

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А. ДОРОДНИЦЫНА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ФЕДЕРАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА  
«ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ»  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

РОССИЙСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЩЕСТВО  
ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

**VIII Московская международная  
конференция  
по исследованию операций  
(ORM2016)**

Москва, 17-22 октября, 2016

ТРУДЫ  
ТОМ II



Федеральный исследовательский центр  
Информатика  
и Управление  
Российской академии наук



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР им. А.А. ДОРОДНИЦЫНА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
МОСКВА 2016

УДК 519.83  
ББК 22.18

Составитель и редактор  
**В.В. Шевченко**  
Ответственный редактор  
доктор физ.-матем. наук **Е.З. Мохонько**

**VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016):**  
Москва, 17–22 октября 2016 г.: Труды. Том II / Отв. ред. Е.З. Мохонько. – М.: Издательство  
ФИЦ ИУ РАН, 2016. – 267 с.  
ISBN 978-5-91993-067-9

В сборнике представлена вторая часть трудов VIII Московской международной конференции по исследованию операций, посвященной памяти выдающегося российского ученого академика П.С. Краснощекова. Конференция проводится Вычислительным центром им. А.А.Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), факультетом Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова и Российским научным обществом исследования операций (РНОИО). В докладах, представленных в настоящем томе, обсуждаются математические вопросы исследования операций в экономике, экологии, социологии, биологии, медицине, политологии, страховании, банковском деле, военном деле и области обеспечения безопасности, автоматизированном проектировании и моделировании транспортных потоков, а также численные методы исследования операций.

Ключевые слова: исследование операций, математические модели, теория игр, новые модели и методы исследования операций, оптимизационные методы исследования операций, многокритериальная оптимизация, исследование операций в экономике, исследование операций в военном деле, исследование операций в банковском деле и на финансовых рынках, исследование операций в страховании и риск-менеджменте, исследование операций в медицине, биологии и экологии, автоматизированное проектирование, теоретико-игровые модели, анализ политических процессов и коррупции, рынки и аукционы, предсказательное моделирование транспортных потоков.

Рецензенты: Ю.А. Флёров, А.А. Васин

УДК 519.83  
ББК 22.18

**VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016):** Moscow, October 17–22, 2016: Proceedings: Vol. II. – Moscow, FRC CSC RAS Publishing, 2016. – 267p.

The collection presents the second part of the works of VIII Moscow International Conference on Operations Research. The conference is organized by Dorodnicyn Computing Center of Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University (MSU) and Russian Scientific Operations Research Society (RSORS) and is dedicated to the memory of an outstanding Russian scientist, full member of RAS Pavel Krasnoshchekov. The conference brings together scientists from all over the world to discuss theoretical aspects and various applications of operations research. The conference aims to consider mathematical problems of operations research, latest achievements, new models in economics, ecology, medicine, political science, etc

Keywords: operations research, mathematical models, game theory, the new models and methods of Operations Research, Optimization methods, multi-criteria optimization, operations research in economics, operations research in military science, operations research in banking and financial markets, operations research in insurance and risk management, operations research in medicine, biology and ecology, computer-aided design, game theoretic models, the analysis of political processes and corruption, markets and auctions: analysis and design, predictive modeling of traffic flows.

Научное издание

©Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук  
Федерального исследовательского центра «Информатика и Управление»  
Российской академии наук



Федеральный исследовательский центр  
**Информатика  
и Управление**  
Российской академии наук



# **VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016) 17-22 октября 2016**

В сборнике представлена вторая часть трудов VIII Московской международной конференции по исследованию операций, посвященной памяти выдающегося российского ученого академика П.С. Краснощекова. Конференция проводится Вычислительным центром им. А.А.Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), факультетом Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова и Российским научным обществом исследования операций (РНОИО).

## **Председатель конференции:**

президент РНОИО академик РАН П.С. Краснощеков

## **Глава совета Российского научного общества исследования операций (РНОИО):**

академик РАН Ю.И. Журавлев

## **Председатель программного комитета конференции:**

проф. А.Ф. Измаилов (МГУ)

## **Сопредседатели Оргкомитета конференции:**

член-корр. РАН Ю.А. Флеров (ФИЦ ИУ РАН), проф. А.А. Васин (МГУ)

## **Программный комитет:**

проф. Ф.Т. Алескеров (НИУ ВШЭ), проф. А.А. Васин (МГУ), Г.-В. Вебер (Среднеазиатский технический университет, Анкара, Турция), академик РАН Ю.Г. Евтушенко (ФИЦ ИУ), глава совета РНОИО академик РАН Ю.И. Журавлёв (ФИЦ ИУ), член-корр. РАН Ю.Н. Павловский (ФИЦ ИУ), член-корр. РАН И.Г. Поспелов (ФИЦ ИУ), вице-президент РНОИО академик РАН Г.И. Савин (МСЦ РАН), проф. Я.Д. Сергеев (DEIS, Università della Calabria, Italy), академик РАН И.А. Соколов (ФИЦ ИУ), М.В. Солодов (ИМРА, Рио-де-Жанейро, Бразилия), проф. М. Ячимович (Университет Черногории).

## **Оргкомитет:**

проф. А.А. Белолипецкий, доц. А.В. Гасников, доц. Д.В. Денисов, проф. Ф.И. Ерешко, проф. А.Ф. Измаилов, в.н.с. Н.С. Кукушкин, проф. А.В. Лотов, вице-президент РНОИО проф. Ю.Е. Малашенко, академик РАН Е.И. Моисеев, доц. В.В. Морозов, доц. Е.З. Мохонько, проф. Н.М. Новикова, проф. В.В. Подиновский, доц. И.И. Поспелова, академик РАН И.А. Соколов, проф. А.А. Шананин.

**Секретарь конференции:** А.И. Соловьёв

**Заместитель секретаря:** А.И. Пьяных



Федеральный исследовательский центр  
**Информатика  
и Управление**  
Российской академии наук



# Павел Сергеевич Краснощеков



**6.05.1935-26.02.2016**

Павел Сергеевич Краснощеков родился 6.05.1935 в городе Калач Воронежской области. В 1953 г. после окончания средней школы № 1 города Грозного поступил на механико-математический факультет МГУ. По окончании МГУ в 1958 году он был принят в аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. В 1964 году под руководством Г.Г. Черного защитил кандидатскую диссертацию на тему «Колебания тел с вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса». В докторской диссертации «Специальные модели исследования операций» он смог применить мощный математический аппарат к изучению широкомасштабных вооруженных конфликтов. Область его научных интересов охватывала информатику и автоматизацию, исследование операций, математическое моделирование социальных процессов, динамику жидкости и газа.

С начала 60-х годов он работал в Вычислительном центре АН СССР в должностях: старший научный сотрудник (1966–1973), заведующий отделом (1973-1990), заместитель директора (1989–2004), главный научный сотрудник (с 2004). Им были разработаны основы теории автоматизированного проектирования сложных технических систем. В 1975–1986 гг. совместно с Н.Н. Моисеевым он возглавлял работы по созданию системы автоматизированного проектирования летательных аппаратов в КБ им. П.О. Сухого. Созданная система вывела на новый уровень всю технологию проектирования самолетов в КБ, начиная с модели СУ-27. За эти работы в 1981 году П.С. Краснощеков стал Лауреатом премии Совета Министров СССР в области науки и техники и был награжден орденом Дружбы народов. В 90-е годы им была предложена методология изучения простейших форм коллективного поведения.

Долгие годы он был членом редакционной коллегии журнала «Техническая кибернетика», членом диссертационных советов при МГУ и

ВЦ РАН. 26 декабря 1984 года он был избран членом-корреспондентом АН СССР по отделению информатики, вычислительной техники и автоматизации по специальности «Автоматизированные системы», а 11.06.1992 – действительным членом Российской академии наук.

Павел Сергеевич вел большую преподавательскую работу, передавая свой огромный опыт и глубокие знания студентам и молодым исследователям. В 1963–1966 гг. он преподавал в Московском геологоразведочном институте. В 1975 году он возглавил кафедру исследования операций факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского Государственного университета им. М.В.Ломоносова, основанную профессором Ю.Б. Гермейером, и бесценно руководил этой кафедрой до своей смерти. Его эрудиция ученого, мудрость руководителя и доброжелательность позволили сплотить ярких преподавателей и сделать кафедру одной из лучших в МГУ. Ученое звание профессор ему было присвоено в 1978 году, а в 1999 году он стал Заслуженным профессором Московского университета. Читаемый им в МГУ курс лекций по исследованию операций давал слушателям целостное представление об этой науке, ее многочисленных приложениях и тесной взаимосвязи с другими разделами математики и пользовался огромным интересом у студентов. Его совместная с А.А. Петровым книга 1983 года «Принципы построения моделей» остается базовым учебником для студентов МГУ и МФТИ. Он подготовил более 25 кандидатов наук и 10 докторов наук. Открытые им научные направления продолжают активно развиваться в работах его благодарных учеников.

*Ф.И. Ерешко, Ф.В. Костюк, Ю.А. Флеров*

## СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ .....	7
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ .....	66
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ.....	80
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ВОЕННОМ ДЕЛЕ И ОБЛАСТИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ.....	109
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В БАНКОВСКОМ ДЕЛЕ И НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ	119
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В СТРАХОВАНИИ И РИСК-МЕНЕДЖМЕНТЕ .....	144
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ФИЗИКЕ, БИОЛОГИИ, ЭКОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ....	146
АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ .....	166
ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ .....	176
АНАЛИЗ ПОЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И КОРРУПЦИИ .....	192
РЫНКИ И АУКЦИОНЫ. АНАЛИЗ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ.....	204
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ.....	226
АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....	258

## Оптимизационные методы исследования операций

1. Josef Kartvelishvili, Luka Shonia Visualization of inter-communication in normative-legal documents and automated design of analysis in reference-legal systems
2. Laptin Yu.P. Exact penalty functions in decomposition schemes in variables
3. Д.И. Архипов, А.А. Лазарев Построение оптимального расписания для одного прибора: оценка абсолютной погрешности с помощью метрик
4. Л.Г. Афраимович, А.С. Катеров Поточковые методы построения оценок для аксиальной трехиндексной задачи о назначениях
5. В.В. Балашов, В.А. Балаханов, В.А. Костенко Алгоритмы построения расписаний в информационно-управляющих системах реального времени с архитектурой ИМА
6. Е.А.Беляевских, М.С.Никольский О количестве переключений релейного оптимального управления для осциллирующих управляемых объектов
7. С.В. Бронников, А.Р. Герасимов, А.А. Лазарев, Е.Г. Мусатова, А.С. Петров, К.В. Пономарев, М.М. Харламов, Н.Ф. Хуснуллин, Д.А. Ядренцев Алгоритмы формирования расписания подготовки космонавтов
8. Е.М.Бронштейн, И.Е.Копылов Оптимизация маршрута доставки грузов водным транспортом
9. А.М. Валуев, Е.С. Никифорова О задачах вычисления субоптимальных путей на графах
10. Д.Ю. Волканов Адаптивный метод сбалансированного выбора модулей встроеной вычислительной системы с учётом требований надёжности
11. Б.В. Ганин Метод параметризации целевой функции для нахождения проекции точки на множество решений прямой задачи линейного программирования
12. А.В. Гасников, П.Е. Двуреченский, И.Н. Усманова О нетривиальности рандомизированных ускоренных покомпонентных методов
13. А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко Новый класс теорем об альтернативах
14. Я.В. Голубева Алгоритмы балансировки нагрузки в параллельной реализации метода ветвей и границ и методика их исследования
15. Д.Р. Гончар Решение минимаксной задачи теории расписаний методом ветвей и границ
16. Д. Р. Гончар, С. Н. Мирошник, Ю. С. Юрезанская Математическое моделирование взаимодействия основного и дополнительного обучения учащихся средней школы
17. М.Р. Давидсон, А.В. Селезнев Метод решения динамической задачи оптимизации состава включенного генерирующего оборудования
18. М.Р. Давидсон, А.В. Селезнев Регуляризация метода Ньютона для решения системы уравнений установившегося режима
19. М.Н. Деменков Пересечение прямой и зонотопа в задаче линейного программирования
20. В.В. Дикусар Вопросы идентификации стохастических дифференциальных уравнений
21. В.И. Ерохин, А.В. Рассадин, А.С. Гоголевский Обобщение регуляризованного метода наименьших квадратов А.Н. Тихонова на  $l_1$ -норму
22. А.Г. Коротченко, В.М. Сморякова Об оптимальном одношаговом алгоритме поиска экстремума в классе функций, определяемом кусочно-линейной мажорантой
23. В.А. Костенко Сочетание жадных стратегии и ограниченного перебора при решении задач о выборе максимально совместимого числа заявок
24. В.А. Костенко Использование самообучения для выбора параметров генетических алгоритмов
25. В.А. Костенко, Р.Л. Смелянский Планировщик ресурсов для облачных платформ
26. В.В. Кулагин Робастность как показатель эффективности решения, принимаемого в условиях неопределенности. Задача о максимальной робастности.

27. А.А. Лагуновская Безградиентные методы с неточным оракулом для решения задач выпуклой оптимизации
28. М. М. Луценко, М.Н. Кенесбай Ошибки при ранжировании по результатам тестирования
29. Ю.Е. Малашенко, И.А. Назарова Модель анализа проектов развития гетерогенной вычислительной системы
30. В.Г. Малинов Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
31. В.Н. Малозёмов, Г.Ш. Тамасян Об одной фильтровой задаче, связанной с Четвёртой задачей Золотарёва
32. С.Н. Мирошник Алгоритм построения структуры базы данных с минимальной избыточностью информации для систем реального времени
33. Мохаммед Ахмед (МФТИ) Градиентный спуск в гильбертовых пространствах в условиях шума и его приложения к численному решению задач оптимального управления со свободным правым концом
34. О.В. Муравьева Определение параметрически устойчивых решений систем линейных неравенств относительно полиэдральных норм
35. Ю.В. Орлов Визуальная среда комплексного анализа параллельных алгоритмов оптимизации
36. В.Н. Пашков Алгоритм балансировки нагрузки для распределенной платформы управления ПКС
37. М.Х. Прилуцкий Оперативное управление двухстадийными стохастическими производственными системами
38. П.И. Стецюк Об  $T$ -алгоритмах Шора
39. М.Г. Фуругян Оптимальная коррекция директивных интервалов в задаче построения многопроцессорного расписания с дополнительным ресурсом
40. С.В. Швыдун Индексы центральности и их связь с правилами на мажоритарном отношении в больших и урезанных сетях

## **Visualization of inter-communication in normative-legal documents and automated design of analysis in reference-legal systems**

Josef Kartvelishvili, Luka Shonia  
*Georgian Technical University*

Modern life is getting more and more complex and is largely dependent on up-to-date technical and technological factors, which means it is entering the development phase where any sphere, to solve practical tasks requires elaboration of effective methods and designing of modern technical systems enabling quick and simple, low time and cost consuming solution to the objectives sought. Objective of visualization and analysis of inter-communication in normative-legal documentation that requires setup of automated system is also related to the development of computer and programming methods.

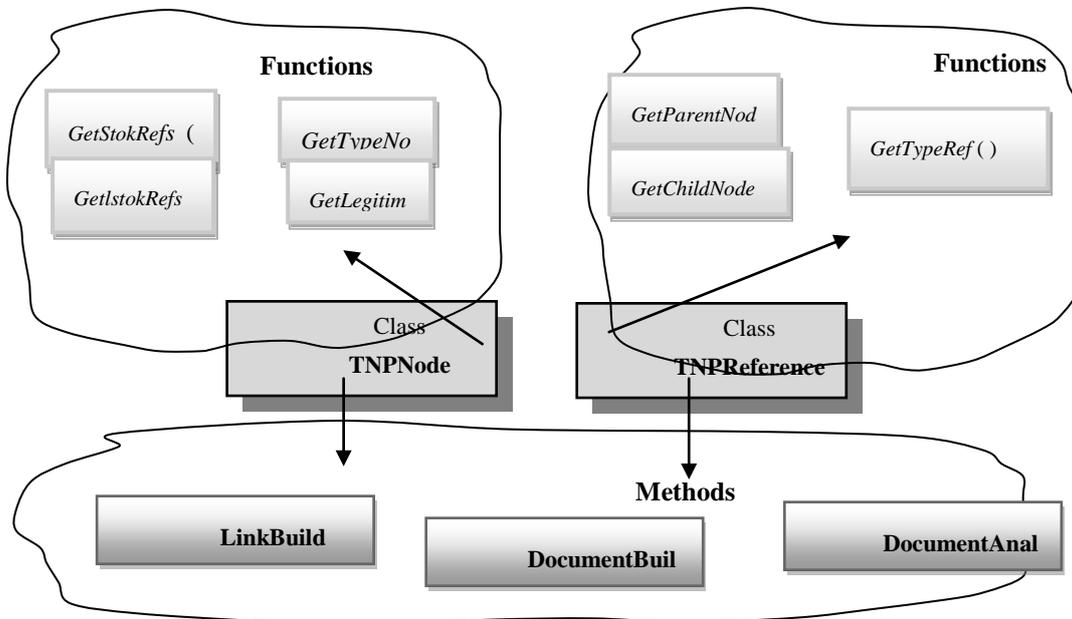
Large amount of legislative information and dynamics of changes in it requires lawyers, students, businessmen and any others interested, apply up-to-date methods and tools in the process of working with legislative information. For today, such tools are the reference legal systems that are mainly supposed to duly provide unlimited number of users with precise legal information. Inter-communication visualization and automated analysis system in reference-legal systems is an allocated structure. Designing of such automated systems particularly, elaboration of system software set is quite a complex task and requires special approach. Therefore, while designing it, criteria specific for similar systems have been taken into account.

Based on the key objectives of automated system, system algorithms have to be defined and established, information support and dialogue procedures elaborated and software complex and structure for automated system has to be created, where software structure classes, procedures,

functions and methods are to be compound. Software complex elaboration is what this work is focused on.

While processing software complex of the automated system, two key classes have been used: Normative-legal document class – TNPNode and Normative-legal document linking class – TNReference.

Per each class, procedures, functions and methods and algorithms per each of these methods program codes have been processed and structured and each of them has been described according to specific functional purpose. Below there is the schematic image of the structure of software complex for visualization and automated analysis system (Dr. 2).



Dr. 2. Software complex structure

In the program support there are softwares used that arrange and manage database management system. They make it easier for users to enter and solve tasks. Let's go through automated system software complex structure in separate per each class and describe functions applied in classes with their functional designations.

- 1) *GetStokRefs (* \_ function returns compounds of current links;
- 2) *GetstokRefs (* \_ function returns compounds of flowing links;
- 3) *GetTypeNod (* \_ function returns type of normative-legal document (T(sx) analogue);
- 4) *GetLegitimacyPeriod (* \_ function returns legitimacy period of normative-legal document.

- 5) *GetParentNode (* \_ function returns document that comprises the link.
- 6) *GetChildNode (* \_ function returns document affected by the link.
- 7) *GetTypeRef (* \_ function returns type of connection.

Let's review methods used in program complex with their functional purposes:

LinkBuild – placement-composition of links for normative-legal documents;

DocumentBuild – setup of surroundings for legal documents;

Document Analysis – visualization and analysis for normative-legal documents.

It should be said that, the overall concept of the system in offer, which includes modulation principles provides significant possibility for further streamlining. Increase of capacity of identification of potentially dangerous situations is provided by adding new criteria into knowledge base and is limited by the existing constraint mathematical model only, while increase of efficiency in link identification within the document text is accomplished by filling the word exception list. Thus, we may conclude the following: work introduces the automated designing of visualization and analysis of inter-communication of normative-legal documents, in particular, composition of automated system and elaboration of software complex. In times of technological innovations when the field is rapidly developing there is constant need to facilitate permanent upgrade process for the visualization of inter-communication of normative-legal documents and for the automated analysis system.

### Literature:

1. Chogovadze G., Gogiachaishvili G., Surguladze G., Sherozia T., Shonia O. Designing and composition of automated management systems, Tbilisi 2001.
2. O. Shonia., I. Kartvelishvili, L. Kolbaia. Visualization and Analysis Inter-Communication of Normative-Legal documents. Georgian International Journal of Science and Technology, Nova Science Publishers, Volume 6, Issues 1 (2013), in press. <https://www.novapublishers.com/catalog>.

## Exact penalty functions in decomposition schemes in variables

Laptin Yu.P.

*V.M.Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

The use of exact penalty functions in decomposition schemes in variables to solve nonlinear optimization problems allows to overcome some problems related with implicit description of the feasible region in the master problem. How to find proper penalty coefficients is discussed in this contribution. Let consider a problem

$$f^* = \min \{f_0(x) : x \in C\}, \quad (1)$$

where  $C = \left\{x : f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in R^n\right\}$ ,  $f_i : R^n \rightarrow R$  are convex functions,  $i = 0, \dots, m$ .

Let  $F_\lambda(x) = f_0(x) + \lambda h^+(x)$ ,

where  $h(x) = \max \{f_i(x), i = 1, \dots, m\}$ ,  $f^+(x) = \max \{0, f(x)\}$ ,

$$F_\lambda^* = \min \{F_\lambda(x) : x \in R^n\}. \quad (2)$$

$F_\lambda(x)$  is an exact penalty function, if the solutions of problems (1) and (2) coincide.

**Lemma.** Let  $C$  be a closed set, values of penalty coefficients are fixed,  $\varepsilon > 0$  and a sequence of points  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  converging to a solution  $\tilde{x}$  of the problem (2) be given. Let a rule  $P$  establishes a correspondence between  $x_k$  and a point  $z_k = P(x_k)$ ,  $z_k \in C$ ,  $k = 1, 2, \dots$  be given, and the following inequalities are fulfilled

$$F_\lambda(x_k) \geq f_0(z_k) + \varepsilon \|z_k - x_k\|, \text{ if } x_k \notin C, k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Then  $\tilde{x} \in C$ .

For a given point  $x \notin C$  and the rule  $P : R^n \rightarrow C$  let we denote

$$\lambda_p(x, \varepsilon) = \max \left( 0, \frac{f_0(z) + \varepsilon \|z - x\| - f_0(x)}{h^+(x)} \right), \text{ where } z = P(x), \lambda_p(\varepsilon) = \sup \{\lambda_p(x, \varepsilon) : x \notin C\}.$$

Let some converging algorithm  $A$  be used to solve the problem (2). For the exact penalty coefficients are not known in advance, their values will be specified (increased) in the course of the algorithm. Let  $\lambda_k$  be a value of the coefficient  $\lambda$  at the iteration  $k$ . For  $k = 1$  the value  $\lambda_1 > 0$  is given. The algorithm  $A$  uses the value  $\lambda_k$  to find the point  $x_k$  at the iteration  $k$ . If in the point  $x_k$  the inequality (3) is fulfilled at  $\lambda = \lambda_k$ , let put  $\lambda_{k+1} = \lambda_k$ , otherwise  $\lambda_{k+1} = \lambda_p(x_k, \varepsilon) + R$ , where  $R > 0$  is a fixed given parameter.

It is evident that relations (3) are fulfilled, if  $\lambda > \lambda_p(\varepsilon)$ , and the number of corrections for the coefficients  $\lambda_k$  will be finite, if  $\lambda_p(\varepsilon) < \infty$ .

The use of penalty functions with too high values of penalty coefficients leads to problems related to rounding errors, worsening of the convergence of optimization algorithms. For this reason the value  $\lambda_p(\varepsilon)$  is an important characteristics of the rule  $P$ .

Let  $P = P^* : R^n \rightarrow x^*$ , where  $x^*$  is the solution of the initial problem (1). It is possible to demonstrate that for the linear programming problem there will be  $\lambda_p(0) = \sum_{i=1}^m u_i^*$ . Here  $(u_1^*, \dots, u_m^*)$  are optimal values of dual variables.

Let for  $x \notin C$ ,  $y_0 \in C$  we denote  $\pi_C(x, y_0)$  the point of intersection of a segment  $[x, y_0]$  with a border of the set  $C$ .

**Theorem.** Let a set  $C$  be bounded, a function  $f$  be Lipschitz continuous on  $C$ , and a point  $y_0 \in C$ ,  $h(y^0) < 0$ ,  $P(x) = \pi_C(x, y_0)$  be given for  $x \notin C$ . Then  $\lambda_p(\varepsilon) < \infty$ .

The rule  $P(x) = \pi_C(x, y_0)$  gives rather efficient procedures to specify the penalty coefficient, but under unfortunate choice of the point  $y_0$  the values of penalty coefficients may become rather large.

One of the ways to improve the rule  $P$  consists in the following: to use for every point  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  instead of the initial point  $y_0 \in C$  another auxiliary point  $y_k \in C$ . Here we put  $z_k = P(x_k) = \pi_C(x_k, y_k)$ .

An analogous approach for finding penalty coefficients of the function  $\Phi_\beta(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \beta_i f_i^+(x)$ , and some peculiar properties of application in decomposition schemes in variables for block convex programming problems are also considered. The proposed approaches do not require complex solutions of auxiliary problems.

#### References

1. *Laptin Yu.P.* Exact Penalty Functions and Convex Extensions of Functions in Schemes of Decomposition in Variables // *Cybernetics and Systems Analysis*, 2016, V. 52, № 1. P. 85–95

### Построение оптимального расписания для одного прибора: оценка абсолютной погрешности с помощью метрик\*

Д.И. Архипов<sup>1</sup>, А.А. Лазарев<sup>1,2,3,4</sup>

<sup>1</sup>ИПУ РАН, Москва, Россия;

<sup>2</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия;

<sup>3</sup>НИУ ВШЭ, Москва, Россия;

<sup>4</sup>МФТИ (ГУ), Москва, Россия.

Рассматривается классическая NP-полная задача теории расписаний. Имеется множество  $N$ , состоящее из  $n$  требований, и один прибор для их обслуживания. Для каждого требования определены момент поступления  $r_j$ , время обслуживания  $p_j$  и директивный срок  $d_j$ . Каждое требование  $j$  должно быть обслужено без прерываний, начиная с момента времени не меньшего чем  $r_j$ , одновременное обслуживание нескольких требований запрещено. Расписанием будем называть последовательность обслуживания требований  $\pi = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ . Естественно рассматривать ранние расписания, при которых  $C_{j_1}(\pi) = r_{j_1} + p_{j_1}$ ,  $C_{j_k}(\pi) = \max\{r_{j_1}, C_{j_{k-1}}(\pi)\} + p_{j_k}$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ , где  $C_j(\pi)$  – момент окончания обслуживания требования  $j$  при расписании  $\pi$ . Множество расписаний, удовлетворяющих данным требованиям, будем называть допустимым и обозначать через  $\Pi(N)$ . Необходимо построить допустимое расписание  $\pi$ , оптимальное по критерию

$$\min_{\pi \in \Pi(N)} \max_{j \in N} L_j(\pi),$$

\* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 15-07-07489, 15-07-03141 и DAAD A/1400328.

где  $L_j(\pi) = C_j(\pi) - d_j$  – временное смещение требования  $j$  при расписании  $\pi$ . В соответствии с обозначениями, принятыми в теории расписаний и предложенными в статье данная задача может быть обозначена как  $1|r_j|L_{\max}$ .

Данная задача является  $N$ -полной в сильном смысле. Известно большое количество различных полиномиально разрешимых случаев данной задачи, когда параметры требований удовлетворяют системе неравенств. Некоторые из них представлены в таблице 1.

Дополнительное условие	Статья
$r_j = \text{const}$	Jackson [1]
$d_j = \text{const}$	Lawler [2]
$p_j = \text{const}$	Simons [3]
$d_j - p_j - A \leq r_j \leq d_j - A, A = \text{const}$	Hoogeveen [4]
$r_1 \leq \dots \leq r_n, d_1 \leq \dots \leq d_n$	Hoogeveen [4]
$d_1 \leq \dots \leq d_n, d_1 - \alpha p_1 - \beta r_1 \geq \dots \geq d_n - \alpha p_n - \beta r_n, \alpha = \text{const}, \beta = \text{const}, \alpha \in [0, 1], \beta \in [0, +\infty]$	Лазарев, Архипов [5]

Каждый пример задачи  $1|r_j|L_{\max}$  задаётся  $3n$  параметрами  $\{r_1, \dots, r_n, p_1, \dots, p_n, d_1, \dots, d_n\}$ , и может быть рассмотрен как точка в  $3n$ -мерном пространстве. В данной работе для пространства примеров задачи используется метрика  $\rho$ , предложенная в [6], удовлетворяющая свойству

$$\rho(A, B) \geq |L_{\max}^A - L_{\max}^B|.$$

Предложены алгоритмы нахождения ближайших по метрике точек из областей, соответствующих полиномиально разрешимым случаям, представленным в таблице 1, для любого произвольного примера  $A$ . Использование данных алгоритмов совместно с методом изменения параметров, предложенным в работе [6], позволяет найти приближённое решение для любого примера задачи  $1|r_j|L_{\max}$ .

В данной работе показывается, что каждому примеру  $A$  может быть поставлена в соответствие точка  $B$  на  $3n$ -мерной евклидовой единичной сфере, такая, что расписание, оптимальное для  $B$ , будет оптимальным и для  $A$  тоже. Для примеров, принадлежащих единичной сфере доказывается, что погрешность  $E$  приближённого решения, найденного с помощью предложенного алгоритма, удовлетворяет неравенству  $E < 1$  для действительных параметров требований и  $E < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , если  $r_1, \dots, r_n, p_1, \dots, p_n, d_1, \dots, d_n$  не отрицательны.

В работе представлены численные эксперименты для оценки эффективности предложенного подхода, а также для стохастической оценки погрешности  $E$ .

#### Список литературы

1. Jackson. J.R. Scheduling a production line to minimize maximum tardiness // Manag. Sci. Res. Project. Res. Report, 1955. no. 43.
2. Lawler E.L. Optimal sequencing of a single machine subject to precedence constraints // Manag. Sci. 1973. V. 19. N. 5, pp. 544-546.
3. Simons, B.B. A fast algorithm for single processor scheduling // In 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Ann Arbor, Mich., 1978), pp. 246-252.
4. Hoogeveen J.A. Minimizing maximum promptness and maximum lateness on a single machine // Math. Oper. Res. 1996. V.21, pp. 100-114.
5. Лазарев А.А., Архипов Д.И. Минимизация максимального временного смещения для одного прибора // Автоматика и телемеханика. 2016. №4.
6. Лазарев А.А. Теория расписаний. Оценка абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний // М.: МФТИ, 2008.

## Потоковые методы построения оценок для аксиальной трехиндексной задачи о назначениях

Л.Г. Афраймович, А.С. Катеров

*ННГУ имени Н.И. Лобачевского, Н.Новгород, Россия*

Рассматривается аксиальная трёхиндексная задача о назначениях, формализуемая следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} p_{ijk} \rightarrow \min. \quad (5)$$

Данная задача относится к классу целочисленных многоиндексных транспортных задач и является NP-трудной [1]. Один из подходов к решению таких задач основан на исследовании возможности их сведения к потоковым алгоритмам. Этот подход рассматривался в [2, 3], что позволило выделить подклассы целочисленных многоиндексных транспортных задач, разрешимых за полиномиальное время. В данной работе предлагаются алгоритмы построения верхних и нижних оценок трёхиндексной аксиальной задачи о назначениях, основанные на потоковых методах решения многоиндексных задач.

Рассмотрим три подзадачи:

(1), (2), (4), (5);

(1), (3), (4), (5);

(2), (3), (4), (5).

Каждая из данных подзадач является 2-вложенной и следовательно разрешима за полиномиальное время (см. [2]). Решение данных подзадач дает нижнюю оценку для исходной задачи о назначениях.

Опишем алгоритм построения верхней оценки. Возьмем, например, подзадачу (1), (2), (4), (5). Пусть  $x_{ijk}^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, n}$  является её решением. Введем следующее множество пар индексов  $E = \{(i, j) : x_{ijk}^* = 1, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, \exists k \in \{1, \dots, n\}\}$ . Тогда решение задачи:

$$\sum_{(i, j) \in E} x_{ijk} = 1, \quad k \in K,$$

$$\sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad (i, j) \in E,$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ijk} p_{ijk} \rightarrow \min.$$

даст верхнюю оценку исходной задачи о назначениях. Аналогичным образом можно получить верхние оценки, используя решения подзадач (1), (3), (4), (5) и (2), (3), (4), (5).

Данные оценки можно использовать, например, для точного решения задачи о назначениях методом ветвей и границ. Проведены вычислительные эксперименты, которые показали перспективность предлагаемых оценок.

## Список литературы

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир. 1982.
2. *Афраймович Л.Г.* Многоиндексные транспортные задачи с 2-вложенной структурой // Автоматика и телемеханика. 2013. № 1. С. 116–134.
3. *Афраймович Л.Г.* Многоиндексные транспортные задачи с декомпозиционной структурой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 1. С. 130-147.

## Алгоритмы построения расписаний в информационно-управляющих системах реального времени с архитектурой ИМА\*

В.В. Балашов, В.А. Балаханов, В.А. Костенко  
*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Информационно-управляющие системы реального времени (ИУС РВ), построенные в соответствии с архитектурой интегрированной модульной авионики (ИМА), состоят из типовых вычислительных модулей, соединенных коммуникационной средой. Ресурсы каждого процессорного ядра используются несколькими приложениями в режиме разделения времени. В терминах операционной системы, каждому приложению соответствует раздел, в который объединены вычислительные задачи, относящиеся к этому приложению. Процессорное время выделяется разделу в виде набора временных окон. Расписание окон для каждого ядра является статическим. Планирование выполнения входящих в раздел вычислительных задач в рамках окна выполняется динамическим планировщиком. Обмен информацией между разделами осуществляется в форме сообщений, передаваемых через оперативную память модуля (для разделов, выполняемых на одном модуле) или через коммуникационную среду (для разделов, выполняемых на разных модулях).

Вычислительная нагрузка на современную систему ИМА представляет собой несколько десятков разделов, в состав которых входят, суммарно, сотни вычислительных задач с различными периодами выполнения. Между задачами имеют место зависимости по данным, в т.ч. синхронные, при которых задача-получатель не может начать выполнение до поступления входных данных от задачи-отправителя, имеющей тот же период.

При проектировании систем ИМА возникают следующие задачи планирования рабочей нагрузки:

- 1) распределение вычислительной нагрузки (разделов прикладных задач) по модулям и процессорным ядрам с минимизацией загрузки коммуникационной среды;
- 2) построение расписаний окон для разделов с гарантией выполнения всех вычислительных задач в рамках директивных сроков;
- 3) инкрементальная корректировка результатов решения задач 1) и 2) при изменениях рабочей нагрузки, в т.ч. в процессе модернизации ИУС РВ.

В ряде открытых инструментальных средств (например, [2]) поддерживается проверка заданных расписаний окон для систем ИМА на предмет соблюдения директивных сроков выполнения задач, при этом собственно задача построения расписания окон не решается.

Среди особенностей задач 1 и 2, затрудняющих применение известных алгоритмов для их решения, отметим следующие:

- 1) «прямолинейная» минимизация нагрузки на коммуникационную среду может привести к помещению на разные модули разделов, между задачами которых имеются синхронные зависимости; в результате задачи, находящиеся в конце цепочки синхронно зависимых задач, могут нарушить директивные сроки;
- 2) проверка соблюдения директивных сроков выполнения задач в предположении, что каждая задача выполняется в течение максимально возможного времени, в общем случае не гарантирует, что при меньших временах выполнения задач директивные

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-01237.

сроки также будут соблюдаться (проблема проявляется при наличии синхронных зависимостей между задачами, параллельно выполняющимися на разных процессорных ядрах).

Работы, в которых решается задача 3 для систем, сочетающих статическое (для окон) и динамическое (для задач) планирование вычислений, авторам не известны.

В докладе представлены алгоритмы планирования вычислительной нагрузки для систем ИМА, решающие задачи 1 – 3. Для решения задачи 1 предложен алгоритм на основе метода ветвей и границ со специализированной эвристикой обхода дерева поиска, а также жадный алгоритм с элементами ограниченного перебора. Для решения задачи 2 предложен жадный алгоритм. Алгоритмы для решения задачи 3 представляют собой модификации алгоритмов для задач 1 и 2, учитывающие необходимость минимизации объема корректировок расписания и привязки разделов к ядрам.

На основе разработанных алгоритмов создана система автоматического проектирования (САПР) расписаний в системах ИМА. САПР разработана для заказчика из авиационной отрасли и автоматизирует решение задач 1 – 3 для класса перспективных бортовых систем, построенных по архитектуре ИМА. САПР прошла апробацию на реальной вычислительной нагрузке и поддерживает ряд ограничений, определяемых спецификой целевой системы. САПР и алгоритмы в ее основе являются развитием решений, предложенных авторами в работе [3], с учетом значительного объема апробации на данных по целевой бортовой системе.

#### Список литературы

1. ARINC 653 – An Avionics Standard for Safe, Partitioned Systems. // Wind River Systems // IEEE Seminar. August 2008. [[http://www.computersociety.it/wp-content/uploads/2008/08/ieee-cc-arinc653\\_final.pdf](http://www.computersociety.it/wp-content/uploads/2008/08/ieee-cc-arinc653_final.pdf)]
2. H. Liu, Han, H. Zhang, Y. Jiang, X. Song, M. Gu, and J. Sun. Application-Specific Architecture Selection for Embedded Systems via Schedulability Analysis. // Theoretical Aspects of Software Engineering Conference (TASE), 2014, P. 131-134. IEEE, 2014.
3. Balashov V.V., Balakhanov V.A., Kostenko V.A. Scheduling of computational tasks in switched network-based IMA systems // Proc. International Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization. — National Technical University of Athens (NTUA) Athens, Greece, 2014. — P. 1001–1014.

### О количестве переключений релейного оптимального управления для осциллирующих управляемых объектов

Е.А.Беляевских, РУДН, Москва, Россия М.С.Никольский, МИАН РАН, Москва, Россия

В работе рассматривается нелинейный управляемый объект второго порядка, движение которого в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$  с фазовыми координатами  $x, y$  описывается системой дифференциальных уравнений (см. [1]-[4])

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x, y) + u, \end{cases} \quad (1)$$

где  $f(x, y)$  - непрерывно дифференцируемая функция при  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ , управление  $u$  принимает значения из отрезка  $U = [-1; 1]$ . Движение объекта (1) начинается из начального состояния  $z(0) = z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  и происходит под воздействием измеримого по Лебегу управления  $u = u(t) \in U$  на фиксированном отрезке времени  $[0; T]$  ( $T > 0$ ).

Ставится задача минимизации терминального функционала

$$\varphi(z(T)) = \langle p, z(T) \rangle \quad (2)$$

со свободным правым концом, где  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $p$  – некоторый заданный ненулевой вектор из  $\mathbb{R}^2$ .

Предполагаем, что для управляемого объекта (1), (2) при  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$  выполняется условие роста

$$yf(x, y) \leq C_1(1 + |z|), \quad (3)$$

где  $C_1$  – неотрицательная константа,  $|z|$  – длина вектора  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  из  $\mathbb{R}^2$ . Тогда из соображений статьи А.Ф.Филиппова [5] и теоремы 4 [3, стр. 284] следует существование оптимального управления  $\hat{u}(t) \in U, t \in [0, T]$ , в поставленной задаче (1), (2). Пусть  $\hat{z}(t) = z(t, \hat{u}(\cdot), z_0)$  – соответствующая оптимальная траектория. Тогда, согласно принципу максимума Понтрягина (см., например, [4]), для оптимальной пары  $\hat{u}(t) \in U, \hat{z}(t), t \in [0, T]$ , существует ненулевое решение  $\hat{\psi}(t)$  сопряженной системы

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{y}(t))}{\partial x} \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - \frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{y}(t))}{\partial y} \psi_2, \end{cases}$$

для которого выполняется условие трансверсальности  $\hat{\psi}(T) = -p$ , причем почти всюду на  $[0, T]$  имеет место соотношение максимума

$$\max_{|u| \leq 1} (u \hat{\psi}_2(t)) = \hat{u}(t) \hat{\psi}_2(t), \quad (4)$$

где  $\hat{\psi}_2(t)$  – вторая компонента вектора  $\hat{\psi}(t)$ .

В работе обосновывается, что нули функции  $\hat{\psi}_2(t)$  на  $[0, T]$  являются изолированными и их число может быть только конечным.

Изменяя оптимальное управление  $\hat{u}(t)$  на множестве меры ноль в  $[0, T]$ , с помощью соотношения максимума (4) можем перейти к эквивалентному релейному управлению  $\tilde{u}(t), t \in [0, T]$ , точки разрыва которого принадлежат множеству корней функции  $\hat{\psi}_2(t)$  на  $[0, T]$ .

Для получения конструктивной оценки сверху числа нулей функции  $\hat{\psi}_2(t), t \in [0, T]$ , мы предположим выполненным следующее условие осцилляции:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 < 0$$

при всех  $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  из шара  $|z| \leq e^{(1+C_1)T} \sqrt{1 + |z_0|^2}$ .

Отметим, что ранее подобного рода условие использовал В.Г.Болтянский (см. [2], стр. 281) для построения синтеза оптимального быстрогодействия. При этом в [2] (см. лемму 3.26) проведены некоторые вычисления, естественным образом приводящие к понятию вращения векторного поля А.Пуанкаре (см., например, [6]). Эти вычисления были использованы в нашей работе.

В результате была получена конструктивная оценка сверху для количества  $n$  нулей функции  $\hat{\psi}_2(t)$  на  $[0, T]$ , которая иногда может быть уточнена:

$$n \leq 3 \left\lceil \frac{1}{2\pi} \int_0^T \lambda(t) dt \right\rceil + 2,$$

где  $[\alpha] \in \mathbb{Z}$  – целая часть  $\alpha \geq 0, 0 \leq \alpha - [\alpha] < 1$ ,

$$\lambda(t) = \frac{1 - \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) + \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) + 1 \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \right)^2}}{2} > 0,$$

где  $\hat{x} = \hat{x}(t), \hat{y} = \hat{y}(t)$ .

### Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1968.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.

5. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. // Вестник Москов. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физики, химии. 1959. №2. С. 25-38.
6. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. М.: ГИФМЛ, 1963.

## АЛГОРИТМЫ ФОРМИРОВАНИЯ РАСПИСАНИЯ ПОДГОТОВКИ КОСМОНАВТОВ

С.В. Бронников<sup>5</sup>, А.Р. Герасимов<sup>1,3</sup>, А.А. Лазарев<sup>1,2,3,4</sup>, Е.Г. Мусатова<sup>1</sup>,  
А.С. Петров<sup>1,4</sup>, К.В. Пономарев<sup>6</sup>, М.М. Харламов<sup>6</sup>, Н.Ф. Хуснуллин<sup>1</sup>,  
Д.А. Ядренцев<sup>6</sup>,

<sup>1</sup>ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;

<sup>2</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия;

<sup>3</sup>МФТИ (ГУ), Москва, Россия;

<sup>4</sup>МЛАВР, ВШЭ, Москва, Россия;

<sup>5</sup>РКК им. С.П. Королева «Энергия», Москва, Россия;

<sup>6</sup>ЦПК им. Ю.А. Гагарина, Звездный городок, Россия.

В статье рассматривается задача календарного планирования подготовки экипажа космонавтов для работы на Международной космической станции (МКС). Ставится задача получения допустимого расписания, удовлетворяющего ограничениям, принятым в Центре подготовки космонавтов: доступность тренажеров, преподавателей, последовательность изучения дисциплин и т.д. Горизонт планирования в задаче составляет 2,5 – 3 года.

Введем следующие обозначения:  $I$  – множество космонавтов экипажа,  $J$  – множество этапов подготовки (занятий) экипажа,  $J_i^F$  – множество занятий физической подготовки космонавта  $i$ ,  $J_i^A$  – множество административных обязанностей космонавта  $i$ ,  $J_i^L$  – множество занятий языковой подготовки космонавта  $i$ ,  $J_i$  – множество занятий космонавта  $i$ ,  $p_j$  – длительность занятия  $j \in J$ ,  $R$  – множество ресурсов,  $rc_{jr}$  – количество ресурса  $r \in R$ , требуемое для операции  $j \in J$ ,  $ra_{wdh}$  – количество ресурса  $r \in R$ , доступное в неделю  $w$ , в день  $d$ , в интервал  $h$ ,  $G = (J, L)$  – граф отношений предшествования между этапами подготовки (если  $(j_1, j_2) \in G$ , то этап  $j_1$  выполняется раньше, чем этап  $j_2$ ).  $W = \{1, \dots, \omega\}$ , – множество недель горизонта планирования, где  $\omega$  – количество рассматриваемых недель.  $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  – множество дней в неделю.  $H = \{1, \dots, 18\}$  – множество временных интервалов в день,  $Y$  – множество всех троек  $(w, d, h)$ ,  $Y = \{(w, d, h) | w \in W, d \in D, h \in H\}$ .

Согласно принятой на практике терминологии [1], занятия объединены в бортовые комплексы (БК), другими словами, это логическое разделение проводимых занятий по темам (исключая занятия иностранным языком и физической подготовкой). Пусть  $J_i^B$  – множество групп операций (занятий), составляющие БК  $J_i^{B1}, J_i^{B2}, \dots, J_i^{Bm_i}$ , где  $m_i$  – количество БК, которые должен изучить космонавт  $i$ .

Введем переменную  $x_{jwdh}$ , которая равна 1 тогда и только тогда, когда в неделю  $w$ , в день  $d$ , в интервал  $h$  начинается занятие  $j \in J$ . В противном случае переменная равна 0.

В каждый интервал времени должно быть достаточно ресурсов для проведения занятий:

$$\sum_{j \in J} rc_{jr} \sum_{h' \in \{h-p_j+1, \dots, h\}} x_{jwdh'} \leq ra_{rwdh}, \quad (1)$$

$$\forall r \in R, \forall (w, d, h) \in Y.$$

Каждый космонавт должен пройти все этапы в необходимом объеме:

$$\sum_{(w, d, h) \in Y} x_{jwdh} = 1, \forall j \in J. \quad (2)$$

Все занятия должны быть закончены до конца рабочего дня:

$$\sum_{(w) \in W} \sum_{(d) \in D} \sum_h^{18-h+p_j-1} x_{jwdh} = 1, \forall j \in J, h \in H. \quad (3)$$

Ограничение предшествования записывается следующим образом:

$$\sum_{(w,d,h) \in Y} t(w,d,h)x_{j_2wdh} - \sum_{(w,d,h) \in Y} t(w,d,h)x_{j_1wdh} \leq p_j, \forall (j_1, j_2) \in G, \quad (4)$$

$$t(w,d,h) = (w-1) \cdot |D| \cdot |H| + (d-1) \cdot |H| + h,$$

где  $|D|$  – количество дней в неделю,  $|H|$  – количество временных интервалов в день.

У каждого космонавта должно быть не более 2 занятий физической подготовкой в неделю и не больше 1 занятия в день:

$$\sum_{j \in J_i^F} \sum_{d \in D} \sum_{h \in H} x_{jwdh} \leq 2, \forall i \in I, \forall w \in W, \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J_i^F} \sum_{h \in H} x_{jwdh} \leq 1, \forall i \in I, \forall w \in W, \forall d \in D. \quad (6)$$

Аналогичным образом записываются ограничения для языковой подготовки и административных обязанностей. Кроме этого, существуют ограничения на приём пищи и одновременное проведение занятий для нескольких космонавтов. Таким образом, ставится задача получения допустимого расписания, удовлетворяющего описанным выше ограничениям (1) – (6).

Предложены два подхода к построению расписания, основанные на целочисленном линейном программировании и на парадигме «программирование в ограничениях». Проведен сравнительный вычислительный эксперимент на реальных данных. Данная работа проводится в рамках разработки автоматизированного рабочего места, призванного сократить сроки осуществления планирования и снизить количество рутинных операций при построении расписания подготовки экипажей к полету и работе на МКС.

#### Список литературы

1. Курицын А.А., Харламов М.М., Автоматизация управления технологическим процессом комплексной подготовки экипажей орбитальных пилотируемых комплексов // Пилотируемые полёты в космос. No 1(1), 2011. С. 87–94.

## Оптимизация маршрута доставки грузов водным транспортом\*

Е.М.Бронштейн, И.Е.Копылов  
УГАТУ, Уфа, Россия

Работа является развитием рассмотренной в [1] задачи транспортной логистики с простым расположением пунктов производства и потребления. Предполагается, что необходимо доставить однородный груз в ситуации когда пункты производства находятся на одном берегу реки, а пункты потребления – на другом. В частности, такая ситуация возникает при необходимости доставки грузов пострадавшим от наводнения, когда пункты с грузом находятся на высоком незатопленном берегу реки, а пункты потребления – населенные пункты, пострадавшие от наводнения – находятся на другом берегу.

Сформулирована задача, которая является комбинацией двух известных задач – коммивояжера со специальным расположением пунктов и задачи класса VRP (Vehicle Routing Problem) оптимизации маршрута доставки однородного груза от множества производителей к множеству потребителей при ограничении на вместимость транспортного средства.

На основе вычислительного эксперимента проведен сравнительный анализ эффективности алгоритма ветвей и границ, жадного алгоритма и двух эвристических

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00005)

алгоритмов, учитывающих специфику задачи. Эксперимент проводился на компьютере с процессором Intel Core i7-3612QM CPU 2.10 GHz, с оперативной памятью 8 GB.

### Список литературы

1. Бронштейн Е.М., Копылов И.Е. Оптимизационная задача транспортной логистики с простыми маршрутами передвижения // Информационные технологии. 2015. № 9. С. 662-665.

## О задачах вычисления субоптимальных путей на графах \*

А.М. Валуев<sup>1,2</sup>, Е.С. Никифорова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «МИСиС», Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия

Наиболее известной задачей о субоптимальной маршрутизации является задача нахождения путей, доставляющих  $K$  лучших значений целевому показателю. Данная задача всегда имеет решение на связном графе, если допускать пути, включающие циклы, практическое значение которых, однако, сомнительно. Алгоритм поиска набора таких путей между двумя заданными вершинами графа предложен в работе [1]. Более известны методы поиска  $K$  лучших ациклических путей двумя вершинами, основанные на усовершенствовании малоэффективного алгоритма Йена [2], например [3]. Большое практическое значение для выбора пути (например, на дорожной сети) имеет определение набора ациклических путей  $S_{ij}(\Delta)$  между вершинами  $i$  и  $j$ , отличающихся от оптимального по значению длины (или иного аддитивного целевого показателя) не более чем на заданную величину  $\Delta$ . В работе автора [4] предложена алгоритм  $ДС$ , позволяющий находить одновременно  $S_{ij}(\Delta)$  между 1-й вершиной и всеми остальными, подобно тому, как алгоритм Дейкстры находит оптимальные пути во все вершины графа из заданной вершины. Доказано, что при его применении элементы каждого множества путей  $S_{ij}(\Delta)$  определяются в порядке их длин. Вариант данного алгоритма применим и к задаче построения множеств  $S_{ijk}(K)$  не более чем  $K$  лучших ациклических путей (решением которых является множество всех таких путей, если их количество не превышает  $K$ ).

Алгоритм  $ДС$  есть обобщение алгоритма Дейкстры, в котором на каждом цикле выбирается и продолжается самый короткий путь  $P$  от начальной вершины из всех ранее определенных и не испытанных. В этом, т.е. в операции минимизации, и состоит его основная вычислительная трудоемкость. Кроме того, пути, получаемые путем добавления к выбранному пути дуг, инцидентных его последней вершине, проверяются на отсутствие циклов. Для этого достаточно проверять, не входила ли в  $P$  конечная вершина присоединяемой дуги, для чего достаточно сравнить ее с вершинами конечного участка  $P$  длиной не более  $\Delta$ .

Наряду с алгоритмом [4] для решения поставленной задачи предлагается алгоритм  $ЛС$  — обобщение алгоритма Левита. В алгоритме  $ЛС$ , начиная с первого пути нулевой длины, генерируется последовательность ациклических путей  $\{P(k)\}$  до различных вершин. Обозначим  $W(k)$  длину  $P(k)$ ,  $VER(P(k))$  — множество его вершин,  $END(P(k))$  — последнюю вершину,  $S_{pj} = \{P(k) \mid END(P(k))=j\}$ ,  $W_j = \min\{W(k) \mid P(k) \in S_{pj}\}$ ; тогда  $S_{ij}(\Delta) = \{P(k) \in S_{pj} \mid W(k) \leq W_j + \Delta\}$ . Принадлежность  $P(k) \in S_{pj}$  к  $S_{ij}(\Delta)$  устанавливается лишь в момент завершения работы  $ЛС$ , таким образом, порождаются «лишние» пути, зато не требуется минимизации  $W(k)$  по набору не испытанных путей.

Формальное описание алгоритм  $ЛС$  дается для орграфа с  $N$  вершинами, алгоритм легко обобщается для мультиорграфов. Множество концов дуг, начинающихся в вершине  $i$ , обозначается  $I_{OUT_i}$ , длины дуг с началом  $i$  и концом  $j$  —  $w(i,j)$  результат добавления к пути  $P$  дуги с конечной вершиной  $j \in I_{OUT_{END(P)}}$  —  $P||j$ . В алгоритме используется число  $M$ , которое заведомо больше длины любого ациклического пути на графе.

Рассмотрим модифицированный алгоритм Левита.

Шаг 1. Положить  $P(1)=(1)$ ,  $W(1)=0$ ,  $W_{\min}=0$ ,  $S_{11}(\Delta)=\{P(1)\}$ ,  $W_{\min i}=M$ ,  $i=2, \dots, N$ ,  $I_Q=1$ ,  $N_Q=1$ .

Шаг 2. В цикле по  $I_Q$ , пока  $I_Q \leq N_Q$ , выполнять следующее.

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №952 базовой части госзадания №2014/113 НИТУ «МИСиС»)

2.1. Положить  $i = \text{END}(P(I_Q))$ . Если  $W(I_Q) > W_{\min i} + \Delta$ , (1)

перейти к следующему циклу.

2.2. Для каждого  $j \in I_{\text{OUT}i}$ , при котором  $j \notin \text{VER}(P(I_Q))$ , (2)

вычислить  $W_E = W(Q) + w(i, j)$  и, если  $W_E \leq W_{\min j} + \Delta$ , положить  $N_Q = N_Q + 1$ ,  $P(N_Q) = P(I_Q) \cup j$ ,  $W(P(N_Q)) = W_E$ ,  $W_{\min j} = \min\{W_{\min j}, W_E\}$ .

Шаг 3. В цикле по  $i = 2, \dots, N$  положить  $S_{1i}(\Delta) = \emptyset$ .

Шаг 4. В цикле по  $I_Q = 2, \dots, N_Q$ , выполнять следующее:

4.1. Положить  $i = \text{END}(P(I_Q))$ .

4.2. Если  $W(I_Q) \leq W_{\min i} + \Delta$ , положить  $S_{1i}(\Delta) = S_{1i}(\Delta) \cup \{P(I_Q)\}$ .

Таким образом, на каждом цикле самым трудоемким является проверка условия (1), сводящаяся, если для всех дуг  $w(i, j) \geq w_{\min}$  к не более чем  $\Delta/w_{\min}$  сравнениям целых чисел — номеров вершин. В связи со сказанным можно считать, что количество операций линейно зависит от финального значения количества построенных путей  $N_Q$ , которое, в свою очередь, в типичном случае имеет тот же порядок, что совокупное количество искомого субоптимальных путей. С другой стороны, искомые множества могут иметь непомерно большую размерность, что очевидно хотя бы для случая графа квадратной решетки. В связи с этим целесообразно рассмотреть решение комбинации базовых задач — поиск множеств  $S_{ijk}(K, \Delta)$  из не более чем  $K$  лучших ациклических путей, отличающихся от оптимального не более чем на  $\Delta$ . Предлагаемый алгоритм модифицируется на данную задачу путем постоянного обновления подмножеств  $S_{pj}(K, \Delta, N_Q)$  из не более чем  $K$  лучших путей в каждую отдельную вершину графа. Условие принадлежности к  $S_{pj}(K, \Delta, N_Q)$  дополняет (1) на каждом цикле, а при организации  $S_{pj}(K, \Delta, N_Q)$  в виде двоичных сбалансированных деревьев трудоемкость дополнительных операций на один цикл составит порядка  $\log_2 K$ .

#### Список литературы

1. Shier D.A. Iterative Methods for Determining the K Shortest Paths in a Network // Networks. 1976. V. 6. P. 205–230.
2. Yen J.Y. Finding the k shortest loopless paths in a network // Management Science. 1971. V. 17. P. 712–716.
3. Gotthilf Z., Lewenstein M. Improved algorithms for the k shortest paths and the replacement paths problems // Information Processing Letters. 2009. V. 109. P. 352–355.
4. Valuev A.M. On the Problem of Efficient Search of the Entire Set of Suboptimal Routes in a Transportation Network // Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. La Manga, Murcia, Spain. 2012. V. 4. P. 1560–1563.

## Адаптивный метод сбалансированного выбора модулей встроенной вычислительной системы с учётом требований надёжности\*

Д.Ю. Волканов

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В данной работе задача сбалансированного выбора модулей с учётом требований к надёжности рассматривается для встроенной вычислительной системы (ВВС) в следующей постановке. Пусть нам задана ВВС в виде набора модулей и структуры связей между модулями ВВС. К каждому модулю применяется один механизм обеспечения отказоустойчивости (МОО). Каждый модуль содержит не менее одного аппаратного и программного компонентов. Каждый компонент может иметь несколько версий. Количество аппаратных и программных компонентов в модуле зависит от МОО, используемого для модуля. Тем самым возникает несколько вариантов ВВС. Требуется выбрать сбалансированный набор вариантов модулей ВВС эффективный по определенным критериям на множестве вариантов ВВС.

В данной статье рассматривается задача, в которой максимизируется надёжность вычислительной системы при ограничении на стоимость системы. Причём часть модулей системы может находиться в резерве. Задача в такой постановке рассматривалась разными исследователями начиная с 60-х годов прошлого века. В [1] было показано, что эта задача

\* Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-01237.

является NP-трудной. В статьях [2, 3] даны современные обзор методов решения данной задачи.

В данной работе ставится задача, которая является расширением рассматриваемой в литературе задачи. Расширение заключается в совместном рассмотрении аппаратной и программной частей системной надёжности.

Для решения поставленной задачи, предложен адаптивный гибридный эволюционный алгоритм (АГЭА). Этот алгоритм включает в себя следующие шаги:

1. *Кодирование решения.* Каждое решение задачи кодируется в виде строки, состоящей из блоков, соответствующих модулям ВВС.

2. *Подготовка популяции решений.* Генерация случайным образом популяции решений для первой итерации алгоритма или популяция с предыдущей итерации запуска алгоритма.

3. *Выполнение операции селекции.* В данном алгоритме используется пропорциональная схема селекции.

4. *Отбор особей.* Отбор производится для скрещивания в отдельную промежуточную популяцию. Популяция сортируется, отбираются лучшие особи, которые затем участвуют в операции скрещивания.

5. *Выполнение операции скрещивания.* В качестве операции скрещивания используется одноточечное скрещивание модулей ВВС.

6. *Формирование новой популяции.* В новую популяцию берётся доля лучших особей от исходной популяции, остальная часть популяции формируется из лучших особей промежуточной популяции, полученной после операции скрещивания.

7. *Выполнение операции мутации.* Некоторый процент лучших особей популяции не мутирует. Все остальные особи мутируют с некоторой степенью мутации и с некоторой вероятностью. Оператор мутации является модификацией одноточечной мутации.

8. *Оценка популяции.* На этом этапе происходит проверка ограничений стоимости, а также вычисление надёжности. Если решение не удовлетворяет ограничениям, то оно штрафует. Также на этом шаге фиксируется лучшее на текущий момент решения, вычисление среднего значения целевой функции.

9. *Проверка критерия останова.* Если он выполнен, то переход к п.11, если нет, то переход к п.10.

10. *Блок нечёткой логики.* Блок нечёткой логики осуществляет автоматическую подстройку параметров алгоритма и переход к п.3.

11. *Завершение алгоритма.* В качестве результата выбирается наилучшая из найденных конфигураций.

Была обоснована корректность данного алгоритма и проведено его экспериментальное исследование. Важно отметить, что список модулей ВВС загружался из имитационной модели ВВС. Разработанное программное средство для решения поставленной задачи интегрировано со средствами среды моделирования ДИАНА[4].

В рамках проведённого экспериментального исследования было показано, что предложенный в работе метод работает не хуже предложенного в статье [5], а на малой области приемлемых решений лучше этого алгоритма.

#### Список литературы

1. Chern M. S. On the computational complexity of reliability redundancy allocation in a series system // Operations Research Letters, vol.11, pp. 309-315.
2. Kuo W., Wan R. Recent Advances in Optimal Reliability Allocation. // Handbook of Military Industrial Engineering", 2009. N. 10. p.1-24.
3. Soltani R. Reliability optimization of binary state non-repairable systems: A state of the art survey //International Journal of Industrial Engineering Computations. – 2014. – Т. 5. – №. 3. – С. 339.
4. Бахмуров А. Г., Волканов Д. Ю., Смелянский Р. Л., Чемерицкий Е. В. Интегрированная среда для анализа и разработки встроенных вычислительных систем реального времени. // Программирование N5, С. 35–52, 2013.

5. Wattanapongsakorn N., Coit D.W. Fault-tolerant embedded system design and optimization considering reliability estimation uncertainly // Reliability Engineering and System Safety, 92, 395-407, 2007.

## Метод параметризации целевой функции для нахождения проекции точки на множество решений прямой задачи линейного программирования\*

Б.В. Ганин

*МФТИ, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Пусть задана прямая задача линейного программирования в стандартной форме:

$$f_* = \min_{x \in X} c^T x, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0_n\}. \quad (P)$$

Двойственная к ней имеет вид:

$$f_* = \max_{u \in U} b^T u, \quad U = \{u \in R^m : A^T u \leq c\}. \quad (D)$$

Здесь  $A \in R^{m \times n}$ ,  $c \in R^n$  и  $b \in R^m$  заданы,  $x$  – вектор прямых переменных, а  $u$  – двойственных, через  $0_i$  обозначен  $i$ -мерный нулевой вектор.

Как известно из работ [1] и [3], проекцию  $\hat{x}_*$  произвольной точки  $\hat{x} \in R^n$  на множество решений задачи (P) можно найти с помощью однократной максимизации модифицированной штрафной функции

$$I_1 = \max_{p \in R^m} \{b^T p - \frac{1}{2} \|(\hat{x} + A^T p - \beta c)_+\|^2\}, \quad (1)$$

если для параметра штрафа  $\beta$  выполняется условие  $\beta \geq \beta_*$ , где  $\beta_*$  – некоторое пороговое значение.

В докладе показывается, что метод параметризации целевой функции также позволяет находить проекцию заданной точки на множество решений прямой задачи (P). Пусть  $\mu$  – оценка сверху оптимального значения целевой функции  $f_*$ . Тогда, если значение параметра  $\mu$  меньше некоторого порогового значения, то нормальное решение  $x_*$  прямой задачи можно получить с помощью однократной безусловной минимизации

$$I_2 = \min_{u \in R^m} \left\{ \frac{1}{2} (\mu - b^T u)_+^2 + \frac{1}{2} \|(A^T u - c)_+\|^2 \right\} \quad (2)$$

по формуле:

$$x_* = \frac{(A^T u(\mu) - c)_+}{\mu - b^T u(\mu)}, \quad (3)$$

где  $u(\mu)$  есть решение задачи (2), если выполнено условие:

$$f_* \leq \mu \leq b^T u(\mu) + \frac{1}{\beta_*}. \quad (4)$$

Данный метод, как и модифицированный метод штрафов, можно использовать для нахождения проекции  $\hat{x}_*$  произвольной точки  $\hat{x}$  на множество решений исходной задачи. В этом случае, задача (2) примет вид

$$I_2 = \min_{u \in R^m} \left\{ \frac{1}{2} (\mu - b^T u)_+^2 + \frac{1}{2} \left\| (A^T u - c + \frac{\hat{x}}{\beta})_+ \right\|^2 \right\}, \beta \geq \beta_*, \quad (5)$$

и проекция  $\hat{x}_*$  вычисляется по формуле:

$$\hat{x}_* = \frac{(A^T u(\mu) - c + \frac{\hat{x}}{\beta})_+}{\mu - b^T u(\mu)}. \quad (6)$$

### Список литературы

1. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н. *Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. №9. С. 1564-1573.

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 14-07-00805) и программы РАН I.5

2. Mangasarian O.L. *A new method for Linear Programming* // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004 **121**. pp. 1-18
3. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. *Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. №12. С. 1766-1786.
4. Жадан В.Г. *Методы оптимизации* // МФТИ 2015. Т. 2. С. 159-165.

## **О нетривиальности рандомизированных ускоренных покомпонентных методов\***

А.В. Гасников, П.Е. Двуреченский,  
И.Н. Усманова  
*ИППИ РАН, Москва, Россия*  
*ПреМоЛаб ФУПМ МФТИ, Долгопрудный, Россия*

В данной работе предлагаются способы получения ускоренных и неускоренных вариантов рандомизированных покомпонентных методов и неускоренных вариантов методов рандомизации суммы, исходя из оптимальных методов для общих задач (стохастической) выпуклой оптимизации. В работе подчеркивается нетривиальность оценок, полученных для соответствующих ускоренных вариантов этих методов, которые выводятся в статье с помощью недавно предложенной техники каплинга. В отличие от многих других ситуаций, в данном случае не удастся “вытащить”, не погружаясь в детали доказательства (должным образом корректируя его), оптимальные методы (оценки) для рандомизированных покомпонентных методов и методов с рандомизацией суммы исходя из оптимальных методов (оценок), применимых к общим задачам стохастической оптимизации.

Мы хотим подчеркнуть нетривиальность таких методов как, например, ускоренный (быстрый) покомпонентный метод Ю.Е. Нестерова [2], APPROX или ALPHA [3], [4], которые, в частности, являются покомпонентными вариантами быстрого градиентного метода (БГМ) [1] – эту ссылку можно также рекомендовать с точки зрения интересной подборки ссылок на работы, в которых объясняется, что такое БГМ. Нетривиальность в том, что они являются рандомизированными и при этом ускоренными. Число необходимых итераций (как функция от желаемой точности) для таких ускоренных покомпонентных методов увеличивается в число раз  $n$ , равное размерности пространства, по сравнению с классическим БГМ, что и не удивительно, поскольку вместо всех  $n \square 1$  компонент градиента на каждой итерации используется только одна. Также нетривиальность в том, что если полный расчет градиента, скажем, требовал полного умножения разреженной матрицы на вектор –  $sn$  операций, то пересчет (важно, что именно пересчет, а не расчет) компоненты градиента в определенных ситуациях требует всего  $s$  операций (см. стр. 16–17 [3] и пп. 4, 5). Таким образом, увеличение числа итераций в  $n$  раз компенсируется уменьшением стоимости одной итерации в  $n$  раз (в не разреженной случае оговорка об “определенных ситуациях” существенно ослабляется, см. пп. 4, 5). Но выгода от использования покомпонентных методов, как правило, есть из-за того, что в таких методах вместо константы Липшица по худшему направлению (максимального собственного значения матрицы Гессе функционала) в оценки входит “средняя” константа Липшица (оценивающаяся сверху средним арифметическим суммы диагональных элементов (следа) матрицы Гессе, т.е. средним арифметическим всех собственных чисел матрицы Гессе). Разница в этих константах для матриц Гессе, состоящих из элементов одного порядка, может равняться по порядку  $n$ . На данный момент известно довольно много примеров применения покомпонентных методов для решения задач огромных размеров, в частности, приложений для задач моделирования сетей больших размеров и анализе данных [5].

Мы приводим новое доказательство оценки скорости сходимости ускоренного покомпонентного метода, базирующееся на конструкции линейного каплинга [6]: БГМ = “выпуклая комбинация” прямого градиентного метода (ПГМ) и метода зеркального спуска (МЗС). Основная идея получения ускоренного покомпонентного метода: заменить в таком

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 15-31-20571-мол\_a\_вед, гранта Российского научного фонда (проект №14-50-00150), гранта РФФИ 14-01-00722-а

представлении БГМ в методах ПГМ и МЗС градиенты на соответствующие несмещенные оценки градиентов, полученные на основе покомпонентной рандомизации. Несмотря на то, что основной результат работы – не есть полностью новый результат, подобные оценки (в различных частных случаях) ранее уже встречались в литературе, тем не менее, способ их получения (и его универсальность) представляется новым и весьма перспективным с точки зрения возможных последующих обобщений и приложений. Описанный способ также позволяет устанавливать различные новые факты об ускоренных покомпонентных методах.

С более подробной информацией о работе можно познакомиться по статье [7].

### Список литературы

1. Bubeck S. Convex optimization: algorithms and complexity // In Foundations and Trends in Machine Learning. 2015. V. 8. no. 3-4. P. 231–357. arXiv:1405.4980
2. Nesterov Y.E. Efficiency of coordinate descent methods on large scale optimization problem // SIAM Journal on Optimization. 2012. V. 22. № 2. P. 341–362. [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2010/01/2527.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2010/01/2527.pdf)
3. Fercoq O., Richtarik P. Accelerated, Parallel and Proximal Coordinate Descent // e-print, 2013. arXiv:1312.5799
4. Qu Z., Richtarik P. Coordinate Descent with Arbitrary Sampling I: Algorithms and Complexity // e-print, 2014. arXiv:1412.8060
5. Anikin A., Dvurechensky P., Gasnikov A., Golov A., Gornov A., Maximov Yu., Mendel M., Spokoiny V. Modern efficient numerical approaches to regularized regression problems in application to traffic demands matrix calculation from link loads // Proceedings of International conference ITAS-2015. Russia, Sochi, September, 2015. arXiv:1508.00858
6. Allen-Zhu Z., Orecchia L. Linear coupling: An ultimate unification of gradient and mirror descent // e-print, 2015. arXiv:1407.1537
7. Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Усманова И.Н. О нетривиальности быстрых (ускоренных) рандомизированных методов // Труды МФТИ. 2016. Т. 8. № 1. arXiv:1508.02182

## Новый класс теорем об альтернативах\*

А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко  
ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Теоремы об альтернативах имеют не только теоретическое значение, но весьма полезны с вычислительной точки зрения [1]. Они дают возможность вычислять нормальные решения систем линейных равенств и неравенств, находить направление наискорейшего спуска в задачах нелинейного программирования, строить разделяющие гиперплоскости, производить коррекцию несобственных задач, конструировать новые алгоритмы решения задач линейного программирования и т.д.

В формулировках теорем об альтернативах всегда присутствуют две системы равенств и/или неравенств, которые обозначим соответственно через I и II. Теоремы об альтернативах утверждают, что всегда разрешима одна и только одна из систем, либо I, либо II, но не обе одновременно. Входными данными альтернативных систем I и II являются элементы матрицы  $A \in R^{m \times n}$  и компоненты вектора  $b \in R^m$ . Однако альтернативные системы можно строить по-иному, используя различные матрицы разной размерности [2].

Рассмотрим случай системы линейных уравнений с неотрицательными переменными

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \quad (I)$$

матрица  $A \in R^{m \times n}$ ,  $m < n$ , ранг  $A$  равен  $m$  и вектор  $b \neq 0_m$ . Для этого случая альтернативная система к (I) может иметь вид, отличный от следующей системы, фигурирующей в теореме Фаркаша

$$A^T u \leq 0_n, \quad b^T u = \rho > 0. \quad (II)$$

Здесь и ниже  $\rho$  – любое положительное число.

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-07-0805), Программы РАН I.5 П и МОН Республики Казахстан (номер гос. регистрации проекта 0115PK00554).

Для построения новых альтернативных систем, следуя [3], введем в рассмотрение матрицу  $K \in R^{d \times n}$ , где  $d = n - m$  – дефект матрицы  $A$ . В качестве матрицы  $K$  можно использовать любую матрицу,  $d$  строк которой образуют базис нуль-пространства матрицы  $A$ . Поэтому  $AK^T = 0_{md}$ , где через  $0_{md}$  обозначена  $(m \times d)$ -матрица с нулевыми элементами. В выборе матрицы  $K$  существует определенный произвол, она может быть построена различными способами. Если матрицу  $A$  представить в блочном виде  $A = [B \mid N]$ , где  $B$  невырождена, то матрицу  $K$  можно записать в следующем виде:  $K = [-N^T(B^{-1})^T \mid I_d]$ . Если с помощью преобразований Гаусса–Жордана матрицу  $A$  привести к виду  $A = [I_m \mid N]$ , тогда матрица  $K$  представима в виде  $K = [-N^T \mid I_d]$ .

Так как матрица  $A$  имеет ранг  $m$ , то система  $Ax = b$  всегда разрешима в отличие от системы (I), но среди ее решений может и не быть неотрицательных. Произвольное решение системы  $Ax = b$  обозначим через  $\bar{x}$ .

**Теорема.** Пусть матрица  $A \in R^{m \times n}$  имеет ранг  $m$ , а матрица  $K \in R^{d \times n}$  имеет ранг  $d = n - m$  и  $AK^T = 0_{md}$ , вектор  $b \neq 0_m$ . Тогда

1) всегда совместна либо система

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \quad (I)$$

либо система

$$Kv = 0_d, \quad -\bar{x}^T v = \rho > 0, \quad v \geq 0_n; \quad (I_v)$$

2) всегда совместна либо система

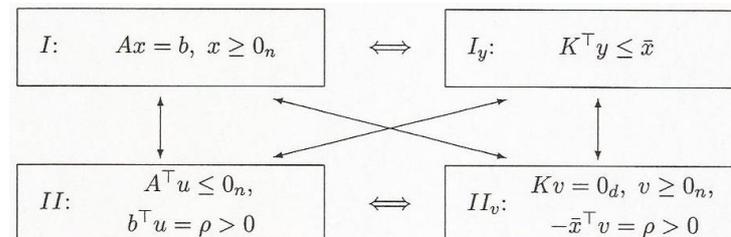
$$K^T y \leq \bar{x}, \quad (I_y)$$

либо система

$$A^T u \leq 0_n, \quad b^T u = \rho > 0 \quad (II)$$

Альтернативные системы (I) и (I<sub>v</sub>) являются аналогом соответствующих альтернативных систем в теореме Фаркаша, а (I<sub>y</sub>) и (II) – соответствующих альтернативных систем в теореме Гейла.

Связь между альтернативными системами, представлена на следующем рисунке.



Двойные стрелки обозначают, что системы эквивалентны в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости, а обычные стрелки обозначают альтернативность систем. Вертикальная стрелка слева соответствует теореме Фаркаша, а вертикальная справа – теореме Гейла.

### Список литературы

1. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003, Т. 43, № 3. С. 354–375.
2. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Один вариант теоремы об альтернативах Фаркаша // Оптимизация и приложения. М: ВЦ РАН, 2015. С. 67–73.
3. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. Два параметрических семейства задач линейного программирования и их приложения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 4. С. 31–44.

# Алгоритмы балансировки нагрузки в параллельной реализации метода ветвей и границ и методика их исследования\*

Я.В.Голубева

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

Метод ветвей и границ – один из основных методов решения задач глобальной оптимизации [1]. Он заключается в том, что множество допустимых решений разбивается на подмножества, и те подмножества (подзадачи), в которых оптимальных решений не существует, отбрасываются. Метод ветвей и границ имеет древовидную структуру, где вершины – это полученные в результате разбиений подзадачи. Такая структура метода создает благоприятные условия для его параллельной реализации: поиск оптимальных решений в отдельных ветвях этого дерева может производиться независимо на разных вычислительных узлах. В то же время при параллельной реализации возникает проблема балансировки нагрузки: невозможно статически равномерно распределить нагрузку между процессорами, так как дерево является неоднородным и его структура не известна заранее.

В работах [2,3] рассмотрен достаточно простой алгоритм балансировки нагрузки. Балансировка нагрузки в этом алгоритме централизована, так как среди всех рабочих процессов (РП) выделен управляющий процесс (УП). На начальном этапе УП выполняет заданное количество разветвлений, генерируя некоторое количество подзадач, заведомо большее, чем количество рабочих процессов. Далее сгенерированные подзадачи распределяются между рабочими процессами, которые решают их до конца. Если рабочий процесс решил задачу, а на управляющем процессе еще имеются другие подзадачи – то освободившийся рабочий процесс получает новую подзадачу для решения. Полученные в процессе решений рекорды – наилучшие найденные решения РП отправляет УП, который, сопоставляя полученные результаты, выбирает оптимальный.

Улучшенный вариант рассмотренного алгоритма – адаптивный алгоритм балансировки нагрузки в двух вариантах: с фиксированными и с изменяемыми параметрами. Основное отличие адаптивного алгоритма заключается в том, что рабочий процесс выполняет заданное количество ветвлений (определяемое параметром  $T$ ) и прерывается для того, чтобы отправить полученные рекорды и часть подзадач управляющему процессу, после чего продолжает выполнять ветвления, если у него осталась хотя бы одна подзадача. Таким образом, у управляющего процесса отпала необходимость делать большое количество ветвлений на этапе первоначальных итераций. Во избежание переполнения памяти УП число вершин на нем регулируется пороговыми значениями –  $M$  и  $m$  и управляющим параметром  $S$ , определяющим количество подзадач, отправляемых рабочими процессами управляющему процессу.

Для увеличения производительности адаптивный алгоритм был улучшен – параметры  $T$  и  $S$  стали изменяемыми. Параметр  $S$  стал зависеть от числа уже имеющихся вершин на УП и обеспечил постепенное заполнение его памяти. Параметр  $T$  также стал зависеть от числа вершин на УП. Если количество последних становится меньше числа рабочих процессов – то параметр  $T$  сокращается в 10 раз и обеспечивает более частый обмен вершинами между управляющим и рабочими процессами.

Экспериментальные исследования алгоритмов проводятся с помощью BNB-Simulator [4] и BNB-Visualizer [5]. Эти приложения позволяют проводить эксперименты на эмуляторе параллельной системы. Для исследования простого алгоритма балансировки, описанного выше, были произведены запуски BNB-Simulator с разным набором параметров: количество процессоров, сложность задач и количество первоначальных разветвлений. В результате для каждого набора были получены показатели эффективности. Опираясь на полученные результаты, для каждой пары «число процессоров – сложность задачи» было определено оптимальное количество первоначальных разветвлений, при котором достигается наибольшая эффективность.

Пример полученного результата при запуске простого алгоритма с количеством процессоров, равным 64:

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-07-00873 А и № 16-07-00458 А).

Maximal level	Number of processors	Number of steps	Initiative	Efficiency
30	64	100	50438	0,1
40	64	200	46688	0,4
50	64	800	15715	0,7
60	64	2000	05337	0,8
70	64	2000	96044	0,8

На дальнейших этапах работы планируется проведение анализа производительности алгоритма на разных задачах и вычисление средней эффективности алгоритма, исследование других алгоритмов балансировки нагрузки (в частности, перечисленных выше).

#### Список литературы

1. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2002.
2. М.А.Посыпкин. Архитектура и программная организация библиотеки для решения задач дискретной оптимизации методом ветвей и границ на многопроцессорных вычислительных комплексах. // Труды ИСА РАН. Т. 25, 2006. С. 18-25.
3. Посыпкин М.А., Сигал И.Х. Исследование алгоритмов параллельных вычислений в задачах дискретной оптимизации ранцевого типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 45, № 10, 2005. С. 1801-1809.
4. Andrey Fomin, Yuri Orlov, Mikhail Posypkin, Izrael Sigal, Using Simulation to Study Performance of Parallel Tree Search Schedulers // Proceedings of optimization and applications (Optima-2015) Petrovac, Montenegro, September 2015. P. 67.
5. Ю. В. Орлов, Среда комплексного анализа производительности алгоритмов балансировки в параллельном методе ветвей и границ// International Journal of Open Information Technologies ISSN: 2307-8162. vol. 3, no. 9, 2015. URL: <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/228> (дата обращения 20.05.2015).

## Решение минимаксной задачи теории расписаний методом ветвей и границ

Д.Р. Гончар

*ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

**1. Постановка задачи.** Рассматривается множество работ  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , подлежащее выполнению, и вычислительная система, состоящая из  $m$  процессоров для их обработки. Время выполнения работы  $i$  на процессоре  $j$  равно  $t_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ). При выполнении работ не допускаются переключения с одного процессора на другой и прерывания. В заданный момент времени каждый процессор может выполнять не более одной работы, а каждая работа может выполняться не более чем одним процессором.

Расписание выполнения работ  $N$  определим как разбиение множества  $N$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $N_1, N_2, \dots, N_m$  ( $N = \bigcup_{j=1}^m N_j$ ;  $N_{j_1} \cap N_{j_2} = \emptyset$  при  $j_1 \neq j_2$ ).

Работы из множества  $N_j$  приписываются процессору  $j$  и выполняются на нем в произвольном порядке. Величина  $Q_j = \sum_{i \in N_j} t_{ij}$  – загруженность процессора  $j$  ( $j = 1, 2, \dots,$

$m$ ), а  $\max_{j=1,2,\dots,m} Q_j$  – это длина расписания. Задача заключается в построении расписания минимальной длины, т.е. оптимального по быстродействию расписания.

Подобные задачи широко освещены в литературе. При их решении применяются, например, такие методы, как случайный и исчерпывающий поиск, методы математического

программирования, метод ветвей и границ [1, 2], муравьиные алгоритмы [3], поиск с запретами, вероятностные алгоритмы [4], генетические алгоритмы [5], метод имитации отжига, различные эвристические алгоритмы, алгоритмы агрегирования и др.

**2. Метод ветвей и границ.** Для решения поставленной задачи предлагается метод ветвей и границ, основанный на результатах работ [1, 2].

**2.1. Ветвление.** Множество всех расписаний (их число равно  $m^n$ ) будем описывать в виде дерева расписаний. Его нулевой уровень (корень) соответствует множеству всех расписаний. На первом уровне –  $m$  вершин, каждая из которых соответствует множеству всех расписаний, в которых первая работа назначена на определенный процессор. На втором уровне дерева находится  $m^2$  вершин, каждая из которых соответствует множеству всех расписаний, в которых первые две работы назначены на один или два определенных процессора. На  $n$ -м уровне дерева расписаний будет  $m^n$  листьев, каждый из которых соответствует некоторому расписанию выполнения множества работ  $N$ .

Пусть  $x_k$  – некоторый узел уровня  $k$  дерева расписаний,  $R(x_k)$  – множество всех расписаний, соответствующих этому узлу (т.е. множество расписаний, в которых работы 1, 2, ...,  $k$  назначены на определенные процессоры),  $x_{k+1}^j$  – узел уровня  $k+1$  ( $k < n$ ), связанный с узлом  $x_k$  ребром, соответствующим процессору  $j$ . Для применения стандартной схемы метода ветвей и границ (например, одностороннего или фронтального ветвления) необходимо получить нижние и верхние оценки минимальной длины расписания на множестве  $R(x_k)$ .

**2.2. Нижняя оценка.** Пусть  $T_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) – загруженность процессора  $j$  после назначения первых  $k$  работ (т.е.  $T_j$  – это суммарная длительность работ из числа 1, 2, ...,  $k$ , назначенных на процессор  $j$ ). Нижнюю оценку  $L(x_k)$  минимальной длины расписания на множестве  $R(x_k)$  вычислим следующим образом:  $L(x_k) = \max(L_1(x_k), L_2(x_k), L_3(x_k))$ , где  $L_1(x_k)$ ,  $L_2(x_k)$ ,  $L_3(x_k)$  – это нижние оценки, вычисленные тремя различными способами.

Величина  $L_1(x_k)$  вычисляется как следующий максимум:  $L_1(x_k) = \max_{j=1,2,\dots,m} T_j$ .

Величину  $L_2(x_k)$  вычислим как следующий максимум:  $L_2(x_k) = \max_{i=k+1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} (T_j + t_{ij})$ .

Если при этом использовать обычный двумерный массив  $A$  с элементами  $a_{ij} = T_j + t_{ij}$ ,  $i = k+1, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ , то сложность вычисления величины  $L_2(x_k)$  составит  $\theta(mn)$ .

Величина  $L_3(x_k)$  вычисляется по формуле

$$L_3(x_k) = \frac{1}{m} \left( \sum_{j=1}^m T_j + \sum_{i=k+1}^n \min_{j=1,\dots,m} t_{ij} \right).$$

Величину  $\min_{j=1,\dots,m} t_{ij}$  вычислим сразу для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  до начала вычисления нижних

оценок. Тогда сложность вычисления величины  $L_3(x_k)$  составляет  $O(n + m)$ . Перейдем в дереве расписаний от узла  $x_k$  к узлу  $x_{k+1}^{j_0}$ ,  $k < n$  (т.е. будем считать, что работа  $k+1$  назначена на процессор  $j_0$ ).

$$\text{Тогда } L_3(x_{k+1}^{j_0}) = \frac{1}{m} \left( \left( \sum_{j=1}^m T_j + t_{k+1,j_0} \right) + \sum_{i=k+1}^n \min_{j=1,\dots,m} t_{ij} \right).$$

Вычислим разность

$$L_3(x_{k+1}^{j_0}) - L_3(x_k) = \frac{1}{m} (t_{k+1,j_0} - \min_{j=1,\dots,m} t_{k+1,j}).$$

Таким образом,

$$L_3(x_{k+1}^{j_0}) = L_3(x_k) + \frac{1}{m} (t_{k+1,j_0} - \min_{j=1,\dots,m} t_{k+1,j}),$$

и с помощью данного рекуррентного соотношения, используя  $L_3(x_k)$ , величина  $L_3(x_{k+1}^{j_0})$  вычисляется за время  $O(1)$ .

**2.3. Верхняя оценка.** В качестве верхней оценки  $H(x_k)$  минимальной длины расписания на множестве  $R(x_k)$  предлагается взять длину расписания, в котором работы 1, 2, ...,  $k$  назначены на процессоры в соответствии с вершиной  $x_k$  дерева расписаний, а работы  $k+1, \dots, n$  назначаются по “жадному” алгоритму.

#### Список литературы

1. Алексеев О.Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. М.: Наука, 1987.
2. Фуругян М.Г. Некоторые алгоритмы решения минимаксной задачи составления многопроцессорного расписания. // Изв. РАН, ГиСУ. 2014, № 2. С. 50–56.

3. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы // ExponentaPro. Математика в приложениях. 2003. № 4(4). С. 70–75.

4. Raghavan R. Probabilistic Construction of Deterministic Algorithms: Approximating Packing Integer Programs // J. Computer and System Sciences. 1988. V. 37. P. 130–143.

5. Костенко В.А., Смельянский Р.Л., Трекин А.Г. Синтез структур вычислительных систем реального времени с использованием генетических алгоритмов // Программирование. 2000. № 5. С. 63–72.

## **Математическое моделирование взаимодействия основного и дополнительного обучения учащихся средней школы**

Д. Р. Гончар, С. Н. Мирошник,  
Ю. С. Юрезанская  
*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Успеваемость и здоровье учащихся в средней школе в значительной степени зависят от учета в технологии обучения состава и величины природных способностей учащихся [1, 2]. По далеким от науки основаниям с середины 1930-х годов в СССР (и по сию пору в России) такой учет при устройстве школы широко не применяется, что связано с довлеющими подходами и оценками акад. Т.Д. Лысенко и Л.С. Выготского, поддержанными руководством ВКП(б) [1, 2]. Отчасти оправданный (терпимый) в чрезвычайной обстановке предвоенного времени, нехватке умелых учителей и небольшой продолжительности обязательного обучения в школе (3-5 классов в 30-40-е годы), этот подход ныне приводит ко все более печальным последствиям не только в успеваемости, но и в моральном, умственном и физическом здоровье учащихся [1-3], оказывает соответствующее отрицательное влияние на производительность труда и здоровье населения.

К сожалению, по сию пору в России внимание исследователей больше занимают некоторые частные вопросы реструктуризации ВУЗовского обучения (например, среди современных диссертационных работ, учитывающих здоровье и способности учащихся и использующих методы математического моделирования для описания процесса обучения в высшей школе, можно выделить [4, 5]. В [6] представлена разработка индивидуального плана студента на основе теории активных систем.). В единственной известной авторам работе указанного направления по средней школе [7] учитывается способность учащихся к логическим выводам и рассуждениям на уроках математики при получении количественной оценки знаний учащихся. В то же время математического моделирования последствий учета (либо неучета) существенного разнообразия природных способностей учащихся при выработке стратегий обучения в обязательной средней школе не ведется. Авторы предлагают одну из таких моделей и итоги расчетов по ней.

В данной работе усложняется модель нулевого уровня [8] посредством привлечения экспериментальных данных из работы [4] и посредством введения разных планок требования основной и дополнительной школы.

### **Список литературы**

1. Кумарин В.В. Педагогика стандартности или почему детям плохо в школе. – М., 1996 г. – 64 с.
2. Кумарин В.В. Педагогика природосообразности и реформа школы. – М.: Народное образование, 2004. – 376 с.
3. Журавлева И.В. Здоровье подростков: социологический анализ. – М.: Институт социологии РАН, 2002. – 240 с.
4. Назойкин Е.А. Мультиагентное имитационное моделирование учебного процесса накопления знаний. Автореф. дисс. канд. техн. наук. – Москва, 2011. – 23 с.
5. Сыgotина М.В. Моделирование процесса обучения в высшем учебном заведении. Автореф. дисс. канд. техн. наук по спец. 05.13.18. – Братск, 2005. – 20 с.
6. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Модели и механизмы теории активных систем в управлении качеством подготовки специалистов. – М.: ИЦ, 1998. 158 с.
7. Грабь М.И. Об одном алгоритме количественной оценки знаний учащихся. // Советская педагогика. – 1981. – № 5. – С. 64-72.

8. Гончар Д.Р., Юрезанская Ю.С. Математическое моделирование разнообразия природных способностей учащихся при сравнении двух стратегий обучения в школе. // Системы управления и информационные технологии, 2014, № 1.1(55). С. 121-125.

## Метод решения динамической задачи оптимизации состава включенного генерирующего оборудования

М.Р. Давидсон, А.В. Селезнев  
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Рассматривается задача выбора состава включенного генерирующего оборудования, возникающая при оперативном планировании режимов работы энергосистемы. В Российской Федерации в условиях конкурентного рынка электроэнергии выбор состава оборудования осуществляется в ежедневном режиме на базе ценовых заявок поставщиков электроэнергии. Помимо требований к качеству и надежности электроснабжения, накладывающих ограничения на баланс мощности, величину резервов и перетоков мощности между различными частями энергосистемы, при управлении режимами работы электростанций также требуется учитывать ряд сложных технологических ограничений генерирующего оборудования, таких как графики набора нагрузки после включения в сеть или совместные режимы работы генераторов в составе парогазовой установки [1].

Сформулируем задачу выбора состава включенного генерирующего оборудования как задачу минимизации стоимости (*Cost*) работы, пусков и остановов генераторов

$$(1) \sum_{t=1}^T \sum_{i \in B} \left[ Cost(s_{it}, p_{it}^g) + \hat{C}_{it}^u (s_{it} - s_{(t-1)i})^+ + \hat{C}_{it}^d (s_{(t-1)i} - s_{it})^+ \right] \rightarrow \min_{s, p^g},$$

при наличии общесистемных ограничений баланса генерации и потребления с учетом потерь в сети (функция *Loss*)

$$(2) \sum_{i \in B} p_{it}^g = \hat{P}_t^c + Loss_t(p_t^g), \quad t = \overline{1, T}, \quad p_t^g = (p_{t1}^g, p_{t2}^g, \dots, p_{ti}^g, \dots),$$

и ограничений на максимальные потоки мощности (функция *Flow*) по группам линий электропередач

$$(3) \quad Flow_{ik}(p_t^g) \leq \hat{F}_{ik}^{\max}, \quad t = \overline{1, T}, \quad k = \overline{1, N_t^{sec}}.$$

Оптимизация в (1) – (3) производится по булевым переменным состояния генераторов  $s_{it} \in \{0, 1\}$  и переменным производства мощности генераторами  $p_{it}^g$ .

Технологические ограничения электростанций в общем виде можно представить как нелинейные ограничения для переменных состояния отдельных генераторов в составе групп генерирующего оборудования:

$$(4) \quad F_r(s^E, p^E) \leq 0, \quad r = \overline{1, N^{osp}},$$

где  $s^E = (s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n})$ ,  $p^E = (p_{i_1}^g, p_{i_2}^g, \dots, p_{i_n}^g)$ ,  $i_k \in E$  – состояние генерирующего оборудования электростанции  $E$  на интервале планирования режима  $t = \overline{1, T}$ . Данные ограничения формируют связь переменных состояния в различные часы  $t$ , не позволяя рассматривать задачу оптимизации состава оборудования для каждого часа в отдельности.

Современные успехи в решении частично целочисленных задач линейного программирования большой размерности [2,3] дают возможность применить методы решения таких задач для задачи оптимизации (1) – (4). Использование булевых переменных позволяет сформулировать ограничения (4) в виде системы линейных неравенств и рассматривать исходную задачу оптимизации как задачу частично целочисленного линейного программирования [4]. Нелинейные ограничения (2) – (3) при этом можно заменить линейными аналогами в окрестности некоторого допустимого электрического режима.

Полученная частично целочисленная задача линейного программирования имеет большую размерность и решается приближенно с использованием эвристических методов и метода ветвей и границ [2,3]. Для российской энергосистемы размерность полученной в результате целочисленной задачи составляет около 770 000 переменных (из них 53 000 булевых), 1 000 000 неравенств, 7 000 000 ненулевых коэффициентов в матрице задачи. С использованием специализированного программного обеспечения для решения частично целочисленных задач линейного программирования (такого как IBM ILOG CPLEX, FICO Xpress или Gurobi) данная задача может быть решена за регламентное время с приемлемой точностью ( $MIPGap \leq 0.5\%$ ).

На практике неоптимальное решение задачи (1) – (4) может приводить к нерациональным результатам как для индивидуальных участников рынка, так и для рынка в целом. Для выявления и устранения подобных результатов разработаны алгоритмы апостериорного ценообразования [5] и дополнительной оптимизации результатов отдельных электростанций.

#### Список литературы

1. Селезнев А.В. Динамическая задача выбора состава оборудования при управлении энергосистемой в условиях конкурентного рынка электроэнергии // Изв. РАН. ТИСУ. 2015. №4. С.45-67.
2. Bixby R.E., Fenelon M., Gu Z., Rothberg E., Wunderling R. MIP: Theory and Practice – Closing the Gap. <http://miplib.zib.de/paper/bixbyfenelongurothbergwunderling2000.pdf>.
3. IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, CPLEX User's Manual, Version 12 Release 4. P. 207-258.  
<http://pic.dhe.ibm.com/infocenter/cosinfoc/v12r4/topic/ilog.odms.studio.help/pdf/usrcplex.pdf>.
4. Streiffert D., Philbrick R., Ott A. A Mixed Integer Programming Solution for Market Clearing and Reliability Analysis // Power Engineering Society General Meeting. 2005. V.3. P.2724-2731.
5. Давидсон М.Р., Селезнев А.В. Математическая модель расчета ценовых индикаторов в задаче выбора состава генерирующего оборудования в условиях конкурентного рынка электроэнергии в России // Изв. РАН. ТИСУ. 2014. №3. С.61-70.

### Регуляризация метода Ньютона для решения системы уравнений установившегося режима

М.Р. Давидсон, А.В. Селезнев  
*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

В настоящей работе рассматривается адаптивная схема регуляризации метода Ньютона-Рафсона для решения системы уравнений установившегося режима (УУР) электрической системы, имеющая большое практическое значение для анализа процессов и состояния таких систем [1].

Ключевым неизвестным параметром являются комплексы напряжений в узлах сети, отвечающие заданным значениям узловых мощностей. Система УУР является нелинейной. Не для всякого вектора узловых мощностей (нагрузок) система УУР имеет решение. На практике это значит, что система не может работать при таких нагрузках и большой практический интерес представляет поиск вектора узловых мощностей, ближайшего в некотором смысле к заданному, при котором решение существует.

Основой современных методов решения системы УУР является метод Ньютона. Если решения не существует, метод Ньютона теряет сходимость. Однако, отсутствие четкого критерия существования решения не позволяет утверждать, что если метод Ньютона расходится, то это необходимо означает отсутствие решения [2].

В такой ситуации зачастую задачу решения системы УУР заменяют задачей поиска минимума функции невязки данной системы уравнений. Но и в этом случае сходимость может быть затруднена, во-первых, в силу невыпуклости целевой функции, а во-вторых, по причине вырождения якобиана системы УУР на границе области существования решения и вычислительной нестабильности [2].

В данной работе рассматривается задача минимизации функции невязки системы УУР и схема регуляризации, в результате применения которой предельные точки итерационной последовательности являются стационарными точками функции невязки.

Обозначим

$$f_k(x) - s_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad x \in R^n$$

$$F(x) = \sum_k (f_k(x) - s_k)^2$$

систему УУР, где  $s_k$  - значения узловых мощностей,  $x$  - вектор узловых напряжений, и функцию невязки данной системы. Рассмотрим алгоритм минимизации функции невязки в следующем общем виде

$$x^{t+1} = x^t + \alpha_t d^t, \quad d^t = -Q_t \nabla F(x^t), \quad t = 1, 2, \dots,$$

где  $Q_t$  симметрична, шаг  $\alpha_t$  выбирается по правилу Армихо.

Известно (см. например [3]), что при условиях положительной определенности и ограниченности нормы матрицы  $Q_t$  любая предельная точка любой траектории, построенной в соответствии с указанным алгоритмом, является стационарной точкой в задаче минимизации  $F(x)$  и в силу ограниченности снизу  $F(x)$ ,  $\nabla F(x^t) \rightarrow 0$ .

Для построения последовательности матриц  $Q_t$  воспользуемся процедурой LDL разложения гессиана  $\nabla^2 F(x^t)$ . Для симметричной матрицы  $\nabla^2 F(x^t)$  существуют матрицы  $L_t, D_t, P_t$  [4], такие что

$$\nabla^2 F(x^t) = P_t^T L_t^T D_t L_t P_t,$$

где  $P_t$  - матрица перестановок,  $L_t$  - нижняя треугольная матрица с единичной диагональю,  $D_t$  - блочно-диагональная матрица с блоками либо размерности 1, либо 2. Как известно при таком преобразовании сохраняются отрицательный и положительный индексы квадратичной формы.

Для каждого блока матрицы  $D_t$  введем следующее преобразование: если минимальное собственное число матрицы в диагональном блоке размера 1 или 2 меньше  $\varepsilon$ , то прибавляем к такой матрице матрицу  $\gamma E$  соответствующего размера (где  $E$  - единичная) с таким  $\gamma$ , что минимальное собственное число получаемой матрицы становится больше либо равно  $\varepsilon$ ; в противном случае изменений не производится.

В результате преобразованная матрица  $\bar{D}_t$  становится положительно определенной с минимальным собственным числом  $\varepsilon$ . Очевидно, вычислительная сложность такой процедуры имеет порядок  $O(n)$ . Определим матрицу  $Q_t$  в описанном алгоритме:

$$Q_t = P_t^T L_t^T \bar{D}_t L_t P_t.$$

Алгоритм выбора ведущих элементов в [4] построен таким образом, чтобы обеспечить вычислительную устойчивость. На практике  $\|L_t\|$  также оказывается ограниченной, тем самым, выполняются условия на матрицу  $Q_t$ , и будет иметь место результат о сходимости, приведенный выше.

Предварительные вычислительные эксперименты демонстрируют эффективность предложенной процедуры.

#### Список литературы

1. Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М., Неуймин В.Г., Вычислительные модели потокораспределения в электрических системах, М.: «Флинта», «Наука», 2008.
2. Bienstock D., Progress on solving power flow problems // OPTIMA Mathematical Optimization Society Newsletter, 2013, December, p.1-7
3. А.Ф.Измаилов, М.В.Солодов Численные методы оптимизации:

4. Bunch J.R., Kaufman L., Parlett B.N., Decomposition of a symmetric matrix // Numerical Math. 1975, V.27, p. 95-109.

## Пересечение прямой и зонотопа в задаче линейного программирования\*

М.Н. Деменков

*Институт проблем управления, Москва, Россия*

Зонотопы – выпуклые многогранники, являющиеся аффинными проекциями многомерного куба [1]:

$$\mathbf{Z} = \{z \in \mathbf{R}^n : z = z_0 + Hx, \|x\|_\infty \leq 1\}, x \in \mathbf{R}^m, n \leq m.$$

Здесь матрица  $H = [h_1 | h_2 | \dots | h_m] \in \mathbf{R}^{n \times m}$  содержит столбцы-генераторы,  $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} |x_i|$ . В задаче ЛП с минимизируемой целевой функцией  $c^T z$  и ограничением  $z \in \mathbf{Z}$  решение легко определяется в замкнутом виде:

$$x^* = \arg \min_{\|x\|_\infty \leq 1} c^T (z_0 + Hx) = z_0 - \sum_{i=1}^m h_i \text{sign}(c^T h_i),$$

если  $\forall i, c^T h_i \neq 0$ . В случае  $\exists i, c^T h_i = 0$  решение представляет собой выпуклую оболочку некоторых граничных точек  $\mathbf{Z}$ . Для минимизации выпуклой функции эта формула может быть использована в методе условного градиента (известном также как алгоритм Франк-Вульфа, см. напр. [2]), где на каждом шаге метода ищется линейное приближение функции  $c_0 + c^T z$  и затем его минимум на  $\mathbf{Z}$ .

Наш интерес к зонотопам обусловлен крайней простотой реализации соответствующих методов оптимизации в реальном времени на встроенных микропроцессорах. Как правило, это малоразмерные задачи, однако и процесс оптимизации должен быть завершен за конечное малое время для управления быстродействующими техническими объектами (см. напр. <http://control.ee.ethz.ch/~emopt/>).

В [3] был предложен подход к решению задачи ЛП вида

$$\min c^T x, Ax = b, \|x\|_\infty \leq 1,$$

с помощью выпуклой оптимизации на зонотопе. Задачу можно переформулировать с учетом данного выше определения  $\mathbf{Z}$  как

$$\min \gamma, l(\gamma) = \begin{bmatrix} b \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbf{Z}, H = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix}, z_0 = 0.$$

Теперь мы ищем минимальную по  $\gamma$  точку пересечения прямой  $l(\gamma)$  и зонотопа  $\mathbf{Z}$ . Заметим, что путем добавления дополнительных переменных и ограничения их некоторыми интервалами в таком виде можно, по сути, сформулировать любую практическую задачу ЛП.

Метод LP-Newton, предложенный в [3], решает задачу за конечное число шагов (весьма похожий метод предложен позднее также в [4] для другой задачи). Описанный подход позволяет решать задачу не одним, а многими алгоритмами, в качестве базовой компоненты которых выступает поиск минимума выпуклой функции на зонотопе. Так, например, решение может быть получено методом альтернирующих проекций [5], в котором

---

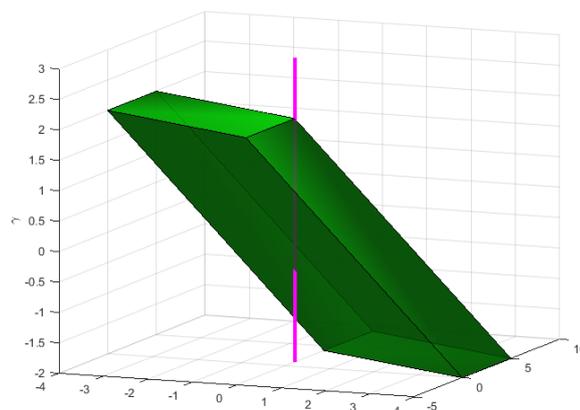
\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 15-07-09091-А

поочередно находятся проекции текущей точки прямой  $l(\gamma)$  на зонотоп и полученной точки на зонотопе обратно на прямую. Преимущество подобных методов перед общепринятыми – например, симплекс-методом или методом внутренней точки – состоит в отсутствии необходимости многократного решения систем линейных уравнений, что существенно упрощает решение задачи на встроженных микропроцессорах.

В докладе (представленном ранее также на конф. SIAM [6]) рассматривается возможность распараллеливания подобных методов с учетом многоядерности встроженного процессора. Предлагается строить алгоритм на основе деления отрезка на прямой  $l(\gamma)$  на несколько интервалов (пропорционально количеству ядер) и параллельного поиска проекций границ этих интервалов на зонотоп – методом условного градиента либо методом «быстрого градиента» Нестерова [7].

На рисунке изображены зонотоп и прямая  $l(\gamma)$ , построенные для простейшей задачи ЛП:

$$\max x_1, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad \|x\|_\infty \leq 2.$$



#### Список литературы

1. Циглер Г.М. Теория многогранников. М.: МЦНМО, 2014.
2. Lacoste-Julien S., Jaggi M. On the global linear convergence of Frank-Wolfe optimization variants // Proc. of Conf. and Workshop on Neural Information Processing Systems (NIPS). Montreal, 2015.
3. Fujishige S., Hayashi T., Yamashita K., Zimmermann U. Zonotopes and the LP-Newton method // Optimization and Engineering. 2009. Vol. 10. P. 193–205.
4. Helmling M., Ruzika S. Towards combinatorial LP Turbo decoding // Proc. of IEEE International Symposium on Information Theory. 2013. P. 1491-1495.
5. Bauschke H.H., Borwein J.M. Dykstra's alternating projection algorithm for two sets // Journal of Approximation Theory. 1994. Vol. 79, No. 3. P. 418-443.
6. Demenkov M. Parallel linear programming using zonotopes // 17th SIAM Conf. on Parallel Processing for Scientific Computing. Book of abstracts. Paris, 2016.
7. Нестеров Ю.Е. Метод решения задачи выпуклого программирования со скоростью сходимости  $O(1/k^2)$  // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 543-548.

### Вопросы идентификации стохастических дифференциальных уравнений\*

В.В. Дикусар

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Во всякой реальной динамической системе существуют случайные флуктуации различного характера, малые по сравнению с неслучайными факторами, но оказывающие определенное отрицательное воздействие на работу системы; случайный разброс начальных положений и скоростей, возникающий из-за неточности измерений, ошибок изготовления и

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 15-07-08952).

др., приводящий к статистическим переходным режимам даже в детерминистических системах. Описание таких явлений классическими методами затруднительно и приводит к многочисленным проблемам.

В настоящей работе рассматриваются вопросы идентификации параметров стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Для оптимизации критериев качества идентификации использован квазиоптимальный метод случайного поиска. С помощью вычислительных экспериментов проверяется эффективность разработанных алгоритмов.

В случае идентификации параметров СДУ возникает ряд особенностей непосредственного использования такой схемы моделирования. Аналитическое решение СДУ представляется семейством стохастических процессов или случайными траекториями, значения которых зависят от случайных составляющих процесса Винера. В этом случае можно получить сколь угодно «истинных моделей» процесса, тогда как классическая схема моделирования Монте-Карло предусматривает только одну. Поэтому возникает необходимость ее адаптации к особенностям алгоритма метода идентификации параметров СДУ.

Современный уровень высокопроизводительной вычислительной техники позволяет сделать следующий шаг в повышении эффективности решения задачи идентификации СДУ за счет интенсивного использования методов имитационного моделирования с параллельными и распределенными вычислениями в MATLAB [1] и Simulink [1-2], а также новых результатов, полученных в теории стохастических дифференциальных уравнений [3].

Цель работы состоит в разработке методов идентификации параметров СДУ и в применении этих методов для повышения эффективности управления системами. Для достижения цели исследования решены следующие задачи: (1) проанализирована теория стохастических дифференциальных уравнений и методы численной аппроксимации их решений; (2) проанализированы сильные численные схемы решения стохастических дифференциальных уравнений; (3) разработаны методы идентификации параметров стохастических дифференциальных уравнений; (4) показано применение разработанных методов на конкретных примерах.

В работе используются последние достижения теории и численных методов решения СДУ, методы математической статистики, идентификации систем; а, также имитационное моделирование методом Монте-Карло.

Вычислительный эксперимент по методу максимального правдоподобия был выполнен с использованием программного пакета MATLAB. Количество повторений эксперимента составило  $N > 1000$ .

Еще одной возможностью определения значений параметров СДУ является использование методов идентификации, ограничения на параметры модели которых заданы в неявном виде. Особенностью этих методов является то, что модель объекта должна быть восстановлена на основе панели данных. Алгоритм косвенного метода идентификации основан на методе случайного поиска. Особое внимание необходимо уделить выбору вспомогательного уравнения и методу оценивания его параметров, поскольку это связано со статистическими свойствами оценок параметров исходного СДУ. Разработанный метод оценки параметров линейного СДУ является эффективным, однако чувствительным на длину шага интегрирования численного решения СДУ [4]. Поэтому при использовании этого метода особое внимание необходимо уделять калибровке данных относительно переменной времени.

Как уже было отмечено, метод максимального правдоподобия можно применять только для линейных СДУ или СДУ, которые могут быть сведены к линейному случаю. Существует достаточно широкий класс задач, удовлетворяющих этому критерию. Однако, зачастую, мы имеем дело с такими моделями сложных объектов, описание которых требует использования нелинейных СДУ, часто не имеющих аналитического решения. Решение задачи идентификации в этом случае может быть получено при помощи методов, основанных на схеме Монте-Карло.

В результате численных экспериментов доказано утверждение: если параметры вспомогательной модели, заданной авторегрессионным процессом с гетероскедастическими ошибками, оценены взвешенным методом наименьших квадратов, то оценки параметров СДУ, полученные косвенным методом идентификации, являются несмещенными.

## Список литературы

1. Dikusar V., Olenev N. Parallel programming in MATLAB for modeling an economy // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Vol.5. Siedlce: Siedlce University of Natural Sciences and Humanities, 2015. P. 63-70.
2. Оленев Н.Н., Печенкин Р.В., Чернецов А.М. Параллельное программирование в MATLAB и Simulink с приложениями к моделированию экономики. М.: ВЦ РАН, 2015.
3. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.
4. Дикусар В.В., Филатова Д.В. Идентификация параметров стохастических дифференциальных уравнений // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2004, № 6-2. С. 12-30.

## Обобщение регуляризованного метода наименьших квадратов А.Н. Тихонова на $l_1$ -норму

В.И. Ерохин, А.В. Рассадин, А.С. Гоголевский  
ВКА имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия

Пусть существует совместная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$A_0 x_0 = b_0, \quad (1)$$

где  $A_0 \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $b_0 \in \mathbf{R}^m$ , которую будем называть *гипотетической точной* СЛАУ,  $x_0$  - решение (1) с минимальной  $l_\infty$  -нормой, которую будем обозначать  $\|x_0\|_\infty$ . Пусть также известна матрица  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$  и вектор  $b \in \mathbf{R}^m$ , для которых выполнены условия  $\|A_0 - A\|_1 \leq \mu$ ,  $\|b_0 - b\|_1 \leq \delta$ , где  $\mu, \delta \geq 0$  - известные априорно, одновременно не равные нулю константы, символом  $\|\cdot\|_1$  обозначена  $l_1$  -норма (матричная, векторная).

