе рассматривается метод оценки максимального шага дискретизации для непрерывных систем с дискретным управлением. Подобные задачи встречаются достаточно часто, так как объекты в окружающей среде изменяют свои свойства непрерывно, а управление, основанное на компьютерных технологиях, подается через некоторые промежутки времени. Оценка строится с помощью метода, предложенного в работе [2], который основывается на построении аналога кругового критерия

[1] *Научный руководитель: Фрадков А. Л., профессор кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета СПбГУ*

[2] *Татьяна Александровна Брынцева, студент (tatiana.bryntseva@gmail.com).*

абсолютной устойчивости для систем с переменным запаздыванием. В статье [2] рассматриваются линейные системы с нелинейным управлением, имеющим запаздывание. В данной работе класс систем расширен до нелинейных. Эффективность метода проиллюстрирована на примере синхронизации движения группы мобильных роботов, сперва для линеаризованной системы, а затем и для исходной.

1. Синхронизация двух мобильных роботов. Линеаризованная модель.

Рассмотрим задачу синхронизации движения двух мобильных роботов. Считая, что робот движется при малых скоростях, мы можем ограничиться кинематической моделью тележек, ведущей и ведомой. Она будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = v\cos(\varphi_1) & \dot{y}_1 = v\cos(\varphi_2) \\ \dot{x}_2 = v\sin(\varphi_1) & \dot{y}_2 = v\sin(\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_1 = \omega & \dot{\varphi}_2 = r. \end{array} \tag{1}$$

где r – управление, ω – фиксированная угловая скорость, v – фиксированная линейная скорость. После представления (1) в виде системы относительно ошибок $e = x_2 - y_2$, $\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2$ и построения управления (см. [3]), получаем

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t, X(t-\tau(t))) + d\eta(t,\varepsilon), \\ &u(t, X(t-\tau(t))) = \widetilde{K}X(t-\tau(t)), \end{aligned} \tag{2}$$

где $X = \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$ и
$\widetilde{K} = \begin{bmatrix} \gamma K & Kv - \gamma \end{bmatrix}$, K, γ – вещественные константы, $K < 0$, $\gamma > 0$, $\eta(t) = 2\cos(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})\sin(\frac{\varepsilon}{2}) - \varepsilon$, $\tau(t)$ – функция, такая, что $t_k = t - \tau(t)$, и $\tau_0 \leqslant \tau(t) \leqslant T$, где T, τ_0 – некоторые положительные постоянные числа. Положим $\sigma = c^*X(t - \tau(t))$, $c^* = \widetilde{K}$, тогда после линеаризации система (2) приобретает вид:

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) = AX(t) + b\varphi(t, \sigma(t-\tau(t))), \\ &\varphi(t, \sigma(t-\tau(t))) = \sigma. \end{aligned} \tag{3}$$

Условие вида сектора для φ: $\mu_1 \leqslant \frac{\varphi(t,\sigma)}{\sigma} \leqslant \mu_2$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Рассмотрим теорему из работы [2]:

Теорема 1. *Имеется система автоматического управления*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = Ax(t) + b\varphi(t, \sigma(t - \tau(t))), \\ &\sigma = c^* x, \end{aligned} \tag{4}$$

где A –постоянная $n \times n$ матрица, b, c – постоянные n-векторы, x – n-вектор состояния, $\varphi(t, \sigma)$ – непрерывная нелинейная функция, такая, что выполняются неравенства

$$\mu_1 \leqslant \frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leqslant \mu_2.$$

Пусть существует число μ_0, $\mu_1 \leqslant \mu_0 \leqslant \mu_2$, такое, что матрица $A + \mu_0 bc^*$ гурвицева. Обозначим через $W(p) = c^*(A - pI_n)^{-1}b$ - передаточную функцию, описывающую линейную часть системы, а за $\Delta(p)$ – характеристический многочлен матрицы коэффициэнтов A. Пусть существует положительное число α, такое, что $4\alpha\mu_1\mu_2 < 1$ и функция $\pi(\omega) = 1 + (\mu_1 + \mu_2)\mathrm{Re}(\mathrm{W}(\mathrm{j}\omega)) + \mu_1\mu_2|(\mathrm{W}(\mathrm{j}\omega)|^2 - \alpha(\mu_2 - \mu_1)^2/(1 - 4\alpha) - \mathrm{T}^2\omega^2/4\alpha$, где $\omega \in R$, $j = \sqrt{-1}$, удовлетворяет неравенствам :

$$\lim_{\omega \to \infty} \pi(\omega) > 0, \tag{5}$$

$$|\Delta(j\omega)|^2 \pi(\omega) > 0 \qquad \forall \omega \geqslant 0, \tag{6}$$

