УДК 519.714 + 681.514
ББК 22.1

ЧАСТОТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НЕНУЛЕВЫХ СРЕДНИХ ВО ВНЕШНЕМ ВОЗМУЩЕНИИ

Кустов А.Ю.[1],
(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Для подавления действующих на объекты внешних возмущений в теории управления используются различные подходы. Хорошо известны работы по построению $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$- оптимальных управлений. Созданная в середине 90-х гг. анизотропийная теория является одним из нескольких направлений, ставящих своей задачей обобщение $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$- подходов. Базовым понятием этой теории является анизотропийная норма, определяемая как супремум среднеквадратичного коэффициента усиления по всевозможным возмущениям с ограниченной средней анизотропией – мерой отличия от эталонной последовательности. Для синтеза субоптимальных анизотропийных регуляторов, стабилизирующих систему, необходимо уметь проверять условие ограниченности анизотропийной нормы заданным числом. Решение данной задачи в случае внешних возмущений с нулевыми математическими ожиданиями было получено, и названо частотной теоремой для анизотропийной нормы. В данной работе получена аналогичная теорема для случая внешних возмущений в виде последовательности гауссовских случайных векторов с ненулевыми средними и ограниченной средней анизотропией.

Ключевые слова: Анизотропийная теория управления, средняя анизотропия, анизотропийная норма, гауссовские случайные векторы, частотная теорема для анизотропийной нормы.

---

[1] *Кустов Аркадий Юрьевич, м.н.с., (arkadiykustov@gmail.com).*

1. Введение

С 1994 года в России началось создание теории оптимального управления, целью которой является построение робастных регуляторов, минимизирующих специальную норму замкнутой системы при наличии случайных внешних возмущений [1, 2, 3]. Базовыми терминами этой теории являются понятия средней анизотропии последовательности и анизотропийной нормы системы [4]. Первая из них определяет количественную меру информационного отличия поступающего на вход системы возмущения от эталонного воздействия, за которое принимается гауссовский белый шум. Анизотропийная норма системы введена как наибольшее значение среднеквадратичного коэффициента усиления по всем внешним возмущениям с ограниченной сверху средней анизотропией.

В случае, если средняя анизотропия сигнала равна нулю, выражение для анизотропийной нормы с точностью до постоянного множителя совпадает с $\mathcal{H}_2$-нормой замкнутой системы. При отсутствии каких-либо ограничений на класс входных возмущений анизотропийная норма становится равной $\mathcal{H}_\infty$-норме системы. Таким образом, анизотропийная теория в определенной степени обобщает постановки известных задач $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$- оптимальных управлений.

До последнего времени в рамках анизотропийной теории предполагалось, что на вход объекта управления поступает случайный сигнал с нулевым математическим ожиданием. В реальных технических системах внешнее возмущение может содержать детерминированную составляющую, отличную от нуля. Поэтому была проделана работа по созданию анизотропийной теории управления в случае ненулевого среднего векторов входной последовательности [5].

Для решения задачи синтеза субоптимального анизотропийного регулятора требуется прежде всего уметь проверять, при каких условиях анизотропийная норма заданной системы с выбранным уровнем ограничения на среднюю анизотропию внешнего возмущения была бы меньше некоторого положительного числа. Решение данной задачи для системы с внешними возмущениями с нулевыми математическими ожиданиями было получено, и названо частотной теоремой для анизотропийной нормы [6]. В данной работе получена аналогичная теорема для случая внешних возмущений в виде последовательности гауссовских случайных векторов с ненулевыми средними и ограниченной средней анизотропией.

2. Основные понятия анизотропийной теории

В теории информации с середины XX века предлагаются различные способы количественного описания информационных характеристик сигнала. Одним из наиболее важных терминов считается относительная энтропия. Именно на этом понятии основаны определения анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов.