Требуется найти  $A_1 \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $x_1 \in \mathbf{R}^n$ ,  $b_1 \in \mathbf{R}^m$  такие, что  $\|A - A_1\|_1 \leq \mu$ ,  $\|b - b_1\|_1 \leq \delta$ ,  $A_1 x_1 = b_1$ ,  $\|x_1\|_\infty \rightarrow \min$ . Указанная задача, обозначаемая далее символом  $Z_{1,1}(\mu, \delta)$ , является модификацией (обобщением) задачи, рассмотренной А.Н. Тихоновым [1, 2] с использованием евклидовой матричной и векторной нормы и названной им *регуляризованным методом наименьших квадратов* (РМНК) [3].

Опираясь на результаты работ [4–6], удалось показать, что справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Задача  $Z_{1,1}(\mu, \delta)$  имеет решение тогда и только тогда, когда разрешима задача математического программирования*

$$\|b - Ax\|_1 \leq \mu \|x\|_\infty + \delta, \|x\|_\infty \rightarrow \min. \quad (2)$$

Если  $x^*$  - решение задачи (2), то решение задачи  $Z_{1,1}(\mu, \delta)$  строится по формулам:  $x_1 = x^*$ ,  $b_1 = b - (b - Ax_1) \cdot \delta / \|b - Ax_1\|_1$ ,  $A_1 = A + (b_1 - Ax_1) y^T$ , где  $y \in \mathbf{R}^n$  - вектор, двойственный к вектору  $x_1$  относительно нормы  $\|\cdot\|_\infty$ , т.е., вектор, удовлетворяющий условиям  $y^T x_1 = \|y\|_1 \cdot \|x_1\|_\infty = 1$ .

**Лемма.** *Для любого вектора  $x = (x_j) \neq 0$  вектор  $y = (y_j)$ , двойственный к  $x$  относительно нормы  $\|\cdot\|_\infty$ , существует, в общем случае не является единственным, и может быть построен по формуле*

$$y_j = \begin{cases} 0, & \text{если } |x_j| < \|x\|_\infty, \\ \frac{\text{sign}(x_j)}{s \|x\|_\infty} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3)$$

где  $s$  - количество элементов вектора  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x_j| = \|x\|_\infty$ . Если  $s > 1$ , то возможно дополнительно (по отношению к формуле (3)) обнулить  $1 \leq t < s$  элементов вектора  $y$ , а оставшиеся  $s - t$  ненулевых элементов вычислить по формуле  $y_j = \text{sign}(x_j) / ((s - t) \cdot \|x\|_\infty)$ .

**Теорема 2.** Если задача (2) имеет решение, то оно может быть получено как  $x^* \in \text{Argmin}\{\|x^1\|_\infty, \dots, \|x^k\|_\infty, \dots, \|x^K\|_\infty\}$ , где  $K \leq 2n$  – количество разрешимых задач линейного программирования (ЛП)

$$\begin{aligned} -p &\leq b - Ax \leq p, \\ -\theta \cdot 1_n &\leq x \leq \theta \cdot 1_n, \\ x_j &= \pm\theta, \\ 1_m^T p &\leq \mu\theta + \delta, \\ p &\geq 0, \quad \theta \geq 0, \quad \theta \rightarrow \min, \end{aligned} \tag{4}$$

$x^k$  – решение некоторой задачи вида (4)  $j=1, \dots, n$ ,  $1_n \in \mathbf{R}^n$  и  $1_m \in \mathbf{R}^m$  – векторы, составленные из единиц,  $p \in \mathbf{R}^m$ ,  $\theta \in \mathbf{R}$ , знак  $x_j$  определяет 2 (из 2n возможных) задач ЛП вида (4).

Заметим, что достоверная априорная информация о знаке и индексе максимальной по абсолютной величине координате вектора  $x_0$  позволяет решать только одну задачу вида (4).

**Пример** (с «грубой» погрешностью элемента  $a_{13}$ )

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_0 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} : \\ : \\ - \\ - \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1.00010 & 1.99980 & -0.99975 \\ -0.00030 & 1.00010 & 1.00010 \\ 1.00000 & -0.00010 & 1.99975 \\ 0.00020 & 1.00010 & -1.00030 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 8.9 \\ -2.1 \\ -11.1 \\ 4.9 \end{pmatrix} \quad \mu = 2.002 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ - \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1.00010 & 1.99980 & -0.99975 \\ -0.00030 & 1.00010 & 1.22200 \\ 1.00000 & -0.00010 & 3.77985 \\ 0.00020 & 1.00010 & -1.00030 \end{pmatrix}$$

$$\delta = 0.065$$

$b_1 = \begin{pmatrix} 8. \\ -2. \\ -11. \end{pmatrix}$  Примечание: представленное решение  $x_1$ ,  $A_1$ , соответствует адекватной априорной информации о векторе  $x_0$ . Прочие решения задач вида (4) имеют

меньшую  $l_\infty$ -норму, но менее близки к вектору  $x_0$ . Для сравнения:  $\tilde{x} = A^+ b = (-0.20534 \quad 1.71040 \quad -5.05498)^T$  – решение по классическому методу наименьших квадратов,  $\tilde{x} = (-0.22620 \quad 1.27592 \quad -2.91489)^T$  – решение по РМНК с параметрами  $\tilde{\mu} = \|A_0 - A\|_2 \approx 2.000$  и  $\tilde{\delta} = \|b_0 - b\|_2 = 0.035$ , где  $\|\cdot\|_2$  –  $l_2$ -норма (матричная, векторная).

#### Список литературы

1. Тихонов А.Н. О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254, № 3. С. 549-554.
2. Тихонов А.Н. О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1980. Т. 20, № 6. С. 1373-1383.
3. Тихонов А.Н. О методах автоматизации обработки наблюдений // Вестн. АН СССР. 1983. № 1. С. 14-25.
4. Ерохин В.И. Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2002. Сер. 2. Т. 9, № 2. С. 41-77.
5. Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В. Минимаксная матричная коррекция несовместимых систем линейных алгебраических уравнений с блочными матрицами коэффициентов // Изв. РАН. ТИСУ. 2006. № 5. С. 52-62.
6. Горелик В.А., Ерохин В.И., Печенкин Р.В. Численные методы коррекции несобственных задач линейного программирования и структурных систем уравнений. М.: ВЦ РАН. 2006.

# Об оптимальном одношаговом алгоритме поиска экстремума в классе функций, определяемом кусочно-линейной мажорантой

А.Г. Коротченко, В.М. Сморякова

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Россия*

Интерес к построению эффективных алгоритмов поиска экстремума функций одной переменной объясняется тем, что, с одной стороны, указанные алгоритмы используются как вспомогательные процедуры во многих методах оптимизации функций нескольких переменных, а с другой стороны классы функций одной переменной служат удобными моделями для теоретического исследования методов оптимизации.

Кроме того, в ряде случаев задачи поиска экстремума функций одной переменной являются внутренними по отношению к исходной (внешней) задаче оптимизации, и их многократно приходится решать при решении внешней задачи. Поэтому, такие алгоритмы должны быть эффективными (в частности оптимальными по тому или иному критерию): решать задачу достаточно быстро и точно.

Классы функций, используемые для исследования эффективности методов оптимизации должны быть, во-первых, интересны с точки зрения приложений, а, во-вторых, допускать построение достаточно простых в реализации алгоритмов. Для построения такого рода классов функций может быть использован подход, основанный на задании так называемых базовых функций и операций, относительно которых указанный класс замкнут. Если в качестве базовых функций выбраны вогнутые, выпуклые и удовлетворяющие условиям Липшица функции, а в качестве операций – операции взятия минимума, максимума, суммирования с неотрицательными коэффициентами по конечному набору функций, то порождаемые таким классом классы функций одной переменной могут быть заданы с помощью точных верхних (в частности кусочно-линейных) мажорант.

Используя принцип гарантированного результата, построены простые в реализации алгоритмы ( $\alpha$ -алгоритмы) с указанием оценок погрешности в определении наибольшего значения функций из данных классов [1-4].

В докладе рассматривается подкласс класса функций, определяемого с помощью кусочно-линейной мажоранты, возникающий в ходе использования  $\alpha$ -алгоритма. Приводятся гарантированные оценки погрешности в определении наибольшего значения функции при условии принадлежности функции этому подклассу. Построен простой в реализации оптимальный одношаговый алгоритм поиска наибольшего значения функции из указанного подкласса. Приводятся соотношения, сравнивающие гарантированные оценки погрешности в определении наибольшего значения функции оптимального одношагового алгоритма и  $\alpha$ -алгоритма.

## Список литературы

1. Коротченко А.Г. О приближенно-оптимальных алгоритмах поиска экстремума в одном классе функций // Ж.: вычисл. матем. и матем. физ., т. 30, № 3, 1990, С. 355-365.
2. Коротченко А.Г., Сморякова В.М. Об алгоритме поиска экстремума в классах функций, определяемых кусочно-линейной мажорантой //Труды VII-ой Московской международной конференции по исследованию операций (ORM 2013), Изд. ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, М., 2013, с. 39.
3. Коротченко А.Г., Сморякова В.М. Об оценке погрешности алгоритмов поиска экстремума в классах функций, определяемых кусочно-линейной мажорантой // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование. Оптимальное управление, 2013, №3(1), С. 188-194.
4. Коротченко А.Г., Сморякова В.М. Об одном алгоритме поиска максимума в классе функций, определяемом кусочно-линейной мажорантой. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование. Оптимальное управление, 2014, №4(1), С. 409-415.

# Сочетание жадных стратегии и ограниченного перебора при решении задач о выборе максимально совместимого числа заявок \*

В.А. Костенко

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

В общем случае задачу о выборе максимально совместимого числа заявок можно сформулировать следующим образом. Задано множество заявок на обслуживание и множество ресурсов, на которых могут обслуживаться заявки. Каждая заявка характеризуется набором требований к качеству обслуживания. Для каждого ресурса задан набор характеристик. Также задан набор ограничений на допустимое размещение заявок на ресурсах. Параметрами ограничений являются характеристики ресурсов и требования к качеству обслуживания заявок. Требуется разместить на заданном множестве ресурсов максимально возможное число заявок из заданного множества таким образом, чтобы выполнялись ограничения на допустимое размещение заявок. Если система является одноприборной, то требуется лишь выбрать место размещения заявки в расписании выполнения заявок.

Принцип построения алгоритмов сочетающих жадные стратегии и ограниченный перебор заключается в следующем. На каждом шаге алгоритм выбирает заявку из множества еще не размещенных заявок и место ее размещения в соответствии с жадным критерием. В первом подходе к построению алгоритма, процедура ограниченного перебора вызывается, если на очередном шаге выбранная заявка не может быть размещена. Во втором подходе к построению алгоритма, процедура ограниченного перебора вызывается, если после пробного размещения на очередном шаге выбранной заявки в множестве неразмещенных заявок появляются заявки, которые не могут быть размещены. Ниже приведены схемы алгоритмов соответствующие этим двум подходам.

## **Алгоритм 1:**

1. *Выбрать в соответствии с жадным критерием очередную заявку из множества еще не размещенных заявок.*
2. *Выбрать в соответствии с жадным критерием ресурс (место в расписании) для размещения заявки:*
  - *если такой ресурс не найден, то к п. 3,*
  - *если такой ресурс найден, то разместить на нем заявку, удалить заявку из множества неразмещенных заявок и если это множество не пусто, то перейти к п.1, в противном – завершение работы.*
3. *Вызов процедуры ограниченного перебора (или эвристики):*
  - *успешное завершение процедуры: сохранить полученное процедурой размещение, удалить заявку из множества неразмещенных заявок и если это множество не пусто, то перейти к п.1, в противном – завершение работы.*
  - *неуспешное завершение процедуры: удалить текущую заявку из множества не размещенных заявок и если множество не размещенных заявок не пусто, то перейти к п.1, в противном – завершение работы.*

## **Алгоритм 2:**

1. *Выбрать в соответствии с жадным критерием очередную заявку из множества еще не размещенных заявок.*
2. *Выбрать в соответствии с жадным критерием ресурс для размещения заявки (всегда есть хотя один ресурс) и сделать пробное размещение:*
  - *если в множестве неразмещенных заявок есть заявки, которые не могут быть размещены после размещения выбранной заявки, то отменить размещение и перейти к п.3,*
  - *если во множестве неразмещенных заявок нет заявок, которые не могут быть размещены после размещения выбранной заявки, то удалить заявку из множества неразмещенных заявок и если это множество не пустое, то перейти к п.1.*
3. *Вызов процедуры ограниченного перебора (или эвристики):*

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, уникальный номер(ID) RFMEFI60714X0070. Соглашение № 14.607.21.0070.

- *успешное завершение процедуры: сохранить полученное процедурой размещение, удалить заявку из множества неразмещенных заявок и если это множество не пусто, то перейти к п.1, в противном – завершение работы.*
- *неуспешное завершение процедуры: удалить текущую заявку из множества размещенных заявок и если множество не размещенных заявок не пусто, то перейти к п.1, в противном – завершение работы.*

В докладе будут рассмотрены алгоритмы, построенные в соответствии с первой схемой, для решения задачи распределения ресурсов в центрах обработки данных [1,2], и алгоритм, построенный в соответствии со второй схемой, для решения задачи построения расписаний обменов по шине с централизованным управлением [3]. Как показало экспериментальное исследование алгоритма, на данных от реальных бортовых систем, больше 98% заявок в расписание распределяется по жадной схеме и только для 2% процентов заявок вызывается процедура ограниченного перебора.

#### Список литературы

1. Вдовин П.М., Костенко В.А. Алгоритм распределения ресурсов в центрах обработки данных с отдельными планировщиками для различных типов ресурсов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 6. С. 80-93.
2. Зотов И. А., Костенко В. А. Алгоритм распределения ресурсов в центрах обработки данных с единым планировщиком для различных типов ресурсов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 61-71.
3. Костенко В.А., Гурьянов Е.С. Алгоритм построения расписаний обменов по шине с централизованным управлением и исследование его эффективности // Программирование. 2005. №6. С.67-76.

## Использование самообучения для выбора параметров генетических алгоритмов\*

В.А. Костенко

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Одной из основных проблем при построении генетических алгоритмов является проблема выбора значений порогов вероятностей выполнения операций скрещивания и мутации (далее, вероятность скрещивания и вероятность мутации). При неправильном выборе этих значений генетический алгоритм работает как алгоритм ненаправленного случайного поиска. В настоящее время чаще всего значения вероятностей скрещивания и мутации подбираются экспериментально. Для многих задач оптимальные значения зависят от значений исходных данных. Это приводит к большим вычислительным затратам для получения приемлемого по качеству решения.

Для решения проблемы выбора значений вероятностей скрещивания и мутации в работе предлагается генетический алгоритм с самообучением. Вводятся матрицы вероятности мутации и вероятности скрещивания. Элементами матриц являются значения вероятностей мутации и скрещивания для каждого элемента решения. На каждой итерации алгоритма значения элементов матриц изменяются в зависимости от того, насколько улучшилось или ухудшилось решение после применения операции мутации и скрещивания.

Общую схему генетического алгоритма с самообучением можно представить следующим образом:

1. Сгенерировать случайным образом начальную популяцию.
2. Вычислить функцию выживаемости для каждой строки популяции.
3. Выполнить операцию селекции, *сделать перестановку строк матриц мутации и скрещивания в соответствии со структурой новой популяции.*
4. Выполнить операцию скрещивания:
  - 4.1 Выбрать пары для скрещивания.
  - 4.2 Для каждой выбранной пары:
    - а) с заданной вероятностью выполнить скрещивание, получить двух потомков (*вероятность скрещивания определяется значениями соответствующих элементов матрицы вероятности скрещивания*);
    - б) произвести в популяции замену родителей на их потомков;

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-01237.

с) скорректировать значения соответствующих элементов матрицы вероятности скрещивания и сделать перестановку элементов соответствующих скрещиваемым решениям строк.

5. Выполнить операцию мутации, скорректировать значение соответствующего элемента матрицы вероятности мутации.

6. Если критерий останова не достигнут, перейти к шагу 2, иначе завершить работу.

Курсивом выделены отличия предлагаемого генетического алгоритма от классического генетического алгоритма (алгоритма Холланда). Детальное описание основных операции генетического алгоритма с самообучением и способов коррекции элементов матриц вероятности мутации и вероятности скрещивания приведено в работе [1].

В докладе будут приведены результаты экспериментального исследования свойств предложенного генетического алгоритма с самообучением, которые получены при решении двух задач:

- построение расписания с минимальным временем выполнения на фиксированном числе процессоров;
- нахождение подмножества с требуемой суммой.

Проверены статистические гипотезы о том, что предложенный алгоритм всегда имеет не худшую точность и меньшее время работы по сравнению с классическим генетическим алгоритмом. Результаты вычислительных экспериментов показали, что разработанный генетический алгоритм с самообучением превосходит классический генетический алгоритм как по точности (в среднем на 11%), так и по времени работы (в среднем на 60%).

#### Список литературы

4. Костенко В. А., Фролов А. В. Генетический алгоритм с самообучением // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 4. С. 24-38.

## Планировщик ресурсов для облачных платформ\*

В.А. Костенко, Р.Л. Смелянский  
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

**Задача распределения ресурсов ЦОД.** Планировщик ресурсов строит отображение ресурсных запросов на физические ресурсы центров обработки данных (ЦОД) при работе ЦОД в режиме Infrastructure-as-a-Service (IaaS). Для построенного планировщиком отображения возможно гарантированное выполнение запрошенных критериев качества обслуживания (SLA). Данная задача возникает при разворачивании виртуальных корпоративных сетей в ЦОД. Проблема планирования ресурсов при организации облачных вычислений активно рассматривается [1]. Аналитический обзор известных подходов и алгоритмов отображения ресурсных запросов на физические ресурсы ЦОД приведен в работе [2]. В докладе рассмотрена задача параметризации планировщика, для его настройки на особенности облачной платформы.

*Модель физических ресурсов ЦОД* будем задавать размеченным графом  $H = (P \cup M \cup K, L)$ , где  $P$  – множество вычислительных узлов,  $M$  – множество хранилищ данных,  $K$  – множество коммутационных элементов сети обмена ЦОД,  $L$  – множество физических каналов передачи данных. На множествах  $P$ ,  $M$ ,  $K$  и  $L$  определены векторные функции скалярного аргумента, задающие соответственно характеристики вычислительных узлов, хранилищ данных, коммутационных элементов и каналов передачи данных.

*Ресурсный запрос* будем задавать размеченным графом  $G = (W \cup S, E)$ , где  $W$  – множество виртуальных машин,  $S$  – множество виртуальных хранилищ данных (storage-элементов),  $E$  – множество виртуальных каналов передачи данных. На множествах  $W$ ,  $S$  и  $E$  определены векторные функции скалярного аргумента, задающие характеристики запрашиваемого виртуального элемента (требуемое качество сервиса (SLA)).

*Назначением ресурсного запроса* будем называть отображение:

$$A: G \rightarrow H = \{W \rightarrow P, S \rightarrow M, E \rightarrow \{K, L\}\}$$

Выделим три типа отношений между характеристиками запросов и соответствующих характеристик физических ресурсов. Обозначим через  $x$  характеристику запроса и через  $y$  соответствующую ей характеристику физического ресурса. Тогда эти отношения можно записать следующим образом:

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, уникальный номер(ID) RFMEFI60714X0070. Соглашение № 14.607.21.0070.

1. Недопустимость перегрузки емкости физического ресурса:

$$\sum_{i \in R_j} x_i \leq y_j, \text{ здесь } R_j - \text{ множество запросов, назначенных на выполнение на физическом}$$

ресурсе  $j$ .

2. Соответствие типа физического ресурса:  $x=y$ .

3. Наличие требуемых характеристик у физического ресурса:  $x \leq y$ .

*Отображение  $A$  будем называть корректным*, если для всех физических ресурсов и всех их характеристик выполняются отношения 1-3.

*Остаточным графом* доступных ресурсов  $H_{res}$  называется граф  $H$ , в котором удалены вершины и дуги, соответствующие отказавшим и отключенным ресурсам, и переопределены значения функций по характеристикам, которые должны удовлетворять отношению 1. Значения каждой характеристики физического ресурса уменьшается на сумму значений соответствующей характеристики виртуальных ресурсов назначенных на этот физический ресурс.

*Входом планировщика ресурсов* является остаточный граф доступных ресурсов  $H_{res}$  и множество ресурсных запросов  $\{G_i\}$ . Множество  $\{G_i\}$  формирует оркестратор облачной платформы. В него, кроме вновь поступивших запросов, могут входить элементы запросов, которые выполняются (виртуальные ресурсы) и для которых допустима миграция. Если в  $\{G_i\}$  есть виртуальные ресурсы, то для элементов графа  $H_{res}$ , на которых выполняются виртуальные ресурсы, переопределяются (увеличиваются) значения функций по характеристикам, которые должны удовлетворять отношению 1. Оркестратор также определяет время запуска планировщика.

*Требуется*: из множества  $\{G_i\}$  разместить на выполнение в ЦОД максимальное число запросов таких, что отображения  $\{A_i : G_i \rightarrow H, i = \overline{1, n}\}$  являются корректными. Виртуальные ресурсы включенные оркестратором во множество  $\{G_i\}$  сниматься с выполнения не должны.

*Выходом планировщика ресурсов* является множество отображений ресурсных запросов на физические ресурсы  $\{A_i : G_i \rightarrow H, i = \overline{1, n}\}$  и множество репликаций  $\{R_i\}, i = 0, 1, \dots$  storage-элементов.

Детальное описание задачи приведено в работах [2,3].

**Принципы построения алгоритмов.** Для решения сформулированной задачи были разработаны три алгоритма [3-5]:

1) алгоритм с последовательным планированием запросов (для назначения по жадному критерию выбирается запрос, и назначаются все его элементы) [4];

2) алгоритм с последовательным согласованным планированием различных типов ресурсов (сначала планируются виртуальные машины всех поступивших запросов, затем storage-элементы и после этого строятся маршруты для виртуальных каналов) [3];

3) алгоритм на основе схемы муравьиных колоний [5].

Первые два алгоритма основаны на сочетании жадных стратегий и стратегий ограниченного перебора. Если не удалось разместить очередной элемент запроса, то вызывается процедура ограниченного перебора. Если элемент является storage-элементом, то вызывается процедура репликации и только в случае неуспешного завершения процедуры репликации, вызывается процедура ограниченного перебора. Для процедуры ограниченного перебора задается параметр, который позволяет регулировать вычислительную сложность и точность алгоритма.

Третий алгоритм основан на использовании схемы муравьиных колоний для отображения виртуальных машин и storage-элементов на вычислительные узлы и системы хранения данных. Далее для полученных отображений виртуальных машин и storage-элементов на физические ресурсы строятся маршруты для виртуальных каналов.

**Основные возможности планировщика ресурсов.** Планировщик ресурсов, разработанный на основе предложенных алгоритмов, используется в самоорганизующейся облачной платформе [6] и обладает следующими основными возможностями:

1. Возможность задания требуемого набора SLA. Планировщик автоматически настраивается на заданный набор SLA. Это достигается введением трех возможных отношений между требованиями SLA и характеристиками физических ресурсов:

- Недопустимость перегрузки емкости физического ресурса. Примеры характеристик: количество ядер, объем памяти, пропускная способность канала передачи данных.
- Соответствие типа запрашиваемого ресурса типу физического ресурса. Примеры характеристик: тип ядра, способ обеспечения надежности системы хранения данных.

- Наличие требуемых характеристик у физического ресурса. Примеры характеристик: тактовая частота ядра, скорость считывания/записи системы хранения/данных, время доставки сообщения.
2. Отображение запросов на вычислительные ресурсы, системы хранения данных, сетевые ресурсы происходит согласованно в смысле соблюдения соглашений о качестве сервиса (SLA).
  3. Устранение сегментации физических ресурсов за счет миграции виртуальных ресурсов в ЦОД. При этом есть возможность учета затрат на миграцию. Это достигается путем введения меток запрета миграции виртуальных ресурсов, для которых время миграции превышает допустимый порог.
  4. Возможность обеспечения требуемого баланса между временем работы и качеством получаемого решения. Это достигается за счет использования алгоритмов сочетающих жадные стратегии и стратегии ограниченного перебора.
  5. Возможность удаления или добавления виртуальных ресурсов в работающую виртуальную сеть (тенант).
  6. Возможность настройки алгоритма на архитектуру ЦОД и структуру запросов. Это достигается путем замены жадных критериев выбора очередной сети для размещения, элемента сети и места размещения элемента в ЦОД.
  7. Возможность компактного размещения виртуальной сети с точки зрения количества хопов между ее элементами. Это достигается использованием соответствующих жадных критериев.
  8. Возможность устранения перегрузки входных каналов систем хранения данных. Это достигается репликацией виртуальных систем хранения данных. Данная возможность актуальна для баз данных, для которых интенсивность записи низкая, но высокая интенсивность считывания.
  9. Возможность запрещения размещения виртуальных ресурсов на указанные физические ресурсы. Это достигается введением для виртуального ресурса списка физических ресурсов, на которые он может быть размещен. Если список виртуального ресурса пуст, то для него отсутствует данное ограничение. Данная возможность необходима для проведения профилактического обслуживания оборудования. Для территориально распределенных ЦОД позволяет указать площадку, на которой должна быть размещена виртуальная сеть или ее отдельные элементы.

#### Список литературы

5. Computer: Cloud Computing. 2016, № 2.
6. Вдовин П.М., Зотов И.А., Костенко В.А., Плакунов А.В., Смелянский Р.Л. Сравнение различных подходов к распределению ресурсов в центрах обработки данных // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 5. С.71-83.
7. Вдовин П.М., Костенко В.А. Алгоритм распределения ресурсов в центрах обработки данных с отдельными планировщиками для различных типов ресурсов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 6. С. 80-93.
8. Зотов И. А., Костенко В. А. Алгоритм распределения ресурсов в центрах обработки данных с единым планировщиком для различных типов ресурсов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 61-71.
9. A. Plakunov, V. Kostenko. Data Center Resource Mapping Algorithm Based on the Ant Colony Optimization // Proceedings of the International Science and Technology Conference Modern Networking Technologies (MoNeTec), — Moscow, Russia, MAKS Pess, 2014. — pp.127–132.
10. V. Kostenko, A. Plakunov, A. Nikolaev, V. Tabolin, R. Smeliansky, M. Shakhova. Selforganizing Cloud Platform // Proceedings of the International Science and Technology Conference Modern Networking Technologies (MoNeTec), — Moscow, Russia, MAKS Pess, 2014. — pp. 77–82.

### **Робастность как показатель эффективности решения, принимаемого в условиях неопределенности. Задача о максимальной робастности.**

В.В. Кулагин

*Институт Проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия*

Рассмотрено обобщение инженерного приема принятия решений в условиях неопределенности, состоящего в максимизации способности системы противостоять

неучтенным факторам. Формализация приема привела к новой задаче математического программирования [1,2], к исследованию игрового равновесия, отличного от минимаксно-максиминного [3,4,5], к задачам управления, где максимизируется не функционал, заданный на траекториях системы, как обычно, а робастность как мера стойкости к внешним воздействиям [6,7,8].

Постановка задачи о максимальной робастности. Пусть  $x$  – решение,  $y$  – неопределенность; пара  $(x,y)$  – акт принятия решения, который оценивается функционалами  $g_i(x, y)$ ,  $h_j(x, y)$ ,  $J(x, y)$ . Пусть  $A$  – множество пар  $(x,y)$ , таких что

$$g_i(x, y) \leq 0, \quad (1)$$

$$h_j(x, y) = 0, \quad (2)$$

$$J(x, y) = \min_z J_y(z, y), \quad (3)$$

где  $J_y$  – сечение функции  $J(x, y)$ , а минимум берется с учетом ограничений (1), (2). При фиксированном  $y$  условия (1) – (3) есть задача условной минимизации.

Каждому решению  $x$  сопоставляется множество

$$Y(x) = \{ y \mid (x, y) \in A \},$$

называемое множеством робастности данного решения.

Задача о максимальной робастности: найти решение  $x^*$ , такое что либо

$$Y(x^*) \supseteq Y(x) \quad \forall x, \quad (i)$$

либо

$$f(Y(x^*)) = \max_x f(Y(x)), \quad (ii)$$

где  $f(\cdot)$  – некоторая функция множества.

Замечание 1. Решение задачи в форме (i) существует не всегда. Вопросы существования решения исследуются в [2]. В [6] для одной задачи механики управляемого движения решение получено в форме (i).

Замечание 2. В [4] предложена методика построения функции  $f(\cdot)$ , основанная на идее исчерпывания множества  $Y(x)$  шарами растущего радиуса и приводящая к задаче (ii) вида  $\max_x \text{root}_y r(x, y)$ , где  $\text{root}$  – корень уравнения. Показано, что при некоторых предположениях имеет место соотношение

$$\max_x \text{root}_y r(x, y) = \text{root}_y \max_x r(x, y).$$

В [7] решена задача вида (ii) управления движением материальной точки вдоль прямой под действием внешней силы при ограничениях по величине на координату и управляющую силу.

#### Заключение.

В докладе обсуждается метод работы с неопределенностью, в том числе и неограниченной (когда минимакс обычно не работает), который выявляет одну из самых основных характеристик системы – ее предельные возможности оставаться работоспособной при данном виде неопределенности.

#### **Список литературы**

1. Кулагин В.В. Задача математического программирования для функции с избыточным аргументом // Тезисы конференции «Математическое

- программирование и приложения». УрО РАН, институт Математики и механики. Екатеринбург, 2003.
2. Кулагин В.В. О минимизации функции с избыточной переменной // Тезисы конференции «Математическое программирование и приложения». УрО РАН, институт Математики и механики. Екатеринбург, 2015.
  3. Кулагин В.В. Игровое равновесие как эквивалентность двойных задач для функции двух переменных // В трудах V Московской международной конференции по исследованию операций. 2007. С. 278.
  4. Kulagin V. Balance point method of design under some kind of uncertainty. *International Conference Dedicated to the 90<sup>th</sup> Anniversary of L.S.Pontryagin. Optimal Control. Moscow*, 1998.
  5. Кулагин В.В. Антагонистическая игра на разорение // Тезисы конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» DOOR'07. Владивосток, 2007.
  6. Кулагин В.В., Слесарь Н.О. Максимально робастное перемещение материальной точки вдоль отрезка прямой за заданное время с минимальной скоростью // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011, № 4 (2). С. 189-190.
  7. Кулагин В.В. Задача оптимального управления при фазовых ограничениях и дефиците информации. В сб.: Математические вопросы анализа негладких моделей. Изд-во С-Петербургского ун-та. 1995. С. 159-170.
  8. Кулагин В.В., Проурзин В.А. Амортизатор, максимально робастный к изменению массы защищаемого объекта. Известия РАН, Механика твердого тела, 2005 №1, С. 34-44.

## **Безградиентные методы с неточным оракулом для решения задач выпуклой оптимизации\***

А.А. Лагуновская  
ИМПИ им. Келдыша РАН, Москва, Россия,  
МФТИ(ГУ), Московская область, Россия

В работе предложена безградиентная модификация метода зеркального спуска для решения задач негладкой стохастической выпуклой оптимизации на единичном симплексе. Вводится понятие оракула, выдающего не значения целевой функции, а немного смещенную реализацию  $f(x; \eta)$ :

$$|E_{\eta} [f(x; \eta)] - f(x)| \leq \delta.$$

В работе [1] рассматривается случай  $\delta=0$  и  $f(x; \eta) \equiv f(x)$ . В работах [2, 3]  $\delta=0$ . При этом оптимизация на симплексе рассматривается только в статье [2].

Цель данной работы – установить скорость сходимости предложенного метода, и определить, при каком уровне шума, факт его наличия не будет существенно сказываться на скорости сходимости.

Предложенный метод, требует в случае гладкости функции  $f(x)$

$$O\left(\frac{M^2 n \ln n}{\varepsilon^2}\right)$$

обращений к оракулу за реализацией функции  $f(x; \eta)$ , что с точностью до логарифмического множителя соответствует нижней оценке [1]. Здесь  $M$  – константа Липшица функции  $f(x)$  в 2-норме. Из-за этого обстоятельства (что используется 2-норма), полученная здесь оценка в определенных ситуациях может быть даже лучше нижней оракульной оценки [2].

Также предлагаются рандомизированные обобщения метода зеркального спуска и обсуждается зависимость способа выбора случайного направления и шага дискретизации, свойств (гладкость) целевой функции на оценки скорости сходимости.

Предлагаемый алгоритм схож с поведением рационального индивида, стремящегося минимизировать свои потери.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 15-31-20571 мол\_а\_вед, РФФИ 14-01-00722 а.

Доклад основан на работе [4].

### Список литературы

1. *Nesterov Yu.* Random gradient-free minimization of convex functions // CORE Discussion Paper 2011/1. 2011.
2. *Duchi J.C., Jordan M.I., Wainwright M.J., Wibisono A.* Optimal rates for zero-order convex optimization: the power of two function evaluations // IEEE Transaction of Information. 2015. V. 61. № 5. P. 2788–2806.
3. *Bubeck S., Cesa-Bianchi N.* Regret analysis of stochastic and nonstochastic multi-armed bandit problems // Foundation and Trends in Machine Learning. 2012. V. 5. № 1. P. 1–122. arXiv:1204.5721
4. *Гасников А.В., Лагуновская А.А., Усманова И.Н., Федоренко Ф.А.* Безградиентные прокс-методы с неточным оракулом для негладких задач выпуклой стохастической оптимизации на симплексе // Автоматика и телемеханика. 2016. (принята к печати) arXiv:1412.3890

## Ошибки при ранжировании по результатам тестирования

М. М. Луценко, М.Н. Кенесбай

ПГУПС Александра I, Санкт-Петербург, Россия

В последние годы тестирование стало важнейшим инструментом оценки уровня знаний. По результатам тестирования принимаются определяющие административные решения. Однако тестирование, как и всякий измерительный инструмент, имеет свои точность, надежность, разрешающую способность, которые необходимо учитывать при принятии тех или иных решений. В настоящее время по результатам тестирования абитуриенты ранжируются, и после этого принимается решения о возможности и месте дальнейшего обучения.

В работе [2] показано, что точность и надежность оценки уровня знаний тестируемого могут быть довольно низкие, а, следовательно, принимаемые решения будут содержать ошибки. В настоящей работе вместо изучения ошибок оценивания мы сравним априорное и апостериорное (по результатам тестирования) ранжирование. Авторам не известны аналитические формулы, позволяющие измерить степень искажения априорного ранжирования, вызванного процедурой тестирования, а поэтому было принято решение о создании имитационной модели [1].

При расчете уровней знаний тестируемых и трудностей заданий мы использовали теорию параметризации педагогических тестов или в английском варианте Item Response Theory (IRT). Перечислим основные предположения этой теории [3].

- Каждый тестируемый имеет некоторый уровень подготовки (знаний)  $\theta$  из множества возможных (допустимых) уровней знаний  $\Theta \subseteq R$ , а каждое задание некоторый уровень трудности  $\tau \in R$ .
- Каждому заданию трудности  $\tau$  приписана характеристическая функция выполнимости этого задания  $p(\theta, \tau)$  (Item characteristic curve ICC), значение которой – вероятность выполнения задания  $\tau$  тестируемым с уровнем подготовленности  $\theta$ .
- Оценка уровня знаний тестируемого происходит по результату выполнения им теста, содержащего  $N$  заданий с характеристическими функциями  $p(\theta, \tau_1), p(\theta, \tau_2), \dots, p(\theta, \tau_N)$ , каждое из которых выполняется независимо от других заданий.
- Как сложность (трудность) задания  $\tau$ , так и уровень знаний тестируемого  $\theta$  можно измерять в одинаковых единицах, а характеристическая функция  $p(\theta, \tau)$  зависит лишь от величины превышения уровня знаний тестируемого над трудностью выполняемого задания, то есть от разности  $\theta - \tau$ .

Обозначим через  $\theta_i$  уровень знаний тестируемого с номером  $i$ , где  $i = \overline{1, n}$ , а через  $n$  число участников тестирования. Каждому участнику предлагается один и тот же вариант теста, состоящий из  $N$  заданий различных трудностей:  $\tau_j$ ;  $j = \overline{1, N}$ . Результат выполнения каждого задания оценивается по дихотомному принципу: единица ставится, если задание выполнено верно, и ноль, если задание выполнено неверно.

Для расчета значений характеристической функции мы воспользуемся моделью Раша, в которой предполагается, что вероятность выполнения  $j$ -го задание теста  $i$ -м тестируемым равна:

$$p_{i,j} = (1 + \exp(\tau_j - \theta_i))^{-1}.$$

Обозначим через  $c_j$  – количество участников, верно выполнивших задание с номером  $j$  (число первичных баллов  $j$ -го задания);  $b_i$  – количество верно выполненных заданий участником с номером  $i$ . Оценки уровней знаний тестируемых  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$  и трудности заданий  $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_N$  могут быть получены по методу моментов, или по методу наибольшего правдоподобия из решения следующей системы уравнений [3]:

$$\sum_{i=1}^n p_{i,j} = c_j, \quad \sum_{j=1}^N p_{i,j} = b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Заметим, что возможные значения правых частей этой системы (числа  $b_i$ ) – целые числа от 0 до  $N$ . Поэтому эта система состоит из  $2N+1$  уравнений и содержит  $2N+1$  неизвестное. Система нелинейных уравнений (1) имеет бесконечное множество решений, получаемых из одного путем сдвига на произвольную константу.

При построении модели мы взяли результаты выполнения ЕГЭ по математике за 2011, 2012 годы по математике в Санкт-Петербурге [4]. Были рассчитаны уровни трудностей заданий, уровни знаний тестируемых, априорное распределение тестируемых по уровням знаний. При сравнении уровней знаний различных групп тестируемых средние уровни трудностей заданий выравниваются (принимаются равными нулю). Оказалось, что средние уровни знаний тестируемых в 2011 и 2012 годах почти равны, хотя число заданий 2012 году было больше, и средний балл по итогам тестирования был меньше.

Процедура выполнения теста имитировалась в Excel, при этом сравнивались априорный и апостериорный ранги тестируемых. Оказалось, что лишь у 67% тестируемых положение в группе изменилось менее чем на 10%. Примерно 17% тестируемых существенно улучшили свое положение в группе, а другие 16% существенно ухудшили положение.

Мы также изучили то, как число набранных баллов влияло на возможную ошибку ранжирования, построенную по результатам тестирования по математике в 2011 году. В частности, тестируемые набравшие от 20 до 30 сырых баллов (от 77 до 100 итоговых баллов) мало изменили ранг. С другой стороны ошибки в ранжировании тестируемых, набравших от 5 до 15 баллов (от 30 до 66 итоговых баллов) могут достигать 350 позиций в группе из 1000 человек.

#### Список литературы

1. Гарец С.Б., Елисеева Д.В., Соснина А.С., Шадринцева Н.В. Имитационная модель изменения ранга тестируемого, неделя науки СПбГПУ : материалы научно-практической конференции с международным участием. Институт информационных технологий и управления СПбГПУ. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014, с.83-85.
2. Луценко М.М. Теория статистических решений. Ч. 1: учеб. пособие / М. М. Луценко. – СПб.: Петербургский гос. ун-т путей сообщения, 2011.
3. Нейман Ю.М., Хлебников В.А. Введение в теорию моделирования и параметризации педагогических тестов, 2000, М., 168 с.
4. [www.ege.spb.ru/ege/statistika-i-analitika/ege-2013](http://www.ege.spb.ru/ege/statistika-i-analitika/ege-2013) (Официальный информационный портал ЕГЭ).

### Модель анализа проектов развития гетерогенной вычислительной системы

Ю.Е. Малашенко, И.А. Назарова

*Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

В настоящее время развитие компьютерных технологий является одним из приоритетных направлений современной науки. При решении важнейших научно-технических задач используются высокопроизводительные вычислительные системы (ВС). Однако с течением времени оборудование любой ВС устаревает, а требования к ее функциональным возможностям возрастают, что приводит к необходимости частичной или полной замены вычислительных устройств. Таким образом возникает проблема модернизации ВС или создания новой системы, отвечающей современным требованиям.

В докладе рассматривается ВС, обрабатывающая интенсивный поток разнородных ресурсоемких заданий переборного типа. Для эффективного использования ресурсов ВС и

удовлетворения принципа равнозначности заданий при диспетчеризации заданий используются оптимизационные модели и подходы [1, 2], формирующие определенную программно-аппаратную среду.

В качестве характеристики функциональных возможностей ВС предлагается рассматривать объемы различных работ, одновременно выполнимые на заданном интервале времени. Каждому допустимому распределению имеющихся ресурсов ставится в соответствие вектор из множества выполнимых работ. Точки, лежащие на границе последнего, определяют предельные функциональные возможности ВС. Значения предельных функциональных характеристик вычисляются с помощью показателей производительности ВС, работающей в монопольных режимах.

При эксплуатации реальных ВС изменение структуры и интенсивности потока заявок приводит к необходимости увеличения производительности системы. Одной из основных проблем модернизации является определение комплектации, при которой функциональные возможности ВС будут соответствовать новым требованиям к структуре и объемам выполняемых работ. Целью модернизации считается увеличение объемов обработанных данных при условии эффективного использования вычислительной мощности, а противоречивые требования пользователей к модифицированной ВС определяются ожидаемой производительностью при ограничениях на финансовые затраты и энергопотребление.

Для решения указанной проблемы используется многокритериальную модель, в рамках формализма которой задача сводится к проверке принадлежности вектора требований множеству выполнимых работ. Для подбора новой комплектации ВС и распределения ресурсов, удовлетворяющих требованиям пользователей, решается последовательность взаимосвязанных задач оптимизации. При оценке различных возможных вариантов модернизации используется метод анализа проектов, основанный на получении гарантированных оценок стоимости модернизации и потребляемой мощности ВС при условии выполнения запланированных объемов работ. Для каждого проекта последовательно:

- определяется структура множества функциональных возможностей и предельных характеристик ВС;
- вычисляются гарантированные нижние оценки финансовых затрат и энергопотребления при фиксированных объемах вычислительных работ различных видов, выполнимых совместно за один операционный цикл;
- проводится сравнение полученных значений векторов критериев и отбирается наилучший вариант комплектации, доминирующий остальные по наибольшему числу показателей.

В качестве иллюстрации работы модели на примерах исследованы различные варианты новой ВС. Анализ эскизных вариантов показал, что изменение направления магистрального развития ВС, а в рамках модели - направляющего вектор-луча требований  $q$ , приводит к кардинально отличающимся проектам комплектации ВС.

Полный текст доклада можно найти в [3].

#### Список литературы

1. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Управление ресурсоемкими вычислениями в условиях неопределенности. III. Динамическое конкурентное распределение ресурсов // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 50-60.
2. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Нормативный динамический анализ предельных режимов функционирования гетерогенной вычислительной системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 73-89.
3. Малащенко Ю.Е., Назарова И.А. Многокритериальная модель анализа проектов развития гетерогенной вычислительной системы. М.: ВЦ РАН, 2015.

## Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике

В.Г. Малинов

*Ульяновский госуниверситет, Россия*

В докладе предлагается непрерывный проекционный метод минимизации с переменной метрикой (НПМММ) второго порядка для решения выпуклых задач минимизации на простом множестве в сепарабельном гильбертовом пространстве. Сходимость и оценки

скорости сходимости метода для выпуклых функций доказаны с помощью нового вспомогательного неравенства. НПММПМ первого порядка был исследован в работе [1].

1. Рассмотрим задачу минимизации на простом множестве

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \quad (1)$$

где  $Q \subset H$  – выпуклое замкнутое простое множество из сепарабельного гильбертова пространства  $H$ , нормированного скалярным произведением,  $\forall \mathbf{x} \in H$   $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ ; функция  $f(\mathbf{x})$  определена и непрерывно дифференцируема по Фреше на  $H$ , с Липшицевыми градиентами  $\nabla f(\mathbf{x})$ .

2. Задачу (1) решаем в пространстве с двумя метриками. Первая метрика — обычная евклидова (см. (1)), а вторая  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{G}(\mathbf{x})} = (\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$ , введена новым (см. [1]) скалярным произведением  $(\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})$ , где  $\mathbf{G}(\mathbf{x}): H \rightarrow H$ , при каждом фиксированном  $\mathbf{x} \in H$ , есть положительный самосопряженный линейный оператор новой метрики пространства. Полученное пространство обозначим  $H_1$  [2].

3. Пусть функция  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in C^2[0, +\infty)$  (аргумент  $t$  часто опускаем) является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) &= \\ &= P_Q^{\mathbf{G}(\mathbf{x})}[\mathbf{y}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{y}(t))\nabla f(\mathbf{y}(t))], \quad t \geq 0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{x}(t) + \sigma(t)\mathbf{x}'(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in H_1$ ;  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \sigma(t)$  – заданные функции, параметры НПММПМ второго порядка (2); оператор метрики  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  таков, что  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H_1$

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq M\|\mathbf{u}\|^2, \quad 0 < m \leq M, \quad (3)$$

а для обратного ему оператора  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H_1$  имеем

$$\|\mathbf{u}\|^2 / M \leq (\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|\mathbf{u}\|^2 / m, \quad (4)$$

где числа  $m$  и  $M$  из (3); в правой части (2) реализуется вычисление  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ -проекции. Аналог метода (2) с обычной проекцией  $P_Q(\mathbf{v})$  в первой метрике исследован в [2].

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия: 1) множество  $Q \subset H_1$  выпукло и замкнуто, дифференцируемая по Фреше выпуклая функция  $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(H_1)$  и  $\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty$ ,  $Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset$ ; 2) для оператора метрики  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  выполнены условия (3) и (4); 3) имеют место неравенства  $\|0.5(\mathbf{v} - \mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|$ ,  $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H_1$ ; 4) параметры НПММПМ (2)  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \sigma(t)$  таковы, что  $\alpha(t) \in C^2[0, \infty)$ ,  $\beta(t), \gamma(t) \in C^1[0, \infty)$ ,  $\alpha(t) \geq \alpha_0 > 0$ ,

$$\beta(t) \geq \beta_0 > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \alpha_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \beta_0, \quad \gamma(0) \geq \gamma(t) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \gamma_0 > 0;$$

$$\alpha'(t) \leq 0, \quad \beta'(t) < \sigma'(t) \leq 0, \quad \gamma'(t) \leq 0, \quad \alpha''(t) \geq 0;$$

$$0 < \gamma < 4(m^2 - a) / L, \quad 0 < \sigma(t) < \beta < 1,$$

$$0 < \alpha < \beta^2 / 2, \quad 4m/5 = a < m^2, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Тогда при любых начальных приближениях  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in H_1$  для траектории НПММПМ (2) существует точка  $\mathbf{x}^* \in Q_*$ , что

$$\int_{s=0}^{s=+\infty} \left[ \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}'(s)\|^2 + \|\mathbf{x}''(s)\|^2 \right] ds < +\infty,$$

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}'(t)\| + \|\mathbf{x}''(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

4. Приведём оценки скорости сходимости НПММПМ (2), (5) для выпуклых функций.

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда при любых начальных приближениях  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in H_1$  траектория метода (2), (5) сходится к точке  $\mathbf{x}^* \in Q_*$  и  $\forall t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| &\leq [b_{31}(t)e^{-1}(t)]^{1/2}, \\ \|\mathbf{x}'(t)\| &\leq (C_{31}m^{-2}\alpha^{-1})^{1/2}, \\ \|\mathbf{x}''(t)\| &\leq \left\{ C_{31}m^{-4}\alpha^{-2} \left[ \frac{5}{3}m^2\beta + \left( a + \frac{L\gamma}{4} \right) (\beta - \sigma)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{3}b_{31}e^{-1}(t) \right\}^{1/2}, \text{ где } e(t) = \exp\left( \int_0^t \frac{(a_{15}-a'_{14})ds}{a_{14}(s)} \right), \\ C_{31} &= a_{12}(0) \|\mathbf{x}^1\|^2 + a_{14}(0)(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*) + \\ &\quad + (a_{15}(0) - a'_{14}(0)) \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2; C_{32} = C_{31} / a_{14}^0; C_{33} = e(0) \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2; \\ b_{31}(t) &= C_{32}g_3(t) + C_{33}; a_{12} = m^2\beta^2 - \left( a + \frac{L\gamma}{4} \right) (\beta - \sigma)^2 - 2m^2\alpha, \quad a_{14}(t) = m^2\alpha, \\ a_{15}(t) &= m^2\beta, \quad a \text{ из теоремы 1; } g_3(t) = \int_{s=0}^{s=t} e(s)ds. \end{aligned}$$

В докладе обсуждаются вспомогательные неравенства, обоснование сходимости и оценок скорости сходимости.

#### Список литературы

1. Антипин А.С., Васильев Ф.П. О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой// Известия вузов. Математика. 1995. № 12(403). С. 3–9.
2. Малинов В.Г. О версии непрерывного проекционного метода минимизации второго порядка с переменной метрикой// Журнал Средневолжского математического общества. 2014. Т. 16. № 1. С. 121–134.

## Об одной фильтровой задаче, связанной с Четвёртой задачей Золотарёва\*

В.Н. Малозёмов, Г.Ш. Тамасян  
Санкт-Петербургский государственный  
университет, Санкт-Петербург, Россия

Обозначим через  $\mathcal{H}_n^n$  семейство дробно-рациональных функций вида

$$H(x, u) = \frac{x_0 u^n + x_1 u^{n-1} + \dots + x_n}{u^n + x_{n+1} u^{n-1} + \dots + x_{2n}}.$$

При фиксированном векторе коэффициентов  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{2n})$  функция  $H(x, u)$  определена на расширенной прямой  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , причём  $H(x, \infty) = x_0$ .

Рассмотрим экстремальную задачу фильтрового типа:

$$\text{минимизировать величину } \varphi(x) = \sup_{|u| \geq \frac{1}{\tau}} H(x, u)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} |H(x, u) - 1| &\leq \Delta, \quad u \in [-1, 1]; \\ H(x, u) &\geq 0, \quad |u| \geq \frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta$  и  $\tau$  — параметры. Они берутся из интервала  $(0, 1)$ .

В работе [1] установлено, что при любом натуральном  $n$  задача имеет ровно два решения, каждое из которых характеризуется наличием полного  $(2n + 2)$ -точечного альтернанса. Это позволяет свести исходную задачу к решению системы нелинейных

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта СПбГУ 9.38.205.2014

уравнений  $4n$ -го порядка при нечетном  $n$  и  $(2n - 2)$ -го порядка при четном  $n$ . Систему предлагается решить в два этапа. На первом этапе выделяется подсистема, с помощью которой находится хорошее начальное приближение для полной системы. На втором этапе решается полная система нелинейных уравнений. Мы покажем, как это делается при  $n \in 1:10$ .

#### Список литературы

1. Гхашим М., Малозёмов В.Н. Эквивалентность в задачах наилучшей дробно-рациональной аппроксимации // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 1992. Вып. 2. С. 3-8.

## Алгоритм построения структуры базы данных с минимальной избыточностью информации для систем реального времени

С.Н. Мирошник

ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Задано множество независимы программных модулей  $M_1, \dots, M_n$ . Каждый модуль использует поля  $\phi$  из общего набора полей  $\phi_1, \dots, \phi_r$  файла  $\Phi$ . Поля пронумерованы:  $1, \dots, r$ . Запись модуля  $M_i$  длиной  $l_i$  есть набор полей  $\{\phi\}_i$ , идущих подряд из набора  $\phi_1, \dots, \phi_r$ . Записи разных модулей могут использовать одинаковые поля. Основная идея минимизации избыточности информации состоит в том, чтобы, используя определение близости модулей, объединить их в различные группы (файлы), причем каждый модуль попадает только в один файл с последующим вычислением двух видов избыточностей  $I_1$  и  $I_2$  [1, 2].  $L$  – длина записи файла  $F$  или  $L_i$  – длина набора модулей  $\{M\}_i$ . Каждый модуль обращается к полям своего файла. Из-за разности длины  $l$  модуля  $M$  и длины  $L$  файла  $F$  образуются неиспользуемые этим модулем поля,  $L \geq l$ . Эти поля образуют внутрифайловую избыточность  $I_1(F)$  и  $I_1(F) = L \cdot s - \sum_{i=1}^s l_i$ , где  $s$  – число модулей в файле  $F$ . Пусть построены файлы  $F_1, \dots, F_k$ . Тогда  $I_2 = \sum_{i=1}^k L_i - r$  – число повторяющихся полей, и есть межфайловая избыточность.

Пусть  $\exists \{M\}_s$  ( $s$  – число модулей в наборе), и вычислим  $I_1^s$ .

Включение  $M_{s+1} \subset \{M\}_s$  изменяет  $I_1^s$  на  $\Delta I_1^{s+1} = I_1^{s+1} - I_1^s$ . Соответственно  $I_2^{s+1} = L_s + l_{s+1} - L_{s+1}$ .

Определение. Модуль  $M_{s+1}$  и  $\{M\}_s$  являются близкими, если  $\Delta I_1^{s+1} < I_2^{s+1}$ .

Задан модуль  $M^*$  и его поля  $\{\phi\}^*$ . Модуль  $M$  является внешним к  $M^*$ , если  $|\{\phi\} \cap \{\phi\}^*| = d$ ,  $d \neq 0$ , ( $\{\phi\}$  – поля модуля  $M$ ). Для того чтобы построить набор модулей  $\{M\}$  близких к  $M^*$  алгоритму необходим многократный перебор модулей. Чтобы избежать этого упорядочим числа  $d$ :  $d_i \leq d_j$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ . Модуль  $M$  является внутренним относительно  $M^*$  или группы  $\{M\}_s$ , если  $\{\phi\} \subset \{\phi\}^*$  или  $\{\phi\} \subset \{\phi\}_s$ .

Знаками «+» или «-» обозначим модули, являющиеся близкими или неблизкими.

Найдем модуль  $M^*$ :  $l = \max(l_1, \dots, l_n)$  и, построим группу близких к  $M$  или к ранее найденной группе близких модулей  $\{M^+\}_s$ .

Замечания.

1. Для  $l_i < [\frac{1}{2}l]$  и  $d_i = 0$ :  $M_i \rightarrow M_i^-, i = 1, \dots, n$ .

2. Для  $l_i = l$  и  $d_i < [\frac{1}{3}l]$ :  $M_i \rightarrow M_i^+, i = 1, \dots, n$ .

3. Утверждение 1.

Пусть  $\exists M^{+*} : l^* \leq l, d^* \geq [\frac{1}{3}l]$ . Тогда для  $M^{**} : l_{**} \leq l, d_{**} < [\frac{1}{2}l] : M^{**} \rightarrow M^{+**}$ .

3.1. Для  $\forall M_i$  и  $d_i \geq [\frac{1}{2}l] : M_i \rightarrow M_i^-, i=1, \dots, n$ . Эти модули исключаются из перебора.

3.2. Верхняя оценка числа модулей в  $\{M^+\}_s$  для  $l_i = l$  и  $d_i < d_j, i, j=1, \dots, s$  есть:  
 $\max |\{M^+\}_s| \leq [\frac{1}{2}l]$ .

3.3. Верхняя оценка максимального числа модулей в  $\{M^+\}_s$  для  $l_i \leq l, d_i = 0$  есть:  
 $\max |\{M^+\}_s| \leq \frac{1}{2}[\frac{1}{2}l] \cdot ([\frac{1}{2}l] + 1)$ . Знак « $\Leftarrow$ » нарушается, если  $l_i \leq l$  и  $d_i \neq 0$ .

4. Утверждение 2. Ранее отвергнутый модуль  $M_i^- \rightarrow M_i^+$  и получает номер  $i+1$ , если  $2l_{i+1} > L_i$ . Здесь  $L_i$  длина набора  $\{M^+\}_i$ .

Утверждение 2 не распространяется на пункты 1, 3.1.

Доказательство замечаний использует определение внешних и внутренних модулей.

Учитывая замечания для поиска набора  $\{M^+\}_s$  близких к  $M$  модулей можно существенно уменьшить перебор модулей.

После формирования набора близких модулей  $\{M\}$ , вычисляется его длина  $L$ , а также  $I_1(\{M\})$ . Эти модули исключаются из дальнейшего формирования других групп модулей. Построенные группы оформляются в виде файлов  $F_1, \dots, F_k$  с атрибутами  $L_1, \dots, L_k$  и  $I_1(F_1), \dots, I_1(F_k)$ . После этого вычисляется межфайловая избыточность  $I_2(F_1, \dots, F_k)$ .

Величина  $I = I_2 + \sum_{i=1}^n I_1(F_i)$  является критерием качества БД, состоящая из файлов  $F_1, \dots, F_k$ .

Модули  $M$ , не вошедшие ни в один из наборов файлов оформляются как отдельные файлы, для которых  $I_1 = 0$ . Из-за неоднозначности выбора первого модуля может быть построено множество  $\{\text{БД}\}$  и, соответственно  $\{I\}$  из которых выбирается БД с  $\min I$ .

#### Список литературы

1. Мирошник С.Н., Фуругян М.Г. Оптимизация структуры базы данных реального времени // Некоторые алгоритмы планирования в многопроцессорных системах. М.: ВЦ РАН, 2012. С. 24-37.

2. Мирошник С.Н. Алгоритмы оптимизации структуры БД реального времени с минимальной избыточностью информации // Некоторые алгоритмы составления расписаний в многопроцессорных системах. М.: ВЦ РАН, 2015. С. 25-34.

## Градиентный спуск в гильбертовых пространствах в условиях шума и его приложения к численному решению задач оптимального управления со свободным правым концом

*Мохаммед Ахмед (МФТИ)*

Если рассматривать класс задач оптимального управления линейных по фазовым переменным, которые сводятся к (выпуклым) Ляпуновским задачам (см. параграф 4.3 книги [5]), то для решения таких задач можно применять современную теорию быстрых градиентных методов с неточным оракулом [6, 7] (для этого еще нужно выбрать в качестве гильбертова пространства  $L_2(U)$  – пространство квадратично интегрируемых функций в пространстве управлений). Будет иметь место глобальная сходимость.

Следуя [8], можно показать, что если ограничиваться локальной теорией, то сказанное выше можно перенести и на общие задачи оптимального управления. Концепция неточного оракула (градиент доступен с шумом не случайной природы, про шум ничего не известно, кроме его масштаба (уровня)) позволяет привнести сюда элемент новизны, существенно мотивированный практическими нуждами – принципиальной невозможностью (в типичных случаях нет явных формул) решать с абсолютной (очень

хорошей) точностью вспомогательную задачу на каждом шаге градиентного спуска. Например, решение такой вспомогательной задачи для класса задач оптимального управления со свободным правым концом приводит к двум начальным задачам Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (важно, чтобы СОДУ для фазовых переменных и сопряженных решались, скажем, методом Эйлера, на одной и той же сетке), которые необходимо решить для вычисления градиента функционала [9].

Однако, в действительности, почти все практически интересные задачи (за редким исключением, к коим можно отнести уже упомянутый класс Ляпуновских задач [5]) в бесконечномерных пространствах не являются выпуклыми, поэтому здесь имеет смысл говорить лишь о локальной теории [10]. Если ограничиться неускоренными методами (например, обычными градиентными методами), то можно показать, что при весьма общих условиях эти методы могут быть использованы в гильбертовом пространстве в концепции неточного оракула и для невыпуклых (но гладких) функционалов, причем с аналогичными оценками скорости сходимости (отличие от выпуклого случая будет в том, что метод сходится лишь к локальному экстремуму, в бассейне притяжения которого окажется точка старта). В конечномерных пространствах это показано (в концепции неточного оракула) в работе [11].

В настоящей работе мы переносим результаты работы [11] на гильбертовы пространства, и адаптируем их к специфике задач оптимального управления со свободным правым концом.

Заметим, что задачи оптимального управления можно численно решать, построив соответствующую (аппроксимирующую) задачу оптимального управления с дискретным временем, что приводит к конечномерным задачам, для решения которых можно использовать конечномерный вариант градиентного спуска в невыпуклом случае (с точным оракулом). Этот путь, как правило, и предлагается в большинстве источников (см., например, [9, 12]). Однако при таком подходе мы должны уметь (по возможности точно) решать сложную задачу оценки качества аппроксимации исходной задачи оптимального управления ее дискретным по времени вариантом.

Другой выбранный нами (теоретически обоснованный) способ рассуждений, по сути, приводящий к необходимости решать все те же конечномерные задачи, заключается в рассмотрении исходной задачи оптимального управления и ее решения бесконечномерным вариантом градиентного спуска в невыпуклом случае (с неточным оракулом). Неточность оракула существенна. Поскольку на каждой итерации этого градиентного метода необходимо решать две задачи Коши для СОДУ, что в общем случае можно сделать лишь приближенно, но с лучшим контролем точности, чем при первом подходе. Отметим, что во многих “физических” приложениях схема Эйлера имеет хорошие теоретические свойства сходимости (устойчивости). Связано это с тем, что на оптимальном режиме, как правило, наблюдается некоторая стабилизация поведения системы управления, что приводит к устойчивости якобиана прямой и обратной системы дифференциальных уравнений.

Планируется сравнить предложенный в работе подход с линейкой подходов, развиваемых А.Ю. Горновым [13].

Автор выражает благодарность А.В. Гасникову за постановку задачи и курирование работы. А также Б.Т. Поляку за ценные замечания.

## Литература

5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.
6. *Devolder O.* Exactness, inexactness and stochasticity in first-order methods for large-scale convex optimization. CORE UCL, PhD thesis, March 2013.
7. *Dvurechensky P., Gasnikov A.* Stochastic Intermediate Gradient Method for Convex Problems with Inexact Stochastic Oracle // *Journal Optimization Theory and Applications*. 2016. [arXiv:1411.2876](https://arxiv.org/abs/1411.2876)
8. *Halkin H.* Liapounov’s theorem of the range of a vector measure and Pontryagin’s maximum principle // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1962. V. 10. P. 296–304.
9. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011.
10. *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // *ЖВМ и МФ.* 1966. Т. 6. № 5. С. 787–823.
11. *Bogolubsky L., Dvurechensky P., Gasnikov A., Gusev G., Nesterov Yu., Raigorodskii A., Tikhonov A., Zhukovskii M.* Learning Supervised PageRank with Gradient-Based and Gradient-Free Optimization Methods // e-print, 2016. [arXiv:1603.00717](https://arxiv.org/abs/1603.00717)

12. *Евтушенко Ю.Г.* Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. М.: ВЦ РАН, 2013.
13. *Горнов А.Ю.* Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.

## Определение параметрически устойчивых решений систем линейных неравенств относительно полиэдральных норм<sup>\*</sup>

О.В. Муравьева  
МПГУ, Москва, Россия

Для системы линейных неравенств  $Ax \geq b$ ,  $A \in R^{m \times n}$ ,  $b \in R^m$ ,  $x \in R^n$  рассматривается изменение множества решений при изменении всех параметров. Для решения системы  $x^0$  определяется радиус параметрической устойчивости как величина минимального изменения параметров, в результате которого  $x^0$  не является решением, и рассматривается задача определения наиболее устойчивого решения. Критерием является норма матрицы коррекции параметров.

$$R(x) = \inf\{\|[-h, H]\| : (A + H)x \geq b + h\},$$

$$R^* = \max\{R(x) : Ax \geq b\}.$$

Примером задачи такого типа является определение линейного решающего правила, устойчивого к ошибкам измерения признаков объектов. В статье [1] предложен метод построения разделяющей гиперплоскости, для которой предельное изменение координат заданных точек, сохраняющее свойство делимости, имеет наибольшее значение.

Рассмотрим матричные нормы, индуцированные полиэдральными векторными нормами

$$\|H\|_{1,1} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Hx\|_1}{\|x\|_1}, \quad \|H\|_{\infty, \infty} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Hx\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}},$$

а также  $l_1$  и  $l_{\infty}$  нормы

$$\|H\|_1 = \sum_{ij} |h_{ij}|, \quad \|H\|_{\infty} = \max_{ij} |h_{ij}|.$$

Показано, что для всех приведенных критериев задача определения наиболее параметрически устойчивого решения системы линейных неравенств сводится к задаче линейного программирования.

### Список литературы

1. Муравьева О.В. Исследование параметрической устойчивости решений систем линейных неравенств и построение разделяющей гиперплоскости // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т.21. № 3. С 53–63.

## Визуальная среда комплексного анализа параллельных алгоритмов оптимизации<sup>†</sup>

Ю.В. Орлов  
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия

Многие задачи глобальной оптимизации относятся к классу NP и их решение требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому представляется целесообразным применение методов параллельных [1,2] и распределенных вычислений [3]. Метод ветвей и

<sup>\*</sup> Работа выполнена в рамках Государственного задания № Министерства образования и науки, номер государственной регистрации - 01201153724

<sup>†</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-07-00873 А и № 16-07-00458 А)

границ (МВГ) является одним из наиболее распространенных алгоритмов решения задач дискретной оптимизации. В его основе лежит идея декомпозиции, которая делает естественным применение параллельных вычислений. Обзор различных подходов можно найти в работах [4-6].

Основной проблемой при параллельной реализации методов типа ветвей и границ является адекватная балансировка вычислительной нагрузки между параллельными процессорами. Так как информационный граф алгоритма [7], в данном случае представляющий собой дерево, заранее не известен, особую важность получают методы динамической балансировки, перераспределяющие вычисления в процессе работы в зависимости от загрузки процессоров. Часто без визуализации, используя одну лишь трассу, выявить причины потери производительности практически невозможно, так как трассы выполнения параллельных программ обычно очень велики по объему и слабо поддаются визуальному анализу. Для того, чтобы проводить исследование алгоритмов балансировки без проведения ресурсоемких вычислений, был разработан симулятор многопроцессорной системы BNB-Simulator[8] на базе компонентов библиотеки BNB-Solver[9,10]. Данная библиотека предлагает набор модулей для разработки параллельных приложений. Симулятор представляет собой приложение, которое имитирует выполнение реального параллельного приложения. Результатом работы симулятора является трасса того же формата, что и трасса параллельного приложения, разработанного на основе BNB-Solver.

Среда комплексного анализа позволяет анализировать трассу, загруженную из файла с расширением «.trc». Таким образом, визуальная среда дает возможность работать с трассой установленного формата, независимо от источника ее получения – реального приложения или симулятора. Изначально предполагалось, что среда комплексного анализа в процессе своей работы будет хранить данные трассы внутри двумерного массива процессоров размерности  $n*m$ , где  $n$  – количество процессоров, а  $m$  – количество проработанного времени, измеряемого специальными метками. Однако такой подход оказался неприемлемым при обработке трасс большого размера, так как требовал больших ресурсов. Поэтому было принято решение делить в процессе обработки трассу на множество файлов, содержащих информацию о работе некоторого подмножества процессоров на определенном промежутке времени. Для отражения низкоуровневых событий (обмен данными) внутри многопроцессорной системы из трассы извлекается информация о таких событиях и сохраняется в отдельные файлы.

Для более детального исследования поведения процессов на определенном промежутке времени удобно использовать окно визуализации графиков производительности. В данном окне поведение каждого процесса представлено в виде набора графиков на координатной плоскости, отображающими состояние процесса в конкретный момент времени.

При запуске параллельного приложения на довольно большом количестве узлов (более 10), удобнее использовать окно визуализации таблицы процессоров. Каждый процесс в данном окне изображен в виде квадрата. В зависимости от своего состояния квадрат меняет цвет. Такой способ визуализации не позволяет нам исследовать поведение процесса на отрезке времени, зато дает возможность видеть состояние всей системы в каждый момент времени ее работы. Часто при отладке алгоритма по трассе нужно обладать информацией о коммуникации процессов. С этой целью в среду комплексного анализа было добавлено окно визуализации обмена данными. Визуализация дает возможность выявлять некоторые логические ошибки в алгоритме балансировки нагрузки, например, тупиковые ситуации.

#### Список литературы

1. М. А. Посыпкин, И. Х. Сигал, Исследование алгоритмов параллельных вычислений в задачах дискретной оптимизации ранцевого типа // Ж. вычисл.матем. и матем. физ., 2005, том 45, номер 10, С. 1801–1809.
2. И. Х. Сигал, Я. Л. Бабинская, М. А. Посыпкин Параллельная реализация метода ветвей и границ в задаче коммивояжера на базе библиотеки BNB-Solver комплексах // Труды ИСА РАН 2006. Т. 25, С.26-36.
3. Distributed Computing and Its Applications. // Felicity Press, Bristol,USA, 2005.ISBN: 0-931265-10-2, 298p. Монография (соавторы: S.V. Emelyanov, A.P. Afanasiev, Y.R. Grinberg, V.E. Krivtsov, B.V. Peltsverger, O.V. Sukhoroslov, R.G. Taylor, V.V. Voloshinov).
4. Лупин С. А., Посыпкин М. А. Технологии параллельного программирования: Учеб. пос //Сер. Высш. образ-ние. М.: Форум Инфра-М. – 2008. – Т. 208. – С. 2000.
5. Gendron B., Crainic T. G. Parallel branch-and-branch algorithms: Survey and synthesis //Operations research. – 1994. – Т. 42. – №. 6. – С. 1042-1066.

6. Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Баркалов К. А. Параллельные методы решения задач глобальной оптимизации // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2009. – Т. 52. – №. 10. – С. 25-33.
7. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. БХВ-Петербург. 2002. С. 329. 13.
8. Страница проекта BNB-Simulator <https://github.com/fominandrey/bnb-simulator>.
9. Evtushenko Y., Posypkin M., Sigal I. A framework for parallel large-scale global optimization // Computer Science-Research and Development. 2009. Т. 23. №. 3-4. С. 211-215.
10. Страница проекта BNB-Solver <https://github.com/mposypkin/BNB-solver>.

## **Алгоритм балансировки нагрузки для распределенной платформы управления ПКС\***

В.Н. Пашков

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Центр прикладных исследований  
компьютерных сетей, Москва, Россия*

В программно-конфигурируемых сетях (ПКС) [1] логически-централизованное управление сетевой инфраструктурой и потоками данных осуществляется сетевой операционной системой (или контроллером) за счет возможности «конфигурировать» сетевые устройства по открытому интерфейсу. Один из наиболее перспективных подходов для обеспечения масштабируемости и надежности управления в ПКС заключается в создании распределенной платформы управления сетью (например, Onix [2], HAC [3], ONOS [4]). Актуальным вопросом в процессе функционирования распределенной платформы управления является проблема балансировки нагрузки между ее узлами (контроллерами доменов).

Под управлением распределенной платформы ПКС сеть логически разделяется на домены управления, каждым из которых управляет контроллер. Нагрузка на каждый контроллер создается управляющими (Packet-in) запросами от коммутаторов на установку правил при появлении новых потоков в сети. Задача балансировки нагрузки заключается в распределении управления коммутаторами между контроллерами распределенной платформы таким образом, чтобы нагрузка на каждый контроллер не превышала установленного максимального значения, и количество активных контроллеров было минимальным.

Балансировка нагрузки достигается за счет использования механизма передачи управления коммутатором (на основе механизма ролей OpenFlow [5]) с одного контроллера домена на другой, позволяющий, соответственно переводить нагрузку, порождаемую данным коммутатором.

В рамках предлагаемого решения выделяется три основных этапа:

1. Разделить все коммутаторы на группы так что, суммарная нагрузка, генерируемая группой коммутаторов, не превышает установленного максимального значения для контроллера домена.
2. Распределить группы коммутаторов между контроллерами доменов распределенной платформы с минимальным количеством передач управления коммутаторами сети.
3. Реализовать новое распределение управления коммутаторами.

В докладе будут рассмотрены алгоритмы, предлагаемые на каждом из этапов, и приведены результаты их экспериментального исследования.

### **Список литературы**

1. Смелянский Р.Л. Программно-конфигурируемые сети. // «Открытые системы», №09, 2012.
2. Koponen T., Casado M., Gude N., Stribling J., et al. Onix: A distributed control platform for large-scale production networks. // OSDI '10, volume 10. USENIX, 2010.

---

\* Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки Российской Федерации, уникальный номер (ID) RFMEFI60914X0003. Соглашение № 14.609.21.0003.

3. Pashkov V., Shalimov A., Smeliansky R. Contoller Failover for Enterprise SDN. // MoNeTec 2014, 28-29 октября 2014, Moscow, Russia. Proceedings of the Modern Networking Technologies, IEEE, pp. 27-29.

4. Lantz B., O'Connor B. et al. ONOS: Towards an Open, Distributed SDN OS. // ACM SIGCOMM HotSDN Workshop, August, 2014.

5. Open Networking Foundation. OpenFlow Switch Specification, Version 1.3.0 (Wire Protocol 0x04), 2012.

## **Оперативное управление двухстадийными стохастическими производственными системами**

М.Х.Прилуцкий

*ННГУ имени Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

Решение широкого класса прикладных задач связано с распределением ресурсов в стохастических системах ([1-3]). Стохастический подход позволяет описывать задачи оптимального планирования и управления для широкого класса производственных систем, для которых характерным является учет случайного характера изменений характеристик производственных процессов и преобразуемых системой ресурсов. Примерами таких систем являются системы по переработке газового конденсата в нефтепродукты, изготовления интегральных схем и мартеновского производства стали.

Как и в [1-3], будем рассматривать производственные системы, функционирующие по следующей схеме. Под воздействием технологических режимов производятся полуфабрикаты, из которых изготавливаются продукты производства. Специфика производственных систем состоит в том, что применение технологического режима не определяет продукт, который будет изготовлен, а задает вероятности получения того или иного полуфабриката. Каждому полуфабрикату соответствует набор продуктов, любой из которых (но только один) может быть изготовлен. Предполагаются известными как затраты на использование технологических режимов, так и доходы от выпуска продуктов. Задачи, рассматриваемые для подобных систем, будем называть *двухстадийными*, принимая за первую стадию процесс изготовления полуфабрикатов, а за вторую – переработку полуфабрикатов в продукты производства.

Задачи оптимального управления для рассматриваемых производственных систем делятся на два класса: задачи программного управления [3] (управления без обратной связи), и задачи оперативного управления (задачи с обратной связью). В задачах оперативного управления, в зависимости от плана и количества уже выпущенных продуктов, требуется определять какие технологические режимы нужно применять с целью «наилучшего» выполнения заданного плана. При этом технологические режимы необходимо выбирать из тех наборов, которые найдены при решении задачи программного управления.

Как в задачах программного, так и в задачах оперативного управления под «наилучшим» выполнением плана понимается применение таких управлений, при которых математическое ожидание полного суммарного дохода от функционирования системы в планируемом периоде будет максимально.

Пусть  $I$  - множество технологических режимов,  $J$  - множество полуфабрикатов,  $K$  - множество выпускаемых продуктов,  $T = \{0, 1, \dots, T_0\}$  - множество тактов функционирования системы. Через  $P = \|p_{ij}\|$  - обозначим матрицу вероятностей, где  $p_{ij}$  - вероятность того, что применив технологический режим  $i$ , будет получен полуфабрикат  $j$ ,  $\sum_{j \in J} p_{ij} = 1$ ,  $i \in I$ ,  $p_{ij} \geq 0$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J$ . Пусть  $K(j)$  - множество продуктов, любой из которых (но только один) может быть изготовлен из полуфабриката  $j$ ,  $K(j) \subseteq K$ ,  $j \in J$ . Обозначим через  $\vec{\pi}$  -  $|K|$  - мерный вектор с целочисленными неотрицательными компонентами – план производства продуктов в планируемом периоде, где  $\pi_k$  - количество  $k$ -ых продуктов, которые должны быть

выпущены в планируемом периоде,  $k \in K$ . Пусть  $c_i$  - затраты производственной системы, связанные с использованием  $i$ -го технологического режима,  $i \in I$ ;  $g_k$  - доход, который получит система от производства одного запланированного  $k$ -го продукта,  $k \in K$ .

В качестве системы, моделирующей процесс производства продуктов, рассмотрим управляемую однородную марковскую цепь с конечным числом состояний и доходами. В дальнейшем систему будем обозначать  $\Omega$ . Множество  $Z$  состояний системы разобьем на два подмножества – основные и вспомогательные состояния. Основные состояния образуют множество  $S = \{\vec{s} \mid s_k \geq 0 - \text{целые}, s_k \leq T_0, k \in K\}$ , где  $s_k$  определяет количество продуктов  $k$ , которые произведены в системе. Вспомогательными состояниями являются всевозможные пары  $(\vec{s}, j)$ , где  $\vec{s} \in S$ ,  $j$  - параметр вспомогательного состояния,  $j \in J$ . Если система находится во вспомогательном состоянии  $(\vec{s}, j)$ , то это означает, что появилась дополнительная информация о произведенном полуфабрикате. Управлениями в основных состояниях являются элементы множества  $I$  - выбор технологического режима. Допустимыми управлениями во вспомогательном состоянии  $(\vec{s}, j)$  являются элементы множества  $K(j)$  - изготовление из полуфабриката продукта производства. Функционирование системы рассматривается на конечном числе тактов. При этом под одним тактом понимается переход системы из основного состояния в основное – от выбора технологического режима, до выпуска продукта производства.

Система  $\Omega$  функционирует следующим образом: В основном состоянии  $\vec{s}$ ,  $\vec{s} \in S$ , к ней применяется управление  $i$ ,  $i \in I$  (выбор технологического режима). Система с вероятностью  $p_{ij}$  переходит во вспомогательное состояние  $(\vec{s}, j)$  (определяется полученный полуфабрикат), при этом цепь несет потери  $c_i \geq 0$  (затраты на использование технологического режима). Во вспомогательном состоянии  $(\vec{s}, j)$  к системе применяется управление  $k$ ,  $k \in K(j)$  (изготовление из полуфабриката продукта производства). Под воздействием этого управления система переходит в новое основное состояние  $\vec{s} \oplus \delta_k$ , которое отличается от состояния  $\vec{s}$  лишь в компоненте  $k$ ,  $k$ -ая компонента увеличивается на 1 (больше на 1 стало продукта  $k$ ). При этом переходе система приобретает доход, определяемый функцией  $q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) = \begin{cases} g_k, & \text{если } s_k < \pi_k \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$ . Здесь  $g_k \geq 0$  - доход, который получит система от выпуска запланированного продукта  $k$ ,  $k \in K(j)$ . В новом основном состоянии  $\vec{s} \oplus \delta_k$  к системе применяется управление  $i'$ , под воздействием которого система с вероятностью  $p_{i'l}$  переходит во вспомогательное состояние  $(\vec{s} \oplus \delta_k, l)$ , приобретая соответствующий доход и т. д.

Нетрудно заметить, что множество состояний системы  $Z = S \cup (S \times J)$  таково, что если начальное состояние системы принадлежит  $Z$ , то и любое состояние, в котором система может оказаться, тоже принадлежит  $Z$ .

Система  $\Omega$  функционирует конечное число тактов  $T_0$ , где под тактом здесь понимается переход из одного основного состояния в очередное основное состояние. Множество всех управлений обозначим через  $U = V \times W$ . Управление  $u \in U$  есть пара функций  $v(\vec{s}, t)$  и  $w(\vec{s}, j, t)$ , определенных соответственно на множествах  $S \times T$  и  $S \times J \times T$  со значениями из множеств соответственно  $I$  и  $K(j)$ . Содержательно функция  $v(\vec{s}, t)$  определяет какие технологические режимы нужно принимать в основных состояниях системы, а функция  $w(\vec{s}, j, t)$  определяет какие продукты нужно выпускать

во вспомогательных состояниях. Обозначим через  $\mu(\vec{z}, t, u)$  - математическое ожидание дохода, который получит система  $\Omega$  в точке  $(\vec{z}, t)$ , если к ней будет применено управление  $u = (v, w)$ ,  $\vec{z} \in Z$ ,  $t \in T$ ,  $u \in U$ .  $\mu(\vec{z}, t, u)$  можно вычислять, используя рекуррентные соотношения:

$$\mu(\vec{s}, t, v(\vec{s}, t)) = -c_{v(\vec{s}, t)} + \sum_{j \in J} p_{v(\vec{s}, t)j} \mu(\vec{s}, j, t, w(\vec{s}, j, t)), \quad 1)$$

$$\mu(\vec{s}, j, t, w(\vec{s}, j, t)) = q(\vec{s}, w(\vec{s}, j, t), \vec{\pi}) + \mu(\vec{s} + \delta_{w(\vec{s}, j, t)}, t - 1), \quad 2)$$

$$\mu(\vec{s}, j, 0, w(\vec{s}, j, t)) = 0. \quad 3)$$

Функции  $v$  и  $w$  можно доопределить соответственно на множествах  $S \times T$  и  $S \times J \times T$ , тем самым будет иметь смысл выражение  $\mu(\vec{z}, t, u)$  для  $\vec{z} \in (S \times T) \cup (S \times J \times T)$ .

Оптимальным управлением системой  $\Omega$  назовем такое управление  $u_0 \in U$ , что  $\max_{u \in U} \mu(\vec{z}, t, u) = \mu(\vec{z}, t, u_0)$  для любых  $\vec{z} \in Z$  и  $t \in T$ .

Используя принцип оптимальности динамического программирования можно показать, что оптимальное управление рассматриваемой системы  $\Omega$  всегда существует.

Обозначим через  $\eta(\vec{z}, t)$  математическое ожидание дохода, который получит система  $\Omega$  в точке  $(\vec{z}, t)$  при оптимальном выборе управлений,  $\vec{z} \in Z$ ,  $t \in T$ . Очевидно, что  $\eta(\vec{z}, t) = \mu(\vec{z}, t, u_0)$ .

Используя введенные обозначения и, применив к системе  $\Omega$  принцип оптимальности динамического программирования, получим:

$$\begin{aligned} \eta(\vec{s}, t) &= \max_{i \in I} (-c_i + \sum_{j \in J} p_{ij} \eta(\vec{s}, j, t)); \\ \eta(\vec{s}, j, t) &= \max_{k \in K(j)} ((q(\vec{s}, k, \vec{\pi}) + \eta(\vec{s} \oplus \delta_k, t - 1)), \eta(\vec{s}, 0) = 0. \end{aligned} \quad 4)$$

Рекуррентные соотношения (4) позволяют находить оптимальное управление системой  $\Omega$ . Однако, для реальных производственных систем, для которых число состояний очень велико, применение предложенного подхода затруднительно.

#### Частные свойства системы $\Omega$ .

Будем говорить, что система  $\Omega$  обладает свойством  $L$ , если: для любых  $j, j' \in J$ , либо  $K(j) \subseteq K(j')$  либо  $K(j') \subseteq K(j)$ . Не уменьшая общности в дальнейшем будем считать, что  $K(j) \subseteq K(j+1)$ ,  $j, j+1 \in J$ ;  
 $\min_{k \in K \setminus K(j)} g_k \geq \max_{k \in K(j)} g_k$ ,  $j \in J$ ,  $j \neq |J|$ .

Свойство  $L$  выполняется, например, тогда, когда предприятие имеет право отправить потребителю продукцию более высокого качества, чем требуемая продукция.

При выполнении свойства  $L$  функции  $w(\vec{s}, j, t)$  будем называть *простыми* (в дальнейшем помечать \*), если:  $w(\vec{s}, j, t)$  не зависит от  $t$ ;  $w^*(\vec{s}, j) \in K(\vec{s}, j)$ ; имеет место  $w^*(\vec{s}, j) \succ k$  для всех  $k \in K(\vec{s}, j)$ .

**Теорема 1.** При выполнении свойства  $L$  пусть  $w^*(\vec{s}, j, t)$  - простая функция, тогда для любых  $\vec{s} \in S$ ,  $j \in J$ ,  $t \in T$ ,

$$\max_{w(\vec{s}, j, t) \in W(\vec{s}, j, t)} \mu(\vec{s}, j, t, w(\vec{s}, j, t)) = \mu(\vec{s}, j, t, w^*(\vec{s}, j, t)).$$

Из *теоремы 1* следует, что при выполнении свойства  $L$ , во вспомогательных состояниях оптимальные управления находятся с использованием простых функций, что значительно сокращает число состояний, в которых необходимо искать оптимальные управления.

Будем говорить, что система обладает свойством  $M$ , если: она обладает свойством  $L$ ; для любых  $i, i' \in I$ , либо  $\sum_{j=j'}^{|J|} p_{ij} \geq \sum_{j=j'}^{|J|} p_{i'j}$ , либо  $\sum_{j=j'}^{|J|} p_{ij} \geq \sum_{j=j'}^{|J|} p_{i'j}$ ,  $j' \in J$ ;  $c_i = const, i \in I$ .

Содержательно свойство  $M$  означает, что затраты на применение технологических режимов являются незначительными, и ими можно пренебречь, а вероятностные характеристики реализации полуфабрикатов с использованием технологических режимов, обладают следующим свойством – для любой пары технологических режимов, один из режимов позволяет получать с большей вероятностью «лучшие» полуфабрикаты с точки зрения свойства  $L$ .

На основании свойства  $M$  на множестве  $I$  введем отношение  $\succ: i \succ l$  тогда и только тогда, если

$$\sum_{j=j'}^{|J|} p_{ij} \geq \sum_{j=j'}^{|J|} p_{lj} \text{ для всех } j' \in J.$$

Через  $v^*(\vec{s}, t)$  будем обозначать функцию, являющуюся на множестве  $S \times T$  константой, равной  $i^*$ , где  $i^*$  такой элемент множества  $I$ , что  $i^* \succ i$  для всех  $i \in I$ .

**Теорема 2.** Если система  $\Omega$  обладает свойством  $M$ , то пара функций  $v^*(\vec{s}, t)$  и  $w^*(\vec{s}, j, t)$  определяет оптимальное управление системой.

Из *теоремы 2* следует, что при выполнении свойства  $M$  существуют простые эффективные процедуры нахождения оптимального управления рассматриваемой системой.

#### Список литературы

1. Прилуцкий М.Х. Оптимальное планирование для моделей двухстадийных стохастических производственных систем// Труды 7 Московской международной конференции по исследованию операций (ORM 2013): Москва, 15-19 октября 2013, Том 2. 2013. С. 48-49.
2. Прилуцкий М.Х. Оптимальное планирование двухстадийных стохастических производственных систем// Автоматика и телемеханика. 2014. № 8. С. 37-47.
3. Прилуцкий М.Х. Программные управления для одного класса стохастических производственных систем. Труды 9 Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем". Москва. 20-22 мая 2015. С.195-197.

## Об $r$ -алгоритмах Шора\*

П.И. Стецюк

*Институт кибернетики имени В.М. Глушкова, Киев, Украина*

$r$ -алгоритмы это семейство методов градиентного типа, которые используют растяжение пространства в направлении разности двух последовательных градиентов [1]. Если  $f(x)$  – выпуклая функция от  $n$  переменных и  $\alpha > 1$  – коэффициент растяжения пространства, то  $r(\alpha)$ -алгоритм минимизации функции  $f(x)$  определяет итеративная процедура построения последовательностей векторов  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  и матриц  $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$  по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \xi_k, \quad B_{k+1} = B_k R_{\beta}(\eta_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

\* Работа выполнена при поддержке проекта № 0114U001050

где

$$\xi_k = \frac{B_k^T g_f(x_k)}{PB_k^T g_f(x_k)P}, \quad h_k \geq h_k^* = \arg \min_{h \geq 0} f(x_k - hB_k \xi_k), \quad (2)$$

$$\eta_k = \frac{B_k^T r_k}{PB_k^T r_k P}, \quad r_k = g_f(x_{k+1}) - g_f(x_k), \quad \beta = \frac{1}{\alpha} < 1. \quad (3)$$

Здесь  $x_0$  – начальное приближение;  $B_0 = I_n$  – единичная  $n \times n$ -матрица (в качестве  $B_0$  часто выбирают диагональную матрицу  $D_n$  с положительными элементами на диагонали, с помощью которой осуществляется масштабирование переменных);  $h_k$  – шаг, который не меньше, чем  $h_k^*$  – шаг до минимума функции в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных;  $R_\beta(\eta) = I_n + (\beta - 1)\eta\eta^T$  – оператор "сжатия" пространства субградиентов в нормированном направлении  $\eta$  с коэффициентом  $\beta = 1/\alpha < 1$ ;  $g_f(x_k)$  и  $g_f(x_{k+1})$  – субградиенты функции  $f(x)$  в точках  $x_k$  и  $x_{k+1}$ . Если  $g_f(x_k) = 0$ , то  $x_k$  является точкой минимума функции  $f(x)$  и процесс (1)–(3) останавливается.

Замечательное свойство  $r$ -алгоритмов заключается в том, что его конкретные реализации показывают очень хорошие результаты при минимизации овражных функций. Эффективным зарекомендовал себя вариант  $r(\alpha)$ -алгоритма с адаптивным способом регулировки шага, в котором величина  $h_k$  настраивается в процессе выполнения одномерного спуска в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве переменных. Подробные рекомендации по выбору коэффициента растяжения пространства и параметров адаптивной регулировки шага даны в [2, с. 45–47]. Адаптивный способ регулировки шага позволяет увеличивать точность поиска минимума функции по направлению в процессе вычислений и при этом число шагов по направлению не превышает в среднем двух-трех на одну итерацию.

Эффективность  $r(\alpha)$ -алгоритма подтверждают результаты многочисленных вычислительных экспериментов для задач линейного и нелинейного программирования, для блочных задач с различными схемами декомпозиции, для минимаксных и матричных задач оптимизации, для вычисления двойственных лагранжевых оценок в многоэкстремальных и комбинаторных задачах оптимизации и др. Однако теоретическое обоснование  $r$ -алгоритмов проведено недостаточно полно. Отметим известные результаты в этом направлении.

Для минимизации гладких выпуклых функций  $r$ -алгоритмы по своей формальной структуре близки к алгоритмам квазиньютоновского типа с переменной метрикой. Этим определяются два следующих теоретических результата. Так, предельный вариант  $r$ -алгоритма с бесконечным коэффициентом растяжения (здесь  $\beta = 0$ ,  $h_k = h_k^*$ ) является проективным вариантом метода сопряженных градиентов [1]. Для задачи минимизации выпуклой непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$  предельный вариант  $r$ -алгоритма с восстановлением матрицы  $B_k$  после каждой  $n$  итераций обладает квадратичной скоростью сходимости при обычных условиях гладкости и регулярности  $f(x)$  [3].

Наиболее общим результатом о сходимости  $r$ -алгоритмов является теорема 3.13 [1]. Для класса почти дифференцируемых кусочно-гладких функций она определяет достаточные условия, при которых "идеализированный" вариант  $r$ -алгоритмов ( $r_\mu(\alpha)$ -алгоритм) сходится к локальному минимуму. Однако они слишком сильные и не выполняются даже для кусочно-линейных выпуклых функций.

В докладе рассмотрим новые модификации  $r$ -алгоритмов [3,4] и новые семейства методов с преобразованием пространства, которые сохраняют идеологию алгоритмов [5,6].

#### Список литературы

1. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1979.

2. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наук. думка, 1989.
3. Стецюк П.И., Ивличев А.В., Ищенко А.А. О сходимости  $r_\mu(\alpha)$ -алгоритма // Компьютерная математика. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2015. – № 1. – С. 142–152.
4. Журбенко Н.Г., Чумаков Б.М. Программное управление коэффициентами растяжения  $r$ -алгоритма // Теория оптимальных решений. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2012. – С. 113–118.
5. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и  $r$ -алгоритмы. – Кишинэу: Эврика, 2014.
6. Журбенко Н.Г. Субградиентный алгоритм минимизации с преобразованием пространства ( $\alpha(\varepsilon)$ -алгоритм) // В кн. "Стохастическое программирование и его приложения" / П.С. Кнопов, В.И. Зоркальцев, Я.М. Иванько и др. –Иркутск: Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 2012. – С. 36 – 51

# Оптимальная коррекция директивных интервалов в задаче построения многопроцессорного расписания с дополнительным ресурсом

М.Г. Фуругян

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Рассматривается задача составления допустимого многопроцессорного расписания с прерываниями для случая, когда заданы директивные интервалы, процессоры могут иметь произвольные производительности, а объемы работ линейно зависят от количества выделенного им дополнительного ресурса. В случае, когда при заданном количестве дополнительного ресурса допустимого расписания не существует, рассматривается задача оптимальной коррекции директивных интервалов. Решение основано на сведении исходной задачи к задаче о потоке минимальной стоимости.

Рассматривается вычислительная система, состоящая из  $m$  процессоров  $t$  типов. Производительность процессоров  $j$ -го типа равна  $s_j$ , а их число составляет  $m_j$  ( $j = \overline{1, t}$ ;  $m_1 + \dots + m_t = m$ ). Предполагается, что  $s_1 > s_2 > \dots > s_t$ . Имеется множество заданий (работ)  $N = \overline{1, n}$ . В каждый момент времени каждый процессор может выполнять не более одного задания, а каждое задание выполняется не более чем одним процессором. При выполнении заданий допускаются прерывания и переключения с одного процессора на другой. Предполагается, что прерывания и переключения не сопряжены с временными затратами. Для задания  $i \in N$  установлен директивный интервал  $(b_i, f_i]$  (т.е. работа  $i$  может выполняться только в этом интервале). Помимо процессоров в системе имеется дополнительный ресурс не возобновляемого типа. Суммарное количество этого ресурса составляет  $R$ . Если заданию  $i$  выделено  $q_i$  единиц дополнительного ресурса, то объем работы процессоров по выполнению задания  $i$  составляет  $Q_i = d_i - a_i q_i$ , где

$$r_i \in [0, \bar{r}_i], i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in N} r_i \leq R, \quad (2)$$

$a_i, d_i, \bar{r}_i$  – заданные величины,  $a_i > 0, d_i > 0, 0 \leq \bar{r}_i < d_i / a_i$ . Таким образом,  $Q_i \in [d_i - a_i \bar{r}_i, d_i]$ , причем  $d_i - a_i \bar{r}_i > 0$ . За время  $\tau$  процессор  $j$ -го типа выполняет объем работы  $s_j \tau$ . Если задание  $i$ , имеющее объем  $Q_i$ , выполняется процессором  $j$ -го типа в течение интервала времени  $\tau_j, j = \overline{1, t}$ , то  $Q_i = s_1 \tau_1 + \dots + s_t \tau_t$ . Требуется найти такое распределение ресурсов  $(r_1^0, r_2^0, \dots, r_n^0)$ , при котором существует допустимое расписание (т.е. такое расписание, при котором каждая работа полностью выполняется в своем директивном интервале), или установить, что такого распределения ресурсов не существует. При этом искомое распределение ресурсов должно удовлетворять ограничениям (1), (2). В случае, когда указанного распределения ресурсов не существует, требуется определить директивные интервалы  $(b_i, f_i']$ , при которых допустимое распределение ресурсов существует и величина  $\max\{f_i' - f_i : i \in N\}$  принимает минимальное значение.

Пусть директивный интервал каждой работы совпадает с интервалом  $(0, F]$ , количество ресурса  $R$  в системе фиксировано, а директивный срок может изменяться, за счет чего будет достигаться существование допустимого расписания. Будем минимизировать величину  $F$ . В этом случае решается следующая задача линейного программирования:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow \min_{(r_1, \dots, r_n, F)}, \\ \sum_{i \in N} a_i r_i + F \sum_{j=1}^t m_j s_j &\geq \sum_{i \in N} d_i, \\ \sum_{i \in N} r_i &\leq R, \\ r_i &\in [0, \bar{r}_i], i \in N. \end{aligned} \quad (3)$$

Каждому решению  $(r_1^0, r_2^0, \dots, r_n^0)$ ,  $F_{\min}$  задачи (3) соответствует допустимое расписание, а  $F_{\min}$  – минимально допустимый директивный срок при фиксированной величине ресурса  $R$  в системе. Применяв алгоритм упаковки [1], получим окончательное решение в виде допустимого расписания.

В общем случае, когда директивные интервалы произвольные, строится потоковая сеть  $G$  специального вида, для которой доказано следующее утверждение [2]: для существования допустимого расписания необходимо и достаточно существование в сети  $G$  циркуляции  $g$ , стоимость которой

$$c(g) \leq R - \sum_{i \in N} d_i / a_i \quad (4)$$

В случае, когда директивные интервалы имеют общий начальный срок, т.е. имеют вид  $(0, f_i]$ ,  $i \in N$ , а условие (4) не выполнено, решение задачи оптимальной коррекции директивных интервалов сведено к решению задачи линейного программирования. А именно все директивные сроки  $f_i$  будут увеличены на минимальную величину так, что допустимое расписание будет существовать. Для построения допустимого расписания следует применить алгоритм, описанный в [3].

#### Список литературы

1. Gonzales T., Sahni S. Preemptive Scheduling of Uniform Processor Systems // J. Association for Computing Machinery. 1978. V. 25, № 1. P. 92 – 101.
2. Планирование вычислений в многопроцессорных АСУ реального времени с дополнительным ресурсом. // АИТМ. 2015, № 3. С. 144 – 150.
3. Оптимальная коррекция директивных интервалов в задаче построения многопроцессорного расписания с дополнительным ресурсом. // Изв. РАН, ТиСУ. 2015, N 2. С. 107 – 116.

## Индексы центральности и их связь с правилами на мажоритарном отношении в больших и урезанных сетях

С.В. Швыдун  
НИУ ВШЭ, Москва, Россия  
ИПУ РАН, Москва, Россия

В работе рассматривается задача выявления ключевых элементов в больших сетях. На данный момент существует большое число классических индексов центральности [1-3], позволяющие определить топологически важные элементы сети. К сожалению, большая их часть не может быть применена на больших сетях в силу их высокой вычислительной сложности. Тем не менее, возможно, что набор ключевых элементов на суженной сети, каким-то образом полученной из исходной путем аппроксимации, будет идентичен набору ключевых элементов на большой сети. В таком случае индексы центральности, имеющие высокую вычислительную сложность, могут быть применены на суженных сетях. Для проверки нашей гипотезы было сгенерировано несколько случайных сетей с экспоненциальным распределением по числу ребер и рассмотрено множество вариантов их сужения. В работе также рассмотрен вопрос применения некоторых процедур коллективного выбора на мажоритарном отношении [4-15] к выявлению ключевых узлов сети и исследуется их взаимосвязь с классическими индексами центральности. Для оценки взаимосвязи между индексами центральности и правилами выбора на мажоритарном отношении был разработан специальный индекс. В результате работы мы показываем, каким образом можно произвести сужение сети для того, чтобы можно было применять индексы центральности с высокой вычислительной сложностью и при этом сохранить набор элементов, которые являются ключевыми на исходной сети.

#### Список литературы

1. Bonacich P. Technique for Analyzing Overlapping Memberships// Sociological Methodology, Vol.4, 1972, pp.176-185.

2. Brin S., Page, L. The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine// *Comput. Netw.*, 30, 1998, pp.107-117.
3. Newman M.E.J. *Networks: An Introduction*. – Oxford, UK: Oxford University Press, 2010.
4. Алескеров Ф. Т., Хабина Э. Л., Шварц Д. А. “Бинарные отношения, графы и коллективные решения”, М.: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2006. - 300 с.
5. Ward B.: Majority Rule and Allocation. *J. Confl. Resolut.* 5. 379-389 (1961)
6. Aleskerov F., Kurbanov E.: A Degree of Manipulability of Known Social Choice Procedures. In: Alkan A., Aliprantis Ch., Yannelis N. (eds.) *Current Trends in Economics: Theory and Applications*, pp. 13-27. Springer, Berlin/Heidelberg/New York (1999)
7. Duggan J.: A systematic approach to the construction of non-empty choice sets. *Soc. Choice &Welf.* 28. 491-506 (2007)
8. Duggan J.: *Uncovered sets*. Mimeo (2006)
9. Miller N.: A new solution set for tournaments and majority voting: Further graph-theoretical approaches to the theory of voting. *Amer. J. Pol. Sci.* 24. 68-96 (1980)
10. Fishburn P.: Condorcet social choice functions. *SIAM J. Appl. Math.* 33. 469-489 (1977)
11. McKelvey R.: Covering, dominance and institution-free properties of social choice. *Amer. J. Pol. Sci.* 30. 283-314 (1986)
12. Schwartz T.: On the Possibility of Rational Policy Evaluation. *Theory & Decis.* 1. 89-106 (1970)
13. Schwartz T.: Rationality and the Myth of the Maximum. *Noûs.* 6. 97-117 (1972)
14. Subochev A.: Dominating, Weakly Stable, Uncovered Sets: Properties and Extensions. *Avtomatika i Telemekhanika (Automation & Remote Control)*. 1. 130-143 (2010)
15. Aleskerov F. T., Subochev A. Modeling optimal social choice: matrix-vector representation of various solution concepts based on majority rule // *Journal of Global Optimization*. 2013. Vol. 56. No. 2. P. 737-756.

## Многокритериальная оптимизация

1. B. Yatsalo and L.Martinez Fuzzy Multicriteria Acceptability Analysis Based on Transitive and Intransitive Preference Relations
2. Н.С. Асанова, В.В. Колбин Исследование проблемы улучшаемости решений в задачах многоцелевой оптимизации в условиях толерантности
3. В.Е. Березкин, А.В. Лотов Визуализация трубок траекторий в многокритериальных динамических проблемах
4. А.М. Валуев Два подхода к Парето-оптимизации путей на графах
5. В.И. Жуковский, М.М. Кириченко, М. В. Болдырев Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности
6. Г.К.Каменев Об одной параметризации множества решений задач МКО
7. О.С. Купач, А.В. Лычев Оценка деятельности руководителей субъектов Российской Федерации с применением метода DEA
8. А.В. Лотов Блочный метод аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в задачах многокритериальной оптимизации
9. А.В. Лотов, А.И. Рябиков Многокритериальный подход к построению правил управления каскадом ГЭС
10. В.В. Подиновский Согласительные решения для задач выбора при неполной информации о предпочтениях
11. Я.И. Рабинович Универсальная процедура построения множества Парето

### **Fuzzy Multicriteria Acceptability Analysis Based on Transitive and Intransitive Preference Relations\***

B. Yatsalo<sup>1</sup> and L.Martinez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IATE NRNU MEPhI, Obninsk, RF, [yatsalo@gmail.com](mailto:yatsalo@gmail.com) <sup>2</sup>University of Jaen, Jaen, Spain, [martin@ujaen.es](mailto:martin@ujaen.es)

Ranking Fuzzy Numbers (FNs) is a key stage within Multi-Criteria Decision Analysis (MCDA) in fuzzy environment [1-4]. In addition, ranking FN is considered as one of the main problems of fuzzy sets theory and was extensively investigated in different directions [2-4].

The three main classes of ranking approaches have been pointed out [2,3]: defuzzification based methods, methods with assessing a “distance to an etalon fuzzy quantity”, and pairwise comparison methods. In this paper, we consider the third class of indicated methods for ranking FN.

FN  $Z$  is considered here as a convex normal and restricted fuzzy set in  $\mathbb{R}$  with a continuous (or upper continuous) membership function  $\mu_Z(x)$ . For FN  $Z$  and  $\alpha \in [0,1]$ , consider its  $\alpha$ -cut:  $Z(\alpha) = [A_\alpha, B_\alpha]: \mu_Z(x) \geq \alpha$  ( $\alpha = 0$  is a special case and considered at the stage of definition of the considered FN). FN  $Z$  can be identified with the family of intervals  $Z = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}$ ,  $\alpha \in [0,1]$ . Let  $Z_i = \{[A_\alpha^i, B_\alpha^i]\}$ ,  $Z_{ij} = Z_i - Z_j$ , then  $Z_{ij} = \{[A_\alpha^{ij}, B_\alpha^{ij}]\} = \{[A_\alpha^i - B_\alpha^j, B_\alpha^i - A_\alpha^j]\}$ .

For comparison of two FN, a fuzzy preference relation (FPR)  $R = ((Z_i, Z_j), \mu_R(Z_i, Z_j))$  is considered, where  $\mu_R(Z_i, Z_j)$  indicates the degree of preference of  $Z_i$  over  $Z_j$ .

*Definition 1.* For any  $Z_i, Z_j$  and FPR  $R$ , we define:  $Z_i \succcurlyeq Z_j$  if  $\mu_R(Z_i, Z_j) \geq 0.5$ ,  $Z_i \succ Z_j$  if  $\mu_R(Z_i, Z_j) > 0.5$ , and  $Z_i \sim Z_j$  if  $\mu_R(Z_i, Z_j) = 0.5$ .

We specify below the two FPRs, which we consider as intuitively understandable and effective for ranking FN based on pairwise comparison.

---

\* This research is supported by

The Integral PR, IPR, [5] is based on assessing the area under membership function of FN  $Z_{ij} = Z_i - Z_j$ , and the areas of its “positive” and “negative” parts. For  $Z = \{[A_\alpha, B_\alpha]\}$ , denote  $D_\alpha = B_\alpha - A_\alpha$ . Let  $D_\alpha^+$  be the length of a (positive) part of the segment  $[A_\alpha, B_\alpha]$  with  $x \geq 0$ :

$$D_\alpha^+ = B_\alpha \theta(B_\alpha) - A_\alpha \theta(A_\alpha).$$

where  $\theta(x)$  is the Heaviside function. Accordingly, let  $D_\alpha^-$  be the length of a (negative) part of segment  $[A_\alpha, B_\alpha]$  with  $x \leq 0$ , then

$$D_\alpha^- = B_\alpha (1 - \theta(B_\alpha)) - A_\alpha (1 - \theta(A_\alpha)).$$

The areas  $S^+$  and  $S^-$  are assessed as

$$S_i^+(Z) = \int_0^1 D_\alpha^+ d\alpha, \quad S_i^-(Z) = \int_0^1 D_\alpha^- d\alpha; \quad S_i(Z) = S_i^+(Z) + S_i^-(Z). \quad \text{Definition 2. The IPR}$$

with the measure  $\mu_{ij} = \mu_I(Z_i, Z_j) = \mu(Z_i \geq Z_j)$  is defined as follows:  $\mu_I(Z_i, Z_j) = S_i^+(Z_{ij}) / S_i(Z_{ij})$  (if  $S_i(Z_{ij}) > 0$ ); (for singletons  $Z_i = C_i, C_{ij} = C_i - C_j$ :  $\mu_I(Z_i, Z_j) = \{1 \text{ if } C_{ij} > 0; 0 \text{ if } C_{ij} < 0; \text{ and } 0.5 \text{ if } C_{ij} = 0\}$ ).

The Yuan's PR (YPR) [4] with the measure  $\mu_Y(Z_i, Z_j)$  is defined as follows:

$$S_Y^+(Z_{ij}) = \int_0^1 (B_\alpha \theta(B_\alpha) + A_\alpha \theta(A_\alpha)) d\alpha; \quad S_Y^-(Z_{ij}) = S_Y^+(Z_{ji})$$

with subsequent assessing

$\mu_Y(Z_i, Z_j)$  in accordance with the formula as for IPR.

*Lemma 1.* YPR is transitive, and IPR one is not.

A Fuzzy Rank Statement (FRS),  $F_{ik}$ , is a statement of the type:  $F_{ik} = (Z_i, k) = \{Z_i \text{ has a rank } k\}$ ,  $i, k = 1, \dots, n$ ; i.e.,  $k-1$  FNs from the set  $Z = \{Z_i, i = 1, \dots, n\}$  can be considered as exceeding  $Z_i$ , and  $Z_i$  can be considered as exceeding remaining  $n-k$  FNs. We consider  $F_{ik} = (Z_i, k)$  as an element of the fuzzy set  $Z \times \mathbb{N}_n$ ,  $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$ . An approach for formalization of the FRSs and assessing the measures  $\mu(i, k) = \mu(F_{ik})$  (for a chosen FPR  $R(Z_i, Z_j)$ ) is based on the following model [5]:

$$\mu(i, k) = \mu(F_{ik}) = \bigvee_{\substack{(I_1 < I_2 < \dots < I_{k-1}) \\ I_s \neq i, s=1, \dots, k-1}} \left( \bigwedge_{s=1}^{k-1} \mu_{I_s, i} \right) \wedge \left( \bigwedge_{\substack{j \neq i, j \neq I_k \\ s=1, \dots, k-1}}^n \mu_{ij} \right)$$

Fuzzy Rank Acceptability Indices (FRAIs) are defined as values  $\mu(i, k)$  and present a fuzzy measure which describes *acceptability* of FN  $Z_i$  with a rank  $k$ .

*Definition 3.* A FN  $Z_m$  from a set  $Z = \{Z_i, i = 1, \dots, n\}$  has a FRAA rank  $k$ ,  $r(Z_m) = k$ , if it has the highest FRAI for a given  $k$ :

$$\mu(m, k) = \max_{i=1, \dots, n} \mu(i, k), \quad 1 \leq m, k \leq n.$$

We can implement  $FRAA_R$  with different FPR  $R$ .

*Lemma 2.* Let for a set of FNs,  $Z = \{Z_i, i = 1, \dots, n\}$  and FPR  $R: Z_n < Z_{n-1} < \dots < Z_1$ , without violation of transitivity (i.e., for all  $1 \leq k < m \leq n$ ,  $Z_m < Z_k$ ), then, according to FRAA ranking,  $Z_k$  has the rank  $k$ :  $r(Z_k) = k, k = 1, \dots, n$ .

Lemma 2 can be generalized for different variants of preference relations  $<$ ,  $\sim$ , and  $\leq$ . FRAA ranking FNs for transitive and intransitive FPRs can have different properties [6] and, in particular,  $FRAA_R$ -based ranking can meet rank reversals problem. This and some other possible properties require a generalization of FRAA-ranking for a general case [6].

The use of Fuzzy Acceptability Analysis (FAA) within MCDA (FMAA), can be considered for different MCDA methods. In [5-7], FMAVT as a fuzzy extension of additive MAVT [1] with a possibility to use FNs for criterion values and weight coefficients is considered, and ranking alternatives is based on FMAA. This method, FMAVT-FMAA, has been analyzed and validated with the use of several case studies [6,7].

## References

1. Belton V, Stewart T. 2002. *Multiple Criteria Decision Analysis: An Integrated Approach*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
2. Wang, X. and Kerre, E. (2001) Reasonable properties of fuzzy quantities (I). *Fuzzy Sets and Systems*, 118:375-385.
3. Wang, X. and Kerre, E. (2001) Reasonable properties of fuzzy quantities (II). *Fuzzy Sets and Systems*, 118:387-405.
4. Yuan, Y. (1991) Criteria for evaluating fuzzy ranking methods. *Fuzzy Sets and Systems*, 44:139-157.
5. B. Yatsalo, A New Approach to Fuzzy Multi-Criteria Acceptability Analysis. *Proceedings of the 2015 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology*, 2015. V.89, p.947-952.
6. B. Yatsalo, L. Martinez, Fuzzy Rank Acceptability Analysis: A New Approach to Ranking Fuzzy Numbers and its Implementation in Fuzzy MCDA (*submitted to publication*).

