УДК 519.83

ВЛИЯНИЕ ДАЛЬНОВИДНЫХ АГЕНТОВ НА ДИНАМИКУ В ПОРОГОВОЙ МОДЕЛИ КОНФОРМНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Н.И. Базенков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: bazenkov@gmail.com

Ключевые слова: пороговое поведение, коллективные действия, игровая динамика

Аннотация: Рассматриваются динамические свойства пороговой модели конформного поведения в предположении, что все агенты имеют одинаковые пороги. Эта модель была предложена для объяснения процесса вовлечения людей в коллективные действия. Базовое правило поведения агента состоит в том, что агент принимает участие в действиях, если в них уже участвует достаточное количество других агентов. В данной работе вводится предположение, что некоторые агенты могут принимать решение с учетом будущей реакции других агентов. Такие агенты названы дальновидными, исследуется их влияние на коллективную динамику в пороговой модели.

1. Введение

Пороговая модель конформного поведения, предложенная Грановеттером в [6], получила широкую известность и применялась для объяснения того, как происходит вовлечение людей в некоторые коллективные действия. В оригинальной работе [6] в качестве основного примера рассматривалось участие в массовых протестах: митингах, забастовках и т.д. Однако, она вполне может использоваться для объяснения поведения людей в “мирных” ситуациях. При принятии решения об участии в благотворительной акции или просмотре нового фильма социальное влияет также может играть значительную роль.

Пороговая модель предполагает, что каждый человек имеет так называемый “порог активации”. Для вовлечения человека в коллективные действия необходимо, чтобы число уже вовлеченных участников превышало этот порог. В исследованиях, посвященных этой модели, рассматривалось изменение во времени числа участников при разных распределениях порогов [6], [2], [3]. Агенты с порогами, равными нулю, становятся инициаторами активности, затем в процесс вовлекаются участники с низким порогом и т.д. В терминах теории игр выигрыш агента от участия в действии становится положительным, если число других участников превышает его порог. В отличие от этих работ здесь рассматриваются однородные агенты с одинаковыми порогами.

В традиционной динамической модели [6] рассматривалось поведение “недальновидных” агентов, рассматривавших только текущее число участников. В данной работе рассматриваются агенты, которые пытаются прогнозировать реакцию остальных агентов на свои действия. Такой агент может принять решение об участии в коллективном действии даже если текущее число участников меньше его порога. В качестве модели принятия решения таким “дальновидным” агентом используется метод двойного наилучшего ответа, использовавшийся в алгоритмах оптимизации топологии беспроводной сети [1]. Метод основан на идеях рефлексивных игр [5] и соответствует поведению агента первого ранга рефлексии, который считает, что все остальные агенты являются “недальновидными”. Подобные модели ранее уже использовались для анализа и управления поведением агентов в социально-экономических системах [4].

В данной работе исследуется, как наличие “дальновидных” агентов влияет на динамику коллективного поведения в пороговой модели. Пока рассматривается случай, когда все агенты образуют единую группу и структура социальных связей представляет собой полный граф. Для этой ситуации получены аналитические условия перехода всех агентов в активное состояние или наоборот, в неактивное. В дальнейшем будет исследована более сложная структура социальных связей между агентами.

2. Пороговая модель коллективного поведения

Рассмотрим пороговую модель конформного поведения из [6]. Есть множество агентов $N = \{1, \ldots, n\}$. Каждый агент выбирает из двух доступных действий: $x_i \in \{0, 1\}$. Предположим, что пороги всех агентов одинаковы: $\theta_i = \theta \ \forall i \in N$. Выигрыш агента зависит от того, сколько других агентов в группе выбрали 1.

$$u_i(x) = (\sum_{j \in N, j \neq i} x_j - \theta) x_i \tag{1}$$

Агента, выбравшего 1, назовем активным. Полезности (1) анонимны, то есть зависят только от общего числа активных агентов, и связи между агентами не учитываются. Будем считать, что, если полезность равна нулю, агент предпочитает действие. Обозначим сумму всех элементов вектора x как $\varphi(x) = \sum_{i \in N} x_i$. Будем называть общее число активных агентов $\varphi(x)$ состоянием игры.

