В.А. ГОЛОВЕШКИН (д.т.н., проф.), **М.В. УЛЬЯНОВ** (д.т.н., проф.)
(Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова)

МАТРИЦА НОМЕРОВ ПОРЯДКА – ОБОБЩЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ КЛАССА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА

В докладе рассматривается новое обобщение для индивидуальных задач коммивояжера, предназначенное для выделения классов задач, обладающих близкой сложностью. Понятие сложности индивидуальной задачи коммивояжера тесно связано с методом ветвей и границ, первая реализация которого для этой задачи была предложена в 1963 г. Несимметричная задача коммивояжера (индивидуальная задача) на графе G размерности n задается квадратной матрицей смежности $A(n\times n)$, элементы которой определяют веса дуг между вершинами полного графа. В общем случае это положительные, не обязательно различные действительные числа. Диагональные элементы матрицы формально не рассматриваются или считаются условно равными бесконечности, поскольку в задаче коммивояжера у вершин запрещены собственные петли. В дальнейшем мы формально полагаем $a_{ii}=0$. $A=\left\{ a_{ij} \middle| \, a_{ii}=0,\ a_{ij}>0,\ i\neq j, i,j=\overline{1,n} \right\}$.

Сложность индивидуальной задачи коммивояжера (по Д.Э. Кнуту) есть число порожденных вершин поискового дерева решений стандартным (классическим) алгоритмом метода ветвей и границ. Под примитивным стандартным алгоритмом (APS) будем понимать классический алгоритм, в котором реализован примитивный выбор ребра ветвления путем поиска первого нулевого элемента проходом по строкам в текущей приведенной матрице. Введем обозначение $C_x(A)$ для сложности индивидуальной задачи, заданной матрицей A. Значение $C_x(A)$ определяется экспериментально путем прогонки алгоритма APS для данной индивидуальной задачи.

Представляет интерес построение такого обобщения для индивидуальных задач, которое объединило бы задачи с близкой сложностью. Известный метод классов входных данных, предназначенный для анализа трудоемкости алгоритмов, предполагает построение классов эквивалентности по трудоемкости на множестве входов фиксированной длины. В докладе рассматривается его применение к несимметричной задаче коммивояжера. Полученное авторами с использованием этого метода обобщенное представление класса индивидуальных задач коммивояжера получило название матрицы номеров порядка. Построение матрицы номеров порядка включает в себя следующие четыре этапа:

1. Построение мультимножества $\widetilde{B}$ по исходной матрице A.

Матрица A размерности $n\times n$ разворачивается построчно (с возможными повторениями) в мультимножество $\widetilde{B}$:

$$\widetilde{B}=\left\{ \widetilde{b}_k \,\middle|\, \widetilde{b}_k=a_{ij}, \forall i=\overline{1,n}, \forall j=\overline{1,n} \quad k=(i-1)*n+j \right\}.$$

2. Построение множества B по мультимножеству $\widetilde{B}$.

Полученное мультимножество $\widetilde{B}$ преобразуется в обычное (без повторений) множество B с индексацией элементов, начиная с нуля (множество B содержит $m+1$ несовпадающих элементов). По определению обычного множества все элементы во множестве B различны

$$B=\left\{ b_k \,\middle|\, k=\overline{0,m}, 1<m\leq n^2-n+1 \right\}.$$

3. Построение сортированного кортежа B_s из элементов множества B.

Рассмотрим $m+1$ декартову степень множества B — B^{m+1}, элементы которой есть упорядоченные кортежи длины $m+1$. Среди них существует кортеж, содержащий упорядоченные по возрастанию элементы множества B, который мы обозначим через B_s.

$$\exists B_s\in B^{m+1}:\quad B_s=(b_0,b_1,\ldots,b_m): \forall k=\overline{0,m-1}\ b_k<b_{k+1}.$$

Поскольку все элементы исходной матрицы, за исключением диагональных, строго положительны, то по построению элемент b_0 кортежа B_s равен нулю.

4. Построение собственно матрицы номеров порядка $N=(n_{ij})$ для матрицы A.

