Автоматика и телемеханика, № 10, 2010

© 2010 г. **А. А. ЛАЗАРЕВ, д-р физ.-мат. наук,**
А. Г. КВАРАЦХЕЛИЯ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ В ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНОГО ВЗВЕШЕННОГО МОМЕНТА ОКОНЧАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБОРА[1]

Рассматривается задача теории расписаний минимизации суммарного взвешенного момента окончания для одного прибора с возможностью прерывания обслуживания требований. Продолжительности обслуживания всех требований одинаковы. На текущий момент данная задача является открытой, т.е. не известен полиномиальный алгоритм ее решения и не доказано, что она является NP-трудной. Приводятся свойства оптимальных расписаний данной задачи.

1. Введение

Рассматриваемая задача *минимизации суммарного взвешенного момента окончания для одного прибора* формулируется следующим образом.

На одном приборе необходимо обслужить n требований. В каждый момент времени прибор обслуживает не более одного требования и процесс обслуживания любого требования может быть прерван для постановки на прибор другого требования. Множество $N = \{1, \ldots, n\}$ будем называть *множеством требований.* Для каждого требования $j \in N$ заданы следующие параметры: *момент поступления* $r_j \geqslant 0$, *продолжительность обслуживания* $p_j = p > 0$ (значения продолжительностей обслуживания для всех требований одинаковы) и *вес требования* $w_j \geqslant 0$. Все значения являются целочисленными. Без ограничения общности предполагаем, что $w_1 \geqslant \ldots \geqslant w_n$ и $r_{\min} = \min\limits_{j \in N} r_j = 0$.

Расписание $\mathbb{S}$ задает порядок, в котором требования обслуживаются на приборе. Расписание определяется как кусочно-постоянная непрерывная слева функция $\mathbb{S} : \mathbb{R} \to \{0, \ldots, n\}$. Если $\mathbb{S}(t)$ равно $j \in N$, то говорим, что требование j обслуживается на приборе в момент времени t. Иначе (когда $\mathbb{S}(t) = 0$), говорим, что прибор простаивает. Поскольку все параметры требований являются целочисленными значениями, то рассматриваются только целочисленные точки t. Часть требования длины 1 будем называть *юнитом.*

Основными характеристиками обслуживания требования j при расписании $\mathbb{S}$ являются моменты начала и окончания обслуживания (обозначаются как S_j и C_j соответственно). Момент начала обслуживания определяется как наименьшее целочисленное значение t, такое что $\mathbb{S}(t+1) = j$. Момент окончания обслуживания C_j требования определяется как наибольшее целочисленное значение t, такое что $\mathbb{S}(t) = j$.

Пусть $F(\mathbb{S})$ обозначает значение *суммарного взвешенного момента окончания* $\sum\limits_{j=1}^{n} w_j C_j$ при расписании $\mathbb{S}$. Необходимо найти такое расписание $\mathbb{S}^*$, при котором

[1] Работа выполнена в рамках программы Президиума Российской академии наук № 29 “Математическая теория управления”.

достигается минимальное значение суммарного взвешенного момента окончания. В [1] данная задача определяется как

$$1 \mid r_j, p_j = p, pmnt \mid \sum w_i C_j.$$

В случае если прерывания требований запрещены, то известен полиномиальный алгоритм решения задачи с трудоемкостью $O(n^7)$ операций [2].

2. Свойства оптимальных расписаний

В данном разделе приводятся свойства оптимальных расписаний для общего случая рассматриваемой задачи.

Теорема 1. При любом оптимальном расписании если $S_i < S_j$, то выполняется либо $C_i \leqslant S_j$, либо $C_i > C_j$ для всех $i, j \in N$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором существует такая пара требований i и j, что $S_i < S_j$, $C_i > S_j$, и $C_i < C_j$ (рис. 1).

В данном случае можно переставить местами первый юнит требования j и последний юнит требования i. При этом значение целевой функции при расписании $\mathbb{S}$ уменьшится, по крайней мере, на величину w_i. Теорема доказана.

Теорема 1 утверждает, что при любом оптимальном расписании юниты двух произвольных требований не могут "перемешаться" между собой. Т.е. существуют два возможных варианта относительного обслуживания двух требований:

- одно требование полностью обслуживается до момента начала другого требования;
- одно требование 'погружено' во второе требование так, что интервал обслуживания погруженного требования не содержит юниты второго требования.