Рассмотрим два m-мерных гауссовских случайных вектора w и v с плотностями распределения вероятности

$$f(x) = ((2\pi)^m |S|)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T S^{-1}(x-\mu)\right)$$

и

$$p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{x^T x}{2\lambda}\right)$$

соответственно. Как видно из приведенных выражений, вектор w имеет ненулевое среднее $\mu \neq 0$ и ковариационную матрицу $S = S^T \succ 0$, а вектор v – нулевое среднее и скалярную ковариационную матрицу λI_m. По определению [1] анизотропия вектора w равна минимальному значению относительной энтропии $\mathbf{D}(f||p_\lambda)$ по всем значениям $\lambda > 0$:

$$\mathbf{A}(w) \triangleq \min_{\lambda>0} \mathbf{D}(f||p_\lambda) = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{mS}{\mathrm{tr}S + |\mu|^2}\right).$$

Анизотропия случайного вектора w может трактоваться как “расстояние” между плотностью $f(x)$ его распределения вероятности и множеством эталонных плотностей $\{p_\lambda(x) : \lambda > 0\}$.

Рассмотрим стационарную эргодическую последовательность $W = \{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, выступающую в роли внешнего возмущения, подающегося на вход объекта управления. Средняя анизотропия последовательности W введена в [1] как отношение

$$\overline{\mathbf{A}}(W) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{0:N-1}$ – расширенный вектор последовательности, определяемый как

$$W_{0:N-1} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Используя результаты работы [5] и формулу типа Колмогорова-Сегё [7], можно показать, что средняя анизотропия последовательности W, сгенерированной из гауссовского белого шума $\{v_k+\nu\}_{k\in\mathbb{Z}}$ $(\nu \neq 0)$ линейным фильтром G со спектральной плотностью $\mathbb{S}(\omega)$, вычисляется по формуле

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\left(\frac{m\mathbb{S}(\omega)}{\|G\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2}\right)d\omega,$$

где $\mathcal{M} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{E}[w_k]$.

Для введения понятия анизотропийной нормы приведем вспомогательные определения. Пусть дана система

$$F \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \\ z_k = Cx_k + Dw_k, \end{cases} \tag{1}$$

отождествимая с матричной передаточной функцией $F(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$, где A – асимптотически устойчивая матрица. $\mathcal{H}_2$-норма функции $F(z)$ определяется как

$$\|F\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}(\widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega))d\omega\right)^{1/2},$$

где $\widehat{F}(\omega) = F(e^{j\omega})$. Среднеквадратичный коэффициент усиления системы F с возмущением W определим как

$$Q(F,W) = \left(\frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\mathbf{E}[|z|_k^2]}{\frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\mathbf{E}[|w|_k^2]}\right)^{1/2}.$$

Анизотропийная норма представляет собой супремум среднеквадратичного коэффициента усиления по внешним возмущениям с ограниченной средней анизотропией:

$$|\!|\!| F |\!|\!|_a = \sup_{W:\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(F,W).$$

Несложно показать, что анизотропийная норма допускает представление

$$(2)\qquad |\!|\!| F |\!|\!|_a = \sup_{G:\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} \left(\frac{\|FG\|_2^2 + |\mathcal{FM}|^2}{\|G\|_2^2 + |\mathcal{M}|^2} \right)^{1/2},$$

где G – формирующий фильтр, генерирующий возмущение W, а $\mathcal{M}$ и $\mathcal{FM}$ – математические ожидания соответственно векторов w_k и z_k на стационарном режиме:

$$\mathcal{M} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}[w_k], \quad \mathcal{FM} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}[z_k].$$

Для нахождения точного значения анизотропийной нормы формула (2) представляется неудобной ввиду трудоемкости вычисления фильтра G_*, на котором достигается супремум. В связи с этим целесообразно привести альтернативную формулу для вычисления анизотропийной нормы.