Далее будем рассматривать динамический процесс, в начале которого активно φ^0 агентов, а действие агента i на шаге $t+1$ описывается его наилучшим ответом

$$x_i^{t+1} = BR_i(x_{-i}^t), \tag{2}$$

где

$$BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x_{-i}) \geqslant \theta; \\ 0, & \text{если } \varphi(x_{-i}) < \theta. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим динамику состояния $\varphi(x)$, если поведение агентов описывается наилучшим ответом (3).

$$\varphi(x^{t+1}) = \varphi^{br}(x^t), \tag{4}$$

где $\varphi^{br}(x) = \sum_{i \in N} BR_i(x_{-i})$.

Чтобы вычислить $\varphi^{br}(x^t)$, не обязательно проверять для каждого агента условия (3), достаточно знать $\varphi(x^t)$ и θ. Функции полезности (1) анонимны, то есть на выигрыш агента i влияет только сумма $\varphi(x_{-i}) = \sum_{j \neq i} x_j$ действий других агентов, независимо от того, какие конкретно агенты выбрали $x_j = 1$.

Утверждение 1. *Наилучший ответ агента i на обстановку $\varphi(x_{-i})$ можно выразить как функцию от общего числа активных агентов $\varphi(x)$ и действия его собственного текущего действия x_i:*

$$BR(x_i, \varphi(x)) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x) \geqslant \theta + 1; \\ 1 - x_i, & \text{если } \theta \leqslant \varphi(x) < \theta + 1; \\ 0, & \text{если } \varphi(x) < \theta. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство утверждения 1. Обстановку $\varphi(x_{-i})$ для агента i можно выразить как $\varphi(x_{-i}) = \varphi(x) - x_i$ (*). Это означает, что наилучшие ответы всех агентов, чье текущее действие $x_i = 1$, будут совпадать. Аналогично совпадают наилучшие ответы всех агентов с $x_i = 0$.

Для $x_i = 1$ из выражений (3) и (*) следует

$$BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x) \geqslant \theta + 1; \\ 0, & \text{если } \varphi(x) < \theta + 1. \end{cases}$$

Для $x_i = 0$ из выражений (3) и (*) следует

$$BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x) \geqslant \theta; \\ 0, & \text{если } \varphi(x) < \theta. \end{cases}$$

Объединяя два выражения, получаем (5). □

Используя выражение (5), выразим $\varphi^{br}(x)$ как функцию от $\varphi(x)$ (при фиксированном θ). Здесь будем использовать тот факт, что состояние системы будет складываться из наилучших ответов агентов, чье текущее действие равно 0, и тех, чье действие равно 1.

$$\varphi^{br}(x) = \sum_{i \in N} BR_i(x_{-i}) = \varphi(x) BR(1, \varphi(x)) + (n - \varphi(x)) BR(0, \varphi(x)) \tag{6}$$

Утверждение 2. *Поведение (4) определяется выражениями:*

$$\varphi^{br}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi(x) < \theta; \\ n - \varphi(x), & \text{если } \theta \leqslant \varphi(x) < \theta + 1; \\ n, & \text{если } \varphi(x) \geqslant \theta + 1. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство утверждения 2. Выражения (7) получаем подстановкой (5) вместо $BR(1, \varphi(x))$ и $BR(0, \varphi(x))$ в выражение 6. □

Исследуем, какие предельные состояния возможны для динамики (4).

Утверждение 3. *В игре с полезностями (1) существуют следующие равновесия Нэша:*

1. *При $\theta = 0$ единственным равновесием является $x^* = (1, \ldots, 1)$.*

2. *При $\theta > n - 1$ единственным равновесием является $x^{**} = (0, \ldots, 0)$.*

3. *При $0 < \theta \leqslant n - 1$ существует два равновесия: x^* и x^{**}.*

Доказательство утверждения 3.

1. $\theta = 0$. Тогда для любого агента $i \in N$ и для любой обстановки $x_{-i} \in \{0,1\}^{n-1}$ $\varphi(x_{-i}) \geqslant \theta$, следовательно, $BR_i(x_{-i}) = 1$.

2. $\theta > n - 1$. Тогда для любого агента $i \in N$ и для любой обстановки $x_{-i} \in \{0,1\}^{n-1}$ $\varphi(x_{-i}) < \theta$, следовательно, $BR_i(x_{-i}) = 0$.

