УДК 519.213.1
ББК 22.172

МОДИФИКАЦИЯ СТРАТЕГИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ ХЕДЖЕРА

Кибзун А.И.[1], **Соболь В.Р.**[2]

(Московский авиационный институт, Москва)

Исследуется распределение затрат на хеджирование продавца американского колл-опциона, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Предлагается алгоритм вычисления и последовательного уточнения верхней и нижней оценок квантили потерь.

Ключевые слова: винеровский процесс, пересечение полосы, последовательное хеджирование.

Введение

Стратегия последовательного хеджирования является простым и эффективным правилом управления хеджирующим портфелем продавцом колл-опциона. Впервые стратегия была описана в работе [8], где получила название «start-loss start gain strategy» (стратегия остановки потерь и начала выигрышей). В работе [7] было доказано, что данная стратегия не является самофинансируемой в случае, когда изменение цены базового актива описывается непрерывным процессом неограниченной вариации (например, винеровский процесс), а также получено разложение цены опциона на внутреннюю и временную стоимость. В отечественной литературе данная стратегия впервые исследовалась в работах Буренина ([2]и [3]), где получила название «стратегия последовательного хеджирования». В работе [4] было получено

[1] *Андрей Иванович Кибзун, доктор физико-математических наук, профессор, (kibzun@mail.ru).*
[2] *Виталий Романович Соболь, аспирант (vitsobol@mail.ru).*

значение средних потерь продавца американского опциона типа колл для дискретной мультипликативной модели ценообразования. В работе также был предложен вариант модификации метода, заключающийся во введении полосы нечувствительности хеджа. Эта модификация позволит избежать неоправданно больших потерь хеджера при частом колебании цены базового актива относительно уровня цены поставки, особенно в случае ненулевой комиссии при приобретении акций. Начало исследования такой модификации стратегии положено в работе [5]. Несмотря на важность исследований в области хеджирования опционов американского типа, в литературе большее внимание уделяется задачам расчета опционов европейского или, в лучшем случае, бермудского типа, поскольку в этих случаях чаще удается получить аналитические результаты.

Предметом исследования в данной работе являются моментные и вероятностные характеристики потерь продавца американского колл-опциона, использующего модифицированную стратегию последовательного хеджирования. Исследована зависимость средних потерь от ширины полосы, некоторые свойства функции распределения величины потерь, предложен метод поиска значений безусловной и условной квантилей, а также вариант построения верхней и нижней оценок безусловной квантили по условным квантилям потерь, при известном количестве пересечений полосы нечувствительности траекторией цены базового актива.

Результаты работы основываются на полученном распределении числа пересечений полосы нечувствительности траекторией цены базового актива. При этом, на каждом пересечении учитывается возможность исполнения опциона покупателем в момент, когда позиция является открытой. Расчет средних потерь хеджера, в зависимости от ширины полосы нечувствительности, необходим для определения справедливой цены опциона. Вычисление величины квантили потерь продавца опциона представляет отдельный интерес. Квантиль будет соответствовать сумме, которую суммарные затраты на хеджирование не превысят с заданной вероятностью α. Эта величина будет характеризовать общий размер капитала, необходимого для формирования и управления портфелем, в случае запрета на рынке операций short-sales.

1. Постановка задачи

Пусть цена поставки базового актива равна K. В соответствии со стратегией производится полное покрытие опционной позиции, когда рыночная цена базового актива превышает уровень $K(1+d)$, где d — некоторое значение, соответствующее ширине полосы "нечувствительности". Продажа актива осуществляется при падении цены актива ниже уровня K, т.е. цены поставки. В моменты времени, когда цена актива лежит в пределах от K до $K(1+d)$ ребалансировка портфеля не проивзодится. Введем полосу "нечувствительности" при хеджировании

(1) $$H \triangleq \{(y,t) : y \in [K, K(1+d)], t \in [0,T]\},$$

где T - срок, в течение которого опцион может быть исполнен.

