

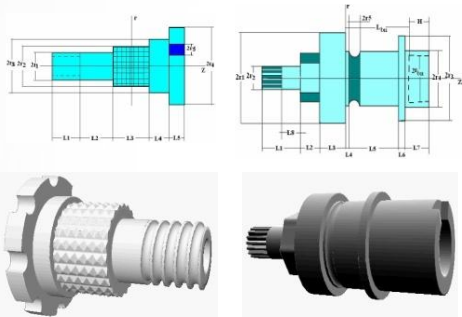
# ФУНКЦИОНАЛЬНО-ВОКСЕЛЬНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ПУТИ

**Толок Алексей Вячеславович,  
лаборатория №18**

# Пути исследования приложений функционально-воксельное моделирования

## Функционально-воксельное моделирование (ФВМ)

### Функционально-воксельное моделирование геометрических объектов



#### Преимущества:

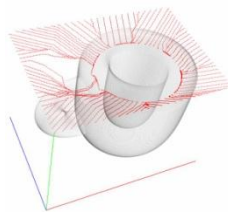
- Регулярность структуры представления воксельных данных по аналогии с функциональным пространством;
- Возможность воксельного представления функциональной области (положительная, отрицательная);

#### Перспективные направления исследований:

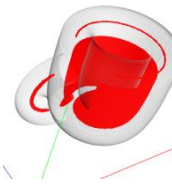
- Разработка инструмента аналитического конструирования;
- Разработка средств динамической визуализации воксельных объектов

### Функционально-воксельное моделирование задач определения геометрических характеристик

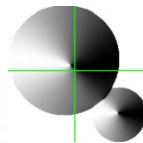
ФВМ в построении дифф. М-образов в реализации многомерного градиентного метода для определения концентраторов функции в теле объекта.



ФВМ в определении центра масс объекта



ФВМ в определении площади поверхности



#### Преимущества:

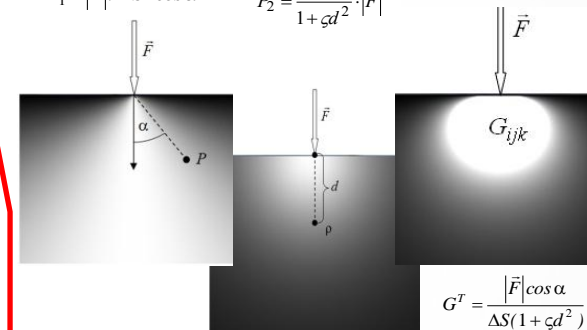
Простота реализации подобных алгоритмов

### Функционально-воксельное моделирование задач упругости и пластичности

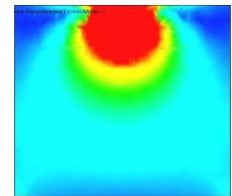
ФВМ плоского случая тензора напряжения на минимальной площадке приложения силы

$$P_1 = |\vec{F}| / \Delta S \cdot \cos \alpha$$

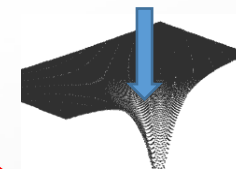
$$P_2 = \frac{1}{1 + \alpha d^2} \cdot |\vec{F}|$$



Аналогичный расчёт тензорного поля, выполненный в системе SolidWorks на основе МКЭ



Воксельный отрыв в моделировании деформационного разрушения



#### Преимущества:

- Упрощение расчётных схем задач упругости;
- Отказ от методов функционального подбора

# Метод функционально-воксельного моделирования (ФВМ)

1. Рассмотрим построение функционально-воксельной модели на примере функции окружности  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  или  $r^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$

2. Добавим размерность пространству функции и получим поверхность  $x_3 = r^2 - x_1^2 - x_2^2$

3. Линейная аппроксимация заданной области функции получает локальную функцию в каждой точке  $A_{ij}x_1 + B_{ij}x_2 + C_{ij}x_3 + D_{ij} = 0$

4. Увеличиваем размерность локальной функции

$$A_{ij}x_1 + B_{ij}x_2 + C_{ij}x_3 + D_{ij}x_4 = 0$$

4. Получаем образы компонентов 4D-нормали (базовые М-образы)

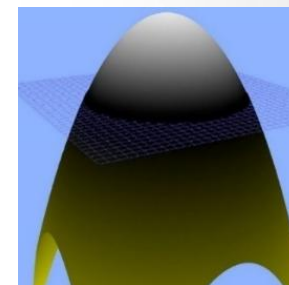
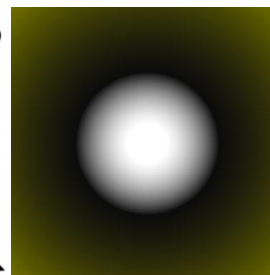
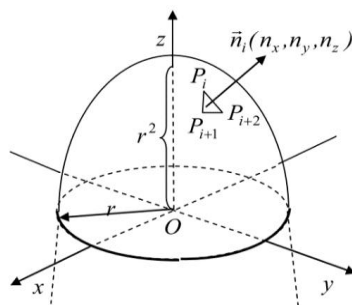
$$C_{x_1}^{IV} = \left( \left[ n_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}} \right] + 1 \right) \frac{P}{2}; \quad C_{x_2}^{IV} = \left( \left[ n_2 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}} \right] + 1 \right) \frac{P}{2}$$

$$C_{x_3}^{IV} = \left( \left[ n_3 = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}} \right] + 1 \right) \frac{P}{2}; \quad C_{x_4}^{IV} = \left( \left[ n_4 = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}} \right] + 1 \right) \frac{P}{2}$$

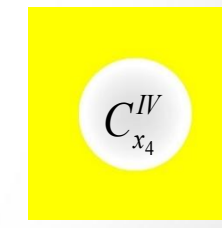
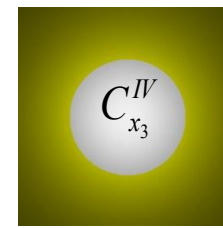
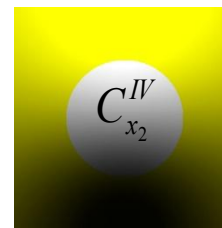
5. Получение порождённых М-образов компонентов 2D-нормали

$$C_{x_1}^{II} = \left( \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} + 1 \right) \frac{P}{2} \quad C_{x_2}^{II} = \left( \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} + 1 \right) \frac{P}{2}$$

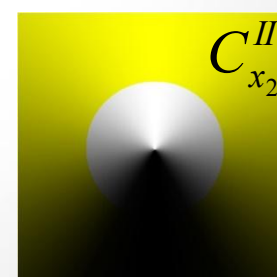
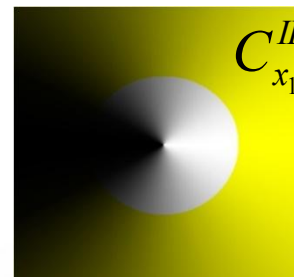
Изображение поверхности функции окружности



Базовый М-образ

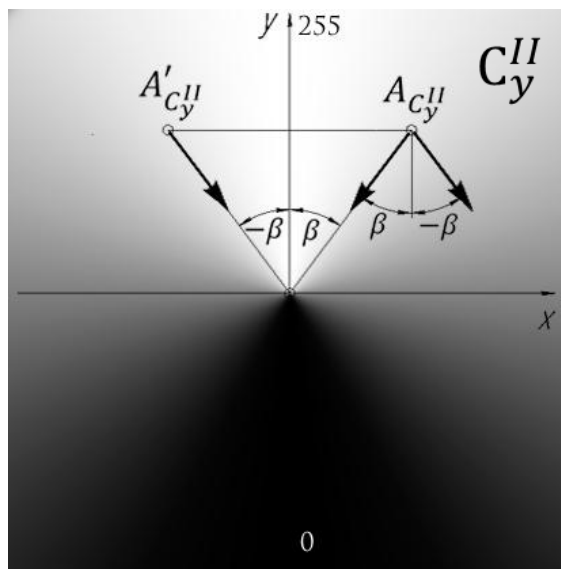
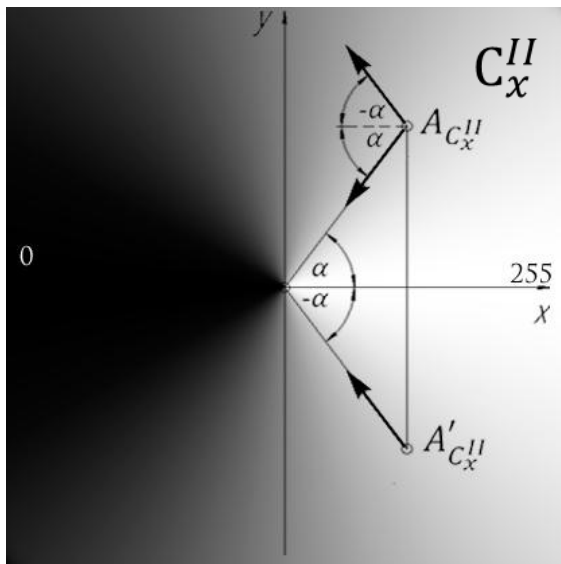


Порождённые М-образы



# ГЛАВА 2. Градиентный метод в построении динамических решений задач поиска пути на основе ФВМ

## Реализация градиентного метода на основе ФВМ



|  | $C_{\alpha_{A_0}}^{II} > \frac{2P}{3}$ | $\frac{P}{3} < C_{\alpha_{A_0}}^{II} \leq \frac{2P}{3}$ | $C_{\alpha_{A_0}}^{II} \leq \frac{P}{3}$ |
|--|--|---|--|
| $C_{\beta_{A_0}}^{II} \leq \frac{P}{3}$                | $i-1, j+1$                             | $i, j+1$  | $i+1, j+1$                               |
| $\frac{P}{3} < C_{\beta_{A_0}}^{II} \leq \frac{2P}{3}$ | $i-1, j$                               | $A_0(i, j)$<br>(Текущее положение)                      | $i+1, j$                                 |
| $C_{\beta_{A_0}}^{II} > \frac{2P}{3}$                  | $i-1, j-1$                             | $i, j-1$  | $i+1, j-1$                               |

$$C_{\alpha_{A_1}}^{II} = \begin{cases} (C_{\alpha}(i+1, j-1), (C_{\alpha}(i+1, j), (C_{\alpha}(i+1, j+1))) \text{ при } C_{\alpha_{A_0}}^{II} \leq \frac{P}{3}; \\ (C_{\alpha}(i, j-1), (C_{\alpha}(i, j), (C_{\alpha}(i, j+1))) \text{ при } \frac{P}{3} < C_{\alpha_{A_0}}^{II} \leq \frac{2P}{3}; \\ (C_{\alpha}(i-1, j-1), (C_{\alpha}(i-1, j), (C_{\alpha}(i-1, j+1))) \text{ при } C_{\alpha_{A_0}}^{II} > \frac{2P}{3}; \end{cases}$$

$$C_{\beta_{A_1}}^{II} = \begin{cases} (C_{\beta}(i-1, j+1), (C_{\beta}(i, j+1), (C_{\beta}(i+1, j+1))) \text{ при } C_{\beta_{A_0}}^{II} \leq \frac{P}{3}; \\ (C_{\beta}(i-1, j), (C_{\beta}(i, j), (C_{\beta}(i+1, j))) \text{ при } \frac{P}{3} < C_{\beta_{A_0}}^{II} \leq \frac{2P}{3}; \\ (C_{\beta}(i-1, j-1), (C_{\beta}(i, j-1), (C_{\beta}(i+1, j-1))) \text{ при } C_{\beta_{A_0}}^{II} > \frac{2P}{3}. \end{cases}$$