3. $0 < \theta \leqslant n - 1$. То, что x^* и x^{**} являются равновесиями Нэша, можно проверить, подставив $\varphi(x^*_{-i}) = n - 1$ и $\varphi(x^{**}_{-i}) = 0$ в выражение (3): $\forall i \in N$ $BR_i(x^*_{-i}) = 1$ и $BR_i(x^{**}_{-i}) = 0$. Из (5) следует, что $x_i = BR_i(x_{-i})$ $\forall i \in N$ только для x^* и x^{**}. Любой $x' : \exists i, j \in N,\ x'_i = 0,\ x'_j = 1$ не является РН. $\square$

Утверждение 4. *При $\varphi(x^0) = n/2$ (n четное) и $n/2 - 1 < \theta \leqslant n/2$ динамика наилучших ответов (4) не сходится ни к одному из равновесий x^*, x^{**}. При этом $\varphi(x^t) = n/2,\ t = 0, 1, \ldots$ и действия узлов меняются по закону $x^{t+1} = \mathbf{1} - x^t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$.*

Доказательство утверждения 4. Из условий $\varphi(x^0) = n/2$ и $n/2 - 1 < \theta \leqslant n/2$, а также выражений (5), (7), следует, что $x^1 = \mathbf{1} - x^0$ и $\varphi(x^1) = \varphi^{br}(x^0) = n/2$. Условия утверждения выполняются уже для $\varphi(x^1)$. По индукции получаем, что $\varphi(x^t) = n/2$ и $x^{t+1} = \mathbf{1} - x^t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$. $\square$

Обозначим предельное состояние как $\hat{x}$, оно зависит от порога θ и начального состояния $\varphi(x^0)$. Чем больше порог θ, тем больше должно быть начальное число активных агентов $\varphi(x^0)$, чтобы активировать всю группу ($\varphi(\hat{x}) = n$). Обозначим минимально необходимое для активации всей группы число активных изначально агентов как $\varphi^a = \varphi^a(\theta) : \varphi(x^0) \geqslant \varphi^a \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.

Пороговое число активных изначально агентов, при котором система перейдет в состояние $x^* = (1, \ldots, 1)$, зависит от порога θ.

Утверждение 5. *Пороговое значение $\varphi^a = \varphi^a(\theta)$ равно:*

1. *При нечетном n*

$$\varphi^a = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta \leqslant n/2 - 1/2; \\ \theta + 1, & \text{если } \theta > n/2 - 1/2; \end{cases} \tag{8}$$

2. *При четном n*

$$\varphi^a = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta \leqslant n/2 - 1; \\ \theta + 1, & \text{если } \theta > n/2 - 1; \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство утверждения 5. По утверждению 2 если $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1$, то $\hat{x} = x^*$ и $\varphi(\hat{x}) = n$. А если $\varphi(x^0) < \theta$, то $\hat{x} = x^{**}$ и $\varphi(\hat{x}) = 0$. Остается рассмотреть случай $\theta \leqslant \varphi(x^0) < \theta + 1$, когда $\varphi(x^1) = n - \varphi(x^0)$.

1. Рассмотрим нечетные n.

   (a) Докажем, что если $\theta \leqslant n/2 - 1/2$, то $\varphi(x^0) \geqslant \theta \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.
   Допустим, $\varphi(x^0) = \theta$. Так как $\varphi(x^0)$ - целое и n - нечетное, это возможно только при $\varphi(x^0) = \theta = n/2 - 1/2$. Тогда $\varphi(x^1) = n - (n/2 - 1/2) = n/2 + 1/2 = \theta + 1$. Тогда $x^2 = \varphi^{br}(x^1) = n$ и $\hat{x} = x^*$.
   Если $\varphi(x^0) > \theta$. Поскольку $\varphi(x^0)$ - целое и n - нечетное, это возможно только при $\varphi(x^0) \geqslant n/2 + 1/2 = \theta + 1$. Тогда $\varphi(x^2) = \varphi^{br}(x^1) = n$ и $\hat{x} = x^*$.
   Поскольку если $\varphi(x^0) < \theta$, то $x^1 = \varphi^{br}(x^0) = 0$ и $\hat{x} = x^{**}$, доказано, что $\varphi(x^0) \geqslant \theta \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$, то есть $\varphi^a = \theta$.

