УДК 517.977.54
ББК 78.34

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ НА ОДНОПУТНОЙ ЛИНИИ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ[1]

Лазарев А. А.[2],
(*ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва*)
(*ФГБОУ ВПО Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Москва*)
(*ФГБОУ ВПО Московский физико-технический институт, Москва*)
(*ФГАОУ ВПО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва*)
Мусатова Е. Г.[3]
(*ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва*)
Тарасов И. А.[4]
(*ФГБУН Институт проблем управления РАН, Москва*)
(*ФГБОУ ВПО Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Москва*)

---

[1] *Авторы выражают благодарность профессору Сиднейского Технологического Университета Якову Зиндеру за ценные комментарии и критику. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты №15-07-03141, №15-07-07489, и при поддержке Министерства образования и науки РФ, уникальный идентификатор прикладных научных исследований и экспериментальных разработок RFMEFI58214X0003.*

[2] *Александр Алексеевич Лазарев, доктор физико-математических наук, профессор, (jobmath@mail.ru).*

[3] *Мусатова Елена Геннадьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник (nekolyap@mail.ru).*

[4] *Тарасов Илья Алексеевич, математик (ia.tarasoff@yandex.ru).*

В работе представлен алгоритм построения оптимальных расписаний на однопутной линии железной дороги между двумя станциями. Модель рассматривается в нескольких постановках – исследуется задача с разъездом на пути и без разъезда. Для ряда целевых функций предлагается алгоритм решения на основе метода динамического программирования.

Ключевые слова: теория расписаний, планирование на железной дороге, динамическое программирование.

1. Введение

В работе исследуется задача построения оптимального расписания движения поездов на однопутном участке железной дороги. Две станции соединены однопутной железной дорогой, на каждой станции есть множество поездов, которые необходимо отправить на другую станцию. Назовем эти множества N_1 и N_2. Необходимо построить расписание движения для всех поездов из множеств N_1 и N_2, при котором целевая функция будет минимальна. Рассматривается ряд целевых функций, имеющих практическое значение. Модель исследуется в двух постановках, с разъездом на пути между станциями и без разъезда, где разъезд – это участок с дополнительным путем, в котором можно осуществлять пропуск встречных поездов. Для обеих постановок алгоритм решения строится на основе метода динамического программирования.

Задача, рассматриваемая в данной работе, актуальна для России, т.к. однопутные участки составляют около половины всей сети железных дорог Российской Федерации. Кроме того, данная задача возникает на производстве, а также при закрытии путей на многопутных участках железной сети.

Обзор методов и моделей, которые используются для планирования движения на железной дороге, может быть найден, например, в [4, 7, 8]. В данных публикациях обосновывается важность задач оптимизации движения на однопутных железных дорогах с практической точки зрения.

В работе [9] впервые задачи построения расписания на однопутной железной дороге была поставлена в виде классической задачи теории расписаний с несколькими приборами. В данном подходе, участкам пути соответствуют приборы, а поезда представлены в виде работ. Такой метод также применялся во множестве других публикациях (см. [2, 3, 5]). Данная работа является продолжением исследований, начатых авторами в [1].

2. Постановка задачи

Опишем все параметры исследуемой модели:

- поезда движутся с одинаковой и постоянной скоростью;
- во множестве N_1 число поездов равно n, а в множестве N_2 равно n', $N = N_1 \cup N_2$ – множество всех поездов;
- поезда поступили на станции в нулевой момент времени;
- в модели без разъезда:
  1) время, за которое поезд проходит путь между станциями 1 и 2 равно p;
  2) для каждого поезда $i \in N_s$ со станции s, $s \in \{1, 2\}$, заданы параметры для расчёта целевой функции;
  3) задан интервал безопасности β – минимальное время между отправлением двух поездов с одной станции, $\beta < p$;
- в модели с разъездом:
  1) время, за которое поезд проходит участки пути между станцией 1 и разъездом и между станцией 2 и разъездом, равно p_1 и p_2 соответственно, будем полагать, что $p_1 \geq p_2$;

2) задан интервал безопасности β – минимальное время между следующими моментами: отправления двух поездов, идущих с одной станции, прибытия и отправления поезда на каждой из станций, и прибытием поездов к разъезду, $\beta < p_2 \leq p_1$.

