



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
**ИНСТИТУТ  
ПРОБЛЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ**  
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

# Моделирование и управление роботом-кубом

---

Шевляков А.А.,  
с.н.с. лаборатории 19, ИПУ РАН  
aash29@gmail.com

Проблемы управления автономными робототехническими комплексами. Москва,  
17 июля 2017

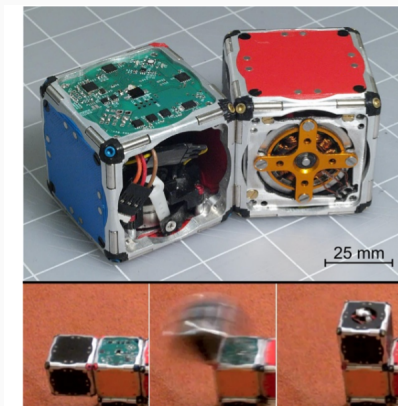


Fig. 1: Neighboring M-Blocks bond through permanent magnets embedded in their edges while additional magnets on their faces help with alignment. The modules locomote by pivoting about any of their twelve edges which allows for a variety of movements, including the convex transition shown here. All movements are driven by a torque generated by rapidly decelerating an internal flywheel. (The two large modules are pictured on a one-inch grid.)

Уравнения плоского движения куба

$$\begin{aligned} m \frac{d\bar{V}_0}{dt} &= -m\bar{g} + \sum_{i=1}^4 (\bar{\lambda}_{n,i} + \bar{\lambda}_{t,i}), \\ I \frac{d\omega}{dt} &= \sum_{i=1}^4 (\bar{r}_i \times (\bar{\lambda}_{n,i} + \bar{\lambda}_{t,i}))|_z + u, \end{aligned} \quad (1)$$

$$0 \leq y_i \perp \lambda_{n,i} \geq 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= 0, \quad -\mu\lambda_{n,i} \leq \lambda_{t,i} \leq \mu\lambda_{n,i}, \\ \dot{x}_i &> 0, \quad \lambda_{t,i} = -\mu\lambda_{n,i}, \\ \dot{x}_i &< 0, \quad \lambda_{t,i} = \mu\lambda_{n,i}. \end{aligned} \quad (3)$$

Случай с ненулевым трением может быть сведен к линейной задаче дополненности с помощью следующих переобозначений. Пусть  $\dot{F}_{t,i} = G_i^T(q)\dot{q}$  — скорость в касательном направлении в точке контакта. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{t,i}^+ = \mu\lambda_{n,i} + \lambda_{t,i}, \\ \lambda_{t,i}^- = \mu\lambda_{n,i} - \lambda_{t,i}, \\ \dot{F}_{t,i}^+ = \frac{1}{2}(|\dot{F}_{t,i}| + \dot{F}_{t,i}), \\ \dot{F}_{t,i}^- = \frac{1}{2}(|\dot{F}_{t,i}| - \dot{F}_{t,i}), \end{array} \right. \quad (4)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \lambda_{t,i}^+ \perp F_{t,i}^+ \geq 0, \\ 0 \leq \lambda_{t,i}^- \perp F_{t,i}^- \geq 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Упростим: единственная точка контакта, ровная поверхность, плоское движение,  $m = 1, l = 1$ .

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \lambda_x \\ \ddot{z} &= -g + \lambda_z \\ \ddot{\theta} &= \lambda_z \sin \theta + \lambda_x \cos \theta + u\end{aligned}\tag{6}$$

,

где  $\lambda_x^+ - \lambda_x^- = \lambda_x$ .

В случае проскальзывания можно выразить  $\lambda_z$  через переменные состояния

$$\lambda_z = \frac{g - u \sin \theta - \cos \theta \dot{\theta}^2}{1 + \sin^2 \theta - \text{sign}(V_1) \mu \sin \theta \cos \theta},\tag{7}$$

Как, управляя моментом, приложенным к кубу, переместить его в нужную точку?

У такой системы будет 3 режима:

1. Свободное движение в отсутствие контакта (3 степени свободы)
2. Контакт с проскальзыванием (2 степени свободы)
3. Контакт без проскальзывания (1 степень свободы)

Переключение между ними зависит от переменных состояния и управления. Напоминает задачу о тележке с маятником, но я не нашел ее в такой постановке (с управлением моментом и сухим трением).

## Поиск траектории

как минимума невязки с ограничениями. Следуя [2],

$$\begin{aligned} H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) &= B(q)u + J(q)^T\lambda, \\ \phi(q) &\geq 0, \\ \lambda &\geq 0, \\ \phi(q)^T\lambda &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$q \in R^n$  – вектор обобщенных координат,  $\lambda$  – силы реакции.