## Исследование проблемы улучшаемости решений в задачах многоцелевой оптимизации в условиях толерантности

Н.С. Асанова, В.В. Колбин  
СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

При формализации многоцелевых задач принятия решений могут возникать ситуации, когда некоторые из альтернатив настолько похожи между собой, что неразличимы для лица принимающего решения. Данное условие неразличимости решений приводит к понятию толерантности. Будем понимать под отношением толерантности - бинарное отношение неразличимости  $\tau$ , заданное на множестве пар альтернатив  $X$ . [1] Неразличимость альтернатив может порождаться как самими условиями задачи - естественный уровень толерантности, так и намерено, в случае несогласованности целей задачи - искусственный уровень толерантности. [2]

Пусть задан многоцелевой показатель  $f(x) = f(x|y)$  в условиях толерантности. Все компоненты многоцелевого показателя выражены в одной шкале и в положительном ингредиенте. Мера толерантности, заданная на пространстве решений  $X$ , приводит к тому, что многоцелевой показатель и компоненты многоцелевого показателя становятся толерантным -  $(Y, \tau)$ .

При выборе того или иного решения важно понимать, есть ли возможность его улучшить. Решение  $x_1$  назовем улучшаемым решением в условиях толерантности, если найдется такое  $x_0 \in X$  такое, что для всех  $y$  и хотя бы одного  $y_1$  выполняются условия:  $f(x_0|y) \geq f(x_1|y) - \tau(y)$ ,

$$f(x_0|y_1) > f(x_1|y_1) - \tau(y_1)$$

Свойства улучшаемых решений в условиях толерантности характеризуют следующий теоремы:

Теорема 1. Пусть  $f(x|y)$  ограничен по  $x$  и  $y$ , а множества  $X$  и  $Y$  компактны. Решение  $x_1$  улучшаемо в условиях толерантности по  $f$  на  $X$  тогда и только тогда, когда существует функционал  $\lambda = \lambda(y) | y \in Y$ , определенный на множестве  $Y$ , такой, что выполнены неравенства для всех  $y$  и хотя бы одного  $y_1$  из  $Y$ :

$$\begin{aligned} f(x_1|y) &\leq \alpha(y|\lambda), & f(x_1|y_1) &< \alpha(y_1|\lambda) \\ \alpha(y|\lambda) &= \alpha(\lambda) - \lambda(y) \\ \alpha(\lambda) &= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} [f(x|y) - \tau(y) + \lambda(y)]. \end{aligned}$$

Теорема 2. Если для некоторого  $\lambda^1 \in \{Y \rightarrow R^1\}$  и некоторого  $x_1 \in X$  выполнены условия предыдущей теоремы, то выполняются следующие неравенства для всех  $y$  и  $y_1$  из  $Y$ :

$$\max_{x \in X} f(x|y) - \min_{y \in Y} f(x|y_1) \geq (\tau(y) + \lambda(y)) - (\tau(y_1) + \lambda(y_1)).$$

Введем множество:  $\Lambda = \{\lambda \in \{Y \rightarrow R^1\}; \max_{x \in X} f(x|y) - \min_{y \in Y} f(x|y_0) \geq (\tau(y) + \lambda(y)) - (\tau(y_0) + \lambda(y_0)) \forall y, y_0 \in Y\}$ .

Теорема 3. Решение  $x_1$  улучшаемо (неулучшаемо) по многоцелевому показателю  $f$  в условиях толерантности на множестве  $X$  тогда и только тогда, когда имеют место (несовместимы) следующие неравенства при  $y_1$  из  $Y$ :

$$\begin{aligned} &\min_{y \in Y} [f(x_1|y) + \lambda(y) - \tau(y)] = \\ &= \max_{x \in X} \min_{y \in Y} [f(x|y) + \lambda(y) - \tau(y)]. \end{aligned}$$

### Список литературы

1. Колбин В.В. Теория решений (методы принятия решений). Palmarium Academic Publishing(Германия), 2013. 640 с.

2. Асанова Н.С. Использование аппарата производственных функций в условиях толерантности // Процессы управления и устойчивость. 2014. Т. 1 (17) С. 440-445

## Визуализация трубок траекторий в многокритериальных динамических проблемах\*

В.Е. Березкин, А.В. Лотов

Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия

Трубки траекторий динамических систем представляют большой интерес при изучении задач управления [1, 2]. Трубки траекторий возникают, в частности, в присутствии возмущений, приводящих к неоднозначности динамики системы. В том случае, когда имеет место задача многокритериального выбора из конечного числа вариантов управления, каждый из которых порождает трубку траекторий, представляет интерес непосредственное изучение этих трубок с целью выбора наиболее подходящей (пример такой задачи приведен в [3]). Другой пример задачи многокритериального выбора, в которой представляет интерес динамика трубки траекторий, приведен в [4], где рассматривается единственная трубка – результат наличия функций управления, а в качестве критериев берутся координаты траектории и момент завершения процесса.

В описываемом исследовании рассматривалась система

$$\frac{dx}{dt} \in F_t(x), \text{ где } t \in [t_0, T], \quad (1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $F_t: R^n \rightarrow R^n$  – многозначное отображение, непрерывное по  $t$  на  $[t_0, T]$ . Под множествами достижимости (сечениями трубки траекторий динамической системы (1)) понимаются множества  $X(t) = \{x \in R^n : x = x(t)\}$ , где  $x(\cdot)$  – абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая дифференциальному включению почти всюду на  $[t_0, T]$  с исходными состояниями из  $X(t_0)$ . Пусть задача аппроксимации множеств достижимости системы (1) уже решена. В выпуклом случае множество достижимости может быть аппроксимировано множеством решений системы линейных неравенств, а в невыпуклом случае – совокупностью кубов  $R^n$ , покрывающих множество достижимости с заданной точностью и полнотой [5].

Визуализация трубки траекторий основана на последовательном изображении на дисплее компьютера множеств достижимости. Каждое из множеств достижимости изображается набором его двумерных сечений. Двумерное сечение некоторого множества  $Y \subset R^n$  определяется так. Рассмотрим некоторую пару координат вектора  $x \in R^n$ , скажем,  $u$  и  $v$ , а совокупность остальных обозначим через  $z$ . Двумерное сечение множества  $Y$ , параллельное плоскости координат  $(u, v)$  задается значениями координат  $z^*$  и определяется как  $G(Y, z^*) = \{(u, v) : (u, v, z^*) \in Y\}$ . Если множество  $Y$  уже аппроксимировано в виде пересечения полупространств или совокупности кубов, то построение набора тысяч его сечений занимает секунды. Практика показала, что для пользователей особенно удобно использовать наборы специального вида, в которых от сечения к сечению меняется только одна координата из совокупности  $z$ . Эти сечения можно наложить либо одно на другое, либо показать в различных окнах. Можно использовать различные возможности одновременно (скажем, отображать на дисплее матрицу картинок, каждая из которых изображает набор двумерных сечений, наложенных одно на другое) и оценить форму множества достижимости в пространстве пяти-шести координат. Вариант расположения различных координат вектора  $x$  на осях отдельной картинки или на столбцах или строках матрицы картинок (аранжировка координат) может свободно выбираться пользователем, что обеспечивает диалоговый режим изучения множества.

Хотя аппроксимация серии сечений трубки траекторий может занимать довольно продолжительное время, это не сказывается на визуализации трубки, поскольку визуализация начинается уже после окончания процесса аппроксимации. Отметим, что, в

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РАН I.5 П.

связи с независимостью задач аппроксимации отдельных множеств достижимости, для ускорения процесса аппроксимации сечений можно эффективно использовать многопроцессорные системы.

Для демонстрации серии множеств достижимости исследователем выбирается аранжировка координат для представления множества  $X(t_0)$ , после чего при той же аранжировке показываются второе, третье и следующие аппроксимации множества достижимости вплоть до  $X(T)$ . Таким образом, осуществляется последовательная визуализация множеств, причем скорость перехода от одного множества к последующему может регулироваться пользователем. При достаточно большой скорости возникает эффект анимации. Учитывая то, что возможны различные варианты расположения координат на осях, совокупность построенных аппроксимаций множеств достижимости является источником бесконечного числа виртуальных анимационных фильмов, характеризующих динамику многомерной динамической системы с различных точек зрения.

Разработано программное обеспечение, реализующее описанную выше концепцию визуализации трубки траекторий.

#### Список литературы

1. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
2. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhaeuser, 1996.
3. Lotov A.V., Fateev K.G. Multi-objective study of anticancer agents effect on tumor growth by constructing trajectory tubes and Pareto frontier visualization // Abstracts of V Int. Conf. 'Optimization and Applications' (OPTIMA 2014), Moscow: Computing Centre of RAS, 2014. P. 131-132.
4. Брусникина Н.Б., Лотов А.В. Визуализация движущейся границы Парето в СППР // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 3, С. 28-40.
5. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Boston: Kluwer, 2004.

### Два подхода к Парето-оптимизации путей на графах \*

А.М. Валуев

*Национальный исследовательский университет «МИСиС», Москва,  
Россия*

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия*

Задачами многокритериальной оптимизации путей на графах являются, в частности, задачи выбора маршрута на дорожных сетях по нескольким критериям (время, затраты, транспортная усталость и проч.), задачи выбора параметров горного проекта [1] и проч. Нахождение множеств Парето (PS), применительно к рассматриваемой проблеме при реальных размерностях задач во многих случаях оказывается вычислительно достижимым, хотя в целом задача относится к NP-трудным. Здесь рассматривается задача о путях на орграфе, описываемом для каждой ( $j$ -й) вершины множествами смежных вершин  $I_{INj}$  (начальных вершин дуг, входящих в  $j$ -ю вершину) and  $I_{OUTj}$  (конечных вершин исходящих дуг). Каждая дуга из  $i$ -й в  $j$ -ю вершину характеризуется положительными весами, образующими вектор  $w(i,j)=(c_{ij1}, \dots, c_{ijN})$ ;  $k$ -м целевым показателем пути служит сумма  $c_{ijk}$  по составляющим его дугам. Рассматривается задача нахождения множеств Парето путей из заданной вершины с номером 1 во все остальные вершины для  $N$ -критериальной минимизации по указанным целевым показателям. Предлагаемые методы решения легко переносятся на мультиорграфы.

Предлагаемый ниже алгоритм является обобщением известного алгоритма Б.Ю. Левита для однокритериальной оптимизации пути на графе. Он отличается от известного метода Мартинша [2] тем, что не требует выполнения операции лексикографической минимизации по дискретному множеству ранее построенных путей для выбора очередного испытываемого пути.

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №952 базовой части госзадания №2014/113 НИТУ «МИСиС»

Для описания алгоритма используются следующие обозначения:  $C(p)=(C_1(p), \dots, C_N(p))$  — вектор целевых показателей пути. Вводится отношение Парето-доминирования на множестве  $N$ -мерных векторов:  $W <_P V$  если при любом  $k=1, \dots, N$   $W_k \leq V_k$  и существует  $l$ , при котором  $W_l < V_l$ .

Шаг 1. Положить  $P(1)=(1)$ ,  $W(1)=(0, \dots, 0)_N$ ,  $S(1)=1$ ,  $N_{PS}(1)=1$ ,  $FL(1,1)=1$ ,  $N_{PS}(j)=\emptyset$ ,  $j=2, \dots, N_V$ ,  $I_Q=1$ ,  $N_Q=1$ .

Шаг 2. Если  $I_Q > N_Q$ , завершить выполнение. Иначе:

2.1. Если  $S(1)=1$ , положить  $i=END(j)$  выполнить следующее:

Для каждого  $j \in I_{OUT_i}$  положить  $W_E=W(I_Q)+w(j,i)$  и выполнить следующее:

2.1.1. положить  $T_{EXIT}=0$

2.1.2. Если  $N_{PS}(j) > 0$ , в цикле по  $s=1, \dots, N_{PS}(j)$  определять  $s=FL(j,s)$  и если  $S(s)=1$ ,

то:

если  $W(s) <_P W_E$ , положить  $T_{EXIT}=1$  выйти из цикла,

иначе. если  $W_E <_P W(s)$ , положить  $S(s)=0$ .

2.1.3. Если  $T_{EXIT}=0$ , положить  $N_Q=N_Q+1$ ,  $N_{PS}(j)=N_{PS}(j)+1$ ,  $FL(j, N_{PS}(j))=N_Q$ ,  $P(N_Q)=P(I_Q) \oplus j$ ,  $W(N_Q)=W_E$ ,  $S(N_Q)=1$ .

2.2. Положить  $I_Q=I_Q+1$ , вернуться к шагу 2.

Результатом алгоритма служат множества  $PS_j=\{FL(j,s) \mid S(s)=1, s=1, \dots, N_{PS}(j)\}$ . В отличие от алгоритма [2], принадлежность  $FL(j,s)$  к  $PS_j$  устанавливается только по окончании его выполнения, отчего проверки типа  $W(s) <_P W_E$  выполняются по более широкому множеству. Однако как поиск лексикографического минимума на множестве испытуемых путей, так и осуществление проверок на более узком множестве  $\{FL(j,s) \mid S(s)=1, s=1, \dots, N_{PS}(j)\}$  не требует перебора элементов множества, если значения сравниваемых величин организованы в виде сбалансированных поисковых деревьев, что может быть сделано разными способами. Ни алгоритм [2], ни предлагаемый алгоритм не показывают на тестах бесспорного вычислительного преимущества, но в зависимости от характеристик задачи может быть выявлены условия предпочтительного использования каждого.

Другой подход основан на применении субоптимальной маршрутизации. Ввиду NP-трудности проблемы полное множество Парето может быть практически невычислимым. Учитывая дискретность  $PS_j$ , реальной задачей может считаться вычисление такого его подмножества, для которого

$$PS_{j\Delta} = \{x \in PS_j \mid \forall y \in PS_j \mid W_k(y) - W_k(x) \leq \Delta, k = 1, \dots, N\}.$$

Представляется логичным определить значение  $\Delta$  как заданную долю от диапазона изменения значений  $W_k$ , тогда размерность  $PS_{j\Delta}$  не будет зависеть от размерности графа.

Для вычисления  $PS_j$  и  $PS_{j\Delta}$  удобно многократно использовать задачи вычисления совокупности субоптимальных путей на графе с использованием в качестве весов дуг выражений  $b_1 c_{ij1} + \dots + b_N c_{ijN}$  с заданными неотрицательными значениями  $b_1, \dots, b_N$  для каждой. Решение каждой отдельной задачи дает собственно оптимальный по такому критерию путь  $p_j(b_1, \dots, b_N)$ , который является в то же время Парето-оптимальным для исходной задачи, а также либо дает набор близких (в пространстве критериев) путей, отбор из которых набора Парето-недоминируемых дает дополнительные элементы в  $PS_j$ , либо позволяет утверждать, что близких к  $p_j(b_1, \dots, b_N)$  (в пространстве критериев) путей в  $PS_j$  нет.

Вычислительные эксперименты со случайно сгенерированными графами с ограниченными степенями вершин и весами одного порядка (что характерно для городских дорожных сетей и систем общественного транспорта) показали, что в этих условиях мощности множеств Парето при двухкритериальной оптимизации невелики (совокупное количество из 2444 элементов  $PS_j$  на 1000 вершин с максимальным количеством путей в  $PS_j$  12 для отдельной вершины).

### Список литературы

1. Валуев А.М. Модель многокритериального выбора основных проектных решений для глубоких карьеров // Научное обозрение. 2014. №12. С. 76–80.
2. Martins E. On a multicriteria shortest path problem // European Journal of Operational Research. 1984. V. P. 236–245.
3. Valuev A.M. On the Problem of Efficient Search of the Entire Set of Suboptimal Routes in a Transportation Network // Proceedings of the 12th International Conference on Computational

## Риски и исходы в многокритериальной задаче при неопределенности\*

В.И. Жуковский, М.М. Кириченко,  
М. В. Болдырев  
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Предполагается способ построения стратегии в многокритериальной задаче при неопределенности (МЗН), обеспечивающей одновременно Парето–максимальность гарантированных исходов и рисков. В качестве приложения рассмотрены два варианта задачи о диверсификации вклада по двум депозитам (рублевому и валютному).

В 1939 году румынский математик, эмигрировавший в 1938 году в Америку, Абрахам Вальд (1902 – 1950) ввел [1] принцип максимина (гарантированного результата), позволяющего находить гарантированный исход в однокритериальной задаче при неопределенности (ОЗН). Почти через 10 лет немецкий математик Ю. Ниханс в 1948 году и американский математик, экономист, статистик Леонард Сэвидж (1917 – 1971) в 1951 году предложили [2, 3] принцип минимаксного сожаления, позволяющий для ОЗН строить гарантированный риск, получивший в литературе название «риск по Сэвиджу» (позднее назван «критерием Ниханса–Сэвиджа»). Естественно возникает вопрос о построении стратегии, обеспечивающей одновременно возможно больший исход при возможно меньшем риске.

Если в ОЗН одновременно учитывать исходный критерий и «минус» функ–цию риска по Сэвиджу (в качестве второго критерия), то ОЗН переходит в двухкритериальную задачу при неопределенности. Настоящая работа как раз и посвящена математическому обоснованию способа построения стратегии в МЗН, «стреляющей» одновременно по двум целям: увеличению гарантий всех исходов и при этом уменьшению сопровождающих рисков.

В публикациях по микроэкономике, например, в [10, с. 103] всех ЛПР делят на три категории. К первой относятся те, кто не любит рисковать (*рискофобы* – греч. «*phobos*» означает «боязнь» чего–либо), вторые – любители риска (*рискофилы* – греч. «*phila*» означает «любовь» к чему–либо) и, наконец, третьи, кто решил одновременно учитывать как исходы, так и риски (рисконейтралы). В настоящем сообщении в двух случаях найдено решение задачи о диверсификации (за год) вклада по рублевому и валютному депозитам с точки зрения рисконейтрала.

Подобной задаче посвящена статья [11, р. 9], где для ОЗН получены результаты, пересекающиеся с полученными в этой работе.

### Список литературы

1. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation testing hypothesis // *Annals Math. Statist.* 1939. Vol.10. P. 299 – 326.
2. Nihans J. Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen // *Schweizerische Zeitschrift fur Volkswirtschaft and Statistic.* 1948. Vol.84, №5. P. 433 – 456.
3. Sawage L. J. The theory of statistical decision // *Journal of the American Statistical Association.* 1951. Vol.46, № 253. P. 55 – 67. DOI: 10.1080/016214459.1951.10500768.
4. Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1968. 286 с.
5. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M. E. The Vector – Valued Maximin. N.Y.: Academic Press, 1994. 282 p.
6. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // *Математические основы теории игр и приложения.* 2013. Т.5, № 1. С. 27 – 44.

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-00-90408 Укр\_a и НАН Украины проект № 03-01-14

7. Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. П. Аналог максимина // Математические основы теории игр и приложения. 2013. Т.5, № 2. С. 3 – 45.
8. Pareto V. Manuel d'economic politique. Paris: Genard, 1909.
9. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето–оптимальное решение многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
10. Черемных Ю. Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: ИНФРА, 2008. 843 с.
11. Zhukovskiy V. I., Molostvov V. S., Topchishvili A. L. Problem of multicurrency deposit diversification – three possible approaches to risk accounting // International Journal of Operations and Quantitative Management. 2014. Vol.20, № 1. P. 1 – 15.

## **Об одной параметризации множества решений задач МКО\***

Г.К.Каменев

*ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Рассматривается задача многокритериальной оптимизации (МКО), заданная как отображение множества допустимых решений в метрическом пространстве решений в метрическое пространство критериев с заданными предпочтениями изменения.

В задачах скалярной оптимизации множество решений допускает естественную параметризацию через близость значения оптимизируемой функции к оптимальному (см., например, определение  $\varepsilon$ -решения в [1]). Линии уровня функции расстояния по функционалу до значения оптимума или его приближения определяют вложенную структуру на множестве решений. Множество  $\varepsilon$ -решений при  $\varepsilon=0$  является полным прообразом оптимума и во многих случаях может быть неоднозначным или неустойчивым в метрике Хаусдорфа пространства решений по  $\varepsilon$  вблизи нуля. Большое значение при этом имеет проблема анализа и поиска решений, близких к оптимальным, особенно в неустойчивых задачах скалярной оптимизации [2]. В задачах МКО естественным представляется параметризация множества решений расстоянием в метрике критериального пространства до границы Парето. В этой постановке при одном критерии  $\varepsilon$ -решения МКО являются  $\varepsilon$ -решениями в смысле скалярной оптимизации. Однако в этом случае возникает проблема приближенного построения такой параметризации, так как граница Парето является неустойчивой в метрике Хаусдорфа критериального пространства в большинстве практических случаев [3]. Это порождает или усугубляет неустойчивость множеств  $\varepsilon$ -решений в метрике Хаусдорфа пространства решений.

Предлагается параметризация множества решений, задаваемая расстоянием критериального образа решения до границы оболочки Эджворта-Парето (ОЭП). ОЭП определяется как множество всех точек критериального пространства, доминируемых достижимыми критериальными точками рассматриваемой задачи. Известно, что при выполнении естественных предположений ОЭП является устойчивым множеством в метрике Хаусдорфа пространства критериев [3].

Линии уровня функции расстояния до ОЭП определяют вложенную структуру на множестве решений. В точной постановке множество нулевого уровня совпадает с полным прообразом слабо-эффективных по Парето сочетаний значений критериев. При малых значениях уровня предлагается говорить о множестве субэффективных, или слабых  $\varepsilon$ -решений задачи МКО. Рост этого множества с увеличением уровня характеризует устойчивость решения задачи МКО, но не предполагает ее. Кроме того, субэффективные решения могут представлять самостоятельный интерес при наличии неформализованных в рамках рассматриваемой задачи принятия решений предпочтений ЛПП.

Рассматриваются точная и приближенная постановки задачи параметризации множества решений расстоянием до ОЭП. В приближенной постановке рассматривается структура  $\varepsilon$ -решений при аппроксимации ОЭП компактного множества достижимых критериальных векторов, построенной в виде ОЭП его конечного подмножества. Показано, что при ошибке  $\delta$  в аппроксимации ОЭП множество  $\varepsilon$ -решений задачи в точной постановке принадлежит множеству  $\varepsilon$ -решений задачи в приближенной постановке, а то, в свою очередь, принадлежит множеству  $(\varepsilon+\omega\delta)$ -решений задачи в точной постановке, где  $\omega$  – норма вектора с единичными компонентами в пространстве критериев. В случае критериев, удовлетворяющих условию Липшица, это гарантирует сходимость множества  $\varepsilon$ -решений

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы РАН I.5 П.

задачи в приближенной постановке к множеству  $\epsilon$ -решений задачи в точной постановке в смысле метрики Хаусдорфа пространства решений при ошибке  $\delta$  аппроксимации ОЭП, стремящейся к нулю.

Рассматриваются методы аппроксимации [4] и визуализации [5] множеств субэффективных решений. При этом аппроксимация ОЭП может осуществляться методами [5, 6]. Приведены примеры применения параметризации множества решений в рамках методов анализа сложных систем, основанных на аппроксимации многомерных множеств, заданных неявным образом [5, 7, 8], в частности, в многокритериальном методе идентификации параметров [9, 10]. Заметим, что в многокритериальном методе идентификации параметров могут быть рассмотрены прогнозные трубки траекторий, соответствующие субэффективным сочетаниям значений параметров, что предполагает неявное использование  $\epsilon$ -решений задачи МКО.

#### Список литературы

1. Хачиян Л.Г. Сложность выпуклых задач вещественного и целочисленного полиномиального программирования. В кн. Л.Г. Хачиян. Избранные труды. М.: МЦНМО, 2009.
2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
3. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Макс Пресс, 2008.
4. Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.
5. Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Appl. Optimization. V. 89. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / New York / London. 2004.
6. Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В. Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной границы Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. Т. 46. N 11. С. 2009-2023.
7. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
8. Bushenkov, O.L. Chernykh, G.K. Kamenev, and A.V. Lotov. Multidimensional Images Given by Mappings: Construction and Visualization // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 5, No. 1, 1995. P. 35-56.
9. Каменев Г.К. Визуальный метод идентификации параметров // Доклады Академии наук. 1998. Т.359. N 3. С. 319-322.
10. Каменев Г.К. Многокритериальный метод множеств идентификации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (в печати).

### Оценка деятельности руководителей субъектов Российской Федерации с применением метода DEA\*

О.С. Купач

*4 ЦНИИ Минобороны России, Москва, Россия*

А.В. Лычев

*НИТУ «МИСиС», Москва, Россия*

В условиях мощнейшего международного давления на Россию как в политической, так и в экономической сфере, необходимо предпринимать меры прежде всего для устойчивого развития российской экономики. Экономическая деятельность России распределена по субъектам, причём результаты этой деятельности значительно изменяются от субъекта к субъекту. Главной особенностью России является её расположение на огромной территории в связи с этим каждый субъект Российской Федерации характеризуется своими особенностями. Не маловажное влияние на экономическую деятельность субъектов оказывают динамично изменяющиеся условия. В связи с этим, одной из актуальных задач, является оценка деятельности руководителей субъектов Российской Федерации. Детальное исследование влияния всех факторов и учёт всех условий может быть слишком ресурсозатратным. Современные методики оценки деятельности руководителей субъектов [1] характеризуются большим количеством субъективных оценок экспертов. Население,

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 16-06-00224.

которое участвует в опросах, относится к тому субъекту, в котором они проживают, в связи с этим объективность проведённых исследований носит достаточно условный характер [2]. Также невозможно выделить главный критерий, который определяет результат деятельности руководителя, поэтому при оценке учитывают множество критериев. Под критерием здесь понимается мера оценки признака субъекта России, характеризующего деятельность руководителя этого субъекта. Все указанные предпосылки говорят о перспективности применения метода DEA для решения описанной задачи.

Математическая постановка задачи оценки деятельности руководителей субъектов Российской Федерации. Предположим, что оценивается деятельность  $n$  руководителей субъектов. За исследуемый период времени в субъекте  $i$ , ( $i = 1..n$ ) использовано ресурса  $r_{ij}$  типа  $j$ , ( $j = 1, \dots, m$ ) и получены результаты деятельности  $s_{ik}$  вида  $k$ , ( $k = 1, \dots, l$ ). Тогда эффективность работы руководителя субъекта  $i$  можно определить из отношения взвешенной суммы результатов деятельности к взвешенной сумме использованных ресурсов

$$W_i(\lambda, \mu) = \left( \sum_{k=1}^l s_{ik} \lambda_k \right) / \left( \sum_{j=1}^m r_{ij} \mu_j \right)$$

где  $\lambda_k, \mu_j$  – весовые множители, которые определяются в результате решения оптимизационной задачи, представленной ниже.

За рубежом достаточно большое количество работ посвящено применению метода DEA для оценки деятельности субъектов государства, в нашей стране следует отметить работы [3-5]. В этих исследованиях оценивались группы социальных показателей здравоохранение, безопасность, борьба с бедностью и безработицей, жилищные условия, образование. Однако современные условия требуют другую направленность исследований, поэтому в качестве основных критериев оценки руководителей субъектов выбраны показатели экономического развития.

Для оценки руководителей субъектов в работе использовались следующие показатели: характеризующие ресурсы субъектов – площадь территории, численность населения, основные фонды; характеризующие экономическую деятельность в субъекте федерации – инвестиции в основной капитал, среднегодовая численность населения занятого в экономике, валовый региональный продукт. Для вычисления оценки деятельности субъектов РФ решались следующие оптимизационные задачи:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l s_{i_0k} \lambda_k &\rightarrow \max, \\ \sum_{k=1}^l s_{i_0k} \lambda_k &\leq \sum_{j=1}^m r_{i_0j} \mu_j, \quad i = 1..n, \quad i \neq i_0, \\ \sum_{j=1}^m r_{i_0j} \mu_j &= 1, \quad \lambda_k \geq 0, \quad k = 1..l, \quad \mu_j \geq 0, \quad j = 1..m. \end{aligned}$$

Таким образом, представленный метод оценки деятельности руководителей субъектов РФ имеет значительные преимущества перед существующими методиками, а результаты проведённых исследований показывают огромный потенциал для экономического роста субъектов РФ. Направления дальнейших исследований будут связаны с детальным анализом полученных оценок и разработкой практических рекомендаций для повышения эффективности деятельности.

#### Список литературы

1. Пояснительная записка к Тринадцатому выпуску Рейтинга эффективности губернаторов. Фонд развития гражданского общества. URL: <http://civilfund.ru/mat/99> (дата обращения: 25.03.2016).
2. Afonso A., Fernandes S. Assessing and explaining the relative efficiency of local government // The Journal of Socio-Economics. 2008. V.37, № 5. P.1946–1979.
3. Пискунов А. А., Иванюк И. И., Лычев А. В., Кривоножко В. Е. Использование методологии АСФ для оценки эффективности расходования бюджетных средств на

государственное управление в субъектах российской федерации // Вестник АКСОР. 2009. № 2. С. 28–36.

4. Пискунов А. А., Иванюк И. И., Данилина Е. П., Лычев А. В., Кривоножко В. Е. Система рейтингования регионов с использованием методологии АСФ // Вестник АКСОР. 2008. № 4. С. 24–30.

5. Социальная эффективность государственного сектора в регионах РФ. Фонд ИСЭПИ, Лаборатория математических методов политического анализа и прогнозирования МГУ имени М.В. Ломоносова. Москва, 2013.

## **Блочный метод аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в задачах многокритериальной оптимизации \***

А.В. Лотов

*Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Работа посвящена аппроксимации оболочки Эджворта-Парето (ОЭП), т.е. максимального (по включению) множества, имеющего ту же границу Парето, что и множество достижимых критериальных векторов задачи многокритериальной оптимизации [1, 2]. Рассматривается вопрос об использовании блочной структуры задачи для повышения эффективности методов аппроксимации. Изучается двухуровневая система, состоящая из верхнего (координирующего) уровня и конечного числа блоков, взаимодействующих между собой через верхний уровень. Предполагается, что критерии оптимизации связаны исключительно с переменными верхнего уровня. Метод аппроксимации основан на предварительной аппроксимации ОЭП для отдельных блоков и на дальнейшем их использовании для построения аппроксимации ОЭП для задачи в целом.

Метод применялся для построения ОЭП в многокритериальной задаче поиска компромиссного стратегического решения об уровнях обеспеченности водой различных водопользователей Волго-Камского бассейна.

### **Список литературы**

1. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: изд. МАКС Пресс, 2008.

2. Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier Kluwer: Boston, 2004.

## **Многокритериальный подход к построению правил управления каскадом ГЭС<sup>†</sup>**

А.В. Лотов, А.И. Рябиков

*Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Предлагается многокритериальный метод поддержки принятия решения о правилах управления каскадом гидроэлектростанций, расположенных в основном русле реки. Метод основан на аппроксимации оболочки Эджворта-Парето (ОЭП) и интерактивной визуализации границы Парето в виде карт решений, т.е. наборов двумерных сечений ОЭП, которые изображаются по запросу исследователя [1].

Расчеты проводились на основе модели и информации для озера Байкал и каскада водохранилищ, расположенных на реке Ангара. Используемая в исследовании нелинейная динамическая модель каскада является системой с дискретным временем и управлением, задаваемым обратной связью. В качестве решений брались параметры правил управления, а критериев оптимизации – доля периодов, в течение которых нарушались требования к уровням Байкала и водохранилищ, потокам через плотины, производству электроэнергии, возможностям транспорта и т.д. Всего рассматривалось 26 критериев, значения которых определялись несколькими сотнями параметров обратной связи, являющимися непрерывными переменными.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РАН I.5 П.

† Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РАН I.5 П.

Рассматриваемая нелинейная задача многокритериальной оптимизации, имеющая значительную размерность, характеризуется большим числом локальных экстремумов сверток критериев. В связи с этим оказался недостаточно эффективным двухфазный метод аппроксимации ОЭП [2], что потребовало разработки нового метода, основанного на комбинации классических методов скалярной оптимизации и генетического метода. При этом генетический метод NSGA [3], считающийся одним из лучших генетических методов аппроксимации границы Парето, использовался для предварительной аппроксимации ОЭП. Хотя генетический метод не дает хорошей аппроксимации границы Парето, он позволяет «нащупать» зоны расположения эффективных решений задачи. На основном шаге проводилось итеративное улучшение аппроксимации ОЭП (с оценкой качества аппроксимации) с помощью локальной оптимизации сверток критериев со случайно выбранными начальными решениями из совокупности, найденной генетическим методом. Далее осуществлялось уточнение аппроксимации с помощью полу-генетического метода "оштукатуривания" [2, 4]. Для окончательной проверки качества построенной аппроксимации, отдельные решения, наиболее интересные с практической точки зрения, улучшались с использованием трудоемких методов оптимизации, в частности, туннельных алгоритмов.

В итоге была построена аппроксимация ОЭП, изучена форма границы Парето и сделаны выводы о возможности управления системой.

#### Список литературы

1. Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier Kluwer: Boston, 2004.
2. Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В. Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 11. С. 2009–2023.
3. Deb K., Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. Chichester, UK: Wiley, 2001. 515 p.
4. Березкин В.Е., Лотов А.В., Лотова Е.А. Изучение гибридных методов аппроксимации оболочки Эджворта-Парето в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 6. С. 905–918.

### Согласительные решения для задач выбора при неполной информации о предпочтениях\*

В.В. Подиновский

*Национальный исследовательский университет "Высшая школа  
экономики", Москва, Россия*

Один из подходов к анализу задач при неполной информации о предпочтениях приводит к решениям, называемых суррогатными, или согласительными. Он был предложен на основе суррогатных весов критериев для аддитивной функции ценности [1]. В [2] для параметрических моделей предпочтений, основанных на функции ценности или бинарном отношении предпочтения, предложен иной подход, который рекомендует выделять в качестве наилучшей альтернативу, для которой мера области значений параметров, при которых она оказывается оптимальной, максимальна. Иными словами, если максимальна вероятность того, что она окажется оптимальной. Этот подход развит для параметрических аддитивных функций ценности и для различных параметрических отношений предпочтения, рассматриваемых в теории важности критериев [3, 4].

#### Список литературы

1. Barron F.J., Barret B.E. Decision quality using ranked attribute weights // Management science. 1996. V. 42. P. 151-1523.
2. Подиновский В.В. Согласительные решения многокритериальных задач. В сб.: Материалы XLV Международной конференции IT + SE'16 (Гурзуф, 23.05.-31.05.2016). С. 67 – 71.

---

\* Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году.

3. Podinovski V.V. Analysis of multicriteria choice problems by methods of the theory of criteria importance, based on computer systems of decision making support // Journal of Computer and System Sciences International. 2008. V. 47. No 2. P. 221 – 225.

4. Podinovski V.V. Parametric importance of criteria and intervals of value tradeoffs uncertainty in the analysis of multicriteria problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. V. 48. № 11. P. 1981 – 1998.

## Универсальная процедура построения множества Парето

Я.И. Рабинович

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Разработана вычислительная процедура, позволяющая в рамках единого подхода адаптировать существующие численные методы скалярной оптимизации для решения многокритериальных задач. В качестве решения многокритериальной задачи рассматривается аппроксимация множества Парето с наперед заданной степенью точности.

На непустом компактном множестве допустимых решений  $X \subset \mathbf{R}^s$  строится последовательность подмножеств  $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ , удовлетворяющая соотношениям:

$$X_1 = \{x^1\} \subset X, \quad X_{t+1} = \bigcup_{x \in X_t} X_{t+1}(x) \subset X, \quad t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$X_{t+1}(x) = \{x\} + \bigcup_{J \in M_t(x)} \{h(x, J)\},$$

где  $x^1 \in X$  – произвольное допустимое решение,  $A+B$  – векторная сумма множеств.

Всякая точка  $x \in X_t$  порождает на следующем  $t+1$  – ом уровне непустую векторную сумму множеств  $X_{t+1}(x)$ , так что из точки  $x \in X_t$  осуществляется переход по направлению  $h(x, J)$  в точку  $x+h(x, J) \in X_{t+1}(x)$ ,  $J \in M_t(x)$ , удовлетворяющую условиям

$$h(x, \emptyset) = 0, \quad h(x, J) \neq 0, \quad \emptyset \neq J \subset I = \{k | 1 \leq k \leq m\}, \quad (2)$$

где ненулевые направления  $h(x, J) \neq 0$  удовлетворяют соотношениям

$$x + h(x, J) \in Y(x, \varepsilon) \cap Y_J(x, \varepsilon), \quad \emptyset \neq J \subset I = \{k | 1 \leq k \leq m\},$$

$$Y(x, \varepsilon) = \left\{ y \in X \left| \left| \frac{w_k(y)}{w_k(x)} - 1 \right| \leq \frac{\gamma \varepsilon}{2\eta}, \quad k \in I \right\}, \quad (3)$$

$$Y_J(x, \varepsilon) = \left\{ y \in X \left| \frac{w_k(y)}{w_k(x)} - 1 \geq \frac{\gamma \varepsilon^2}{2\eta}, \quad k \in J \right\},$$

$$\gamma = \min_{z \in X} \min_{k \in I} w_k(z), \quad \eta = \max_{z \in X} \sum_{k \in I} w_k(z), \quad \varepsilon = \varepsilon_t(x) \in [0, 1),$$

причем составленная из частных критериев эффективности  $m$  – мерная вектор-функция  $w(x) \in \mathbf{R}^m$  положительно определена и непрерывна на множестве допустимых решений  $X \subset \mathbf{R}^s$ .

Степень ветвления последовательности (1) определяет множество  $M_t \subset 2^I$  (множество не вложенных друг в друга подмножеств множества  $I = \{k | 1 \leq k \leq m\}$ ), заданное соотношениями

$$M_t(x) = \begin{cases} N_t(x), & \text{если } N_t(x) \neq \emptyset, \\ \{\emptyset\}, & \text{если } N_t(x) = \emptyset, \end{cases} \quad (4)$$

$$N_t(x) = \left\{ J \subset I \left| \begin{array}{l} Y(x, \varepsilon) \cap Y_J(x, \varepsilon) \neq \emptyset, \\ Y(x, \varepsilon) \cap Y_M(x, \varepsilon) = \emptyset, \quad M \neq J \subset M \subset I \end{array} \right. \right\}.$$

Соотношения (3), (4) включают величину  $\varepsilon = \varepsilon_t(x) \in [0, 1]$  – параметр возмущения, который в начальной точке  $x^1$  и в любых соседних точках  $x^t \in X_t$ ,  $x^{t+1} \in X_{t+1}(x^t)$  последовательности (1) таких, что

$$x^{t+1} = x^t + h(x^t, J_t), \quad J_t \in M_t(x), \quad (5)$$

удовлетворяет условиям

$$\varepsilon_1(x^1) = \kappa \in (0, 1), \quad \varepsilon_{t+1}(x^{t+1}) = \begin{cases} \kappa \varepsilon_t(x^t), & \text{если } Q_t = \emptyset, \\ \varepsilon_t(x^t), & \text{если } Q_t \neq \emptyset, \end{cases} \quad (6)$$

$$Q_t = \bigcap_{q \leq t, \varepsilon_q(x^q) = \varepsilon_t(x^t)} J_q,$$

где произвольная фиксированная величина  $\kappa \in (0, 1)$  задает коэффициент дробления параметра возмущения.

В качестве точки  $y = x + h(x, J) \in Y(x, \varepsilon) \cap Y_J(x, \varepsilon)$  в соотношениях (1) можно использовать любую конкретную (например, первую) из точек, которую строит стартующий в точке  $x \in X_t$  последовательный скалярный алгоритм внутренней точки, решая задачу скалярной максимизации

$$\min_{k \in J} \left\{ \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \right\} \xrightarrow{y \in Y(x, \varepsilon)} \max,$$

если в этой точке достигается требуемое в (3) значение максимизируемой функции

$$\min_{k \in J} \left\{ \frac{w_k(y)}{w_k(x)} \right\} \geq 1 + \frac{\gamma \varepsilon_t(x)^2}{2\eta}.$$

Если вектор–функция  $w(x) \in \mathbf{R}^m$  положительно определена и псевдовогнута на выпуклом компакте  $X$ , то последовательность множеств  $\{w(X_t)\}_{t=1}^{\infty}$ , заданная соотношениями (1)–(6), аппроксимирует множество Парето.

#### Список литературы

1. Рабинович Я.И. Построение множества эффективных векторов методом  $\varepsilon$  – возмущений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45 № 5. С. 824-845.
2. Рабинович Я.И. Построение множества эффективных векторных оценок и задача сравнения аппроксимаций. М.: ВЦ РАН, 2012.

## **Исследование операций в экономике**

1. D.M. Ediev Estimating the Expectation of Life at Old Age: Revisiting Horiuchi&Coale and reconciling with Mitra
2. S.V. Kruglikov, S.S. Podluzhnyy Decision-making procedure in process of cooperative behavior
3. В.В. Баранов Управляемое развитие: аксиоматика и модели принятия решений
4. Д.К. Бородин, А.В. Тихонов Аукционный алгоритм выбора исполнителя заказа в сфере услуг текстовых переводов
5. Д.Ю. Голембиовский, А.Р. Данилишин Системно-динамическая модель экономики России
6. А.С. Горбатов Нулевой риск по Сэвиджу при неопределенности
7. Б.В. Дигас, В.Л. Розенберг Применение интегрированной модели MERGE к изучению экологических показателей экономического развития региона
8. А.А. Жукова, И.Г. Поспелов Модель оптимального потребления при случайном процессе получения кредита
9. Г.К.Каменев Опыт прямой идентификации модели банковской системы России
10. А.Е. Карпов Применение теории массового обслуживания для оптимизации типажа парка гражданских самолетов
11. В.А.Кипяткова, Е.В.Полякова Трансмиссия образования в процессах групповой социализации с гетерогенными агентами
12. Е.Л. Кудрявцев Общая схема исследования игр Choose Number на основе L-равновесия
13. А.В.Матвеевко, В.Д.Матвеевко Выбор технологии, порождающий нормализованную производственную CES-функцию.
14. Н.К. Обросова, А.А. Шананин О влиянии дефлятора дохода на оценку капитализации производства в условиях нестабильной реализации продукции
15. Н.Н. Оленёв Эндогенная производственная функция в оценке реального сектора экономики
16. И.Г. Поспелов Простота сложности экономики: сильный магистральный эффект
17. А.Ю. Флёрова Математическая модель процесса нефтедобычи с учетом инфраструктурных ограничений
18. А.Д. Цвиркун, В.В. Топка Минимаксная задача равномерного распределения ресурсов
19. Ю.М. Цодиков, Д.В. Макаров Особенности сходимости метода последовательного линейного программирования для задач оптимального планирования.
20. В.В. Шевченко О динамических ансамблях статических игр

### **Estimating the Expectation of Life at Old Age: Revisiting Horiuchi&Coale and reconciling with Mitra**

D.M. Ediev

*International Institute for Systems Analysis, Laxenburg, Austria*

*North-Caucasian State Humanitarian-Technological Academy, Cherkessk, Russian Federation*

Horiuchi and Coale [1] have suggested a simple formula to improve the estimates of the expectation of life at old age, a formula that was questioned as unrealistic by Mitra [2, 3] who proposed his own alternative. Mitra's approach was also criticized for being prone to biases due to the age exaggeration [4] and the discussion between the researchers, unfortunately, have never made it to a resolution. This lack of agreement but also simplifying assumptions behind both approaches did not let the methods to become a part of practical toolkit of demographic analysis. I

show here, however, that both methods are useful in drastically reducing the estimation errors of the life expectancy. The disputed differences were largely due to inconsistent inputs rather than methodological contradictions. Furthermore, the methods produce by far better results as compared to the popular alternative, the extrapolation of the death rates into the open age interval. The two approaches may be combined to produce better estimates of expectation of life and assessments of age exaggeration.

### References

2. Horiuchi S., A.J. Coale. A Simple Equation for Estimating the Expectation of Life at Old Ages // *Population Studies*. 1982. V. 36, № 2. P. 317-326.
3. Mitra S. Estimating the Expectation of Life at Older Ages // *Population Studies*. 1984. V. 38, № 2. P. 313-319.
4. Mitra S. On Estimating the Expectation of Life at Old Ages: Reply to Professor Coale // *Population Studies*. 1985. V. 39, № 3. P. 511-512.
5. Coale A.J. Estimating the Expectation of Life at Old Ages: Comments on the Article by Mitra. *Population Studies*. 1985. V. 39, № 3. P. 507-509.

## Decision-making procedure in process of cooperative behavior

S.V. Kruglikov, S.S. Podluzhnyy

*Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia*

Recently, wide range of problems, dealing with management and decision-making in organizational systems, a real-time modeling of team interaction, treats in terms of multi-agent approach [1]. Analysis shows the necessity in adaptive mathematical models considering various interactions as a sequence of individual or common actions with restricted resources under hierarchically organized control.

The report presents a mathematical model for decision-making procedure in cooperative behavior of organizational systems based on the theory of guaranteed control-estimation under uncertainty. The research is combined extension of the development in [2, 3]. Chaotic effects of market behavior, long cycles of design and manufacturing as a feature of engineering industry determine relevance of research in terms of guaranteed approach. At the same time, inflation expectations cause the increase in cost of basic production factors. Rising expenses on energy, raw materials, wages, utilities invariably leads to a profit decrease. An efficient tool at the disposal of production managers is to reduce variable costs in the way of upgrading and providing its modernization. Explicit description of modernization for industrial enterprises in high-tech engineering branch forms the query for investment.

Bank gets a loan application, and needs to carry out a specific decision-making, including an independent risks analysis, that can take a long time. This increases the risk for both, an enterprise as a borrower waiting for loan and the bank because it may lose the borrower. Developing specific requirements for financial measure of potential borrowers and reflection of financial indicators of potential borrower in the credit policy can reduce risks and accelerate the timing of consideration of applications for standard credit products.

Presented mathematical model realizes the notion of unified information space, that describe adequately features of such key assumptions.

1) Situational scheme describing the interaction of open systems with relatively constant environment and participation.

2) Description of systems interaction in discrete time that implies concerted shifts of an action of the participants.

3) Hierarchy in description of the participation, structure and behavior of the systems leads to the absorption of the description of lower layer subsystems that are out the observability boundaries.

4) Internal information model, describing data available, corresponds to an inverse scheme and reflects shifts of perception centered on an image of system.

Models presented provide unified descriptions of organizational structure, modernization trajectories and motivations of participants in cooperative behaviour. Symmetry of unified information space allows to describe complex modernization process in advance as a solution of ensured estimation problem. Quality is evaluated by extremal induces. Then choice of modernization trajectories may be interpreted in terms of control problem. Separation property of ensured control/estimation problems allows to split algorithmically procedures of coordinated control.

The proposed model allows us to consider different aspects of performance management systems.

### References

6. <http://www.aiportal.ru/articles/multiagent-systems>
7. Kruglikov S.V. Modernization of Hierarchical System and Structural Properties of Guaranteed Control-Estimation Problems// game theory and management. SPb.: Graduate School of Management SPbSU, 2014. P. 163-165. Smith S.S. Book. New York: Springer, 2012.
8. Podluzhnyy S.S., Kruglikov S.V. Searching for the Credit Portfolio Structure and Building Portrait of Prospective Borrower // 16th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO-2015) Garmisch-Partenkirchen, Germany, 6-9 October 2015.. IFAC-PapersOnLine Volume 48, Issue 25, Pages 231–235. doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.11.092

## Управляемое развитие: аксиоматика и модели принятия решений

В.В. Баранов

*ИМАШ РАН, Москва, Россия*

Исследуется проблема управления развитием в соответствии с концепцией [1], постулирующая источником развития интересы субъекта. Средством реализации интересов является *объект интересов*, обладающий *потенциалом* возможностей извлечения «пользы» для реализации интересов. Объект подвержен деградации, в силу которой его потенциал снижается и порождает необходимость обновления. Субъект и объект интересов существуют в *неоднородной среде*.

*Развитие* достигается управлением реализацией интересов с последовательным обновлением объекта интересов.

Проблема формализуется в классе систем, мотивированных интересами, определяемых тройкой объектов [2]:

(субъект интересов, объект интересов, среда).

Подобные системы являются мультисубъектными и классифицируются по структуре интересов на классы: общего дела, унитарные, коллективного существования и корпоративные системы с иерархической структурой.

Интересы субъектов взаимно зависимы в соответствии со структурой интересов системы. Выбор альтернатив управления выполняется коллективным решением, порождающим конфликт интересов. Его разрешимость компромиссом открывает возможность реализации интересов субъектов.

Исследуются условия разрешимости конфликта компромиссом.

Выполняется базовая структуризация условий принятия решений в предположении, что деградация потенциала объекта описывается *однородным строго* марковским процессом. Среда подвержена девальвации ценностей, которая описывается *неоднородным* марковским процессом.

В этих предположениях проблема управления формализуется *марковским процессом коллективного принятия решений*. Его базовая структура определяются набором следующих носителей априорной информации:

$$\langle K, S, T, A^i, i \in K, Q(T, S \mid S \times_{i \in K} A^i), u^i(A^i \mid \times_{j \in K \setminus i} A^j; c), i \in K \rangle,$$

где  $K$  – коллектив субъектов,  $S$  – множество состояний потенциала,  $T$  – множество альтернатив продления ресурса объекта,  $A^i$  – множество альтернатив субъекта  $i \in K$ ,  $Q(T, S \mid S \times_{i \in K} A^i)$  – переходная функция управляемого марковского процесса,  $u^i(A^i \mid \times_{j \in K \setminus i} A^j; c) \in R^1$  – функция полезности альтернатив  $a^i \in A^i$  субъекта  $i \in K$  при условии состояния среды  $c \in R^2$ .

Переходная функция  $Q(\cdot)$  определяется в явном виде моделью динамики деградации [3]. Функции полезности  $u^i(\cdot), i \in K$  определяются моделью полезности [4].

Для каждого класса систем базовая структуризация дополняется условиями, порождаемыми особенностями их структуры интересов. Формируется аксиоматика принятия решений, и строятся модели принятия решений. Их итоги определяются следующими основными результатами.

1. В классе систем общего дела аксиоматика коллективного принятия решений основывается на кооперации по условиям синергии общего дела. В ее условиях конфликт интересов разрешим *сильно устойчивым компромиссом*.

На основании этих результатов формируется методология формализации и решения проблемы управляемого развития, которая сводится к трем задачам: а) управление процессом реализации интересов при фиксированном объекте интересов; б) указание момента останова процесса для обновления системы; в) выбор варианта обновления.

Получены условия разрешимости задач и конструктивные методы решения. Их итогами являются следующие результаты.

- Необходимым условием устойчивости управляемого развития является разрешимость конфликта интересов устойчивым компромиссом.

- В системах общего дела процесс управляемого развития устойчив.

2. В системах коллективного существования решения определяются коллективным выбором из общего множества альтернатив. Аксиоматика коллективного выбора определяется ценностями конкретных систем. В их условиях имеют место следующие основные результаты.

- В системах, существующих в ценностях «демократии» и «либерализма», коллективный выбор *не разрешим в компромиссах*.

- В системах, существующих в ценностях концепции «справедливости», постулирующей императив «не ущемлять «слабого», коллективный выбор разрешим в компромиссах [5]. Подобные компромиссы *эффективны*, однако *не устойчивы*.

3. В корпоративных системах коллективный компромисс *существует и эффективен* по условиям справедливости и условиям «общего дела». Однако он *не устойчив*.

4. Устойчивость компромиссов достигается при условии интеграции в структуру системы «системного менеджера», не имеющего собственных интересов, но обязанного создавать стимулы, мотивирующие субъектов на сохранение целостности системы и соблюдение компромисса. Подобные системы образуют класс унитарно-интегрированных систем.

5. В унитарно-интегрированных системах процесс управляемого развития устойчив.

*Заключение.* Представленные результаты составляют теоретическую базу проблемы управляемого развития. Из них следуют принципы структурной организации социальных и других систем, в которых достигается эффективность реализации интересов и устойчивость развития.

#### Список литературы

1. Баранов В.В., Цвиркун А.Д. Системно-структурный анализ управляемого развития крупномасштабных систем // Труды восьмой международной конференции MLSD`2015.Т.1. М.: ИПУ РАН. 2015. – С.13-27.

2. Баранов В.В. Процессы принятия управляющих решений, мотивированных интересами. М.: Физматлит. 2005.

3. Баранов В.В., Матросов В.М. Модель динамики в задачах управления деградирующими системами. //Проблемы управления, № 4. 2007, С. 2 – 7. Москва. ИПУ РАН.

4. Баранов В.В. Модели динамики, мониторинга и полезности в проблеме управления развитием // Труды конференции MLSD`2011.Т. II. – М.: ИПУ РАН. 2011. – С.291-298.

5. Баранов В.В. О проблеме и методах корпоративного выбора // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. №2. С.103-116.

## Аукционный алгоритм выбора исполнителя заказа в сфере услуг текстовых переводов\*

Д.К. Бородин, А.В. Тихонов  
ООО «Русское облако», Смоленск, Россия

Выбор исполнителя услуги текстового перевода для выполнения определенного заказа в рамках агентства переводов является трудоемкой задачей, и требует от менеджера агентства проведения сравнительных операций на основе имеющихся данных обо всех исполнителях из множества исполнителей, а также их опроса для получения недостающих данных. Процедура сравнения исполнителей по имеющимся характеристикам, как правило, проводится вручную, а процесс получения недостающих данных – посредством средств электронной коммуникации (электронная почта, системы обмена мгновенными сообщениями). В качестве основы для автоматизации процедуры предлагается аукционный алгоритм выбора исполнителя заказа в сфере услуг текстовых переводов, с целью повышения скорости выбора исполнителя, эффективности работы менеджера агентства переводов, качества выбора исполнителя, а также возможности масштабирования агентства переводов посредством значительного увеличения множества исполнителей. Аукционный алгоритм предназначен для поддержки менеджера в принятии решения о выборе наиболее подходящего исполнителя для конкретного заказа.

Каждый заказ состоит из определенной услуги, и в аукционе участвуют только исполнители, предоставляющие данную услугу.

Данные об исполнителе делятся на два класса, статичные и оперативные. К статичным данным относятся уровень качества по определенной шкале, скорость работы, степень надежности, опыт, расчетная стоимость выполнения заказа. К оперативным данным относятся доступность для выполнения, срок выполнения задачи, стоимость выполнения задачи.

Поскольку статичные данные предполагаются доступными в любой момент, алгоритм позволяет провести ранжирование исполнителей для выполнения конкретной задачи без непосредственного контакта с ними. Статичные данные основаны на истории работы с исполнителем. При ее отсутствии берутся начальные значения или средние данные. Начальные значения могут быть введены менеджером на основе своего опыта работы как с конкретным исполнителем, так и с услугой заказа в целом. По мере накопления данных их точность будет возрастать, что положительно скажется на результатах работы аукционного алгоритма.

Оперативные данные от каждого исполнителя получаются посредством автоматизированного опроса, и в данном случае предполагается, что опрос исполнителей произведен и данные получены.

Предложенный аукционный алгоритм заключается в следующем. На основании полученных от исполнителей данных, а также имеющихся статичных данных, производится расчет общего ранга  $R$  исполнителя  $i$  в рамках конкретного заказа как суммы рангов по каждому из параметров, и на основании значений суммарного ранга производится ранжирование исполнителей по убыванию, предпочтение отдается исполнителем с максимальными значениями  $max(R)$ .

Ранг каждого исполнителя по отношению к конкретному заказу рассчитывается по формуле:

$$R_i = a_i(q_i + s_i + r_i + e_i + b_i + d_i), \text{ где}$$

- $q$ (auality) - уровень качества, от 1 до 5; ранг рассчитывается по формуле  $q / max(q)$ .
- $s$ (peed) - скорость работы, количество учетных единиц в день; ранг рассчитывается на основе степени отклонения от среднего значения скорости по формуле

$$(s - AVG(s)) / max(s - AVG(s));$$

- $r$ (eliability) - степень надежности, от 0 до 1; ранг рассчитывается на основе отклонений от обещанных сроков выполнения задач и показателя отправки задач на доработку;

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия развитию малых форм предпринимательства в научно-технической сфере

- $e(\text{experience})$  - опыт, в годах; ранг определяется на основании отклонения от среднего значения параметра  $e$  по формуле

$$(e - \text{AVG}(e)) / \max(e - \text{AVG}(e));$$

- $b(\text{udget})$  - степень отклонения стоимости, предложенной исполнителем, от расчетной стоимости выполнения задачи; ранг определяется на основании отклонения от среднего значения параметра  $b$  по формуле

$$(b - \text{AVG}(b)) / \max(b - \text{AVG}(b));$$

- $a(\text{vailability})$  - доступность исполнителя для выполнения, булево значение 0 или 1, вводится исполнителем;

- $d(\text{eviation})$  - отклонение срока, предложенного исполнителем, от планового срока выполнения заказа; определяется на основании отклонения от среднего значения параметра  $d$  по формуле

$$(d - \text{AVG}(d)) / \max(d - \text{AVG}(d)).$$

Предложенный алгоритм рекомендуется внедрять в двух режимах поддержки принятия решения:

- менеджер агентства переводов является лицом, принимающим решение о выборе исполнителя для заказа.
- алгоритм принимает решение о выборе исполнителя для конкретной задачи; в таком случае процесс принятия решения полностью автоматизирован

Алгоритм предоставляет список ранжированных исполнителей по мере поступления от них информации. При опросе более, чем двух исполнителей, может возникнуть целесообразность быстрого принятия решения о запуске заказа в работу, поэтому ответ от двух или даже одного исполнителя может быть достаточным для выбора.

Таким образом, предложенный аукционный алгоритм позволяет реализовать автоматическое проведение аукциона для ранжирования исполнителей для конкретного заказа в сфере услуг переводов на основе комбинации статичных и оперативных данных.

## Системно-динамическая модель экономики России

Д.Ю. Голембиовский, А.Р. Данилишин,  
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе описывается динамическая стохастическая модель современной экономики России. Теоретической основой служат микро- и макроэкономические концепции, согласно которым участники экономических отношений действуют в соответствии с принципом максимизации собственных предпочтений и минимизации издержек, в результате чего и происходит подстройка экономики. Классическим примером является процесс подстройки спроса и предложения, который в данном случае описывается дифференциальным уравнением 1.1, где  $S$ -предложение,  $D$ -спрос,  $p$ -цена,  $\lambda$ -время подстройки системы:

$$\frac{dp(t)}{dt} = f(D(p) - S(p), \lambda) \quad (1.1)$$

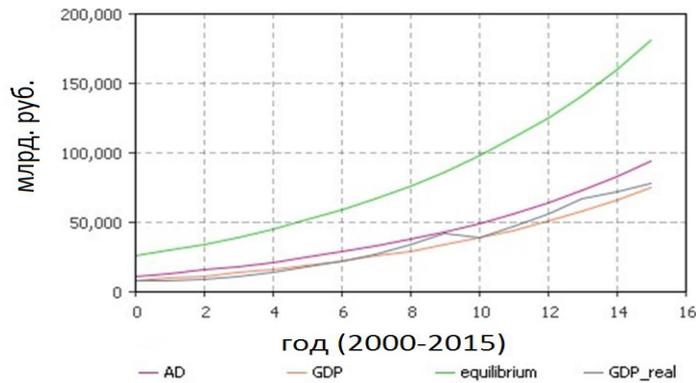
Главным инструментом моделирования послужил аппарат системной динамики, который идеально подходит для описания подобных систем, так как позволяет учитывать причинно-следственные связи, петли обратных связей, задержки реакций, влияние отдельных частей системы друг на друга.

Данная работа призвана объединить в себе две уже существующие работы [2, 3], указанные в списке литературы, которые по отдельности описывают российскую экономику как систему, сильно зависящую от экспорта нефти, где в большой степени присутствует теневой сектор экономики.

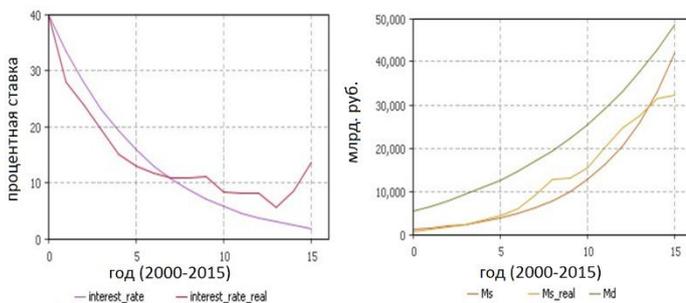
На данном этапе разработки модели были получены следующие результаты моделирования поведения процентной ставки\*, ВВП, денежного спроса и предложения в период с 2000 по 2015 годы, которые представлены на рисунках 1 и 2.

\* Ставка рефинансирования(1992-2012), ключевая ставка(2013-2015)

**Рисунок 1. ВВП, совокупное предложение, равновесное совокупное предложение.**



**Рисунок 2. Процентная ставка (слева), денежный спрос и предложение (справа).**



### Список литературы

1. Kaoru Yamaguchi. Macroeconomic Dynamics, Graduate School of Business Doshisha University, 2012.
2. Андреев М.Ю. Поспелов И.Г. Поспелова И.И. Хохлов М.А. Технология моделирования экономики и модель современной экономики России. 2006.
3. Полбин А.В. Статья в журнале // Экономический журнал ВШЭ. 2013. С. 323–359.

## Нулевой риск по Сэвиджу при неопределенности

А.С. Горбатов

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

В окружающей нас жизни часто происходят конфликтные ситуации, в которых необходимо принимать решения. Зачастую последствия этих решений до конца не ясны, ибо возникает, так называемая, неопределённость. Как действовать в такой ситуации? Существует несколько подходов к формализации оптимального решения конфликтов при неопределенности. Предложенный в 1951 году американским математиком Леонардом Сэвиджем принцип минимаксного сожаления наряду с принципом максимина играют важную роль при принятии гарантированных решений в однокритериальной задаче при неопределённости. В нем используется функция риска по Сэвиджу  $\Phi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)$ , значение которой определяет уровень риска, которым сопровождается выбранная лицом, принимающим решение (ЛПР) стратегия. ЛПР стремится ее возможно уменьшить.

В данном сообщении при «обычных» для математической теории игр условиях (критерий  $f(x, y)$  непрерывен на декартовом произведении компактных множеств стратегий  $X$  и неопределённостей  $Y$ ) доказаны необходимые и достаточные условия существования стратегии, обеспечивающей нулевой риск. Оказывается, что такая стратегия существует тогда и только тогда, когда функция риска по Сэвиджу обладает седловой точкой  $(x^0, y^0)$ , т.е.

$$\min_{x \in X} \Phi(x, y^0) = \Phi(x^0, y^0) = \max_{y \in Y} \Phi(x^0, y).$$

Вводится также смешанное расширение задачи

$$\langle X, Y, \Phi(x, y) \rangle,$$

для которого, при указанных выше предположениях, установлено существование смешанной стратегии, которая гарантирует наименьшее значение функции риска при любой реализации неопределенности  $y \in Y$ .

Однако не всегда принцип минимаксного сожаления применим. Для иллюстрации этого факта в сообщении приводится класс линейно-квадратичных задач, для которых гарантированное значение функции риска ( $\max_{y \in Y} \Phi(x, y)$ ) не существует.

#### Список литературы

1. Жуковский В. И., Горбатов А. С. Нулевые риски в однокритериальных задачах // Управление риском. 2015. № 2. С. 29–37.

## Применение интегрированной модели MERGE к изучению экологических показателей экономического развития региона\*

Б.В. Дигас, В.Л. Розенберг

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,  
Екатеринбург, Россия*

Задача прогнозирования климатических изменений и смягчения их последствий является одной из наиболее актуальных современных проблем [1]. Официальная точка зрения, отраженная в Климатической доктрине Российской Федерации [2], состоит в признании необходимости формирования государственного подхода к проблемам климата и смежным вопросам на основе всестороннего научного анализа экологических, экономических и социальных факторов. С этой целью привлекаются комплексные оценочные модели, имеющие, как правило, междисциплинарный характер. Их функциональность характеризуется возможностью построения и тестирования множества сценариев динамики эколого-экономических систем (как глобальной, так и региональных) с последующим выбором оптимальной траектории на основании определенных критериев качества. Поэтому такие модели могут использоваться компетентными органами, принимающими решения, как инструмент оценивания той или иной стратегии экономического развития.

Основными задачами вычислительных экспериментов, описываемых в докладе, являются проверка последствий гипотетического участия России в инициативах по снижению выбросов парниковых газов по типу Киотского протокола и апробация в моделировании одной из методик расчета так называемого «зеленого» ВВП, информирующего об эффективности природопользования. Для достижения указанных целей используется оптимизационная модель MERGE, классическая версия которой предназначена для сравнительного анализа различных траекторий регионального развития и количественного оценивания результатов применения природоохранных стратегий. Модель разработана американскими учеными [3] и модифицирована в Международном институте прикладного системного анализа (Лаксенбург, Австрия) и Институте математики и механики УрО РАН (Екатеринбург, Россия) [4, 5].

Компонентами модели являются экономико-энергетический модуль, климатический модуль и модуль оценки вероятных потерь. Экономико-энергетический модуль, являющийся ядром MERGE, представляет собой интегрированную прикладную модель общего равновесия, в которой оптимальные траектории экономико-энергетического развития регионов находятся из условия максимума суммы (по всему интервалу времени) дисконтированных полезностей потребления [3]. Климатический модуль модели MERGE учитывает наиболее важные антропогенные парниковые газы и рассчитывает как их концентрации в атмосфере и океане, так и гипотетическое изменение температуры, которое подается на вход модуля оценки ущерба, анализирующего различные типы последствий изменения климата.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-06-00075) и программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект 15-7-1-22)

Значительное внимание в работе уделяется адаптации MERGE к современному состоянию мировой экономики в условиях сложной геополитической обстановки. Адаптация включает изменения в математической модели для реализации дополнительных возможностей симуляции экономической динамики (например, для учета кризисных явлений, взаимных торговых ограничений и «зеленых» характеристик) и использование новых входных данных (макроэкономических, энергетических параметров, запасов различных ресурсов) для конструирования соответствующих сценариев. Дополнительно в модель введена новая компонента, реализующая упрощенную методику расчета регионального «зеленого» ВВП как результата коррекции ВВП посредством вычитания стоимостных оценок истощения природных ресурсов и экологического ущерба от загрязнения окружающей среды [6].

В качестве базовых источников входных данных для анализа возможных траекторий экономического развития России, отражающих ключевые тенденции, и показателей их экологической эффективности используются Прогноз социально-экономического развития на 2016 г. и плановый период 2017–2018 гг., выполненный Минэкономразвития РФ [7], и оценки международных экспертных организаций; см., например, [8]. Модельные расчеты свидетельствуют о наличии у России резервов для «безболезненного» участия в природоохранных инициативах, состоящих в неперевышении к 2020–2025 гг. уровня выбросов 1990 г. В то же время сырьевой характер российской экономики приводит к существенным экологическим потерям (более 10% ВВП в 2015 г.), поэтому задача увеличения экоэффективности национального ВВП является актуальной и требует безотлагательного решения.

#### Список литературы

1. Кокорин А.О., Грицевич И.Г., Сафонов Г.В. Изменение климата и Киотский протокол – реалии и практические возможности. М.: Всемирный фонд дикой природы (WWF)–Россия, 2004.
2. Климатическая доктрина Российской Федерации, <http://www.kremlin.ru/events/president/news/6365>
3. Manne A., Mendelson R., Richels R. MERGE — a Model for Evaluating Regional and Global Effects of GHG reduction policies // Energy Policy. 1995. Vol. 23, No. 1. P. 17–34.
4. Kryazhinsky A., Minullin Ya., Schratzenholzer L. Global long-term energy-economy-environment scenarios with an emphasis on Russia // Perspectives in Energy Journal. 2005. Vol. 9. P. 119–137.
5. Digas B., Rozenberg V., Kuklin A. A new version of integrated assessment model MERGE // Int. J. Environ. Res. 2014. Vol. 8, No. 4. P. 1231–1240.
6. Бобылев С.Н., Минаков В.С., Соловьева С.В., Третьяков В.В. Эколого-экономический индекс регионов РФ. М.: Всемирный фонд дикой природы (WWF)–Россия, 2012.
7. Прогноз социально-экономического развития на 2016 г. и плановый период 2017–2018 гг., Минэкономразвития Российской Федерации, Москва, 2015, [www.economy.gov.ru/minec/activity/sections/macro/prognoz/](http://www.economy.gov.ru/minec/activity/sections/macro/prognoz/)
8. International Energy Outlook IEO-2014, U.S. Energy Information Administration (EIA), [www.eia.gov/forecasts/ieo/](http://www.eia.gov/forecasts/ieo/)

### Модель оптимального потребления при случайном процессе получения кредита\*

А.А. Жукова, И.Г. Поспелов  
ВЦ ФИЦ ИУ РАН, МФТИ, Москва, Россия

Работа продолжает исследования влияния случайности моментов смены управления на поведение экономического агента – потребителя [1,2]. В данном случае вводится возможность получения кредита в случайные моменты времени.

#### Процесс сделок

Состояние экономического агента характеризуется следующими величинами:

- $L(t)$  - текущий объем кредитов (текущий долг)
- $A(t)$  - текущий запас денег у агента

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-11-00432.

- $Y(t)=A(t) -L(t)$  - текущий размер собственных средств
- $C(t)$  - величина текущего потребления
- $K(t)$  - величина кредита

Внешними переменными для агента являются:  $r(t)$  - процентная ставка по займам;  $Z(t)$  - доход;  $p_y(t)$  - цена потребляемого продукта. Эти функции считаем неслучайными и настолько гладкими, насколько потребуется для решения задачи.

Поток моментов сделок описывается Пуассоновским процессом с частотой  $\Lambda$ , переменная  $\eta(t)$  обозначает число скачков: когда момент сделки наступает  $d\eta(t)=1$ , если момент сделки не наступает  $d\eta(t)=0$ .

Запас денег  $A(t)$  растет за счет внешних доходов, уменьшается в результате выплаты процентов по займам  $L(t)$ , и скачком меняется на стоимость расходов на потребление  $C(t)$ , которое агент покупает по неслучайной цене, и увеличивается за счет кредита  $K(t)$ . Динамика состояния потребителя:

$$dA(t) = Z_{\pi}(t)dt - r_l(t)L(t)dt - p_y(t)C(t)d\eta(t) + K(t)d\eta(t),$$

$$dL(t) = K(t)d\eta(t).$$

Модель предполагает, что в любой момент времени потребитель может брать кредит, но не может его выдавать, то есть,  $L(t) \geq 0$ . Помимо этого, количество денег на руках у потребителя не должно быть отрицательным,  $A(t) \geq 0$ .

Потребитель выбирает стратегию сделок по получению кредита  $K(t)$  и потребления  $C(t)$ , руководствуясь задачей максимизации ожидаемой полезности:

$$E \int_0^T U \left( \frac{C(t)}{C_0} \right) e^{-\Delta t} d\eta(t).$$

Все процессы  $A(t)$ ,  $C(t)$ ,  $K(t)$ ,  $L(t)$ , считаются полунепрерывными слева с пределом справа процессами, адаптированными к естественной фильтрации, порожденной случайным Пуассоновским процессом.

Решение задачи основывается на идее поиска оптимального управления как седловой функционала Лагранжа без ограничений.

Достаточные условия максимума функционала приводят к системе уравнений в частных производных и трем условиям дополняющей нежесткости. Последние «смягчаются» путем замены на гиперболы и переходом к пределу  $\delta \rightarrow 0$ .

$$\phi_A(t, A, L)A = \frac{r(t)}{\delta}, \phi_L(t, A, L)L = \frac{r(t)}{\delta}.$$

Асимптотическое разложение позволяют получить решение этой системы в нулевом порядке разложения по большому параметру  $\Lambda$ . Показано, что затраты на потребление - постоянная величина.

$$C(t, A, L) = \frac{const}{p_y(t)}.$$

При этом выражение для кредитов учитывает ограничение на фазовые переменные  $A(t)$ ,  $L(t) \geq 0$ .

В результате, при неслучайном потреблении, динамика активов агента имеет вид:

$$dY(t) = -\frac{c(t)}{\Lambda}dt + (Z(t) - r(t)L(t))dt,$$

$$dL(t) = \left( \max \left( 0, \frac{c(t)}{\Lambda} - Y(t) \right) - L(t) \right) d\eta(t).$$

Этот результат имеет может быть интересен для исследования динамических стохастических моделей общего равновесия (DSGE) [3], которые часто решают путем линеаризации решения в окрестности некоторой траектории, которую называют стационарным состоянием. Данная работа показывает, что решение, получаемое без линеаризации, но при асимптотическом разложении по большому параметру  $\Lambda$  имеет сходную структуру: неслучайная траектория оптимального потребления.

#### Список литературы

1. Поспелов И. Г., Жукова А. А. Стохастическая модель торговли неликвидным товаром // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, № 2. С. 131–147.
2. Поспелов И. Г., Жукова А. А. Исследование стохастической модели сбережений с инерционностью потребления // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, № 4. С. 41–48.
3. Smets F., Wouters R. Shocks and frictions in US business cycles: A Bayesian DSGE approach // National bank of Belgium working paper. 2007. № 109.

## Опыт прямой идентификации модели банковской системы России\*

Г.К.Каменев

*ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Рассматривается задача идентификации (калибровки) банковской системы России с учетом потребности банков в ликвидности, рассчитанной на основе статистики оборотов [1]. Под банковской системой понимается Центральный банк (ЦБ) и совокупность коммерческих банков. Модель в виде пошаговой динамической системы описывает изменение фазовых переменных: остатков выданных рублевых и валютных кредитов, рублевых и валютных депозитов, а также кредитов и депозитов в ЦБ. Эта динамика определяется пошаговыми управлениями: объемами вновь выдаваемых рублевых и валютных кредитов и депозитов, а также возвратом. Финансовый баланс рассчитывается как сумма изменения ликвидности (остатка) и дивидендов. При этом процентные ставки по кредитам и депозитам, расчетные счета (пассив) и валютный счет в ЦБ считаются экзогенными величинами. Экзогенными переменными являются также курс доллара и прочие расходы. Идентификации (калибровке) требуют независимые от времени коэффициенты расчета динамики ликвидности по пошаговым управлениям, а также коэффициент сезонности.

Рассматривается задача прямой идентификации, позволяющая описывать полученные из статистики ряды фазовых переменных и показателей ликвидности и дивидендов, замыкающих финансовый баланс. За основу берется базовый сценарий, в котором управления рассчитываются на каждом шаге по соответствующим фазовым переменным и экзогенным ставкам. Задача состоит в подборке параметров для расчета ликвидности, а также малом варьировании базовых управлений, обеспечивающие заданную точность аппроксимации рядов фаз, ликвидности и дивидендов.

Исходная задача минимизации функционала в виде суммы квадратов невязок оказывается нелинейной и плохо обусловленной. Показано, что при выборе в качестве критерия близости рядов метрики Чебышева, рассматриваемая задача оптимизации может быть сведена к последовательности задач линейного программирования на отдельных подмножествах идентифицируемых параметров (поблочно-координатный спуск), что обеспечивает поиск глобального решения.

Исследовалась задача идентификации модели на периоде с 2011 по 2014 год. Показано, что калибровка ликвидности по базовому сценарию может быть выполнена с высокой точностью без варьирования фаз. Для калибровки одновременно по рядам дивидендов и ликвидности требуется вариация базового сценария управлений, приводящая к вариации рядов фазовых переменных и показателей, не превышающая 0.4% в среднеквадратичном смысле.

Откалиброванная динамическая модель банковской системы России использовалась в рамках исследований общего и частичного экономического равновесия для проверки рациональности поведения консолидированного банковского агента [2]. Рациональность поведения банковского агента исследовалась в смысле оптимизации функционала, зависящего от дисконтированных дивидендов [3]. Она также может быть использована для

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-11-00432.

оценки последствий решений, состоящих в прогнозируемом выборе прямых пошаговых управляющих воздействий на банковскую систему.

#### Список литературы

1. Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.. Моделирование деятельности современной российской банковской системы // Экономический журнал высшей школы экономики. 2009. №2. С. 143-171.
2. Андреев М. Ю., Вржещ В. П., Пильник Н. П., Поспелов И. Г., Хохлов М. А., Жукова А. А., Радионов С. А.. Модель межвременного равновесия экономики России, основанная на дезагрегировании макроэкономического баланса // Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 29, Изд-во Моск. ун-та, М., 2013, 43–145.
3. Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Сильный магистральный эффект в модели рациональных ожиданий современной банковской системы России. // Журнал новой экономической ассоциации. 2009. т.1, №2. С. 70-84.

### **Применение теории массового обслуживания для оптимизации типажа парка гражданских самолетов**

А.Е. Карпов

*МФТИ, Москва, Россия*

Одной из важнейших экономических особенностей самолетостроения являются высокие затраты на разработку воздушных судов (ВС), а также сильные положительные эффекты масштаба производства. Для российского гражданского авиастроения наиболее реальным способом обеспечения рентабельных объемов сбыта изделий, является разработка и производство ВС в рамках кооперационных проектов со странами, только развивающими собственное самолетостроение. Совместный с КНР проект разработки и производства широкофюзеляжного самолета (ШФС), ориентированного хотя бы на внутренний рынок двух стран, может стать рентабельным в силу быстрого развития китайского рынка авиаперевозок.

Однако при совместной разработке самолетов стороны могут придерживаться различных позиций по поводу выбора их типажа, в частности, пассажироместимости и дальности полета. По этому поводу продолжается согласование позиций РФ и КНР. Повышение дальности полета вызывает существенное удорожание, как самого самолета, так и его эксплуатации. Однако ВС с большей дальностью полета более универсальны – они могут выполнить и более короткий рейс, тогда как обратное невозможно. На примере данного проекта предложена модель оценки приемлемых для авиакомпании значений стоимости самолета меньшей дальности и затрат на его эксплуатацию, компенсирующих выгоду от универсальности самолетов с большей дальностью. Модель построена на основе классической теории массового обслуживания (подробнее см., например, [2]). Поток заявок включает в себя определенные доли рейсов на большую и на среднюю дальности. Предполагается, что заявки поступают случайным образом, и свободные ВС назначаются на выполнение соответствующих рейсов, если позволяет их дальность. Это допущение согласуется с реальной практикой эксплуатации ВС в современных авиакомпаниях, где закрепление конкретных авиалиний за конкретным воздушным судном практически не практикуется, для обеспечения высокой интенсивности эксплуатации. Сопоставляются прибыли от эксплуатации и приобретения однотипных (состоящих только из самолетов с большей дальностью полета) и смешанных парков ВС. По аналогии с моделью смешанного парка, предложенной в работе [1], минимально приемлемые численности парков ВС определяются исходя из требований обеспечения заданного качества обслуживания (в качестве критерия качества выбран коэффициент регулярности, т.е. доля рейсов, выполняемых без задержек).

### Список литературы

1. Варюхина Е.В., Ключков В.В. Влияние «конкуренции стандартов» на конъюнктуру международных рынков промышленной продукции (на примере гражданского авиастроения) // Материалы V международной конференции «Актуальные проблемы экономики и управления на предприятиях машиностроения, нефтяной и газовой промышленности в условиях инновационно-ориентированной экономики» (г. Пермь, 28 апреля 2015 г.). Пермь: ПНИПУ, 2013. С. 569-579.
2. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Под ред. В.А. Колемаева. // М.:ИНФРА-М, 1997. - 302с.

## Трансмиссия образования в процессах групповой социализации с гетерогенными агентами

В.А.Кипяткова\*, Е.В.Полякова†

В последние десятилетия в экономической науке все чаще для объяснения социально-экономических процессов используются факторы, на первый взгляд, не имеющие к экономике непосредственного отношения. История возникновения данной тенденции восходит к Нобелевскому лауреату Г. Беккеру [1], который ввел в обиход множество подходов для исследования таких, на первый взгляд, далеких от «чистой» экономики проблем, как, например, выбор партнера на брачном рынке или исследование мотивов занятия нелегальной деятельностью. В данной работе мы исследуем влияние процессов групповой социализации на рождаемость в условиях неоднородности экономических агентов.

Подход к исследованию подобных явлений был предложен и развит в серии работ Бизина и Вердье [3,4]. В основе этого подхода лежит явление «культурной, трансмиссии», зародившееся в этнопсихологии. «Культурная трансмиссия может быть как вертикальной - передача культурных ценностей посредством обучения родителями, так и горизонтальной - передача ценностей в процессе общения со сверстниками ([2]). Новизна подхода Бизина и Вердье состоит в том, что они предлагают рассматривать процесс культурной трансмиссии как результат осознанного выбора агентами уровня усилий по передаче признаков своего типа в рамках решения задачи максимизации полезности.

В предлагаемой нами работе также рассмотрена динамическая модель трансмиссии человеческого капитала с гетерогенными агентами. Базовая модель культурной А. Бизина, Т. Вердье модифицируется для исследования трансмиссии образования, при этом предполагаются агенты «высокого» и «низкого» типов, которые одновременно выбирают количество детей и уровень усилий по их воспитанию. «Высокий» тип можно трактовать, например, как тип с более высоким уровнем образования или человеческого капитала по сравнению с малообразованным «низким» типом. В отличие от моделей культурной трансмиссии, мы предполагаем, что часть агентов «низкого» типа предпочитает воспитывать своих потомков, ориентируясь на достижение ими «высокого» типа путем осуществления целенаправленных усилий, направленных на перевод своих детей в другой тип, посредством инвестиций в их образование и человеческий капитал. В результате этого, образование может служить механизмом так называемого «социального лифта» и сделать возможным переход из одного класса в другой, причем уровень образования, передаваемого родителями своим детям, является эндогенной величиной и определяется в результате решения родителями некоторой оптимизационной задачи. Вторым существенным дополнением служит предположение о разных уровнях рождаемости, при этом уровень рождаемости определяется каждым типом агентов в результате решения им оптимизационной задачи. По сравнению с работой [5], мы представляем обобщение на

\* ЕУСПб, СПб ЭМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия

† ЕУСПб, Санкт-Петербург, Россия

более широкий класс функций, и представляем некоторые аналитические утверждения и численные расчеты.

## 2 Формализация модели

Предположим, что население некоторой закрытой страны состоит из двух типов индивидов – образованных (тип  $e$ , educated individuals) и необразованных (тип  $u$ , uneducated individuals). Доли указанных «высокого» и «низкого» типов в населении обозначим через  $q^e$  и  $q^u$  соответственно,  $q^e + q^u = 1$ . Каждый родитель имеет возможность выбрать «качество» и количество своих потомков, решая задачу максимизации полезности. В рамках данной модели предполагается, что образованные индивиды склонны к воспроизводству только собственного типа, в то время как необразованные индивиды подразделяются на две группы: доля  $\rho$  необразованных индивидов осознает важность образования и имеет стимулы к тому, чтобы перевести своего ребенка в другой тип, доля  $1 - \rho$  необразованных индивидов мотивирована к сохранению у своего потомства того же типа. Заметим, что параметр  $\rho$  характеризует культурную толерантность [2] и отражает отношение общества к ценности образования. Таким образом, население страны состоит из следующих трех групп: образованные индивиды, склонные к воспроизводству своего типа (группа  $e$ ); необразованные индивиды, имеющие мотивацию к переводу ребенка в другой тип (группа  $ue$ ); необразованные индивиды, стремящиеся воспитать ребенка своего типа (группа  $uu$ ).

Если обозначить через  $V^{i,j}$  полезность представителя группы  $i$ , вырастившего ребенка типа  $j$ ,  $i \in \{e, ue, uu\}$ ,  $j \in \{e, u\}$ , то стимулы, определяющие поведение индивидов различных групп, описываются неравенствами

$$V^{e,e} > V^{e,u}, V^{ue,e} > V^{ue,u}, V^{uu,e} < V^{uu,u}. \quad 1)$$

Следуя подходу, развитому в моделях Бизина и Вердые [4], культурная трансмиссия в популяции может осуществляться двумя возможными способами: за счет вертикальной (от родителя) и горизонтальной (от того или иного окружения) социализации. Будем считать, что если передача желаемого типа вертикальным путем не происходит, то горизонтальная социализация происходит с вероятностью, совпадающей с долей соответствующего типа (или группы, в зависимости от допущений модели) в населении.

Пусть  $\tau^i$  – усилия, прикладываемые индивидом из группы  $i$  для воспитания ребенка желаемого типа,  $d^i(\tau^i)$  – вероятность того, что вертикальная социализация приведет к желаемому результату,  $i \in \{e, ue, uu\}$ . Здесь  $d^i(\cdot)$  – заданная функция, удовлетворяющая некоторым естественным требованиям. Обозначим через  $p^{i,j}$  вероятность того, что ребенок представителя группы  $i$  получит тип  $j$  в результате культурной трансмиссии,  $i \in \{e, ue, uu\}$ ,  $j \in \{e, u\}$ . В соответствии с принятыми допущениями будем иметь

$$\begin{aligned} p^{k,e} &= d^k(\tau^k) + (1 - d^k(\tau^k))q^e \\ p^{k,u} &= (1 - d^k(\tau^k))q^u, \end{aligned} \quad 2)$$

---


$$\begin{aligned} p^{uu,e} &= (1 - d^{uu}(\tau^{uu}))q^e, \\ p^{uu,u} &= d^{uu}(\tau^{uu}) + (1 - d^{uu}(\tau^{uu}))q^u. \end{aligned} \quad 3)$$

$k \in \{e, ue\}$  Как и в модели Беккера-Льюиса [1], мы предполагаем, что родители осуществляют выбор между количеством и «качеством» детей. «Качество» определяется объемом усилий  $\tau^i$ , количество потомков  $n^i$ ,  $i \in \{e, ue, uu\}$ . Функция полезности:

$$U^i(n^i, \tau^i) = n^i (p^{i,e} V^{i,e} + p^{i,u} V^{i,u}), \quad i \in \{e, ue, uu\}. \quad 4)$$

Каждый период времени  $t$  происходит следующее.

Агент каждого из типов  $i \in \{e, ue, uu\}$  решает оптимизационную задачу максимизации полезности (4) при бюджетном ограничении  $C^i(n^i, \tau^i) \leq c^i$ ,

где  $C^i(\cdot)$  – некоторая заданная положительная, неубывающая выпуклая функция,  $c^i$  – экзогенная постоянная,  $i \in \{e, ue, uu\}$ . В результате решения в каждый момент времени  $t$  агент получает оптимальный объем усилий по передаче или приобретению человеческого капитала и определяет оптимальное количество потомков:  $(\hat{\tau}^i(t), \hat{n}^i(t))$ ,  $i \in \{e, ue, uu\}$ .

Динамика долей образованных и необразованных типов описывается системой уравнений

$$q^e(t+1) = \frac{p^{e,e}(t)q^e(t)\hat{n}^e(t) + p^{ue,e}(t)\rho q^u(t)\hat{n}^{ue}(t) + p^{uu,e}(t)(1-\rho)q^u(t)i}{q^e(t)\hat{n}^e(t) + \rho q^u(t)\hat{n}^{ue}(t) + (1-\rho)q^u(t)\hat{n}^{uu}(t)}, \quad 5)$$

$$q^u(t+1) = 1 - q^e(t+1).$$

**Утверждение.** Задача (4) имеет единственное решение  $\{\tau^e, n^e, \tau^{ue}, n^{ue}, \tau^{uu}, n^{uu}\}$  при условии, что функция в бюджетном ограничении имеет вид  $C^i(n^i, \tau^i) = n^i(1 + \tau^i)$ , а функция  $d^i(\tau)$  вогнута или имеет единственную точку перегиба на  $[0, \infty)$ ,  $i \in \{e, ue, uu\}$ .

Приведем результаты численного анализа при следующих начальных условиях и значениях экзогенных параметров:  $q^e(0) = 0.1$ ,  $\rho = 0.2$ ,  $V^{e,e} = 10$ ,  $V^{ue,e} = 15$ ,  $V^{uu,u} = 8$ ,  $V^{e,u} = V^{ue,u} = V^{uu,e} = 2$ ,  $c^e = c^{ue} = c^{uu} = 2$ .

Расчеты показывают, что наблюдается достаточно быстрая сходимость долей  $q^e(t)$ ,  $q^u(t)$  образованных и необразованных типов индивидов в населении к следующим значениям:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q^e(t) = 0.2845$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} q^u(t) = 0.7155$ .

Динамика указанных долей иллюстрируется графиком, представленным на рис. 1.

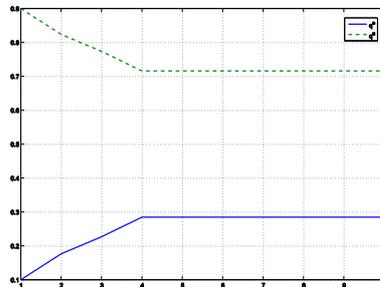


Рисунок 1 – Динамика долей  $q^e(t)$ ,  $q^u(t)$  при начальных условиях

$$q^e(0) = 0.1, \quad q^u(0) = 0.9$$

### Заключение

В данной работе предложены подходы к моделированию динамики численности населения, учитывающие влияние групповой социализации, в обществе с неоднородными

агентами. Процессы групповой социализации проявляются в желании агентов, как «высокого», так и «низкого» типов воспитать потомство определенного типа и одновременно определяющих как уровень усилий, необходимых для достижения этой цели, так и количество детей. Характерной чертой предлагаемой динамической модели является допущение о существовании «нестандартных» агентов «низкого» типа, которые предпочитают воспитывать своих потомков, ориентируясь на достижение ими «высокого» типа. В результате численного анализа выявлена сходимость долей индивидов различных типов к некоторым равновесным значениям. По сравнению с работой [5] доказательства распространены на более широкий класс функций.

#### Список литературы

1. Gary S. Becker, H. Gregg Lewis. On the Interaction between the Quantity and Quality of Children // The Journal of Political Economy, - Vol. 81, - No. 2, Part 2: New Economic Approaches to Fertility (Mar. -Apr., 1973), pp. S279-S288.
2. Стефаненко Т. Г. Этнопсихология. М.: Институт психологии РАН, «Академический проект», 1999.
3. Bisin A., Verdier T. The economics of cultural transmission and the dynamics of preferences.// Journal of Economic Theory – 2001 - №97 - pp.298 - 319
4. Bisin A., Verdier T. The economics of cultural transmission and socialization // Handbook of Social Economics, Vol. 1A, The Netherlands: North-Holland, 2011,- pp. 339-416.
5. Кипяткова В.А., Полякова Е.В. Процессы групповой социализации в модели культурной трансмиссии с гетерогенными агентами.//Финансы и бизнес – 2014 - №4.

### Общая схема исследования игр Choose Number на основе L-равновесия\*

Е.Л. Кудрявцев

*ВЦ имени А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ, Москва, Россия*

В работах [1-4] были представлены отдельные результаты исследования класса игр «выбери число», далее – CN игры (Choose Number). В данной работе представлена общая схема, которая может быть использована исследователями для анализа CN игр.

1. Определить из условий игры, принадлежит ли данная игра к классу CN. Подробнее данный вопрос был исследован в работе [3]. Главной идеей является выделение подмножества стратегий, которое можно параметризовать, используя один вещественный параметр для каждого игрока, при этом, ожидаемый выигрыш игрока зависит от данного вещественного параметра как унимодальная функция при фиксированных стратегиях других игроков. Факт того, что игра принадлежит к классу CN является основанием для того, чтобы ожидать, что распределение значений порогов, используемых реальными людьми пороговых стратегий, будет иметь колоколообразную форму.

2. Определить множество возможных равновесий. Подробнее данный вопрос был исследован в работе [1]. Главной идеей является выделение подмножества устойчивых профилей стратегий, для каждой стратегии из этого подмножества профилей должно выполняться ограничение на «иррациональность» поведения игроков. Для некоторых игр множество устойчивых профилей стратегий может быть пусто, в этом случае следует ожидать, что распределение значений порогов будет иметь не колоколообразную форму.

3. Определить восприятие эксперимента участниками. Подробнее данный вопрос был исследован в работе [2]. Главной идеей является рассмотрение наряду с рациональным подходом, то есть – максимизации выигрыша при фиксированных стратегиях других игроков, другие подходы, такие как стратегический – максимизация выигрыша при стратегиях «наилучший ответ» других игроков.

#### Список литературы

1. *Кудрявцев Е.Л.* Использование L-равновесия для анализа теоретико-игровых моделей с унимодальной зависимостью выигрыша от порогового значения стратегии игрока

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

// Труды 54-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе»: Управление и прикладная математика — М.: МФТИ, 2011. — Т. 1. — С. 83–85.

2. Кудрявцев Е.Л. Рационально-стратегическое поведение людей в играх с унимодальной функцией выигрыша // Труды 55-й научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе»: Управление и прикладная математика — М.: МФТИ, 2012. — Т. 1. — С. 73–74.

3. Кудрявцев Е.Л. Проблема определения класса игр «Выбери число» // Труды 56-й научной конференции МФТИ Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе» Всероссийской молодежной научно-инновационной конференции «Физико-математические науки: актуальные проблемы и их решения»: Управление и прикладная математика — М.: МФТИ, 2013. — Т. 1. — С. 76–77.

4. Кудрявцев Е.Л. Взаимосвязь L-равновесия с равновесием Нэша и LQRE // Тезисы 58-й научной конференции МФТИ — Москва-Долгопрудный-Жуковский: МФТИ, 2015. URL: [http://conf58.mipt.ru/static/reports\\_pdf/226.pdf](http://conf58.mipt.ru/static/reports_pdf/226.pdf)

## Выбор технологии, порождающий нормализованную производственную CES-функцию\*

А.В.Матвеевко, В.Д.Матвеевко

*Центр экономических исследований и образования CERGE-EI, Прага, Чехия*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Санкт-Петербург, Россия*

В [1] введены семейства  $\Phi$  нормализованных производственных CES-функций,

$$Y = Y_0 \left( \pi \left( \frac{K}{K_0} \right)^p + (1 - \pi) \left( \frac{L}{L_0} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Хотя этот класс функций быстро приобрел популярность у экономистов (см. обзор [2]), остается много вопросов, в частности, неясен выбор отправных значений  $Y_0, \pi, K_0, L_0$ .

Для анализа  $\Phi$ , мы применяем подход [3-5], при котором производственная функция рассматривается как результат оптимального выбора «локальной» технологии из технологического меню:  $F(K, L) = \max_{l \in \Lambda} \phi(l_K K, l_L L)$ , где  $\Lambda$  – технологическое меню,

$l_K, l_L$  – коэффициенты эффективности факторов («локальная» технология),  $\phi$  – «локальная» производственная функция. Универсальной «локальной» производственной функцией, которая может быть использована для представления любой «глобальной» производственной функции  $F$ , является функция Леонтьева  $\phi(l_K K, l_L L) = \min \{l_K K, l_L L\}$ . При таком подходе, в качестве первичного объекта рассматривается не производственная функция  $F$ , а двойственный объект – порождающее функцию  $F$  технологическое меню  $\Lambda$ .

Определим нормализацию в пространстве технологий. Будем рассматривать технологические меню, которые, обладают прототипной формой

$$\beta l_K^{-q} + (1 - \beta) l_L^{-q} = H = const, \quad (1),$$

где коэффициент  $0 < \beta < 1$ , вообще говоря, зависит от  $q$ . Технологическая точка нормализации (т.т.н.) определена некоторой технологией  $(l_{K0}, l_{L0})$ , углом наклона

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-00448 и 14-06-00253).

технологических меню при этой технологии  $-\frac{dl_L}{dl_K} = \nu$ , а также значением  $H = H_0$ .

Семейство  $M$ , нормализованных технологических меню, соответствующее т.т.н., определяется, как множество технологических меню с различными значениями  $q$ , которые имеют прототипную форму (1) и для любого  $q$  принимают при технологии  $(l_{K0}, l_{L0})$  одни и те же значения  $H = H_0$  и  $\nu$ .

Т.т.н. может быть интерпретирована как наилучшая существующая (граничная) технология, а прототипная форма – как прогноз технологического развития, позволяющего создавать такие технологические меню, которые (i) включают отправную граничную технологию и (ii) имеют весь спектр эластичностей замещения. Другая интерпретация состоит в том, что прототипная форма (1) описывает множество возможных (ожидаемых, альтернативных) технологий, которые могут существовать при различных условиях, например в разных странах. Определенное таким образом на основе т.т.н. семейство технологических меню  $M$  имеет вид

$$\eta \left( \frac{l_K}{l_{K0}} \right)^{-q} + (1 - \eta) \left( \frac{l_L}{l_{L0}} \right)^{-q} = 1,$$

где  $\eta = \nu l_{K0} / (\nu l_{K0} + l_{L0})$  не зависит от  $q$ .

**ТЕОРЕМА.** Для каждого семейства технологических меню,  $M$ , существует семейство производственных CES-функций,  $\Phi$ , такое, что каждое меню  $m \in M$  порождает функцию  $f \in \Phi$ , и, наоборот, каждая функция  $f \in \Phi$  порождается меню  $m \in M$ .

#### Список литературы

1. Klump R., de La Grandville O. Economic growth and the elasticity of substitution: two theorems and some suggestions // American Economic Review. 2000. V. 90, № 1. P. 282-291.
2. Klump R., McAdam P, Willman A. The normalized CES production function: Theory and empirics // Journal of Economic Surveys. 2012. V. 26, № 5. P. 769-799.
3. Rubinov A.M., Glover B.M. Duality for increasing positively homogeneous functions and normal sets // Recherche Operationnelle/Operations Research. 1998. V. 12, № 2. P. 105-123.
4. Матвеев В.Д. «Анатомия» производственной функции: технологическое меню и выбор наилучшей технологии // Экономика и математические методы. 2009. Т. 46, № 2. С. 105-115.
5. Матвеев А.В., Полякова Е.В. Моделирование изменения технологий и потребительских предпочтений // Вестник Костромского государственного университета имени Н.А.Некрасова. 2012. Т. 18, № 6. С. 159-165.

## О влиянии дефлятора дохода на оценку капитализации производства в условиях нестабильной реализации продукции\*

Н.К. Обросова<sup>1</sup>, А.А. Шананин<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>ВЦ ФИЦ ИУ РАН, <sup>2</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, <sup>2</sup>РУДН, Москва, Россия,  
<sup>1,2</sup>МФТИ(ГУ), Долгопрудный, Россия

Процессы мировой экономической интеграции приводят к структурным изменениям в российском обрабатывающем комплексе, предприятия которого функционируют в условиях дефицита оборотных средств и нестабильности реализации продукции. С одной стороны, создаются условия для импорта новых технологий. С другой, - усиливается конкуренция отечественной продукции с импортными аналогами. Типичными представителями предприятий, функционирующих в таких условиях, являются крупные предприятия автомобильной промышленности. Положение таких компаний на рынке может влиять на экономические показатели целого региона. Примером такой компании является ПАО

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 14-07-00075.

КАМАЗ (Татарстан). Вступление России в ВТО в 2012г. привело к ужесточению конкурентной борьбы на внутреннем автомобильном рынке, компенсировать негативные последствия которой отчасти удалось введением утилизационного сбора. Начиная с 2014г. финансовая нестабильность и рост валютных курсов оказывают негативное влияние на спрос и себестоимость продукции компании. Осознавая это, государство поддерживает ПАО КАМАЗ с помощью госзаказа и субсидий. В результате наблюдается существенное расхождение ожиданий рынка и реальных показателей деятельности компании. В этой связи актуальной представляется разработка методов оценки индикаторов деятельности крупных промышленных компаний, учитывающих особенности их функционирования. Важным показателем в изменяющихся экономических условиях является капитализация компании, выступающая в качестве залога при кредитовании оборотных средств.

С конца 90-х годов прошлого века авторами разрабатываются математические модели производства в условиях дефицита оборотных средств и нестабильности реализации продукции [1,2], основанные на модели производства Хаутеккера-Йохансена. Модели последовательно описывают функционирование производства на разных этапах эволюции российской экономики. Современная версия модели учитывает ограничение торговли инфраструктуры и формализована в виде уравнения Беллмана, решение которого найдено в явном виде [2]. Значение функции Беллмана  $W(0)$  дает оценку капитализации производственной компании в зависимости от показателей деятельности компании, внешней экономической конъюнктуры и величины дефлятора дохода компании  $\Delta$ , характеризующего привлекательность компании для инвесторов. Разработаны методы интерпретации входных параметров модели в терминах официальной отчетности компании (стандарт МСФО). Модель идентифицирована по данным ПАО КАМАЗ за 2011-2014гг. С помощью модели на примере ПАО КАМАЗ проведена оценка влияния дефлятора дохода на уровень кредитоспособности компании за период 2011-2014гг. В качестве показателя уровня кредитоспособности компании рассматривается отношение капитализации

компании к себестоимости выпуска  $\frac{W(0)}{u\eta}$ , где  $u$  - коэффициент загрузки мощностей,  $u$  -

себестоимость единицы продукции,  $\eta$  - производственная мощность компании. Данный показатель допускает интерпретацию в терминах официальной отчетности компании и результатов торгов акций компании на ММВБ. Кривые на рис.1 отражают динамику показателя кредитоспособности при разных ожиданиях дефлятора дохода производства. Кривые на рис.2 отражают соответствующее изменение дефлятора дохода. Пунктирная кривая отражает уровень дефлятора, соответствующий средней ставке процента по долгосрочным кредитам, выданным ПАО КАМАЗ в соответствующем году. Рассчитанный с помощью модели соответствующий величине дефлятора уровень кредитоспособности компании отражает динамику, в целом соответствующую отчетным показателям деятельности компании. Так, в 2012г. компания показала высокую рентабельность и наращивание объемов производства, несмотря на негативные последствия вступления в ВТО. В 2014г., несмотря на сложную экономическую ситуацию, производство оказалось рентабельно благодаря существенной государственной поддержке. Однако, ожидания рынка в отношении уровня капитализации компании оказались гораздо ниже тех, которые соответствуют официальной отчетности компании. Сплошная тонкая кривая на рис.1 отражает уровень кредитоспособности, основанный на статистических данных о средней стоимости акций компании за год на ММВБ. Соответствующая кривая на рис.2 показывает уровень дефлятора дохода, при котором расчеты по модели дают такой же показатель кредитоспособности. Ожидания рынка в отношении компании оказались в 2014г. ниже границы рентабельности, поэтому для 2014г. адекватного уровня дефлятора не существует (см. рис. 1). Граничным допустимым значениям дефлятора дохода, при которых производство оказывается на границе рентабельности, соответствует жирная кривая на рис.1,2.

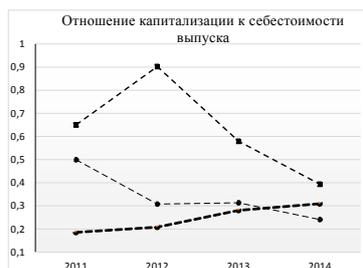


Рис. 1

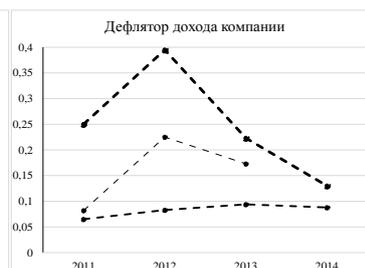


Рис. 2

## Список литературы

1. Акпарова А.В., Шананин А.А. Модель производства в условиях несовершенной кредитной системы и нестабильной реализации продукции // Математическое моделирование. 2005. Т.17, №9. С.60-76.
2. Н.К. Обросова, А.А. Шананин Модель производства в условиях нестабильного спроса с учетом влияния торговой инфраструктуры. Эргодичность и ее приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т.55, № 4. С. 704–729.

## Эндогенная производственная функция в оценке реального сектора экономики\*

Н.Н. Оленёв

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

В работе представлена оригинальная модель с производственными фондами, дифференцированными по моментам создания (a vintage capital model) и ее применение для оценки параметров реального сектора ряда стран. Модель на микроэкономическом уровне использует описание динамики производственных мощностей с технологиями, определяемыми при создании (putty-clay technology). Подход к построению производственных функций на основе распределения производственных мощностей по технологиям известен давно [1-3]. Этот подход позволил проанализировать ряд отраслей экономики Норвегии, Швеции и всей экономики СССР 80-х гг.

В [4] построен новый класс эндогенных производственных функций, основанный на гипотезе о фиксированном с момента создания мощностей числе рабочих мест и деградации производственных мощностей по мере их старения с заданным положительным темпом. Получено параметрическое выражение для производственной функции в условиях научно-технического прогресса, учете всех созданных мощностей и оптимальном инвестировании в наилучшую технологию. В случае сбалансированного роста получено аналитическое выражение для производственной функции, содержащее среди параметров темп роста экономики, что делает нетривиальной [4] классическую задачу о золотом темпе роста экономики [5]. Конструкция [4] использовалась затем для построения моделей инвестиционной политики фирм и их исследования [6-8].

В настоящей работе конструкция [4] используется для численной оценки параметров реального сектора экономики ряда стран, что чрезвычайно важно для оценки потенциала роста в условиях мирового финансового кризиса, поскольку все кризисные ситуации обязательно отражаются на реальном секторе и наоборот.

При заданном коэффициенте фондоемкости и темпе физической деградации мощностей можно оценить возрастную структуру производственных мощностей основываясь на данных о прошлых инвестициях в реальный сектор экономики. Так можно численно вычислить производственную функцию [9-10]. Все неизвестные внешние параметры модели можно определить косвенным путем за счет верификации по исторической статистике временных рядов макропоказателей изучаемой экономики, рассчитанных по модели. Такой подход использовался в [11] для идентификации параметров реального сектора экономики Греции. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [11], и применяет полученный подход для идентификации параметров реального сектора ряда стран.

Для идентификации моделей используются параллельные вычисления в интерфейсе MPI на суперкомпьютере МВС100К МСЦ РАН. Идентифицированные параметры используются для сценарной оценки требуемых и возможных преобразований изучаемых экономических систем.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта 14-11-00432).

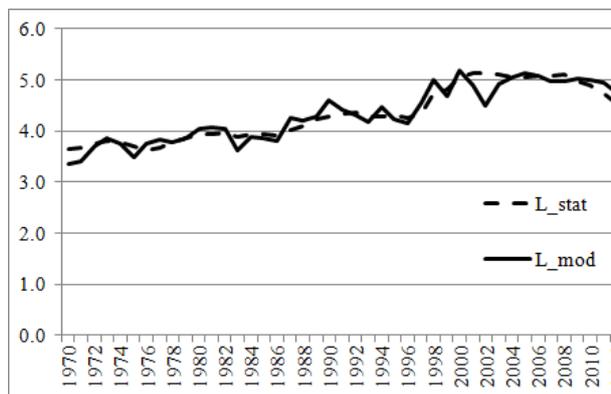


Рис. 1. Идентификации модели экономики Португалии за счет сравнения близости временных рядов для числа занятых в экономике по модели и по статистике, в млн. человек

*Источник:* оценки по модели и статистическим данным ООН

#### Список литературы

1. Johansen L. Production functions: An integration of micro and macro, short run and long run aspects. Amsterdam: North-Holland publ. co., 1972
2. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983.
3. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.
4. Оленев Н.Н., Петров А.А., Поспелов И.Г. Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986. С. 46-60.
5. Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth. Princeton: Princeton University Press, 2009.
6. Оленев Н.Н., Поспелов И.Г. Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. Москва: Наука, 1986. С.163-173.
7. Оленев Н.Н., Поспелов И.Г. Исследование инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. - М.: Наука, 1989. С.175-200.
8. Оленев Н.Н. Модель жизненного цикла основных фондов и производственная функция, учитывающая резервы мощностей // Математическое моделирование. 1995. Т.7, ном.7. С.19-33.
9. Оленев Н.Н. Исследование влияния структурных изменений на экономику России // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Экономика. 2015, № 1. С. 150-157.
10. Оленев Н.Н., Печенкин Р.В., Чернецов А.М. Параллельное программирование в MATLAB и Simulink с приложениями к моделированию экономики. М.: ВЦ РАН, 2015.
11. Olenev N. Economy of Greece: evaluation of real sector // CEDIMES Scientific Seminar at Dorodnicyn Computing Centre. 2015. М.: CEDIMES-Russie occ., Vol. 1, No. 2, 2015. P. 57-72.

## Простота сложности экономики: сильный магистральный эффект\*

И.Г. Поспелов  
ВЦ РАН, Москва, Россия

Хотя экономика – целиком наше творение, она столь сложна, что мы изучаем ее, как явление внешнего мира. Более того, результаты изучения становятся частью экономики и еще ее усложняют, снова уводя от понимания. Однако, жизнеспособная экономическая система должна позволять людям существовать в ней без головолomных расчетов. Эта адаптация мира к наблюдателю, которую в экономике, в отличие от физики и биологии, мы

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00432).

можем видеть в исторической перспективе, приводит к некоторой неожиданной простоте и позволяет надеяться что-то понять.

В докладе с этой точки зрения рассматривается известное магистральное свойство моделей экономического планирования: ослабление влияния на оптимальное решение будущих возмущений, по мере удаления момента возмущения от момента принятия решения. Это неизвестное физике свойство связано с качественным различием топологии вариационных принципов в физике и экономике.

В связи с этим же вопросом простоты обсуждается известная декомпозиция задачи планирования экономического роста в некооперативную игру естественного набора экономических агентов: производителей потребителей и торговцев, которая, в свою очередь оказывается эквивалентной модели межвременного экономического равновесия (детерминированная модель равновесия рациональных ожиданий).

Оказывается, что дополнительная декомпозиция по времени приводит к появлению в модели естественных финансовых инструментов и дополнительных агентов: коммерческих банков и центрального банка.

Агенты, которые возникают в процессе декомпозиции – это макроагенты, а отнюдь не индивидуумы. Мы полагаем в соответствии с практикой экономических исследований, что ссылаться на «репрезентативных индивидов» по меньшей мере не обязательно, и приводим аргументы в пользу того, что рациональность поведения, например, стремление к максимизации некой полезности, служат скорее вариационными принципами описания коллективного поведения, нежели индивидуального, которое так просто не описывается. Таким образом, экономические агенты оказываются неким аналогом физических квазичастиц.

В докладе указанные особенности моделей экономики иллюстрируются на примере простейшей модели планирования экономического роста. Однако, рассмотренные принципы фактически использовались нами и при построении вполне реалистичных моделей. При этом выяснилось два обстоятельства, подтверждающие плодотворность изложенных положений.