Задача заключается в построении расписания σ, т.е. для модели без разъезда следует указать время отправления $S_i(\sigma)$ каждого поезда $i \in N$, а для модели с разъездом указать время отправления со станции $S_i(\sigma)$ и время остановки в разъезде $\tau_i(\sigma)$ для каждого поезда $i \in N$.

Обозначим время, в которое поезд $i \in N$ прибывает на станцию назначения при расписании σ, как $C_i(\sigma)$. В модели без разъезда исследуются задачи минимизации целевых функций, которые могут быть представлены в общем виде

$$\bigodot_{i \in N} \varphi_i(C_i(\sigma)),$$

где $\varphi_i(\cdot)$ – некоторая неубывающая функция, заданная для каждого поезда $i \in N$, а $\odot$ – некоторая ассоциативная и коммутативная операция, такая, что для любых a_1, a_2, b_1, b_2, удовлетворяющих условию $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$, верно $a_1 \odot b_1 \le a_2 \odot b_2$.

В модели с разъездом рассматривается задача минимизации максимального временно́го смещения (d_i – директивный срок поезда, $i \in N$)

(1) $$L_{\max}(\sigma) = \max_{i \in N}\{C_i(\sigma) - d_i\};$$

а также задача минимизации взвешенной суммы всех моментов поступления поездов на станции назначения (w_i – коэффициент приоритета)

(2) $$\sum w_i C_i(\sigma) = \sum_{i \in N} w_i C_i(\sigma).$$

3. Алгоритм решения

Алгоритм построения решения для обеих моделей строится на основе метода динамического программирования. Рассмотрим, как строится алгоритм в модели без разъезда. Исследуемые целевые функции являются неубывающими, поэтому рассматриваются лишь те расписания, в которых нет перерывов в движении (т.н. «активные расписания»). Они удовлетворяют следующему условию: при каждом активном расписании σ в любой момент времени t, $0 \le t \le C_{max}(\sigma)$, существует как минимум один поезд $i \in N$, для которого выполняется условие $S_i(\sigma) \leq t \leq C_i(\sigma)$. Здесь $C_{max}(\sigma) = \max_{i \in N} C_i(\sigma)$.

Исследуются только целевые функции, которые позволяют заранее установить порядок отправления поездов с каждой из станций. Рассмотрим для примера целевые функции, исследуемые в обеих моделях: максимальное временное смещение (1), а также сумму моментов прибытия поездов на станции назначения (2). Для задачи минимизации целевой функции L_{max} существует оптимальное расписание, при котором поезда с каждой станции отправляются в порядке неубывания их директивных сроков. Аналогичным образом для задачи с целевой функцией $\sum w_j C_j$, можно рассматривать только расписания, при которых поезда отправляются с каждой станции в порядке невозрастания их весовых коэффициентов w_i.

Пусть в задаче поезда на каждой станции пронумерованы в порядке убывания их моментов отправления, для удобства введем обозначения: $N_1 = \{1, ..., n\}$, $N_2 = \{1', ..., n'\}$. При любом активном расписании σ моменты отправления принадлежат множеству

(5) $$T = \{t \mid t = qp + k\beta,\ k \in \{0, 1, \ldots, n + n' - 2\},$$
$$q \in \{0, 1, \ldots, 2\min\{n, n'\}\}, k + q \leq n + n' - 1\}.$$

Мощность множества T равна $O((n + n')^2)$.