Пусть известны евклидова норма матожидания $|\mathcal{M}|$ и $\mathcal{H}_2$-норма фильтра $\|G\|_2$. Без потери общности можно считать, что $|\mathcal{M}| < 1$, $\|G\|_2 < 1$ и $|\mathcal{M}|^2 + \|G\|_2^2 = 1$. Введем следующие функции:

$$\Phi(q) = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr} S(q, \Lambda(\omega)) d\omega\,,$$

$$\Psi(q) = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \ln\det S(q, \Lambda(\omega)) d\omega\,,$$

$$A(q) = \frac{m}{2} \left(\ln\left(\frac{\Phi(q)}{1 - |\mathcal{M}|^2} \right) - \Psi(q) \right),$$

$$(3)\qquad N(q) = \sqrt{\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)}(1 - |\mathcal{M}|^2) + |\mathcal{FM}|^2}\,,$$

где $S(q,\Lambda(\omega)) = (I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}$ и $\Lambda(\omega) = \widehat{F}^*(\omega)\widehat{F}(\omega)$. Тогда анизотропийная норма (2) может быть вычислена согласно формуле

$$|\!|\!|F|\!|\!|_a = N(q_*), \quad \text{где} \quad q_* = A^{-1}(a),$$

а выражения для средней анизотропии и среднеквадратичного коэффициента усиления связаны с введенными функциями как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = A(q), \quad Q(F,W) = N(q).$$

3. Частотная теорема для анизотропийной нормы при ненулевых средних во внешнем возмущении

Пусть $F \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$ – линейная дискретная стационарная система вида (1). Будем считать, что на ее вход подается последовательность гауссовских случайных векторов с ненулевыми математическими ожиданиями $\mathbf{E}[w_k] \neq 0$, причем известны уровень a ограничения на среднюю анизотропию последовательности $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, а также значения $|\mathcal{M}|$ и $\|G\|_2$.

Теорема 1. *Анизотропийная норма устойчивой системы $F \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$, на вход которой подается возмущение с ненулевыми средними и ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, удовлетворяет неравенству $|\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant \gamma$ для некоторого положительного числа $\gamma > 0$, если существует такое q из интервала $[\max(0,q_1), \min\left(q_2, \|F\|_\infty^{-2}\right))$, где*

$$q_1 = (1 - |\mathcal{M}|^2 - e^{-2a/m})(\gamma^2 - |\mathcal{FM}|^2)^{-1},$$

$$q_2 = (1 - |\mathcal{M}|^2)(\gamma^2 - |\mathcal{FM}|^2)^{-1},$$

что неравенство

$$\det(\mathfrak{S})^{1/m} \geqslant (1 - |\mathcal{M}|^2 + q|\mathcal{FM}|^2 - q\gamma^2)^{-1}e^{-2a/m}$$

выполнено для матрицы $\mathfrak{S} = (I_m - B^TRB - qD^TD)^{-1}$, соответствующей стабилизирующему решению $R = R^T \succeq 0$ уравнения Риккати

$$R = A^TRA + qC^TC + L^T\mathfrak{S}^{-1}L,$$

$$L = \mathfrak{S}(B^TRA + qD^TC).$$

Доказательство. При известных $|\mathcal{M}|$ и $\|G\|_2$ выражения для средней анизотропии и среднеквадратичного коэффициента усиления можно переписать в виде

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\det(mS_q(\omega))d\omega,$$

$$Q(F, W) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}(\Lambda(\omega)S_q(\omega))d\omega + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2},$$

где

(4) $\quad S_q(\omega) = \sigma(I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}, \quad \sigma = (1 - |\mathcal{M}|^2)(m\Phi(q))^{-1}.$

В силу свойства монотонности функций $A(q)$ и $N(q)$ по аргументу q неравенство $|\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant \gamma$ эквивалентно условию $A(N^{-1}(\gamma)) \geqslant a$. Из формулы (3) для $N(q)$ можно выразить функцию $\Phi(q)$. Действительно, поскольку

$$N^2(q) = \frac{\Phi(q) - q}{q\Phi(q)}(1 - |\mathcal{M}|^2) + |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2,$$

то

$$\Phi(q) = \frac{1 - |\mathcal{M}|^2}{1 - |\mathcal{M}|^2 + q|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2 - qN^2(q)}.$$