Рассматривается полоса, расположенная выше уровня цены поставки K. В те моменты времени, когда цена актива ниже цены поставки, опцион не может быть исполнен, так как это приводит к потерям со стороны держателя, а значит опционная позиция должна оставаться открытой, чтобы избежать потерь, связанных с возможным дальнейшим падением курса актива.

Процесс ценообразования $S(t)$ определим следующим образом:

(2) $$S(t) = S_0 - \beta t + \sigma W(t), \qquad t \in [0,T],$$

где $W(t)$ - стандартный винеровский процесс, S_0 - стартовая цена актива, не превышающая K (опцион с проигрышем), β - коэффициент линейного сноса, σ - волатильность.

Пусть η_T^+ — число пересечений полосы (1) "снизу вверх" , а η_T^- — "сверху вниз", траекториями процесса (2) за время T. Под пересечением будем понимать прохождение полосы насквозь траекторией процесса $S(t)$. Введем в рассмотрение случайную величину τ, являющуюся моментом первого достижения траекторией процесса $S(t)$ уровня K:

(3) $$\tau \triangleq \min\{t : S(t) = K\}.$$

Далее, пусть τ_1 - момент первого достижения уровня $K(1+d)$ траекторией процесса $S(t)$, если оно произошло, т.е.

$$\tau_1 \triangleq \min\{t : S(t) = K(1+d), \tau \leqslant t \leqslant T\}.$$

Если пересечение не произошло или указанный временной интервал пуст, то полагаем $\tau_1 = T + 1$. Пара (τ, τ_1) задает координаты первого пересечения "снизу вверх" полосы H траекторией процесса $S(t)$. В общем случае, момент i-го пересечения полосы H будет определяться величиной

$$\tau_i = \begin{cases} \min\{t : S(t) = K(1+d), t \leqslant T\}, & \text{если } i = 1, \\ \min\{t : S(t) = K(1+d), \tau_{i-1} < t \leqslant T\}, & \text{если } i = 2m+1, \\ \min\{t : S(t) = K, \tau_{i-1} < t \leqslant T\}, & \text{если } i = 2m, \\ T + 1, & \text{если пересечения нет,} \end{cases}$$

где $m = 1, 2, \cdots$. Для любого натурального m пара (τ_{2m-1}, τ_{2m}) задает координаты m-го пересечения полосы H "сверху вниз".

Устанавливая ненулевую ширину полосы "нечувствительности", хеджер принимает на себя риск, связанный с исполнением опциона в момент времени, когда опционная позиция не закрыта. Будем считать, что исполнение опциона держателем при каждом пересечении полосы может произойти с одной и той же вероятностью $p^*(d)$, где $p^*(\cdot) : [0, \infty] \to [0, 1]$, при этом $\lim\limits_{d \to 0} p^*(d) = 0$, $\lim\limits_{d \to \infty} p^*(d) = 1$. Случай, когда $d \to \infty$, соответствует отсутствию хеджирования вообще. На каждом пересечении исполнение опциона держателем может быть описано с использованием независимых случайных величин ν_i, имеющих распределение Бернулли с вероятностью "успеха" $p^*(d)$:

$$\mathcal{P}\{\nu_i = 1\} = p^*(d), \qquad \text{для всех } i = 1, 2, \cdots .$$

Отметим, что если опцион исполняется при пересечении "снизу вверх", точный момент исполнения заранее неизвестен, а значит цена базового актива в момент исполнения случайна и равна $K + \zeta$, где ζ - случайная величина, реализации которой принадлежат отрезку $[0, Kd]$. На покрытие опционной позиции хеджер тратит при этом сумму, равную $(K+\zeta)(1+\theta)$.

Потери хеджера при i-м пересечении полосы обозначим как l_i. При нечетных i величина l_i соответствует потерям при пересечении ”снизу вверх”, а при четных — потерям при пересечении ”сверху вниз”. В рамках сделанных предположений, затраты при i-м пересечении полосы будут равны

(4)

$$l_i \triangleq \begin{cases} \nu_i((K+\zeta)(1+\theta)-K)+(1-\nu_i)\rho^+, & i=1, \\ \left(\prod_{j=1}^{i-1}(1-\nu_j)\right)(\nu_i((K+\zeta)(1+\theta)-K)+ & \\ +(1-\nu_i)\rho^+), & i=2m+1, \\ \left(\prod_{j=1}^{i-1}(1-\nu_j)\right)\rho^-, & i=2m, \end{cases}$$

где $m = 1, 2, \cdots$.