Данная особенность оптимальных расписаний для рассматриваемой задачи будет обсуждаться в разделе 4.

Если требование i обслуживается полностью до начала требования j, то используется обозначение $(i \rightarrow j)$. Если требование j погружено в требование i, то используется обозначение $(i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow i)$.

Теорема 2. При любом оптимальном расписании если $(i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow i)$, то $w_i \leqslant w_j$.

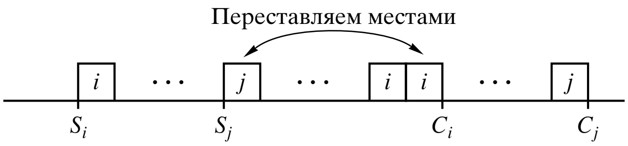

Рис. 1. Улучшение расписания $\mathbb{S}$ (теорема 1).

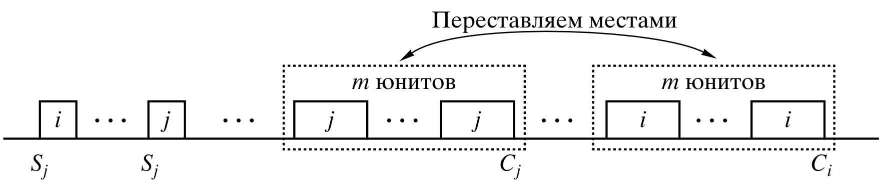

Рис. 2. Улучшение расписания $\mathbb{S}$ (теорема 2).

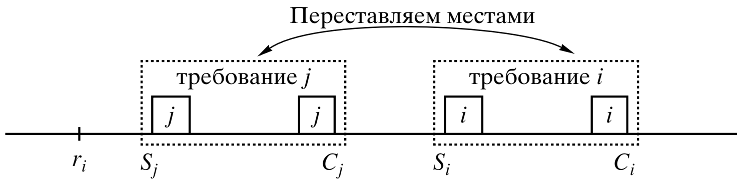

Рис. 3. Улучшение расписания в случае 1 (теорема 4).

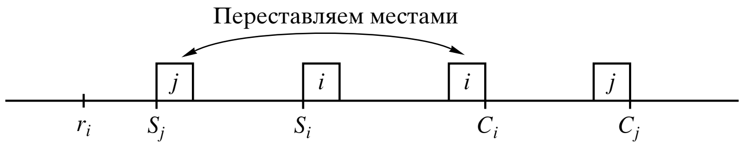

Рис. 4. Улучшение расписания в случае 2 (теорема 4).

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором для двух требований i и j, таких что $(i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow i)$, выполняется $w_i > w_j$. Пусть m обозначает количество юнитов требования i, которые обслуживаются после момента времени C_j, очевидно $m < p$ (рис. 2).

Поскольку требование j погружено в требование i, всегда можно поменять местами m последних юнитов требования i и m последних юнитов требования j. При этом значение целевой функции при расписании $\mathbb{S}$ уменьшается на величину $(w_i - w_j)(C_i - C_j)$. Теорема доказана.

Теорема 3. Все юниты требований, обслуживаемые после момента времени $r_{\max} = \max\limits_{i \in N} r_i$, *при любом оптимальном расписании упорядочены в порядке Смита* [3] *(т.е. в порядке невозрастания значений* p'_j/w_j, *где* p'_j *– продолжительность части требования* j, *не обслуженной к моменту времени* $r_{\max}$).

Доказательство. Поскольку все требования доступны для обслуживания после момента времени $r_{\max}$, то:

- неупорядоченные юниты требований обслуживаются после $r_{\max}$ без прерываний;
- части двух соседних требований, которые не удовлетворяют правилу Смита, можно переставить местами и улучшить значение целевой функции расписания.

Теорема доказана.

Теорема 4. При любом оптимальном расписании если $r_i \leqslant S_j$ *и* $w_i > w_j$, *то* $(i \to j)$, *т.е.* $S_j \geqslant C_i$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание, при котором для указанных требований выполняется $S_j < C_i$. Согласно теореме 2 это может случиться в следующих случаях (случай $(i \rightsquigarrow j \rightsquigarrow i)$ исключен, так как $w_i > w_j$):

Случай 1 $(j \to i)$, т.е. обслуживание требования i начинается после того, как обслуживание требования j уже завершилось;

Случай 2 $(j \rightsquigarrow i \rightsquigarrow j)$, т.е. требование i погружено в требование j.