- Макроэкономические данные демонстрируют существенно большую регулярность, чем мезоэкономические. Поэтому достаточно успешным оказался подход, когда более подробная модель базируется не на более подробных данных, а декомпозиции макроэкономических данных. Например, переход от однопродуктовой модели к многопродуктовой, может быть основан не на воспроизведении принятого в статистике отраслевого деления, а на выделении некоторых эффективных продуктов с помощью анализа макроэкономических дефляторов.

- Идентификация реалистичных моделей межвременного равновесия раз за разом демонстрирует удивительный эффект: при «правильных» значениях параметров модели магистральное свойство оказывается выраженным столь сильно, что рациональное поведение макроагентов оказывается практически не зависящим от будущих пертурбаций. (При «неправильных» значениях параметров в той же наблюдается типичная для моделей рациональных ожиданий зависимость прошлого от будущего). Мы трактуем это как результат естественного отбора механизмов: в реальности работает лишь такой комплекс механизмов, который не требует слишком сложных расчетов для определения адекватного поведения.

## **Математическая модель процесса нефтедобычи с учетом инфраструктурных ограничений\***

А.Ю. Флёрова  
*ВЦ РАН, Москва, Россия*

В середине прошлого века М.К. Хубберт предложил подход к количественному прогнозированию добычи нефти в США и во всем мире, позволивший предсказать пик нефтедобычи в США в начале 70-х годов [1]. Этот подход был основан на том, что нефть является конечным ресурсом, динамика извлечения и разведки которого может быть описана в форме определенных кривых. Производная логистической кривой, называемая

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 14-07-00075)

кривой Хубберта, имеющая колоколообразную форму, наиболее близко, по мнению Хубберта, отражал реальный ход добычи нефти. Уравнение этой кривой имеет вид  $\dot{X}(t) = B \frac{X(t)}{Y} (Y - X(t))$ , где  $X(t)$  - накопленная добыча в момент времени  $t$ ,  $Y$  - накопленные извлекаемые запасы,  $B$  - постоянная величина, характеризующая темп роста накопленной добычи. Однако, к концу прошлого века кривые Хубберта утратили свою точность в прогнозе добычи, и в данной работе сделана попытка модифицировать кривые Хубберта для получения более точных прогнозов с учетом бурного развития технологий.

Для того чтобы иметь возможность точнее описать процесс нефтедобычи введем функцию  $b(t)$ , описывающую технологический уровень процесса нефтедобычи, приращением которой в единицу времени мы можем управлять с помощью неотрицательного управления  $u(t)$ . Время разработки месторождения  $T$  нефиксировано и является в задаче определяемым параметром. Через  $x(t)$  обозначим долю извлекаемых запасов, примем объем месторождения за единицу,  $0 \leq x(t) \leq 1$ , уровень начала добычи  $x(0) = x_0$  не фиксирован. Пусть производитель максимизирует свой доход за время жизни месторождения. В данной модели цены на нефть считаем постоянными. Для того чтобы учесть возможные инфраструктурные ограничения на добычу, введем параметр  $M$ . Получаем следующую задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями

$$\begin{aligned} N(T) &\rightarrow \max \\ \dot{N}(t) &= (v(t) - cu^2(t) - c_0)e^{-rt}, \\ \dot{x}(t) &= v(t), \\ \dot{b}(t) &= u(t), \\ v(t) &\leq b(t)x(t)(1 - x(t)), \\ 0 &\leq v(t) \leq M, u(t) \geq 0, \\ N(0) &= 0, b(0) = b_0. \end{aligned}$$

Здесь  $c$  и  $c_0$  - параметры, определяющие стоимость добычи нефти (издержки, связанные с введением новых технологических мощностей, и постоянные издержки, связанные с эксплуатацией месторождения, соответственно), а  $b_0$  - начальный технологический уровень.

В этой задаче управляющими параметрами являются  $u(t)$  и  $v(t)$ . Первый характеризует рост технологических возможностей, а второй – текущую добычу нефти. Для такой задачи сформулирован и доказан принцип максимума Понтрягина [2], применение которого приводит к описанию различных режимов управления, зависящих от параметров модели. Применение принципа максимума дает нам три возможных варианта поведения оптимальной траектории.

1. "Режим Хубберта". В этом режиме график функции, характеризующей изменение накопленной добычи, имеет колоколообразную форму, характерную для "традиционных" кривых Хубберта. В этом режиме возможно как начало так и конец процесса нефтедобычи. В случае хорошо развитой инфраструктуры, т.е. при достаточно большом значении параметра  $M$ , весь процесс нефтедобычи будет проходить по этому сценарию. При этом поведение оптимальных траекторий описывается следующими уравнениями.

$$\dot{x}(t) = v(t) = b(t)x(t)(1 - x(t)) \leq M, b(t) = const.$$

2. "Режим полочки". В этом режиме инфраструктура полностью загружена и добыча происходит на уровне  $M$ . В таком режиме невозможно начинать и заканчивать процесс нефтедобычи, и будут справедливы следующие уравнения.

$$\dot{x}(t) = v(t) = M < b(t)x(t)(1 - x(t)), b(t) = const.$$

3. Режим "особенный". В этом режиме начальные капиталовложения  $b(0)$  выбираются таким образом, что  $b(0)x(0)(1 - x(0)) = M$ , а управление  $u(t) = -\frac{M^2(1-2x(t))}{(1-x(t))^2}$ .

При этом  $x(t) \geq 1/2$ . Выход из этого режима осуществляется через первый режим. При этом

$$\dot{x}(t) = v(t) = b(t)x(t)(1 - x(t)) = M.$$

Выбор оптимального режима и переходы между режимами определяются в зависимости от начальных параметров модели. Системы дифференциальных уравнений просчитываются численно в обратном времени.

Таким образом, зная исходные данные о месторождении (стоимость добычи нефти, начальный технологический уровень и инфраструктурные ограничения) мы можем построить прогноз добычи нефти, найти время жизни месторождения (т.е. время эксплуатации), найти оптимальное количество добываемой нефти (начальный уровень добычи и уровень отсечения), указать оптимальное управление развитием технологий.

#### Список литературы

1. Петров В.В., Поляков Г.А., Полякова Т.В., Сергеев В.М. Долгосрочные перспективы российской нефти (анализы, тренды, сценарии). – М.: ФАЗИС, 2003. – 200 с.
2. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. – М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004. – 284 с.

### Минимаксная задача равномерного распределения ресурсов

А.Д. Цвиркун, В.В. Топка

*ИИПУ имени В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*

Согласно [1] для показателя безотказного исполнения работ проекта от затраченного однородного невозобновимого ресурса  $u$  примем

$$p_j(u_j) = \frac{u_j^{\alpha_j}}{u_j^0} \in [\varepsilon, 1], \varepsilon \rightarrow +0, u_j \in U_0 = \left[ \varepsilon, (u_j^0)^{1/\alpha_j} \right], j = 1:n, \quad \text{где } 0 < \alpha_j < 1 -$$

параметр формы,  $u_j^0 > 0$  - параметр масштаба. Будем задавать оценку показателя надёжности крупномасштабного инновационного проекта в виде [1] -

$$P_n(u) = \min_{\mu_i} \prod_{(j,k) \in \mu_i} w_{jk} \frac{u_j^{\alpha_j}}{u_j^0} \in [\varepsilon, 1], \varepsilon \rightarrow +0, \quad \text{где } w_{jk} \in [\varepsilon_0, 1], \varepsilon_0 > 0 -$$

коэффициент надёжности дуги  $(j,k)$ , передачи результата  $j$ -й работы посредством дуги  $(j,k)$  для выполнения  $k$ -й работы (подобно передаточной функции соединения звеньев). Через  $\mu_i$  обозначен путь с №  $i=1:m$  на сети из начальной вершины в конечную вершину  $n$ . В качестве критерия распределения ресурсов будем использовать равномерный в виде  $\max_{j \in E} u_j \rightarrow \inf_{u \in U}$ . Итак, рассматриваемая минимаксная задача равномерного

распределения невозобновимых ресурсов имеет вид:

$$u^0 \rightarrow \inf_{(u^0, u_j) \in U} U = \left\{ u \in U_0 \mid u_j \leq u^0, \prod_{(j,k) \in \mu_i} w_{jk} \frac{u_j^{\alpha_j}}{u_j^0} \geq p_0, \forall \mu_i \right\} \quad \text{Откуда следует, что}$$

$$\ln u^0 \geq \frac{\sum_{(j,k) \in \mu_i} \ln u_j^0 - \sum_{(j,k) \in \mu_i} \ln w_{jk} + \ln p_0}{\sum_{(j,k) \in \mu_i} \alpha_j} = \frac{\sum_{(j,k) \in \mu_i} \sigma_{jk}}{\sum_{(j,k) \in \mu_i} \alpha_j}. \quad \text{Будем предполагать, что параметры}$$

задачи  $\alpha_j \in (0, 1)$ ,  $u_j^0 > 0$  таковы, что  $u_j^* \in U_0$  выполняется. Минимальное значение критерия находится как

$$\inf_{(u^0, u_j) \in U} \max_{j \in E} u_j \Leftrightarrow \min_{(u^0, u_j) \in U} u^0 \Leftrightarrow \exp \lambda^0, \text{ где } \lambda^0 = \max_{\mu_i} \lambda(\mu_i) = \max_{\mu_i} \frac{\sum_{(j,k) \in \mu_i} \sigma_{jk}}{\sum_{(j,k) \in \mu_i} \alpha_j}. \quad \text{Таким образом, задача}$$

сводится к отысканию максимального пути с двойными весами на дугах сети, для чего предложен жадный эвристический алгоритм. **Алгоритм. Начальный шаг.**

просмотренные дуги  $L := \emptyset$ , просмотренные вершины  $E' := \emptyset, s := 1$ . 1) Выбор дуги. На множестве непрсмотренных дуг  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus L$  ациклического орграфа  $G(E, \Gamma)$  выберем

дугу  $l_{ji}$ , где  $(j,i) \in \Gamma$  оптимальную по локальному критерию. В массив  $L$  заносим дугу  $l_{ji} : L := l_{ji}$ . 2) Построение пути. Построим путь  $\mu_s$  из начальной вершины  $j=1$ :  $\Gamma_j^{-1} = \emptyset$  в конечную вершину  $j=n$ :  $\Gamma_j = \emptyset$  по локальному критерию. 2.1) Добавление

новых дуг. Для дуги  $l_{ji}$  выбираются смежные дуги  $l_{kj}$  и  $l_{it}$  из условий

$$l_{kj} = \text{Arg max}_{k \in \Gamma_j^{-1}} \frac{\sigma_{kj} + \sum_{(j,i)} \sigma_{ji}}{\alpha_k + \sum_j \alpha_j}, \quad l_{it} = \text{Arg max}_{t \in \Gamma_i} \frac{\sum_{(j,i)} \sigma_{ji} + \sigma_{it}}{\sum_j \alpha_j + \alpha_i} \quad \text{которые добавляются к}$$

имеющейся дуге  $l_{ji}$ , образуя путь  $\mu_s = \{\dots l_{kj} \cup l_{ji} \cup l_{it} \dots\}$  с двойными весами. Где  $\sum_{(j,i)} \sigma_{ji}$

и  $\sum_j \alpha_j$  - значения для пути, найденного на предыдущем этапе. Положив  $\Delta_\mu^s := 1, s=1,2$ ,

для построенного таким образом пути  $\mu_s$  определим величину  $\lambda^s(\mu_s)$ ,

$$\max_\mu \frac{\sum_{(j,i) \in \mu} \sigma_{ji}}{\sum_{(j,i) \in \mu} \alpha_j} \Delta_\mu^s = \lambda^s(\mu_s). \quad \text{Список просмотренных дуг } -L := \{\dots l_{kj} \cup L \cup l_{it} \dots\}; \text{ для}$$

просмотренных вершин  $-E^s = \{j | j \in \mu_s\}$ ;  $E' := E' \cup E^s$ . 1.2). Недопущение заикливания алгоритма на просмотренных путях. Для этого в дальнейшем будем вычислять значение индикатора  $\Delta_\mu^{s+1}$ . Если для непросмотренных вершин  $E \setminus E' \neq \emptyset$ , то пусть  $k \in E \setminus E'$ .

Положим

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in E', \\ 0, & \text{если } k \in E \setminus E'. \end{cases} \quad \text{Тогда} \quad \begin{cases} \prod_{k \in \mu} \delta_k = 1, & \forall k \in E', \\ \prod_{k \in \mu} \delta_k = 0, & \exists k_0 \in \mu: k_0 \in E \setminus E'. \end{cases}$$

$$\Delta_\mu^{s+1} = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \prod_{k \in \mu} \delta_k = 1, \text{ далее } \lambda^{s+1}(\mu_{s+1}) = \max_\mu \frac{\sum_{(j,i) \in \mu} \sigma_{ji}}{\sum_{(j,i) \in \mu} \alpha_j} \Delta_\mu^{s+1}, \\ 1, & \text{если } \prod_{k \in \mu} \delta_k = 0, \end{cases}$$

$\lambda^{s+1}(\mu_{s+1}) > -\infty$  только для новых путей  $\mu_{s+1}$  отличных от  $\{\mu_s\}$ . 3. Цикл. Если для непросмотренных дуг  $\tilde{\Gamma} \neq \emptyset$ , то цикл по  $s := s+1$  и переход к п.1 иначе: Просмотр построенного множества путей  $\{\mu_s\}$  и определение максимального пути(-ей) с двойными весами  $\mu^* = \text{Arg max}_s \lambda^{s+1}(\mu_{s+1})$ ,  $\lambda^0 = \lambda(\mu^*)$ .  $\square$  Получили ресурсный критический путь, с максимальным расходом невозобновимого ресурса.

$u_j^* = \exp \lambda(\mu^*)$ ,  $j \in \mu^*$ .  $u_j \leq \exp \lambda^0$ ,  $j \notin \mu^*$ ,  $j \in E$ . В описанном алгоритме

просмотр дуг для построения множества путей осуществляется от  $\Gamma$  до  $\emptyset$ , что позволяет избежать полного перебора путей, а введение счетчика  $\Delta_\mu^s \neq -\infty$  для путей, имеющих хотя бы одну непросмотренную дугу устраняет заикливание алгоритма на одном и том же старом пути. Вычислительная трудоемкость данного алгоритма построения  $\lambda$  - оптимального пути не превышает  $O[(|\Gamma| + D|\Gamma|)|\Gamma| + |\Gamma|] \square O(|\Gamma|^2)$  операций.

### Список литературы

1.Топка В.В. Минимизация времени стоимости с учётом показателя надёжности в дизъюнктивной модели проекта // А и Т. 2012. №7. С. 78- 88.

## Особенности сходимости метода последовательного линейного программирования для задач оптимального планирования.

Ю.М. Цодиков, Д.В. Макаров  
*ИПТУ им. В.А. Трапезникова РАН, ГУ ВШЭ, г. Москва, Россия*

В докладе приведены результаты исследования сходимости нелинейных моделей оптимального планирования, решаемых методом последовательного линейного программирования (ПЛП). Проверено предположение, что сходимость метода ПЛП будет лучше, если на каждом шаге линеаризации применяется метод решения задачи линейного программирования (ЛП), который позволяет получить решение в точке, а не в области значений.

В современных системах оптимизации и моделирования метод ПЛП применяется для решения задач оптимального планирования работы нефтеперерабатывающих заводов (НПЗ) и других производств, которые приводят к нелинейным моделям большой размерности [1, 2]. В методе ПЛП нелинейные зависимости в ограничениях линеаризуются, затем решается задача ЛП. В системе RPMS [1] для решения задачи ЛП применяется пакет программ XPRESS. Метод ПЛП для решения нелинейных задач оптимального планирования был предложен в [3]. Примеры нелинейных моделей для производств НПЗ и нефтехимии описаны в [4].

Модель оптимального планирования для НПЗ формулируется как модель многопериодной оптимизации на  $p$  периодов:

$$(1) \quad F = \sum_{t=1}^p \sum_{j=1}^n c_j^t x_{jr}^t \quad F \rightarrow \max$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ijr}^t x_{jr}^t - b_i^t \geq 0 \quad t = 1, \dots, p, \quad x_{jr}^t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(3) \quad \underline{d}_j \leq \sum_{t=1}^p x_{jr}^t \leq \overline{d}_j, \quad j \in J^0$$

Здесь  $x_{jr}^t$  - переменные задачи, потоки продукта в период  $t$ ;  $r$  - шаг вычислительного процесса (рекурсии), состоящий в решении задачи (1-3),  $a_{ijr}^t$  - коэффициенты матрицы  $A^r \{a_{ijr}^t\}$ .

После решения задачи ЛП (1-3) коэффициенты матрицы  $a_{ijr}^t$  в некоторых ограничениях пересчитываются на каждом шаге  $r$  вычислительного процесса в соответствии со следующими зависимостями:

$$(4) \quad a_{ijr}^t = f_{ij}(q_{ijr-1}^t),$$

$$q_{ijr}^t = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{jr-1}^t$$

где величины  $q_{ijr-1}^t$  по физическому смыслу это, как правило, показатели качества сырья установок или показатели качества компонентов смесей, которые определяются на шаге  $r-1$  в зависимости от переменных  $x_{jr-1}^t$ ;  $f_{ij}(q_{ijr-1}^t)$  - линейные зависимости или заданные функции. При первом решении задачи (1-3)  $r=1$  начальные значения показателей  $q_{ij0}^t$  заданы и по ним определены коэффициенты  $a_{ijr}^t$ .

Задача (1-4) по существу является нелинейной со значительным числом переменных, которые входят в нелинейные зависимости. Форма записи задачи (1-4) предполагает решение методом последовательного моделирования и оптимизации, который рассматривается как вариант метода ПЛП. Первоначально метод ПЛП был предложен в форме, отличающейся от (1-4) [3].

Сходимость нелинейной задачи определяется количеством рекурсий  $r$ , которые нужны для получения решения с заданной точностью. После получения решения (1-3) проверяется точность моделирования путем сравнения значений параметров:  $q_{ijr-1}^t$  и  $q_{ijr}^t$ . Этот процесс рекурсивно повторяется до получения заданной точности моделирования и линеаризации. Для модели задаются разные параметры требуемой точности для каждой величины  $q_{ijr}^t$  различной физической природы. В решаемых задачах таких параметров точности расчета обычно около 30. Требуемая точность для различных показателей влияет на количество рекурсий, которые нужны для получения решения с заданной точностью.

Оптимальное значение целевой функции  $F$  задачи (1-3) может достигаться в области  $Q$  значений переменных  $x_{jr}^t$ , а не в точке. Для задач оптимального экономического планирования характерно наличие области значений, в которой достигается оптимум. Симплекс метод будет определять оптимальное значение  $x_{jr}^t$  в граничной точке области  $Q$ . На каждом шаге  $r$  решения задачи ЛП может быть получено решение в точке  $x_{jr}^t$ , отличающейся от решения на предыдущем шаге  $r-1$ , при одном и том же значении функции  $F$ . Это затрудняет сходимость метода ПЛП, так как величина  $(x_{jr}^t - x_{jr-1}^t)$  может быть достаточно большой. При этом величина  $(q_{ijr}^t - q_{ijr-1}^t)$  больше требуемой погрешности решения исходной нелинейной задачи (1-4). Это ухудшает сходимость метода ПЛП при применении симплекс метода для решения задачи ЛП. Для улучшения сходимости метода ПЛП существенно, чтобы решение задачи ЛП достигалось в точке. Регуляризация решения задачи ЛП будет улучшать условия сходимости для решения нелинейных задач большой размерности методом ПЛП.

Можно доказать, что при применении метода барьерных функций для решения задачи ЛП, задача сводится к минимизации строго выпуклой функции при включении в барьерную функцию условия  $x_{jr}^t \geq 0$  для всех переменных. Таким образом, решение задачи ЛП методом барьерных функций всегда дает решение в точке  $x^*$ . Это будет и в том случае, когда оптимальное решение задачи ЛП достигается в области  $Q$  значений переменных. В этом случае точка  $x^*$  удалена от всех границ области  $Q$ .

Можно предположить, что сходимость метода ПЛП для задач большой размерности будет лучше, если решение достигается в точке для любой задачи ЛП. Для проверки этого предположения было проведено решение серии из 10 задач двумя методами. Размер матрицы этих задач ЛП: 4000 – 5000 столбцов, 2000 – 3500 строк.

В первом случае применялся симплекс метод на каждом шаге ЛП. Во втором случае применялся метод барьерных функций на каждом шаге ЛП. Для решения брались задачи, в которых допустимое решение существовало, несовместные задачи не рассматривались. В среднем для серии задач ПЛП количество рекурсий сократилось при применении метода барьерных функций по сравнению с симплекс методом на 1-рекурсии. В каждом расчете максимальное количество рекурсий было ограничено.

Выше рассматривались особенности сходимости метода ПЛП, когда допустимое решение задачи существует. Нужно отметить особенности сходимости ПЛП в другом случае, когда ограничения близки к несовместным или задача не имеет допустимого решения. Такие задачи возникают достаточно часто, так как план часто рассчитывают на грани возможностей по ресурсам производства и рынка сбыта продукции. Для допустимой области решений задачи ЛП обозначим максимальное расстояние между любыми двумя вершинами  $L$ . Рассмотрим случай, когда величина  $L$  примерно равна допустимой погрешности  $\varepsilon_p$  решения прямой задачи ЛП или  $L \leq \varepsilon_p$ . Для двойственной задачи ЛП допустимая погрешность решения  $\varepsilon_d$  обычно выбирается из условия  $\varepsilon_p < \varepsilon_d$  (обычно  $\varepsilon_d = 10\varepsilon_p$ ). При условии  $L \leq \varepsilon_p$  получить решение задачи ЛП методом барьерных функций в программе XPRESS часто не удается, но симплекс метод позволяет получить решение. Если после ряда рекурсий (1-4), в которых применялся метод барьерных функций для задачи ЛП, найдено приближенное решение и требуемая точность не выполняется, то

тогда это решение берется, как стартовое для следующей рекурсии с симплекс методом для решения задачи ЛП. Как правило, в этом случае одна рекурсия (1-4) с применением симплекс метода позволяет получить решение с требуемой точностью. Такие примеры решения методом ПЛП рассматривались в [2]. Таким образом, для ПЛП наиболее эффективно применение двух методов решения задачи ЛП. Нужно отметить, что в публикациях (например в обзоре [5]) не рассматривают такие задачи, когда методом барьерных функций не получается решение, а получена стартовая точка и необходим пересчет симплекс методом.

#### Список литературы

1. Refinery and Petrochemical Modeling System (RPMS). //WWW.honeywell.com
2. Хохлов А.С., Цодиков Ю.М. Нелинейные модели оптимального планирования работы НПЗ. //VII Московская международная конференция по исследованию операций. ВЦ РАН, 2013, с.54-56.
3. Griffith R.E., Steward R.A. A nonlinear programming technique for the optimization continuous processing systems. //Management Science 7, 1961, p.379-392.
4. Дудников Е.Е., Цодиков Ю.М. Типовые задачи оперативного управления непрерывным производством. М.: Энергия, 1979.
5. Gondzio J. Interior point method 25 years later. //European Journal of Operational Research. 2012. v. 218, p.583-601.

## О динамических ансамблях статических игр

В.В. Шевченко

*Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Работа основана на фундаментальных и прикладных исследованиях, проведенных к настоящему моменту в рамках оригинального направления теории игр – операционного игрового сценарного моделирования [1, 2, 3]. Данные исследования показали, что реальные производственно- и социально-экономические процессы адекватно описываются и моделируются на языке динамических ансамблей статических игр. При этом каждая из статических игр рассматриваемого ансамбля проводится в определённый момент отрезка времени динамического игрового взаимодействия и описывает некоторую реальную одномоментную операцию (оприходование товара на складе или иной хозяйственный факт, конкретный воздушный бой или иную локальную военную операцию и т.п.). Типы возможных операций (статических игр) определены при описании игрового взаимодействия. В каждый момент проводится конечное число операций заданных типов, в результате чего меняются обороты по дебету и кредиту и сальдо базовых и аналитических счетов. Каждый базовый счёт отнесён к конкретному игроку, обороты и сальдо аналитических счетов в общем случае являются произвольными вычислимыми функциями оборотов и сальдо базовых и других аналитических счетов. При этом изменение сальдо любого счёта на любом отрезке времени равно разности оборотов по дебету и кредиту данного счёта на том же отрезке.

Переход от описания социально-экономических процессов на языке дифференциальных уравнений к описанию на языке динамических ансамблей статических игр существенно повышает гибкость и адекватность формального представления и исследования этих процессов. Появляется возможность естественного точного представления процессов образовательного, здравоохранительного, исследовательского, модернизационного характера. При этом динамика рассматриваемого процесса также описывается вполне определённой системой соотношений, определяемой спецификой конкретного динамического ансамбля статических игр. В случае, если рассматриваются только производственные, обменные (купли-продажи), потребительские и финансовые операции в самом простом представлении, эта система соотношений соответствует широко используемым уравнениям материального и финансового баланса. При более целостных и многогранных описаниях социально-экономических процессов возникают более сложные системы соотношений, включающие логические выражения. Меняется характер оптимизационных задач, появляется необходимость развития принципиально новых аналитических методов. Но существенное расширение прикладных возможностей

экономико-математического моделирования при использовании рассматриваемого подхода обнаруживается уже на уровне имитационного моделирования и вариантных расчётов.

При использовании динамических ансамблей статических игр для моделирования производственно-экономической деятельности предприятий, корпораций, регионального промышленного комплекса Москвы, отраслей ОПК и ОПК в целом разработанные модели позволили проводить сценарное прогнозирование динамики целостных наборов счетов и показателей, описывающих деятельность рассматриваемой производственно-экономической системы с учётом кадрово-квалификационной динамики, проведения НИОКР и модернизаций, привлечения и использования кредитов и инвестиций. При этом исходные данные для моделирования формировались из данных бухгалтерского учёта и паспортов предприятий. Сформировавшийся подход был положен в основу создания модулей моделирования информационно-аналитических систем отраслевого, регионального и федерального значения.

Представление в виде динамических ансамблей статических игр макроэкономических процессов также приводит к ряду неожиданных результатов. В рамках автаркической однопродуктовой модели управления национальной (государственной) экономикой с тремя агентами (игроками) вполне определённо выявляется определяющее влияние на инфляционные процессы паразитического потребления коррупционного, процентного и посреднического характера. В полном соответствии с представлением одного из ведущих финансистов России А.Г. Грязновой о том, что «инфляция имеет не монетарный, а воспроизводственный характер». При рассмотрении и анализе не автаркической модели взаимодействия страны и внешнего мира с шестью агентами (игроками), двумя продуктами и двумя валютами достаточно рельефно подтверждается правомерность базовых положений кейнсианских концепций о том, что государственное регулирование является необходимым условием устойчивого экономического развития. При наличии продуктовой зависимости страны и внешнего мира друг от друга в отсутствие государственной поддержки населения безудержная конкуренция приводит к вымиранию либо населения страны, либо населения внешнего мира (в зависимости от параметров конкретного игрового взаимодействия). Поддержка населения путём формирования и использования резервов и эмиссии валют позволяет добиваться режимов устойчивого экономического и демографического роста как страны, так и внешнего мира. Однако такие режимы устойчивого развития весьма чувствительны к паразитическому потреблению.

Проведенные исследования вполне определённо показывают, что использование динамических ансамблей статических игр эффективно как в микро-, так и в макроэкономическом моделировании и что развитие данного подхода имеет серьёзную перспективу.

#### **Список литературы**

1. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. О взаимосвязи операционных игр с классическими игровыми моделями. М.: ВЦ РАН, 2010, - 49 с.
2. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. Операционные игры. Теория и приложения. М.: ВЦ РАН, 2013, - 136 с.
3. Ерешко Ф.И., Шевченко В.В. Принципы и процедуры операционного игрового сценарного моделирования. Материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014 16-19 июня 2014 года, Москва, Россия, ИПУ РАН). С. 5364-5374.

# **Исследование операций в военном деле и области обеспечения безопасности**

1. В.И. Гончаренко, А.В. Рожнов, А.Н. Губин, Г.Е. Слепко К обсуждению тенденций развития автономных систем различного назначения. Дополнение
2. С.В. Кругликов, А.С. Кругликов Операторная формализация задач управления гетерогенным робототехническим комплексом
3. Люман В.Ю. Алгоритм фрактального обнаружения объектов как инструмент опознавания воздушных целей
4. М.В. Прудский Моделирование военных конфликтов
5. Решетов В.Ю., Перевозчиков А. Г., Яночкин И.Е. Распределенные системы защиты: анализ и проектирование
6. А.В. Рожнов К обсуждению тенденций развития автономных систем различного назначения

## **К обсуждению тенденций развития автономных систем различного назначения. Дополнение\***

В.И. Гончаренко<sup>1</sup>, А.В. Рожнов<sup>2,3</sup>,

А.Н. Губин<sup>2,5</sup>, Г.Е. Слепко<sup>4,5</sup>

<sup>1</sup>МАИ (НИУ), Москва, Россия

<sup>2</sup>ВА РВСН, Московская область, Россия

<sup>3</sup>ИППУ РАН, Москва, Россия

<sup>4</sup>ВУ МО, Москва, Россия

<sup>5</sup>МЮИ, Москва, Россия

Обсуждая актуальные проблемы управления, исследования операций в военном деле и сфере обеспечения безопасности, сконцентрируем наше внимание на возможных вызовах для международного гуманитарного права (МГП) в связи с повышением степени автономности, в дополнение базовой части [1].

Проводимая оценка направлена на обоснование решений в сфере запрещения или ограничения применения конкретных видов обычного оружия, которые могут считаться наносящими чрезмерные повреждения или имеющие неизбирательное действие. В совместном докладе освещается видение ряда проблемных вопросов, ранее сформулированных в общем на неофициальном совещании экспертов по автономным системам оружия летального действия в Женеве 13 – 17 апреля 2015 года (представлено в ООН Германией; CCW/MSP/2015/WP.2).

Целевой установкой обсуждения выделяется постановка нетривиальных задач исследования операций в отношении автономных систем оружия летального действия (АСОЛД).

При рассмотрении возможных вызовов для МГП в связи с повышением степени автономности опосредованно выделены:

1) Нормы, касающиеся выбора цели:

ответственность и подотчетность как ключевые аспекты МГП, непрерывная цепь подотчетности в вооруженных силах в связи с повышением автономности оружейных систем?

уровень человеческого надзора за оружейной системой?

учитывая усиливающуюся тенденцию к автономности оружейных систем, что нужно уточнить в нормах МГП?

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-08-00832а.

какие аспекты АСОЛД создают проблемы соблюдения МГП: проведение различия, соразмерность или принятие мер предосторожности при нападении?

каким будет влияние АСОЛД на способность вооруженных сил обеспечивать соблюдение норм МГП?

могут ли АСОЛД повысить уровень такого соблюдения?

2) Связь между степенью автономности и правилами развертывания – каким будет влияние АСОЛД на содержание стандартных оперативных процедур вооруженных сил?

3) Проведение некоторых обзоров правовых аспектов:

как проводятся обзоры правовых аспектов, связанных с оружием, на национальном уровне и какие особые проблемы возникают или могут возникать в связи с АСОЛД?

будет ли иметь особую важность обзор правовых аспектов, связанных с оружием, применительно к АСОЛД?

какие выводы получены государствами, которые проводят обзоры правовых аспектов, связанных с оружием?

действительно ли нужно вводить стандарты или же каким образом установить оптимальные практические методы для обзора правовых аспектов, связанных с АСОЛД?

как это, в итоге, повлияет на соблюдение норм МГП?

Необходимое применение инструментария исследования операций при оценивании возможных вызовов для международного гуманитарного права в связи с повышением степени автономности, наряду с дальнейшим развитием положений [2, 3, 4], вводит также контекст проблематики [5, 6].

Таким образом, предварительные результаты оценки целесообразности автономных функций в оружейных системах и характеристики АСОЛД могут иметь существенное значение при разработке научных основ алгоритмического и программно-математического обеспечения синтеза управления группами пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов, функционирующими в антагонистической среде в условиях неполной ситуационной осведомленности.

#### Список литературы

1. Рожнов А.В. К обсуждению тенденций развития автономных систем различного назначения // в этом сборнике.

2. Рожнов А.В. Творческие материалы «круглого стола». Часть II. Системная интеграция и моделирование новых эффектов в сфере интеллекта // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2016. № 3. С. 3-12.

3. Барышев П.Ф., Рожнов А.В., Губин А.Н., Лобанов И.А. Обоснование информационно-аналитической системы в развитии методов и моделей согласования иерархических решений // Динамика сложных систем — XXI век. 2014. № 3. С. 43-52.

4. Рожнов А.В., Лобанов И.А., Бимаков Е.В. Обоснование задач системной интеграции и информационно-аналитическое моделирование проблемно-ориентированных системы управления на предпроектном этапе жизненного цикла / Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014.

5. Гончаренко В.И., Прус Ю.В., Губин А.Н. и др. Информационно-аналитическая система исследования возможностей деэскалации конфликта в изменяющихся условиях многостороннего переговорного процесса / МАИ (НИУ) // Патент РФ на полезную модель № 159360.

6. Автономные системы оружия летального действия: Пища для размышлений к неофициальному совещанию экспертов / Конвенция о запрещении или ограничении применения конкретных видов обычного оружия, которые могут считаться наносящими чрезмерные повреждения или имеющими неизбирательное действие // ООН, Сессия 2015 года. Пункт 8 предварительной повестки дня. Женева, 13 – 17 апреля 2015 года (GE.15-04290).

# Операторная формализация задач управления гетерогенным робототехническим комплексом\*

С.В. Кругликов, А.С. Кругликов

*Институт математики и механики, Уральский Федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

В настоящее время совершенствование технологических решений, элементной базы, исполнительных механизмов, производительности вычислительных комплексов и сетевых средств ведет к быстрой смене поколений робототехнических систем, расширению их возможностей и направлений применения. В ближайшей перспективе предстоит обеспечивать в реальном времени управление группами роботов различного назначения и различных изготовителей. Исследования ведутся во многих индустриально развитых странах мира, прежде всего, в интересах обороны [1]. Принципиальную актуальность приобретают вопросы математического обеспечения разработки систем управления гетерогенного комплекса роботов. Математические модели [2], разработанные на основе операторного представления задач гарантированного управления и оценивания в условиях неопределенности создают необходимую базу алгоритмического и программного обеспечения систем поддержки принятия решений, разработки интеллектуальных информационно-управляющих систем.

В работе рассматривается математическая формализация концепции единого информационного пространства системы управления гетерогенным робототехническим комплексом, реализующая один из вариантов мультиагентного подхода [3].

Развитие концепции единого информационного пространства направлено на формирование унифицированной технологии включения в иерархический (многоуровневый) комплекс с открытой архитектурой систем управления отдельно разрабатываемых РТС за счет разграничения ответственности, согласования протоколов обмена, схем представления информации и приоритетов выбора вариантов группового поведения. Целью является эффективное достижение общего результата и устойчивого функционирования комплекса при ограниченных ресурсах. Аналогичные по содержательному смыслу задачи управления возникают при моделировании процессов функционирования и устойчивого развития экономических систем, в ходе взаимодействия многих участников.

В качестве базовой рассматривается задача разработки алгоритмов и реализация прототипа АСУ для управления гетерогенным (разнородным) комплексом мобильных роботов, обеспечивающих выполнение базовых содержательных операций при мониторинге и защите объектов и зон повышенной ответственности.

Единство информационного пространства проявляется в совместном описании организации, местоположения и времени действия РТС, что позволяет аналогично описывать географические условия, ситуационную обстановку; организационную структуру, задачи комплекса на основе использования унифицированного представления объектной и алгоритмической структуры объектов.

Описание местоположения элементов РТС допускает различные варианты представления. В работе рассмотрено применение иерархической формализации к послыному построению уточненного описания схемы расположения и картографической информации. Проведен анализ трех согласованных вариантов, выбор каждого из которых зависит от особенностей содержательной реализации конкретной прикладной задачи и требований к точности.

1) Карта, представленная упорядоченной ориентированной решеткой, допускающая возможность поклеточной детализации.

2) Построение описания на основе контуров и их сглаживания выпуклыми оболочками. В этом случае строится на основе решения задачи вариационного исчисления в предположении эллиптической структуры поля маршрутов.

3) Построение для ограниченного пространства с достаточно простыми маршрутами на основе системы трубок, параметры которых определяются тактико-технические характеристики РТС. Подход рационально использовать для проектирования АСУ систем охраны объектов и зон повышенной важности. Особенно при ограничении емкости аккумуляторов и / или отсутствии возможности обновления информации и, следовательно, работы с учетом максимального сноса. В ходе предварительной подготовки карты

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект №15-16-1-8

производится переход от описания препятствий к моделированию возможных окружающих проходов. Базовая конструкция для такого описания основана на объединении конечного числа звеньев, образованных прямолинейным сдвигом кругов при пропорциональном изменении радиуса. Следовательно, при работе в сложном рельефе можно заранее строить описание именно структуры проходов и уже на выделенном графе выбирать маршрут. Вершинами графа при этом являются центры кругов отдельных звеньев из описания структуры проходов.

Предлагаемый вариант операторной формализации задач управления представляется перспективным в силу:

единства представления широкого круга динамических и организационных объектов;  
возможности естественного наращивания модели в зависимости от изменения ситуации и/или применения составляющих средств с различными характеристиками маневренности.

#### Список литературы

1. DoD Unmanned Systems Integrated Roadmap, FY 2011-2036, October 2011. URL: <https://publicintelligence.net/dod-unmanned-systems-integrated-roadmap-fy2011-2036>
2. Kruglikov S.V., Kruglikov A.S. An A Priori Planning of Joint Motions for USV as a Problem of Guaranteed Control/Estimation. Applied Mechanics and Materials. TransTech Publications, Switzerland. Vols. 494-495 (2014) pp. 1110-1113. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMM.494-495.111
3. Многоагентные системы [Электронный ресурс]: <http://www.aiportal.ru/articles/multiagent-systems>

### Алгоритм фрактального обнаружения объектов как инструмент опознавания воздушных целей

Люман В.Ю.

*ТвГУ, Тверь, Россия*

Рассмотрен алгоритм фрактального обнаружения объектов на изображении как инструмент распознавания факта присутствия воздушных целей в рассматриваемой пространственной области.

Проблема разработки алгоритма обнаружения, направленного на повышение вероятности обнаружения движущихся точечных объектов в последовательности изображений, а также кроссплатформенного программного обеспечения, позволяющего решать задачи автоматического анализа состояния воздушного пространства, приобретает всё большую актуальность по ряду следующих причин:

1. Многие алгоритмы, используемые в настоящее время, имеют такой существенный недостаток, как низкая вероятность обнаружения объектов, размеры которых находятся на пределе пространственного разрешения системы наблюдения, а яркость может сравниться с величиной случайного шума, сопровождающего измерения.

2. Учитывая возможную область применения данных алгоритмов, а именно военное дело и область обеспечения безопасности, ошибка обнаружения объекта может повлечь за собой непрогнозируемые и масштабные последствия.

3. Высокая стоимость технических средств наблюдения и обработки данных, способных предоставлять исходные данные, а также отсутствие кроссплатформенных программных продуктов, реализующих работу данных алгоритмов.

Как утверждают авторы книги [2], задача обнаружения заключается в установлении факта наличия или отсутствия на изображении объекта, обладающего некоторыми определенными характеристиками. В данном случае изображение рассматривается как реализация двумерной дискретной функции, значения которой в любой точке представляют собой яркости этих точек как элементов изображения.

Исходные данные для работы алгоритма представлены как видеоряд со съёмки летательного аппарата, охватывающего ситуации: самолёт на фоне облаков; самолёт на фоне чистого неба; чистое небо; облака; самолёт, замаскированный облаком. Необходимо набрать статистические данные для последующего эксперимента и при помощи алгоритма фрактального обнаружения реализовать возможность автоматического определения положения летательного аппарата в воздушном пространстве путем постепенного уменьшения анализируемой области.

Исходные изображения представляют собой мультифракталы, то есть неоднородные фрактальные объекты, для описания которых, согласно [1], в отличие от регулярных

фракталов, недостаточно введения всего лишь одной величины - его фрактальной размерности, а необходим целый спектр таких размерностей.

На практике фрактальную размерность часто определяют через клеточное разбиение, основанное на исследовании зависимости количества кубиков, содержащих точки множества, от размера ребра кубика. Эта зависимость имеет вид:

где  $\varepsilon$  - размер кубика,  $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^D}$  количество кубиков, покрывших множество,  $D$  - фрактальная размерность множества. Отсюда можно вывести формулу фрактальной размерности:

$$D = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

При анализе исходных данных необходимо вычитать минимум яркости из каждой точки изображения, иначе показатели фрактальной размерности анализируемых областей будут стремиться к показателю размерности объемного тела, причем минимум нужно вычислять не по всему исходному изображению, а по каждой анализируемой области отдельно. Фрактальная размерность в областях, где объект отсутствует, будет стремиться к размерности плоскости и должна быть значительно ниже размерности тех областей, где объект обнаружен, так как объект создает дополнительные неровности, а соответственно, объем.

Таким образом, алгоритм обнаружения движущихся точечных объектов в последовательности изображений можно представить как комплекс следующих аналитических блоков:

1. Построение гистограмм освещенности для наблюдаемой сцены, представление её в виде двумерного массива по размеру текущей анализируемой области.
2. Вычисление минимума освещенности для каждой анализируемой области и вычитание его из яркости каждого пикселя текущей части изображения.
3. Реализация алгоритма клеточного разбиения. Проведение нескольких итераций работы этого блока, накопление данных для построения зависимости  $N(\varepsilon)$ .
4. Построение зависимости  $N(\varepsilon)$  в логарифмических координатах, вычисление с помощью метода наименьших квадратов угла ее наклона, который и будет характеризовать показатель фрактальной размерности. Данный подход измерения углового коэффициента графика  $\log N(\varepsilon)$  как функции от  $\log \varepsilon$  является альтернативой описанного выше предельного перехода. В одном из первых исследований по фрактальному анализу [3] именно так и измерялись длины береговых линий.

Анализируя набранную в ходе описанных исследований статистику, для каждого из пяти состояний воздушного пространства можно выделить интервалы, в которые попадают соответствующие им значения показателя фрактальной размерности. Происходит попарное перепутывание ситуаций «самолет на фоне облаков» с «самолет на фоне чистого неба» и «чистое небо» с «облака». Однако это не влияет на результаты обнаружения, так как сущность задачи заключается в принятии решения о наличии или отсутствии объекта, а в обоих парах принятые решения совпадают.

Для сокращения трудоемкости проведения вычислительного эксперимента, а также отображения результатов обнаружения был реализован кроссплатформенный программный продукт на языке C++ с использованием библиотек Qt, позволяющий не только обнаружить объект на наблюдаемой сцене, но и уточнить его положение.

#### Список литературы

1. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. — Ижевск: «РХД», 2001.
2. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. - М.: Техносфера, 2005.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

## Моделирование военных конфликтов

М.В. Прудский

*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия*

Согласно В.И. Ленину, политика есть концентрированное выражение экономики, поэтому отношения государств могут перерасти в военную фазу в случае столкновения

экономических и геополитических интересов при невозможности их разрешения мирным путем.

Одним из последних таких столкновений стала гражданская война в Сирии, в которой с 30 сентября 2015 года принимает участие Российская Федерация [0].

Главными параметрами оценки конфликта являются его интенсивность, продолжительность, количество задействованных сил сторон, потери сторон, а также экономические затраты и эффективность самой операции [2].

Существует несколько подходов к описанию военных конфликтов, описывающих отдельные элементы операции или результаты военных сражений и противостояний [1], [4], или разделение операций на этапы [2]. В данной работе предпринята попытка объединения теории военных операций и экономической теории.

На примере Сирийского конфликта создана оптимизационная модель, позволяющая оценивать динамику характеристик военных действий в регионе.

Экономические затраты на проведение операции складываются из следующих компонентов: прямые затраты (затраты на пребывание войск в зоне конфликта, затраты боеприпасов, затраты на восполнение потерь, гуманитарная помощь и материальная поддержка и т. д. и косвенные затраты (экономические санкции, негативный эффект от милитаризации экономики, создание социально-экономической нестабильности в стране, репутационные риски).

Оценка затрат зависит от следующих параметров: характеристики инфраструктуры региона, численности противоборствующих сторон, численность и набор вооружений сторон, производственный и демографический потенциал региона, размер экономической и материальной помощи и т. д.

Во многих конфликтах положительный эффект от участия в военных действиях не обязательно связан с непосредственным увеличением благосостояния граждан в краткосрочной перспективе [2], но его определение также важно, поскольку обозначает степень целесообразности участия в военных действиях.

Расчет данных эффектов возможен при помощи оптимизации расходов на операцию с учетом минимизации потерь, уменьшения продолжительности (либо уменьшения ежедневных затрат), а также при выборе правильной тактики проведения операции и уровня поддержки воюющих сторон.

Данную задачу оптимизации является возможным решить при помощи методов теории оптимального управления [3], а также дифференциального исчисления, в части динамики численностей противоборствующих группировок, описываемым уравнениями Ланчестера [6].

Влияние затрат на операцию, а также прочих социально-экономических факторов на экономику страны можно оценить при помощи 3-х шагового МНК, например, влияние роста оборонных расходов на ВВП [5].

Для оценки исходных параметров конфликта (численности сторон, военная мощь) используются данные из открытых источников [0].

## Список литературы

1. Снетков Н.Н. Имитационное моделирование экономических процессов: Учебно-практическое пособие. М.: Изд. центр ЕАОИ, 2008. 228 с.
2. Квачков В.В. Спецназ России. М.: Военная литература, 2004. 208 стр.
3. Токарев В.В. Методы оптимальных решений. В 2 т. Т. 2. Многокритериальность. Динамика. Неопределенность. 2-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 420 с.
4. Буянов Б.Б., Лубков Н.В., Поляк Г.Л. Математическая модель длительного вооруженного конфликта // Пробл. управл. 2007. Выпуск 5. С. 48–51.
5. Юдаева К.В. Иванова Н.С. Каменских М.В. Эффективность госрасходов в России. М.: Центр макроэкономических исследований Сбербанка России, 2011. 18 с.
6. Таха Н. Operations Research: An Introduction (9th ed.). NY: Prentice Hall, 2011. 813 p.  
Итоги военной операции ВКС РФ в Сирии. <http://tass.ru/spec/syria>,  
<http://www.globalfirepower.com/>

## Распределенные системы защиты: анализ и проектирование

Решетов В.Ю., Перевозчиков А. Г., МГУ имени М.В. Ломоносова, Яночкин И.Е., «НПО РусБИТех»,

*Москва, Россия*

Работа основана на результатах из [10] и является дальнейшим развитием построений в [11,12]. Первым примером распределенных систем защиты является модель «нападение-оборона», определенная и изученная Ю.Б.Гермейером [2]. Она является модификацией модели О.Гросса [1], в которой функция выигрыша нападения имеет вид:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n k_i \max [x_i - y_i; 0],$$

а  $k_i$  - интерпретируются, как важность пунктов. В работе [3] изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах [4,5] – гарантированный результат защиты с произвольными выпуклыми аддитивными функциями выигрыша в условиях целочисленности переменных, в работах [6,7] - динамические расширения модели. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине. Однако реально имеет место также пространственное распределение ресурсов защиты по глубине, характеризующейся количеством уровней защиты на данном направлении.

В работе [10] изучалась простейшая модель многоуровневой системы защиты на заданном направлении. Эта модель представляет собой частный случай задачи дискретного оптимального управления (ОПУ) терминального типа и может быть решена методом градиентного спуска. Главной проблемой является недифференцируемость функций в правых частях уравнения движения и их производных по совокупности переменных, что делает некорректным использование классических результатов о дифференцируемости терминального критерия и построения его градиента на основе сопряженной системы.

Для решения этой проблемы было предложено использовать процедуру осреднения функций в правых частях уравнения движения по совокупности переменных в малой окрестности. Предложенную процедуру рекомендовалось рандомизировать. По вычислительной сложности полученный метод стохастического градиентного спуска будет эквивалентен методу градиентного спуска, но в отличие от него корректен. В работе [12] эти результаты получают дальнейшее развитие в части учета предварительного подавления средств защиты нападением.

В работе [11] дополнительно учитываются вероятности воздействия на каждом уровне защиты, определяемые формулой Эрланга, которая может быть аппроксимирована

отношением двух нормальных функции распределения. В результате критерий становится дифференцируемой функцией, что позволяет вернуться к общей минимаксиминной задаче распределения ресурсов защиты по направлениям и уровням защиты. Обоснованную в [9] процедуру осреднения в полученной задаче минимизации функции максимина предлагалось рандомизировать на основе дифференциальных свойств внутренней функции связанного максимума, полученных в [8].

Дальнейшее обобщение модели «нападение-оборона» может состоять в учете различия типов средств нападения через соответствующее изменение вероятности воздействия на каждом уровне защиты, которое в свою очередь есть результат решения соответствующей задачи целераспределения. Такие задачи изучались в работах [4,5], там же было указано на иерархический характер моделей более высокого уровня, построенных на их основе. Это приводит, в общем случае, к задачам на кратный минимакс со связанными ограничениями для определения гарантированного результата защиты, примером которого является минимаксиминная задача, изученная в [12].

### Список литературы

1. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
2. Гермейер Ю.Б. введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
3. Молодцов Д.А. Модель Гросса в случае непротивоположных интересов// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1972. Т. 12, № 2, С.309-320.
4. Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Под ред. Е.В.Золотова. – М.: Радио и связь, 1974.
5. Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр / Под ред. Е.В.Золотова. – М.: Радио и связь, 1983.
6. Данильченко Т.Н., Масевич К.К. Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1974. Т. 19. № 5. С.1323-1327.
7. Крутов Б.П. Динамические квазиинформационные расширения игр с расширяемой коалиционной структурой. М.: ВЦ РАН, 1986.
8. Минченко Л.И. Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984. Т. 24. № 2. С.210-217.
9. Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1991. Т. 30. № 4. С.629-633.
10. Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. № 41. 2013, с.83-95.
11. Перевозчиков А.Г., Лесик И.А., Яночкин И.Е. Модель массового обслуживания для системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. 2015, № 4. С.65-84.
12. Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением// Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.И.Ломоносова / Под ред. В.И.Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2015. № 49. С.80-96.

## К обсуждению тенденций развития автономных систем различного назначения\*

А.В. Рожнов  
*ИПУ РАН, Москва, Россия*

Современные проблемы управления, исследования операций в военном деле и сфере обеспечения безопасности включают ряд интересных направлений, одним из которых является запрещение или ограничение применения конкретных видов обычного оружия, которые могут считаться наносящими чрезмерные повреждения или имеющие неизбирательное действие. Непосредственно, в настоящем вводном докладе анализируются проблемные вопросы, сформулированные на неофициальном совещании экспертов по

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-08-00832а.

автономным системам оружия летального действия в Женеве 13 – 17 апреля 2015 года (представлено в ООН Германией; CCW/MSP/2015/WP.2).

Целью обсуждения является стремление к лучшему пониманию и углублению дискуссии в отношении автономных систем оружия летального действия (АСОЛД). В настоящем докладе в первую очередь развиваются таковые вопросы как:

военная целесообразность автономных функций в оружейных системах и характеристики АСОЛД;

возможные вызовы для международного гуманитарного права в связи с повышением степени автономности;

а также, наряду с фундаментальными вопросами, намеченные последующие шаги и ряд дополнительных вопросов.

Так, в числе дополнительных вопросов следует обратить внимание на следующие акценты, имеющие непосредственное значение в актуальных междисциплинарных исследованиях операций в военном деле и сфере обеспечения безопасности:

ведет ли усложнение задач, выполняемых автономными системами, к повышению или снижению предсказуемости таких технологий?

как автономность влияет на надежность и уязвимость оружейной системы, например, в плане сбоев, взлома или кибератак?

какого рода устойчивость к ошибкам программирования и развертывания может быть заложена в автономные системы или правила, регулирующие их использование?

В результате проведенных поисковых исследований по тематике автономных систем различного назначения, очевиден вывод об особой значимости выбора путей развития таковых технологий. Как мы видим из общедоступных источников, приоритеты распределены довольно неоднородно, особенно при рассмотрении пока ещё гипотетических свойств некоторых неоднозначно воспринимаемых виртуальных технологий.

Действительно, более пристального внимания заслуживают важные вопросы устойчивости против ошибок в программировании и развертывании, а также, возможно, уязвимость АСОЛД перед кибератаками. Выявлена явная потребность в более четком понимании определяющих элементов для АСОЛД, включая, среди прочего, понятие значимого человеческого контроля, ответственность и предсказуемость, а также вопросы автономности с учётом контекста и задач, включая критические функции АСОЛД. И, для того чтобы использовать накопленный опыт в области гражданских систем, в тоже время, четко осознавая их отличие от АСОЛД, – в этом контексте важно вскрыть ряд вопросов о юридической ответственности в связи с делегированием полномочий и прав принимать решения (например, риски несчастных случаев при использовании автономных транспортных средств, роботов и т.д.).

Таким образом, выявляемые посредством развитого инструментария исследования операций тенденции развития будут интересны при оценивании возможных вызовов для международного гуманитарного права в связи с повышением степени автономности. Работа основана на результатах из [1] и является дальнейшим развитием положений [2, 3, 4]. Общий контекст проблематики также затрагивает моменты [5, 6, 7, 8].

#### Список литературы

1. Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунев Б.Е. Интеллектуальное управление динамическими системами. М.: Физико-математическая литература. 2000.
2. Рожнов А.В. Творческие материалы «круглого стола». Часть II. Системная интеграция и моделирование новых эффектов в сфере интеллекта // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2016. № 3. С. 3-12.
3. Барышев П.Ф., Рожнов А.В., Губин А.Н., Лобанов И.А. Обоснование информационно-аналитической системы в развитии методов и моделей согласования иерархических решений // Динамика сложных систем — XXI век. 2014. № 3. С. 43-52.
4. Рожнов А.В., Лобанов И.А., Бимаков Е.В. Обоснование задач системной интеграции и информационно-аналитическое моделирование проблемно-ориентированных системы управления на предпроектном этапе жизненного цикла / Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014.

5. Гончаренко В.И., Прус Ю.В., Губин А.Н. и др. Информационно-аналитическая система исследования возможностей деэскалации конфликта в изменяющихся условиях многостороннего переговорного процесса / МАИ (НИУ) // Патент РФ на полезную модель № 159360.
6. Krivonozhko V. E., Førsund F. R., Rozhnov A. V., Lychev A. V. Measurement of Returns to Scale Using a Non-Radial DEA Model / *Doklady Mathematics*. Berlin: Springer, 2012. Volume 85, Issue 1. С. 144-148. <http://link.springer.com/article/10.1134/S1064562412010322>.
7. Новиков Д.А. Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития. М.: ЛЕНАНД. 2016. 160 с.
8. Автономные системы оружия летального действия: Пища для размышлений к неофициальному совещанию экспертов / Конвенция о запрещении или ограничении применения конкретных видов обычного оружия, которые могут считаться наносящими чрезмерные повреждения или имеющими неизбирательное действие // ООН, Сессия 2015 года. Пункт 8 предварительной повестки дня. Женева, 13 – 17 апреля 2015 года (GE.15-04290).

## Исследование операций в банковском деле и на финансовых рынках

1. Г.А.Агасандян Необходимое и достаточное условие корректности семейств функций рискованных предпочтений для CC-VaR
2. Г.А.Агасандян CC-VaR и принцип минимума доходности в играх на движениях рынка опционов
3. Ф.Т. Алескеров, Н.Г. Мещерякова, А.А. Никитина, С.В. Швыдун Модели влияния в сетях: применение к международному рынку заимствований
4. О.Б. Байрамов, В.В. Охрименко Динамические компромиссы в задаче многоцелевой максимизации функций
5. Ант. В. Вахранев Выделение аддитивных составляющих временных рядов на основе метода SSA
6. И.И. Гасанов, Ф.И. Ерешко Задача прогноза панических трендов
7. М.А. Горелов Биржевые игры роботов
8. В.В. Дикусар, А.Ф. Ерешко Приближение сингулярно возмущённых СДУ
9. Ант. Ерешко К организации алгоритмической торговли
10. Ф.И. Ерешко Исследование финансовых операций
11. Ф.И. Ерешко, В.В. Шевченко Операционное игровое представление базовых финансовых операций
12. В.Г. Киселев Экономические модели программ страхования дохода в сельском хозяйстве
13. Козлов Д.Н., Гуськов С.Ю., Левин В.В. Дискретные модели "выживания" для задач оценки качества розничных кредитных портфелей.
14. А.Н. Сытов Модели коалиции заёмщиков с механизмом выдачи кредитов на основе жребия

### **Необходимое и достаточное условие корректности семейств функций рисковых предпочтений для CC-VaR**

Г.А.Агасандян

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
ФИЦ ИУ РАН*

*Москва, Россия*

В работе исследуются однопараметрические семейства функций рискованных предпочтений инвестора, работающего с непрерывным критерием VaR (CC-VaR). Корректными являются семейства, для которых доходность инвестиции является монотонной функцией параметра при любых допустимых стоимостных функциях. Приводится необходимое и достаточное условие корректности семейства (см. также [1,2]).

Решение задачи оптимизации с CC-VaR основывается на функции относительных доходов  $\rho(x) = p(x)/c(x)$ ,  $x \in X$ , где  $p(x)$  и  $c(x)$  – соответственно прогнозная и стоимостная плотности цены базового актива,  $X$  – произвольный интервал на вещественной прямой. Задача состоит в максимизации средней доходности при выполнении условий CC-VaR:  $P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$  для всех  $\varepsilon \in [0,1]$ , где  $q$  – доход,  $\phi(\varepsilon)$  – функция рискованных предпочтений инвестора (ф.р.п.). Средний доход  $R(\lambda)$  и инвестиционная сумма  $A(\lambda)$  определяются формулами

$$R(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\varepsilon, \quad A(\lambda) = \int_0^1 \phi(\varepsilon; \lambda) d\gamma(\varepsilon),$$

а средний относительный доход  $r(\lambda) = R(\lambda)/A(\lambda)$ .

Здесь  $\gamma(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , – диссонанс оптимального портфеля. Как показывается в [1], функция  $\gamma(\varepsilon)$  выпукла вверх (вогнута), ее производная – неотрицательная и невозрастающая функция  $\varepsilon$  (возможно, разрывная),  $\gamma(0) = 0$ ,  $\gamma(1) = 1$ . Функции  $g(\varepsilon)$  с такими свойствами диссонансы называются *допустимыми*. Они не зависят от  $\lambda$ , а определяются лишь соотношением  $p(x)$  и  $c(x)$ .

Изучение семейств ф.р.п. проводится на основании *нормированных ф.р.п.*  $\phi_n(\varepsilon; \lambda) = \phi(\varepsilon; \lambda)/R(\lambda)$ . Наряду с их производными по  $\lambda$  далее (при разрыве) рассматриваются и разности

$$\Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) = \phi_n(\varepsilon; \lambda_2) - \phi_n(\varepsilon; \lambda_1). \quad (1)$$

*Корректным* называется семейство, для которого при *любой допустимой* функции  $g(\varepsilon)$  оптимальный относительный доход  $r(\lambda)$  является монотонно возрастающей функцией  $\lambda$ . Остальные семейства – некорректные. Для *некорректного* семейства *существуют* пара  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_1 < \lambda_2$ , и такая *допустимая* функция  $g(\varepsilon)$ , что  $r(\lambda_1) > r(\lambda_2)$ . □

Для анализа корректности семейств удобно рассмотреть упрощенную модель семейств, ограничиваясь  *$\alpha$ -наборами*  $\{\alpha_i, i = 1..k\}$  – знакопеременными наборами чисел, для которых

$$\alpha_i \neq 0, i = 1..k; \quad \sum_{i=1..k} \alpha_i = 0.$$

Набор (*не  $\alpha$ -набор!*)  $k$  чисел  $\{\pi_i, i = 1..k\}$  называется *допустимым*, если  $\pi_1 > 0$ ,  $0 \leq \pi_i \leq \pi_{i-1}$ ,  $i = 2..k$ . Называем  $\alpha$ -набор *корректным*, если для *любого допустимого* набора  $\{\pi_i, i = 1..k\}$

$$\sum_{i=1..k} \pi_i \alpha_i \leq 0.$$

В противном случае, если *существует допустимый* набор  $\{\pi_i, i = 1..k\}$ , для которого выполняется противоположное неравенство,  $\alpha$ -набор называем *некорректным*. Имеет место

**Теорема 1.** Для корректности  $\alpha$ -набора  $\{\alpha_i, i = 1..k\}$  *необходимо и достаточно*, чтобы  $k$  было четным числом и выполнялась совокупность неравенств

$$\alpha_1 < 0 \text{ и } \sum_{i=1..m} \alpha_i \leq 0 \text{ для всех четных } m \leq k-2$$

(при  $k = 2$  требуется выполнение лишь первого неравенства).

Из этой теоремы вытекают

*Следствия:* (i) условие  $\alpha_1 < 0$  *необходимо* для корректности  $\alpha$ -набора; в случае  $k = 2$  оно также *и достаточно*; (ii) при  $k = 3$  любой  $\alpha$ -набор *некорректен*; (iii) при  $k = 4$   $\alpha$ -набор *корректен* тогда и только тогда, когда  $\alpha_1 < 0 < \alpha_2 \leq -\alpha_1$ ; из этих неравенств непосредственно вытекает, что также  $\alpha_3 < 0$ ,  $\alpha_4 > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 0$ . □

На основе теоремы 1 доказывается и

**Теорема 2.** Для корректности семейства  $\Phi$  *необходимо и достаточно*, чтобы для  $\alpha$ -набора  $\{\alpha_i, i = 1..k\}$ , определяемого по *любой* паре  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_1 < \lambda_2$ , формулой (1) (или по  $\lambda$  – производной по  $\lambda$ ), число  $k$  было четным и выполнялась совокупность неравенств

$$\alpha_1 < 0 \text{ и } \sum_{i=1..m} \alpha_i \leq 0 \text{ для всех четных } m \leq k-2$$

(при  $k = 2$  требуется выполнение лишь первого неравенства).

Из этой теоремы также вытекают простые

*Следствия:* если производная по  $\varepsilon$  от  $\Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2)$  (или от  $\partial \phi_n(\varepsilon; \lambda) / \partial \lambda$ ): (i) при  $\varepsilon = 0$  положительна хотя бы для одной пары  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_1 < \lambda_2$ , (одного значения  $\lambda$ ), то семейство некорректно; (ii) при  $\varepsilon = 0$  для любой пары  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_1 < \lambda_2$ , (для всех  $\lambda \geq 0$ ) отрицательна, то при  $k=2$  семейство корректно; (iii) при  $\varepsilon = 1$  положительна хотя бы для одной пары  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_1 < \lambda_2$ , (одного значения  $\lambda \geq 0$ ), то семейство некорректно; (iv) при  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon = 1$  одного знака, то семейство некорректно. □

В качестве типового примера рассматривается семейство ф.р.п. инвестора вида  $\phi(\varepsilon, \lambda) = \varepsilon^\lambda$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,  $\lambda > 0$ . Справедливы соотношения (см. [1])

$$R(\lambda) = (1+\lambda)^{-1}, \quad \phi_n(\varepsilon; \lambda) = \phi(\varepsilon; \lambda) / R(\lambda) = (1+\lambda)\varepsilon^\lambda, \quad \lambda > 0,$$

$$\Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2) = (1+\lambda_2)\varepsilon^{\lambda_2} - (1+\lambda_1)\varepsilon^{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2,$$

$$\partial \phi_n(\varepsilon; \lambda) / \partial \lambda = \varepsilon^\lambda (1 + (1 + \lambda) \ln(\varepsilon)), \quad \lambda > 0.$$

Функция  $\Delta \phi_n(\varepsilon; \lambda_1, \lambda_2)$  помимо  $\varepsilon = 0$  принимает нулевое значение лишь в точке  $\varepsilon_1$ , являющейся корнем уравнения  $(1 + \lambda_2) \varepsilon^{\lambda_2} = (1 + \lambda_1) \varepsilon^{\lambda_1}$ ,

$$\varepsilon_1 = ((1 + \lambda_1) / (1 + \lambda_2))^{1/(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Поскольку  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , то  $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ . При этом производная функции  $\Delta \phi_n(\varepsilon)$  по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = \varepsilon_1$  равна

$$(1 + \lambda_1) \varepsilon_1^{\lambda_1 - 1} (\lambda_2 - \lambda_1) > 0.$$

К тому же и  $\Delta \phi_n(1; \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1 > 0$ . Все это с очевидностью говорит о том, что функция  $\Delta \phi_n(\varepsilon)$  при  $\varepsilon < \varepsilon_1$  отрицательна (не считая  $\varepsilon = 0$ ), при  $\varepsilon > \varepsilon_1$  положительна. Поэтому в терминах *теорем 1, 2* параметр  $k = 2$ ,  $\alpha_1 < 0$  и в  $\alpha$ -наборе смена знаков происходит единожды. Корректность семейства обеспечивается *следствиями (ii)* (обеих теорем).  $\square$

В работе с использованием условия корректности проверяется также гипотеза качественного характера, согласно которой рискованные аспекты функций рискованных предпочтений инвестора в большей мере связаны с их поведением в окрестности нуля, чем единицы. Для подобных выводов специально подбираются и анализируются два порождающих разные однопараметрические семейства примера двухпараметрических надсемейств – линейных функций с одним изломом и обобщенных окружностей. Изложение сопровождается аналитическими исследованиями, расчетами и графиками.

#### Список литературы

1. Агасандян Г.А. Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. – М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
2. Агасандян Г.А. Качественные особенности семейств функций рискованных предпочтений инвестора для CC-VaR. М.: ВЦ РАН, 2016. 40 с.

## СС-VaR и принцип минимума доходности в играх на движениях рынка опционов

Г.А.Агасандян

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
ФИЦ ИУ РАН

Москва, Россия

В работе для задач с бета-распределенными ценой базового актива и прогнозом инвестора изучаются свойства решений, получаемых из принципа минимума доходности в задачах нахождения оптимального по CC-VaR портфеля инвестора в соответствии с его частичным прогнозом рынка и функцией рискованных предпочтений (ф.р.п.). Напомним, что CC-VaR – это континуальный критерий VaR, требующий выполнения совокупности неравенств  $P\{q \geq \phi(\varepsilon)\} \geq 1 - \varepsilon$  для *всех*  $\varepsilon \in [0, 1]$ , где  $q$  – случайный доход инвестора,  $\phi(\varepsilon)$  – ф.р.п. (см., например, [1]).

Заданы прогнозная  $p(x; \theta)$  и стоимостная  $c(x)$  плотности,  $x \in X$ ,  $\theta \in \Theta$ , и основные агрегаты задачи, такие как относительный доход, средний доход, инвестиционная сумма и средняя доходность определяются формулами

$$r(x; \theta) = p(x; \theta) / c(x), \quad \theta \in \Theta, \quad R = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$A(\theta) = \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\gamma(\varepsilon; \theta), \quad y(\theta) = R / A(\theta) - 1.$$

Задача состоит в определении

$$\theta_{\min} = \arg \min y(\theta) = \arg \max A(\theta) = \arg \max \int_0^1 \phi(\varepsilon) d\gamma(\varepsilon; \theta).$$

Здесь  $\gamma(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in [0, 1]$ , – диссонанта оптимального портфеля, определяемая при применении процедуры Неймана-Пирсона в алгоритме оптимизации. В разд. 2 главы 4 в [1] изучались задачи определения параметров двустороннего экспоненциального распределения, исходя из ПМД. Они допускают полное аналитическое исследование.

Там же в разд. 4 были предложены численные методы, дающие приближенные решения задач.

Здесь с помощью численных методов анализируются несколько типовых для участников рынка задач на примере бета-распределений, имеющих весьма характерный для рынков вид. Рассматриваются три типа задач: задачи на направленное движение рынка; покупка и продажа волатильности; покупка и продажа хвоста распределения. Для получения качественных выводов используются регрессионные модели (см. также [2]).

Игра на повышение предполагает, что плотность  $p(x)$  дает более высокое математическое ожидание, чем  $c(x)$ , т.е. должно быть  $m_p = \alpha/(\alpha+\mu) > m_c$ . Такую игру можно смоделировать, например, полагая  $\beta = 1.5$ ,  $\nu = 2.5$  (для плотности  $c(x)$ ), т.е.  $m_c = 0.6$ ,  $s_c = \beta + \nu = 4.0$ , и потому принимаем  $m_p = 0.8$ . Инвестор варьирует параметр  $s_p$ , определяя оптимум по ПМД. При этом оптимум по СС-VaR находится в предположении  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^2$ .

Для иллюстрации игры на понижение достаточно воспользоваться очевидным свойством зеркальной симметрии семейства плотностей бета-распределения относительно  $x = 0.5$ .

Покупка волатильности предполагает, что плотность  $p(x)$  дает более высокую дисперсию, чем  $c(x)$ . Пусть, например,  $\beta = 3.0$ ,  $\nu = 4.0$ , т.е.  $s_c = \beta + \nu = 7.0$ ; и положим  $s_p = 3.5 (< s_c)$ . При этом  $m_c = 0.75$ ,  $s_c = 7.0$ . На этот раз для определения оптимума по ПМД инвестор варьирует параметр  $m_p$ . Оптимальная платежная функция портфеля является унимодальной с минимумом на отрезке  $[0, 1]$ .

Очевидным образом моделируется и продажа волатильности. Достаточно поменять ролями плотности  $c(x)$  и  $p(x)$ . В этом случае оптимальная весовая функция портфеля будет унимодальной, но уже с максимумом на отрезке  $[0, 1]$ .

Особый класс задач на применение ПМД составляют игры на хвосте распределения. Игра, например, на левом хвосте бета-распределения при фиксированных  $\beta$  и  $\nu$  требует однозначного задания, вообще говоря, отличного от  $\beta$  параметра  $\alpha$  прогнозного бета-распределения и оптимизацией параметра  $\mu$  по ПМД. При этом используется обозначение  $\mu_{\text{opt}} = h_l(\nu; \alpha, \beta)$ . К игре на левом хвосте в формальном отношении сводится и игра на правом хвосте с  $\mu_{\text{opt}} = h_r(\nu; \alpha, \beta)$ .

Характер плотности с очевидностью свидетельствует о том, что при  $\alpha > \beta$  речь идет о *продаже* левого хвоста, при  $\alpha < \beta$  – о его *покупке*. Аналогично, при  $\mu > \nu$  речь идет о *продаже* правого хвоста, при  $\mu < \nu$  – о его *покупке*. Наша цель – проверить идею, согласно которой игра на любом хвосте (например, его продажа) эквивалента игре на волатильности (также ее продаже). Действительно, получается так, что при  $\alpha > \beta$  в результате оптимизации по ПМД получается  $\mu_{\text{opt}} > \nu$ , а при  $\alpha < \beta$  –  $\mu_{\text{opt}} < \nu$ . Формально, предположим в качестве *гипотезы* выполнение двух требований:

$$(i) \mu_{\text{opt}} = h_l(\nu; \beta, \beta) = \nu,$$

(ii) при фиксированных значениях  $\nu$  и  $\beta$  функция  $h_l(\nu; \alpha, \beta)$  – монотонно возрастающая по  $\alpha$ .

Эта гипотеза допускает также и аналогичную формулировку для правого хвоста. Для подтверждения гипотезы рассматриваются два типа задач.

Для первого типа принимается  $\alpha > \beta$ , т.е. *продается* левый хвост, при фиксированном значении  $\nu$  ищется оптимальное значение  $\mu_{\text{opt}}$  параметра  $\mu$ , а цель экспериментов – проверить, что  $\mu_{\text{opt}} > \nu$ . Для второго типа принимается  $\mu < \nu$ , т.е. *покупается* правый хвост, при фиксированном значении  $\beta$  ищется оптимальное значение  $\alpha_{\text{opt}}$  параметра  $\alpha$ , а цель экспериментов – проверить, что  $\alpha_{\text{opt}} < \beta$ .

Расчеты проводятся для некоторой совокупности значений параметра  $\beta$ . Для каждого из них определяется и проверяется приближенная формула зависимости  $\mu_{\text{opt}}$  от  $\alpha$  и  $\nu$ . А затем выбирается вариант с наименьшей средней доходностью.

В качестве исходной функции регрессии для каждого значения  $\beta$  принимается полиномиальная функция двух переменных суммарной степени не выше второй

$$h_l(\nu; \alpha, \beta) = \vartheta_0 + \vartheta_1 \nu + \vartheta_2 \alpha + \vartheta_{11} \nu^2 + \vartheta_{12} \nu \alpha + \vartheta_{22} \alpha^2,$$

где все шесть коэффициентов зависят, вообще говоря, от  $\beta$ .

Уже после экспериментов с  $\beta = 1, 2, 3$  получается, что с незначительными потерями в точности оценивания

• можно положить  $\vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 0$  и ограничиться регрессиями с четырьмя параметрами:

$$h_i(v; \alpha, \beta) = \vartheta_0 + \vartheta_1 v + \vartheta_2 \alpha + \vartheta_{12} v \alpha;$$

• подтверждается выдвинутая изначально гипотеза, что

$$\mu_{\text{opt}} = h_i(v; \alpha, \alpha) = v,$$

а это приводит к дальнейшему упрощению функции регрессии:

$$h_i(v; \alpha, \beta) = v + \theta_1(\alpha - \beta) + \theta_2 v(\alpha - \beta).$$

Тем самым при каждом значении  $\beta$  задача регрессии сводится к определению в полученном представлении функции двух параметров  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , которые все еще могут зависеть от  $\beta$ .

### Список литературы

1. Агасандян Г.А. Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. – М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
2. Агасандян Г.А. CC-VAR и принцип минимума доходности для бета-распределений. – М.: ВЦ РАН, 2015. 30 с.

## Модели влияния в сетях: применение к международному рынку заимствований

Ф.Т. Алескеров, Н.Г. Мещерякова, А.А. Никитина, С.В. Швыдун  
*Национальный исследовательский университет - Высшая школа  
экономики, Москва, Россия*

Работа основана на результатах из [1] и предлагает новый метод оценки влияния агентов в сетевых структурах, принимающий во внимание интенсивности взаимодействия участников.

Ключевой особенностью данного подхода является то, что он рассматривает не только цепочки взаимодействий с контрагентами первого уровня (прямые взаимодействия) и косвенные взаимодействия второго уровня, но и более длинные цепочки косвенных взаимодействий. Это позволяет выявить системно-значимые элементы, которые не могут быть обнаружены с помощью классических мер центральности и других индексов влияния. В работе предложено два подхода к оценке длинных цепочек взаимосвязей элементов сети: основанный на симуляциях и основанный на анализе путей. В рамках последнего рассмотрены различные варианты оценки косвенного влияния элементов сети друг на друга, а также различные способы агрегирования путей между собой.

Предложенный метод был использован для анализа рынка международных заимствований по состоянию на 1 квартал 2015 года. Были использованы данные консолидированной банковской статистики Банка международных расчетов (на основе оценки конечного носителя риска). Исходные данные отражают объем иностранных требований страны  $i$  по отношению к заемщикам в стране  $j$ , которые включают в себя консолидированные прямые иностранные требования, а также обязательства дочерних компаний и филиалов в стране  $j$  по отношению к стране  $j$ .

В результате были получены значения индекса ключевых заемщиков с учетом длинных цепочек взаимосвязей для каждой страны, при этом страны с наибольшим значением индекса можно рассматривать как стержневые или наиболее значимые для стабильности мировой финансовой системы.

Предложенный метод позволил выделить ключевых заемщиков двух типов: а). крупных игроков, обладающих высокими рейтингами и положительной кредитной историей; б). игроков-посредников, привлекающих капитал за счет создания благоприятных инвестиционных условий.

Также в работе оценен уровень взаимосвязанности стран с использованием различных мер центральности: взвешенной центральности по степени, центральности по близости, центральности по посредничеству, PageRank и центральности собственного вектора. Эти меры описаны в [2-3]. Их сравнение с результатами, полученными с использованием индекса ключевых заемщиков, производилось на основе  $\tau$ -коэффициента Кендалла [4] и  $\gamma$ -коэффициента Гудмана и Краскала [5].

В целом, для модели, применяемой к международному рынку заимствований, ранжирования согласно классическим показателям центральности в высокой степени согласуются с ранжированиями по предложенным версиям индекса ключевых заемщиков. Только для центральности по посредничеству коэффициенты корреляции были получены менее 0,4 (Kendall  $\tau$ ) и менее 0,3 ( $\gamma$ -коэффициент). При этом только индекс ключевых заемщиков с учетом длинных цепочек взаимодействий позволяет выявлять системно значимые страны второй группы.

Эмпирические результаты, основанные на предложенной методологии, в целом, можно оценить, как соответствующие выводам, сделанными МВФ и другими МФО, но, кроме того, эти результаты обращают внимание на важность стран, которые из-за их посреднической роли в глобальных финансах, могут иметь большое влияние на стабильность всей системы.

#### Список литературы

1. Aleskerov F.T., Andrievskaya I.K., Permjakova E.E. Key borrowers detected by the intensities of their short-range interactions // Working papers by NRU Higher School of Economics. Series FE "Financial Economics". 2014. No. WP BRP 33/FE/2014.
2. Barrat A., Barthelemy M., Pastor-Satorras R., Vespignani A. The architecture of complex weighted networks // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2004. Vol. 101, Iss. 11. Pp. 3747-3752.
3. Newman M.E.J. Networks: An Introduction. – Oxford. UK: Oxford University Press, 2010.
4. Kendall M. Rank correlation methods. 4th ed. L.: Griffin, 1970
5. Goodman L.A., Kruskal W.H. Measures of Association for Cross Classifications // Journal of the American Statistical Association. 1954. Vol. 49. #268. P.732-764.

### Динамические компромиссы в задаче многоцелевой максимизации функций

О.Б. Байрамов, В.В. Охрименко

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Для прикладных проектов выбора рациональной кредитной политики финансовых организаций [1] характерной задачей является согласование нескольких устремлений инвестора (оперирующей стороны). Рассматривается задача  $f_1(x) \rightarrow \max$ ,  $f_2(x) \rightarrow \max$ ,

$x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subseteq R^n$ . В большом числе прикладных задач аргументы целевых функций являются функциями времени. К сожалению, существующая теория многоцелевых задач не уделяет должного внимания указанному обстоятельству. Общепринятая теория зиждется на двух постулатах – постулате застопоривания и постулате статической определенности.

Согласно постулату застопоривания, из всех возможных и допустимых траекторий  $x(t)$  наиболее предпочтительны траектории вида  $x = x(t) \equiv \text{const}(t)$ . Однако многие задачи прикладных приложений свидетельствуют о неадекватности постулата.

Что касается статической определимости, то даже если мы преднамеренно ограничимся отысканием статических точек оптимума  $x = x(t) \equiv \text{const}(t)$  даже при такой постановке задачи, многоцелевая задача может оказаться статически неопределимой. (Сравните с расчётом равновесия в статически неопределимых задачах механики.)

Приведённые факты говорят о необходимости произвести трансформацию постановок задач в теории многоцелевой оптимизации.

Приступив к изучению динамических траекторий в пространстве инвестиций, мы неизбежно столкнёмся с динамическими компромиссами между целевыми функциями. Прежде чем дать формально-математическое определение динамического компромисса в задаче многоцелевой оптимизации, проиллюстрируем это понятие на наглядных примерах.

**ПРИМЕР 1** Максимизация двух функций одной переменной на числовой оси:  $\{f_1(x) = f_2(-x)\}$ , функции везде положительны.

Положим, что обе функции имеют локальные максимумы в начале координат, а также по глобальному максимуму в точках  $-a$  и  $+a$  соответственно. Пусть вне малых окрестностей указанных трёх точек значения функций будут близки к нулю.

Здесь возможны два варианта оптимального поведения лица, принимающего решения:

1.  $x(t) = 0$  тождественно (статический компромисс)

2. Периодическое движение с периодом  $T$  из точки  $-a$  в точку  $+a$  и обратно.

Период, как и все остальные атрибуты движения, определяются заданием уравнений и неравенств динамики (динамический компромисс).

Может оказаться, что среднее значение целевых функций за период будет больше, чем при статическом компромиссе.

Предположим, что в задаче имеется единственное ограничение на динамику  $|\dot{x}| \leq c$ .

Тогда при  $c \rightarrow \infty$  выгодным становится динамический компромисс, а при  $c \rightarrow 0$  статический.

Дадим теперь формально-математическое определение динамического компромисса. Пусть решением поставленной многоцелевой задачи занимается оперирующая сторона, принимающая решения. Вместе с исследователем операции оперирующая сторона осуществляют поиск, утверждение и реализацию оптимальных решений. Если предположить, что данный процесс является физическим процессом, то из сказанного следует, что, как и все остальные физические процессы, данный процесс должен описываться некой системой дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений, известных нам или неизвестных. Назовём динамическим компромиссом задачи любой аттрактор этой системы в допустимом множестве  $X$ , не являющийся точкой покоя. Точка покоя представляет собой статический компромисс. Примерами аттракторов динамических компромиссов могут служить предельные циклы, предельные торы и «странные аттракторы», в окрестности которых система ведёт себя псевдослучайным образом.

(В современной теории дифференциальных уравнений аттракторами называют компактные притягивающие множества для интегральных траекторий в фазовом пространстве. Соответственно, компактные отталкивающие множества называют репеллерами.)

Докладываемая работа является дальнейшим развитием идей Вито Вольтерра [2] о неинтегрируемости отношений предпочтения. В [3] отмечено, что даже когда индивидуальные отношения предпочтения у партнёров интегрируемы, их групповое отношение предпочтения может оказаться неинтегрируемым.

### Список литературы

1. Байрамов О.Б., Сытов А.Н. Численные исследования одной модели коалиции заемщиков // Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН). Динамика неоднородных систем. 2007. Том 31. Номер 1. Стр. 241-253.
2. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М., Наука, 1976, 286 с.
3. Охрименко В.В. Простая модель экономической динамики со спекуляциями - М.: ВЦ РАН, 2002. 24с

# Выделение аддитивных составляющих временных рядов на основе метода SSA

Ант. В. Вахранев

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

Инвесторов на бирже можно охарактеризовать их инвестиционным горизонтом. Перед инвесторами с разными горизонтами возникают разные задачи: выявление тренда и сезонных или циклических составляющих в информации, поступающей от рынка.

Пусть  $F_N = \{f_t\}_{t=1}^N$  временной ряд, характеризующий цену актива, которая изменялась в течение некоторого времени  $[1, N]$ . Из предположения о наличии инвесторов с разными инвестиционными горизонтами возникает желание выделить аддитивные составляющие, характеризующие влияние той или иной группы инвесторов. Другими словами представить исходный временной ряд в виде  $F_N = T_N + S_N + E_N$ , где  $T_N, S_N, E_N$  – трендовая, периодическая и шумовая составляющие соответственно.

Существует два основных подхода: параметрический и непараметрический. Параметрический подход предполагает наличие некоторого дополнительного знания о структуре или о модели данных. Менее требовательным является непараметрический подход.

Одним из методов непараметрического подхода является метод Singular Spectrum Analysis (SSA). В его основе лежит трансформация ряда в матрицу и ее сингулярное разложение. После идентификации компонент сингулярного разложения происходит их группировка, приводящая к разложению исходного ряда на аддитивные компоненты, такие как тренд, колебания (периодики) и шум. Достоинством метода SSA является отсутствие требования априорного знания модели ряда, но при этом сравнение этого метода с «модельными» методами показывает хорошие результаты. Ссылки на основную литературу по методу SSA можно найти в работах [1, 2, 3]. Опишем базовый алгоритм SSA. Рассмотрим вещественный временной ряд  $F_N = \{f_t\}_{t=1}^N$  длины  $N, N > 2$ .

Алгоритм можно разбить на два шага: первый называется разложением, второй – восстановлением. Основным параметром алгоритма служит так называемая длина окна  $L, 1 < L < N$ . Результатом алгоритма является разбиение временного ряда на аддитивные составляющие.

**Разложение.** Первый шаг, вложение, состоит в формировании из ряда траекторной матрицы  $X$  размером  $L \times K$ ,  $K = N - L + 1$  следующим образом. Будем последовательно брать из ряда отрезки длины  $L$  и составим из них траекторную матрицу  $X = [X_1 : \dots : X_K]$ , где  $X_j = (f_{j-1}, \dots, f_{j+L-2})^T$ . Далее проводится сингулярное разложение матрицы  $X$ :  $X = X_1 + \dots + X_d$ ,  $X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ , где  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d > 0$  – упорядоченные ненулевые собственные числа матрицы  $XX^T$

$$\{U_i\}_{i=1}^d : U_i \in \square^{L-1} \text{ – соответствующие им собственные вектора, а}$$

$$\{V_i\}_{i=1}^d : V_i = \sqrt{\lambda_i} X^T U_i \in \square^K$$

будем называть факторными векторами.

**Восстановление.** На третьем шаге проводится группировка компонент разложения. Разбив

$\{1, \dots, d\}$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $I_j$  получим  $X = X_{I_1} + X_{I_2} + \dots + X_{I_m}$ ,  $X_{I_j} = \sum_{k \in I_j} X_k$ . Последним шагом является восстановление рядов  $F_N^{(j)}$  по

сгруппированным матрицам  $X_{I_j}$ . Элемент ряда  $f_n^{(j)}$  получается с помощью усреднения вдоль антидиагонали элементов матрицы  $X_{I_j}$  с индексами  $a$  и  $b$  такими, что  $a+b = n+2$ .

Таким образом, получаем разбиение ряда  $F_N = F_N^{(1)} + \dots + F_N^{(m)}$ .

Развитие получили методы автоматической идентификации компонент, основанные на разложении векторов из собственных троек в ряд Фурье [3]. Эти методы позволяют оценить

для  $U_i$  вклад гармоник с частотами  $\{k/L\}_{k=0}^{\lfloor L/2 \rfloor}$ . Будем считать, что  $U_i$  является трендом, если в его разложении преобладают гармоники с низкими частотами. Методы позволяют соотнести  $U_i$ , относящихся к экспоненциально модулируемой гармонической составляющей ряда  $F_N = \{f_t\}_{t=1}^N$ , к некоторой частоте  $w_i$ .

При помощи методов SSA проводилось исследование эффектов изменения частоты принятия решений на ряде данных из торговли фьючерсом на индекс РТС. Исходный ряд данных раскладывался на составляющие. После оценки вклада каждой компоненты, были выбраны 50 наиболее значимых. После этого проводилась автоматическая идентификация выбранных компонент. Для компонент, относящихся к экспоненциально модулируемой гармонической составляющей ряда, были определены частоты  $w$  из  $\{k/L\}_{k=0}^{\lfloor L/2 \rfloor}$ , где  $L$  – размер окна в методе SSA. Эти частоты рассматривались при дальнейшей работе с временным рядом, что позволило сократить объем работы при исследовании.

Условия, при которых такое разложение и выделение возможно, а также принципы и теоретические постулаты, на которые опирается идентификация, описаны в работах [1,2, 3].

#### Список литературы

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. 305 p.
2. Голяндина Н.Э. Метод "Гусеница"-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. 76 с.
3. Н.Голяндина, Е.Осипов Метод "Гусеница"-SSA для анализа временных рядов с пропусками. В сб. Математические модели. Теория и приложения, СПб, изд-во НИИХ, 2005.

### Задача прогноза панических трендов

И.И. Гасанов, Ф.И. Ерешко  
ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Помимо устойчивых долговременных ценовых трендов, имеющих под собой объективную экономическую основу, рынку присущи резкие изменения цен. Их причиной может быть переоцененная или не вполне достоверная информация, а также, прямое манипулирование рыночными настроениями. Но зачастую эти факторы служат лишь пусковым механизмом для перехода рынка в новое состояние, более соответствующее экономическим реалиям. Подобные тренды запускают на рынке положительную обратную связь и поэтому содержат элементы паники. Независимо от направления тренда будем так их и называть – паническими. Представляет понятный интерес возможность прогноза панических трендов.

Наблюдения за динамикой биржевых котировок дают основания предположить, что у интегрального панического тренда (тренда биржевого индекса) есть предвестники в виде панических трендов котировок отдельных бумаг. Если бы удалось построить алгоритм, который выявляет эти частные тренды, то, возможно, удалось бы сконструировать и признак, позволяющий с определённой достоверностью предвидеть панические движения рынка в целом.

Мы не ставим цель сопоставить изложенным выше интуитивным соображениям чёткую, однозначную математическую конструкцию. Предлагаемый алгоритм распознавания трендов носит эвристический характер. Было бы достижением, если бы с его помощью удавалось определить большую часть событий, которые исследователь склонен идентифицировать как панические тренды. В алгоритме должны быть учтены такие интуитивные представления о панических трендах, как значительная скорость изменения цены и значительное итоговое её изменение за период тренда.

Исследуются цены биржевого товара на некотором промежутке времени. Они представлены последовательностью значений через равные промежутки времени, пронумерованные  $[1, N]$ . Зафиксируем значения следующих величин:  $d > 1$  – некоторый порог изменения цены за текущий отрезок времени  $[t, t + 1]$ , по которому разделяются отрезки с низким и высоким темпом изменения цен;  $\tau$  – промежуток времени, по поведению цен на котором исследователь судит о характере тренда. Для удобства изложения будем рассматривать только тренды панического роста цен. Случай панического падения цен рассматривается аналогично с точностью до симметрии.

Обозначим через  $\Theta$  – множество точек  $t \in [1, N]$ , для которых соотношение цен  $c_{t+1} / c_t \geq d$ .

Назовем промежуток времени  $[t_1, t_2]$  отрезком панического роста цен, если для него выполнены следующие условия.

а)  $t_1 \in \Theta$ ; если  $t_2 \neq N$ , то  $t_2 \in \Theta$ .

б) Существует такое разбиение  $s_1, s_2, \dots, s_m$  отрезка  $[t_1, t_2]$ , при котором  $s_1 = t_1, s_m = t_2$  и  $c_{s_{i+1}} / c_{s_i} \geq d^{(s_{i+1} - s_i)} \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

в)  $c_{t_2} / c_{t_1} \geq d^\tau$ .

Алгоритм выделения так определённых трендов может быть реализован по следующей схеме.

Создаем список точек, принадлежащих множеству  $\Theta \cup N$ . Для этих точек по следующей формуле рассчитываем приведённые цены:

$$C_t = d^{1-t} \cdot c_t.$$

Определяем точку  $t = 1$  как точку  $s_1$ .

**Шаг 1.** Пусть  $Q_1 = \min_{t \in \Theta} (C_t | C_t \geq C_{s_1})$  на отрезке  $[s_1, s_1 + \tau]$ . Выбираем последнюю на этом отрезке точку из  $\Theta \cup N$  со значением  $C_t = Q_1$ . Обозначаем её  $s_2$ . Если точки  $s_2$  не существует, то переходим к шагу 3.

**Шаг 2.** На отрезке  $[s_2, s_2 + \tau]$  ищем  $Q_2 = \min_{t \in \Theta} (C_t | C_t \geq C_{s_2})$ . Выбираем последнюю на этом отрезке точку из  $\Theta \cup N$  со значением  $C_t = Q_2$ . Обозначаем её  $s_3$ . Если точки  $s_3$  не существует, то переходим к шагу 3. И т.д. до точки  $N$ .

**Шаг 3.** Пусть последняя точка, найденная на шагах 1–3 имеет номер  $s_m$ . Если  $c_{s_m} / c_{s_1} \geq d^\tau$ , то отрезок  $[s_1, s_m]$  заносим в список панических трендов. Если  $s_m \neq N$ , то переходим к шагу 4, иначе поиск закончен.

**Шаг 4.** Обозначаем точку  $s_m + 1$  через  $s_1$  и повторяем шаги 1–3. И так далее, пока не исчерпаем отрезок  $[1, N]$ .

Так как поведение котировок разных биржевых товаров отличается для каждой из представляющих интерес бумаг, требуется на историческом материале подобрать для каждой из них свои значения  $d$  и  $\tau$ . После этого можно пытаться строить признаки предстоящих глобальных панических трендов в виде различных свёрток от числа частных панических трендов, выделяемых алгоритмом, за некоторый промежуток времени, предшествующий прогнозу.

#### Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций, М., Наука, 1971,– 384 с.

## Биржевые игры роботов

М.А. Горелов

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

Рассмотрим игру, в которой участвуют три компьютера. Обозначим их  $M, T_1$  и  $T_2$ . Для простоты будем считать, что они работают по принципу машины Тьюринга. Каждый из компьютеров имеет свою собственную рабочую ленту, на которую он может печатать либо 0, либо 1. Будем считать, что ленты бесконечны в обе стороны и разбиты на ячейки. Предположим, что ленты расположены параллельно и «синхронизированы» так, что каждой ячейке ленты одного компьютера соответствуют ровно по одной ячейке на лентах других компьютеров.

Компьютер  $M$  может находиться в одном из  $m$  внутренних состояний и наблюдать состояние  $l$  ячеек, находящихся непосредственно слева от его головки на его собственной

рабочей ленте. В зависимости от этой информации он на очередном шаге печатает 0 или 1 на своей ленте, переходит в новое состояние и сдвигает головку на одну ячейку вправо. Работа компьютера определяется программой, которую можно отождествить с функцией  $a: \{1, 2, \dots, m\} \times \{0, 1\}^l \rightarrow \{0, 1\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ .

Компьютер  $T_1$  может находиться в одном из  $p$  внутренних состояний и наблюдать состояние  $q$  ячеек, находящихся слева от его головки на всех трех рабочих лентах. Один такт его работы состоит в том, что он печатает 0 или 1 в текущей ячейке своей рабочей ленты, переходит в новое состояние и сдвигает рабочую головку на одну ячейку вправо. Его программе соответствует функция  $b: \{1, 2, \dots, p\} \times \{0, 1\}^{3q} \rightarrow \{0, 1\} \times \{1, 2, \dots, p\}$ .

Компьютер  $T_2$  отличается от компьютера  $T_1$  только количеством внутренних состояний  $r$  и числом наблюдаемых ячеек  $s$ . Соответственно его программа задается функцией  $c: \{1, 2, \dots, r\} \times \{0, 1\}^{3s} \rightarrow \{0, 1\} \times \{1, 2, \dots, r\}$ .

В начальный момент времени головки компьютеров расположены напротив соответствующих друг другу ячеек, внутренние состояния компьютеров заданы, все ячейки слева от головок заполнены символами 0 или 1, а остальные ячейки пусты.

В ходе игры компьютеры  $T_1$  и  $T_2$  получают выигрыши, определяющиеся следующим образом. Если в данный момент эти компьютеры напечатали одинаковые символы, то их выигрыши равняются нулю. Если же они напечатали разные символы, то тот из них, кто напечатал символ, совпадающий с символом, напечатанным компьютером  $M$ , получает выигрыш 1, а второй – выигрыш  $-1$ . В ходе игры выигрыши накапливаются.

Описанную модель можно интерпретировать следующим образом. Компьютер  $M$  описывает динамику рынка: единица соответствует росту котировок, а ноль – падению. Компьютеры  $T_1$  и  $T_2$  – трейдеры, торгующие на рынке. Единица, напечатанная трейдером, соответствует заявке на покупку, а ноль – подаче заявки на продажу. Если оба трейдера подали заявку на покупку (или оба – заявку на продажу), то сделки не состоится. В противном случае заключается сделка, от которой выигрывает тот, кто правильно угадал тенденцию рынка.

Параметры  $m$  и  $l$  описывают сложность динамики рынка. Соответственно, параметры  $p$  и  $q$  ( $r$  и  $s$ ) описывают сложность поведения трейдера  $T_1$  ( $T_2$ ). Программы  $b$  и  $c$  можно рассматривать как стратегии хозяев компьютеров  $T_1$  и  $T_2$ .

Представляется, что, несмотря на простоту, построенная модель верно описывает некоторые качественные особенности функционирования современных финансовых рынков, на которых торгуют роботы. Впрочем, в данную схему довольно легко вписывается и поведение «живого» трейдера, пользующегося методами технического анализа. Кроме того, имеются исследования, показывающие, что и в общем случае поведение игрока в подобных играх не очень сложно. Поэтому и его можно «втиснуть» в рамки данной модели.

Наиболее существенным в данном случае представляется явное описание сложности поведения игроков в рамках рассматриваемой модели.

Некоторые результаты, относящиеся к моделям рассматриваемого типа, можно найти в [1]. В терминах данной модели они могут интерпретироваться следующим образом.

Если сложность компьютера  $T_1$  значительно выше сложности компьютера  $M$ , то существует программа  $b$ , гарантирующая игроку  $T_1$  получение «ничейного» выигрыша независимо от начальных условий и действий компьютера  $T_2$ . «Ничейность» в данном контексте можно формализовать двумя способами: либо как ограниченность снизу суммарного выигрыша игрока при неограниченном числе шагов, либо как неотрицательность выигрышей во все моменты времени, начиная с некоторого.

Если сложность динамики рынка выше сложности компьютера  $T_2$ , а сложность компьютера  $T_1$  значительно выше сложности компьютера  $M$ , то существует программа  $b$ , при которой суммарный выигрыш компьютера  $T_1$  стремится к  $+\infty$  при росте числа шагов.

Если сложность компьютера  $M$  значительно выше сложностей компьютеров  $T_1$  и  $T_2$ , то существует программа  $a$ , при которой суммарные выигрыши игроков  $T_1$  и  $T_2$  остаются ограниченными, независимо от выбора программ  $b$  и  $c$ .

Приведенные результаты понятны и довольно естественны. Их можно рассматривать как некий довод в пользу адекватности рассматриваемой модели.

Последний из сформулированных результатов можно трактовать следующим образом. Можно считать, что сложная программа  $a$  генерирует псевдослучайные числа. Естественно, что в этом случае в игре получается ничья.

Наверное, более содержательная модель получится, если к регулярной динамике рынка добавить случайный шум. Это можно сделать следующим образом.

Фиксируем случайную последовательность  $\alpha_t$ . Будем считать, что на шаге  $t$  выигрывает не тот компьютер, который лучше угадал напечатанным компьютером  $M$  символ  $\beta_t$ , как выше, а тот, кто лучше угадал сумму  $\alpha_t + \beta_t$  по модулю 2.

В данном случае получается более сложная, но, возможно, и более содержательная математика.

### Список литературы

1. Горелов М.А. Три этюда о повторяющихся играх. // Управление большими системами. Вып. 20. М.: ИПУ РАН. 2008. С. 5–20.

## Приближение сингулярно возмущённых СДУ

В.В. Дикусар, А.Ф. Ерешко  
 ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Метод Монте-Карло весьма эффективно используется в задачах финансовой инженерии [1]. При его реализации в качестве базового уравнения для описания случайных финансовых переменных  $x(t)$ , таких как цены активов, процентные ставки, деривативы принимаются соответствующие стохастические дифференциальные уравнения (СДУ). В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) которые имеют единственное решение при надлежащих условиях на правые части и фиксированном начальном условии, СДУ имеют решением стохастические процессы в непрерывном времени

. Для регулярных случаев, когда уравнение имеет вид  $dx = a(t, x)dt + b(t, x)dw$ , где  $dw$  нормально распределённая случайная величина со средним значением ноль и дисперсией  $dt$ ,  $x(t)$ -случайный процесс,  $x(0) = x_0$ -начальная точка процесса, постоянная, функции  $a(t, x)$  (снос) и  $b(t, x)$  (диффузии) удовлетворяют определённым надлежащим условиям регулярности, решение СДУ существует. В этих случаях предложены методы построения конечно-разностных приближений для решений СДУ, что позволяет построить алгоритмы, используемые для моделирования по методу Монте-Карло.

В регулярном случае конечно-разностное приближение имеет следующий вид, что рассматривается как применение явного метода Эйлера:

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = a(t_n, x(t_n))h_n + b(t_n, x(t_n))\Delta w(t_n)$$

$$\Delta w(t_n) = v_n \cdot \sqrt{h_n}, v_n \sim N[0,1]$$

Однако возможны нерегулярные случаи, когда финансовые системы сильно волатильны, и исследование финансовой операции имеет дело с сингулярно возмущённым СДУ.

В этом случае возникает стохастическое дифференциальное уравнение с малым параметром при дифференциале.

$$\varepsilon \cdot dx = a(t, x)dt + b(t, x)dw, \varepsilon - \text{малый параметр, } w - \text{винеровский процесс.}$$

Предлагается процедура расширения границ применения дискретных схем путём применения неявного метода Эйлера.

Определим вспомогательную функцию  $\varepsilon \cdot dz = -\alpha \cdot z \cdot dt$ , где  $\alpha > 0$  имеет смысл управляющего параметра.

Вспользуемся неявным методом Эйлера:

$$\varepsilon \cdot z(t_{n+1}) = \varepsilon \cdot z(t_n) - \alpha \cdot z(t_{n+1}) \cdot h_n, \text{ где } h_n \text{ шаг интегрирования.}$$

Отсюда

$$z(t_{n+1}) = \frac{\varepsilon \cdot z(t_n)}{\varepsilon + \alpha \cdot h_n}$$

Из вышеприведенных соотношений следует

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a(t, x)}{-\alpha \cdot z} + \frac{b(t, x)}{-\alpha \cdot z} \frac{dw}{dt}$$

тогда

$$\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{z(t_{n+1}) - z(t_n)} = \frac{a(t_n, x(t_n))}{-\alpha \cdot z(t_n)} + \frac{b(t_n, x(t_n))}{-\alpha \cdot z(t_n)} \frac{\Delta w(t_n)}{h_n},$$

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \frac{z(t_{n+1}) - z(t_n)}{-z(t_n)} \left( \frac{a(t_n, x(t_n))}{-\alpha} + \frac{b(t_n, x(t_n))}{-\alpha} \frac{\Delta w(t_n)}{h_n} \right)$$

Окончательно получаем конечно-разностную схему

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \frac{-\alpha \cdot h_n}{\varepsilon + \alpha \cdot h_n} \left( \frac{a(t_n, x(t_n))}{-\alpha} + \frac{b(t_n, x(t_n))}{-\alpha} \frac{\Delta w(t_n)}{h_n} \right)$$

$$= a(t_n, x(t_n)) \frac{h_n}{\varepsilon + \alpha \cdot h_n} + b(t_n, x(t_n)) \frac{\Delta w(t_n)}{\varepsilon + \alpha \cdot h_n}$$

$$x(0) = x_0, \quad z(0) = z_0$$

Далее возможно применение стандартной процедуры Монте-Карло.

### Список литературы

1. Люу Ю-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики/ Ю-Д. Люу; Пер.с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.: ил (**Yuh-Dauh Lyuu, *Financial Engineering & Computation: Principles, Mathematics, Algorithms, Cambridge University Press, 2002*** <http://www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/Capitals/capitals.htm>)
2. Ерешко А.Ф., Филатова Д.В. Анализ явных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. Том 32. 2 М.: КомКнига. 2008. С 222-240.
3. Ерешко А.Ф., Филатова Д.В. Численные методы решения жёстких систем стохастических дифференциальных уравнений. Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем. Том 32.2 , М.: КомКнига. 2008. С 370-377

## К организации алгоритмической торговли

Ант. Ерешко

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Вся деятельность участников финансового рынка в высокой степени автоматизирована. Современные информационные банковские и финансовые системы, обеспечивающие деятельность участников рынка, должны не только надежно обслуживать огромное количество транзакций, хранить и передавать по сетям большие объемы данных, но и обеспечивать банкам и финансовым организациям преимущества, достигаемые в конкурентной борьбе за счет использования самых последних инновационных технологий в различных областях: разработка программного обеспечения, вычислительные средства, системы хранения данных, средства защиты информации, телекоммуникации, искусственный интеллект и многие другие инновационные технологии. В развитие и поддержку IT-инфраструктуры финансовые организации вкладывают значительные средства.

Проблема построения программно-аппаратных систем эффективно решающих задачи финансовой индустрии продолжает быть актуальной, и постоянно видоизменяется с появлением новых возможностей информационно-коммуникационных технологий.

Одной из последних тенденций в рамках развития аппаратно-вычислительных комплексов на стороне торговых площадок является создание равноправных механизмов обеспечения обработки транзакций и распространения рыночной информации.

Высокочастотные алгоритмические системы оперируют микросекундными масштабами времени, конкуренция за которые достигается использованием максимально быстрого оборудования. Такое оборудование устанавливается в зоне торгового ядра, для быстрого

получения и обработки данных и, как результат, реакции на нее в виде рыночных приказов.

До последнего времени, существовала проблема, при которой 2 разных участника (быстрый, быстрый но медленнее первого), посылая одновременно торговый приказ, не имели возможности заранее точно знать чей приказ будет обработан торговой системой первой, основываясь только на том, у кого быстрее оборудование. Точнее сказать, самый быстрый мог быть не всегда первым при прочих равных. Проблема заключается в механизмах приема и обработки транзакций, а также распространение рыночных данных, как триггера любых клиентских приказов.

Стандартной реализацией «точек входа», является, так называемые, шлюзы приема клиентских транзакций, основной задачей которых состоит в назначении номера транзакции в общем пуле транзакций, ждущих обработки ядром торговой системы. В ситуации, когда один шлюз обрабатывает клиентов больше чем другой, может возникнуть случай при котором быстрый клиент обрабатывается медленным шлюзом, что нивелирует быстроту его оборудования, и как следствие возникает вероятность проигрыша более медленному участнику, обрабатываемого более быстрым шлюзом.

Согласно последней статистики «Московской Биржи» от 2016 года, в моменты пиковой активности количество транзакций достигало 300 000 приказов в секунду.

Нововведение Чикагской Биржи (CME) заключается в использование одной единственной «точки входа» клиентских заявок. Достигается это с помощью технологии FPGA (**field-programmable gate array**), основным преимуществом которой является аппаратная реализация логики принятия решений о назначении номеров последовательности обработки приказов. Данное решение обосновано прозрачностью исключительно высокой производительностью, по сравнению с предшествующими вариантами, поскольку логика обработки приказа работает не в связке сетевое устройство -> процессор -> программное приложение, а непосредственно сетевое устройство -> fpga модуль, тем самым минуя процессор, который обязан выполнять задачи всего программного обеспечения, работающего в данной системе. Как следствие данной реализации, заведомо быстрые клиенты всегда окажутся быстрее медленных при прочих равных условиях.

Высокочастотные методы торговли предъявляют все более жесткие требования к технической реализации торгов тем самым увеличивая прозрачность и эффективность сделок.

#### Список литературы

1. Jonathan Ahlstedt, Johan Villysson High Frequency Trading December 1, WP, 2012.
2. RossKA, MathiassonN, FitzgibbonW. Robotwars: How highfrequencytrading changed global markets. The Bureau of Investigative Journalism. 2012; Article written September 16, 2012. Acquired November
3. Irene Aldridge High-Frequency Trading A Practical Guide to Algorithmic Strategies and Trading Systems, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010.
4. Marco Avellaneda , Algorithmic and High-frequency trading: an overview. New York University & Finance Concepts LLC , Quant Congress USA 2011
5. Greg N. Gregoria The Handbook of HIGH FREQUENCY TRADING, State University of New York (Plattsburgh) Academic Press of Elsevier. 2015
6. <https://www.cmegroup.com/globex/files/NewiLinkArchitecture2014.pdf>

## Исследование финансовых операций

Ф.И. Ерешко

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

Финансовые операции представляют собой один из ярких примеров человеческой деятельности, породивших общую теорию исследования операций. Наши знания о развитии финансовых операций ранее были весьма ограничены, да и направление исследования операций на Западе в те времена было тоже ориентировано скорее на военные приложения. Все западные книги, переведенные у нас в 50-е годы по тематике исследования операций, касались, в основном, планирования производства, оптимального распределения ресурсов, определения направлений военных ударов и вообще военных действий. Достаточно привести в качестве примера энциклопедическую книгу С. Карлина [1], где из 838 стр. модели Г. Марковица была уделена лишь одна страница, как образцу постановки многокритериальной задачи. Хотя модели Эрроу-Дебре уделено достаточно места.

Принимаем следующие определения.

При использовании выражения финансовые операции термин операция понимаем как «совокупность целенаправленных действий» в соответствии с установками и терминологией Гермейера Ю.Б. [2]

Далее приведем выдержку из базового финансового учебника и характерную для финансовых публикаций. [3].

«Если отвлечься от многочисленных конкретных форм, в которых протекают финансовые процессы, можно увидеть то общее, что их объединяет – лежащие в основе **финансовых операций** отношения между различными участниками общественного производства...Своеобразие отношений, составляющих содержание финансов как экономической категории, заключается в том, что они всегда имеют денежную форму выражения».

Деньги, как язык рынка, имеют стандартное определение, - «это средство оплаты товаров и услуг, средство измерения стоимости, а также средство сохранения стоимости».

Кругооборот денег в экономике соответствует в силу обменов кругообороту товаров и услуг. [4].

60-70 годы XX века ознаменовались бурным развитием финансовой аналитической теории, были сформулированы и доказаны основные теоремы финансового рынка [5,6].

Следующее базовое понятие – финансовые инструменты – связано с активным развитием прикладной части теории финансов: финансовой инженерии.

К концу 80-е годов финансовая наука стала превращаться из аналитической в инженерную. По общему мнению понятие "финансовый инженер" было введено в середине 80-х гг. лондонскими банками, которые приступили к созданию отделов по управлению рисками [7]. Прежде всего приведём определение Дж. Финнерти из [7]. "Финансовая инженерия включает в себя проектирование, разработку и реализацию инновационных финансовых инструментов и процессов, а также творческий поиск новых подходов к решению проблем в области финансов". В книге [7] содержится также классификационная таблица Финнерти для финансовых инструментов.

Финансовые инструменты являются по смыслу контрактами между экономическими агентами, и в физическом выражении представляются соответствующими документами. К широкому перечню финансовых инструментов относятся первичные инструменты (наличные и безналичные денежные средства, акции и облигации) и производные (деривативы): форварды, фьючерсы, опционы, свопы и различные их вариации, отражающие взаимоотношения участников рынка.

Если использовать по аналогии с термином Проектная экономика выражение Проектные финансы, то – это финансовая инженерия.

Глубокая системность подхода в финансовой инженерии соответствует предшествующему опыту работы отечественных системных аналитиков, занимавшихся теорией игр, исследованием операций, проблемами принятия решений и автоматизации проектирования (будь то проектирование космических и оборонных систем или реформирование социально-экономических комплексов). Рождение и развитие финансовой инженерии происходило параллельно с развитием информационных технологий, появлением новых математических моделей в сфере экономики и разработкой совершенных вычислительных методов. Как неоднократно подчеркивается в литературе, команда финансовых инженеров состоит из экономистов, финансистов, юристов, бухгалтеров, специалистов в области налогообложения, математического моделирования и программирования и т.д. имеющих широкое системное образование и широкий кругозор. Системные аналитики, вооруженные технологиями математического моделирования и информационными технологиями, теории принятия решений, теории игр, теории исследования операций (в военной сфере, в рациональном использовании ресурсов, в проектировании физико-технических систем и т.д.), конечно, занимают особое место в команде.