   (b) Докажем, что если $\theta > n/2 - 1/2$, то $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1 \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.
   Допустим, $\varphi(x^0) < \theta + 1$. Поскольку $\varphi(x^0)$ - целое и n - нечетное, $\varphi(x^0) = n/2 + 1/2$. Тогда $\varphi(x^1) = n - (n/2 + 1/2) = n/2 - 1/2 < \theta$ и $\varphi(x^2) = \varphi^{br}(x^1) = 0$, $\hat{x} = x^{**}$. Остается $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1$, при котором $\varphi(x^1) = \varphi^{br}(x^0) = n$ и $\hat{x} = x^*$.
   Получаем, что $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1 \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.

2. Рассмотрим теперь четные n.

   (a) Пусть $\theta \leqslant n/2 - 1$. Докажем, что $\varphi(x^0) \geqslant \theta \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.
   Если $\varphi(x^0) < \theta$, то $\varphi(\hat{x}) = 0$. Если $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1$, то $\varphi(\hat{x}) = n$.
   Рассмотрим $\theta \leqslant \varphi(x^0) < \theta + 1 \leqslant (n/2 - 1) + 1 = n/2$.
   $\varphi(x^1) = n - \varphi(x^0) > n - \theta + 1 \geqslant n - n/2 = n/2 \geqslant \theta + 1$. Из утверждения 2 $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{br}(x^1) = n$.

   (b) Пусть $\theta > n/2 - 1$. Докажем, что $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1 \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$. Если $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1$, то $\varphi(\hat{x}) = n$ при $\theta \leqslant n - 1$. Если $\varphi(x^0) < \theta$, то $\varphi(\hat{x}) = 0$. Остается доказать, что $\theta \leqslant \varphi(x^0) < \theta + 1 \Rightarrow \varphi(\hat{x}) < n$.
   Рассмотрим сначала $n/2 - 1 < \theta \leqslant n/2$. При четных n условие $\theta \leqslant \varphi(x^0) < \theta + 1$ выполняется только если $\varphi(x^0) = n/2$. Из утверждения 4 известно, что тогда $\varphi^{br}(x^0) = n/2$ и предельного состояния не существует.
   Теперь рассмотрим $\theta > n/2$. Из $n/2 < \theta \leqslant \varphi(x^0) < \theta + 1$ следует, что $\varphi^1(x^0) = n - \varphi(x^0) < n - n/2 = n/2 < \theta$ и $\varphi^{br}(x^1) = 0$. Доказано, что если $\theta > n/2 - 1$, то $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1 \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.

□

Итак, в рассматриваемой игре существует всего два возможных предельных состояния. Помимо этого, существует такое сочетание θ и $\varphi(x^0)$, что динамика наилучших ответов не сходится ни к одному из равновесий. Мы получили условия, которым должны удовлетворять θ и $\varphi(x^0)$, чтобы активировались все агенты. Рассмотрим далее поведение “дальновидных” агентов, которые выбирают действие с учетом будущей реакции своего окружения.

3. Поведение дальновидного агента

Мы описали поведение динамики наилучших ответов для модели с однородными порогами, а также сформулировали необходимые и достаточные условия полной активации группы агентов. Теперь перейдем к исследованию другой динамики: двойного наилучшего ответа.

Обозначим как $x^{i,a}$ вектор действий, в котором $x_i = a$. Поведение агента, использующего правило двойного наилучшего ответа описывается следующим выражением:

$$DBR_i(x_{-i}) = arg\max_{a \in X_i}(u_i(BR_{-i}(x^{i,a}))), \tag{10}$$

где $BR_{-i}(x^{i,a}) = (BR_1(x^{i,a}_{-1}), \ldots, BR_{i-1}(x^{i,a}_{-(i-1)}), BR_{i+1}(x^{i,a}_{-(i+1)}), \ldots, BR_n(x^{i,a}_{-n}))$ – вектор наилучших ответов агентов на ту обстановку, которая сложится, когда i выберет действие $a \in X_i$. Агент i для каждого из своих возможных действий вычисляет реакцию оппонентов, затем выбирает наилучшее с учетом возможной реакции.