Далее введем определение подзадачи для каждого $k_1 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ и $k'_2 \in \{0', 1', \ldots, n'\}$, таких, что $k_1 \neq 0$ либо $k'_2 \neq 0'$ (либо оба условия выполняются), и любого $s \in \{1, 2\}$, и $t \geq 0$. Будем обозначать индексы поездов без штриха, если они принадлежат множеству N_1, и со штрихом, если принадлежат множеству N_2. Назовем подзадачей $\mathcal{P}(k_1, k'_2, s, t)$ задачу, которая получается из исходной при следующих дополнительных условиях:

- со станции 1 на станцию 2 необходимо доставить только поезда из множества $\{1, \ldots, k_1\}$;

- со станции 2 на станцию 1 необходимо доставить только поезда из множества $\{1', \ldots, k_2'\}$;
- первый поезд начнет движение в момент времени t;
- первый поезд отправится со станции s.

Так как в подзадаче $\mathcal{P}(k_1, k_2', s, t)$ рассматриваются только поезда из множества $\{1, \ldots, k_1\} \cup \{1', \ldots, k_2'\}$, в целевую функцию входят только ее значения для поездов этого множества.

Обозначим оптимальное значение целевой функции в подзадаче $\mathcal{P}(k_1, k_2', s, t)$ как $f(k_1, k_2', s, t)$. Оптимальное значение целевой функции исходной задачи определяется как

(6) $$\min\{f(n, n', 1, 0), f(n, n', 2, 0)\}.$$

Будем считать, что для операции $\odot$ принимается условие, что для любого числа a, $a \odot \infty = \infty \odot a = \infty$. Значение целевой функции при любом расписании σ для подзадачи $\mathcal{P}(k_1, k_2', s, t)$, при котором хотя бы один из моментов начала движения не входит в T, равно ∞.

Работа алгоритма начинается с решения подзадач при наименьшем числе поездов на станциях:

$$f(1, 0', 1, t) = \begin{cases} \varphi_1(t+p), & t \in T \\ \infty, & t \notin T \end{cases}$$

и

$$f(0, 1', 2, t) = \begin{cases} \varphi_{1'}(t+p), & t \in T \\ \infty, & t \notin T \end{cases}$$

Уравнения Беллмана записываются следующим образом:
для каждого $k_1 \in \{1, ..., n-1\}$,

$$f(k_1+1, 0', 1, t) = \begin{cases} g(k_1+1, 0', 1, t), & t \in T \\ \infty, & t \notin T \end{cases},$$

где $g(k_1+1, 0', 1, t) = \varphi_{k_1+1}(t+p) \odot f(k_1, 0', 1, t+\beta)$;
для каждого $k_2' \in \{1', ..., n'-1'\}$,

$$f(0, k_2'+1', 2, t) = \begin{cases} g(0, k_2'+1', 2, t), & t \in T \\ \infty, & t \notin T \end{cases},$$

где $\quad g(0, k'_2 + 1', 2, t) = \varphi_{k'_2+1'}(t + p) \odot f(0, k'_2, 2, t + \beta);$

для каждого $k'_2 \in \{1', ..., n'\}$,

$$f(1, k'_2, 1, t) = \begin{cases} g(1, k'_2, 1, t), & t \in T \\ \infty, & t \notin T \end{cases},$$

где $\quad g(1, k'_2, 1, t) = \varphi_1(t + p) \odot f(0, k'_2, 2, t + p);$

для каждого $k_1 \in \{1, ..., n\}$,

$$f(k_1, 1', 2, t) = \begin{cases} g(k_1, 1', 2, t), & t \in T \\ \infty, & t \notin T \end{cases},$$

где $\quad g(k_1, 1', 2, t) = \varphi_{1'}(t + p) \odot f(k_1, 0', 1, t + p);$

для каждого $k_1 \in \{1, ..., n - 1\}$ и каждого $k'_2 \neq 0'$,

$$f(k_1 + 1, k'_2, 1, t) = \begin{cases} g(k_1 + 1, k'_2, 1, t), & t \in T \\ \infty, & t \notin T \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} g(k_1 + 1, k'_2, 1, t) &= \varphi_{k_1+1}(t + p) \\ &\odot \min\{f(k_1, k'_2, 1, t + \beta), f(k_1, k'_2, 2, t + p)\}; \end{aligned}$$