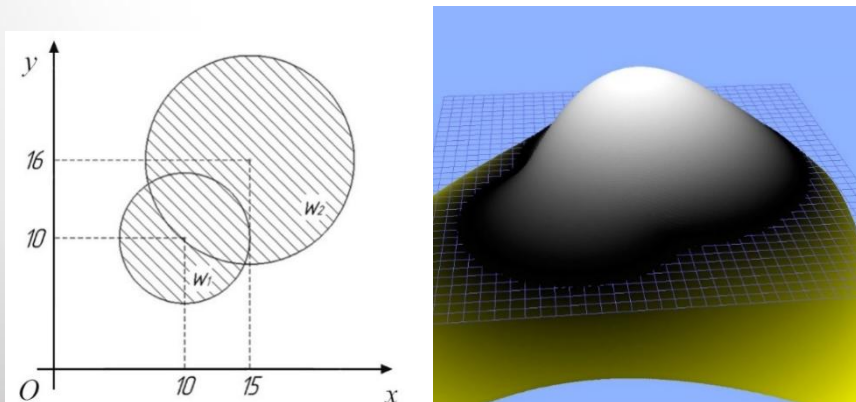
# R-функциональное моделирование (RFM)

## $\alpha$ -система R-функций [23]

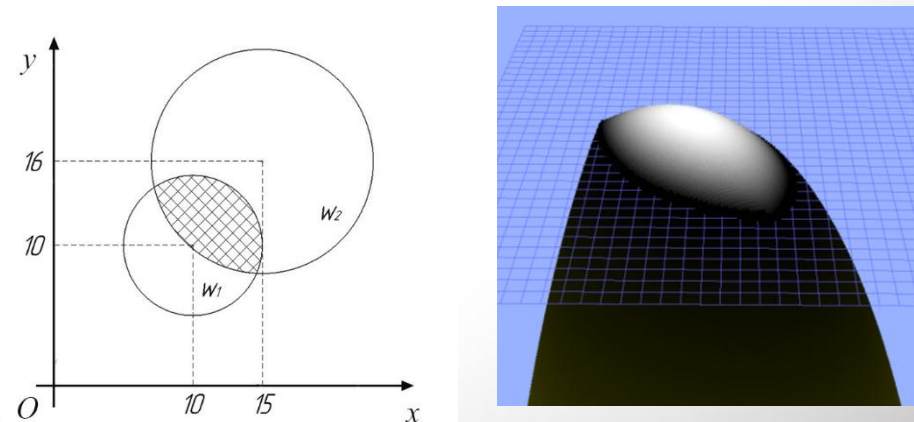
$$\begin{cases} w_1 \wedge_{\alpha} w_2 \equiv \frac{1}{\alpha + 1} (w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2 - 2\alpha w_1 w_2}); \\ w_1 \vee_{\alpha} w_2 \equiv \frac{1}{\alpha + 1} (w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2 - 2\alpha w_1 w_2}); \\ \overline{w_1} \equiv -w_1, \end{cases}$$

где  $\alpha \in (-1, 1]$  – коэффициент влияющий на способ заполнения функционального пространства. При синтезе сложных геометрических моделей на основе R-функционального моделирования формируется рельеф поверхности функции.

*R-функциональное объединение*



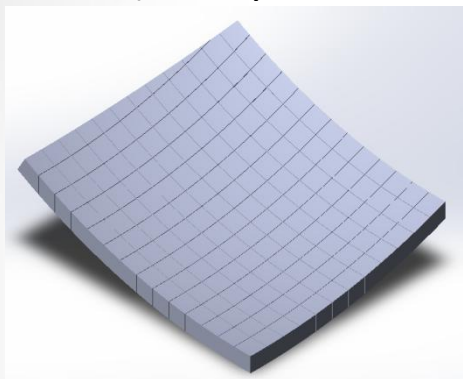
*R-функциональное пересечение*



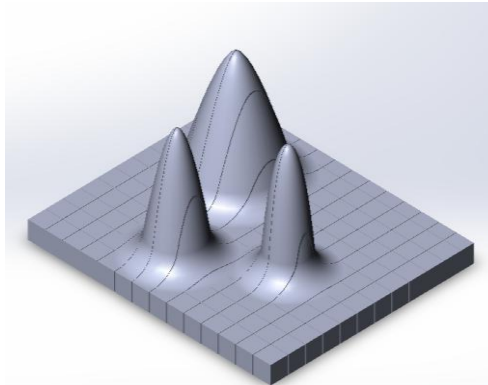
# Метод потенциальных полей

$$\vec{f}(x, y) = \vec{f}_G(x, y) + \sum_i \vec{f}_{O_i}(x, y), \text{ на основе работы [49]}$$

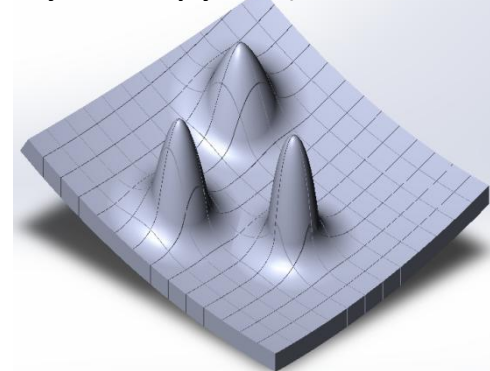
Потенциал притяжения



Потенциал отталкивания



Результирующий потенциал



Проблема попадания в локальный минимум:



## Достоинства

1. Динамическое построение маршрутов
2. Высокая гладкость траекторий
3. Возможность управления трассой за счет изменения функции отталкивания

## Недостатки

1. Некорректность работы с препятствиями сложной невыпуклой формы
2. Попадание в локальный минимум

# (R-функциональная градиентная модель)

Представим целевую точку с координатами  $(x_1, y_1)$  уравнением окружности

$$\omega_1 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - r_1^2$$

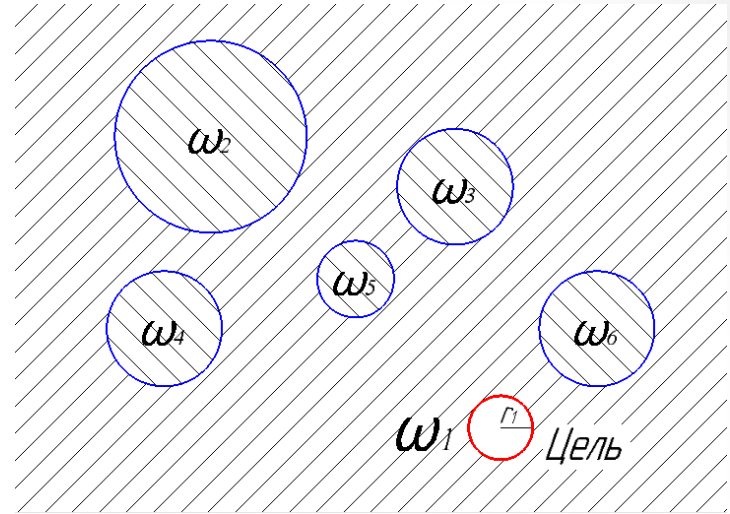
где  $r_1 \rightarrow 0$  минимальный радиус.

Препятствия:  $\omega_i = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 - r_i^2$

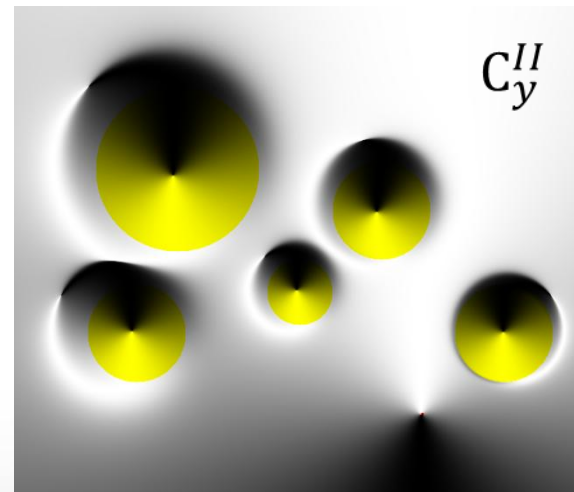
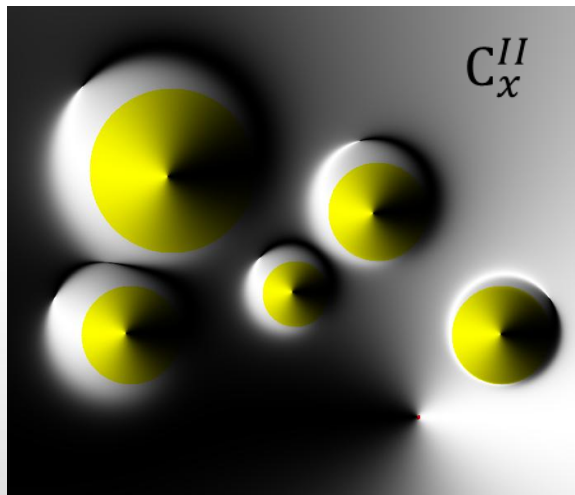
Понижающий коэффициент изменения рельефа:  $k_1$