В игре с полезностями (1) двойной наилучший ответ агента i можно выразить как

$$DBR_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j \neq i} BR_j(x^{i,1}_{-j}) \geqslant \theta \\ 0, & \text{если } \sum_{j \neq i} BR_j(x^{i,1}_{-j}) < \theta, \end{cases} \tag{11}$$

где $x^{i,1}_{-j}$ - обстановка, которая образуется для агента j если агент i выберет $x_i = 1$. Значение суммы $\varphi^{br}_{-i}(x^{i,1}) = \sum_{j \neq i} BR_j(x^{i,1}_{-j})$ можно определить по $x_i, \varphi(x), \theta$. Вывести его можно двумя путями: напрямую через выражение для наилучшего ответа (5) и через выражение для динамики наилучших ответов (7).

Утверждение 6. *Динамика двойных наилучших ответов определяется выражением*

$$\varphi^{dbr}(x) = \begin{cases} n, & \textit{если} \left[\begin{array}{l} \varphi(x) \geqslant \theta + 1 \\ \begin{cases} \theta \leqslant \varphi(x) < \theta + 1 \\ \varphi(x) \leqslant n - \theta \end{cases} \end{array}\right. \\ n - \varphi(x), & \textit{если} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \theta \leqslant \varphi(x) < \theta + 1 \\ \varphi(x) > n - \theta \end{cases} \\ \begin{cases} \theta - 1 \leqslant \varphi(x) < \theta \\ \varphi(x) \leqslant n - \theta - 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ 0, & \textit{если} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \theta - 1 \leqslant \varphi(x) < \theta \\ \varphi(x) > n - \theta - 1 \end{cases} \\ \varphi(x) < \theta - 1 \end{array}\right. \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство утверждения 6.
Воспользуемся выражением (5) и $\varphi(x^{(i,1)}) = \varphi(x) - x_i + 1$. Получаем, что

$$\begin{aligned} BR_j(x^{(i,1)}_{-j}) &= \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x^{(i,1)}) \geqslant \theta + 1 \\ 1 - x_j, & \text{если } \theta \leqslant \varphi(x^{(i,1)}) < \theta + 1 \\ 0, & \text{если } \varphi(x^{(i,1)}) < \theta \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x) - x_i \geqslant \theta \\ 1 - x_j, & \text{если } \theta - 1 \leqslant \varphi(x) - x_i < \theta \\ 0, & \text{если } \varphi(x) - x_i < \theta - 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

Просуммировав (13) по $j \neq i$, получаем

$$\varphi^{br}_{-i}(x^{(i,1)}) = \begin{cases} n-1, & \text{если } \varphi(x) - x_i \geqslant \theta \\ n-1-\varphi(x)+x_i, & \text{если } \theta - 1 \leqslant \varphi(x) - x_i < \theta \\ 0, & \text{если } \varphi(x) - x_i < \theta - 1. \end{cases} \tag{14}$$

Выражения (14) можно также получить, использовав соотношение $\varphi^{br}_{-i}(x^{(i,1)}) = \varphi^{br}(x^{(i,1)}) - BR_i(x^{(i,1)}_{-i})$.

$$BR_i(x^{(i,1)}_{-i}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x^{(i,1)}) \geqslant \theta + 1 \\ 0, & \text{если } \varphi(x^{(i,1)}) < \theta + 1, \end{cases} \tag{15}$$

Поскольку $1 - x^{(i,1)}_i = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^{br}_{-i}(x^{(i,1)}) &= \begin{cases} n-1, & \text{если } \varphi(x^{(i,1)}) \geqslant \theta + 1 \\ n-\varphi(x^{(i,1)}), & \text{если } \theta \leqslant \varphi(x^{(i,1)}) < \theta + 1 \\ 0, & \text{если } \varphi(x^{(i,1)}) < \theta \end{cases} \\ &= \begin{cases} n-1, & \text{если } \varphi(x) - x_i \geqslant \theta \\ n-1-\varphi(x)+x_i, & \text{если } \theta - 1 \leqslant \varphi(x) - x_i < \theta\ . \\ 0, & \text{если } \varphi(x) - x_i < \theta - 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

Теперь можно выразить $DBR_i(x_{-i})$ как функцию от $x_i, \varphi(x)$ при заданном θ.

$$\varphi^{dbr}(x) = \varphi(x) DBR(1, \varphi(x)) + (n - \varphi(x)) DBR(0, \varphi(x)) \tag{17}$$

.