Введем в рассмотрение функцию нумерации (нумератор):

$$f_N(a_{ij}, B_s) = k, \quad k : a_{ij} = b_k,\ k \in [0, m],\ b_k \in B_s.$$

Содержательно значение функции нумерации k есть номер элемента a_{ij} матрицы A в отсортированном без повторов массиве значений. На основе нумератора элементы матрицы номеров порядка определяются следующим образом

$$\forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, n} \quad n_{ij} = f_N(a_{ij}, B_s),\ n_{ii} = f_N(a_{ii}, B_s) = 0.$$

Объединим построение кортежа B_s и обобщение функции нумерации на всю матрицу A в функцию F_N, отображающую матрицу A в матрицу номеров порядка N: $F_N(A) = N$.

На основе матрицы номеров порядка авторы выдвигают следующую гипотезу об обобщении. Очевидно, что различные исходные матрицы A (индивидуальные задачи коммивояжера) могут порождать одинаковые матрицы номеров порядка. Собственно говоря, каждая матрица номеров порядка и есть обобщенное представление некоторого класса индивидуальных несимметричных задач коммивояжера. Задачу коммивояжера, заданную матрицей номеров порядка будем называть обобщенной задачей. Наша цель показать, что сложности обобщенной задачи и соответствующего класса индивидуальных задач близки.

Предложенная матрица номеров порядка обладает обобщающими свойствами в силу следующих рассуждений. Первый шаг примитивного классического алгоритма метода ветвей и границ — приведение матрицы стоимостей состоит в том, что из каждой строки вычитается минимальный элемент в строке, и затем эта процедура повторяется для столбцов, не имеющих нулевых элементов. Очевидно, что нулевые диагональные элементы не рассматриваются в этой процедуре. Именно полученные после приведения нулевые элементы — ребра с нулевым весом, рассматриваются далее как претенденты на ребро ветвления в методе ветвей и границ.

Описанная процедура приведения и метод построения матрицы номеров порядка гарантируют, что для всех задач данного обобщенного класса (заданного матрицей N) нули приведенной индивидуальной матрицы A и матрицы N совпадают. Следовательно, первое ребро ветвления, выбранное алгоритмом APS (в силу указанного принципа выбора ребра), будет одним и тем же для всех задач этого класса. На следующих шагах построения поискового дерева решений вполне вероятно выбор ребра ветвления будет совпадать для индивидуальных и обобщенной задачи. Возможные расхождения порождаются различиями в оценках вершин поискового дерева решений, и, следовательно, возможным изменением в порядке выбора вершин ветвления алгоритмом APS.

Собственно гипотеза состоит в том, что сложности индивидуальных задач в классе, описанным данной матрицей номеров порядка незначимо различаются друг от друга и лежат в достаточно узком диапазоне около сложности обобщенной задачи.

Формально, пусть множество A_N есть множество всех индивидуальных задач, имеющих матрицу номеров порядка N:

$$A_N = \{ A \mid F_N(A) = N \},$$

т.е. A_N есть прообраз $F_N^{-1}(N)$ во множестве D_n всех возможных индивидуальных задач размерности n. Сложность обобщенной задачи, есть $C_X(N)$, тогда собственно гипотеза состоит в том, что:

$$\forall A \in A_N \quad C_X(A) \in [C_X(N) - \varepsilon, C_X(N) + \varepsilon], \quad \varepsilon << C_X(N).$$

Предварительные расчеты показывают, что $C_X(N)$ и $C_X(A)$ различаются не более чем вдвое, а средняя сложность на A_N хорошо согласуется с $C_X(N)$. Для задач с «большими» деревьями эти значения существенно более близки, что, быть может, позволит идентифицировать на основе матриц номеров порядка плохие (по времени решения) индивидуальные задачи. При этом средняя сложность на A_N хорошо согласуется с $C_X(N)$. Авторы надеются в ходе дальнейших исследований подтвердить эту гипотезу на основе статистически значимых экспериментальных результатов.

E-mail: muljanov@mail.ru