Самый существенный эффект от участия специалистов системного профиля состоит в том, что разработанное математическое обеспечение позволяет проводить массовые расчеты для различных сценариев развития и различных финансовых схем.

По сути своей финансовые схемы и процессы являются финансовыми операциями, т.е. последовательностью действий экономических агентов, направленных на достижение определенных финансовых целей. Комбинируя различными способами концептуальные средства (лежащие в основе финансов как формальной дисциплины) и физические средства (финансовые инструменты и процессы) команда финансовых инженеров способна вырабатывать проектные решения для обширного набора клиентских задач. Специфика моделирования финансовых операций состоит в том, что необходимо учитывать теоретико-игровую суть каждого финансового инструмента, и в описании обстановки финансовой

операции непременно присутствует несколько оперирующих сторон со своими интересами и множествами стратегий. Информированность игроков является определяющим элементом описания и выбора стратегии оперирующей стороны.

Исходные обстоятельства, проявившиеся на мировых финансовых и товарных рынках и вызвавшие к жизни новую науку – практическую дисциплину, связаны с повышением изменчивости валютных курсов, процентных ставок и товарных цен, глобализацией рынков и усилением конкуренции одновременно в промышленном и финансовом секторах. В России спектр задач финансовой инженерии захватывает также и сферы специфических задач, возникшие на фоне трансформации прав собственности и возникновения разнообразных видов обмена долговыми обязательствами, торговли ценными бумагами в современный период становления новой экономики.

Современное состояние в финансовой инженерии широко и полно представлено в книге Люу [8].

В выступлениях сотрудников Отдела ИВС ВЦ РАН ФИЦ ИУ РАН будут приведены примеры решения разнообразных задач, относящихся к сфере **финансовой инженерии**.

#### Список литературы

1. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., 1964, – 838 с.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций, М., Наука, 1971, – 384 с.
3. Финансы/ В.М. Родионова, Ю.Я. Вавилов, Л.И. Гончаренко и др.; Под ред. В.И. Родионовой.- М.: Финансы и статистика, 1993. - 400 с.: ил.
4. Долан Эдвин. Дж., Кэмпбелл Колин Д., Кэмпбелл Розмари Дж/ Деньги, банковское дело и денежно-кредитная политика/Пер с англ. В.Лукашевича и др.; Под общ.ред. В.Лукашевича. – Л., 1991. – 448 с.
5. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчёт и риск. – М.:Инфра-М, 1994 г. – 192 с.
6. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. ИНВЕСТИЦИИ: Пер.с англ. – М.: ИНФРА-М, 1998. – XII, 1028 с.
7. Маршалл Джон Ф., Бансал Випул К. Финансовая инженерия: Полное руководство по финансовым нововведениям: Пер с англ. – М.:ИНФРА-М, 1998. – 784 с.
8. Люу Ю-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики/ Ю-Д. Люу; Пер.с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.: ил (**Yuh-Dauh Lyuu, *Financial Engineering & Computation: Principles, Mathematics, Algorithms, Cambridge University Press, 2002*** <http://www.csie.ntu.edu.tw/~lyuu/Capitals/capitals.htm>)

## Операционное игровое представление базовых финансовых операций

Ф.И. Ерешко, В.В. Шевченко

*Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

В рамках оригинального направления теории игр – операционного игрового сценарного моделирования [1, 2] основные понятия производственно-экономической практики и бухгалтерского учёта (счёт, проводка, хозяйственный факт, хозяйственная операция, обязательство) обретают математически точные определения и экономические процессы описываются в виде изменения оборотов и сальдо счетов их участников (агентов, игроков) в результате совершения ими в каждый момент времени определённых операций. При этом под операцией  $op_{\beta}$  операционной игры понимается совокупность:

- подмножества множества игроков  $ЛПП_{\beta} \subseteq I$ , участвующих в принятии решений по проведению данной операции;

- подмножества множества проводок игры  $PR^{\beta} \subseteq PR$ , которые реализуются при проведении операции;

- детерминированной функции (алгоритма) свертки данной операции  $f_{\beta}^t(CNT^t, u_{\beta}^t, \alpha^t, t)$ , определяющей зависимость значения векторной переменной  $v$  в момент  $t$  времени от динамики оборотов и сальдо счетов  $CNT^t$ , совместного выбора

входящих в  $ЛПР_\beta$  игроков  $u_\beta^t$  и реализации неопределенного фактора  $\alpha^t$  до момента проведения операции и самого значения этого момента  $t$ .

Представленное весьма общее определение одномоментной операции (являющееся по сути формальным определением понятия «хозяйственный факт») позволяет достаточно гибко описывать реальные хозяйственные операции в виде разворачивающихся во времени совокупностей операций операционной игры. Действительно, в соответствии с приведенным определением операции её участники (игроки из  $ЛПР_\beta$ ) в соответствии с некоторым формализуемым функцией свёртки статическим игровым взаимодействием самого общего вида формируют вектор  $v$ , от значения которого зависят суммы связанных с данной операцией проводок. Проводки проводятся и вносят свой вклад в обороты и изменение сальдо счетов. Произвольно формируемая последовательность таких статических игр является адекватным инструментом описания сколь угодно сложных локальных производственно-экономических процессов.

При монетарном описании экономических процессов на языке финансовых потоков (cash flow) и хозяйственные факты и хозяйственные операции представляются в виде связанных с ними финансовых изменений, движений по счетам в денежно-стоимостном выражении. Такие движения вполне естественно и органично формализуются в виде одной или нескольких операций операционной игры. В случае, если формализуемый бизнес-процесс разворачивается в пределах такта времени операционной игры – он представляется в виде одной операции, в противном случае – в виде нескольких.

Операции купли-продажи (поставки) продукции и услуг в простейшем случае описываются в виде одной операции с двумя участниками, вектор  $v$  которой имеет две компоненты, цена и объём, множество проводок по счетам обеих участников состоит из одной проводки с суммой, равной произведению цены на объём, по счетам продавца (поставщика) и одной проводки с той же суммой по счетам покупателя (заказчика). У покупателя (заказчика) данная сумма проводится по дебету активного счёта, учитывающего соответствующую продукцию или услугу, и по кредиту активного счёта денежных средств (наличных или безналичных) либо иных ценных бумаг, которыми осуществляется расчёт. У продавца (поставщика) – наоборот (по кредиту и дебету тех же счетов). При этом процесс формирования участниками значений компонент вектора  $v$  (объёма и цены) (процесс торга) может описываться в виде функции свёртки операции сколь угодно сложными игровыми процедурами. При необходимости рассматриваемый процесс купли-продажи (поставки) описывается в виде последовательности таких операций с учётом транспортных, посреднических и иных составляющих этого процесса.

Кредитные взаимодействия кредитора и заёмщика в агрегированном виде взаимосвязанных последовательностей операций предоставления заёмных средств (сумма проводится по дебету активного счёта денежных средств или иных ценных бумаг либо товарных ценностей заёмщика, по кредиту такого же счёта кредитора, по кредиту счёта кредиторской задолженности заёмщика, по дебету счёта дебиторской задолженности кредитора), возврата заёмных средств, оплаты процентов, оплаты возможных штрафных санкций. Согласование сумм, процентов, штрафных санкций, возможной реструктуризации также может описываться сколь угодно сложными игровыми процедурами.

Процессы инвестирования агрегировано представляются в виде взаимосвязанных последовательностей операций предоставления инвестиций (сумма проводится по дебету активного счёта денежных средств или иных ценных бумаг либо товарных ценностей инвестируемого, по кредиту такого же счёта инвестора, по кредиту счёта дополнительного капитала инвестируемого, по дебету счёта акций и иных ценных бумаг инвестора), оплаты дивидендов и возможного появления инвестора в множествах ЛПР тех или иных операций инвестируемого.

Вполне аналогично формализуются и иные реальные операции и бизнес-процессы.

#### Список литературы

1. Кононенко А.Ф., Шевченко В.В. Операционные игры. Теория и приложения. М.: ВЦ РАН, 2013, - 136 с.
2. Ерешко Ф.И., Шевченко В.В. Принципы и процедуры операционного игрового сценарного моделирования. Материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014 16-19 июня 2014 года, Москва, Россия, ИПУ РАН). С. 5364-5374.

# Экономические модели программ страхования дохода в сельском хозяйстве

В.Г. Киселев

ВЦ РАН им. АА. Дородницына, Москва, Россия

В растениеводческой отрасли сельского хозяйства существует два вида программ страхования – программы страхования урожая, в которых страхуются риски, связанные с погодными явлениями и программы страхования дохода, которые гарантируют компенсацию потерь производителю сельскохозяйственной продукции не только от недобора урожая, но и от падения цен на производимую продукцию. В западных странах системы страхования дохода наиболее популярны, поскольку обеспечивают более прямую защиту производителя по сравнению со страхованием урожайности. Специалисты по страхованию отмечают, что колебание цен на глобальных рынках сельскохозяйственной продукции достигло такого уровня, что производители часто рассматривают колебания цен настолько же серьезным источником риска, как и колебания урожайности.

В нашей стране страхование дохода пока не практикуется и этому есть несколько причин. Основная причина заключается в том, что у нас само агрострахование находится в стадии формирования и система страхования дохода требует большего финансового участия государства, чем система страхования урожая.

Инициативы по созданию программ страхования дохода, движимые высоким спросом на рынке, должны быть подкреплены системными исследованиями и, естественно, надежным математическим обоснованием. В данной работе, которая опирается на результаты работ [1-5], рассматриваются математические модели двух распространенных программ страхования дохода, гарантирующих определенный уровень дохода, называемый полной гарантией. Отличие этих двух программ страхования дохода заключается только в способе вычисления этой полной гарантии.

Рассмотрим для простоты случай страхования урожая одной культуры одной фирмой на площади  $S$ .

Введем необходимые дополнительные обозначения. Пусть

$Y$  – урожайность культуры в хозяйстве в момент уборки (случайная величина),  $EY$  – ее среднее значение.

$c_n$  – прогнозируемая весной на период уборки (так называемая базовая) цена;

$c$  – реальная цена продукции в момент уборки урожая.

$c_g$  – так называемая «гарантированная» цена.

Если гарантированная цена равна прогнозной, т.е.

$$c_g = c_n,$$

то это программа страхования дохода хозяйства (назовем ее программой А), а если гарантированная цена реагирует на повышение продажной цены и

$$c_g = \max [c_n, c],$$

то это так называемая программа страхования дохода от выращивания культуры. Это самая распространенная программа страхования дохода. Назовем ее программой Б.

С помощью гарантированной цены вводится понятие полной гарантии дохода с единичной и со всей площади. Обозначим их соответственно,  $v_g$  и  $B_g$ , причем  $B_g = v_g \times S$ .

По принятой в нашей экономической терминологии речь идет не о доходе, а о выручке, но мы будем придерживаться уже устоявшейся терминологии, чтобы не вводить путаницы.

По аналогии с программой страхования урожая (страховой стоимостью) введем страховой коэффициент  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  и полную гарантию выручки определим как  $v_g = \alpha c_g EY$ . Как и в программе страхования урожая, можно ввести понятие страховой урожайности  $y_\alpha = \alpha EY$ . Тогда полная гарантия выручки равна  $v_g = c_g y_\alpha$ .

Страховая премия рассчитывается исходя из базовой (весенней) цены и равна  $\pi = \delta c_n y_\alpha$ . Возмещение же выплачивается тогда, когда полученный доход (вычисляется исходя из осенней цены в период уборки урожая) меньше полной гарантии на всей застрахованной площади. В общем случае страховое возмещение равно  $r = (e_2 - cy)_+$  или  $r = (c_2 y_\alpha - cy)_+$ . (Знак + означает функцию Хевисайда).

Перечислим теперь минимальный набор критериев для оценки данной программы агрострахования дохода.

- $\Phi_0$  – доля участия государства в данной программе страхования дохода от выращивания культуры;
- $\Phi_1$  – вероятность недополучения запланированного дохода (выручки);
- $\Phi_2$  – величина этого запланированного дохода);
- $\Phi_3$  – средний доход агрофирмы;
- $\Phi_4$  – средний доход страховой компании;
- $\Phi_5$  – вероятность разорения страховой компании, которая, в частности, определяется ее начальным капиталом.

Как уже отмечалось, этот набор необходим для оценки каждой программы страхования.

Первый показатель, ради чего и производится страхование дохода – это надежность его получения.

Под этой надежностью будем понимать величину гарантированной выручки  $e_2$  и вероятность получения этой гарантированной выручки. Эта вероятность с учетом введенных ранее обозначений равна  $P(e \geq e_2) = 1 - P(y < y_\alpha \frac{c_2}{c})$ . В этих соотношениях  $y_\alpha$  и  $c_n$  – детерминированные величины, а остальные три –  $y$ ,  $c$ , и  $c_2$  – случайные. Прогнозная цена на урожай  $c_n$  является детерминированной величиной, поскольку это просто согласованная между страхователем и страховщиком конкретная величина, выбор которой естественно опирается на предыдущий опыт, а гарантированная цена  $c_2 = \max[c_n, c]$  (в программе Б страхования дохода от выращиваемой культуры) – случайная как функция случайной величины  $c$ ).

После этих замечаний нужные нам выражения для соответствующих вероятностей мы можем записать в общем виде как  $P(y < y_\alpha \frac{c_2}{c}) = \int_{y < y_\alpha \frac{c_2}{c}} dF(y, c,)$ .

Здесь  $F$  – совместная функция распределения соответствующих случайных аргументов, о которой будет идти речь ниже, а знак интеграла – символическая запись, аналогичная одномерному интегралу Стильтьеса,

Далее, средний доход агрофирмы (с единичной площади) равен  $Ed_f = Ecy + Er - E\pi_f - vEy - \beta = Ecy + \psi Er - vEy - \beta$ , где  $\beta$  – удельные постоянные затраты на единицу возделываемой площади, не зависящие от урожайности,  $V$  – удельные текущие затраты на единицу площади и на единицу урожая, а  $\psi = \gamma - \theta(1 - \gamma)$  – введенный в работах [2-3] индикатор программы страхования.

Таким образом, для вычисления всех критериев необходимо уметь вычислять следующие интегралы:  $Ecy = \int cy dF(cy)$ ,  $Er = \int (e_2 - cy)_+ dF(y, c,)$ ,

$Ey = \int y dF(y)$ . Перейдем теперь к критериям, характеризующим финансовую деятельность страховой фирмы при страховании дохода. Первый, и он же основной, показатель – это средний доход фирмы от этой деятельности.  $Ed_I = \theta Er$  и определяется величиной страховой надбавки.

Еще одним важным показателем, связанным с устойчивой деятельностью страховой фирмы, является вероятность ее разорения. (критерий  $\Phi_5$ ). Механизм функционирования страховой компании в случае страхования дохода принципиально ничем не отличается от случая страхования урожая.

Таким образом, мы видим, что для того, чтобы вычислять нужные нам характеристики, нам необходимо знать функции распределения приведенных здесь

случайных величин. Таким образом, исследование свойств программ страхования дохода агрохозяйств упирается в проблему исследования статистической информации. Для этой цели были разработаны соответствующие методики.

#### **Список литературы**

1. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбит С., Хикман Дж. Актуарная математика, М: Янус-К, 2001, 655с.
2. Киселев В.Г. Системный анализ основных систем агрострахования. М: ВЦ РАН, 2012. 28 с.
3. Киселев В.Г. Актуарная математика в агростраховании. М: ВЦ РАН, 2011. 29 с.
4. Киселев В.Г. Информационная база региональной системы агрострахования. //Труды 5-й международной конференции «Управление большими системами» М.: ИПУ РАН, 2011.
5. Киселев В.Г. О процедуре согласования программ страхования сельскохозяйственных культур. М. ВЦ РАН. 2014. 28с.

# Дискретные модели "выживания" для задач оценки качества розничных кредитных портфелей.

Козлов Д.Н., Гуськов С.Ю., Левин В.В.  
ПАО Банк ЗЕНИТ

Интерес к использованию моделей надежности в моделировании кредитных портфелей возник сравнительно недавно в связи с содержательной аналогией процесса выхода клиента в дефолт с процессом наработки до отказа технической системы. Модели выживания (Survival models=SM) позволяют моделировать не только будет или нет дефолт, но и оценивать время до наступления дефолта. SM исключает необходимость задания периода оценки исходов, так как в SM имеется возможность использования цензурированных наблюдений. SM используется для изучения времени до отказа портфеля кредитов.

## 1. Дискретная модель выживания для прогноза вероятности дефолта розничного портфеля

В данной модели используются следующие обозначения:

- дефолтом по договору  $i$  считается наличие просрочки более 90 дней
- время  $t$  предполагается дискретным и измеряется в месяцах;
- $c$  – отчётная дата (в качестве отчётной даты выбирается конец месяца);
- $a_i$  – календарная дата открытия  $i$ -ого договора;
- $d_{it}$  – индикатор попадания  $i$ -ого договора в дефолт в момент времени  $t$  (1 – договор попал в дефолт, 0 – договор не попал в дефолт);
- $w_i$  – вектор данных заявки/анкеты для  $i$ -ого договора (AV);
- $x_{it}$  – вектор поведенческих переменных (BV), важнейший из них – «возраст договора» MoB – month on book=срок обслуживания кредита и др., собранных на отчётную дату;
- $z_{it}$  – вектор макропараметров (MV), который имеет одни и те же значения для всех договоров в момент времени  $t$ ;
- $k$  и  $l$  – фиксированные лаги для поведенческих и макроэкономических переменных соответственно, учитывают, что изменения в макроэкономике сказываются на поведении заемщиков через некоторое время.

Вероятность дефолта (PD) для каждого договора  $i$  в момент времени  $t$  описывается следующим образом:

$$P_{it} = Pr(d_{it} = 1 | d_{is} = 0 \text{ для всех } s < t; w_i, x_{it}, z_{i(a_i+t)}, k, l) = F(\alpha + \varphi(t)^T \beta_1 + w_i^T \beta_2 + x_{i(t-k)}^T \beta_3 + z_{i(a_i+t-l)}^T \beta_4) \quad (1)$$

где,

$F$  – функция распределения. В качестве функции  $F$  чаще всего используется логистическая функция  $F(x)=1/(1+e^{-x})$ .

$\varphi$  – векторная функция преобразования длительности обслуживания MoB, которая используется для построения параметрической модели выживания:

$$\varphi(t) = (t, t^2, \ln(t), (\ln(t))^2),$$

$\alpha$  – свободный член,

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  – векторы коэффициентов при MoB, AV, BV, MV, которые необходимо оценить,

С помощью  $P_{it}$  ожидаемая дефолтность сегмента / выборки / портфеля на отчетную дату  $C$  оценивается следующим образом:

$$E(D_c) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{i(c-a_i)} \quad (2)$$

Оценки параметров рассчитываются как оценки максимального правдоподобия для логистической регрессии. Найденные оценки подставляются в  $P_{it}$  и рассчитывается вероятность дожития до момента  $t$  – по функции выживания.

$$S_i(t) = \prod_{s=1}^t (1 - P_{is}) \quad (3)$$

Вероятность дефолта для  $i$ -ого договора на отчетную дату  $c$  равна

$$PD_i(c) = 1 - S_i(c) = 1 - \prod_{s=1}^c (1 - P_{i(c-a_i=s)}) \quad (4)$$

А ожидаемая PD по портфелю на отчетную дату  $c$  рассчитывается по формуле

$$E(PD(C)) = \frac{1}{N(C)} \sum_{i=1}^{N(C)} PD_{i(c-a_i)} \quad (5)$$

Где  $N(C)$  – количество договоров в портфеле на отчетную дату  $C$

Реальная дефолтность по тестовой (обучающей) выборке на отчетную дату  $C$  считается по формуле

$$PD(C) = \frac{1}{N(C)} \sum_{i=1}^{N(C)} d_{i(c-a_i)} \quad (6)$$

Где  $d_{i(c-a_i)}$  - индикатор дефолта по  $i$ -тому договору на отчетную дату  $C$ .

## 2. Оценка валидности модели. Графики бэк-тестинга

На рис. 1 представлены результаты бэк-тестинга разработанной модели. На графиках масштаб по оси ординат не показан из соображений сохранения банковской тайны. Рассчитывались характеристики PD по модели и сравнивались с реальными для разных продуктов. На лицо качественное совпадение результатов прогноза с реальными данными. Однако коэффициент детерминации  $R^2$ , приведенный на графиках, оставляет желать лучшего. Одним из путей повышения качества модели является более четкая сегментация всего портфеля по видам кредитов и ковенантам.

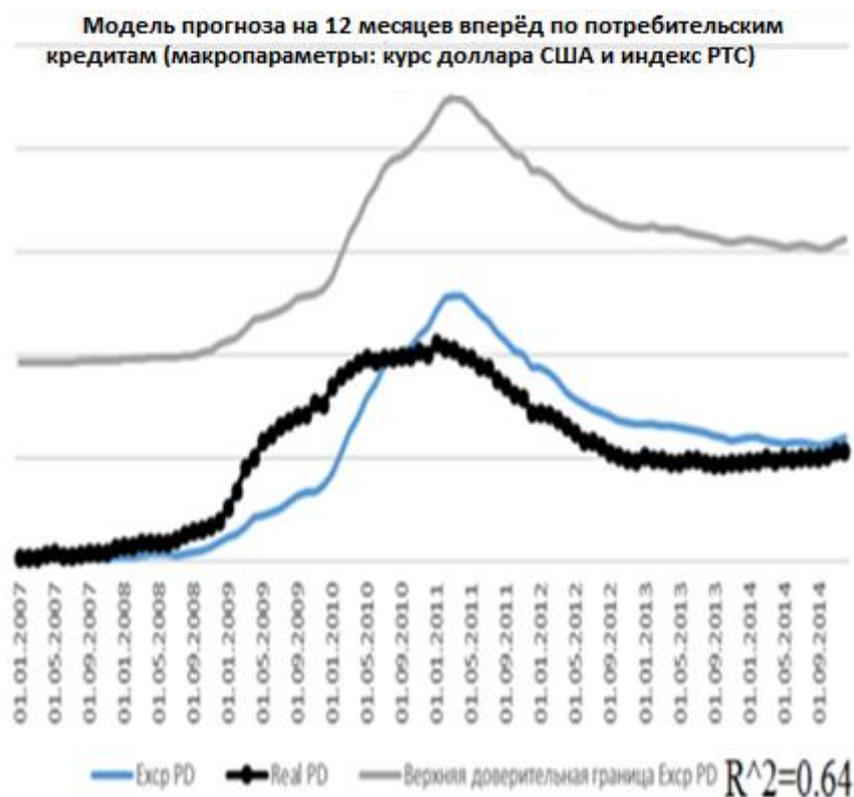


Рис. 1. Результаты бэк-тестинга SM-модели

## 3. Различие моделей для портфелей рыночных и нерыночных кредитов.

Модели выживания показывают значимую зависимость уровня дефолтности рыночного портфеля от макропараметров, что позволяет оценить уровень реакции портфеля от стрессовых значений макропараметров.

Так для рыночного портфеля ипотеки значимыми макрофакторами являются цена на нефть или индекс РТС (один из них, так как эта пара сильнокоррелирующих макропараметров)

Для портфеля автокредитов - значимым является уровень безработицы,

Для портфеля потребительских кредитов – курс евро и цена на нефть.

Для нерыночных портфелей (кредиты, выдаваемые в рамках спецпрограмм) оценки моделей выживания показывают значительное отличие от случая рыночного портфеля.

Так, для нерыночных портфелей (военная ипотека, потребительские кредиты военным), имеющим уровень дефолтности в 10-15 раз меньше соответствующего рыночного портфеля, практически все макропараметры являются незначимыми, уровень дефолтности таких портфелей в основном зависит от поведенческих характеристик (MOB=month of books=накопленный срок жизни кредита, остаток ссудной задолженности, отношение числа выходов в просрочку к MOB). Здесь наиболее адекватными моделями оказываются пуассоновская и отрицательно биномиальная регрессии, применяемые для моделирования страховых портфелей.

## ВЫВОДЫ

1. В период стагнации экономики необходимы разумные ограничения риска-аппетита, так как заемщики, изначально оцененные по моделям спокойного периода как приемлемые с точки зрения риска, могут «неожиданно» переходить в разряд плохих и в пределе этот процесс может потерять управляемость

2. Технологии динамического прогнозирования поведения заемщиков/портфелей на этапе сопровождения кредита на базе продвинутых динамических моделей позволяют предсказывать параметры портфелем потребительских кредитов и повышать эффективности управления розничными портфелями.

3. Для портфелей, не обеспечивающих обучающую выборку большого объема, перспективны дискретные динамические модели класса SM, которые дополнительно позволяют решать задачи стресс-тестирования розничных кредитных портфелей и оценивать их влияние на устойчивость банка.

## Список литературы

1. Козлов Д., Лёвин В., Гуськов С. «Дискретные модели выживания для оценки качества и стресс-тестирования розничных кредитных портфелей в условиях колебания уровня деловой активности» The Retail Finance. Операционный менеджмент. 2016 #1(43), стр.44-58.

2. Banasik, J., Crook, J. & Thomas, L. C. Not If But When Borrowers Will Default, Journal of the Operational Research Society

3. Родригес, Герман (2008). Модели выживаемости, Квантиль, № 5, стр. 1-27

4. Forecasting and Stress Testing Credit Card Default using Dynamic Models <http://fic.wharton.upenn.edu/fic/papers/11/11-34.pdf>

5. Survival Analysis in LGD Modeling. Jiří WITZANY, Michal RYCHNOVSKÝ, Pavel CHARAMZA, <http://ies.fsv.cuni.cz/default/file/download/id/12703>

## Модели коалиции заёмщиков с механизмом выдачи кредитов на основе жребия

А.Н. Сытов

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

В основе функционирования коалиций заёмщиков, создаваемых с целью приобретения их участниками некоторых активов, лежит определенный механизм перераспределения финансовых ресурсов. Ранее рассматривались такие модели, когда участник коалиции берет кредит и приобретает актив только после накопления им некоторой доли от текущей цены этого актива. В частности, в работе [1] численно исследовалась модель функционирования коалиции разнородных участников, объединяющихся в некоторый начальный момент времени.

Широкое распространение по всему миру получили, так называемые, ассоциации поочередных сбережений и кредитования (ROSCA). Организационные формы таких ассоциаций разнообразны. Выбор участников, которые получают кредит в определенный момент времени, может происходить на основе жребия, аукциона или голосования. Соответствующие частные модели исследовались, например, в работе [2].

В настоящей работе рассматриваются модели коалиции однородных заемщиков, где выбор участников, которые получают кредиты и приобретают активы, происходит на основе жребия. Модели функционирования коалиции приводятся при различных схемах возможного взаимодействия коалиции с внешней средой, т.е. при различных механизмах стороннего финансирования коалиции. Учитывается также возможность изменения цен активов, для приобретения которых участникам предоставляются кредиты.

Введем соотношения, которые будут связаны с описанием одного участника коалиции. Примем следующие обозначения:  $U$  – размер депозитных вкладов участников,  $V$  – размер кредитных выплат;  $u$  – процентная ставка по депозитам;  $v$  – процентная ставка по кредитам. Цена актива в момент времени  $t$  обозначается как  $C_t$ . Накопления участника на депозите  $G_t^D$  описываются следующим конечно-разностным соотношением:

$$G_{t+1}^D = (1 + u) \cdot G_t^D + U, \quad t = 0, 1, \dots, \quad G_0^D = U$$

Считается, что участники коалиции приобретают активы на интервале времени  $0, \dots, l$ , при этом

$$l \leq t^1, \quad t^1 = \min(t', L)$$

Здесь  $t'$  обозначает момент времени, когда участник коалиции накапливает на интервале времени  $0, \dots, L$  сумму, необходимую для приобретения актива по текущей цене, не прибегая к кредиту. Формально запишем  $t' = \min(t : t = 0, \dots, L, G_t^D \geq C)$ . В этот момент времени платеж считается равным  $U' = U - (G_{t'}^D - C_{t'})$ .

Рассмотрим участника коалиции, который берет кредит и приобретает актив в момент времени  $\tau$ . Обозначим его задолженность по кредиту в момент времени  $t$  через  $G_{\tau,t}^C$ . При этом возможные значения, которые может принимать  $\tau$  есть  $0, \dots, t' - 1$ , если  $t^1 = t'$  и  $\tau = 0, \dots, L$ , если  $t^1 = L$ . Динамика этой переменной описывается следующим образом:

$$G_{\tau,t+1}^C = (1 + v) \cdot G_{\tau,t}^C - V, \quad t = \tau, \tau + 1, \dots, \quad G_{\tau,\tau}^C = C_\tau - G_\tau^D$$

Момент времени, когда участник полностью погасит кредит  $t_\tau^2 = \min(t : G_{\tau,t}^C \leq 0)$ .

Поток кредитных платежей участника определим как

$$V_{\tau,t} = 0, \quad t = 0, \dots, \tau - 1; \quad V_{\tau,t} = V, \quad t = \tau, \dots, t_\tau^2 - 1; \quad V_{\tau,t} = V + G_{\tau,t}^C, \quad t = t_\tau^2; \quad V_{\tau,t} = 0, \quad t = t_\tau^2, t_\tau^2 + 1, \dots$$

Момент времени, когда последний участник коалиции полностью погасит кредит и коалиция прекратит свое функционирование

$$T = \max_{\tau=0, \dots, l} t_\tau^2, \quad l = 0, \dots, t' - 1, \quad t^1 = t' \quad \text{или} \quad l = 0, \dots, L, \quad t^1 = L; \quad T = \max \left( \max_{\tau=0, \dots, t' - 1} t_\tau^2, t' \right),$$

$$l = t', \quad t^1 = t'$$

Пусть  $n_t$  – число участников коалиции, которые совершают накопительные платежи в момент времени  $t$ ,  $s_t$  – число участников, которые приобретают актив.

При этом справедливы соотношения

$$n_{t+1} = n_t - s_t, \quad t = 0, \dots, l-1, \quad n_0 = N,$$

где  $N$  – полное число участников коалиции.

На переменные  $n_t$  и  $s_t$  накладываются следующие ограничения:  $n_t > 0$ ,  $n_t$  – целое,  $t = 1, \dots, l$ ;  $s_t \geq 0$ ,  $s_t$  – целое,  $t = 0, \dots, l$ ;  $s_l = n_l$ . Определим поток  $Q_t$  денежных средств по всем операциям участников коалиции. Этот поток представляется как разность потоков по всем приходным  $P_t$  и расходным  $R_t$  операциям, т.е.  $Q_t = P_t - R_t$ ,  $t = 0, \dots, T$ . Будем записывать:  $P_t = P_t^D + P_t^C$ ,  $R_t = R_t^D + R_t^C$ ,  $t = 0, \dots, T$ , где  $P_t^D$  – поток денежных средств по приходным операциям коалиции с депозитами участников,  $P_t^C$  – поток денежных средств по приходным операциям коалиции с кредитами участников,  $R_t^D$  – поток денежных средств по расходным операциям коалиции с депозитами участников,  $R_t^C$  – поток денежных средств по расходным операциям коалиции с кредитами участников.

Состояние коалиции характеризуется переменной  $M_t$  – суммой денежных средств в кассе коалиции. Состояние изменяется во времени согласно разностному уравнению

$$M_{t+1} = M_t + Q_{t+1}, \quad t = 0, \dots, T, \quad M_0 = Q_0.$$

Требуется, чтобы эта переменная удовлетворяла ограничениям:  $M_t \geq 0$ ,  $t = 0, \dots, T$ .

В моменты времени  $0, \dots, l$  участники, которые приобретают актив, выбираются путем жребия. Время приобретения актива участником коалиции моделируется случайной величиной  $\eta$ , принимающей значения  $0, \dots, l$  с вероятностями  $P(\eta = t) = s_t / N$ ,  $t = 0, \dots, l$ .

Среднее время приобретения актива участником коалиции

$$\bar{t} = E\eta = \sum_{t=0}^l t \cdot P(\eta = t) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^l t \cdot s_t.$$

Ставится следующая задача: при заданных основных параметрах задачи  $U$ ,  $V$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $L$ , динамике цен  $C_t$ ,  $t = 0, \dots, T$  найти управления  $l, s_t$ ,  $t = 0, \dots, l$ , удовлетворяющие основным ограничениям задачи, выписанным выше и доставляющие минимум среднему времени.

Параметрами, при различных значениях которых определяется данная оптимизационная задача, являются процентные ставки по внутренним депозитам и кредитам для участников коалиции. Выписываются и анализируются условия выделения седловой точки функции Лагранжа. Проводятся вычислительные эксперименты

#### Список литературы

1. Байрамов О.Б., Сытов А.Н. Численные исследования одной модели коалиции заемщиков // Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН). Динамика неоднородных систем. 2007. Том 31. Номер 1. Стр. 241-253.
2. Beasley T., Coate S., Loury G. The Economics of Rotating Savings and Credit Associations // The American Economic Review. 1993. Vol. 83. No. 4, 792-810
3. Лэсдон Л. Оптимизация больших систем. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1975. 432стр

# **Исследование операций в страховании и риск-менеджменте**

1. D.Y. Golembiovskiy, D.V. Denisov, and A.S. Petrovykh Principal component analysis and multivariate time series
2. Д.В. Денисов, Д.К. Смирнова Применение метода случайных лесов для оценки резерва понесенных, но еще не заявленных убытков страховой компании

## **Principal component analysis and multivariate time series**

D.Y. Golembiovskiy, D.V. Denisov, and A.S. Petrovykh  
*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Principal component analysis (PCA) is a statistical procedure that uses an orthogonal transformation to convert a set of observations of possibly correlated variables into a set of values of linearly independent variables which are called principal components. The number of principal components is less than or equal to the number of original variables. This transformation is defined in such a way that the first principal component has the largest possible variance (that is, it takes into account as much variability of the data as possible), and each succeeding component in turn has the highest variance possible under the constraint that it is orthogonal to (i.e., uncorrelated with) the preceding components. Principal components are guaranteed to be independent if the data set is jointly normally distributed. PCA is sensitive to the relative scaling of the original variables.

Combining use of principal component analysis and multivariate time series analysis could be useful in different financial tasks especially in risk management. It is common to estimate some types of derivative portfolio risk using the Monte Carlo method whereby generation of huge amount of riskfactors (such as underlying quotes, interest rate curves, implied volatility surfaces) are simulated. It is expected that PCA allows to reduce the dimension of the original multivariate time series and construct linearly uncorrelated principal components.

In this report we consider applying of PCA to multivariate time series with presence of autoregressive dependencies and point out some features of derived time series of new principal components.

### **References**

1. Jolliffe I.T. Principal Component Analysis. New York: Springer, 2002.
2. Tsay R.S. Multivariate Time Series Analysis. New Jersey: John Wiley & Sons, 2014.
3. Hull J.C. Options, futures and other derivative securities, 8 edition. New Jersey: Prentice Hall, 2011.

## **Применение метода случайных лесов для оценки резерва понесенных, но еще не заявленных убытков страховой компании**

Д.В. Денисов, Д.К. Смирнова  
*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Целью настоящего доклада является оценка применимости метода случайных лесов для оценки резерва понесенных, но еще не заявленных убытков (РПНУ) страховой компании по страхованию иному, чем страхование жизни. В основе задачи лежит статистический метод случайных лесов (Random forests), представленный в статьях [1, 2]. В работе использованы результаты [3, 4, 5].

Для целей моделирования использовались реальные данные страховой компании по прямому страхованию средств автотранспорта (КАСКО) за период 2009-2014 гг. Методом случайных лесов была оценена следующая зависимость:

$$paid\_edited \sim crisis\_year\_of\_ins\_ev + ins\_sum + term\_end + start\_quar + region + claim\_delay, \quad (1)$$

где *paid\_edited* – величина оплаты, если убыток был заявлен в год, следующий после года начала действия договора, руб.,

*start\_year* – год начала действия полиса,

*crisis\_year\_of\_ins\_ev* - признак «кризисный год наступления страхового события»,

*ins\_sum* - величина страховой суммы, руб.,

*term\_end* - срок действия полиса, в днях,

*start\_quar* - квартал начала действия договора,

*region* - регион продажи полиса,

*claim\_delay* - задержка в поступлении заявления об убытке, исчисленная от момента начала действия договора, в днях.

Было проведено сравнение результата оценки РПНУ на 31.12.2014 г. методом случайных лесов с результатами расчетов стандартными методами (цепной лестницы и Борнхютера-Фергюссона по треугольникам оплаченных убытков). В целом можно сказать, что метод случайных лесов может быть применен для оценки резервов страховых компаний в качестве альтернативного алгоритма.

#### Литература

1. Breiman L. Random forests // *Machine learning*, Vol. 45, Issue 1, pp.5-32, 2001.
2. Liaw A., Wiener M. Classification and Regression by Random Forest // *R News*, 2(3), pp.18-22, 2002.
3. Breiman L. Out-of-bag estimation // Berkeley: Technical Report, Statistics Department University of California, 1996.
4. Siroky D. Navigating Random Forests and related advances in algorithmic modeling // *Statistics Surveys*, Vol. 3, pp.147–163, 2009.
5. Bylander T. Estimating generalization error on two-class datasets using out-of-bag estimates // *Machine Learning*, Vol. 48, pp.287-297, 2002.

# Исследование операций в физике, биологии, экологии и медицине

1. M.B. Ahmadi Mathematical programming models for some descriptors of a fullerene
2. A.A. Vasin, A.G. Divtsova Model of agreement on limitation of transboundary atmospheric pollution
3. E.A. Malinina Numerical Solution of the channel optimization problem which is used for the production of laser targets
4. А.А. Белолипецкий, В.Ф.Галанжа, И.В.Козицын Математическая модель поведения коллективов людей П.С.Краснощекова. Динамический аспект
5. Н.В. Белотелов Проблемы термодинамического описания лесной растительности
6. Н.В. Белотелов, И.А. Коноваленко Компьютерная модель коллективного поведения животных
7. А.Н. Герасимов Стохастические эффекты в системе «паразит-хозяин»
8. Г.К. Каменев, Д.А. Саранча, Ю.С. Юрезанская Исследование свойств разностных уравнений в одной экологической задаче
9. Н.П. Карпенко Алгоритм формирования классификаторов критериев экологической безопасности гидротехнических систем
10. В.В. Михайлов, В.М. Умывакин, А.В. Швец Анализ геоэкологического риска на основе квалиметрической интегральной оценки загрязнения окружающей среды
11. Ю.В. Мухартова, Н.Т. Левашова, А.С.Крупенко, А.В. Ольчев Гидродинамическая модель переноса парниковых газов в приземном слое атмосферы над неоднородной подстилающей поверхностью
12. В.Н. Разжевайкин О неустойчивости в моделях биологических сообществ
13. М.И. Шпитонков Математическое моделирование антиоксидантных процессов

## **Mathematical programming models for some descriptors of a fullerene**

M.B. Ahmadi

*Department of mathematics, Shiraz University,  
Shiraz, Iran*

Fullerenes have attracted considerable attention in different fields of science, including those in biology and medicine. Fullerenes are being developed as therapeutics for disease processes such as multiple sclerosis, neurodegeneration, HIV infection, cancer, radiation exposure, ischemia, allergic disease, infectious disease, and general inflammation [1].

Because of wide applications in various fields, fullerenes have received a lot of recent mathematicians' attention [2, 3].

The Fries and the Clar number and their associated Kekule' structures of a fullerene, play a key role in molecular energy and stability. This paper is devoted to proposing mathematical programming models for determining the Fries number and the Clar number of a fullerene.

The solutions of the models were obtained by CPLEX 12.6 for many of large fullerene isomers and the results were very satisfactory.

### **1. Introduction**

A fullerene graph  $F_n$  with  $n$  vertices is a cubic 3-connected plane graph which has exactly 12 pentagonal faces and  $m := n/2 - 10$  hexagonal faces. The vertices represent carbon atoms and the edges represent the chemical bonds between them. It was showed that fullerene graphs with  $n$  vertices exist for all even  $n \geq 24$  and for  $n = 20$ .

The Clar and the Fries numbers are two parameters that are related to the stability of fullerene. The Fries number of a fullerene is the maximum number of hexagons contains three double bonds over all possible perfect matchings of a fullerene graph.

A set of hexagons contains three double bonds that attain the Fries number for a fullerene is called a Fries set. A set of *disjoint* hexagons of a perfect matching  $K$  of a fullerene graph is called a sextet pattern if every hexagon in this set contains three double bonds. The Clar set is any sextet pattern with the maximum number of hexagons over all perfect matching of fullerene graph. The Clar number of a fullerene graph is the cardinality of a Clar set, denote by  $c(F_n)$ .

## 2. Mathematical formulation

The following notations are used in the mathematical formulation of Fries and Clar number of a fullerene.

Indices

$i, j$  indices of the vertices of the fullerene molecular graph  $\Gamma_n$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$   
 $k$  index of the hexagonal face of  $\Gamma_n$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$

Parameters

$A_{n \times n}$  adjacency matrix of  $\Gamma_n$   
 $H_{m \times 6}$  hexagonal-node matrix  
 $N(i)$  set of vertices adjacent to vertex  $i$   
 $h_k$  set of  $k$ th hexagon's vertices (the  $k$ th row of  $H_{m \times 6}$ )  
 $e_{ij}$  an edge joining vertex  $i$  to vertex  $j$ ,  $j \in N(i)$

Variables

$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } e_{ij} \text{ is double bound in a given Kekule structure} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$   
 $y_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k\text{th hexagon is benzen - like in given Kekule structure} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

With respect to the above definition of parameters and variables, the mathematical binary integer programming problem for finding the Fries number of a fullerene would be as follows [4]:

$$\text{maximize } \sum_{k=1}^m y_k \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j \in N(i)} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2)$$

$$\sum_{i \in h_k} \sum_{j \in N(i) \cap h_k} x_{ij} - 6y_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (3)$$

$$x_{ij} = x_{ji} \quad i = 1, 2, \dots, n; j \in N(i); \quad (4)$$

$$x_{ij}, y_k \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n; j \in N(i), k = 1, 2, \dots, m; \quad (5)$$

and the mathematical programming problem to find the Clar number of a fullerene would be as follows:

$$\text{Maximize } \sum_{k=1}^m y_k \quad (6)$$

$$\text{s. t. } \sum_{j \in N(i), j < i} x_{ij} + \sum_{j \in N(i), j > i} x_{ji} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (7)$$

$$\sum_{i \in h_k} \sum_{j \in N(i) \cap h_k, j < i} x_{ij} - 3y_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (8)$$

$$y_i + y_j \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, m; j \in Y(i); \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n; j \in N(i), j < i \quad (10)$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (11)$$

The computation time for many of large fullerene isomers ensures the efficiency and effectiveness of proposed models for computing the Fries and the Clar number of a fullerene graph.

## References

1. C. Kopley, "Fullerenes in medicine; will it ever occur?" Journal of Nanomedicine & Nanotechnology, vol. 3, no. 6, p. 1, 2012.

2. Klavzar, S., Salem, K., Taranenkov, A., Maximum cardinality resonant sets and maximal alternating sets of hexagonal systems. *Computers and Mathematics with Applications*. **59** (2010) 506-513.
3. Zhang, H., Ye, D., Shiu, W., Forcing matching numbers of fullerene graphs. *Discr. Appl. Math.* **158** (2010) 573-582.
4. M. Salami, M. B. Ahmadi, A mathematical programming model for computing the Fries number of a fullerene, *Appl. Math. Modell.* **39** (2015) 5473-5479.

## Model of agreement on limitation of transboundary atmospheric pollution\*

A.A. Vasin, A.G. Divtsova

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Atmospheric pollution related to people's production activity is a topical problem in international relations. Game-theoretic analysis is a useful tool for elaboration of international agreements in this field. Constructing a corresponding model, we should determine utility functions characterizing the interests of countries involved in negotiations on the problem. The national social welfare seems to be the appropriate value. It includes the total consumers' utility from consumption reduced by the loss from environment pollution and the costs of production and environment protection. Under the developed international trade, the social welfare may be redistributed by means of side payments compensating the costs of environment protection. Papers [1-5] develop game-theoretic models for analysis of different aspects of the problem.

The present paper studies possibilities for a stable international agreement on limitation of atmospheric pollution. In contrast to other researches, we consider a possibility of unexpected breaking the agreement by some country and assume that only endogenous economic mechanisms in frame of the agreement prevent such breaking. A formal definition of stability in our model is given by the known concept of a subgame perfect equilibrium (SPR).

We consider the following game  $\Gamma$  characterizing the interaction related to transboundary pollution. The set of players  $I = \{1, \dots, n\}$  includes  $n$  countries involved in production activity. A strategy of player  $i$  is a pair  $s_i = (q_i, r_i)$ , where  $q_i$  is a production volume and  $r_i$  is an expense on pollution decrease. A given strategy determines the amount of atmospheric pollution  $z_i = p_i(q_i, r_i)$ , the utility  $u_i(q_i)$  of consumption and the cost  $C_i(q_i)$  of production. The total atmospheric pollution for country  $i$  is  $\hat{z}_i = \sum_{j=1}^n \pi_{ji} z_j$  where  $\pi_{ji}$  is a share of the emission by country  $j$  transferred to country  $i$ . Function  $H_i(\hat{z})$  determines the loss of the national social welfare caused by the pollution. The payoff function of player  $i$  is  $F_i(\bar{s}) = u_i(q_i) - C_i(q_i) - H_i(\sum_{j=1}^n \pi_{ji} p_j(q_j, r_j)) - r_i$ . We assume that the involved functions meet typical properties:  $u_i(q)$  is increasing and concave,  $C_i(q)$  and  $H_i(\hat{z})$  are increasing and convex,  $p_i(q_i, r_i)$  increases in  $q_i$ , decreases in  $r_i$ , is convex in both arguments  $r_i$  and  $q_i$ .

Denote  $\hat{q}_i$  a solution of the problem  $u(q_i) - C(q_i) \rightarrow \max_{q_i}$ , and  $\hat{z}_i \stackrel{\text{def}}{=} p_i(\hat{q}_i, 0)$ . For every  $i, z_i \in (0, \hat{z}_i)$  consider the problem:

$$\begin{aligned} u_i(q) - C_i(q) - r &\rightarrow \max_{q_i, r_i}, \\ p_i(q, r) &\leq z_i. \end{aligned}$$

Denote  $q_i(z_i)$  and  $r_i(z_i)$  its solution. Consider a game where a strategy of each country is the amount  $z_i$  of atmospheric pollution, and the component of the utility function depending on  $z_i$  is  $v_i(z_i) = u_i(q_i(z_i)) - C_i(q_i(z_i)) - r_i(z_i)$ . Below we assume that  $p(q, r) = \varphi(q) - K(r)r$ , where  $\varphi(q)$  is an increasing convex function that determines the amount of pollution, and  $K(r)$  is either constant or decreasing function that determines the marginal efficiency of the expense on pollution decrease.

Under these assumptions, the function  $v_i(z_i)$  is concave. The total utility function of country  $i$  with account of the loss from pollution is  $F_i(z) = v_i(z_i) - H_i(\sum_{j=1}^n \pi_{ji} z_j)$ . Consider a game  $G = \langle I, Z_i = [0, \hat{z}_i], F_i(z), i \in I \rangle$ .

---

\* This research is supported by RFBR project 16-01-00353\16

**Proposition 1.** Every Nash equilibrium  $s^* = (q_i^*, r_i^*, i \in I)$  of initial game  $\Gamma$  determines Nash equilibrium  $z^* = (p_i(q_i^*, r_i^*), i \in I)$  in game  $G$ , and vice versa, for each Nash equilibrium  $z^*$  of game  $G$ , situation  $s^* = (q_i(z_i^*), r_i(z_i^*))$  is a Nash equilibrium of game  $\Gamma$ .

Under the given conditions, Nash equilibrium always exists in game  $G$ .

Besides Nash equilibrium  $z^*$  we also consider Pareto-optimal situation  $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ . For any vector function  $(f_i(z), i \in I)$  under consideration, let  $f_i^* := f_i(z^*), \bar{f}_i := f_i(\bar{z}), f_\Sigma(z) := \sum_{i \in I} f_i(z)$ .

For real interactions, the total welfare  $\bar{F}_\Sigma$  in the Pareto-optimal situation is typically substantially greater and the total pollution is substantially less than in the Nash equilibrium. However, for some countries it might be that  $\bar{F}_i < F_i^*$ . In this case side payments create incentives for such countries to take part in cooperation and support the Pareto-optimal situation. Following [5], we determine them as  $y_i = (F_i^* - \bar{F}_i) + \mu_i(\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*)$ , where  $\mu_i \in [0; 1], i \in I, \sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ . Then, for every  $i \in I$   $\bar{F}_i + y_i \geq F_i^*$ .

In order to determine possibilities for a stable agreement on realization of the Pareto-optimal situation, we consider the dynamical interaction of the countries as a repeated game with complete information and sliding planning horizons. Each period  $t = 1, 2, \dots$  of the interaction includes two stages: at stage  $t1$  each player determines the amount of pollution  $z_i^t$  and gets payoff  $F_i^t = F_i(z^t)$ . At the next stage  $t2$  players get or pay side payments  $y_i^t$ , they determine final payoffs  $\bar{F}_i^t(z^t, y^t) = F_i(z^t) + y_i^t$  in this period.

A strategy of player  $i$  in this repeated game determines his actions in each period  $t$  depending on a prehistory  $h^{t-1} = (z^\tau, y^\tau)_{\tau=1}^{t-1}$  of the game and is formally given by functions  $z_i^t = \mu_i^1(h^{t-1}), y_i^t = \mu_i^2(h^{t-1}, z^t)$ . Making decision in period  $t$ , player  $i$  is concerned with the total payoff till his planning horizon  $T_i$ . Strategy profile  $\mu_i^*$  is an SPR of the repeated game if, for any  $t$  and prehistory  $h^{t-1}$ :

$$\mu_i^* = \arg \max_{\mu_i} \sum_{\tau=t}^{t+T_i} \bar{F}_i(z^\tau(h^{t-1}, \mu^* \parallel \mu_i), y^\tau(h^{t-1}, \mu^* \parallel \mu_i)).$$

Our purpose is to find out conditions for existence of Pareto-optimal SPR realizing the situation  $\bar{z}$  in every repetition of the repeated game. We consider a set of situations  $\mu$  such that, for some vector  $y$  of side payments  $\mu_i^1(h^{t-1}) = \bar{z}_i, \mu_i^2(h^{t-1}, z^t) = y_i$ , if  $z^\tau = \bar{z}, y^\tau = y$  for  $\tau < t$ , and after any deviation  $\mu_i^1(h^{t-1}) = z_i^*, \mu_i^2(h^{t-1}, z^t) = 0, i \in I$ . Assume that for every player  $i$  the optimal deviation from  $\bar{z}$  is to play  $z_i^*$ . In particular, this holds if  $\pi_{ii} = 0$ .

**Proposition 2.** An SPR of such sort exists if and only if  $\sum_{i \in I} ((H_i^* - \bar{H}_i)/(1 + T_i)) \leq \bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*$ . Under this condition, side payments may be set as  $y_i = v_i^* - \bar{v}_i - (H_i^* - \bar{H}_i)\lambda T_i/(1 + \lambda T_i)$ , where  $\lambda \leq 1$  is a solution of equation  $\sum_{i \in I} ((H_i^* - \bar{H}_i)/(1 + \lambda T_i)) = \bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*$ . In particular, if  $T_i \equiv T$ , then the minimal planning horizon such that the SPR exists is  $T_{min} = \lceil (v_\Sigma^* - \bar{v}_\Sigma)/(\bar{F}_\Sigma - F_\Sigma^*) \rceil + 1$ . In this case  $y_i = v_i^* - \bar{v}_i - (H_i^* - \bar{H}_i)T_{min}/(1 + T_{min})$

## References

1. Ploeg F., Zeeuw A. International aspects of pollution control // European Association of Environmental and Resource Economics. 1992. vol. 2, p. 117-139.
2. Halkos G.E., Hutton J.P. Optimal acid rain abatement policy in Europe // MPRA Paper. 1994. No. 33943.
3. Petrosjan L., Zaccour G. Time-consistent Shapley Value of Pollution Cost Reduction // Journal of Economic Dynamics and Control. 2003. p. 381-398
4. Masoudi N., Santugini M., Zaccour G. A Dynamic Game of Emissions Pollution with Uncertainty and Learning // Centre interuniversitaire sur le risque, les politiques économiques et l'emploi. 2015. W. P. 15-01
5. Chander P., Tulkens H. The core of an economy with multilateral environmental externalities // International Journal of Game Theory. 1997. vol. 26, issue 3, p. 379-401.

# Numerical Solution of the channel optimization problem which is used for the production of laser targets

E.A. Malinina

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

To receive the energy of thermonuclear fusion reaction is necessary to build a continuous production of laser targets (LT) HiPER type (Baseline Target-2), composed of spherical shell with an exterior protective layer, an interior porous layer, and an internal cavity. The cavity is filled with a deuterium-tritium gas mixture [3, 4, 5]. The gas has to be cooled to freezing, so that a fuel layer is formed inside the target. Then this target is delivered into the working chamber of the reactor, irradiated with a laser and compressed by reactive impulse. The thermonuclear reaction is being proceeded; heat and neutron are being exuded.

Developing the technology FST (Free standing target technology for the formation of a cryogenic layer has been developed at the Lebedev Physics Institute [2], [3], the problem of optimization of the cryogenic channel was recognized. To cooled LT it is placed under selected low temperatures in a special cryogenic channel: the system of spiral pipes with different spiral angles. It is important to satisfy two criteria: uniform freezing of the gas mixture in the internal cavity of the target (without crystalline regions) and minimize deformation of LT during sliding inside the cryogenic channel.

That is a two-criteria problem. The salvation of it will help to choose the best design of a cryogenic channel based on the meant parameters and characteristics of target and production process.

In [1] was mathematically described the movement in each of the spiral pipe of the cryogenic channel, the optimization problem was formulated and solved by constructing the set of criterion values and its Pareto boundary.

## References

1. Belolipetskii A.A., Malinina E.A. Numerical solution of the two-criterion optimization problem for the shape of a channel with a moving ball // *Computational Mathematics and Modeling*, Vol. 27, No. 1, January, 2016
2. Aleksandrov I.V., Belolipetskii A.A., Koresheva E.R. Sostoyaniye problemy kriogennykh toplivnykh misheney v sovremennoy programme inertsiyal'nogo termoyadernogo sinteza // *Vestnik RAYEN*.2007. №2. P.15 -20.
3. Aleksandrov I.V., Belolipetskii A.A., Malinina E.A. FST-tekhnologii dlya proizvodstva kriogennykh misheney klassa HIPER // *Tezisy dokladov 38-y mezhdunarodnoy (Zvenigorodskoy) konferentsii po fizike plazmy i UTS*. 2011. S.131-131.

## Математическая модель поведения коллективов людей П.С.Краснощекова. Динамический аспект

А.А.Белолипецкий<sup>1</sup>, В.Ф.Галанжа<sup>2</sup>, И.В.Козицын<sup>3</sup>  
<sup>1</sup> ВЦ им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия, <sup>2</sup> ВТУ,  
Волгоград, Россия, <sup>3</sup> МФТИ, Москва, Россия

В данной работе приведено обобщение статической математической модели коллективного поведения, предложенной П.С.Краснощековым [1, 2], на динамический случай. Приводятся некоторые результаты, описывающие свойства таких моделей.

Каждому члену коллектива, состоящего из  $N$  человек, предлагается решить, с какой вероятностью он проголосует за решение какого-либо вопроса в двух альтернативной ситуации. Например, согласен ли он с решением правительства вступить России в ВТО, или нет. С вероятностью  $p_i$   $i$ -й член коллектива проголосует за вступление, а с вероятностью  $1 - p_i$  против. Если  $\alpha_i$  - априорная (до общения с членами коллектива) вероятность того,

что лицо, принимающее решение (ЛПР), проголосует «за», а  $\mu_i \in [0, 1]$  коэффициент его индивидуализма (при  $\mu_i = 1$  ЛПР убежденный сторонник своей точки зрения по любому вопросу, а при  $\mu_i = 0$  он полный конформист, легко поддающийся чужому мнению), то в работе [1] П.С.Краснощекковым были предложены и обоснованы уравнения, с помощью которых вычислялись апостериорные вероятности  $p_i$ , после того, как ЛПР пообщался с иными членами коллектива, и его мнение стало отличаться от априорного. Они имеют вид

$$p_i = \mu_i \alpha_i + (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j, i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda_{ij}$  - вероятность того, что  $j$ -й ЛПР убедит  $i$ -го ЛПР в своей точке зрения при условии, что  $j$ -й ЛПР твердо убежден голосовать «за» ( $\alpha_j = 1$ ), а  $i$ -й ЛПР полный конформист ( $\mu_i = 0$ ). Если же степень вероятности того, что  $j$ -й ЛПР придерживается положительного решения лишь с вероятностью  $p_j$ , а коэффициент индивидуализма  $i$ -го ЛПР положителен, то по формуле полной вероятности получаются соотношения (1). Справедливы условия

$$\lambda_{ij} > 0, i \neq j, \lambda_{ii} = 0, \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = 1. \quad (2)$$

Ниже предлагается динамическая модель изменения во времени  $k = 0, 1, 2, \dots$  значений  $p_i(k)$ , в которой на  $k+1$  шаге априорная вероятность равна  $p_i(k)$ , а апостериорная  $p_i(k+1)$ . В этом случае соотношения (1) заменяются на

$$p_i(k+1) = \mu_i p_i(k) + (1 - \mu_i) \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} p_j(k+1), i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

$$p_i(0) = \alpha_i, i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Пусть  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)^T$ ,  $\Lambda = (\lambda_{ij}), i, j = \overline{1, N}$ ,

$\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N)$ ,  $\mu_1 + \dots + \mu_N > 0$ , диагональная матрица,  $\mathbf{E}$  - единичная матрица. Тогда систему (1) можно записать в векторном виде

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{M}\mathbf{p}(k), \text{ где} \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E} - \mathbf{M})\Lambda.$$

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** Если все параметры  $\mu_i < 1$  и справедливы (2), то система уравнений (5), а значит и задача (3)-(4) однозначно разрешима и справедливы рекуррентные соотношения

$$\mathbf{p}(k+1) = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{M}\mathbf{p}(k). \quad \text{Причем, если } \alpha_i \in [0, 1],$$

то и  $\forall k \ p_i(k) \in [0, 1], i = \overline{1, N}$ .

**Теорема 2 (об устойчивости).** Решения системы уравнений (3) устойчивы к возмущениям начальных условий. Иными словами, если все возмущения  $\delta p_i(0) \in [-\varepsilon, \varepsilon], \varepsilon > 0$ , то и все вариации  $\delta p_i(k) \in [-\varepsilon, \varepsilon], i = \overline{1, N}, k = 1, 2, \dots$

**Теорема 3.** Если все  $\mu_i < 1, i = \overline{1, N}$ , то решение уравнения (5) имеет вид

$$\mathbf{p}(k) = \sum_{m=1}^N c_m \mathbf{x}_m z_m^k, |\mathbf{x}_m| = 1, \text{ где } z_m, \mathbf{x}_m \text{ собственные числа и собственные векторы}$$

матрицы  $L = (E - A)^{-1}M$  . Причем  $z_1 = 1$ ,  $x_1 = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $-1 < z_m \leq 1$  .

Коэффициенты  $c_m$  определяются начальными условиями (4.)

#### Список литературы

1. Краснощеков П.С. Петров А.А. Принципы построения моделей. М.: Фазис, 2000.
2. Краснощеков П.С. Простейшая математическая модель поведения. // Математическое моделирование. 1998. Т. 10, № 7. С.76-92.

## Проблемы термодинамического описания лесной растительности\*

Н.В. Белотелов

*ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ «Информатика и управление»,  
Москва, Россия*

Одна из важных проблем при моделировании лесной растительности на мезомасштабном уровне является задача взаимоувязывания разномасштабных процессов, происходящих в лесной растительности и описываемых в своих языковых средах (фотосинтез в хлоропластах, физиология листа и дерева, лесорастительная типизация, массэнергетическое описание потоков воды и углекислого газа, и др.). Другой проблемой являются данные - их получение и масштабирование на большую неоднородную территорию. В связи с этим актуальной задачей, связанной с анализом лесной растительности на региональном уровне, является использование космического многоспектрального сканирования лесных территорий для анализа и прогнозирования лесной динамики, а также сопряжение данных космического мониторинга с данными наземных метеорологических измерений.

Одной из возможностей такого анализа является использование термодинамического подхода, который требует определенных упрощений и схематизации процессов энерго- и массообмена в системе "атмосфера - растительность - почва". [1].

Значительную популярность в последнее время в рамках термодинамического подхода получил так называемый анализ потоков экзергии [2-6], целью настоящего доклада является описание подходов к использованию понятия экзергии для анализа функционирования лесных экосистем и обсуждение недостатков такого подхода. В частности делается попытка учета теплового излучения атмосферы.

#### Список литературы

1. Jorgensen S.E., Svirezhev Y.M., 2004. Towards a Thermodynamic Theory for Ecological Systems. Langford
2. Svirezhev, Yu. M., Steinborn, W.H., Exergy of solar radiation: information approach. Ecol. Model. 1991.145, 101-110, .
3. Svirezhev, Yu M Wolf H. Steinborn, Valeri L. Pomaz. Exergy of solar radiation: global scale. Ecological Modelling 169 (2003) 339-346 doi:10.1016/S0304-3800(03)00280-1
4. Puzachtnko Yu., Sandlersky R., Sankovski A. Methods of Evaluating Thermodynamics Properties of Landscape Cover Using Multispectral Reflected Radiation Measurements by Landsat Satellite. Entropy, 2013, 3970-3982
5. Puzachenko, Y.G., Sandlersky R.B., Svirejeva-Hopkins A.. Estimation of thermodynamic parameters of the biosphere, based on remote sensing. Ecological modelling 2011,222(16). 2913-2923,
6. Svirezhev, Yu. "Thermodynamic orientors: how to use thermodynamics concept in ecology," in Eco Targets, Goal Functions and Orientors, Müller, F. and Leupelt, M., Eds. Springer-Verlag, Berlin, 1998, 102-122.,

\* Работа выполнена при финансовой поддержке. РФФИ (проект № 14-14-00956)...

## **Компьютерная модель коллективного поведения животных**

Н.В. Белотелов, И.А. Коноваленко  
*ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ «Информатика и управление»,  
МФТИ  
, Москва, Россия*

Одной из центральных задач популяционной экологии является моделирование пространственно-временной динамики популяции с учетом индивидуальных эколого-физиологических характеристик особей, формирующих популяцию. В докладе предложена компьютерная модель, описывающая пространственно-временную динамику популяции, взаимодействующей с возобновимым ресурсом. Подробно описан жизненный цикл особи. Предложен алгоритм пространственного перемещения особей по ареалу, учитывающий пищевую и социальную активность. Описаны вычислительные эксперименты с моделью, которые имитируют движения стада животных по ареалу, а также описан модельный эксперимент, когда групповой тип поведения животных вследствие изменения характеристик окружающей среды становится индивидуальным, после чего из-за изменения в параметрах окружающей среды и поведении животных формируется стадо, которое в дальнейшем переходит снова к групповому типу поведения. Проведен анализ, полученных режимов пространственно-временной динамики популяции.

### **Список литературы**

1. Белотелов Н.В., Коноваленко И.А. Эколого-физиологическая модель стада, Математическое моделирование в экологии / Материалы Второй Национальной конференции с международным участием. 23-27 мая 2011г. Пущино. ИФХиБПП РАН, – 2011, –с.40-41
2. Мак-Фарленд Д. Поведение животных: психобиология, этология и эволюция, М., Мир, – 1988, –520 с.

## **Стохастические эффекты в системе «паразит-хозяин»<sup>\*</sup>**

*А.Н. Герасимов*

*Первый МГМУ имени И.М. Сеченова*

Возбудители инфекционных болезней человека являются одним из основных факторов, ограничивающих продолжительность жизни и уровень здоровья населения. Вплоть до середины 20 века именно инфекционные и паразитарные заболевания давали основную долю смертей. Сейчас на первый план вышли новообразования и заболевания сердечно-сосудистой системы, однако, во-первых, в патогенезе многих заболеваний, традиционно считавшихся неинфекционными, выявили вклад инфекционного агента и, во-вторых, сейчас микробы вырабатывают антибиотикоустойчивость быстрее, чем появляются новые антибиотики.

Также наблюдается появление новых видов возбудителей инфекционных и паразитарных заболеваний, трансформация известных и проникновение их в новые ареалы. В связи с этим изучение закономерностей системы «паразит-хозяин» применительно к болезням человека представляет собой чрезвычайно актуальную задачу.

Одной из особенностей эпидемического процесса инфекционных заболеваний человека является то, что взаимодействующие популяции имеют очень сильно различающиеся характерные времена. Для популяции человека характерное время – длительность жизни (или, для инфекций с временным иммунитетом – время сохранения иммунитета), а для возбудителя – время перехода от человека к человеку в цепочке последовательных инфицирований. В большинстве систем взаимодействующих биологических видов характерные времена близки друг к другу, из-за чего они жестко регулируют численность друг друга и стохастические эффекты выражены мало. В

рассматриваемом случае для инфекции с характерным временем заболевания около недели соотношение характерных времен около 1 к 3500, из-за чего регуляция идет медленно и случайные отклонения заболеваемости накапливаются.

Для гомогенной одноточечной популяции состояние описывается набором  $\langle S, I \rangle$  из доли восприимчивой и инфицированной частей популяции, определенном в множестве «физических» значений  $1 \geq S \geq 0, 1 \geq I \geq 0, 1 \geq S + I \geq 0$ , а динамика задается известной системой Кермака – Мак-Кендрика

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = R\beta IS - \beta I \\ \frac{dS}{dt} = -R\beta IS + \gamma(1 - S) \end{cases} \quad (1)$$

где величина  $R$  - контактное число, или среднее количество инфицированных одним инфицированным при 100%-ной доле восприимчивых,  $\beta$  - интенсивность выздоровления,  $\gamma$  - интенсивность обновления. В соответствии с этим  $1/\beta$  - средняя продолжительность заболевания,  $1/\gamma$  - средняя продолжительность жизни для инфекций с пожизненным иммунитетом и продолжительность сохранения иммунитета для инфекций с временным иммунитетом. Из определения параметров следует, что  $\beta > \gamma$ .

Величина  $R$  показывает, достаточно ли велика заразность возбудителя, чтобы удержаться в популяции. Если  $R < 1$ , то возбудитель не может укорениться в популяции и заносы из внешних источников могут вызвать цепочку отдельных случаев инфицирований, но не более. Если  $R > 1$ , то заразность достаточно для вызывания массовой заболеваемости.

При  $R > 1$  у системы имеется единственное нетривиальное стационарное решение  $I_0 = \frac{\gamma}{\beta} \frac{R-1}{R}, S_0 = \frac{1}{R}$ , являющееся глобальным аттрактором.

Введем величины отклонения от стационарного решения  $j(t) = I(t) - I_0, s(t) = S(t) - S_0$ . Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dj(t)}{dt} = (R-1)\beta s + R\beta sj \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\beta j - R\gamma s - R\beta sj \end{cases} \quad (2)$$

Для малых отклонений линеаризованная система (2) примет вид

$$\begin{cases} \frac{dj(t)}{dt} = (R-1)\beta s \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\beta j - R\gamma s \end{cases} \quad (3)$$

В правой части системы (3) – линейный оператор, собственные значения которого равны  $\lambda_{1,2} = -\frac{R\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R\gamma}{2}\right)^2 - \beta\gamma(R-1)}$ .

Если  $\beta \gg \gamma$  величины, то под корнем стоит отрицательная величина, что дает два собственных значения с отрицательной действительной частью и ненулевой мнимой частью, то есть движение по закручивающейся спирали. Если же  $\beta$  и  $\gamma$  достаточно сопоставимы по величине, что может быть для очень длительно протекающих инфекций в случае напряженного пожизненного иммунитета или инфекций с кратковременным иммунитетом, то величина под корнем положительна, но в любом случае она меньше

$\left(\frac{R\gamma}{2}\right)^2$ , что дает два разных отрицательных действительных значения.

Однако традиционная запись системы (1) «скрывает» тот факт, что смерть инфицированного тоже считается его выздоровлением. Поэтому при переходе к стохастическому варианту системы (1) перепишем ее в виде

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = R\beta IS - (\beta - \gamma)I - \gamma I \\ \frac{dS}{dt} = -R\beta IS + \gamma(1 - I - S) + \gamma I \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим теперь динамику соответствующей системы в конечной популяции постоянной численности  $N$ . Тогда потоки заражения, выздоровления и обновления будут Пуассоновыми потоками. В [1] доказано, что для реализации полученного случайного процесса сохраняется условие  $1 \geq S \geq 0, 1 \geq I \geq 0, 1 \geq S + I \geq 0$ .

Динамика стохастической линейризованной системы задается как

$$\begin{cases} \frac{dj(t)}{dt} = \xi_1(j, s) - \xi_2(j, s) - \xi_3(j, s) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\xi_1(j, s) + \xi_2(j, s) + \xi_4(j, s) \end{cases} \quad (5)$$

где  $N\xi_k(j, s), k=1, \dots, 4$  задает Пуассоновы потоки соответствующей интенсивности.

Положим  $\xi_k^0(j, s) = \xi_k(j, s) - M(\xi_k(j, s)), k=1, \dots, 4$ . Заметим, что, так как у распределения Пуассона дисперсия равна математическому ожиданию, то  $D(\xi_k^0(j, s)) = D(\xi_k(j, s)) / N, k=1, \dots, 4$ .

Так как мы уже рассматриваем задачу в предположении о малости отклонений  $|j|=1, |s|=1$ , то линейризуем и стохастическую часть системы (1), перейдя от нее к системе

$$\begin{cases} \frac{dj(t)}{dt} = (R-1)\beta s + \xi_1^0(0,0) - \xi_2^0(0,0) - \xi_3^0(0,0) \\ \frac{ds(t)}{dt} = -\beta j - R\gamma s - \xi_1^0(0,0) + \xi_2^0(0,0) + \xi_4^0(0,0) \end{cases} \quad (6)$$

Полученная система (7) – система дифференциальных уравнений с аддитивной стохастической компонентой.

Стохастические компоненты этой системы не зависят от времени и имеют нулевые математические ожидания и конечные дисперсии, а детерминированный вариант (3) этой системы дает экспоненциально сходящиеся к нулю решения. Из этого следует [2], что система, задаваемая уравнениями (7), имеет единственное равновесное распределение с конечными математическим ожиданием и дисперсией, к которому сходятся все распределения вне зависимости от начального значения.

Для предельного распределения дисперсия доли инфицированных равна  $D(I) = D(j) = 2 \frac{\beta I_0}{R\gamma N} = 2 \frac{R-1}{R^2 N}$  [3].

Например, если мы возьмем город численностью в один миллион жителей с продолжительностью жизни в 70 лет, заболевание с напряженным пожизненным иммунитетом с продолжительностью в две недели и контактным числом в 10, то коэффициент вариации заболеваемости оказывается около 86%.

Полученная оценка позволяет продвинуться в деле корректного определения статистической достоверности различия заболеваемости.

Из полученного решения видно, что величина вариации заболеваемости зависит от длительности заболевания и численности популяции.

Строго говоря, уже в рассмотренном примере величина вариации около 100% плохо соответствует предположению о малости отклонений. Возврат к исходному уравнению (5) и его численный анализ показывает, что для инфекций с длительностью заболевания порядка недели и менее даже многомиллионные популяции оказываются слишком малы, и системы быстро разрушаются из-за флуктуации на ноль. Поэтому достаточно быстрые инфекции с напряженным пожизненным иммунитетом не могут постоянно присутствовать в популяции, а «кочуют», переходя из популяции в популяцию, вызывая там эпидемии, заканчивающиеся элиминацией возбудителя.

## Список литературы

1. Брико Н.И., Покровский В.И., Малышев Н.А. Глобализация и распространение инфекционных заболеваний // Прикладная микробиология. 2015. Т. 2. № 1 (4). С. 20-28.
2. Øksendal Bernt K. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin: Springer, 2003
3. Герасимов А.Н., Отвагин С.А., Шпитонков М.И. Оценка случайных колебаний числа инфицированных в модели «паразит-хозяин» с постоянной общей численностью // Исследование операций (модели, системы, решения). 2014. № 9. С. 43-50.

## Исследование свойств разностных уравнений в одной экологической задаче\*

Г.К. Каменев, Д.А. Саранча, Ю.С. Юрезанская  
*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*  
В.О. Поляновский  
*Институт молекулярной биологии  
им. В.А. Энгельгардта РАН, Москва, Россия*

В работе рассматриваются свойства разностных уравнений (дискретных отображений), полученных при исследовании динамики численности леммингов [1-2]. Для полученных уравнений существует бифуркационный сценарий, при котором возникают зоны стабильности с периодами, изменяющимися в порядке натурального ряда, отделенные переходными зонами значений параметров с более сложными режимами [3]. Важным аспектом исследований таких систем является изучение этих переходных зон.

Аналитически и численно показано, что в переходных зонах с высокой плотностью чередуются циклы больших периодов, значения которых меняются при малом варьировании параметров. Предложен алгоритм возникновения циклов при последовательном увеличении периодов исследуемых циклов. Для рассматриваемого частного случая получены утверждения, конкретизирующие (уточняющие) порядок Шарковского [4].

При численном исследовании зависимости периодических свойств рассматриваемых разностных уравнений используются методы анализа сложных систем, основанные на аппроксимации многомерных множеств, заданных неявно [5-7]. В настоящем исследовании с помощью метрических эпсилон-сетей аппроксимируются и визуализируются множества достижимых состояний и трубки траекторий исследуемого дискретного отображения, карты периода основного цикла, а также карты времени выхода на него. Для построения аппроксимаций применяется метод Глубоких Ям [8]. Скорость сходимости метода Глубоких ям определяется метрической (фрактальной) размерностью аппроксимируемого множества, что является эффективным при исследовании бифуркационных свойств, а также феноменов сингулярности вида «катастрофы голубого неба».

Показано, что технология аппроксимации неявно заданных множеств позволяет для рассматриваемых отображений визуализировать границы переходных зон и явно строить множества существования, в которых рассматриваемая экосистема обладает необходимыми свойствами устойчивости.

## Список литературы

1. Sarancha D.A., Lyulyakin O.P., Trashcheev R.V. Interaction of simulation and analytic methods in modelling of ecological and biological objects // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 2012, Vol. 27, No. 5, pp. 479-492 .
2. В.Н. Глушков, Д.А. Саранча. Комплексный метод математического моделирования биологических объектов. Моделирование тундрового сообщества // Автоматика и телемеханика. 2013. №2. С. 94 -108.
3. Недоступов Э.В., Саранча Д.А., Чигерев Е.Н., Юрезанская Ю.С. О некоторых свойствах одномерных унимодальных отображений // ДАН. 2010. Т. 430. №1. С. 23-28.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке ПФИ Президиума РАН П-15 и П-18.

4. Шарковский А.М. // Укр. мат. журн. 1964. Т.16. №1. С. 61-65.
5. Bushenkov, O.L. Chernykh, G.K. Kamenev, and A.V. Lotov. Multidimensional Images Given by Mappings: Construction and Visualization // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 5, No. 1, 1995. P. 35-56.
6. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К. и Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
7. Lotov A.V., Bushenkov V.A., and Kamenev G.K. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
8. Каменев Г.К. Аппроксимация вполне ограниченных множеств методом Глубоких Ям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. №11. С. 1751-1760.

## **Алгоритм формирования классификаторов критериев экологической безопасности гидротехнических систем**

Н.П. Карпенко

*РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева, Москва, Россия*

Одной из важных экологических проблем, которые рассматриваются и решаются на объектах природообустройства, – это сохранение и повышение экологической безопасности функционирования техноприродных систем любого назначения. Наиболее остро эти проблемы стоят для гидротехнических систем Российской Федерации, большинство из которых выработали свой ресурс, морально и физически устарели и изношенность которых в последние годы составляет около 90%, что усиливает возможность возникновения экологических аварий на этих объектах. Основные требования по экологической безопасности функционирования гидротехнических систем могут быть сформированы при разработке и построении единых классификаторов, отсутствие которых на современном этапе приводит к информационному отставанию в области эффективного технического регулирования.

В настоящее время государственная политика Российской Федерации в области технического регулирования выражается в необходимости приведения нормативных и правовых документов в области безопасности гидротехнических сооружений в соответствие с Федеральным законом [1].

В основе разработки классификаторов в области гидротехнического строительства и водохозяйственного комплекса, эксплуатации гидротехнических систем и сооружений (в том числе при проведении их реконструкции), системы безопасности и продления сроков эксплуатации таких систем и сооружений лежит формирование единой унифицированной и взаимоувязанной системы классификаторов. Это дает возможность обосновать разработку технологий и техники, позволяющих повысить уровень безопасности при одновременном снижении энергетических затрат на эксплуатацию и ремонт гидротехнических систем и сооружений во всех субъектах Российской Федерации.

Разработка классификаторов гидротехнических сооружений предназначена: для осуществления поиска и обмена необходимой информацией по данным объектам; для обеспечения однозначной идентификации рассматриваемых объектов; для систематизации документов фонда технических регламентов; для информационного обеспечения в системах и базах данных; для управленческих решений и автоматизированного использования базы данных для безопасной эксплуатации гидротехнических сооружений; в качестве основы для базы нормативно-правовых документов в области стандартизации объектов водохозяйственного комплекса и др.

Для построения системы классификаторов гидротехнических сооружений и критериев эффективности системы безопасности были использованы следующие научные подходы [2]:

– *системный подход*, представляющий собой комплекс научных исследований, направленных на изучение объектов и их функциональных особенностей. Основным методом этого подхода является системный анализ, основные положения которого дают возможность построить не только методологическую концепцию системы обеспечения работ по безопасной эксплуатации федеральных гидротехнических сооружений, но и составить иерархическую структуру классификаторов. В основу формирования системы классификаторов был положен один из принципов теории графов – построение дерева

графов, основные позиции которого позволяют изучить и организовать информацию о систематизации данных по гидротехническим объектам природообустройства [3];

– *интеграционный подход*, предполагающий учет вопросов объединения всех объектов для выявления общих принципов взаимодействия и функционирования всех звеньев системы. Метод позволяет сформировать единую и четкую информационную систему для управления объектами гидротехнических сооружений;

– *нормативный подход*, позволяющий проводить анализ гидротехнических объектов и систем с целью их совершенствования с учетом совокупности важнейшей целевой нормативно-правовой и нормативно-технической документации в области безопасности зданий и сооружений;

– *комплексный анализ* унифицированных классификаций гидротехнических сооружений.

Для реализации перечисленных подходов к разработке и формированию унифицированной системы классификаторов гидротехнических сооружений и критериев их экологической безопасности был сформирован алгоритм построения классификатора и учтены следующие базовые методические положения [2]:

- рассмотрение объектов природообустройства в виде заданного множества объектов классификации, включающее выделение признаков классификации, видов, классов, подклассов, групп, а также методов классификации;
- использование унификации построения, которая дает возможность выбора наименований объектов классификации;
- использование кодирования заданного множества объектов классификации.

Построение и формирование алгоритмов единой системы и структуры классификаторов объектов гидротехнических систем и сооружений водохозяйственного комплекса основано на существующих классификациях, которые представляют собой не только информационную базу описания гидротехнических систем и сооружений, но и методов и способов защиты этих сооружений от разрушения, технологий продления сроков эксплуатации таких систем, повышения их экологической безопасности и т.д.

#### Список литературы

1. Федеральный закон от 27.12.2002 № 184-ФЗ (ред. от 28.11.15) «О техническом регулировании».

2. Карпенко Н.П., Юрченко И.Ф. Теоретическое обоснование структуры классификатора критериев безопасности ГТС мелиоративного водохозяйственного комплекса // Природообустройство. – М., 2015, № 1. С.12-15.

3. Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программировании. – М.: Наука, 1985. 352с.

## Анализ геоэкологического риска на основе квалиметрической интегральной оценки загрязнения окружающей среды

В.В. Михайлов, В.М. Умывакин, А.В. Швец

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»  
(г. Воронеж)*

Актуальной проблемой управления устойчивым развитием территорий является интегральная оценка качества окружающей среды (ОС) природно-технических систем (ПТС) в категориях экологической безопасности и риска. Понятие «безопасность» не существует без антонима «экологическая опасность», которая определяется как вероятность (потенциальная возможность) ухудшения качества ОС в результате хозяйственной и иной деятельности.

В работах [1-3] предложен методический аппарат построения частных и интегральной оценок экологической опасности территорий ПТС. Введем следующие обозначения:  $y_j^i$  – значение  $j$ -го показателя качества (ПК)  $i$ -й ПТС;  $y_j^*$  – предельно-допустимое значение  $j$ -го ПК (экологический норматив) для всех геосистем;  $\mu_j^i = \mu_j^i(y_j^i)$  – частная абсолютная оценка качества ОС для  $i$ -й ПТС по  $j$ -му ПК;  $\varepsilon_j = \varepsilon_j(y_j^*)$  – соответствующий нормативный уровень экологической безопасности территорий. В квалиметрии принято считать, что  $0 \leq \mu_j^i$ ,  $\varepsilon_j \leq 1$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ ). Требования к качеству ОС выполняются при  $y_j^i \leq y_j^*$ . При этом  $\mu_j^i \geq \varepsilon_j$ .

Построение частных абсолютных оценок качества ОС может осуществляться с помощью различных преобразований натуральных ПК:

$$\mu_j^i = y_j^{\min} / y_j^i, \quad (1)$$

$$\mu_j^i = [(y_j^{\max} - y_j^i) / (y_j^{\max} - y_j^{\min})]^k, \quad (2)$$

где  $y_j^{\min}, y_j^{\max}$  – соответственно максимальное и минимальное значения  $j$ -го ПК.

При  $k = 1$  имеем линейное преобразование, при  $k \neq 1$  – нелинейное.

Для частной относительной оценки  $d_j$  загрязнения ОС предлагается использовать следующую формулу [1-3]:

$$d_j^i = [\varepsilon_j (1 - \mu_j^i)] / [\mu_j^i (1 - \varepsilon_j)]. \quad (3)$$

Приведем вероятностную интерпретацию частных относительных оценок  $d_j^i$  загрязнения ОС как частных оценок экологической опасности территорий ПТС. Будем считать, что если частная абсолютная оценка  $\mu_j^i$  качества ОС хотя бы по одному ПК ниже соответствующего нормативного уровня  $\varepsilon_j$ , то удовлетворить требование к интегральному качеству ОС  $i$ -й ПТС невозможно. Пусть  $A^i$  и  $B_j^i$  – соответственно события, состоящие в том, что для  $i$ -й ПТС не выполнены требования к качеству ОС в целом и к качеству ОС по  $j$ -му ПК, а  $\bar{B}_j^i$  – событие, противоположное событию  $B_j^i$ . Тогда  $P(A^i / \bar{B}_j^i)$  – вероятность невыполнения требований к интегральному качеству ОС при условии, что выполнены требования к качеству ОС по  $j$ -му ПК для  $i$ -й ПТС. Эта условная вероятность определяется по формуле [1, 3]:

$$P(A^i / \bar{B}_j^i) = \{P(B_j^i)[1 - P(B_j^i / A^i)]\} / \{P(B_j^i / A^i)[1 - P(B_j^i)]\}. \quad (4)$$

Обозначим через  $d_j^i = P(A^i / \bar{B}_j^i)$ , через  $\mu_j^i = P(B_j^i / A^i)$  – вероятность некачественности ОС по  $j$ -му ПК для  $i$ -й ПТС при условии, что требование к качеству ОС в целом не выполнено, а через  $\varepsilon_j = P(B_j^i)$  – вероятность некачественности ОС по  $j$ -му ПК для  $i$ -й ПТС. Таким образом, формула (5) совпадает с формулой (4) оценки  $d_j^i$ , которая является квалитетической моделью частной относительной оценки экологической опасности территорий ПТС.

Рассмотрим экологическую ситуацию, когда качество ОС геосистем характеризуется двумя частными ПК –  $y_1$  и  $y_2$ . Пусть  $d_1$  и  $d_2$  – соответствующие частные относительные оценки по этим ПК, а  $d = d(d_1, d_2)$  – интегральная оценка загрязнения ОС, которая рассматривается как результат агрегирования этих частных оценок.

Как показано в работе [3], при выполнении условий ассоциативности (иерархической одноуровневости) и коммутативности (равноценности) частных оценок  $d_j^i$  интегральная оценка  $d^i$  экологической опасности территории  $i$ -й ПТС имеет следующий вид:

$$d^i = d_1^i + d_2^i - d_1^i d_2^i = 1 - (1 - d_1^i)(1 - d_2^i) = 1 - \prod_{j=1}^2 (1 - d_j^i). \quad (5)$$

Формула (5) совпадает с формулой вероятности суммы двух совместных независимых событий, заключающихся в невыполнении требований к интегральному качеству ОС при условии, что выполнены требования к качеству ОС и по первому и по второму ПК для  $i$ -й ПТС.

В общем случае интегральная оценка экологической опасности природно-техногенных территорий имеет следующую структуру:

$$d^i = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - d_j^i). \quad (6)$$

При этом  $0 \leq d^i \leq 1$ . Можно получить интерпретацию величины  $d^i$  как вероятности  $P(A^i / \bar{B}_1^i \bar{B}_2^i \dots \bar{B}_m^i)$  недостижения требуемого интегрального качества ОС геосистем при условии выполнения требований к качеству ОС по всем ПК [1, 3]. Чем меньше ее значение, тем выше качество ОС (тем выше экологическая безопасность территорий ПТС).

В работах [1, 3] показано, что для  $m$  неравноценных частных относительных оценок неаддитивная интегральная оценка загрязнения ОС вычисляется по формуле:

$$d^i = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - d_j^i)^{v_j}, \quad (7)$$

где  $v_j$  – весовой коэффициент  $j$ -й частной оценки, удовлетворяющий условию:

$$\sum_{j=1}^m v_j = 1, v_j \geq 0, j=1,2,\dots,m. \quad (8)$$

Интегральная оценка (7) является средневзвешенной «квазигеометрической» величиной в смысле ассоциативного среднего по А.Н. Колмогорову [4]. При этом имеет место неравенство [1]:

$$\left[ 1 - \prod_{j=1}^m (1 - d_j) \right] \geq \max_{j=1,2,\dots,m} d_j \geq \left[ 1 - \prod_{j=1}^m (1 - d_j)^{v_j} \right] \geq \sum_{j=1}^m v_j d_j \geq \prod_{j=1}^m d_j^{v_j} \geq \min_{j=1,2,\dots,m} d_j. \quad (9)$$

Таким образом, средневзвешенное квазигеометрическое является оценкой «сверху» (более «жесткой» оценкой) для средневзвешенного арифметического («целое не есть сумма частей его составляющих») и средневзвешенного геометрического и имеет системный смысл.

Подчеркнем, что с информационной точки зрения [1, 3] величина  $I_j = I(d_j) = -\ln(1 - d_j) = \ln[1 / (1 - d_j)]$  является мерой неопределенности информации (частной информационной оценкой) при вычислении энтропии, т.к. оценка  $d_j$  имеет вероятностную интерпретацию. При этом интегральная информационная оценка  $I$  является средневзвешенной арифметической величиной – функцией средневзвешенного «квазигеометрического» (интегральной квалиметрической оценки  $d$ ):

$$I = I(d) = \ln[1 / (1 - d)] = \sum_{j=1}^m \lambda_j I_j.$$

Можно показать [1], что величина  $E = -\ln(1 - d)$  является «квазисредней» величиной – длиной в натурально-логарифмической шкале  $[0, \infty)$ . Как правило, частная квалиметрическая оценка  $d_j$  и частная информационная оценка  $I_j$  устроены так, что «улучшение» качества ОС совпадает с увеличением значений  $d_j$  и  $I_j$ . Если за  $d$  взять величину  $d_e = 1 - 1/e \approx 0,63$ , то  $\ln[1 / (1 - d_e)] = 1$ . При этом, величина  $d_e = 0,63$  является единичным элементом в алгебре оценок  $d_j$  [1].

В настоящее время для оценки геоэкологического риска  $R$  загрязнения ОС используется сводная формула типа «произведение» [4]:

$$R = P \cdot U, \quad (10)$$

где  $P$  – вероятность экологически опасного события;  $U$  – ущерб, нанесенный ОС и/или здоровью населения в результате негативного антропогенного воздействия.

Отметим, что для геоэкологического риска  $R^i$  как произведения  $P^i \cdot U^i$  двух разнородных критериев может не выполняться принцип «ограниченной компенсации», т.е. условие невозможности компенсации «плохих» значений одного критерия за счет «хороших» значений другого критерия.

Далее под геоэкологическим риском  $R^i$  понимается количественная мера, учитывающая вероятность  $P^i = d^i$  ухудшения качества ОС в результате хозяйственной и иной деятельности и конкретизированные негативные последствия ее проявления в виде социально-экономического ущерба  $U^i$ . Таким образом, предлагается рассматривать геоэкологический риск как свертку двух разнородных критериев  $P^i$  и  $U^i$ , приведенных к одному сопоставимому виду (являющихся безразмерными величинами). Преобразуем критерий  $U^i$  к безразмерному виду:

$$U_n^i = (U^i - U^{min}) / (U^{max} - U^{min}), \quad (11)$$

где  $U_n^i$  – нормированное значение из интервала  $[0,1]$ ;  $U^{min}$  и  $U^{max}$  – соответственно минимальное и максимальное значения.

Для анализа геоэкологического риска  $R^i$  как функции двух безразмерных критериев  $P^i$  и  $U_n^i$  будем использовать агрегированную оценку  $R_{скз}^i$  типа «средняя квазигеометрическая величина» [1]:

$$R_{скз}^i = 1 - (1 - P^i)^{0,5} (1 - U_n^i)^{0,5}, \quad (12)$$

а для содержательной интерпретации уровня геоэкологического риска – модифицированную шкалу Харрингтона [5] со следующими тремя градациями: «низкий» (диапазон от 0,00 до 0,37); «средний» (диапазон от 0,37 до 0,63); «высокий» (диапазон от 0,63 до 1,00).

На рис. 1 приведено визуальное представление 32 модельных ПТС на плоскости двух критериев: «экологическая опасность химического загрязнения ОС» и «общий социально-экономический ущерб». Здесь области (зоны) низкого, среднего и высокого медико-экологического риска выделены графически различными заливками.

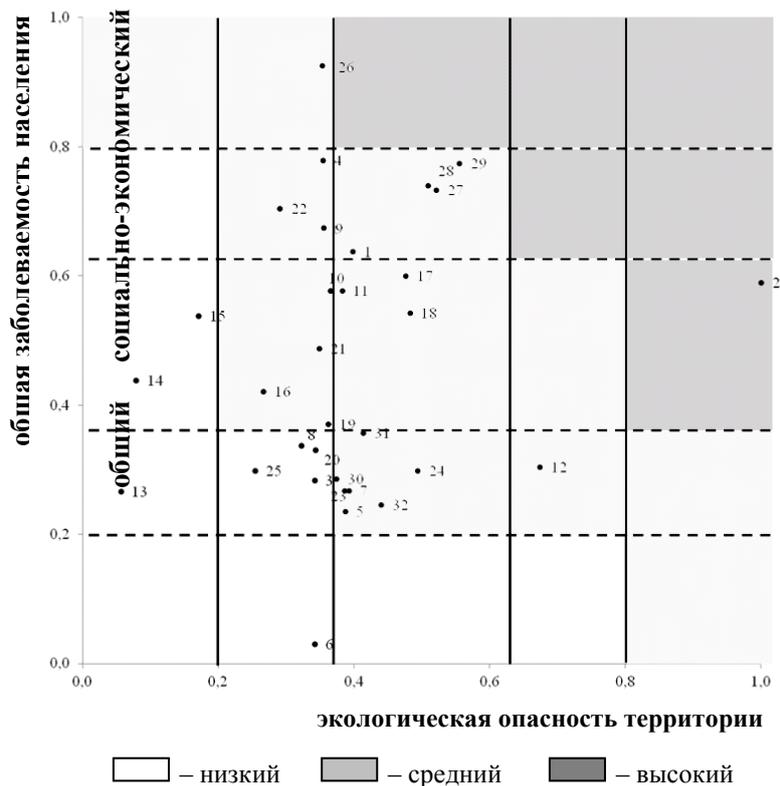


Рис.1. Ранжирование природно-технических систем по уровню геоэкологического риска

Таким образом, геокалметрический подход к построению неаддитивной интегральной оценки загрязнения ОС позволяет измерять уровень экологической опасности территорий ПТС и использовать данную оценку для анализа проблемных экологических ситуаций в категориях риска. Оценка геоэкологического риска типа средняя квазигеометрическая величина имеет вероятностную интерпретацию и позволяет квалифицированно ранжировать исследуемые ПТС на основе вербально-числовой шкалы Харрингтона [5].

#### Список литературы

1. Зибров Г.В. Квалиметрические модели вербально-числового анализа экологической опасности территорий природно-хозяйственных геосистем / Г.В. Зибров, В.М. Умывакин, А.В. Швец // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2013. № 1. С. 112–118.
2. Зибров Г.В. Квалиметрическая модель интегральной оценки экологической опасности территорий природно-технических систем / Г.В. Зибров, В.М. Умывакин, А.В. Швец // Тр. VII Моск. междунар. конф. по исслед. операций (ORM2013), Москва, 15-19 окт. 2013 г. / Вычисл. центр РАН. М., 2013. Т. 2. С.129–131.
3. Каплинский А.И. Моделирование и алгоритмизация слабоформализованных задач выбора наилучших вариантов систем / А.И. Каплинский, И.Б. Русман, В.М. Умывакин. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1991. 168 с.
4. Карлин Л.Н. Рискологические исследования в РГГМУ/ Л.Н. Карлин, А.А. Музалевский // Безопасность жизнедеятельности. 2011. № 2 (122). С. 5–19.
5. Harrington E. C. Jr. The desirability function / E. C. Jr. Harrington // Industrial quality control. 1965. Vol. 21, №10. P. 494-498.

# Гидродинамическая модель переноса парниковых газов в приземном слое атмосферы над неоднородной подстилающей поверхностью\*

Ю.В. Мухартова<sup>1</sup>, Н.Т. Левашова<sup>1</sup>, А.С.Крупенко<sup>1</sup>, А.В. Ольчев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Институт проблем экологии и эволюции имени А.Н. Северцова  
Российской академии наук, Москва, Россия*

Для численного моделирования процесса турбулентного переноса CO<sub>2</sub> и малых газовых компонент между горизонтально неоднородным растительным покровом и приземным слоем воздуха в локальном масштабе разработана двумерная модель, основанная на решении системы усредненных уравнений Навье-Стокса и неразрывности 1.5-го порядка замыкания [1]. Неизвестные ковариации второго порядка, возникающие в усредненных уравнениях, выражаются с помощью градиентов средних величин и коэффициента турбулентной диффузии. Коэффициент турбулентной диффузии в свою очередь может быть выражен через турбулентную кинетическую энергию и скорость ее диссипации. Для этих двух функций в модели используются два вспомогательных дифференциальных уравнения.

Для описания влияния неоднородного рельефа местности, а также зданий городской застройки на турбулентные потоки в модели использовано два подхода. В первом варианте непроницаемые препятствия и элементы рельефа рассматриваются как предельные случаи проницаемых препятствий с большим коэффициентом сопротивления. Уравнения для компонент усредненной скорости ветра при этом модифицируются таким образом, чтобы добиться выполнения условий Неймана для избыточного давления на границе таких препятствий.

Начальные условия для описания вертикального распределения скорости ветра с высотой задаются на основе хорошо известного логарифмического профиля скорости ветра в приземном слое воздуха над однородной подстилающей поверхностью при нейтральной атмосферной стратификации.

Для того чтобы добиться устойчивости численного алгоритма в модели, увеличение коэффициента сопротивления препятствий, моделирующих элементы рельефа, происходит постепенно. Это можно интерпретировать как предварительное вычисление начального распределения компонент скорости ветра, избыточного давления, турбулентной кинетической энергии и скорости ее диссипации при наличии неровностей нижней границы расчетной области.

Второй подход заключается в использовании замены переменных, учитывающей форму нижней границы расчетной области.

Также осуществлено обобщение разработанной модели, позволяющее провести учет термической стратификации приземного слоя воздуха. Для этого в модель включено уравнение теплопроводности в движущемся потоке, из которого может быть найдено отклонение температуры воздуха от основного состояния, определяемого адиабатическим профилем. При этом в правые части уравнений для турбулентной кинетической энергии и вертикальной компоненты скорости ветра внесены дополнительные слагаемые, характеризующие работу сил плавучести.

Растительность рассматривается как двухфазная среда, состоящая из растительной биомассы и воздуха в межлиственном пространстве. Предполагается, что солнечная радиация поглощается только растениями, которые обмениваются теплом с окружающим воздухом. Количество тепла, которым лист обменивается в единицу времени с окружающим воздухом за счет теплообмена, прямо пропорционально разности температур листа и воздуха и обратно пропорционально сопротивлению поверхностного слоя листа, которое в свою очередь обратно пропорционально корню из модуля скорости ветра.

Для описания процесса фотосинтеза растительного покрова в модели использован комплексный подход, основанный на эмпирической модели Болла с соавторами [2] в модификации Леннинга [3], уравнении Беера-Ламберта для описания процесса ослабления солнечной радиации в растительном покрове [4], а также алгоритме для описания

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (14-14-00956).

зависимости устьичной проводимости листьев растений для  $H_2O$  и  $CO_2$  от приходящей фотосинтетически активной радиации (ФАР).

Результаты модельных расчетов, проведенных для нескольких тестовых участков местности с неоднородной растительностью и сложным рельефом, показали существенное влияние, оказываемое элементами неоднородности на поле скорости ветра и потоки  $CO_2$  внутри и над растительным покровом.

#### Список литературы

1. Мухартова Ю.В., Левашова Н.Т., Ольчев А.В., Шапкина Н.Е. Применение двумерной модели для описания турбулентного переноса  $CO_2$  в пространственно-неоднородном растительном покрове // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика и Астрономия. 2015, № 1. С. 15-22.
2. Ball J., Woodrow I., Berry J. A model predicting stomatal conductance and its contribution to the control of photosynthesis under different environmental conditions // Progress in Photosynthesis Research. Biggins I. (Ed.). Netherlands: Martinus Nijhoff, 1987. P. 221-224.
3. Leuning R. A critical appraisal of a combined stomatal-photosynthesis model for  $C_3$  plants // Plant Cell Environment. 1995, Vol. 18. P. 339-355.
4. Monsi M., Saeki T. Ueber den Lichtfaktor in den Pflanzengesellschaften und seine Bedeutung fuer die Stoffproduktion // Japanese Journal of Botany. 1953, Vol. 14. P. 22-52.

## О неустойчивости в моделях биологических сообществ

В.Н. Разжевайкин\*

*Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына, Москва, 119991, Вавилова, 40.*

Экологическая стабильность в популяционном моделировании играет роль своеобразного квалификационного теста на пригодность математической модели служить для долгосрочного описания исследуемого биологического сообщества в его динамике. Она стоит в одном ряду с другими такими же тестами, как, например, структурная устойчивость, т.е. сохранение качественных свойств решений уравнений модели при малых возмущениях, или, к примеру, максимальная приемлемая простота, т.е. отсутствие в модели искусственных математических структур, не обусловленных содержательно, но способных приводить к результатам, пригодным для соответствия с наблюдаемыми у моделируемого объекта. Некоторые соображения, касающиеся подобных тестирований, можно найти в [1].

Суть экологической стабильности заключается в следующем. Если модель построена правильно, то решения должны вести себя сходно с популяциями, учтенными в модели, на продолжительных временах, т.е. асимптотически. Поскольку учитываются, как правило, только те из популяций, которые не исчезают со временем (ибо один из трех базовых принципов дарвиновской теории эволюции, а именно наследственность, означающий воспроизведение себе подобных, влечет другую формулу: «из ничего ничего не возникает», что позволяет раз и навсегда забыть в будущем об однажды исчезнувшем виде), то и в модели соответствующие им компоненты не должны исчезать. И уж само собой разумеется, они должны быть ограничены хотя бы из-за ограниченности доступного ресурса. Другими словами, траектории решений «хорошей» модели должны быть локализованы в некотором коридоре, не приближаясь слишком близко к нулевой отметке и не убегая в бесконечность. Заметим, что с этой точки зрения все линейные модели являются «плохими», ибо только такие два типа поведения и демонстрируют, так что недаром их используют для моделирования только на коротких промежутках времени.

В докладе приводится ряд достаточных условий, гарантирующих отсутствие экологической стабильности в широком классе так называемых покомпонентно подразделенных моделей биологических сообществ. Это позволяет, основываясь на их использовании, отфильтровывать заведомо «негодные» конструкции из числа претендентов на место среди долгосрочных моделей математической биологии. В качестве «позитивного» результата приводится теорема об исчезновении из сообщества сразу нескольких видов в случае выполнения некоторых условий типа неравенства, что является обобщением математической формулировки ресурсного варианта принципа Гаузе об

---

\* Выполнено при поддержке РФФИ. Код проекта 15-07-06947

исключении по крайней мере одного вида из сообщества при конкуренции за меньшее число ресурсов. Изучаются пограничные случаи, для которых в частности конструируются достаточные условия квазиэкспоненциального исчезновения. Приводится ряд контрпримеров к предлагаемым теоремам в случае нарушения их условий. Результаты иллюстрируются на примере одного из вариантов обобщенной модели Лотки—Вольтерра. Ряд теорем, относящихся как к самой теории, так и к используемому математическому аппарату, опубликован в [2] и [3].

1. *Разжевайкин В.Н.* Анализ моделей динамики популяций. М., МФТИ, 2010. 174 с.
2. *Разжевайкин В. Н.* Некоторые вопросы описания минимальных граней выпуклых множеств// Исследование операций (модели, системы, решения). М., ВЦ РАН. Т.1 (10), 2015. С. 3-19
3. *Разжевайкин В. Н.* К вопросу об экологической нестабильности в моделях биологических сообществ//Исследование операций (модели, системы, решения). М., ВЦ РАН. Т.1 (10), 2015. С. 20-42

# Математическое моделирование антиоксидантных процессов\*

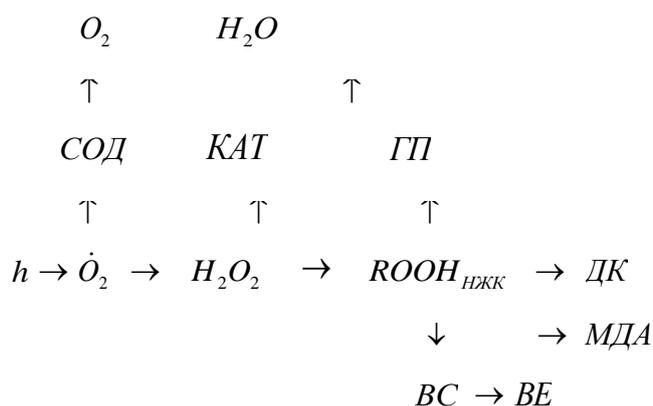
М.И. Шпитонков

*ВЦ им. А.А. Дородницына ФИЦ "Информатика и управление" РАН Москва, Россия*

В ходе обмена веществ в клетке протекает большое количество окислительно - восстановительных реакций, в ходе которых могут образовываться свободные радикалы - соединения, которые в силу своих физико - химических свойств представляют серьезную опасность для жизнедеятельности клетки. Окислительных процессы протекают в клетке в нормальных физиологических условиях, и это приводит к постоянному образованию свободных радикалов. Химические реакции образования и превращения свободных радикалов хорошо изучены. Эти реакции являются очень быстрыми, константы скоростей реакций порядка  $10^5 - 10^{10} \text{ м}^{-1} \text{ с}^{-1}$ .

Существуют две линии защиты клетки от повреждения свободными радикалами. Первую линию защиты клетки обеспечивает группа ферментов супероксиддисмутаза (СОД). Они защищают организм от супероксидного радикала ( $\dot{O}_2$ ). Две другие группы ферментов каталазы и пероксидазы предназначены для улавливания перекиси водорода. Третья группа - глутатионредуктаза обезвреживает гидроперекиси жирных кислот. Вторая линия защиты - это имеющиеся в любой живой клетке группы веществ, называемые биоантиоксидантами (БАО). Сюда включают, как правило, различные группы витаминов (А, Е, С и т.д.).

Рассматривается следующая схема модели АОС клетки:



Здесь ГП - глутатионпероксидаза, ДК - диеновые конъюгаты, МДА - малоновый диальдегид, ВС - витамин С, ВЕ - витамин Е,  $ROOH_{HЖК}$  - гидроперекись жирных кислот, КАТ – каталаза, ДК и МДА являются продуктами распада гидроперекиси ненасыщенных жирных кислот.

Далее на основе представленной схемы выписана система обыкновенных дифференциальных уравнений. Определены и исследованы на устойчивость (с учетом различных характерных времен скоростей биохимических реакций) стационарные решения данной модели. Показана адекватность построенной модели реальным биохимическим данным.

Работе выполнена при поддержке РФФИ. Код проекта №15-07-06947.

## Список литературы

1. Разжевайкин В.Н., Шпитонков М.И., Мальцев Г.Ю. Моделирование метаболических процессов, связанных с факторами среды. М.: ВЦ РАН, 1994, 18 с.
2. Шпитонков М.И. Модель антиоксидантной системы клетки // Труды ИСА РАН. Динамика неоднородных систем, 2010, Т. 49(1). С.273-281.

\* Работе выполнена при поддержке РФФИ. Код проекта №15-07-06947.

## Автоматизированное проектирование

1. Yu.I. Brodsky Model-oriented programming: an application of CAD methods in programming
2. В.В. Балашов, А.Б. Глонина Использование автоматически построенных имитационных моделей при проектировании ИУС РВ с архитектурой ИМА
3. Л.Л. Вышинский, Н.И. Широков САПР ЛА. Интегрированная система весовых расчётов
4. А.А. Логинов Подсистемы Генератора проектов для взаимодействия с WEB-клиентами
5. И.Ф. Шахнов Согласование решений при планировании развития сложных сильносвязных систем
6. А.Н. Широков, Е.Н. Широкова, А.А. Логинов, С.А. Скиндерев Автоматизация разработки веб-проектов
7. Н.И. Широков Генератор проектов 2016

### **Model-oriented programming: an application of CAD methods in programming**

Yu.I. Brodsky

*Federal Research Centre Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

In this work, the new programming paradigm is offered, with higher level of encapsulation, than in the object-oriented approach. Its key features - an exclusion of imperative programming, and focusing on the distributed and high-performance calculations. The approach proposed is applicable for rather wide class of tasks including creation of simulation models of complex multi-component systems.

Historically, the changings of programming paradigms was accompanied by the aggregation of the base instruments of the programmer's activity.

It all started with the machine instruction, then, with the advent of high-level languages – such a tool became an operator, which implements some action, possibly with a few machine instructions.

The victory of structured programming ideas replaced individual operators and variables by standard constructions such as "loop", "branching", "subroutines-functions" and data structures.

With the advent of object analysis, the object became the main unit of the design. It unites some kind of data structure with a set of methods necessary for the data processing. In addition, through the inheritance mechanism, you can build a hierarchy of object classes, developing, implementing and embodying basic ideas of the root classes of this hierarchy. This programming paradigm is currently the dominant and its basic concepts, such as class, object, data typing, inheritance, encapsulation, polymorphism is implemented with some nuances in most modern imperative programming languages, such as C++, Java, C#, Delphi and others.

Inheritance relationship for the set of classes of object-oriented programming language is a partial order. Classes that have no ancestors, but have descendants are called to them root or base. Classes that do not have descendants are called leaf.

Designing of a large software system with the object-oriented paradigm is laying the basic concepts and ideas of this system into the base classes of objects and then building a hierarchy of classes, developing, specifying and embody these ideas in a variety of leaf classes, with the help of which the target software system will be built. Even if the object-oriented design has built the greatest hierarchy of classes using inheritance, still all the organization of the computational process lies on the developer of the system: for the system operation – the developer is to organize calling of appropriate methods in the desired sequence.

To describe complex systems in the object paradigm, the unified modelling language UML was proposed in the late 90s [1]. The creators of UML have opted for a sharp increase in the

number of initial concepts and ideas. They say about the language: “UML is subject to the rule of 80/20, i.e., 80% of most problems can be solved using 20% of the UML” [1].

Apparently, any system can be described with the help of the UML, and even from several points of view. The question is what to do next with such descriptions – there is no unity in opinions. Some specialists believe that the main value of UML is just in the application as a mean of recording and sharing formalized descriptions of the stages of the sketch and design of complex program systems. However, there are a number of tools, which allows compiling the UML-descriptions into the billet classes of universal programming languages, and in this case we can speak about the mode of using UML as a programming language, though a hard problem of compilation quality arises.

Here we will describe a different approach to the programming – a model-oriented one, which is based on the model synthesis [2, 3], on the concept of the model-component. A model-component of the model synthesis is more complex and aggregate structure, than the object of the object analysis. Its main difference from the object – the possession of its own behavior, in the sense in which, for example, a computer with the operating system loaded, has behavior – the ability to respond on a set of standard requests in predetermined manner, known in advance.

The proposed idea of model synthesis is minimalistic in a set of basic concepts: it has the only basic concept – a model-component and an auxiliary concept – a model-complex, which after all can also be treated as a model-component, hence itself may be included in the next level model-complexes as their component, etc. Any model may be run according the same standard rules, i.e., can be performed by once written and debugged program of models’ execution. In addition, the program of models’ execution is such that most of its calculations allow parallelization. The process of the programming breaks down firstly, into series of declarative descriptions of models-components and models-complexes combining models-components; and secondly, on the programming of certain functional dependencies, which are functions in the mathematical – not programming sense (i.e., unambiguous and have no states and side effects), and therefore can be programmed in a functional paradigm. This leads to the fact that the software implementation of even the most complicated fractal arranged system excludes the imperative programming – the most difficult at the stage of debugging.

The fee for this is a higher level of encapsulation. In contrast to the object analysis it is impossible (and unnecessary) to call the methods of the model-component “manually” with some “foreign” parameters. They are always called automatically, and only with the subset of characteristics of the model-component as parameters, in accordance with the described behavior of the model.