Отметим, что опцион может быть исполнен даже если курс базового актива не пересек полосу H, а только превысил уровень цены поставки K. Затраты хеджера в этом случае составят

$$l_0 \triangleq \nu_0((K+\zeta)(1+\theta)-K).$$

Суммарные потери хеджера за время жизни опциона в зависимости от ширины полосы ”нечувствительности” обозначим как $L(d,T)$. Очевидно, что суммарные потери хеджера зависят от общего числа пересечений полосы H, равного $\eta^+ + \eta^-$. Таким образом, суммарные потери хеджера за время жизни опциона равны

(5)

$$L(d,T) \triangleq \begin{cases} \sum_{i=0}^{2m} l_i, & \eta^+ + \eta^- = 2m, \\ \sum_{i=0}^{2m+1} l_i - \left(\prod_{j=1}^{2m+1}(1-\nu_j)\right)K, & \eta^+ + \eta^- = 2m+1, \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \cdots$.

В силу независимости случайных величин ν_i, задав их распределение, а также определив распределение момента первого достижения уровня цены поставки τ, числа пересечений $\eta^+ + \eta^-$

и цены досрочного исполнения ζ, удается получить выражение для математического ожидания и функции распределения величины $L(d,T)$. Известно (см [1], [5]), что распределение числа пересечений полосы H траекторией процесса $S(t)$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{P}\{\eta_T^- \geqslant m\} = \exp\left\{\frac{2m\beta Kd}{\sigma}\right\}[1 - \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\sqrt{T} + \frac{2mKd}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \\ + \exp\left\{-\frac{2m\beta Kd}{\sigma}\right\}\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\sqrt{T} - \frac{2mKd}{\sigma\sqrt{T}}\right)].$$

$$\mathcal{P}\{\eta_T^+ \geqslant m\} = \exp\left\{-\frac{(2m-1)\beta Kd}{\sigma}\right\} \\ [1 - \Phi\left(-\frac{\beta}{\sigma}\sqrt{T} + \frac{(2m-1)Kd}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \\ + \exp\left\{\frac{(2m-1)\beta Kd}{\sigma}\right\}\Phi\left(-\frac{\beta}{\sigma}\sqrt{T} - \frac{(2m-1)Kd}{\sigma\sqrt{T}}\right)].$$

2. Функция распределения потерь

Не ограничивая общности, можно положить $S_0 = K$, т.е. $\tau = 0$. Тогда вероятность того, что потери не превысят заданный уровень φ, равна

(6) $$P_\varphi(d,T) \triangleq \mathcal{P}\{L(d,T) \leqslant \varphi\} = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}\{L(d,T) \leqslant \varphi | \nu^+ + \nu^- = i\} \cdot \mathcal{P}\{\nu^+ + \nu^- = i\}.$$

Приведем выражения для условных функций распределения $P_\varphi(d,T,i) \triangleq \mathcal{P}\{L(d,T) \leqslant \varphi | \nu^+ + \nu^- = i\}$. Для этого введем обозначения:

$$k^*(\varphi) = \left[\frac{\varphi}{\rho^+ + \rho^-}\right], \varphi^* \triangleq \frac{\varphi + K - k^*(\varphi) * (\rho^+ + \rho^-)}{1 + theta}.$$

Если $i < 2k^*(\varphi)$

$$P_\varphi(d,T,i) = 1;$$

если $i = 2k^*(\varphi)$

$$P_\varphi(d,T,i) = 1 - (1-p(d))^{2k^*(\varphi)} + \\ + (1-p(d))^{2k^*(\varphi)} \frac{\mathcal{P}\{S(T) \leqslant \varphi^*\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leqslant K * (1+d)\}};$$