Найдем условия, при которых $DBR(1, \varphi(x)) = 1$ и $DBR(0, \varphi(x)) = 1$.
Из (16) и (11).

I. $\varphi(x) - 1 \geqslant \theta \Leftrightarrow \varphi(x) \geqslant \theta + 1$.

II. $\begin{cases} \theta - 1 \leqslant \varphi(x) - 1 < \theta \\ n - \varphi(x) + 1 - 1 \geqslant \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \leqslant \varphi(x) < \theta + 1 & \text{(IIа)} \\ \varphi(x) \leqslant n - \theta & \text{(IIб)} \end{cases}$.

Условия, при которых $DBR(1, \varphi(x)) = 0$ и $DBR(0, \varphi(x)) = 1$.

III. $\begin{cases} \theta \leqslant \varphi(x) < \theta + 1 & \text{(IIIа)} \\ \varphi(x) > n - \theta & \text{(IIIб)} \end{cases}$

IV. $\begin{cases} \theta - 1 \leqslant \varphi(x) < \theta \\ n - \varphi(x) - 1 \geqslant \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta - 1 \leqslant \varphi(x) < \theta & \text{(IVа)} \\ \varphi(x) \leqslant n - \theta - 1 & \text{(IVб)} \end{cases}$.

И группа условий, при которых $DBR(1, \varphi(x)) = 0$ и $DBR(0, \varphi(x)) = 0$.

V. $\begin{cases} \theta - 1 \leqslant \varphi(x) < \theta & \text{(Va)} \\ \varphi(x) > n - \theta - 1 & \text{(Vб)} \end{cases}$

VI. $\varphi(x) < \theta - 1$.

$\square$

Найдем порог активации $\varphi^a = \varphi^a(\theta)$ для динамики двойных наилучших ответов.

Утверждение 7. *Порог активации φ^a динамики двойных наилучших ответов равен*

1. *Для нечетных n*

$$\theta^a = \begin{cases} \theta - 1, & \text{если } \theta \leqslant n/2 - 1/2 \ (A) \\ \theta + 1, & \text{если } \theta > n/2 - 1/2 \ (B) \end{cases} \tag{18}$$

2. *Для четных n*

$$\theta^a = \begin{cases} \theta - 1, & \text{если } \theta \leqslant n/2 \ (C) \\ \theta + 1, & \text{если } \theta > n/2 \ (D) \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство утверждения 7.

1. Для нечетных n.

   (a) Докажем, что если $\theta \leqslant n/2$, то $\varphi(x^0) \geqslant \theta - 1 \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$. При $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1$, выполняется условие I и $\varphi^{dbr}(x^0) = \varphi(\hat{x}) = n$.

   Пусть выполняется IIa. Докажем, что выполняется IIб. $n - \theta \geqslant n/2 + 1/2$, тогда $\varphi(x^0) < \theta + 1 \leqslant n/2 + 1/2 \leqslant n - \theta$. Выполняется IIa и IIб, $\varphi^{dbr}(x^0) = \varphi(\hat{x}) = n$.

   Пусть выполняется IVa. Докажем, что выполняется IVб. $n - \theta - 1 \geqslant n/2 - 1/2 \geqslant \theta > \varphi(x^0)$. IVa и IVб выполняются $\Rightarrow \varphi(x^1) = \varphi^{dbr}(x^0) = n - \varphi(x^0) \geqslant n/2 + 1/2 \geqslant \theta + 1$. По условию I $\varphi^{dbr}(x^1) = \varphi(\hat{x}) = n$.

   Если $\varphi(x^0) < \theta - 1$, то по условию VI $\varphi^{dbr}(x^0) = \varphi(\hat{x}) = 0$.

   (A) доказано.

   (b) Если $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1$, то $\varphi^{dbr}(x^0) = \varphi(\hat{x}) = n$ по условию I.

   Докажем, что если $\theta > n/2 - 1/2$, то $\varphi(x^0) < \theta + 1 \Rightarrow \varphi(\hat{x}) = 0$.