For the descriptions of models-components and models-complexes, the LCCD declarative language (language of the description of complexes and components) is elaborated. LCCD descriptions are compiled into database tables. Therefore, the question of compilation quality is not too actual - correctness of the compilation is important. The quality of computations lies in the universal program of models’ execution, which may be optimized.

## References

1. Booch G., Rumbaugh J., Jacobson I. UML. User Guide, 2-ed., Addison-Wesley, 2005.
2. Brodsky Yu.I. Bourbaki's Structure Theory in the Problem of Complex Systems Simulation Models Synthesis and Model-Oriented Programming // Computational Mathematics and Mathematical Physics Vol. 55 No. 1, 2015. P. 148-159.
3. Brodsky Yu.I. Model synthesis and model-oriented programming – the technology of design and implementation of simulation models of complex multicomponent systems // In the World of Scientific Discoveries, Series B, 2014, Vol. 2, No 1, P. 12-31.

# Использование автоматически построенных имитационных моделей при проектировании ИУС РВ с архитектурой ИМА\*

В.В. Балашов, А.Б. Глонина  
*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

В работе представлен метод автоматического построения имитационных моделей информационно-управляющих систем реального времени (ИУС РВ) с архитектурой интегрированной модульной авионики (ИМА) и подходы к его практическому применению при проектировании таких систем.

Для систем ИМА характерна стандартизация вычислительных модулей и программного интерфейса их операционных систем. Несколько приложений разделяют ресурсы одного модуля. Приложению соответствует раздел с заданными интервалами времени, называемыми окнами, в течение которых он выполняется на процессоре. Модуль имеет статическое расписание окон, которое отрабатывается глобальным планировщиком. Раздел содержит множество задач, выполнением которых управляет динамический планировщик. Между задачами существуют зависимости по данным: получатель не может начать выполнение до тех пор, пока все отправители не передадут ему выходные данные. Взаимодействие задач разных разделов осуществляется посредством коммутируемых сетей с виртуальными каналами.

Под конфигурацией системы ИМА понимается совокупность следующих ее параметров: число и тип модулей, тип и структура коммуникационной среды, привязка разделов к модулям, расписания окон, стратегии работы планировщиков, настройки виртуальных каналов, приоритеты задач. Критерием допустимости конфигурации является завершение всех работ (экземпляров задач) в рамках директивных сроков.

При проектировании возникает оптимизационная задача выбора лучшей конфигурации, в процессе решения которой необходимо проверять допустимость потенциальных конфигураций. На практике аналитические методы оценки времени завершения работ не пригодны, т. к. для сложных конфигураций они либо слишком пессимистичны, либо не существуют. Поэтому вместо них целесообразно использовать имитационное моделирование [1].

Так как в процессе оптимизации перебирается большое число конфигураций, построение и прогон имитационных моделей (ИМ) должны быть полностью автоматизированы.

При построении систем ИМА используются стандартные компоненты и количество типов таких компонентов невелико, поэтому предлагается синтезировать ИМ системы из моделей стандартных компонентов. Основной задачей имитационного моделирования в рассматриваемом случае является вычисление верхних оценок времён завершения работ.

Для обоснования корректности получаемых оценок в основе синтезируемой ИМ лежит формальная модель функционирования системы ИМА. Предлагаемая формальная модель представляет собой набор гибридных автоматов и правила их взаимодействия. Взаимодействие осуществляется посредством общих переменных и приема/отправки сигналов, поэтому требования к автоматам, реализующим модели компонентов системы, представляют собой описание используемых сигналов и переменных, а также ограничения на последовательность синхронизаций и изменений переменных.

Модель системы ИМА строится из моделей компонентов следующих типов: задача, локальный планировщик, глобальный планировщик, виртуальный канал. В работе показано, что если модели компонентов удовлетворяют сформулированным требованиям, то итоговая ИМ корректна.

Примером таких требований является ограничение на модель планировщика, описывающее её взаимодействие с моделями задач: «Модель планировщика получает сигналы `gesched` и `fin`, соответствующие появлению готовой работы и окончанию выполнения работы, и отправляет сигналы `exec[i]` и `preempt[i]`, соответствующие запуску и вытеснению  $i$ -й работы, при этом между отправками `exec[i]` и `exec[j]` должно

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-07-01237.

присутствовать либо получение `fin`, либо посылка `preempt[i]`». Проверка требований автоматизируется посредством их записи в виде формул темпоральной логики и использования верификатора.

Реализации моделей всех типов содержатся в библиотеке стандартных моделей. Библиотека может быть пополнена пользовательскими моделями.

В докладе представлены сценарии использования предложенных методов и средств совместно с САПР ИМА, решающей задачу распределения разделов по процессорным ядрам и построения расписания окон разделов [2].

В первом сценарии потенциальная конфигурация проверяется на некорректность. Если по результатам прогона ИМ будет выявлено, что для одной из работ нарушены директивные сроки, конфигурация признается некорректной.

Во втором сценарии потенциальная конфигурация проверяется на корректность. Известно, что если время выполнения одной из работ на процессоре меньше максимально возможного, то директивные сроки некоторых других работ могут быть нарушены, даже если конфигурация была признана корректной в предположении о максимальной продолжительности выполнения работ. Но если включить в ИМ модель планировщика, не запускающего готовые работы, пока есть более приоритетные работы, ожидающие входные данные, то корректная по результатам прогона ИМ конфигурация будет корректной и при использовании штатного планировщика.

В третьем сценарии в результате прогона ИМ со специальной моделью глобального планировщика строятся расписания окон.

#### Список литературы

1. Балашов В.В., Бахмуrow А.Г., Глонина А.Б. Подход к использованию имитационного моделирования при решении задач синтеза и планирования в модульных вычислительных системах // Программные системы и инструменты. — Т. 15. М: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2014. С. 116–136.

2. Balashov V.V., Balakhanov V.A., Kostenko V.A. Scheduling of computational tasks in switched network-based IMA systems // Proc. International Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization. — National Technical University of Athens (NTUA) Athens, Greece, 2014. —

## САПР ЛА. Интегрированная система весовых расчётов\*

Л.Л. Вышинский, Н.И. Широков

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

Разработка системы весового проектирования имеет большое практическое значение для разработки таких сложных технических объектов, как летательные аппараты (ЛА). Необходимость проведения весовых расчётов возникает на самых ранних этапах проектирования ЛА и сопровождает все дальнейшие стадии их разработки и эксплуатации. Вес и массово-инерционные характеристики являются одними из центральных величин, которые используются при решении большинства проектных задач: в задачах компоновки ЛА, при прочностных расчётах, при расчетах динамики полета, при проектировании систем управления, при проектировании топливной системы, при размещении полезной нагрузки и др.

Основными параметрами летательных аппаратов, которые необходимо рассчитывать и которые требуют постоянного контроля и анализа, являются масса, координаты центра тяжести, статические моменты, собственные, полные, осевые, плоскостные моменты инерции. Расчёты должны проводиться по всем деталям, узлам, агрегатам и системам ЛА. Количество деталей и узлов исчисляется десятками тысяч, а то и сотнями тысяч. Поэтому простой расчёт масс и других характеристик в целом выливается в сложную техническую и организационную проблему. Это касается не только основной, базовой конструкции летательных аппаратов, но и его снаряжения, топлива, которое размещается во внутренних и подвесных баках, а также перевозимой нагрузкой, размещаемой на борту самолёта, в грузовых отсеках и пассажирских салонах, а также на множестве узлов подвесок

\* Работа выполнена при финансовой поддержке по программе РАН П15, проект № 203.

вооружения боевых самолётов. Масса и другие характеристики летательного аппарата для каждой полётной конфигурации могут существенно меняться, в течение полёта они изменяют свои значения за счёт вырабатываемого топлива, за счёт изменения положения шасси, крыла у ЛА с изменяемой стреловидностью, за счёт сброса вооружения и другой сбрасываемой нагрузки. Изменение массово-инерционных характеристик самым существенным образом влияет на динамику полёта и на возможности управления самолётом. Поэтому, каждый полёт, каждое полётное задание должны обсчитываться и проверяться на выполнение всех требований, связанных с системой управления самолётом, а также требований, связанных с взлётно-посадочными условиями.

В докладе представлен проект интегрированной системы весового проектирования, которая предназначена для обеспечения весовых расчётов ЛА на всех этапах жизненного цикла изделий. На рис. 1 представлена структура интегрированной системы весовых расчётов.

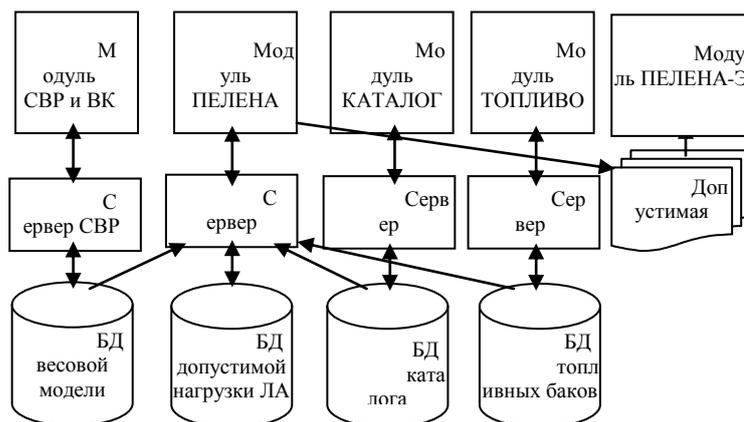


Рис. 1. Структура системы весовых расчётов ЛА

В докладе приведена краткая характеристика каждой из программных компонент, изображённых на приведенном рисунке. Система разрабатывается средствами «Генератора проектов» [1].

#### Список литературы

1. Вышинский Л.Л., Гринёв И.Л., Флёров Ю.А., Широков А.Н., Широков Н.И. Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки «клиент-серверных» систем. // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, N 1-2. С. 6-24.

### Подсистемы Генератора проектов для взаимодействия с WEB-клиентами\*

А.А. Логинов

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Данные подсистемы взаимодействия с WEB-клиентами предназначены для построения клиент-серверных программных комплексов по единой технологии Генератора Проектов.

#### Интерфейс взаимодействия с javascript-приложениями

Реализован сетевой протокол взаимодействия javascript - приложений, выполняемыми в контексте WEB-браузера, и WEB-порта сервера, реализованного на Генераторе Проектов. Сетевое взаимодействие осуществляется на основе транспортного протокола json, передаваемого через протокол HTTP/HTTPS, в том числе, с использованием технологии AJAX.

Для реализации логики, требуемой в WEB-браузере, на языке javascript написаны библиотеки с классами, соответствующими основным типам данных Генератора Проектов, и их JSON-преобразования. Данные примитивы позволяют использовать на javascript не только числа, представляемые на языке Си типами разной мощности, строки в кодировках

\* Работа выполнена при финансовой поддержке по программе РАН П15, проект № 203.

ASCII, ANSI, UTF-8, UTF-16, UTF-32), перечисления, маски, структуры и GenBD-документы. При работе с объектами данных типов на этапе выполнения javascript осуществляется необходимый контроль значений таким образом, чтобы обеспечить возможность их передачи и корректного преобразования в соответствующие элементы серверной части программного комплекса.

Прикладные типы данных, определенные в проекте, генерируются как объекты-потомки базовых классов-примитивов, что позволяет сократить объем исходного javascript-кода для уменьшения размера передаваемых данных в сетевом канале WEB-сервер - WEB-браузер.

По описаниям запросов, определенных в проекте, осуществляется генерация соответствующих javascript-файлов с реализацией клиентской части.

### **Интерфейс взаимодействия с java-приложениями**

Сетевое взаимодействие WEB-порта сервера и приложение на языке java осуществляется на основе транспортного протокола json, передаваемого через протокол HTTP/HTTPS, что позволяет использовать унифицированную реализацию серверной части для запросов, используемых как приложением WEB-браузера, так и java-приложением.

Для использования в java-приложении данных взаимодействия с серверной частью программного комплекса, реализованы наборы классов для отображения основных типов данных Генератора Проектов на язык java. При генерации прикладные данные проекта используют функционал базового типа. Проверки значений переменных типов данных на этапе выполнения java-программы позволяют контролировать их корректность с точки зрения использования во взаимодействии с серверной частью программного комплекса. Каждый базовый класс реализует JSON-преобразование объекта данного класса, что позволяет прозрачное преобразование используемых в запросе данных в транспортную форму и обратно.

По описаниям запросов, определенных в проекте, осуществляется генерация соответствующих java-пакетов с описанием прикладных типов данных проекта и реализацией приема/передачи данных клиентской части программного модуля. Генерация java-пакетов на языке осуществляется в соответствии с логической группировкой кода проекта.

## **Согласование решений при планировании развития сложных сильносвязанных систем\***

И.Ф. Шахнов

*ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

Развитие современных сложных систем, как правило, осуществляется путем перехода на новые, более совершенные технологии. В то же время выпускаемая продукция сложных систем является результатом совместной работы большого числа производителей, охваченных многочисленными связями со сложной структурой. В связи с этим возникает жизненно важная задача проверки совместимости предлагаемых новых технологий как между собой, так и с технологиями, уже используемыми в рассматриваемой сложной системе и которые предполагается оставить без изменений. Надо также сказать, что данная задача стала особенно актуальной в последнее время в связи с проблемой импортозамещения.

Настоящий доклад посвящен результатам исследования предложенной автором модели взаимодействия производственных элементов (сокращенно, модели ВПЭ) сложной "сильносвязной" системы [1] в ходе повышения качества выпускаемой продукции системы при частичном использовании новых технологий. "Сильносвязность" системы выражается в том, что в ней качество продукции любого производственного элемента в конечном счете зависит от качества продукции всякого другого производственного элемента этой системы.

Считается, что процесс проектирования обновленной системы осуществляется силами его участников 4-х типов. Участниками 1-го типа являются центральные руководящие органы, формулирующие цели и задачи рассматриваемой сложной системы. К участникам 2-го типа относятся "разработчики" (НИИ и КБ) новых технологий работы производственных элементов. Участниками 3-го типа являются органы проектирования

(«проектировщики») будущей системы, непосредственно осуществляющие проектирование рассматриваемой сложной системы как единого целого на основе компоновки возможных технологий работы производственных элементов (предлагаемых разработчиками технологий). Разработка рекомендаций и соответствующих требований по части согласования решений, принимаемых участниками вышеуказанных 3-х типов, является основной функцией специального органа (участника 4-го типа), называемого «координатором» разрабатываемого проекта.

Главная задача координатора – это организация работ по оказанию помощи проектировщикам будущей системы в «расшивке узких мест», появляющихся в проекте сложной системы по мере его проработки. Говоря точнее, в рамках настоящего исследования, это выработка рекомендаций для разработчиков технологий работы элементов системы по части допустимости («совместимости») или необходимости корректировки взаимных требований, предъявляемых этими технологиями друг к другу. Основное назначение разработанной модели ВПЭ – поддержка работы координатора при выполнении данной задачи. Предполагается, что разрабатываемые рекомендации базируются на выводах, следующих из принятой модели ВПЭ. При работе с органами центрального руководства основной задачей координатора является подготовка информации о «предельных возможностях» разработанных вариантов развития данной системы, о «сдерживающих» факторах и возможных корректировках целей. Формально корректировка целей заключается в выработке нового «желаемого» направления развития данной системы в пространстве показателей, характеризующих ассортимент и качество будущей выходной продукции системы.

Разработанная модель ВПЭ представляет собой динамическую модель максиминного типа, описывающую процесс изменения во времени показателей качества продукции, выпускаемой производственными элементами сложной системы, охваченными многочисленными обратными связями [2]. Технологии работы производственных элементов в данной модели заданы в форме взаимных требований, предъявляемых этими элементами друг к другу в отношении качества производимой ими продукции. Структура и интенсивность связей элементов между собой представлены в виде ориентированного взвешенного сильносвязного графа  $G$  [1].

Показано, что для совместимости предлагаемых новых и оставляемой в системе части прежних («старых») технологий работы производственных элементов необходимо и достаточно, чтобы граф  $G$ , построенный на получаемой совокупности технологий, используемых в модернизированной сложной системе, не содержал в себе контуров с весом больше или равным единице.

Сформулированы необходимые и достаточные условия монотонного роста качества продукции, выпускаемой производственными элементами: в графе  $G$  вес любого контура должен быть меньше единицы, а накладываемые ограничения на вектор качества продукции не должны выводить его из конуса согласованных ограничений. Установлены «предельные возможности» рассматриваемой сложной системы в виде диапазона допустимых пропорций между значениями показателей качества видов продукции, выпускаемой производственными элементами.

Для исследования свойств модели ВПЭ был разработан специальный математический аппарат, основанный на методах теории графов [3]. Возможность применения для этого методов линейного программирования показана в [4].

В заключение отметим, что предложенная модель ВПЭ может быть также использована при планировании процесса решения комплекса взаимосвязанных научно-технических проблем.

#### Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
2. Шахнов И.Ф. Некоторые вопросы согласования характеристик элементов в сильносвязных системах // Исследование операций (модели, системы, решения). М.: ВЦ РАН, 2000. С. 50-66.
3. Шахнов И.Ф. Метод центрального луча в задаче квантификации интенсивности предпочтений на основе парных сравнений // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 4. С. 96-108.
4. Подиновский В.В. Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически-лексикографическая задача оптимизации // АиТ. 2003. № 3. С. 150-162.

## Автоматизация разработки веб-проектов

А.Н. Широков, Е.Н. Широкова, А.А. Логинов,  
С.А. Скиндрев

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, ООО  
«УСТ», Москва, Россия

В докладе рассматривается пример архитектуры веб-проекта, которая возникает при разработке современных веб-порталов. Особенности архитектуры продиктованы требованиями современных подходов к взаимодействию с массовым пользователем в сети Интернет. Проектирование и разработка такого рода информационно-вычислительных систем требует определенного концептуального подхода и соответствующего инструментального обеспечения. Основным средством автоматизации проектирования описанной здесь архитектуры является Генератор Проектов, разработанный в ВЦ РАН ([1], [2]). В докладе архитектура такого рода проектов рассматривается на простом примере создания веб-портала, который авторы назвали КУБЛАКО (Кулинарное ОБЛАКО). На рисунке 1 изображена архитектура системы онлайн-сервисов «КУБЛАКО».

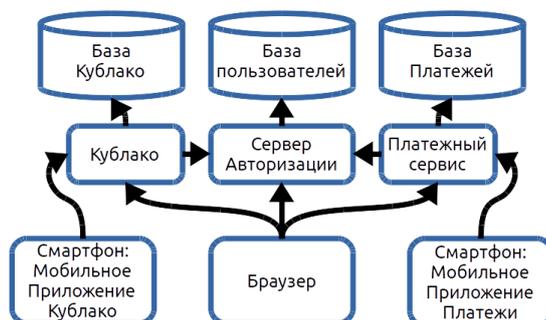


Рис.1. Архитектура системы «КУБЛАКО». Основные компоненты, изображенные на рис. 1, выполняют следующие функции:

- Сервер авторизации - обеспечивает регистрацию, вход/выход и ведение пользователей;
- Сервер Кублако - обеспечивает реализацию прикладных функций сервиса Кублако;
- Платежный сервис - независимый проект приема платежей;
- База пользователей - содержит аутентифицирующую информацию пользователей в индивидуальных профилях;
- База Кублако - содержит прикладную информацию сервиса;
- База Платежей – хранимые данные Платежного сервиса.

Учет и поиск персональной и публичной информации домашнего хозяйства — актуальная задача для каждой семьи. Хранение таких данных посредством онлайн-сервисов поиска рецептов в настоящее время получило большое распространение, однако эти сервисы не предоставляют возможностей составления меню, аналитики по используемым продуктам и не дают механизма формирования и ведения списков покупок и учета имеющихся продуктов. Целью разработки онлайн-сервисов «КУБЛАКО» является предоставление развитых онлайн-сервисов учета и поиска персональной и публичной информации домашнего хозяйства. Возможно внедрение в предприятия общественного питания.

В Системе «КУБЛАКО» реализуется *централизованное хранение персональных данных* домашнего хозяйства (рецептов), с дополнениями в виде фото, видео и аудио файлов. Доступ к данным должен осуществляться как через *WEB-интерфейс на персональном компьютере*, так и через *приложение для мобильного телефона*. Необходима возможность публикации персональных данных с различным уровнем доступа с *пост-модерацией* публикуемых данных, возможность оценки и комментирования опубликованной информации для зарегистрированных пользователей, поддержка форумов (онлайн-площадка для обмена сообщениями между пользователями). Система «КУБЛАКО» осуществляет управление следующими данными:

**каталог продуктов** – иерархический справочник продуктов.

**рецепт** – учетная единица, связанная, с одной стороны, с линейным упорядоченным списком текстов, фото, видео и аудио файлов; и, с другой стороны, с упорядоченным списком продуктов.

**меню** — набор персональных меню из рецептов с указанием количества порций.

Предназначено для планирования и составления списка необходимых покупок.

**холодильник** — набор продуктов в наличии.

**корзина** — список необходимых (планируемых) покупок.

Цель создания онлайн-сервиса «КУБЛАКО» - это разработка удобного **механизм формирования списка продуктов и его последующая обработка**. Важным аспектом онлайн-сервисов «КУБЛАКО» является реализация понятия **групп пользователей**. Для групп могут определяться общие данные (рецепты, меню, списки покупок, списки продуктов в наличии), доступные всем участникам группы. Группы создаются зарегистрированными пользователями. Пользователь должен иметь возможность регистрации в системе «КУБЛАКО» и входа в систему «КУБЛАКО» с авторизацией для учета персональных данных домашнего хозяйства и поиска по опубликованным данным. Для обеспечения безопасности данных и шифрования трафика, передаваемых по незащищенным каналам сети Интернет необходимо использовать протокол HTTPS.

Такую сложную многокомпонентную систему удастся поддерживать в работоспособном состоянии и развивать только благодаря применению инструментального комплекса «Генератор Проектов». Целиком весь проект системы КУБЛАКО разбит на несколько подпроектов. Связи между подпроектами осуществляются через импорт/экспорт спецификаций портов с запросами, либо через импорт/экспорт спецификаций библиотечных вызовов. Генератор Проектов позволяет производить операции импорта/экспорта практически в автоматическом режиме, что освобождает разработчика от сложной работы межпроектного согласования.

### Список литературы

6. Л.Л. Вышинский, И.Л. Гринев, Ю.А. Флеров, А.Н. Широков, Н.И. Широков. Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки «клиент - серверных» систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, № 1-2. С. 6-25.

7. Логинов А.А., Широков А.А., Широков Н.И. Многоуровневые структуры в клиент-серверных информационных системах. В сб. «Автоматизация проектирования инженерных и финансовых информационных систем средствами «Генератора проектов»». М.: ВЦ РАН, 2010 г. стр. 25-33.

## Генератор проектов 2016 \*

Н.И. Широков

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

Использование инструментального комплекса Генератор проектов [1,2] при разработке широкого класса прикладных многопользовательских информационных систем постоянно ставит новые проблемы и новые задачи перед разработчиками этого инструментария. В настоящем докладе обозначен круг таких новых задач и направлений, которые реализованы в новой версии Генератора проектов.

Основной акцент в новой версии Генератора проектов был сделан на развитие современных web-технологий и создание новых механизмов позволяющих объединить классическую клиент-серверную архитектуру с очень популярными сейчас методами работы в публичных сетях, с общедоступными браузерами, с открытыми информационными сервисами.

Для этого в рамках Генератора проектов была реализована программа синтаксического анализа HTML-кода, в который встроены спецтеги с операторами базового языка Генератора Проектов. При таком анализе выполняется жесткий контроль состава и взаимного расположения вложенных друг в друга тегов HTML-кода. Спецтеги с операторами обеспечивают возможность динамической генерации HTML-страниц или их фрагментов. Данная программа работает в составе Генератора Проектов. В результате работы программы создается макрос-процедура формирования страницы/фрагмента HTML-кода. Созданная процедура предназначена для использования в составе WEB-сервера для построения ответов на HTTP-запросы. Таким образом, совмещается возможность описания HTML-кода страниц со средствами обработки данных в контексте сервера. Главное

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке по программе РАН П15, проект № 203.

преимущество данного подхода — наличие жесткого контроля синтаксиса как языка HTML-разметки, так и базового языка в составе страницы, что чрезвычайно важно при разработке больших систем.

В новой версии Генератора проектов также реализованы многие технические новшества, которые отслеживают текущее развитие открытого программного обеспечения и которые позволяют расширить возможности применения Генератора проектов.

В технических аспектах развития Генератора проектов основное внимание уделялось разработке новых возможностей графического интерфейса. Отслеживая современные наработки, связанные с совершенствованием открытых библиотек графического интерфейса, в пользовательских приложениях, реализуемых под UNIX-подобными операционными системами, Генератор проектов в новой версии перешёл на более совершенную библиотеку интерфейса GTK+3.

Пользовательский интерфейс новой версии направлен на расширение возможностей разработчиков прикладных систем. В частности был разработан новый механизм описания структур диалоговых окон, который обеспечивает более гибкую настройку параметров диалогов и предоставляет новые возможности их макетирования. Была разработана новая более совершенная универсальная модель таблиц `jtable` и ее реализация для `listview`, `Qt` и `JavaScript`. В данной модели таблица может иметь сложную структуру с вложенными полями разных типов. Реализованы два новых типа массивов — фиксированные и переменной длины с возможностью размещения в них произвольных объектов.

В новой версии расширены возможности описания типов данных и другие языковые возможности. В частности введены новые типы `varchar vstring` для представления строк переменной длины. Реализована совместимость с обычными строками по присваиванию и передаче параметров. Введено понятие фатальных/нефатальных операторов присваивания `:= / :=`, `+= / +=`. Все интерфейсные пакеты переведены на кодировку UTF-8. Проведена определённая реструктуризация описания проектов. В частности оформлено разделение объектов пакета (типов, процедур) на глобальные и локальные. Реализованы внутренние и внешние зависимости пакетов. Реализован и включён в Генератор проектов ряд новых типов системных пакетов, направленных на организацию генерируемого программного кода. В частности созданы новые типы пакетов:

**пакеты** `dirbin` и `diralias` — для организации в прикладных проектах хранилищ файлов;

**пакеты** типа `repo` — репозиторий `deb`-пакетов для ОС семейства Debian/Ubuntu;

**пакеты** типа `website` — реализация концепции CRUD (Create/Read/Update/Delete) на основе компактного описания модели (база данных → страницы с таблицами и кнопками типовых действий);

**пакеты типа** `gtml` — описания блоков — фрагментов HTML-кода с вставками генераторного языка. Аналог PHP, но с жестким контролем синтаксиса HTML и генераторного языка;

**пакеты** типа `wscript` — интерфейс между типами генераторного языка и языка JavaScript.

В новой версии Генератора проектов реализован перевод многих сущностей с генерации на Си на генерацию в макросы Генератора. Это позволило расширить возможности генераторного языка.

Модель проекта переведена на новый тип документа `dqueue`.

### Список литературы

1. Л.Л. Вышинский, И.Л. Гринев, Ю.А. Флеров, А.Н. Широков, Н.И. Широков. Генератор проектов – инструментальный комплекс для разработки «клиент - серверных» систем // Информационные технологии и вычислительные системы. 2003, № 1-2. С. 6-25.
2. А.А. Логинов, Н.И. Широков. Новые возможности Генератора проектов. В сб. «Развитие и применение инструментального комплекса Генератор проектов». М.: ВЦ РАН, 2014 г. стр. 6-19.

## Теоретико-игровые модели

1. V.V.Mazalov Best-Choice Games with Incomplete Information and Applications
2. М.А. Горелов Максимальный гарантированный результат в игре с неопределенными факторами
3. В.В. Гусев Векторы Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе в игре патрулирования с коалиционной структурой
4. В.И. Жуковский, А.С. Горбатов Математические основы Золотого правила
5. К.Н. Кудрявцев, И.С. Стабулит К вопросу о построении оптимальных по Парето равновесий по Нэшу
6. В.Н. Лебедев Скорость сходимости к равновесию для потенциальных игр
7. Г. П. Мельникова, И. С. Меньшиков Разработка динамической модели коллективных действий популяции роботов для анализа влияния процедуры социализации
8. Е.З. Мохонько Получение информации в повторяющейся игре с изменяющимися дополнительным платежом и множеством выбора
9. Н.И. Назаров, И.С. Меньшиков Теоретический и численный анализ современных концепций игрового равновесия
10. Н.М. Новикова, И.И. Поспелова Стратегии вето-голосования
11. А.В. Шкловер, И.С. Меньшиков Равновесия в марковских стратегиях в итерационной дилемме заключенного

### **Best-Choice Games with Incomplete Information and Applications\***

V.V.Mazalov

*Institute of Applied Mathematical Research,  
Karelian Research Centre,  
Russian Academy of Sciences,  
11, Pushkinskaya str., Petrozavodsk, 185910, Russia*

We consider the following game-theoretic best-choice model with incomplete information. Players observe a sequence of incoming objects each described by two random quality components. The first component is announced to players and the other one is hidden. Players choose an object based on known information about it. The winner is the player having a higher sum of the quality components than the opponents do. We use backward induction to construct the optimality equation. The equilibrium and the optimal payoffs in the game are derived. The applications to the organisation of contest and the admission campaign at the Universities are presented.

### **Максимальный гарантированный результат в игре с неопределенными факторами**

М.А. Горелов

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

Пусть задана игра двух лиц с неопределенным фактором  $\Gamma = \langle U, V, A, g, h \rangle$ . Здесь  $U$  и  $V$  – множества управлений первого и второго игроков соответственно,  $A$  – множество неопределенных факторов,  $g : U \times V \rightarrow R$  – функция выигрыша первого игрока. Функция

---

\* This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-51-55006) and Russian Humanitarian Science Foundation (project no. 15-02-00352).

$h: U \times V \times A \rightarrow R$  и множество  $A$  отражают представления первого игрока о функции выигрыша второго.

Фактически здесь предполагается, что первый игрок знает о том, что его партнер стремится максимизировать значение функции  $h(u, v, \alpha)$  при некотором  $\alpha \in A$ , но значение параметра  $\alpha$  ему неизвестно. Известно лишь, что  $\alpha \in A$ .

Множества  $U$  и  $V$  будем считать компактными топологическими пространствами, а функции  $g$  и  $h$  непрерывными на  $U \times V$  при любом фиксированном  $\alpha$ .

Будем обозначать через  $\Phi(X, Y)$  множество всех функций из множества  $X$  в множество  $Y$ .

Рассмотрим новую игру с неопределенным фактором  $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, A, g_*, h_* \rangle$ . В ней  $U_* = \Phi(\Phi(U, V), U)$ ,  $V_* = \Phi(U, V)$ ,  $g_*(u_*, v_*) = g(u_*(v_*), v_*(u_*(v_*)))$  и  $h_*(u_*, v_*, \alpha) = h(u_*(v_*), v_*(u_*(v_*)), \alpha)$ .

Игра  $\Gamma_*$  является информационным расширением игры  $\Gamma$ . Выбранная схема обмена информацией аналогична схеме, используемой в игре Гермейера  $\Gamma_3$  [1]. Такой способ обмена информацией используется, например, в моделях кредитования инвестиционных программ.

**Определение 1.** Максимальным гарантированным результатом первого игрока в игре  $\Gamma_*$  называется число  $R = \sup_{u_* \in U_*} \inf_{\alpha \in A} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*)$ , где

$$BR(u_*, \alpha) = \left\{ v_* \in V_* : h_*(u_*, v_*, \alpha) = \max_{w_* \in V_*} h_*(u_*, w_*, \alpha) \right\},$$

если максимум в этой формуле достигается, и

$$BR(u_*, \alpha) = \left\{ v_* \in V_* : h_*(u_*, v_*, \alpha) \geq \sup_{w_* \in V_*} h_*(u_*, w_*, \alpha) - \kappa \right\}$$

в противном случае.

**Определение 2.** Число  $\gamma$  является гарантированным результатом первого игрока в игре  $\Gamma_*$ , если существует такая стратегия  $u_*$ , что для любого  $\alpha \in A$  найдется число  $\lambda$ , для которого выполняются условия:

- 1°. существует  $w_* \in V_*$ , для которого  $h_*(u_*, w_*, \alpha) \geq \lambda$ ;
- 2°. для любого  $v_* \in V_*$  либо  $g_*(u_*, v_*) \geq \gamma$ , либо  $h_*(u_*, v_*, \alpha) < \lambda$ .

Точная верхняя грань  $R'$  гарантированных результатов первого игрока называется его максимальным гарантированным результатом.

Наличие этих двух определений оправдывается следующим утверждением.

**Лемма 1.** Определения 1 и 2 эквивалентны в том смысле, что  $R = R'$ .

Для доказательства этой леммы удобно пользоваться следующим фактом.

**Лемма 2.** Для любого  $\gamma < R$  существует такая стратегия  $u_* \in U_*$ , что  $\inf_{\alpha \in A} \inf_{v_* \in BR(u_*, \alpha)} g_*(u_*, v_*) \geq \gamma$  и для любого  $\alpha \in A$  верхняя грань  $\sup_{v_* \in V_*} h_*(u_*, v_*, \alpha)$  достигается.

Данная лемма доказывается несложными геометрическими рассуждениями.

Определение 2 проще определения 1. Этот позволяет выписать максимальный гарантированный результат в игре  $\Gamma_*$  в терминах игры  $\Gamma$ . Для этого определим следующие множества и функцию:

$$H(\gamma) = \{(u, v) \in U \times V : g(u, v) \geq \gamma\},$$

$$l(\alpha, \gamma) = \max_{(u, v) \in H(\gamma)} h(u, v, \alpha),$$

$$E(\gamma) = \left\{ v \in V : \max_{u \in U} g(u, v) < \gamma \right\}.$$

**Теорема.** Для того, чтобы число  $\gamma$  было гарантированным результатом в игре  $\Gamma_*$  необходимо и достаточно, чтобы либо

$$\min_{u \in U} \sup_{v \in E(\gamma)} \max_{\alpha \in A} (h(u, v, \alpha) - l(\alpha, \gamma)) < 0,$$

либо

$$\min_{u \in U} \sup_{v \in E(\gamma)} \max_{\alpha \in A} (h(u, v, \alpha) - l(\alpha, \gamma)) = 0,$$

но верхняя грань по  $v$  в этой формуле не достигалась.

Если  $\gamma < R$ , то стратегия, позволяющая первому игроку гарантированно получить выигрыш  $\gamma$ , может быть сконструирована следующим образом. Если стратегия  $v^*$  второго игрока такова, что существует  $u \in U$ , для которого  $g(u, v^*(u)) \geq \gamma$ , то выберем любое такое  $u$  и положим  $u_*(v^*) = u$ . В противном случае положим  $u_*(v^*) = u_p$ , где

$$u_p = \arg \min_{u \in U} \sup_{v \in E(\gamma)} \max_{\alpha \in A} (h(u, v, \alpha) - l(\alpha, \gamma)).$$

Управление  $u_p$  может интерпретироваться как стратегия наказания второго игрока.

Функция  $l(\alpha, \gamma)$  позволяет осуществить «правильную калибровку» функции выигрыша второго игрока. Такая калибровка во многих случаях позволяет отказаться от гипотезы наличия «универсальной стратегии наказания».

Приведенная выше схема и позволяет решить довольно большое количество задач. Детали рассуждений вполне аналогичны доказательству теоремы из статьи [2].

#### Список литературы

1. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М: Наука, 1976.
2. Горелов М.А. Иерархические игры с неопределенными факторами // Управление большими системами. 2016. Выпуск. 59. С. 6–22.

## Векторы Шепли, Оуэна и Ауманна-Дрезе в игре патрулирования с коалиционной структурой

В.В. Гусев

*Институт прикладных математических исследований Карельского  
научного центра РАН, Петрозаводск, Россия*

Рассмотрена кооперативная игра с коалиционной структурой. Все игроки являются охранниками некоторого объекта. В зависимости от своих сил и способностей, игроки образуют коалиции и коалициями распределяются по территории охраняемого объекта.

Предполагается, что характеристическая функция игры имеет следующий вид:

$$v(K) = \begin{cases} \frac{1}{m} \left( 1 + \left\lfloor \frac{|K|-1}{2} \right\rfloor \right), & P_1 \in K; \\ \frac{1}{m} \left\lfloor \frac{|K|}{2} \right\rfloor, & P_1 \notin K. \end{cases},$$

где  $m$  – количество охраняемых предметов на объекте;  $K$  – коалиция игроков;  $P_1$  – сильный игрок. Характеристическая функция равна вероятности поимки злоумышленника, который присутствует на объекте. Предполагается, что параметры характеристической функции подобраны так, чтобы выполнялось условие  $0 \leq v(K) \leq 1$ .

Для того чтобы определить выигрыш каждого игрока в кооперативной игре с коалиционной структурой, можно воспользоваться вектором Ауманна-Дрезе или вектором Оуэна [1,2]. Для сравнения вычислен вектор Шепли [3]. Доказано, что в рассматриваемой игре вектор Ауманна-Дрезе и вектор Оуэна совпадают друг с другом.

#### Список литературы

1. Juan J. Vidal-Puga and Gustavo Bergantinos An implementation of the Owen value// Games and Economic Behavior. 2003. V. 44 N. 2. P. 412-427.

2. G. Hamiache A new axiomatization of the Owen value for games with coalition structures // Mathematical Social Sciences. 1999. V. 37. P. 281–305.

3. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения: учеб. пособие. СПб.: Изд-во «Лань», 2010. 448 с.

## Математические основы

### Золотого правила

В.И. Жуковский, А.С. Горбатов

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Понятие «равновесная по Бержу ситуация» появилось впервые в кандидатской диссертации К.С. Вайсмана («Равновесие по Бержу», СПбГУ, 1995) и сейчас широко распространено за границей (библиография насчитывает уже свыше 100 названий).

**Определение 1.** Ситуация  $x^B \in X$  называется равновесной по Бержу в бескоалиционной игре многих лиц при неопределенности, если

$$\Gamma = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i \in I} \rangle, \\ f_i[x \| x_i^B] \leq f_i[x^B] \quad \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in X \quad (i \in I), \quad (5)$$

где гарантии  $f_i[x] = \min_{y(\cdot) \in Y^X} f_i(x, y) = f_i(x, y^{(i)}(x)) \quad (i \in I)$ .

Способ уравнивания конфликтов за счет применения  $x^B$  наблюдается в семейных и родственных отношениях, религиозных общинах, филантропии, спонсорской поддержке, благотворительности и т.п.

**Теорема 1 (достаточные условия).** Если  $(x^0, z^B) \in X^2$  является седловой точкой  $\varphi(x, z) = \max_{i \in I} (f_i[x \| z_i] - f_i[z])$ , то минимаксная стратегия  $z^B$  удовлетворяет (1).

Игре  $\Gamma$  поставим в соответствие прежде всего «игру гарантий»

$$\Gamma_g = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_i[x]\}_{i \in I} \rangle,$$

а затем ее смешанное расширение

$$\tilde{\Gamma}_g = \langle I, \{\mu_i\}_{i \in I}, \left\{ f_i[\mu] = \int_X f_i[x] \mu(dx) \right\}_{i \in I} \rangle.$$

**Определение 2.** Ситуацию в смешанных стратегиях  $\mu^B(\cdot) \in \{\mu\}$  назовем равновесной по Бержу для  $\tilde{\Gamma}_g$ , если

$$\max_{\mu_{I(i)}(\cdot) \in \{\mu_{I(i)}\}} f_i[\mu \| \mu_i^B] = f_i[\mu^B] \quad (i \in I). \quad (6)$$

**Теорема 2.** Пусть в игре  $\Gamma$

1<sup>0</sup>. Множества  $X_i \subset R^{n_i} \quad (i \in I)$   $Y = \text{co}Y \subset R^m$  – компакты;

2<sup>0</sup>.  $f_i(x, y) \in C(X \times Y) \quad (i \in I)$  и при каждом  $x \in X$  строго выпуклы по  $y \in Y$ .

Тогда удовлетворяющее (2) множество смешанных ситуаций  $\{\mu^B\} \neq \emptyset$  и образует слабый компакт.

**Теорема 3.** При выполнении  $1^0$  и  $2^0$  существует максимальная по Слейтеру  $\bar{\mu}^B(\cdot) \in \{\mu^B\}$ , т.е. при  $\forall \mu^B(\cdot) \in \{\mu^B\}$  несовместна система неравенств  $f_i[\mu^B] > f_i[\bar{\mu}^B]$  ( $i \in I$ ).

#### Список литературы

1. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, № 1. С. 27–44; II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, № 2. С. 3–45.
2. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. N.Y. etc.: Academic Press, 1994.
3. Гусейнов А.А., Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Математические основы Золотого правила нравственности. М.: URSS, 2016.

### К вопросу о построении оптимальных по Парето равновесий по Нэшу

К.Н. Кудрявцев<sup>1</sup>, И.С. Стабулит<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия

<sup>2</sup>Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Наиболее распространенный в теории бескоалиционных игр принцип оптимальности – равновесие по Нэшу не лишен некоторых недостатков. Основным из них, видимо, является внутренняя неустойчивость множества равновесий по Нэшу. Именно, в игре может существовать две различные ситуации равновесия по Нэшу, выигрыши всех игроков в одной из которых строго больше их выигрышей в другой. Попытка избавиться от этого недостатка приводит к поиску ситуации равновесия по Нэшу, одновременно являющейся оптимальной по Парето.

Рассмотрим бескоалиционную игру  $N$  лиц

$$\langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i(x)\}_{i \in N} \rangle, \quad (1)$$

где  $N = \{1, 2, \dots, N\}$  – множество игроков;  $X_i \subseteq R^n$  – множество стратегий  $x_i$  у  $i$ -го игрока; в результате выбора игроками своих стратегий, складывается ситуация  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , на множестве ситуаций  $X = X_1 \times \dots \times X_N$  определена функции выигрыша  $i$ -го игрока  $f_i(x): X \rightarrow R$  ( $i \in N$ ).

Следуя [1], введем  $N+1$  функцию

$$\varphi_i(x, z) = f_i(z \| x_i) - f_i(z) \quad (i = 1, \dots, N),$$

$$\varphi_{N+1}(x, z) = \sum_{r=1}^N f_r(x) - \sum_{r=1}^N f_r(z),$$

где  $x, z \in X$ ,  $(z \| x_i) = (z_1, \dots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \dots, z_N)$ .

Определим свертку Гермейера этих функций вида

$$\varphi(x, z) = \max \{ \varphi_i(x, z) \ (i = 1, \dots, N), \varphi_{N+1}(x, z) \}. \quad (2)$$

Далее, сопоставим бескоалиционной игре (1) вспомогательную антагонистическую игру

$$\langle X, Z = X, \varphi(x, z) \rangle, \quad (3)$$

где множества стратегий игроков совпадают с множеством ситуаций в игре (1), а функция  $\varphi(x, z)$  определена в (2).

**Теорема 1.** Если минимакс в антагонистической игре (3)

$$\varphi^* = \min_{z \in X} \max_{x \in X} \varphi(x, z) = \max_{x \in X} \varphi(x, z^*) \leq 0,$$

то минимаксная стратегия  $z^*$  является оптимальной по Парето и, одновременно, равновесной по Нэшу стратегией в игре (1).

В качестве примера рассмотрим игру Брайанта [2], с двумя игроками, использующими стратегиями  $x_i \in [0, 5]$  ( $i = 1, 2$ ), и функциями выигрыша

$$f_i(x) = 2 \min\{x_1, x_2\} - x_i \quad (i = 1, 2).$$

Множество ситуаций равновесия по Нэшу в этой игре, как показано в [3], образуют ситуации  $x^e = (\beta, \beta)$ , где  $\beta \in [0, 5]$ , однако оптимальной по Парето является только ситуация  $x^* = (5, 5)$ .

Гермейеровская свертка (2) здесь будет

$$\varphi(x, z) = \max\{\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z), \varphi_3(x, z)\},$$

где  $x = (x_1, x_2)$ ,  $z = (z_1, z_2)$ , множества стратегий игроков одинаковы и имеют вид  $X = [0, 5] \times [0, 5]$ , а функции  $\varphi_i(x, z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) принимают вид

$$\varphi_1(x, z) = 2 \min\{x_1, z_2\} - x_1 - 2 \min\{z_1, z_2\} + z_1,$$

$$\varphi_2(x, z) = 2 \min\{z_1, x_2\} - x_2 - 2 \min\{z_1, z_2\} + z_2,$$

$$\varphi_3(x, z) = 4 \min\{x_1, x_2\} - x_1 - x_2 - 4 \min\{z_1, z_2\} + z_1 + z_2.$$

Найдем максимум по  $x$  функции  $\varphi_1(x, z)$ :

$$\max_{x \in X} \varphi_1(x, z) = \max_{x_1 \in [0, 5]} \varphi_1(x, z) = z_1 + z_2 - 2 \min\{z_1, z_2\}.$$

Аналогично,

$$\max_{x \in X} \varphi_2(x, z) = \max_{x_2 \in [0, 5]} \varphi_2(x, z) = z_1 + z_2 - 2 \min\{z_1, z_2\},$$

$$\max_{x \in X} \varphi_3(x, z) = \max_{x \in [0, 5] \times [0, 5]} \varphi_3(x, z) = 10 + z_1 + z_2 - 4 \min\{z_1, z_2\}.$$

Заметим, что внутренний максимум тогда будет

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} \varphi(x, z) &= \max\{z_1 + z_2 - 2 \min\{z_1, z_2\}, z_1 + z_2 - 2 \min\{z_1, z_2\}, \\ &10 + z_1 + z_2 - 4 \min\{z_1, z_2\}\} = 10 + z_1 + z_2 - 4 \min\{z_1, z_2\}. \end{aligned}$$

Внешний минимум в минимаксе

$$\min_{z \in X} \max_{x \in X} \varphi(x, z) = \min_{z \in [0, 5] \times [0, 5]} (10 + z_1 + z_2 - 4 \min\{z_1, z_2\})$$

достигается в ситуации  $z^* = (z_1^*, z_2^*) = (5, 5)$ , при этом минимакс

$$\varphi^* = \min_{z \in X} \max_{x \in X} \varphi(x, z) = 0.$$

Следовательно, согласно теореме 1, найденная ситуация  $z^* = (5, 5)$  является одновременно как оптимальной по Парето, так и равновесной по Нэшу.

#### Список литературы

1. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Парето-равновесная ситуация: достаточные условия и существование в смешанных стратегиях // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 1, № 1. С. 74–91.
2. Bryant, J. A Simple Rational Expectations Keynes-Type Model // The Quarterly Journal of Economics. 1983. V. 98, № 3. P. 525–528.
3. Gasko N., Suciú M., Lung R.I., Dumitrescu D. Pareto-optimal Nash equilibrium detection using an evolutionary approach // Acta Univ. Sapientiae, Informatica. 2012. V.4, № 2. P. 237–246.

# Скорость сходимости к равновесию для потенциальных игр

В.Н.Лебедев

Волгоградский Государственный Технический Колледж, Волгоград,  
Россия

Рассмотрим следующую игру, предложенную в работе [1]. Стратегическая игра  $n$  лиц  $I : X_1, \dots, X_n; u_1, \dots, u_n$  определяется набором стратегий игроков  $X_1, \dots, X_n$  и функциями выигрыша игроков  $u_1, \dots, u_n$  на множестве возможных ситуаций  $X : X_1 \times \dots \times X_n$ . Выигрыш в ситуации  $x \in X$  игрока  $i = 1, \dots, n$  определяется следующим образом. Каждая стратегия игрока  $i = 1, \dots, n$  есть подмножество конечного множества объектов  $E : e_1, \dots, e_k$ . Для каждого объекта  $e_j, j = 1, \dots, k$  задана локальная функция выигрыша (игровой элемент)  $c_j : \{1, \dots, n\} \rightarrow [0, 1]$ . В ситуации  $x \in X$  для каждого объекта  $e_j \in E$  найдем число игроков, которые используют этот объект в своих стратегиях в рассматриваемой ситуации, обозначим это число  $n(e_j, x)$ . Тогда выигрыш игрока  $i$  определяется следующим образом  $u_i(x) = \sum_{j=1, \dots, k} c_j(n(e_j, x))$ . Цель каждого игрока - максимизировать свой выигрыш.

Приложением является транспортная сеть в условиях высокой интенсивности грузовых потоков. Объекты есть локальные магистрали транспортной сети, а стратегии - пути соединяющие начальный пункт с конечным пунктом назначения перевозки. Скорость передвижения по магистрали обратно пропорциональна потоку перевозок на данной магистрали. Цель каждого - минимизировать время перевозки.

В работе [1] показано, что для рассматриваемой стратегической игры всегда существует ситуация равновесия по Нэшу. Показано, что естественная процедура улучшения ситуации по одному из игроков всегда приводит к ситуации равновесия. Это следует из того, что функция  $P(x) = \sum_{j=1, \dots, k} \sum_{i=1}^{n(e_j, x)} c_j^i$  - есть точный потенциал стратегической игры (здесь и далее  $c_j^i$  - значение  $j$ -ого игрового элемента на аргументе  $i$ ). Определения можно найти в работе [2]. Несложно показать, что процедура улучшения ситуации дает строгое возрастание потенциала, поэтому ситуации в игре не повторяются. Так как ситуаций конечное число, в некоторый момент придем к равновесной ситуации.

Основной вопрос работы анализ скорости сходимости процедуры улучшения ситуации. В [3] показано, что задача поиска равновесия в рассматриваемой игре является PLS- полной. PLS - это класс проблем полиномиального поиска локального оптимума в задаче дискретной оптимизации.

Таким образом, полиномиальное решение задачи нахождения равновесия в рассматриваемой игре невозможно при справедливости гипотезы  $PLS \neq P$ . Основным результатом работы - показано, что задача определения равновесия относится к классу сглаженной полиномиальной сложности (наличие полиномиального алгоритма при округлении начальных данных). В работе [4] развит подход к анализу временной сложности алгоритмов посредством анализа устойчивости оптимальных решений задачи к изменению начальных данных.

Основной момент анализа для данной задачи заключается в следующей модели вычислительного процесса. Разряды игровых элементов в двоичной системе счисления поступают последовательно от первого после десятичной запятой и так далее согласно недетерминированной схеме. Таким образом на шаге вычислительного процесса  $s = 1, \dots$  известны только первые  $s$  разрядов после запятой, то есть исходные данные определены с

точностью  $2^{-s-1}$ . Игровые элементы независимые случайные величины. Известно, что плотности вероятностей этих величин  $f(c_j^i)$   $j = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n$  - непрерывные ограниченные функции на интервале  $[0, 1]$ , возможно разные.

(максимум функций плотностей  $a$ ). Таким образом на шаге вычислительного процесса  $s = 1, \dots$  известна информация о значениях игровых элементов для первых  $s$  разрядов после запятой, то есть исходные данные определены с точностью  $2^{-s-1}$ . Оказывается с большой долей вероятности, не менее  $1 - const$ , потребуются только не более  $s = \log_2(4constk^2na)$  разрядов игровых элементов ( $const$  - любая наперед заданная положительная), чтобы найти точное решение. Это справедливо в силу того, что разница между оптимальным (первым по величине критерия игрока) ответом игрока и пред оптимальным (вторым по величине критерия игрока) высока с большой долей вероятности. Поэтому вычисления можно проводить с грубой оценкой точности. Алгоритм решит задачу за полиномиальное время порядка  $const \cdot ak^4n^3t$  с вероятностью не менее  $1 - const$  ( $const$  - любая наперед заданная положительная константа). Формальные результаты получены с использованием работ [4], [5] и результатов по анализу вычислительной сложности решения в среднем циклических игр на графах.

*Определение 1. Первым откликом  $i$ -го игрока, в ситуации  $x \in X$  и вектора игровых элементов  $c$  назовем оптимальный выигрыш этого игрока при фиксированных стратегиях остальных игроков:  $u_i^*(x, c) = \max_{x_i \in X_i} u(x_{-i}, x_i)$*

*Стратегию, на которой достигается максимум функции  $u_i^*(x, c)$  обозначим как  $x_i^*$ .*

*В силу непрерывности модели, с вероятностью 1 этот максимум достигается в единственной точке.*

*Определение 2. Вторым откликом  $i$ -го игрока, в ситуации  $x \in X$  и вектора игровых элементов  $c$  назовем непосредственно следующую величину выигрыша этого игрока за первым откликом при фиксированных стратегиях остальных игроков:*

$$u_i^{**}(x, c) = \max_{x_i \in X - x_i^*} u(x_{-i}, x_i)$$

*Определение 3. Допуском для  $i$ -го игрока, в ситуации  $x \in X$  и вектора игровых элементов  $c$  назовем разницу между первым и вторым оптимальными выигрышами этого игрока при фиксированных стратегиях остальных игроков:*

$$h_i(x, c) = u_i^*(x, c) - u_i^{**}(x, c)$$

*Утверждение 1. Пусть игровые элементы  $c_j^i$   $j = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n$  - случайные величины, плотности вероятностей которых непрерывные функции, ограниченные сверху величиной  $a$ . Тогда допуск*

*$h_i(x, c), i = 1, \dots, n$  - случайная величина с непрерывной функцией распределения, ограниченной сверху величиной  $2ka$ .*

*Утверждение 2. Устойчивость равновесия к изменению начальных данных  $c$ .*

*1) Пусть ситуация  $x$  равновесна для вектора игровых элементов  $c$ .*

*Тогда вероятность, что ситуация  $x$  не будет равновесием для близкого вектора игровых элементов  $c'$  мала.*

$\Pr(x - \text{равновесие для } c, \text{ и найдется } c' : \|c' - c\| \leq \varepsilon, \text{ и } x - \text{не равновесие для } c') \leq 4k^2 \varepsilon n$

2) Пусть ситуация  $x$  не является равновесием для  $c$ . Тогда вероятность, что ситуация  $x$  будет равновесием для некоторого близкого вектора игровых элементов  $c'$  мала.

$\Pr(x - \text{не равновесие для } c, \text{ и найдется } c' : \|c' - c\| \leq \varepsilon, \text{ и } x - \text{равновесие для } c') \leq 4k^2 \varepsilon n$

Алгоритм последовательно получает разряды игровых элементов. Пусть на шаге  $s$  получены первые  $s$  разряды игровых элементов. Находим равновесие в рассматриваемой приближенной игре  $I_s$  с помощью псевдо полиномиальной процедурой улучшения ситуации. Потребуется не более  $2^s kn$  итераций улучшений. Максимальное значение игровых элементов 1, поэтому максимальное значение потенциальной функции

$P(x) = \sum_{j=1, \dots, k} \sum_{i=1}^{n(e_j, x)} c_j^i$  не более  $kn$ , на каждой итерации происходит увеличение

потенциальной функции по крайней мере на квант  $2^{-s}$ , поэтому число итераций не более  $2^s kn$ . Время итерации требует числа элементарных операций порядка  $kn + kt = O(knt \cdot n)$  (перебором стратегий игроков находим лучшую, если она существует

хотя бы для одного игрока). Поэтому время шага алгоритма  $O(2^s k^2 n^3 t)$ . Пусть на шаге

$s$  найдено приближенное равновесие  $x$ . Проверяем, есть ли необходимость в уточнении задачи в силу предположительно больших допусков. Здесь можно использовать показатель оптимальности из работы [4]. Проверки оптимальности проводится последовательно для всех игроков. Для игрока  $i$  строим задачу булевого линейного программирования. По ситуации  $x$  находим величины выборов объектов остальных игроков, прибавляем к ним 1 (учет возможного участия объекта в стратегии игрока  $i$ ). Затем определяем величины игровых элементов. В результате получается задача булевого программирования  $c_1^{m_1} y_1 + \dots + c_k^{m_k} y_k \uparrow \max$  по множеству характеристических векторов  $y_1, \dots, y_k \in Y$  стратегий  $i$ -ого игрока. В векторной записи будем обозначать эту задачу  $\max c^i u : u \in Y$ .

Будем считать, что оптимум достигается на характеристическом векторе  $u \in Y$ . Пусть точный вектор игровых элементов  $c''$ . Составим вектор игровых элементов проверочной задачи  $c'$  следующим образом:  $c_j' = c_j$ , если  $y_j = 1$ , и  $c_j' = c_j + 2^{-s}$ , если  $y_j = 0$  в

текущем оптимальном решении  $u$ . Нетрудно видеть, что характеристический вектор оптимальной стратегии рассматриваемого игрока максимизирует критерий  $\max c'' u - c' u : u \in Y$ . Проверяем, является ли оптимальным вектор  $u$  для проверочной задачи  $\max c' u : u \in Y$ .

Если проверка оптимальности стратегий всех игроков дает положительный результат, то констатируем, что текущее равновесие является равновесием для точной задачи  $c''$ . Действительно, нетрудно видеть, что характеристический вектор

$u$  оптимальной стратегии  $i - \hat{a} \hat{a}^T$  игрока максимизирует критерий  $\max c'' u - c' u : u \in Y$  (из-за того, что невыбранные объекты будут давать отрицательные величины в данном критерии).

Поэтому если  $u$  максимизирует критерий  $c' u \in \hat{\pi}'' u - c' u$ , то этот вектор максимизирует их сумму,  $c'' u$ . По утверждению 2

остановка алгоритма произойдет на шаге  $s, \varepsilon = 2^{-s-1}$  с вероятностью не менее  $1 - 4k^2 \varepsilon n$ .

Поэтому, определяя порядка  $s = \log_2(4constk^2na)$  разрядов игровых элементов, решим задачу точно с вероятностью не менее  $1 - const$  ( $const$ - любая наперед заданная константа).

Сложность шага алгоритма  $O(2^s k^2 n^3 t)$ , поэтому за время

$O(const \cdot ak^4 n^3 t)$  с вероятностью не менее  $1 - const$  будет найдено равновесие. Здесь  $const$  - любая наперед заданная константа.

Основной момент доказательства на примере равномерного распределения целочисленных весов

игровых элементов из интервала  $[1, \dots, p]$ . Покажем, что вероятность допуска  $h(x, c) = u^*(x, c) - u^{**}(x, c)$  любого игрока заданной величины не более  $2k/p$ . Рассмотрим произвольный объект  $e_j \in E$ . Разобьем все стратегии игрока на две группы, в первую группу  $X^1$  отнесем стратегии, использующие рассматриваемый объект, во вторую  $X^2$  те, которые этот объект не содержат. Найдем первый отклик для стратегий первой группы отклик  $u_{1j}^*(x, c) = \max_{x_i \in X^1_i} u(x_{-i}, x_i)$  и оптимальный отклик для стратегий второй группы  $u_{2j}^*(x, c) = \max_{x_i \in X^2_i} u(x_{-i}, x_i)$ . Нетрудно видеть, что допуск  $h(x, c)$  равен одному из значений чисел  $|u_{1j}^*(x, c) - u_{1j}^*|, j = 1, \dots, k$ . Вероятность получить фиксированное значение величине  $|u_{1j}^*(x, c) - u_{1j}^*|$  не более  $2/p$ . Рассмотрим набор векторов  $P_j r_1, \dots, r_k$ , компоненты которых из натуральных из интервала  $[1, p]$ , за исключением компоненты  $j$ , которая принимает значение  $*$ . Не более одного вектора из  $P_j$  даст требуемое значение величины  $|u_{1j}^*(x, c) - u_{1j}^*|$ . Поэтому вероятность требуемого значения не более  $2p^{k-1}/p^k = 2/p$ . Поэтому вероятность заданного допуска игрока не более  $2k/p$ .

#### Список литературы

1. Rosenthal R.W. A class of games possessing pure – strategy Nash equilibria. // International Journal of Game Theory. 1973. V. 2. P. 65-67.
2. Кукушкин Н.С. Потенциал Розенталя и дискретный вариант теоремы Дебре – Гормана. // Математическая теория игр и ее приложения. 2014.6,2.С.60-77.
3. Fabrikant A., Papadimitriou C.H., Talwar K. The complexity of pure Nash equilibria. In Proceedings of the 34-th Annual ACM Symposium on Theory of Computing. ACM. New York. 2004. P. 604-612.
4. R.Beier, B.Vocking. Typical properties of winners and losers in discrete optimization. // SIAM J. Comput. 2006.V.35., 4. P.855-881.
5. Boros E., Elbassioni, Gurvich V.A., Makino K. A pumping algorithm for ergodic stochastic mean payoff games with perfect information. In IPCO. 2010. P.341-354.

### Разработка динамической модели коллективных действий популяции роботов для анализа влияния процедуры социализации\*

Г. П. Мельникова<sup>1</sup>, И. С. Меньшиков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>МФТИ (ГУ), <sup>2</sup>ВЦ им. А. А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ, Москва, Россия

«Дилемма заключенного» — наиболее распространенный пример лабораторной игры, в которой возникает противоречие между индивидуальной рациональностью и стремлением к кооперации. Эту игру можно рассматривать в следующих вариантах: с независимыми стратегиями поведения участников и коррелированными, а также до и после этапа социализации [1,2].

\* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

Для разработки динамической модели коллективных действий популяции роботов на первом этапе рассматривается модель с независимыми марковскими стратегиями [3,4] до и после этапа социализации.

Анализируются результаты экспериментов, проведенных в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ. В ходе эксперимента участникам предлагалась классическая игра «Дилемма заключенного». Эксперимент проходил в три этапа: «До социализации», «Социализация» и «После социализации». На первом и последнем этапах рассчитываются индивидуальные стратегии игроков, проводится проверка валидности найденных стратегий.

Для исследования возможности использования сгенерированных роботами ходов на основании заданных стратегий наряду с действиями реальных игроков (участников экспериментов), а также возможности полной замены реальных игроков роботами для исследования экономических игр, проводятся следующие шаги.

1. Полученный из имеющихся экспериментальных данных набор стратегий разбивается на классы и вычисляется средняя стратегия для каждого класса, далее проводится проверка валидности полученных средних стратегий.

2. Проводится симуляция игр с использованием рассчитанных индивидуальных и средних по группам стратегий.

3. Предлагается провести эксперимент, участниками которого станут реальные игроки наряду с роботами. По результатам данного эксперимента будет оценена корректность работы модели коллективных действий популяции роботов.

Предполагается также построить обобщение модели с независимыми марковскими стратегиями на случай коррелированных стратегий. Для этого планируется создать систему для проведения экспериментов по модели, разработанной на первом этапе. Далее планируется проведение серии вычислительных экспериментов с использованием специально разработанной программы генерации случайных векторов с заданной плотностью распределения вероятностей. Алгоритм, лежащий в основе программы, разработан одним из авторов и ранее не использовался. Полученные векторы используются для реализации смешанных стратегий поведения роботов.

Итогом работы является анализ и сопоставление результатов экспериментов, проведенных в лабораторных условиях с добровольными участниками, с действиями роботов, моделирующих поведение экономических агентов.

#### **Список литературы**

1. Лепская М.А., Лукинова Е.М., Меньшикова О.Р., Меньшиков И.С. Влияние этапа социализации на поведение участников социально-экономического эксперимента // Труды 56-ой научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика. – Т. 1. – М. : МФТИ, 2013. – С. 68-69.
2. Berkman, E. T., Lukinova, E., Menshikov, I., & Myagkov, M. (2015). Sociality as a Natural Mechanism of Public Goods Provision. PLoS ONE, 10(3), e0119685.
3. W. Press, F. Dyson. Iterated Prisoner's Dilemma contains strategies that dominate any evolutionary opponent. PNAS, 2012
4. Ethan Akin. Good Strategies for the Iterated Prisoner's Dilemma. arXiv, 2013.

### **Получение информации в повторяющейся игре с изменяющимися дополнительным платежом и множеством выбора**

Е.З. Мохонько

*Вычислительный центр им. А.А.Дородницына ФИЦ ИУ РАН, Москва,  
Россия*

Если лицо, принимающее решение, в ходе управления динамическим процессом использует информацию, за которую нужно платить, то у него появляется заинтересованность в оптимальном ее получении. В [1] найден оптимальный режим получения информации о поведении партнера в равновесии в стратегиях с памятью, когда множества выборов игроков не изменяются на протяжении всей игры.

В [2] были определены оптимальные режимы получения информации о ходе игры для ситуаций равновесия в стратегиях с памятью в игре, в которой один раз за всю игру может действовать возмущение, изменяющее множества выборов игроков. Рассмотрен случай, когда игроки в начале игры знают, в какой момент времени и как изменятся множества выборов. А также случай, когда игроки в начале игры не знают момент воздействия возмущения, но могут непрерывно или дискретно получать информацию о том, действовало ли оно.

В [3] была рассмотрена игра, в которой множества выборов не изменяются, но второй игрок в конце игры получает дополнительный платеж от первого игрока, если за всю игру не отклонился от заданной траектории. Один раз за всю игру может действовать возмущение, не зависящее от игроков. Оно изменяет величину дополнительного платежа и моделирует события во внешнем мире, на фоне которых происходит игровой конфликт. Например, экономический кризис, в результате которого уменьшается прибыль. В такой игре исследована зависимость оптимального режима получения информации от момента воздействия возмущения и от информированности игроков об этом моменте.

В данной работе рассмотрена игра, в которой возможно изменение дополнительного платежа один раз за всю игру.

Известно, когда и как изменяется множество выборов второго игрока. Множество выборов первого игрока не изменяется. Информация о том, изменился ли дополнительный платеж, поступает непрерывно. Определено, в какие моменты надо получать информацию второму игроку, чтобы первому игроку было не выгодно отклоняться от договорной траектории.

Поскольку не известно, в какой момент изменится дополнительный платеж и изменится ли он вообще, то моменты получения информации первым игроком о поведении второго игрока нельзя рассчитать до начала игры. Они рассчитываются по ходу игры. Дан алгоритм расчета.

Режимы получения информации в некотором смысле оптимальны.

Если за всю игру дополнительный платеж не изменился, а тревога, что он уменьшится, была, то это обстоятельство приводит к более частому получению информации по сравнению с игрой с дополнительным платежом, о котором известно, что он не изменяется.

#### Список литературы

1. Кононенко А.Ф. О задаче наблюдения в повторяющихся операциях // Современное состояние теории исследования операций: Сб. науч. тр. М: Наука, 1976. С. 179–182
2. Мохонько Е.З. Информационные процессы в повторяющихся играх с изменяющимися множествами выбора // VII Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическое моделирование развивающейся экономики, экологии и технологий», Москва, 21-24 октября 2014. Тезисы докладов. М.: ФГБУ ВЦ РАН, 2014. С.80.
3. Мохонько Е.З., Носырев А.В. Информационные процессы в повторяющейся игре с дополнительным платежом и возмущающим фактором // Сборник научных трудов. V Международная школа - симпозиум «Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем, 12-18 сентября 2011, Севастополь». Симферополь: ТНУ, 2011. С. 267 -272.

### Теоретический и численный анализ современных концепций игрового равновесия\*

Н.И. Назаров<sup>1</sup>, И.С. Меньшиков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>МФТИ (ГУ), <sup>2</sup>ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ, Москва, Россия

Классическая теория игр предлагает в качестве прогноза поведения людей в экономических играх концепцию равновесия Нэша. Однако, в экспериментах, проведенных в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ [1,2], поведение участников часто отличается от поведения, предсказываемого равновесием Нэша. Так, например, в игре «Дилемма заключенного» участники эксперимента, как правило, не играют равновесие

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

Нэша в чистых стратегиях, а скорее, ведут себя согласно некоторой смешанной стратегии, смещённой в сторону оптимального по Парето исхода.

Равновесие дискретного отклика [3,4], предложенное в конце 20-го века, часто описывает поведение людей в игровых ситуациях лучше, чем равновесие Нэша. Однако, для той же «Дилеммы заключенного» в группах с высоким уровнем социализации участники чаще выбирают кооперативную стратегию, тогда как равновесие дискретного отклика допускает лишь диапазон стратегий от равновесия Нэша в чистых стратегиях до смешанной стратегии с равновероятным выбором.

В данной работе предлагается моделировать поведение игроков с помощью методов машинного обучения [5]. Поведения игрока предлагается предсказывать линейным классификатором. В качестве признаков используются действия игрока и его оппонентов на предыдущих повторениях игры при условии выбора случайного партнера. Веса признаков находим из решения задачи минимизации функции ошибки, для решения которой используем численные методы оптимизации. Обучение алгоритма будет проходить на данных, полученных в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ для игр «Дилемма заключенных» и «Trust» [6]. Полученные результаты проанализированы и сопоставлены с известными концепциями равновесия.

### Список литературы

1. Лепская М.А., Лукинова Е.М., Меньшикова О.Р., Меньшиков И.С. Влияние этапа социализации на поведение участников социально-экономического эксперимента // Труды 56-ой научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика. – Т. 1. – М. : МФТИ, 2013. – С. 68-69.
2. Berkman, E. T., Lukinova, E., Menshikov, I., & Myagkov, M. Sociality as a Natural Mechanism of Public Goods Provision. PLoS ONE, 10(3), 2015, e0119685. <http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0119685>
3. McKelvey R. D., Palfrey T. R. Quantal response equilibria in normal form games. Games and Economic Behavior, 7, 6 - 38, 1995
4. McKelvey R. D., Palfrey T. R. Quantal response equilibria for extensive form games. Experimental Economics, 1 : 9 - 41, 1998
5. К.В. Воронцов. Математические методы обучения по прецедентам. 2012
6. Delgado M. R., Frank R. H., Phelps E. A. Perceptions of moral character modulate the neural systems of reward during the trust game. Nature Neuroscience 8, 1611 - 1618, 2005.

## Стратегии вето-голосования

Н.М. Новикова, И.И. Пospelова  
ФИЦ ИУ, МГУ им. Ломоносова, Москва, Россия

Рассмотрим игру  $n$  лиц  $\Gamma_n$ , соответствующую процедуре выборов путем голосования с помощью последовательного открытого наложения вето. Подобная процедура была впервые введена Мюллером [1] и с разных сторон изучалась Муленом [2, 3], Сотсковым [4], Ювал [5], Кукушкиным [6] и др. В самом простом варианте считаем, что  $n$  игроков  $I_1, \dots, I_n$  выбирают одного из  $n+1$  кандидатов  $K_0, K_1, \dots, K_n$ , поочередно вычеркивая любую из еще не вычеркнутых альтернатив – единственный оставшийся кандидат оказывается выбранным (победившим). Здесь все игроки видят, какие альтернативы остались к их ходу. Допустим также, что им известны функции предпочтений друг друга на множестве кандидатов, и пусть предпочтения строгие, т.е. для любых  $K_i, K_j$  ( $i \neq j$ ) каждый игрок может сказать, какой кандидат для кого лучше (в отличие от предположений [7]).

Рассматриваемая игра  $\Gamma_n$  относится к иерархическим играм [8] и в данных условиях в ней существует сложное равновесие по теореме Куна (см. например в [9]). Понятно, что конкретный результат зависит от очередности вычеркивания кандидатур, т.е. от порядка ходов игроков. Но имеются кандидаты, которые не могут победить ни при каком порядке ходов, в частности, находящиеся на последнем месте по предпочтительности у какого-либо игрока. Для того, чтобы кандидат, пусть  $K_0$ , мог победить в игре  $\Gamma_n$ , необходимо (см. в [9] задачу 2 из гл. VI) выполнение следующего условия (1).

Обозначим через  $J_i$  множество тех кандидатов  $K_j$ , которые хуже  $K_0$  для игрока  $I_i$ . Тогда, если для некоторого порядка ходов кандидат  $K_0$  соответствует сложному равновесию, то

$$(1) \quad \forall I \subseteq N \quad \left| \bigcup_{i \in I} J_i \right| \geq |I|, \quad N = \{1, \dots, n\}.$$

Немного обобщая [10], нетрудно доказать, что условие (1) – достаточное для существования порядка ходов, при котором в исследуемой игре побеждает кандидат  $K_0$ . Отсюда по теореме Холла [11] получаем, что при победе кандидата  $K_0$  существует система различных представителей для набора множеств  $\{J_i\}_{i \geq 1}$ . Однако не любые стратегии сложного равновесия интуитивно рациональны в смысле вычеркивания игроками представителей из  $J_i$  (кандидатов, худших  $K_0$  для  $I_i$ ). Справедливо лишь

**Утверждение 1.** Если кандидат  $K_0$  побеждает в игре  $\Gamma_n$ , то найдется сложное равновесие, реализующееся вычеркиванием соответствующих представителей из набора множеств  $\{J_i\}_{i \geq 1}$ .

Доказательство вытекает из следующего результата.

**Утверждение 2.** Пусть кандидат  $K_0$  побеждает в игре  $\Gamma_n$ , тогда существует вектор стратегий  $\{x_i\}_{i \geq 1}$ , задающий сложное равновесие и такой, что для складывающейся в итоге ситуации  $x$  выполнено свойство: при любом  $i \in N$ , если бы игрок  $I_i$  на своем ходе вычеркнул кандидата  $K_0$ , то в оставшейся подыгре  $\Gamma_{n-i}$  победил бы кандидат  $x_i$ .

Доказательство проведем по индукции. Предположим, что для всех  $n = k$ ,  $k > 1$ , утверждение верно, докажем для игр  $\Gamma_n$  с  $n = k+1$ . Пусть  $K_0$  побеждает в игре  $\Gamma_{k+1}$ , рассмотрим эту игру в развернутой форме и редуцированную игру  $\Gamma_k$  (опр. 4 из гл. II в [9]), в которой вершины для хода последнего игрока заменены его рациональным выбором. Победивший кандидат от этого не изменится (по теореме Куна [9]), а утв.2 по предположению индукции для игры  $\Gamma_k$  выполнено. Возьмем такой оптимальный вектор стратегий в игре  $\Gamma_k$  и дополним его стратегией игрока  $I_{k+1}$ , которая в каждой терминальной вершине игры исключает худшего (из двух) кандидата, получим сложное равновесие в  $\Gamma_{k+1}$ . А если бы  $I_{k+1}$  вычеркнул в вершине, соответствующей партии  $p$ , реализующей сложное равновесие, вместо кандидата  $x_{k+1}(p)$  кандидата  $K_0$ , то как раз бы  $x_{k+1}(p)$  и остался. Тем самым, для сложного равновесия в игре  $\Gamma_{k+1}$  найден вектор стратегий с требуемыми свойствами. Для  $\Gamma_2$  доказательство очевидно.

Теперь к утв. 1 достаточно заметить, что любая компонента  $x_i$  ситуации, рассмотренной в утв. 2, это кандидат, худший для игрока  $I_i$ , чем  $K_0$  (поскольку в противном случае  $I_i$  на своем ходе вычеркнул бы  $K_0$ , чтобы получить победу кандидата  $x_i$  по утв. 2). Таким образом,  $x_i \in J_i$ .

Пусть порядок ходов игроков соответствует порядку их номеров. Назовем вектор стратегий, определяющий сложное равновесие по утв. 2, *правильным*. Из утв. 2 вытекает еще один способ построения правильного вектора стратегий в игре  $\Gamma_n$ . Обозначим через  $\mathbf{K}$  множество всех кандидатов в игре  $\Gamma_n$ .

**Утверждение 3.** Если кандидат  $K_0$  побеждает в игре  $\Gamma_n$ , то правильный вектор стратегий  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  в этой игре (задающий сложное равновесие) удовлетворяет условию: для любого  $i \in N$  игрок  $I_i$  на своем ходе вычеркивает кандидата  $K^i$ , худшего для себя, чем все кандидаты из  $\mathbf{K}$ , кроме  $K^j$  с  $j > i$ .

Так что  $x_i = K^i$ , где  $K^i$  строим рекурсивно с конца: кандидат  $K^n$  – наихудший кандидат для игрока  $I_n$ ,  $K^{n-1}$  – наихудший для игрока  $I_{n-1}$  кандидат из множества  $\mathbf{K} \setminus \{K^n, \dots, K^i\}$  – наихудший для игрока  $I_i$  кандидат из  $\mathbf{K} \setminus \{K^{i+1}, \dots, K^n\}$ , а  $K^1$  – наихудший для игрока  $I_1$  из  $\mathbf{K} \setminus \{K^i\}_{i > 1} = \{K_0, K^1\}$  (определяется последним).

Отметим, что есть примеры, когда обратное построение (по порядку ходов, а не с конца) не приводит в игре  $\Gamma_n$  к сложному равновесию ни при какой перенумерации игроков.

### Список литературы

1. Mueller D.C. Voting by veto // Journal of Public Economics. 1978. V. 10. P. 55–75.
2. Moulin H. Prudence versus sophistication in voting strategy // Journal of Economic theory. 1981. V. 24. P. 398–412.
3. Moulin H. The strategy of social choice. Amsterdam: North-Holland, 1983.
4. Sotskov A.I. Vetoing in social choice with blockings // Mathematical social sciences. 1994. V. 27. P. 203–216.
5. Yuval F. Sophisticated voting under the sequential voting by veto // Theory and Decisions. 2002. V. 53. P. 343–369.

6. Kukushkin N.S. Acyclicity of improvements in finite game forms // International Journal of Game Theory. 2011. V. 40. Issue 1. P. 147–177.
7. Машечкин А.И., Поспелова И.И. Свойства голосования с правом вето // Прикладная математика и информатика. 2009. Т. 31. С. 83–94.
8. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
9. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
10. Машечкин А.И., Новикова Н.М. Управление порядком ходов при вето-голосовании. I. Условия принятия заданного решения // Известия РАН. ТИСУ. 2013. № 1. С. 69–83.
11. Hall P. On Representatives of Subsets // Journal of the London Mathematical Society. 1935. V. 10. №. 1. P. 26–30.

## Равновесия в марковских стратегиях в итерационной дилемме заключенного\*

А.В. Шкловер<sup>1</sup>, И.С. Меньшиков<sup>12</sup>

<sup>1</sup>МФТИ (ГУ), <sup>2</sup>ВЦ им. А.А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ, Москва, Россия

Темой этого доклада является исследование класса марковских стратегий в итерационной дилемме заключенного (ДЗ) и классификация равновесий по Нэшу, возникающих в этой модели. В работах [1-2] были исследованы марковские равновесия Нэша, которые приводят к полной кооперации игроков. Однако, как показывают многочисленные лабораторные эксперименты, проведенные, в частности, в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ, полная кооперация, как и полное ее отсутствие, наблюдается весьма редко. Поэтому весьма актуальной является задача нахождения промежуточных равновесий Нэша.

Классическая ДЗ – игра двух лиц с матрицей выигрышей:

	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	( <i>R</i> , <i>R</i> )	( <i>S</i> , <i>T</i> )
<i>d</i>	( <i>T</i> , <i>S</i> )	( <i>P</i> , <i>P</i> )

Предполагается, что  $T > R > P > S$ ,  $2R \geq (T + S)$ .

В этой игре есть одно равновесие по Нэшу (РН) – *dd*. Однако, ситуация меняется, если рассмотреть повторяющуюся (итерационную) ДЗ и допустить, что игроки используют марковские стратегии, т.е. при принятии решения ориентируются только на одно предыдущее повторение игры.

В этой модели игра повторяется бесконечное число шагов, а смешанная стратегия игрока определяется как вектор из четырех компонент: вероятностей выбрать стратегию *c* в текущем повторении. Количество компонент вектора соответствует четырем исходам игры: *cc*, *cd*, *dc*, *dd*. Таким образом, смешанная марковская стратегия задается вектором

$$p = (p_{cc}, p_{cd}, p_{dc}, p_{dd}) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$$

При такой формулировке задачи игра превращается в марковский процесс [3]. Модель сильно упрощается, если предположить, что для всех стратегий игроков  $p_1 = p_3$ . Содержательный смысл этого предположения состоит в том, что игроки одинаково реагируют на чужой выбор *c* или *d* и не учитывают свои действия в прошлом повторении игры.

Пусть  $p = (\gamma, \alpha, \gamma, \alpha)$ , тогда оказывается, что в этом случае удастся аналитически найти вектор инвариантных марковских мер (ИММ):

$$p_i^c = \frac{\alpha_i - \alpha_j(\alpha_i - \gamma_i)}{1 - (\alpha_i - \gamma_i)(\alpha_j - \gamma_j)}, i = 1, 2, j = 3 - i,$$

$$v = (p_1^c p_2^c, p_1^c(1 - p_2^c), (1 - p_1^c)p_2^c, (1 - p_1^c)(1 - p_2^c)).$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

Вектор ИММ позволяет однозначно определить ожидаемый выигрыш игроков. Определим векторы выигрышей игроков по состояниям:

$$u_1 = (R, S, T, P), u_2 = (R, T, S, P).$$

Тогда поиск РН сводится к задаче

$$\alpha_i, \beta_i = \arg \max(u_i, v), i = 1, 2.$$

Оказалось, что эту задачу удается решить аналитически, если искать только симметричные РН.

Для поиска симметричных РН достаточно проанализировать функцию выигрыша первого игрока:

$$(u_1, v) = (R - S - T + P)p_1^c p_2^c + (S - P)p_1^c + (T - P)p_2^c + P$$

Далее исследование разбивается на два случая: когда старший коэффициент  $(R - S - T + P)$  при билинейном члене равен нулю 0, и когда он отличен от нуля. Первый случай будем называть особым, а второй – общим.

Удается доказать, что в особом случае множеством симметричных РН является множество пар стратегий, параметры которых связаны соотношением

$$\alpha - \gamma = \frac{S - P}{T - P}.$$

В общем случае удается доказать, что параметры стратегий в симметричном РН должны удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} (R - S)\alpha^2 + (T - P)\gamma^2 - (R - S + T - P)\alpha\gamma + \\ (2T - R - P)\alpha + (S - T)\gamma - (S - P) = 0 \end{aligned}$$

Это уравнение задает гиперболу всегда пересекающую единичный квадрат первой четверти по крайней мере в одной точке:  $(0, 1)$ . Более того, при выполнении ограничения  $2P \leq T + S$  в играх как особого, так и общего вида существует континуальное множество симметричных РН.

### Список литературы

1. Press W., Dyson F. Iterated Prisoner's Dilemma contains strategies that dominate any evolutionary opponent: PNAS, 2012.
2. Akin E. Good Strategies for the Iterated Prisoner's Dilemma. arXiv, 2013.
3. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.

## **Анализ политических процессов и коррупции**

1. F. Aleskerov, V. Oleynik Multidimensional Polarization Index and its Applications
2. F.T. Aleskerov, A.A. Ivanov, D.S. Karabekyan, V.I. Yakuba On manipulability of aggregation procedures by coalitions with the same first-ranked alternative
3. В.И. Вольский, А.А. Денисенко А.А. Метрические процедуры голосования
4. А.Ю. Кондратьев, В.В. Мазалов Правила выбора победителя на основе методов кооперативной теории игр
5. М.Г. Крейнес, А.А. Афонин, Е.М. Крейнес Модели для объективной оценки качества научно-технической информации, зафиксированной на естественных языках
6. А.П. Михайлов, А.П. Петров, О.Г. Прончева, Н.А. Маревцева Моделирование информационной борьбы в социуме
7. Л.Ф. Петров, А.А. Долгополов Оценка риска вовлеченности клиентов банков в схемы по отмыванию денежных доходов
8. И.В. Трегуб Модель индекса восприятия коррупции
9. Д.Н. Федянин О свойствах социальной сети, состоящей из сложных узлов

### **Multidimensional Polarization Index and its Applications\***

F. Aleskerov, V. Oleynik  
*National Research University  
Higher School of Economics, Moscow, Russia*

In the present paper the multidimensional polarization index is suggested, its basic properties are studied, and the measure elaborated is applied to the case of the Russian State Duma (1994 – 2003).

This work is an extension of the unidimensional model developed in [1] and represents an attempt to adopt physical concepts to the measurement of polarization in society. It was inspired by the notion of central moment of a system of forces coming from statics. The framework suggested is brand new and alternative to two governing trends in measurement of polarization in societies originating from [2] and [3].

According to the framework proposed in the paper, a society is split into groups according to particular criteria. Each group may be seen as a *weighted point* in the multidimensional unit cube, where the weight of the point corresponds to the share of group's members in the whole society and its normalized coordinates represent positions of the group in respective dimensions – attributes; together all the groups form a system of weighted points. Polarization of the group is then measured as a central moment of a system of forces (different metric functions can be considered).

Basic properties of the multidimensional polarization index are examined in some special cases.

Finally, polarization of the Russian State Duma in 1994 – 2003 is measured using the index proposed. Criteria of polarization in the Russian parliament and deputies' positions along these criteria are found through the analysis of roll-call votes carried out in [5]. The results obtained are interpreted according to the current events.

---

\* This research is supported by International Laboratory of Decision Choice and Analysis, Higher School of Economics. The authors express their gratitude to Vyacheslav Yakuba who kindly provided the data on the Russian State Duma (1994 – 2003) for the empirical part of the work

## References

4. F. Aleskerov, M. Golubenko, On the evaluation of a symmetry of political views and polarization of society (in Russian), Working paper WP7/2003/04 Moscow: State University - Higher School of Economics (2003) 24 p.
5. J. Esteban, D.Ray, On the measurement of polarization, *Econometrica* 62 (4) (1994) 819–851.
6. J. E. Foster, M. C. Wolfson, Polarization and the decline of the middle class: Canada and the U.S, *The Journal of Economic Inequality* (1994) 247–273.
7. Lipacheva, A comparison of polarization and bi-polarization indices in some special cases, Working paper WP7/2003/04 Moscow: State University - Higher School of Economics (2015) 28 p.
8. Алескеров Ф., Благовещенский Н., Сатаров Г., Соколова А., Якуба В. Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905-1917 и 1993-2005 гг.). М.: Физматлит, 2007, 309 с.

## On manipulability of aggregation procedures by coalitions with the same first-ranked alternative

F.T. Aleskerov,

*National Research University Higher School of Economics, Russian Federation, and V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences*

A.A. Ivanov,

*National Research University Higher School of Economics, Russian Federation, and Skoltech*

D.S. Karabekyan,

*National Research University Higher School of Economics, Russian Federation*

V.I. Yakuba,

*National Research University Higher School of Economics, Russian Federation, and V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences*

The coalitional manipulability of voting rules for special case of coalition formation is studied by computer experiment. For the considered case, the coalition, upon manipulation, consists of agents with the same alternative on the first place in their orderings. Not necessary all agents of the manipulating coalition should report insincere preferences, i.e. manipulating agents can join others by adjusting the preferences. This makes the coalition formation more flexible, inducing the increase of the Nitzan-Kelly manipulability index by different value for different voting rules. Calculations are made for 3 alternatives for known aggregation procedures.

We consider the following model. A group of agents come into an agreement to misrepresent their preferences to obtain a better result of the aggregation procedure. We assume that they agree that the same alternative will be on the first place in their insincere preferences. There can be the case that they construct a broader coalition consisting not only of manipulating agents, but with agents, who report their sincere preferences, so the manipulating agents join them. We assume also that manipulating agents can misrepresent their preferences in all possible ways.

Consider an example. Let us assume that there are 100 voters with the following preferences. Let us also assume that the aggregation procedure is a Plurality rule.

group name	1	2	3	4	5	6
1-st best alt						
2-nd best alt						
3-rd best alt						

#of voters in the group	0	0	5	5	5	5
-------------------------	---	---	---	---	---	---

In this example one can see that all possible orderings of 3 alternatives are presented by groups of agents. Agents p3, p5 and p6 (45 voters in total) form a coalition. Group p3 put  $c > b > a$  in the ballots instead of the sincere preferences  $b > c > a$ . Groups p5 and p6 do not change their preferences. As a result alternative "c" wins, and this result is better for each manipulating member of the coalition. To evaluate the degree of manipulability, we calculate the Nitzan-Kelly's index (NK-index):

$$NK = \frac{d_0}{m^3},$$

where  $d_0$  is the number of voting situations in which manipulation takes place, so, it is an Impartial Culture model.

The calculations are made for 3 alternatives for tens of agents for several known aggregation procedures and their variants. In the multiple choice model, the extended preferences are used to compare the sets as results of aggregation.

In addition to the aggregation procedures, studied in our previous papers we made calculation for the following rules: Metric (and Dual Metric) rule, Kemeni, Matrix Triangulation, and Dodgson's rules for Leximin, Leximax, Risk-averse, and Risk-lover extentions. Except the Hare's rule, the NK index grows with increasing number of voters. The Matrix Triangulation procedure appears to be one of the most vulnerable to manipulation. The Dodgson's and Kemeni procedures shows almost the same degree of manipulability, less than those of both Metric procedure and the Plurality procedure, close to the level of manipulability of Black and Borda rules, but higher than that of the Nanson's procedure. The least values of the NK index are of the Hare's procedure.

#### References

9. Aleskerov F., Karabekyan D., Sanver R., Yakuba V. On manipulability of positional voting rules. *SERIEs: Journal of the Spanish Economic Association* 2011; 2:431-46.
10. Nitzan S. The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation. *Public Choice* 1985; 47:349-70.
11. Kelly J. Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't. *Social Choice and Welfare* 1993; 10:161-75.
12. Favardin P., Lepelley D. Some further results on the manipulability of social choice rules. *Social Choice and Welfare* 2006; 26:485-509.

### Метрические процедуры голосования\*

В.И. Вольский

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия*

А.А. Денисенко А.А.

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия*

В работе рассматривается новый класс процедур голосования, основанных на введении метрики в многомерном пространстве упорядочений кандидатов, представленных избирателями. Процедуры голосования исследуются на удовлетворение условий монотонности, а также с позиций общей теории выбора.

Используются следующие обозначения:

$A = x, y, \dots, z$  – кандидаты;

$|A| = n$  – число кандидатов;

$p_i (i = 1, \dots, N)$  – упорядочение избирателя  $i$  кандидатов из множества  $A$ .

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №15-01-02847а "Индексы влияния на сетевых структурах" за 2015 г.

$\{p_i\}, i = \overline{1, N}$  - профиль индивидуальных упорядочений избирателей относительно кандидатов из множества  $A$ .

Упорядочение  $p_i$  кандидатов избирателем  $i \in \{1, \dots, N\}$  рассматривается как оценки по критерию в ранговой шкале: кандидату, стоящему на первом месте в упорядочении избирателя приписывается число  $n$ , кандидату, стоящему на втором месте – число  $n-1$ , и т.д. Тогда каждого кандидата  $x \in A$  можно представить точкой в  $N$ -мерном критериальном пространстве  $\{p_i\}, i = \overline{1, N}$ . В качестве числовой оценки кандидата  $x \in A$  рассматривается расстояние от начала координат до точки, соответствующей этому кандидату во введенном таким образом многокритериальном пространстве. Тогда лучшим кандидатом называется тот кандидат, у которого расстояние от начала координат до точки, соответствующей этому кандидату в многокритериальном пространстве, максимально.

Обозначим через  $f_i(x)$  ранг кандидата  $x \in A$  в упорядочении  $i$ -го избирателя. Тогда расстояние  $d(x)$  от точки  $x \in A$  до начала координат в многокритериальном пространстве  $\{p_i\}, i = \overline{1, N}$  равно:

$$d(x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N f_i^p(x)}, \text{ где } p \text{ меняется от } 1 \text{ до } \infty.$$

Таким образом вводится класс процедур голосования, зависящий от параметра  $p$ .

В выбор включаются кандидаты  $y \in A$ , имеющие максимальное значение этого расстояния:

$$y = \arg \max_{x \in A} d(x).$$

В случае  $p=1$  имеет место широко известная процедура голосования Борда [1] (лучшими считаются кандидаты, имеющие максимальную сумму рангов в упорядочениях избирателей).

В случае  $p=\infty$  имеет место процедура совокупно-экстремального выбора [2] (лучшими считаются кандидаты, которых назвал лучшим хотя бы один избиратель).

Кроме того, в рассмотрение вводится класс процедур голосования, двойственный к введенному выше классу процедур. Вводится понятие идеальной точки  $I$  в многокритериальном пространстве  $\{p_i\}, i = \overline{1, N}$ . Координатами идеальной точки  $I$  является набор  $(n, n, \dots, n)$ . Тогда расстояние  $d(x)$  от точки  $x \in A$  до идеальной точки  $I$  в многокритериальном пространстве  $\{p_i\}, i = \overline{1, N}$  равно:

$$d(x) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N [n - f_i(x)]^p}, \text{ и лучшими считаются кандидаты } y \in A, \text{ имеющие}$$

$$\text{минимальное значение этого расстояния: } y = \arg \min_{x \in A} d(x).$$

Введенные таким образом процедуры голосования исследованы при различных значениях параметра  $p$  на выполнение различных модификаций условия монотонности. Эти процедуры также исследованы с позиций общей теории выбора [2]. Соответствующие функции выбора исследованы на удовлетворение условий наследования, согласия и независимости от отбрасывания альтернатив.

#### Список литературы

1. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2005.
2. Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов (основы теории). М.: Наука, 1990.

## Правила выбора победителя на основе методов кооперативной теории игр\*

А.Ю. Кондратьев, В.В. Мазалов  
*ИПМИ КарНЦ РАН, Петрозаводск, Россия*

Процедуры коллективного выбора применяются для определения лучшей альтернативы (или кандидата) из множества альтернатив по заданному профилю предпочтений или бинарному отношению парных сравнений. Для таких процедур формулируются и проверяются выполнение различных свойств, например, оптимальность по Парето (единогласие), монотонность, независимость от единогласно проигравших, независимость от клонов, перевернутая симметрия, участие и пополнение, принципы Кондорсе, Смита, покрывания, большинства, совместного большинства, проигравшего по Кондорсе и другие. Для разных реальных задач желательные и нежелательные свойства могут отличаться, поэтому применяются различные методы определения победителя.

Задача выбора победителя по профилю голосования возникает при выборах президента страны, ректора университета или председателя профсоюза. Самым популярным здесь является правило относительного большинства, когда побеждает кандидат с наибольшим числом первых предпочтений. На выборах, например, президентов Ирландии и Индии от голосующих требуется указать точный порядок кандидатов, которых они хотели бы видеть президентом. Затем применяется процедура единого передаваемого голоса. На выборах президентов России и Франции назначается второй тур голосования для двух наиболее предпочитаемых в первом туре кандидатов.

Выбор победителя по профилю предпочтений применяется не только в политике. В шоу-бизнесе, например, это конкурс Евровидение на лучшую песню, награды различных кинофестивалей. В спорте можно отметить чемпионаты по автогонкам, кубок мира по биатлону. Здесь, как правило, применяются балльные процедуры с начислением очков за занятое место в каждом предпочтении или гонке. Иногда не учитываются несколько худших результатов участника. Побеждает кандидат с наибольшей суммой баллов.

В спорте также проводятся однокруговые или многокруговые турниры для определения претендента на чемпионский титул (турнир претендентов ФИДЕ по шахматам), или чемпиона (чемпионаты по футболу, баскетболу, олимпийский турнир по керлингу). В каждом круге турнира проводятся матчи между всеми парами участников. Для определения победителя обычно начисляется определенное количество очков за поражение, ничью и победу. В шахматах это 0 очков за поражение,  $\frac{1}{2}$  очка за ничью и 1 очко за победу, в баскетболе 1 очко за поражение и 2 очка за победу, в футболе 0 очков за поражение, 1 очко за ничью и 3 очка за победу. Свойства процедур здесь также зависят от способа подсчета баллов.

Мы предлагаем применять методы, развитые в кооперативной теории игр, для выбора победителя в рассмотренных выше задачах. Для этого по профилю предпочтений строится турнирная матрица парных сравнений. Затем различными способами определяется характеристическая функция для кооперативной игры кандидатов, например, как значение игры коалиции кандидатов против ее противоположной коалиции. Победителем объявляется кандидат с наибольшим значением вектора Шепли.

Было рассмотрено большое число примеров для того, чтобы выделить свойства процедур, выполнение которых желательно или нежелательно для каждого класса рассмотренных задач. Затем мы сравнили применяемые классические процедуры с предложенными нами.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Гуманитарного Научного Фонда (грант 15-02-00352)

## **Модели для объективной оценки качества научно-технической информации, зафиксированной на естественных языках\***

М.Г. Крейнес, А.А. Афонин, Е.М. Крейнес  
ООО «БАЗИСНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ», Москва, Россия

Оценивание качества научно-технических документов (НТД) на естественных языках без проведения предметных исследований предполагает прямой содержательный анализ текстов, в результате которого должна быть сформирована объективная содержательная оценка текста, или использование данных, характеризующих востребованность и популярность анализируемого документа (число запросов документа в базе данных, его библиометрические и наукометрические показатели). Объективная интерпретация результатов такого оценивания как хороших или плохих (высоких или низких) предполагает наличие сопоставимой по тематике и содержанию группы документов, для которых получены соответствующие содержательные оценки или данные о востребованности и популярности, и сравнение характеризующих анализируемый документ показателей с показателями документов такой референтной группы. Данные о востребованности и популярности документа, как правило, доступны. Остаются нерешенными три существенные задачи оценивания НТД: построение объективных содержательных оценок, их интеграция с данными библио/наукометрии и формирование референтной группы для интерпретации оценок.

Формирование объективной оценки качества НТД возможно по результатам вычислительного содержательного поиска и анализа текстов с привлечением библиометрических и наукометрических показателей. Для этого предложена совокупность математических моделей текстов, текстовых коллекций, содержательного сходства текстов, тематического сходства текстовых коллекций, количественных показателей информативности, значимости и содержательной независимости. Данные модели позволяют вычислительно получать объективные оценки качества отдельных НТД и формировать референтные группы для коллекций НТД. Например, коллекций текстов, представляющих работу отдельных ученых, коллективов ученых, научно-технических изданий. Естественно, при формировании оценок критически важной оказывается полнота представления научно-технического уровня в доступной для организации поиска базе информационных источников.

Модели текстов вычислительно формируются на основании предположения о возможности адекватно представить тематику и содержание текста набором слов, наиболее сильно (в смысле комбинаторного критерия, используемого в информационной технологии КЛЮЧИ К ТЕКСТАМ®) связанных в тексте, представленном «мешком слов» (грамматические и синтаксические структуры при построении модели текста игнорируются). Априорная информация о смысле, значении и сочетаемости слов при построении модели текста не используется. Модель текста представляется набором слов с весами, принимающими значения от 0 до 1. Содержательная и тематическая близость двух текстов количественно определяется близостью моделей как частное от деления суммы минимумов весов слов, присутствующих в моделях обоих текстов, на величину большего из суммарных весов слов моделей сравниваемых текстов. Модели текстов, входящих в произвольную коллекцию, позволяют последовательно построить: приближение модели коллекции (часть слов моделей текстов, обладающая большим суммарным весом в анализируемой коллекции), адаптивное контекстное приближение модели коллекции (слова приближенной модели, позволяющие содержательно категоризовать требуемую долю документов коллекции), структурированную контекстную модель коллекции (группы слов контекстного приближения, объединенные по тематике). Для формирования моделей двух последних типов введена модель контекста слова в рамках приближения модели коллекции. Контексты слов определяются на основании формально того же комбинаторного индекса, что и слова моделей текстов, но в рамках всей коллекции. Количественно тематическая близость двух текстовых коллекций определяется близостью их структурированных контекстных моделей.

Модели текстов и текстовых коллекций позволили построить модели количественных показателей качества (информативности, значимости и содержательной независимости)

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, Соглашение № 14.579.21.0090 от 27.11.2014.

текстов относительно произвольной коллекции текстов. Закономерное изменение значений показателя информативности при расширении коллекции содержательно и тематически близких текстов, отобранных на основании моделей текстов, за счет включения текстов с уменьшающимся показателем содержательной близости позволяет определить состав референтной коллекции для любого анализируемого документа. Для текстовых коллекций в качестве референтных выбираются коллекции со значением тематической близости выше порогового.

Вычислительные процедуры формирования моделей текстов, коллекций текстов, показателей содержательной близости текстов и тематической близости коллекций, определения количественных показателей качества НТД, построения референтных коллекций реализованы алгоритмически и программно.

Адекватность представления содержания текстов научно-технического характера их моделями показали вычислительные эксперименты с почти полумиллионной коллекцией научных статей и их аннотаций из информационного ресурса Научная электронная библиотека (elibrary.ru). В ходе экспериментов оценивалось соответствие тематической категоризации текстов и аннотаций по набору тематических категорий, определенному структурированной моделью коллекции текстов. Адекватность формирования референтных групп и оценок качества для НТД и коллекций НТД (журналов) оценивалась по миллионной коллекции статей того же ресурса, а также по коллекции публикаций в журнале Science с начала издания по 1996 год. Эти масштабные эксперименты продемонстрировали высокое качество предложенных моделей и алгоритмической реализации их анализа и подтверждают потенциал их практического использования.

## Моделирование информационной борьбы в социуме\*

А.П. Михайлов<sup>1,2</sup>, А.П. Петров<sup>1</sup>, О.Г. Прончева<sup>1,3</sup>, Н.А. Маревцева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша, Москва, Россия

<sup>2</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup>МФТИ (ГУ), Москва, Россия

Модель информационного нападения, предложенная в [1], описывает распространение информации в социуме, состоящем из  $N_0$  индивидов. Предполагается, что распространение происходит через СМИ и путем межличностной коммуникации индивидов (интенсивности данных процессов характеризуются, соответственно, параметрами  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Модель имеет вид:

$$\frac{dX(t)}{dt} = (\alpha + \beta X(t))(N_0 - X(t)), \quad X(0) = 0 \quad 1)$$

где  $X(t)$  - число индивидов, охваченных информацией к моменту  $t$  (адептов) В работе [2] в модель информационного нападения были добавлены следующие дополнительные факторы:

- неполных охват социума СМИ (есть две группы индивидов: группа численностью  $N_1$  получает информацию через СМИ и межличностную коммуникацию, группа численностью  $N_2$  - только через межличностную коммуникацию);
- забывание информации индивидами;
- двухшаговое усвоение и забывание информации индивидами (услышав информацию впервые, индивид становится так называемым предадептом и не распространяет ее дальше, если же предадепт снова получит эту информацию, то становится адептом.

Расширенная модель информационного нападения имеет вид системы из четырёх дифференциальных уравнений.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-01-0100306 и Российского гуманитарного научного фонда, проект 15-03-00435.

Модель информационной борьбы [3] описывает более сложный процесс: предполагается, что в социуме распространяются два информационных потока, инициированные противоборствующими источниками, причём индивид, получивший информацию от одного из сторон, становится невосприимчив к информации второй стороны. Если  $X(t)$  - число индивидов, охваченных информацией от первого источника, а  $Y(t)$  - число индивидов, охваченных информацией от второго источника, то модель имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= (\alpha_1 + \beta_1 X)(N_0 - X - Y), \quad X(0) = 0, \\ \frac{dY}{dt} &= (\alpha_2 + \beta_2 Y)(N_0 - X - Y), \quad Y(0) = 0. \end{aligned} \quad 2)$$

Были получены необходимые и достаточные условия победы одного источника информации над другим.

В [4] в модель информационного противоборства были добавлены те же дополнительные факторы, что и в модель информационного нападения. Модель имеет вид системы из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений. Расширенные модели информационного нападения и противоборства были исследованы аналитически и численно.

В работе [5] была исследована модель информационного противоборства с учётом фактора забывания в случае, когда одна из сторон дестабилизирует систему путём кратковременного повышения интенсивности пропаганды через СМИ. Модель имеет вид системы из двух дифференциальных уравнений с периодической разрывной правой частью. Для случая малой интенсивности распространения информации через межличностную коммуникацию был построен главный член асимптотики периодического решения. Модель была исследована аналитически и численно.

Также для модели противоборства с дестабилизирующим воздействием построена асимптотика решения модели в случае отсутствия забывания информации, модель исследована аналитически и численно.

### Список литературы

1. Михайлов А.П., Ключев Н.В. О свойствах простейшей математической модели распространения информационной угрозы. // Математическое моделирование социальных процессов, вып. 4. М.: МАКС Пресс, 2002. С. 115-123.
2. Михайлов А.П., Петров А.П., Маревцева Н.А., Третьякова И.В. Развитие модели распространения информации в социуме // Математическое моделирование, 2014. Т.26. №3. С.65-74.
3. Михайлов А.П., Маревцева Н.А. Модели информационной борьбы. // Математическое моделирование. Т.23. 2011. №10. С.19-32.
4. Mikhailov A. P., Petrov A. P., Proncheva O. G., Marevtseva N. A.. Mathematical Modeling of Information Warfare in a Society // Mediterranean Journal of Social Sciences. Vol 6 No 5. S2, September 2015. p.27-35.
5. Михайлов А. П., Петров А. П., Прончева О. Г., Прончев Г.Б., Маревцева Н.А. Моделирование периодических дестабилизирующих воздействий при информационном противоборстве в социуме // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — № 16. — С. 1–13.

## Оценка риска вовлеченности клиентов банков в схемы по отмыванию денежных доходов

Л.Ф. Петров, А.А. Долгополов  
РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва, Россия

На сегодняшний день актуальной проблемой Российской экономики являются масштабные процессы по легализации (отмыванию) денежных доходов, полученных преступным путем, в том числе с выводом их за границу. Поскольку ключевое положение в данной сфере занимают банки, именно на них были возложены функции оперативного контроля за своими клиентами и их финансовыми операциями, а также ответственность за

принятие мер по пресечению упомянутых операций, вплоть до отказа клиенту в обслуживании. Таким образом, банки несут ответственность за своих клиентов и их операции, а значит и принимают на себя риски от обслуживания своих клиентов, вплоть до отзыва лицензии. Сложившаяся тенденция увеличения риска банков от обслуживания клиентов, занимающихся отмыванием денег, иллюстрируют следующие данные: до ужесточения законодательства, в 2012 году, за нарушение Федерального Закона №115-ФЗ "О противодействии отмыванию денежных доходов, полученных преступным путем, и финансированию терроризма" лицензия была отозвана у 1 банка, в 2013, после изменения законодательства, уже у 8 банков, а в 2014 у 36 банков [1].

В сложившейся ситуации для банков потенциальный риск увеличивает любой клиент. Отметим, что ранее риск для банка представляли в основном клиенты, пользовавшиеся заемными средствами [2].

Первостепенной задачей в сложившейся ситуации становится разработка моделей оценки риска клиента для банка, в том числе и потенциального клиента. Основным риском высокой вовлеченности клиента в отмывание денежных средств для банков (далее - риск) являются в себе юридические лица и индивидуальные предприниматели, которые оперируют значительно большими финансовыми средствами, нежели физические лица. Поэтому мы будем рассматривать проблему оценки риска для клиентов - юридических лиц и индивидуальных предпринимателей.

Учитывая специфику собираемых и доступных данных, для количественной оценки уровня риска вовлеченности клиента банка в процессы по отмыванию денег была выбрана скоринговая регрессионная модель вида:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n + \varepsilon \quad (1)$$

, где  $y$  - итоговый скоринговый балл клиента;

$x_i$  -  $i$ -ый фактор модели, характеризующий predisposedность клиента к участию в схемах по отмыванию денег;

$a_0$  - минимальный скоринговый балл, присущий любому клиенту;

$a_i$  - весовой коэффициент  $i$ -го фактора.

Для определения параметров  $a_0$ ,  $a_i$  представленной выше модели использовались данные 300 клиентов крупного коммерческого банка. В качестве результирующего показателя учитывались экспертные оценки вовлеченности клиентов в схемы по отмыванию денег, полученные у сотрудников подразделения финансового мониторинга по шкале от 0 до 1, где 0 - минимальная оценка, характеризующая клиента, как не вовлеченного в процесс отмывания денег, а 1 - максимальная оценка, присваиваемая клиентам, которым было отказано в обслуживании на основании данных о высокой вовлеченности в схемы по отмыванию денег. В качестве факторов  $x_i$ , характеризующих степень вовлеченности клиента в отмывание денег, было выбрано 15 показателей таких, как объемы снимаемой наличности, сумма уплаченных налогов и т.п.

По результатам, полученным в ходе построения модели, значимыми были признаны следующие факторы: объемы снятия наличных денежных средств ( $x_1$ ), наличие документов финансовой отчетности ( $x_2$ ), размер уставного капитала ( $x_3$ ), средняя заработная плата сотрудников в месяц ( $x_4$ ), численность сотрудников компании ( $x_5$ ), сумма уплаченных налогов ( $x_6$ ), наличие партнеров в оффшорных зонах ( $x_7$ ). Модель с рассчитанными параметрами выглядит следующим образом:

$$y = 2,5454 \cdot x_1 + 0,308 \cdot x_2 + 2,09 \cdot x_3 + 1,0262 \cdot x_4 + \\ + 0,2337 \cdot x_5 + 6,2059 \cdot x_6 + 0,1402 \cdot x_7 \quad (2)$$

В качестве развития представленного подхода в работе также была рассмотрена логистическая скоринговая регрессионная модель следующего вида:

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_n \cdot x_n + \varepsilon \quad (3)$$

, где  $p$  - вероятность того, что клиент осуществляет/начнет осуществлять сомнительные операции. Результирующая переменная  $p$  является мерой риска для банка.

$x_i$  -  $i$ -ый фактор модели, характеризующий predisposedность клиента к участию в схемах по отмыванию денег;

$b_0$  - константа характеризующая минимальный уровень вовлеченности клиента в схемы по отмыванию денег;

$b_i$  - весовой коэффициент  $i$ -го фактора.

В отличие от модели (1) расчета скорингового балла клиента модель (3) в качестве результирующей переменной содержит формализованную оценку риска клиента.

Определение параметров модели (3) для рассматриваемого числа факторов требует более крупных выборок клиентских данных.

#### Список литературы

1. Отчет о развитии банковского сектора и банковского надзора в 2014 году / Издания Банка России. URL:[http://www.cbr.ru/publ/archive/root\\_get\\_blob.aspx?doc\\_id=9878](http://www.cbr.ru/publ/archive/root_get_blob.aspx?doc_id=9878) (дата обращения: 27.03.2016)
2. Петров Л.Ф., Долгополов А.А. Формализация оценки благонадежности клиентов кредитных организаций в рамках противодействия легализации денежных доходов// Фундаментальные исследования. 2015, № 2. (часть 3) С. 563–567.

## Модель индекса восприятия коррупции

И.В. Трегуб

*Финансовый университет, Москва, Россия*

Индекс восприятия коррупции (далее ИВК) — ежегодный составной индекс, измеряющийся по десятибалльной шкале до 2012 года (0 – максимальный уровень коррупции, 10 – отсутствие коррупции) и 100 балльной шкале после 2012 года и отражающий уровень восприятия коррупции в государственном секторе различных стран аналитиками и предпринимателями.

В 2015 году Россия заняла 119 место, оказавшись в одном ряду с Азербайджаном, Гайаной и Сьерра-Леоне. Первые три места в ИВК-2015 заняли Дания, Финляндия и Швеция, а последние три — Афганистан, Северная Корея и Сомали.

Индекс восприятия коррупции основывается на нескольких независимых опросах, в которых принимают участие международные финансовые и правозащитные эксперты, в том числе из Азиатского и Африканского банков развития, Всемирного банка и американской организации Freedom House. Значения индекса постоянно цитируются в СМИ, что оказывает существенное влияние на инвестиционные потоки и возможности экономического развития экономики страны.