если $i = 2k^*(\varphi) + 1$

$$P_\varphi(d,T,i) = 1 - (1-p(d))^{2k^*(\varphi)} + (1-p(d))^{2k^*(\varphi)} p(d) F_\zeta(\varphi^* - K) + \\ + (1-p(d))^{2k^*(\varphi)} p(d) \frac{\mathcal{P}\{K \leqslant S(T) \leqslant \varphi^*\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leqslant K(1+d)\}};$$

если $i > 2k^*(\varphi) + 1$

$$P_\varphi(d,T,i) = 1 - (1-p(d))^{2k^*(\varphi)} + (1-p(d))^{2k^*(\varphi)} p(d) F_\zeta(\varphi^* - K).$$

Нетрудно заметить, что функции $P_\varphi(d,T,i)$ являются разрывными в точках $\varphi_k = k(\rho^+ + \rho^-)$, для любого натурального k, а значит и функция $P_\varphi(d,T)$ также является разрывной в точках $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$. Тем не менее, нетрудно вычислить левые и правые пределы функций $P_\varphi(d,T,i)$ в этих точках. Положим

(7) $$P^+(d,T,j) \triangleq \lim_{\varphi \to j(\rho^+ + \rho^-) + 0} P_\varphi(d,T,j),$$

(8) $$P^-(d,T,j) \triangleq \lim_{\varphi \to j(\rho^+ + \rho^-) + 0} P_\varphi(d,T,j).$$

Пусть $\varphi = i(\rho^+ + \rho^-)$, тогда правые пределы равны:
если $j < 2i$

$$P^+(d,T,j) = 1;$$

если $j = 2i$

$$P^+(d,T,j) = 1 - (1-p(d))^{2i} + (1-p(d))^{2i} \frac{\mathcal{P}\{S(T) \leqslant K\}}{\mathcal{P}\{S(T) \leqslant K(1+d)\}};$$

если $j = 2i + 1$

$$P^+(d,T,j) = 1 - (1-p(d))^{2i} + \\ + (1-p(d))^{2i} p(d) \frac{\mathcal{P}\{K \leqslant S(T) \leqslant K(1+d)\}}{\mathcal{P}\{S(T) \geqslant K\}};$$

если $j > 2i+1$

$$P^{+}(d,T,j) = 1 - (1-p(d))^{2i}.$$

Аналогичным образом получаем левые пределы:
если $j \leqslant 2i-2$

$$P^{-}(d,T,j) = 1;$$

если $j = 2i-1$

$$P^{-}(d,T,j) = 1 - (1-p(d))^{2i-2} + \\ + (1-p(d))^{2i-2} p(d) \left(\frac{\mathcal{P}\{K \leqslant S(T) \leqslant K(1+d)\}}{\mathcal{P}\{S(T) \geqslant K\}} + 1 \right);$$

если $j > 2i-1$

$$P^{-}(d,T,j) = 1 - (1-p(d))^{2i-1}.$$

Функция $P_{\varphi}(d,T)$ является разрывной и неубывающей. К тому же она монотонно возрастает по φ при $\varphi \in [i(\rho^{+}+\rho^{-})+K\theta, (i+1)(\rho^{+}+\rho^{-}))$, для любого $i = 0, 1, \cdots$.

3. Вычисление квантили

Определим квантиль величины потерь как

$$\varphi_{\alpha}(d,T) \triangleq \min\{\varphi : P_{\varphi}(d,T) \geqslant \alpha\}. \tag{9}$$

Поскольку функция $P_{\varphi}(d,T)$ не может быть вычислена точно в силу необходимости суммирования бесконечного ряда, для определения значения функции квантили необходимо использовать численные алгоритмы, устойчивые к погрешностям во входных данных. К таким методам относится, например, метод дихотомии. Однако, если нет необходимости в получении точного значения квантили, может быть предложен простой с вычислительной точки зрения алгоритм оценивания неизвестной квантили.