RfG-модель примет вид:

$$\omega = k_1(-\omega_1) \vee \omega_2 \vee \dots \vee \omega_i$$

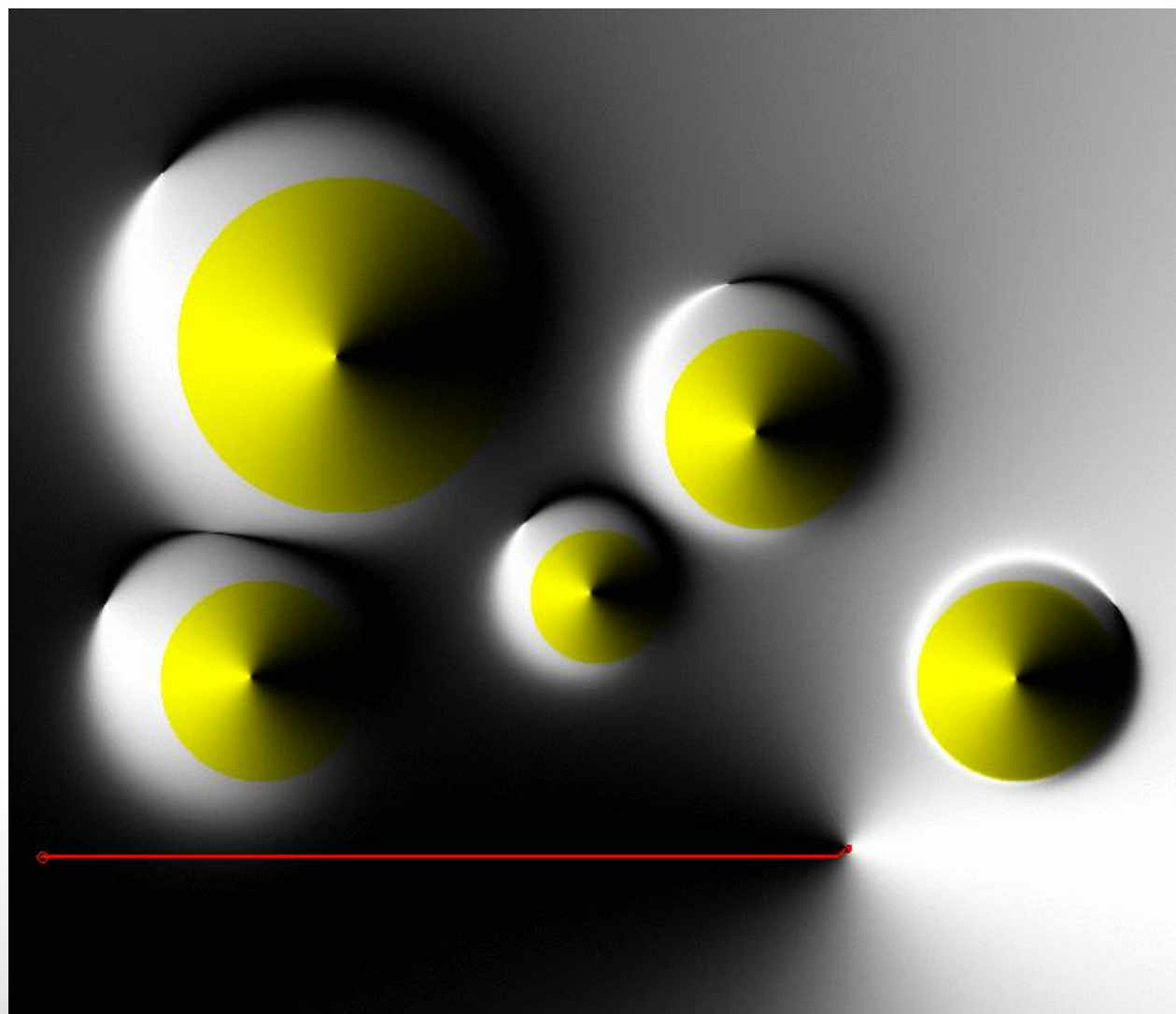


Пара порожденных M-образов для функции  $\omega$  при  $\alpha=0$



# Построение геометрической $RfG$ -модели ( $R$ -функциональная градиентная модель)

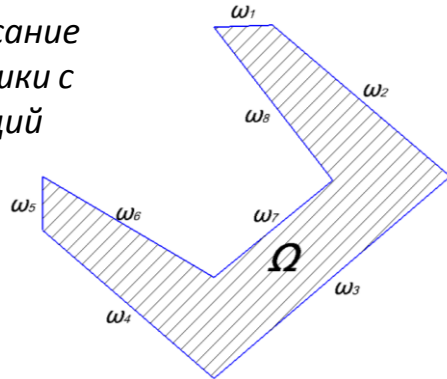
*Результат градиентного движения*





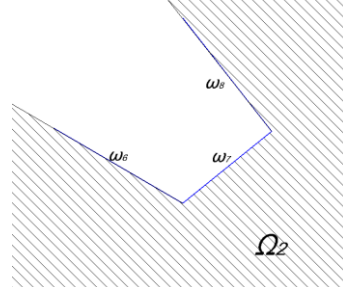
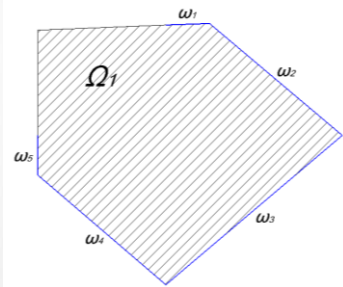
# RfG-модель среды с ловушкой (локальный минимум)

Аналитическое описание препятствия-ловушки с помощью R-функций

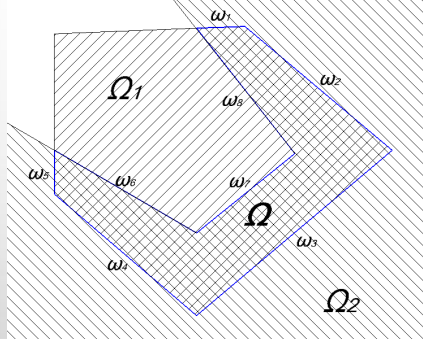


$$\Omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5$$

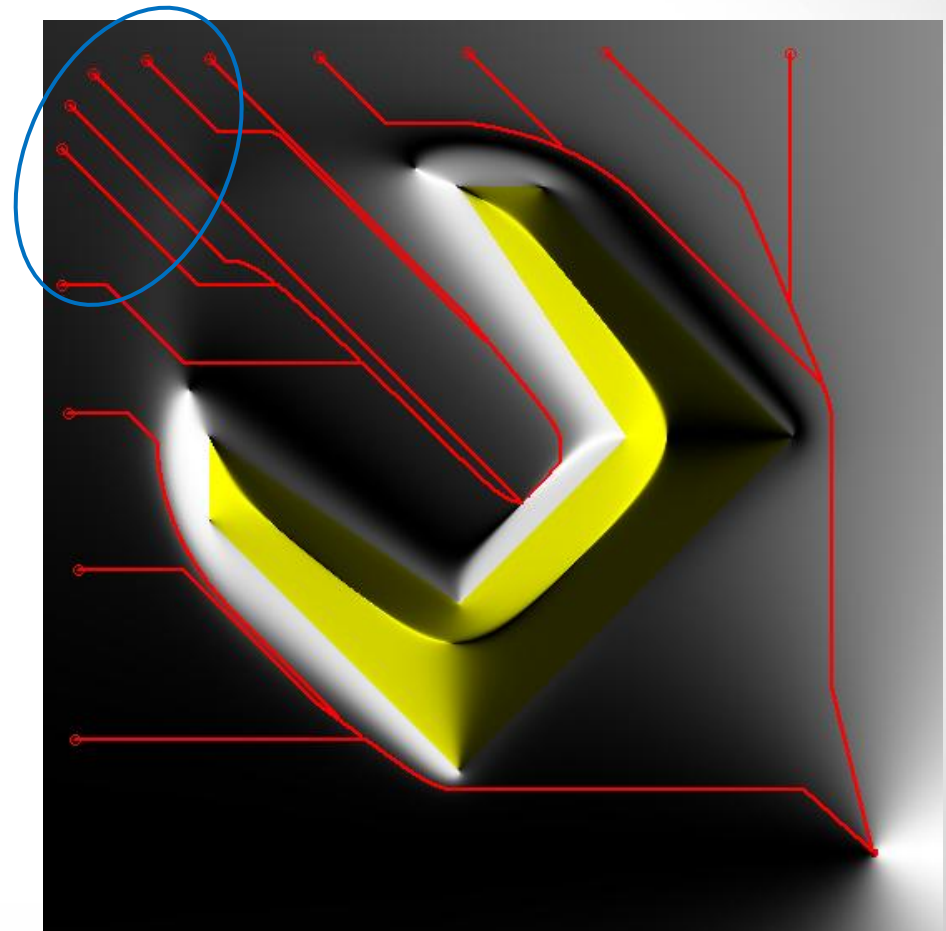
$$\Omega_2 = \omega_6 \vee \omega_7 \vee \omega_8$$



$$\Omega = (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5) \wedge (\omega_6 \vee \omega_7 \vee \omega_8)$$



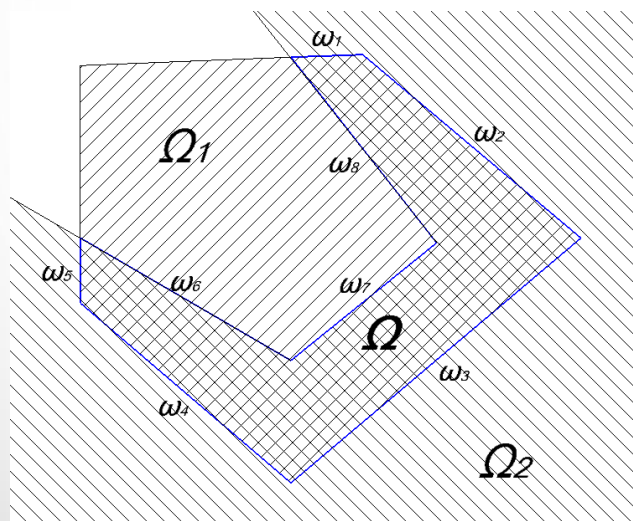
Градиентный спуск без дополнительных алгоритмов



# RfG-модель среды с ловушкой (локальный минимум)

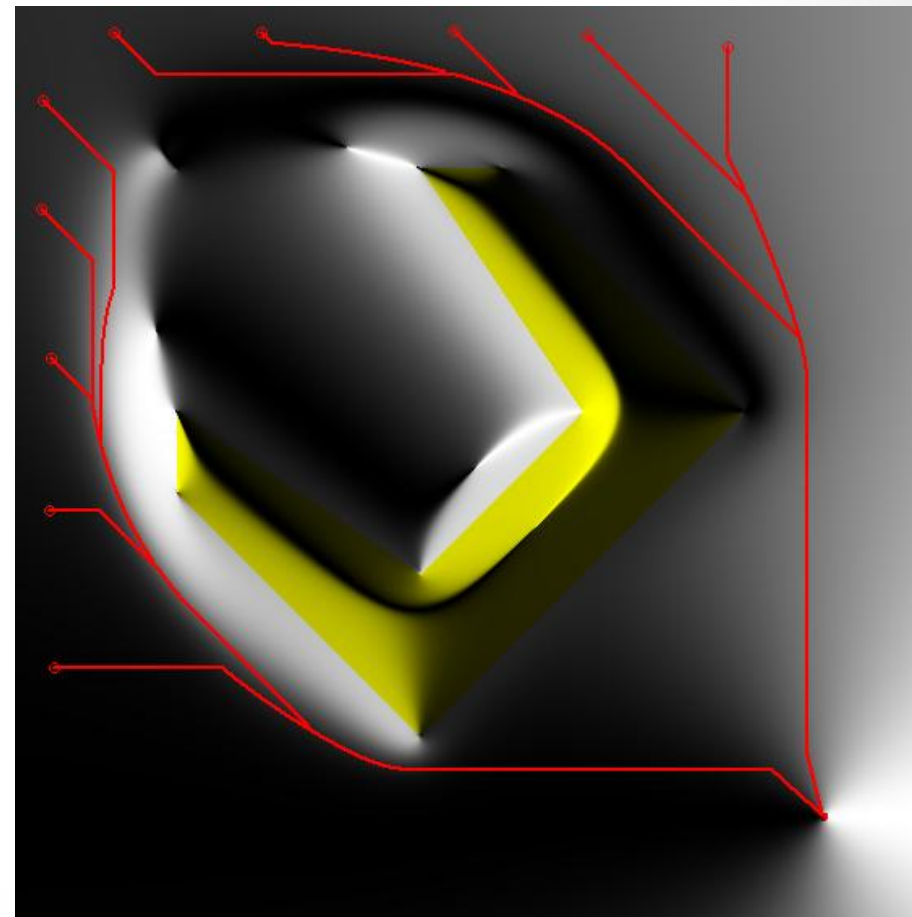
Для предотвращения попадания в локальный минимум предлагается использовать дополнительный коэффициент, повышающий значение функции, описывающей вогнутый подконтур  $k_n$

$$\Omega = \Omega_1 \wedge k_n \Omega_2$$



$$\Omega = (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5) \wedge k_n (\omega_6 \vee \omega_7 \vee \omega_8)$$