(в точках ω, для которых $|\Delta(j\omega)| = 0$, неравенство (6) понимается как предельное).
Тогда существуют положительные постоянные числа C_1, C_2, ε, которые зависят только от коэффициэтов линейной части системы и чисел μ_1, μ_2, T, такие, что для любого решения $x(t)$ системы (4) с непрерывной начальной функцией $x_0(t)$, определенной при $-\tau_0 \leqslant t \leqslant 0$, справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leqslant (C_1\|x_0(0)\| + C_2 \max_{-\tau_0 \leqslant t \leqslant 0} |c^* x_0(t)|) \exp(-\varepsilon t)$$

для всех $t \geqslant 0$.
(Строгая монотонность $t - \tau$ и непрерывность τ необязательны, достаточно монотонности и непрерывности на промежутках $t - \tau(t)$ соответственно)

Передаточная функция линейной части системы (2):

(7)

$$W(p) = c^*(A-pI)^{-1}b = \begin{bmatrix}\gamma K & Kv-\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-p & v\\ 0 & -p\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}\gamma K & Kv-\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/p & -v/p^2\\ 0 & -1/p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -\frac{v\gamma K}{p^2} - \frac{Kv-\gamma}{p}.$$

Характеристический полином матрицы коэффициентов:

$$\Delta(p) = \det(\mathrm{pI}-\mathrm{A}) = \begin{vmatrix}p & -v\\ 0 & p\end{vmatrix} = \mathrm{p}^2.$$

Определим функцию $\pi(\omega)$ для системы (3), после приведения подобных она примет вид:

(8)

$$\pi(\omega) = \frac{(v\gamma K)^2}{\omega^4} + \frac{1}{\omega^2}\big(2v\gamma K - \frac{(Tv\gamma K)^2}{4\alpha} + (Kv-\gamma)^2\big) + 1 - \frac{(Kv-\gamma)^2\,T^2}{4\alpha}.$$

Положим K и γ равными -5 и 0.6 соответственно, а α выберем сколь угодно близкое к $1/4$. Проверим выполнение (5):

$$\lim_{\omega\to\infty}\pi(\omega) = 1 - \frac{(Kv-\gamma)^2\,T^2}{4\alpha} > 0,$$

Неравенство выполняется при $0 < T < 0.909$. Условие (6) также верно при параметре T, принадлежащем указанному выше интервалу. Приблизительная оценка шага дискретизации, полученная при моделировании равна 1.8.

2. Случай нелинейной системы

Чтобы оценить шаг дискретизации для исходной системы, рассмотрим аналог кругового критерия для систем, имеющих нелинейность:

(9)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\begin{bmatrix}\varphi_1(t,\sigma_1(t-\tau(t)))\\ \varphi_2(t,\sigma_2(t))\end{bmatrix},$$

$$\sigma = c^*x = \begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{bmatrix},$$