Очевидно, что если существует целое $m > 0$ такое, что при заданном α выполняется $P^{-}(d,T,m) < \alpha \leqslant P^{+}(d,T,m)$, то искомая квантиль равна $\varphi_{\alpha}(d,T) = m(\rho^{+}+\rho^{-})$. В противном случае существует $m > 0$ такое, что $P^{+}(d,T,m) < \alpha \leqslant$

$P^-(d,T,m+1)$. Во втором случае искомая квантиль принадлежит интервалу $(m(\rho^+ + \rho^-);(m+1)(\rho^+ + \rho^-))$.

Величины $m(\rho^+ + \rho^-)$ и $(m+1)(\rho^+ + \rho^-)$ могут быть использованы как верхняя и нижняя оценки неизвестной квантили, а также как точки начального приближения для метода дихотомии для определения квантили. Однако, функция $P_\varphi(d,T)$ является непрерывной на интервале, и если удается показать непрерывность и найти константу Липшица функции распределения на $(m(\rho^+ + \rho^-);(m+1)(\rho^+ + \rho^-))$, то эти оценки могут быть улучшены.

Предположим, что нам известна оценка константы Липшица L функции $P_\varphi(d,T)$ на $(m(\rho^+ + \rho^-);(m+1)(\rho^+ + \rho^-))$, тогда могут быть легко построены верхняя и нижняя кусочно-линейные огибающие $P_\varphi(d,T)$:

$$\begin{aligned} F^+(\varphi,d,T) = &\min\{P^-(d,T,m+1), P^+(d,T,m)+\\ &+L(\varphi - m(\rho^+ + \rho^-))\},\\ F^-(\varphi,d,T) = &\min\{P^+(d,T,m), P^-(d,T,m+1)+\\ &+L(\varphi - (m+1)(\rho^+ + \rho^-))\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценки неизвестной квантили

$$\varphi_\alpha^+(d,T) = \frac{\alpha - P^-(d,T,m+1)}{L} + (m+1)(\rho^+ + \rho^-),$$
$$\varphi_\alpha^-(d,T) = \frac{\alpha - P^+(d,T,m)}{L} + m(\rho^+ + \rho^-).$$

Для получения требуемой точности оценивания $(\varphi_\alpha^+(d,T) - \varphi_\alpha^-(d,T) < \varepsilon)$ данный подход может быть объединен с методом дихотомии.

Алгоритм 1 .

1. Если $\exists m > 0 : P^-(d,T,m) < \alpha \leqslant P^+(d,T,m)$, то положить $\varphi_\alpha^- = \varphi_\alpha^+ = m(\rho^+ + \rho^-)$ и завершить работу алгоритма. Иначе определить $m > 0 : P^+(d,T,m) < \alpha < P^-(d,T,m+1)$;

2. Задать $\varepsilon > 0$, положить $x^- = m(\rho^+ + \rho^-)$, $x^+ = (m+1)(\rho^+ + \rho^-)$;

3. Вычислить

$$\varphi_\alpha^- = \frac{\alpha - P_{x^-}(d,T)}{L} + x^-,$$
$$\varphi_\alpha^+ = \frac{\alpha - P_{x^+}(d,T)}{L} + x^+.$$

Если $\varphi_\alpha^+ - \varphi_\alpha^- \leqslant \varepsilon$, то завершить работу алгоритма, иначе перейти к шагу 4;

4. Вычислить $p = P_{\frac{\varphi_\alpha^+ + \varphi_\alpha^-}{2}}$. Если $p > \alpha$, то положить $x^+ = \frac{\varphi_\alpha^+ + \varphi_\alpha^-}{2}$, иначе положить $x^- = \frac{\varphi_\alpha^+ + \varphi_\alpha^-}{2}$. Перейти к шагу 3;

5. Положить верхнюю и нижнюю оценки безусловной квантили равными φ_α^+ и φ_α^- соответственно.