Оба требования i и j доступны для обслуживания в момент времени S_j. Следовательно, в случае 1 можно поменять местами все юниты обоих требований и уменьшить значение целевой функции на величину $(w_i - w_j)(C_i - C_j)$ (рис. 3). В случае 2 можно переставить местами последний юнит требования i и первый юнит требования j и уменьшить значение целевой функции на величину $w_i(C_i - S_j - 1)$ (рис. 4). Теорема доказана.

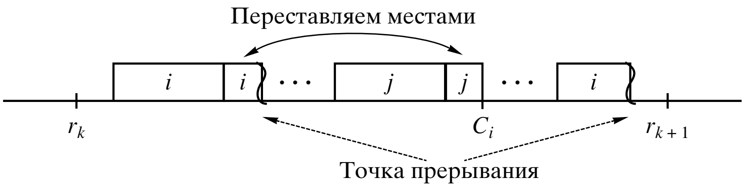

Рис. 5. Улучшение расписания $\mathbb{S}$ (лемма 1).

Следствие 1. При любом оптимальном расписании если $r_i \leqslant r_j$ и $w_i > w_j$, то $(i \to j)$.

Доказательство. Из неравенства $r_i \leqslant r_j$ следует $r_i \leqslant S_j$.

Следствие 2. Существует оптимальное расписание при котором $(i \to j)$, если $r_i \leqslant r_j$ и $w_i \geqslant w_j$.

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 4 и следствия 1 значение целевой функции при расписании $\mathbb{S}$ было строго уменьшено, поскольку $w_i > w_j$. В случае $w_i = w_j$ приведенные модификации расписания не увеличивают значения его целевой функции.

Теорема 5. При любом оптимальном расписании:

- *обслуживание требований прерываются только в моменты времени из множества $\{r_2, r_3, \ldots, r_n\}$;*
- *если обслуживание требования i прервано в момент времени r_k, то $S_k = r_k$.*

Перед доказательством теоремы 5 сформулируем и докажем три вспомогательных утверждения.

Через $\mathbb{I}_j$ обозначим множество моментов времени, когда обслуживание требования j прерывается при расписании $\mathbb{S}$, т.е. для любого $t \in \mathbb{I}_j$ выполняется $\mathbb{S}(t) = j$, $\mathbb{S}(t+1) \neq j$ и $t \neq C_j$.

Пусть $\mathbb{I} = \bigcup\limits_{j \in N} \mathbb{I}_j$ и $\mathbb{T}_k = (r_k, r_{k+1}]$, $k = 1, \ldots, n$, где $r_{n+1} = np$.

Лемма 1. При любом оптимальном расписании обслуживание каждого требования прерывается не более одного раза на любом интервале $\mathbb{T}_k$, $\forall\, k$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором для некоторого k, $k = 1, \ldots, n$, обслуживание требования $i \in N$ прерывается как минимум дважды на интервале $\mathbb{T}_k$ (рис. 5).

Между точками прерывания требования i при расписании $\mathbb{S}$ существует некоторое требование j, обслуживание которого завершается между S_i и C_i, т.е. $S_i < S_j$ и $C_j < C_i$. В противном случае согласно теореме 1 расписание $\mathbb{S}$ не является оптимальным.

В данном случае можно переставить местами последний юнит первой части требования i и последний юнит требования j в интервале $\mathbb{T}_k$ (рис. 5) и уменьшить значение целевой функции на величину w_j. Лемма доказана.

Лемма 2. При любом оптимальном расписании все прерываемые требования обслуживаются в конце интервалов $\mathbb{T}_k$, $\forall\, k < n$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором для некоторого $k \in N$ существует пара таких требований i и j, что (см. рис. 6):

1) обслуживание требования j прерывается на $\mathbb{T}_k$;
2) обслуживание требования i начинается непосредственно после точки прерывания требования j и завершается либо на $\mathbb{T}_k$, либо где-либо после (т.е., требование i не прерывается на $\mathbb{T}_k$).