Следовательно, учитывая (4), получим

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{A}}(W) \quad &= \quad -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\det(I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}d\omega \\ &\quad -\frac{m}{2}\ln\left(1 - |\mathcal{M}|^2 + q|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2 - qN^2(q)\right) \doteq \alpha(q, N(q)).\end{aligned}$$

Учитывая связь между функциями $\overline{\mathbf{A}}(W)$ и $A(q)$, придем к тому, что неравенство $A(N^{-1}(\gamma)) \geqslant a$ эквивалентно неравенству $\alpha(q,\gamma) \geqslant a$. Более точно,

$$A(N^{-1}(\gamma)) = \alpha(N^{-1}(\gamma), \gamma) = \sup_{q\in[0,\|F\|_\infty^{-2})} \alpha(q, \gamma).$$

Значит, существование такого числа $q \in [0, \|F\|_\infty^{-2})$, что справедливо $\alpha(q,\gamma) \geqslant a$, гарантирует выполнение неравенства $|\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant \gamma$.

Сформулируем теперь в терминах уравнения Риккати полученный результат. Спектральная плотность $\mathbb{S}(\omega)$ формирующего фильтра G может быть записана в виде $\mathbb{S}(\omega) = S_q(\omega)$ тогда и только тогда, когда для передаточной функции $\Theta(z)$ системы

$$\Theta \sim \left[\begin{array}{c} \sqrt{q}F \\ \sqrt{\sigma}G^{-1} \end{array}\right]$$

выполнено условие иннерности: $\widehat{\Theta}^*(\omega)\widehat{\Theta}(\omega) = I_m$. Если фильтр G имеет представление

$$G \sim \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = (A+BL)x_k + B\Sigma^{1/2}(v_k+\mu), \\ w_k = Lx_k + \Sigma^{1/2}(v_k+\mu), \end{array} \right.$$

то обратная ему система записывается в виде

$$G^{-1} \sim \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \\ v_k + \mu = -\Sigma^{-1/2}Lx_k + \Sigma^{-1/2}w_k. \end{array} \right.$$

Следовательно, Θ имеет вид

$$\Theta \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \\ -\sqrt{\sigma}\Sigma^{-1/2}L & \sqrt{\sigma}\Sigma^{-1/2} \end{array}\right].$$

Введя новую матричную переменную $\mathfrak{S} = \sigma^{-1}\Sigma$, выражение для Θ можно представить в виде

$$\Theta \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \\ -\mathfrak{S}^{-1/2}L & \mathfrak{S}^{-1/2} \end{array}\right],$$

а формула типа Колмогорова-Сегё

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\det(S_q(\omega))d\omega = \ln\det(\Sigma)$$

примет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln\det(I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}d\omega = \ln\det(\mathfrak{S}).$$

Следуя [9], условие иннерности оператора Θ можно переписать в виде системы матричных уравнений Риккати относительно $R = R^T \succeq 0$:

$$\begin{aligned} R &= A^T R A + qC^T C + L^T \mathfrak{S}^{-1} L, \\ L &= \mathfrak{S}(B^T R A + qD^T C), \\ \mathfrak{S} &= (I_m - B^T R B - qD^T D)^{-1}. \end{aligned}$$

Функция $\alpha(q,\gamma)$ при этом примет вид

$$\alpha(q,\gamma) = -\frac{1}{2}\ln\det\left((1 - |\mathcal{M}|^2 + q|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2 - q\gamma^2)\mathfrak{S}\right),$$

что и требовалось доказать.