Пример 1. Приведем пример расчета квантили уровня $\alpha = 0.85$ по алгоритму 1. Положим $K = 100$, $d = 0.01$, $\beta = 0$, $\sigma = 0.5$, $L = 0.09$. Получаем $m = 2$ и в результате 4 итераций алгоритма получаем оценки квантили

$$\varphi_\alpha^+ = 1.3335,$$
$$\varphi_\alpha^- = 1.3260.$$

4. Вычисление константы Липшица

Учитывая тот факт, что для вычисления $P_\varphi(d,T)$ требуется вычисление суммы ряда, непосредственное оценивание константы Липшица на интервале $(m(\rho^+ + \rho^-); (m+1)(\rho^+ + \rho^-))$ может оказаться затруднительным. Однако, если нам известны точные значения или верхние оценки констант Липшица L_k для функций условного распределения $P_\varphi(d,T,k)$ на интервале

$(m(\rho^+ + \rho^-); (m+1)(\rho^+ + \rho^-))$. Тогда

$$|P_{x_1}(d,T) - P_{x_q}(d,T)| = |\sum_{k=0}^{\infty} P_{x_1}(d,T,k)p_i - \sum_{i=0}^{\infty} P_{x_2}(d,T,k)p_k| =$$

$$= |\sum_{k=0}^{\infty}(P_{x_1}(d,T,k) - P_{x_2}(d,T,k))p_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |P_{x_1}(d,T,k) - P_{x_2}(d,T,k)|p_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} L_k|x_1 - x_2|p_k = |x_1 - x_2| \sum_{k=0}^{\infty} L_k p_k,$$

где $p_k \triangleq \mathcal{P}\{\eta^+ + \eta^- = k\}$. Таким образом, мы получаем верхнюю оценку константы Липшица L:

$$L \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} L_k p_k. \tag{10}$$

5. Выводы и перспективы

Полученные в статье результаты могут быть адаптированы для случая, когда изменение цены базового актива описывается процессом геометрического броуновского движения. Полученные оценки квантили могут быть использованы для построения оценок функции интегральной квантили. Использование интегральной квантили в качестве меры риска является предпочтительным, поскольку интегральная квантиль является когеррентной мерой риска [6].

Литература

1. БОРИСОВ И. С *Распределение числа пересечений полосы траекториями простейших случайных блужданий и винеровского процесса со сносом* /Борисов И. С., Никитина Н. Н./ Теория вероятностей и ее применения, 2011, Т. 56, Вып. 1, С. 152-158.

2. БУРЕНИН А. Н. *Фьючерсные, форвардные и опционные рынки*, М.:Тривола, 1995.
3. БУРЕНИН А. Н. *Рынки производных финансовых инструментов*, М.:Инфра-М, 1996.
4. КИБЗУН А. И. *Последовательное хеджирование опционной позиции: анализ и модернизация* /Губерниев В. А., Кибзун А. И./ Автоматика и телемеханика, 1999, 1, С. 113-125.
5. КИБЗУН А. И. *Модернизация стратегии последовательного хеджирования опционной позиции* /А. И. Кибзун, В. Р. Соболь/ Тр. ИММ УрО РАН, 19, № 2, 2013,С. 179–192
6. ARTZNER P. *Coherent Measures of Risk* /Artzner P., Delbaen F., Eber J. M., Heath D./ / Mathematical Finance 9 (3), 1999.
7. CARR P. *The stop-loss start-gain paradox and option valuation: a new decomposition into intrinistic and time value* /Carr P., Jarrow R./ / Review of Financial Studies, 1990, V. 3, No. 3, pp. 469-492.
8. SEIDENVERG E. *A case of confused identity* // Financial Analysts Journal, 1988, pp. 63-67.

MODIFICATION OF STOP-LOSS START GAIN STRATEGY. DISTRIBUTION OF HEDGER'S LOSSES

Andrei Kibzun, Moscow Aviation Institute, Moscow, Doctor of Science, professor (kibzun@mail.ru).
Vitaly Sobol, Moscow Aviation Institute, Moscow, postgraduate (vitsobol@mail.ru).

Abstract: Under investigation is the distribution of losses of american call-option writer, who uses modified stop-loss start-gain hedging strategy. The algorithm provided for calculation and recursive adjustment of upper and lower losses quantile estimates.

Keywords: Wiener process, strip crossing, stop-loss start-gain strategy.