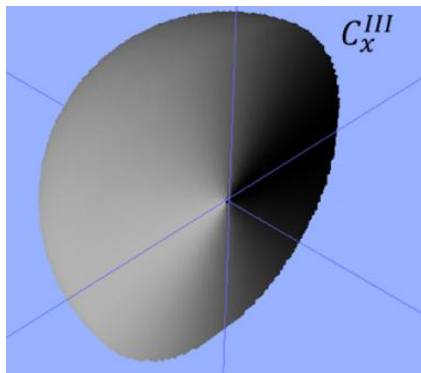
*Применение вспомогательного алгоритма выхода из локального минимума [80]*



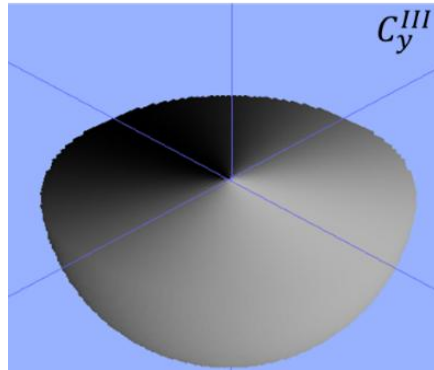
# Трёхмерная RfG-модель

Необходимо вычислить косинусы углов проекции нормали в трёхмерном пространстве  $\alpha_{xyz}$ ,  $\beta_{xyz}$  и  $\gamma_{xyz}$

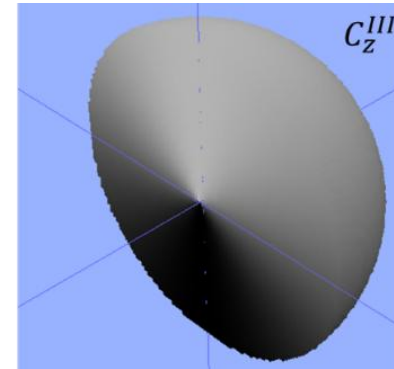
$$C_x^{III} = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + 1 \right) \frac{P}{2}$$



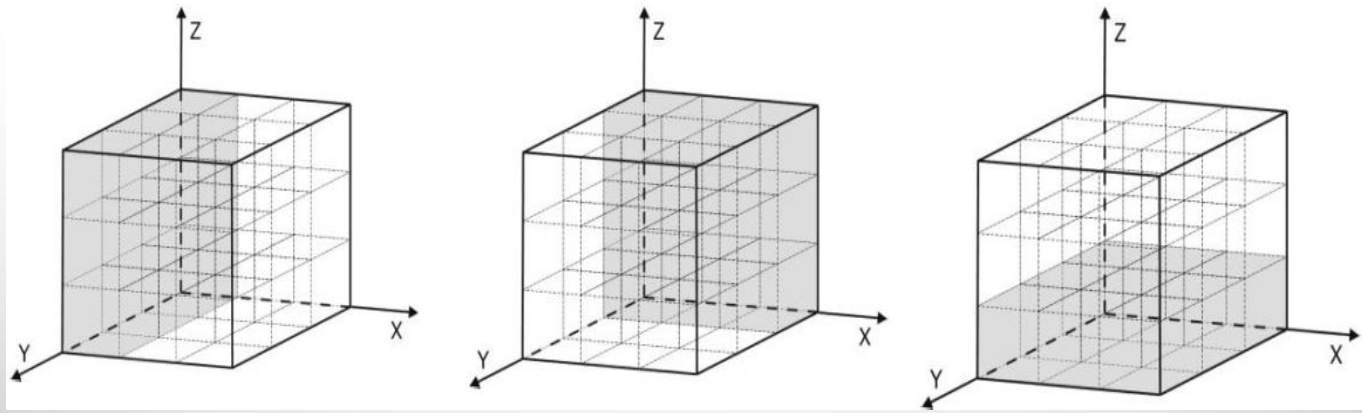
$$C_y^{III} = \left( \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + 1 \right) \frac{P}{2}$$



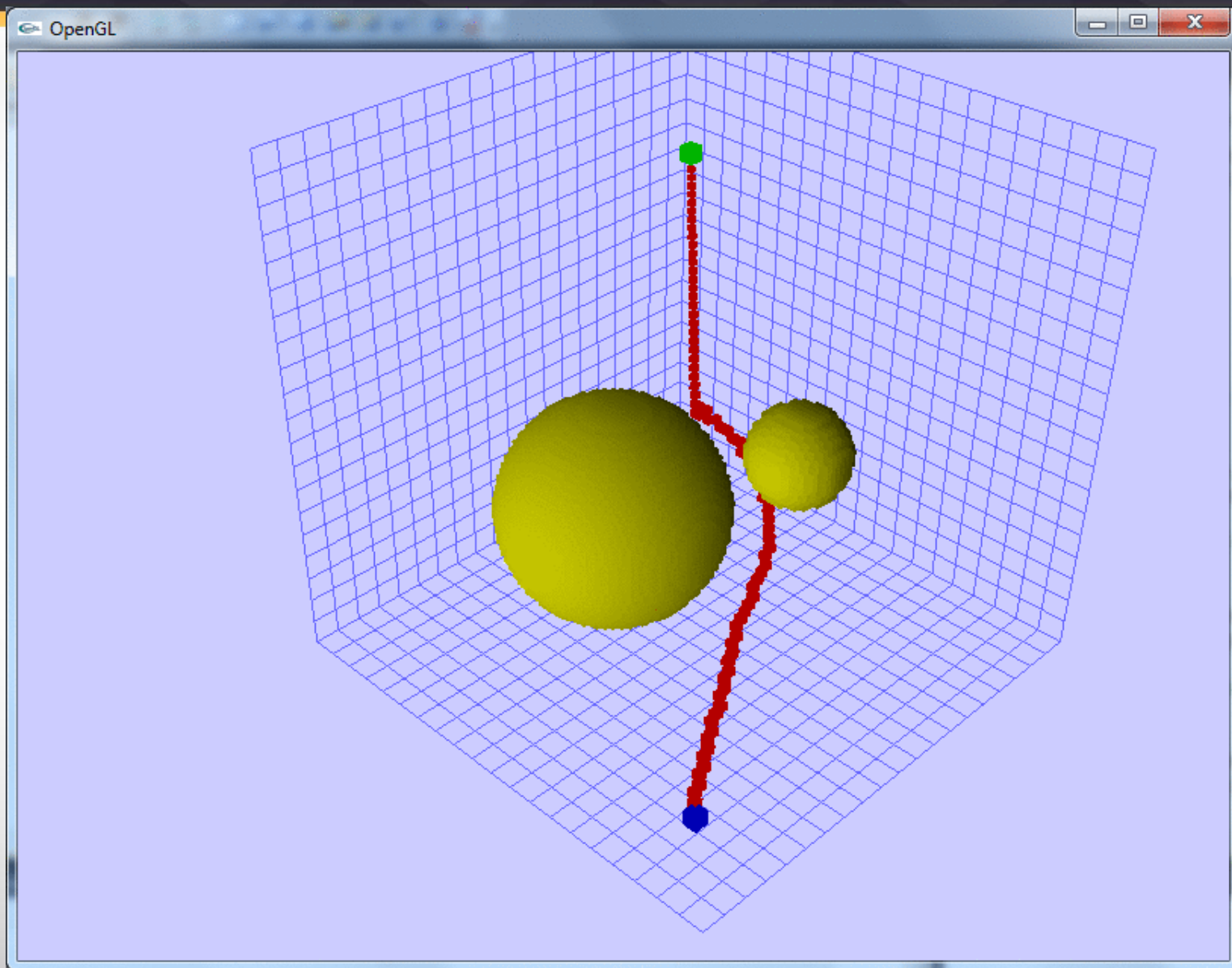
$$C_z^{III} = \left( \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + 1 \right) \frac{P}{2}$$



*Выбор однозначного направления смещения (формирования плоскостей смещения)*



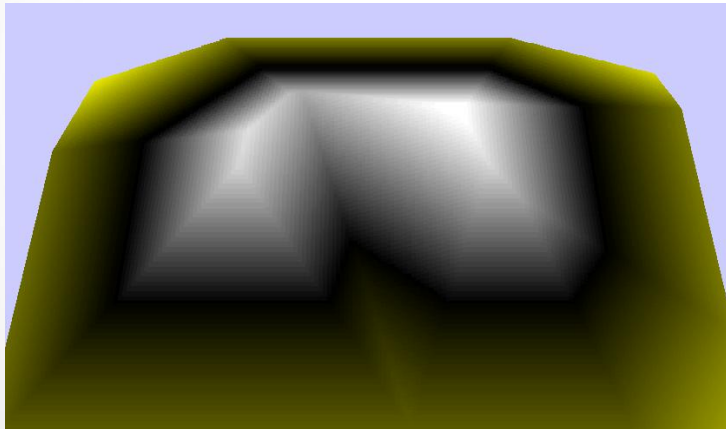
# Градиентный спуск в пространстве на основе RfG-модели



# R-функциональное построение скелета формы в решении задач поиска пути

Линейная система R-функций при  $\alpha=1$ :

$$\begin{cases} w_1 \wedge_1 w_2 \equiv \frac{1}{2}(w_1 + w_2 - |w_1 - w_2|); \\ w_1 \vee_1 w_2 \equiv \frac{1}{2}(w_1 + w_2 + |w_1 - w_2|); \\ \overline{w_1} \equiv -w_1. \end{cases}$$