для каждого $k_1 \neq 0$ и каждого $k'_2 \in \{1', ..., n' - 1'\}$,

$$f(k_1, k'_2 + 1', 2, t) = \begin{cases} g(k_1, k'_2 + 1', 2, t), & t \in T \\ \infty, & t \notin T \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} g(k_1, k'_2 + 1', 2, t) &= \varphi_{k'_2+1'}(t + p) \\ &\odot \min\{f(k_1, k'_2, 2, t + \beta), f(k_1, k'_2, 1, t + p)\}. \end{aligned}$$

Трудоёмкость алгоритма составляет $O((n + n')^4)$ операций, т.к. необходимо получить значение f для каждого $t \in T$ и каждой пары k_1 и k'_2.

Аналогичным образом строится алгоритм для модели с разъездом, из-за наличия разъезда в подзадаче есть дополнительные параметры.

4. Выводы

В данной работе была исследована задача составления оптимального расписания для однопутной линии железной дороги. Была исследована модель с разъездом на пути и модель без разъезда, был построен алгоритм решения на основе метода динамического программирования.

Для задачи минимизации ряда целевых функций в модели без разъезда был получен алгоритм трудоемкостью $O((n+n')^4)$ операций, а в модели с разъездом - алгоритм трудоемкостью $O((n+n')^2)$ операций.

Литература

1. ЛАЗАРЕВ, А. А. *Составление оптимального расписания двжения поездов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой с разъездом* / А. А. Лазарев, И. А. Тарасов // Управление большими системами. – 2015. – № 58. – С. 244–284.
2. BRUCKER, P. *Scheduling Algorithms* / P. Brucker. – 3rd edition. – Secaucus, NJ, USA: Springer New York, 2001.
3. HARBERING, J. *Single Track Train Scheduling* / Harbering J., Ranade A., Schmidt M. // Proc. 7th Multidisc. Int. Conf. on Scheduling: Theory and Applications (MISTA 2015) 25–28 August 2015, Prague, Czech Republic. 2015. P. 102–117.
4. HAROD, S. S. *A tutorial on fundamental model structures for railway time-table optimization* / S. S. Harrod // Surveys in Operations Research and Management Science. – 2012. – Vol. 17, № 2. – P. 85–96.
5. GAFAROV, E. R. *Two-station single-track railway scheduling problem with trains of equal speed* / E.R. Gafarov, A. Dolgui, A.A. Lazarev // Computers and Industrial Engineering. – 2015. – Vol. 85, P. 260–267.
6. GRAHAM, R. L. *Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey* / R.L. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H. Rinnooy Kan //

Annals of Discrete Mathematics. – 1979. – Vol. 5. – P. 287–326.
7. LUSBY, R. M. *Railway track allocation: Models and methods* / R. M. Lusby, J. Larsen, M. Ehrgott, D. Ryan // OR Spectr. – 2011. – Vol. 33, № 4. – P. 843–883.
8. OLIVEIRA, E. S. *Solving Single-Track Railway Scheduling Problem Using Constraint Programming* – Ph.D. thesis / University of Leeds. – 2001.
9. SZPIGEL, B. *Optimal train scheduling on a single line railway* / B. Szpigel // Oper Res. – 1973. – P. 344–351.

ALGORITHMS OF OPTIMAL SCHEDULE CONSTRUCTION ON SINGLE RAILWAY LINE

Alexander Lazarev, Institute of Control Sciences of RAS, Lomonosov Moscow State University, Moscow Institute of Physics
and Technology, National Research University Higher School of Economics, Doctor of Science, professor (jobmath@mail.ru).
Elena Musatova, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior research assistant (nekolyap@mail.ru).
Ilia Tarasov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, mathematician (ia.tarasoff@yandex.ru).

Abstract: This paper is focused on the optimal schedule construction on single railway line between two stations. The problem is considered in two formulations – with a siding on the track and without a siding. For a set of objective functions solution algorithm based on dynamic programming method is presented.

Keywords: scheduling theory, railway operation planning, dynamical programming.