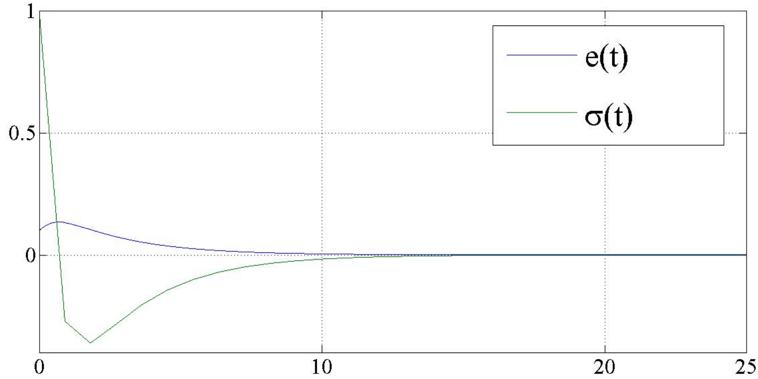

Рис. 1. Ошибки e и ε при шаге дискретизации $h = 0.909$, линейный случай

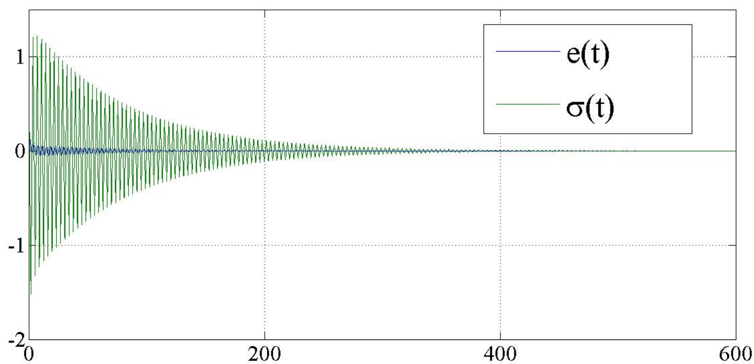

Рис. 2. Ошибки e и ε при шаге дискретизации $h = 1.8$, линейный случай

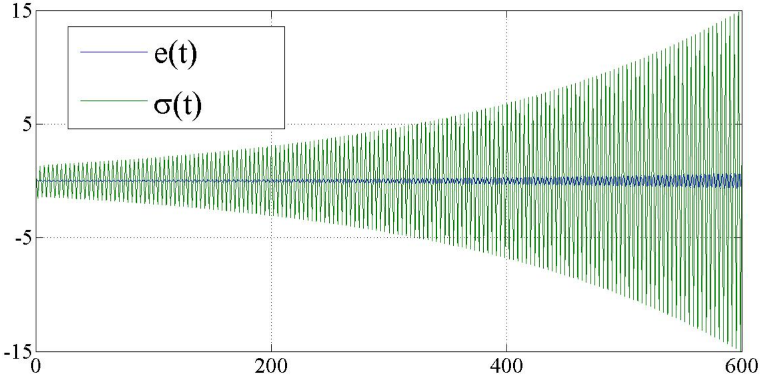

Рис. 3. Ошибки e и ε при шаге дискретизации $h = 1.81$, линейный случай

где A –постоянная $n \times n$ матрица, b, c – $n \times 2$ матрицы, x – n-вектор состояния, $\varphi_1(t, \sigma_1)$, $\varphi_2(t, \sigma_2)$ – непрерывные нелинейные функции, такие, что выполняются неравенства

(10) $$\mu_1 \leqslant \frac{\varphi_1(t, \sigma_1)}{\sigma_1} \leqslant \mu_2, \quad \eta_1 \leqslant \frac{\varphi_2(t, \sigma_2)}{\sigma_2} \leqslant \eta_2.$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение:

Теорема 2. *Рассмотрим систему (9) Пусть существуют такие числа μ_0, η_0 такие, что $(\mu_2 - \mu_0)(\mu_0 - \mu_1) \geqslant 0$, $(\eta_2 - \eta_0)(\eta_0 - \eta_1) \geqslant 0$ и матрица $A + \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \eta_0 \end{bmatrix} bc^*$ гурвицева. Пусть существует положительное число α, такое, что $4\alpha\mu_1\mu_2 < 1$, и функция*

(11)
$$\pi(\omega) = \frac{1}{(1-4\alpha)}\mathrm{Re}\Bigg[\Bigg(\begin{bmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix}\mathrm{W(j\omega)}+\mathrm{I_n}\Bigg)^*\Bigg(\mathrm{I_n}+\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \eta_1 \end{bmatrix}\mathrm{W(j\omega)}\Bigg)-$$
$$-\alpha\Bigg(\begin{bmatrix} \mu_1+\mu_2 & 0 \\ 0 & \eta_1+\eta_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \mu_1\mu_2 & 0 \\ 0 & \eta_1\eta_2 \end{bmatrix} W(j\omega)\Bigg)^* \times$$
$$\times\Bigg(\begin{bmatrix} \mu_1+\mu_2 & 0 \\ 0 & \eta_1+\eta_2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \mu_1\mu_2 & 0 \\ 0 & \eta_1\eta_2 \end{bmatrix} W(j\omega)\Bigg) - \theta\omega^2 W(j\omega)^* W(j\omega)\Bigg]$$

удовлетворяет неравенствам :

$$\lim_{\omega\to\infty}\pi(\omega) > 0, \tag{12}$$

$$|\Delta(j\omega)|^2\pi(\omega) > 0 \qquad \forall\omega \geqslant 0, \tag{13}$$

(в точках ω, для которых $|\Delta(j\omega)| = 0$, неравенство (6) понимается как предельное).
Тогда существуют положительные постоянные числа C_1, C_2, ε, которые зависят только от коэффициэтов линейной части системы и чисел μ_1, μ_2, T, такие, что для любого решения $x(t)$ системы (4) с непрерывной начальной функцией $x_0(t)$, определенной при $-\tau_0 \leqslant t \leqslant 0$, справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leqslant (C_1\|x_0(0)\| + C_2 \max_{-\tau_0\leqslant t\leqslant 0}|c^* x_0(t)|)\exp(-\varepsilon t)$$

для всех $t \geqslant 0$.