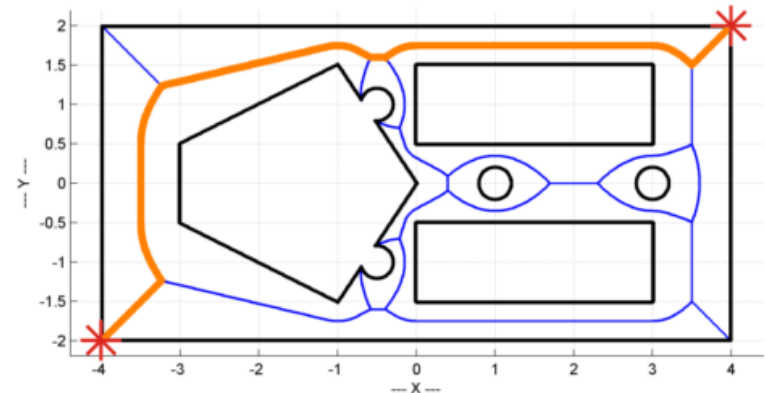
## Достоинства

1. Избегание локальных минимумов
2. Возможность управления гладкостью трассы за счет коэффициента R-функции

R-функциональное построение скелета происходит с помощью выделения ребер рельефа на линейной R-функции расстояния с помощью конечно-разностной аппроксимации Лапласа:

$$\nabla^2 f(x, y) \approx l_{xy} = f_{x+1,y} + f_{x-1,y} + f_{x,y+1} + f_{x,y-1} - 4f_{x,y},$$

Определение траектории маршрута на скелете

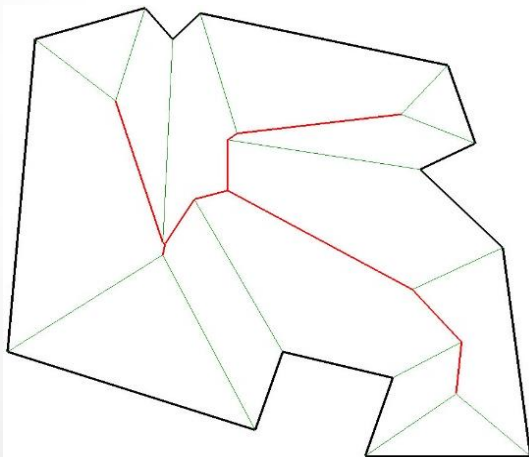


## Недостатки

1. Необходимость в дополнительных численных преобразованиях для выделения скелета
2. Отсутствие возможности произвольного задания опорных точек

# R-функциональная модель скелета

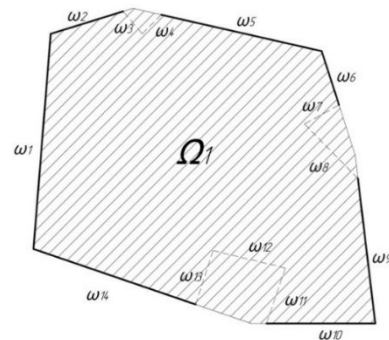
Прямолинейный скелет на основе алгоритма [82]



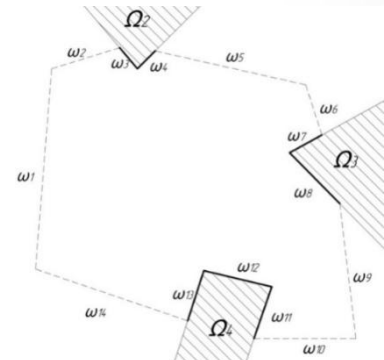
[82] Felkel, P. Straight skeleton implementation / P. Felkel, S. Obdrzalek // Proceedings of spring conference on computer graphics. – Budmerice, Slovakia. – 1998 – P. 210-218.

Представление контура в аналитическом виде с помощью системы R-функций:

$$\begin{cases} w_1 \wedge_{\alpha} w_2 \equiv \frac{1}{\alpha+1} (w_1 + w_2 + \sqrt{w_1^2 + w_2^2 - 2\alpha w_1 w_2}); \\ w_1 \vee_{\alpha} w_2 \equiv \frac{1}{\alpha+1} (w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2 - 2\alpha w_1 w_2}); \\ w_1 \equiv -w_1, \end{cases}$$

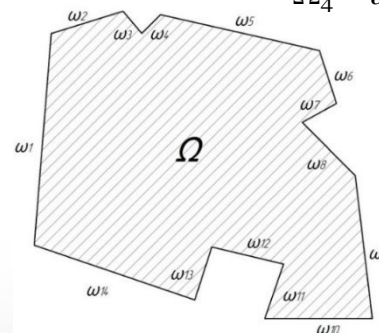


$$\Omega_1 = w_1 \wedge w_2 \wedge w_5 \wedge w_6 \wedge w_9 \wedge w_{10} \wedge w_{14}.$$



$$\Omega_2 = w_3 \wedge w_4, \quad \Omega_3 = w_7 \wedge w_8,$$

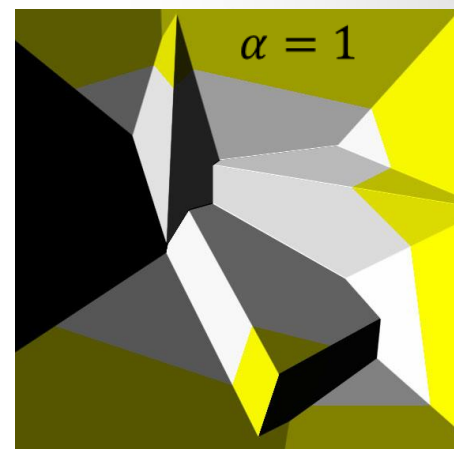
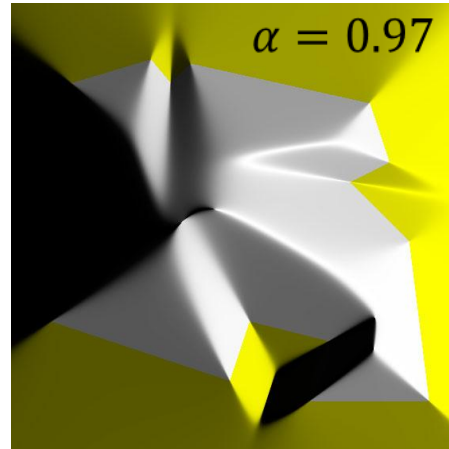
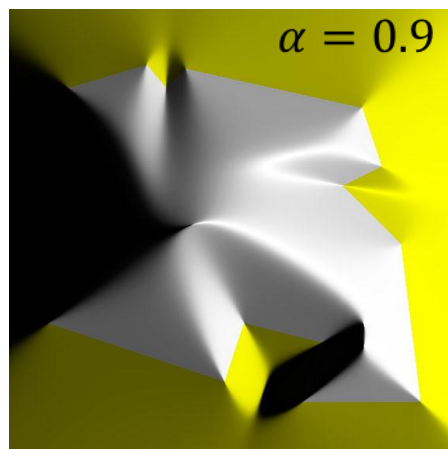
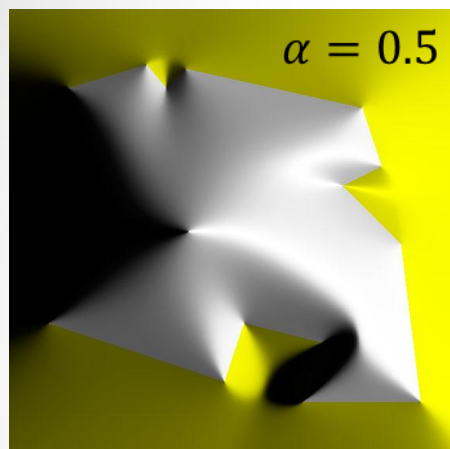
$$\Omega_4 = w_{11} \wedge w_{12} \wedge w_{13}.$$



$$\Omega = w_1 \wedge w_2 \wedge w_5 \wedge w_6 \wedge w_9 \wedge w_{10} \wedge w_{14} \wedge (w_3 \vee w_4) \wedge (w_7 \vee w_8) \wedge (w_{11} \vee w_{12} \vee w_{13}).$$

# Построение функционально-воксельного представления *RfS*-модели (*R*-функциональная скелетная модель)

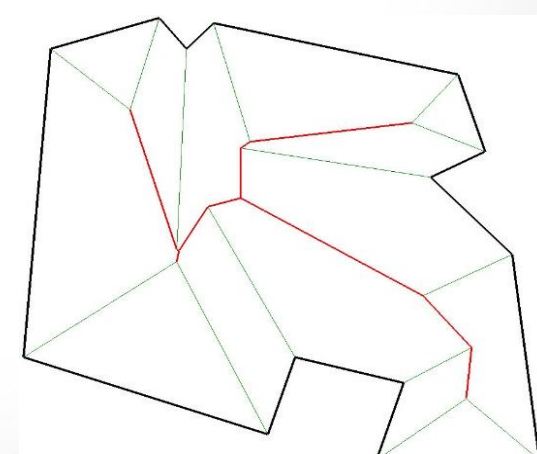
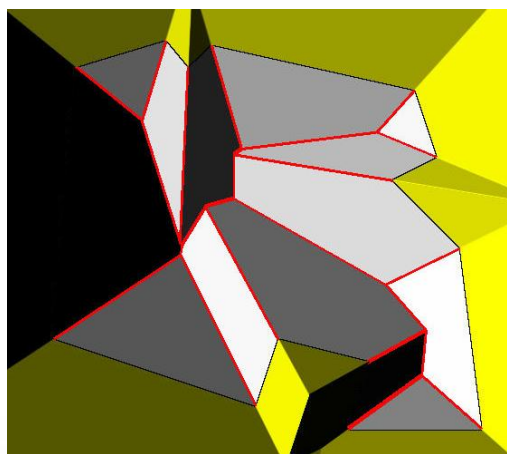
Заполнение графической информацией при различных значениях  $\alpha$



Сравнение полученных результатов

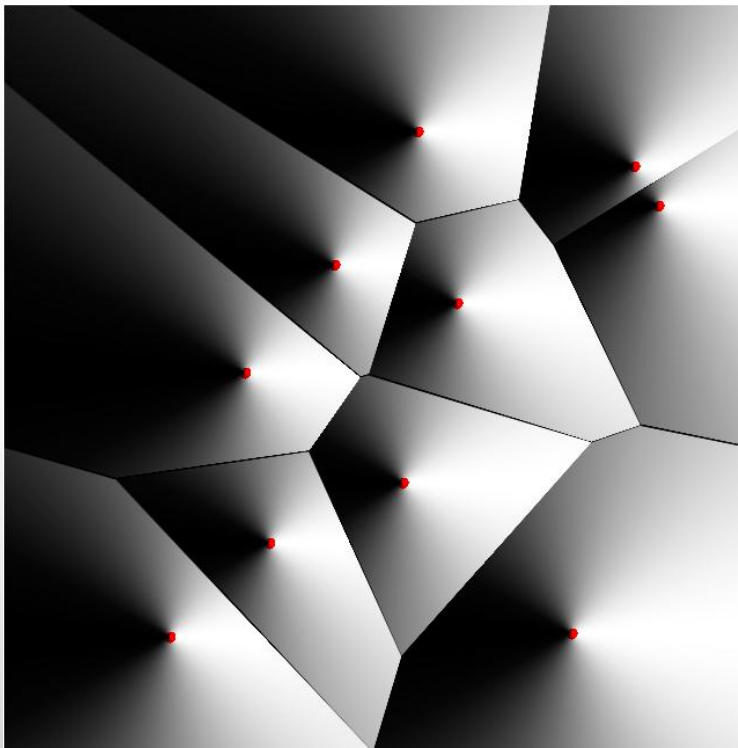
Преобразование  $\alpha$ -системы  
*R*-функций

$$\begin{cases} w_1 \wedge_1 w_2 \equiv \frac{1}{2} (w_1 + w_2 - |w_1 - w_2|); \\ w_1 \vee_1 w_2 \equiv \frac{1}{2} (w_1 + w_2 + |w_1 - w_2|); \\ \overline{w_1} \equiv -w_1. \end{cases}$$