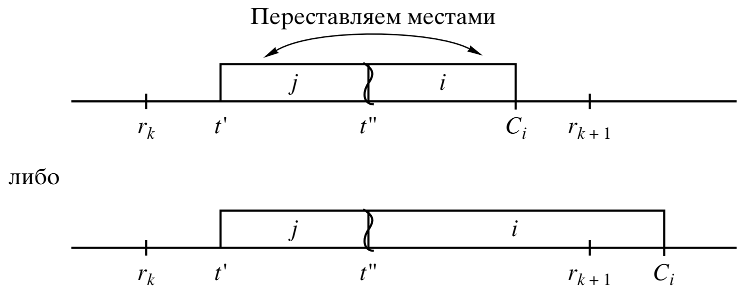

Рис. 6. Расположение юнитов требований i и j при расписании $\mathbb{S}$ в предположении леммы 2.

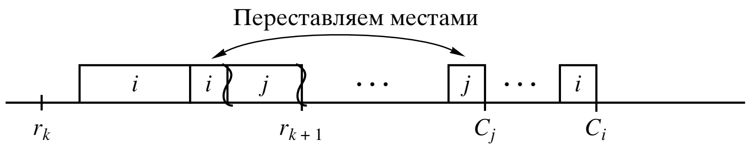

Рис. 7. Улучшение расписания $\mathbb{S}$ (лемма 3).

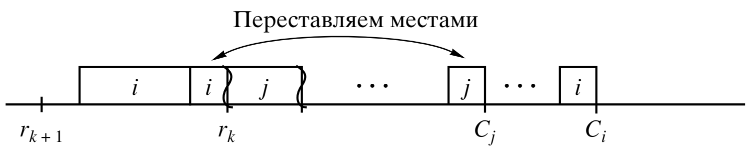

Рис. 8. Улучшение расписания $\mathbb{S}$ (теорема 5).

Указанные на рис. 6 части требований доступны для обслуживания после момента r_k. Следовательно, можно переставить их местами так, чтобы часть требования i начиналась в момент времени t'', а часть требования j – непосредственно после нее.

При такой модификации расписания $\mathbb{S}$ значения взвешенного запаздывания для требований множества $N \setminus \{i, j\}$ не изменяются. Перемещение прерванной части требования j "вправо" также не изменяет его значения взвешенного запаздывания. В то же время перемещение части требования i "влево" уменьшает значение целевой функции на величину $w_i(t'' - t')$. Лемма доказана.

Лемма 3. При любом оптимальном расписании на каждом интервале $\mathbb{T}_k$, $k = 1, \ldots, n$, прерывается обслуживание не более одного требования.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором для некоторого k существует два требования i и j, обслуживание которых прерывается на интервале $\mathbb{T}_k$ (рис. 7). согласно лемме 2, указанные требования обслуживаются в конце интервала $\mathbb{T}_k$.

В данном случае, можно переставить местами юниты требований i и j, как показано на рис. 7, и уменьшить значение целевой функции на величину не меньше чем w_j. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Первое утверждение теоремы (обслуживание требований прерываются только в моменты времени из множества $\{r_2, r_3, \ldots, r_n\}$) напрямую следует из лемм 1–3.

Покажем, что если обслуживание некоторого требования i прерывается в момент времени r_k, то $S_k = r_k$.

Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором обслуживание требования i прерывается в момент времени r_k, но далее на обслуживание ставится требование j (а не k), $r_j < r_k$. Согласно теореме 1 выполняется $C_j < C_i$. Следовательно, можно переставить местами последний юнит требования j и любой юнит из прерываемой части требования i и уменьшить значение целевой функции при расписании $\mathbb{S}$ на величину w_j (рис. 8).

Теорема доказана.

3. Перестановочные расписания

Как было сказано во введении, расписание обслуживания требований определяется как кусочно постоянная непрерывная слева функция, действующая из $\mathbb{R}$ в $\{0, 1, \ldots, n\}$. Для некоторых задач теории расписаний (обычно без возможности прерывания требований) расписания можно представить в виде перестановки элементов множества N (номеров требований). В данном разделе покажем, что для рассматриваемой задачи можно найти оптимальное решение в классе перестановочных расписаний, несмотря на допустимость прерываний в обслуживании требований.

Через π будем обозначать перестановочное расписание $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Порядок требований при расписании $\pi = (j_1, \ldots, j_n)$ задает порядок завершения их обслуживания $C_{j_1} < C_{j_2} < \cdots < C_{j_n}$.

Определим процедуру, с помощью которой можно построить времённое расписание $\mathbb{S}$ на основе заданного перестановочного расписания $\pi = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Процедура 1 (*построения времённого расписания на основе перестановки требований* $(j_1, \ldots, j_n)$.)