По данным Центра Антикоррупционных исследований и инициатив [1], существенное влияние на коррупцию оказывают факторы, среди которых число взяток, показатель социальной активности, численность работников государственных органов и органов местного самоуправления. Целью данного исследования является получение количественных оценок индекса восприятия коррупции на основе разработки эконометрической и имитационной моделей с целью понять возможность прогнозирования его значений для целей анализа влияния информации о ИВК на финансовые потоки страны.

В качестве переменных в модели были выбраны численность безработных, показатель числа взяток и численности работников государственных органов и органов местного самоуправления, показатель числа взяток на одного работника государственных органов и органов местного самоуправления.

Первым этапом построения модели был сбор данных за 2000-2015гг. [2-3] и нормирование их с учетом изменившейся методики расчета индекса.

На втором этапе была с применением методики эконометрического моделирования [4] была построена эконометрическая модель, обоснована ее сущность и значение.

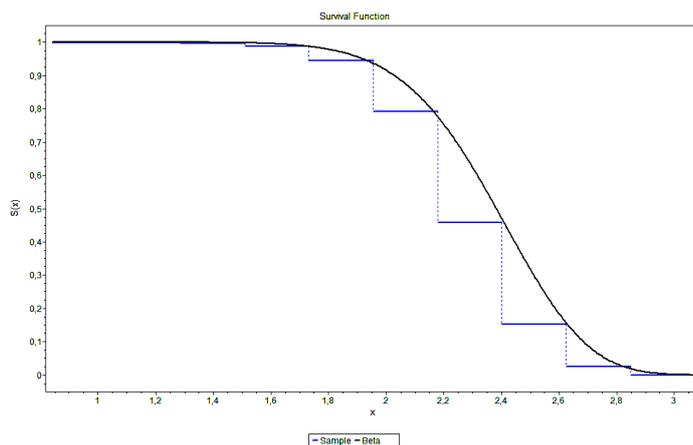
На третьем этапе производилась оценка коэффициентов модели, а также проверка качества спецификации и проверка предпосылок теоремы Гаусса – Маркова.

Построение имитационной модели, согласно методики [5], проводилось на четвертом этапе. В итоге получена следующая модель

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma) \\ x_2 = c_0 + c_1 t + u_t, \\ x_1 = b_0 + b_1 t + v_t, \\ u_t \sim N(\theta_1) \\ v_t \sim \text{Log}N_1(\theta_2) \end{array} \right.$$

где  $x_1$  - численность безработных Российской Федерации (млн. человек),  $x_2$  - число зарегистрированных преступлений - взяточничество, на одного работника государственных органов и органов местного самоуправления.

На основе эмпирических данных были оценены параметры регрессии и распределений, чего были получены прогнозные интервалы значения ИВК на 2016 год.



**Рисунок 1.** 1-F для  $y_{2016}$

С вероятностью 95% можно утверждать, что ИВК в 2016 году значение индекса восприятия коррупции будет не менее 2,77 и Россия, по крайней мере не опустится ниже занимаемой в прошлом году позиции. Таким образом можно утверждать, что коррупция в стране, оцениваемая по индексу восприятия коррупции, не должна сказаться негативным образом на иностранных инвестициях в российский сектора экономики

Тот факт, что индекс восприятия коррупции имеет бета-распределение является ожидаемым, т.к. бета-распределение используется для описания случайных величин, значение которых ограничены конечным интервалом, в данном случае это значения 0 и 10, к тому же данное распределение используется при статистическом анализе в случае, когда ответы на вопросы объединяют в одну таблицу частот, а не составляют таблицы по каждой отдельной переменной, что и происходит в случаи расчёта ИВК.

Прогнозные интервалы демонстрируют возможность небольшой положительной динамики ИВК, однако при отсутствии должного исполнения антикоррупционного законодательства, а также при отсутствии исполнения государственным гражданскими служащими функций государства (например, обеспечение благосостояния общества) значение ИВК не поднимется выше отметки «3» в ближайший год.

#### Список литературы

1. <http://www.transparency.org.ru/>.
2. Богатырев. Е.Д., Трегуб И.В. Инструменты моделирования и прогнозирования развития государственной гражданской службы // отчет о НИР (Финансовый университет при Правительстве РФ)
3. Трегуб И.В. Инструменты моделирования и прогнозирования развития государственной гражданской службы. Монография. М.: ПСТМ, 2013
4. Бышев В.А. Введение в эконометрику. Учебное пособие М.: Финансы и статистика, 2009.
5. Трегуб И.В. Имитационное моделирование: Учебное пособие. М.: ФА, 2007

# О свойствах социальной сети, состоящей из сложных узлов\*

Д.Н. Федянин  
ИПУ РАН, Москва, Россия

В последние десятилетия значительно возрос интерес к изучению сетевых структур, в частности – социальных сетей. Во многом это обусловлено бурным развитием онлайн-социальных сетей (Facebook, Twitter, ВКонтакте и др.) и осознанием их влияния на социально-экономическую и политическую жизнь общества. Социальные сети стали важной частью политических процессов в самых различных странах [1]. Подтверждением этому являются недавние события в Египте, Ливии, Украине, США и других странах.

Одной из первых моделей, описывающих динамику мнений в социальных сетях, была модель, часто называемая моделью де Гроота (см. [2]), и получившая развитие в большом количестве работ (см., напр., [3-5]). В этой модели каждый участник (узел) социальной сети характеризуется своим мнением, которое выражено вещественным числом и на каждом шаге дискретного времени меняется по линейному закону. Оказалось, что динамика мнений при этом описывается дискретным марковским процессом, что позволяет получать аналитические результаты относительно итоговых (за бесконечное время) мнений. Особенно интересным является случай, когда все участники социальной сети приходят к консенсусу, т.е. итоговое мнение оказывается одинаковым у всех участников сети. При этом возникает ряд вопросов, связанных с «вкладом» различных узлов в формирование итогового общего мнения.

В данной работе рассматривается особый случай социальной сети, когда каждый ее узел является сложным – состоит из двух агентов, внешнего и внутреннего, взаимодействующих между собой. При этом информационное взаимодействие узла с остальной сетью осуществляется при помощи внешнего агента, а внутренний агент непосредственно взаимодействует только с внешним. Такая структура сети может интерпретироваться следующим образом: у каждого из взаимодействующих в сети внешних агентов имеется свой индивидуальный советник (друг или консультант), с которым он осуществляет информационное взаимодействие.

В рассмотренной модели получено в явном виде выражение, характеризующее зависимость итогового мнения агентов от их начальных мнений при условии достижимости консенсуса (без ограничений на количество агентов или структуру взаимодействия между узлами). Была показана монотонность зависимости влияния узла от изменения доверия между внутренним и внешним агентом одного узла. Для случая двух узлов было показано, при каких условиях внутренний параметр узла является более важным для его влияния, чем внешний.

## Список литературы

1. Castells M. Networks of outrage and hope: social movements in the internet age. Cambridge, Polity Press, 2012, 298 p.
2. De Groot M.H. Reaching a Consensus // Journal of American Statistical Association. 1974. № 69. pp. 118 – 121.
3. Friedkin N.E., Johnsen E.C. Social Influence Networks and Opinion Change. Advances in Group Processes 16. 1999. pp. 1-29.
4. Golub B., Jackson M.O. Naive Learning in Social Networks: Convergence, Influence, and the Wisdom of Crowds // American Economic Journal: Microeconomics. – 2010 –2(1). pp. 112-149.
5. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Издательство физико-математической литературы, 2010.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Проект №16-01-00485 А.

## Рынки и аукционы. Анализ и проектирование

1. I. Bykadorov, A. Ellero, S. Funari, S. Kokovin, and P. Molchanov Painful Birth of Trade under Monopolistic Competition
2. A.Yu. Filatov Price-Makers and Price-Takers at Industrial Markets
3. A.Yu. Filatov, E.O. Smirnova The Day-Ahead Electricity Market Forecasting in Russian Federation: a Case Study of Siberia
4. A.Yu. Filatov, Ya.S. Makolskaya Theory and Empirics
5. D.V. Volodin, M.R. Hesamzadeh Transmission Expansion Planning Considering Power Market Structur
6. Gocha Chogovadze, Otar Shonia Game theory and game solution in mixed strategy area on agrofirm example
7. Н.И. Айзенберг, В.И. Зоркальцев, И.В. Мокрый Имитационное моделирование нестационарных ситуаций на олигопольном рынке
8. Г.А. Белянкин, Т.В. Белянкина, А.С. Савадян Игровой подход к оценке влияния введения новых технологий на общественное благосостояние
9. А.А. Бобошко Теоретико-игровой анализ геопозиционного аукциона
10. Васин А.А., Лесик И.А. Динамический синтез транспортной системы многоузлового рынка в условиях совершенной конкуренции
11. Е.И. Ивкина Теоретико-игровой анализ позиционных аукционов при коэффициенте кликабельности, зависящем от рекламодателя
12. А.Г. Коваленко От модели однопродуктового рассредоточенного рынка к модели общего равновесия пространственно рассредоточенной экономической системы несовершенной конкуренции
13. Г.В. Колесник Формирование рынков иерархической структуры с использованием долгосрочных договоров поставки
14. Р.И. Яминов Анализ изменения поведения участников эксперимента с учетом социальной составляющей и психологических характеристик

### **Painful Birth of Trade under Monopolistic Competition\***

I. Bykadorov, A. Ellero, S. Funari, S. Kokovin, and P. Molchanov  
*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, NSU, NSUEM, Department of  
Management of Ca'Foscari University of Venice, NRU HSE*

We study a standard Krugman (pro-competitive) trade model. Unlike oligopoly, the game goes among infinitely many players and thereby strategic interactions are excluded in free-entry Nash equilibrium (each producer chooses her output, perceiving others' strategies as given).

Our focus is on gains from trade, the key question in trade theory. In New Trade theory, it again attracted a vivid discussion ([3, 9]) after [2] puzzled the theorists with surprisingly low estimated gains. One of possible explanations is the constant elasticity of substitution (CES)

---

\* This research is supported in part by RFBR, grants 15-06-05666, 16-01-00108 and 16-06-00101, and by grant SSD SECS-S/06, 571/2014 from Department of Management of Ca'Foscari University of Venice.

assumption, dominating in this discussion. Instead, variable elasticity of substitution (VES) is more realistic and related “pro-competitive” effects promise additional gains. However, under VES, [1] finds *lower* estimated trade gains than under CES demand. Moreover, under VES even welfare loss may occur, when free trade is compared with autarky ([5]) under specific utilities/costs.

By contrast, the present paper discovers harmful trade near autarky—but now under *any* additive VES utilities enabling autarky. As to gains, they do occur near free trade, at least under realistic preferences. In other words, the gains from gradual trade liberalization are non-monotone, eventually positive but in the beginning negative. Therefore, the *first step from autarky to trade is harmful*. A simple version of this effect in monopolistic competition is firstly found in our discussion paper [6] for two countries, it is generalized now to multi-country world and incomplete autarky.

Our setting is *standard* in New Trade. It is a version of general Krugman’s one-sector monopolistic competition [8] with unspecified additive utilities, without outside good. Homogeneous firms use one production factor (labor) with the same fixed and marginal cost; consumers are also identical. For analytical tractability of difficult case of asymmetric countries, several countries include only two types: *G*-countries have great population, while *L*-countries can be little or equal to *G*. Labor markets do clear, trade is balanced. At the equilibrium, any pair of countries can trade or not, depending on the level of iceberg trade cost. Thereby, we introduce a new, convenient version of *asymmetric multi-country* Krugman’s trade model (hopefully useful for other studies). However, the assumption of two country-types is mostly expositional, not crucial for results. It is not binding for decreasing welfare near autarky, because it is natural to expect that trade liberalization invites country types into trade one-by-one, not everyone simultaneously. Therefore, “painful birth of trade” effect is quite general, it should occur among arbitrarily many country types, where only some types are involved into the first step of liberalization.

We show that near free trade, welfare increases in *each* country during this final stage of liberalization, which is not surprising. However, welfare increases despite *decreasing* mass of firms, which means that, business destruction by trade liberalization is not necessarily harmful.

More subtle and unexpected is the effect at the beginning of liberalization, near *complete* autarky. We prove that at this stage *welfare deteriorates* in each country, i.e., harmful trade occurs. The mechanism of welfare reduction here is quite different from oligopolistic “painful birth of trade” well known after [4], where strategic interaction explains the effect. By contrast, in New Trade, where strategic interaction is absent, the harmful effect looks new and surprising. It was overlooked so far, because of dominating CES model, which excludes autarky.

Summarizing, our paper supports [1] in the sense that a VES economy can bring smaller trade gains than a CES one. Moreover, we even predict initially harmful trade liberalization. From the policy viewpoint, this sounds protectionist but in fact, it only suggests *not liberalizing trade gradually*, better to *jump* over the downfall of initial losses, or just wait until decreasing transport cost makes this jump possible. This recipe looks somewhat similar to “infant industry” argument for postponing trade, but the mechanism is very different, not connected with time and learning. Not young trade but small-in-volume trade appears detrimental here.

See [7] for details.

#### Literature:

1. Arkolakis C., Costinot A., Donaldson D., and Rodríguez-Clare A. The Elusive Pro-Competitive Effects of Trade // NBER WP 21370 (2015).
2. Arkolakis C., Costinot A., and Rodríguez-Clare A. New Trade Models, Same Old Gains? // American Economic Review. 2012. V.102, № 1. P. 94–30.
3. Behrens K., Kanemoto Y., and Murata Y. New trade models, elusive welfare gains // GRIPS Discussion Papers 14-20, National Graduate Institute for Policy Studies, 2014.
4. Brander J.A., Krugman P.R. A ‘reciprocal dumping’ model of international trade // Journal of International Economics. 1983. V. 15, № 3-4. P. 313–321.
5. Bykadorov I., Gorn A., Kokovin S., and Zhelobodko E. Why are losses from trade unlikely? // Economics Letters. 2015. № 129. P. 35–38.
6. Bykadorov I., Molchanov P., and Kokovin S. Elusive Pro-competitive Effects and Harm from Gradual Trade Liberalization // Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Preprint No 295, 2015.
7. Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Kokovin S., and Molchanov P. Pro-competitive effects and harmful trade liberalization in multi-country world // Department of Management, Università Ca’Foscari Venezia, WP 6/2015.
8. Krugman P.R. Increasing returns, monopolistic competition and international trade // Journal of International Economics. 1979. V. 9, № 4. P. 469–479.

## Price-Makers and Price-Takers at Industrial Markets\*

A.Yu. Filatov

*Irkutsk State University, Far East Federal University*

Most of the industrial markets in a modern economy are the imperfect competition markets where every producer has market power. The most interesting for exploring market structure is the oligopoly where we can observe the wide specter of participants' behavior strategies from the price war to the collusion. Some of the oligopolistic models deal with heterogeneous firms with different cost functions. But they also usually consider the identical behavior of agents. At the same time at real industrial markets we can sometimes find strategically heterogeneous firms. The strategies can be considered as buildings blocks from which we can assemble the puzzle of a market.

In the paper we will investigate a market where some price-makers use the Cournot strategy maximizing profits in condition of the quantity oligopoly, and some price-takers obtaining outputs from the equivalence of price and marginal costs. The second strategy can be used due to some rational reasons, for example, unavailability of demand function, and competitors' cost functions essential for reaction curves construction, or due to misunderstanding of its own market power and influence on the equilibrium parameters. Myopic behavior decreases profits comparing to Cournot firms if occurs unilaterally. But the competitors will adapt, and it can unexpectedly make the second strategy effective.

Let's assume [1] that  $n$  oligopolists with linear cost functions  $TC(q) = dq^2 + cq + f$  interact at the homogeneous product market with inverse demand  $p = a - bQ$ . Let  $k$  firms use Cournot strategy and  $m$  other firms be price-takers. The price-takers maximize their profits taking price  $p = a - b(mq_m + kq_k)$  as is:

$$\pi_m = pq_m - dq_m^2 - cq_m - f \rightarrow \max_{q_m},$$

$$q_m = \frac{a - bkq_k - c}{mb + 2d}. \quad (1)$$

The optimum output of strategic firms will also be obtained from the profit maximization problem

$$\pi_i = (a - b(q_i + (k-1)q_k + mq_m))q_i - dq_i^2 - cq_i - f \rightarrow \max_{q_i},$$

$$q_k = \frac{a - c - mbq_m}{(k+1)b + 2d}. \quad (2)$$

Solving the system (1)-(2) we will find formulas

$$q_k = \frac{a - c}{b\left(m + k + 1 + \frac{mb}{2d} + \frac{2d}{b}\right)}, \quad q_m = q_k \left(1 + \frac{b}{2d}\right).$$

In the paper we prove and discuss the following propositions:

1. The optimum price-taker output always exceeds the optimum price-maker output. The ratio is fixed, doesn't depend on the number of firms, and is defined only by parameters of demand and cost functions  $b$  and  $d$ .

2. If the total number of firms is fixed, and some price-makers become price takers, the outputs of all other competitors decrease, the total output increases, and the prices get lower.

3. The only price-taker output is always greater than the Stackelberg leader one. The profit can be greater or lower than the original price-makers profits. In the last case it's unprofitable to become price-taker.

4. Coefficients  $a$ ,  $c$ ,  $f$  don't impact on the profitability of firms transition from price-makers to price-takers. The ratio between coefficients  $b$  and  $d$ , number of firms  $n$ , and number of price-takers  $m$  impact.

5. The probability for price-taker strategy to be efficient is not big, but increases in  $n$  and  $b$ , and decreases in  $m$  and  $d$ . So it's better to be price-taker at a large market with inelastic demand and many firms with slowly increasing marginal costs. It's better for price-taker to be the only one firm with such a strategy. More precisely: for any fixed number of price-takers  $m$  there is a certain

---

\* This research is supported by the RFBR grant №16-06-00071 and the European Union's Seventh Framework Program FP7/2007-2013/ under REA grant agreement number 609642.

total number of firms  $n_0$ , such that for  $n \geq n_0$  there exists the interval  $\alpha \in [\alpha_{\min}; \alpha_{\max}]$ , where for  $b = 2\alpha d$  it's better to be price-taker than price-maker. The interval is asymmetrically (more strongly to the right) extended under  $n$  increasing.

#### References

13. Filatov A.Yu. The behavioral heterogeneity at industrial markets: strategic firms and price-takers // Bulletin of ISU. Mathematics. 2015, №3. P.72-83.

## **The Day-Ahead Electricity Market Forecasting in Russian Federation: a Case Study of Siberia\***

A.Yu. Filatov

*Irkutsk State University, Far East Federal University*

E.O. Smirnova

*Irkutsk State University*

Recent reforms in Russian power industry and the wholesale electric power and capacity market construction put energy companies into the new competitive conditions. Due to these reforms, the issues of price and quantity forecasting at the day-ahead market (DAM) gain special importance. Particularly, the extrapolated values of the prices and quantities at DAM are necessary for the regulator, and also for energy companies to work out the best market strategy.

The current Russian wholesale electricity market represents a fundamentally new model of the electric power industry that functions on a competitive basis. The key role in the structure of the wholesale energy trading sector is played by the day-ahead electricity sector that provides up to the 80% of total electricity sales in the country. As a result of the auction clearing, the market price for all points in the supply of electricity is formed and the volume of the market is determined. There is also a need for forecasting the equilibrium price and quantity of electricity sales, which largely determine the strategies of generation companies from the perspective of the use of free electric powers.

This paper proposes a method of construction of medium and long-term forecasting of the DAM's prices and quantities [1]. Our results that stem from the mathematical model and statistical data reveal the most significant factors and quantified their nature, their extent as well as their effect on the energy market of Siberia in 2007-2015.

#### References

14. Filatov A., Lisin E., Smirnova E. The Day-Ahead Energy Market Forecasting in Russian Federation: a Case Study of Siberia // Montenegrin Journal of Economics. 2015. V.11. №2, P.125-135.

## **The Equilibrium and Socially Effective Number of Firms in Oligopoly: Theory and Empirics†**

A.Yu. Filatov

*Irkutsk State University, Far East Federal University*

Ya.S. Makolskaya

*Irkutsk State University*

The equilibrium state in economy is often socially ineffective. We can remember different examples of the prisoner's dilemma, tragedy of commons, insufficient financing of public good, or such situations studied in the contracts theory as negative selection and moral hazard. In all of them we need a special market design helps to decrease inefficiency. But we always should compare the market inefficiency and the inefficiency of regulation taking into account the possible risks of the behavior change of the economic agents.

In the paper we will concentrate on the problems of the industrial market design and particularly market concentration. Using theoretical models and empirical data we will answer

---

\* This research is supported by the RFBR grant №16-06-00071 and the European Union's Seventh Framework Program FP7/2007-2013/ under REA grant agreement number 609642.

† This research is supported by the RFBR grant №16-06-00071 and the European Union's Seventh Framework Program FP7/2007-2013/ under REA grant agreement number 609642.

the following two questions: is there excessive or insufficient number of firms at a market in equilibrium, and should we regulate it?

Despite the common opinion that entry barriers are always bad, the excessive number of firms means, all pros aside, duplicated fixed costs. It is shown that the socially effective number of firms is smaller than the equilibrium one for the wide specter of demand and cost functions, and also for different strategies of companies' behavior. This proposition is satisfied for the homogeneous product markets where output of each company decreases when the number of firms increases, and competition gets stronger.

But there is the considerable danger of the increasing probability of collusion in a situation of number of firms limitation. We showed [1] that collusion is less dangerous than duplicated fixed costs if the gap between the choke price and marginal costs is less than a certain critical value connected with the ratio of fixed and variable costs. The empirical research on the base of the financial statistics of the biggest world corporations is carried out.

It's also necessary to mention that when the entry barriers system is organized through licenses and permissions it's very important to restrict corruption which is highly probable, especially if the licenses distribution is carried out by officials, but not via auction. Also, as the entry barriers lead to social welfare redistribution (consumer surplus reduces with the simultaneous increase of firms' profits) it's very important to design the effective tax mechanisms of withdrawal of rent, gained because of higher level of monopoly power

#### References

15. Filatov A.Yu., Makolskaya Ya.S. The equilibrium and socially effective number of firms at oligopoly markets: theory and empirics // *Czech Journal of Social Sciences, Business and Economics*. 2015. №4. P.17-30.

## Transmission Expansion Planning Considering Power Market Structure

D.V. Volodin<sup>1</sup> and M.R. Hesamzadeh<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*MIPT State University,  
Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*KTH Royal Institute of Technology,  
Stockholm, Sweden*

This work considers the transmission expansion planning problem, which accounts possible change in the strategies of market participants with consequent impact on economic welfare. The goal is to account the situation when network expansion might not lead to significant financial effect for consumers due to exercising of market power by generators.

The problem is modeled as a bilevel linear mixed integer program, where upper level optimizes the total economic welfare of market participants considering the discounted investment costs for network elements construction (see, i.e. section 6.5 in [1]).

The lower level models the search for "worst case" Nash equilibria on power market. The decisions are taken by generators only by adjusting the price-quantity pair of the market bid.

The approach used for this level is similar to [2] where Nash equilibria is modeled by single-stage MILP problem instead of more common EPEC variant (many leaders, one follower). However, due to flexible network structure the PTDF formulation for the flow modelling is replaced by voltage-angle formulation commonly used in DC optimal power flow problems.

The described problem is then solved using the Branch and Sandwich algorithm [3, 4] which guarantees the global optimum for general bilevel MINLP [5] problem on compact domain.

#### References

16. Wang X., McDonald J.R. *Modern Power System Planning*, Chapter 6: Berkshire: McGraw-Hill, 1994
17. Hesamzadeh M.R, Biggar D.R. Computation of Extremal-Nash Equilibria in a Wholesale Power Market Using a Single-Stage MILP // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2012. V. 27, № 3. P. 1706-1707
18. Kleniati P. M., Adjiman C. S. Branch-and-Sandwich: a deterministic global optimization algorithm for optimistic bilevel programming problems. Part I: Theoretical development // *Journal of Global Optimization*. 2014. V. 60, № 3. P. 425-458.
19. Kleniati P. M., Adjiman C. S. Branch-and-Sandwich: a deterministic global optimization algorithm for optimistic bilevel programming problems. Part II: Convergence analysis and numerical results // *Journal of Global Optimization*. 2014. V. 60, № 3. P. 459-481.

20. Kleniati P. M., Adjiman C. S. A generalization of the Branch-and-Sandwich algorithm: From continuous to mixed-integer nonlinear bilevel problems //Computers & Chemical Engineering. 2015. V. 72. P. 373-386.

## **Game theory and game solution in mixed strategy area on agrofirm example**

Gocha Chogovadze, G. Otar Shonia  
Georgian Technical University

There are situations we come across, where controversial interests of sides collide. Such interests emerge in various walks of life: economy, industry, agriculture, transportation, military affairs, etc. Main quality of such situations is that, none of the sides know what the opponent is going to do in a given moment. This brings the uncertainty factor which is the main specific quality of such situation. For the analysis of mentioned situations special mathematical direction – game theory is applied, which's main subject is to study conflict situations. Main objective of game theory is to work out the recommendation to players in conflict situations for reasonable acts.

Game theory principle which provides each side with recommendation to carefully select strategy provided that, each move is always beneficial to him and harmful to opponent, is called minimax principle.

In practice, we come across many games where use of minimax principle does not allow finding final solution to the game. In this case solution to game is not within the pure strategy area however, it exists in mixed strategy area. Mixed strategy is the strategy where each of the players is using its strategy with preliminarily known probabilities.

Let's view the example. Suppose the agrofirm engaged in production of grain crops, holds 100 ha land plot where wheat, rye, barley and oats can be harvested. Due to vital requirements it becomes necessary to replace these two grain crops with remaining two grain crops so that the firm gains certain profit after the harvest. To reach this goal there are four possible ways of replacement: barley – wheat, barley – rye, oats – wheat, oats – rye.

In first and second tables there is the price of harvest in GEL gained on 1ha per each crop showing the superiority values in terms of profitability (values presented are conditional). Let's view the above mentioned situations as A and B sides participating. At the same time, under A side we mean barley – oats while under B side we mean wheat – rye.

Table 1

crop	Price of harvest per 1ha in GEL
barley	$20 \cdot 10^2$
oats	$15 \cdot 10^2$
wheat	$30 \cdot 10^2$
rye	$10 \cdot 10^2$

Table 2

B A	barley	oats	wheat	rye
	Superiority value			
barley	–	–	0.7	0.6
oats	–	–	0.7	0.6
wheat	0.8	0.9	–	–
rye	0.8	0.9	–	–

Due to these tables we can calculate profits gained with all possible variants applied. Variant I – wheat sown instead of barley. As long as superiority value makes 0,7 harvest per 100 ha will be acceptable  $0.7 \cdot 100 = 70$  ha and the profit according to price table makes  $70 \cdot 30 \cdot 10^2 = 2.1 \cdot 10^5$  GEL, but barley according to probability table will be profitable  $0.8 \cdot 100 = 80$  ha and the profit therefore makes  $80 \cdot 20 \cdot 10^2 = 1.6 \cdot 10^5$  GEL. Cutting second result from the first we get profit gained with variant I.

$$2.1 \cdot 10^5 - 1.6 \cdot 10^5 = 0.5 \cdot 10^5 \text{ GEL}$$

We can calculate incomes gained with other three variants. Let's enter outcomes into table 3.

Table 3

B A	wheat	rye	min line
barley	$0.5 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	0.6
oats	$0.75 \cdot 10^5$	$-0.75 \cdot 10^5$	$-0.75 \cdot 10^5$
max column.	$0.75 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^5$	

Let's use minimax principle in this game.

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 0.5 \cdot 10^5; \quad \beta = \min_i \max_j a_{ij} = 0.75 \cdot 10^5$$

As we can see  $\alpha \neq \beta$ , which means that game has no solution in pure strategy area. We need to search for solution in mixed strategy area.

Suppose that, side A is applying first strategy with  $x$  probability, then it will apply second strategy with  $(1-x)$  probability. Also suppose that B side is applying its first strategy with  $y$  probability therefore, second strategy will be used with  $(1-y)$  probability. Let's find mean value of side A's profit, i.e. mathematical expectation of the profit.

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 0.5 \cdot 10^5 xy + 1 \cdot 10^5 x(1-y) + 0.75 \cdot 10^5 y(1-x) - 0.75 \cdot 10^5 y(1-x)(1-y) = \\ &= -2 \cdot 10^5 \left(x - \frac{3}{4}\right) \left(y - \frac{7}{8}\right) + \frac{9}{16} \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Let's analyze what we have. Let's suppose the side A is applying its first strategy with  $x < 3/4$  probability then,  $x - 3/4 < 0$ . In that case side B will apply its first strategy with probability  $x < 3/4$ , as long as  $y - 7/8 < 0$ . It will do this in order to get A side's income be as little as possible.

Let's suppose that side A is applying its first strategy with  $x > 3/4$  probability, and  $x - 3/4 > 0$ . Then side B will apply its first strategy with  $y > 7/8$  probability and  $y - 7/8 > 0$ , also aiming to get side A's income shrink. It is not lucrative for side A apply its first strategy with  $x < 3/4$  and  $x > 3/4$  probabilities. This brings that side A applies its first strategy with probability  $x_1 = 3/4$  and the second strategy with  $x_2 = 1 - 3/4 = 1/4$  probability.

Thinking similar way in regard to side B we may show that it should apply its first strategy with  $y_1 = 7/8$  probability and second strategy with  $y_2 = 1 - 7/8 = 1/8$  probability.

Thus, optimal probabilities for strategies applied are:

For side A:  $3/4$  - for barley,  $1/4$  for oats;

For side B:  $7/8$  - for wheat,  $1/8$  - for rye.

At the same time, price of game makes:

$$v = 9/16 \cdot 10^5 = 0.56 \cdot 10^5 = 56000 \text{ GEL}$$

As we can see, with mixed strategies applied price of game, i.e. side A's income will be increased.

Any game has its solution in separate or mixed strategy area. If side A follows its optimal mixed strategy, it will gain guaranteed income which equals to  $v$  price of the game, no matter what moves the side B takes.

If  $v = 0$ , the game is equally profitable for both sides. If  $v > 0$ , the game is lucrative for side A only. If  $v < 0$  the game is lucrative for side B only.

#### Literature:

1. Gogichaishvili G., Shonia O., Kartvelishvili I., Study of Operations, Georgian Technical University. Tbilisi, 1998.

2. E.S.Ventsel. Study of operations. M., "Sov. radio", 1972.

# Имитационное моделирование нестационарных ситуаций на олигопольном рынке\*

Н.И. Айзенберг, В.И. Зоркальцев, И.В. Мокрый

*Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия*

Чаще всего взаимодействие агентов на олигопольных рынках моделируется через поиск стационарных равновесий. На их основе исследуются оптимальность выбранных стратегий, неизменных на протяжении всей игры [1, 2]. В отличие от статических, динамические имитационные модели олигопольных рынков позволяют исследовать их свойства, связанные с переходными процессами из одного стационарного состояния в другое, в том числе при изменении правил поведения участников рынка [3]. Новое стационарное состояние может быть более выгодным отдельным поставщикам, чем пребывание в предшествующем. Более того, может оказаться, что сам процесс перехода с его промежуточными ценами на рынке и прибылями поставщиков, будет еще более выгоден отдельным игрокам, чем длительное пребывание в каком-то одном из равновесий. Нами рассматривались олигопольное некооперативное взаимодействие на рынке, реализованное в виде динамической модели: а) когда все игроки пользуются одним типом стратегии; б) когда часть игроков придерживается на протяжении всей игры первой стратегии, а другая - второй; в) когда игроки могут менять свое поведение, сначала придерживаясь одной стратегии, а с некоторого времени другой. Особенностью представленной модели является взаимодействие на нескольких связанных рынках с различными характеристиками спроса, а также использование свойства инерционности действий агентов, не способных резко менять объемы производства. Наша цель, пользуясь инструментом, описывающим динамическую модель взаимодействия олигополистов, продемонстрировать неявные стимулы к смене поведения отдельных участников, когда игроки получают краткосрочные преимущества при выходе из состояния олигопольного равновесия.

Рассматриваются два правила возможного поведения поставщиков на взаимосвязанных рынках-узлах, где  $q_i$  – объем производимого  $i$ -ым поставщиком продукта,  $Q_j$  – объем потребляемого на  $j$ -ом рынке продукта,  $x_{ij}$  – объемы поставок продукта  $i$ -го поставщика на  $j$ -ый рынок,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Заданными являются: 1) в узле, представляющем рынок обратная функция спроса  $P_i(Q_i)$ ; 2) в узле, представляющем поставщика, предельные издержки на производство энергии  $MC_i(q_i)$ .

Первая стратегия: поставщик предполагает, что не может повлиять на установившиеся цены. В результате максимизации прибыли получим правило I:

$$\frac{dx_{ij}}{dt} = x_{ij}(P_j(Q_j) - MC_i(q_i)).$$

Вводится свойство инерционности изменения объемов, благодаря которому фирмы не способны резко изменять объемы производства.

Вторая стратегия: поставщик стремится увеличить прибыль с учетом не только цен на разных рынках, но и с учетом влияния его поставок на изменение цен. Правило II:

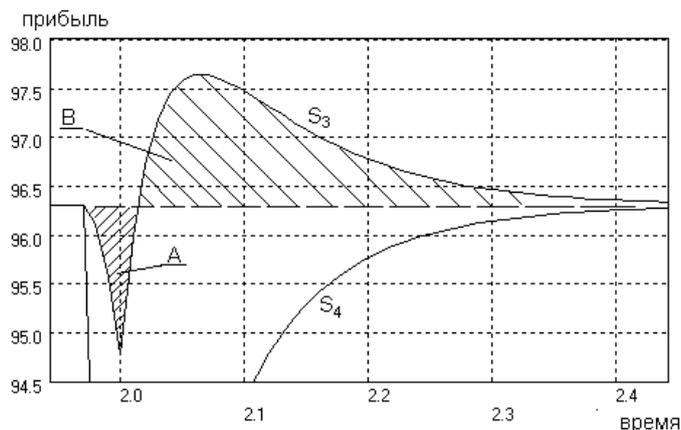
$$\frac{dx_{ij}}{dt} = x_{ij}(MR_{ij}(x_{ij}) - MC_i(q_i)),$$

где  $MR_{ij}(x_{ij}) = d(x_{ij}P_j(\sum_{i \in V_j} x_{ij}))/dx_{ij}$  - предельная выручка.

В работе анализируются переходные состояния, определяемые правилами I и II, стационарные равновесия, порождаемые ими, к которым сходится модель в бесконечном времени, возможность одновременного взаимодействия игроков, использующих разные правила (I или II) поведения. Важным развитием модели, обсуждаемым в докладе, является поведение, когда олигополисты меняют своё правило поведения в течении игры при условии, что остальные будут действовать предсказуемым образом. Это может давать игроку немалые преимущества - краткосрочные и долгосрочные. Мы не применяем сложные стратегии высоких рангов, а рассматриваем замену правила I на II или II на I в определенном стационарном состоянии. На рис. 1 приведён пример такого поведения. Фирма 2 действует все время по правилу II, а поставщик 1 до момента времени  $t = 1,97$  действует по правилу II, затем переходит на правило I до момента времени  $t = 2,0$ . После

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-06-00071а, 15-07-00465

чего опять переключается на правило II. Площадь заштрихованной на графике области А равна потери прибыли поставщика 1 после его перехода на правило I и в начальный период его обратного перехода на правило II. Область В - дополнительная прибыль в последующий период его обратного перехода на правило II.



### Список литературы

1. Dockner, Engelbert J. A dynamic theory of conjectural variations. *The Journal of Industrial Economics*. 1992, pp. 377-395.
2. Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Модели несовершенной конкуренции применительно к анализу электроэнергетического рынка Сибири // Журнал новой экономической ассоциации. 2013. №2 (18). С. 62 – 89.
3. Мокрый И.В. Неустойчивость олигопольных рынков. Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск. 2013. С. 198 – 204.

## Игровой подход к оценке влияния введения новых технологий на общественное благосостояние

Г.А. Белянкин, Т.В. Белянкина, А.С. Савадян  
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе исследуется воздействие, оказываемое на общественное благосостояние появлением на рынке новых технологий, которые существенно влияют на производительность и/или себестоимость товара.

В рамках работы рассматривается несколько вариантов игры с двумя ключевыми игроками – производителями продукции и однотипными игроками – потребителями и/или собственниками. В качестве функции общественного благосостояния выбирается суммарный выигрыш игроков – сумма функций выигрыша каждого игрока потребителя [2].

Рассматривается модель экономики с параметрами  $y_i^j$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$ ), где  $i$  – номер ресурса,  $j$  – номер игрока. Игроки 1 и 2 – производители товаров 1 и 2, их стратегиями являются  $y_i^j$  ( $i = \overline{1,2}$ ) – количества товаров 1 и 2, производимое игроком  $j$ . На рынке присутствуют однотипные игроки типа 3 – потребители товаров 1 и 2, где  $y_i^3$  ( $i = \overline{1,2}$ ) – количество единиц товара  $i$ , потребляемых игроком 3. Также игрок типа 3 выдает на рынок трудовой ресурс, используемый игроками 1 и 2 для производства своих товаров,  $y_3^3$  – количество труда, производимое игроком 3,  $y_i^3$  ( $i = \overline{1,2}$ ) – количество труда, используемое игроками  $i$  для производства товара  $i$ . Количество игроков типа 3 в модели равно  $m$ .

Будем считать, что для производства единицы товаров 1 и 2 требуется соответственно  $a$  и  $c$  единиц труда, т.е.

$$y_1^1 + ay_3^1 = 0, y_1^1 \geq 0, y_3^1 \leq 0; y_2^2 + cy_3^2 = 0, y_2^2 \geq 0, y_3^2 \leq 0.$$

Будем также предполагать, что каждый из  $m$  игроков типа 3 все деньги тратит на потребление товаров 1 и 2. Тогда для него выполнены следующие ограничения:

$$p_1 y_1^3 + p_2 y_2^3 + p_3 y_3^3 = 0, \quad y_1^3 \leq 0, \quad y_2^3 \leq 0, \quad y_3^3 \geq 0,$$

где  $y_3^3 \leq A$  – ограничение рабочего времени,  $p_i$  – цена за товар  $i$  ( $i=1,2$ ) и труд ( $i=3$ ).

Предполагается, что весь произведенный товар потребляется, а весь труд используется:  $y_1^1 + m y_1^3 = 0$ ,  $y_2^1 + m y_2^3 = 0$ ,  $y_3^1 + y_3^2 + m y_3^3 = 0$

Выигрыши игроков 1 и 2 определяются по формулам  $V(y) = p_1 y_1^1 + p_3 y_3^1$ ,  $W(y) = p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2$ . При этом накладывается ограничение неотрицательной прибыли:  $V(y) \geq 0$ ,  $W(y) \geq 0$ , при котором предприятиям выгодно выпускать продукцию соответствующего типа.

В работе рассматривается функция полезности игрока типа 3 вида  $U(y) = \sqrt{g(y_1^3)^2 + h(y_2^3)^2} - (y_3^3)^2$ , где постоянные  $g$  и  $h$  характеризуют склонности игрока 3 к потреблению товаров 1 и 2. Показывается, что в данной постановке задача не имеет решения, поскольку ограничения на  $u$  и  $p$  несовместны.

Далее рассматривается игровая модель, где каждому игроку типа 3 дополнительно принадлежит  $1/m$  капитала и прибыли каждого предприятия. В этом случае максимум функции выигрыша  $U(y^1, y^2, y^3)$  по  $y^3$  при любых  $y^1, y^2$  достигается при  $y_1^3 = 0$ ,  $y_2^3 \neq 0$  или  $y_2^3 = 0$ ,  $y_1^3 \neq 0$ , что свидетельствует о том, что потребителю выгодно потреблять только один товар.

Если функция выигрыша имеет вид  $U_1(y) = g \ln y_1^3 + h \ln y_2^3 - y_3^3$ , то игроку типа 3 выгодно потреблять оба товара. В работе показывается, что появление новых технологий при производстве товара 2 (параметр  $c$  уменьшается) увеличивает общественное благосостояние, однако не влияет на потребление товара 1.

В заключение рассматривается игровая модель, где дополнительно на рынке присутствует  $n$  однотипных игроков типа 4 – собственников предприятий 1 и 2, при этом игроку типа 3 не принадлежит доля в прибыли предприятий. Для данной модели показывается, что появление на рынке новых технологий при производстве одного из товаров приводит к росту общественного благосостояния.

#### Список литературы

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС-Пресс, 2005.
2. Atkinson A., Stiglitz J. Lectures on Public Economics. Maidenhead: McGraw-Hill, 1980.

## Теоретико-игровой анализ геопозиционного аукциона

А.А. Бобошко

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Данная работа посвящена исследованию механизма размещения рекламы в поисковых системах. В них пользователь задает целевой запрос, где получает помимо целевой выдачи, состоящей из релевантных запросу ссылок, некий блок спонсированных ссылок – контекстную рекламу. При клике пользователя на объявление рекламодатель платит поисковой системе за его показ. Каждое из рекламных мест характеризуется средним коэффициентом кликабельности (CTR), который показывает, что на рекламные позиции с более высоким порядковым номером в среднем кликают реже, чем на аналогичные места с меньшими номерами. При прочих равных условиях рекламодатели заинтересованы в попадании своих объявлений на более кликабельные позиции. Поисковая система должна иметь алгоритм распределения рекламных позиций между рекламодателями – позиционный аукцион.

Основопологающим трудом по исследованию этого аукциона является работа [1], где аукцион формулируется в терминах аукциона второй цены и Викри-Кларка-Гровса (VCG), и где подробно рассмотрены основные вопросы, такие как игровое равновесие в аукционе,

честные стратегии игроков. Отметим также исследование [2], в котором рассматривалась взаимосвязь выручки рекламодателей с количеством участников аукциона и числом рекламных позиций, и работу [3], в которой исследуется взаимосвязь между эффективностью аукциона и резервной ценой.

Рассмотрим логическое расширение целевого запроса и позиционного аукциона – в описание добавим физическую область запроса пользователя и координаты рекламодателей. Используя эти нововведения, поисковая система способна выдавать ссылки, удовлетворяющие не только самому запросу, но и его физической области (можно выбирать ресторан как по всему городу, так и в окрестности ближайшей станции метро). Схожая идея реализована в сервисе Яндекс.Карты, где по целевому запросу для каждого уровня карты выдается перечень рекламных ссылок, причем для каждого уровня карты – свой. Этот аукцион распределения рекламных мест получил название геопозиционный [4].

В докладе для данного аукциона сформулирована модель операции, где целью является увеличение прибыли рекламодателя; формализованы различные составляющие аукциона. В предположении, что параметры правил проведения аукциона являются одним из неконтролируемых факторов, рассмотрены геопозиционные аукционы по схеме второй цены и VCG, исследованы стратегии подачи ценовых заявок.

Отметим, что при различии полезностей клика для разных уровней карты понятие честной стратегии в геопозиционном аукционе отсутствует. С точки зрения концепции наилучшего гарантированного результата предложено использовать S-стратегию – минимальную из полезностей клика для рекламодателя на всех уровнях карты. Для случая аукциона второй цены в докладе получены необходимые условия неотрицательности выигрышей участников; на числовом примере показано, что естественные стратегии игроков не являются равновесными по Нэшу. В случае геопозиционного аукциона по схеме VCG подтверждены необходимые условия неотрицательности выигрышей у игроков; показано отсутствие Нэш-равновесия при выборе игроками S-стратегии; доказано утверждение о том, что S-стратегия является наилучшей гарантирующей стратегией игрока при неизвестных CTR и ставках других игроков.

Особый интерес представляет модель аукциона, когда вводится запрет на показ объявления на некоторых уровнях, а также аукцион при гипотезе о взаимосвязи CTR на различных уровнях карты.

#### Список литературы

1. Edelman B., Ostrovsky M., Schwarz M. Internet advertising and the generalized second price auction: selling billions of dollars worth of keywords // American Economic Review, American Economic Association. 2007. 97. N 1. P. 242-259.
2. Xiao B., Yang W., Li J. Optimal reserve price for the general second price auction in sponsored search advertising // Journal of Electronic Commerce Research, 2009. 10. N 3. P. 114-129
3. Топинский В.А.: Эффективность резервной цены и давление конкуренции в аукционах // Управление большими системами: сборник трудов. №50 М.: ИПУ РАН, 2014. С. 110-142.
4. Блинов Н.Г. Геопозиционные аукционы: теретико-игровой анализ модели с вогнутой функцией полезности у рекламодателя // Тезисы докладов научной конференции Тихоновские чтения (27 – 31 октября 2014 г). Москва. Изд-во ООО «МАКС Пресс», 2014. С. 68 – 69.

## Динамический синтез транспортной системы многоузлового рынка в условиях совершенной конкуренции

Васин А.А., МГУ имени М.В. Ломоносова, Лесик И.А., ТвГУ

Москва, Россия

Для многих рынков однородного товара сетевая структура имеет значение. В качестве примера можно привести рынки газа, нефти, электроэнергии и другие. Транспортная система является важнейшим компонентом подобных рынков. Потребители и производители находятся на разных узлах сети и пропускные способности линий передачи товара между рынками имеют ограничения. Проблема оптимизации транспортной системы имеет практическое значение, поскольку сетевая составляющая в ценах для потребителя велика.

В предшествующих работах по рынкам однородного товара [1, 2, 4] анализируют первичные модели со структурой сети, которая является фиксированной. Последняя работа на эту тему [1] определяет оптимальную пропускную способность линии для двухузлового рынка с учетом потерь при передаче и платы за строительство линии. В качестве критерия оптимизации принимается общественное благосостояние, понимаемое как сумма прибылей всех агентов на рынке: производителей, покупателей и транспортной системы. Вычитая расходы на увеличение пропускной способности транспортной системы, получаем критерий полного общественного благосостояния. Данное исследование ставит перед собой цель обобщить эти результаты на случай нескольких узлов, где структура соединений соответствует некоторому неориентированному графу. Мы рассматриваем проблему оптимизации полного общественного благосостояния с учетом платы за передачу и затрат на возможное расширение пропускной способности сети. В нашей модели отражена возможность роста благосостояния за счет уменьшения цены на однородный товар на локальных рынках путем переброски более дешевого товара. Трудность задачи состоит в учете постоянных расходов на увеличение пропускной способности линий, которые являются существенными. Если оптимальное множество линий, выбранных для развития, известно, то проблема сводится к задаче выпуклого программирования. Однако, поиск эффективного множества для реальных сетей с большим количеством линий требует значительного перебора и нуждается в развитии соответствующих методов.

Другим отличием исследуемой постановки является учет зависимости спроса в узлах от времени. Эта зависимость имеет периодический характер в связи с суточными или сезонными колебаниями спроса. Пропускные способности выбираются заранее и не зависят от времени, а балансовые соотношения в узлах содержат время через переменные функции спроса. Как следствие, равновесные цены также зависят от времени и значение общественного благосостояния оказывается некоторой функцией времени.

Пусть  $N$  - множество узлов,  $L \subseteq N \times N$  - множество ребер. Каждое ребро  $l \in L$  описывается исходной пропускной способностью  $Q_0^l$  и функцией затрат на увеличение пропускной способности и передачу  $E^l(q^l)$ :

$$E^l(q^l) = e_f^l |q^l| + \begin{cases} 0, & |q^l| \leq Q_0^l \\ e_f^l + e_v^l(|q^l| - Q_0^l), & |q^l| > Q_0^l \end{cases}$$

Здесь  $e_f^l > 0$  - фиксированные затраты, не зависящие от пропускной способности,  $e_v^l(\Delta Q^l)$  - переменные затраты,  $e_f^l$  - удельные затраты на передачу. Предполагается, что  $e_v^l(0) = 0$  и функции  $e_v^l(\Delta Q^l)$  выпуклы и монотонно возрастают по  $\Delta Q^l$ .

Общественное благосостояние многоузлового рынка определяется по формуле:

$$V(q, v, t) = \sum_{i \in N} [U_i(v_i + \sum_{j \in Z(i)} q_{ji}, t) - C_i(v_i) - \sum_{i \neq j} e_i^{ij} |q_{ij}|],$$

где  $Z(i)$  - множество узлов, связанных с узлом  $i$ ,  $q = (q_{ij}, (i, j) \in L)$  - набор потоков однородного товара между узлами,  $v = (v_i, i \in N)$  - объемы выпуска товара. Пусть  $t \in [0, T]$  - время,  $T$  - период,  $U_i(q, t) = \int_0^q (D^i)^{-1}(v) dv$  - функция полезности, зависящая от функции спроса  $D^i(p, t)$ ,  $C_i(V)$  - себестоимость выпуска объема  $V$  в узле  $i$ . Предположим, что функция спроса  $D^i(p, t)$  строго убывает и является непрерывной по  $p$  для любого  $t$  и измерима по  $t$  для любого  $p$  и ограничена. Функция полных затрат  $C_i(V)$  предполагается выпуклой, возрастающей и дифференцируемой.

Обозначим  $q_i = \sum_{j \in Z(i)} q_{ij}$ ,  $\hat{v}_i = v_i - q_i$ . При заданных  $\bar{Q} = \{Q^l, l \in L\}$  определим множество  $B(Q)$  допустимых значений  $(q, v)$  условиями:

$$0 \leq v_i \leq V_i, i \in N, |q_{ij}| \leq Q_{ij}, (i, j) \in L,$$

где  $V_i$  - предельный объем выпуска в  $i$ -м узле.

Определим оптимальное благосостояние как функцию пропускных способностей:

$$W(\bar{Q}, t) = \max_{(q, v) \in B(Q)} V(q, v, t). \quad 1)$$

В силу сделанных предположений функция  $V(q, v, t)$  будет непрерывной по  $(q, v)$  для любого  $t \in [0, T]$ , а множество  $B(Q)$  - компактно. Поэтому максимум в определении функции  $W(\bar{Q}, t)$  существует.

**Замечание 1.** В силу того, что функция  $D^i(p, t)$  строго убывает и является непрерывной по  $p$  для любого  $t$  функция полезности  $U_i(q, t)$  будет вогнутой по  $q$  и задача определения  $W(Q, t)$  представляет собой задачу выпуклого программирования.

В качестве критерия оптимизации транспортной системы выбирается величина общественного благосостояния за период:

$$TW(\bar{Q}) = \int_{t=0}^T W(\bar{Q}, t) dt - \sum_{l \in L: Q^l > Q_0^l} (e_f^l + e_v^l (Q^l - Q_0^l)).$$

Задача максимизации общественного благосостояния заключается в нахождении

$$\bar{Q}^* = \{Q^{l*}, l \in L\} \in \text{Arg max}_{(Q^l, l \in L)} TW(\bar{Q}).$$

Пусть  $\bar{L}$  - фиксированное множество линий, пропускная способность которых увеличена, т.е.  $\Delta Q^l = Q^l - Q_0^l > 0 \Leftrightarrow l \in \bar{L}$ . Тогда задача имеет вид:

$$\bar{Q}^* = \{Q^{l*}, l \in \bar{L}\} \in \text{Arg max}_{(Q^l, l \in \bar{L})} \left( \int_{t=0}^T W(\bar{Q}, t) dt - \sum_{l \in L} (e_f^l + e_v^l (Q^l - Q_0^l)) \right) \quad 2)$$

При фиксированном потоке  $q$  оптимальные объемы задаются формулой  $v_i = S_{iW}(p_i) = \text{Arg max}_{v \geq 0} (Vp - C_i(V))$ , где цены  $p_i$  находятся из уравнений баланса:  $\Delta S_{iW}(p_i, t) = S_{iW}(p_i) - D_i(p_i, t) = q_i, i \in N$ . В силу сделанных предположений отображение  $\Delta S_{iW}(p_i, t)$  является монотонно не убывающим по  $p$  для любого  $t$ , хотя может быть и многозначным. Тем не менее, обратное отображение

$$p_i(q_i, t) = (\Delta S_{iW})^{-1}(q_i) \quad 3)$$

будет однозначным в силу строгого убывания функции спроса.

Следуя работе [3], определим условия общего равновесия:

$$\forall i \in N : \Delta S_{iW}(p_i, t) = q_i; \forall i, j \in N : |q_{ij}| \leq Q_{ij}; p_i > p_j + e_i^{ij} \Rightarrow q_{ij} = Q_{ij}.$$

**Теорема 1 (благосостояния).** Любое решение  $(q, v)$  задачи (1) определяет поток  $q$ , который вместе с ценами  $p$ , определяемыми по формуле (3), удовлетворяет условиям общего равновесия. Обратное утверждение также верно.

**Теорема 2.** Предположим, что при заданном  $Q$  любое решение  $(q, v)$  задачи (1) удовлетворяет условиям  $q_{ij} \neq 0, (i, j) \in \bar{L}$ . Тогда функция  $W(\bar{Q}, t)$  являются дифференцируемой в точке  $Q$  и справедливы формулы:  $W_{Q_{ij}} = \max(0, |p_j - p_i| - e_i^{ij})$ , где  $(p, q)$  - любое полное равновесие из теоремы 1. Причем правая часть не зависит от того, какое равновесие выбрано.

Эта теорема является следствием единственности решения задачи (1) и обобщает результат [3] на многоузловой рынок. Теорема 2 дает возможность использовать метод градиентного типа для решения задачи (2) оптимизации пропускной способности линий. При этом на каждом шаге возникает задача нахождения равновесных цен при фиксированных пропускных способностях. Внутренняя задача нахождения равновесных цен может быть решена в простейшем случае по определению. Однако, это приводит к

необходимости перебора подмножеств всех дуг множества  $\bar{L}$ , выбранного для наращивания пропускной способности. Поэтому в работе предлагается другой алгоритм, также основанный на идее градиентного подъема, но использующий вариационную постановку задачи (1) определения равновесных цен при фиксированном времени в форме задачи выпуклого программирования, основанную на теореме благосостояния 1.

Наконец, для того, чтобы не вычислять интеграл по времени от полученного градиента, можно использовать процедуру рандомизации. Это приводит к методу проекции стохастического градиента, который по сложности не превосходит градиентный метод, но избегает необходимости аппроксимировать соответствующий интеграл на каждом шаге. Рассматриваются модельные примеры решения задач (1), (2), показывающие практическую сходимость предложенных алгоритмов градиентного типа.

В заключение отметим, что нашей целью было исследование задачи (2) при фиксированном множестве  $\bar{L}$ . Некоторые методы выбора множества  $\bar{L}$  в задаче (2) рассматриваются в работе [1].

### Список литературы

1. Васин А.А., Дайлова Е.А. (2014, а): Об оптимальной пропускной способности системы перемещения товара на двухузловом рынке // Вестник Московского университета. Серия 15: Прикладная математика и кибернетика. - № 3. - с.40-45.
2. Давидсон М.Р. и др. (2004): Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия Академии наук. Теория и системы управления. -№ 3. -2004.- с. 72-83.
3. Дайлова Е.А. (2014): Теоретико-игровые модели форвардных и сетевых рынков однородного товара. Диссертация. – М.: МГУ.
4. Hogan W. (1998): Competitive electricity market design: a wholesale primer // Harvard University, WP.

## Теоретико-игровой анализ позиционных аукционов при коэффициенте кликабельности, зависящем от рекламодателя

Е.И. Ивкина

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Позиционный аукцион – это механизм распределения рекламных позиций в ответе поисковой системы на заданный пользователем запрос. Рекламодатель делает ставку, то есть называет сумму, которую он готов заплатить поисковой системе за клик (переход пользователя) по его рекламному объявлению. При вводе пользователем запроса релевантные рекламные объявления ранжируются согласно величине сделанных ставок. Если произошел переход по объявлению, то рекламодатель уплачивает сумму, определяемую в зависимости от схемы аукциона.

Наиболее широкое практическое применение получили обобщенный аукцион второй цены (GSP) [1] и аукцион Викри-Кларка-Гроувза (VCG) [2]. В аукционе GSP честные стратегии не являются равновесными по Нэшу в отличие от механизма VCG, который является выявляющим предпочтения. Были проведены экспериментальные исследования аукционов GSP и VCG [3]: поведение игроков в динамической игре близко к равновесным стратегиям в статической игре. Таким образом, использование механизма VCG может принести поисковой системе экономическую выгоду за счет стабилизации аукциона – уменьшения желания рекламодателей снижать свои ставки, пытаясь увеличить прибыль.

В [1,2] предполагалось, что частота кликов (CTR) зависит только от номера позиции. Однако на практике эта величина также зависит от качества самого объявления, от рейтинга рекламодателя. В [4,5] рассмотрены аукционы с разделимыми CTR, т.е. такими, которые представляют собой произведение характеристики позиции на характеристику рекламного объявления, показано, что в данном случае стандартные механизмы могут не выявлять предпочтения.

В настоящей работе изучается модифицированная схема аукциона VCG, далее mVCG, учитывающая что CTR зависит и от номера позиции, и от рекламного объявления (номера игрока), без предположения о разделимости.

Пусть:

- $N$  – число рекламных позиций,
- $K$  – количество игроков,  $K > N$ ,
- $b_k \in B_k$  – ставка  $k$ -го игрока (стратегия),  $b = (b_1, \dots, b_K)$  – вектор ставок игроков,
- $s_k \in [0; +\infty)$  – полезность клика для  $k$ -го игрока, предполагается, что игроки пронумерованы по порядку убывания полезности клика;
- $\beta_i(b)$  – порядковый номер игрока, оказавшегося на  $i$ -ой позиции в результате аукциона,
- $\alpha_{i,j}$  – коэффициент CTR  $j$ -го игрока на  $i$ -ой позиции.

В схеме аукциона mVCG платеж игрока, оказавшегося на  $i$ -ой позиции, выражается как

$$P_i(b) = \frac{(\alpha_{i,\beta_i} - \alpha_{i+1,\beta_{i+1}})b_{\beta_{i+1}} + \alpha_{i+1,\beta_{i+1}}P_{i+1}}{\alpha_{i,\beta_i}}; \quad P_N(b) = b_{\beta_{N+1}}.$$

(При независимости от  $j$  превращается в обычную схему VCG.)

Рассмотрены два основных случая:

- обратно-пропорциональная зависимость CTR от полезности клика, т.е. рекламодатель с большей полезностью клика реже выбирается пользователем. При этом доказано, что модифицированная схема является выявляющей предпочтения;
- прямо-пропорциональная зависимость CTR от полезности клика, т.е. рекламодатель с большей полезностью клика привлекательней для пользователя. В этом случае получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты CTR в зависимости от соотношений полезностей клика различных рекламодателей, при которых честные стратегии будут равновесными по Нэшу. К сожалению, эти условия не очень близки между собой.

Достаточные условия:  $\forall i = \overline{1, N}$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{i+m,i} - \alpha_{i+m,i+m}}{\alpha_{i,i} - \alpha_{i+m,i}} \leq \frac{S_i - S_{i+1}}{S_{i+1} - S_{i+m+1}} & \forall m = \overline{1, N-i}, \\ \frac{\alpha_{i,i-1} - \alpha_{i,i}}{\alpha_{i-m,i} - \alpha_{i,i}} \leq \frac{S_{i-1} - S_i}{S_{i-1} - S_{i+1}} & \forall m = \overline{1, i-1}. \end{cases}$$

Необходимые условия:  $\forall i = \overline{1, N}$

$$\begin{cases} \frac{\alpha_{i+m,i} - \alpha_{i+m,i+m}}{\alpha_{i,i} - \alpha_{i+m,i}} \leq \frac{S_i - S_{i+m}}{S_{i+m} - S_{i+m+1}} & \forall m = \overline{1, N-i}, \\ \frac{\alpha_{i,i-1} - \alpha_{i,i}}{\alpha_{i-m,i} - \alpha_{i,i}} \leq \frac{S_{i-m} - S_i}{S_{i-m} - S_{i+1}} & \forall m = \overline{1, i-1}. \end{cases}$$

Первое неравенство в описанных выше условиях означает, что  $i$ -му рекламодателю невыгодно повышать свою ставку, чтобы оказаться на  $m$  позиций выше, второе неравенство – что  $i$ -му рекламодателю невыгодно понижать свою ставку, чтобы оказаться на  $m$  позиций ниже.

### Список литературы

1. Edelman Benjamin, Ostrovsky Michael, Schwarz Michael. Internet Advertising and the Generalized Second Price Auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords // The American Economic Review. 2007. V. 97, № 1. P. 242–259.
2. Groves T., Loeb M. Incentives and Public Inputs // Journal of Public Economics. 1975. V. 4, № 3. P. 211–226.
3. Che Y. K., Choi S., Kim J. An experimental study of sponsored-search auctions // Available at SSRN 1818522. 2011.
4. Varian Hal R. Position Auctions // International Journal of Industrial Organization. 2007. V. 25, № 6. P. 1163–1178.
5. Aggarwal G., Goel A., Motwani R. Truthful Auctions for Pricing Search Keywords // Proceedings of the 7th ACM conference on Electronic commerce. ACM. 2007. P. 1–7

# От модели однопродуктового рассредоточенного рынка к модели общего равновесия пространственно рассредоточенной экономической системы несовершенной конкуренции

А.Г. Коваленко

Самарский государственный аэрокосмический университет имени С.П. Королева  
(национальный исследовательский университет), Самара, Россия

Обсуждаются математические модели, являющиеся развитием модели конкурентной экономики по Вальрасу, как дезагрегированной децентрализованной системы [1].

Рассматриваются структуры управления пространственно рассредоточенными экономическими системами - рассредоточенными рынками, субъектами которых являются производители однородного продукта, потребители, перекупщики. Товары от производителя до потребителя доходят посредством товарно-денежного обмена. Модели однопродуктового рассредоточенного рынка совершенной конкуренции описываются как потоки в гидравлических сетях. Для построения моделей несовершенной конкуренции субъекты рынков описываются экстремальными задачами. Балансовые соотношения обмена субъектов описывается также экстремальными задачами. Получаем сетевую теоретико-игровую задачу. Задавая лидерство субъектов обмена на локальных рынках и принадлежность предприятий, получаем полный спектр задач управления системой от рынков совершенной конкуренции до централизованного управления. Приводятся алгоритмы отыскания состояния равновесия в этих задачах.

## ***1. Однопродуктовые рассредоточенные товарные рынки совершенной конкуренции***

Известно, что поведение однопродуктового рынка совершенной конкуренции описывается кривыми спроса и предложений, его равновесное состояние достигается в точке пересечения этих кривых. Однопродуктовый рынок будем называть сосредоточенным, если поведение всех его субъектов (покупателей и продавцов) можно описать одной кривой спроса  $q = \xi(p)$  и одной кривой предложений  $q = \eta(p)$ . Равновесием рынка является точка  $(p^*, q^*)$ , в которой  $q^* = \xi(p^*) = \eta(p^*)$ . Сосредоточенный рынок неявно предполагает, что на рынке встречаются два субъекта (вообще говоря, агрегированные): производитель и потребитель – и расположены они в том же месте (пункте), где осуществляется обмен, либо их кривые приведены к условиям этого места. Такое описание адекватно для процесса обмена в отдельном изолированном пункте или простейшей экономической системы.

Неравномерность геофизических свойств территорий, разбросанность размещения природных ресурсов, разбросанность и ограниченность мест, приспособленных для комфортного проживания людей, склонность индивидуумов к отдельным видам трудовой деятельности, потребность в товарах, произведенных не только на месте проживания, приводит к тому, что происходит обмен товарами также и между различными пунктами. Необходимость моделирования такой ситуации приводит к возникновению понятия однопродуктового рассредоточенного рынка (ОРР), т.е. рынка, в котором потребительский товар может производиться в одних местах, а потребляться в других. При этом возникает необходимость описания не только процессов его (товара) производства и потребления, но и доставки от производителя к потребителю. В условиях рынка эту функцию выполняет перекупщик, который покупает товар в пункте с меньшей ценой, транспортирует и продает в пункте с большей ценой. Различие в условиях производства и потребления и пространственная разобщенность приводят к различию цен обмена в разных пунктах. Современная экономика невозможна без связи между сосредоточенными рынками.

Запись модели ОРР в виде системы уравнений спроса, предложения, торгово-транспортных кривых, балансовых соотношений представляет собой задачу потокораспределения теории гидравлических сетей [2].

## **2. Модели потребления домашними хозяйствами, использующие функцию полезности с потреблением продуктовых товаров и выпуском труда**

Модели потребления домашних хозяйств в микроэкономическом анализе строятся на основе теории бинарных отношений, задаваемых в пространстве наборов (векторов) потребления с одной стороны. Эти отношения позволяют строить так называемые порядковых функции полезности, максимизация которых при бюджетном ограничении дает задачу потребителя. Очень интересный подход, но возникает вопрос, откуда берется бюджет? Его нужно заработать, т.е. за счет труда. Современная микроэкономика использует естественное деление товаров потребления на отдельные виды. И для каждого вида существует соответствующая единица измерения, позволяющая проводить количественное сравнение наборов товаров в пределах одного вида. Сравнение наборов товаров несет в себе построенное бинарное соотношение и, соответственно, функция полезности [3].

Гораздо сложнее дело обстоит с моделями труда. На наш взгляд, естественным является деление труда на отдельные виды труда, например, слесарь, токарь, плотник, и т.д. Характерной чертой вида труда является возможность задать единицу измерения труда этого вида, и сравнивать затраты этого вида. Наиболее естественной (но не обязательной) единицей изменения физических видов труда при производстве той или иной продукции является затрачиваемая энергия, или время. Будем считать, что каждый вид труда измеряется в условных единицах (у.е.).

Если обозначить через  $x_C$  набор товаров потребления,  $x_L$  набор выполняемого труда, то каждая компонента набора  $x = (x_C, x_L)$  имеет свою единицу измерения. Если  $X_C$  пространство видов предметов потребления, и пространство  $X_L$  видов труда, то прямое произведение  $X = X_C \times X_L$  этих пространств дает полное пространство, описывающее состояние экономической системы. Мы считаем, что для любого домашнего хозяйства на пространстве  $X$  можно определить бинарное отношение строгого порядка « $>$ » и порядка эквивалентности « $\approx$ », устанавливающее предпочтение на нем. И соответственно на этой основе может быть построена функция полезности объединяются в единое пространство, строится бинарное отношение, на основе которого строится обобщенная функция полезности  $u = u(x) = u(x_C, x_L)$ .

## **3. Многопродуктовые экстремальные модели производства товаров потребления, использующие в качестве ресурсов товары с рынков различных отраслей и рынков различных видов труда**

Модели производства, используемые в моделях экономической теории, и в частности микроэкономике, как правило, однопродуктовые. В этих моделях, часто, потребляемые ресурсы описывается некоторым «абстрактным товаром» и «абстрактный трудом». Применение численных методов анализа позволяет представлять модели предприятий в экстремальном виде и соответственно проводить детализацию потребляемых ресурсов (как потребляемых товаров, так и потребляемого труда). Предприятия производят несколько видов товаров и поставляют на разные рынки. Одновременно они потребляют товарные ресурсы с различных рынков товаров, потребляют труд с различных видов рассредоточенных рынков труда. Их описательные модели мы приведем несколько ниже.

Считается, что предприятия максимизируют свою прибыль [4,5].

## **4. От модели однопродуктового рассредоточенного рынка как системы уравнений к модели рассредоточенного рынка как системы экстремальных задач**

В микроэкономической теории функции спроса и предложения строятся на основе экстремальных задач соответственно потребителя и производителя. Отметим, что при этом построении происходит потеря информации о функционировании этих субъектов. Экстремальные задачи [6] позволяют охватить весь спектр их взаимодействия, как экономических, связанных с товарно-денежным обменом в пределах локальных рынков с учетом их структуры, так и производственно-технологических. Производственно-технологические связи между различными рынками разных отраслей дают возможность перейти к многопродуктовым задачам, также позволяют установить обмен денежно-трудовой обмен с рассредоточенными рынками труда. В потребление предприятий включаются ресурсы, которые являются собственностью предприятий и территорий, на которых находятся предприятия. Это позволяет отследить движение и потребление этих ресурсов всей экономической системой.

Экстремальные постановки задач производства и обмена позволяют строить структуры локальных рынков как совершенной, так и несовершенной конкуренции.

### **5. Рассредоточенные рынки товаров**

Многопродуктовый рассредоточенный рынок есть совокупность однопродуктовых рассредоточенных рынков.

Структура каждого однопродуктового рынок представляется в виде ориентированного графа, описывающего структуру движения товара (финансовые потоки движутся в противоположную сторону). Узлы графа являются локальными рынками, в которых происходит обмен между производителями, потребителями перекупщиками, которые поставляют и вывозят товар из узла. Узлам графа соответствуют переменные, интерпретируемые как цена обмена, и как величина внешнеторгового обмена. Это позволяет задать граничные условия с внешними экономическими системами. Потоки товаров связываются балансовыми соотношениями.

Дуги графа интерпретируются как перекупщики, которые покупают товар в узле с меньшей ценой, транспортируют его и продают его в узле с большей ценой. Целью перекупщика является максимизация прибыли от этой операции.

### **6. Узловые задачи, структуры локальных товарных рынков**

Для описания структуры локальных товарных рынков задаются лидеры рынков, владеющие стратегической переменной узла – ценой. Задаются а) иерархии подчиненности субъектов, б) перечень переменных, по которым решаются экстремальные задачи. В зависимости от того, кто является лидером, получаем ту или иную структуру локального рынка. Если лидером является субъект, целью которого является выполнение товарного баланса узла (невидимая рука рынка), то получаем рынок совершенной конкуренции. Если лидер предприятие, то получим монополию предприятия. Аналогично можно строить монополию потребителя, перекупщика.

Проблему построения и отыскания состояния равновесия для той или иной структуры локального рынка мы будем называть узловой задачей.

### **7. Модели рынков труда**

Многовидовой рассредоточенный рынок труда представляется как совокупность рассредоточенных рынков труда одного вида. Структуру рынка одного вида труда представляем в виде ориентированного графа, описывающего структуру перемещения носителей труда от домашнего хозяйства до предприятия – места работы. Направление дуги есть направление труда, обратно движение денег.

Узел этой сети соответствует местам остановок – переходу от места расположения домашнего хозяйства, переходов с одного маршрута, переходу на предприятие.

Для каждого узла определяется понятие цены труда, при котором происходит обмен труда между инцидентными узлу дугами, предприятиями, домашними хозяйствами. Для каждой дуги определяются соотношения, связывающие изменения цен в зависимости от величин потоков и издержек по дуге. Состояние равновесия достигается: 1) балансированием объемов потоков труда в узлах сети, 2) балансированием суммарных изменений цен труда при движении от узлов сети к различным предприятиям, достижимым из узла по путям возрастания цен.

### **8. Об алгоритмах поиска состояния равновесия**

В основу алгоритмов отыскания алгоритма поиска состояния равновесия всей системы предлагаются различные модификации алгоритмов поузловой увязки теории гидравлических сетей. Для однопродуктовых рассредоточенных рынков совершенной конкуренции этот алгоритм исследуется на сходимость, реализация на ЭВМ широко используется в практических задачах анализа трубных систем. Суть этого алгоритма заключается в следующем. Задаем цены во всех узлах рынков. Последовательно решаем узловые задачи. Если хотя бы в одной из них изменилась цена равновесия, то заменяем предыдущее значение на вновь полученное, и работу алгоритма начинаем заново.

Наиболее полное описание функционирования алгоритмов поузловой увязки можно найти в работах [6,7].

### Список литературы

1. *Никайдо, Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. – М., Мир, 1972. – 514 с.
2. Коваленко, А. Г. Математические модели рассредоточенного рынка и задача потокораспределения теории гидравлических сетей // Известия РАН. – Теория и системы управления. – 2001. – № 4. – С. 87–94.
3. Вэриан Х.В. Микроэкономика, промежуточный уровень, современный подход. Москва, «ЮНИТИ». 1997. Стр. 767.
4. Хачатуров В.Р., Соломатин А.Н., Злотов А.В., Бобылев В.Н., Веселовский В.Е., Коваленко А.Г., Косачев Ю.В., Крылов И.А., Ливанов Ю.В., Скиба А.К., Черепанов В.В. Планирование и проектирование освоения нефтегазодобывающих регионов и месторождений: Математические модели, методы, применение / Под ред. В.Р. Хачатурова. М.:УРСС:ЛЕНАНД, 2015. 304 с. Тираж 500 экз. (19 печ.л.)
5. Коваленко А.Г. К вопросу о взаимосвязи децентрализованного многопродуктового пространственно-рассредоточенного рынка и централизованного управления этой экономической системой. Журнал экономической теории. 2012. № 3. С. 148-154.
6. Коваленко А.Г. Математические модели и методы анализа рассредоточенных рынков. Развитие моделей и методов теории гидравлических сетей, методов оптимизации и многокритериального анализа. // Монография, ISBN 978-3-659-98673-4/ Palmarium Academic Publishing. Saarbrücken, Germany/ 2013. Стр. 320.
7. Меренков, А. П. Хасилев В. Я. Теория гидравлических цепей. – М.: Наука, 1985. – 278 с.

## Формирование рынков иерархической структуры с использованием долгосрочных договоров поставки\*

Г.В. Колесник

ПАО «ФСК ЕЭС», Москва, Россия

Одним из механизмов регулирования состояния рынков крупными потребителями, в том числе, компаниями с государственным участием, является заключение с производителями долгосрочных договоров поставки продукции, гарантирующих им определенный объем сбыта в течение длительного периода, не зависящий от текущей конъюнктуры рынка.

В результате этого рынок приобретает иерархическую структуру: на нем появляются «привилегированные» фирмы, заключившие с потребителем долгосрочные договора, и прочие фирмы, работающие в конкурентном сегменте.

Предоставление преимуществ, обеспечиваемых долгосрочными договорами, может быть предметом торга между потребителем и производителем, в результате которого потребитель может извлекать дополнительный доход [1]. Конкретный механизм получения такого дохода, как и его форма, могут быть различными и определяются как свойствами участников, так и характером их взаимодействия. В частности, этот доход может носить косвенный характер, заключающийся в принятии производителем ряда обязательств по поддержке реализации государственной политики в различных сферах. Практика заключения комплексных офсетных контрактов, содержащих такого рода обязательства, широко распространена, например, в области торговли вооружениями и военной техникой [2]. Аналогичные механизмы используются в настоящее время также компаниями с государственным участием в других отраслях, например, энергетическими компаниями на рынке электротехнической продукции [3].

В докладе на основе теоретико-игровой модели исследуется воздействие долгосрочных договоров поставки продукции на результирующие рыночные равновесия и на благосостояние потребителя. В модели рассматривается олигополистический рынок однородного продукта, производимого  $n$  фирмами. Фирмы конкурируют, назначая объемы выпуска продукции  $q_i, i = 1, \dots, n$ , с целью максимизации своей прибыли:

$$\Pi_i(\mathbf{q}) = P(\mathbf{q})q_i - Z_i(q_i),$$

где  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  – вектор объемов выпуска продукции всеми фирмами;  $Z_i(q_i)$  – функция издержек фирмы  $i$ ;  $P(\mathbf{q})$  – рыночная цена продукции.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 14-02-00155а).

Потребитель имеет возможность заключать с производителями долгосрочные договора, изменяя тем самым структуру рынка. Дополнительный доход потребителя, получаемый за счёт продажи производителям привилегий, связанных с заключением  $k$  долгосрочных договоров, обозначим через  $f(k)$ . Тогда благосостояние потребителя может быть определено как

$$U(k) = W(k) + kf(k),$$

где  $W(k)$  – излишек потребителя в равновесии.

При наличии долгосрочных договоров поставки рассматриваемый рынок приобретает иерархическую структуру, взаимодействие агентов в которой описывается следующей многошаговой игрой.

1. Потребитель предлагает производителям заключить  $k$  долгосрочных договоров на поставку продукции.

2. В результате переговоров производителей и потребителя определяется цена  $f$ , которую производитель платит потребителю за привилегии, получаемые в результате заключения договора.

3. При фиксированном платеже  $f$  производитель назначает объём продукции  $\tilde{q}$ , поставляемой в соответствии с долгосрочным договором.

4. Привилегированные и конкурентные фирмы производят продукцию в объёмах, соответственно,  $q^P$  и  $q^C$ , для реализации в конкурентном сегменте.

Рассмотрим случай постоянных и одинаковых предельных издержек производства  $Z_i(q_i) = cq_i$  и линейную обратную функцию спроса  $P(\mathbf{q}) = A - \sum_{i=1}^n q_i$ . Обозначим через  $q^0$  объём выпуска продукции фирмами в равновесии Курно. Для такой модели справедлив следующий результат [4].

**Утверждение.** Если объём долгосрочного договора  $\tilde{q} \leq q^0$ , то равновесие на рассматриваемом рынке совпадает с равновесием в олигополии Курно с  $n$  фирмами:

$$q^P + \tilde{q} = q^C = q^0.$$

Если  $\tilde{q} > q^0$ , привилегированные фирмы не участвуют в производстве продукции в конкурентном сегменте ( $q^P = 0$ ).

Оптимальной для потребителя в данной системе будет такая структура рынка, когда количество фирм, с которыми заключены долгосрочные договора, и фирм, работающих в конкурентном сегменте, оказываются примерно одинаковы (равны для чётного числа  $n$  и различаются на 1 для нечётного).

Полученные результаты показывают, что использование механизмов предоставления привилегий производителю в форме долгосрочных договоров даёт потребителю возможность увеличить своё благосостояние за счёт влияния на рыночную цену продукции в результате изменения структуры рынка, а также изъятия части потенциальной прибыли фирм, заключивших такие договора.

Практическое применение данные результаты могут найти, в частности, при формировании закупочной политики крупных потребителей, действующих на олигополистических рынках. Для компаний с государственным участием интерес представляет также использование долгосрочных договоров при реализации государственной промышленной политики.

#### Список литературы

1. Burguet R., Perry M. (2009): Preferred suppliers in auction markets // RAND Journal of Economics. Vol. 40. № 2. P. 283 - 295.
2. Артяков В.В., Чемезов С.В. Офсетная деятельность субъектов военно-технического сотрудничества: проблемы и перспективы развития. М.: Граница, 2004.
3. Швец Н.Н., Колесник Г.В. Локализация производства электротехнического оборудования как фактор обеспечения энергетической безопасности государства в условиях глобального рынка // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. 2014. № 16. С. 37 - 45.
4. Колесник Г.В., Швец Н.Н. Структурирование рынков - инструмент государственной промышленной политики // Экономика и математические методы. 2015. Т. 51, № 4. С. 85–95.

# Анализ изменения поведения участников эксперимента с учетом социальной составляющей и психологических характеристик\*

Р.И. Яминов

*ВЦ им. А. А. Дородницына РАН ФИЦ ИУ, Москва, Россия*

В работе анализировались эксперименты, проведенные в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ, которые состояли из двух частей. В рамках первой части предлагалось сыграть в игру «Дилемма заключенного», вторая часть состояла из такой же игры, только проводилась после этапа социализации [1]. Участники делились на две группы по 6 человек в каждой, после чего внутри группы происходило знакомство участников под контролем организаторов эксперимента (этап социализации), далее игры составлялись таким образом, чтобы оба участника в паре выбирались из одной «социализированной» группы. После этапа социализации наблюдалось изменение стратегий игроков и рост кооперативных исходов, более того в некоторых экспериментах наблюдались 100% кооперативные исходы даже без единичных отклонений (подобные «гипер-социализированные» группы исключались из дальнейшего анализа).

По результатам экспериментов разработана динамическая модель коллективных действий.

Для аппроксимации стратегии игроков был использован подход, основанный на допущении, что действие игрока в текущем периоде зависит только от исхода прошлого периода и задается вероятностью выбрать кооперативную стратегию. В результате стратегию игрока можно записать в виде четырех чисел: вероятностей выбрать кооперативную стратегию (по одному числу для каждого возможного исхода), а игра записывается в виде марковского процесса. Далее анализировались результаты проведенных экспериментов, и по действиям каждого из участников подбиралась подобная стратегия, наилучшим образом описывающая его действия.

В результате для каждого игрока вычислялись две стратегии, задаваемые четырьмя числами, основанные на его поведении в эксперименте. Одна стратегия описывала его действия до социализации, вторая – после. Была проведена проверка валидности подобной аппроксимации, для этого рассматривались реализовавшиеся исходы в оригинальном эксперименте, и к ним была применена стратегия «роботов». Считалась средняя вероятность того, что робот выберет действие, отличное от выбора игрока. В результате получилось, что ошибочных ходов «роботов» только 17%.

Полученные стратегии были разбиты на группы и построены возможные переходы игроков из одной группы в другую после социализации. Дальнейший анализ включал психологические характеристики игроков, полученные при прохождении теста MBTI [2]. В результате была построена модель принятия решений, изменения стратегий после социализации в зависимости от психологических характеристик игрока.

## Список литературы

1. Berkman, E. T., Lukinova, E., Menshikov, I., & Myagkov, M. Sociality as a Natural Mechanism of Public Goods Provision. PLoS ONE, 10(3), 2015, e0119685.
2. Меньшикова О.Р., Меньшиков И.С., Седуш А.О. Влияние трех видов социализации на поведение мужчин и женщин в социально-экономических экспериментах с учетом психологических типов. Сборник МФТИ «Моделирование процессов обработки информации», 2015, С. 56-65.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

# **Математическое моделирование транспортных** **ПОТОКОВ**

1. A.Y. Krylatov, V.V. Zakharov Competitive Traffic Assignment in Road Networks
2. А.С. Аникин, А.В. Гасников, В.В. Семенов Параллелизуемый двойственный метод поиска равновесий в смешанных моделях распределения потоков в больших транспортных сетях
3. П.П. Бобрик Волновые свойства алгоритмов поиска транспортного равновесия Вардропа с локальным информированием
4. А.М. Валуев, А.А. Соловьев Моделирование многополосного дорожного движения в формализме гибридных систем
5. А.Э. Воробьев, А.Ю. Титов, В.А. Гаврилин, А.Ю. Меньшутин Использование транспортного моделирования для оценки параметров улично-дорожной сети
6. Гасников А.В., Грищенко Д.И. Мендель М.С. Пример задачи композитной сильно выпуклой оптимизации, когда выгодно работать не с евклидовой прокс-структурой
7. А.В. Гасников, П.Е. Двуреченский, С.В. Мациевский. Композитный прямо-двойственный быстрый градиентный метод с адаптивным подбором константы Липшица градиента
8. А.В. Гасников, П.Е. Двуреченский, А.Л. Суворикова, А.В. Чернов Об энтропийной регуляризации транспортной задачи линейного программирования
9. Ф.Ш. Гулиев, Д.И. Камзолов Обобщение задачи Нестерова-де Пальмы
10. А.Г. Коваленко, А.Д. Иванова К проблеме анализа модели движения в городских транспортных потоках
11. Д.И. Коган, Ю.С. Федосенко Оптимизационные задачи однопроцессорного обслуживания объектов, образующих составы
12. А.П. Раевская, А.Ю. Крылатов Задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций
13. А.А. Лагуновская, Д.А. Кузнецов Задача нахождения кратчайшего пути как задача онлайн оптимизации
14. А.А. Лазарев, Е.Г. Мусатова, И.А. Тарасов Задача построения расписания движения поездов между двумя станциями
15. Д. А. Максимова, И. С. Меньшиков Исследование парадокса Браеса методами экспериментальной экономики для транспортной сети с асимметричными затратами
16. Д.А. Неугодов, А.В. Прохоров, В.Л. Швецов Практическое применение различных транспортных моделей
17. В.П. Осипов, В.А. Судаков Интеграция транспортных моделей и системы поддержки решений
18. Тюрин А.И., Чернов А.В. Двойственный быстрый градиентный метод решения задач энтропийно-линейного программирования

## **Competitive Traffic Assignment in Road Networks**

A.Y. Krylatov, V.V. Zakharov

*Saint Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia*

The development of intelligent vehicles is deeply interconnected with the development of in-vehicle route guidance and information systems. Since such systems could impact significantly on route choice, it is believed that they are able to reduce congestion in an urban traffic area. This social benefit is expected to be reached by imposing the route choices on the network users that lead to the system optimum traffic assignment. However, guidance service could be offered by different competitive business companies. Then route choices of different mutually independent groups of users (using different competing guidance systems) could deviate traffic assignment from the system optimum state. In this paper, a game theoretic approach is shown to be very efficient to formalize competitive traffic assignment problem with various groups of users in a

form of non-cooperative network game with Nash equilibrium search. The relationships between Wardrop's system optimum associated with traffic assignment problem and Nash equilibrium associated with competitive traffic assignment problem are investigated. Moreover, some related aspects of Nash equilibrium and Wardrop's user equilibrium assignments are also discussed. This research develops in certain ways such relevant works as [1-3].

#### References

21. Altman E., Basar T., Jimenez T., Shimkin N. Competitive routing in networks with polynomial costs // IEEE Transactions on automatic control. 2002. V. 47, № 1. P. 92–96.
22. Altman E., Kameda H. Equilibria for multiclass routing problems in multi-agent networks // Advances in Dynamic Games. 2005. V. 7. P. 343–367.
23. Haurie A., Marcotte P. On the relationship between Nash-Cournot and Wardrop equilibria // Networks. 1985. V. 15. P. 295–308.

## Параллелизуемый двойственный метод поиска равновесий в смешанных моделях распределения потоков в больших транспортных сетях\*

А.С. Аникин<sup>1</sup>, А.В. Гасников<sup>2,3</sup>, В.В. Семенов<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия

<sup>3</sup>Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия

<sup>4</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Россия

В данной работе мы распространяем результат п. 3 статьи [1] на смешанные модели (см. ниже). При этом мы также предлагаем другую запись подхода п. 3 статьи [1], которая делает его более удобной для применения на практике.

Пусть транспортная сеть города представлена ориентированным графом  $\Gamma = (V, E)$ , где  $V$  – узлы сети (вершины),  $E \subset V \times V$  – дуги сети (рёбра графа),  $O \subseteq V$  – источники корреспонденций ( $S = |O|$ ),  $D \subseteq V$  – стоки. В современных моделях равновесного распределения потоков в крупном мегаполисе число узлов графа транспортной сети обычно выбирают порядка  $n = |V| \square 10^4$ . Число ребер  $|E|$  получается в три четыре раза больше. Пусть  $W \subseteq \{w = (i, j) : i \in O, j \in D\}$  – множество корреспонденций, т.е. возможных пар «источник» – «сток»;  $p = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  – путь из  $v_1$  в  $v_m$ , если  $(v_k, v_{k+1}) \in E$ ,  $k = 1, \dots, m-1$ ,  $m > 1$ ;  $P_w$  – множество путей, отвечающих корреспонденции  $w \in W$ , то есть если  $w = (i, j)$ , то  $P_w$  – множество путей, начинающихся в вершине  $i$  и заканчивающихся в  $j$ ;  $P = \bigcup_{w \in W} P_w$  – совокупность всех путей в сети  $\Gamma$ ;  $x_p$  [автомобилей/час] – величина потока по пути  $p$ ,  $x = \{x_p : p \in P\}$ ;  $f_e$  [автомобилей/час] – величина потока по дуге  $e$ :

$$f_e(x) = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p \quad (f = \Theta x), \text{ где } \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases};$$

\* Работа А.В. Гасникова выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-31-70001 мол\_а\_мос. Работа остальных соавторов выполнена в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014 – 2020 годы», Соглашение № 14.604.21.0052 от 30.06.2014 г. с Минобрнаукой. Уникальный идентификатор проекта RFMEFI60414X0052.

$\tau_e(f_e)$  – удельные затраты на проезд по дуге  $e$ . Как правило, предполагают, что это – (строго) возрастающие, гладкие функции от  $f_e$ . Точнее говоря, под  $\tau_e(f_e)$  правильнее понимать представление пользователей транспортной сети об оценке собственных затрат (обычно временных в случае личного транспорта и комфортности пути (с учетом времени в пути) в случае общественного транспорта) при прохождении дуги  $e$ , если поток желающих проехать по этой дуге будет  $f_e$ .

Рассмотрим теперь  $G_p(x)$  – затраты временные или финансовые на проезд по пути  $p$ . Естественно считать, что

$$G_p(x) = \sum_{e \in E} \tau_e(f_e(x)) \delta_{ep}.$$

Пусть также известно, сколько перемещений в единицу времени  $d_w$  осуществляется согласно корреспонденции  $w \in W$ . Тогда вектор  $x$ , характеризующий распределение потоков, должен лежать в допустимом множестве:

$$X = \left\{ x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, w \in W \right\}.$$

Рассмотрим игру, в которой каждой корреспонденции  $w \in W$  соответствует свой, достаточно большой, набор однотипных “игроков”, осуществляющих передвижение согласно корреспонденции  $w$  (относительный масштаб характеризуется числами  $d_w$ ) Чистыми стратегиями игрока служат пути, а выигрышем – величина  $-G_p(x)$ . Игрок “выбирает” путь следования  $p \in P_w$ , при этом, делая выбор, он пренебрегает тем, что от его выбора также “немного” зависят  $|P_w|$  компонент вектора  $x$  и, следовательно, сам выигрыш  $-G_p(x)$ . Можно показать (см., например, [2]), что поиск равновесия Нэша–Вардропа  $x^* \in X$  (макро описание равновесия) равносильно решению задачи

$$\Psi(f) = \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz \rightarrow \min_{\substack{f = \Theta x \\ x \in X}}. \quad (1)$$

В пределе модели стабильной динамики (Нестеров–деПальма) [3, 4] на части ребер  $E' \subseteq E$  может быть сделан следующий предельный переход

$$\tau_e^\mu(f_e) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0^+} \begin{cases} \bar{t}_e, & 0 \leq f_e < \bar{f}_e \\ [\bar{t}_e, \infty), & f_e = \bar{f}_e \end{cases},$$

$$d\tau_e^\mu(f_e)/df_e \xrightarrow{\mu \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 \leq f_e < \bar{f}_e.$$

В данной работе предлагается хорошо параллелизуемый двойственный численный метод поиска равновесия в смешанной модели (1), т.е. в модели, в которой часть ребер являются Бэкмановскими, а часть – Нестерова–деПальмы. Такие задачи возникают, например, в однопродуктовой модели грузоперевозок РЖД [5]. К таким “смешанным” моделям классический метод условного градиента (Франк–Вульфа), который защит практически во все современные пакеты транспортного моделирования, к сожалению, уже не применим. Требуется разработка новых подходов.

Для задачи (1) можно построить следующую двойственную задачу [1, 4]

$$Y(t) = - \underbrace{\sum_{w \in W} d_w T_w(t)}_{F(t)} + \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \rightarrow \min_{\substack{t_e \geq \bar{t}_e, e \in E' \\ t_e \in \text{dom } \sigma_e^*(t_e), e \in E \setminus E'}}$$

где  $T_w(t) = \min_{p \in P_w} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e$  – длина кратчайшего пути из  $i$  в  $j$  ( $w = (i, j) \in W$ ) на

графе  $\Gamma$ , ребра которого взвешены вектором  $t = \{t_e\}_{e \in E}$ . При этом решение задачи (1)  $f$  можно получить из формул:  $f_e = \bar{f}_e - s_e$ ,  $e \in E'$ , где  $s_e \geq 0$  – множитель Лагранжа к

ограничению  $t_e \geq \bar{t}_e$ ;  $\tau_e(f_e) = t_e$ ,  $e \in E \setminus E'$ . Заметим, что для ребер  $e \in E'$  имеем  $\sigma_e^*(t_e) = \bar{f}_e \cdot (t_e - \bar{t}_e)$ , а для BPR-функций

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e \cdot \left( 1 + \gamma \cdot \left( \frac{f_e}{\bar{f}_e} \right)^\mu \right) \Rightarrow \sigma_e^*(t_e) = \bar{f}_e \cdot \left( \frac{t_e - \bar{t}_e}{\bar{t}_e \cdot \gamma} \right)^\mu \frac{(t_e - \bar{t}_e)}{1 + \mu}.$$

В приложениях обычно выбирают  $\mu = 1/4$ . В этом случае приводимый ниже шаг итерационного метода (3) может быть осуществлен по явным формулам, поскольку существуют квадратурные формулы (формулы Кардано–Декарта–Эйлера–Феррари [6]) для уравнений 4-й степени.

Поиск вектора  $t$  представляет самостоятельный интерес, поскольку этот вектор описывает затраты на ребрах графа транспортной сети. Решение задачи (2) дает вектор затрат  $t$  в равновесии.

Для решения двойственной задачи (2) воспользуемся методом зеркального спуска в композитном варианте [7, 8] ( $k = 0, \dots, N$ ,  $t^0 = \bar{t}$ , ограничение  $t_e \in \text{dom } \sigma_e^*(t_e)$ ,  $e \in E \setminus E'$  всегда будет не активным, т.е. его можно не учитывать)

$$t^{k+1} = \arg \min_{\substack{t_e \geq \bar{t}_e, e \in E' \\ t_e \in \text{dom } \sigma_e^*(t_e), e \in E \setminus E'}} \left\{ \gamma_k \left\{ \langle \partial F(t^k), t - t^k \rangle + \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\} + \frac{1}{2} \|t - t^k\|_2^2 \right\} \quad (3)$$

где  $\partial F(t^k)$  – произвольный элемент субдифференциала выпуклой функции  $F(t^k)$  в точке  $t^k$ , а

$$\gamma_k = \varepsilon / M_k^2, \quad M_k = \|\partial F(t^k)\|_2,$$

где  $\varepsilon > 0$  – желаемая точность решения задач (1) и (2), см. (6).

Положим

$$\begin{aligned} \bar{t}^N &= \frac{1}{S_N} \sum_{k=0}^N \gamma_k t^k, \quad S_N = \sum_{k=0}^N \gamma_k, \\ f_e^k &\in -\partial_e F(t^k), \quad \bar{f}_e^N = \frac{1}{S_N} \sum_{k=0}^N \gamma_k f_e^k, \quad e \in E \setminus E', \quad (4) \\ \bar{f}_e^N &= \bar{f}_e - s_e^N, \quad e \in E', \end{aligned}$$

где  $s_e^N$  – есть множитель Лагранжа к ограничению  $t_e \geq \bar{t}_e$  в задаче

$$\begin{aligned} &\frac{1}{S_N} \left\{ \sum_{k=0}^N \gamma_k \cdot \left\{ \sum_{e \in E'} \partial_e F(t^k) \cdot (t_e - t_e^k) \right\} + \right. \\ &\left. + S_N \sum_{e \in E'} \bar{f}_e \cdot (t_e - \bar{t}_e) + \frac{1}{2} \sum_{e \in E'} (t_e - t_e^0)^2 \right\} \rightarrow \min_{t_e \geq \bar{t}_e, e \in E'}. \end{aligned}$$

Критерий останова метода

$$0 \leq \Upsilon(\bar{t}^N) + \Psi(\bar{f}^N) \leq \varepsilon. \quad (5)$$

В данной работе, следуя [1, 9], получен следующий результат о сходимости метода (3).

**Теорема.** Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{M}_N^2 &= \left( \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N M_k^{-2} \right)^{-1}, \\ R_N^2 &:= \frac{1}{2} \sum_{e \in E \setminus E'} (\tau_e(\bar{f}_e^N) - \bar{t}_e)^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in E'} (\tilde{t}_e^N - \bar{t}_e)^2, \\ \{\tilde{t}_e^N\}_{e \in E'} &= \end{aligned}$$

$$\arg \min_{\{t_e\}_{e \in E} \geq 0} \left\{ -\sum_{w \in W} d_w T_w \left( \left\{ \tau_e(\bar{f}^N) \right\}_{e \in E \setminus E'}, \{t_e\}_{e \in E'} \right) + \sum_{e \in E'} \bar{f}_e^N \cdot (t_e - \bar{t}_e) \right\}.$$

Тогда при

$$N \geq \frac{2\tilde{M}_N^2 R_N^2}{\varepsilon^2}$$

имеет место неравенство (5) и, как следствие,

$$0 \leq \Upsilon(\bar{t}^N) - \Upsilon_* \leq \varepsilon, \quad 0 \leq \Psi(\bar{f}^N) - \Psi_* \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Возможность эффективного распараллеливания предложенного метода связана с возможностью эффективного вычисления самой затратной части шага описанного итерационного метода: расчет элемента субдифференциала  $\partial F(t^k)$  (см. формулы (3), (4), в которых этот субдифференциал используется):

$$\partial F(t) = -\sum_{i \in O} \sum_{j \in D: (i,j) \in W} d_{ij} \partial T_{ij}(t).$$

Вычисление  $\{\partial T_{ij}(t)\}_{j \in D: (i,j) \in W}$  может быть осуществлено алгоритмом Дейкстры [10] (и его более современными аналогами [11]) за  $O(n \ln n)$ . При этом под  $\partial T_{ij}(t)$  можно понимать описание произвольного (если их несколько) кратчайшего пути из вершины  $i$  в вершину  $j$  на графе  $\Gamma$ , ребра которого взвешены вектором  $t = \{t_e\}_{e \in E}$ . Под “описанием” понимается  $\lfloor \partial T_{ij}(t) \rfloor_e = 1$ , если  $e$  попало в кратчайший путь и  $\lfloor \partial T_{ij}(t) \rfloor_e = 0$  иначе.

Таким образом, вычисление  $\partial F(t)$  может быть распараллелено на  $S$  процессорах.

## Литература

1. Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Дорн Ю.В., Максимов Ю.В. Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и модели стабильной динамики // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. [arXiv:1506.00293](https://arxiv.org/abs/1506.00293)
2. Patriksson M. The traffic assignment problem. Models and methods. Utrecht, Netherlands: VSP, 1994.
3. Nesterov Y., de Palma A. Stationary dynamic solutions in congested transportation Networks: Summary and Perspectives // Networks Spatial Econ. 2003. № 3(3). P. 371–395.
4. Гасников А.В., Дорн Ю.В., Нестеров Ю.Е., Шпирко С.В. О трехстадийной версии модели стационарной динамики транспортных потоков // Математическое моделирование. 2014. Т. 26:6. С. 34–70. [arXiv:1405.7630](https://arxiv.org/abs/1405.7630)
5. Ващенко М.П., Гасников А.В., Молчанов Е.Г., Поспелова Л.Я., Шананин А.А. Вычислимые модели и численные методы для анализа тарифной политики железнодорожных грузоперевозок. М.: ВЦ РАН, 2014. [arXiv:1501.02205](https://arxiv.org/abs/1501.02205)
6. Куроп А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965.
7. Nemirovski A. Lectures on modern convex optimization analysis, algorithms, and engineering applications. Philadelphia: SIAM, 2013. [http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/Lect\\_ModConvOpt.pdf](http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/Lect_ModConvOpt.pdf)
8. Duchi J.C., Shalev-Shwartz S., Singer Y., Tewari A. Composite objective mirror descent // COLT. 2010. P. 14–26.
9. Нестеров Ю.Е. Модели равновесных транспортных потоков и алгоритмы их нахождения. Выступление на семинаре “Математическое моделирование транспортных потоков” в МЦНМО 14 апреля 2012 г. [http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option\\_lang=rus&presentid=6433](http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=6433)
10. Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B. Network flows: Theory, algorithms and applications. Prentice Hall, 1993.
11. Bast H., Delling D., Goldberg A., Müller-Hannemann M., Pajor T., Sanders P., Wagner D., Werneck R.F. Route Planning in Transportation Networks // Microsoft Technical Report. 2015. [arXiv:1504.05140](https://arxiv.org/abs/1504.05140)

# Волновые свойства алгоритмов поиска транспортного равновесия Вардропа с локальным информированием

П.П. Бобрик

*Институт проблем транспорта РАН имени Н.С. Соломенко., моск.  
отдел, Москва, Россия*

Рассматривается классическая транспортная задача распределения  $n$  транспортных корреспонденций  $k_i$  по  $n+1$  маршрутам  $\gamma_i$  так, чтобы стоимость потока была бы наименьшей. Каждая корреспонденция является непрерывной величиной с единичной интенсивностью  $f_i = 1$ , а каждый маршрут имеет пропускную способность равную единице, превышение которой недопустимо. Матрица стоимостей  $C_{i,j}$  определяется в соответствии с формулой расстояния  $C_{i,j} = |i - j|$ , где  $i$  номер корреспонденции, а  $j$  - номер маршрута, по которой она распределяется. Есть тривиальное решение, когда первая корреспонденция полностью распределяется на первый маршрут, вторая во второй и т.д.. Последний маршрут  $n + 1$  при этом остается невостребованным.

Задача является линейной, и она относительно легко решается методами линейного программирования. В ней отсутствует для простоты сетевая составляющая. Но в данной работе она была использована для апробации на ней некоторых классов алгоритмов поиска равновесия Вардропа в транспортных системах, а также изучения их свойств.

Для каждого маршрута  $\gamma_i$  введем неотрицательную дополнительную стоимость  $u_i$ , которые мы можем менять по собственному усмотрению. Будем предполагать, что участники потока сами выбирают маршруты. При этом выполняется правило, что чем ниже стоимость маршрута, тем большее количество участников движения его выбирают. Также будем предполагать, что любой набор дополнительных стоимостей  $u_i$  однозначно определяет поток по маршрутам  $f_i$ .

Если текущее распределение корреспонденций по маршрутам таково, что для маршрута  $\gamma_i$  поток по нему превышает его пропускную способность, то стоимость  $u_i$  возрастает. Если стоимость ненулевая, и при этом поток по маршруту ниже пропускной способности, то стоимость снижается. Подобные алгоритмы являются рыночными по своей сути. Тогда задача переформулируется как выбор таких цен, чтобы потоки пришли бы в равновесие. Отметим, что подобный класс алгоритмов является локальным по доступной информации, поскольку решение принимается только по наблюдению над суммарным потоком на маршруте.

Изменим входящие условия, повысив интенсивность первой корреспонденции до  $1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  сколь угодно малая величина, что превышает возможности первого маршрута, и оценим работу алгоритма на таком изменении.

На первой итерации каждая корреспонденция выберет маршрут с таким же номером. При этом все условия на пропускные способности будут выполнены, кроме первого маршрута, где интенсивность потока превысит пропускную способность на малую величину  $\varepsilon$ . Последний маршрут с номером  $n + 1$  при этом будет оставаться незанятым ни одним потоком.

Согласно выбранному алгоритму стоимость первого маршрута будет повышаться до тех пор, пока его стоимость не станет соизмеримой для использования второго маршрута. Это случится, когда  $u_1$  превысит единицу. После чего аналогичная ситуация повторится суммарно для первого и второго маршрутов, поскольку поток по ним превысит их пропускную способность. Продолжая данный процесс по индукции, получаем, что для того, чтобы последний маршрут с номером  $n + 1$  принял бы на себя часть потока, необходимо выполнение  $n$  условий на дополнительные стоимости  $n + 1 - i < u_i$ . Это можно интерпретировать как прохождение волны возмущения по всему множеству маршрутов. Тем самым показано, что общее число итераций линейно возрастает при увеличении размерности задачи  $n$ .

Приведенный пример показывает, что достижение равновесия в подобных системах, вообще говоря, может иметь волновой характер. И потому существенно зависеть от размерности задачи. Также показано, что сколь угодно малое возмущение начальных данных может привести к скачкообразному увеличению стоимостей маршрутов. Т.е. равновесные распределения потоков имеют вид разрывных функций в зависимости от начальных данных в случае жестких условий на пропускные способности маршрутов.

#### Список литературы

- 1 Бобрик П.П. Моделирование распределение потоков в транспортных сетях по нескольким альтернативным маршрутам // Транспорт: Наука, техника, управление, 1995, №9.
- 2 Бобрик П.П. «Об одном методе управления транспортными потоками». / Труды 4 международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO-07., М: ИПУ, 2007, докл. 4204.
- 3 Швецов В.И. Алгоритмы распределения транспортных потоков. // 2009. Автоматика и Телемеханика, № 10, с.148-157.
- 4 Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013. 430 стр., изд. 2.

### Моделирование многополосного дорожного движения в формализме гибридных систем

А.М. Валуев<sup>1,2</sup>, А.А. Соловьев<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «МИСиС», Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный МО, Россия

Первоначальным источником моделей гибридных систем (ГС) с переключениями на многообразиях послужили задачи управления движением для многостадийных процессов космического полета [1]. Применение ГС к моделированию дорожного движения началось с «моделей дискретного потока», объединяющих уравнения «модели следования за лидером» для пар следующих друг за другом автомобилей в единую систему соотношений, описывающих автотранспортный поток (АТП) на полосе [2]. Модель в такой форме позволяет проводить исследование транспортных процессов не только с помощью вычислительных экспериментов, но и аналитически. Более общая математическая форма моделей дискретного транспортного потока предложена в [3].

Общая характеристика ГС-моделей АТП вида [3] распространяется и на случай многополосного движения. Модель АТП характеризуется совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений с управлениями, которая может изменяться при переключениях. Уравнения описывают движение транспортных средств (ТС), прохождение времени с моментов отдельных событий. Дискретные переменные состояния, также изменяющиеся в моменты переключений, служат параметрами уравнений. Результат переключения также может зависеть от дискретных переменных управления, определяемых в связи с переключениями. Система условий, которыми описываются возможные переключения, зависит от текущего значения вектора дискретных переменных состояния  $d(l)$  (здесь  $l$  — номер текущего этапа, т.е. промежутка времени между последовательными переключениями). Она представляется в виде набора неравенств в фазовом пространстве:

$$G_j(x(t, l), d(l)) \leq 0, j \in I_G(d(l)), \quad (1)$$

а момент очередного переключения  $T(l)$  — ближайший момент обращения одного из неравенств (1) в равенство. Результатом переключения, кроме нового вектора  $d(l+1)$ , является изменение отдельных  $x_i(T(l), l+1)$  по отношению к  $x_i(T(l), l)$ .

Применительно к рассматриваемой задаче основной интерес представляют условия перехода между полосами. Если ограничиться двухполосным движением, то, кроме постоянного параметра  $k$ -го ТС — его учетного номера  $i(k)$ , — с ним связываются целочисленные переменные: учетные номера предшествующих на своей полосе  $i(1, k, l)$  и на соседней полосе  $i(2, k, l)$  («лидеров») и следующего за  $i(2, k, l)$ -м ТС —  $i(3, k, l)$  (потенциального «преследователя»), и булевы переменные, характеризующие его положение относительно начала и конца зоны свободного перехода на соседнюю полосу ( $b(1, k, l)$ ,  $b(2, k, l)$ ), факт

сближения до минимального безопасного расстояния до  $i(1,k,l)$ -го ТС ( $b(3,k,l)$ ), наличие достаточного опережения потенциального «преследователя» на смежной полосе ( $b(4,k,l)$ ) и, наконец, наличия мотивации к переходу ( $b(5,k,l)$ ). Последняя состоит в том, расстояние до  $i(2,k,l)$ -го ТС превышает расстояние до  $i(1,k,l)$ -го не менее чем на расстояние  $\Delta s$ , мотивирующее к переходу. Необходимое условие перехода —  $b(r,k,l)=1$  при всех  $r=1, \dots, 5$ ; он начинается в момент, когда одна из этих величин  $b(r,k,l)$  (кроме  $r=2$ ) обращается в единицу, а остальные уже равны 1. Условие для каждого такого изменения — обращение соответствующего неравенства (1) в равенство, а выражения для  $G_j(x(t), l)$ ,  $d(l)$  зависят от координат и (для безопасных расстояний) скоростей ТС с номерами  $i(k)$  и  $i(r,k,l)$  (для каждого условия свой набор  $r \in \{1, 2, 3\}$ ). Изменение взаимного положения ТС на смежных полосах (значений  $b(2,k,l)$ ,  $b(3,k,l)$ ) определяется аналогичными условиями. Подобным образом могут быть учтены и другие условия (скоростные ограничения) и мотивации (перестроение с целью поворота на перекрестке).

Моментом начала перестроения начинается этап, отличающийся: дополнительными координатами и уравнениями для бокового движения и дополнительными связями (условия безопасности связывают перестраивающийся автомобиль с его «лидером» и «преследователем» на обеих полосах). Относительно боковой координаты записывается условие окончания перехода, результатом которого является изменение порядка ТС на обеих полосах и восстановление прежней системы ограничений с новыми параметрами.

Сформулированная модель позволяет выполнить не только имитационное моделирование (табл. 1), но также аналитическое исследование динамики многополосного АТП для простых условий (однотипные по управлению и динамическим характеристикам ТС или их разделение на «быстрые» и «медленные»; неограниченный прямой участок или кольцо без съездов и заездов).

Таблица 1. Пример моделирования двухполосного АТП

Начальное положение			Конечное положение		
Номер ТС	$i$	Полоса	Номер ТС	$s_i$	Полоса
2	0.00	1	3	73.24	1
1	5.00	1	4	71.16	1
7	5.00	1	1	95.35	1
3	0.00	2	5	16.74	1
4	0.00	2	7	53.48	1
5	1.00	2	6	25.25	2
6	9.00	2	2	48.98	2

### Список литературы

1. Величенко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями // Автоматика и телемеханика. 1966. №7. С. 20–30.
2. Глухарев К.К., Валувев А.М., Калинин И.Н., Улюков Н.М. О моделировании автомобильных потоков на магистральной сети // Труды МФТИ. 2013. Т. 5, №4. С. 102-114.
3. Валувев А.М. Моделирование транспортных процессов в формализме гибридных систем // XII Всероссийское Собрание по проблемам управления: Труды. С. 5033–5043.

# Использование транспортного моделирования для оценки параметров улично-дорожной сети

А.Э. Воробьев, А.Ю. Титов, В.А. Гаврилин, А.Ю. Меньшутин  
*НИИПИ Генплана Москвы, Москва, Россия*

На примере Москвы, выполнена оценка территории города с точки зрения неравномерности уровня развития транспортной инфраструктуры, и в первую очередь улично-дорожной сети.

Дано определение и вычислен ряд показателей, которые характеризуют:

- геометрические свойства графа улично-дорожной сети (коэффициент непрямолинейности, наличие протяженных преград, дефицит связности);
- средние скорости передвижения автотранспортных средств по городу (коэффициент перепробега, загрузка улично-дорожной сети)
- особенности распределения по территории города жителей и мест приложения труда (связанность территории по населению и рабочим местам, обеспеченность населения рабочими местами)

Рассмотренные показатели позволяют определить территории, в первую очередь нуждающиеся в проведении мероприятий по развитию транспортной инфраструктуры (дорожно-мостовое строительство) или изменению спроса со стороны населения на услуги транспорта (застройка территории), а также произвести оценку планируемых мероприятий.

Показатели были вычислены с использованием транспортной модели, описанной в работе [1].