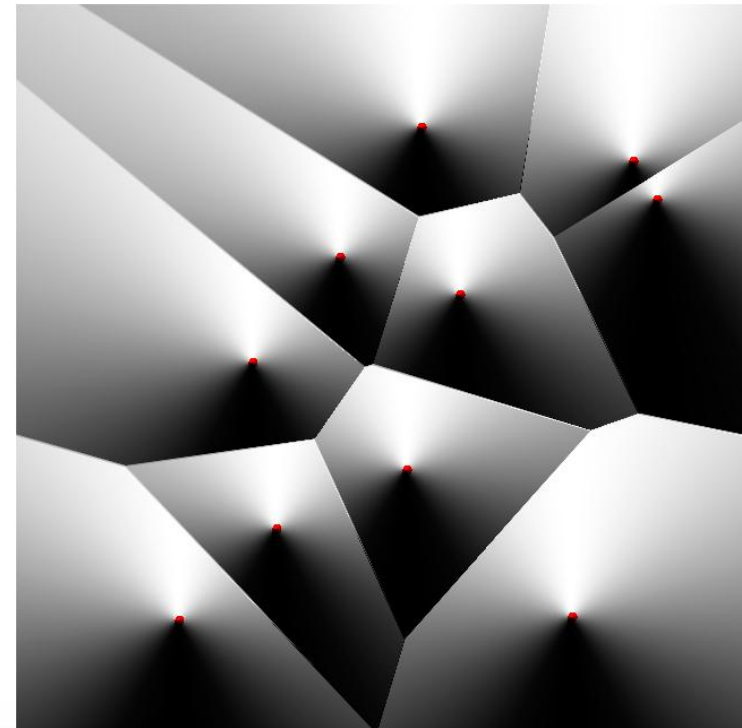


# Построение диаграммы Вороного на основе $RfS$ -модели

Диаграмма Вороного конечного множества точек  $S$  на плоскости представляет такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества  $S$ , чем к любому другому элементу множества



$C_x^{\text{II}}$



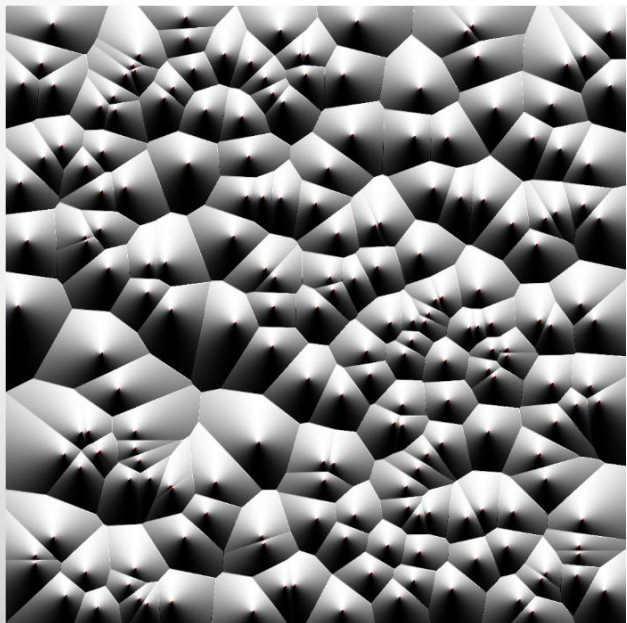
$C_y^{\text{II}}$



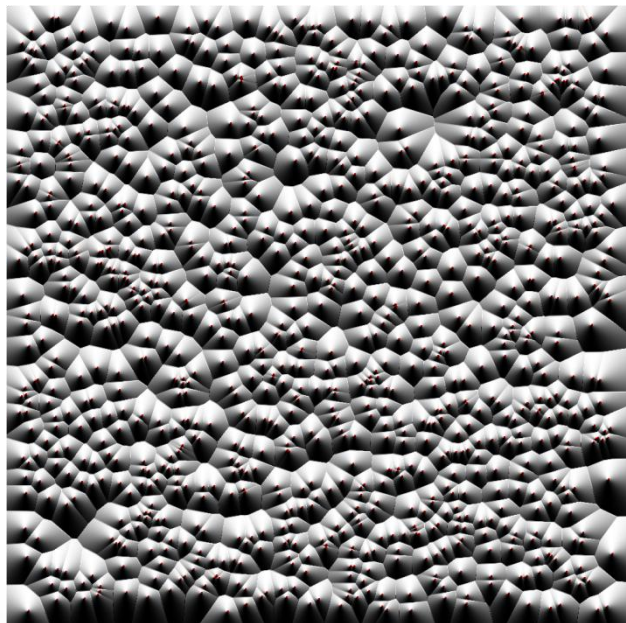
# Построение диаграммы Вороного на основе $RfS$ -модели

Количество точек заданного множества может быть ограничено только габаритными размерами воксельного пространства, так для массива  $1000 \times 1000$  без труда строится диаграмма Вороного на 200 и 1000 точек.

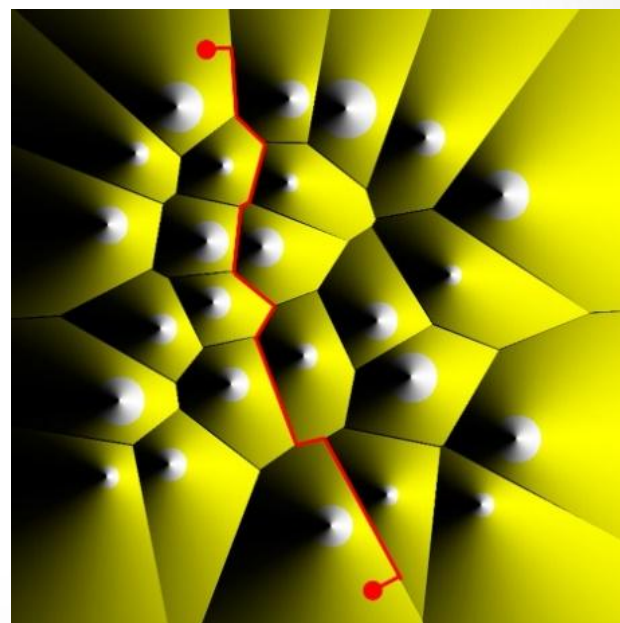
200 точек



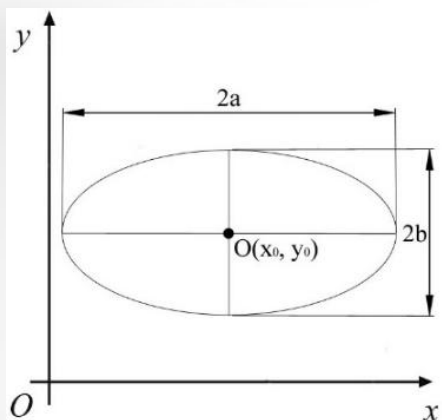
1000 точек



25 объектов

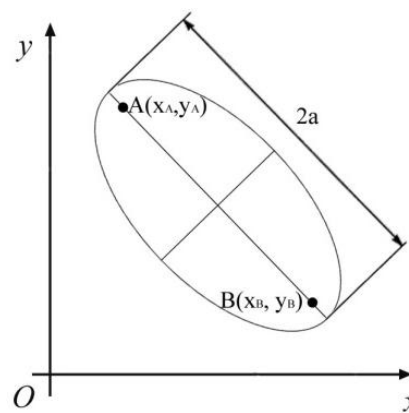


# Организация среды построения маршрута с помощью фокусного уравнения эллипса



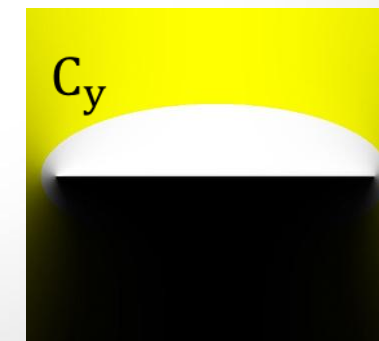
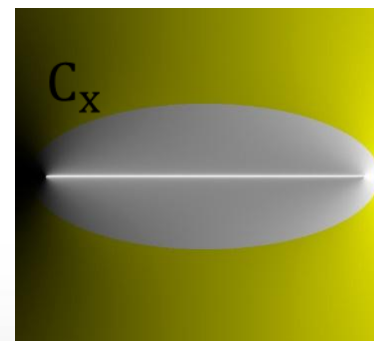
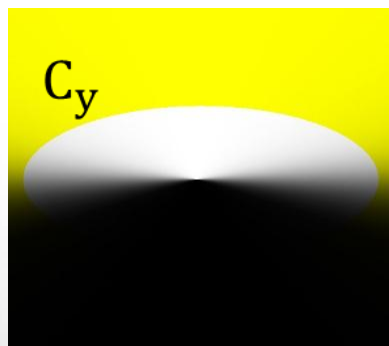
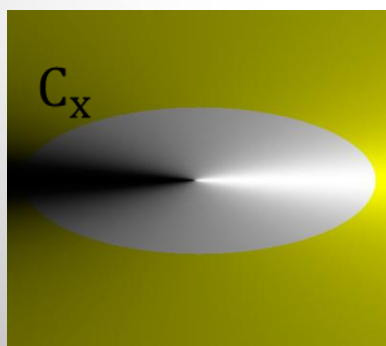
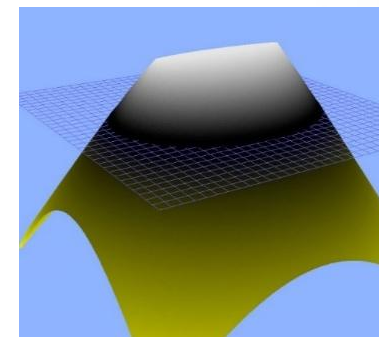
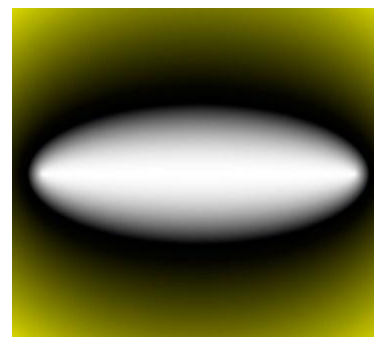
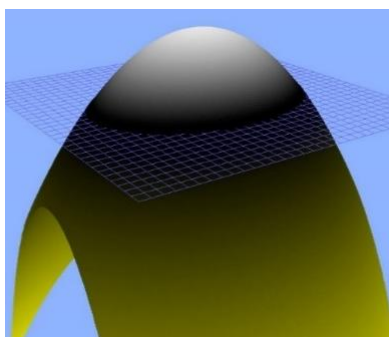
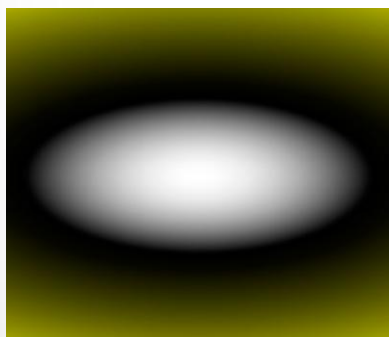
**Каноническое уравнение эллипса:**