$S_{j_1} := r_{j_1}$, $C_{j_1} := r_{j_1} + p$;
помечаем интервал $[r_{j_1}, r_{j_1} + p)$ как занятый;
for $k = 2, 3, \ldots, n$ **do**
  if момент времени r_{j_k} находится в занятом интервале **then**
    пусть s будет ближайшей точкой из незанятого интервала, $s > r_{j_k}$;
  else
    $s := r_{j_k}$;
  end if
  вычислим длину непомеченных интервалов между s и $C_{j_{k-1}} + 1$. Пусть эта величина равна d (d может быть отрицательным);
  if $d \leqslant p$ **then**
    обслуживание требования j_k начинается в момент s ($S_j = s$) и “заполняет непомеченные интервалы вправо”;
  else
    требование j_k заканчивается в $C_{j_{k-1}} + 1$ и “заполняет непомеченные интервалы влево”;
  end if
end for

Вычислим трудоемкость процедуры 1. На каждом шаге процедуры $k = 2, 3, \ldots, n$ выполняются следующие операции:

- определяем, принадлежит ли момент времени r_{j_k} помеченному интервалу или нет. Это может быть реализовано бинарным поиском среди набора моментов начала и окончания уже упорядоченных при расписании требований за $O(\log n)$ операций;

- вычисляем длину непомеченных интервалов между r_{j_k} и $C_{j_{k-1}} + 1$. Это может быть сделано за $O(n)$ операций.

Следовательно, каждый шаг процедуры выполняется за $O(n)$ операций. Поскольку в процессе работы процедуры необходимо выполнить не более n шагов, то общая ее трудоемкость равна $O(n^2)$ операций.

Далее будем использовать запись $\mathbb{S} = \mathrm{Proc1}(\pi)$ для обозначения того, что временно́е расписание $\mathbb{S}$ построено на основе перестановки π с использованием процедуры 1.

Лемма 4. Если перестановка π соответствует некоторому оптимальному временно́му расписанию $\mathbb{S}$, то строка 13 процедуры 1 никогда не выполняется.

Доказательство. Действительно, выполнение строки 13 процедуры означает, что между возможным моментом начала s текущего требования j_k и минимально возможным моментом завершения $C_{j_{k-1}} + 1$ существуют:

1) либо юниты требования j_k и юниты некоторого требования i (обслуживание требования i завершается после выполнения j_k);
2) либо только юниты требования j_k и пустые временны́е окна.

В случае 1 всегда можно переставить последний юнит требования j_k с любым указанным юнитом требования i и уменьшить значение целевой функции на величину w_{j_k}.

В случае 2 можно переместить последний юнит требования j_k в пустое временно́е окно (требование j_k уже доступно в данный момент времени) и также уменьшить значение целевой функции на величину w_{j_k}. Было предположено, что временно́е расписание $\mathbb{S}$ оптимально, поэтому данные случаи не возникнут. Лемма доказана.

Рассмотрим некоторое оптимальное расписание $\mathbb{S}$ с моментами завершения требований $C_1, \dots, C_n$ и соответствующую ему перестановку $\pi = (j_1, \dots, j_n)$. Применим процедуру 1 к этой перестановке и получим расписание $\mathbb{S}'$ с моментами завершения $C'_1, \dots, C'_n$.

Теорема 6. Для любого оптимального расписания $\mathbb{S}$ выполняется $C_j = C'_j$, $j \in N$.

Доказательство. При расписании $\mathbb{S}'$ требование j_1 завершается в минимальный возможный момент времени $C'_{j_1} = r_{j_1} + p$. Следовательно, $C_{j_1} \geqslant C'_{j_1}$.

Если $C_{j_1} > C'_{j_1}$, то для некоторого $t \in [r_{j_1}, C_{j_1})$ выполняется:

1) либо $\mathbb{S}(t) = i \neq j_1$ (т.е. существует юнит некоторого требования $i \neq j_1$, который обслуживается после r_{j_1} и до C_{j_1});
2) либо $\mathbb{S}(t) = 0$ (т.е. прибор простаивает в момент времени t).

В случае 1 можно переставить последний юнит требования j_1 и указанный юнит требования i. В случае 2 можно поместить последний юнит требования j_1 во временно́й “пустой” слот t. В обоих случаях уменьшается значение целевой функции при расписании $\mathbb{S}$ на величину w_{j_1}. Следовательно, $C_{j_1} = C'_{j_1}$.