3. Синхронизация двух мобильных роботов. Нелинейная модель.

Оценим шаг дискретизации для системы (2) с параметрами $K = -5, \gamma = 0.6$ с помощью полученных результатов. Представим (2) в следующем в виде:

$$\dot{X} = AX + b\begin{bmatrix}\sigma_1(t-\tau(t)))\\ \eta(\sigma_2)\end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{bmatrix} = c^* X, \tag{14}$$

где $A = \begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $c^* = \begin{bmatrix}-3 & -1.1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Для нелинейности η выполняется неравенство $-2 \leqslant \eta/\sigma_2 \leqslant 0$, вычислим передаточную функцию линейной части:

$$W(p) = c^*(A - pI)^{-1}b = \begin{bmatrix}0.3/p^2 + 1.1/p & 0.3/p\\ -1/p & 0\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Тогда $W(j\omega) = \begin{bmatrix} -0.3/\omega^2 - 1.1j/\omega & -0.3j/\omega \\ -j/\omega & 0 \end{bmatrix}$. Построим функцию (11):

$$(16) \quad \pi(\omega) = \mathrm{Re}\Bigg[\bigg(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathrm{W(j\omega) + I} \bigg)^* \bigg(\mathrm{I} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{W(j\omega)} \bigg) -$$

$$-\alpha\bigg(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W(j\omega) \bigg)^* \bigg(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} W(j\omega) \bigg) -$$

$$- \theta\omega^2 (W(j\omega))^* (W(j\omega)) \Bigg] \frac{1}{1 - 4\alpha}.$$

После приведения подобных и выбора α сколь угодно близким к $1/4$ функция $\pi(\omega)$ примет вид:

$$(17) \quad \pi(\omega) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.09/\omega^4 + (0.61 - 0.09T^2)/\omega^2 + 1 - 2.21T^2 & 0.33/\omega^2 - 0.33T^2 \\ 0.33/\omega^2 - 0.33T^2 & 0.09/\omega^2 + 1 - 0.09T^2 \end{bmatrix}.$$

Проверим условие (12):

$\lim_{\omega \to \infty} \pi(\omega) = \begin{bmatrix} 1 - 2.21T^2 & -0.33T^2 \\ -0.33T^2 & 1 - 0.09T^2 \end{bmatrix} > 0$. Оно выполняется, если все миноры данной матрицы положительны, то есть

(18)

$$\begin{array}{lll} 1 - 2.21T^2 > 0 & \text{и} & (1 - 2.21T^2)(1 - 0.09T^2) - 0.1089T^4 > 0 \\ T < 0.67267 & & 1 - 2.3T^2 + 0.09T^4 > 0 \\ & & T < 0.6651. \end{array}$$

Таким образом, условие (12) верно при $0 < T < 0.6651$. Проверим выполнение (13) при T из найденного промежутка:

$$(19) \quad |\Delta(j\omega)|^2 \pi(\omega) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.09 + (0.61 - 0.09T^2)\omega^2 + (1 - 2.21T^2)\omega^4 & 0.33\omega^2 - 0.33T^2\omega^4 \\ 0.33\omega^2 - 0.33T^2\omega^4 & 0.09\omega^2 + (1 - 0.09T^2)\omega^4 \end{bmatrix}.$$

Условие положительности первого минора:

$$(20) \qquad 0.09 + (0.61 - 0.09T^2)\omega^2 + (1 - 2.21T^2)\omega^4 > 0.$$

Так как $0.61 - 0.09T^2 > 0$ и $1 - 2.21T^2 > 0$ при $0 < T < 0.6651$, то и (20) будет положительно на данном промежутке. Рассмотрим неравенство для второго минора, после приведения подобных оно примет вид:

(21)

$$\omega^8(1-2.3T^2+0.09T^4)+\omega^6(0.7-0.6201T^2+0.0081T^4)+ \\ +\omega^4(0.036-0.0162T^2)+0.0081\omega^2>0.$$

Все коэффициенты полинома из неравенства (21) положительны при

$0<T<0.6651$, (21) верно на данном промежутке.

Следует, оценка на шаг дискретизации: $T<0.6651$. При моделировании был получен верхний предел T, приблизительно равный 1.81.