$$w = 1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2},$$



**Фокусное уравнение эллипса:**

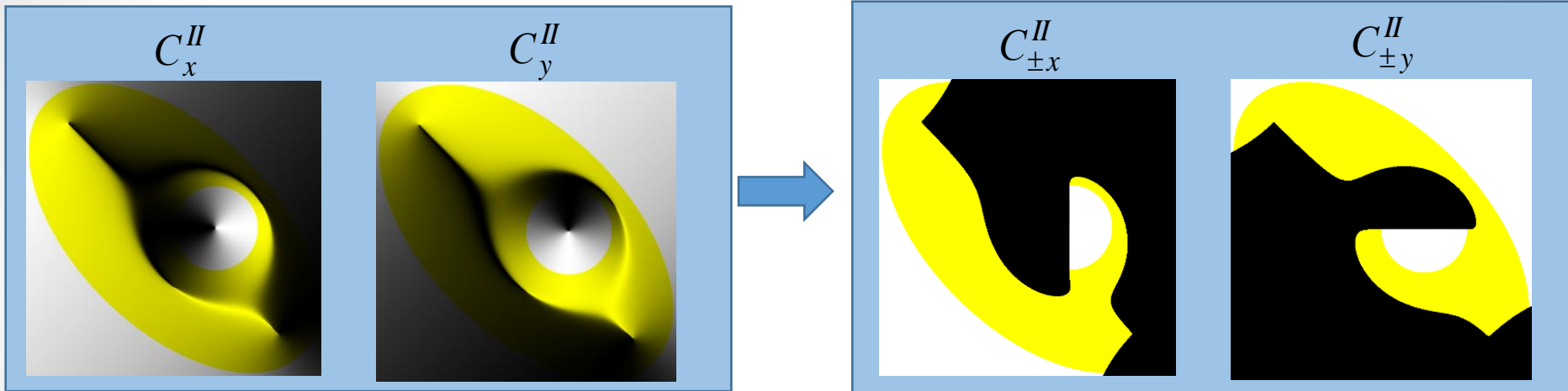
$$w_1 = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2} + \sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2} - 2a$$



# ГЛАВА 4. Решение задач поиска пути на основе рельефного подхода

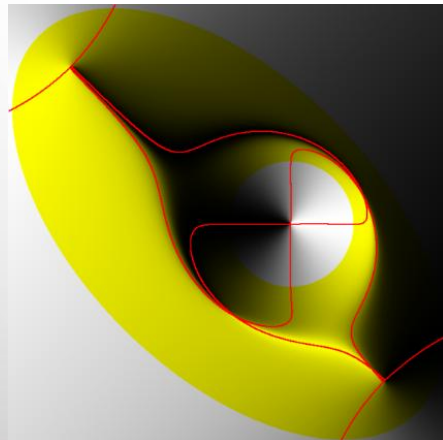
Построение геометрической  $RfR$ -модели ( $R$ -функциональная рельефная модель)

*Выделение рельефа поверхности  $R_\alpha$  при  $\alpha=0$*

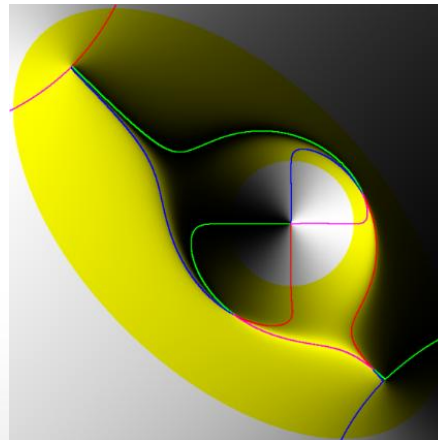


*Этапы фильтрации элементов рельефа*

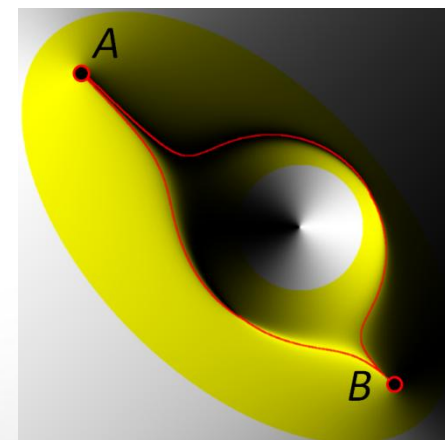
*Распознавание*



*Разделение*



*Удаление лишних*



# Применение геометрических преобразований для уточнения элементов трасс (Вариационная трассировка)

## Обход трех препятствий

Построение двух маршрутов на основе двух M-образов знака производной

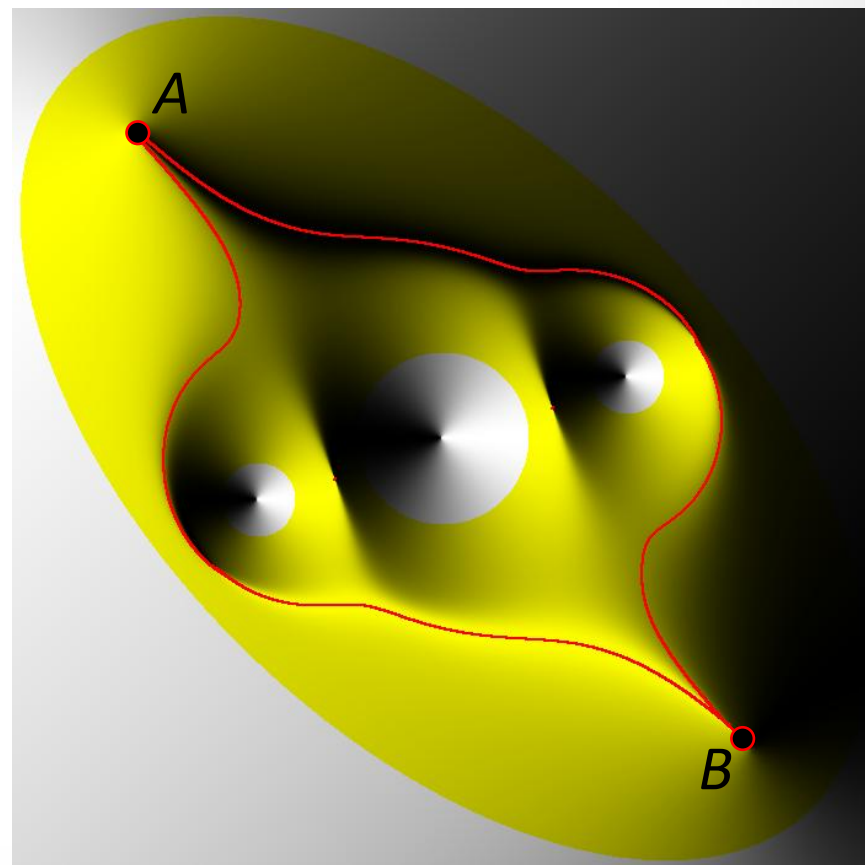
$C_{\pm x}^{\text{II}}$



$C_{\pm y}^{\text{II}}$

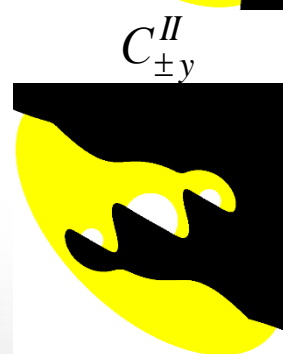
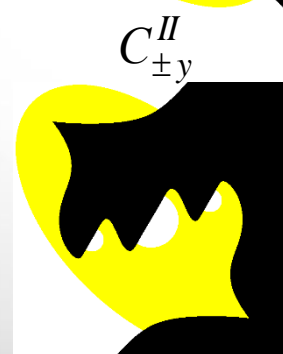
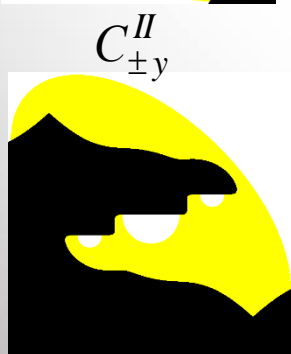
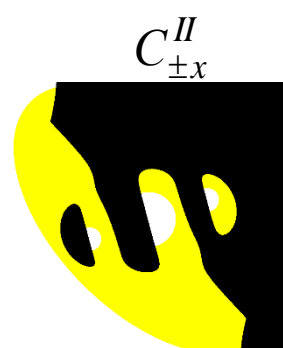
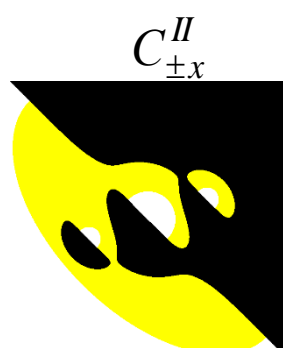
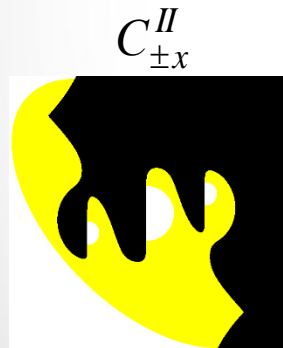
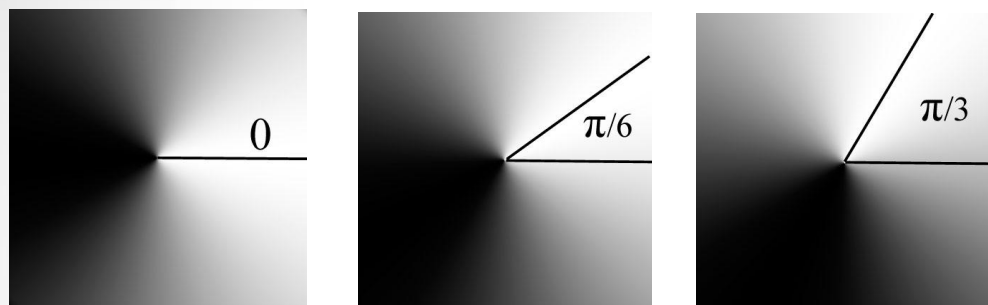