## Список литературы

1. Воробьев А.Э., Титов А.Ю., Гаврилин В.А., Меньшутин А.Ю., Бахирев И.А. Транспортная модель Московского региона // Вычислительные технологии в естественных науках. Методы суперкомпьютерного моделирования. Часть 3. М.: ИКИ РАН, 2015. С. 49–62.

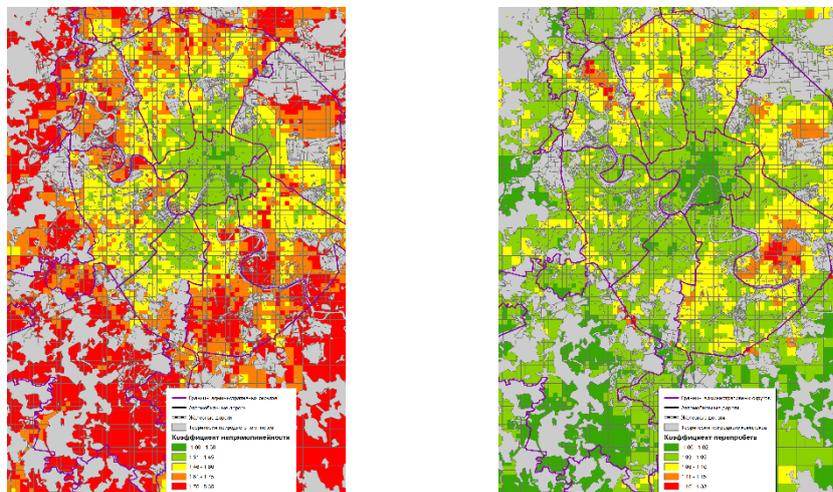


Рис. 1. Коэффициент непрямолинейности и перепробега.

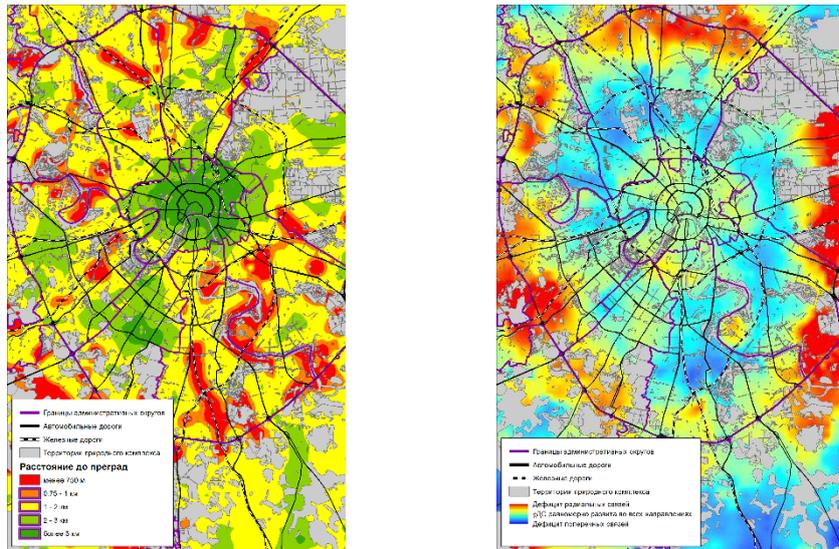


Рис. 2. Протяженные преграды и дефицит связности.

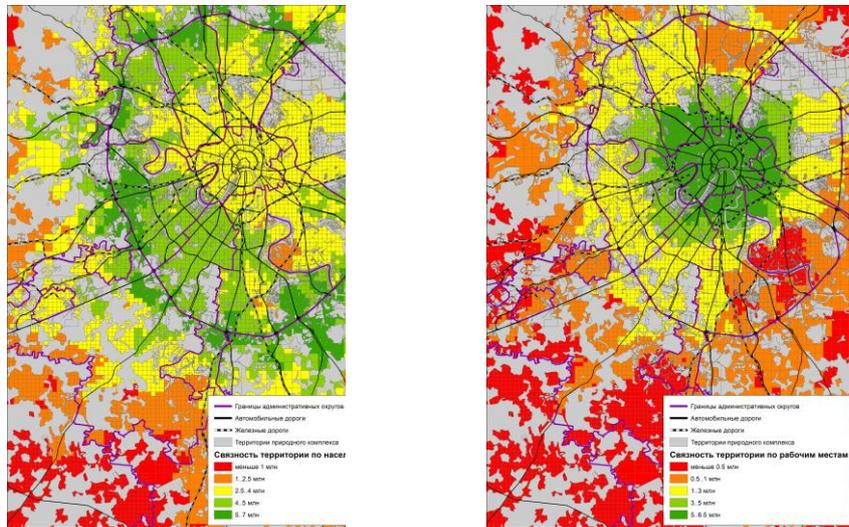


Рис. 3. Связанность территории по населению и рабочим местам.

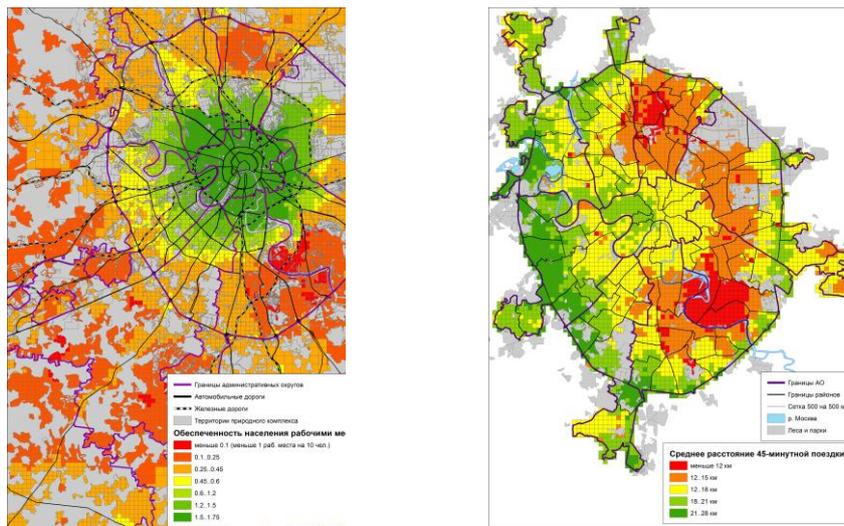


Рис. 4. Обеспеченность населения рабочими местами и загрузка улично-дорожной сети.

## Пример задачи композитной сильно выпуклой оптимизации, когда выгодно работать не с евклидовой прокс-структурой

*Гасников А.В. (ПреМоЛаб ФУПМ МФТИ, ИППИ)*

*Грищенко Д.И. (ММОС ВШЭ)*

*Мендель М.С. (ПреМоЛаб ФУПМ МФТИ)*

Рассмотрим следующую задачу выпуклой композитной оптимизации [1, 2], возникающей, например, при поиске стохастических равновесий в моделях распределения транспортных потоков по сети [3]

$$F(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \mu \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k \rightarrow \min_{\sum_{k=1}^n x_k = 1, x_k \geq 0} . \quad (1)$$

Пусть  $\mu \ll \varepsilon / (2 \ln n)$  – достаточно большое, т.е. сильную выпуклость композита в 1-норме необходимо учитывать.

Выберем норму в прямом пространстве  $\| \cdot \| = \| \cdot \|_1$ . Введем прокс-функцию (см., например, [2, 4])

$$d(x) = \frac{1}{2(a-1)} \|x\|_a^2, \quad a = \frac{2 \ln n}{2 \ln n - 1}. \quad (2)$$

Для решения задачи (1) (понимаемой как задача композитной оптимизации) будем использовать быстрый градиентный метод Ю.Е. Нестерова (БГМ) распространенный на сильно выпуклый случай с помощью техники рестартов с прокс-функцией, задаваемой (2) [5]. Несложно показать, что сложность выполнения одной итерации (дополнительная к вычислению градиента гладкой части функционала  $O(mz(A))$ ) определяется тем, насколько эффективно можно решить следующую задачу

$$\tilde{F}(x) = \langle c, x \rangle + \|x\|_a^2 + \mu \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k \rightarrow \min_{x \in S_n(1)} . \quad (3)$$

Задачу (3) удобно переписать следующим почти “сепарабельным” образом

$$\langle c, x \rangle + t + \mu \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k \rightarrow \min_{\substack{x \in S_n(1), \|x\|_a^2 \leq t^{a/2}, \\ 0 \leq t \leq n^{2/a}, 0 \leq x_k \leq 1, k=1, \dots, n}}$$

Слово “почти” можно убрать, если с помощью метода множителей Лагранжа переписать задачу следующим образом

$$\tilde{G}(\lambda) = \min_{\substack{0 \leq t \leq n^{2/a}, \\ 0 \leq x_k \leq 1, k=1, \dots, n}} \left\{ \sum_{k=1}^n c_k x_k + t + \lambda_1 \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k - 1 \right) + \lambda_2 \cdot \left( \sum_{k=1}^n x_k^a - t^{a/2} \right) + \mu \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k \right\} \rightarrow \max_{\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \geq 0} . \quad (4)$$

Поиск минимума  $(x(\lambda), t(\lambda))$ , где

$$t(\lambda) = \min \left\{ \left( \frac{\lambda_2 a}{2} \right)^{\frac{2}{2-a}}, n^{\frac{2}{a}} \right\},$$

сводится к решению  $n$  одномерных задач сильно выпуклой оптимизации на отрезке  $[0, 1]$ . Таким образом, если задаться некоторой точностью  $\sigma > 0$ , то за время  $O(n \ln(n/\sigma))$  методом деления отрезка

пополам (или, скажем, методом золотого сечения) можно найти такой  $\tilde{x}^\sigma(\lambda)$ , что

$$\|\tilde{x}^\sigma(\lambda) - x(\lambda)\|_1 = O(\sigma). \quad (5)$$

Далее попробуем оценить “запас” в условии Слейтера, чтобы, исходя из этого, оценить сверху размер решения  $\lambda = \lambda_*$  двойственной задачи (4) (в приводимой далее выкладке, приводящей к формуле (6), для упрощения записи мы опускаем нижний индекс “\*” у  $\lambda$ ). Из сильной двойственности имеем

$$-\|c\|_\infty - \mu \ln n \leq \tilde{F}_* = \tilde{G}_* \leq \sum_{k=1}^n c_k \bar{x}_k + \bar{t} + \lambda_1 \cdot \left( \sum_{k=1}^n \bar{x}_k - 1 \right) + \lambda_2 \cdot \left( \sum_{k=1}^n \bar{x}_k^a - \bar{t}^{a/2} \right) + \mu \sum_{k=1}^n \bar{x}_k \ln \bar{x}_k$$

Если  $\lambda_1 \geq 0$ , то положим  $\bar{t} = 1$ ,  $\bar{x}_k = 1/(2n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\frac{1}{2} \lambda_1 + \frac{1}{2} \lambda_2 \leq 2\|c\|_\infty + 2\mu \ln(n) + 1,$$

Если  $\lambda_1 < 0$ , то положим  $\bar{t} = 8$ ,  $\bar{x}_k = 2/n$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Тогда

$$|\lambda_1| + \lambda_2 \leq 3\|c\|_\infty + 2\mu \ln(2n) + 8.$$

В любом случае, с хорошим запасом можно гарантировать, что

$$\|\lambda_*\|_1 \leq 4\|c\|_\infty + 4\mu \ln(2n) + 8 \stackrel{def}{=} C. \quad (6)$$

Таким образом, чтобы решить задачу (3), мы должны решить двойственную задачу (4), которую (в виду формулы (6)) можно переписать следующим образом

$$\tilde{G}(\lambda) = -\tilde{G}(\lambda) \rightarrow \min_{\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \geq 0, \|\lambda\|_1 \leq C}. \quad (7)$$

Поскольку эта задача оптимизации на двумерной плоскости (т.е. в пространстве малой размерности), то ее можно решать, скажем, методом эллипсоидов [6]. При этом для расчета градиента  $\tilde{G}(\lambda)$  мы должны решить задачу (3) и воспользоваться формулой Демьянова–Данскина

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \lambda_1} = 1 - \sum_{k=1}^n x_k(\lambda), \quad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \lambda_2} = t(\lambda)^{a/2} - \sum_{k=1}^n x_k(\lambda)^a.$$

К сожалению, точно решить задачу (4) мы не можем, зато можем найти приближенное значение градиента. Точнее говоря, в виду (5), (6), мы можем найти для задачи (7)  $\delta = O(C\sigma)$ -градиент  $\nabla_\delta G(\lambda)$  (см., например, [6]). Если использовать в методе эллипсоидов в пространстве размерности  $r$  (в нашем случае  $r = 2$ ) вместо градиента  $\delta$ -градиент (чаще говорят  $\delta$ -субградиент, но в нашем случае можно говорить о градиенте), то имеют место следующие оценки [6]

$$\tilde{G}(\lambda^N) - \tilde{G}_* \leq \varepsilon, \quad N = O(r^2 \ln(C/\varepsilon)), \quad \delta \leq O(\varepsilon), \quad (8)$$

При этом стоимость одной итерации будет  $O(r^2)$ . В нашем случае стоимость одной итерации будет  $O(n \ln(nC/\varepsilon))$ .

Однако решение задачи (4) (или (7)), в смысле (8) еще не гарантирует возможность точного восстановления решения задачи (3). Для того чтобы показать, что метод эллипсоидов с той же по порядку точностью  $\varepsilon$  позволяет восстанавливать (без каких бы то ни было существенных дополнительных затрат) решение задачи (3) нужно воспользоваться прямо-двойственностью этого метода [7]. В виду компактности множества

(единичный симплекс), на котором ведется оптимизация в прямом пространстве и сильной выпуклости функционала прямой задачи (3) мы не просто восстанавливаем из прямо-двойственной процедуры метода эллипсоидов решение задачи (3) с точностью по функционалу (прямой задачи) порядка  $\varepsilon$ , но и делаем это в нужном нам более сильном смысле – см. п. 5.5.1 (следует сравнить с п. 4.6 [8] и п. 2 выше). Формула 5.5.15 [2] гарантирует при этом справедливость следующего результата.

**Теорема.** Для задачи (1) БГМ с рестартами и с прокс-функцией (2) [5] приводит к необходимости на каждой итерации наряду с расчетом градиента гладкой части функционала ( $O(nnz(A))$  операций) два раза решать задачу типа (3) с помощью перехода к двойственной задаче и ее решения с помощью прямо-двойственной версии метода эллипсоидов ( $O(n \ln(C/\varepsilon) \ln(nc/\varepsilon))$  операций). При этом

$$F(y^N) - F_* \leq \varepsilon,$$

если общее число итераций (обращений к оракулу за градиентом)

$$N = O \left( \sqrt{\frac{\max_{k=1, \dots, n} \|A^{(k)}\|_2^2 \ln n}{\mu}} \left\lceil \ln \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right) \right\rceil \right).$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 15-31-20571-мол\_а\_вед, 15-31-70001 мол\_а\_мос.

## Литература

1. *Nesterov Yu.* Gradient methods for minimizing composite functions // *Math. Prog.* 2013. V. 140. № 1. P. 125–161.
2. *Nemirovski A.* Lectures on modern convex optimization analysis, algorithms, and engineering applications. Philadelphia: SIAM, 2013.  
[http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/Lect\\_ModConvOpt.pdf](http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/Lect_ModConvOpt.pdf)
3. *Гасников А.В., Гасникова Е.В., Двуреченский П.Е., Ершов Е.И., Лагуновская А.А.* Поиск стохастических равновесий в транспортных моделях равновесного распределения потоков // *Труды МФТИ.* 2015. Т. 7. № 4. С. 114–128. [arXiv:1505.07492](https://arxiv.org/abs/1505.07492)
4. *Juditsky A., Nesterov Yu.* Deterministic and stochastic primal-dual subgradient algorithms for uniformly convex minimization // *Stoch. System.* 2014. V. 4. no. 1. P. 44–80.
5. *Гасников А.В., Камзолов Д.И., Мендель М.С.* Основные конструкции над алгоритмами выпуклой оптимизации и их приложения к получению новых оценок для сильно выпуклых задач // *Труды МФТИ.* 2016. Т. 8. (в печати) [arXiv:1603.07701](https://arxiv.org/abs/1603.07701)
6. *Немировский А.С., Юдин Д.Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979.
7. *Nemirovski A., Onn S., Rothblum U.G.* Accuracy certificates for computational problems with convex structure // *Mathematics of Operation Research.* 2010. V. 35. № 1. P. 52–78.
8. *Devolder O.* Exactness, inexactness and stochasticity in first-order methods for large-scale convex optimization. CORE UCL, PhD thesis, March 2013.

# Композитный прямо-двойственный быстрый градиентный метод с адаптивным подбором константы Липшица градиента\*

А.В. Гасников<sup>1,2</sup>, П.Е. Двуреченский<sup>3,2</sup>, С.В. Мациевский<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Берлин, Германия,

<sup>4</sup>Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия

Рассматривается задача выпуклой композитной оптимизации

$$F(x) = f(x) + h(x) \rightarrow \min_{x \in Q}, \quad (1)$$

где функция  $f(x)$  предполагается гладкой (с Липшицевым градиентом в 2-норме – однако не предполагается, что константа Липшица градиента равномерно ограничена на  $Q$ ), выпуклое множество  $Q$  считается неограниченным. В приложениях [9], в которых планируется использовать предлагаемый метод, множество  $Q$  совпадает со всем пространством, либо является прямым произведением пространства на неотрицательный ортант.

Введем два оператора

$$\text{Grad}_{f,h}^L(x^{k+1}) = \arg \min_{x \in Q} \bar{F}(x; x^{k+1}),$$

$$\bar{F}(x; x^{k+1}) = f(x^{k+1}) + \langle \nabla f(x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle + \frac{L}{2} \|x - x^{k+1}\|_2^2 + h(x),$$

$$\text{Mirr}_{f,h,z^k}^\alpha(\nabla f(x^{k+1})) = \arg \min_{x \in Q} \left\{ \langle \nabla f(x^{k+1}), x - z^k \rangle + \frac{1}{\alpha} \|x - z^k\|_2^2 + h(x) \right\}.$$

Определим две числовые последовательности  $\{\alpha_k, \tau_k\}$ :

$$\alpha_1 = \frac{1}{L_1}, \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{2L_{k+1}} + \sqrt{\frac{1}{4L_{k+1}^2} + \alpha_k^2 \frac{L_k}{L_{k+1}}}, \quad \tau_k = \frac{1}{\alpha_{k+1} L_{k+1}}.$$

Заметим, что при  $k \geq 1$  справедливо  $\alpha_k \leq k$ ,  $\tau_k \leq k^{-1}$ .

Опишем вариант быстрого градиентного метода Ю.Е. Нестерова в форме Ален-Зу-Оречиа [10]. Здесь мы распространяем подход работы [10] на задачи композитной оптимизации и не предполагаем известность и равномерную ограниченность константы Липшица градиента гладкой части функционала. Фактически предложенный далее алгоритм есть сочетание БГМ работы [10] и конструкции композитной оптимизации с адаптивным подбором константы Липшица гладкой части градиента функционала работы [1].

$$\text{БГМ}(x^0 = y^0 = z^0; L_0 = 1, k = 0)$$

1. Положить  $x^{k+1} = \tau_k z^k + (1 - \tau_k) y^k$ .

2. Положить  $L_{k+1} := L_k / 2$ . До тех пор пока

$$F(\text{Grad}_{f,h}^{L_{k+1}}(x^{k+1})) > \bar{F}(\text{Grad}_{f,h}^{L_{k+1}}(x^{k+1}); x^{k+1})$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-31-20571-мол\_a\_вед)

Выполнять  $L_{k+1} := 2L_{k+1}$ .

Положить  $y^{k+1} = \text{Grad}_{f,h}^{L_{k+1}}(x^{k+1})$ .

3. Положить  $z^{k+1} = \text{Mirr}_{f,h,z}^{\alpha_{k+1}}(\nabla f(x^{k+1}))$ .

4. Если не выполняется критерий останова (можно по-разному определять), положить  $k := k+1$  и перейти к шагу 1. Иначе остановиться и выдать  $y^{k+1}$ .

Следующая теорема является новой. Нам неизвестны работы, в которых бы устанавливалось что-то подобное даже для обычного БГМ (не в композитном варианте и с известной константой Липшица градиента).

**Теорема 1.** Для любого  $k = 0, \dots, N$  имеет место неравенство

$$\max \left\{ \|x^k - x_*\|_2, \|y^k - x_*\|_2, \|z^k - x_*\|_2 \right\} \leq \|x^0 - x_*\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} R,$$

где  $x_*$  – решение задачи (1) (если  $x_*$  не единственно, то оно выбирается так, что  $R$  имеет минимальное значение).

Новизна следующей теоремы заключается в том, как определяются  $R$  (см. теорему 1) и  $L$  (см. (2)), входящие в оценку скорости сходимости (3). Также мы формализуем “фольклорное” знание о том, что любой “разумный” вариант БГМ является прямо-двойственным методом. В данном случае это выражается неравенством (4).

**Теорема 2.** Пусть гладкая часть функционала задачи (1) обладает свойством

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2 \leq L\|y - x\|_2, \quad x, y \in B_r(x_*). \quad (2)$$

Тогда БГМ генерирует такую последовательность точек  $\{x^k, y^k, z^k\}_{k=0}^N$ , что имеют место следующие неравенства ( $F_*$  – оптимальное значение в задаче (1))

$$F(y^N) - F_* \leq \frac{4LR^2}{(N+1)^2}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_N^2 L_N F(y^N) \leq \\ & \leq \min_{x \in Q} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \left\{ f(x^{k+1}) + \langle \nabla f(x^{k+1}), x - x^{k+1} \rangle + h(x) \right\} + \frac{1}{2} \|x - x^0\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

**Замечание.** Можно восстановить с помощью предложенного здесь варианта БГМ результаты глав 4 – 7 [12] и статьи [13]. В частности, на базе описанного в данной статье варианта БГМ можно предложить промежуточный градиентный метод (глава 6 [12]) – для этого потребуется поменять способ выбора  $\alpha_k \propto k^p$ ,  $p \in [0, 1]$ . Также можно предложить и универсальный градиентный метод [13]. Недостаток описанного варианта БГМ заключается в том, что в доказательстве теоремы 1 существенным образом используется то, что была выбрана евклидова прокс-структура (2-норма).

#### Список литературы

9. Гасников А.В., Гасникова Е.В., Мациевский С.В., Усик И.В. О связи моделей дискретного выбора с разномасштабными по времени популяционными играми загрузок // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 4. С. 129–142. [arXiv:1511.02390](https://arxiv.org/abs/1511.02390)
10. Allen-Zhu Z., Orecchia L. Linear coupling: An ultimate unification of gradient and mirror descent // e-print, 2014. [arXiv:1407.1537](https://arxiv.org/abs/1407.1537)
11. Nesterov Yu. Gradient methods for minimizing composite functions // Math. Prog. 2013. V. 140. № 1. P. 125–161.
12. Devolder O. Exactness, inexactness and stochasticity in first-order methods for large-scale convex optimization. CORE UCL, PhD thesis, March 2013.

13. Гасников А.В., Двуреченский П.Е. Стохастический промежуточный метод для задач выпуклой оптимизации // ДАН РАН. 2016. Т. 467. № 2. С. 131–134.
14. Nesterov Yu. Universal gradient methods for convex optimization problems // Math. Prog. 2015. V.152. №1-2. P. 381–404; CORE Discussion Paper 2013/63. 2013.

## Об энтропийной регуляризации транспортной задачи линейного программирования\*

А.В. Гасников<sup>1,2</sup>, П.Е. Двуреченский<sup>3,2</sup>, А.Л. Суворикова<sup>1,2,6</sup>, А.В. Чернов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет), Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Берлин, Германия,

<sup>4</sup>The International Research Training Group 1792, Берлин, Германия

В работе [1] был предложен прямо-двойственный метод решения задач оптимизации с сепарабельными сильно выпуклыми функционалами при аффинных ограничениях, в частности, задачи энтропийно-линейного программирования (ЭЛП). В данной заметке мы сравниваем подход работы [1] с методом балансировки [2] (говорят также методом Шелейховского, Брегмана, Брегмана–Шелейховского [2, 3], Синхорна [4, 5]) на примере задачи расчета матрицы корреспонденций по энтропийной модели [3]:

$$f_\gamma(x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij} + \gamma \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \ln x_{ij} \rightarrow \min_{\substack{\sum_{j=1}^n x_{ij}=L_i, \sum_{i=1}^n x_{ij}=W_j \\ i,j=1,\dots,n; x \in S_n(1)}} . \quad (1)$$

Если  $\gamma \rightarrow 0+$ , то рассматриваемая задача ЭЛП переходит в классическую транспортную задачу ЛП, которая в общем случае решается за  $O(n^3 \ln n)$  арифметических операций [6], причем данная оценка не улучшаема [7]. Соответствующая же задача ЭЛП (1) при не малых  $\gamma > 0$  может быть решена намного эффективнее методом Синхорна [5, 8]. Однако если первоначальной целью было решение задачи (1) с  $\gamma = 0$ , т.е. транспортной задачи ЛП (такие задачи возникают при расчете барицентра Вассерштейна дискретных вероятностных мер [5]), то тогда в регуляризованной задаче (1) параметр  $\gamma$  будет малым.

**Утверждение 1.** Если  $\gamma = \varepsilon / (4 \ln n)$ , то из того что

$$f_\gamma(x^N) - f_\gamma^* \leq \varepsilon / 2, \text{ следует } f_0(x^N) - f_0^* \leq \varepsilon.$$

Другая причина малости  $\gamma$ , например, может быть связана с “физическими” особенностями задачи расчета матрицы корреспонденций [3].

В любом случае, если параметр  $\gamma$  мал, то теоретические оценки чувствительности к этому параметру времени работы метода балансировки [4] дают:

$$\square n^2 \max_{i,j,p,q=1,\dots,n} \exp\left(\frac{1}{2\gamma}(c_{iq} + c_{pj} - (c_{ij} + c_{pq}))\right) \ln\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right), \quad (2)$$

в то время как для методов из работ [1, 8] время работы:

$$\square n^2 \sqrt{\frac{nR^2}{\gamma\varepsilon}}, \quad (3)$$

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-31-70001 мол\_a\_мос)

где  $R$  – евклидов размер решения двойственной задачи для (1). Известно (см., например, [8]), что оценка (2) сильно завышена, в то время как оценка (3) неплохо соответствует реальным трудозатратам. В связи с этим замечанием возникла задача (решаемая в данной работе) определения реального порога  $\gamma^*$ , зависящего от параметров задачи, меньше которого метод из работы [1] доминирует метод Синхорна (балансировки).

Полученные здесь результаты планируется использовать в связи с расчетом равновесий в многостадийных транспортных моделях и в связи с расчетом барицентров Вассерштейна [9, 10].

Заметим, что в цикле работ Марко Кутюри с соавторами [5], посвященных расчетам расстояния Вассерштейна между двумя вероятностными мерами с помощью энтропийного сглаживания (1) и метода Синхорна, вопрос о малости параметра  $\gamma$  не стоял. На наш вопрос о том, как ищется настоящее расстояние Вассерштейна, было дано два ответа. Первый ответ заключался в том, что во многих приложениях можно вполне довольствоваться и энтропийно сглаженными расстояниями не борясь за то, чтобы была аппроксимация согласно утверждению 1. Второй ответ касался ситуации, когда все же необходимо считать  $\gamma$  малым. В этом случае предлагался проксимальный подход (с фиксированным не малым  $\gamma$ )

$$x^{k+1} = \text{Prox}(x^k) = \arg \min_{\substack{\sum_{j=1}^n x_{ij} = L_i, \sum_{i=1}^n x_{ij} = W_j \\ i, j = 1, \dots, n; x \in S_n^+(1)}} \left\{ \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \gamma \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \ln(x_{ij}/x_{ij}^k) \right\}. \quad \text{К сожалению,}$$

теоретические гарантии скорости сходимости такого метода не выше, чем у градиентного метода [11] (простая схема рассуждений в евклидовом случае имеется в доказательстве теоремы 5 параграфа 1 главы 6 [11]).

Таким образом, в режиме утверждения 1 ни один из двух рассматриваемых методов по теоретическим оценкам не должен доминировать обычный симплекс-метод решения транспортной задачи ЛП. В настоящей работе мы проверяем, в какой степени этот тезис имеет место на практике.

#### Список литературы

1. Аникин А.С., Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Тюрин А.И., Чернов А.В. Двойственные подходы к задачам минимизации сильно выпуклых функционалов простой структуры при аффинных ограничениях // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. (подана arXiv:1602.01686)
2. Fang S.-C., Rajasekera J.R., Tsao H.-S.J. Entropy optimization and mathematical programming. Kluwer's International Series, 1997.
3. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013. 427 стр., 2-е изд.
4. Franklin J., Lorenz J. On the scaling of multidimensional matrices // Linear Algebra and its applications. 1989. V. 114. P. 717–735.
5. Cuturi M. Personal page <http://www.iip.ist.i.kyoto-u.ac.jp/member/cuturi/>
6. Ahuja R.K., Magnati T.L., Orlin J.B. Network flows: Theory, algorithms and applications. Prentice Hall, 1993.
7. Pele O., Werman M. Fast and robust earth mover's distances. In ICCV'09, 2009. <http://www.cs.huji.ac.il/~werman/Papers/ICCV2009.pdf>
8. Гасников А.В., Гасникова Е.В., Нестеров Ю.Е., Чернов А.В. Об эффективных численных методах решения задач энтропийно-линейного программирования // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. № 4. С. 17–28. arXiv:1410.7719
9. Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Камзолов Д.И., Нестеров Ю.Е., Спокойный В.Г., Стецюк П.И., Суворикова А.Л., Чернов А.В. Поиск равновесий в многостадийных транспортных моделях // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 4. С. 143–155.
10. Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Спокойный В.Г., Стецюк П.И., Суворикова А.Л. Суперпозиция метода балансировки и универсального градиентного метода для поиска энтропийно-сглаженного барицентра Вассерштейна и равновесий в многостадийных моделях транспортных потоков // Труды МФТИ. 2016. Т. 8. (в печати) arXiv:1506.00292
11. Rockafellar R.T., Wets J.-B. Variational analysis. Springer-Verlag, 1998.
12. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983

## Обобщение задачи Нестерова-де Пальмы

Ф.Ш. Гулиев, Д.И. Камзолов  
МФТИ, Москва, Россия

В работе рассматривается задача Нестерова-де Пальмы. Из жилого района в рабочий район утром должны отправляться  $N$  автомобилей. Водитель каждого автомобиля хочет приехать ровно к  $T_0$  часам утра в рабочий район. При этом минута опоздания стоит  $\alpha$ , минута в пути стоит  $\gamma$ , а, если водитель приехал раньше времени, то в ожидании каждая минута стоит  $\beta$ . Время в пути по свободной дороге занимает  $T$ . Но на середине дороги есть узкое место, пропускная способность которого ограничена  $R$  автомобилей в час. Требуется найти равновесное распределение по времени выезда из жилого района  $n(t)$ .

### Решение

Так как распределение равновесное, то для каждого водителя функция затрат одинакова. Сначала найдём время выезда первого и последнего водителя. Очевидно, что с момента первого прохода через перешеек, перешеек будет использоваться до последнего автомобиля, так как распределение равновесное, а потери и для первого водителя, и для последнего водителя одинаковы.

$$\begin{aligned} T_s &= T_0 - a \\ T_e &= T_0 - a + \frac{N}{R} \\ T * \gamma + (a - T) * \beta &= T * \gamma + \left(\frac{N}{R} - a + T\right) * \alpha \\ a &= T + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} * \frac{N}{R} \\ T_s &= T_0 - T - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} * \frac{N}{R} \\ T_e &= T_0 - T + \frac{\beta}{\alpha + \beta} * \frac{N}{R} \end{aligned}$$

Во время движения водители либо опаздывают, либо приезжают раньше, либо приезжают вовремя. Найдём время выезда водителя, приехавшего вовремя. В дальнейшем будем называть данного водителя особым. Так же, как и в прошлый раз, выигрыш для любого водителя одинаков.

$$\begin{aligned} (T_0 - T_i) * \gamma &= T * \gamma + \frac{\alpha * \beta}{\alpha + \beta} * \frac{N}{R} \\ T_i &= T_0 - T - \frac{\alpha * \beta}{\gamma * (\alpha + \beta)} * \frac{N}{R} \end{aligned}$$

Найдём распределение машин, проехавших до и после особого водителя. Распределение водителей остаётся равномерным на этих участках времени. Это и будет искомым распределением машин.

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{(T_0 - T - T_s) * R}{T_i - T_s} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} * N}{\frac{\alpha * (\gamma - \beta)}{\gamma * (\alpha + \beta)} * \frac{N}{R}} = \frac{R}{1 - \frac{\beta}{\gamma}} \\ n_2 &= \frac{N - (T_0 - T - T_s) * R}{T_e - T_i} = \frac{\frac{\beta}{\alpha + \beta} * N}{\frac{\beta * (\gamma + \alpha)}{\gamma * (\alpha + \beta)} * \frac{N}{R}} = \frac{R}{1 + \frac{\alpha}{\gamma}} \end{aligned}$$

Окончательным ответом получаем

$$n(t) = \begin{cases} 0, & t < T_s \\ n_1, & T_s \leq t < T_i \\ n_2, & T_i \leq t < T_e \\ 0, & T_e \leq t \end{cases}$$

## Обобщённая постановка задачи и поиск динамики

Обобщим постановку. Устремим число водителей к бесконечности континуальным образом. Узкое место может пропускать долю водителей  $R$  в час. Требуется найти динамику водителей, которой они будут пользоваться изо дня в день и узнать сходится ли она к равновесному распределению. Задача является Марковским процессом.

Будем рассматривать только поведение игроков в точках, где находятся континуальное количество игроков, так как поведение остальных игроков будет иметь меру нуль.

Пусть  $f_0(x)$  – функция плотности игроков по времени в прошедшем дне, а  $F_0(x)$  – функция распределения игроков. Договоримся, что функция  $f_0(x)$  – финитная по времени, так как процессы, сопровождающие работу, не могут выйти за рамки одного дня. Носителем такой функции пусть будет вложен в отрезок  $[a; b]$ . Разобьём отрезок на  $n$  окрестностей различных точек (способ разбиения будет изучаться в будущем). Например, окрестность точки  $x_k$  –  $[a_k; b_k]$ . Фактически нам нужно найти преобразование  $S: f_0(x) \rightarrow f_1(x)$ .

Интуитивно ясно, что на выбор дальнейшего поведения играют следующие факторы: готовность изменить тактику у игрока, длина промежутка между старым и потенциальным временем выезда, и выигрыш участников в потенциальной стратегии в прошедший день.

Рассмотрим окрестность точки  $x_0$ . Какое бы распределение  $g(x)$  игроков, которые находились в данной окрестности, мы не сделали, оно должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\int_a^b g(x, x_0) = F_0(b_0) - F_0(a_0). \quad (1)$$

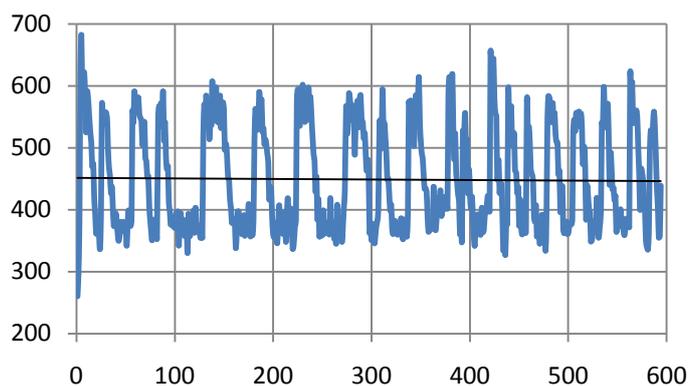
Предположим, что игроки будут нормально распределяться. Причём для разного направления от точки  $x_0$  будет распределение с разными характеристиками. В качестве математического ожидания возьмём  $x_0$ . В качестве среднеквадратического отклонения расстояние от  $x_0$  до конца отрезка области определения в выбранном направлении (в зависимости от направления характеристики будут различаться). Промасштабируем нашу функцию, так как область определения нашего распределения ограничена. Для этого вспомним правило одной сигмы, что, приблизительно с вероятностью 0,682 значение нормально распределенной случайной величины лежит в отрезке от  $(\mu - \sigma)$  до  $(\mu + \sigma)$ , где  $\mu$  – математическое ожидание,  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение. Значит коэффициент, на который нужно умножить будет равен  $\frac{1}{0,682} = 1.466$ . Также не забудем про (1). К зависимости от направления, добавим множитель прямо пропорциональный расстоянию от  $x_0$  до конца отрезка области определения в выбранном направлении. В результате получим следующее распределение:

$$g(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1.466 * e^{\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2(x_0-a)^2}\right)}}{(b-a)\sqrt{2\pi}} * (F_0(b_0) - F_0(a_0)), & x < x_0 \\ \frac{1.466 * e^{\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2(b-x_0)^2}\right)}}{(b-a)\sqrt{2\pi}} * (F_0(b_0) - F_0(a_0)), & x \geq x_0. \end{cases}$$

## Численные эксперименты

Нами были проведены численные эксперименты к основной постановке. При этом в модель каждого водителя было заложено, что он не любит рисковать и только с некоторой вероятностью поменяет свое решение, также со временем эта вероятность уменьшается.

Целью эксперимента была проверка сходимости к равновесию, является ли оно устойчивым. Было проверено, что даже при небольшом возмущении система выходит из равновесия. Но результат состоит в том, что она начинает колебаться около положения равновесия. (см. график) Также в смысле сходимости в среднем, мы сходимся к равновесию.



## К проблеме анализа модели движения в городских транспортных потоках

А.Г. Коваленко, А.Д. Иванова  
СГАУ имени академика С.П. Королева

(национальный исследовательский университет), Самара, Россия

В статье предлагается модель исследования дорожной сети города, в основу которой положены методы теории игр [1] и теории гидравлических сетей. [2]

Представим структуру движения транспорта в городе [3] как ориентированный граф, узлами которого являются множество точек выезда и въезда, перекрестки дорог. Узлы соединены ориентированными дугами (соответствуют полосам движения) с заданными на них параметрами ( $\rho$  и  $\rho_{max}$  - соответственно плотность и максимальная плотность

транспорта на полосе,  $w$  и  $w_{max}$  - соответственно скорость и максимальная скорость движения транспорта,  $x$  - величину потока) и зависимостями движения потока [4]

$\rho / \rho_{max} + w / w_{max} = 1$ ,  $x = w \rho_{max} (1 - w / w_{max})$ . Будем считать, поток состоит из отдельных токов, характеризующихся одним путем движения в конечный узел – сток. Транспортные единицы тока одинаковые и двигаются равномерно, скорость движения этих единиц на различных дугах может быть различна. В какой мере ток можно представить собой движущуюся организованную бесконечную колонну. Весь поток состоит из множества отдельных токов, суммарная величина образующихся потоков из узла  $i$  в узел  $j$  обозначим через  $Q_{ij}$ . Пути токов, входящих в  $Q_{ij}$ , вообще говоря, различные. Будем считать, что каждым ток управляет субъект, который организует движение этого тока.

Множество всех таких субъектов образуют множество игроков  $I$ . Для каждого игрока  $\gamma \in I$  стратегией  $\xi_\gamma$  является путь от источника  $i$  в сток  $j$  из множества всех стратегий - путей  $\chi_\gamma$ , соединяющих эти узлы. Критерием каждого субъекта является время движения из  $i$  в  $j$ , его цель минимизировать время движения каждой транспортной единицы, а значит и всех транспортных единиц тока. На значение этого критерия влияют другие игроки, путь которых пересекается с путем игрока  $\gamma$ . На пересекающихся участках они увеличивают плотность потока, тем самым, уменьшая скорость движения и соответственно увеличивая время. В результате мы получаем игру в нормальной форме по Нэшу. Под равновесием в этой игре будем понимать равновесие по Нэшу [1]

Пусть в графе дорожной сети  $G = \langle E, V, H \rangle$  каждой дуге  $v \in V$  поставлено в соответствие отображение  $H(v) = (h1(v), h2(v))$ , где  $h1(v)$  – начало дуги  $v$ ,  $h2(v)$  – конец. Пусть  $V^+(i) = \{v \in V \mid h2(v) = i\}$  - множество дуг, входящих в узел  $i$ ,  $V^-(i) = \{v \in V \mid h1(v) = i\}$  - множество дуг, выходящих из узла  $i$ .

Пусть  $i_0$  некоторый узел, являющейся стоком потока. Выделим подсеть, для которых этот узел является стоком. Для  $i_0$  потоки, входящие в узлы  $i \in E$ , обозначим  $q_i(i_0)$ . Совокупность  $S(i_0) = \langle G; i_0; q(i_0), i \in E; x_v \in V \rangle$  будем называть слоем  $i_0$ . Для каждого

выполняется балансовое соотношение (первое правило Кирхгофа) теории гидравлических сетей

$$\sum_{v \in V^+(i)} x_v(i_0) - \sum_{v \in V^-(i)} x_v(i_0) = q_i(i_0), \quad i \in E$$

Это равенство позволяет для каждого слоя находить допустимое решение. В работе предлагается это делать с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона. Приведение к состоянию равновесия осуществляется с помощью аналога Второго правила Кирхгофа. Суть этого правила заключается в следующем. Пусть из узла  $j$  в узел  $i_0$  имеется несколько путей движения потоков, тогда в состоянии равновесия время движения должно быть одинаковым. Это следует из того, что если время не одинаково, то поток с большего времени движения будет перенаправляться на путь с меньшим временем. Перемещение потока можно осуществлять, используя характеристическую функцию для цикла  $C$  и инвариантное преобразование потоков сети [5].

#### Список литературы

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики (учебное пособие). – М.: МАКС Пресс, 2005 г. С. 272
2. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. – М., Наука, 1985, С. 278
- 3 Коваленко А.Г., Хачатуров В.Р., Раимжанов Ж.Д. Методология разработки технико-экономического обоснования формирования систем инженерного обеспечения урбанизированных территорий// В трудах 3 международной научно-практической конференции «Экологическая безопасность урбанизированных территорий в условиях устойчивого развития», Астана. 2008, С.131
4. Гасников А. и др. (ред.). Введение в математическое моделирование транспортных потоков. учеб. пособие – М.: МФТИ, 2010. С. 362
5. Коваленко А. Г. Теоретико-игровой подход и теория гидравлических сетей в проблеме моделирования движения городских транспортных потоков // Вестник Самарского государственного университета. – 2013. – №. 1 С. 178

## Оптимизационные задачи однопроцессорного обслуживания объектов, образующих составы\*

Д.И. Коган<sup>1</sup>, Ю.С. Федосенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский технологический университет,  
Москва, Россия

<sup>2</sup>Волжский государственный университет  
водного транспорта, Нижний Новгород, Россия

Исследуемые проблемы возникли при создании компьютерных средств поддержки планирования и управления реализацией локальных логистических процессов и, в частности, оперативного планирования подачи под грузовую обработку речных составных судов и самоходных многосекционных составов, перемещаемых буксирами-толкачами. В рамках дискретного формализма вводятся в рассмотрение две модели обслуживания, обобщающие каноническую модель диспетчеризации [1]. В каждой из них считается известной совокупность составов, прибывающих в однопроцессорную систему обслуживания. Каждый состав состоит из ведущего объекта и объектов, подлежащих обслуживанию (ведомых объектов). В первой модели считается, что состав отправляется после того, как завершилось обслуживание всех входящих в него ведомых объектов. Во второй модели полагается, что ведомые объекты по своим характеристикам разбиваются на небольшое число типов, однотипные объекты взаимозаменяемы; состав может быть отправлен, если из совокупности обслуженных ведомых объектов можно выделить подмножество, соответствующее требуемой структуре этого состава.

В рамках модели 1 полагается, что каждый прибывающий состав  $O(s)$ ,  $s = \overline{1, h}$ , состоит из объектов  $o_{s,1}, o_{s,2}, \dots, o_{s,n(s)}$ , подлежащих однократному без прерываний обслуживанию. Через  $t_s$  обозначаем момент прибытия состава  $O(s)$ , при этом  $0 = t_1 \leq \dots \leq t_2 \leq \dots \leq t_h$ . В момент  $t = 0$  процессор считается свободным. Обслуживание поступающих объектов может выполняться в произвольном порядке.

\*Работа подготовлена при поддержке РФФИ (проект № 15-07-03141).

За время  $\Delta$  от момента прибытия до момента завершения обслуживания по составу  $O(s)$  налагается штраф  $F_s(\Delta)$ . Функция  $F_s(\Delta)$  именуется функцией индивидуального штрафа по составу  $O(s)$ ,  $s = \overline{1, h}$ . Полагаем все функции  $F_s(\Delta)$  неубывающими. Стратегия обслуживания  $\pi$  записывается как произвольная перестановка двойных индексов всех объектов, определяющая последовательность их обслуживания. Реализации стратегий считаем компактными [1]; при известной стратегии  $\pi$  для каждого объекта  $O_{s,l}$  моменты  $t_{s,l}^b(\pi)$  и  $t_{s,l}^f(\pi)$  соответственно начала и завершения обслуживания вычисляются очевидным образом. Обозначаемый через  $t_s^f(\pi)$  момент завершения обслуживания состава  $O(s)$  оказывается равным  $\max(t_{s,1}^f(\pi), t_{s,2}^f(\pi), \dots, t_{s,n(s)}^f(\pi))$ .

Возникающие базовые задачи синтеза стратегий обслуживания записываются следующим образом:

$$\text{Задача 1. } \min_{\pi} \sum_{s=1}^h F_s(t_s^f(\pi) - t_s).$$

$$\text{Задача 2. } \min_{\pi} \max_{s=1,2,\dots,h} F_s(t_s^f(\pi) - t_s).$$

Задача 3. Построить полную совокупность эффективных оценок в ситуации, когда одновременно учитываются критерии задач 1 и 2.

В модели 2 считается, что однопроцессорная система предназначена для обслуживания объектов  $k$  фиксированных типов. Число ведомых объектов в составе  $O(s)$  характеризуется вектором конфигурации  $m_s$ ,  $i$ -я координата которого – количество объектов  $i$ -го типа в данном составе,  $i = \overline{1, k}$ . Длительность обслуживания объекта  $i$ -го типа определяется как  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Каждый покидающий систему состав  $O^*(s)$  состоит из ведущего объекта  $o^s$  и нескольких ведомых, прошедших обслуживание объектов,  $s = \overline{1, h}$ . Число ведомых объектов в составе  $O^*(s)$  характеризуется вектором  $m_s^*$ , каждая  $i$ -я координата которого – количество объектов  $i$ -го типа в данном составе. Ведущим в составах  $O(s)$  и  $O^*(s)$  является один и тот же объект. Если состав  $O^*(s)$  покидает систему в момент времени  $t_s^*$ , то  $a_s(t_s^* - t_s)$  – величина штрафа по ведущему этот состав объекту  $o^s$ ; все числа  $a_s$  считаем целыми неотрицательными. Предполагается, что по состоянию на начальный момент времени  $t = 0$  в системе дополнительно находятся характеризуемая вектором  $m^0$  совокупность необслуженных объектов и характеризуемая вектором  $m^*$  совокупность объектов, которые уже прошли обслуживание. Возникающие в рамках модели 2 оптимизационные задачи  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$  по своим формулировкам аналогичны задачам 1, 2, 3 соответственно.

Для решения задач 1 – 3 (все они  $NP$ -трудны в сильном смысле) предлагается единая алгоритмическая процедура, основанная на принципе динамического программирования, включая его бикритериальную модификацию; реализуется схема прямого счета [2].

Также на принципе динамического программирования основана единая алгоритмическая процедура для задач  $1^*$ ,  $2^*$ ,  $3^*$ ; в отличие от процедуры решения задач 1 – 3 она в дополнительном предположении ограниченности числа объектов в каждом составе и ограниченности числа различных коэффициентов, определяющих функции штрафа, реализуема в полиномиально зависящем от общего числа объектов времени  $n$  времени.

#### Список литературы

1. Коган Д.И., Федосенко Ю.С. Задача диспетчеризации: анализ вычислительной сложности и полиномиально разрешимые подклассы // Дискретная математика. 1996. – Т. 8, вып. 3. С. 135-147.
2. Pinedo M.L. Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems. Springer, 2008.

## **Задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций**

А.П. Раевская, А.Ю. Крылатов  
*СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия*

Текст тезисов. В XXI веке мы все чаще сталкиваемся с проблемами на дорогах: пробки, большое количество дорожно-транспортных происшествий, растущее количество автомобилей, нехватка мест для парковки, загрязнение воздуха. Решение этих проблем требует реорганизации дорожного движения и модернизации улично-дорожной сети города, в то время как эффективная реорганизация и инфраструктурные изменения транспортной сети невозможны без достоверной информации о трафике.

Задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций получила свое развитие еще в начале 60-х годов XX века и актуальна по сей день. Среди работ наших соотечественников, следует отметить [1, 2], занимающихся математическим моделированием транспортных потоков и [3], который проводит оценку матриц корреспонденций по замерам интенсивности движения. В зарубежной литературе методам оценки и восстановления матриц корреспонденций посвящено множество статей. Одна из наиболее ярких математических моделей оценки матрицы корреспонденций является модель, предложенная в [4]. На ее базе были разработаны различные методы, в частности модель из [5], которая основана на данных, полученных с датчиков фиксации номерных знаков. В работе [6] задача оценки и восстановления матрицы корреспонденций решается как обратная к задаче поиска конкурентного равновесия Вардропа на транспортной сети из параллельных маршрутов. Полученные результаты говорят о перспективности дальнейшего развития подобных методов.

### **Список литературы**

1. Швецов В. И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11. С. 3-46.
2. Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / под ред. Гасникова А. В. М Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та. 2010. 362 с.
3. Лагерева Р. Ю. Методика оценки матриц корреспонденций транспортных потоков по данным интенсивности движения. Диссертация. Волгоград. 2007.
4. Yang H., Sasaki T., Iida Y., Asakura Y. Estimation of origin-destination matrices from link traffic counts on congested networks // Transportation Research Part B. 1992. No 26 (6). P. 417-434.
5. Castillo E., Menedez J. M., Jimenez P. Trip matrix and path flow reconstruction and estimation based on plate scanning and link observations // Transportation Research Part B. 2008. No 42. P. 455-481.
6. Крылатов А. Ю., Раевская А. П. Восстановление матрицы корреспонденций как задача обратная к равновесному распределению потоков // Процессы управления и устойчивость. 2016.

## **Задача нахождения кратчайшего пути как задача онлайн оптимизации\***

А.А. Лагуновская, Д.А. Кузнецов  
*ИМП им. Келдыша РАН, Москва, Россия,  
МФТИ(ГУ), Московская область, Россия*

В литературе по онлайн оптимизации почетное место занимает, так называемая, “Задача о выборе кратчайшего пути” (“The Shortest Path Problem”), см., например, п. 5.4 [14]. Основной результат здесь заключается в описании “оптимальной” стратегии пользователя транспортной сети (на базе алгоритма “Follow the Perturbed Leader”), из дня в день выбирающего маршрут следования, исходя из истории загрузок графа транспортной сети.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 15-31-20571 мол\_a\_вед, РФФИ 15-31-70001 мол\_a\_мос.

В литературе по равновесной теории транспортных потоков наиболее популярными являются модели равновесного распределения потоков по путям. Одной из первых (и по-прежнему наиболее популярных) моделей такого рода является модель Бекмана [2] (также называемая BMW-моделью). Современные исследования этой модели связаны с ее пониманием, как популяционной игры загрузок (как следствие, потенциальной игры [16]), поиск равновесия (Нэша) в которой сводится к задаче выпуклой оптимизации. Упомянутый эволюционный подход, в частности, приводит к изучению различных естественных динамик (наилучших ответов, репликаторов, имитационной логит динамики и др.), отражающих “нащупывание” пользователями транспортной сети равновесия [17]. Все эти динамики положительно коррелированы с антиградиентной динамикой, поэтому все они приводят в конечном итоге к одному и тому же равновесию (или в более общем случае к одному и тому же множеству равновесий). Тем не менее, возникает желание глубже разобраться с природой этих динамик; понять, чем та или иная динамика дополнительно (помимо отражения рациональности игроков/пользователей транспортной сети) примечательна.

В данной работе мы постараемся пояснить, чем примечательна имитационная логит динамика, пояснив ее связь с алгоритмом поведения “Follow the Perturbed Leader”, а точнее с переформулировкой этого алгоритма на языке современной выпуклой онлайн оптимизации: с методом зеркального спуска. Результаты численных экспериментов (смоделирована описываемая динамика поведения пользователей транспортной сети) подтверждают теоретически полученные оценки.

Доклад основан на работе [18].

#### Список литературы

14. *Lugosi G., Cesa-Bianchi N.* Prediction, learning and games. New York: Cambridge University Press, 2006.
15. *Patriksson M.* The traffic assignment problem. Models and methods. Utrecht, Netherlands: VSP, 1994.
16. *Algorithmic game theory.* Ed. N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V.V. Vazirani. Cambridge Univ. Press., 2007.
17. *Sandholm W.* Population games and Evolutionary dynamics. Economic Learning and Social Evolution. MIT Press; Cambridge, 2010.
18. *Гасников А.В., Лагуновская А.А., Морозова Л.Э.* О связи имитационной логит динамики в популяционной теории игр и метода зеркального спуска в онлайн оптимизации на примере задачи выбора кратчайшего маршрута // Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 4. С. 104–113. [arXiv:1511.02398](https://arxiv.org/abs/1511.02398)

### Задача построения расписания движения поездов между двумя станциями\*

А.А. Лазарев<sup>1234</sup>, Е.Г. Мусатова<sup>1</sup>, И.А. Тарасов<sup>12</sup>

<sup>1</sup>ИПУ РАН имени В.А. Трапезникова,

<sup>2</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова,

<sup>3</sup>МФТИ (ГУ),

<sup>4</sup>НИУ «Высшая школа экономики»,

Москва, Россия.

#### Описание задачи

Рассматривается задача построения оптимального расписания движения поездов по однопутному участку железной дороги. Имеется два множества поездов,  $N_1$  и  $N_2$ . Поезда множества  $N_1$  следуют со станции 1 на станцию 2, поезда множества  $N_2$  следуют в обратном направлении со станции 2 на станцию 1. Между станциями находится разъезд для пропуска встречных поездов. В разъезде есть главный путь для безостановочного движения поездов и один дополнительный путь для пропуска встречных поездов. Необходимо построить расписание движения поездов, т.е. установить порядок следования поездов с первой и второй станций.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 15-07-03141, № 15-07-07489)

Обзор моделей и методов железнодорожного планирования может быть найден в [1]. В работах [2-3] задача ставится как задача теории расписаний с несколькими приборами, т.е. участки пути представлены как "приборы", а поезда — как "работы". Целочисленная модель для задачи с однопутными железными дорогами может быть найдена в [4]. Для исследуемой в данной работе модели еще не было предложено точных полиномиальных алгоритмов решения.

### Метод решения

Для решения данной задачи предлагается алгоритм решения на основе метода динамического программирования. Рассматриваются две целевые функции: максимальное временное смещение и сумма взвешенных моментов прибытия поездов на станции назначения. На основе свойств расписаний в модели вводится понятие состояния поезда. Алгоритм динамического программирования последовательно решает подзадачи со всеми возможными состояниями первых поездов и количествами поездов на первой и второй станциях, начиная с минимальных значений. Трудоемкость алгоритма —  $O(n^2)$  операций, где  $n$  — количество поездов на станциях.

В дальнейшем планируется разработка алгоритмов решения для задач с другими целевыми функциями, а также с дополнительными свойствами модели, такими как интервалы доступности движения на участках пути, различные моменты поступления на станции отправления и скорости движения поездов.

### Список литературы

1. Railway track allocation: Models and methods / R.M. Lusby, J. Larsen, M. Ehrgott, D. Ryan // OR Spectr. 2011. V. 33, № 4. P. 843–883.
2. Szpigel, B. Optimal train scheduling on a single line railway / B. Szpigel // Oper Res. 1973. P. 344–351.
3. Gafarov, E.R. Two-station single-track railway scheduling problem with trains of equal speed / E.R. Gafarov, A. Dolgui, A.A. Lazarev // Computers and Industrial Engineering. 2015. V. 85, P. 260–267.
4. Railway Timetabling Using Lagrangian Relaxation / U. Brannlund, P. O. Lindberg, A. Nou et al. // Transportation Science. Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), Linthicum, Maryland, USA, 1998. apr. V. 32, № 4. P. 358–369.

## Исследование парадокса Браеса методами экспериментальной экономики для транспортной сети с асимметричными затратами\*

Д. А. Максимова<sup>1</sup>, И. С. Меньшиков<sup>1,2</sup>  
<sup>1</sup>МФТИ (государственный университет)  
<sup>2</sup>ВЦ им. А. А. Дородницына РАН, ФИЦ ИУ

В настоящее время одной из главных задач исследователей является решение транспортной проблемы крупных городов. Множество решений данной проблемы достаточно разнообразно: уменьшение количества транспортных средств, введение платных дорог и прочих платежей, расширение магистралей и строительство новых дорог. Но любое действие может привести как к положительным, так и к отрицательным результатам. Казалось бы, как строительство новой дополнительной дороги может отрицательно повлиять на значение транспортных потоков? Однако описанный эффект возможен. Данное утверждение приводит нас к теоретическому результату под названием парадокс Браеса (1968).

Исследование транспортных задач различными методами, в том числе с помощью теории игр и экспериментальной экономики, выполняется с использованием транспортной сети — ориентированного графа. Рассмотрим следующий пример [1]. Пусть корреспонденция равна 6 тыс. участников передвижения в час. Участникам необходимо добраться из пункта 1 в пункт 4, используя один из двух путей, представленных на рис. 1. Вес ребра (необходимые затраты) указан на ребре, при этом  $y_{ij}$  — число автомобилистов, выбравших данное ребро для проезда. Каждый из участников движения стремится уменьшить свои затраты, поэтому в силу симметрии, очевидно, что равновесием Нэша в

\* Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РФФИ 16-01-00633А.

данном случае является деление потоков поровну по двум имеющимся путям. Таким образом,  $x_{124} = x_{134} = 3$ , где  $x_{1k4}$  - число участников, выбравших  $k$ -ый путь, а полное время в пути  $T = 83$  мин. Кажется удивительным, но при строительстве дополнительной дороги из пункта 3 в пункт 2 увеличивается время в пути при равновесном распределении потоков. Строительство третьего пути приводит к равновесному распределению, равному  $x_{124} = x_{134} = x_{1324} = 2$ , и кажется, что общие затраты должны уменьшиться, однако, полное время в пути составляет  $T = 92$  мин. Таким образом, появление дополнительной дороги приводит к единственному равновесию Нэша, которое не является оптимальным по Парето, в этом и заключается парадокс Браеса.

В настоящее время проделано много исследований парадокса Браеса, в том числе и в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ были проведены эксперименты, участниками которых являлись студенты института. Однако в данных исследованиях изучали эффект проявления парадокса на классической транспортной сети Браеса, которая была описана выше и представлена на рис. 1. Поэтому неудивительно, что долгое время обсуждается немаловажный вопрос: многие исследователи считают, что парадокс Браеса – чисто теоретическое явление и не может проявиться в реальной транспортной системе. Данное утверждение основано на том, что классическая транспортная сеть Браеса слишком простая и с симметричными затратами на передвижения, что не соответствует реальной транспортной ситуации.

В связи с описанными выше причинами планируется проведение эксперимента, основанного на работе [2], с последующим исследованием проявления парадокса в топологически более сложной транспортной сети. По сравнению с классической сетью Браеса количество возможных путей передвижения будет увеличено до трех для первой игры и до пяти для второй игры после добавления двух мостов с нулевыми затратами перемещения по ним для участников эксперимента. Важно отметить, что затраты на перемещения по путям будут асимметричными, что также приблизит планируемый эксперимент к реальной транспортной ситуации. Для проведения игры создана программа, использующая оболочку z-Tree (университет Цюриха, Швейцария, [3]). Эксперимент планируется провести для 12 участников в три сессии и минимум по 50 периодов в каждой сессии.

Дополнительно исследуется влияние эффекта этапа социализации участников на результаты лабораторной игры. Ранее в Лаборатории экспериментальной экономики проводили исследования эффекта социализации для таких игр, как «Дилемма заключенного», «Ультимативный дележ» и других [4]. Однако изучение влияния социализации участников для практически значимого примера, связанного с транспортными потоками, будет проведено впервые.

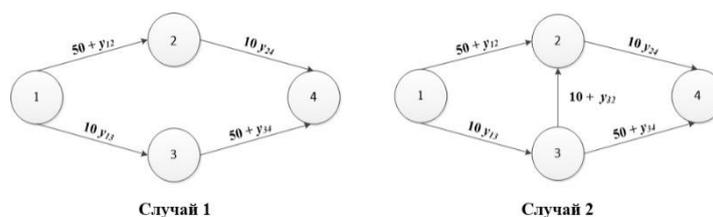


Рис. 1.

### Список литературы

1. Гасникова Е.В. Моделирование динамики макросистем на основе концепции равновесия. – дисс. к.ф.-м.н. – М.: МФТИ. – 2012. – 90 с.
2. Rapoport A., Kugler T., Dugar S., Gisches E. J. Braess Paradox in the Laboratory: Experimental Study of Route Choice in Traffic Networks with Asymmetric Costs // Decision Modeling and Behavior in Complex and Uncertain Environments. – V. 21. – 2005. -- P. 309-337.
3. Fischbacher U. z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments // Experimental Economics. - 2007. – P. 171-178.
4. Лепская М.А., Лукинова Е.М., Меньшикова О.Р., Меньшиков И.С. Влияние этапа социализации на поведение участников социально-экономического эксперимента // Труды 56-ой научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика. – Т. 1. – М.: МФТИ. -- 2013. – С. 68-69.

## Практическое применение различных транспортных моделей

Д.А. Неугодов, А.В. Прохоров, В.Л. Швецов  
A+S

Авторы не раз сталкивались с критикой классических подходов моделирования на базе так называемых статических моделей равновесного распределения потоков. На основе опыта авторов по разработке транспортных моделей для различных городов и регионов в РФ и СНГ, а также мирового опыта, можно утверждать, что при существующих недостатках этих подходов, они обладают рядом преимуществ. В докладе будут рассмотрены основные подходы к построению транспортных моделей и их практическое применение.

Выбор определенного подхода при построении модели обуславливается множеством факторов, это цель создания модели, размер области моделирования, наличие исходных данных, желаемый уровень детализации по пространству и времени и т.д. Будут рассмотрены следующие признаки разделения моделей: уровень описания, временная зависимость (статические и динамические подходы), функциональные зависимости (детерминистический и стохастический подходы).

Основными преимуществами макроуровневых моделей являются более упрощенная реализация с точки зрения количества вычислений и, как следствие, высокая скорость расчетов и простота масштабирования. С другой стороны, такие модели работают с усредненными параметрами транспортных потоков, при этом не учитываются локальные особенности движения. При таком подходе, важным является вопрос нахождения уравнений, которые наиболее полно описывают реальный транспортный поток. Принимаемые при построении макромоделей допущения накладывают ограничения на эффективность ее использования в определенных условиях, так в модели Лайтхилла-Уизема (Lighthill - Witham) предполагается мгновенное изменение скорости потока. Статические макроуровневые модели чаще всего используются для решения задач транспортного планирования и расчетов типовых сценариев использования улично-дорожной сети. Наиболее распространенными являются модели, в которых для каждого элемента сети вводятся определенные функции затрат, которые связывают время проезда элемента сети с потоком через него. Для такого подхода важным является вопрос корректности определения вида функций затрат для различных элементов сети. Обычно при проведении расчетов используются степенные функции затрат, в результате чего могут возникать ситуации, при которых расчетный поток транспорта по элементу сети будет превышать его физическую пропускную способность. Стоит отметить, что провести точную оценку пропускной способности дороги на практике достаточно сложно.

Микроуровневые модели описывают движение каждого отдельного транспортного средства, которые взаимодействуют друг с другом. Основное преимущество микроуровневых моделей заключается в возможности учета локальных особенностей потока транспорта, что позволяет получать высокую степень детализации.

Главная цель данного доклада заключается в том, чтобы показать, что каждый подход имеет свои ограничения, так как модель — это всегда упрощенное представление реальности. Поэтому и необходимо понимать, и

применять каждый подход в своем конкретном случае в зависимости от требований проекта и задачи, и их ограничений, будь то расчетное время, вычислительные мощности, степень детализации, корректность представления реальной ситуации или все в совокупности.

### Список литературы

1. Клишковштейн Г.И., Афанасьев М.Б. «Организация дорожного движения», М.: Транспорт, 1977. – 231 с.
2. Хейт Ф. «Математическая теория транспортных потоков», М.: Мир, 1966. – 286 с.
3. Ke Han, Benedetto Picoli, W.Y. Szeto. Статья «Continuous – Time Link-based Kinematic Wave Model: Formulation, solution, Existence and Well-Posedness», 2015
4. Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. «Введение в математическое моделирование транспортных потоков», М.: МФТИ, 2010. — 362 с.
5. Gentile Guido, Статья «The General Link Transmission Model for Dynamic Network Loading and a comparison with the DUE algorithm», 2008

## Интеграция транспортных моделей и системы поддержки решений\*

В.П. Осипов, В.А. Судаков

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

В работе [1] предложена методология унифицированной разработки СППР, в соответствии с ней, выделяется каркас СППР и вариативные модули. Одним из таких вариативных модулей является компьютерная модель предметной области. Транспортная модель является частным случаем модели предметной области. СППР инициализирует транспортную модель варьируемыми параметрами и после получения статистических характеристик оцениваемых критериев производит многокритериальную оценку получаемых вариантов моделируемой транспортной системы.

Технически возможные следующие пути интеграции СППР с транспортными моделями:

1. Интеграция на уровне единой среды выполнения для обращения к экземплярам классов. Например, JVM или CLR.
2. Интеграция на уровне общей СУБД с единым информационным пространством.
3. Интеграция на уровне сервисов с использованием механизма remote procedure call (RPC).
4. Интеграция на уровне веб-сервисов с обменом XML/JSON данными по restful API.

Каждый из этих способов имеет свои преимущества и недостатки зависящих от условий применения. Рассмотрим применение всех трех подходов к интеграции на примере СППР «Космос» и системы имитационного моделирования СИМ-С#.

Первый способ интеграции предполагает написание программного обеспечения СППР и системы моделирования на единой платформе .NET. На данном этапе этот способ самый простой, так как СИМ-С# и наиболее полная реализация каркаса СППР реализованы на одном языке: С#. Однако этот способ не универсален. Использование проприетарного ПО, коим является .NET несет в себе риски прекращения технологической поддержки и наличия «вредноносного» кода. Такой подход затрудняет в перспективе переход на свободное системное ПО. Однако этот подход требует минимальное количество ресурсов при реализации, увеличивает быстродействие при оптимизации решений.

Второй способ более универсален при выборе средств реализации ПО и системы управления базой данных (СУБД). Кроме того облегчается обработка больших объемов статистических данных по результатам моделирования, что актуально для транспортных

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-01-00571-а.

моделей. Однако реализовать вызов СИМ-С# для прогона имитационной модели достаточно нетривиальная задача, хотя и решаемая на уровне хранимых процедур некоторых СУБД. Этот подход требует наличия доступа к БД СППР для модуля компьютерного моделирования, что не всегда возможно по требованиям информационной безопасности.

Третий способ позволяет рассматривать удаленные обращения к транспортным моделям так, как будто происходят локальные вызовы методов. С одной стороны такой подход упрощает прикладное программирование. Но с другой стороны он создает у программиста иллюзию отсутствия накладных расходов на обмен информацией по сети. Кроме того изменения вносимые в спецификацию методов требуют перестроения соответствующих «сетевых заглушек».

Четвертый способ более универсален при выборе средств разработки ПО дает возможность использовать разнородное свободное системное ПО, обеспечивает масштабирование и реализацию распределенной вычислительной среды. Концепция репрезентативного состояния, позволяет разрабатывать и отлаживать вариативные модули независимо и снижает вероятности ошибок на интеграционном стыке. Недостатком подхода являются дополнительные трудозатраты на реализацию веб-сервисов и накладные расходы связанные в передаче данных по протоколу HTTP.

В описанной выше схеме работы интеграции СППР и СИМ, каркас СППР вызывает СИМ, таким образом СППР является инициатором информационного обмена. Однако возможен и обратный режим: когда СИМ обращается к СППР за получением результатов применения правил принятия решений в некой моделируемой ситуации. Например, имитационная модель управления некоторым технологическим процессом может включать в себя шаг назначения исполнителю приоритетной работы из множества доступных к назначению работ – эта задача принятия решений требует привлечения модели ЛПР на заданном шаге моделирования. Такую модель суждений ЛПР может предоставить СППР. Примером модели, требующей привлечения СППР на этапе моделирования, является имитационная модель процесса разработки ПО [2].

Анализ современных архитектурных интеграционных подходов и опыт создания СППР показал, что для широкого спектра практических задач поддержки принятия решений, связанных с оценкой транспортной инфраструктуры, целесообразно использование системы построенной на взаимодействии веб-сервисов. Взаимодействие этих сервисов следует организовать на основе механизма подписки на сообщения. Сообщения должны обрабатываться асинхронно. Другие подходы целесообразны в экспериментальных проектах, при ограниченности ресурсов на разработку, при создании небольших изолированных систем небольшими командами разработчиков.

#### Список литературы

1. Осипов В.П., Сивакова Т.В., Судаков В.А., Загребев Б.В., Трахтенгерц Э.А. Методологические основы поддержки принятия решений при планировании научно-прикладных исследований и экспериментов на международной космической станции (МКС) // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2013. Т.9. № 3, с. 80-88.
2. Судаков В.А. Автоматизация процесса управления разработкой корпоративной информационной системы // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17. № 1. с. 149-153.

## Двойственный быстрый градиентный метод решения задач энтропийно-линейного программирования\*

Тюрин А.И. (НИУ ВШЭ)  
Чернов А.В. (ФУПМ МФТИ)

Рассмотрим задачу энтропийно-линейного программирования [1]:

$$g(x) \rightarrow \min_{Ax=b, x \in Q} \quad (1)$$

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00722-а.

$$g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i / \xi_i)$$

$g(x)$  - 1-сильно выпуклая в 1-норме,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

$$Q = S_n(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

$$m \leq n;$$

Эта задача встречается при моделировании компьютерных сетей [2], в этой задаче выполняется  $m \leq n$ , размерность прямого пространства много больше, чем количество условий в  $Ax = b$ . Рассмотрим двойственную задачу:

$$\begin{aligned} F(y) &= \max_{x \in Q} \{ \langle y, b - Ax \rangle - g(x) \} = \\ &= \langle y, b \rangle + \ln \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \exp(-[A^T y]_i) \right) \rightarrow \min_{y \in \mathbb{R}^m} \end{aligned} \quad (2)$$

$x(y)$  - решение  $\max_{x \in Q} \{ \langle y, b - Ax \rangle - g(x) \}$ .

$$x_i(y) = \frac{\xi_i \exp(-[A^T y]_i)}{\sum_{j=1}^n \xi_j \exp(-[A^T y]_j)} \quad (3)$$

Постановка задачи энтропийно-линейного программирования хороша тем, что удается получить явные формулы для  $F(y)$  и  $x(y)$ .

Рассмотрим Теорему 2 из [3]. Она говорит следующее:

**Теорема.** Пусть имеется задача оптимизации (1) и двойственная к ней задача (2).  $L$  - константа Липшица градиента для  $F(x)$  с евклидовой нормой.  $R = \|y^0 - y_*\|_2$ .  $y^N, \tilde{y}^N$  - последовательности точек, полученных с помощью быстрого градиентного метода (БГМ) [3] для задачи (2).

$$\begin{aligned} &\text{БГМ}(z^0 = y^0 = w^0) \\ &1. y^{k+1} = \tau_k z^k + (1 - \tau_k) w^k \\ &2. w^{k+1} = y^{k+1} - \frac{1}{L} \nabla F(y^{k+1}) \\ &3. z^{k+1} = z^k - \alpha_{k+1} \nabla F(y^{k+1}) \\ &\alpha_{k+1} = \frac{k+2}{2L}, \tau_k = \frac{1}{\alpha_{k+1} L} = \frac{2}{k+2} \\ &x^N = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k x(y^{k+1}), \lambda_k = \frac{2(k+2)}{N^2 + 3N} \\ &\tilde{y}^N = \frac{1}{N^2 + 3N} \left( \sum_{k=1}^{N-1} w^k + (N+1)^2 w^N \right) \end{aligned}$$

Для того, чтобы выполнялось:

$$F(\tilde{y}^N) + g(x^N) \leq \varepsilon, \quad \|Ax^N - b\|_2 \leq \tilde{\varepsilon} \quad (6)$$

$$\text{достаточно взять } N = \max \left\{ \sqrt{\frac{8LR^2}{\varepsilon}}, \sqrt{\frac{8LR}{\tilde{\varepsilon}}} \right\}.$$

**Следствие.**

$$g(x^N) - g(x_*) \leq F(\tilde{y}^N) + g(x^N) \leq \varepsilon \quad (7)$$

**Замечание:**

Начальная точка  $y^0 = 0$ , поэтому  $R = \|y_*\|_2$ . Константа Липшица  $L$  [3][5]:

$$L = \max_{\|x\|_p \leq 1} \|Ax\|_2^2 = \max_{k=1, \dots, n} \|A^{(k)}\|_2^2 \quad (8)$$

$A^{(k)}$  -  $k$  - столбец матрицы. Важно отметить, что в задачах моделирования компьютерных сетей [2] элементы матрицы  $A$  равны 0 или 1, поэтому  $L \leq n$ .

Опишем сравнение нашего текущего метода (метод без регуляризации) с методом из Теоремы 2 [1] (метод с регуляризацией) на задаче (1). Пусть  $\xi_i$  случайны из  $(0,1)$ . Матрица ограничений  $A$  заполняется случайным образом аналогично, а вектор  $b$  вычисляется так, чтобы допустимое множество содержало указанную (случайную) точку симплекса. Условие выхода алгоритма:

$$F(\tilde{y}^N) + g(x^N) \leq \varepsilon, \quad \|Ax^N - b\|_2 \leq \tilde{\varepsilon}$$

$$\varepsilon = 0.01 |g(x_0)|, \quad \tilde{\varepsilon} = 0.01 \|Ax_0 - b\|_2$$

$$y_0 = 0, \quad x_0 = x(y_0)$$

В нашем эксперименте размерность пространства меняется от  $5^2$  до  $65^2$ . На графике ниже отражен сравнительный эксперимент предложенного метода и регуляризованного метода из [1]. Видно, что время решения задачи предлагаемым методом существенно лучше, чем время решения такой же задачи с помощью регуляризованного метода, причем с ростом размерности задачи разница существенно увеличивается (рис.1). Аналогичный результат наблюдается и при сравнении числа итераций, затраченных методами.

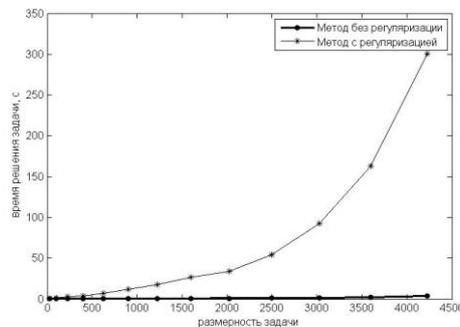


Рис. 1

Хотим поблагодарить к.ф.м.н. Гасникова Александра Владимировича за помощь при подготовке тезисов.

### Список литературы

1. Гасников А.В., Гасникова Е.В., Нестеров Ю.Е., Чернов А.В. Об эффективных численных методах решения задач энтропийно-линейного программирования // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. № 4. С. 523–534. arXiv:1410.7719
2. Anikin A., Dvurechensky P., Gasnikov A., Golov A., Gornov A., Maximov Yu., Mendel M., Spokoyny V. Modern efficient numerical approaches to regularized regression problems in application to traffic demands matrix calculation from link loads // Proceedings of International conference ITAS-2015. Russia, Sochi, September, 2015. arXiv:1508.00858
3. Аникин А.С., Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Тюрин А.И., Чернов А.В. Двойственные подходы к задачам минимизации сильно выпуклых функционалов простой структуры при аффинных ограничениях // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. (в печати) arXiv:1602.01686

4. Allen-Zhu Z., Orecchia L. Linear coupling: An ultimate unification of gradient and mirror descent // e-print, 2014. arXiv:1407.1537
5. Nesterov Y. Smooth minimization of non-smooth function // Math. Program. Ser. A. 2005. V. 103. № 1. P. 127–152.

# Асимптотический анализ сложных стохастических систем

1. A. Prangishvili., O. Shonia, I. Rodonaia Performance analysis and security in autonomic component ensembles.
2. Н.Н. Апраушева, С.В. Сорокин. О вероятности получения оптимальной оценки параметра гауссовой смеси по ЕМ-алгоритму
3. А.В. Колесниченко Самоорганизация синхронизированного движения автомобилей под влиянием шумов вызванных фазовыми переходами
4. А.Л. Мячин Порядково-инвариантная паттерн-кластеризация: свойства и сравнение с известными методами кластерного анализа

## Performance analysis and security in autonomic component ensembles.

A. Prangishvili., O. Shonia, I. Rodonaia.

Georgian Technical University, Tbilisi, Georgia

The paper proposes a new technique for detecting malware threats in autonomic component ensembles. The technique is based on the statistic complexity metrics, which relate objects to random variables and (unlike other complexity measures considering objects as individual symbol strings) are ensemble based. This transforms the classic problem of assessing the complexity of an object into the realm of statistics. More precisely, a complexity measure with the following properties is introduced. First, the measure is bivariate comparing two objects, corresponding to pattern generating processes, on the basis of the *normalized compression distance (NCD)* with each other:

$$NCD(x, y) = \frac{C(xy) - \min\{C(x), C(y)\}}{\max\{C(x), C(y)\}},$$

where  $C(x)$  denotes the compression size of string  $x$  and  $C(xy)$  the compression size of the concatenated strings  $x$  and  $y$ . Second, this measure provides the quantification of an error that could have encountered by comparing samples of finite size from the underlying processes. Hence, the statistic complexity provides a statistical quantification of the statement ‘ $X$  is similarly complex as  $Y$ ’. Based on these considerations, the statistic complexity measure, suggested in [1], is defined by the following procedure:

1. Estimate the empirical distribution function  $\hat{F}_{XX}$  of the normalized compression distance from  $n_1$ ,  $S_{X,X}^{n_1} = \{x_i = NCD(x', x'') | x', x'' \prec X\}_{i=1}^{n_1}$ , from objects  $x'$  and  $x''$  of size  $m$  generated by process  $X$  (here ‘ $\prec$ ’ means ‘is generated by  $X$ ’)
2. Estimate the empirical distribution function  $\hat{F}_{XY}$  of the normalized compression distance from  $n_2$ ,  $S_{X,Y}^{n_2} = \{y_i = NCD(x', y') | x' \prec X, y' \prec Y\}_{i=1}^{n_2}$  from objects  $x'$  and  $y'$  of size  $m$  generated by two different processes  $X$  and  $Y$
3. Determine  $T = \sup_x |\hat{F}_{X,X}(x) - \hat{F}_{X,Y}(x)|$  and  $p = Prob(T \leq t)$
4. Define  $C_s(S_{X,X}^{n_1}, S_{X,Y}^{n_2} | X, Y, m, n_1, n_2) := p$  as *statistic complexity*

This procedure corresponds to a two-sided, two-sample Kolmogorov-Smirnov (KS) test based on the normalized compression distance obtaining distances among observed objects. The statistic complexity corresponds to the p-value of the underlying null hypotheses,  $H_0 : F_{XX} = F_{XY}$ , and, hence, assumes values in  $[0, 1]$ . The null hypothesis is a statement about the null distribution of the test statistic  $T = \sup_x |\hat{F}_{X,X}(x) - \hat{F}_{X,Y}(x)|$ , and because the distribution functions are based on the normalized compression distances among objects  $x'$  and  $x''$ , drawn from the processes  $X$  and  $Y$ , this leads to a statement about the distribution of normalized compression distances. Hence, verbally,  $H_0$  can be phrased as “on average, the compression distance of objects from  $X$  to objects

from  $Y$  equals the compression distance of objects only taken from  $X$ ". If the alternative hypothesis,  $H_1 : F_{XX} \neq F_{XY}$  is true, this equality does no longer hold implying differences in the underlying processes  $X$  and  $Y$ , leading to differences in the NCDs.

Applied to the problem of finding malware threats in the flows between autonomic components  $CP_i$  [2], the above procedure will look as follows. For *each autonomic component* (AC) of the (ACEs) the processes  $X$  and  $Y$  are considered as the processes generating objects represented in the form of strings. The strings, in turn, represent traffic flows through these autonomic components. The specific ways of how flows are transformed into strings are considered later in the paper. The process  $X$  ('training process') is the process generating flows in the conditions when there are no malware threats. So, objects (strings) generated by the process  $X$  are 'healthy' (they do not contain any patterns of malware). These strings have to be generated preliminary (before actual workload on an autonomic components ensemble). For randomly taken pairs  $x'$  and  $x''$  (the amount of such pairs is  $n_1$ ) of the generated strings the metric  $NCD(x', x'')$  is calculated. Then the empirical distribution function  $\hat{F}_{XX}$  is being built and stored to the specific place. When the ensemble starts actual operation (receives workload), the process  $Y$  ('production process') generates objects (strings)  $y'$ , which represent actual current traffic between ensemble's components. Some of these objects may contain malware patterns. The sample of the size  $n_2$  of objects  $x'$  (generated preliminary by the 'training process'  $X$ ) and objects  $y'$  is being created and the metric  $NCD(x', y')$  is calculated for each pair. Then the empirical distribution function  $\hat{F}_{XY}$  is being built. Now, by applying the steps 3 and 4 of the above procedure, the values of the *statistic complexity* for *each autonomic component* can be computed.

However, it is well known that the  $p$ -value is *not* the probability that the null hypothesis is true, nor is it the probability that the alternative hypothesis is false. To calculate the probability that the null-hypothesis is true, given some data, we have collected, we use the approach of Cohen [3]. He showed how the posterior probability of the null-hypothesis, given a *statistically significant* result (the data), can be calculated based on a formula that is a poor man's Bayesian updating function. In this approach the following values are introduced.  $P(H_0)$  is the prior probability (P) the null hypothesis ( $H_0$ ) is true.  $P(H_1)$  is the probability (P) the alternative hypothesis ( $H_1$ ) is true ( $P(H_1) = 1 - P(H_0)$ ).  $P(T|H_0)$  is the probability (P) of the data  $D$ , which was obtained by the KS procedure:

$$T = \sup_x \left| \hat{F}_{X,X}(x) - \hat{F}_{X,Y}(x) \right|$$

given that the null hypothesis ( $H_0$ ) is true.  $P(T|H_0)$  is the probability of the data (a significant result), given that  $H_0$  is *not* true.  $P(H_0|T)$  is the probability of the null-hypothesis, given the data  $T$ . This is our posterior belief in the null-hypothesis, after the data has been collected. According to Cohen [9], it's what we really want to know:

$$P(H_0|T) = \frac{P(T|H_0)P(H_0)}{P(T|H_0)P(H_0) + P(T|\neg H_0)(1 - P(H_0))}$$

Therefore, the obtained numerical value of the statistic complexity can be interpreted in the following sense: in the current conditions the flows of packets through the given autonomic component cannot be regarded as complex flows (with the probability equal to  $1 - P(H_0|T)$ ). That is, the flows may contain some patterns (indicating the possible presence of some malware threats) with the probability  $P_{infect} = 1 - P(H_0|T)$ . In our approach we assume that the probability  $P_{infect} \geq 0.6$ .

In autonomic cloud computing datacenters can be considered as autonomic-component ensembles (ACEs) and be represented by constructions of SCEL (Software Component Ensemble Language), a kernel language for programming autonomic computing systems [2,4]). Each (virtual) machine is running one instance of the Cloud Platform called Cloud Platform instance (CP<sub>i</sub>). Each CP<sub>i</sub> is considered to be a service component. Multiple CPs communicate over the Internet (IP protocol), thus forming a cloud and within this cloud one or more service component ensembles. In our approach the notions of *netflows*, their *informational-theoretical metrics* and components' *autonomic manager* are essentially leveraged. A network *flow* can be defined in many ways. In a general sense, a flow is a series of packets with some attribute(s) in common. Each packet that is forwarded within a router or switch is examined for a set of IP packet attributes. These attributes are the IP packet identity or fingerprint of the packet and determine if the packet is unique or similar to other packets. All packets with the same source/destination IP address, source/destination ports, protocol interface, and class of service are grouped into a flow and then packets and bytes are labeled. This methodology of fingerprinting or determining a flow is scalable

because a large amount of network information is condensed into a database of netflow information called the netflow cache. A *netflow-enabled device* (*netflow exporter*: router or switch) sends to the *netflow collector* single flow as soon as the relative connection expires. Flows accumulated at the flow storage, are then subdivided into *component flows*. That is, flows which have the component's IP address as a destination address are grouped and sent to the corresponding component. After receiving their destined flows, the component's autonomic manager can start the processing in order to reveal the abnormal behavior of flows in accordance with the following technique. Application for collecting and processing NetFlow statistics are defined as follows. Once the collector populates the raw file, the file is passed on to the second component in the system, which is called an aggregator. The aggregator receives the file from the collector and processes it using predefined information from the database. The data thus processed (aggregated) is stored in the database. In the proposed approach the different files with the particular titles (relevant to the concrete SCPi's IP addresses) to store component flows are used. As it was described, the proposed procedure requires implementation of the 'training process'  $X$  (which generates 'healthy' flows containing no malware threats) before starting real 'production' (real-time) process  $Y$ . In order to decrease overheads, this process is executed just once with as large value of the sample size  $n_i$  as it is possible. The obtained results (the empirical distribution function  $\hat{F}_{XY}$ ) is stored to each CP<sub>*i*</sub> which can run applications subsequently. When applications are executed on the CPs, the objects  $y', y'', y''' \dots$ , (corresponding component flows files) are created and the empirical distribution functions  $\hat{F}_{XY}$  are calculated on each CP<sub>*i*</sub>. Then, according to the steps 3 and 4 of the procedure, the value of statistic complexity for each autonomic component is calculated. The result of the proposed procedure gives us the distribution of probabilities of malware infection among autonomic components of the datacenter. As it was said above the probability  $P_{\text{infect}} \geq 0.6$  can be practically regarded as a serious malware threat. In this condition the immediate migration of the application from the VM (where the application is being run currently) to another VM (which is to be selected by using the ensemble's components autonomic managers' knowledge base) is required. A new CP<sub>*i*</sub> must be found according to some requirements: probability  $P_{\text{infect}}$  and CPU load must be rather low, integrated hardware index (which includes such indicators as processor speed, available memory, available disk space, number of cores, etc) must correspond to the application resource requirements (they are published in the interface of the CP<sub>*i*</sub> where the application is running). If the required CP<sub>*i*</sub> is found, the application has to migrate there as soon as possible and stop its running on the "old" CP<sub>*i*</sub>. In our approach this process is described and implemented in SCEL (Software Component Ensemble Language - a kernel language for programming autonomic computing systems statements). The time of migration must be taken into account when determining the response time. In general, streams of requests generated by each client (application) may be decomposed into a number of different VMs. Migrating a VM between servers causes a downtime in the client's application. Duration of the downtime is related to the migration technique used in the datacenter. The downtime is the function of the malware infection probability (computed as it was described above), links speeds and VM memory sizes. The response time of a VM (placed on server  $j$ ) is computed according to the Pollaczek-Khinchin formula. Then the expression for migration time is updated by adding the term representing the expected downtime of the VM<sub>*ij*</sub>.

The result of the proposed procedure gives us the distribution of probabilities of malware infection among autonomic components. The possibility to use the results obtained to perform quantitative probabilistic verification and analysis of ASEs using the probabilistic model checking tool PRISM[5] is demonstrated in our approach. Proceeding from the distribution of migration probabilities for all ACs, parameters of applications being performed by each AC (such as service times, response times (including migration times), etc.) which are being computed and stored in the repositories of corresponding autonomic managers of an AC) we can perform *quantitative* probabilistic analysis of security, availability and performance of ASEs. In particular, the use of PRISM and data obtained by implementation of the above techniques allows us to define and obtain answers for the following types of questions: 1)  $P = ? [ F^{0:600} \text{ migrate } AC_i ]$  – "the probability that component  $AC_i$  will migrate within 10 minutes"; 2)  $P = \{ \text{"responseTime"} \} = ? [ RS_{AC_i} > RS\_SLA ]$  – "the probability that response time of the component  $AC_i$  will be more than the response time required by SLA term".

## References

1. F. Emmert-Streib. *Statistic Complexity: Combining Kolmogorov Complexity with an Ensemble Approach*, Queen's University, Belfast, United Kingdom, 2010

2. A.Prangishvili, O.Shonia, I.Rodonaia, M. Mousa. Formal verification in autonomic-component ensembles, WSEAS / NAUN International Conferences, Salerno, Italy, 2014
3. J. Cohen, The earth is round ( $p < .05$ ). American Psychologist, 49, 997-1003), 1994
4. Rocco De Nicola, Michele Loreti, Rosario Pugliese, Francesco Tiezzi. "SCEL- a Language for Autonomic Computing". ASCENS project, Technical report, January 2013
5. M. Kwiatkowska, G. Norman, D. Parker. PRISM: Probabilistic Model Checking for Performance and Reliability Analysis. Oxford University Computing Laboratory, Wolfson Building, Parks Road, Oxford, OX1 3QD, 2010

## О вероятности получения оптимальной оценки параметра гауссовой смеси по EM-алгоритму

Н.Н. Апраушева, С.В. Сорокин

*ФИЦ ИУ РАН Вычислительный центр имени А.А. Дородницына РАН,  
Москва, Россия*

В многомерном пространстве для решения задачи определения оптимальной оценки параметра гауссовой смеси наиболее эффективным является EM-алгоритм, базирующийся на 2-х методах: максимального правдоподобия и последовательных приближений Пикара [1, 2]. Этот алгоритм корректнее использовать для гауссовых смесей с равными ковариационными матрицами и с различными векторами средних значений. Во многих работах утверждается, что при случайном задании начальных условий вероятность  $P$  получения оптимальной оценки параметра смеси по EM-алгоритму быстро уменьшается при возрастании размерности пространства  $p$  ( $P = 0.76$  при  $p = 5$ ,  $P = 0.1$  при  $p = 10$ ). Но эксперименты показали, что вероятность  $P$  является убывающей функцией параметров  $p, k, \varepsilon$ , ( $p$  — размерность пространства,  $k$  — число компонент смеси,  $\varepsilon$  — точность вычислений) и возрастающей функцией параметров  $n, \rho_{is}$ ,  $i < s, i, s = 1, 2, \dots, k$  ( $n$  — объём выборки,  $\rho_{is}$  — расстояние Махаланобиса между  $i$ -й и  $s$ -й компонентами). Для  $k = 2, 3, 4$  эмпирическим путём получена приближённая формула для вычисления вероятности  $P$ .

Система уравнений правдоподобия гауссовой смеси с равными ковариационными матрицами  $\Sigma$  и с различными векторами средних значений  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ ,  $2 \leq k < \infty$ , принимает вид:

$$\pi_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_{ij}, \quad \mu_i = \frac{\{\sum_{j=1}^n X_j P_{ij}\}}{\{\sum_{j=1}^n P_{ij}\}}, \quad (1)$$

$$\Sigma = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k (X_j - \mu_i)' (X_j - \mu_i) P_{ij}, \quad (2)$$

$P_{ij}$  — апостериорная вероятность каждой точки  $X_j$  данной выборки,  $j = 1, 2, \dots, n$ . При введении обозначений:

$$a_i = \Sigma^{-1} \mu_i' + \tau, \quad b_i = -\frac{1}{2} \mu_i \Sigma^{-1} \mu_i' + \ln \pi_i + \nu, \quad (3)$$

где  $\tau$  и  $\nu$  — произвольные вектор и скаляр соответственно для апостериорных вероятностей имеем:

$$P_{ij} = 1 / \sum_{s=1}^k e^{(a_s - a_i) X_j' + b_s - b_i}, \quad (4)$$

Из выражений (4) следует, что параметры  $\pi_i, \mu_i, \Sigma$ , в (1), (2) являются функциями  $a_i, b_i$ . Тогда выражения в (3) образуют ряд уравнений общего вида:

$$a_i = \phi_i(a_i, b_i; X^{(n)}), \quad b_i = \psi_i(a_i, b_i; X^{(n)}), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Следовательно, можно задать итеративный процесс:

$$a_i^{(t)} = \phi_i(a_i^{(t-1)}, b_i^{(t-1)}; X^{(n)}), \quad b_i^{(t)} = \psi_i(a_i^{(t-1)}, b_i^{(t-1)}; X^{(n)}),$$

и на каждом  $t$ -м шаге вычислять параметры смеси  $\mu_i^{(t)} = \mu_i(a_i^{(t)}, b_i^{(t)}; X^{(n)})$ ,  $\pi_i^{(t)} = \pi_i(a_i^{(t)}, b_i^{(t)}; X^{(n)})$ ,  $\Sigma_i^{(t)} = \Sigma_i(a_i^{(t)}, b_i^{(t)}; X^{(n)})$ ,  $X^{(n)}$  — данная выборка объёма  $n$ . Последовательность итераций  $\{\pi_i^{(t)}, \mu_i^{(t)}, \Sigma^{(t)}\}$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , сходится к решению системы уравнений правдоподобия [2].

Начальные векторы  $a_{0i}^{(s)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, 50$ , задаём случайными, параметры  $b_{0i}^{(s)}$ , находим из равенств:  
 $b_{0i}^{(s)} = -(a_{0i}^{(s)}, \bar{X})$ ,  $\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$ .

Таблица 1

Размерность пространства $p$	Рассояние Махалано-биса $\rho$	Объём выборки $n$	Оценки вероятности $P$		
			$\tilde{P}_{st}$	$\tilde{P}_f$	$P$
2	2	4	0	0.8	0.8
	4	00	.96	8	0.8
	10	4	1	4	0.9
	00	4	1	8	0.9
4	2	4	0	0.7	0.7
	4	00	.80	2	0.8
	10	4	1	6	0.8
	00	4	1	4	0.9
10	2	4	0	0.1	0.1
	4	00	.11	5	0.5
	10	4	0	3	0.8
	00	4	0	0	0.8
10	2	8	0	0.3	0.3
	4	00	.45	7	0.6
	10	8	0	6	0.6
	00	8	0	6	0.8
		00	.88	6	0.8

Результаты экспериментов по вычислению значений вероятности  $P$ , проведённых на модельных выборках для  $k = 2, 3, 4$ , представлены в таблицах 1, 2,  $\tilde{P}_{st}$  — статистическая оценка вероятности  $P$ ,  $\tilde{P}_f$  — значение этой вероятности, полученное по приближённой формуле:

$$\tilde{P}_f = \left(1 - \frac{p\sqrt{p}}{\rho_{min}\sqrt{n}}\right) \left(1 - \frac{p\sqrt{k-1}k}{\rho_{min}\sqrt{n}}\right). \quad (5)$$

Для данных табл. 1  $k = 2$ , для данных табл. 2  $p = 2$ ,  $\rho_{min} = \min_i(\rho_{1i})$ ,  $i = 2, 3, 4$ .

Отметим, что формула (5) корректна при условиях:

$$p < \sqrt[3]{\rho_{min}^2 n}, \quad p < \rho_{min} \sqrt{n} (\sqrt{k-1}(k-1))^{-1}.$$

Для практического использования формулы (5) при неизвестном значении  $\rho_{min} \geq 2$  находим нижнюю границу для  $\tilde{P}_f(\rho_{min})$ , вычислив  $\tilde{P}_f$  при  $\rho_{min} = 2$ . Тогда имеем:

$$\tilde{P}_f(\rho_{min}) \geq \tilde{P}_f(2)$$

Таблица 2

Число компонент $k$	Объём выборки $n$	$\rho_{min}$	Оценки вероятности $P$	
			$\tilde{P}_{st}$	$\tilde{P}_f$
3	60			
	0			
	40	20	0.90	0.98
	0	20	0.87	0.97
	40	4	0.93	0.90
	0	2	0.84	0.80
	40			
	0			
4	40	20	0.70	0.96

	0	4	0.63	0.84
	40	6	0.64	0.68
	0	3	0.40	0.38
	40			
	40			

#### Список литературы

1. Day N. E. Estimating the Components of a Mixture of Normal Distributions. *Biometrika*, 1969. Vol. 56, N 3, pp. 463-477.
2. Шлезингер М.И. Взаимосвязь обучения и самообучения в распознавании образов. Киев: Кибернетика, 1968, № 2, сс. 81-88.

## **Самоорганизация синхронизированного движения автомобилей под влиянием шумов вызванных фазовыми переходами**

А.В. Колесниченко

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

Транспортная динамика большого города связана с результатами тысяч индивидуальных решений, принимаемых водителями, при движении автомобилей между пунктами назначения. Разумеется, любое административное предписание, принимаемое с целью принятия эффективных мер по оптимальному управлению дорожным движением, будет основано на неполной информации о состоянии транспортной инфраструктуры в целом. Существующие в настоящее время модели транспортной инфраструктуры весьма разнообразны по кругу решаемых задач, применяемому математическому аппарату, используемым экспериментальным данным и степени детализации описания движения. Все они носят, как правило, детерминированный характер и предназначены для определения текущих значений и прогноза различных характеристик функционирования транспортной сети, таких как интенсивность движения на всех элементах сети, объёмы перевозок, средние скорости движения, задержки и потери времени и т.д.

Вместе с тем следует отметить, что в настоящее время нет общепринятого подхода, описывающего поведение автотранспортной системы (АТС) в области «синхронизированного потока», т.е. проблема образования предзаторных и заторных ситуаций все ещё до конца не изучена. По этой причине при выработке стратегии управления АТС на основе математических моделей дорожного движения необходимо принимать во внимание и прогностические модели эволюции синхронизированных транспортных потоков, которые моделируются *сложной стохастической динамической системой* активных частиц (автомобилей). Подобные системы с ростом интенсивности внешнего воздействия, удаляющего их от оптимального стационарного состояния, могут испытывать самоорганизацию. При этом эволюция хаотической транспортной системы связана с характерными для неё периодами неустойчивости, сменяемыми метастабильными состояниями пространственно-временного распределения автомобилей, которые качественно отличаются от неупорядоченного (хаотического) их распределения на дорогах. В свою очередь эти новые коллективные образования автомобилей (пространственно-временные структуры) вновь могут изменяться непредсказуемым образом в зависимости от текущего состояния составляющих транспортную систему элементов и изменения внешних условий движения. Такого рода переходы от одной структуры к другой по своим свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам в термодинамике и переходам, встречающимся в неравновесных физических системах при детерминированных внешних воздействиях, таким, как, например, неустойчивость Бенара, или лазерный переход. В результате в подобных самоорганизующихся сложных системах с хаотической динамикой, находящихся в неравновесном состоянии, происходят процессы, приводящие к выделению из множества описывающих систему переменных небольшого числа параметров, к которым подстраиваются все прочие степени свободы. Согласно известной теореме Рюэля-Такенса

[1], нетривиальная картина самоорганизации, включающая в себя наличие странных аттракторов, наблюдается, если число выделенных степеней свободы не менее трех.

Вместе с тем, важно ясно себе представлять, что при спонтанном процессе самоорганизации хаотических транспортных потоков, обеспечивающем переходы в новые стабильные и метастабильные состояния, особая роль принадлежит действию внешних шумов (стохастических источников шума), обусловленных влиянием на условия движения автомобилей различных случайных факторов (например, плохой видимостью трассы, состоянием дорожного покрытия, производимыми ремонтными работами, метеорологическими условиями и т.п.). Наиболее естественным образом учёт этих факторов в рамках модели Лоренца [2] может быть достигнут путём использования стохастического дифференциального уравнения Ланжевена для управляющего параметра транспортного потока, наличие шумового источника в котором как раз и определяют вариации структурных параметров транспортной сети.

В работе для макроскопического описания хаотических транспортных потоков был использован синергетический подход, при котором АТС уподоблялась (до известной степени) взаимодействующим между собой, активным жидким частицам, поскольку в транспортных системах неизбежно присутствует человеческий фактор. При слабой загруженности автомагистрали водители движутся по дороге как им удобно. Когда дорога становится загруженной, автомобили вынуждены ехать только по своей полосе, следуя друг за другом со средней скоростью  $u_{cp}(t)$  и соблюдая интервал движения  $s(t)$ . Причем, в общем случае величины  $u_{cp}$  и  $S$  отличаются от возможных оптимальных значений: скорости  $U$  и интервала  $S = UT$  движения (здесь  $T$  – время пробега оптимального интервала). Именно подобный режим движения автомобилей, называемый «синхронизированным» потоком, более всего схож с движением жидкости. Вместе с тем, движение автомобилей на этой стадии происходит, как правило, с частыми пробками (переходами к режиму «stop-and-go»), причем такое инертное состояние распространяется вверх и вниз по дороге, сохраняясь длительное время.

Важно иметь в виду, что главной причиной перехода от режима свободного движения автомобилей к неустойчивому, а затем к затору в определенные моменты времени, когда трасса становится переполненной, могут явиться весьма незначительные помехи, препятствовавшие формированию оптимального транспортного потока. При этом переход от свободного потока к синхронизированному может произойти почти спонтанно, например, около наклонных выездов на автомагистраль, когда происходит внезапное увеличение числа автомобилей на дороге. В работе предполагалось, что допустима замена реального шума, флуктуации которого обусловлены кумулятивным действием многочисленных факторов определяющих состояние транспортной системы, гауссовским белым шумом. Дополненное сингулярным источником шумов, уравнение для управляющего параметра в классической схеме Лоренца учитывает стохастическую природу синхронизированного транспортного потока; при этом флуктуации управляющего параметра играют не только роль триггера, включающего возможный фазовый переход, но и являются причиной самосогласованного формирования новых стационарных состояний.

Качественное исследование коллективного поведения пространственно однородных транспортных потоков было проведено в рамках популярной в теории самоорганизации системы уравнений Лоренца, три переменные которой имеют равноправный характер и описывают самосогласованное поведение трёх параметров, которые согласно устоявшейся терминологии называются параметром порядка, сопряжённым полем и управляющим параметром соответственно. В качестве параметра порядка была выбрана величина отклонения реального интервала движения от оптимального значения  $q(t) \equiv s(t) - S$  (девиация интервала), в качестве сопряжённого поля – величина скорости изменения реального интервала движения  $ds(t)/dt$ , отчитываемой от рассогласования  $U - u_{cp}(t)$

оптимальной и текущей скоростей:  $u(t) \equiv ds(t)/dt - [U - u_{cp}(t)]$ , а под управляющим параметром транспортного потока  $\vartheta$  понималась величина, определяемая условиями движения. Для предполагалось, что транспортный поток пространственно однороден, для которого задача сводится к определению временных зависимостей величин  $q(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\vartheta(t)$ . В простейшем случае скорости изменения этих величин задаются модифицированной синергетической системой Лоренца

$$\begin{aligned} dq(t)/dt &= -q(t)/\tau_q + u(t), \quad du(t)/dt = -u(t)/\tau_u + g_u q(t)\vartheta(t), \\ d\vartheta(t)/dt &= [\vartheta_0 - \vartheta(t)]/\tau_\vartheta - g_\vartheta q(t)u(t) + \sqrt{2}\sigma_\vartheta \xi(t), \end{aligned}$$

дающей кинетическую картину коллективного поведения следующих друг за другом автомобилей. Здесь  $\tau_q$ ,  $\tau_u$  и  $\tau_g$  – характерные времена автономной релаксации соответствующих величин к стационарным значениям  $q = u = 0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ ;  $g_u$ ,  $g_g$  – положительные константы, являющиеся мерой обратной связи системы;  $\xi(t)$  – стохастический источник (нормальный белый шум);  $\sigma_g^2$  – интенсивность флуктуаций управляющего параметра.

Задача состояла в исследовании влияния стохастического источника на синергетическое поведение АТС (на эволюцию девиации интервала движения автомобилей  $q(t)$ ), представленной обобщённой схемой Лоренца. В работе были найдены стационарные решения соответствующего уравнения Фоккера–Планка и положения максимумов плотности вероятности девиации интервалов движения в зависимости от интенсивности шума [3]. В частности, было показано, что включение аддитивного шума в уравнение для управляющего параметра, приводит в адиабатическом приближении [4] к трансформации этих шумов в мультипликативные для параметра порядка. Это обстоятельство обуславливает нетривиальную перестройку коллективного поведения автомобилей транспортной системы, испытывающей индуцированные шумом «фазовые переходы». Подобные переходы, обусловленные нарастанием интенсивности флуктуаций управляющего параметра, приводят к качественным изменениям самого вида стационарных значений функции распределения девиации интервалов движения автотранспорта. Учёт множества стационарных состояний этого распределения, в которых имеет место отклонение от оптимального режима движения, немаловажен при принятии стратегических решений по управлению движением транспортным потоком.

#### Список литературы

1. Ruelle D, Takens F. On the nature of turbulence// Commun. Math.Phys.1971. V.20.P. 167-192.
2. Гардинер К.В. Стохастические задачи в естественных науках. М.: Мир. 1986.
3. Колесниченко А.В. Самоорганизация стохастической транспортной системы под влиянием внешних шумов// MATHEMATICA MONTISNIGRI. 2015 V.33 P.88-104
4. Олемской А.И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом//УФН. 1998. Т.168. С. 287-321.

### Порядково-инвариантная паттерн-кластеризация: свойства и сравнение с известными методами кластерного анализа\*

А.Л. Мячин

*Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия  
Институт проблем управления  
имени В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*

Данные «Ирисы Андерсона - Фишера» [1], ставший ‘де-факто’ классическими, широко используются для тестирования различных методов кластеризации, что делает возможным их применение не только для проверки новых, разрабатываемых методов, но и для сопоставления вновь полученных результатов с работой иных, известных алгоритмов. В связи с этим, целью работы является экспериментальная проверка эффективности новой

---

\* Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ) и с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ, а также при поддержке Лаборатории теории выбора и анализа решений Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН и Международной лаборатории анализа и выбора решений (НИУ ВШЭ).

модификации метода анализа паттернов на примере данных «Ирисы Андерсона - Фишера», состоящих из совокупности измерений линейных размеров 150 цветов ириса трех видов:

- Ирис щетинистый;
- Ирис разноцветный; и
- Касатик виргинский,

по 50 каждого сорта. Каждый цветок характеризуется значениями четырех параметров:

1. длина чашелистика;
2. ширина чашелистика;
3. длина лепестка;
4. ширина лепестка.

Основной задачей является создание метода, позволяющего идентифицировать вид цветка по данным его измерений. Иными словами, выделить в отдельные группы цветы каждого сорта.

Для решения данной задачи используется новый метод анализа паттернов – порядково-инвариантная паттерн-кластеризация. Предложенный метод основан на результатах из [2,3], уже доказавших свою эффективность в ряде областей: науки, образования и инновационной деятельности [4], банковской сфере [5,6], патентной активности [7], политологии [8]. В общем виде, с помощью метода анализа паттернов исследуется исходное множество объектов  $X$ , причём  $|X| = k$ . Каждый объект  $x_i \in X$  описывается  $m$  показателями. Таким образом, объект  $x_i$  ставится во взаимно однозначное соответствие вектору  $z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{ij}, \dots, z_{im})$ , где  $z_{ij}$  –  $j$ -ый показатель  $i$ -ого объекта. С использованием данных векторов, в системе параллельных координат [9] каждому объекту строится кусочно-линейная функция. Для определения схожести двух объектов множества  $X$   $x_i$  и  $x_n$  задается некоторая мера близости  $b(x_i; x_n)$ . С использованием данной меры близости, исходное множество объектов  $X$  разбивается на непересекающиеся подмножества. При таком разбиении, каждому объекту подмножества приписывается номер паттерна  $y_i$ . Под паттерном, в данном случае, понимается некоторая совокупность значений, описывающих группу объектов, а также всё множество объектов, имеющих схожие значения выбранных показателей.

Отличительными особенностями порядково-инвариантной паттерн-кластеризации являются рассмотрение всех возможных комбинаций показателей, а также представление исследуемых объектов в виде полных орграфов.

Результаты применения нового метода анализа паттернов к данным «Ирисы Андерсона-Фишера» приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Цветок	Число экземпляров	Ошибочно классифицировано
Iris Setosa	50	0
Iris Versicolor	50	1
Iris Virginica	50	4

Таким образом, ошибка составляет  $5/150 = 0,03$ , т.е. порядка 3%, что сопоставимо с работой лучших известных методов кластеризации.

### Список литературы

1. Fisher R.A. The use of multiple measurements in taxonomic problems // Annals of Eugenics, 1936, pp. 179-188
2. Анализ паттернов в статистике и динамике. Часть 1: Обзор литературы и уточнение понятия/ Ф.Т. Алескеров и др.// Бизнес-информатика. – 2013. – Т. 3. –С. 3-18.
3. Анализ паттернов в статистике и динамике, часть 2: Примеры применения к анализу социально-экономических процессов/ Ф.Т. Алескеров и др. // Бизнес-информатика. 2013. № 4(26). С. 3-20.
4. Pattern Analysis in the Study of Science, Education and Innovative Activity in Russian Regions/ Aleskerov F. et al // Procedia Computer Science. 2013. – Vol. 17. – P. 687-694.
5. Aleskerov F., Ersel H., Yolalan R. Multicriterial Ranking Approach for Evaluating Bank Branch Performance // International Journal of Information Technology and Decision Making. – 2004. – Vol. 3, N 2. – P. 321-335.
6. Алескеров Ф.Т., Солодков В.М., Челнокова Д.С. Динамический анализ паттернов поведения коммерческих банков России // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2006. – Т.10, №1. – С.48-62.
7. Myachin A. Analysis of global data education and patent activity using new methods of pattern analysis // Procedia Computer Science. – 2014. – N 31. – P. 468-473.

8. Aleskerov F., Nurmi H. A method for finding patterns of party support and electoral change: An analysis of British general and Finnish municipal elections // *Mathematical and Computer Modelling*. – 2008. – P. 1225-1253.

9. Few S. *Multivariate Analysis Using Parallel Coordinates*. – 12.09.2006. URL: [http://www.perceptualedge.com/articles/b-eye/parallel\\_coordinates.pdf](http://www.perceptualedge.com/articles/b-eye/parallel_coordinates.pdf) (дата обращения 25.03.2016)