Теперь предположим, что для $i < k$ выполняется $C_{j_i} = C'_{j_i}$. Покажем, что $C_{j_k} = C'_{j_k}$. Заметим, что обслуживание требования j_k при расписании $\mathbb{S}$ не может закончиться ранее момента времени C'_{j_k}, поскольку либо условие $C_{j_k} \geqslant r_{j_k} + p$, либо $C_{j_k} > C_{j_{k-1}}$ будет нарушено.

Если $C_{j_k} > C'_{j_k}$, тогда для некоторого $t \in [r_{j_k}, C_{j_k})$ выполняется:

1) либо $\mathbb{S}(t) = i \neq j_1$ (т.е. существует юнит некоторого требования $i \neq j_k$, который обслуживается после r_{j_k} и перед C_{j_k});
2) либо $\mathbb{S}(t) = 0$ (т.е. прибор простаивает в момент времени t).

В случае 1 можно переставить местами последний юнит требования j_k и указанный юнит требования i. В случае 2 можно поместить последний юнит требования j_1 во временно́й слот t. В обоих случаях уменьшаем значение целевой функции при расписании $\mathbb{S}$ на величину w_{j_k}. Следовательно, $C_{j_k} = C'_{j_k}$. Теорема доказана.

Таким образом, оптимальное решение рассматриваемой задачи можно искать среди перестановочных расписаний.

Теорема 7. *При любом оптимальном расписании каждая часть любого требования начинается и заканчивается в моменты времени из множества* $T = \{r_j + lp, j = \overline{1,n}, l = \overline{0,n}\}$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$. Согласно лемме 4, строка 13 процедуры 1 никогда не выполняется для данного расписания. Остальные шаги этой процедуры гарантируют, что времена завершения требований при оптимальном расписании $\mathbb{S}$ будут из множества T.

Временем начала любого требования j при каждом расписании $\mathbb{S}$ является либо момент поступления r_j, либо момент завершения предыдущего требования из $\mathbb{S}$. Оба указанных момента времени принадлежат множеству T. Теорема доказана.

Заметим, что в множестве T содержится $O(n^2)$ элементов.

Теорема 8. *Пусть* π *является оптимальной перестановкой и* $\mathbb{S} = Proc1(\pi)$. *Тогда для любых* t *и* j, *таких что* $\mathbb{S}(t) = 0$ *и* $S_j \geqslant t$, *выполняется* $r_j \geqslant t$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором $r_j < t$ для t и j, таких что $\mathbb{S}(t) = 0$ и $S_j \geqslant t$. При этом расписании требование j доступно для обслуживания в момент времени t, и всегда можно поместить последний юнит требования j в этот пустой временно́й слот. Подобное преобразование уменьшает значение целевой функции при расписании $\mathbb{S}$ на величину w_j. Теорема доказана.

4. Группы в оптимальных расписаниях

Согласно теореме 1 при любом оптимальном расписании юниты двух произвольных требований не могут 'перемешаться' между собой. Т.е. существуют два возможных варианта относительного обслуживания двух требований:

- одно требование полностью обслуживается до момента начала другого требований;
- одно требование 'погружено' во второе требование так, что интервал обслуживания погруженного требования не содержит юниты второго требования.

Дадим определение *группы требований* в оптимальном расписании.

Рассмотрим оптимальную перестановку требований $\pi = (j_1, \dots, j_n)$. Будем говорить, что требования $j_i, \dots, j_m$ образуют *группу*, если:

- обслуживание требований в группе начинается с первого юнита требования j_m и заканчивается последним юнитом требования j_m;
- обслуживание требований $j_1, \dots, j_{i-1}$ выполняется (и завершается) до требований из указанной группы;
- обслуживание требований $j_{m+1}, \dots, j_n$ начинается после требований из указанной группы.

Для обозначения группы требований используется символ G. Этот же символ используется для обозначения множества требований, которые образуют группу, т.е. $G = \{j_1, \dots, j_m\}$.

Пример группы при оптимальном расписании показан на рис. 9.

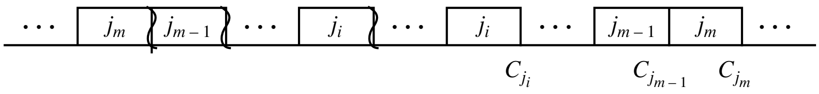

Рис. 9. Пример группы для требований $\{j_1, \ldots, j_m\}$.