   Рассмотрим случай $\theta \leqslant \varphi(x^0) < \theta + 1$ (IIa). Докажем, что (IIб) не выполняется и $\varphi^{dbr}(x^0) = n - \varphi(x^0)$. $n - \theta < n - (n/2 - 1/2) = n/2 + 1/2$. Если $\theta \leqslant n/2 + 1/2$, то, поскольку n - нечетное, $\varphi(x^0)$ - целое и $\theta > n/2 - 1/2$, (IIa) может выполняться только при $\varphi(x^0) = \theta = n/2 + 1/2$, тогда $\varphi(x^0) > n - \theta$. Если $\theta > n/2 + 1/2$, то $\varphi(x^0) > n - \theta$ по условию (IIa). Выполняется условие (IIIб), $\varphi^{dbr}(x^0) = n - \varphi(x^0)$. Повторим предыдущие рассуждения. Если $\theta \leqslant n/2 + 1/2$, то $\varphi(x^0) = n/2 + 1/2$ и $\varphi(x^1) = \varphi^{dbr}(x^0) = n - \varphi(x^0) = n - (n/2 + 1/2) = n/2 - 1/2 < \theta$. Проверим (Vб). $n - \theta - 1 < n - (n/2 - 1/2) - 1 = n/2 - 1/2 < n/2 + 1/2 = \varphi(x^1)$. Выполняются (Va) и (Vб), следовательно, $\varphi(\hat{x}) = \varphi^(x^2) = \varphi^{dbr}(x^1) = 0$.

Рассмотрим теперь случай $\theta - 1 \leqslant \varphi(x^0) < \theta$ (Va). Повторим предыдущие рассуждения. Если $\theta \leqslant n/2 + 1/2$, то $\varphi(x^0) = \theta - 1 = n/2 - 1/2$, тогда $n - \theta - 1 < n - (n/2 - 1/2) - 1 = n/2 - 1/2 = \varphi(x^0)$ и выполняется (Vб). Если $\theta > n/2 + 1/2$, то $\varphi(x^0) \geqslant \theta - 1 > n/2 + 1/2$ и $n - \theta - 1 < \varphi(x^0)$, также выполняется (Vб). Следовательно, $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^0) = 0$.

При $\varphi(x^0) < \theta - 1$ по условию VI $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^0) = 0$.

(B) доказано.

2. Для четных n.

   (a) Докажем, что если $\theta \leqslant n/2$, то $\varphi(x^0) \geqslant \theta - 1 \Rightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.

   При $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1$ по условию (I) $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^0) = n$.

   Рассмотрим $\theta \leqslant \varphi(x^0) < \theta + 1$ (IIa). Проверим (IIб).

   Пусть $\theta \geqslant n/2 - 1$. Тогда, поскольку n - четное, а $\varphi(x^0)$ - целое, $\varphi(x^0) = n/2 \Rightarrow n - \theta \geqslant n - n/2 = n/2 = \varphi(x^0)$. Выполняется (IIб). Пусть $\theta < n/2 - 1$. Тогда $n - \theta > n - (n/2 - 1) = n/2 + 1 > \theta + 1 > \varphi(x^0)$. Выполняется (IIб). Получаем $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^0) = n$.

   Рассмотрим $\theta - 1 \leqslant \varphi(x^0) < \theta$. Проверим условие (IVб). $n - \theta - 1 \geqslant n - n/2 - 1 = n/2 - 1$.

   Пусть $\theta \geqslant n/2 - 1$. Тогда, поскольку $\varphi(x^0)$ - целое, n - четное, $\varphi(x^0) = n/2 - 1 = n - \theta - 1$ и (IVб) выполняется. Пусть $\theta < n/2 - 1$. Тогда $n - \theta - 1 > n/2 > \theta > \varphi(x^0)$ и (IVб) выполняется. Получаем, что $\varphi^{dbr}(x^0) = n - \varphi(x^0)$.

   Если $\theta \geqslant n/2 - 1$, то $\varphi(x^0) = n/2 - 1 \Rightarrow \varphi(x^1) = \varphi^{dbr}(x^0) = n - (n/2 - 1) = n/2 + 1 \geqslant \theta + 1$. По условию (I) $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^1) = n$.

   Если $\theta < n/2 - 1$, то $\varphi(x^1) = \varphi^{dbr}(x^0) = n - \varphi(x^0) > n - (n/2 - 1) = n/2 + 1 > \theta + 1$. По условию (I) $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^1) = n$.

   Доказано, что $\varphi(x^0) \geqslant \theta - 1 \Rightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.