■

Замечание 1. *В доказательстве Теоремы 1 параметр* q *принадлежит интервалу* $[0, \|F\|_\infty^{-2})$. *Это множество можно уточнить следующим образом. Во-первых, для неотрицательности выражения под логарифмом в неравенстве*

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left((1 - |\mathcal{M}|^2 + q|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2 - q\gamma^2)\mathfrak{S}\right) \geqslant a$$

в силу неотрицательной определенности матрицы $\mathfrak{S}$ *следует*

$$1 - |\mathcal{M}|^2 + q|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2 - q\gamma^2 \geqslant 0,$$

или, что то же самое,

$$q \leqslant q_2 = (1 - |\mathcal{M}|^2)(\gamma^2 - |\mathcal{F}\mathcal{M}|^2)^{-1}.$$

Во-вторых, поскольку $R = R^T \succeq 0$, *то* $B^T R B + qD^T D \succeq 0$. *Следовательно,* $\mathfrak{S}^{-1} \preceq I_m$, *что приводит к неравенству* $\mathrm{tr}\ln(\mathfrak{S}) \geqslant 0$. *Таким образом, из условия*

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left((1 - |\mathcal{M}|^2 + q|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2 - q\gamma^2)\mathfrak{S}\right) \geqslant a$$

также следует $m\ln(1-|\mathcal{M}|^2+q|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2-q\gamma^2)\leqslant -2a$*, откуда несложно получить неравенство*

$$q\geqslant q_1=(1-|\mathcal{M}|^2-e^{-2a/m})(\gamma^2-|\mathcal{F}\mathcal{M}|^2)^{-1}.$$

Численный пример. Проверим утверждение теоремы на следующем примере. Пусть дана линейная дискретная стационарная система

$$F\sim\begin{cases}x_{k+1}=Ax_k+Bw_k,\\ z_k=Cx_k+Dw_k,\end{cases}$$

с матрицами

$$A=\begin{bmatrix}0.23596 & -0.85556 & -0.68156\\ -0.77842 & 0.0075576 & -0.26014\\ 1.0996 & -0.93759 & -0.2288\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-0.52481 & 1.8551\\ 1.1283 & -0.2773\\ 0.55014 & 1.0666\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}-2.0992 & 0.37147 & 0.69535\\ 0.63848 & -0.37418 & 0.87763\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}1.0336 & 0.60107\\ 0.41979 & -0.67402\end{bmatrix}.$$

Несложно проверить, что $\mathcal{H}_\infty$-норма этой системы равна $\|F\|_\infty=8.6432$. Будем считать, что внешнее возмущение $\{w_k\}$ имеет следующие характеристики: норма матожидания w_k на стационарном режиме равна $|\mathcal{M}|=0.5$, след ковариационной матрицы w_k на стационарном режиме равен $\|G\|_2^2=0.75$, средняя анизотропия последовательности $W=\{w_k\}$ равна $\overline{\mathbf{A}}(W)=0.375$. Точное значение анизотропийной нормы приведенной системы с указанным типом внешнего возмущения равно

$$|\!|\!|F|\!|\!|_{0.375}=6.178.$$

В следующей таблице приведены решения $(q, R, \mathfrak{S})$ для различных значений $\gamma \in (6.178, 8.6432)$. В случае, если $\gamma < 6.178$ решения не существует, а при $\gamma > 8.6432$ решение тривиально (q – любое), так как анизотропийная норма всегда меньше $\mathcal{H}_\infty$-нормы: $|\!|\!|F|\!|\!|_a < \|F\|_\infty$ для любого $0 \leqslant a < +\infty$.

γ	q	R	$\mathfrak{S}$
8	0.0017	$\begin{bmatrix} 0.0138 & -0.0072 & -0.0042 \\ -0.0072 & 0.0101 & 0.0059 \\ -0.0042 & 0.0059 & 0.0067 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0416 & -0.0262 \\ -0.0262 & 1.0475 \end{bmatrix}$
7	0.0031	$\begin{bmatrix} 0.0247 & -0.0131 & -0.0077 \\ -0.0131 & 0.0183 & 0.0110 \\ -0.0077 & 0.0110 & 0.0122 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0794 & -0.0504 \\ -0.0504 & 1.0886 \end{bmatrix}$
6.2	0.0083	$\begin{bmatrix} 0.0695 & -0.0389 & -0.0243 \\ -0.0389 & 0.0570 & 0.0356 \\ -0.0243 & 0.0356 & 0.0384 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.3106 & -0.20278 \\ -0.2027 & 1.3080 \end{bmatrix}$

Табл.1. Решения $(q, R, \mathfrak{S})$, полученные при проверке условий теоремы для различных значений γ.