Результирующие трассы

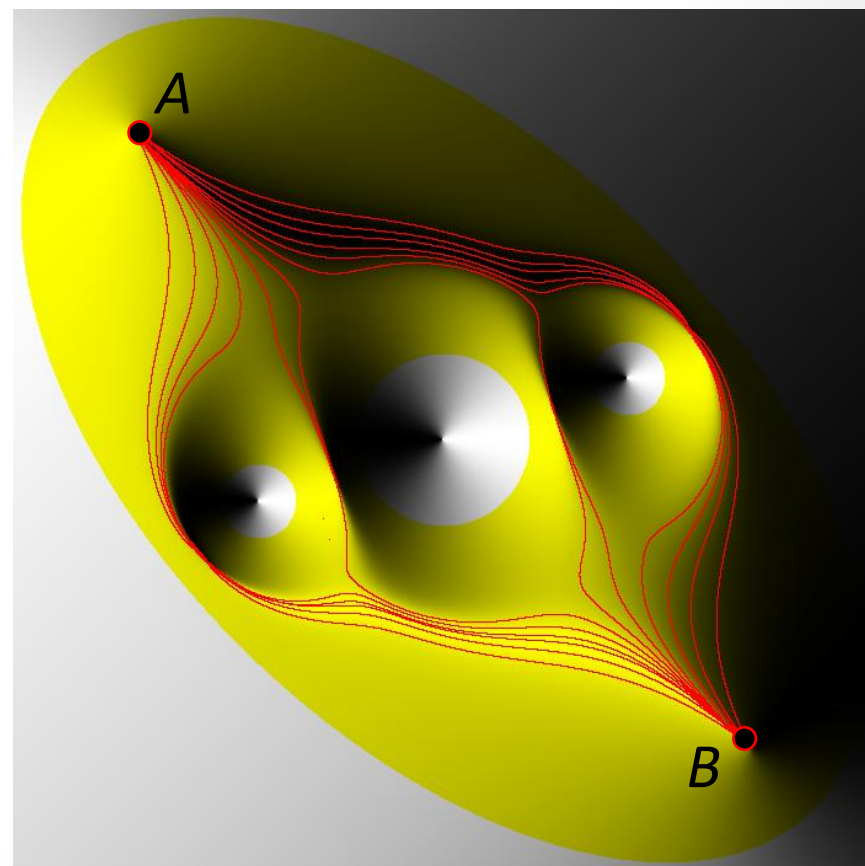


# Применение геометрических преобразований для уточнения элементов трасс (Вариационная трассировка)

Этапы поворота сцены

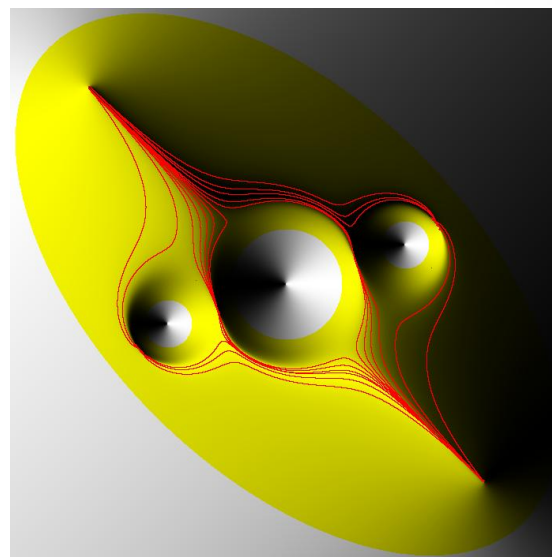
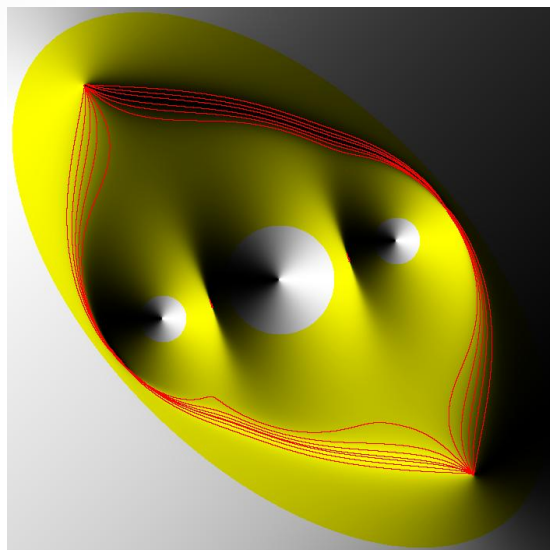


Многовариантная модель

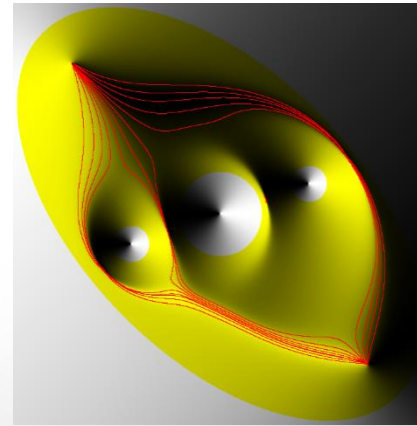
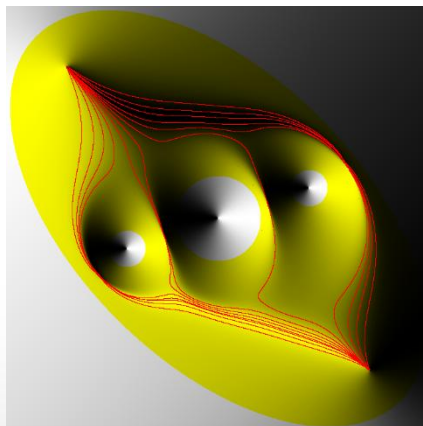
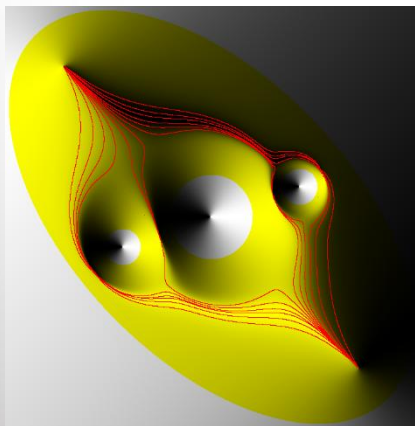


# Влияние статических ограничений на построение вариантов маршрутов

*Изменение коэффициента при функции эллипса*

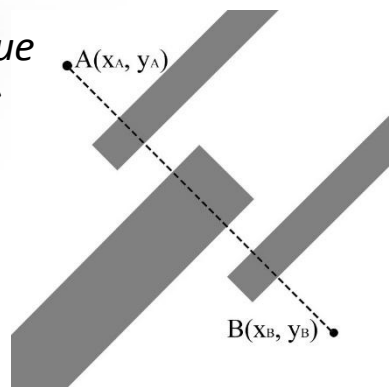


*Изменение коэффициентов при функции отдельных препятствий*

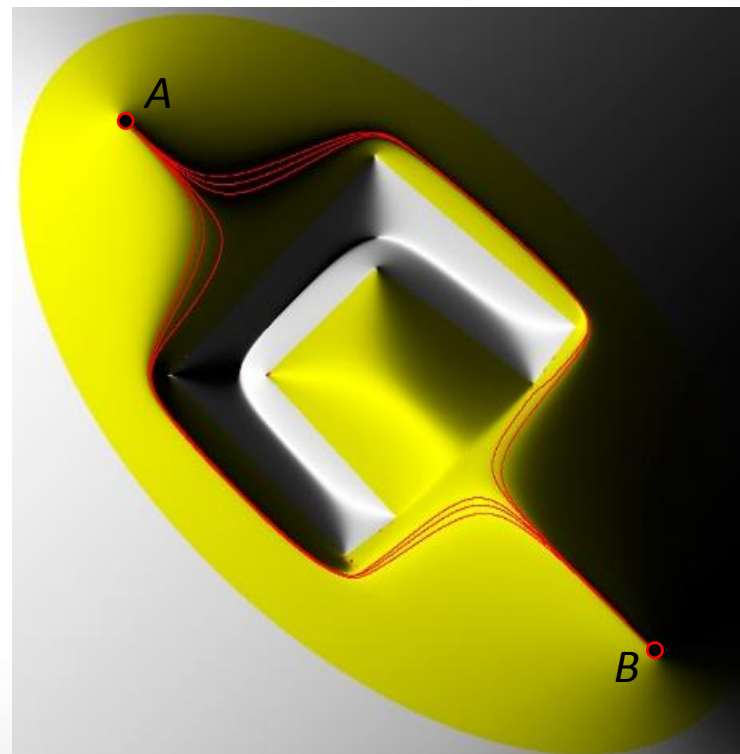
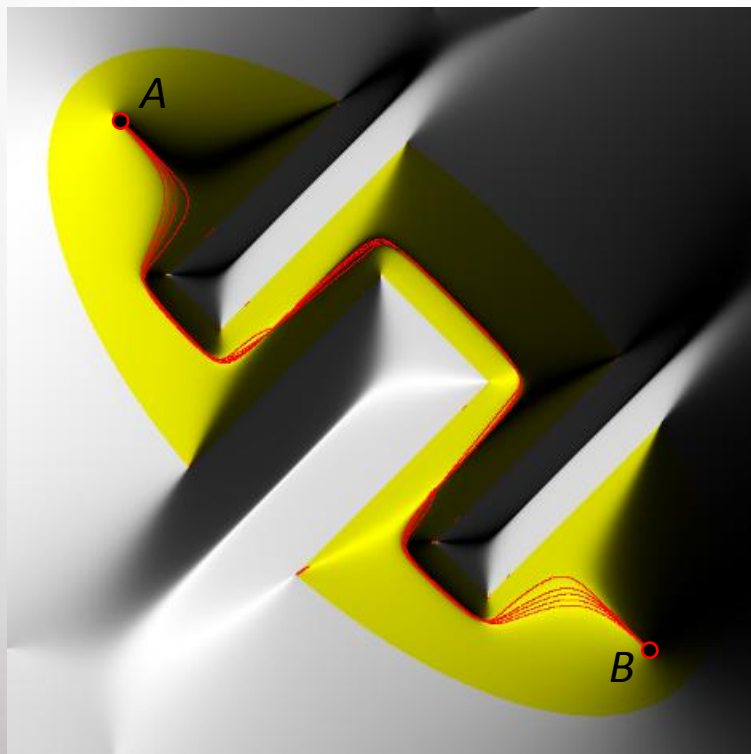
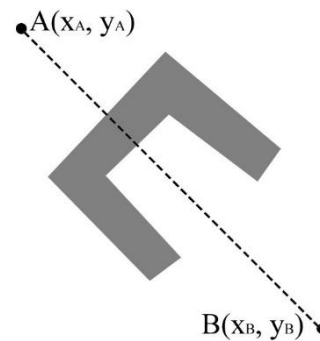


# Случай «коридор» и «ловушка» (U-образное препятствие)

Препятствие  
«коридор»



Препятствие  
«ловушка»



**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**