   Из (VI) следует, что $\varphi(x^0) < \theta - 1 \Rightarrow \varphi(\hat{x}) = 0$.

   (C) доказано.

   (b) Докажем, что если $\theta > n/2$, то $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1 \Leftrightarrow \varphi(\hat{x}) = n$.

   По условию I $\varphi(x^0) \geqslant \theta + 1 \Rightarrow \varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^0) = n$.

   Докажем $\varphi(x^0) < \theta + 1 \Rightarrow \varphi(\hat{x}) = 0$.

   Рассмотрим $\theta \leqslant \varphi(x^0) < \theta + 1$ (IIa). Проверим, выполняется (IIб) или (IIIб). $n - \theta < n - n/2 = n/2$.

   Пусть $\theta \leqslant n/2 + 1$, тогда $\varphi(x^0) = n/2 + 1$ и $n - \theta < n/2 < \varphi(x^0)$. Выполняется (IIIб) и $\varphi(x^1) = \varphi^{dbr}(x^0) = n - \varphi(x^0) = n - (n/2 + 1) = n/2 - 1 < \theta - 1$. По условию (VI) $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^1) = 0$.

   Пусть $\theta > n/2 + 1$, тогда $\varphi(x^0) > n/2 + 1$ и $n - \theta < n/2 < \varphi(x^0)$. Выполняется (IIIб) и $\varphi(x^1) = \varphi^{dbr}(x^0) = n - \varphi(x^0) < n - (n/2 + 1) = n/2 - 1 < \theta - 1$. По условию (VI) $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^1) = 0$.

   Рассмотрим $\theta - 1 \leqslant \varphi(x^0) < \theta$ (IVa) или (Va). Проверим (IVб) или (Vб). $n - \theta - 1 < n - n/2 - 1 = n/2 - 1 < \theta - 1 \leqslant \varphi(x^0)$. Выполняется (Vб) и $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^0) = 0$.

   Если $\varphi(x^0) < \theta - 1$, то $\varphi(\hat{x}) = \varphi^{dbr}(x^0) = 0$ по условию (VI).

   (D) доказано.

□

Мы описали, как меняется состояние игры порогового поведения, если агенты используют правило двойного наилучшего ответа. По сравнению с обычным наилучшим ответом, порог активации выше на единицу, а также отсутствуют колебания. Для любых начальных условия система придет в одно из двух равновесий.

4. Заключение

В работе исследовались динамические свойства пороговой модели конформного поведения, когда все пороги агентов одинаковы. Установлено, что в такой игре существует всего два равновесия: либо все агенты активны, либо все неактивны.

Рассматривалось два типа динамических правил, по которым агенты изменяют свои действия. В первом случае все агенты следуют "недальновидное" правило наилучшего ответа. Получены аналитические выражения для условий перехода системы в каждое из равновесий. Описана комбинация начальных условий, при которых в системе устанавливаются периодические колебания.

Во втором случае агенты используют "дальновидное" правило двойного наилучшего ответа. Этот случай также полностью исследован. Получены аналитические выражения для условий перехода системы в каждое из возможных равновесий. Установлено, что при использовании двойного наилучшего ответа в системе никогда не возникают колебания, а динамика состояния всегда сходится к одному из равновесий.

Многие вопросы остались не исследованными. В частности, ситуации, когда только некоторая доля агентов использует "дальновидное" правило. А также представляет интерес случай, когда структура взаимодействия агентов не является полным графом, и пороги агентов не одинаковы. Именно сочетание всех этих условий должно наблюдаться в реальных социальных сетях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №13-01-00934.

Список литературы

1. Базенков Н.И. Динамика двойных наилучших ответов в игре формирования топологии беспроводной ad hoc сети // Управление большими системами. 2013. Вып. 43. С. 217-239.
2. Бреер В.В. Теоретико-игровая модель неанонимного порогового конформного поведения // Управление большими системами. 2010. Вып. 31. С. 162-176.
3. Бреер В.В. Теоретико-игровые модели конформного коллективного поведения // Автоматика и телемеханика. 2012. № 10. С. 111-126.
4. Корепанов В.О. Модели рефлексивного группового поведения и управления. М.: ИПУ РАН, 2011. 127 с.
5. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: СИНТЕГ, 2003. 149 с.
6. Granovetter M. Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. 1978. Vol. 83, No. 6. P. 1420-1443.