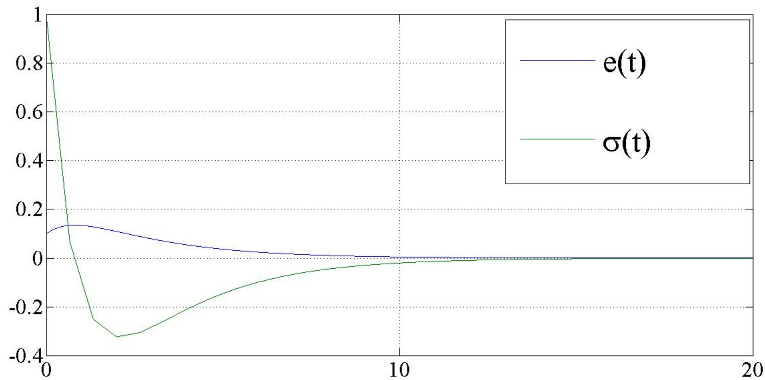

Рис. 4. Ошибки e и ε при шаге дискретизации $h = 0.6651$

4. Заключение

В данной работе был исследован метод оценки шага дискретизации для непрерывных линейных систем с дискретным управлением на основе аналога кругового критерия, получен подобный

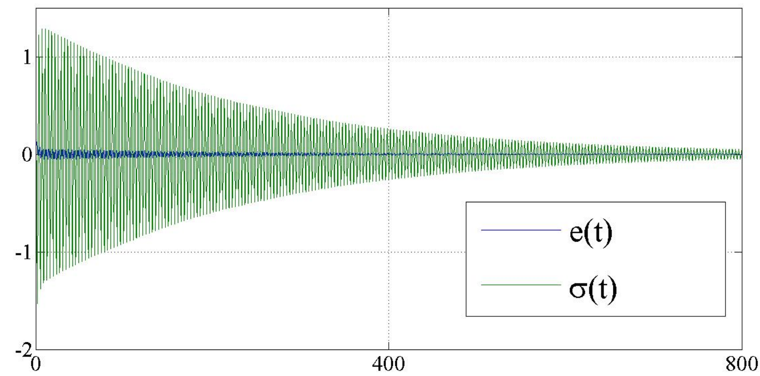

Рис. 5. Ошибки e *и* ε *при шаге дискретизации* $h = 1.81$

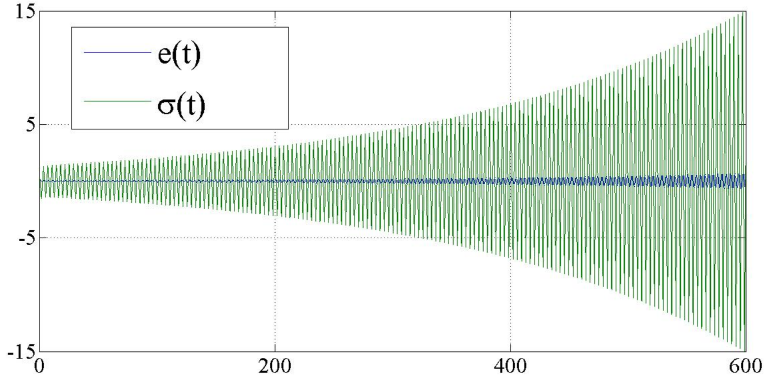

Рис. 6. Ошибки e *и* ε *при шаге дискретизации* $h = 1.82$

для нелинейных систем. Эффективность способа была проиллюстрирована на примере синхронизации мобильных роботов. Для линеаризованной системы точность оценки приблизительно составляет 50%, для нелинейной модели - около 37%.

Литература

1. ГЕЛИГ А. Х., ЛЕОНОВ Г. А., ЯКУБОВИЧ В. А. *Устойчивость нелинейных систем с неединственым состоянием равновесия* // Наука. - 1978.
2. ЧУРИЛОВА М. Ю. *Аналог кругового критерия абсолютной устойчивости для систем с переменным запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. - 1995. - №. 2. - С. 52–56.
3. USIK E. V., SEIFULLAEV R. E., FRADKOV A. V., BRYNTSEVA T. A. *Accuracy of Fridman's estimates for sampling interval: nonlinear system case study* //IFAC. -2014.

ESTIMATES OF MAXIMUM SAMPLING INTERVAL WITH CIRCLE CRITERION FOR DELAYED SYSTEMS WITH TIME-VARYING DELAY

Tatina Bryntseva, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, student (tatiana.bryntseva@gmail.com).

Abstract: Obtains estimates of maximum sampling interval for nonlinear discrete-continious systems using circle criterion for delayed systems. Provides the examples, that shows efficiency of method for linear and nonlinear cases.

Keywords: estimate of sampling interval, delayed systems, synchronization of nonlinear systems, mobile robots.