Таким образом, полученные данные подтверждают условия теоремы. Стоит отметить, что для каждого случая $\gamma = 8$, $\gamma = 7$ и $\gamma = 6.2$ параметр q принадлежит своему интервалу, который строится согласно описанному ранее правилу.

4. Заключение

В данной работе сформулирована частотная теорема для анизотропийной нормы линейной системы при внешних возмущениях с ненулевыми средними. Данная теорема представляет собой достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы некоторым положительным числом. Этот критерий записан на математическом языке уравнений Риккати и неравенства специального вида. Сформулированная теорема может найти применение в задаче синтеза субоптимального анизотропийного регулятора для систем с нетривиальным внешним возмущением, имеющим как стохастическую, так и детерминированную составляющие.

Литература

1. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В., Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем, ДАН, 1995, №3, с. 583–585.
2. P. Diamond, I. Vladimirov, A. Kurdjukov, and A. Semyonov, Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems, International Journal of Control, vol. 74 (1), pp. 28–42, 2001.
3. M.M. Tchaikovsky, A.P. Kurdjukov, and V.N. Timin, Strict anisotropic norm bounded real lemma in terms of inequalities, in Proc. 18th IFAC World Congr., Milano, Italy, 2011, pp. 2332-2337.
4. Кустов А.Ю., Курдюков А.П., Начинкина Г.Н., Стохастическая теория анизотропийного робастного управления, Москва, ИПУ РАН, 2012.
5. A. Kurdyukov, A. Kustov, M. Tchaikovsky, and M. Karny, The concept of mean anisotropy of signals with nonzero mean, in Proc. 2013 International Conference on Process Control, Strbske Pleso, Slovakia, pp. 37–41.
6. Чайковский М.М., Курдюков А.П., Критерий строгой ограниченности анизотропийной нормы заданным значением в терминах матричных неравенств, ДАН, 2011, Т. 441, №3, с. 318—321.
7. I. Vladimirov, A. Kurdjukov and A. Semyonov, On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems, Proceedings of the 13th IFAC World Congress, San-Francisco, USA, 1996, pp. 179—184.
8. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В., Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем, Автоматика и Телемеханика, № 3, с. 78–87, 1999.
9. Gu D.-W., Tsai M.C., O'Young S.D. and Postlethwaite I., State-space Formulae for Discrete-time $\mathcal{H}_\infty$-Optimization, Int. J. Contr., 49, 5, 1989.

ANISOTROPY-BASED BOUNDED REAL LEMMA FOR LINEAR SYSTEM UNDER INPUT DISTURBANCES WITH NONZERO MEANS

Arkadiy Kustov, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (arkadiykustov@gmail.com).

Abstract: To suppress acting on objects external perturbations, different approaches are used in control theory. The works about constructing $\mathcal{H}_2$*- and* $\mathcal{H}_\infty$*- optimal controllers are well-known. Created in the 90th anisotropy-based control theory is one of several directions, which concentrates on the generalization of the* $\mathcal{H}_2$*- and* $\mathcal{H}_\infty$*- approaches. The basic concept of this theory is the anisotropic norm, defined as supremum of root-mean-square gain over all disturbances with constrained mean anisotropy, which is the measure of difference between certain sequence and etalon one. For the synthesis of anisotropic suboptimal stabilizing controllers, one have to find the conditions, under which the anisotropic norm is bounded by a specified number. The solution of this problem in the case of external disturbances with zero expectations had been received, and is called anisotropy-based bounded real lemma. In this paper, author obtain a similar theorem for the case of disturbances in the form of a sequence of Gaussian random vectors with nonzero mean and bounded mean anisotropy.*

Keywords: Anisotropy-based control theory, mean anisotropy, anisotropic norm, Gaussian random vectors, anisotropy-based bounded real lemma.