Теорема 9. При любом оптимальном расписании если требования $\{j_1, \ldots, j_m\}$ образуют группу, то j_m является требованием с минимальным весом среди требований данной группы.

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из теоремы 2.

5. Специальный случай задачи

В данном разделе рассматривается специальный случай задачи $1 \mid r_j, p_j = p, pmnt \mid \sum w_j c_j$, когда $p = 2$, $r_j = j - 1, j = 1, \ldots, n$, и

(1) $\qquad w_1 \leqslant w_2 \leqslant \ldots \leqslant w_n.$

Теорема 10. Существует оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором для любого требования i в $\mathbb{S}$ выполняется либо $S_j = r_i$, либо $S_j > r_n$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание $\mathbb{S}$, при котором существует такое требование j, что $S_j > r_j$ и $S_j \leqslant r_n$. Следовательно, $S_j = r_i$ для некоторого требования i. Так как выполняется (1), то имеем $w_i \geqslant w_j$. Согласно теореме 4, всегда можно модифицировать расписание $\mathbb{S}$ (как показано в доказательстве теоремы 4) без увеличения значения целевой функции и переместить требование j после i. Последовательность таких модификаций перемещает требование j после r_n. Теорема доказана.

Таким образом, если обслуживание требования не началось в свой момент поступления в систему, то это требование без прерываний будет обслужено после момента времени r_n.

Теорема 11. Существует оптимальное расписание, при котором выполняется либо $S_n = r_n$, либо $S_n = r_n + 1$.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание, при котором $S_n >$ $> r_n + 1$. Пусть j будет ближайшим требованием, которое обслуживается без прерываний, и $S_j < S_n$. Такое требование j всегда существует в любом оптимальном расписании, иначе либо условие $S_n > r_n + 1$, либо теорема 1 будут нарушены.

Случай 1. $C_j < S_n$, т.е. между C_j и S_n обслуживаются юниты некоторых требований $j_1, \ldots, j_m$ (рис. 10).

Все эти юниты являются последними юнитами соответствующих требований, иначе расписание не является оптимальным согласно теореме 1. Таким образом, каждый такой юнит может быть переставлен со своими соседями без нарушения условий поступления требований в систему. Это влечет за собой выполнение сле-

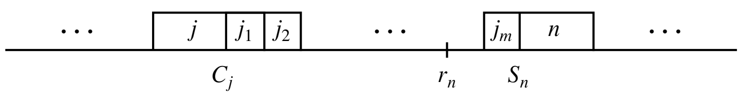

Рис. 10. Расписание в случае 1 (теорема 11).

дующих условий Смита для требований j, $j_1, \ldots, j_m$, n:

$$\frac{2}{w_j} \leqslant \frac{1}{w_{j_1}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{w_{j_m}} \leqslant \frac{2}{w_n}.$$

Если одно из этих неравенств является строгим, то $w_j > w_n$. Это противоречит (1). Иначе без увеличения значения целевой функции можно переставить требование n с последним юнитом требования j_m, затем с последним юнитом j_{m-1} и так далее, пока

a) не получим выполнение условия данной теоремы либо

b) переставим требование m перед j.

В случае b) повторим рассуждения, приведенные выше. Подобные преобразования расписания не увеличивают значения целевой функции.

Случай 2. $C_j < S_n$. Поскольку $w_j \leqslant w_n$, то можно переставить требования j и n без увеличения значения целевой функции расписания. Далее повторим рассуждения, приведенные выше.

Преобразования расписания в случаях 1 и 2 не могут быть выполнены, если выполняются условия теоремы. Теорема доказана.

6. Заключение

В работе были рассмотрены свойства оптимальных расписаний для задачи теории расписаний минимизации суммарного взвешенного момента окончания для одного прибора с возможностью прерывания обслуживания требований и одинаковой продолжительностью обслуживания.

Были получены новые свойства оптимальных расписаний для общего и некоторых специальных случаев рассматриваемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., et.al.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Ann. Discret. Math., 1979. No 5. P. 287–326.
2. *Baptiste Ph.* Scheduling Equal-Length Jobs on Identical Parallel Machines // Discrete Appl. Math., 2000. No 103. P. 21–32.
3. *Smith W.E.* Various optimizers for single-stage production // Naval Research Logistics Quarterly, 1956. No 3. P. 59–66.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 12.01.2010