Неявный метод Эйлера

$$\begin{aligned} q_k - q_{k+1} + h\dot{q}_{k+1} &= 0, \\ H_{k+1}(\dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k) + h(C_{k+1} + G_{k+1} - B_{k+1}u_{k+1} - J_{k+1}^T\lambda_{k+1}) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

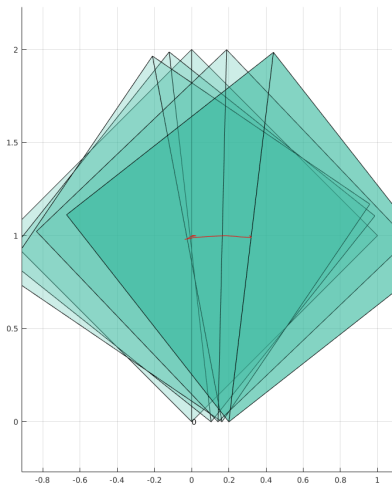
Добавим неравенства

$$\begin{aligned}\phi(q_k) &\geq 0, \\ \lambda_{k,z}, \lambda_{k,x}^+, \lambda_{k,z}^-, \gamma_k &\geq 0, \\ \mu\lambda_{k,z} - \lambda_{k,x}^+ - \lambda_{k,x}^- &\geq 0, \\ \gamma_k + \psi(q_k, \dot{q}_k) &\geq 0, \\ \gamma_k - \psi(q_k, \dot{q}_k) &\geq 0, \\ \phi(q_k)^T \lambda_{k,z} &= 0, \\ (\mu\lambda_{k,z} - \lambda_{k,x}^+ - \lambda_{k,x}^-)^T \gamma_k &= 0, \\ (\gamma_k + \psi(q_k, \dot{q}_k))^T \lambda_{k,x}^+ &= 0, \\ (\gamma_k - \psi(q_k, \dot{q}_k))^T \lambda_{k,x}^- &= 0,\end{aligned}\tag{10}$$

Начальные и конечные положения также можно задать с помощью ограничений (в том числе в виде неравенств, т.е. интервалы).



С помощью оптимизатора (напр. SNOPT) и регуляризации с последующей релаксацией можно найти траекторию и управление.



На данный момент реализовано в Matlab с помощью RPI toolbox. Программное управление без стабилизации работает совсем плохо.

# Стабилизация траектории

Гибридная система

Известно, что стабилизация на каждом из участков не гарантирует стабилизации в целом. [2]: шагающий робот, при касании нет проскальзывания.

Не подходит – большинство построенных траекторий используют проскальзывание вдоль пола.

Гипотеза: гибридная система управляема, ее отдельные режимы нет.

Удары и переключения на программной траектории могут не совпадать с траекториями-решениями системы [1]:

*When the jump times of the plant trajectories can be guaranteed to coincide with jumps of the reference trajectory, then stable behaviour of the Euclidean tracking error is possible and **several tracking problems have been solved in this setting.***

*However ... requiring the jump times of plant and reference trajectories (or plant and observer) to coincide is a strong condition that limits the applicability of these results. For example, **this can not be ensured for general hybrid systems with state-triggered jumps, such as models of mechanical systems with unilateral constraints.***

## Управление прыжком

В фазе полета движение центра масс подчиняется простым законам.

Задача управления - задать нужную начальную скорость.

$$V_0^x t_f = x_0, V_0^z - g t_f = 0. \quad (11)$$

$$t_f = \frac{V_0^z}{g} \quad (12)$$

– время в полете.

$$\frac{V_0^x V_0^z}{g} = x_0. \quad (13)$$

$$V_0^x = \int_0^{t_1} \lambda_x dt, V_0^z = \int_0^{t_1} (\lambda_z - g) dt. \quad (14) \quad 12$$

Предположим, направление движения в точке контакта не меняется, она движется назад, и  $\lambda_x = \mu\lambda_z$ . Выбором  $u$  можно задать любое  $\lambda_z = \omega$ , по формуле

$$\lambda_z = \frac{g - u \sin \theta - \cos \theta \dot{\theta}^2}{1 + \sin^2 \theta - \text{sign}(V_1) \mu \sin \theta \cos \theta}. \quad (15)$$

$$\int_0^{t_1} \mu \lambda_z dt \int_0^{t_1} (\lambda_z - g) dt = x_0 g. \quad (16)$$

$$\mu \int_0^{t_1} \omega dt \left( \int_0^{t_1} \omega dt - g t_1 \right) = x_0 g. \quad (17)$$

$$\int_0^{t_1} \omega dt = W, \mu W^2 - \mu g t_1 W - x_0 g = 0 \quad (18)$$

$$W = \frac{\mu g t_1 \pm \sqrt{(\mu g t_1)^2 + 4 \mu x_0 g}}{2 \mu} \quad (19)$$



Можно взять  $\omega = \text{const} = \omega_0$ .

$$\int_0^{t_1} \omega_0 dt = W \quad (20)$$

С таким законом управления робот успешно попадает в точку  $x_0$ , отталкиваясь за время  $t_1$ .

Спасибо!



-  JJB Benjamin Biemond.  
**Nonsmooth dynamical systems: on stability of hybrid trajectories and bifurcations of discontinuous systems.**  
2013.
-  Michael Posa, Cecilia Cantu, and Russ Tedrake.  
**A direct method for trajectory optimization of rigid bodies through contact.**  
*The International Journal of Robotics Research*, 33(1):69–81,  
2014.
-  John W Romanishin, Kyle Gilpin, and Daniela Rus.  
**M-blocks: Momentum-driven, magnetic modular robots.**  
In *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 4288–4295. IEEE, 2013.